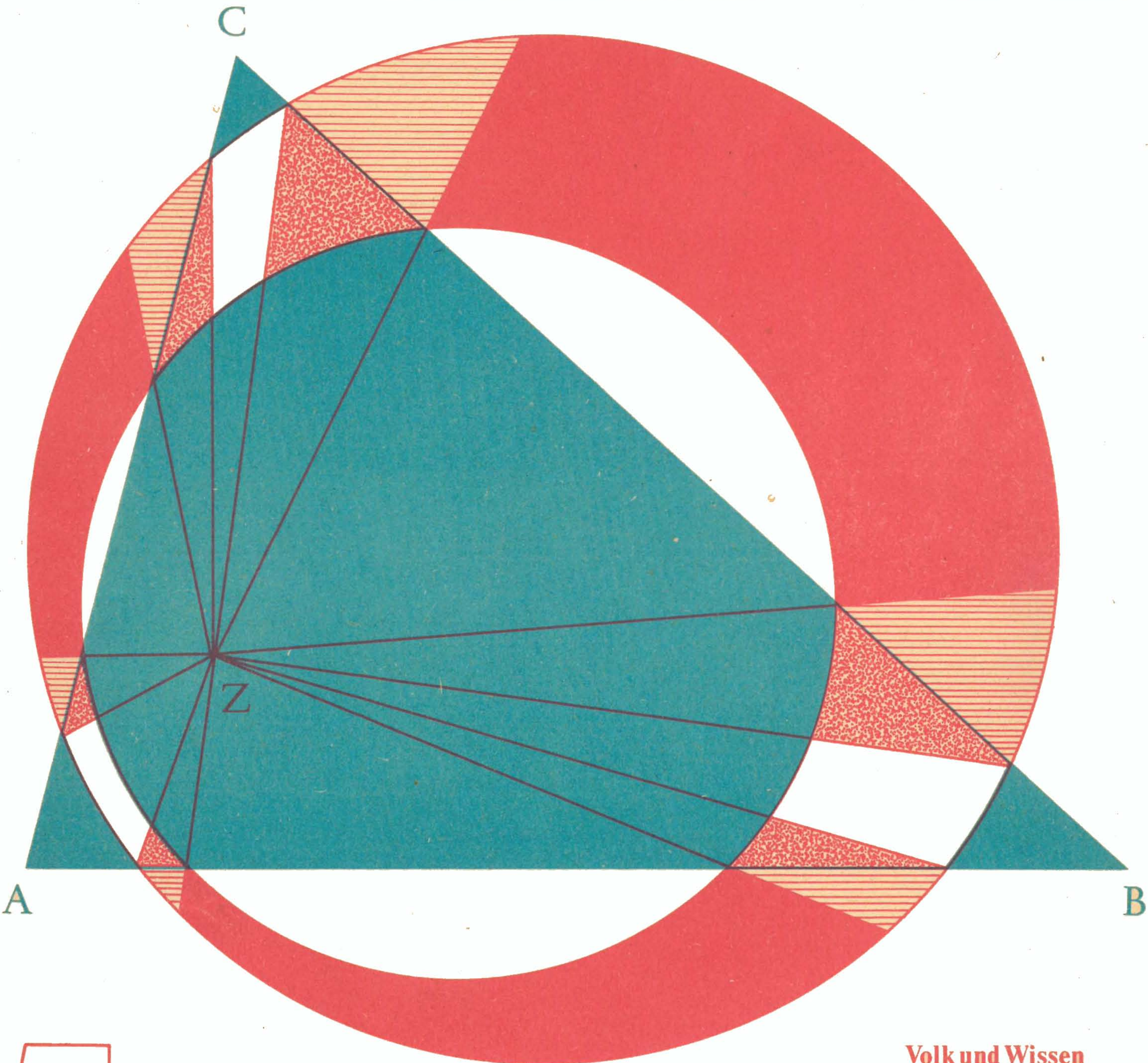
Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha




# 1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

*Redaktionskollegium:* Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)
Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16

*Fotos:* Kreisklub Mathematik des Landkreises Brandenburg (S. 3); Foto-Eilers Aken/Elbe (S. 10)
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig
Das Titelblatt wurde von W. Fahr, Berlin, nach einer Idee von Dr. L. Stammler gestaltet.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
*Redaktionsschluß:* 29. Oktober 1979

# alpha
## Mathematische Schülerzeitschrift

# Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Jacobi – der Euler des 19. Jahrhunderts

Im Winter 1827/28 fanden zunächst in der (1810 gegründeten) Berliner Universität (der heutigen Humboldt-Universität) und dann in der Singakademie (dem heutigen Maxim-Gorki-Theater) einundsechzig populärwissenschaftliche Vorlesungen statt. Ein weitgereister Mann, der „zweite, wissenschaftliche Entdecker Amerikas", der hervorragende Naturforscher und Humanist Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) erschloß seinen Hörern (häufig annähernd 1000 bei einem Vortrag, darunter Handwerker neben Professoren und Studenten, Berliner Männer und Frauen, Bürger und Offiziere, darunter der preußische General und deutsche Patriot Gneisenau, der Baumeister Schinkel, der Bildhauer Rauch, Fürsten, der König Friedrich Wilhelm III. und der Kronprinz) die Geheimnisse der Natur, machte diesem großen Kreis von Menschen einen umfangreichen Teil des Wissens der Zeit zugänglich.

Im September 1828 reisten vierhundert Wissenschaftler nach Berlin um an einem unter dem Vorsitz von Humboldt stattfindenden Kongreß der zwei Jahre zuvor gegründeten Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte teilzunehmen. „Der Hauptzweck dieser Gesellschaft", so betonte Humboldt in seiner Eröffnungsansprache, „ist die persönliche Annäherung derer, welche dasselbe Feld der Wissenschaften bearbeiten; die mündliche und darum mehr anregende Auswechslung von Ideen, sie mögen sich als Tatsachen, Meinungen oder Zweifel darstellen; die Gründung freundschaftlicher Verhältnisse, welche den Wissenschaften Licht, dem Leben heitere Anmut, den Sitten Duldsamkeit und Milde gewähren."

Zu den Gästen Humboldts gehörte der Direktor der Göttinger Sternwarte, der Mathematiker, Astronom, Physiker und Geodät Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855). („Ich zähle diese mir unvergeßlichen Tage zu den glücklichsten meines Lebens", schrieb am 12. 10. 1828 Gauß aus Göttingen an Humboldt.) Humboldt hatte von Gauß 1804 in Paris gehört. Gauß war damals bereits durch seine zahlentheoretischen Untersuchungen und durch seine neuen Methoden zur Bahnbestimmung, die (1801) die Wiederauffindung der Ceres, des zuerst entdeckten Planetoiden, ermöglicht hatten, „in aller Munde". (1801 erschien das Buch „Disquisitiones arithmetiquae" – Untersuchungen zur Zahlentheorie –. Mit diesem Meisterwerk begann eine neue Epoche der Zahlentheorie. Der 24jährige Forscher nahm „mit einem Schlage den Rang neben den größten Mathematikern aller Zeiten" ein.)

Auch den Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 bis 1859) hatte Humboldt zu dieser Versammlung eingeladen. Er hatte ihn im Sommer 1825 in Paris kennengelernt, als Dirichlet dort Vorlesungen hörte und sich mit dem Selbststudium der „Disquisitiones arithmetiquae" von Gauß befaßte. Dirichlet war der erste Mathematiker, der die Gaußschen Ideen aus diesem Buch weiter be- und verarbeitete. Seine ersten Arbeiten (1825 bis 1831) schlossen inhaltlich und methodisch daran an.

Kongresse, Tagungen, auf denen nur Mathematiker über ihre Probleme sprachen, über ihre Resultate vortrugen und durch persönliche Kontakte Anregungen gaben und empfingen, gab es damals noch nicht. (Mathematische Vorträge populärwissenschaftlicher Art, wie Humboldts einleitend erwähnte – später „Kosmos-Vorlesungen" genannt – Vorträge, gab es schon gar nicht.)

Eine Abteilung für Mathematik innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte wurde erst 1843 eingerichtet. Der erste offizielle internationale Mathematiker-Kongreß fand 1897 in Zürich statt. Der Nutzen solcher Kongresse in unserer Zeit ergibt sich aus der Notwendigkeit des persönlichen Verkehrs, des persönlichen Gedankenaustausches der Mathematiker untereinander.

Wer hätte damals, im September 1828, neben Gauß (aus Göttingen) und Dirichlet (aus Berlin) Teilnehmer eines Mathematikerkongresses sein können? (Die Mathematiker dieser Zeit standen oft untereinander in lebhafter Verbindung durch einen ausgedehnten Briefwechsel.)

An der École normale (Normalschule) in Paris lehrte Andrian Marie Legendre (1752 bis 1833). Die in seiner 1798 erschienenen „Zahlentheorie" dargestellten Ergebnisse wurden schon 1801 durch Gaußens „Disquisitiones" überholt. Seit 1786 veröffentlichte er viele Arbeiten über sogenannte elliptische Integrale. An der École polytechnique (Polytechnische Schule) in Paris wirkte der Akademiker und Professor Augustin Louis Cauchy (1789 bis 1857). Er arbeitete als einer der ersten in voller wissenschaftlicher Strenge und hat entscheidend dazu beigetragen, daß sich das exakte Verfahren in der Analysis durchsetzte.

In Paris forschten ferner Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768 bis 1830) und Siméon-Denis Poisson (1781 bis 1840) (an der École polytechnique).

Evariste Galois (1811 bis 1832) bemühte sich 1828 vergeblich, eine Zulassung für ein Studium an der „École polytechnique" in Paris zu erhalten. Der genial-begabte Schüler las einst ein Geometriebuch von Legendre in einem Zug, „wie andere Jungen eine Piratengeschichte". Jetzt war der Siebzehnjährige dabei, die Grundzüge seiner Theorie der algebraischen Gleichungen zu entwickeln. (Galois fiel im Duell im Alter von 20 Jahren. Sein schwer lesbares Werk wurde erst 1846 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht.)

Mit Beiträgen zur Theorie der Funktionen wäre der Philosoph und Mathematiker aus Südböhmen Bernardo Bolzano (1781 bis 1848) auf dem Kongreß aufgetreten.

1827 war das Hauptwerk des Geometers und Professors der Astronomie an der Universität Leipzig August Ferdinand Moebius (1790 bis 1868), „eine wahre Fundgrube neuer Ideen", erschienen.

Der Rektor der Universität in Kasan war der Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 bis 1858). Er hatte bereits im Februar 1826 in Kasan einen Vortrag über die Grundlagen der Geometrie (Nichteuklidische Geometrie) gehalten und hätte auf einem Mathematiker-Kongreß sicher auch dieses Thema gewählt.

Am Berliner Gewerbeinstitut war der Geometer Jacob Steiner (1796 bis 1863), seit 1834 dann Mitglied der Berliner Akademie, tätig.

Der Geometer Julius Plücker (1801 bis 1868) war (1828) Professor in Bonn.

Über die Grundzüge der „nichteuklidischen Geometrie" hätte neben Lobatschewski auch der ungarische Mathematiker János von Bolyai (1802 bis 1860) berichten können.

An der Universität in Christiana (dem heutigen Oslo) arbeitete Niels Henrik Abel (1802 bis 1829) intensiv an der Theorie der sog. elliptischen Funktionen.

Sein „Konkurrent" in der Entwicklung dieser Theorie war der Königsberger Mathematikprofessor Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 bis 1851). Er kündigte am 8. September 1828 ein fundamentales Werk über diese Theorie an und war in dieser Zeit konzentriert mit der Ausarbeitung desselben beschäftigt.

Es gibt in diesen Jahren eigenartige Duplizitäten von Ereignissen: Die klassische Frage nach der Auflösbarkeit von Gleichungen ist unabhängig voneinander von Abel und Galois beantwortet worden. Lobatschewski und Bolyai kamen unabhängig voneinander zur Einsicht, daß das Parallelenaxiom durch die übrigen Euklidischen Axiome der Geometrie nicht beweisbar ist, daß also eine nichteuklidische Geometrie möglich sei. Das Jahr 1828 war eine Epoche angestrengtester Konkurrenz von Abel und Jacobi um den Ausbau der Theorie der elliptischen Funktionen. (Legendre hatte sich viele Jahre mit elliptischen Integralen beschäftigt, jedoch nicht die Umkehrfunktionen, die elliptischen Funktionen nämlich, untersucht.) Über diese drei Probleme hatte überdies Gauß viel früher nachgedacht, doch seine grundlegenden Resultate darüber nicht publiziert.

Wo hätte 1828 ein Mathematikerkongreß stattfinden können? In Paris, in Königsberg (dem heutigen Kaliningrad), in Göttingen, ... ? Dynk der Wirksamkeit Humboldts, seiner Förderung zahlreicher deutscher Mathematiker, wäre auch Berlin als Tagungsort in Frage gekommen.

Humboldt hatte sich (jedoch vergeblich) bemüht, Gauß nach Berlin zu holen; er konnte die Berufung Dirichlets nach Breslau (dem heutigen Wroclaw) in die Wege leiten und ihn 1828 nach Berlin holen. Humboldt wurde von Gauß (in einem Brief vom 27. Januar 1827) auf das Talent Jacobis hingewiesen und brachte diesen dann auf den Posten, auf dem er seine Fähigkeiten frei entfalten konnte. Auf Humboldts Initiative geht der (nicht verwirklichte) Plan zurück, in Berlin ein Polytechnisches Institut einzurichten, an das Abel und erst Plücker, dann aber Steiner berufen werden sollten.

Das Niveau mathematischer Ausbildung war an der Berliner Universität in den ersten Jahren nach ihrer Gründung außerordentlich niedrig. So betonte Jacobi später, daß er (von April 1821 bis Mai 1825) während seiner „Studentenzeit in Berlin wissenschaftlicher Anleitung ganz entbehren mußte". Die Vorlesungen hatten einen zu elementaren Charakter. Jacobi eignete sich im Selbststudium die Werke von Leonhard Euler (1707 bis 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813) und Pierre Simon Laplace (1749 bis 1827) an. (Auf Grund einer hervorragenden wissenschaftlichen Arbeit wurde ihm bereits in seinem 21. Lebensjahr der Doktortitel verliehen.)

Insbesondere dank der Bemühungen Humboldts wurde Berlin bald ein mathematisches Zentrum. Bestand im 18. Jahrhundert noch ein großer Unterschied zwischen den bahnbrechenden Leistungen der Forscher (in Berlin: Gottfried Wilhelm Leibniz [1646 bis 1716], Euler, Johann Heinrich Lambert [1728 bis 1777] und Lagrange) und dem niedrigen Niveau der mathematischen Lehre, so setzte um 1825 ein Wandel ein. Im Herbst 1825 hielt Jacobi an der Berliner Universität seine erste Vorlesung. Dirichlet berichtete darüber:

„Nach dem Zeugnis einer seiner damaligen Zuhörer muß sein Lehrtalent bei diesem ersten Auftreten schon sehr entwickelt gewesen sein, und er es verstanden haben, sein Thema mit großer Klarheit und auf eine seine Zuhörer sehr anregende Weise zu behandeln." Der Mathematiker Ernst Eduard Kummer (1810 bis 1893), seit 1855 Professor und Akademiker in Berlin, betonte, daß Jacobis erste Vorlesung „als Anfang der allgemeinen Neugestaltung des mathematischen Universitätsunterrichts angesehen werden" kann.

Von 1826 an wirkte Jacobi 18 Jahre an der Universität in Königsberg. Hier wurde er der mitreißendste Vortragende seiner Zeit. „In seinen Vorlesungen, so wie im engeren wissenschaftlicheren Verkehr mit den Studierenden, wußte er auf ihre Bildungsstufe vollständig einzugehen, und indem er die alt hergebrachten pedantischen Methoden des Unterrichts gründlich verschmähte, verstand er es, auf dem Wege der einfachsten und klarsten Gedankenentwicklung ... seine Hörer mit sich fortzureißen und bis in die Tiefen der mathematischen Wissenschaften zu führen" (Kummer).

Von 1844 an (bis zu seinem Tode) arbeitete dann Jacobi als Akademiemitglied in Berlin, wo er an der Universität auch Vorlesungen hielt. Schon seit 1828 entfaltete Dirichlet (seit 1832 als Mitglied der Berliner Akademie), über 30 Jahre mit Humboldt eng befreundet, ein reges mathematisches Leben in Berlin. Auch in seinen Vorlesungen wurden die Studenten mit den neuesten Forschungsergebnissen bekanntgemacht. Seine Denkweise war, „mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen". Er legte großen Wert auf völlige Strenge. In einem Brief vom 21. 12. 1846 an Humboldt schrieb Jacobi über Dirichlet: „Er allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß weiß, was ein vollkommen strenger Beweis ist, sondern wir kennen es erst von ihm. Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist es ebensoviel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß, ich lasse mich auf diese Delikatessen lieber gar nicht ein."

## G. G. J. Jacobi – Lebensdaten

| | |
|---|---|
| 1804 | 10. Dezember: Geburt in Potsdam. Zweiter Sohn des Bankiers Simon Jacobi (1772 bis 1832), Vorstandsmitglied der Jüdischen Gemeinde in Potsdam, und dessen Frau, geb. Kachel (1774 bis 1848). |
| 1816 | November (bis April 1821): Besuch des Victoria-Gymnasiums in Potsdam. |
| 1821 | April (bis Mai 1825): Studium der Philosophie, klassischen Altertumswissenschaften und Mathematik an der Universität in Berlin. |
| 1825 | August: Promotion und Habilitation an der Universität Berlin. |
| 1825/26 | (Wintersemester): Erste Vorlesungen Jacobis an der Universität in Berlin. |
| 1826 | Mai (bis September 1844): In Königsberg (zunächst Privatdozent, dann 1827 außerordentlicher Professor, 1829 ordentlicher Professor an der dortigen Universität). |
| 1829 | August (bis Oktober): Reise nach Paris. Persönliche Bekanntschaft mit Legendre. |
| 1831 | 11. September: Hochzeit Jacobis; seine Frau Marie, geb. Schwinck (1809 bis 1901) ist die Tochter des Großkaufmanns Schwinck in Königsberg. Fünf Söhne, drei Töchter. |
| 1839 | März (bis September): Reise nach Potsdam und Berlin. Besuch bei A. v. Humboldt. Umgang mit Steiner, Dirichlet. Reise nach Marienbad (Kur), Prag, Wien, München, Heidelberg, Göttingen (Besuch bei Gauß). |
| 1842 | Juni (bis September): Reise nach Manchester und London sowie nach Paris. |
| 1843 | Schwere Erkrankung Jacobis (Zuckerkrankheit). |
| 1843 | Mai: Dirichlet besucht Jacobi in Königsberg. |
| 1843 | 9. Juli: Abreise über Berlin, Gotha, Baden-Baden, Freiburg nach Italien. Italienaufenthalt zeitweise zusammen mit Steiner und Dirichlet. |
| 1843 | 16. November: Jacobi trifft in Rom ein. |
| 1843 | 28. Dezember: Der Papst Gregor XVI. empfängt Jacobi und Dirichlet in besonderer Audienz. |
| 1844 | Ende April: Drei Wochen Aufenthalt in Neapel. |
| 1844 | Mai: Abreise aus Rom über Genf, Basel, Straßburg, Frankfurt/Main nach Berlin. |
| 1844 | September: Letzter Aufenthalt in Königsberg. |
| 1844 | Ende September: Übersiedlung nach Berlin. (Ordentliches Mitglied der Berliner Akademie, seit 1829 bereits korrespondierendes Mitglied, seit 1836 auswärtiges Mitglied dieser Akademie.) |
| 1848/49 | Fortschrittliche politische Betätigung nach der Berliner Märzrevolution. |
| 1849 | 16. Juli: Jacobi und Dirichlet bei Gauß in Göttingen. |
| 1849 | August: Beginn finanzieller Repressalien (Entzug der Berlin-Zulage von 1 000 Talern) wegen der politischen Betätigung. |
| 1849 | Ende September: Übersiedlung seiner Frau und Kinder (3 Jungen von 17, 12, 11 Jahren, 3 Mädchen von 9, 7, 4 Jahren, ein Junge von 2 Jahren) nach Gotha. Jacobi geht in einem Gasthof (zu Berlin) in Pension. |
| 1849 | November: Die österreichische Regierung beabsichtigt, Jacobi nach Prag oder Wien zu berufen. |
| 1850 | Februar: Jacobi nimmt den Ruf nach Wien an. |
| 1850 | 5. März: Durch Kabinettsorder werden alle finanziellen Forderungen erfüllt, die entzogene Zulage um 333 Taler erhöht und die 1 333 Taler vom 1. Oktober 1849 rückwirkend bewilligt. Jacobi bleibt in Berlin. |
| 1851 | 11. Februar: Erkrankung an Pocken. |
| 1851 | 18. Februar: Tod Jacobis in Berlin. |

Nach den glänzenden Zeiten der Berliner Wirksamkeit von Euler, Lambert und Lagrange im 18. Jahrhundert, verhalf Dirichlet zusammen mit Steiner (seit 1834 Mitglied der Berliner Akademie) und Jacobi der Berliner Mathematik zu neuem Ruhm. Die erste persönliche Bekanntschaft zwischen Dirichlet und Jacobi wurde im Sommer 1829 angeknüpft. Kurze Zeit vorher war in Königsberg das Buch „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ (Neue Grundlage der Theorie der elliptischen Funktionen) erschienen. Dieses grundlegende Werk reihte sich Gaußens „Disquisitiones arithmetiquae“ würdig an und ließ aller Augen auf den Verfasser richten. Der (wie einst Gauß 1801) 24jährige Forscher, Carl Gustav Jacob Jacobi, stand von diesem Zeitpunkt an, unbestritten nächst Gauß, als der erste deutsche Mathematiker da. Legendre, der sich selbst seit 1786 mit der hier behandelten Thematik beschäftigt hatte, bewunderte und lobte Jacobis Meisterwerk. Im März 1829 wurde Jacobi ordentlicher Professor für das Fach Mathematik an der Universität Königsberg. In seinen Vorlesungen wurde nicht Fertiges, Überliefertes von neuem überliefert, „seine Vorlesungen bewegten sich sämtlich außerhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfaßten nur diejenigen Teile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hieß bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechslung“ (Dirichlet).
Vom Stil, der mathematischen Denkweise und der Problematik seiner Forschungsarbeiten her, war der große Theoretiker Jacobi geistig eng verwandt mit Euler. Der Mathematikhistoriker E. T. Bell schreibt: „Euler, der Meister genialer Kunstgriffe, fand in Jacobi einen glänzenden Nachfolger. In der Fähigkeit zur Durchführung komplizierter Rechenoperationen sind Euler und Jacobi unübertroffen geblieben.“
Seine Schüler nannten Jacobi den „Euler des 19. Jahrhunderts“. Der Mathematikhistoriker und A.-v.-Humboldt-Forscher, K.-R. Biermann, vergleicht: „Umfassende Vielseitigkeit, fast unglaubliche Fruchtbarkeit, phänomenales Gedächtnis, eingehende Literaturkenntnis – das alles finden wir bei Euler wie bei Jacobi, aber auch die bisweilen mangelnde Strenge ist ihnen gemeinsam.“
Jacobi gilt als einer der fleißigsten, arbeitswütigsten Mathematiker der Geschichte. Es seien seine tiefliegenden Untersuchungen über elliptische Funktionen, seine fundamentalen Beiträge zur Zahlentheorie, seine Untersuchungen zu den Prinzipien der analytischen Mechanik (Theorie der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung), seine Arbeiten zur Determinantentheorie, seine mathematik-historischen Forschungen genannt. (Das „Mathematische Wörterbuch“ enthält über 45 Stichwörter, die mit Jacobis Namen verbunden sind.)
Jacobi gründete 1834 das erste Seminar auf mathematischem Gebiet. Hier sollten Studenten zu eigener Arbeit angeleitet, ihre Selbsttätigkeit gefördert und sie in nähere und fruchtbarere wissenschaftliche Berührung mit ihren Lehrern (als es durch das bloße Anhören der Vorlesungen geschehen kann) gebracht werden. Der Jacobi-Biograph Leo Koenigsberger berichtete später (1904) über die Art, wie Jacobi das Seminar leitete: „Jacobi leitete die Arbeiten damit ein, daß er in kurzen Vorträgen an einen den Mitgliedern geläufigen Zusammenhang anknüpfte und von da zu einer besonderen Aufgabe hinleitete, mit deren Lösung sich die Mitglieder die Woche über zu beschäftigen hatten; ihre Arbeiten wurden im Laufe der Woche dem Dirigenten abgegeben und am nächsten Sonnabend von demselben beurteilt, worauf zu einer neuen Arbeit übergegangen wurde.“
Den Einfluß Jacobis auf seine Studenten und Schüler beschrieb F. Klein in seinen „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ (1926) so: „Die widerstrebendsten Naturen zwang er in seine Denkweise hinein, jeden riß er zur Höhe speziell mathematischen Ehrgeizes, zum brennenden Interesse an der von ihm gegebenen Problemstellung des Tages mit fort. Nicht nur fremde Fähigkeiten anregend und weckend wie etwa Gauß oder Dirichlet, sondern jeden in den Bann seines augenblicklichen Gedankenganges hineinzwingend, war Jacobi der ausersehene Mann dazu, eine umfangreiche, auf lange hinaus blühende Schule zu begründen.“
Das abgelegene Königsberg wurde zum Mittelpunkt einer Schule, deren zahlreiche Schüler nach ihrer „Lehre“ bei ihrem „Meister“ Jacobi als hervorragende Mathematiker und Hochschullehrer an vielen deutschen Universitäten wirksam wurden. Diese sog. „Königsberger Schule“ ist (nach F. Klein) „die erste derartige Erscheinung in Deutschland, welche dauernde Bedeutung gewonnen hat“. Auch über die Grenzen Deutschlands hinaus (in Frankreich und England) ist Jacobis Einfluß, der Geist seiner Forschung und Lehre, von großer Wirksamkeit gewesen.
Die drei wohl größten deutschen Mathematiker der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts weilten am 16. Juli 1849 in Göttingen. C. G. J. Jacobi und J. P. G. Lejeune Dirichlet besuchten C. F. Gauß am 50. Jahrestag der Verleihung seiner Doktorwürde.

*H. Pieper*

# Eine Aufgabe von Prof. Dr. Tamás Varga

*Nationales Pädagogisches Institut Budapest*

▲1936▲ Wir nennen jede natürliche Zahl $n \geq 1$, die sich als Summe von wenigstens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen läßt, eine „Treppenzahl“. (Beispielsweise ist 9 eine Treppenzahl mit zwei verschiedenen „Treppen“:

$$9=2+3+4 \text{ und } 9=4+5)$$

Aufgabe: a) Welche natürliche Zahlen sind Treppenzahlen?
b) Bestimme die Anzahl verschiedener Treppen für eine gegebene Treppenzahl!


Fotos aus dem Kreisklub Mathematik des Landkreises Brandenburg, siehe Seite 10.

# Sonderbare Geometrie

Könnt ihr euch eine Gerade vorstellen, die nur aus drei Punkten besteht, wobei jeder dieser Punkte Mittelpunkt der durch die beiden anderen Punkte bestimmten Strecke ist? Nun, wir wollen versuchen, eine solche sonderbare Geometrie durch eine Vorgehensweise aufzubauen, welche von einem Mathematiker vollkommen akzeptiert werden würde.

Im Mathematikunterricht wird gezeigt, daß das Bild einer linearen Funktion $f$ mit $f(x)=mx+n$ bzw. das Bild einer Gleichung $Ax+By+C=0 (A^2+B^2>0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem eine Gerade ist, wobei man davon ausgeht, daß man genau weiß, was man unter einer Geraden zu verstehen hat. Doch gerade diese Annahme ist durchaus nicht selbstverständlich. Ihr könntet ja einmal versuchen, eine exakte Definition des Begriffes „Gerade" aufzuschreiben.

Es ist in der Mathematik deshalb häufig zweckmäßig, den umgekehrten Weg zu gehen: Die Menge der Punkte, welche einer Gleichung $y=mx+n$ genügen, nennt man Gerade. Punkte sind dabei bekanntlich geordnete Paare bzw. geordnete Tripel reeller Zahlen, je nachdem, ob man Geometrie in einer Ebene oder im Raum betreibt. Entsprechend heißt die Menge der Punkte $(x;y)$, welche einer Gleichung $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ genügt, Kreis mit dem Mittelpunkt $(c,d)$ und dem Radius $r$. Macht euch dies an Beispielen klar! Überlegt euch außerdem, wie man zweckmäßigerweise definieren müßte, unter welchen Bedingungen zwei Geraden $A_1x+B_1y+C_1=0$ und $A_2x+B_2y+C_2=0$ zueinander parallel bzw. zueinander orthogonal sein sollen! Überprüft schließlich noch, daß es gerechtfertigt ist, $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ als den Mittelpunkt und $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ als die Länge der durch die Punkte $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ festgelegten Strecke zu bezeichnen!

Geht man diesen Weg, geometrische Begriffe durch geeignete Gleichungen zu definieren, so kann man nachweisen: Die Eigenschaften bekannter geometrischer Objekte stehen nicht im Widerspruch zu unseren anschaulichen Vorstellungen. So werden z. B. in der Ebene zwei nichtparallele Geraden stets genau einen Punkt gemeinsam haben.

Untersuchen wir nun einmal die Frage, welche Folgerungen eintreten würden, wenn man Punkte einer Ebene mit geordneten Paaren ganzer Zahlen identifizieren würde. Der Kreis $k$, der durch $x^2+y^2=25$ beschrieben wird, bestünde dann nur aus den 12 Punkten $(0;5)$, $(0;-5)$, $(5;0)$, $(-5;0)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(-3;4)$, $(-4;3)$, $(3;-4)$, $(4;-3)$, $(-3;-4)$, und $(-4;-3)$, er wäre dann eine endliche Punktmenge. Problematisch ist jedoch besonders die Tatsache, daß bei der Berechnung von Eigenschaften geometrischer Figuren Schwierigkeiten auftreten würden. Wollte man z. B. den Schnittpunkt $(x_1;y_1)$ der beiden nichtparallelen Geraden $g_1: y=x+1$ und $g_2: y=3x-4$ berechnen, so erhielt man nach Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten

$2x_1-5=0$ bzw. $x_1=\frac{5}{2}$ und $y_1=\frac{7}{2}$.

Da $x_1$ und $y_1$ nicht ganzzahlig sind, ist $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ kein Punkt unserer Ebene. Die beiden nichtparallelen Geraden hätten folglich keinen Punkt gemeinsam.

Durchdenkt man das Beispiel genauer, so erkennt man: Die aufgetretene Schwierigkeit entsteht dadurch, daß im Bereich der ganzen Zahlen nicht jede Gleichung der Form $a\cdot x=b$ (mit $a=0$) durch eine ganze Zahl lösbar ist. Die Menge der ganzen Zahlen besitzt – betrachtet man sie bezüglich der Addition und der Multiplikation – schwächere Eigenschaften als die Menge der reellen Zahlen.

Es ist sowohl die Addition reeller Zahlen als auch die Multiplikation der von Null verschiedenen reellen Zahlen eine kommutative, assoziative und umkehrbare Operation, dabei ist die Multiplikation mit der Addition distributiv verbunden. Man sagt: Die Menge der reellen Zahlen bildet bezüglich dieser beiden Operationen einen Körper. Für die Menge der ganzen Zahlen trifft dies jedoch bezüglich der entsprechenden Operationen aus den oben genannten Gründen nicht zu.

Wir müssen also versuchen, einen Körper zu konstruieren, den wir als Basis für unsere Geometrie nutzen können. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Man teilt die Menge aller ganzen Zahlen in drei Klassen $[0]_3$, $[1]_3$, $[2]_3$ ein. In $[0]_3$ bzw. $[1]_3$ bzw. $[2]_3$ faßt man diejenigen ganzen Zahlen zusammen, die durch 3 geteilt, den Rest 0, den Rest 1 bzw. den Rest 2 ergeben. Da jede dieser Klassen durch eine in ihr liegende Zahl charakterisiert werden kann, ist die Bezeichnung dieser Klassen mit $[0]_3$; $[1]_3$ bzw. $[2]_3$ im folgenden auch kurz mit 0, 1 bzw. 2 gerechtfertigt. In der Menge $G_3=\{[0]_3;[1]_3;[2]_3\}$ wird durch $[a]_3\cdot[b]_3=[a\cdot b]_3$ bzw. $[a]_3+[b]_3=[a+b]_3$ eine Multiplikation bzw. eine Addition eingeführt.

Man beachte, daß die Addition (bzw. Multiplikation) von Restklassen mit Hilfe der Addition (bzw. Multiplikation) ganzer Zahlen definiert wird. Es übertragen sich deshalb die bekannten Eigenschaften der Addition und der Multiplikation ganzer Zahlen auf das Rechnen mit Restklassen. Wir wollen noch bemerken, daß das Berechnen der Differenz $[a]_3-[b]_3=[x]_3$ der Ermittlung des Summanden $[x]_3$ in $[a]_3=[x]_3+[b]_3$ entspricht, so daß mit Hilfe der Addition von Restklassen eine Subtraktion von Restklassen und analog mit Hilfe der Multiplikation von Restklassen eine Division von Restklassen festgelegt werden kann.

Die folgenden Tafeln geben alle Möglichkeiten der additiven bzw. multiplikativen Verknüpfungen der Elemente von $G_3$, der Menge der Restklassen modulo 3 an. Wir nutzen nun die vereinbarte Kurzschreibweise und schreiben z. B. 1 statt $[1]_3$.

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

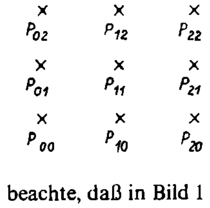
| · | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

Die Menge $G_3$ bildet bezüglich der in ihr erklärten Verknüpfungen tatsächlich einen Körper (Begründung?).

Entsprechend unserem Prinzip, die Punkte einer Ebene mit geordneten Paaren zu identifizieren, bezeichnen wir die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus $G_3$ als eine Ebene, die wir mit $G_3{}^2$ bezeichnen; die geordneten Paare selbst heißen Punkte dieser Ebene.

Die so konstruierte Ebene besteht aus neun Punkten. Bettet man sie in eine Ebene $\varepsilon$ unserer Anschauung ein, indem man jedem von neun ausgewählten Punkten $P_{ij}$ von $\varepsilon$ genau eines der neun Paare $(i;j)\in G_3{}^2$ zuordnet, so kann man diese Ebene wie folgt veranschaulichen:

Bild 1




Man beachte, daß in Bild 1 nur die neun eingezeichneten Punkte zu unserer Ebene $G_3{}^2$ gehören, nicht jedoch die „Zwischenräume".

Es wäre durchaus möglich gewesen, sowohl den anschaulichen Abstand zwischen den Punkten als auch deren Anordnung anders zu wählen.

Sucht euch noch andere Anordnungen aus!

Beschäftigen wir uns zunächst mit den Geraden der Ebene $G_3{}^2$. Nach Definition ist jede Gerade eine Menge von Punkten, welche einer Gleichung der Form $Ax+By+C=0$ genügen.

In unserer Geometrie sind dabei $A$, $B$ und $C$ irgendwelche Restklassen der oben genannten Art, wobei wieder der Fall $B=A=0$ ausgeschlossen werden soll.

Zunächst kann man sich leicht überlegen, daß jede Gerade genau drei Punkte enthält, denn setzt man für $x$ die drei Restklassen ein, so sind die zugehörigen Werte für $y$ eindeutig bestimmt. Die Gerade $g: x+y+2=0$ enthält z. B. die drei Punkte (0;1), (1;0), (2;2). Daß diese drei Punkte anschaulich nicht auf einer Geraden liegen (siehe Bild 1), verwundert uns schon nicht mehr. Bei der Veranschaulichung der Ebene $G_3{}^2$ lag der Anordnung der Punkte $P_{ij}$ ohnehin eine gewisse Willkür zugrunde.

Erstaunlicherweise ist in unserer Geometrie jedoch jeder Punkt unserer Geraden Mittelpunkt der beiden anderen Punkte, wie man sofort nachrechnet.

Dieser Sachverhalt gilt für jede beliebige Gerade unserer Ebene $G_3{}^2$. Sind nämlich $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ zwei Punkte, die auf der durch $Ax+By+C=0$ definierten Geraden liegen, so liegt auch der Punkt $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ auf dieser Geraden. Aus $Ax_1+By_1+C=0$ und $Ax_2+By_2+C=0$ folgt nämlich durch Addition $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+B\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+C=0$.

Im Zusammenhang mit der Tatsache, daß jede Gerade aus genau drei Punkten besteht, folgt dann unsere Behauptung.

Wir wählen nun einen Punkt, etwa $(0;0)\in G_3{}^2$, aus und untersuchen, wie viele Geraden diesen Punkt enthalten. Jede dieser Geraden wird durch eine Gleichung $Ax+By=0$ beschrieben. Wir stellen alle derartigen Gleichungen und die zur jeweiligen Geraden gehörenden Punkte in einer Tabelle zusammen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | $0x+\ y=0$ | (0;0) | (1;0) | (2;0) |
| $g_2$ | $x+\ y=0$ [1]) | (0;0) | (1;2) | (2;1) |
| $g_3$ | $x+2y=0$ | (0;0) | (1;1) | (2;2) |
| $g_4$ | $x+0y=0$ | (0;0) | (0;1) | (0;2) |

Es existieren in $G_3{}^2$ also 4 Geraden, die den Punkt (0;0) enthalten. Eine entsprechende Aussage gilt für jeden der neun Punkte, so daß, da jede Gerade 3 Punkte enthält, in $G_3{}^2$ zwölf voneinander verschiedene Geraden existieren.

Unter den 4 Geraden, welche durch einen Punkt gehen, sind keine zueinander parallelen Geraden. Es gilt nämlich für je zwei der oben genannten Geradengleichungen stets $A_1B_2 \neq A_2B_1$. Damit existieren in unserer Ebene vier Richtungen.

Jede Gerade legt eine Richtung fest; parallelen Geraden wird die gleiche Richtung zugeordnet. Es ist nicht ganz einfach, sich diesen Sachverhalt an einem anschaulichen Modell (siehe Bild 1) zu verdeutlichen.

Die beiden Geraden $g_2$ und $g_3$ sind wegen $-(1\cdot 1)=1\cdot 2$ zueinander orthogonal. Entsprechendes gilt für die Geraden $g_1$ und $g_4$.

Da auch in $G_3{}^2$ die drei Punkte (0;0), (1;0) und (0;1) nicht auf einer Geraden liegen, bilden sie ein Dreieck. Der Mittelpunkt der durch (1;0) und (0;1) bestimmten Dreieckseite ist der dritte auf der durch diese beiden Punkte bestimmten Geraden liegende Punkt (2;2). Also liegt die zugehörige Seitenhalbierende auf $g_3$. Die Mittelpunkte der beiden anderen Dreieckseiten sind (2;0) bzw. (0;2). Die Seitenhalbierenden liegen auf Geraden mit den Gleichungen $y=x+2$ und $y=x+1$, sie sind zueinander parallel.

Da die drei Seitenhalbierenden keinen Punkt gemeinsam haben, gilt der Satz aus der Dreieckslehre im $R^2$, daß sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, in der Ebene $G_3{}^2$ nicht. Der Winkel beim Eckpunkt (0;0) des untersuchten Dreiecks ist ein rechter; für die beiden anderen Innenwinkel trifft dies nicht zu.

Überprüft, ob sich die Höhen des gegebenen Dreiecks in einem Punkte schneiden! Versucht, euch den Sachverhalt in Bild 1 zu verdeutlichen!

Wir wollen schließlich noch untersuchen, welche Eigenschaften ein Kreis $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ in der Ebene $G_3{}^2$ besitzt:

Betrachten wir für den Mittelpunkt (0;0) die beiden möglichen Fälle $r=1$ und $r=2$.

Der Kreis mit dem Radius 1 besteht aus den Punkten (0;1), (0;2), (1;0) und (2;0), der Kreis mit $r=2$ besteht aus den Punkten (1;1), (2;2), (1;2) und (2;1). Beide Kreise sind konzentrisch (siehe Bild 2). Mit Hilfe des Abstandsbegriffes kann man nämlich zeigen, daß in jedem der beiden Fälle die Punkte des Kreises von (0;0) den gleichen Abstand besitzen.[2])

Man kann sich an Hand der Kreisgleichung $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ überlegen, daß jeder Kreis in $G_3{}^2$ aus genau vier Punkten besteht. Man braucht nämlich nur die beiden Fälle $r^2=1$ und $r^2=2$ zu untersuchen.

Bei der Definition der Ebene $G_3{}^2$ hatten wir den Körper der Restklassen modulo 3 zugrundegelegt. Erstaunlicherweise führte dies zu Ergebnissen, die – bis auf wenige Ausnahmen – mit den uns bereits bekannten Eigenschaften geometrischer Figuren übereinstimmen. Da unsere Ebene nur aus neun Punkten besteht, muß natürlich auch die Zahl der Geraden, Dreiecke, Kreise ... endlich sein und jede dieser geometrischen Figuren kann nur aus endlich vielen Punkten bestehen.

Bild 2

| | | |
|---|---|---|
| o | o | o |
| (0,2) | (1,2) | (2,2) |
| o | o | o |
| (0,1) | 1,1 | (2,1) |
| × | o | o |
| (0,0) | (1,0) | (2,0) |

Warum die ermittelten Ergebnisse häufig im Widerspruch zur Anschauung standen, ist uns inzwischen bewußt geworden. Die etwas erstaunliche Tatsache, daß auf einer Geraden der Ebene $G_3{}^2$ jeder Punkt Mittelpunkt der beiden anderen Punkte der Geraden ist, hat ihre Ursache darin, daß der Körper $G_3$ im Gegensatz zum Körper der reellen Zahlen nicht geordnet ist. Man kann nämlich in $G_3$ nicht geeignet festlegen, wann eine Restklasse größer als eine andere ist; beim fortlaufenden Addieren der Restklasse 1 durchläuft man zyklisch immer wieder alle Restklassen.

Der Versuch, mit Hilfe der Restklassen modulo 4 eine Geometrie einer Ebene aufzubauen, würde fehlschlagen, da die Menge $G_4$ bezüglich der Restklassenaddition und bezüglich der Restklassenmultiplikation keinen Körper bildet. Es ist z. B. die Gleichung $[2]_4\cdot[x]_4=[3]_4$ durch keine Restklasse modulo 4 lösbar, d. h. die Multiplikation der von $[0]_4$ verschiedenen Restklassen ist keine umkehrbare Operation.

Man muß sich beim Aufbau endlicher Geometrien auf Restklassen modulo $p$, wobei $p$ eine Primzahl ist, beschränken. Also könnte man auch Ebenen $G_2{}^2$ oder $G_5{}^2$ oder $G_{11}{}^2$ untersuchen, die aus 4 bzw. 25 bzw. 121 Punkten, nämlich allen geordneten Paaren von Restklassen modulo 2 bzw. modulo 5 bzw. modulo 11 bestehen. Wer Lust hat, kann ja einmal Geraden, Dreiecke, Kreise ... in einer solchen Geometrie untersuchen.

Es ist außerdem interessant und auch nicht allzu schwierig, die folgenden vier scheinbar selbstverständlichen Aussagen in einer Ebene $G_p{}^2$ zu beweisen. Man muß dabei die Körpereigenschaften von $G_p$ nutzen, wenn man „mit Geradengleichungen rechnet".

1. In jeder Ebene $G_p^2$ existieren drei Punkte, die nicht sämtlich auf ein und derselben Geraden liegen.
2. Der Durchschnitt zweier voneinander verschiedener Geraden ist entweder leer oder besteht aus genau einem Punkt.

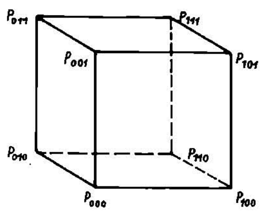
[1]) Man beachte, daß die Gleichungen $2x+y=0$ und $x+2y=0$ nicht voneinander verschieden sind. Die eine geht aus der anderen durch Multiplikation mit der Restklasse 2 hervor.

[2]) Im zweiten Fall ist der Abstand $\sqrt{2}$. Es sei bemerkt, daß der Abstand zweier Punkte auch in $G_3{}^2$ eine beliebige nichtnegative reelle Zahl sein kann.

3. Zu zwei Punkten $P$ und $Q$ mit $P \neq Q$ existiert genau eine Gerade $g$ mit $P \in g$ und $Q \in g$.
4. Zu jeder Geraden $g$ und zu jedem Punkt $P \notin g$ existiert genau eine Gerade $h$ mit $P \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. ($\emptyset$ ist die leere Menge)

Zum Schluß wollen wir noch einen dreidimensionalen Raum konstruieren, dem der Körper $G_2$ zugrundeliegt. Wir bezeichnen diesen Raum, der aus der Menge aller geordneter Tripel von Restklassen modulo 2, den Punkten dieses Raumes, besteht, mit $G_2{}^3$. Der Raum besteht aus 8 Punkten, denen wir das folgende anschauliche Bild zuordnen wollen (Bild 3).

Bild 3




Jede Gerade in $G_2{}^3$ besteht aus 2 Punkten. Insgesamt existieren in $G_2{}^3$ genau $\binom{8}{2}=28$ Geraden, nämlich soviel, wie es Möglichkeiten gibt, aus 8 Punkten 2 Punkte auszuwählen (Problem der Kombination ohne Wiederholung).

Geht man von einem Punkt $P$ aus, so kann man mit jedem der sieben von $P$ verschiedenen Punkte eine Gerade festlegen, die sämtlich voneinander verschieden sind. Also existieren durch jeden Punkt sieben Geraden, in unserem Raum gibt es 7 Richtungen, von denen jede durch vier zueinander parallele Geraden festgelegt wird.

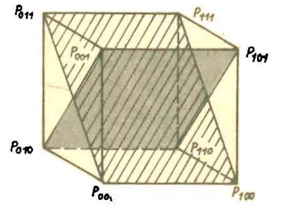
Eine Ebene des Raumes wird durch eine Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$ festgelegt. Da man zwei der drei Variablen $x$, $y$ und $z$ unabhängig voneinander mit Elementen von $G_2$ belegen kann, enthält jede Ebene $G_2{}^3$ genau 4 Punkte.

Für eine Ebene durch den Punkt (0;0;0) geht die Ebenengleichung in $Ax+By+Cz=0$ über. Fordert man schließlich noch, daß auch die Punkte (1;0;0) und 0;1;0) in dieser Ebene liegen, so erhält man als Ebenengleichung $z=0$. Diese Ebene enthält (1;1;0) als vierten Punkt. Nennt man zwei Ebenen parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, so ist die eben genannte Ebene zur Ebene mit den Punkten (0;0;1), (0;1;1), (1;0;1) und (1;1;1) parallel, wie dies anschaulich auch Bild 3 zeigt. Allgemein kann man zeigen: Der Durchschnitt zweier voneinander verschiedener Ebenen ist entweder leer – man nennt diese Ebenen dann zueinander parallel – oder besteht aus einer Menge von zwei Punkten, d. h. die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Die beiden in Bild 4 dargestellten Ebenen mit den Punkten $P_{000}$, $P_{100}$, $P_{011}$ und $P_{111}$ bzw. $P_{110}$, $P_{010}$, $P_{001}$ und $P_{101}$ sind ebenfalls zueinander parallel. Insgesamt existieren in $G_2{}^3$ 14 Ebenen.

Im Raum $g_2{}^3$ gelten – wie auch im Raum $R^3$ – folgende Aussagen, deren Beweis wiederum nicht schwierig ist.

Bild 4

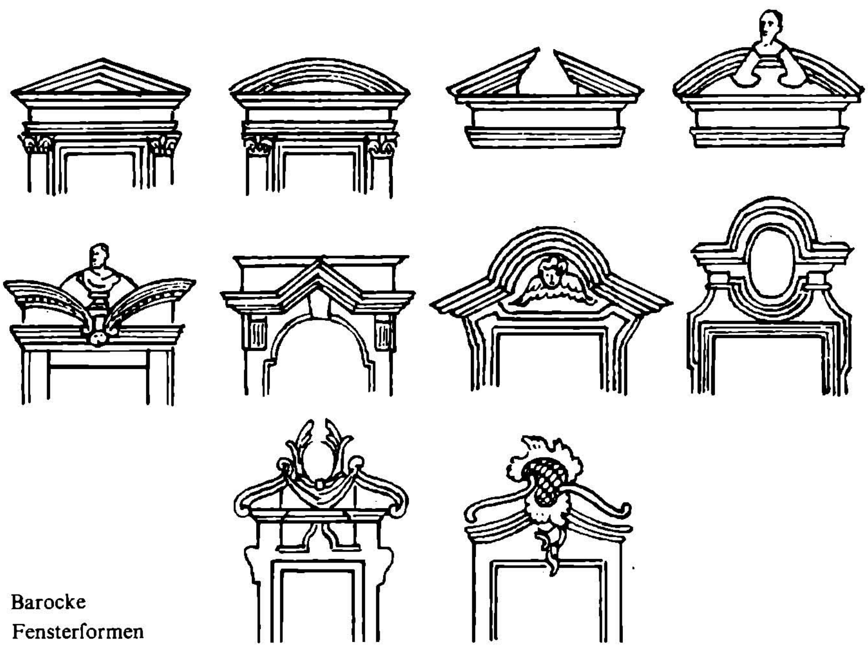



1. Zu jeder Geraden $g$ und zu jedem Punkt $P \notin g$ existiert genau eine Ebene $e$, die $g$ und $P$ enthält.
2. Im Raum $G_2{}^3$ existieren vier Punkte, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen.
3. Zu jeder Ebene $e$ und zu jedem Punkt $P \notin e$ existiert genau eine Ebene $e'$, so daß $P \in e'$ und $e \cap e' = \emptyset$ gilt.

In Verallgemeinerung der genannten Beispiele kann man Geometrien mit einer beliebigen Dimension $n$ unter Nutzung des Körpers der reellen Zahlen oder eines Restklassenkörpers modulo $p$ konstruieren. Im letztgenannten Fall besitzt der Raum $p^n$ Punkte.

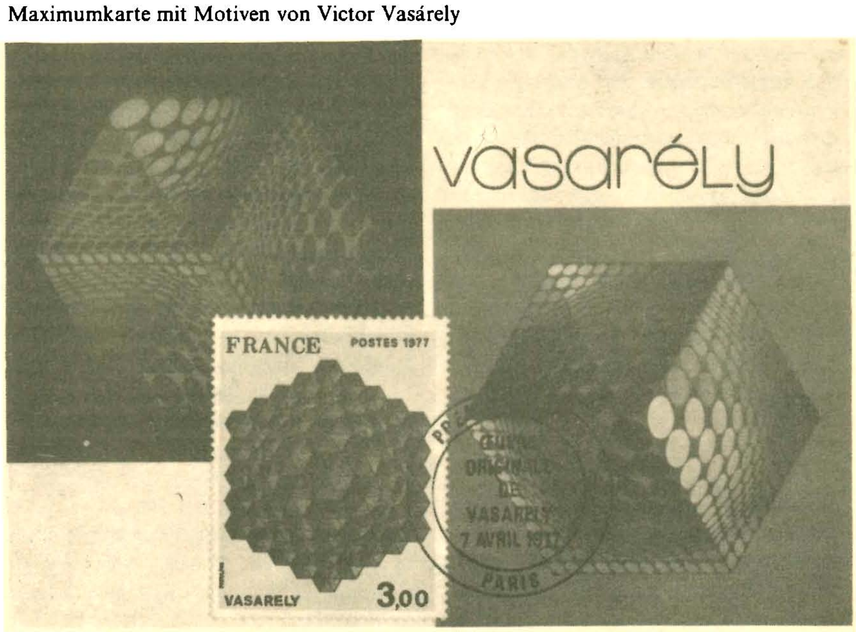
Die Untersuchung geometrischer Figuren wird oft erleichtert, wenn die definierenden Gleichungen in vektorieller Form vorliegen. Schüler der Abiturstufe sollten dies einmal durchdenken.

*P. Göthner*



Barocke Fensterformen

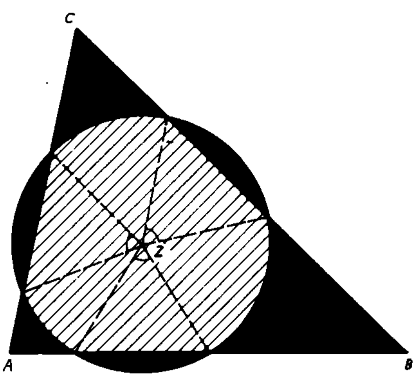
Maximumkarte mit Motiven von Victor Vasárely



# Eine Aufgabe von Dr. Ludwig Stammler

Zunächst einige Vorbereitungen: Es sei $ABC$ ein beliebiges Dreieck. Im Innern der Dreiecksfläche sei $Z$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten alle Kreise mit dem Mittelpunkt $Z$. Es sei $K$ die Fläche eines solchen Kreises und $D$ die Fläche des Dreiecks. Wir interessieren uns für diejenigen Flächenstücke, in denen entweder $D$ über $K$ hinausragt oder $K$ über $D$ (Im Bild 1 schwarz gezeichnete Flächenstücke). Mit Formelzeichen der Mengenlehre bezeichnet man die aus diesen Flächenstücken zusammengesetzte Fläche als symmetrische Differenz

$$(D \cup K) \setminus (D \cap K).$$




$D \cup K$

$D \cap K$

$(D \cup K) \setminus (D \cap K)$

Bild 1

Das bedeutet: Von den beiden Flächen $D$ und $K$ (die man als Punktmengen versteht), wird zunächst die Vereinigungsmenge $D \cup K$ (im Bild 1 schwarze und schraffierte Flächenstücke) und der Durchschnitt $D \cap K$ gebildet (Im Bild 1 schraffierte Fläche) und dann von diesen beiden Mengen die Differenzmenge, d. i. die Menge aller derjenigen Punkte, die zu $D \cup K$ gehören, aber nicht zu $D \cap K$. („Symmetrisch" heißt diese Differenz, weil sie sich bei Vertauschung von $D$ und $K$ nicht ändert.) Denkt man sich nun den Radius des Kreises von 0 an wachsend bis zu beliebig großen Werten, so ist „leicht zu sehen" – wir wollen es ohne Beweis hinnehmen –, daß genau einer der Kreise um $Z$ die folgende Eigenschaft hat: Die Bogenlängen aller außerhalb $D$ liegenden Bögen des Kreises ergeben addiert den halben Kreisumfang. (Im Bild 1 wurde gerade dieser eine Kreis gezeichnet. Überprüfe dies durch Nachmessen der zugehörigen Zentriwinkel! Wie groß muß nämlich deren Summe sein?) Wir wollen kurz sagen: Das Dreieck „halbiert den Umfang" des Kreises.

Nach diesen Vorbereitungen lautet die Aufgabe:

*Beweise, daß (unter allen Kreisen um Z) genau derjenige Kreis, dessen Umfang vom Dreieck halbiert wird, den kleinstmöglichen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz liefert!*

(Als „erste Hilfe" zum Auffinden eines Beweises betrachte die Titelzeichnung auf dem Umschlag dieses Heftes! Nimm an, der dort gezeichnete Punkt $Z$ wäre der Mittelpunkt der beiden Kreise! Setze zunächst voraus, der innere Kreis wäre gerade derjenige, dessen Umfang halbiert wird! Warum liefert nun der äußere Kreis einen größeren Flächeninhalt der symmetrischen Differenz? Jetzt nimm an, gerade der äußere Kreis wäre derjenige, dessen Umfang halbiert wird! Was muß dann gezeigt werden, und wie gelingt dies?)
Für besonders Tüchtige noch eine Zusatzaufgabe: In der Titelzeichnung haben die Kreise nicht $Z$ als Mittelpunkt, wohl aber wird vorausgesetzt: Alle zu betrachtenden Kreise gehen aus einem von ihnen jeweils durch Streckung mit $Z$ als Zentrum hervor.
Finde nun – anstelle der „Umfangshalbierung" – eine Bedingung, die genau von demjenigen Kreis erfüllt wird, der den kleinstmöglichen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz liefert! Die Bedingung soll darin bestehen, daß ein bestimmter Flächeninhalt gleich dem halben Kreis-Flächeninhalt ist.

*L. Stammler*

# Näherungsverfahren zur Dreiteilung des Winkels

*I. Konstruktion der Dreiteilung des Winkels*

Gegeben ist ein Winkel $\alpha$ mit dem Scheitelpunkt $S$. Ich schlage mit dem Radius $r$ um $S$ einen Kreis und erhalte auf den Winkelschenkeln die Punkte $A$ und $B$. Diese werden durch eine Strecke verbunden. Es werden, etwa im Bereich $\frac{\alpha}{2}$ bis $\frac{\alpha}{4}$, einige Strahlen durch $S$ gezogen. Die Schnittpunkte mit der Strecke $\overline{AB}$ bezeichne ich mit $I_x$. Ich trage von den Punkten $I_x$ auf den zugehörigen Strahlen $2r$ ab und finde die Punkte $H_x$. Die Punkte $H_x$ werden verbunden. Durch den Punkt $A$ ziehe ich rechtwinklig zu $\overline{AB}$ eine Gerade, die die *Kurve durch $H_x$* in $H_0$ schneidet. Die Gerade durch $H_0$ und $S$ teilt den Winkel $\alpha$ in $\frac{\alpha}{3}$ und $2\frac{\alpha}{3}$.

*II. Beweis*

Es wird gezeigt, daß der Abstand der Schnittpunkte der Strecke $\overline{AB}$ und der Senkrechten zu $\overline{AB}$ durch $A$ mit der Winkeldrittelnden $2r$ beträgt.

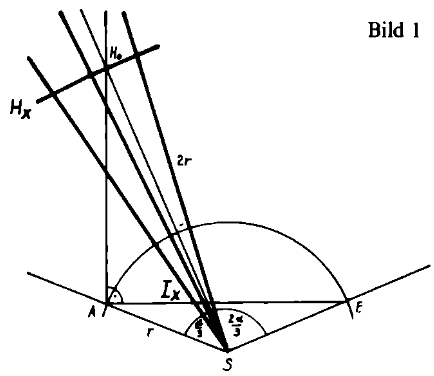



Bild 1

Bild 1 wird ergänzt (siehe Bild 2):

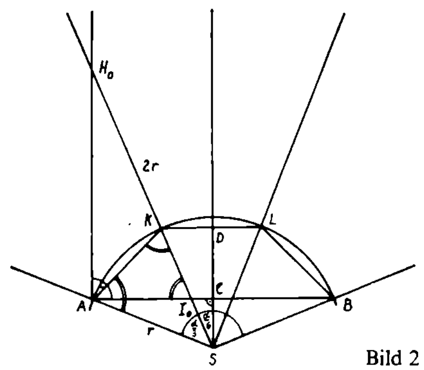



Bild 2

1. Die Winkelhalbierende und die zweite Winkeldrittelnde von $\alpha$ werden eingezeichnet.
2. Die benachbarten Schnittpunkte der Winkeldrittelnden und der Schenkel mit dem Kreis um $S$ werden untereinander verbunden.

Das Dreieck $\triangle ASK$ ist gleichschenklig, folglich ist
$\sphericalangle SAK = \sphericalangle AKS$. Da $\sphericalangle KSA = \frac{\alpha}{3}$ ist, muß $\sphericalangle AKS = 90° - \frac{\alpha}{6}$ sein.

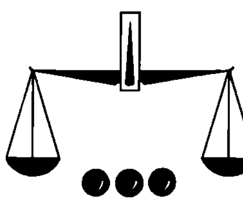
Weiter ist $\sphericalangle KI_0A = \sphericalangle SI_0C = 90° - \sphericalangle CSI_0 = 90° - \frac{\alpha}{6}$. In dem Dreieck $\triangle AI_0K$ sind die Winkel $\sphericalangle AKS$ und $\sphericalangle KI_0A$ gleich, folglich ist $\overline{AK} = \overline{AI_0}$. Die Dreiecke $\triangle AI_0H_0$ und $\triangle KSD$ sind ähnlich, weil $\sphericalangle I_0AH_0 = \sphericalangle KDS = 90°$ und $\sphericalangle DSK = \sphericalangle AH_0I_0$ (Wechselwinkel).
Also ist
$\overline{H_0I_0} : \overline{SK} = \overline{AI_0} : \overline{KD} = \overline{AK} : \overline{KD} = \overline{KL} : \overline{KD} = 2$. Weil $\overline{SK} = r$ ist, folgt $\overline{H_0I_0} = 2r$.
(Beitrag leicht gekürzt.)

*H. Schaper*


# Wie wird die Kugel mit der kleineren Masse mit möglichst wenig Wägungen gefunden?

Eine Aufgabe des Lehrbuches Physik der Klasse 6 lautet:

*Auf dem Tisch liegen drei Kugeln, von denen bekannt ist, daß zwei die gleiche Masse haben, die dritte aber eine etwas kleinere Masse als eine der beiden anderen hat. Beschreibe, wie du durch eine einzige Wägung mit einer Schalenwaage ohne Wägesatz sofort sagen kannst, welches die beiden Kugeln mit der gleichen Masse sind!*



*Die Lösung lautet:* Auf jede Waagschale wird je eine Kugel gelegt. Ist die Waage danach im Gleichgewicht, so sind die beiden aufgelegten Kugeln die beiden massegleichen. Ist die Waage danach nicht im Gleichgewicht, so liegt die Kugel mit der kleineren Masse auf der nach oben gestiegenen Waagschale und die Kugel auf der nach unten gestiegenen Waagschale sowie die nicht auf die Waage gelegte Kugel sind die beiden massegleichen. Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe soll in diesem Beitrag betrachtet werden.

*Problemstellung:* Auf dem Tisch liegen $n$ Kugeln ($n \in N$, $n \geqq 3$), von denen alle bis auf eine, also $n-1$ Kugeln, die gleiche Masse haben. Jedoch eine dieser $n$ Kugeln hat eine etwas kleinere Masse als die anderen. Mittels einer Schalenwaage ohne Wägesatz soll die Kugel mit der kleineren Masse herausgefunden werden. Zugelassen sind $m$ Wägungen ($m \in N$, $m > 0$). Zeige: Zu jeder Zahl $m$ von Wägungen gibt es eine größte Zahl $n_m$ von Kugeln, so daß gilt:

1. Für $n \leqq n_m$ läßt sich bei geeignetem Vorgehen stets aus $n$ Kugeln mittels höchstens $m$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse herausfinden.
2. Für $n > n_m$ läßt sich aus $n$ Kugeln mittels $m$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse nicht bzw. nicht mit Sicherheit bestimmen.

Um die Problemstellung zunächst voll zu erfassen und um weiterhin ihre Lösung zu erraten, lassen wir $n$ zunächst nur schrittweise wachsen.

Da zu $n=3$ am Anfang dieses Beitrags eine Aufgabenstellung gelöst worden ist, werden jetzt $n=4$ Kugeln, von denen drei massegleich sind und eine eine etwas kleinere Masse als die drei anderen hat, betrachtet. Kann man mit einer Wägung mittels einer Schalenwaage ohne Wägesatz die Kugel mit der kleineren Masse stets bestimmen?

Bei 4 Kugeln gibt es nur zwei aussagefähige Möglichkeiten, diese eine Wägung durchzuführen. Entweder wird auf jede Waagschale eine Kugel aufgelegt und 2 Kugeln bleiben auf dem Tisch liegen, oder auf jede Waagschale werden genau 2 Kugeln aufgelegt. Ist im ersten Fall die Waage im Gleichgewicht, so sind die beiden aufgelegten Kugeln massegleich und eine der beiden auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln ist die mit kleinerer Masse. Es kann jedoch nicht angegeben werden, welche der beiden noch auf dem Tisch liegenden Kugeln die kleinere Masse hat. Im zweiten Fall kann die Waage nicht im Gleichgewicht sein. Die Kugel mit der kleineren Masse muß auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen. Sie ist eine der beiden auf dieser Waagschale liegenden Kugeln. Welche von beiden, kann nicht gesagt werden. Bei keinem Vorgehen ist mit nur einer Wägung bei $n=4$ Kugeln der gewünschte Entscheid möglich bzw. mit Sicherheit möglich.

Durch die bisherigen Betrachtungen wird folgende Aussage als wahr vermutet:

Mit $m=1$ zulässigen Wägung läßt sich aus maximal $n_1=3$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse stets bestimmen. Diese Aussage ist bestätigt, wenn noch gezeigt wird, daß auch aus $n=5, 6, \ldots$ Kugeln mit einer Wägung die Kugel mit der kleineren Masse nicht herausgefunden werden kann. Indem der Fall $n=4$ nochmals mit einbezogen wird, soll gezeigt werden: Es ist unmöglich, aus $n$ Kugeln mit $n \geqq 4$ mit einer Wägung stets die Kugel mit der kleineren Masse herauszufinden.

Damit diese eine Wägung aussagefähig ist, muß auf jeder Waagschale die gleiche Zahl von Kugeln liegen. Wenn auf jeder Waagschale 2 oder mehr Kugeln liegen, so ergibt sich in dem Fall, daß die Waage nicht im Gleichgewicht ist: Die Kugel mit der kleineren Masse ist eine der Kugeln, die auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen. Die Kugel mit der kleineren Masse wäre also nicht bestimmt worden. Also darf bei einer zulässigen Wägung auf jeder Waagschale nur eine Kugel liegen. Wegen $n \geqq 4$ bleiben also bei dieser Wägung mindestens 2 Kugeln auf dem Tisch liegen. Ist die Waage dabei im Gleichgewicht, so ist die Kugel mit der kleineren Masse eine der auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Da auf dem Tisch mehr als eine Kugel liegengeblieben ist, ist wiederum die Kugel mit der kleineren Masse nicht bestimmt.

Die obige Aussage ist damit als wahr erkannt worden.

Nunmehr werden $m=2$ Wägungen zugelassen. Bei $n=4$ Kugeln läßt sich der gewünschte Entscheid mit $m=2$ Wägungen stets fällen: Bei der 1. Wägung wird auf jede Waagschale genau eine Kugel gelegt. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so liegt die Kugel mit der kleineren Masse auf der nach oben gestiegenen Waagschale. Die Kugel mit der kleineren Masse ist dann bereits bestimmt. Ist die Waage hingegen im Gleichgewicht, so ist die Kugel mit der kleineren Masse eine der beiden noch auf dem Tisch liegenden Kugeln. In diesem Fall werden bei der zweiten Wägung die beiden Kugeln, die bis jetzt noch auf dem Tisch liegen, auf die Waage gelegt. Die Kugel, die bei dieser Wägung nach oben steigt, ist die Kugel mit der kleineren Masse.

Auch aus $n=5$ Kugeln läßt sich die Kugel mit der kleineren Masse stets mittels zwei Wägungen herausfinden: Bei der ersten Wägung bleiben 3 Kugeln auf dem Tisch liegen und 2 Kugeln werden auf die Waage gelegt. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so ist die beim Wägen nach oben gestiegene Kugel diejenige mit kleinerer Masse und die Bestimmung ist erfolgt. Ist die Waage bei der ersten Wägung im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Kugel eine der 3 auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Mittels der zweiten Wägung ist es nach der eingangs betrachteten Aufgabe möglich, aus diesen 3 Kugeln die gewünschte herauszusuchen.

Ebenso läßt sich aus $n=6$ Kugeln mittels zwei Wägungen stets die Kugel mit der kleineren Masse bestimmen: Um dies mit zwei Wägungen zu schaffen, darf man jedoch bei der ersten Wägung nicht auf jede Waagschale nur eine Kugel auflegen. Denn wäre bei dieser ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so würde sich die gesuchte Kugel unter den 4 zunächst auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln befinden. Mit der nur noch zur Verfügung stehenden zweiten Wägung kann man jedoch gemäß der zu $n=4$ gemachten Aussage die gewünschte Kugel nicht mit Sicherheit bestimmen. Das Vorhaben gelingt, wenn auf jede Waagschale bei der ersten Wägung entweder 2 oder 3 Kugeln aufgelegt werden. Hier sollen bei der ersten Wägung auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt werden. (Den Fall, daß bei der ersten Wägung auf jede Waagschale 2 Kugeln aufgelegt werden, betrachte der Leser als nützliche Übung selbständig.) Da alle Kugeln aufgelegt sind, kann die Waage bei der ersten Wägung nicht im Gleichgewicht sein. Die gesuchte Kugel liegt auf der nach oben gestiegenen Waagschale. Bei der zweiten Wägung wird gemäß bekanntem Vorgehen aus den 3 Kugeln, die bei der ersten Wägung auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen, die Kugel mit kleinerer Masse herausgesucht.

Weiterhin läßt sich auch aus $n=7$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse durch zwei Wägungen ermitteln: Bei der ersten Wägung werden auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt. Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist die eine auf dem Tisch liegengebliebene Kugel die gesuchte. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so ist die auf dem Tisch liegengebliebene Kugel eine Normalkugel (also nicht die Kugel mit der kleineren Masse).

Das weitere Vorgehen geschieht analog wie oben im Falle $n=6$. Weiterhin läßt sich auch aus $n=8$ Kugeln mit zwei Wägungen die Kugel mit kleinerer Masse herausfinden: Bei der ersten Wägung werden auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt. Ist bei der ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Kugel eine der beiden zunächst auf dem Tisch liegengebliebenen. Bei der zweiten Wägung werden diese beiden Kugeln allein aufgelegt. Die Kugel, die jetzt nach oben steigt, ist die gesuchte. Ist bei der ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so sind die beiden zunächst auf dem Tisch liegenden Kugeln Normalkugeln. Das weitere Vorgehen geschieht wieder analog wie oben im Falle $n=6$.

Schließlich läßt sich auch noch aus $n=9$ Kugeln mit 2 Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse heraussuchen: Bei der ersten Wägung werden auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt. Ist die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den 3 auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den 3 Kugeln, die auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen. Bei beiden Möglichkeiten hat sich ergeben:

Es sind 3 Kugeln bestimmt worden, unter denen sich die gesuchte befindet. Bei der zweiten Wägung wird aus den 3 so bestimmten Kugeln nach bekanntem Vorgehen die gesuchte herausgefunden. Die bisherigen Betrachtungen lassen vermuten, daß eine weitere Teilantwort auf die Problemstellung lautet:

Mit $m=2$ zulässigen Wägungen läßt sich aus maximal $n_2=9$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse stets bestimmen.

Diese Aussage ist bestätigt, falls noch gezeigt wird: Mit $m=2$ Wägungen läßt sich aus mehr als 9 Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse nicht mit Sicherheit bestimmen. Dies soll jetzt geschehen:

Würden bei der ersten Wägung auf jeder Waagschale gleich viele, jedoch mehr als 3 Kugeln liegen, so gilt im Fall, daß kein Gleichgewicht vorliegt: Die Kugel mit kleinerer Masse ist eine der Kugeln auf der nach oben gestiegenen Waagschale. Da auf dieser Waagschale mehr als drei Kugeln liegen, ist das Herausfinden der gesuchten Kugel mit der nur noch zur Verfügung stehenden zweiten Wägung gemäß der Betrachtungen zu $m=1$ mit Sicherheit nicht möglich. Also dürfen bei der ersten Wägung auf jeder Waagschale höchstens 3 Kugeln liegen. Ist die Waage bei einer so durchgeführten ersten Wägung jedoch im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Auf dem Tisch liegen aber wegen $n>9$ mehr als 3 Kugeln. Mit der nur noch zur Verfügung stehenden zweiten Wägung ist wiederum der gewünschte Entscheid nicht mit Sicherheit möglich.

Die Fälle $m=3$, $m=4$, ... könnten nun entsprechend betrachtet werden. Man würde dadurch erkennen, daß zu $m=3$ $n_3=3^3$, zu $m=4$ $n_4=3^4$, ... gehört, so wie zu $m=1$ $n_1=3^1=3$ und zu $m=2$ $n_2=3^2=9$ gehört. Doch alle zulässigen Zahlen $m$ zu betrachten, ist zeit- und platzmäßig unmöglich. Diese Überlegungen führen lediglich einen versierten Leser früher, einen weniger geübten etwas später zu der Vermutung: Mit $m$ Wägungen läßt sich aus maximal $n_m=3^m$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse stets herausfinden.

Als Test, ob der Leser sich mit den benutzten Beweismethoden und Schlüssen genügend vertraut gemacht hat, sei ihm vor dem Weiterlesen empfohlen, zumindest die folgende oder eine ähnliche Aufgabe zu lösen.

*Aufgabe:* Auf dem Tisch liegen 20 Kugeln, von denen 19 gleiche Masse haben. Eine der 20 Kugeln hat eine etwas kleinere Masse als die anderen. Wie kann mit einer Schalenwaage ohne Wägesatz durch 3 Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse herausgefunden werden?

Wer diese Aufgabe nicht bewältigen kann, sollte statt weiterzulesen zunächst noch einmal den bisherigen Teil durcharbeiten. Um für alle zulässigen Zahlen $m$ die aufgestellte Vermutung zu beweisen, wird die Beweismethode der vollständigen Induktion angewandt. Diese besteht aus dem Induktionsbeginn und dem Induktionsschritt.

Im Induktionsbeginn ist die kleinste zulässige Zahl $m$, also $m=1$, zu betrachten. Es ist zu zeigen, daß mit $m=1$ Wägung aus $n\leqq 3$ Kugeln stets die Kugel mit kleinerer Masse herausgefunden werden kann. (Da laut Problemstellung $n\geqq 3$ gilt, erübrigt sich das Betrachten von $n=1$ und $n=2$ Kugeln.)

Und es ist auch zu zeigen, daß aus $n$ Kugeln mit $n\geqq 4$ mit einer Wägung nicht mit Sicherheit die gewünschte herausgesucht werden kann. Der Induktionsbeginn ist im Rahmen dieses Beitrags schon durchgeführt.

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, daß aus der Annahme, die aufgestellte Vermutung ($n_m=3^m$) gelte für $m$, ihre Gültigkeit für $m+1$ folgt ($n_{m+1}=3^{m+1}$). Der Induktionsschritt wird jetzt durchgeführt.

*Induktionsschritt:*

*Voraussetzung:* Für $m$ mit $m\in N$ und $m>0$ gelten:

1. Aus $n$ Kugeln mit $n\in N$, $n\geqq 3$ und $n\leqq n_m=3^m$ läßt sich stets die Kugel mit der kleineren Masse durch höchstens $m$ Wägungen bestimmen.
2. Es ist unmöglich, aus $n$ Kugeln mit $n\in N$ und $n>n_m=3^m$ mittels $m$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse stets zu bestimmen.

*Behauptung:* 1. Aus $n$ Kugeln mit $n\in N$, $n\geqq 3$ und $n\leqq n_{m+1}=3^{m+1}$ läßt sich stets durch höchstens $m+1$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse bestimmen.

2. Es ist unmöglich, aus $n$ Kugeln mit $n\in N$ und $n>n_{m+1}=3^{m+1}$ mittels $m+1$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse stets zu bestimmen.

*Beweis:* 1. Die natürliche Zahl $n$ läßt bei der Division durch 3 entweder den Rest 0, den Rest 1 oder den Rest 2. Dabei ist im Falle des Restes 0 auch $\frac{n}{3}$ eine natürliche Zahl.

Ist die Waage bei der ersten Wägung im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den auf dem Tisch liegenden Kugeln. Da auf dem Tisch höchstens $3^m$ Kugeln liegen, ist es laut Voraussetzung möglich, mit den weiteren $m$ zur Verfügung stehenden Wägungen stets die gesuchte Kugel herauszufinden. Ist die Waage bei der ersten Wägung nicht im Gleichgewicht, so liegt die gesuchte Kugel auf der Waagschale, die nach oben gestiegen ist. Da auf dieser Waagschale

| Beim Rest | Legen wir auf jede Waagschale | Auf dem Tisch bleiben liegen | Wegen $n\leqq 3^{m+1}$ gilt für die Anzahl der Kugeln |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{n}{3}$ Kugeln | $\frac{n}{3}$ Kugeln | $\frac{n}{3}\leqq 3^m$ |
| 1 | $\frac{n-1}{3}$ Kugeln | $\frac{n-1}{3}+1$ Kugeln | $\frac{n-1}{3}<\frac{n}{3}\leqq 3^m$, also $\frac{n-1}{3}+1\leqq 3^m$ |
| 2 | $\frac{n-2}{3}+1$ Kugeln | $\frac{n-2}{3}$ Kugeln | $\frac{n-2}{3}<\frac{n}{3}\leqq 3^m$, also $\frac{n-2}{3}+1\leqq 3^m$ |

## ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

# alpha stellt vor:

### Kreisklub Mathematik des Landkreises Brandenburg

Seit 1967 werden jedes Jahr nach der Kreismathematikolympiade die besten Schüler der fünften Klasse in den Kreismathematikklub aufgenommen. Bei der Auswahl der Schüler werden neben den schulischen Leistungen, den außerschulischen Aktivitäten und den Ergebnissen bei der Olympiade auch die Ergebnisse einer Klausur in den vierten Klassen berücksichtigt, die während der Kreisolympiade geschrieben wurde.

Alle Mitglieder des Kreisklubs sind verpflichtet, sich regelmäßig an einer Arbeitsgemeinschaft an der Heimatschule und am *alpha*-Wettbewerb ihrer beziehungsweise höherer Klassenstufen zu beteiligen.

Wir – das sind etwa 25 Schüler der Klassen 5 bis 8 – treffen uns je zwei Wochen in den Winterferien in Wernigerode, in den Sommerferien in Lehnin und in den Herbstferien noch einmal vier Tage.

Bei den Klubveranstaltungen stehen vormittags vier Stunden Mathematik auf dem Stundenplan, mit den Stoffgebieten Gleichungen, Geometrie, Zahlentheorie und Kombinatorik/Logik. Logisches Denken wird dabei von jedem gefordert. Während im Unterricht sehr oft die Lösung einer schwierigen Aufgabe oder ein problematischer Beweis von den Schülern gemeinsam diskutiert und erarbeitet wird, muß hier jeder einzelne in Kurzklausuren mit einer Aufgabe oder Klausuren ähnlich den Olympiaden seine eigene Leistung unter Beweis stellen.

Im Klub entstand ein gutes Kollektiv, in das sich die neuen Mitglieder schon auf Grund des gleichen Interesses für die Mathematik schnell einfügen. Doch nicht nur die Mathematik und sich entwickelnde Freundschaften unter den Mitgliedern des Klubs, sondern auch eine interessante Freizeitgestaltung mit Sport, Museumsbesuchen, Vorträgen und Exkursionen läßt uns jede Veranstaltung mit Freude erwarten. Dabei ist ein Klubrat aus Schülern jeder Klassenstufe für die Planung und Organisation vieler Veranstaltungen verantwortlich.

Mathematik macht Spaß! – wenn man sie versteht. Doch um sie zu verstehen, müssen wir lernen, und dafür hält uns der Mathematikklub viele Voraussetzungen bereit. Nicht zuletzt durch die Schulung im Kreisklub können viele von uns auf gute Erfolge bei den Mathematikolympiaden verweisen.

Vier Jahre Mitglied im Kreismathematikklub – da sind die meisten von uns traurig, daß diese Zeit vorbei ist. Doch das Interesse an der Mathematik ist uns geblieben. Das zeigt sich auch in den späteren Berufen: Studenten der Mathematik und zukünftige Mathematiklehrer sind schon viele von den ehemaligen Klubmitgliedern geworden!

*Schüler der Klasse 8*
*Mitglieder des Kreisklubs Mathematik*

Hier drei Aufgaben aus unserer Arbeit:

▲1▲ Erik besuchte vier Geschäfte: Fleischer, Milchladen, Bäcker und Gemüseladen. Er besucht sie jeweils genau einmal in einer bestimmten Reihenfolge. Dabei haben wir von dieser Einkaufsrunde folgende Informationen:

(1) Er war zuerst beim Fleischer oder im Milchladen.

(2) Wenn Erik nicht zuletzt im Milchladen war, so war er an zweiter Stelle im Milchladen.

(3) Im Gemüseladen oder beim Fleischer begann er seine Einkaufsrunde.

(4) Er begann zuerst beim Bäcker und war nicht zuletzt im Milchladen.

(5) Nachdem er beim Fleischer war, ging er sofort zum Bäcker.

Es stellte sich heraus, daß die Informationen nicht alle zuverlässig waren. Genau eine ist falsch, die restlichen vier sind wahr.

a) Ermittle, welche Information falsch ist!

b) Finde heraus, an welcher Stelle der Einkauf im Gemüseladen in seiner Reihenfolge war!

▲2▲ Gegeben sei eine Gerade $g$ und ein Punkt $A$, der nicht auf der Geraden liegt und ein Kreis $K$ mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r$ in der gleichen Halbebene der Geraden.

Konstruiere einen Punkt $P$ auf der Geraden $g$ so, daß die Tangente an den Kreis $K$ durch den Punkt $P$ und die Gerade $AP$ mit $g$ jeweils den gleichen Winkel bilden!

*Lösungshinweise:* Spiegelung des Kreises an $g$ – Fallunterscheidung bei Tangentenkonstruktionen – Determinationsfrage

▲3▲ Gegeben sei eine Gerade $g$, ein Punkt $A$ auf $g$ und ein Kreis $K$ mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r$.

Konstruiere einen Punkt $P$ auf der Geraden $g$ so, daß der Abstand zum Punkt $A$ und zur Kreisperipherie einander gleich sind!

*Lösungshinweise:* $r$ auf $g$ von $A$ aus abtragen, so daß Punkt $B$ entsteht – Mittelsenkrechte zu $\overline{BM}$ konstruieren!

---

höchstens $3^m$ Kugeln liegen, ist es wiederum laut Voraussetzung möglich, mit den $m$ weiteren zur Verfügung stehenden Wägungen die gesuchte Kugel stets zu bestimmen, w. z. b. w.

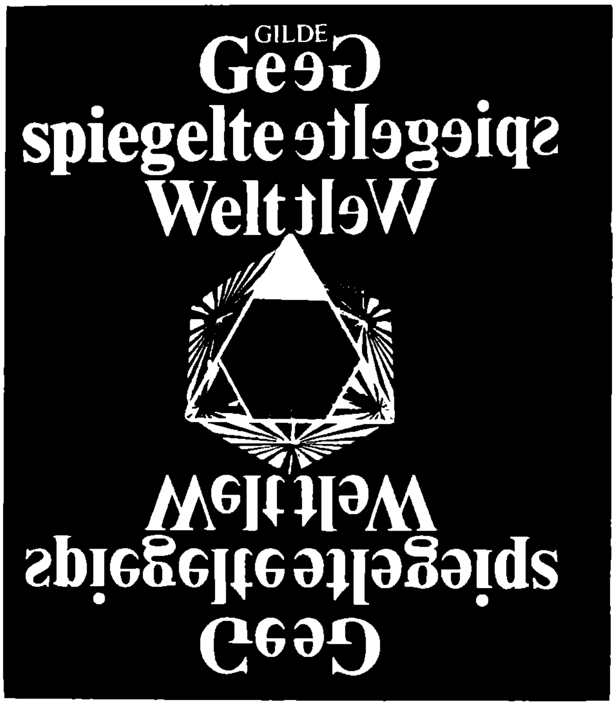
2. Die natürliche Zahl $n$ sei mittels zweier anderer natürlicher Zahlen $n_0$ und $n_1$ dargestellt als Summe $n=n_0+n_0+n_1$. Wegen $n>3^{m+1}$ gibt es keine derartige Zerlegung mit $n_0\leqq 3^m$ und $n_1\leqq 3^m$. Denn aus diesen beiden Ungleichungen würde der Widerspruch $n_0+n_0+n_1\leqq 3^m+3^m+3^m=3\cdot 3^m=3^{m+1}$ folgen. Also muß in $n=2n_0+n_1$ $n_0>3^m$ oder $n_1>3^m$ gelten.

Wird als erste Wägung eine Zerlegung $n=2n_0+n_1$ mit $n_1>3^m$ benutzt, so ist, falls die Waage im Gleichgewicht ist, die Kugel mit der kleineren Masse eine der $n_1$ auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Wegen $n_1>3^m$ und gemäß Voraussetzung ist es nicht möglich, mit den nur noch zur Verfügung stehenden $m$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse stets zu ermitteln.

Also ist die Bestimmung der Kugel mit kleinerer Masse bei keiner Wahl der ersten Wägung mit Sicherheit möglich, w. z. b. w.

*W. Träger*

Das Foto zeigt einen Bildausschnitt vom Mathematikstand der Schulmesse der Oberschule Osternienburg.




*118 Seiten, 176 Bilder, 24 cm × 27 cm*
*Ganzgewebeeinband, Preis 24,– M*
*VEB Fachbuchverlag Leipzig*
*Bestell-Nr. 546 369 0*

Probleme der Spiegelung und der Symmetrie werden in den Ober-, Fach- und Hochschulen im Physikunterricht in der Regel nur mit Kreide als abstrakte Konstruktion an der Tafel abgehandelt. Allenfalls kommt der Spiegel noch als Bauelement optischer Geräte zur Sprache. Die vielseitigen Verbindungen von Spiegelung und Symmetrie zum täglichen Leben, vor allen Dingen zur Technik, werden im Unterricht fast nie stärker herausgestellt. Spiegel und Spiegelebenen sind aber nicht nur bedeutungsvoll für viele mathematische und physikalische Probleme, sondern spielen im täglichen Leben eine überraschend große Rolle. Der Sinn des Buches ist es, diese Zusammenhänge in unterhaltsamer Form zu schildern.

---

Leseprobe:

## Gespiegelte Dichtung

Dichter haben sich mit Wort- und Satzspiegelungen befaßt. Bekannt ist das Gedicht „Die Trichter“ von *Christian Morgenstern:*

Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
Durch ihres Rumpfes verengten Schacht
fließt weißes Mondlicht
still und heiter
auf ihren
Waldweg
u. s.
w.

Geschickterweise nutzte *Morgenstern* die senkrechte Symmetrieebene des W gleichsam als Abschluß und Gesamt-Symmetrieebene aus. Er knüpft mit der Form an eine alte Druckertradition an. Von 1500 bis 1650 war es selbstverständlich, Buchtitel nur nach der Symmetrie zu drucken. Es störte nicht, wenn dabei Wörter auseinandergerissen wurden und wenn auf der nächsten Zeile der Rest des Wortes in kleineren Buchstaben gedruckt wurde.

Die „wahre Kunst der Wortspiegelung“ beginnt aber erst, wenn ganze Sätze gebildet werden, die von vorn und hinten gelesen den gleichen Text ergeben. *Otto, Anna* und *Reliefpfeiler* machen in solchen Sätzen natürlich keine Schwierigkeiten. Wichtiger sind Kombinationen, wie *neger–regen, ein–nie, not–ton, eber–rebe.*

Weiter muß bei Spiegelsätzen das Zugeständnis gemacht werden, daß Wörter geteilt werden. Dann sind Sätze möglich wie: *Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie.* Aus „zagt im“ wird in der Umkehrung: mit gaz(elle).

*C. J. Friedrich* aus Seifersdorf bei Radeberg veröffentlichte eine Reihe von Spiegelsätzen. *Bei Liese sei lieb. Ein Esel lese nie. Ein teuer Reittier reuet nie.*

Zur Bildung solcher Sätze scheint es günstig zu sein, sich vorher ein kleines Spiegelwörterbuch aufzubauen. Schließlich gibt es auch Umkehrerzählungen, die nicht Buchstabe für Buchstabe, sondern Wort für Wort gespiegelt werden. Eine Geschichte (aus dem Englischen) beginnt mit „*Jones bearbeitete Zeittheorien jahrelang*“ und endet „*Jahrelang Zeittheorien bearbeitete Jones*“. Dazwischen liegt dann eine etwas konfuse Story, die sich vorwärts und rückwärts lesen läßt.

Eine andere Frage ist natürlich, ob solche Spielereien noch einen Sinn haben, und ob die Verfasser ihren Scharfsinn und ihre Arbeitskraft nicht besser anderen Problemen zuwenden sollten. Doch wenn jemand acht Stunden oder länger nur „vernünftige Sachen“ gedacht und erarbeitet hat, besteht sicherlich mitunter auch das Bedürfnis, einmal nur „Unsinn“ zu produzieren.

Falls Sie aber irgendwo lesen: „*Kaufen sie jede woche vier gute bequeme Pelze x y*“, so handelt es sich nicht um eine Spiegelung, sondern um einen Prüfsatz im Fernschreibverkehr. Dieser Satz enthält alle Buchstaben des Alphabetes (einige mehrfach, z. B. e). Die Kolleginnen am Fernschreiber kontrollieren damit, ob alle Buchstaben richtig durchgegeben werden.

Schließlich spielt der Spiegel selbst in der Dichtung eine große Rolle, vor allem wegen seines hohen Symbolwertes. Meistens soll er zur Selbsterkenntnis und Selbstkritik auffordern. Denken Sie nur an Till Eulenspiegel. Oder denken wir an den berühmten Roman „Spiegel der Seefahrt“ von *Joseph Conrad.*

Auch die Kriminalliteratur kommt nicht ohne Spiegel und Spiegelschrift aus. In deutscher Übersetzung erschien ein Krimi „Motten im Nerz“ von *E. St. Garner.* Der Held der Story, *Perry Mason*, findet in einem Zimmer zwei mit Lippenstift geschriebene Hilferufe. Der eine ist offen auf einen Spiegel geschrieben, der andere versteckt unter einer Tischplatte. Aber nur einer kann echt sein. Doch welcher?

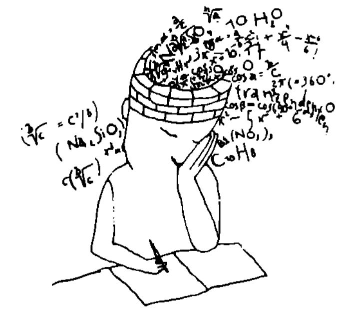
Die Polizei folgert: Ein echter Hilferuf wird natürlich versteckt angebracht, sonst hätten ihn die bösen Gangster längst entfernt. *Perry Mason* denkt gar nicht, er probiert. Er läßt seinen Assistenten die Botschaft nochmal unter die Tischplatte schreiben, und zwar „heimlich“, wie es sich für einen echten Hilferuf gehört. Dazu muß der Schreiber mit ruhigem Oberkörper dasitzen (möglichst den Gangster ablenken!) und ohne hinzusehen unter den Tisch schreiben. Das geht natürlich nur mit dicken Buchstaben, wie sie mit Kreide oder einem Lippenstift erzeugt werden.

Geübte Krimi-Leser ahnen bereits, was unter dem Tisch geschrieben steht. Der Hilferuf wird bei dieser Schreibart in Spiegelschrift unter der Platte stehen. In dem Krimi steht er aber richtig herum. Folglich wurde die Tischplatte vorher umgelegt, und daraus folgert der Meisterdetektiv – wenn das nur mit rechten Dingen zuging!

In der Zeitschrift „Der Deutsche Straßenverkehr“ stand 1962 eine Meldung aus England. Danach erhalten in der Stadt Kent alle Krankentransportwagen die Aufschrift *Ambulance* nochmals in Spiegelschrift. Damit soll erreicht werden, daß der Kraftfahrer im Rückspiegel leichter den Ambulanzwagen erkennt und ihm Platz macht.

Denkbar ist die Meldung, doch sie stand im Aprilheft. Daher ist es unklar: Stimmt sie, oder stimmt sie nicht?

# Wer löst mit?
# alpha -Wettbewerb



*Letzter Einsendetermin: 9. Mai 1980*

## Mathematik

Ma 5 ▪1937 Wenn man eine natürliche Zahl zunächst mit 7 multipliziert und zum Produkt 9 addiert, so erhält man das gleiche Ergebnis, als wenn man diese Zahl zunächst mit 9 multipliziert und zum Produkt 7 addiert. Um welche Zahl handelt es sich?

*Schüler Uwe Schulze, 4. POS Copitz*

Ma 5 ▪1938 Setzt man für die Buchstaben des Wortes „BERLIN" natürliche Zahlen ein, so gilt:

a) $E+R+L=16;$
b) $R \cdot L \quad =18,$
c) $L+I \quad =81:R,$
d) $N=4 \cdot L,$
e) $L=38:19,$
f) $B+E+R+L+I+N=34.$

Welche natürlichen Zahlen erfüllen diese sechs Gleichungen? *Sch.*

Ma 5 ▪1939 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{OTTO} \\ +\ \text{ANNA} \\ \hline \text{ANTON} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern, gleiche Buchstaben gleiche Ziffern.

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ▪1940 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß die Rechenaufgabe richtig gelöst ist.

$$\begin{array}{l} \text{CB} \cdot \text{AB} \\ \hline \text{CAA} \\ \hline \text{CB} \\ \hline \text{1501} \\ \hline\hline \end{array}$$

Wie lautet in diesem Falle die Jahreszahl für ABCD? *Ing. H. Decker, Köln*

Ma 5 ▪1941 Jemand hat eine Additionsaufgabe zu lösen, bei der der erste Summand eine dreistellige natürliche Zahl ist, deren drei Grundziffern alle einander gleich sind. Die Summe ist gleich dem zehnfachen Produkt des zweiten Summanden, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Es sind alle Aufgaben anzugeben, für die das zutrifft! *Sch.*

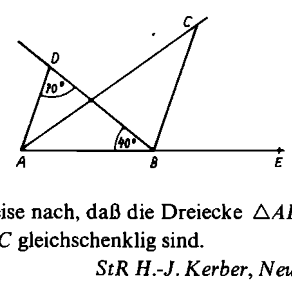
Ma 5 ▪1942 Eine Strecke $\overline{AD}$ von 91 cm Länge wird so in drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ eingeteilt, daß die Strecke $\overline{AB}$ viermal so lang ist wie die Strecke $\overline{BC}$ und die Strecke $\overline{CD}$ doppelt so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$. Wie lang ist jede der drei Teilstrecken? Wie lang wäre jede dieser Teilstrecken, wenn die Strecke $\overline{CD}$ nur halb so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ▪1943 Aus den sechs Ziffern 1, 5, 6, 7, 8, 9 sind vier Ziffern auszuwählen, mit deren Hilfe vierstellige natürliche Zahlen darzustellen sind, die zugleich durch 7, 8 und 9 teilbar sind. Wie lauten diese vierstelligen Zahlen?

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

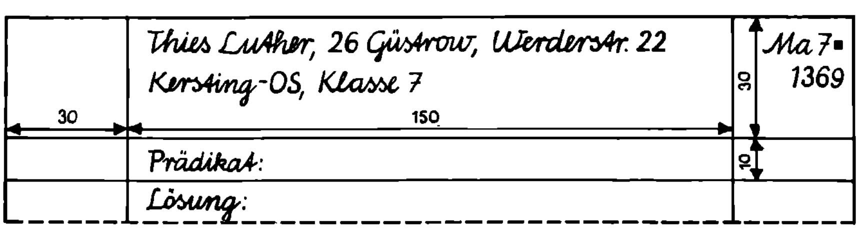
Ma 6 ▪1944 In dem Bild halbiert die Gerade $AC$ den Winkel $\sphericalangle BAD$; die Gerade $BC$ halbiert den Winkel $\sphericalangle DBE$. Ferner sind folgende Winkelgrößen bekannt: $\sphericalangle ABD=40°$, $\sphericalangle ADB=70°$.

a) Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$.




b) Weise nach, daß die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ gleichschenklig sind.

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*




**Wettbewerbsbedingungen**

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

**Redaktion alpha**
**7027 Leipzig, Postfach 14.**

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

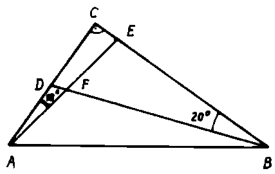
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1945 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ dar. Ein innerer Punkt $E$ der Seite $\overline{BC}$ wurde mit $A$, ein innerer Punkt $D$ der Seite $\overline{AC}$ wurde mit $B$ verbunden. Der Schnittpunkt der Geraden $AE$ und $BD$ wurde mit $F$ bezeichnet. Es betragen $\sphericalangle CAE = 10°$ und $\sphericalangle CBD = 20°$. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle AFB$ zu bestimmen! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*




Ma 6 ▪1946 Gegeben seien drei natürliche Zahlen $a$, $b$ und $c$, die folgende Bedingungen erfüllen:

$a+b=90,$
$a+c=75,$
$b+c=21.$

Es ist das Produkt $a \cdot b \cdot c$ zu ermitteln.

*Schüler Roland Kamke, Rostock*

Ma 6 ▪1947 Es sind alle natürlichen Zahlen $n$ mit $10 \leqq n \leqq 50$ zu ermitteln, die, um ihre Quersumme vermindert, die Zahl 9 ergeben.

*Schülerin Annette Herm, Karl-Krull-OS Greifswald*

Ma 7 ▪1948 Zeichne einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r$ sowie eine Sehne $\overline{AB}$ dieses Kreises, die die Länge des Kreisradius $r$ besitzt! Lege auf der Peripherie von $k$ einen Punkt $C$ fest, der von $A$ und $B$ verschieden ist, und verbinde $C$ mit $A$ und $B$! Beweise, daß die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \phi$ entweder 30° oder 150° beträgt!

*Schüler Holger Röstel, Erfurt, Kl. 7*

Ma 7 ▪1949 Der Umfang eines Dreiecks beträgt 36 cm. Die Länge der kürzesten Seite verhält sich zur Länge der längsten Seite wie 3 : 5. Die mittlere Seite ist um 3 cm kürzer als die längste Seite. Es sind die Längen der Dreieckseiten zu berechnen.

*Fachlehrer D. Knape, Jessen*

Ma 7 ▪1950 In einem FDGB-Ferienheim befinden sich 41 Urlauber, die in 2-Bett- und 3-Bett-Zimmern untergebracht sind. Das Ferienheim verfügt über mehr als vier, aber weniger als zehn 2-Bett-Zimmer. Alle Betten sind belegt. Über wieviel 2-Bett- bzw. 3-Bett-Zimmer verfügt dieses Ferienheim?

*Schülerin Gabriele Müller, Schönwalde, Kl. 7*

Ma 7 ▪1951 Es sind alle Zahlentripel aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu ermitteln, für die das Produkt aus den drei Zahlen eines solchen Tripels gleich der Summe aus den drei Zahlen ist.

*Schüler Mario Köppen, Berlin*

Ma 8 ▪1952 Frank hat nach einer Veranstaltung leere Limonaden- bzw. Milchflaschen gesammelt und dafür 3,50 M erhalten. Wie viele Flaschen von jeder Sorte können es gewesen sein, wenn von jeder Sorte mindestens eine Flasche dabei war und das Pfand für eine Limonadenflasche 0,30 M und für eine Milchflasche 0,20 M beträgt?

*Mathematikfachlehrer E. Naumann, Karl-Marx-Stadt*

Ma 8 ▪1953 Von drei vorhandenen Kesseln sind zwei gefüllt, der dritte ist leer. Wollte man diesen leeren Kessel füllen, so brauchte man den Inhalt des ersten und 20% vom Inhalt des zweiten oder den Inhalt des zweiten und ein Drittel vom Inhalt des ersten Kessels. Welches Fassungsvermögen hat jeder der drei Kessel, wenn alle drei zusammen 1440 l aufnehmen können?

*Schüler Olaf Römer, Roßlau, Kl. 7*

Ma 8 ▪1954 Es seien $p$ eine Primzahl, $x$ eine reelle Zahl, und es gelte $|x| \neq 1$. Man ermittle alle $x$, für die die Primzahl $p=\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ so klein wie möglich ist.

*Elektromonteurlehrling W. Scholze, Sebnitz*

Ma 8 ▪1955 Es ist eine Strecke der Länge $\sqrt{3}$ cm zu konstruieren. Der Konstruktion soll ein Kreis zugrunde gelegt werden.

*E. Schulze, Mildenberg*

Ma 9 ▪1956 Für drei verschiedene ganze Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt folgendes:

1) $b-a=4$
2) $c-b=4$
3) Das Quadrat der größten Zahl ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden anderen Zahlen.

Es sind alle geordneten Tripel $[a,b,c]$ ganzer Zahlen zu ermitteln, die den Bedingungen 1), 2) und 3) genügen.

*Dipl.-Lehrer f. Math./Ph. M. Kutschank, Deutschenbora*

Ma 9 ▪1957 In der Gleichung $\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$, die eine vierstellige und zwei ins Quadrat erhobene zweistellige natürliche Zahlen in dekadischer Darstellung enthält, sind die Buchstaben $x$ und $y$ so durch Ziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen. *Nach „Quant“, Moskau*

Ma 9 ▪1958 Man bestimme alle ganzen Zahlen, für die folgendes gilt: Die Summe aus einer solchen ganzen Zahl, ihrer zweiten und ihrer dritten Potenz hat den einunddreißigfachen Wert dieser ganzen Zahl.

*Schüler Axel Kuminski, Riesa, Kl. 9*

Ma 9 ▪1959 Man beweise folgenden Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenlängen kleiner oder höchstens gleich dem $\sqrt{2}$fachen der Länge der Hypotenuse.
In welchem Falle gilt das Gleichheitszeichen?

*Axel Schüler, Kleinmachnow*

Ma 10/12 ▪1960 Es ist zu beweisen:
Wenn $p$ eine Primzahl ist und $p>2$ gilt, so ist $(p+1)^3-4(p+1)$ stets durch 48 teilbar.

*Schüler Karsten Petzold, Lauchhammer, Kl. 10*

Ma 10/12 ▪1961 Ein Reporter fragte nach dem Alter eines Mathematikers. Dieser antwortete: „Verdreifacht man die Quersumme der Jahreszahl des Jahres, in dem ich geboren wurde, so erhält man eine Zahl, die gleich meinem Lebensalter im Jahre 1979 ist.“ Wie alt ist der Mathematiker?

*Neuyễn Xuân Thinh, Hanoi, z.Z. Student der TU Dresden*

Ma 10/12 ▪1962 Es ist ein Sehnenviereck $ABCD$ zu konstruieren, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Der Radius des Umkreises von $ABCD$ ist 3 cm lang.
2) $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DA}=1:2:3:4$, wobei $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$ diejenigen Kreisbögen sind, auf denen kein weiterer der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ liegt. Die Konstruktion ist zu begründen.

*Axel Schüler, Kleinmachnow*

Ma 10/12 ▪1963 Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Raumdiagonalen eines Würfels?

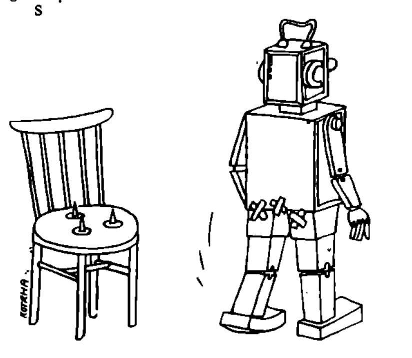
*Mathematikfachlehrer E. Naumann, Karl-Marx-Stadt*

# Physik

Ph 6 ▪71 Die Strecke, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt, beträgt 300000 km. Diese Entfernung ist so ungeheuer groß, daß man sie sich nur sehr schwer vorstellen kann. Eine Möglichkeit, sich wenigstens ungefähr ein Bild von dieser riesigen Entfernung zu machen, ergibt sich, wenn ihr die Ergebnisse der folgenden Aufgaben damit vergleicht.

a) Wie viele Tage wäre ein D-Zug unterwegs, der ohne Unterbrechung mit einer Geschwindigkeit von $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ diese Strecke durchfahren würde, und wie viele Tage würde ein Flugzeug fliegen bei einer Geschwindigkeit von $900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

b) Wie viele Minuten würde ein Raumschiff brauchen bei einer Geschwindigkeit von $8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$?



Ph 7 ▪72 Ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ überfliegt in einer Höhe von 16 km den Punkt $A$. 5 Stunden später überfliegt es den Punkt $B$. Wie weit ist $A$ von $B$ entfernt, wenn Höhe und Geschwindigkeit des Flugzeuges konstant bleiben? (Der Erdradius sei 6370 km.)

*Schüler Ingolf Thurm, Gößnitz, Kl. 10*

Ph 8 ▪73 Auf eine stählerne Welle soll ebenfalls aus Stahl ein Ring aufgeschrumpft werden. Bei 20 °C habe die Welle einen Durchmesser von 80,05 mm und der Ring eine Bohrung vom Durchmesser 79,97 mm. Auf welche Temperatur muß der Ring erwärmt werden, damit er mit einem warmen Durchmesser von 80,25 mm auf die Welle aufgeschoben werden kann?

Der lineare Ausdehnungskoeffizient für Stahl betrage $0{,}0000117 \frac{1}{{}^\circ\text{C}}$. Die Formel für die Längenausdehnung ist $l_1 = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$.

*Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph 9 ▪74 Aus einem undichten Wasserhahn tropft Wasser, alle 0,2 Sekunden ein Tropfen. Welchen Abstand haben zwei nacheinander fallende Tropfen 0,5 Sekunden nach dem Abfallen des ersten Tropfens?

*Schüler Jörg Müller, Dresden, Kl. 9*

Ph 10/12 ▪75 Ein Luftballon von 10 m Durchmesser hat im leeren Zustand einschließlich Gondel, Apparaten und Ballast eine Masse von 300 kg. Er wird mit Wasserstoff $\left(\text{Dichte } \varrho = 0{,}089 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ gefüllt. Die Luftdichte betrage $1{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Wie viele Personen zu je 75 kg können mitfahren? Welche Auftriebskraft wirkt dann noch auf den Ballon?

*Adalbert Schatz, Leipzig*

# Chemie

Ch 7 ▪57 Wie ist die Gewichtszunahme, wenn 12 g metallisches Eisen
a) in Eisen(II)-oxid
b) in Eisen(III)-oxid
c) in Eisen(II, III)-oxid überführt werden?

Ch 8 ▪58 15 cm³ einer Lösung von Salzsäure werden mit Silbernitrat versetzt. Dabei wird ein Niederschlag von 0,47 g gefällt. Wieviel %ig ist die Salzsäure, wenn man berücksichtigt, daß sie folgendermaßen hergestellt wurde:
29,2 g wurden mit Wasser auf 290 cm³ verdünnt?

Ch 9 ▪59 Bei der Reaktion von Kochsalz, 96%iger Schwefelsäure und Braunstein mit einem Gehalt von 89% Mangan(IV)-oxid bildet sich Chlor. Welche Mengen der Ausgangsstoffe sind anzuwenden, wenn 34 Liter Chlor entstehen sollen?

Ch 10/12 ▪60 Kalkstein, welcher 87,2% Kalziumkarbonat enthält, wird mit Salzsäure versetzt. Das dabei entstehende Kalziumchlorid ist zu 4% durch Kalziumoxid verunreinigt. Man berechne, wieviel 34%ige Salzsäure und Kalkstein man einsetzen muß, wenn 310 kg verunreinigtes Kalziumchlorid entstehen sollen.

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu zwei Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 1/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ▪1828 Die Schüler einer Klasse gratulieren im Jahre 1978 ihrem Lehrer, der älter als 30 Jahre, aber jünger als 40 Jahre geworden ist, zum Geburtstag. Auf der Gratulationskarte wurden von den Schülern in scherzhafter Weise die beiden Ziffern der Zahl, die das Lebensalter des Lehrers angibt, vertauscht. Dadurch wurde dieser Lehrer um neun Jahre „jünger gemacht". In welchem Jahre wurde dieser Lehrer geboren?

Im Heft 4/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Die Zahl des erreichten Lebensalters des Lehrers läßt sich durch $z = 3 \cdot 10 + y$ darstellen. Nun gilt $3 \cdot 10 + y = 10 \cdot y + 3 + 9$, $9y = 18$, also $y = 2$. Im Jahre 1978 ist der Lehrer 32 Jahre alt geworden; er wurde somit im Jahre 1946 geboren.

Wir stellen nun die Lösung von *Thomas Langenhahn* aus Niederwiesa vor, der Schüler der Klasse 5 b der Wilhelm-Pieck-Oberschule ist.

Thomas löste diese Aufgabe wie folgt:

Angenommen, der Lehrer wurde $x$ Jahre alt; dann gilt $30 < x < 40$. Der Lehrer könnte also 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 38 oder 39 Jahre alt geworden sein. Durch Vertauschen der Ziffern erhalten wir ein Lebensalter von 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83 oder 93 Jahren. Nur für $32 - 23 = 9$ werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Im Jahre 1978 wurde der Lehrer 32 Jahre alt; also wurde er im Jahre 1946 geboren.

Wir stellen nun die Lösung von *Ines Schönberg* aus Borna vor, die Schülerin der Klasse 5c der Dinter-Oberschule ist.

Ines löste diese Aufgabe wie folgt:

Für das im Jahre 1978 erreichte Lebensalter dieses Lehrers gilt $30 < \overline{ab} < 40$, wobei $\overline{ab}$ eine zweistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise darstellt. Wegen $\overline{ab} = \overline{ba} + 9$ gilt ferner $\overline{ba} < \overline{ab}$, und wegen $a = 3$ gilt somit $b = 1$ oder $b = 2$.

Wegen $31 - 13 = 18$ entfällt $b = 1$. Somit existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 3$ und $b = 2$. $(32 - 23 = 9)$

Aus $1978 - 32 = 1946$ folgt, daß dieser Lehrer im Jahre 1946 geboren wurde.

---

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ▪1860 Rolf liest ein Buch. Am ersten Tag schafft er 12 Seiten, am zweiten Tag den vierten Teil der noch zu lesenden Seiten, am dritten Tag die restlichen 57 Seiten. Wie viele Seiten umfaßt dieses Buch?

Im Heft 5/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, das Buch umfaßt $n$ Seiten; nach dem ersten Tag hat Rolf noch $(n - 12)$ Seiten zu lesen. Davon liest er am zweiten Tag $\frac{n-12}{4}$ Seiten. Nun gilt

$$\begin{aligned} 12 + \frac{n-12}{4} + 57 &= n, \\ \frac{n-12}{4} + 69 &= n, \\ n - 12 + 276 &= 4n, \\ 264 &= 3n, \\ n &= 88. \end{aligned}$$

Dieses Buch umfaßt 88 Seiten.

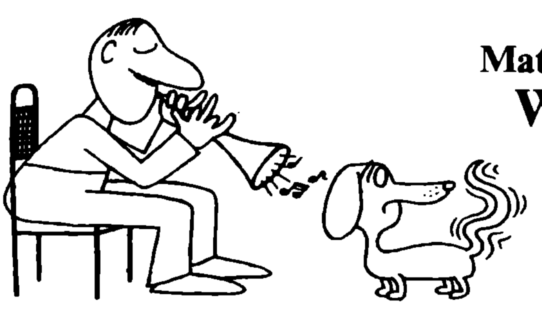
Wir stellen nun die Lösung von Christiane Höfer aus Lugau vor, die Schülerin der Klasse 6 b der Oberschule I ist.

Christiane löste diese Aufgabe wie folgt:

Angenommen, dieses Buch umfaßt $n$ Seiten. Am ersten Tag liest Rolf 12 Seiten; es verbleiben somit $(n - 12)$ Seiten. Am zweiten Tag liest Rolf den vierten Teil, am dritten Tag also dreimal den vierten Teil der verbliebenen Seitenzahl; das sind 57 Seiten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot (n - 12) &= 57, \\ n - 12 &= \frac{57 \cdot 4}{3}, \\ n - 12 &= 76, \\ n &= 88. \end{aligned}$$

Dieses Buch umfaßt 88 Seiten.



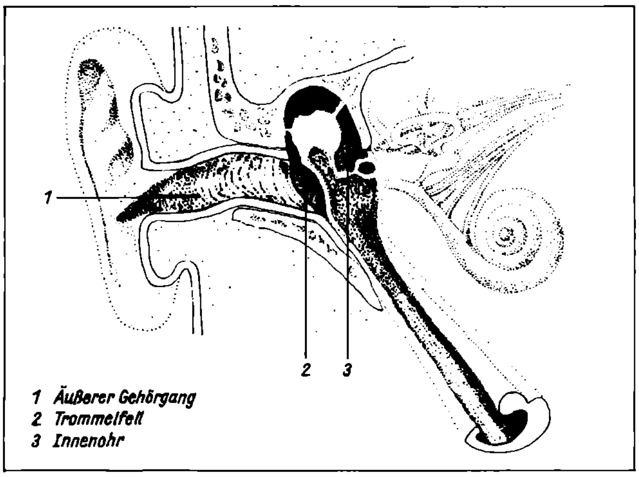
## Mathematik und Praxis

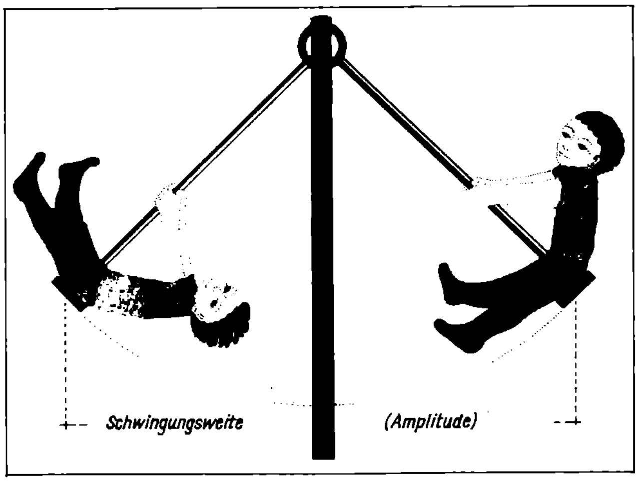
# Was ist Schall?

Wenn wir sprechen, singen, Instrumente spielen oder Geräusche erzeugen, spielen sich an winzigen Teilchen der Luft ganz erstaunliche Vorgänge ab, für uns allerdings unsichtbar.
Man faßt alle Töne, Klänge und Geräusche, kurzum alles, was wir hören können, unter der Bezeichnung Schall zusammen. Wenn wir unsere Sprechorgane betätigen, musizieren, mit dem Hammer schlagen, husten, niesen oder sonst ein Geräusch erzeugen, werden die Teilchen der Luft in sehr feine und schnelle Schwingungsbewegungen versetzt. Zunächst geraten nur die der Schallquelle unmittelbar benachbarten Luftteilchen in Schwingungen. Sie stoßen dann aber der Reihe nach ihre Nachbarn zu gleichen Schwingungen an.
Dieses Anstoßen breitet sich von der Schallquelle so schnell aus, daß schon nach $\frac{1}{10}$ s die Luftteilchen in Schwingungen geraten, die 34 m weit von ihr entfernt sind. In 1 s breitet sich der Schall in Luft 343 m aus. Man nennt dies die Schallgeschwindigkeit. Nicht nur in Luft und allen anderen Gasen, auch in Flüssigkeiten und Festkörpern breitet sich Schall aus, zum Teil sogar mit noch erheblich größerer Geschwindigkeit. Die Luftteilchen üben bei ihren Schwingungen einen schwachen Druck auf das Trommelfell des Ohres aus. Die feinen Druckschwankungen breiten sich in den inneren Teilen des Ohres aus und erzeugen Reize, die das Gehirn zu Gehörsempfindungen verarbeitet.

Veranschaulichen wir uns die Schallschwingungen durch den Vergleich mit der Schaukel! Ähnlich wie ein Kind auf der Schaukel bewegen sich die Teilchen der Luft, einer Flüssigkeit oder eines festen Körpers bei den Schallschwingungen hin und her. Die Teilchen bewegen sich dabei aber nicht etwa mit $343 \frac{m}{s}$ (Meter je Sekunde), sondern nur die Schallausbreitung erfolgt mit dieser Geschwindigkeit. Der Zustand des In-Schwingung-Geratens wandert also mit $343 \frac{m}{s}$ weiter. Es ist wie beim Abzählen der zum Appell angetretenen Schüler. Der Reihe nach ruft jeder seinem Nachbarn eine Zahl zu und wendet dabei den Kopf. Es bewegt sich aber nicht der Kopf des ersten Schülers die ganze Reihe entlang, sondern nur das Kopfwenden.
Jede Schwingung ist durch zwei Größen gekennzeichnet; die Frequenz (Schwingungszahl) und die Amplitude (Schwingungsweite). Die Frequenz ist die Anzahl der Hin- und Herbewegungen je Sekunde. Schaukelt ein Kind in einer Sekunde von der Mittelpunktslage einmal nach vorn, dann nach hinten und wieder genau zur Mitte zurück, so entspräche das der Frequenz von 1 Hz (Hertz). Diese Maßeinheit ist nach dem Physiker Heinrich Hertz benannt, der 1886 erstmals jene Art Schwingungen entdeckte und experimentell erzeugte, die man für den Rundfunk und das Fernsehen benutzt. Die Frequenzen der für den Menschen hörbaren Schallschwingungen reichen von ungefähr 16 Hz bis 20000 Hz. Die höchsten dieser Frequenzen können jedoch nur junge Menschen hören. Mit zunehmendem Alter geht die obere Grenze der hörbaren Frequenzen zurück. Hunde können noch den sogenannten Ultraschall mit Frequenzen von mehr als 20000 Hz hören. Von der Frequenz hängt die Tonhöhe ab: je höher die Frequenz, desto höher der Ton.
Die zweite kennzeichnende Größe, die Amplitude, entspricht der Wegstrecke zwischen den Endpunkten der Hin- und Herbewegung der Teilchen, vergleichbar mit der Entfernung zwischen der vordersten und hintersten Stellung einer Schaukel. Von der Größe der Amplitude hängt bei den Schallschwingungen die Lautstärke ab: je größer die Amplitude, desto größer die Lautstärke.
Bei der Ausbreitung der Schallschwingungen bleibt zwar die Frequenz gleich, aber die Amplitude nimmt ab. Die von der Schallquelle weiter entfernten Teilchen werden also nicht mehr zu Schwingungen von so großer Weite angestoßen wie die nahen. Daher wird die Lautstärke um so geringer, je weiter wir uns von der Schallquelle entfernen. Nur sehr lautstarke Geräusche wie den Donner können wir viele Kilometer weit hören, die menschliche Stimme aber nicht. Aus der Schallgeschwindigkeit in Luft ist übrigens leicht zu errechnen, wie weit ein Gewitter entfernt ist. Vergehen zwischen dem Blitz und dem Hörbarwerden des Donners zum Beispiel 24 s, so ist das Gewitter 24 km : 3 = 8 km entfernt, da sich der Schall in rund 3 s 1 km ausbreitet.

Leseprobe aus:
HANS KLEFFE
**Wie funktioniert denn das?**
*77 S., zahlreiche Abb., Preis: 6,50 M*
*Der Kinderbuchverlag Berlin*
*Bestell-Nr. 629 970 6*



# In freien Stunden · alpha heiter

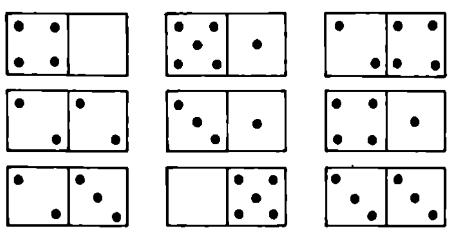
### 15151 $\pi$-Stellen aus dem Kopf

Einen neuen Weltrekord im Behalten von Stellenzahlen der unendlichen Ludolfschen Zahl $\pi$, die das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser angibt, hat der 46jährige Japaner Hideaki Tomoyori aufgestellt. Vor drei Zeugen zählte er in Tokio über drei Stunden lang insgesamt 15151 Stellen von $\pi$ (3,14159...) auf, ohne sich zu irren. Das Ergebnis wurde sofort mit einem Computer nachgeprüft. Den bisherigen Rekord hielt ein Brite mit 5050 Stellen.

### Domino

Es sind zwei Paar Dominosteine so auszuwechseln, daß die Summe in jeder der drei Spalten und in jeder der drei Reihen gleich 15 ist.

*Aus: Sputnik 8/79, Moskau*



### Geschenke verraten Namen

Drei Ehepaare, Meier, Müller und Schmidt, kaufen Geschenke.

(1) Jede Person kauft so viel Geschenke wie sie für ein Geschenk in Mark bezahlt.

(2) Jede Frau gibt 75 Mark mehr aus als ihr Mann.

(3) Anna kauft ein Geschenk mehr als Willi Meier, Luise ein Geschenk weniger als Hans Müller.

(4) Wie heißt Maria mit ihrem Familiennamen?

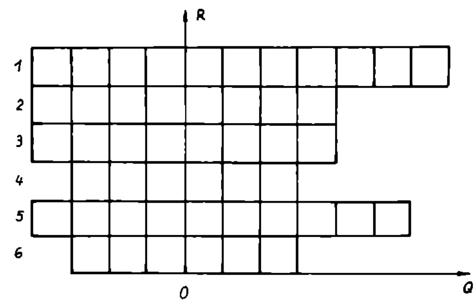
*Aus: WE, Köln, F. Sauer*

### Wie funktioniert denn das?

In die Zeilen der abgebildeten Figur sollen Wörter folgender Bedeutung eingetragen werden:

1. Eigenschaft natürlicher Zahlen $n$ mit $9 < n < 100$
2. Längeneinheit in der Schiffahrt
3. Eigenschaft von Geraden mit gleichem Abstand
4. deutscher Mathematiker (1487 bis 1567)
5. Teil einer gekrümmten Linie
6. achter Teil eines Raumes

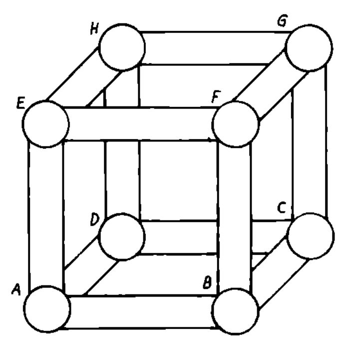
Sodann trage man in die Figur das Bild der Funktion $y = x^2$ ein. Dabei sei 0 als Ursprung, $0Q$ als Abszissenachse und $0R$ als Ordinatenachse sowie eine Kästchenlänge als Einheit angenommen.




Die Buchstaben in den Feldern, durch deren Inneres diese Linie verläuft, ergeben fortlaufend gelesen ein Mittel zur Darstellung von Funktionen.

*Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin*

### Zahlenrätsel – dreidimensional




Breitenrichtung

| | |
|---|---|
| *AB* | Primzahl zwischen $7 \cdot 10 - 3$ und $7 \cdot 10 + 3$ |
| *DC* | $33 + 6^2$ |
| *EF* | $(1 + 6 + 6 + 6) \cdot \sqrt[6]{64}$ |
| *HG* | $3{,}162776^2$ |

Höhenrichtung

| | |
|---|---|
| *EA* | $3{,}33222^3$ |
| *FB* | $(6:2)^4$ |
| *GC* | $\sqrt[4]{6561}$ |
| *HD* | Ordnungszahl des Schwefels oder $2^2 \cdot 2^2$ |

Tiefenrichtung

$AD$ $d$ des Kreises, wenn $u = 238{,}8$
$BC$ $\alpha$, wenn $\operatorname{arc}\alpha = 0{,}3316$
$FG$ $3^2 \cdot 3^2 - 1$
$EH$ $5{,}56776^2$

Die entsprechenden Zahlen unter die gegebenen Buchstaben geschrieben, ergeben das Geburts- und das Sterbedatum eines Staatsmannes der DDR.

*GEGHHFAD* *GAGCHCDG*

*Mathematikfachlehrer W. König, Berlingerode*

**Kryptarithmetik**

In den Schemata

a) $$\begin{array}{ccccc} cba & - & a & = & cbf \\ - & & + & & - \\ cfa & + & e & = & ccf \\ \hline bf & - & cf & = & df \end{array}$$

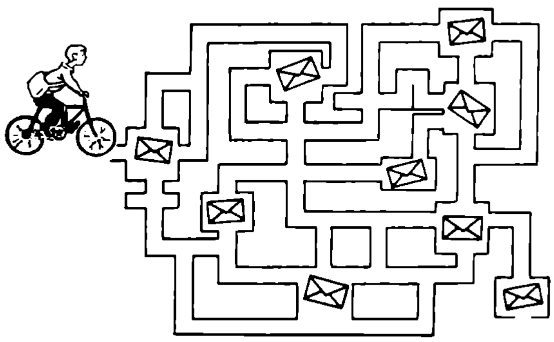
b) $$\begin{array}{ccccc} BBCD & - & EFD & = & GBD \\ : & & + & & - \\ G & \cdot & HE & = & IFJ \\ \hline BLD & + & LBE & = & IIE \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß man sechs richtig gelöste Aufgaben erhält. Dabei sind jeweils für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

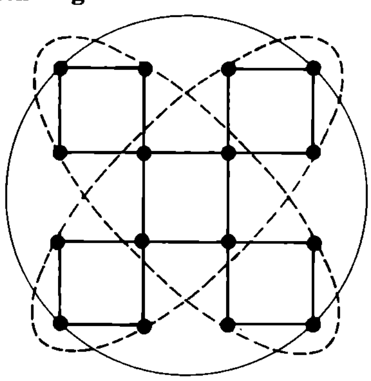
*Schüler Bernd Winkelmann, OS Karl Marx, Kl. 7 (a), Schmalkalden*
*Schülerin Petra Hahn, A.-Diesterweg-OS, Kl. 6 (b)*

**Der Bote und die neun Pakete**

Neun Pakete müssen eilig zugestellt werden. Der Bote sieht sich den Stadtplan an und weiß bald, wie er fahren muß. Er liefert alle Pakete ab, ohne ein Stück des Weges zweimal zurückzulegen. Wie verlief seine Route? *Aus: Sputnik, Moskau*

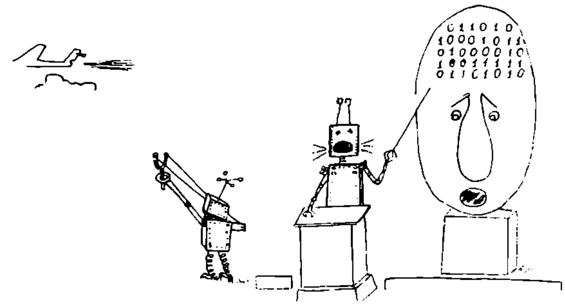


**Magische Figur**



Anstatt Punkte sind die Zahlen 1 bis 16 so zu ergänzen, damit die Summe am Umfang jedes Quadrats, jeder Ellipse und am Umkreis immer die gleiche ist. Insgesamt also 8 gleiche Summen.

*Ing. Jindřich Pěnčík, Praha*



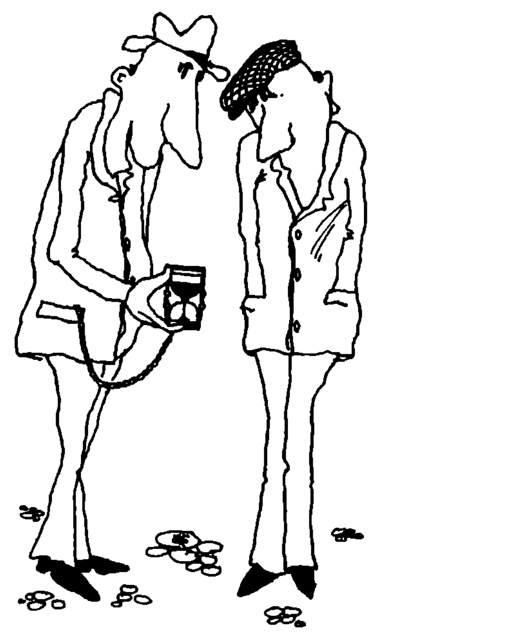
*Aus: Eulenspiegel 15/70, L. Otto, Leipzig*

**α-Produkte**

In nachfolgenden Gleichungen sind die Buchstaben so durch Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{aligned} P\alpha E &= \alpha \cdot \alpha\alpha \\ R\alpha\alpha T &= P \cdot \alpha\alpha\alpha \\ O\alpha\alpha\alpha K &= R \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha \\ D\alpha\alpha\alpha\alpha U &= O \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ U\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha D &= D \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ K\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha O &= U \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ T\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha R &= K \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ E\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha P &= T \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \end{aligned}$$

*Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*



„Es ist genau 4600 Sandkörner nach 16 Uhr...“
„Ich muß Sie aufschreiben – Sie parken verkehrt!“

*Aus: Für Dich 32/79, H.-D. Rößler, Berlin*

# alpha-Wettbewerb 1978/79

# Abzeichen in Gold

**Für zwölfjährige Teilnahme**
Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Püffeld, Hennigsdorf; Eckhard Schadow, Oranienburg

**Für elfjährige Teilnahme**
Martin Ermrich, Dresden; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle

**Für zehnjährige Teilnahme**
Holger Jurack, Burkau; Ullrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald; Rainer Gutsche, Herzberg

**Für neunjährige Teilnahme**
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Regina Kupfer, Miltitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Bernhard Tschada, Sondershausen; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Gudrun Drews, Wöbbelin; Marid Helbig, Frankfurt.

**Für achtjährige Teilnahme**
Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin, Ulf Ritschel, Booßen; Clemens Jaunich, Cottbus; Wolfgang Seeber, Gehren; Irmhild Bittner, Bengt Nölting, beide Greifswald; Ingo Lenz, Hagenow; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Karsten König, Rostock; Reinhold Beckmann, Henri Hofmann, beide Schmalkalden; Birgit Rosenberger, Suhl; Manfred Häußler, Westgreußen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornewitz; Lothar Gruber, Linz (Österreich)

**Für siebenjährige Teilnahme**
Volkmar Türke, Auerbach; Andreas Gude, Cordula Becher, Andrea Nießen, alle Berlin; Peter Wiehe, Bischofferode; Ralf Ott, Demmin; Frank Regensburger, Michael Apitz, Werner Jeroch, Reinhard Pohl, Ralf Kretschmer, Uwe Hanisch, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Heidelore Stallbohm, Eldena; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Claudia Endtricht, Görlitz; Christian Wolf, Greifswald; Jens Negwer, Grimma; Burkhard Rahr, Groß-Neundorf; Günter Mosel, Gülze; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Armin Körner, Leipzig; Steffen Langbein, Lichte; Gabriele Otto, Meißen; Thomas Richter, Neuhausen; Andreas Massanek, Neusornzig; Thomas Köhler, Oederan; Michael Thränhardt, Oranienbaum; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz; Michael Zwicke, Riesa; Torsten Löwe, Schleiz; Haiko Müller, Heinz-Olaf Müller, Almut Beckmann, Barbara Gehb, Frank Gießler, alle Schmalkalden; Bernadette Domaschke, Seifhennersdorf; Hans Dietrich Schwabe, Sondershausen; Holger Hoppe, Stendal; Dirk Herrmann, Töplitz; Sylvia Zipf, Waldheim; Sylvia Kunze, Weißenfels; Carola Senft, Wingerode; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick; Michael Feudel, Leinefelde

**Für sechsjährige Teilnahme**
Udo Clemens, Altenburg; Frank Maschke, Altendorf; Henri und Dieter Koch, Arnstadt; Olaf Rausch, Aue; Burkhard Maeß, Bad Doberan; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Katrin Kolliwer, Mario Binkowski, Birgit Ewald, Michael Prescher, Claudia Ziehm, alle Berlin; Werner König, Berlingerode; Adelbert Heddergott, Büttstedt; Jens Schumann, Coswig; Ralf Hortig, Andrea Dreyer, Iris Grundke, Ellen Harnath, Jens Purand, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Lutz Friedemann, Angela Jircik, Uta Oelschlägel, Klaus-Dieter Gloe, Annett Körner, Peter-Alexander Pöhler, Frank Wittwer, Matthias Apitz, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Daina Semper, Thomas Böhme, beide Eisleben; Sabine Lützkendorf, Uwe Kintzel, beide Erfurt; Heike Reckenbeil, Fambach; Thomas Gerlach, Heike Brüggemann, Ute Ribbe, Bernd Hartwig, Mike Liebegott, alle Friedeburg; Viola Richter, Garitz; Sylvio Klose, Gera; Christof Herrmann, Greifswald; Bernd Dübe, Gr.-Bademeusel; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß-Wüstenfelde; Hubert Steinmetz, Grüningen; André Motz, Grünhain; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Knut Bauer, Hohenstein; Undine Nathan, Hoyerswerda; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Ronald Rösch, Marko Hanke, Arnd Rösch, alle Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Andreas Bernstein, Lehmitz; Thomas Richter, Jens Rudolf, beide Leipzig; Heimo Woitek, Leinefelde; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett Weise, Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Peter Stolze, Möhlau; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Matthias Theurich, Olbersdorf; Rüdiger Düsing, Osterburg; Ute Möllhoff, Piesau; Volker Steuer, Pirna; Jürgen Krahl, Plauen; Carmen Henze, Pratau; Jens Jacobi, Jens-Uwe Sprengel, beide Potsdam; Sigrid und Jens-Peter Planke, beide Premnitz; Karsten und Falk Breuer, beide Radebeul; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Heiko Lehmann, Andreas Matthus, beide Rostock; Ina und Uwe Ebert, beide Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Helmut Engelmann, Sachsendorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Jens Gollmer, Werner Häfner, Christine Döll, Sabine Endter, Cornelia Schädlich, Martin Tengler, alle Schmalkalden; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Roderich Winkler, Schwerin; Annelie Meyer, Silberstraße; Simone Mahlow, Barbara Tschada, beide Sondershausen; Thomas Eichhorn, Steinach; Simone Teichmüller, Stöckey; Dietmar Ulbricht, Velten; Beate Nähler, Ralf Kurch, Beate Seiler, alle Weimar; Uwe Felsberg, Worbis; Uwe Müller, Wrocław (VR Polen); Christoph Chojetzki, Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Uwe Langer, Birgit Thomas, Gabriele Herzig, Regina Kreul, Steffen Pankow, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken; Lutz Heinrich, Bad Langensalza

**Für fünfjährige Teilnahme**
Frank Kämpfer, Holger Herold, beide Altenburg; Hajo Herbst, Altenpleen; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Thorsten Thonndorf, Uwe Maaz, beide Bad Salzungen; Birgit Wollschläger, Bergwitz; Stefan Berg, Frank Bendin, beide Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Astrid Markgraf, Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Inge Beck, Pia Zimmermann, beide Bleicherode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Birgit Weishaupt, Bülow; Ralph Voigtländer, Guido Mehne, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossebaude; Ulrike Baumann, Coswig; Andreas Schlecht, Ralph Bernhardt, Kathrin Magister, Susanne Liebelt, alle Cottbus; Karola Sarodnik, Dallgow; Elisabeth Schültke, Dessau; Manfred Kutschank, Deutschenbora; Monika Nolte, Dingelstädt; Harry Höfer, Dorndorf; Susanne Müller, Michael Berton, Michael Giesecke, Helmuth Goldberg; Thomas Hartwig, Ingolf Körner, Michael Pietschner, Jens Rotsch, Carolin Engel, Jürgen Gräfenstein, Lutz Jeroch, Jörn Wittig, Ralph Rönsch, alle Dresden; Peter Weise, Thomas Marek, Matthias Arbeiter, Mandy Rinklin, alle Eisenach; Volker Georgy, Uwe Strohmeier, Henrik Seifert, Renate Lützkendorf, Dirk-Thomas Orban, alle Erfurt; Michael Wagner, Iris Abt, beide Fambach; Jörg Butter, Freiberg; Matthias Bär, Steffi Haucke, Ralf Baumhekel, alle Freital; Andreas Fintzel, Friedeburg; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Yvonne Pforr, Matthias Kasparek, beide Gräfenhainichen; Manuela Heims, Astrid Renz, Silvia Falk, Andreas Wolf, Katharina Herrmann, Ines Gath, Gunnar Müller, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Stefan Göckeritz, Greifswald; Regine Binder, Halle-Neustadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Volker Reck, Heiligenstadt; Eike Harmel, Hohenferchesar; Kerstin Hirsch, Holzdorf; René und Chonchita Schüppel, Mathias Grundmann, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Fliegner, Jarmen; Birgit Hofmann, Jens Pönisch, Anett Märker, Andreas Hengst, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Silke Zimpel, Kefferhausen; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Karsten Drescher, Leinefelde; Peter Kasper, Stephan Bönewitz, Katrin Bormann, Ines Bauer, Heiko Rudolf, Jörg Schwarzer, alle Leipzig; Manuela Marpert, Markersdorf; Uwe Zscherpel, Meerane; Thomas Eller, Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Kerstin Friedrich, Mittelherwigsdorf; Antke Kössel, Mittelschmalkalden; Angelika Radtke, Mittweida; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Per Witte, Mittenwalde; Uwe Grasenack, Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Kerstin Feigel, Neundorf; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Gerald Köthe, Niederorschel; Anett Rabe, Birgit Uhlmann, beide Oberlungwitz; Kerstin Johannes, Oranienbaum; Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pinnau; Kerstin Zirnstein, Pirna; Thomas Mittelbach, Plessa; Claudia Würker, Reichenbach; Ralph Neumann, Ribnitz; Astrid Wruck, Susanne Forstreuter, beide Rostock; Christiane Dobberstein, Rathenow; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Cornelia Grulke, Schernberg; Thomas Gerth, Henri Kriechling, Susanne Heuer, Christoph Wille, alle Schmalkalden; Elke Meißner, Sitzendorf; Matthias Schneiderheinze, Sondershausen; Martin Förster, Söllichau; Silke Reuscher, Roland Goldenbogen, beide Stralsund; Elke Rößner, Strausberg; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Michael Hauff, Teuchern; Margit Creutzburg, Thal; Annekatrin Heuer, Tieckow; Ute Bergmann, Katrin Schatz, beide Torgau; Kerstin Spiegel, Waldheim; Stefan Syring, Warin; Kerstin Ackermann, Wasungen; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Olaf Lenz, Weixdorf; Maik Rehtanz, Wernshausen; Eric Link, Wismar; Karsten Schlutter, Wittstock; Torsten Noack, Wittenberg; Birgit Schmidt, Worbis; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Roland Wehmeier, Torsten Ninebuck, beide Wüsteney; Burkhild Kehnscherper, Wustrow; Michael Holdys, Ziesar; Bernd Dunger, Heimo Henschelmann, Anett Schulzensohn, alle Zittau; Bert Hoffmann, Söllichau

**Für vierjährige Teilnahme**
Frank Baumgart, Aschersleben; Knut Rommel, Bad Liebenstein; Margret Detsch, Bad Salzungen; Kirsten Rechner, Baruth; Jürgen Pommerening, Ute Huebscher, Marc Schewe, Sabine Mantel, alle Berlin; Stefanie Löffler, Blankenfelde; Tilman Völzke, Böhlen; Brita und Heike Hoffmann, beide Boizenburg; Stefanie Began, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Steffen Grützner, Burkau; Royald Lenk, Stefan Jakubaschk, Kristina Roeke, Christine Pompe, Axel Harnath, alle Cottbus; Petra Sarodnik, Dallgow; Thomas Claus, Demitz-Thumitz; Ines Fehrmann, Gabriele Fischer, Veronika Enkelmann, Heike Georgi, Heike Taschenberger, alle Deutschenbora; Thomas Richter, Die

las; Annette Hindermann, Dagmar Schunck, beide Dingelstädt; Gabriele Sprotte, Döbeln; Helga Loos, Dörfel; Manuela Schwenke, Dohna; Asja Nürnberger, Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, Jörg Hempelt, Stefan Gärtner, Antje Kühn, Cornelia Müller, Ulf Riechen, alle Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Birgit Rößler, Kerstin Mans, Marlies und Petra Patz, alle Eisenach; Peter Schlag, Steffen Much, beide Eisenberg; Volkmar Kolleck, Eisenhüttenstadt; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne Schreiber, Matthias Schreiber, beide Elsterwerda; Thomas Schmidt, Heike Heber, beide Erfurt; Simone Oetzel, Kathrin Sievers, Volker Heymel, alle Fambach; Holger Büchler, Feldberg; Reinhard Walter, Finsterwalde; Kathrin Schädlich, Floh; Kathrin Hoffmann, Frankfurt; Elke Jahn, Freiberg; Cornelia Voigt, Carla Müller, beide Friedeburg; Matthias Bauer, Genthin; Sixten Bussemer, Gera; Urte Conrad, Gielow; Kerstin Schneider, Goßwitz; Thomas Silz, Gräfenhainichen; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Klaus Siemoneit, Grimmen; Kerstin Mauerhof, Grube; Grit Möckel, Grünbach; Uwe Ansorge, Grünhain; Günter Schichinsky, Volker Kunert, Thomas Reissig, alle Halle; Roger Fischl, Halle-Neustadt; René Geipel, Hartha; Gudrun Liebe, Hartmannsdorf; Bärbel Päßler, Kerstin Wickner, Katrin Ullmann, Frank Eberlein, Heinz Wickner, alle Hermannsdorf; Thomas Jez, Herzberg; Jens Fiebig, Höhnstedt; Frank Thümmler, Horka; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Marion Endrigkeit, Jessen; Conny und Hanjo Sauermann, beide Joachimsthal; Birgit Georgi, Holger Leonhardt, Holger Friedrich, Andreas Niepel, Frank Hübler, Andreas Berner, Christiane Glumann, alle Karl-Marx-Stadt; Dany Eiche, Manuela Wohlfarth, beide Kieselbach; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Andreas Kardos, Köthen; Joachim Braun, Uwe Seidel, beide Koßdorf; Frank Batschon, Krauschwitz; Dirk Eigenwillig, Lauchhammer; Gerald Pfitzenreuter, Roland Bolze, Barbara Surma, Jörg Drechsel, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Ralph Gruber, beide Leipzig; AG Math. Kl. 10a/b der Wilhelm-Pieck-OS Lichte; Heike Nowara, Uwe Lautenschläger, beide Lössau; Ute Fischer, Lübbenau; Birgit Arndt, Loitz; Grit Heyde, Latdorf; Carola Hönn, Matthias Neundorf, beide Meiningen; Peter Kürbis, Meißen; Christiane Krause, Menteroda; Andrea Richert, Mühlhausen; Uwe Würker, Mülsen; Katrin Wilke, Nauendorf; Thomas Lange, Neustadt; Dieter Seifert, Pinnau; Math. Zirkel Kl. 9/10 der EOS R. Fetscher, Uwe Schulze, beide Pirna; Axel Schulz, Georg Schreckenbach, Thomas Schreckenbach, Rainer Räthe, Karsten Milek, Sigurd Assing, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausitz; Tim Planke, Premnitz; Katrin Arnhold, Radebeul; Lutz Hübschmann, Raschau; Katrin Lippuner, Rheinsberg; Hartmut Lipke, Ribnitz; Ina und Manfred Hille, Uwe Mattutat, alle Riesa; Uwe Holubek, Rietschen; Dieter Grebner, Roßdorf; Ulrike Martin, Anette Müller, Klaus Vilbrandt, Sabine Heinze, Ines Dalisda, Sylke Giese, Anett Becker, Dietlind Stolle, alle Rostock; Torsten Köchy, Rotta; Andreas Hempler, Rüdnitz; Katrin Heim, Astrid Keller, Christine Mangold, Manuela Recknagel, Sabine Artschwager, Ines Baumeister, Martina Büchner, Evi König, alle Steinbach-Hallenberg; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladitz; Anke Grosse, Mathias Brandt, Kerstin Müller, Brigitte Schmidt, Yvonne Recknagel, Sören Holland-Cunz, Silke Köllmann, Anka Wilhelm, Andre Bartsch, Frank Häfner, Matthias Holland-Nell, Friedo Lohse, Claudia Häfner, alle Schmalkalden; Markus Wolf, Schönbach; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Sylvia Schwenke, Schwedt; Ralf Beckert, Schwerin; Jens Gläßer, Seiffen; Michael Hruschka, Senftenberg; Torsten Roeger, Ekkehard Breuer, beide Stendal; Thomas Merten, Stralsund; Katrin Rosenberger, Suhl; Klaus Pfeiffer, Taubach; Holger Nörenberg, Antje Wulf, beide Teltow; Christine Mohr, Teterow; Lars Hermann, Töplitz; Kerstin Anschütz, Waren; Petra Ackermann, Wasungen; Ute Hansmann, Christiane Hotze, beide Weißenborn; Birgit Schmidt, Weißwasser; Manfred Petzelis, Wendisch-Rietz; Ralf Brada, Ingo Förster, Dirk Hilbrecht, Mathias Scharf, Frank Schöne, alle Wiehe; Carmen Rauscher, Wilkau-Haßlau; Marita Kalisch, Wismar; Berrit Richter, Wittenberg; Ralph Nemitz, Wittenförden; Steffen Klimpel, Uwe Eix, beide Wolgast; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl und Jochen Oertel, beide Zeitz; Torsten Eidner, Uwe Müller, beide Zeulenroda; Olaf Kretschmar, Kerstin Hoffmann, Ingrid Soblik, Michael Mönch, alle Zittau; Norbert Welzel, Birgit Schenke, beide Zschornewitz; Uta Escher, Norbert Schlosser, beide Zwickau; Peter Damaschke, Reiner Nolte, Rainer Engel, Carola Günther, Bettina Hagemann, Heidrun Weißenborn, alle Leinefelde; Götz Klüttig, Guben; Ralf Heubner, Wolfen

**Für dreijährige Teilnahme**

Preisträger: **Jens** und **Sven Fache**, beide Altenburg; **Karin Gröger**, Berlin; **Thomas Streich**, Brandenburg; **Olaf Sasse**, **Karsten Mittag**, beide Cottbus; **Ruth Backhaus**, **Mario Dette**, beide Dingelstädt; **Werner Kirsch**, **Brigitte Rotter**, **Catherin Engel**, **Günther Gehre**, alle Dresden; **Ralf Arnold**, Eisenach; **Andrei Josiek**, Eisenhüttenstadt; **Elvira Stallbohm**, Eldena; **Kerstin Möller**, Fambach; **Silke Bochmann**, Frankfurt; **Jörn Wintsche**, Grimma; **Frank Thieme**, Karl-Marx-Stadt; **Bernd Schmutzler**, Kirchberg; **Jens-Uwe Eigenwillig**, Lauchhammer; **Doris Grünler**, Lössau; **Torsten Schulz**, Merseburg; **Heidi Teidge**, **Jörg Schmidt**, beide Neubrandenburg; **Thomas Heldrich**, Oberlungwitz; **Dietmar Hennig**, Olbersdorf; **Gudrun Zirnstein**, Pirna; **Torsten Kühn**, **Olaf Köbernick**, beide Potsdam; **Gitta Schöne**, Rostock; **Jürgen Schmalisch**, **Evelin Neumann**, beide Rotta; **Ronald Bojarski**, Saßnitz; **Michael Gerth**, Schmalkalden; **Gabriele Wolf**, Trusetal; **Evelin Beyer**, Wegefarth; **Sylvia Feigl**, **Ines Hoffmann**, beide Weißwasser; **Marena Pannier**, Uthausen; **Uwe Pallas**, Zella-Mehlis; **Jörg Wenzel**, Zeulenroda

Michael Elte, Ahlum; Petra Kellner, Ammern; Torsten Schröter, Apolda; Katharina Fischer, Petra Weinhold, beide Bad Gottleuba; Silke Schröder, Bad Kleinen; Maike Jorzyk, Bad Kleinen; Susanne Köhler, Markus Kostrzewa, beide Bad Liebenstein; Jens Tautenhahn, Annett Winter, Marei Hellmann, alle Bad Salzungen; Esther Goroncy, Bahrendorf; Silke Rechner, Baruth; Christian Schuhart, Benndorf; Steffen Nowak, Bergen; Sylvia Granzow, Bergwitz; Joachim Groß, Sylvia Köpstein, Sven Bienioschek, Michael Grünberg, Michael Krüger, Christian Schulze, Ulrich Krüger, Bert Andree Zucker, Dirk Grabner, Katrin Prescher, Ines Stephanowsky, Martin Gröger, Thomas Schunke, alle Berlin; Rosina Nensel, Ina Ficker, beide Bermbach; Heidrun Sourell, Bernau; Holger Schieck, Mike Groß, Elke Schubert, Bernd Förster, Heike Berger, alle Bernsbach; Gabriele Kabel, Beyernaumburg; Roland Hesse, Blankenburg; Uwe Kühne, Blankenfelde; Astrid Goetzke, Blowatz; Evelyn Schmidt, Blumberg; Marion Pöpel, Danilo Richter, beide Bockendorf; Andreas Sprigade, Jens Taggeselle, beide Borna; Marlis Schröder, Brandenburg; Detlef Conrad, Braunsbedra; Uta und Fred Heiland, Breitenbach; Gitta Fischer, Detlef Zilse, beide Bristow; Ralf Häcker, Sylvia Burgemann, beide Britz; Georg Lang, Burg-Spreewald; Torsten Friedrich, Butzow; Uwe Schütze, Camin; Wieland Stengl, Calbe; Detlef Baier, Christian Kunze, beide Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnik, Dallgow; Georg Kirchner, Dermbach; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Uta Schäfer, Dessau; Hanna Baumgarten, Beate Meinhardt, Bärbel Biendarra, Petra Bülow, Gabi Stöber, Wolfgang Moritz, Simone Marks, Beate Opfermann, Sabine Rindermann, Astrid Schunck, Ralf Meier, Beate Jung, alle Dingelstädt; Henry Jahn, Dippoldiswalde; Mario Jäpel, Dohna; Kathrin Wustmann, André Pohlers, Ingolf Baumann, Rita Lambrecht, Maja Oelschlägel, Frank Weile, Petra Kohser, Michael Rockstroh, Annett Friedemann, Stefan Franze, Grit Kammer, Olaf Schulz, Thomas Müller, Ursula Schröter, Karsten Zosel, Ronald Lehmann, Heike und Lutz Lauter, Christine Kirsch, Ute Schulze, alle Dresden; Hardy Kutzscher, Dürrenhofe; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wollert, Edderitz; Olaf Hein, Eisenach; Astrid Kafka, Katrin Schröter, Frank Stefan, alle Eisleben; Angela Wolter, Elster; Gerd Heber, Matthias Synold, beide Erfurt; Tino Heber, Falkenberg; Stefan Danz, Mirko Storch, Silvio Reinhardt, Bärbel Beder, Elke und Eckhard Petter, Marina Heller, alle Fambach; Anke Adolf, Feldberg; Steffen Müller, Feldengel; Karin Danz, Reinhardt Herrmann, beide Floh; Regine Stottmeister, Fokkendorf; Karsten Meißner, Forst; Antje Hollstein, Fred Meltke, beide Frankfurt; Olaf Drewning, Thomas Leipner, Anett Forberg, Birgit Voigtmann, alle Freiberg; Jörg Schaarschmidt, Fürstenwalde; Conny Steube, Georgenzell; Jens Franke, Gera; Bernd Brandtner, Gn. Schildau; Volker Winkler, Torsten Siebert, beide Görlitz; Kathrin und Sylke Steinke, Görzke; Marion Meyer, Goldbeck; Thomas Stoffel, Grabow; Frank Creutzburg, Gransee; Mike Pfeiffer, Marco Silz, beide Gräfenhainichen; Birgit Fiebach, Frank-Michael Wegener, Annette Herm, Achmed und Britta Schulz, Rita Döhner, Anette Peters, Thomas Schubel, Gunther Herrmann, Heiko Pegel, Martin Herrmann, Karsten Schulz, alle Greifswald; Frigga Rudloff, Ute Bräuer, Barbara Lißner, Elke Rothe, alle Greußen; Steffen Lausch, Matthias Hunger, beide Grimma; Axel Schulz, Grimmen; Kerstin Steinecke, Uta Tischer, beide Großbodungen; Bettina Weser, Großenhain; Annett Fischer, Großlöbichau; Uta Reger, Großörner; Kerstin Vinke, Gr. Zarnewitz; Kirsten Schlegel, Grünhain; Christina Otto, Güstrow; Anke Misch, Michael Schulze, beide Halberstadt; Matthias Schünemann, Frank Siebert, beide Halle; Bernd Stammler, Halle-Neustadt; Cordelia Krippner, Kerstin Frank, beide Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Anja Kusserow, Haynrode; Gerd Schmelz, Haynsburg; Carsten Klug, Hartha; Frank Pampel, Heinrichsort; Heike Spittler, Hennigsdorf; Sabine Trommler, Ingo Wickner, beide Hermannsdorf; Barbara Illek, Steffen Frigge, beide Herzberg; Axel Herbst, Hohendodeleben; Günter Dittmar, Hohenseeden; Janett Bratfisch, Uwe Rahm, beide Hohenstein-E.; Hagen Fritsch, Hosena; Julia Frankenstein, Hundeshagen; Claus Janke, Ilmenau; Matthias Katzschmann, Jena; Peter Dittmar, Kaltennordheim; Jutta Ritzke, Karbow; Jens Kosche, Ulrike Lang, Ralf Lezius, Matthias Solf, Jens Siegel, Rico Müller, Heike Faßl, Steffi Rudolph, Mathias Womacka, Petra Klemm, Frank Winzer, Frank Kutschebauch, alle Karl-Marx-Stadt; Hans-Ulrich Hahn, Karlsburg; Birgit Sandhof, Kasnevitz; Daniela Meyer, Beate Meyer, Kerstin Soschinka, Iris Niebling, Bodo Benick, Liane Hagedorn, Dagmar Heublein, Ulrike Kister, Susanne Wenig, Annette Mey, Ramona Krauß, Kerstin Schirmer, Simone Wenig, Silvia Fischer, Bärbel Keßler, Kerstin Kern, Heike Josupeit, alle Kiselbach; Anett Queck, Kathrin Geßner, beide Kirchberg; Birgit Plewe, Kleinmachnow; Gert Wendland, Kleinwolmsdorf; Susanne Strackhaar, Torsten Steinborn, Kathrin Marr, Susann Schaede, Corinna Matzdorff, Karla Behrendt, alle Klietz; Christoph Hübel, Königsee; Ines Reichert, Königs Wusterhausen; Elke Willek, Kriebitzsch; Vera Montag, Küllstedt; Olaf Schwiebus, Lauchhammer; Ralf Knott, Kerstin Urban, beide Leimbach; Carola Pfitzenreuter, Ilona Mehmert, Jürgen Bolze, Ralf Weiße, Sylvia Hahnefeld, alle Leinefelde; Heike Scherf, Elke Hoffmann, Ingrid Leithold, Uta Zießmer, alle Leisnig; Uta Hubrig, Leipzig; Stefan Hähnel, Leuna; AG Math. Wilhelm-Pieck-OS Kl. 7b, Lichte; Barbara Roitner, Linz (Österreich); Udo Eckert, Lobenstein; Ingo Göll, Ralf Schmidt, beide Lössau; Katja Rosenbohm, Löwenberg; Karl-Heinz Gohra, Lohsa;

Jenny Pelzer, Thomas Blaffert, beide Lübbars; Sabine Gerlach, Lübs; Falk Blaurock, Lübbenau; Grit Bleil, Lutz Hausdorf, beide Lugau; Peter Zienicke, Kerstin Hansen, Fritz Truthe, alle Magdeburg; Ulf Brauner, Markkleeberg; Matthias Männel, Mehltheuer; Sylvia Wessely, Ringo Dreßler, beide Meiningen; Marlies Hahnefeld, Meißen; Beate Krause, Menteroda; Dany Zeutzschel, Merseburg; Silke Leutloff, Mestlin; Jürgen Welz, Meyenburg; Karsten Schumacher, Metschow; Sven Winkler, Minkwitz; Hilmar Lorenz, Michael Simang, beide Mittelherwigsdorf; Ramona Richter, Mittelndorf; Monika Eberhard, Mühlhausen; Ina Prescher, Uwe Marinitsch, beide Neubrandenburg; Bodo Braune, Neuburxdorf; Andrea Weber, Sylke Trojovsky, beide Neukirch; Bettina Lohmann, Neundorf; Axel Weyrauch, Neumühle; Holger Alsguth, Neuseddin; Petra Hohlfeld, Christine Hoppenheit, beide Neustadt; Susanne Ziehnert, Neustrelitz; Annett Ludwig, Niederorla; Petra Barthel, Irene Hesse, Jürgen Siebert, Astrid May, Birgit Meier, Ines Birkefeld, Tobias Kaufhold, alle Niederorschel; Markus Schulz, Ndr.-Seifersdorf; Jutta Reißmann, Niesky; Bärbel Wiederhold, Kerstin Paul, beide Nordhausen; Andrea Friedrich, Nüncheritz; Nils Pohler, Oberlungwitz; Gabi Kuhnke, Petra und Kerstin Köbke, alle Oranienburg; Tom Schilling, Sabine Oestreich, beide Oschersleben; Klaus Gehle, Owstin; Margit Möllhoff, Piesau; Gabriele Lanckau, Steffen Gottschlich, beide Pirna; Manuela Krause, Plauen; Petra Baldauf, Annette Ribbeck, Andreas Plötz, Simone Burmeister, Tilo Benens, alle Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Dirk Lobbes, Pritzerbe; Karl-Heinz Fandrey, Prenzlau; André Breuer, Tobias Holzapfel, beide Radebeul; Hartwig Reichel, Frank Berndt, beide Radeburg; Jörg und Carsten Stiehl, Radewege; Andreas Korb, Raschau; Frank Unger, Rackwitz; Jens Seifert, Lutz Grünig, beide Reichenbach; Kristian Lauritsen, Reichenberg; Katrin Ungethüm, Reinsdorf; Gabi Pause, Reitzenhain; Falk von Seck, Ribnitz; Heike Lüttich, Ringleben; Katrin Wischnewski, Silke Grubick, Anke Wagner, Dirk Gretzler, Kathrin Hofmann, alle Röbel; Peter Meng, Röblingen; Stefan Wolf, Jens Kellermann, beide Rohr; Ines Gülden, Roitzsch; Michaela Grob, Ute Hilse, Annette Weisheit, Sybille Cotta, alle Roßdorf; Andreas Jahnel, Frank Holle, Anette Voigt, Henry Hartmann, Peter Kirschner, alle Rostock; Claudia Lieske, Elke Miemel, Simone Voigt, alle Saalfeld; Sylvia Grunow, Sangerhausen; Karola Klitsch, Scharlibbe; Knut Drieschner, Schleiz; Holger Laube, Heike Hader, beide Schlotheim; Sybille Heuer, Gabi und Beate Rein, Birgit Nößler, Toralf Simon, Bert Ilgen, Thomas Möller, alle Schmalkalden; Simone Eisenbrandt, Schnellmannshausen; Sylke Lüder, Schönborn; Silke Meißgeier, Schönbrunn; Bernd Kirchheim, Schöndorf; Liane Pappe, Angela Böttcher, Heike Beutel, alle Schönfeld; Thomas Tiedtke, Silke Straubel, beide Schorssow; Sylvia Börner, Schwabsdorf; Thomas Pfennigschmidt, Schwerin; Jens Hoffmann, Sebnitz; Urte Tauer, Heike Nagel, beide Seegrehna; Tino Grau, Andreas Prpic, Volker Leutheuser, Thomas Vorndran, alle Sonneberg; Helfried Heubner, Stralsund; Stephan Meyerhöfer, Strasburg; Sabine Dziatzko, Corina Kaiser, Hans-Peter Fretschen, Stefan Kührt, Marion Hausdörfer, Thomas Weiner, Petra Preiß, Ines Nothnagel, Katrin Pfannschmidt, Pirka Godau, Steffi Bahner, Petra Schmidt, Gabi Knebel, Dirk Walther, Wilfried Beckmann, Iris Campesato, Frank König, alle Steinbach-Hallenberg; Ramona Löser, Stendal; Sabine Steddin, Tangerhütte; Sabine Scheller, Teltow; Thomas Hantel, Toralf Heene, beide Teterow; Uwe Weißenborn, Teutschenthal, Ellen Fleischhauer, Trebra; Heiko van Schyndel, Olaf Rude, beide Trebsen; Ines Döll, Trusetal; Falk Winter, Uhyst; Marion Vogt, Uthausen; Monika Hennicke, Vacha; Reiner Burkhardt, Voigtsdorf; Hans-Jörg Starkloff, Waltershausen; Regine Katzy, Meike Dallüge, Jana Martens, Birgit Lorenz, Astrid Iwanski, Antje Karwath, Christine Fischer, alle Waren; Jens Ackermann, Wasungen; Jens Köhler, Weida; Hartmut Boettcher, Marco Götz, Thomas und Torsten Ratz, Dorothee Gebuhr, alle Weimar; Marita Brodhun, Beatrice Gatzemeier, Martina Grünewald, Heidrun Tschirner, Guido Hausmann, Reinhard Ritter, Verena Koch, Carola Zinke, Margit Burian, alle Weißenborn; Janett Holub, Steffen Konietzky, Beate Hentschel, Antje Heuckendorf, alle Weißwasser; René Hirschfeld, Wernigerode; Mario Handke, Uwe Mauf, beide Wiehe; Petra Braumüller, Wiener Neustadt (Österreich); Cathrin Franke, Wiesenburg; Katrin Krüger, Wildau; Karin Glosse, Anett Träger, beide Wingerode; Annett Seidel, Agnes Jorzick, Gundula Lenz, alle Wismar; Doreen Badge, Guido Köhnke, Kerstin Häntschke, Petra Zander, Andreas Klappstein, Klaus Krügel, Steffen Thiel, Steffen Noack, Susanne Grubbert, Uwe Mai, alle Wittenberg; Petra Brinkmann, Ralf Lemke, Thomas Reinke, Jens Müller, Jörg Trojan, Dirk Michaelis, Bernd Frank, alle Wolgast; Frank Truckenbrodt, Wolfen; Sonja Güssow, Wollin; Christine Brandner, Helge Feldmann, beide Wüstenbrand; Gabriele Schwarzer, Wulfen; Steffan-Lutz Bölker, Wusterwitz; Viola Thomala, Wurzbach; Dietmar Polster, Zeithain; Kerstin Kommer, Zella-Mehlis; Christina Voß, Liane Soecknick, beide Zepernick; Hilmar Lorenz, Zittau; Sabine Wolfram, Zoppoten; Sabine Schmidt, Zwenkau; Jörg Steinbach, Zwickau; Susen Kraink, Weißwasser; Bettina Förster, Neukirch; Jana Klotzek, Potsdam; Tim Harrison, Margret Vinatzer, beide Schwaz (Österreich); Gabi Gold, Petra Wege, Ullrich Lauerwald, Bertin Borchert, Andrea Höppner, Betula Wiegand, Angelika Hartmann, alle Leinefelde; Petra Meißner, Neustadt; Cornelia Kopte, Callenberg

## Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2300 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig; Leipziger Volkszeitung.

# Lösungen

**Lösungen zur Aufgabe von**
**Prof. Dr. C. G. J. Jacobi,** Heft 6/79:
**Lösung der Aufgabe a)**

*Vorbemerkung:*

Für eine Zahl $x$ bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $x$ ist. Beispielsweise ist

$[5]=5$, $[7{,}2]=7$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-4{,}5]=-5$.

Mit dieser Bezeichnung gilt: Die Anzahl der natürlichen Zahlen bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl $N$, welche durch eine natürliche Zahl $k$ teilbar sind, ist $\left[\frac{N}{k}\right]$.

Beispielsweise gibt es $\left[\frac{250}{2}\right]=125$ Zahlen zwischen 1 und 250, die durch 2 teilbar sind, $\left[\frac{250}{33}\right]=7$ Zahlen zwischen 1 und 250, die durch 33 teilbar sind.

*1. Lösung:*

Die Zahl 1 ist durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar. Ferner sind natürlich auch alle Primzahlen zwischen 11 und 250 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar. (Es gibt 49 Primzahlen zwischen 11 und 250.) Die einzigen zusammengesetzten Zahlen bis 250, die durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind, sind offenbar $11^2=121$, $13^2=169$, $11\cdot 13=143$, $11\cdot 17=187$, $11\cdot 19=209$, $13\cdot 17=221$, $13\cdot 19=247$.

Die gesuchte Anzahl ist somit $1+49+7=57$.

*2. Lösung:*

Wir bestimmen die Anzahl $A$ der Zahlen von 1 bis 250, die durch wenigstens eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind.

Die gesuchte Anzahl ist dann $250-A$.

Es gibt $\frac{250}{2}=125$ Vielfache von 2, $\left[\frac{250}{3}\right]=83$ Vielfache von 3, $\frac{250}{5}=50$ Vielfache von 5, $\left[\frac{250}{7}\right]=35$ Vielfache von 7 zwischen 1 und 250. Darunter gibt es $\left[\frac{250}{6}\right]=41$ Vielfache von 2 und 3, $\frac{250}{10}=25$ Vielfache von 2 und 5, $\left[\frac{250}{14}\right]=17$ Vielfache von 2 und 7, $\left[\frac{250}{15}\right]=16$ Vielfache von 3 und 5, $\left[\frac{250}{21}\right]=11$ Vielfache von 3 und 7, $\left[\frac{250}{35}\right]=7$ Vielfache von 5 und 7.

Überdies gibt es $\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=8$ Zahlen, die Vielfache sowohl von 2 und 3 als auch 5 sind, ferner $\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 7}\right]=5$ Vielfache von 2, 3 und 7 und $\left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 7}\right]=3$ Vielfache von 2, 5 und 7, $\left[\frac{250}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=2$ Vielfache von 3, 5, 7 (jeweils zwischen 1 und 250). Außerdem gibt es $\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]=1$ Zahl (nämlich 210), die Vielfaches von 2, 3, 5 und 7 ist.

210 ist die einzige Zahl, die durch alle vier der gegebenen Primzahlen teilbar ist. Als Vielfaches eines Produktes aus 3 der vier Primzahlen tritt 210 insgesamt 4mal auf (210 ist Vielfaches von 2, 3 und 5, von 2, 3 und 7, von 2, 5 und 7, von 3, 5 und 7). Als Vielfaches eines Produktes aus 2 der vier Primzahlen tritt 210 insgesamt 6mal auf (210 ist Vielfaches von $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $2\cdot 7$, $3\cdot 5$, $3\cdot 7$, $5\cdot 7$). 210 tritt 4mal als Vielfaches einer der vier gegebenen Primzahlen (Vielfaches von 2, von 3, von 5 und von 7) auf.

210 darf bei der Bestimmung von $A$ aber nur einmal gezählt werden!
Analoges gilt für die übrigen Zahlen.
Man erkennt nun: Bildet man die Summe der Anzahl der Vielfachen von einer der Primzahlen 2, 3, 5, 7, also $125+83+50+35=293$ (hierbei wird z. B. 210 4mal gezählt, 105 $=3\cdot5\cdot7$ wird 3mal gezählt, $21=3\cdot7$ wird 2mal gezählt), subtrahiert man davon die Summe der Anzahlen der Zahlen, welche Vielfache eines Produktes aus zwei der Primzahlen 2, 3, 5, 7 sind (die Summe ist $41+25+17+16+11+7=117$) (210 wird hierbei 6mal gezählt, 105 wird 3mal gezählt, 21 wird 1mal gezählt), addiert dazu die Summe der Anzahlen der Zahlen, welche Vielfache eines Produktes aus drei der Primzahlen 2, 3, 5, 7 sind (die Summe ist $8+5+3+2=18$) (210 wird hierbei 4mal gezählt, 105 wird 1mal gezählt) und subtrahiert davon 1 (als Anzahl der Vielfachen der vier gegebenen Primzahlen) (210 wird einmal gezählt), so wird jede der Zahlen von 1 bis 250, die Vielfaches wenigstens einer der Primzahlen 2, 3, 5, 7 ist, nur einmal gezählt (210 wird $4-6+4-1=1$mal gezählt, 105 wird $3-3+1=1$mal gezählt, 21 wird $2-1=1$mal gezählt, analog die übrigen Zahlen) und man erhält $A$. Es ist $A=293-117+18-1=193$. Die gesuchte Anzahl ist $A-193=57$.

**Lösung der Aufgabe b)**

Die Lösung entspricht der 2. Lösung der Aufgabe a).

Es gibt zwischen 1 und 10000 $\left[\frac{10000}{3}\right]=3333$ Vielfache von 3, $\left[\frac{10000}{11}\right]=909$ Vielfache von 11, $\left[\frac{10000}{4001}\right]=2$ Vielfache von 4001. Darunter gibt es $\left[\frac{10000}{33}\right]=303$ Vielfache von 3 und 11.
Die Anzahl $A$ der Zahlen von 1 bis 10000, die Vielfache wenigstens einer der Primzahlen 3, 11, 4001 sind, ist somit $A=3333+909+2-303=3941$. Die gesuchte Anzahl ist $10000-A=6059$.

*Bemerkung:* Es ist bekannt, daß es zwischen 1 und 10000 insgesamt 1229 Primzahlen gibt. (In dem hier benutzten Manuskript bestimmte Jacobi unter anderem diese Zahl.) Davon sind 1226 von 3, 11, 4001 verschieden. Die Zahl 1 ist nicht Vielfaches von 3, 11, 4001. $6059-1227=4832$ der Zahlen zwischen 1 und 10000, die nicht Vielfaches von 3, 11, 4001 sind, sind somit zusammengesetzte Zahlen. Es sind dies alle möglichen Produkte der von 3, 11, 4001 verschiedenen Primzahlen 2, 5, 7, 13, ..., 3989, 4003, ..., 4999, die kleiner als 10000 bleiben.

**Lösung der Aufgabe c)**

*Vorbemerkungen:*

1) Für die Potenzen eines Binoms $a+b$ gilt:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$, usw.

Die Koeffizienten der Potenzprodukte von $a$ und $b$ heißen Binominalkoeffizienten. Ihre gesetzmäßige Bildung erkennt man aus der Anordnung im sog. Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&1&&&&& \\ &&&&1&&2&&1&&&& \\ &&&1&&3&&3&&1&&& \\ &&1&&4&&6&&4&&1&& \\ &1&&5&&10&&10&&5&&1& \\ 1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \end{array}$$

Jede Zahl innerhalb der Randzahlen 1 steht unter der Lücke der beiden über ihr stehenden Zahlen und ist gleich deren Summe.
Setzt man für natürliche Zahlen $n\geq1$
$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}$ für $k=1,2,3,\ldots,n$ und $\binom{n}{0}=1$,
so besteht die $(n+1)$te Zeile des Pascalschen Dreiecks aus den Zahlen $1=\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots$ $\ldots,\binom{n}{n-1},\binom{n}{n}=1$.
$\left[\text{Es gilt die Symmetrie } \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.\right]$
Für die $n$-te Potenz des Binoms $a+b$ gilt
$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$
Der Spezialfall $a=1$, $b=-1$ liefert
$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$$
oder $\left(\text{mit } -1 \text{ multipliziert und } \binom{n}{0}=1 \text{ berücksichtigt}\right)$
$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}=1.$$

2) In der Kombinatorik lernt man:
Aus $n$ verschiedenen Elementen können ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $k$ Stück $(1\leq k\leq n)$ auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten ausgewählt werden.

3) Es seien $a, b, c, \ldots, p$ insgesamt $n$ voneinander verschiedene Primzahlen. Es soll das Produkt aus den $n$ Faktoren
$$P=\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)$$
ausmultipliziert werden.
Zunächst zwei Beispiele:
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{2\cdot7}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{1}{2\cdot3\cdot7}-\frac{1}{2\cdot5\cdot7}-\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7},$$
$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{4001}\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{11}-\frac{1}{4001}+\frac{1}{3\cdot11}+\frac{1}{3\cdot4001}+\frac{1}{11\cdot4001}-\frac{1}{3\cdot11\cdot4011}.$$
Allgemein gilt
$$P=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\ldots-\frac{1}{p}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\ldots+\frac{1}{ap}+\frac{1}{bc}+\ldots+\frac{1}{bp}+\ldots-\frac{1}{abc}-\ldots-\frac{1}{abp}-\ldots+\ldots+(-1)^n\frac{1}{abc\ldots p}.$$
Es gibt hiervon $\binom{n}{1}=n$ Summanden mit jeweils einer Primzahl im Nenner (Vorzeichen $-$); es gibt $\binom{n}{2}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von 2 Primzahlen im Nenner (Vorzeichen $+$); es gibt $\binom{n}{3}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von 3 Primzahlen im Nenner (Vorzeichen $-$); es gibt $\binom{n}{4}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von 4 Primzahlen im Nenner (Vorzeichen $+$) usw.; es gibt $\binom{n}{k}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von $k$ Primzahlen im Nenner [Vorzeichen $(-1)^k$].

4) Man multipliziere jedes Glied des ausmultiplizierten Produktes $P$ mit der gegebenen Zahl $N$ und ersetze jeden Bruch durch die gleiche oder nächst kleinere ganze Zahl. Man erhält:
$$N-\left[\frac{N}{a}\right]-\left[\frac{N}{b}\right]-\frac{N}{c}\Big]-\ldots-\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{a\cdot b}\right]+\left[\frac{N}{a\cdot c}\right]+\ldots-\left[\frac{N}{abc}\right]-\ldots+\ldots+(-1)^n\left[\frac{N}{abc\ldots p}\right].$$

*Beispiele:*
$N=250$, 2, 3, 5, 7
$$250-\left[\frac{250}{2}\right]-\left[\frac{250}{3}\right]-\left[\frac{250}{5}\right]-\left[\frac{250}{7}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot3}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot5}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot7}\right]+\left[\frac{250}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{250}{3\cdot7}\right]+\left[\frac{250}{5\cdot7}\right]-\left[\frac{250}{2\cdot3\cdot5}\right]-\left[\frac{250}{2\cdot3\cdot7}\right]-\left[\frac{250}{2\cdot5\cdot7}\right]-\left[\frac{250}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]=250-125-83-50-35+41+25+17+16+11+7-8-5-3-2+1=57$$
$N=10000$; 3, 11, 4001
$$10000-\left[\frac{10000}{3}\right]-\left[\frac{10000}{11}\right]-\left[\frac{10000}{4001}\right]+\left[\frac{10000}{3\cdot11}\right]+\left[\frac{10000}{3\cdot4001}\right]+\left[\frac{10000}{11\cdot4001}\right]-\left[\frac{10000}{3\cdot11\cdot4001}\right]$$
$$=10000-3333-909-2+303+0+0-0=6059$$

**Lösung der Aufgabe c)**

Man subtrahiere zuerst von $N$ die Anzahl der Zahlen bis $N$, welche Vielfache von einer der gegebenen Primzahlen sind:

$N - V_1$, worin $V_1 = \left[\frac{N}{a}\right] + \left[\frac{N}{b}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{p}\right]$.

($\left[\frac{N}{a}\right]$ ist ja die Anzahl der Zahlen bis $N$, die Vielfache von $a$ sind, $\left[\frac{N}{b}\right]$ ist die Anzahl der Zahlen bis $N$, die Vielfache von $b$ sind, usw.)

In $V_1$ werden natürlich einige Zahlen mehrfach gezählt, beispielsweise die, die Vielfache von $a$ und $b$ sind. ($V_1$ enthält $\binom{n}{1} = n$ Summanden.) Jetzt werde die Anzahl der Zahlen bis $N$ wieder addiert, welche Vielfache eines Produktes aus zwei der gegebenen Primzahlen sind: $N - V_1 + V_2$, worin

$V_2 = \left[\frac{N}{ab}\right] + \left[\frac{N}{ac}\right] + \ldots$ ($V_2$ enthält $\binom{n}{2}$ Summanden.)

Nun werde die Anzahl der Zahlen bis $N$ wieder subtrahiert, welche Vielfache eines Produktes aus drei der gegebenen Primzahlen sind: $N - V_1 + V_2 - V_3$, worin

$V_3 = \left[\frac{N}{abc}\right] + \ldots$ ($V_3$ enthält $\binom{n}{3}$ Summanden.)

Der sich so ergebende Ausdruck wird auch auf die in den Vorbemerkungen 3) und 4) beschriebene Art erhalten!

Er ist gleich der gesuchten Anzahl derjenigen unter den Zahlen bis $N$, welche durch keine der Primzahlen $a, b, c, \ldots, p$ teilbar sind. (Satz von Legendre, 1808.)

In der Tat, im Ausdruck

$V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots$ wird jede Zahl bis $N$, die durch eine oder mehrere der gegebenen Primzahlen teilbar ist, insgesamt nur einmal gezählt!

Sei nämlich $h$ eine Zahl, welche durch genau $t$ der gegebenen $n$ Primzahlen $a, b, c, \ldots, p$ teilbar ist $(1 \leq t \leq n)$.

Wie oft wird $h$ als Vielfaches eines Produktes aus $s$ der gegebenen Primzahlen auftreten $(1 \leq s \leq t)$?

Nun, so oft wie man aus den $t$ Primzahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $s$ Stück auswählen kann. Das ist (nach der Vorbemerkung 2)) auf $\binom{t}{s}$ verschiedene Arten möglich.

Somit tritt $h$ $\binom{t}{1}$mal als Vielfaches einer der gegebenen Primzahlen auf. (Teilsumme $\binom{t}{1}$ von $V_1$), tritt $h$ $\binom{t}{2}$mal als Vielfaches zweier der gegebenen Primzahlen auf (Teilsumme $\binom{t}{2}$ von $V_2$), usw. Die Zahl $h$ wird im Ausdruck $V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots$ somit genau $\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \ldots + (-1)^t \binom{t}{2} =$ 1mal (nach Vorbemerkung 1)) gezählt.

*H. Pieper*

**Lösung zur Aufgabe von Dr. L. Stammler:**

Wir führen Bezeichnungen für einige Flächeninhalte ein:

In der Titelzeichnung im „Ringgebiet" zwischen den beiden Kreisen rot gezeichnete Flächenstücke: $R$,

rot waagerecht schraffierte Flächenstücke: $r$,

weiß gezeichnete Flächenstücke: $W$,

rot „melierte" Flächenstücke: $w$.

Symmetrische Differenz

zwischen dem inneren Kreis und dem Dreieck: $F_i$, zwischen dem äußeren Kreis und dem Dreieck: $F_a$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$F_a + W + w = F_i + R + r$$

(Bild 2). Halbiert nun das Dreieck den Umfang des inneren Kreises, so folgt $R = W + w + r$, also

$$F_a = F_i + R + r - W - w = F_i + 2r > F_i. \quad (1)$$

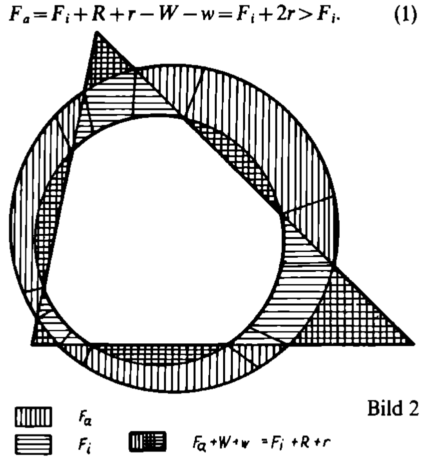



Bild 2

Halbiert aber das Dreieck den Umfang des äußeren Kreises, so folgt

$W = R + r + w$, also

$$F_i = F_a + W + w - R - r = F_a + 2w > F_a. \quad (2)$$

Mit diesen Aussagen (1) und (2) ist der verlangte Beweis erbracht.

*Lösung der Zusatzaufgabe:*

Man konstruiere die Verbindungsstrecken von $Z$ zu allen Schnittpunkten, die der Dreiecksrand mit der Kreislinie hat (Bild 3, innerer Kreis). Die außerhalb $D$ liegenden Bögen

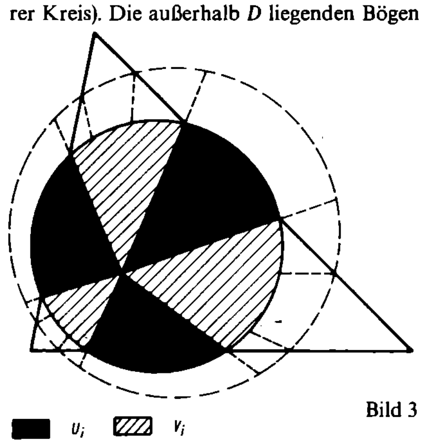



Bild 3

des Kreises schließen jeweils zusammen mit geeigneten solchen Verbindungsstrecken „sektorförmige" Flächenstücke ein. Als gesuchte Bedingung kann man nun formulieren: Die Summe $U_i$ der Flächeninhalte dieser „sektorförmigen" Flächenstücke ist gleich dem halben Kreis-Flächeninhalt. Behauptet wird wieder: Genau dann, wenn diese „Halbierungsbedingung" erfüllt ist, liefert der Kreis den kleinstmöglichen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz.

Der Beweis kann – bei entsprechenden Bezeichnungen – genau wie in dem Fall erfolgen, daß $Z$ der Mittelpunkt ist. Allerdings muß man, um den Nachweis zu (1) gewinnen zu können, ausführlicher begründen: Wenn der innere Kreis die „Halbierungsbedingung" erfüllt, warum folgt dann $R = W + w + r$? Dies kann etwa so geschehen: Die Differenz zwischen dem Kreis-Flächeninhalt und $U_i$ sei $V_i$ (Bild 3). Die „Halbierungsbedingung" besagt dann $U_i = V_i$; wegen der Streckung des inneren Kreises zum äußeren folgt hieraus $U_i + R = V_i + W + w + r$. (Beweise dies aus deinen Kenntnissen über den Flächeninhalt bei Streckungen! Daß sich diese Kenntnisse auch auf krummlinig begrenzte Flächenstücke anwenden lassen, sei wiederum ohne strengen Beweis hingenommen. Ebenso wie für die Aussage, daß jeweils genau ein Kreis die „Halbierungsbedingung" erfüllt, gehören derartiger Beweise nicht mehr ganz zum Schulstoff.) Damit hat man die Gleichung $R = W + w + r$ hergeleitet und kann nun wie oben (1) erhalten. Zum Nachweis von (2) setzt man für die entsprechend beim äußeren Kreis auftretenden Sektoren $U_a$ die „Halbierungsbedingung" $U_a = V_a$ voraus, gewinnt wegen der Streckung $U_a - R - r - w = V_a - W$ und kann dann den Beweis wie oben beenden.

**Lösungen zu:**
**In freien Stunden · alpha-heiter**
(S. 16/17):

**Domino**

Die Steine 2 : 2 und 3 : 3 sowie 5 : 0 und 1 : 5 wechseln ihre Plätze.

**Geschenke verraten Namen**

$x$ sei die Zahl der Geschenke, die von einer Ehefrau gekauft werden.

$y$ sei die Zahl der Geschenke, die von einem Ehemann gekauft werden.

Ausgangspunkt der nun einsetzenden Überlegungen ist Ziffer (1), aus der sich ergibt, daß jede Frau für ihre Geschenke $x^2$ Mark, jeder Ehemann für seine Geschenke $y^2$ Mark ausgibt.

Der Ziffer (2) kann man entnehmen, daß $x^2 - y^2 = 75$, also auch $(x-y)(x+y) = 75$ ist.

Nun gilt aber $(x-y)(x+y) = 1 \cdot 75$ oder $3 \cdot 25$ oder $5 \cdot 15$.

Es gibt also genau drei Möglichkeiten

$x - y = 1$ und $x + y = 75$;
$x - y = 3$ und $x + y = 25$;
$x - y = 5$ und $x + y = 15$.

Für sie stellen wir eine Tabelle auf:

| | Ehefrau | Ehemann |
|---|---|---|
| Aus $x-y=1$ und $x+1=75$ ergibt sich | $x=38$ | $y=37$, |
| aus $x-y=3$ und $x+y=25$ ergibt sich | $x=14$ | $y=11$, |
| aus $x-y=5$ und $x+y=15$ ergibt sich | $x=10$ | $y=5$. |

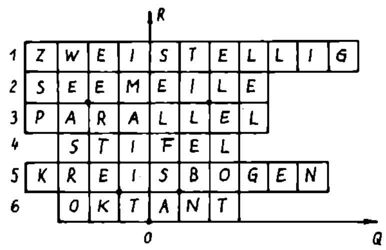
Aus Ziffer (3) der Aufgabe können wir schließen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Meier: | Anna | 38 | 37 | Willi |
| Müller: | | 14 | 11 | Hans |
| Schmidt: | Luise | 10 | 5 | |

Der Familienname der dritten Dame, Maria, kann also nur Müller sein.

**Wie funktioniert denn das?**

Wartehalle:




**Zahlenrätsel – dreidimensional**

Breitenrichtung $AB$ 71; $DC$ 69; $EF$ 38; $HG$ 10;
Höhenrichtung $EA$ 37; $FB$ 81; $GC$ 09; $HD$ 16;
Tiefenrichtung $AD$ 76; $BC$ 19; $FG$ 80; $EH$ 31.
Die entsprechenden Zahlen unter die gegebenen Buchstaben geschrieben, ergibt das Geburts- und das Sterbedatum von Wilhelm Pieck:

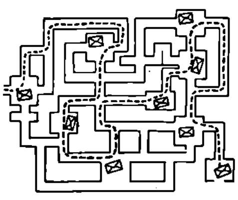
GEG HHFAD GAGCHCDG
03. 01. 1 8 7 6 07.09. 1 9 6 0

**Kryptarithmetik**

a)
$$\begin{array}{ccccc} 142 & - & 2 & = & 140 \\ - & & + & & - \\ 102 & + & 8 & = & 110 \\ \hline 40 & - & 10 & = & 30 \end{array}$$

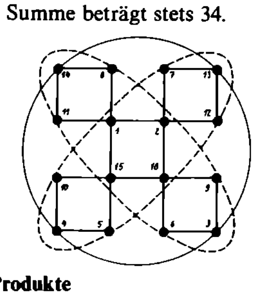
b)
$$\begin{array}{ccccc} 1170 & - & 260 & = & 910 \\ : & & + & & - \\ 9 & \cdot & 52 & = & 468 \\ \hline 130 & + & 312 & = & 442 \end{array}$$

**Der Bote und die neun Pakete**



**Magische Figur**

Die Summe beträgt stets 34.



**α-Produkte**

Wegen (1) $P\alpha E=\alpha\cdot\alpha\alpha$ scheiden für $\alpha$ zunächst die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 6 aus, da das Produkt dreistellig ist bzw. nach Voraussetzung $\alpha \neq E$ gilt. Von den verbleibenden Ziffern 4, 7, 8 und 9 entfallen für $\alpha$ in (1) $P\alpha E=\alpha\cdot\alpha\alpha$ auch die Ziffern 4, 7 und 8, da nach Voraussetzung gleiche Ziffern gleiche Buchstaben bedeuten, was für $4\cdot 44=176$, $7\cdot 77=539$ und $8\cdot 88=704$ jedoch nicht zutrifft.

Es gilt $\alpha=9$, woraus folgt
$P=8$; $R=7$; $O=6$; $D=5$; $U=4$; $K=3$; $T=2$; $E=1$.

# XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 4. Stufe (DDR-Olympiade) Lösungen

### Olympiadeklasse 10

1. Für die genannte Zahl $x$ gilt $\log_{12}(\log_{11}x)=13$, also $\log_{11}x=12^{13}$ und daher
$$x=11^{12^{13}}.$$
Wir ermitteln von den Potenzen von $11^s$ ($s=1, 2, \ldots$) jeweils die letzten beiden Ziffern:

| Letzte Ziffer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| von $11^s$ | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
| | 7 | 8 | 9 | 10 | | |
| | 71 | 81 | 91 | 01 | ... | |

Daraus folgt: Multipliziert man eine mindestens zweistellige natürliche Zahl $t$ mit $11^{10}$, so hat die entstehende Zahl dieselben letzten beiden Ziffern wie die Zahl $t$. Hieraus ergibt sich weiter: Hat eine natürliche Zahl $u$ die letzte Ziffer $w$, so hat $11^u$ dieselben letzten beiden Ziffern wie $11^w$; denn mit einer natürlichen Zahl $v$ ist $u=10v+w$, also entstehe $11^u=(11^{10})\cdot 11^w$ aus $11^w$ durch $v$-maliges Multiplizieren mit $11^{10}$.

Die hier (und im vorangehenden Text) formulierte Begründung kann auch in Form einer Periodizitätsaussage bei Fortsetzung der betreffenden Tabelle ausgedrückt werden.

Wir ermitteln nun von den Potenzen $12^y$ ($y=1, 2, \ldots$) jeweils die letzte Ziffer:

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Letzte Ziffer von $12^y$ | 2 | 4 | 8 | 6 | ... |

Daraus folgt: Multipliziert man eine natürliche Zahl $z$, die die letzte Ziffer 2 hat, mit $12^4$, so hat auch die entstehende Zahl die letzte Ziffer 2.

Hieraus ergibt sich weiter: Die Zahl $u=12^{13}$ hat die letzte Ziffer $w=2$; denn $12^{13}=(12^4)^3$. 12 entsteht aus 12 durch dreimaliges Multiplizieren mit $12^4$.

Somit hat $x=11^{12^{13}}$ dieselben letzten beiden Ziffern wie $11^2$, d. s. die Ziffern 2, 1 (in dieser Reihenfolge).

*Bemerkungen:* Die Lösungen der 106 Teilnehmer folgten, soweit sie richtig waren, dem Gedankengang des Lösungsvorschlags, vielfach unter Verwendung von Kongruenzen modulo 10. Ein häufiger Fehler war die Gleichsetzung von $11^{12^{13}}$ mit $(11^{12})^{13}$. Dennoch schien uns die Aufgabe ziemlich leicht. Die (verkürzt wiedergegebene) Lösung des Teilnehmers mit der Startnummer 154 darf – für einen Schüler der 10. Klasse – als elegant gelten:

$$11^{12^{13}}=(1+10)^{12^{13}}$$
$$=1+\binom{12^{13}}{1}\cdot 10+\ldots$$

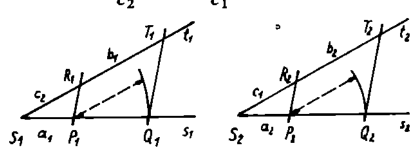
Entwicklung nach dem binomischen Satz
$$\equiv 1+12^{13}\cdot 10 \bmod 100 \text{ und – mit}$$
$$12^{13}\equiv 2 \bmod 10 \text{ –}$$
$$\equiv 21 \bmod 100.$$

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 6 | 9 | 9 | 6 | 5 | 14 | 57 |

*Dr. G. Schiemann,*
*Martin-Luther-Universität Halle*

2. a) Wir gehen von den Volumen $V_1=a_1b_1c_1$ und $V_2=a_2b_2c_2$ der Quader aus. Offenbar ist $V_1 \lesseqgtr V_2$ gleichwertig mit
$$\frac{a_1b_1}{c_2} \lesseqgtr \frac{a_2b_2}{c_1}. \qquad (1)$$
Damit ist aber bereits eine einfache Lösung vorgezeichnet. Die Terme auf den beiden Seiten von (1) sind nämlich Strecken. Sie können leicht anhand der Strahlensätze konstruiert werden.

Wir wählen also als Strecken $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{P_2Q_2}$ der Länge $\frac{a_1b_1}{c_2}$ bzw. $\frac{a_2b_2}{c_1}$.




*Konstruktionsbeschreibung:* Wir wählen zwei von einem Punkt $S_1$ ausgehende Strahlen $s_1$, $t_1$, die nicht auf einer Geraden liegen. Entsprechend wählen wir zwei Strahlen $s_2$, $t_2$ mit gemeinsamem Scheitelpunkt $S_2$.

Durch Streckenabtragung konstruieren wir die Punkte $P_1\in s_1$; $R_1$, $T_1\in t_1$ und $P_2\in s_2$;

$R_2$, $T_2 \in t_2$, für die $\overline{S_1P_1}=a_1$, $\overline{S_1R_1}=c_2$, $\overline{R_1T_1}=b_1$ und $R_1$ zwischen $S_1$, $T_1$ liegt sowie $\overline{S_2P_2}=a_2$, $\overline{S_2R_2}=c_1$, $\overline{R_2T_2}=b_2$ und $R_2$ zwischen $S_2$, $T_2$ liegt. Die Parallele zu $P_1R_1$ durch $T_1$ schneidet $s_1$ in $Q_1$, und die Parallele zu $P_2R_2$ durch $T_2$ schneidet $s_2$ in $Q_2$.
*Beweis:* Nach dem Strahlensatz ist $\overline{P_1Q_1}:a_1 = b_1:c_2$ und $\overline{P_2Q_2}:a_2=b_2:c_1$. Nun gilt $\overline{P_1Q_1} \lesseqgtr \overline{P_2Q_2}$ genau dann, wenn (1) und damit $V_1 \lesseqgtr V_2$. Damit ist gezeigt, daß die oben konstruierten Strecken $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$ die Eigenschaft (*) der Aufgabenstellung besitzen.
b) Die in a) beschriebene Konstruktion führt auf $\overline{P_1Q_1}<\overline{P_2Q_2}$ (siehe Bild) und damit auf $V_1<V_2$.

*Bemerkungen:* Eine Hauptschwierigkeit – das zeigen die vielen Anfragen und die vorgelegten Lösungen der Schüler – bestand im Verständnis der Aufgabenstellung. Die Problemstellung war für viele ungewohnt; das ist für einen Leistungsvergleich in dieser Stufe nur begrüßenswert. Die vorliegende Formulierung jedoch verwirrte; das ist zu überdenken. Entscheidend für die Lösung der Aufgabe ist das Auffinden geeigneter Strecken $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{P_2Q_2}$.
Einige Schüler, die den naheliegenden Ansatz (1) fanden, hatten dennoch Schwierigkeiten bei seiner konstruktiven Umsetzung. Der durch (1) gegebene Ansatz ist bei weitem nicht der einzige. So können selbst die Produkte $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ der Maßzahlen der Kantenlängen als Maßzahlen der Strecken $\overline{P_1Q_1}$ bzw. $\overline{P_2Q_2}$ gewählt werden. Offenbar ist dann auch hier (*) gültig. Die Konstruktion wirft aber einige Probleme auf. Zunächst wird zur konstruktiven Darstellung von $\overline{P_1Q_1}$ aus $a_1$, $b_1$, $c_1$ eine Längeneinheit benötigt. (Entsprechendes gilt für $\overline{P_2Q_2}$.) Die erhaltene Strecke $\overline{P_1Q_1}$ hängt von der Wahl der Längeneinheit ab. Es ist dann zu zeigen, daß der Längenvergleich von $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{P_2Q_2}$ unabhängig von dieser Wahl ist. Einige Schüler haben für den Teil b) als Längeneinheit 1 cm gewählt. Diese Länge ist aber aus den konkret vorgegebenen Längen im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
Ein durch räumliche Anschauung gewonnener Ansatz besteht in

$$\overline{P_1Q_1}=c_1 \text{ und } \overline{P_2Q_2}=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}\cdot c_2,$$

indem der 2. Quader in einen inhaltsgleichen Quader mit der Grundfläche des 1. Quaders umgewandelt wird und dann nur die Höhen zu vergleichen sind.
Eine Reihe von vorgelegten Ansätzen mußte zu falschen Lösungen führen, so z. B.
$\overline{P_1Q_1}=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$,
$\overline{P_2Q_2}=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$
(Länge der Raumdiagonale) oder
$\overline{P_1Q_1}=\sqrt{\sqrt{a_1b_1}\cdot c_1}$, $\overline{P_2Q_2}=\sqrt{\sqrt{a_2b_2}\cdot c_2}$.
Offenbar ist bei letzterem für $a_1, b_1, c_1=1$ und $a_2$, $b_2=\frac{1}{10}$, $c_2=100$ einerseits $V_1=V_2$ aber andererseits $\overline{P_1Q_1}=1<\sqrt{10}=\overline{P_2Q_2}$.

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 40 | 2 | 1 | 2 | 2 | 10 | 21 | 28 |

*Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam*

3.A Es sei $y$ eine beliebige reelle Zahl. Für $x$ gelte die Gleichung

(1) $\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=y.$

Durch Multiplikation mit $a^x$ erhalten wir eine quadratische Gleichung in $t=a^x>0$:

$$t^2-2yt-1=0.$$

Diese hat die Lösungen
$t=y+\sqrt{y^2+1}$ und $t=y-\sqrt{y^2+1}$.
Nun ist $y-\sqrt{y^2+1}<0$ im Widerspruch zu $t=a^x>0$. Daher gilt

$$a^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

bzw. $x=\log_a(y+\sqrt{y^2+1})$.
Damit ist für beliebiges reelles $y$ ein reelles $x$ eindeutig bestimmt, denn es ist

$\sqrt{y^2+1}>|y|\geqq -y$ und somit

$$y+\sqrt{y^2+1}>0,$$

so daß $\log_a(y+\sqrt{y^2+1})$ als reelle Zahl definiert ist. Diese reelle Zahl $x$ erfüllt auch die Gleichung (1). Die Funktion $f(x)$ besitzt also eine Umkehrfunktion und dies ist

$$g(y)=\log_a(y+\sqrt{y^2+1}).$$

*Bemerkungen:* Diese Wahlaufgabe haben nur 9 Schüler bearbeitet, was wohl darauf zurückzuführen ist, daß der Begriff „Umkehrfunktion" vielen Schülern unbekannt war. Die Schülerlösungen stimmen in etwa mit der oben angegebenen Lösung überein. Ein Schüler kannte auch die Funktion

$$y=\sin h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

und gelangte durch den Ansatz $a^x=ex\ln a$ zu der Gleichung

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}=\frac{ex\ln a-e^{-}x\ln a}{2}$$
$$=\sin h(x\ln a).$$

Nun ist bekanntlich die Funktion

$$\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

die Umkehrfunktion von $\sin h(x)$, so daß die Umkehrfunktion von $f(x)$ lautet:

$$\frac{1}{\ln a}\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$
$$=\log_a(y+\sqrt{y^2+1}).$$

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 5 |

*Dr. M. Krüppel, Päd. Hochschule Liselotte Hermann, Güstrow*

Die Lösungen zu den Aufgaben 3.B bis 6 folgen in Heft 2/80, d. Red.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb,**
Heft 5/79

Ma 5 ▪1881 Angela besitzt $2\cdot 350=700$, Jens $700+37=737$, Ines $2\cdot 737=1474$ Briefmarken. Zusammen sind das 2911 Briefmarken.

Ma 5 ▪1882 Die anfangs erworbenen Flaschen Astoria bringen als Pfandgeld den Betrag von 9,00 M. Nun gilt $900=13\cdot 64+55$. Der Kunde hat insgesamt $30+13=43$ Flaschen Astoria erworben; ihm verbleibt der Restbetrag von 0,55 M.

Ma 5 ▪1883 Thomas und Simone kauften zusammen drei Kugeln Frucht- und drei Kugeln Schokoladeneis. Aus 1,35 M : 3 = 0,45 M folgt, daß eine Kugel Fruchteis und eine Kugel Schokoladeneis zusammen 45 Pf kosteten. Aus 45 Pf − 5 Pf = 40 Pf und 40 Pf : 2 = 20 Pf folgt, daß eine Kugel Fruchteis 20 Pf, eine Kugel Schokoladeneis 25 Pf kostete. Thomas mußte 0,65 M, Simone 0,70 M bezahlen.

Ma 5 ▪1884 Aus $1975=5\cdot 5\cdot 79$ und der Tatsache, daß es sich bei den Enkeln um Zwillinge handelt, folgt, daß der Urgroßvater 79 Jahre, jeder Enkel 5 Jahre alt ist.

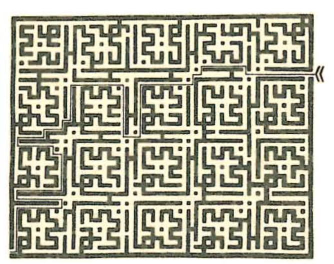
Ma 5 ▪1885 Aus $ab-c=d$ folgt $a=1$.
Aus $d+1h=bf$ folgt $b=2$.
Aus $2+21=2f$ folgt $f=3$.
Aus $12:e=2$ folgt $e=6$.
Aus $6\cdot 3=1h$ folgt $h=8$.
Aus $c\cdot 3=21$ folgt $c=7$.
Aus $12-7=d$ folgt $d=5$.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & - & 7 & = & 5 \\ : & & \cdot & & + \\ 6 & \cdot & 3 & = & 18 \\ \hline 2 & + & 21 & = & 23 \end{array}$$

Ma 5 ▪1886 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Peter hat folgende Rechnung auszuführen:
$(5\cdot a+6)\cdot 2-1+b=z,$
$10a+12-1+b=z,$
$10a+b=z-11.$
Uwe braucht vom Ergebnis $z$ nur 11 zu subtrahieren, um die von Peter gedachte Zal $10a+b$ zu ermitteln.
*Beispiel:* $10a+b=97$,
$(5\cdot 9+6)\cdot 2-1+7=z,$
$51\cdot 2+6=z,$
$108=z.$
$10a+b=z-11=108-11=97.$

**Lösungen zu: 1, 2, 3 – Logelei**

1. $1+7+3+6+7+9+8+5+7+8=61$
2. Ja; $(16\cdot 4)+(18\cdot 2)=100$, sonst $(1\cdot 3)+(4\cdot 18)+(1\cdot 25)=100$, aber bei $25:(1\cdot 5)+(5\cdot 19)=100$.
3. Kopf 6 erfüllt die gestellten Bedingungen.
4. Es sind die Stücken 2 und 4 einzusetzen.
5.



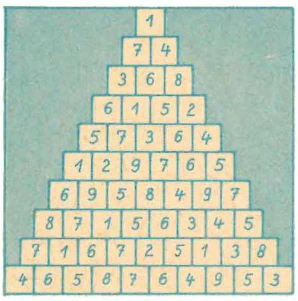
6. Bild 5 ist das zur Pyramide zugehörige Netz.

# Wissen, wo

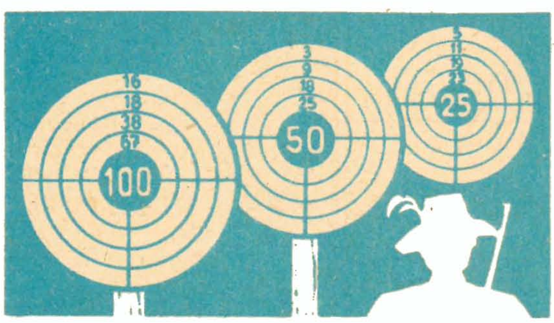
## Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1979

# 1, 2, 3 – Logelei

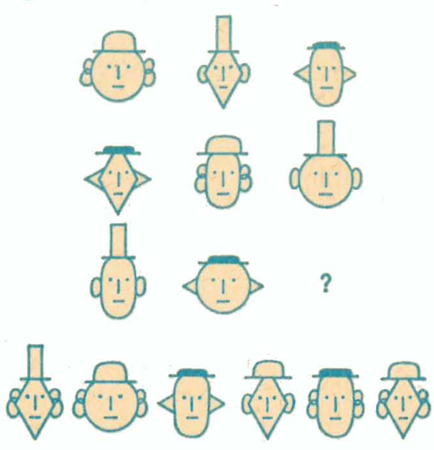
1. Auf nach 61 – und zwar durch Addition von oben nach unten – also über 10 Stationen!



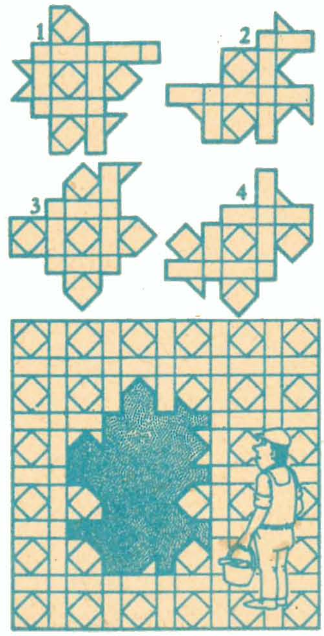

2. Mit je 6 Schuß jeweils 100 Ringe. Geht das auf allen drei Scheiben?



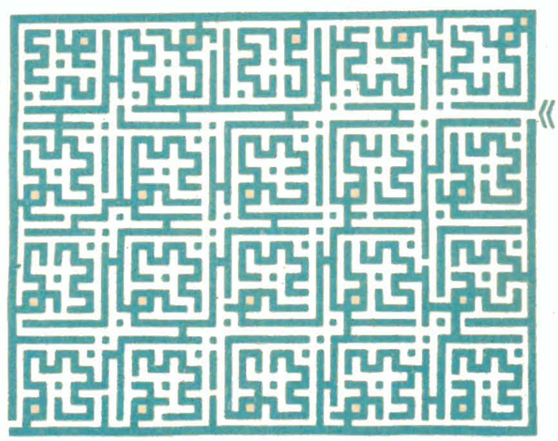

3. Welcher der sechs Köpfe ist logischerweise an Stelle des Fragezeichens einzusetzen?



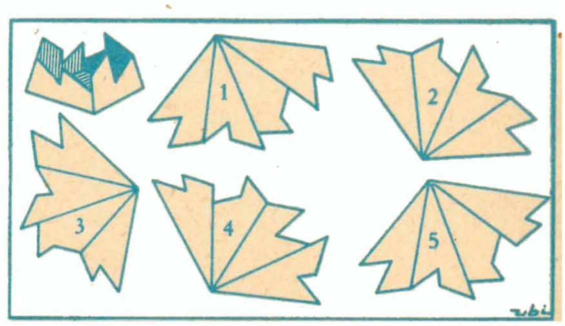

4. Von den vier Fliesenstücken sind die zwei herauszufinden, welche der Fliesenleger einsetzen muß, um wieder eine vollständige Wand zu erhalten.




5. Wer findet am schnellsten den Weg durch das Labyrinth?

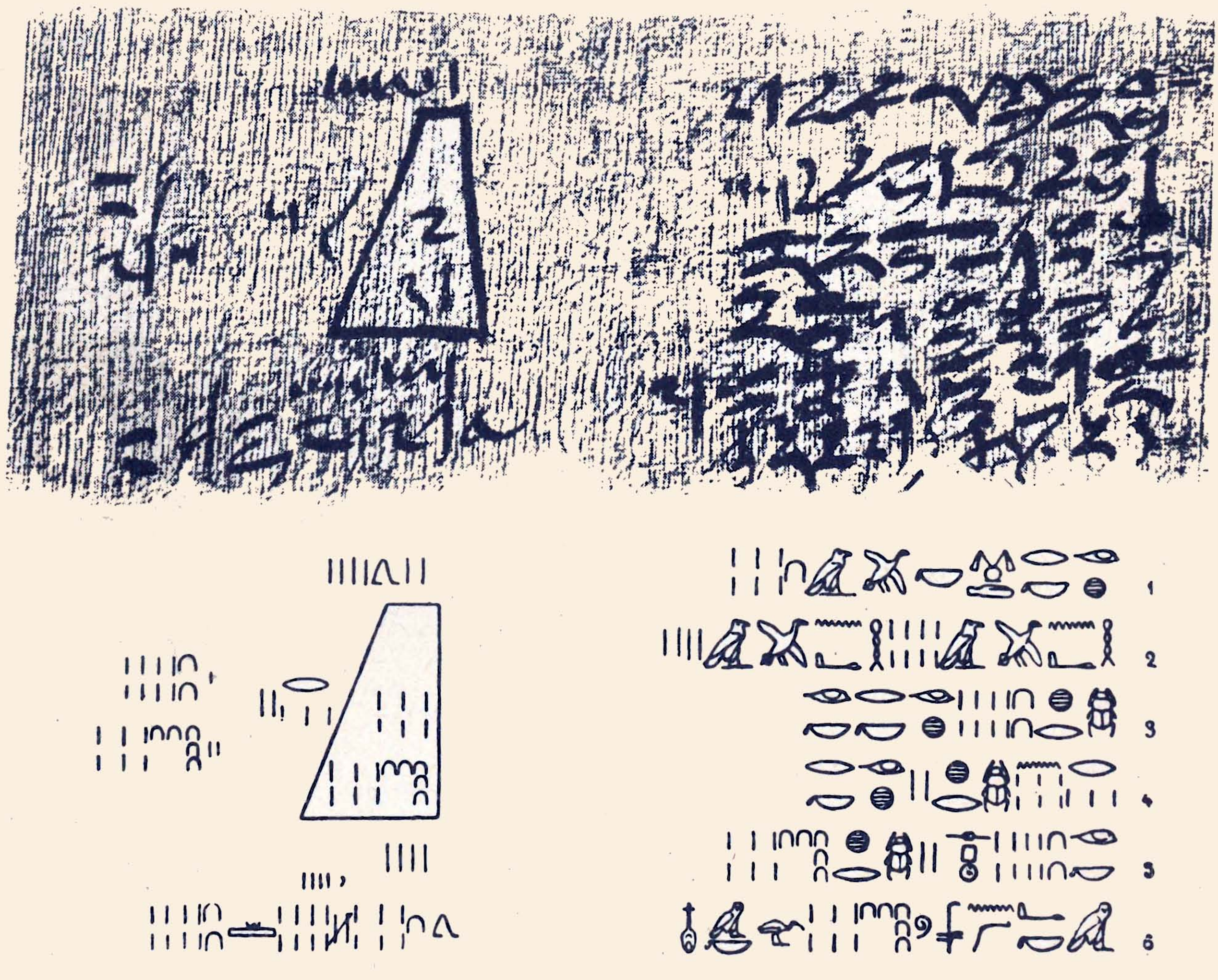


6. Welches der 5 Netze muß man auf den abgebildeten Körper setzen, damit eine Pyramide (mit quadratischer Grundfläche) entsteht?



Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos:* Vignette: H. Büttner, Berlin (S. 25); Archiv: Karl-Marx-Universität Leipzig (S. 30); Dr. W. Moldenhauer, Rostock (S. 33 links unten); U. Forchner, Leipzig (S. 41); L. Otto, Leipzig (S. 40 oben): Hans Ticha, Berlin (S. 41); A. J. Mueller, Leipzig (S. 41); S. G. Müller, Leipzig (S. 42 u. III. U.-Seite)
*Titelblatt:* W. Fahr, Berlin
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
*Redaktionsschluß: 18. Dezember 1979*

# alpha
## Mathematische Schülerzeitschrift

# Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Ein ungewöhnlicher Computer: die Billardkugel

### 1. Die Rechentechnik in der Mathematik

Kaum hatte sich der Wunsch vieler Wissenschaftler nach modernen elektronischen Rechenanlagen in den 40er Jahren unseres Jahrhunderts erfüllt, als das neuerstandene Selbstbewußtsein, elektronisch und schnell zu rechnen, einen empfindlichen Dämpfer erhielt: Ein Asiate war mit dem uralten Rechenbrett, dem Abakus, schneller als der Computer gewesen. Seine Überlegenheit beruhte wesentlich darauf, daß er die Kugel schneller schob, als dem Rechner die Zahlen eingegeben werden konnten.

Der Rechenkünstler und Professor der Mathematik *A. C. Aitken*, der sich ohne größere Mühe die ersten 1000 Stellen der Zahl $\pi$ merken konnte, bekannte, daß mit dem Aufkommen der Tischrechner (50er Jahre) seine Fähigkeiten im Kopfrechnen durch mangelndes Training nachließen, und vermutete, daß in Zukunft das Kopfrechnen nicht mehr so gut beherrscht werden würde.

Wir wollen uns mit einem alten Problem beschäftigen, das heute bereits auf einfachen programmierbaren Taschenrechnern gelöst werden kann. Aber dabei geht eine Menge an Ideen und Einfällen verloren, die nicht zur Programmierung gehören. Wir wollen uns diesen verschiedenen Lösungsmethoden widmen, die sich im Laufe der Zeit herausgebildet haben, wobei wir sogar einen einfachen „mechanischen" Computer konstruieren werden.

### 2. Ein altes Problem

In den aus der Mitte des 13. Jahrhunderts stammenden „Annales Stadenses" findet sich die Aufgabe: Ein Diener wird von seinem Herrn in die nächste Stadt geschickt, um acht Maß Wein zu holen. Als er kaum mit seinem gefüllten Gefäß die Stadt verlassen hat, begegnet ihm ein zweiter Diener, der für seinen Herrn gleichfalls Wein holen soll. „Wieviel Wein hast Du?" fragt dieser jenen. – „Acht Maß." – „Ich soll auch Wein holen." – „Du wirst keinen bekommen, da keiner mehr da ist." Nun bittet der zweite Diener den ersten, seinen Wein mit ihm zu teilen; er habe zwei Gefäße, eins von fünf, das andere von drei Maß bei sich. Wie läßt sich unter alleiniger Benutzung dieser drei Gefäße die Teilung ausführen?

Diese Aufgabe ist nachfolgend immer und immer wieder gestellt worden mit Varianten in der zu teilenden Flüssigkeit und den vorhandenen Behältern sowie anderen Einkleidungen (u. a. ist schnellstens flüssiges Diebsgut mit vorhandenen Behältern zu teilen). Eine 1612 von dem Franzosen *Bachet* veröffentlichte Lösung geben wir im Lösungsteil des Heftes 3/80 an.

### 3. Eine Auswirkung unseres Problems

Ein junger Franzose, der seiner Familie keinerlei Hoffnung auf eine erfolgreiche Laufbahn gemacht hatte, da er sich zum Juristen nicht eignete und sich als Schüler eines verwandten Chirurgen ebenfalls erfolglos erwies, soll auf einer Reise ein ihm vorgelegtes Umfüllungsproblem augenblicklich gelöst haben und so seine tatsächliche Begabung erkannt haben. Der junge Mann war *Siméon-Denis Poisson* (1781 bis 1840), ein späterer Schüler von *Lagrange* und *Laplace* und weltbekannter Mathematiker, insbesondere durch seine Beiträge zur mathematischen Physik. Bei der *Poisson* gestellten Aufgabe wären drei Gefäße mit 12, 8 und 5 l Fassungsvermögen so umzufüllen, daß der Inhalt des 12-Liter-Gefäßes halbiert wurde.

*Aufgabe 1:* Gib Poissons Lösung in der Form einer Tabelle an, die den Inhalt der Gefäße nach dem Umgießen 1., 2., ... Umgießen zeigt!

### 4. Wir gehen systematisch vor

Wir suchen ein Verfahren, mit dem wir für beliebige Umfüllungsaufgaben routinemäßig die Lösung angeben können. Anhand des leicht geänderten Beispiels erläutern wir das Vorgehen.

Wir haben 3 Gefäße. Das erste faßt 8 Liter und ist mit Wein gefüllt. In das zweite und dritte Gefäß gehen 5 bzw. 2 Liter; sie sind leer. Ohne weitere Hilfsmittel ist durch Umfüllen der Wein zu halbieren oder allgemeiner in gewisse Teile abzufüllen (ganze Liter). Wir werden einen „Umschüttungsgraphen" zeichnen. Dazu geben wir den jeweiligen Inhalt der drei Gefäße durch ein Zahlentripel $(X, Y, Z)$ an, wobei $X$ die Menge im 8-Liter-Gefäß, $Y$ die im 5-Liter-Gefäß und $Z$ die im 2-Liter-Gefäß bezeichnet. $(6,0,2)$ bedeutet also, daß im 8-Liter-Gefäß 6 Liter sind, im 5-Liter-Gefäß ist nichts, und das 2-Liter-Gefäß ist gefüllt. Jetzt ist der Graph (Bild 1) verständlich.

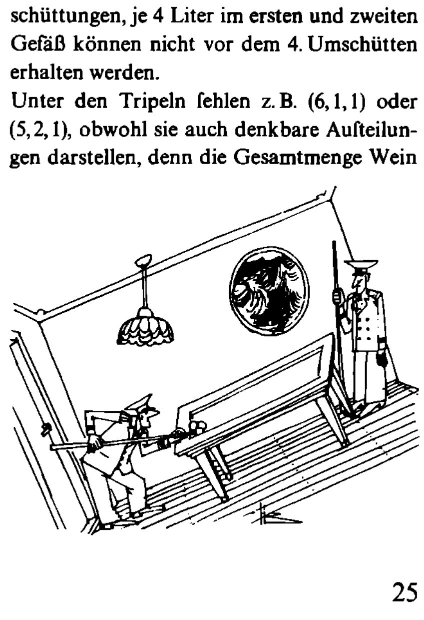
Der Ausgangspunkt $(8,0,0)$ stellt die Ausgangssituation dar. Von den 8 Litern des 1. Gefäßes kann entweder in das 5- oder 2-Liter-Gefäß geschüttet werden, was durch die Tripel $(3,5,0)$ und $(6,0,2)$ angezeigt wird. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Beim nächsten Umgießen paßt in das volle 5-Liter-Gefäß nichts mehr, und aus dem leeren 2-Liter-Gefäß kann noch nichts gegossen werden, so daß sich aus dem Tripel $(3,5,0)$ nur die Anordnungen $(1,5,2)$ und $(3,3,2)$ ergeben. Entsprechende Überlegungen führen für das Tripel $(6,0,2)$ auf die Möglchkeiten $(1,5,2)$ und $(6,2,0)$. Die Aufteilung $(1,5,2)$ hatten wir bereits und brauchen sie deshalb nicht weiter zu verfolgen. So ergibt sich nach und nach der gesamte Graph. Fett gedruckte Tripel sind solche, die wie $(1,5,2)$ bereits früher im Graphen aufgetreten sind. Nach 7 Umfüllschritten erhalten wir keine neuen Tripel mehr. Ein weiteres Umschütten, wie es auch immer vorgenommen wird, führt auf schon erhaltene Anordnungen, und zwar wurden diese Anordnungen des Weins auf die drei Gefäße bereits durch weniger Umschüttungen erzielt.

Wir listen alle sich ergebenden Tripel auf:

| | |
|---|---|
| (8,0,0) | |
| (7,1,0) | (7,0,1) |
| (6,2,0) | (6,0,2) |
| (5,3,0) | (5,1,2) |
| (4,4,0) | (4,2,2) |
| (3,5,0) | (3,3,2) |
| (2,5,1) | (2,4,2) |
| (1,5,2). | |

Die Tripel geben *alle* möglichen Aufteilungen des Weins an, die sich durch Umfüllen aus dem Tripel $(8,0,0)$ ergeben. Dabei kommen alle ganzzahligen Literbeträge von 0 bis 8 in einem der drei Gefäße tatsächlich vor. Unser Graph gibt uns neben den überhaupt möglichen Aufteilungen des Weins auf die drei Gefäße auch den Weg an, wie das erreicht werden kann, insbesondere auch, wie das auf kürzestem Weg erreicht werden kann. 4 Liter ergeben sich zum ersten Mal nach drei Umschüttungen, je 4 Liter im ersten und zweiten Gefäß können nicht vor dem 4. Umschütten erhalten werden.

Unter den Tripeln fehlen z. B. $(6,1,1)$ oder $(5,2,1)$, obwohl sie auch denkbare Aufteilungen darstellen, denn die Gesamtmenge Wein



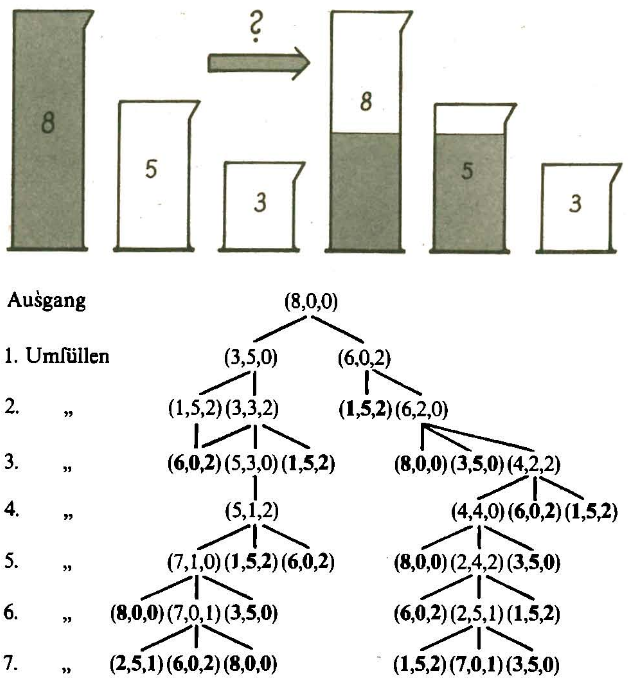



Bild 1: Umfüllungsgraph

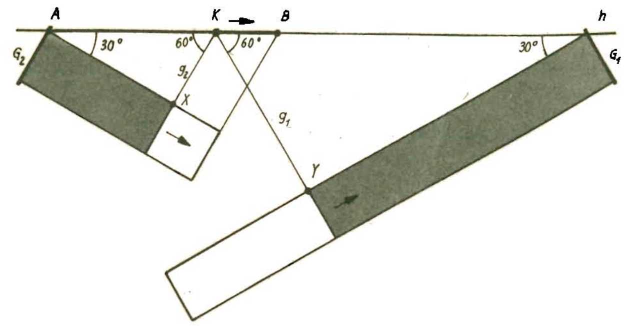



Bild 3: Eine andere Anzeigemöglichkeit für zwei Gefäße

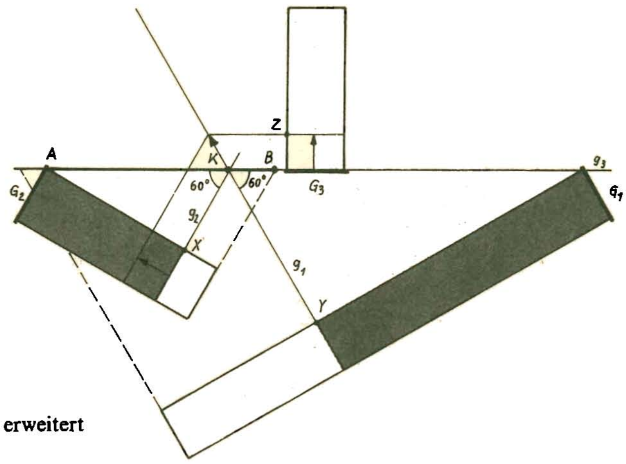



Bild 4: Anzeigemöglichkeit auf drei Gefäße erweitert

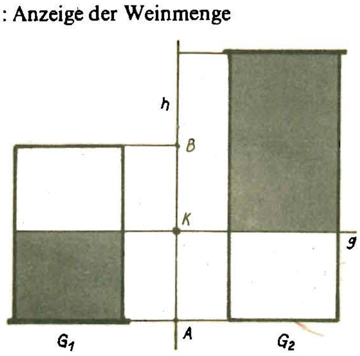
beträgt 8 Liter und das Fassungsvermögen der einzelnen Gefäße wird nicht überschritten. Aus der systematischen Aufstellung des Graphen folgt, daß sich diese Tripel bzw. die Aufteilungen des Weins *nicht* ergeben können. Der Graph vermittelt eine schnelle Übersicht, welche Lösungen möglich sind und welche es nicht sind.

*Aufgabe 2:* Stelle den zum Problem der 8-, 6- und 3-Liter-Gefäße gehörigen Graphen auf!

**5. Eine physikalische Anregung**

Der physikalische Hintergrund lenkt unsere Aufmerksamkeit auf den Vorgang des Umschüttens selbst. Wir nehmen im weiteren an, daß die drei Gefäße Kannen mit gleichem Querschnitt sind, so daß bei allen drei Gefäßen die Höhen ein einheitliches Maß für den Inhalt sind. In dem Maße, wie der Wein in einem Gefäß zu- bzw. abnimmt, muß er in

Bild 2: Anzeige der Weinmenge




einem anderen Gefäß ab- bzw. zunehmen. Wenn wir uns zunächst *zwei* in einer Ebene liegende Gefäße vorstellen (von der Wirkung der Schwerkraft sehen wir ab!), dann läßt sich das Zu- bzw. Abnehmen in den Gefäßen $G_1$ und $G_2$ sehr einfach durch die Bewegung einer Kugel $K$ längs der Geraden $h$ verdeutlichen. Die Kugel $K$ (oder genauer die durch $K$ gehende und zu $h$ senkrechte Gerade $g$) zeigt den Weinstand an (Bild 2), der zu einem bestimmten Zeitpunkt in beiden Gefäßen vorhanden ist. Die Gesamtmenge an Wein ist offensichtlich gleichbleibend, wenn wir nur die Größe der Gefäße berücksichtigen, d. h., die Kugel nur innerhalb der Strecke $AB$ laufen lassen. Wenn die Kugel über $A$ oder $B$ hinausläuft, dann laufen die Gefäße $G_2$ oder $G_1$ über, und der Wein geht verloren. Die *Überlaufpunkte* $A$ und $B$ grenzen auf der Geraden $h$ den *Anzeigebereich* ab.

Um die *dritte* Kanne unterzubringen, ändern wir die Anordnung der Kannen etwas ab, indem wir die zwei Kannen $G_1$ und $G_2$ gegeneinander drehen, wie es das Bild 3 zeigt. Dabei wird die Gerade $g$ geknickt, und es ergeben sich zwei Geraden $g_1$ und $g_2$. Der Flüssigkeitsstand kann immer noch durch die Kugel $K$ angezeigt werden, wenn wir das sich mit der Kugel bewegende Geradenpaar $g_1$ und $g_2$ dazu benutzen (siehe Bild 3), das im Punkt $K$ den gestreckten Winkel $AKB$ zu jeder Zeit drittelt (d. h. $\sphericalangle AKX = \sphericalangle BKY = 60°$). (Zu jedem Ort der Kugel gehören je zwei Geraden $g_1$ und $g_2$, und es wäre korrekter, diese entsprechend zu unterscheiden. Alle Geraden $g_1$ bzw. $g_2$ sind jedoch zueinander parallel, so daß mit dem Ort der Kugel sofort das Geradenpaar $g_1$, $g_2$ angegeben werden kann. Deshalb verzichten wir auf diese Unterscheidung.) Wir bestimmen nun auf der Geraden $h$ die Anzeigestrecke $AB$ der Kugel. Den Überlaufpunkt $A$ legen wir am günstigsten in den Boden des Gefäßes $G_2$ (d. h., wir rücken $G_2$ entsprechend an $h$ heran). Das Dreieck $AKX$ ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $AK$. Aus dieser Beziehung errechnet sich leicht der Überlaufpunkt $B$, da die Höhe von $G_2$ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $AB$ ist:

$$AB = (\text{Höhe von } G_2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Nun ist es einfach, ein *drittes* Gefäß in unsere Umfüllvorrichtung einzufügen, dessen Flüssigkeitshöhe während des Umfüllens von $G_1$ in $G_2$ oder umgekehrt ungeändert bleibt (Bild 4), wenn die Gerade $g_3$ $(=h)$ durch $A$ und $B$ die Flüssigkeitshöhe in $G_3$ anzeigt.

Nehmen wir z. B. an, daß beim nächsten Umschütten in $G_1$ die Weinmenge nicht verändert werden soll. Dann darf sich die Kugel $K$ nicht mehr längs der Geraden $g_3$ bewegen. Wenn wir die Kugel jedoch längs $g_1$ weiterlaufen lassen, dann ändert sich die Weinmenge in $G_2$, und entsprechend der Ab- oder Zunahme ändert sich auch der in $G_3$ vorhandene Wein. Dabei legen wir den Weinstand in $G_3$ durch eine Gerade fest, die durch $K$ geht und zu $g_3$ parallel ist. (Sinngemäß erweitern wir unsere für das Geradenpaar $g_1, g_2$ getroffene Vereinbarung auch auf diese Gerade und bezeichnen sie ebenfalls wieder durch $g_3$.) Damit die laufende Kugel $K$ die Umschüttungen „vornehmen“ kann, müssen wir noch garantieren, daß sie nicht über die Überlaufpunkte der Gefäße hinauskommt, sondern dort irgendwie die Richtung wechselt. Lassen wir z. B. die Kugel von $A$ aus zum Überlaufpunkt $B$ rollen, so wird $G_2$ auf Kosten von $G_1$ gefüllt. Der Punkt $B$ zeigt an, daß $G_2$ völlig gefüllt ist. Jetzt wird weiter mit $G_2$ und $G_3$ umgefüllt. Die Kugel darf sich vom Punkt $B$ an nicht mehr auf der Geraden $g_3$ bewegen, sondern muß in $B$ auf die Gerade $g_1$ überwechseln. In diesem Fall wird $G_3$ zugunsten von $G_2$ gefüllt. Das ist aber technisch einfach zu bewerkstelligen, wenn wir durch $B$ eine *Bande* parallel zu $g_2$ gehen lassen (Bild 5). Das Reflexionsgesetz garantiert dann $\sphericalangle KBK' = 60°$.

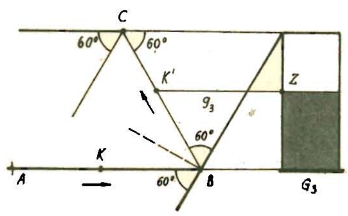



Bild 5: Konstruktion einer automatischen Umfüllanzeige

Wir haben jetzt nur noch zu beachten, daß $K$ auf der Geraden $g_1$ durch $B$ wieder an eine Bande trifft, wenn der Überlaufpunkt $C$ für das Gefäß $G_3$ erreicht wird. Die Kugel soll dabei so reflektiert werden, daß der Flüssigkeitsstand im Gefäß $G_2$ konstant bleibt. Wir müssen schließlich noch eine Bande parallel zu der durch $B$ legen, die sichert, daß die Weinmenge (in $G_2$) nicht unterschritten wird, aus gleichen Gründen ist die Strecke $AB$ als Bande zu betrachten. Nun kann unser Computer arbeiten!

Wir setzen (für unser Beispiel mit den 8-, 5- und 3-Liter-Gefäßen) auf dem *Billardtisch* die Kugel $K$ von $A$ aus längs einer Bande in Bewegung, und ihr jeweiliger Stand gibt die Weinaufteilung in den Gefäßen $G_1$, $G_2$ und $G_3$ an. Verfolgen wir den Weg der Kugel, so erfahren wir, wie umgeschüttet wird. Läuft die Kugel von $A$ nach $B$, so fließt der Wein aus dem größten Gefäß ($G_1$) in das mittlere ($G_2$). In $B$ ändert $K$ entsprechend dem Reflexionsgesetz die Richtung. Der Wein im großen Gefäß bleibt ungeändert, während vom mittleren ($G_2$) in das kleinere Gefäß ($G_3$) geschüttet wird; danach bleibt der Wein im mittleren Gefäß konstant und wächst im großen Gefäß auf Kosten des kleinen Gefäßes an usw., bis schließlich (für unser Beispiel nach 7 Reflexionen [= Umfüllungen]) die gewünschte Aufteilung erhalten wird. Läuft die Kugel anfangs von $A$ nach $D$, so ergibt sich eine andere Lösung mit einem Schritt mehr. Jeder Punkt des Billardtischs gibt einen möglichen Umfüllungszustand an (Bild 6). Die Banden $AB$ bzw. $CD$ markieren dabei das leere bzw. volle Gefäß $G_3$, die Banden $AD$ bzw. $BC$ zeigen geleertes bzw. gefülltes Gefäß $G_3$ an. Die Ecken $A$ und $C$ repräsentieren ein gefülltes bzw. geleertes Gefäß $G_1$. Punkte innerhalb des Billardtisches bezeichnen Zustände während des Umfüllens, das beendet ist, wenn die Kugel an die Bande trifft. Natürlich sind nur solche Aufteilungen möglich, für die die zugehörigen Punkte des Billardtisches von der Kugel während ihres Laufes berührt werden. (Wenn sich die Kugel am Tisch längs beliebiger Kurven bewegen würde, so hieße dies, daß wir entweder Hilfsmittel beim Umfüllen zulassen [Meßgeräte] oder unkontrolliert umschütten [also nicht wissen, wieviel sich in den Gefäßen befindet bzw. aus ihnen herausgeschüttet wird].)

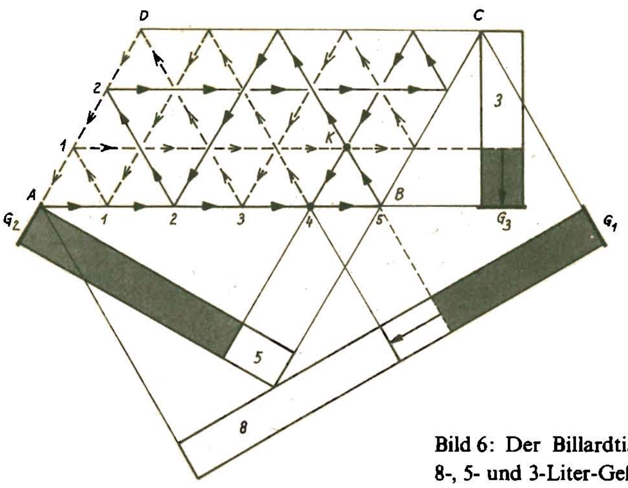



Bild 6: Der Billardtisch zum Umfüllen der 8-, 5- und 3-Liter-Gefäße

Der Vorgang des Umfüllens wird durch unseren Billardtisch modelliert bzw. analog dargestellt. Die rollende Kugel auf einem entsprechend eingerichteten Billardtisch ist also etwas, was in der Rechentechnik als *Analogrechner* bezeichnet wird.

*Aufgabe 3:* Richte einen Billardtisch für 12-, 8- und 5-Liter-Gefäße ein!

### 6. Dreieckskoordinaten

Nachdem physikalische Anregungen uns zum Bau eines Computers geführt haben, wollen wir auch eine Theorie für den Automaten schaffen. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel.

Nicht ganz so alt wie unser Umfüllungsproblem, aber von ebenfalls ehrwürdigem Alter ist der für uns sehr wichtige Satz von *Viviani* (1622 bis 1703): In jedem gleichseitigen Dreieck $ABC$ ist die Summe der Abstände eines innerhalb des Dreiecks befindlichen Punktes $P$ von den Seiten konstant.

*Beweis:* Wir bezeichnen mit $R$, $S$ und $T$ die Fußpunkte der von $P$ auf die Seiten $BC$, $AC$ und $AB$ gefällten Lote (Bild 7). Dann wird behauptet

$$\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT} = \text{const.}$$

Die Fläche des Dreiecks $ABC$ ist einerseits gleich

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB}\sqrt{3} = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

und andererseits gleich der Summe der Flächen der drei Dreiecke $APC$, $APB$ und $BPC$, also gilt

$$\sqrt{3}\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{PR} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{PS} + \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PT}$$

$$= \frac{\overline{AB}}{2}(\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT})$$

bzw. $\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT} = \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{3} = \text{const.}$,

w. z. b. w.

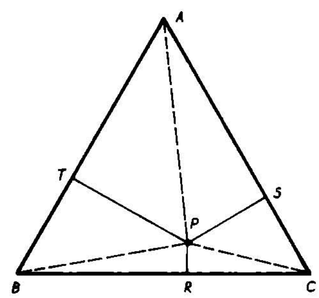



Bild 7: Zum Satz von Viviani

In der Ebene kann man die Lage eines Punktes festlegen, wenn man seine Abstände (*Koordinaten*) von zwei nicht-parallelen Geraden kennt, und umgekehrt bestimmt jeder Punkt seine Koordinaten. Im allgemeinen werden als Geraden zwei zueinander senkrechte Geraden gewählt; wir wollen jedoch zwei um 60° gegeneinander geneigte Geraden $g$ und $h$ wählen (Bild 8). Der Punkt $P$ mit den Abständen $x$ bzw. $y$ von $g$ und $h$ (d. h. mit den Koordinaten $(x, y)$ bezüglich $g$ und $h$) ergibt

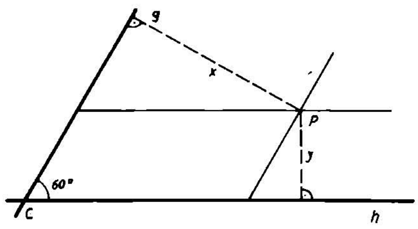



Bild 8: Schiefwinklige Koordinaten

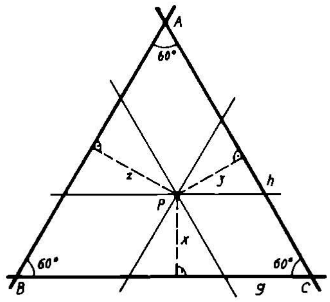
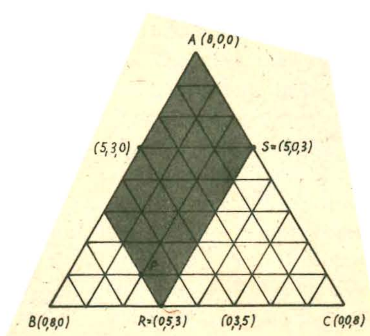



Bild 9: Dreieckskoordinaten

sich als Schnittpunkt der zu $g$ bzw. $h$ parallelen Geraden mit den Abständen $x$ bzw. $y$ (innerhalb des Winkelraums von 60°). Wenn wir noch eine dritte Gerade hinzunehmen, die beide Geraden schneidet, so ist klar, daß der Abstand von $P$ zu dieser Geraden eine überflüssige Koordinate darstellen würde, denn $P$ ist ja bereits völlig bestimmt. Die dritte Gerade möge $g$ und $h$ so schneiden, daß sich ein gleichseitiges Dreieck ergibt. (Bild 9) Dann liefert der Satz von Viviani gerade den Zusammenhang zwischen den drei Koordinaten $x$, $y$ und $z$: $x+y+z=\text{const}$. Gerade dieser Zusammenhang macht $z$ als dritte Koordinate interessant, da hier eine Entsprechung zu der konstanten Weinsumme besteht.

Die drei Angaben $(x,y,z)$ für jeden Punkt $P$ innerhalb des gleichseitigen Dreiecks $ABC$ nennen wir Dreieckskoordinaten hinsichtlich des Grunddreiecks $ABC$. Wir betrachten als Beispiel die Dreieckskoordinaten in einem

Bild 10: Das Grunddreieck der Dreieckskoordinaten




gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 8 Längeneinheiten. Dann haben die drei Eckpunkte die Koordinaten $A=(8,0,0)$, $B=(0,8,0)$ und $C=(0,0,8)$; der Punkt $P=1{,}5{,}2)$ (Bild 10). Die drei Dreiecksseiten haben in Dreieckskoordinaten die Gleichungen

$$AB: z=0,\ BC: x=0,\ AC: y=0.$$

Die zu den Dreiecksseiten parallelen Strecken bestehen aus Punkten, die jeweils eine entsprechende Dreieckskoordinate konstant haben. Die Verbindungsstrecke von $R=(0,5,3)$ mit $S=(5,0,3)$ hat $z=3$ in $x+y+z=8$, also als Gleichung $x+y=5$, wobei $0\leqq x\leqq 5$ und $0\leqq y\leqq 5$ ist.

**7. Die Automatentheorie**

Wir formulieren nochmals unser Problem: Gegeben sind drei Gefäße $G_1$, $G_2$ und $G_3$ mit den Fassungsvermögen von $a$, $b$ und $c$ Litern ($a>b>c>0$; $a$, $b$, $c$ natürliche Zahlen). $G_1$ ist gefüllt und durch Umschütten soll eine Menge von $d$ Litern ($d$ natürliche Zahl) herausgefüllt werden. Es ist, wenn $x$, $y$ und $z$ zu einem beliebigen Zeitpunkt die Inhalte der Gefäße $G_1$, $G_2$ und $G_3$ sind, stets

$x+y+z=a$ sowie (1)

$0\leqq x\leqq a$, $0\leqq y\leqq b$, $0\leqq z\leqq c$. (2)

(1) bedeutet, daß beim Umschütten kein Wein verloren geht (durch Verschütten, Verdunsten usw.), und (2) gibt einfach die Bedingungen wieder, die sich aus dem Fassungsvermögen der Gefäße ergeben. Da stets ein Gefäß völlig leer oder gefüllt ist, gilt in den drei Ungleichungen wenigstens ein Gleichheitszeichen; am Anfang gelten sogar drei. Uns interessieren Aufteilungen des Weins durch Umschütten bzw. Lösungstripel $(x,y,z)$ mit natürlichen Zahlen $x$, $y$, $z$.

Jetzt ergibt sich der Zusammenhang zu den Dreieckskoordinaten mühelos. Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $a$ und einen Punkt $P$. Dann gibt jeder Punkt innerhalb des Dreiecks eine mögliche Umfüllsituation an, bei der die Summe der Flüssigkeit konstant, nämlich gleich $a$ ist. Die Ecke $A$ symbolisiert die Ausgangssituation: $G_1$ ist gefüllt ($x=a$), $G_2$ und $G_3$ sind leer ($y$ und $z=0$). Die Ecken $B$ oder $C$ erfüllen formal gesehen auch die Erhaltung der Weinmenge beim Umschütten, aber bei jeder Umschüttung sind die durch (2) gegebenen Beschränkungen zu berücksichtigen. Mithin ist die „Größe" unseres Billardtisches durch (1) – d.h. durch $a$ – festgelegt, seine Form ergibt sich aus den Beschränkungen (2). Die Beschränkungen (2) sind geometrisch gesehen im Falle der Gleichheiten 6 Geraden, darunter die drei Dreiecksseiten. Der Tisch wird also im allgemeinen die Form eines *Sechsecks* haben. Wie unser Beispiel mit den 8-, 5- und 3-Liter-Gefäßen zeigt, kann er auch ein Parallelogramm sein, wobei sich zwei Geraden auf Eckpunkte „reduzieren" (und zwar immer dann, wenn $a=b+c$ ist. Wieso?).

Die Begrenzungslinien (Banden) des Tisches sind: $y=0$, $y=5$, $z=0$, $z=3$; die Geraden $x=0$ und $x=8$ sind auf dem Billardtisch auf die Punkte $(0,5,3)$ und $(8,0,0)$ zusammengeschrumpft.

Zum Umfüllen kann man sich noch die drei Gefäße hinzudenken, die jeweils senkrecht zu einer Dreiecksseite anzuordnen sind (Bild 11).

Je nachdem ob die Kugel von $(8,0,0)$ in Richtung $(3,5,0)$ oder $(5,0,3)$ gerollt wird, ergeben sich bis zum Halbieren der 8 Liter 7 bzw. 8 Umschüttungen. Die reflektierten Bahnen sind stets parallel zu einer Dreiecksseite. Jedes geradlinige Bahnstück bedeutet das Umfüllen von einem Gefäß in ein anderes, wobei das dritte unberührt bleibt (konstante Koordinaten der Bahn). Die mit 7 Umfüllungen ausführbare Halbierung lautet symbolisch

(8,0,0) (3,5,0) (3,2,3) (6,0,2) (6,2,0) (1,5,2) (1,4,3) (4,4,0);

die Lösung mit 8 Umfüllungen

(8,0,0) (5,0,3) (5,3,0) (2,3,2) (2,5,1) (7,0,1) (7,1,0) (4,1,3) (4,4,0).

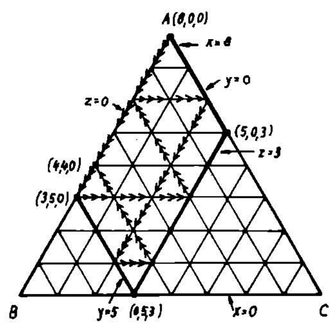



Bild 11: Konstruktion des Billardtisches für 8-, 5- und 3-Liter-Gefäße aus dem Grunddreieck

Wenn wir den Weg der Kugel über den Punkt (4,4,0) hinaus verfolgen, so zeigt sich (Bild 11), daß jeder Bandenpunkt mit natürlichen Zahlen als Koordinaten tatsächlich erreichbar ist.

Das sind die Tripel

(8,0,0) (7,1,0) (6,2,0) (5,3,0) (4,4,0) (3,5,0) (2,5,1) (1,5,2)

(0,5,3) (1,4,3) (2,3,3) (3,2,3) (4,1,3) (5,0,3) (6,0,2) (7,0,1),

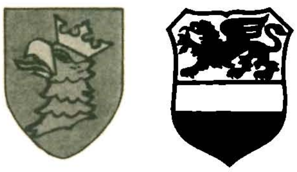
und sie charakterisieren alle möglichen Aufteilungen des Weins durch Umschütten.

*R. Thiele*

Die Lösungen zu diesem Beitrag sowie drei weitere Aufgaben veröffentlichen wir im Lösungsteil des Heftes 3/80, d. Red.

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

# Mathematik-Wettstreit Szczecin – Rostock



Der Mathematikwettbewerb zwischen Schülern der Partnerbezirke Szczecin und Rostock erlebte im vergangenen Jahr ein kleines Jubiläum: Zum fünften Mal trafen sich die Schüler zum gemeinsamen Kräftemessen an mathematischen Problemen. Vom 2. bis zum 5. Februar 1979 waren fünf Schüler der Klassen 11 und 12 sowie zwei Betreuer aus Szczecin in Rostock zu Gast. Die Schüler lösten am 3. und 4. Februar unter den gleichen Bedingungen, unter denen die *Jungen Mathematiker* des Bezirkes Rostock die Aufgaben in Angriff nahmen, die Aufgaben der *Bezirksolympiade Junger Mathematiker der DDR*. Zuvor wurden die Aufgaben selbstverständlich ins Polnische übersetzt. Die Lösungen der polnischen Freunde wurden durch einen deutschen und einen polnischen Betreuer, die jeweils die Sprache des anderen beherrschten, bewertet. Wie auch in den vergangenen Jahren belegten unsere Gäste vordere Plätze, auch wenn sie mit dem Abschneiden in diesem Jahr nicht ganz zufrieden waren. Neben der Teilnahme an der Mathematikolympiade gab es für die vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit betreute polnische Delegation zahlreiche Veranstaltungen, die es den Gästen ermöglichten, Rostock und seine Einwohner etwas näher kennenzulernen.

Vom 22. bis 25. März 1979 weilten fünf Schüler der Klassen 10, 11 und 12 sowie zwei Betreuer aus dem Bezirk Rostock zum Gegenbesuch anläßlich der „Kopernikanischen Spiele“ in Szczecin. Am 24. März fanden die Wettbewerbe auf Bezirksebene statt. Sie gliedern sich für die polnischen Schüler in drei Teilwettbewerbe. Zunächst findet für alle Teilnehmer ein Aufgabenwettbewerb (4 Aufgaben sind in drei Stunden zu lösen) statt. Daran schließt sich nach einer kurzen Pause ein sogenannter *Test* an. Dabei sind innerhalb von 45 Minuten zwanzig Fragen zu beantworten. Für die polnischen Schüler, die aus diesen beiden Teiletappen als beste hervorgehen, findet dann ein Quiz, das Finale, statt. Hier muß innerhalb von 4 Minuten eine Aufgabe gelöst werden und innerhalb von 15 Sekunden auf eine Frage, die oft scherzhafter Natur ist und manchmal kein mathematisches Problem direkt berührt, geantwortet werden. Die Schüler aus der DDR beteiligten sich jedoch nur an den ersten beiden Teiletappen. Dabei hatten sie zunehmend, nach anfänglichen Problemen mit den doch ungewohnten Aufgabenstellungen, Erfolge zu verzeichnen.

Neben dem mathematischen Wettstreit, den Begegnungen beim Auswerten der Aufgaben gab es für die Schüler und die Betreuer vielfältige Möglichkeiten, Land und Leute kennenzulernen, Freundschaften zu schließen. Für die Schüler unseres Bezirkes ergibt sich mit der Möglichkeit der Teilnahme an den „Kopernikanischen Spielen“ in Szczecin ein zusätzlicher Anreiz beim Lösen der Aufgaben der Bezirksolympiade, denn die Besten fahren nach Szczecin und erhalten dort die Gelegenheit, ihre Fähigkeiten in einem internationalen Wettbewerb nachzuweisen. Darüber hinaus ist der Aufenthalt in Polen für alle Teilnehmer ein großartiges und unvergeßliches Erlebnis.

Zur Illustration möchte ich die Aufgaben der diesjährigen Spiele, einige Fragen aus dem Test sowie eine Fragestellung aus dem Finale für die Klassen 11/12 vorstellen. Die Autoren der Aufgaben und Fragen sind Mgr. *S. Klekowski* und Dr. *Z. Zalewski*.

*E. Herbst*

## I. Test

▲1▲ Welchen Wahrheitswert hat die Implikation

$$(\sin\alpha=\sqrt{3})\Rightarrow(\log_2 5=\sqrt{2})?$$

▲2▲ Man schreibe das Produkt $\prod_{k=1}^{n} k$ in einfacherer Form!

▲3▲ Besitzt die Gleichung $x^4-3x^3+x^2-x-2=0$ rationale Wurzeln?

▲4▲ Für welche Werte des Parameters $a$ gilt die Gleichung

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{2x}=4?$$

▲5▲ Unter der Voraussetzung $\sin x+\cos x=c$ bestimme man $\sin 2x$.

▲6▲ Man skizziere den Verlauf der Funktion $y=\log x^2-\log|x|$!

▲7▲ Man konstruiere den Verlauf der Funktion $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{1,5} x}$!

▲8▲ Man berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}=[-7]$ und $\vec{b}=[3]$.

▲9▲ Die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ sind schiefwinklig zueinander. Man berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{CD}$!

▲10▲ Wieviel Kanten hat ein regelmäßiges Pentagondodekaeder?

▲11▲ Es sei $y=\sin x$. Bestimme $dy$!

▲12▲ Man differenziere die Funktion $f(x)=\sqrt[x]{1}$, wobei $x\neq 0$ gilt!

▲13▲ Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x)=\int\frac{x-x^3}{1+x^4}dx$!

▲14▲ Man berechne $\int_1^2 \log x\,dx-\int_1^2 \log t\,dt$!

▲15▲ Man löse die Gleichung

$$|x|+\left|\int_a^b f(x)dx\right|=1+\left|\int_b^a f(x)dx\right|!$$

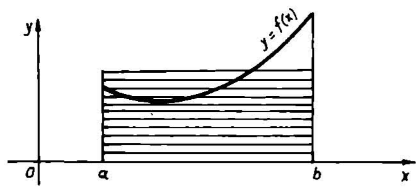
▲16▲ Aus wieviel Punkten $P(x,y,z)$ besteht der dreidimensionale Raum, wenn $x\in\{1,2,3\}$, $y\in\{2,5\}$, $z\in\{3,7,8,9\}$?

▲17▲ Ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $a$ und $b$, $a>b$, der Höhe $h$ rotiert um seine Mittellinie. Man bestimme das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers!

▲18▲ Was für ein geometrisches Gebilde wird von den Punkten $M(x,y,z)$ gebildet, die der Gleichung $x^2+y^2=0$ genügen?

▲19▲ Eine Fabrik produziert Schrauben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine fehlerhafte Schraube produziert wird, beträgt 0,015. Wie groß ist die wahrscheinliche Anzahl fehlerhafter Schrauben in einer Sendung von 3000 Stück?

▲20▲ Welche Höhe muß das schraffierte Rechteck (siehe Bild) haben, damit sein Flächeninhalt mit dem Inhalt der durch die Kurven $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ begrenzten Fläche übereinstimmt?




## II. Aufgaben

▲1▲ Besteht die Implikation:

Für alle $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ gilt:

$\alpha<\beta\Rightarrow\alpha\cot\alpha<\beta\cot\beta$?

▲2▲ Welche Kurve wird durch die Gleichung $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$ dargestellt?

▲3▲ Man leite eine Rekursionsformel für $f^{(n)}(x)$ her, wenn $f(x)=\sin x$ ist!

▲4▲ Man bestimme den Tangens des Schnittwinkels der Kurven $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ und berechne die Fläche zwischen den Kurven und der Geraden $x=\frac{\pi}{2}$!

Fortsetzung auf Seite 47

# Leon Lichtenstein – ein Leipziger Mathematiker

Die angewandte Mathematik hat an der Leipziger Universität eine große Tradition. Das betrifft insbesondere die Astronomie (z. B. Karl Brandau Mollweide 1774 bis 1825 und August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868) und die Physik (z. B. Carl Neumann 1832 bis 1925). Von hervorragender Bedeutung für die mathematische Beschreibung astronomischer und physikalischer Erscheinungen sind auch die Forschungen von Leon Lichtenstein, der seit 1922 – in seinen letzten 11 Lebensjahren – an der Leipziger Universität wirkte. Es war die Zeit zwischen Inflation und Herrschaft des Faschismus, wobei gerade letzteres für Leon Lichtenstein besonders folgenschwer war, worauf wir noch zurückkommen.

Wie kam es nun eigentlich zur Berufung Lichtensteins als Professor für Mathematik nach Leipzig? In Leipzig existierte schon um 1920 ein sehr gut ausgestattetes Mathematisches Institut, an dem auch der bekannte Geometer Karl Rohn (1855 bis 1920) tätig war. Mit dem Tode von Rohn wurde eine Professorenstelle frei, die neu zu besetzen war. Wie üblich wurde eine Kommission gebildet, die begründete personelle Vorschläge zu machen hatte. Man nannte an erster Stelle Leon Lichtenstein, der gerade erst (1920) ordentlicher Professor an der Universität in Münster geworden war. Dieser Vorschlag wurde aber aus bis heute ungeklärten Gründen von der zuständigen Fakultät der Universität Leipzig nicht akzeptiert. Auch ein zweiter Vorschlag, in dem Lichtenstein nicht genannt wurde, konnte aus persönlichen Gründen der vorgeschlagenen Mathematiker nicht realisiert werden.

In dem nun folgenden dritten Vorschlag stand allerdings Leon Lichtenstein wieder an erster Stelle. Lichtenstein nahm die hiernach an ihn ergangene Berufung nach Leipzig dankend an, wie einer seiner Briefe beweist.

Der neue ordentliche Professor der Mathematik in Leipzig und Mitdirektor des Seminars und Instituts – Leon Lichtenstein – war 44 Jahre alt, als er vor nunmehr 57 Jahren am 1. April 1922 seine Tätigkeit in der Messestadt aufnahm. Die Kollegen an der für ihn neuen Universität waren Otto Hölder (1859 bis 1937), Gustav Herglotz (1881 bis 1953), Walter Schnee (1885 bis 1958), Paul Koebe (1882 bis 1945), Ludwig Neder (1890 bis 1960), Friedrich Levi (1888 bis 1966) und später auch Bartel Leendert van der Waerden (geb. 1903). Alle brachten sie ihm hohe Wertschätzung entgegen. 1928/29 war er Dekan der Abteilung II der philosophischen Fakultät. Auch seine Frau Stephanie, mit der er seit 1908 verheiratet war, fand als promovierte Physiologin gute Arbeitsmöglichkeiten an der Leipziger Universität.

Geboren wurde Leon Lichtenstein am 16. Mai 1878 in Warschau. 1894 ging er mit einem Realschulreifezeugnis zum Studium an die Technische Hochschule in Berlin-Charlottenburg. Neben seinem Studium des Maschinenbaus und der Elektrotechnik besuchte Lichtenstein noch Vorlesungen und Spezialseminare an der Berliner Universität bei den Mathematikern Hermann Amandus Schwarz (1834 bis 1921), Georg Frobenius (1849 bis 1917), Friedrich Schottky (1851 bis 1935) und Edmund Landau (1877 bis 1938). Besonders stark beeinflußte ihn dabei Schwarz, von dem Lichtenstein auch viele Jahre später noch voller Bewunderung sprach. Nachdem die Technische Hochschule Leon Lichtenstein schon 1907 den Titel „Dr.-Ing." verlieh, promovierte er 1909 an der Berliner Universität über ein mathematisches Problem. Schon 1910 habilitierte er sich an der Hochschule in Charlottenburg für reine und darstellende Geometrie. An dieser Hochschule wurde Lichtenstein 1917 auch außerordentlicher Professor und 1920 Honorarprofessor.

Nicht unbeachtet darf man seine Tätigkeit als Ingenieur bei der Firma „Siemens und Halske" lassen. Sie machte ihn einerseits finanziell relativ unabhängig und erhielt ihm andererseits den Kontakt zur Praxis. Diese Doppelbelastung – Hochschulmathematiker/Techniker – begann 1902 und währte bis 1923. Neben vielen bedeutenden mathematischen Arbeiten ist sie durch eine Folge von 14 Veröffentlichungen zu elektro-technischen Problemen gekennzeichnet. Seit 1905 war er als Chef des physikalischen Labors und des Kabelwerkes der genannten Firma eingesetzt. Die große Zeit seiner Vielseitigkeit begann eigentlich erst 1913/14, als er schon einmal nach Leipzig kommen sollte. Neben den erwähnten elektrotechnischen Dingen führte er zusammen mit Prandtl in dem von Felix Klein ins Leben gerufenen und zunächst hauptsächlich für Rüstungszwecke gedachten Göttinger Institut für Aerodynamik Windkanalexperimente durch. Bei dieser Gelegenheit stellt er verschiedene Berechnungen zur Konstruktion von Luftschiffen und Flugzeugen an.

Diese Arbeiten wurden, ohne erst groß sein Einverständnis einzuholen, vom deutschen Imperialismus im ersten Weltkrieg sofort genutzt. Lichtenstein hat sich mit politischen Fragen leider kaum beschäftigt, ganz im Unterschied zu seinem naturwissenschaftlichen Forscherdrang. Die deutsche Staatsbürgerschaft erhielt er, bevor man ihn noch 1918 zum Militärdienst (Feldartillerie) einzog. Auch persönlich war ihm mit diesem „Eindeutschungsvorgang" in keiner Weise geholfen, wie sich 1933 noch herausstellen sollte.

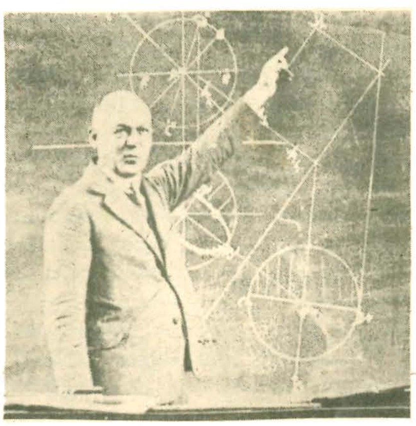
Lichtensteins überragende Verdienste auf dem Gebiet der Mathematik werden komplettiert durch eine umfangreiche redaktionelle Arbeit und Lehrtätigkeit. Das trifft auch auf die Kriegsjahre zu. Er gründete 1918 die „Mathematische Zeitschrift" und leitete die Herausgabe des „Jahrbuches für die Fortschritte der Mathematik" von 1919 bis 1927.

Seine mathematischen Forschungen konzentrierten sich auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die Potentialtheorie. Das sind Gebiete der höheren Mathematik, die Lichtenstein durch eine Vielzahl bedeutender mathematischer Resultate bereicherte, die an dieser Stelle nur genannt seien.

Von etwa 1918 an wandte sich Lichtenstein, der die Anwendung seiner mathematischen Forschungen stets im Auge behielt, immer stärker einer naturwissenschaftlichen Frage zu, die ihm weitere große Forschungserfolge und Popularität einbrachte. Es ist das Problem der Figur der Himmelskörper, das er zu ergründen suchte. Über die Leipziger Jahre hinweg bis zu seinem Tode 1933 fesselten ihn diese Phänomene.

Die ersten Gedanken zu diesem Himmelskörperproblem stammen von Isaac Newton (1643 bis 1727) und Christiaan Huygens (1629 bis 1695). Colin Maclaurin (1698 bis 1746) führte dann als erster einen mathematischen Existenzbeweis für eine Gleichgewichtsfigur von der Art eines abgeplatteten Rotationsflüssigkeitsellipsoids (wie sie bei den Himmelskörpern vorkommt). Nach weiteren diesbezüglichen wichtigen Forschungen im 19. Jahrhundert, gab der Mathematiker Henri Poincaré (1854 bis 1912) 1885 eine ganze Reihe neuer Gleichgewichtsfiguren an, die er

Leon Lichtenstein 1931 (?) bei einer Vorlesung über *Darstellende Geometrie* am Mathematischen Institut der Universität Leipzig. (Quelle: Dr. Helmar Lehmann, Leipzig)



allerdings nur auf spekulative Art gefunden hatte. Große Verdienste kommen auf diesem Gebiet der „Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten", wie es nun genannt wurde, dem russischen Mathematiker Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857 bis 1918) zu, der einige dieser Poincaréschen Spekulationen mathematisch exakt begründete und dabei auch neue Gleichgewichtsfiguren fand. Ljapunow erhielt die ersten Anregungen zu diesen Arbeiten von seinem berühmten Lehrer Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821 bis 1894).

Lichtenstein baute direkt auf den sehr schwer zu lesenden Ljapunowschen Schriften auf. Die hiervon ausgehenden Arbeiten zur Hydrodynamik (Lehre von den sich bewegenden Flüssigkeiten) verknüpfen den Namen Lichtensteins für alle Zeit mit diesem Gebiet. Der Reiz der Hydrodynamik bestand für Lichtenstein in der Einheit von hohem analytischen Charakter (mathematische Formelsprache) und Anschaulichkeit. Besonders schöne Darstellungen dieses Forschungsgebietes gab er in den beiden Büchern „Grundlagen der Hydrodynamik" von 1929 (Zusammenfassung von Hydrodynamik und Hydrostatik [Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten]) und „Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten" von 1933.

Die erste Arbeit ist mehr ein umfangreiches Lehrbuch, das den aktuellen Stand der mathematischen Entwicklung weitgehend berücksichtigt. Die hier an zweiter Stelle genannte Veröffentlichung, die letzte von seinen weit über 100 mathematischen Arbeiten, stellt im Prinzip einen Forschungsbericht dar. Sie ist aus einem von Lichtenstein im Sommersemester 1928 an der Universität Leipzig durchgeführten Kolleg (Spezialseminar) hervorgegangen. Von den Teilnehmern, die meist in Form von Dissertationen einen wesentlichen Anteil an den Ergebnissen haben, seien Erich Kähler, Victor Garten, Karl Maruhn, Ernst Hölder und Georg Dölling genannt. So wurden durch Lichtenstein und seine Schüler z. B. die von Poincaré behandelten birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren widerlegt und die Existenz ringförmiger Gleichgewichtsfiguren mit und ohne Zentralkörper bewiesen. Von Lichtenstein wird als erstem die Laplacesche Theorie des Erdmondes und Saturnringes streng ausgeführt. Auch eine hochinteressante mathematische Theorie über die Gestalt der Weltmeere verdanken wir Leon Lichtenstein.

Deutlich ist zu erkennen, wie sich im Verlauf der Jahre Lichtensteins mathematische Modelle immer genauer den realen Erscheinungen anpassen. So gelangte er mittels der Untersuchung nichthomogener Flüssigkeitskörper (unterschiedliche Dichte der Flüssigkeit in verschiedenen Teilen des Körpers) auch zur Existenz einer Gleichgewichtsfigur, die aus zwei Einzelmassen besteht, welche nur einen gemeinsamen Punkt haben. Das entspricht etwa der Ablösung eines Mondes vom Mutterplaneten. Die Verbindung zwischen Mathematik und Astronomie, wie man sie durch Mollweide und Möbius zu Beginn des 19. Jahrhunderts in Leipzig schon kannte, lebte durch Lichtenstein in gewisser Weise wieder auf. Sein Interesse und sein Vorhaben auf diesem Gebiet macht Lichtenstein bereits in seiner sehr lesenswerten Leipziger Antrittsrede

„Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper." (1923 bei Hirzel erschienen)

vom 20. Mai 1922 deutlich.

Leon Lichtenstein hatte einen entscheidenden Anteil bei der Ausbildung der damals jungen Mathematikergeneration. Die „Mathematische Zeitschrift" brachte zu seinem 80. Geburtstag einen Gedenkband heraus, in dem 24 Mathematiker aus 10 Ländern ihm zu Ehren wissenschaftliche Arbeiten veröffentlichten. Der überwiegende Teil kommt dabei aus den USA, wohin viele Wissenschaftler während der „Braunen Diktatur" emigrierten. Denn kaum waren die Nazis an der Macht, da offenbarten sie ihre rassistische Grundhaltung. Das sogenannte „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" sollte jeglichen jüdischen und ausländischen Einfluß rigoros beseitigen. So nahm man auch Leon Lichtenstein aufs „Korn". Der damalige Dekan Prof. Weikmann sandte am 21. 4. 1933 dem Minister anweisungsgemäß einen Bericht. In dem Schreiben, das Otto Hölder abgefaßt hatte, werden neben der politischen Inaktivität alle Verdienste Lichtensteins hervorgehoben:

- die große internationale Bedeutung
- die Beliebtheit bei den Studenten
- die überaus erfolgreiche Lehrtätigkeit. (Er las fast alle damals üblichen mathematischen Disziplinen.)

All diese Dinge sollten Lichtenstein nichts nützen. Die offene Hetze gegen ihn nahm zu. In der *Leipziger Tageszeitung* vom 4. August 1933 stand zu lesen:

„Am mathematischen Institut lehrt heute noch ungestört ein polnischer oder galizischer Jude, Herr Prof. Leon Lichtenstein! Prof. Lichtenstein beherrscht die deutsche Sprache nur sehr mangelhaft (eine glatte Lüge – Kö.). Trotzdem kann er weiter lehren! ... Wir wissen nicht, warum das Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums an der Universität Leipzig gerade nicht gelten soll, bzw. sein Sinn in das Gegenteil verkehrt wird. ... Wir wundern uns nur, daß die deutschen Studenten an unserer Universität sich so etwas bieten lassen und nicht von sich selbst aus Ordnung schaffen."

Kaum drei Wochen später verstarb Lichtenstein in Zakopane. Zwei Tage nach seinem Tode, am 23. August, stand in der eben zitierten Zeitung eine Notiz von zwei kurzen Sätzen über angebliches Herzversagen. Lichtensteins Frau in der Todesanzeige am gleichen Tag: „... Von Beileidsbesuchen bittet man freundlichst absehen zu wollen."

1978 veranstaltete die Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig eine wissenschaftliche Tagung aus Anlaß des 100. Geburtstages von Leon Lichtenstein, der seine Liebe zur Mathematik in die Worte faßte:

„Was wir an den Meistern unserer Wissenschaft bewundern und ehren, ist der Scharfsinn und der Weitblick, die sie in den Stand setzen, tief versteckte Beziehungen zu erkennen und ins Licht zu setzen. Das Gefühl, dem Schatze des Wissens eine vorher nicht vermutete Wahrheit hinzugefügt zu haben, ist das größte Glück und die höchste Belohnung, die der Mathematiker anstrebt."

(Zitiert bei O. Hölder: Lichtenstein-Nekrolog, Math. Ann. Bd. 38 [1933])

Abschließend sei ein Auszug aus dem Buch des Mathematikers Norbert Wiener (1894 bis 1964) „Mathematik – mein Leben", Frankfurt/M. und Hamburg 1965, wiedergegeben, der ein plastisches Bild von der Persönlichkeit Lichtensteins zeichnet.

Auf Seite 79/80 heißt es u. a.:

„Ich hatte eine ganze Menge von den Arbeiten eines deutschen Mathematikers, Leon Lichtenstein, gesehen. ... Mein Vater wußte von einem Vetter Leon, der die Technische Hochschule in Berlin besuchte. ... Er wußte auch, daß Leon später die Arbeit in der Industrie aufgegeben und sich der akademischen Arbeit auf dem Gebiete der angewandten Mathematik gewidmet hatte; welche Erfolge er erzielen konnte oder wo er zur Zeit tätig war, wußte er jedoch nicht.

Eines Tages erhielten wir einen Brief von Tante Charlotte in New York, aus dem hervorging, daß Leon in der Mathematik erfolgreicher gewesen war, als wir vermutet hatten. In dem Brief stand auch sein voller Name: Leon Lichtenstein. Ich zog den naheliegenden Schluß, daß höchstwahrscheinlich Vetter Leon und der berühmte Mathematiker ein und derselbe waren. Ich schrieb also an Lichtenstein. ... Er lud mich ein, ihn das nächste Mal, wenn ich wieder in Europa sein würde, zu besuchen, ...keiner hatte je ein Bild des anderen gesehen. Er holte mich vom Bahnhof (Leipzig – Kö.) ab und hielt ein Papier hoch, auf das er, mir zu Ehren, die Hauptformel der Potentialtheorie geschrieben hatte. Leon Lichtenstein war kahlköpfig, trug einen Bart und sah äußerlich meinem Vater nicht sehr ähnlich, war aber wie er klein und energisch, hatte rasche Bewegungen und sehr entschiedene Meinungen. Er war in vieler Hinsicht sehr antiamerikanisch eingestellt, wenn er auch zu mir persönlich sehr herzlich war."

*F. König*

# Mathematiker – ein interessanter Beruf

Um es gar nicht erst zu verschweigen: Meine Absicht ist es, diesen oder jenen Leser der *alpha* zum Nachdenken darüber zu veranlassen, ob nicht der Beruf eines Mathematikers oder eines Mathematik-Lehrers die richtige Entscheidung für die Zukunft wäre.

Nun reicht dafür sicherlich allein der Hinweis nicht aus, daß seit einigen Jahren immer wieder Studienplätze in der Grundstudienrichtung Mathematik und für das Lehrerstudium in Fachkombinationen mit Mathematik frei bleiben.
Wesentlich sind sicher für jeden einzelnen Fragen wie die nach der Rolle der Mathematik in unserer Gesellschaft, nach den beruflichen Aufgaben eines Mathematikers (für den Lehrerberuf dürfte das bei allen Lesern aus dem eigenen Erleben ohnehin klar sein) oder die *Gewissensfrage:* „Kann ich ein solches Studium überhaupt bewältigen?"
Zu diesen Problemen gibt es sehr vieles zu sagen, und ich möchte Interessenten auf das 1978 im Teubner-Verlag erschienene Büchlein „Studienwunsch Mathematik" hinweisen, das sich damit gründlich und in ansprechender Weise beschäftigt.
Der Entwicklung und Förderung der Mathematik wird in unserer Republik von jeher große Bedeutung beigemessen. Das zeigt sich zum Beispiel am „Mathematik-Beschluß", den das Politbüro des ZK der SED im Jahre 1962 faßte.
Vielfältige Initiativen wurden damals eingeleitet, um die mathematische Bildung weiter zu erhöhen und dem modernen Entwicklungsstand besser anzupassen. Unter anderem entstand die Mathematik-Olympiade-Bewegung. Die Ausbildung von Mathematikern wurde entsprechend den sich abzeichnenden Entwicklungstendenzen wesentlich erweitert, so daß seit der zweiten Hälfte der 60er Jahre der Einsatz von Mathematikern in der Industrie und anderen Bereichen der Volkswirtschaft beträchtlich erhöht werden konnte. Das führte – verbunden mit dem Aufkommen und dem breiten Einsatz der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen – zu völlig neuen Möglichkeiten, aber auch zu neuen Fragen und Problemen, denn bisher gab es nur wenige und vereinzelte Erfahrungen beim Einsatz von solchen Kadern außerhalb der Akademie der Wissenschaften, der Universitäten und Hochschulen.
Die Erweiterung des mathematischen Potentials der Industrie, aber auch der Forschungs- und Bildungseinrichtungen, vollzog und vollzieht sich in Übereinstimmung mit einer objektiven Tendenz in allen fortgeschrittenen Industrieländern: der wachsenden Rolle von Wissenschaft und Technik, mit der sich untrennbar gewaltige Aufgaben für die Mathematik verbinden.
Die modernen Entwicklungen in der Mikroelektronik, im Maschinenbau, der chemischen Industrie, im Bauwesen und anderen Bereichen der Volkswirtschaft wären unmöglich ohne die schöpferische Nutzung und Weiterentwicklung mathematischer Verfahren und Theorien. Beispielsweise finden in zunehmendem Maße wahrscheinlichkeitstheoretische und Methoden der mathematischen Statistik bei der Erhöhung von Qualität und Zuverlässigkeit der Produkte und Technologien Anwendung, algebraisch-kybernetische Methoden braucht man u. a. in der rechentechnischen Industrie, Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle im Maschinenbau, die mathematische Optimierung wird auf allen Ebenen der Wirtschaftsplanung, aber auch zur Optimierung von Produktionsabläufen erfolgreich eingesetzt.
Die Entwicklung der modernen Rechenelektronik erlaubt es, mathematische Aufgaben zur Lösung theoretischer und praktischer Probleme in Angriff zu nehmen, die vorher wegen des hohen zeitlichen Aufwandes für die Rechnung als nicht bearbeitbar galten. Die EDV stellt aber auch neue und höhere Anforderungen an die Mathematik, vor allem im Hinblick auf die Entwicklung leistungsfähiger numerischer Verfahren. Überhaupt erwachsen aus der fortschreitenden „Mathematisierung" verschiedener Wissenschaften immer neue Anforderungen an die mathematische Grundlagenforschung, die unter der Führung hervorragender Gelehrter vor allem an den Universitäten, der Akademie der Wissenschaften, an den Technischen und Pädagogischen Hochschulen betrieben wird.
Zur Verwirklichung der unserer Gesellschaft gestellten anspruchsvollen Ziele brauchen wir viele wissenschaftlich hochqualifizierte Kader, die mit schöpferischem Elan und hoher Einsatzbereitschaft den wissenschaftlich-technischen Fortschritt in den kommenden Jahren und Jahrzehnten maßgeblich voranbringen. Die Nutzung der Mathematik in immer mehr Bereichen der Wissenschaft und Produktion und die Notwendigkeit der Weiterentwicklung dieser Disziplin erfordern insbesondere die aktive Tätigkeit vieler Mathematiker.
Sie werden auch in Zukunft zum großen Teil in Kollektiven eingesetzt, wo sie in fruchtbarer Zusammenarbeit mit Ingenieuren, Naturwissenschaftlern, Ökonomen und anderen Spezialisten ihren Beitrag zur Bewältigung theoretischer und praktischer Aufgaben zu leisten haben.
„Die spezifischen Aufgaben des Mathematikers bestehen dabei in
– der schöpferischen Mitarbeit an der Konzipierung der Aufgaben, der Planung der Arbeitsetappen und der Analyse des betrachteten Systems,
– der schöpferischen Mitarbeit beim Aufstellen geeigneter Zielstellungen für die mathematische Bearbeitung,
– der Auswahl bzw. Entwicklung geeigneter und vom Aufwand her ökonomisch vertretbarer mathematischer Methoden zur Lösung der gestellten Aufgaben,
– der Lösung der mathematischen Aufgaben bei zweckmäßiger Nutzung von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen sowie
– der Teilnahme an der Realisierung der Ergebnisse in der Praxis."
(Studienplan für die Grundstudienrichtung Mathematik zur Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR, Berlin 1976)

Es liegt in der Natur der Sache, daß Mathematiker in einem besonders engen Verhältnis zur Entwicklung und zum Einsatz der EDV stehen. Ein großer Teil von ihnen ist in Rechenzentren tätig, in wachsendem Maße als „Problemanalytiker" mit dem Hauptarbeitsgebiet der mathematischen Modellierung realer Prozesse, aber auch in anderen Bereichen.
Die Ausbildung an den Universitäten und Technischen Hochschulen trägt den komplexen Erfordernissen des Einsatzes weitgehend Rechnung. Durch die gründliche theoretische Ausbildung in klassischen und modernen Gebieten der Mathematik, eine solide gesellschaftswissenschaftliche Ausbildung, die Bewältigung von praktischen mathematischen Aufgabenstellungen unter anderem im 12wöchigen Betriebspraktikum, durch die rechentechnische Ausbildung und das Studium eines „Nebenfachs" (technische, naturwissenschaftliche oder ökonomische Disziplin) werden im Rahmen der fünfjährigen Ausbildung die Grundlagen für eine erfolgreiche Tätigkeit als Mathematiker in der Industrie, an einer Universität oder Hochschule, an der Akademie der Wissenschaften und in anderen Bereichen gelegt.
Die Ausbildungskonzeption ist aber nur die eine Seite. Viel wichtiger ist, was der einzelne Student „daraus macht". Selbstverständlich wird er während des Studiums von den Professoren, Dozenten und Assistenten angeleitet, auch in den FDJ-Kollektiven unterstützt und hilft man sich gegenseitig. Aber die beste Vorlesung nutzt nichts, wenn sie nicht von jedem einzelnen verstanden und nachgearbeitet wird, und selbst das beste Lehrbuch wäre eine Fehlinvestition, wenn man es nicht gründlich studiert.
Zu den Voraussetzungen für das erfolgreiche Studium in der Grundstudienrichtung Mathematik oder im Lehrerstudium in einer

Fachkombination mit Mathematik gehören selbstverständlich in erster Linie entsprechende schulische Leistungen, Fleiß und Ausdauer. Eine Grundbedingung ist weiter die Liebe zur Mathematik, die Freude am gründlichen Nachdenken und das Bestreben, die erkannten theoretischen Zusammenhänge praktisch nutzbar zu machen.

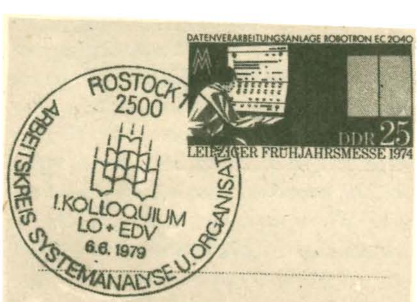
Der Lehrerberuf schließt in besonderem Maße nicht nur fachliche Aufgaben ein, schließlich ist der Lehrer verantwortlich für viele Seiten der Bildung und Erziehung der ihm anvertrauten Schüler. Daher sollte sich ein Lehrerstudent der Verantwortung für die Kinder und Jugendlichen bewußt sein und Freude beim Umgang mit ihnen haben.

Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß die Sektionen Mathematik der Universitäten und Hochschulen und sicherlich ebenso Ihre Lehrer gern genauere Auskünfte über ein Studium in diesen Richtungen geben.

*J. Geburtig*

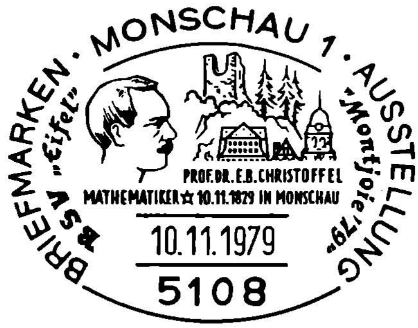
**Übersicht über die Studienmöglichkeiten in den Grundstudienrichtungen Mathematik und Oberschullehrer für Mathematik**

| Einrichtung | Lehrerstudium Fachkombination | Ausbildung von Mathematikern |
|---|---|---|
| Humboldt-Universität zu Berlin | Mathem./Physik | x |
| Karl-Marx-Universität, Leipzig | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem. | x |
| Martin-Luther-Universität Halle | Mathem./Physik | x |
| Friedrich-Schiller-Universität Jena | Mathem./Physik | x |
| Wilhelm-Pieck-Universität Rostock | Mathem./Physik | x |
| Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem.<br>Geogr./Mathem. | |
| Technische Universität Dresden | | x |
| Bergakademie Freiberg | | x |
| Technische Hochschule Magdeburg | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem. | x |
| Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem. | x |
| Technische Hochschule Ilmenau | | x |
| Technische Hochschule Leuna-Merseburg | | x |
| Pädagogische Hochschule Potsdam | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem. | |
| Pädagogische Hochschule Güstrow | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem.<br>Chemie/Mathem. | |
| Pädagogische Hochschule Halle | Mathem./Physik<br>Physik/Mathem.<br>Chemie/Mathem. | |
| Pädagogische Hochschule Erfurt | Mathem./Physik<br>Mathem./Kunsterz.<br>Physik/Mathem. | |
| Pädagogische Hochschule Dresden | Mathem./Physik<br>Mathem./Geogr.<br>Physik/Mathem.<br>Geogr./Mathem. | |
| Pädagogische Hochschule Köthen | Mathem./Chemie | |




Unter der Leitung der Sowjetunion entstand gemeinsam mit der VR Bulgarien, der Ungarischen VR, der DDR, VR Polen und der ČSSR das *einheitliche System elektronischer Rechner*, kurz ESER. Auf der Briefmarke ist das Bedienpult der elektronischen Datenverarbeitungsanlage EC-2040 abgebildet. Dieser Rechner kann z. B. mit Lochkartenanlagen, Lochbandstationen, Paralleldruckern und Bildschirmeinheiten in verschiedenen Konfigurationen ausgerüstet werden. Die Zentraleinheit wurde vom VEB Kombinat Robotron gefertigt. Die Rechengeschwindigkeit beträgt 380000 Operationen pro Sekunde. Mit dem EC-2040 werden Effektivitäts-, Rationalisierungs-, Planungs- und Leitungsfragen bearbeitet. Er dient aber auch der Abrechnung und der Forschung.

Der Sonderstempel ist dem 1. Kolloquium „Leitungsorganisation und elektronische Datenverarbeitung" (Abk. LO + EDV) gewidmet. In 35 Vorträgen wurden Effektivitätsfragen bei der Anwendung der EDV und Gerätekonzeptionen und daraus resultierende Anwendungsmöglichkeiten diskutiert. Dabei wurden die Pflege und die Nutzung großer Datenmengen, Probleme der Informationsreduktion, Klassifizierungsfragen und Bewertungen von Informationen und weitere Probleme angesprochen.

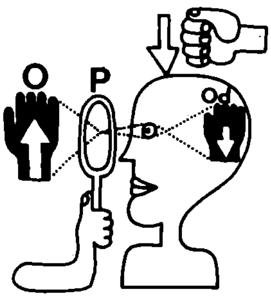



*Elwin Bruno Christoffel*, geboren am 10. November 1829 in Montjoie, dem heutigen Monschau, promovierte 1856 an der Berliner Universität. Er ist als Schüler von *J. P. G. Lejeune Dirichlet* aus Düren/Aachen zu bezeichnen. Nach seiner Habilitation 1859 in Berlin wirkte *Christoffel* dort bis 1862 als Dozent, verbrachte die folgenden sieben Jahre als Professor der Mathematik am *Eidgenössischen Polytechnikum* zu Zürich, der jetzigen ETH, die Jahre 1869 bis 1872 am Gewerbeinstitut zu Berlin, der jetzigen TU Berlin, und die Zeit ab 1872 bis zu seinem Tode im Jahr 1900 in Straßburg, wo er – wie bereits in Zürich – ein Mathematisches Seminar ersten Ranges aufbaute.

*Christoffels* große Leistungen liegen auf den Gebieten der Numerik (Gauß-Christoffel Quadraturformel), der Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik (Christoffel-Darboux Summenformel), der Funktionentheorie (Christoffel-Schwarz-Formel, Arbeiten über Theta- und Abelsche Funktionen, z. B.). der Theorie der Kettenbrüche, der Potentialtheorie, der Stoßwellentheorie und der Differentialgeometrie einschließlich der Invariantentheorie (Christoffel-Symbole, Riemann-Christoffel Tensor, Christoffelscher Reduktionssatz, z. B.).

Seine Arbeiten haben wesentlich zur Prägung des modernen naturwissenschaftlichen Weltbildes beigetragen.

# Wer löst mit? alpha-Wettbewerb




*Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1980*

## Mathematik

Ma 5 ■1965 Ein Fernsehturm hat eine Höhe von 164 m. Der Antennenträger dieses Fernsehturms ist 52 m kürzer als sein Betonschaft. Welche Länge haben Antennenträger und Betonschaft dieses Fernsehturms?

*Schüler Wieland Handke, Pulsnitz*

Ma 5 ■1966 Frank wird von seiner Schwester gefragt, wieviel Jungen und Mädchen an der XVIII. Bezirksolympiade Junger Mathematiker teilgenommen haben. Er antwortet: „Insgesamt waren es 113 Teilnehmer. Es waren 11 Jungen mehr als die doppelte Anzahl der Mädchen." Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nahmen an dieser Bezirksolympiade *Junger Mathematiker* teil?

*Schülerin Beate Weber, Bernburg*

Ma 5 ■1967 Alfons, Bruno, Christoff und Dieter gehen in die gleiche Schule. Ihre Nachnamen sind in anderer Reihenfolge Decker, Blume, Althoff und Cramer. Von ihnen ist folgendes bekannt:

a) Alfons ist mit dem Schüler Cramer befreundet.

b) Bruno und der Schüler Decker sind gleichaltrig.

c) Dieter ist jünger als Bruno, und Bruno ist jünger als der Schüler Blume.

d) Dieter ist jünger als der Schüler Cramer.

e) Alfons kennt den Schüler Blume nicht.

f) Dieter und der Schüler Decker spielen oft zusammen.

Welchen Familiennamen haben Alfons, Bruno, Christoff und Dieter? Ordne diese vier Schüler nach ihrem Lebensalter!

*Schülerin Sylke Giese, Rostock*

Ma 5 ■1968 Für die Seitenlängen $a$, $b$ und $c$ eines Dreiecks $ABC$ gilt $a+b=464$ mm, $b+c=563$ mm und $a+c=525$ mm. Welche Längen haben die Seiten dieses Dreiecks? *Schüler Georg Hein, Berlin, Kl. 6*

Ma 5 ■1969 Aus 16 Stäbchen von je 1 cm Länge läßt sich ein Quadrat legen, das einen Flächeninhalt von 16 cm² besitzt.

Lege genau

a) 6 Stäbchen, b) 7 Stäbchen,

c) 8 Stäbchen

so um, daß du eine Figur erhältst, die jeweils einen Flächeninhalt von 7 cm² besitzt! Dabei darf kein Stäbchen übrig bleiben. Fertige für jeden dieser drei Fälle eine Zeichnung an!

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■1970 In 3 Minuten greifen und befördern 4 Bagger 18 m³ Erde. Ein Erdarbeiter würde an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m³ Erde ausheben. Berechne, wieviel Erdarbeiter durch einen einzigen Bagger ersetzt werden können! *StR H.-J. Kerber*

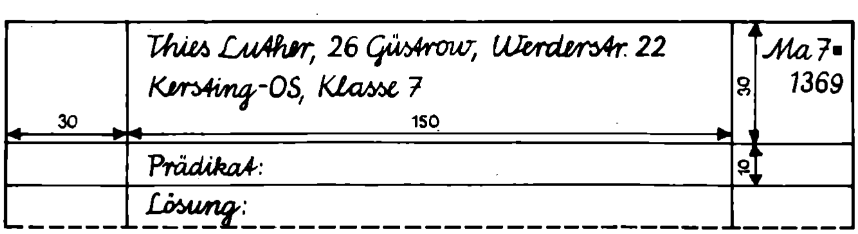
Ma 6 ■1971 Von Rostock-Kapuzenhof aus machen Passagierschiffe Hafenrundfahrten mit Ausflüglern und Touristen. An einer solchen Fahrt nehmen insgesamt 75 Fahrgäste teil, und zwar fünfmal soviel Kinder wie Frauen. Die Anzahl der mitfahrenden Frauen und Kinder ist insgesamt viermal so groß wie die der Männer. Wieviel Kinder, Frauen bzw. Männer nehmen an dieser Hafenrundfahrt teil? *Dipl.-Lehrer D. Völzke, Greifswald*

Ma 6 ■1972 Vier Thälmann-Pioniere haben Altstoffe gesammelt und einen Erlös von insgesamt 80 M gehabt. Erik erreichte mit seinem Sammelergebnis den halben Betrag, den Katja erbrachte. Katja hat für die von ihr abgeführten Altstoffe dreimal soviel Geld wie Hagen erhalten. Jeder der vier Pioniere führte einen vollen Markbetrag ab, der weniger als 35 M betrug. Wieviel Mark entfallen auf Claudia?

*Schülerin Kathrin Fessel, Gräfenhainichen*

Ma 6 ■1973 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich dem Vierzigfachen ihrer Quersumme sind.

*Schüler Dirk Spiernig, Zittau, Kl. 8*




**Wettbewerbsbedingungen**

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

**Redaktion alpha**
**7027 Leipzig, Postfach 14.**

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. **Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.**

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ■1974 Über wieviel Sitzplätze verfügt ein Autobus, wenn während einer Fahrt der dritte Teil der Anzahl der Plätze mit Kindern besetzt war, sechs Erwachsene mehr als Kinder an der Fahrt teilnahmen und neun Plätze unbesetzt blieben?

*Schüler Klaus Mohnke, Lübbenau, Kl. 6*

Ma 6 ■1975 An einer Landstraße liegen in dieser Reihenfolge die Orte $A, B, C, D, E$ und $F$; dabei ist $B$ von $A$ und $E$ von $D$ jeweils 1 km, $C$ von $B$ und $D$ von $C$ jeweils 2 km entfernt. In jedem der Orte $A, B, C, D$ und $E$ steigt jeweils ein Fahrgast in den gleichen Linienbus zu. Diese zugestiegenen Reisenden steigen alle im Ort $F$ aus dem Bus aus. Die in den Orten $A$ und $C$ zugestiegenen Reisenden hatten zusammen den gleichen Fahrpreis zu entrichten wie insgesamt die übrigen drei zugestiegenen Fahrgäste. Wieviel Fahrgeld muß jeder der fünf zugestiegenen Fahrgäste entrichten, wenn für 1 km Fahrstrecke 10 Pf zu zahlen sind?

*Schüler Ralph Kühlberg, Hennigsdorf*

Ma 7 ■1976 Zur Familie Lehmann gehören fünf Personen, und zwar der Vater, die Mutter sowie die Kinder Axel, Bernd und Christine. Addiert man die Zahlen, die das gegenwärtige Lebensalter jeder dieser fünf Personen (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe 71. Die Mutter ist 14mal so alt wie Axel, 7mal so alt wie Bernd, 4mal so alt wie Christine, aber zwei Jahre jünger als der Vater. Wie alt ist gegenwärtig jedes Familienmitglied?

*Schüler Martin Jaekel, Jena, Kl. 7*

Ma 7 ■1977 Susanne geht einkaufen. Sie hat genau 22,81 M in der Geldbörse. Dieser Betrag besteht nur aus Münzen. An der Kasse gibt sie davon 6,15 M der Verkäuferin. Welche und wie viele Münzen von jeder Sorte hatte Susanne bei Eintritt in den Laden, wenn es von keiner Sorte mehr als zwei Münzen waren? In der DDR gibt es Münzen im Wert von 20 M, 10 M, 5 M, 2 M, 1 M, 50 Pf, 20 Pf, 10 Pf, 5 Pf und 1 Pf.

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■1978 Der Erlös eines Betriebes in einem bestimmten Industriezweig beträgt in einem Monat 180000 M (Betriebspreis). Addiert man zum Betriebspreis die Produktions- und Dienstleistungsabgabe, so erhält man den Industrieabgabepreis.
Wieviel Mark Produktions- und Dienstleistungsabgabe muß dieser Betrieb entrichten, wenn in seinem Industriezweig diese Abgabe 10% des Industrieabgabepreises beträgt?
Folgende Abkürzungen sind gebräuchlich:
Betriebspreis: BP
Produktions- und Dienstleistungsabgabe: PDA
Industrieabgabepreis: IAP

*Ökonom B. Beckmann, Leipzig*

Ma 7 ■1979 In den beiden Schemata

$$\begin{array}{r} \text{one} \\ +\ \text{one} \\ +\ \text{one} \\ +\ \text{one} \\ \hline \text{four} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} \text{four} \\ +\ \text{one} \\ \hline \text{five} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß zwei richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen, d. h., die Belegung der Buchstaben mit Ziffern soll für beide Schemata zugleich gelten. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

*Nach der sowjetischen Zeitschrift „Quant"*

Ma 8 ■1980 Auf welche Ziffer endet der Wert des Terms

$17^4+13^5-29^6$?

*Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard, Kl. 8*

Ma 8 ■1981 Wieviel Zeit vergeht genau, bis die Zeiger einer Uhr (Stunden- und Minutenzeiger), die sich gerade decken, einen gestreckten Winkel bilden?

*Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10*

Ma 8 ■1982 Es ist zu beweisen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck der Inkreis dieses Dreiecks die Hypotenuse im Berührungspunkt so in zwei Abschnitte teilt, daß deren Produkt den Inhalt der Dreiecksfläche ergibt. *Schülerin Vera Wilhelm, Leipzig, Kl. 8*

Ma 8 ■1983 Von einem konvexen Viereck $ABCD$ ist folgendes bekannt:
1) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander.
2) Die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ verhalten sich wie 2 : 1.
3) $\overline{AC}$ ist 8 cm lang.
a) Wie heißt ein solches Viereck?
b) Zu berechnen sind die Länge der Seite $\overline{AB}$, der Umfang und der Flächeninhalt von $ABCD$.

*Schüler Manfred Petzchi, Wendisch-Rietz, Kl. 8*

Ma 9 ■1984 Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen ist um 38 kleiner als das dreifache Quadrat der um 1 verminderten kleineren Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich?

*Aus einem österreichischen Lehrbuch für Schüler*

Ma 9 ■1985 Beim sowjetischen Atomeisbrecher „Arktika", der als erstes Überwasserschiff den Nordpol bezwang, betragen Länge, Breite und Tiefgang zusammen 181 m. Die Länge des Schiffes beträgt 20 m mehr als die vierfache Breite. Tiefgang und Breite betragen zusammen 41 m. Welchen Tiefgang hat der Atomeisbrecher?

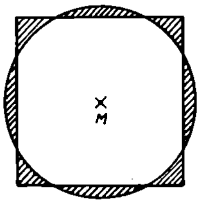
*Aus einem sowjetischen Lehrbuch für Schüler*

Ma 9 ■1986 Welches ebene konvexe $n$-Eck hat 119 Diagonalen?

*Schüler Steffen Lausch, Grimma, Kl. 10*

Ma 9 ■1987 Das Bild zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge $a$. Ein Kreis schneidet das Quadrat in acht Punkten derart, daß sämtliche acht schraffiert dargestellten Flächen den gleichen Inhalt haben. Es ist der Durchmesser dieses Kreises zu berechnen.

*Dipl.-Ing.-Päd. W. Gliwa, Staßfurt*




Ma 10/12 ■1988 Es ist zu beweisen, daß der Ausdruck $9^{5u}-5^{3u}$ für alle natürlichen Zahlen $u$ durch 4 teilbar ist.

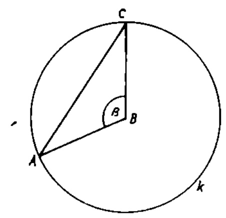
*Schülerin Sylvia Döring, Gotha, Kl. 11*

Ma 10/12 ■1989 Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ eines rechtwinkligen Dreiecks $ABC$ mit den Katheten $\overline{CB}=6$ cm und $\overline{CA}=8$ cm schneidet $\overline{BC}$ in $D$. Es ist der Flächeninhalt jedes der Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ADC$ zu berechnen!

*Aus einem rumänischen Lehrbuch für Schüler*

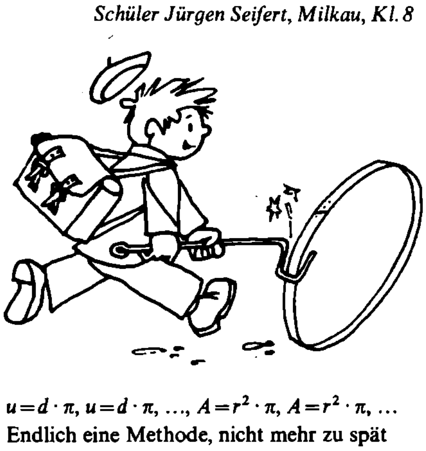
Ma 10/12 ■1990 Im abgebildeten Dreieck $ABC$ habe der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ eine Größe von 100°. $B$ sei der Mittelpunkt desjenigen Kreises $k$, der durch $A$ und $C$ geht. Der Kreisbogen kleinerer Länge $\overset{\frown}{AC}$ sei 5 cm lang. Wie oft ist die Dreiecksfläche in der Kreisfläche enthalten?
Skizze nicht maßstäblich!

*Schüler Axel Kaminski, Riesa, Kl. 10*




Ma 10/12 ■1991 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit einem Flächeninhalt von $A=112{,}5\ \text{cm}^2$, einem Umfang von $u=68$ cm und der Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ von 30°. Es sind die Längen der Seiten $a=c$ und $d=b$ zu berechnen!

*Schüler Jürgen Seifert, Milkau, Kl. 8*



$u=d\cdot\pi,\ u=d\cdot\pi,\ \ldots,\ A=r^2\cdot\pi,\ A=r^2\cdot\pi,\ \ldots$
Endlich eine Methode, nicht mehr zu spät zu kommen. *Wladimir Tilman, Moskau*

# Physik

Ph 6 ▪76 An der Wand hängt senkrecht ein ebener Spiegel. In welcher Entfernung vom Erdboden muß sich der unterste Rand des Spiegels höchstens befinden, damit eine davorstehende Person von 1,50 m Größe gerade noch ihre Füße sieht? Führe die entsprechende Konstruktion an einer Zeichnung aus! (Die Stirnhöhe der Person soll unberücksichtigt bleiben.) *B.*

Ph 7 ▪77 In einem normal verschlossenen Einkochglas herrscht im Inneren ein der Außentemperatur entsprechender Innendruck. Bei Zimmertemperatur sind das etwa 0,025 at (rd. 2,5 kPa). Berechne die Kraft in kp, mit der der Deckel auf das Glas gepreßt wird, wenn dessen Durchmesser 10 cm beträgt! Der Luftdruck sei 760 Torr (rd. 10,1 kPa). *B.*

Ph 8 ▪78 Zwischen zwei 6 m voneinander entfernten Punkten einer Starkstromleitung $\left(\text{Kupfer: } \varrho = 0{,}0178 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}\right)$ von 70 mm² Querschnitt wird eine Spannung von 0,23 V gemessen. Welcher Strom fließt durch die Leitung?

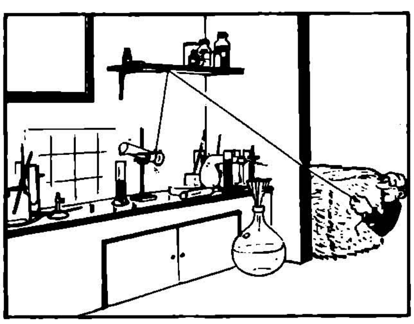
*Schüler Frank Endter, Asbach, Kl. 10*

Ph 9 ▪79 Auf der Mondoberfläche befinden sich zwei Körper mit der gleichen Masse *m*. Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich der eine Körper am erdfernsten, der andere Körper am erdnächsten Punkt auf dem Mond. Ermitteln Sie die Differenz der Gewichtskräfte dieser beiden Körper in Abhängigkeit von ihrer Masse! (Die Werte für die physikalischen Größen findet man in „Tabellen und Formeln".)

*Schüler Ingolf Thum, Gößnitz, Kl. 10*

Ph 10/12 ▪80 a) Mit welcher Höchstgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ kann man mit einem Solo-Kraftrad eine ebene Straßenkurve von 200 Meter Radius durchfahren, wenn die Masse des Kraftrades einschließlich Besatzung 300 kg beträgt und der Haftreibungskoeffizient zwischen Straße und Bereifung des Kraftrades mit $\mu = 0{,}25$ angesetzt wird?

b) Berechnen Sie den Winkel, den der Motorradfahrer bei der errechneten Geschwindigkeit gegenüber der Senkrechten zur Straße einnimmt! *Ing. A. Körner, Leipzig*



# Chemie

Ch 7 ▪61 Wieviel Gramm Magnesium sind notwendig, um aus 50 g Wasser den Wasserstoff vollständig auszutreiben? Um vollständige Reaktion zu gewährleisten, soll Magnesium in 10%igem Überschuß angewendet werden.

Ch 8 ▪62 Zu 840 kg Kalziumkarbonat, welches einen Reinheitsgrad von 90% besitzt, soll Sand gegeben werden. Wieviel Kilogramm Sand sind erforderlich, damit eine Konzentration von 40% erreicht wird?

Ch 9 ▪63 Wie groß ist die tatsächliche Ausbeute an Äthansäureäthylester in Prozenten, wenn aus 12,2 g Äthansäure 16,4 g Äthansäureäthylester erhalten wurden?

Ch 10/12 ▪64 2,52 g eines Salzgemisches aus Kaliumchlorid und Kaliumbromid wurden mit konzentrierter Schwefelsäure versetzt. Die ausgewogene Menge Kaliumsulfat betrug 2,29 g. Wieviel Prozent Kaliumchlorid und Kaliumbromid sind in dem Salzgemisch enthalten?

# VII. Physikwettbewerb in Güstrow


An diesem Wettbewerb beteiligten sich 21 Schüler der Klassen 10 bis 12. Sie waren bei den Auswahlklausuren im November 1978 als beste hervorgegangen. Während des Wettbewerbs mußten sie ihr Können unter Beweis stellen. Bei den 4 theoretischen Aufgaben konnten sie je 10 und bei der experimentellen Aufgabe 20 Punkte, insgesamt also 60 Punkte, erreichen.

*1. Preis:* Jürgen Gräfenstein, Kl. 10, EOS *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Michael Heinrich, Kl. 12, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin

*2. Preis:* Hartmut Schäfer, Kl. 12, EOS *Walter Ulbricht*, Halle

*3. Preis:* Harmut Mix, Kl. 12, EOS *Friedrich Engels*, Dresden; Frank Marlow und Lutz Werner, beide Kl. 12, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Andreas Chrobok und Arnd Leike, beide Kl. 12, EOS *Martin Luther*, Halle; Ingo Stiebritz, Kl. 12, EOS *Carl Zeiss* Jena; Wolfgang Kühn, Kl. 12, EOS *RFT* Leipzig.

*B. Träger/U. Walta*

**Aufgaben (Theoretische Klausur):**

1. Bekanntlich liegen Kosmonauten beim beschleunigten Aufstieg auf dem Rücken, um die auftretenden Belastungen gleichmäßig auf den Körper zu verteilen.
In der Absicht, die Druckkräfte auf die gesamte Körperoberfläche zu verteilen, wird ein Vorschlag zum Patent angemeldet. Darin ist vorgesehen, die Kosmonauten während der Beschleunigungsphase in einer Flüssigkeit schweben zu lassen.
Diskutieren Sie diesen Vorschlag auf seine Brauchbarkeit!

2. Vom Grund eines Sees steigt eine Gasblase allmählich nach oben und erreicht schließlich die Oberfläche.
a) Berechne die Beschleunigung, mit der die Loslösung vom Boden erfolgt!
b) Berechne die (konstante) Geschwindigkeit, die sich praktisch sofort nach der Loslösung einstellt!
c) Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche wie die Geschwindigkeit am Grund?
*Hinweis:* Kugelförmige Teilchen unterliegen nach *Stokes* bei langsamer Bewegung in einem Medium einer Reibungskraft $F_r = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ ($r$ Radius, $v$ Geschwindigkeit, $\eta$ Zähigkeit, eine für das Medium charakteristische Konstante).
Zahlenwerte:
am Grund: $T_1 = 4\,°\text{C}$,
$\eta_1 = 1{,}79 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$, $r = 100\,\mu\text{m}$
an der Oberfläche: $T_2 = 20\,°\text{C}$,
$\eta_2 = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$,
Dichte des Gases: $\varrho_{Gas} = 1{,}3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ bei 0 °C und $10^5$ Pa Luftdruck
Luftdruck: $P_0 = 10^5$ Pa
Seetiefe: $h = 100$ m.

3. Bei einem Experiment soll durch ein Gerät ein konstanter Strom der Stärke $I = 1{,}1$ A fließen. Dazu muß eine konstante Spannung $U = 55$ V anliegen. Als Spannungsquelle dient eine Steckdose, an der die Spannung $U_x$ um 220 V schwankt. Die Gerätspannung soll mit einem Widerstand mit verstellbarem Mittelabgriff (Potentiometer) geregelt werden, dessen Kenndaten 620 Ω, 350 W betragen.
Geben Sie eine Schaltung an, bei der der Widerstand nicht überlastet wird. Zwischen welchen Werten darf dabei die Netzspannung $U_x$ schwanken?

4. Eine dünne Bikonvexlinse ist so aufgestellt, daß sie von einer im Punkt $A$ befindlichen punktförmigen Lichtquelle ein reelles Bild in $A'$ erzeugt. Verschiebt man die Lichtquelle nach $B$, dann entsteht ihr reelles Bild in $B'$.
$A$, $B'$, $A'$, $B$ sind Eckpunkte eines konvexen ebenen Vierecks mit den Seitenlängen $AB' = 90$ cm, $B'A' = 40$ cm, $A'B = 40$ cm, $BA = 65$ cm und der Diagonalenlänge $AA' = 85$ cm.

Fortsetzung auf S. 47


# Gute Grundkenntnisse gefragt

**Rationell oder unrationell wiederholen – das ist die Frage!**

*Ein noch so gutes Gedächtnis ist nicht soviel wert wie blasse Tinte.*

Altchinesisches Sprichwort

Wie die meisten Sprichwörter enthält auch das oben zitierte chinesische sicherlich eine wichtige Teilwahrheit. Auf das, was man aufgeschrieben hat (selbst wenn es in blasser Tinte ist), kann man immer zurückgreifen, auch dann, wenn man es nicht mehr im Gedächtnis hat. Doch in unserer alltäglichen Denkpraxis können und sollten wir uns nicht alles aufschreiben. Der enorme Wert des Gedächtnisses besteht gerade darin, daß wir eine große Menge von Informationen kurz- oder langfristig im Gedächtnis aufbewahren und, wenn erforderlich, aus unserem Gedächtnis reproduzieren können, ohne auf solche Mittel wie ein Notizbuch ständig angewiesen zu sein. Doch die Voraussetzung für diese hervorragenden Fähigkeiten des Gedächtnisses ist, daß die aufgenommenen Informationen nicht nur festgehalten (eingeprägt), sondern verfestigt werden, um auf diese Weise dauerhaft im Gedächtnis aufbewahrt zu werden. Die wichtigste Form der Verfestigung von Informationen ist euch zweifellos sehr wohl bekannt:
das Wiederholen der eingeprägten Information. Aber zwischen der spontanen Durchführung des Wiederholens und einem auf rationellen Prinzipien fundierten Wiederholen bestehen sehr große Unterschiede. Man kann z. B., wenn man unrationell herangeht, mit sehr vielen Wiederholungen lediglich eine oberflächliche Verfestigung erreichen, andererseits durch eine rationelle Wiederholungsmethode mit relativ wenigen Wiederholungen eine intensive Verfestigung und eine hohe Gedächtnisleistung erzielen. Die Frage ist also: Wie kann man möglichst rationell die Wiederholungen eingeprägter Informationen durchführen? Das soll in Heft 3/80 erläutert werden.

*F. Loeser, aus: Gedächtnistraining, Urania-Verlag Leipzig*

**Übungsaufgaben aus den Klassen 2 bis 4**

▲1▲ Bestimme $x$!
$x+18=20$; $9-x<4$; $x-7>2$; $x+x=360$

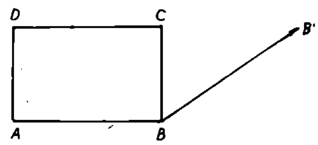
▲2▲

| $a$ | $b$ | $a\cdot b$ | $a:b$ |
|---|---|---|---|
| 150 | 3 | | |
| 180 | | | 9 |
| 75 | | 0 | |
| | 5 | | 60 |

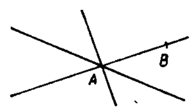
▲3▲ Rechne um!
500 kg = t; 19 kg = g;
360 s = min; 5 km = m;
20 dt = t; 12 cm² = mm²;
35 cm² 5 mm² = mm²;
15 g = mg

▲4▲ Wahr oder falsch?
$27+14=39+4$; $13\cdot 5-5<11\cdot 4-15$;
$6\cdot 7+9\cdot 3>128:4+3\cdot 9$;
$9\cdot 8+7=7+9\cdot 8$

▲5▲ Gib auf jeden Strahl Punkte an, die von $A$ genauso weit entfernt sind wie $B$ von $A$!




▲6▲ Verschiebe!




▲7▲ Rechne!
$3200:8$; $7200:6$; $15624:4$;
$96-4\cdot 9+40$; $72:8+91-100$;
$92736:3$; $276488:5$;
$2\cdot 9\cdot 5\cdot 2$; $8\cdot 9+7\cdot 6$;
$12\cdot 3+7$; $12(3+7)$; $12+3\cdot 7$

▲8▲ Ordne nach der Größe!
62705; 499; 7810; 50; 401; 100000; 73427; 99999; 7809; 100001; 49; 62704.

▲9▲ Runde auf Vielfache von 10!
17; 35; 45; 2956; 750; 8517; 24279

▲10▲ Setze die richtigen Zeichen (<, >, =)!

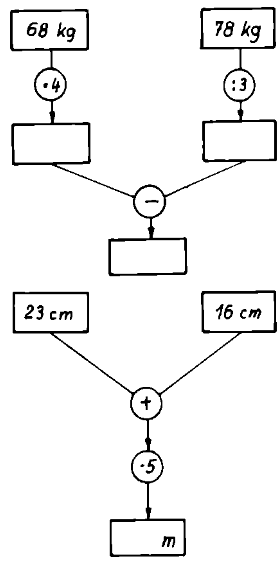
$28 \square 15+13$
$63-20 \square 63-30$
$7+8-5 \square 7+(8\cdot 5)$
$8+8+8+8 \square 8\cdot 5$



▲11▲ Für welche Zahlen $x$ gelten die folgenden Ungleichungen?
$4898<x<4901$ $x=\{\quad\}$
$7002>x>6997$ $x=\{\quad\}$

▲12▲
$10 : 2 + \square = 9$
$+ \quad + \quad + \quad +$
$14 : 2 - \square = 3$
$+ \quad + \quad + \quad +$
$\square\square - \square - 2 = 7$
$36 - 7 - \square\square = \square\square$

▲13▲ Vervollständige die beiden Bäume!




▲14▲ Ersetze die Buchstaben durch Ziffern, so daß eine richtige Additionsaufgabe entsteht! Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.

```
  ABC
+  CC
  AAB
```

**Mathematischer Begriff gesucht**

Aus jedem der folgenden Wörter entnehme man genau einen Buchstaben so, daß der Rest (unter Beibehaltung der Reihenfolge) ein Wort ergibt, das im Mathematikunterricht vorkommt. Die entnommenen Buchstaben ergeben aneinandergereiht einen Begriff, der angibt, wie eine Lösung nach Möglichkeit erfolgen soll.
BORGEN, BRAUCH, STUMME, BEITRAG, OMEGA, TANG, ZEHEN, HÖHLE, LACHSE (Lösung siehe S. 48)


Zu Ehren des 100. Geburtstages von Albert Einstein wurde 1979 eine 5-Mark-Münze in der DDR herausgegeben (siehe stilisiertes Bild). Legierung: Neusilber; Durchmesser 29 mm; Gewicht: 12,2 g

# Wir bauen eine Sonnenuhr

Nach der Lage des Zifferblattes unterscheidet man verschiedene Formen von Sonnenuhren. Wir erläutern als erstes den Bau einer Äquatorialsonnenuhr. Sie besitzt ein besonders einfaches Zifferblatt. Es ist regelmäßig geteilt und liegt parallel zur Ebene des Erdäquators. Der Schattenwerfer steht senkrecht auf der Ebene des Zifferblattes. Den Aufbau einer Äquatorialsonnenuhr zeigt das folgende Bild (Bild 1).

Bei der Anfertigung der Einzelteile unserer Sonnenuhr ist folgendes zu beachten:

Das Zifferblatt $DEFG$ fertigen wir aus einem quadratischen Stück Pappe an. Wir zeichnen um den Mittelpunkt $M$ auf der Vorderseite und auch auf der Rückseite der Pappe einen Kreis, der alle vier Quadratseiten berührt. Diesen Kreis teilen wir bei Punkt $B$ beginnend in 24 gleiche Teile durch Antragen von Winkeln von jeweils 15° mit dem Scheitelpunkt $M$. Wir versehen unser Zifferblatt auf der Vorderseite und auch auf der Rückseite mit einer Stundeneinteilung (Bild 2).

Damit wir unser Zifferblatt parallel zur Äquatorebene aufstellen können, müssen wir für das Stützdreieck $\triangle ABC$ den richtigen Winkel $\alpha$ wählen. Aus der folgenden Abbildung erkennen wir, daß dieser Winkel $\alpha$ gleich der geographischen Breite $\phi$ des Aufstellungsortes $A$ unserer Sonnenuhr sein muß, also $\alpha = \phi$ (Bild 3).

*Beweis:* Wir setzen voraus, bei der Äquatorialsonnenuhr soll die Zifferblattebene parallel zur Äquatorebene liegen. In der Zeichnung sind also die Geraden $RQ$ und $BM$ parallel. Der Winkel $\sphericalangle RQA$ im rechtwinkligen Dreieck $\triangle RQA$ beträgt $90° - \phi$, und der Winkel $\sphericalangle MBA$ im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AMB$ beträgt $90° - \alpha$. Außerdem sind diese beiden Winkel Wechselwinkel an den Parallelen $RQ$ und $BM$. Folglich sind die Winkel kongruent,

$\sphericalangle RQA \cong \sphericalangle MBA$, und aus $90° - \phi = 90° - \alpha$ folgt $\phi = \alpha$.

Zur Konstruktion des Stützdreiecks entnehmen wir einem Atlas die geographische Breite des Aufstellungsortes unserer Sonnenuhr. Sie liegt in der DDR zwischen 54° 41′ (Gellort nördlich Kap Arkona) und 50° 10′ (Zollhaus Schönberg im Vogtland). Die Größe des rechtwinkligen Stützdreiecks ergibt sich aus der Länge der Strecke $\overline{BM}$, also aus der halben Seitenlänge des quadratischen Zifferblattes. Wir konstruieren das Stützdreieck $\triangle ABC$ aus folgenden Stücken $\sphericalangle BAC = \phi$, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{DE}$ und $\sphericalangle ABC = 90°$ (Bild 4).

Um das Stützdreieck in das Zifferblatt einfügen zu können, schneiden wir sowohl das Zifferblatt als auch das Stützdreieck bis zur Hälfte entlang der Strecke $BM$ ein. Danach fügen wir das Zifferblatt und das Stützdreieck zusammen und kleben beides auf einer rechteckigen Grundplatte fest. Damit ist unsere Äquatorialsonnenuhr fertiggestellt.

Die Sonnenuhr ist jetzt genau in Nord-Süd-Richtung aufzustellen, die Grundplatte muß waagerecht liegen. Die Kante $\overline{AC}$ des Stützdreiecks erzeugt auf dem Zifferblatt den Schatten, der uns die Zeit angibt. Im Sommerhalbjahr vom 22. März bis 22. September steht die Sonne oberhalb der Äquatorebene, der Schatten fällt auf die Oberseite des Zifferblattes. Dagegen scheint die Sonne im Winterhalbjahr vom 24. September bis 20. März auf die Unterseite des Zifferblattes und erzeugt hier den entsprechenden Schatten. Am 21. März und am 23. September ist unsere Sonnenuhr nicht brauchbar, da die Sonne in der Äquatorebene steht und kein Schatten auf das Zifferblatt fällt.

Dieser Nachteil tritt bei der Horizontalsonnenuhr nicht auf. Im Unterschied zur Äquatorialsonnenuhr liegt bei der Horizontalsonnenuhr das Zifferblatt waagerecht. Die Lage des Schattenwerfers und auch die Teilung des Zifferblattes hängen von der geographischen Breite des Aufstellungsortes dieser Sonnenuhr ab (Bild 5).

Zum Bau einer Horizontalsonnenuhr behalten wir das Stützdreieck der Äquatorialsonnenuhr bei und versehen die Grundplatte mit einer Stundeneinteilung. Dazu tragen wir von der Strecke $\overline{AB}$ aus nach beiden Seiten jeweils folgende Winkel ab (Tabelle).

Diese Übersicht zeigt, daß sich die Stundenteilungen für die möglichen Werte der geographischen Breite in unserer Republik nur wenig unterscheiden und beim Zeichnen kaum von Bedeutung sind. Erst wenn eine sehr große Sonnenuhr gebaut werden soll, spielen diese Abweichungen eine Rolle und das Zifferblatt ist genau zu berechnen. Hinweise für die Berechnungen von Sonnenuhren finden wir in dem Buch von K. G. Steinert: „Sphärische Trigonometrie“, Leipzig 1977.

Nachdem wir eine der beschriebenen Sonnenuhren sorgfältig gebaut und exakt aufgestellt haben, werden wir Abweichungen zwischen der Zeitangabe unserer Sonnenuhr und einer nach dem Zeitzeichen gestellten, genau gehenden Armbanduhr feststellen.

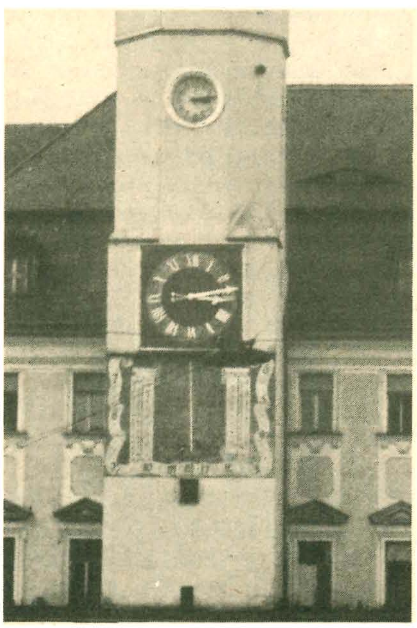
Worauf sind diese Abweichungen zurückzuführen?

Unsere Sonnenuhr zeigt wahre Sonnenzeit an, die aus der scheinbaren Bewegung der Sonne resultiert. Die scheinbare Sonnenbewegung erfolgt aber nicht gleichmäßig. Man führt deshalb eine mittlere Sonnenzeit ein, die man sich genau gleichförmig ablaufend denkt. Die Differenz von mittlerer Sonnenzeit und wahrer Sonnenzeit bezeichnet man als Zeitgleichung. Im Laufe eines Jahres nimmt die

Stundeneinteilung auf der Horizontalsonnenuhr

| | 12.00 | 11.00 13.00 | 10.00 14.00 | 9.00 15.00 | 8.00 16.00 | 7.00 17.00 | 6.00 18.00 | 5.00 19.00 | 4.00 20.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Winkel $\beta$ für $\phi = 54° 41'$, Norden der DDR | 0° | 12,3° | 25,2° | 39,2° | 54,7° | 71,8° | 90° | 108,2° | 125,3° |
| Winkel $\beta$ für $\phi = 52° 30'$, z. B. Berlin | 0° | 12,0° | 24,6° | 38,4° | 54,0° | 71,3° | 90° | 108,7° | 126,0° |
| Winkel $\beta$ für $\phi = 50° 10'$, Süden der DDR | 0° | 11,6° | 23,9° | 37,5° | 53,1° | 70,8° | 90° | 109,2° | 126,9° |

Unser Foto zeigt die Sonnenuhr vom Rathaus von Bautzen.



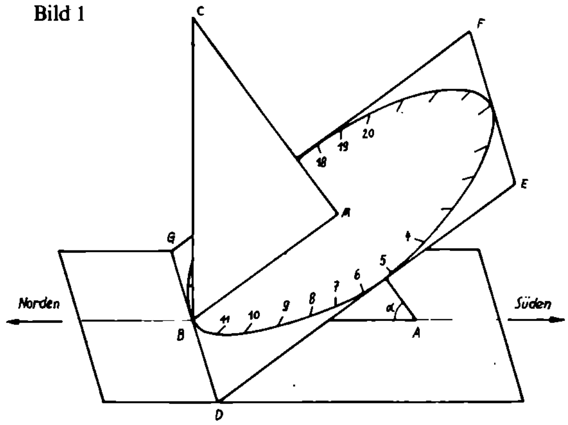
Zeitgleichung ungefähr folgende Werte an (Bild 6):
Aus der wahren Sonnenzeit, die wir an unserer Sonnenuhr ablesen, erhalten wir mittlere Sonnenzeit, indem wir zur wahren Sonnenzeit den durch die Zeitgleichung für das jeweilige Datum gegebenen Korrekturwert addieren.
Auch nach dieser Korrektur können noch Abweichungen zwischen der mittleren Sonnenzeit und unserer Mitteleuropäischen Zeit auftreten. Die mit Hilfe unserer Sonnenuhr und durch Korrektur mit Hilfe der Zeitgleichungskurve bestimmte mittlere Sonnenzeit ist die mittlere Ortszeit für den Aufstellungsort unserer Sonnenuhr. In Orten mit verschiedener geographischer Länge liefern Sonnenuhren verschiedene Ortszeiten. Für den praktischen Gebrauch sind Ortszeiten ungünstig. Man hat deshalb auf der Erde größere Gebiete zu Zeitzonen zusammengefaßt und eine Einheitszeit festgelegt. In der DDR benutzen wir Mitteleuropäische Zeit (MEZ). Hierbei geht man vom 15. Längenkreis östlicher Länge aus, der durch Görlitz verläuft. Die mittlere Ortszeit von Görlitz ist gleich der MEZ. Für weiter westlich liegende Orte in unserer Republik mit der geographischen Länge $\lambda$ tritt eine positive Zeitdifferenz zwischen MEZ und Ortszeit auf. Einem Längenunterschied $\Delta\lambda$ von 15° entspricht 1 Stunde, 1° entsprechen 4 Minuten. Wir entnehmen einem Atlas die geographische Länge $\lambda$ des Aufstellungsortes unserer Sonnenuhr. Sie liegt in der DDR zwischen 9° 54′ (Breiter Berg westlich Geismar in der Rhön) und 15° 02′ (Neiße bei Deska nördlich Görlitz). Aus der Längendifferenz $\Delta\lambda = 15° - \lambda$ berechnen wir die Zeitdifferenz $\Delta t = \frac{4\,\text{Min.}(15 - \lambda)}{1°}$.
Zur mittleren Ortszeit müssen wir die errechnete Zeitdifferenz addieren, um MEZ zu erhalten.

*Beispiel:* Wir nehmen an: Unsere Sonnenuhr steht in Schwerin $\lambda = 11{,}4°$, und wir lesen am 6. August auf dem Zifferblatt der Sonnenuhr eine wahre Sonnenzeit von $13^h 30^{min}$ ab. Wie groß ist die zugehörige MEZ?
Der Zeitgleichungskurve entnehmen wir für den 6. August ungefähr +6 Min. Die mittlere Sonnenzeit beträgt also $13^h 30^{min} + 6\,\text{Min.} = 13^h 36^{min}$. Der Längendifferenz von $\Delta\lambda = 15° - 11{,}4° = 3{,}6°$ entspricht die Zeitdifferenz von $\Delta t \approx 14\,\text{Min.}$ Als MEZ erhalten wir dann $13^h 36^{min} + 14\,\text{Min.} = 13^h 50^{min}$.

*U. Sonnemann*

Für alle Leser, die sich noch ausführlicher mit Fragen der Zeitmessung und mit Sonnenuhren befassen möchten, empfehlen wir folgende Literatur:
Klaus Lindner: „Astronomie selbst erlebt", Leipzig, Jena, Berlin 1973; Paul Ahnert: „Kalender für Sternfreunde 1980", Leipzig 1979

Bild 1



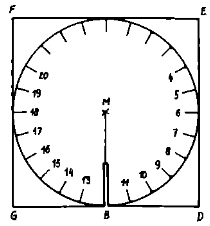



Bild 2

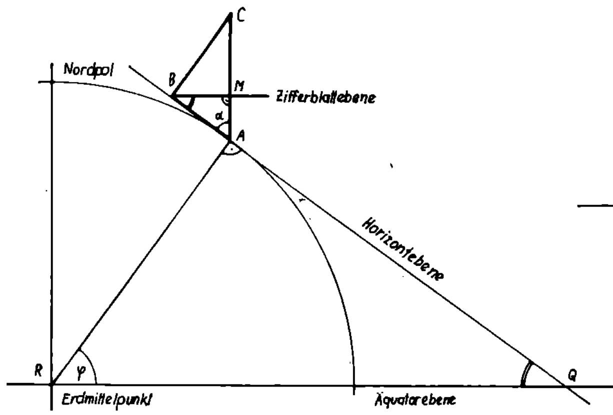



Bild 3

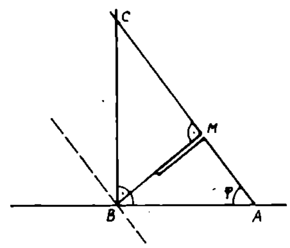


Bild 4

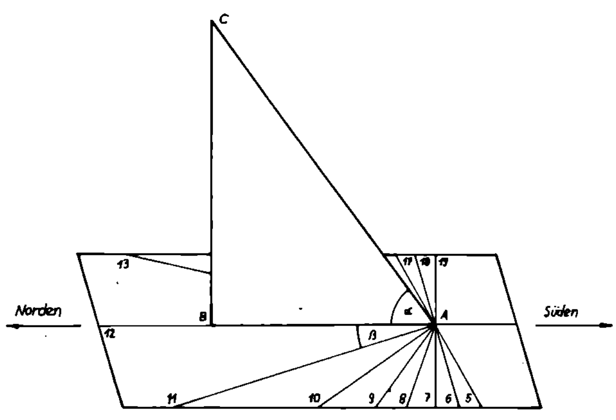



Bild 5

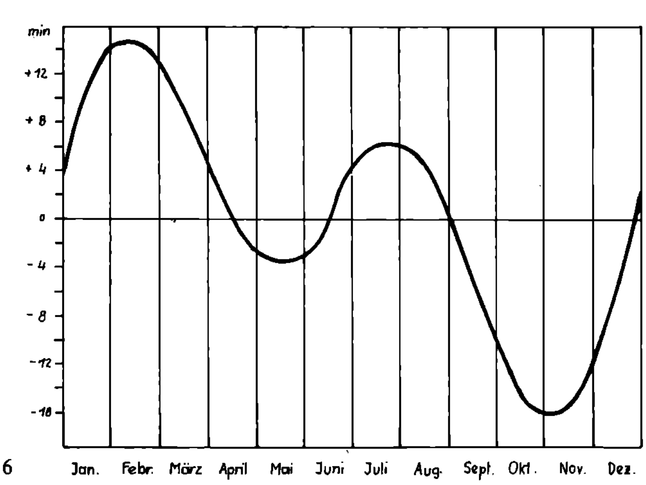



Bild 6

# In freien Stunden · alpha-heiter


### Geheimnisvolle Gravierung

Auf einer alten Dose, die einst einem Seemann gehört hat, findet sich folgende Gravierung:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 11 - | 12 | 4 | 23 | 2 |
| 5 | 9 - | 13 | 3 --- | 26 | 1 --- |
| 6 | 7 --- | 14 | 3 -- | 31 | 1 -- |
| 7 | 6 --- | 15 | 3 - | 37 | 1 - |
| 8 | 6 | 16 | 3 | 45 | 1 |
| 9 | 5 - | 17 | 2 --- | 65 | --- |
| 10 | 4 --- | 19 | 2 -- | 100 | -- |
| 11 | 4 - | 21 | 2 - | 200 | - |

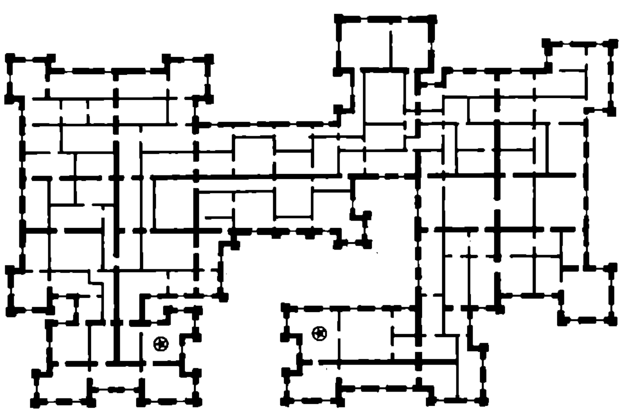
Gesucht wird eine Deutung dieser Gravur, die mit der Zeitmessung in Verbindung zu bringen ist.

*Mitgeteilt von Prof. Dr. K.-R. Biermann, Humboldt-Universität zu Berlin*

### Sternwanderung

Gehe von einem Zimmer mit Stern aus, und suche den Weg zum anderen Zimmer mit Stern!

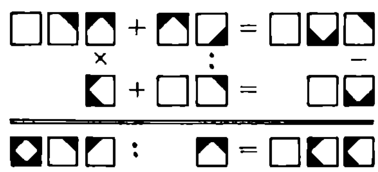
*Aus: Füles, Budapest*



### Nur vier Stotinki gespart

Ein Gabrovoer besuchte seinen Sohn, der Schüler in Sofia war. Der Sohn erzählte voller Stolz: „Vater, heute habe ich vier Stotinki gespart, ich bin den ganzen Schulweg hinter der Straßenbahn hergelaufen!" „Dummkopf!" schalt der Vater. „Wärst du hinter einer Taxe hergelaufen, hättest du das Zehnfache gespart!"

### Kryptarithmetik



*Aus: Mathematika 4/79, Sofia*

### Abbildung von $M_1$ in $M_2$

Gegeben sind die Mengen
$M_1 = \{P, O, T, E, N, Z, I, \pi\}$ und
$M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sowie
das Gleichungssystem

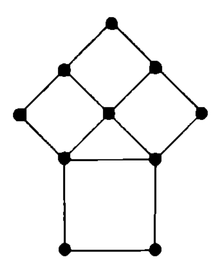
$$PI^P - P = \pi$$
$$PI^O - P = \pi\pi$$
$$PI^T - P = \pi\pi\pi$$
$$PI^E - P = \pi\pi\pi\pi$$
$$PI^N - P = \pi\pi\pi\pi\pi$$
$$PI^Z - P = \pi\pi\pi\pi\pi\pi.$$

Bilde die Menge $M_1$ so in die Menge $M_2$ ab, daß sämtliche Gleichungen zu wahren Aussagen werden!

*Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

### Magische Figuren

Bild 1: Anstelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 10 so einzusetzen, daß die Summe am Umfang jedes Quadrats und jedes Dreiecks stets 24 (oder 26) beträgt.



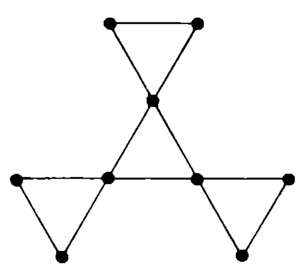


Bild 2: Anstelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 9 so zu ergänzen, daß die Summe am Umfang jedes Dreiecks immer die gleiche wird. Wer findet die drei Möglichkeiten?

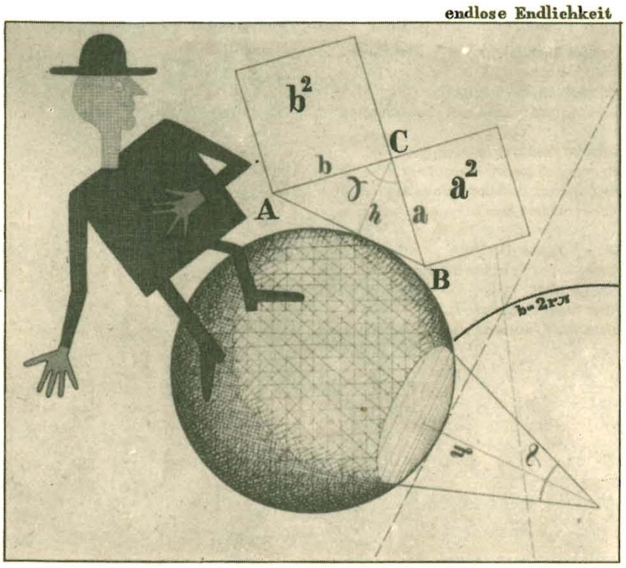
*Ing. J. Pěnčik, Praha*

## Zwil

In einer Ebene lebte einmal
ein Wesen, das war zweidimensional
und hieß Zwil. Und hat schon in jungen Jahren
einst den zwielichtigen Lehrsatz erfahren:
„Unsere Ebenen sind endlich. Unendlich das All.
Und dieser Satz gilt in jedem Fall.“

Doch Zwil hat dann Geometrie getrieben,
Dinge durchdacht und aufgeschrieben,
vieles mit Sorgfalt gewägt und erwogen –
und ist dann auf eine Kugel gezogen.
Die schien ihm nämlich unendlich weit
in ihrer endlichen Endlichkeit.

endlose Endlichkeit




*Aus: Was sieht die Ringeltaube? Der Kinderbuchverlag, Gedicht von John Erpenbeck, Vignette von Hans Ticha*

## Diagonale gesucht

Bei richtigem Einsetzen ergibt die Hauptdiagonale den Namen des Entdeckers der binomischen Reihe.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |

1. Teil eines Bruches, 2. Flächenmaß, 3. existiert für jeden Satz, 4. Teil der Körperoberfläche, 5. Begründer der Mengenlehre, 6. deutscher Mathematiker (1577 bis 1643)

*Diplomlehrer D. Völzke, Greifswald*

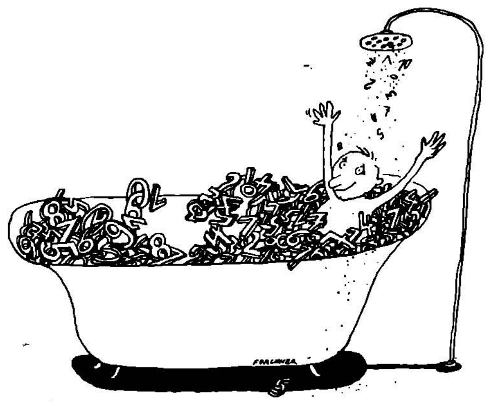
## Geometrische Figur gesucht

Ordne die folgenden Wörter so, als handele es sich um Zahlen, der Größe nach (mit der „größten“ beginnend)! Dabei ist jeder Buchstabe als Ziffer aufzufassen, und im übrigen gelte entsprechend dem Alphabet $a > b > c$ usw.

Archimedes, Leibniz, Alpha, Omikron, Meile, Lichtjahr, Meter, Gerade, Ankathete, Radius, Ellipse, Parabeläste, Radizieren, Lochkarte

Die Anfangsbuchstaben ergeben, fortlaufend gelesen, eine geometrische Figur.

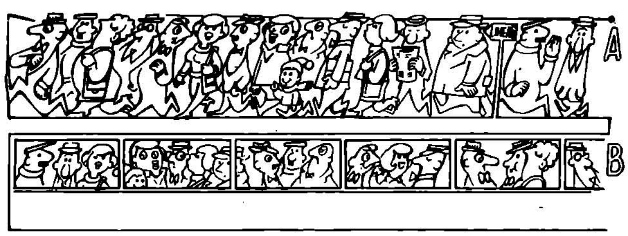
*OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin*

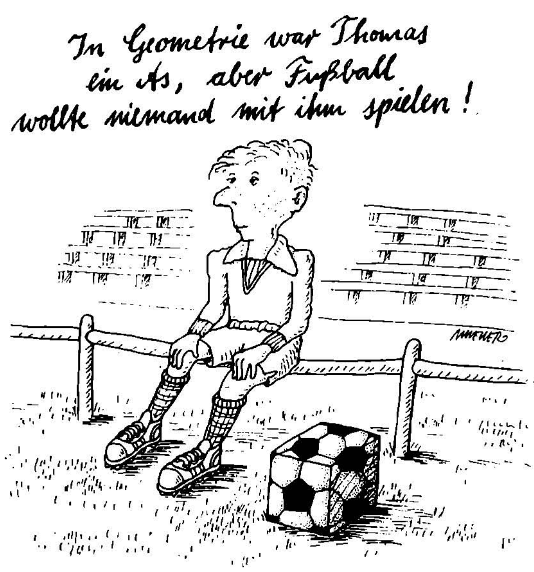


## Beobachtungstest

Die Leute auf dem Bild A warten auf die S-Bahn. Einer von ihnen konnte aber nicht mehr in die mit drei Fahrgästen ankommende Bahn einsteigen. Welcher Fahrgast ist zurückgeblieben, und welche befanden sich bereits in der Bahn?

*Aus: Füles 4/1979, Budapest*



# Aus der Praxis für die Praxis

**Ausgewählte Aufgabenbeispiele aus den „Mathematischen Blättern“ des Bezirks Neubrandenburg**

Viel Freude und Erfolg beim Wiederholen von Grundkenntnissen durch das Lösen dieser Probleme aus der Praxis!

▲1▲ (Kreis Altentreptow) Bei der Zuckergewinnung rechnet man etwa 12 kg Zucker aus 1 dt Zuckerrüben. Von einem Hektar wurden 250 dt Rüben geerntet.
Wieviel Tüten Weißzucker (Inhalt 1000 g) können daraus hergestellt werden?

▲2▲ (Kreis Anklam) Untenstehende Tabelle gibt die Hebelübersetzung der ELW 200 (Eisenlaufgewichtswaage) bei 190 kp Belastung an.
Berechne das Laufgewicht $F_L$ ($F_{23} = F_L$) und die Gesamtübersetzung $F^B : F_L$!

| $F^B = F_{11}$ | $L_{11}$ | $F_{21}$ | $L_{21}$ |
|---|---|---|---|
| 190 kp | 80 mm | ? | 590 mm |
| $F_{12}$ | $L_{12}$ | $F_{22}$ | $L_{22}$ |
| $F_{21}$ | 108 mm | ? | 253 mm |
| $F_{13}$ | $L_{13}$ | $F_{23} = F_L$ | $L_{23}$ |
| $F_{22}$ | 32 mm | ? | 190 mm |

▲3▲ (Kreis Demmin) Im VEB Stärkefabrik Loitz wurden aus 60000 t Rohmaterial etwa 8000 t reine Stärke und 12000 t Pulpe für Viehfutter erzeugt. Das Rohmaterial darf nach TGL bis 15% Schmutzanteile besitzen. Wieviel Tonnen sind dies jährlich? Was würde eine Senkung der Schmutzanteile um 5% bedeuten?

▲4▲ (Kreis Malchin) Bei der produktiven Arbeit werden durch je 4 Schüler jährlich 1250 Kanalabdeckplatten produziert und damit ein Wert von 23000 M geschaffen. Je Platte werden 10,25 m Rundstahl (Ø 6,5 mm) verbraucht.
Wieviel Tonnen Stahl werden jährlich benötigt?

▲5▲ (Neubrandenburg) Die 1500 Werktätigen des VEB Reifenwerk Neubrandenburg sollten nach der Planvorgabe im Jahr 1979 eine Bruttoproduktion von 460 Mio Mark erwirtschaften.
Welchen Produktionswert erarbeitete danach durchschnittlich jeder Werktätige dieses Betriebes im Jahr 1979?

▲6▲ (Kreis Neubrandenburg) Die Tagesproduktion der ZBE Frischeierproduktion Bresewitz liegt bei 175000 Stück.
a) Wie lang wäre die „Eierschlange“ von einer Tagesproduktion? 1 Ei etwa 5,8 cm.
b) Wann wären 175000 Eier verbraucht, wenn jeder Schüler einer Klasse von 24 Schülern täglich ein Ei essen würde?

▲7▲ (Kreis Neustrelitz) Die Arbeitsproduktivität (AP*) stieg in der Schiffswerft Rechlin von 1975 bis 1978 um 16,5 TM, dabei allein von 1977 bis 1978 um 7,5 TM und erreichte 1978 63,5 TM. Wie hoch war 1975, 1976 und 1977 die AP, wenn sie von 1975 bis 1976 doppelt so stark anstieg wie von 1976 bis 1977?

*Definition der Arbeitsproduktivität je Beschäftigten: Es sei
AP die Arbeitsproduktivität
IWP die industrielle Warenproduktion (in M)
B die Anzahl der Beschäftigten,
so gelte $AP = \frac{IWP}{B}$ (in M).

▲8▲ (Kreis Pasewalk) Eine viereckige Wiese ($ABCD$) ist bei $A$ rechtwinklig. Es wurde gemessen: $\overline{AB} = 450$ m, $\overline{BC} = 220$ m, $\overline{CD} = 650$ m, $\overline{DA} = 380$ m.
Berechne den Umfang! Konstruiere das Viereck im geeigneten Maßstab! Berechne die Fläche, indem du dazu notwendige Stücke durch Messung bestimmst!

▲9▲ (Kreis Prenzlau) Von 20757 Berufstätigen sind beschäftigt: In der Landwirtschaft 33,4%, Industrie 19,8%, Bauwesen 8,6%, Handel 10,2%, nichtproduzierende Bereiche 28%.
a) Berechne, wie viele Beschäftigte das jeweils sind!
b) Stelle die einzelnen Bereiche in einem Kreisdiagramm dar!

▲10▲ (Kreis Röbel) In der LPG (P) Satow-Kogel werden von 2300 ha Acker 1500 ha künstlich beregnet. Der Druck in den Wasserrohren für die Felder, die 20 m über der Pumpstation liegen, beträgt etwa 6 at.
Wie hoch muß der Druck in der Pumpstation mindestens sein?

▲11▲ (Kreis Strasburg) Eine Mähdrescherkolonne benötigt für die rund 90 km lange Strecke von Teterow nach Oertzenhof etwa 5 Stunden.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr die Kolonne?

▲12▲ (Kreis Templin) Warthe liegt rund 11 km (Luftlinie) nördlich von Templin und Lychen westlich von Warthe und 50° nordwestlich von Templin.
a) Welche Entfernung (Luftlinie) hat Lychen von Templin?
b) Prüfe die Rechnung durch eine Konstruktion!

▲13▲ (Kreis Teterow) In der KAP Niendorf erreichte 1978 jeder Mähdrescher E 512 eine durchschnittliche Leistung von 244 ha.
a) Es wurden 4148 ha Getreide bestellt. Wieviel E 512 waren es?
b) Wieviel Hänger (Ladung 5 t) können mit Getreide beladen werden, wenn rund 40 dt/ha geerntet wurden?

▲14▲ (Kreis Ueckermünde) Bestimme die Anzahl der Berufstätigen in der Land- und Forstwirtschaft aus folgenden Angaben:
Beschäftigte
im Bauwesen und in der Industrie 7300,
in der Industrie und in der L.-u.-F.-W. 8500,
im Bauwesen und in der L.-u.-F.-W. 4800.

▲15▲ (Kreis Waren) Im Dieselmotorenwerk hat der größte gegossene Schiffspropeller einen Durchmesser von 6,3 m und eine Masse von 32 t. Der Guß ist eine Legierung aus etwa 8% Zn, 5,5% Al, 10,5% Mn, 2% Fe, 3,2% Ni, Rest Cu.
Wieviel Prozent Kupfer und wieviel Tonnen Kupfer enthält diese Schraube? Wie groß ist ihr Volumen, wenn die Dichte etwa 7,6 $\frac{g}{cm^3}$ beträgt?

**In eigener Sache**

Im Namen des Redaktionskollegiums sagt der Chefredakteur der *alpha* (Bild Mitte) herzlichen Dank für die 13jährige unermüdliche Arbeit als Gutachter unserer Zeitschrift:
Herrn Nationalpreisträger *Herbert Kästner* (links) und Herrn Dozent Dr. *Reinhard Hofmann*, beide Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig.

# Lösungen

**Lösung zu: Mathematischer Begriff gesucht,** S. 37

Bogen, Bruch, Summe, Betrag, Mega, Tag, Zehn, Höhe, Achse; *rationell.* (Autor: OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin)

**Lösungen zu alpha-heiter,** S. 40/41

**Geheimnisvolle Gravierung**

Seit der Zeit, in der man auf See Sanduhren zur Zeitbestimmung benutzte, die eine halbe Stunde liefen, wurde in der Marine „Glasen" als Zeitmaß benutzt; 1 Stunde = 2 Glas.

Die Maßeinheit in der jeweiligen rechten Spalte ist also 1 Glas = 30′; – = $\frac{1}{4}$ Glas = 7,5′; – – = $\frac{1}{2}$ Glas = 15′; – – – – = $\frac{3}{4}$ Glas = 22,5′.

Die Zahlen in der jeweiligen linken Spalte können die empirisch bestimmte Schattenlänge zu der in der jeweiligen rechten Spalte angegebenen Uhrzeit (ab 6 Uhr bzw. bis 18 Uhr) angeben.

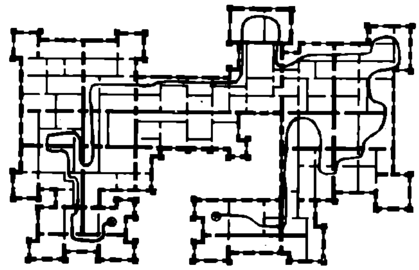
Zur Erläuterung einige Rechenbeispiele:

| gemessene Längeneinheiten | Uhrzeit Vormittag |
|---|---|
| 4 | $6\,h + 11\frac{1}{4}$ Glas $= 6\,h + 337{,}5'$ $= 11\,h\ 37{,}5'$ |
| 8 | $6\,h + 6$ Glas $= 9\,h$ |
| 12 | $6\,h + 4$ Glas $= 8\,h$ |
| 23 | $6\,h + 2$ Glas $= 7\,h$ |
| 200 | $6\,h + \frac{1}{4}$ Glas $=$ $6\,h + 7{,}5' = 6\,h\ 7{,}5'$ |

| gemessene Längeneinheiten | Uhrzeit Nachmittag |
|---|---|
| 4 | $18\,h - 11\frac{1}{4}$ Glas $= 18\,h - 337{,}5'$ $= 12\,h\ 22{,}5'$ |
| 8 | $18\,h - 6$ Glas $= 15\,h$ |
| 12 | $18\,h - 4$ Glas $= 16\,h$ |
| 23 | $18\,h - 2$ Glas $= 17\,h$ |
| 200 | $18\,h - \frac{1}{4}$ Glas $=$ $18\,h - 7{,}5' = 17\,h\ 52{,}5'$ |

Das Produkt aus den jeweiligen linken und rechten Spalten ist in jeder Zeile $47 \pm 2$ (+3 bei 100 und 200).

**Sternwanderung**



**Kryptarithmetik**

$$\begin{array}{rcl} 124 + 48 &=& 172 \\ \cdot \quad : && - \\ 5 + 12 &=& 17 \\ \hline 620 : 4 &=& 155 \end{array}$$

**Abbildung von $M_1$ in $M_2$**

Aus der Struktur des Gleichungssystems läßt sich für die Potenzexponenten die Ungleichungskette $P<O<T<E<N<Z$ folgern. Da $P$ als Anfangsziffer der Basen und als Subtrahend auftritt, scheidet $P=O$ als wenig sinnvoll aus.

$P \geqq 2$ kommt ebenfalls nicht in Frage, was unmittelbar aus der 1. Gleichung hervorgeht. Es kann also nur $P=1$ gelten.

$P=1$ in Verbindung mit der Voraussetzung und der 1. Gleichung liefert $I=0$ und $\pi=9$. Hieraus folgt weiter $O=2$, $T=3$, $E=4$, $N=5$ und $Z=6$.

Die Proben $10^1 - 1 = 9$

. . .

. . .

$10^6 - 1 = 999999$

bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

**Magische Figuren**

Bild 1: 7 oder 3
1 6 5 8
4 10 3 2 10 1
9 5 9 7
2 8 4 6

Bild 2: 2 9 oder 1 5 oder 2 4
4 9 9
3 5 6 8 6 2 4 8 6 1 5 7
7 1 7 3 8 3

**Diagonale gesucht**

1. Nenner, 2. Hektar, 3. Beweis, 4. Mantel, 5. Cantor, 6. Guldin. *Newton*

**Geometrische Figur gesucht**

Parabeläste, Archimedes, Radizieren, Ankathete, Lichtjahr, Lochkarte, Ellipse, Leibniz, Omikron, Gerade, Radius, Alpha, Meile, Meter. *Parallelogramm*

**Beobachtungstest**

Der Mann mit der Zeitung konnte nicht mehr einsteigen. – Der Mann mit der Brille am 2. Fenster, die Frau im 4. Fenster, der Mann neben der Frau am 5. Fenster waren bereits in der Bahn.

**Lösungen zu: Eine Aufgabe vom Autorenkollektiv des „Taschenbuchs für Mathematik"**, III. U.-S.

▲1964▲ a) Es gibt
$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
$= 3628800$ Möglichkeiten, zehn voneinander verschiedene Bücher auf einem Regal anzuordnen (Problem der Permutation ohne Wiederholung).

b) Wie im Beispiel a) handelt es sich auch hier um ein „Anordnungsproblem". Es existieren soviel voneinander verschiedene eineindeutige Abbildungen einer Menge mit $n$ Elementen auf sich, wie voneinander verschiedene Anordnungen der $n$ Elemente existieren, nämlich $n!$ (Problem der Permutation ohne Wiederholung)

c) Auch im Beispiel c) geht es um ein Anordnungsproblem. Da übereinstimmende Ziffern auftreten, führt nicht jede Umordnung der Ziffern 1; 1; 1; 5; 5; 9 zu einer neuen sechsstelligen Zahl. Da die Ziffer 1 dreimal und die Ziffer 5 zweimal auftritt, ist die Zahl aller Anordnungsmöglichkeiten (das sind 6!) durch die Zahl derjenigen zu teilen, bei der trotz Umordnung von Ziffern die Zahl erhalten bleibt. Es können $\frac{6!}{2!3!} = 60$ voneinander verschiedene Zahlen gebildet werden. (Problem der Permutation mit Wiederholung)

d) Aus 8 Mannschaften sind drei auszuwählen und auf den Platz 1, 2 bzw. 3 zu setzen. Es ist ein Problem der Auswahl von 3 Elementen aus einer Menge von 8 Elementen unter Berücksichtigung der Anordnung. Man muß $\frac{8!}{(8-3)!} = 336$ verschiedene Tips abgeben, wenn man die Reihenfolge der drei Erstplazierten mit Sicherheit voraussagen will. (Problem der Variation ohne Wiederholung)

e) Wie im Beispiel d) geht es um ein Auswahlproblem. Da jedoch ausgewählte Buchstaben auch wiederholt auftreten können, ist die Zahl der Möglichkeiten zu ermitteln, aus 26 verschiedenen Elementen drei nicht notwendig verschiedene Elemente auszuwählen. Es gibt $26^3 = 17576$ aus drei Buchstaben bestehende „Wörter". (Problem der Variation mit Wiederholung)

f) Im Beispiel f) handelt es sich um ein Auswahlproblem ohne Berücksichtigung der Anordnung. Es gibt $\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ verschiedene Möglichkeiten der Auswahl von $r$ Elementen aus $k$ Elementen. Zum Beispiel kann man auf $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ verschiedene Arten von drei (unterscheidbaren) Kugeln zwei auswählen. (Problem der Kombination ohne Wiederholung)

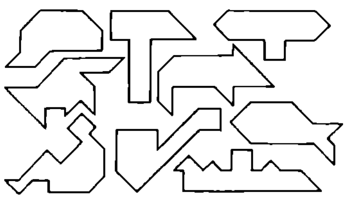
g) Soll man aus einer Menge von $k$ Elementen $r$ nicht notwendig verschiedene Elemente auswählen, so ist dies auf $\binom{k+r-1}{r}$ verschiedene

Weise möglich. Die Aufgabenstellung erfordert die Auswahl von zwei Zahlen aus der Menge mit den Elementen 1; 2; 3; 4; 5 und 6. Dazu gibt es $\binom{6+2-1}{2}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21$ verschiedene Möglichkeiten. (Problem der Kombination mit Wiederholung)

*Dr. P. Göthner, Karl-Marx-Universität Leipzig*

**Lösungen zu: Allerlei Kurzweil,** IV. U.-S.

1. Weitere Legebeispiele



2. a) Da die Gesamtfläche der Steine 35 cm² beträgt, kann die Schachtel nur die Maße 5 cm × 7 cm haben, wenn man eine 1 cm breite „Schachtel“ ausschließt. Andere Maße gibt es nicht.

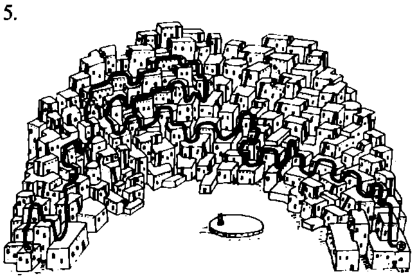
b) Einzig möglich: 3 cm × 13 cm.

3. Goethes Hexeneinmaleins. Summe: 1980

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 241 | 256 | 265 | 260 | 239 | 254 | 235 | 230 |
| 266 | 263 | 240 | 255 | 234 | 231 | 238 | 253 |
| 257 | 242 | 261 | 264 | 259 | 236 | 229 | 232 |
| 262 | 267 | 258 | 243 | 228 | 233 | 252 | 237 |
| 217 | 244 | 221 | 268 | 251 | 278 | 227 | 274 |
| 222 | 269 | 218 | 247 | 220 | 275 | 250 | 279 |
| 245 | 216 | 271 | 224 | 277 | 248 | 273 | 226 |
| 270 | 223 | 246 | 219 | 272 | 225 | 276 | 249 |

4. Aus der 1. Bedingung folgt, daß die dritte Karte, und aus der 2. Bedingung, daß auch die zweite Karte kein König sein kann. Also ist die erste Karte ein König. Aus der 3. Bedingung geht hervor, daß die erste und zweite Karte keine Karokarten sein können, aus der 4. Bedingung, daß die beiden Pikkarten nebeneinander liegen müssen. Deshalb sind die beiden ersten Karten Pikkarten. Mithin liegen folgende Karten vor dir: Pikkönig, Pikdame und Karodame.

5.



# XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

**4. Stufe (DDR-Olympiade), Fortsetzung:**

3 B. Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen

$$x \geqq 1, \tag{1}$$
$$x+3 \geqq 4\sqrt{x-1}, \tag{2}$$
$$x+8 \geqq 6\sqrt{x-1} \text{ gelten.} \tag{3}$$

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl $x$ sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1. \tag{4}$$

Dann folgt

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}},$$
$$x+3-4\sqrt{x-1}=1-2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+x+8-6\sqrt{x-1},$$
$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=3-\sqrt{x-1} \tag{5}$$

also $\sqrt{x-1} \leqq 3.$ (6)

Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-2, \tag{7}$$

also $\sqrt{x-1} \geqq 2.$ (8)

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \leqq x-1 \leqq 9, \tag{9}$$

also $5 \leqq x \leqq 10.$ (10)

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen $x$, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl $x$ die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8);

ferner gilt $x^2-10x+25=(x-5)^2 \geqq 0$, also $x^2+6x+9 \geqq 16x-16$, d. h. $(x+3)^2 \geqq 16(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+3>0$ folgt) die Ungleichung (2). Weiterhin gilt $x^2-20x+100=(x-10)^2 \geqq 0$, also $x^2+16x+64 \geqq 36x-36$, d. h. $(x+8)^2 \geqq 36(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+8>0$ folgt) die Ungleichung (3).

Ferner gilt $(\sqrt{x-1}-2)^2=x-1-4\sqrt{x-1}+4=x+3-4\sqrt{x-1}$; hieraus und aus (8) folgt (7). Weiterhin gilt

$(3-\sqrt{x-1})^2=9-6\sqrt{x-1}+x-1=x+8-6\sqrt{x-1}$,

hieraus und aus (6) folgt (5).

Aus (5) und (7) aber ergibt sich, daß $x$ auch (4) erfüllt. Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen $x$, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften.

Andere Lösungswege bestehen darin, außer der Diskussion von (1), (2), (3) für alle (verbleibenden) $x$ durch Quadrieren die Identitäten

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=|2-\sqrt{x-1}|$

und $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=|3-\sqrt{x-1}|$

herzuleiten und nun die Forderung

$|2-\sqrt{x-1}|+|3-\sqrt{x-1}|=1$

durch Fallunterscheidung als äquivalent mit (6) und (8) nachzuweisen.

*Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission*

4. a)

Es gilt $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \geqq 0$,

also $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \geqq 4ab$,

also wegen $a>0, b>0$

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab},$$
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \tag{1}$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

b) Ebenso zeigt man

$$\frac{c+d}{2} \geqq \sqrt{cd} \tag{2}$$

sowie für die Zahlen

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{c+d}{2} \tag{3}$$

auch $\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}.$ (4)

Aus (1), (2), (3), (4) folgt

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$$
$$=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geqq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd},$$

d. h. die zweite Behauptung.

*Bemerkungen:* Sätze, die ein Schüler im Mathematikunterricht oder im Mathematikzirkel auszusprechen und zu beweisen gelernt hat, darf er als Teilnehmer der OJM zitieren und für seine Lösung voraussetzen.

Nun wird in Mathematikzirkeln gelegentlich bewiesen, daß das arithmetische Mittel endlich vieler positiver reeller Zahlen nicht kleiner ist als deren geometrisches Mittel. Daher mußte der bloße Hinweis darauf, daß beide Behauptungen der Aufgabe Spezialfälle dieses Satzes sind, schon als Lösung anerkannt werden. Dies geschah bei 5 Teilnehmern und ist natürlich unbefriedigend und läßt die Aufgabe als nicht gut geeignet für Mathematikolympiaden erscheinen.

Unter den falschen Lösungen war der häufigste Fehler der, daß aus der Behauptung $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ zwar richtig auf die richtige Aussage $(a-b)^2 \geqq 0$ geschlossen, nicht aber die Umkehrbarkeit aller Schlüsse festgestellt wurde.

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 6 | 9 | 12 | 3 | 5 | 16 | 55 |

*Dr. G. Schiemann Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle*

5. Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$z^2-2^n=153. \tag{1}$$

(I) Angenommen, für ein Paar natürlicher Zahlen $(n; z)$ sei (1) erfüllt.

*1. Fall:* $n$ ist gerade, d. h., es gilt $n=2m$ mit natürlichem $m$.

Aus (1) folgt dann

$$(z-2^m)(z+2^m)=153. \tag{2}$$

Da $153=3^2\cdot 17$ als Zerlegungen in zwei ganzzahlige Faktoren, von denen der erste kleiner als der zweite und dieser (also auch der erste) größer als 0 ist, nur $1\cdot 153$, $3\cdot 51$ und $9\cdot 17$ besitzt, gibt es für (2) höchstens die Möglichkeiten

$$z-2^m=1,\ z+2^m=153; \tag{3}$$
$$z-2^m=3,\ z+2^m=51; \tag{4}$$
$$z-2^m=9,\ z+2^m=17. \tag{5}$$

Hiervon führt (3) auf den Widerspruch $2^m=76$ und (4) auf den Widerspruch $2^m=24$; (5) führt auf $z=13$, $2^m=4$, also $m=2$, $n=4$.

*2. Fall:* $n$ ist ungerade. Es gilt

$2 \equiv 1 \pmod 3$, also $2^n \equiv -1 \pmod 3$.

Ist nun $z \equiv 0 \pmod 3$, so folgt

$$z^2-2^n \equiv 0+1 \pmod 3; \tag{6}$$

ist aber $z \equiv 1 \pmod 3$

oder $z \equiv -1 \pmod 3$, so folgt

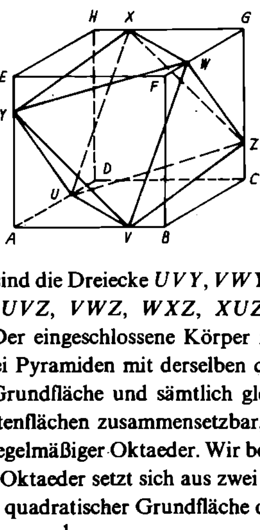
$$z^2-2^n \equiv 1+1 \pmod 3. \tag{7}$$

Wegen $153 \equiv 0 \pmod 3$ ergibt sowohl (6) als auch (7) einen Widerspruch gegen (1).

Daher kann (I) nur durch (4;13) erfüllt werden.
(II) In der Tat erfüllen diese Zahlen (1); denn es gilt
$2^4+12^2=16+144=160=169-9$.
Also ist genau dieses Zahlenpaar das gesuchte.

*Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission*

6. Angenommen, wir haben ein regelmäßiges Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften konstruiert. Wir betrachten die Umkugel $K$ dieses Oktaeders. Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ist infolge des Strahlensatzes mit dem Würfelmittelpunkt identisch. Daraus folgt, daß der Würfelmittelpunkt $M$ mit dem Kugelmittelpunkt notwendig zusammenfällt.
Die Kugel um $M$ mit dem Radius $r$ mit $\frac{\sqrt{2}}{2}<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$ schneidet die Kanten des Würfels u. a. in den Punkten $U, V, W, X, Y, Z$ (siehe Bild). $UVWX$ ist ein Parallelogramm, da $UV$ und $XW$ zueinander parallel und gleichlang sind. Da $UVWX$ symmetrisch zur Ebene durch $A, C, G$ liegt, gilt $\overline{UW}=\overline{VX}$ und damit ist $UVWX$ ein Rechteck. Sei nun $x=\overline{AV}=\overline{AU}=\overline{GW}=\overline{GX}$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich:
$\overline{VW}=\sqrt{a^2+2(a-x)^2}$. Aus der Bedingung $\overline{VW}=\overline{UV}=\sqrt{2}\,x$ ergibt sich $x=\frac{3}{4}a$. $UVWX$ ist dann nach Konstruktion ein Quadrat. Wir wählen nun noch $Y$ auf $\overline{AE}$ und $Z$ auf $\overline{GC}$ mit $\overline{AY}=\overline{GZ}=\frac{3}{4}a$. Es folgt analog $\overline{YU}=\overline{YV}=\overline{YW}=\overline{ZU}=\overline{ZV}=\overline{ZW}=\overline{ZX}$.




Daher sind die Dreiecke $UVY$, $VWY$, $WXY$, $XUY$, $UVZ$, $VWZ$, $WXZ$, $XUZ$ gleichseitig. Der eingeschlossene Körper ist somit aus zwei Pyramiden mit derselben quadratischen Grundfläche und sämtlich gleichseitigen Seitenflächen zusammensetzbar, d. h., er ist ein regelmäßiger Oktaeder. Wir berechnen $V$. Das Oktaeder setzt sich aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $a\sqrt{2}\frac{1}{2}$ und der zugehörigen Höhe $\frac{a}{2}$ zusammen. Damit ist $V=\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{a}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{6}a^3$.
Analog berechnen wir das Volumen des konstruierten Oktaeders. Es ist $\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2\frac{3}{4}a\frac{2}{3}=\frac{9}{16}a^3>\frac{1}{2}a^3=3V$.
Damit erfüllt das konstruierte Oktaeder alle gestellten Bedingungen.

*Bemerkungen:* 1. Die Aufgabe wurde als noch angemessen eingeschätzt. Sie hatte die Funktion eines „Scharfrichters".
2. Die Schüler verfügen in der Mehrzahl über keine klaren Vorstellungen von geometrischen Existenzbeweisen.
3. Verschwommene Darstellungen (z. B. geometrischer Operationen im Raum), der fehlende Nachweis der Regelmäßigkeit und eine Fülle von Rechenfehlern waren typische Fehler.
4. Eine Verallgemeinerung, die alle Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften bestimmt, erscheint in einem der nächsten Hefte der „IMO-Übungsaufgaben".

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 21 | 68 | 4 | 1 | 2 | 0 | 6 | 4 |

*Dr. W. Moldenhauer,*
*VEB Kombinat Schiffbau Rostock*

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb des Heftes 5/79 (Fortsetzung):**

Ma 6 ■1887 Es seien $p_1$ und $p_2$ diese Primzahlen, und es gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $p_1>p_2$. Aus der Aufgabenstellung folgt dann
$$4\cdot(p_1-p_2)=p_1+p_2,$$
$$4p_1-4p_2=p_1+p_2,$$
$$3p_1=5p_2.$$
Nun muß 5 Teiler von $3p_1$ und somit Teiler von $p_1$ sein. Das trifft nur zu für $p_1=5$. Daraus folgt $p_2=3$.
Die beiden Primzahlen lauten 3 und 5.

Ma 6 ■1888 Die zweistelligen natürlichen Zahlen seien in der Form $10a+b$ dargestellt; dann gilt
$$10a+b=4\cdot(a+b),$$
$$10a+b=4a+4b,$$
$$6a=3b,$$
$$2a=b.$$
Wegen $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ erhalten wir folgende vier Lösungen: 12, 24, 36, 48.

Ma 6 ■1889 Aus den Angaben des Aufgabentextes ergeben sich folgende Teilnehmerzahlen:

| Klasse | Anzahl | Klasse | Anzahl |
|---|---|---|---|
| 7 | $x$ | 10 | $y$ |
| 8 | $y$ | 11 | $y+1$ |
| 9 | $x+3$ | 12 | $x$ |

insgesamt $3x+3y+4=p$,
$3x+3y+3=p-1$,
$3(x+y+1)=p-1$.
Daraus folgt, daß $p-1$ durch 3 teilbar sein muß. Wegen $15<p<25$ gilt das nur für $p=19$. Deshalb gilt
$3x+3y+4=19$, $3x+3y=15$,
$x+y=5$ mit $x>1$ und $y>1$.
Es existieren zwei Lösungen, nämlich $x_1=2$ und $y_1=3$ sowie $x_2=3$ und $y_2=2$.

| Klasse | Anzahl | Anzahl |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 3 |
| 8 | 3 | 2 |
| 9 | 5 | 6 |
| 10 | 3 | 2 |
| 11 | 4 | 3 |
| 12 | 2 | 3 |
| insgesamt | 19 | 19 |

Ma 6 ■1890 Da die Zahl $\overline{ab}$ (in dekadischer Schreibweise) Primzahl ist, kann $b$ nur 1, 3, 7 oder 9 sein. Da die Zahl $\overline{ba}$ ebenfalls Primzahl ist, kann auch $a$ nur 1, 3, 7 oder 9 sein. aus $\overline{ab}-\overline{ba}>0$ folgt $a>b$.
Fallunterscheidung:

| $\overline{ab}$ | $\overline{ba}$ | $\overline{ab}-\overline{ba}$ | |
|---|---|---|---|
| 31 | 13 | 18 | keine Quadratzahl |
| 71 | 17 | 54 | keine Quadratzahl |
| 73 | 37 | $36=6^2$ | |
| 97 | 79 | 18 | keine Quadratzahl |

Es gibt genau zwei Primzahlen mit dieser Eigenschaft; sie lauten 73 und 37, und es gilt $73-37=36=6^2$.

Ma 6 ■1891 Die gesuchten zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich darstellen durch $z=10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$; ihre Quersumme lautet $a+b$. Nun gilt
$$10a+b=a+b+54,$$
$$9a=54,\text{ also } a=6.$$
Daraus folgt $z=10\cdot 6+b=60+b$.
Weiterhin gilt
$$7\cdot(60+b)=60+b+396,$$
$$420+7b=b+456,$$
$$6b=36,\text{ also } b=6.$$
Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 66.

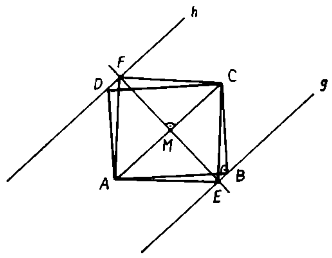
Ma 7 ■1892 Angenommen, in diesem Haus wohnen $x$ Familien mit 3 Personen, $y$ Familien mit 4 Personen und $z$ Familien mit 5 Personen; dann gilt $3x+4y+5z=41$ und $x+y+z=12$ bzw. $x=12-y-z$.
Durch Einsetzen erhalten wir
$3\cdot(12-y-z)+4y+5z=41$,
$36-3y-3z+4y+5z=41$,
$$y+2z=5,$$
$$2z=4+1-y,$$
$$z=2-\frac{y-1}{2}.$$
Wegen $x>y>z$ existiert genau eine Lösung, nämlich $y=3$, also $z=1$ und $x=8$.
In diesem Haus wohnen 8 Familien mit drei, 3 Familien mit vier und 1 Familie mit fünf Personen.

Ma 7 ■1893 Aus (2) und (4) folgt: Herr Morosow unterrichtet nicht Biologie. Aus (5) folgt: Herr Morosow unterrichtet weder Geographie noch Mathematik.
Aus (3) folgt: Herr Tokarew unterrichtet weder Biologie noch Französisch. Folglich unterrichtet Herr Wassiljew Biologie.
Aus (3) folgt: Herr Morosow unterrichtet Französisch.
Aus (2) und (4) folgt: Herr Tokarew unterrichtet Mathematik.
Aus (5) folgt: Herr Wassiljew unterrichtet Geographie.
Aus (1) folgt: Herr Tokarew unterrichtet Englisch. Folglich unterrichtet Herr Morosow Geschichte.

Zusammenstellung:

| Name | Fächer |
|---|---|
| Morosow | Französisch, Geschichte |
| Tokarew | Englisch, Mathematik |
| Wassiljew | Biologie, Geographie |

Ma 7 ▪1894 Wir zeichnen einen rechten Winkel mit seinem Scheitel $B$, tragen auf dem einen Schenkel von $B$ bis $A$ die Länge 4 cm ab, schlagen um $A$ mit dem Radius $r=5$ cm einen Kreis, der den anderen Schenkel des Rechten in $C$ schneidet und verbinden $A$ mit $C$. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch $C$ schneidet die Parallele zu $\overline{BC}$ durch $A$ in $D$.




Das Viereck $ABCD$ ist das zu konstruierende Rechteck. Durch jeden der Punkte $B$ und $D$ zeichnen wir eine Parallele zu $AC$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$ schneide die eine dieser Parallelen in $E$, die andere in $F$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AEC$ haben die Seite $\overline{AC}$ gemeinsam und wegen $AC \parallel g$ gleiche Höhe bezüglich dieser Seite, sie sind somit flächengleich. Das gleiche gilt analog für die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ACF$. Auf Grund der Konstruktion gilt ferner $\overline{AE}=\overline{CE}=\overline{AF}=\overline{CF}$. Somit ist das Quadrat $AECF$ flächengleich dem Rechteck $ABCD$.

Ma 7 ▪1895 Wir stellen folgende Tabelle auf:

| Klasse | Anzahl d. Jungen | Anzahl d. Mädchen |
|---|---|---|
| 7a | $a$ | $a-2$ |
| 7b | $b$ | $b+7$ |
| 7c | $c$ | $c+2$ |
| insg. | $a+b+c$ | $a+b+c+7$ |

Nun gilt $2\cdot(a+b+c)+7=89$,

$2\cdot(a+b+c) \quad =82$,

$a+b+c \quad =41$.

Diesen drei 7. Klassen gehören insgesamt 41 Jungen an.

Ma 8 ▪1896 Für den Umfang dieses Rechtecks gilt:

(1) $\quad u=2(a+b)$.

Wegen $a:b=4:3$ bzw. $a=\frac{4}{3}b$ und $u=28$ (Maßzahl) gilt nun

(2) $\quad 28=2\left(\frac{4}{3}b+b\right)$ bzw. $b=6$.

Daraus folgt $a=8$.

Die Längen der Seiten des Rechtecks betragen 8 cm bzw. 6 cm.

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 48 cm².

Sei $e$ die Länge der Diagonalen, dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$e^2=a^2+b^2$, also

$e^2=64+36$,

$e^2=100$,

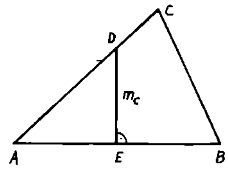
$e = 10$.

Die Länge der Diagonalen beträgt 10 cm.

Ma 8 ▪1897 Weil $m_c$ Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ ist, ist $\overline{AE}$ 3 cm lang. Im rechtwinkligen Dreieck $AED$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$\overline{DE}=\sqrt{AD^2-AE^2}$

$\overline{DE}=4$ cm.




Für den Flächeninhalt des Dreiecks $AED$ gilt:

$A=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{ED}}{2}$

$A=6\,\text{cm}^2$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $AED$ beträgt 6 cm².

Ma 8 ▪1898 Die Aussageform ist

$2\cdot x+x\cdot x+1=(x+1)(x+1)$.

Durch äquivalente Umformung erhält man

$2x+x^2+1=(x+1)^2$;

$x^2+2x+1=x^2+2x+1$.

Die beiden Terme dieser Gleichung sind identisch. Daraus folgt, daß für alle natürlichen Zahlen $x$ gilt:

$2\cdot x+x\cdot x+1=(x+1)(x+1)$.

Ma 8 ▪1899 Man zeichnet die Diagonale $\overline{EC}$, die das Fünfeck in das Dreieck $ECD$ und das Viereck $ABCE$ zerlegt. Man verlängert $\overline{BC}$ über $C$ hinaus und zeichnet zu $\overline{EC}$ die Parallele durch $D$, die die Gerade $BC$ in $F$ schneidet. Man verbindet $E$ mit $F$. Das Viereck $ABFE$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Fünfeck, da die Dreiecke $\triangle ECD$ und $\triangle ECF$ flächengleich sind (sie haben die gleiche Grundseite $\overline{EC}$, und die entsprechenden Höhen haben die gleiche Länge $h_1$).

Dieses Verfahren wendet man nun auf das Viereck $ABFE$ an. Man zeichnet die Diagonale $\overline{EB}$ und die Parallele zu $\overline{EB}$ durch $A$, die die Gerade $EF$ in $G$ schneidet. Das Dreieck $\triangle BEA$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle BEG$. Daraus folgt, daß das Viereck $ABFE$ den gleichen Flächeninhalt hat wie das Dreieck $\triangle BFG$.

Daraus folgt: Das Fünfeck $ABCDE$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle BFE$.

Ma 9 ▪1900 Seien $x$ und $y$ die Preise für die zwei Pampelmusen in Mark. Dann gilt nach den Bedingungen der Aufgabe

(1) $\quad x+y=3{,}3$

(2) $\quad x-y=0{,}1$.

Daraus folgt $x=1{,}7$ und $y=1{,}6$.

Eine Pampelmuse kostet 1,70 M, die andere 1,60 M. Wenn man für 10 Pfennig 25 g Pampelmuse erhält, so erhält man für 1,70 M 425 g und für 1,60 M 400 g Pampelmuse. Die Masse der einen Pampelmuse beträgt 425 g, die der anderen 400 g.

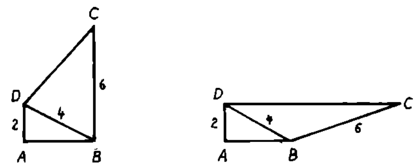
Ma 9 ▪1901 Da die Länge von $\overline{DB}$ 4 cm beträgt, folgt aus $\overline{AD}:\overline{DB}:\overline{BC}=1:2:3=2:4:6$. Die Länge von $\overline{AD}$ beträgt 2 cm und die Länge von $\overline{BC}$ beträgt 6 cm.

Zwei voneinander verschiedene nicht überschlagene Trapeze erfüllen die Bedingungen.

(1) Man zeichnet einen rechten Winkel mit dem Scheitelpunkt $A$. Der Kreis um $A$ mit dem Radius $r=2$ cm schneidet den einen Schenkel des rechten Winkels in $D$. Der Kreis um $D$ mit dem Radius $r=4$ cm schneidet den anderen Schenkel des rechten Winkels in $B$. Auf der Parallelen zu $\overline{AD}$ durch $B$ liegt der Punkt $C$, der von $B$ einen Abstand von 6 cm hat.

(2) Die ersten drei Sätze wie (1), dann weiter: Man zeichnet die Parallele zu $\overline{AB}$ durch $D$. Der Kreis um $B$ mit dem Radius $r=6$ cm schneidet die Parallele in $C$.

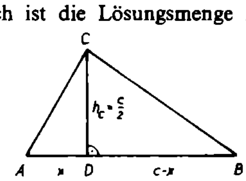
Skizzen (nicht maßstäblich):




Ma 9 ▪1902 Der Term $4x^x-6x^{x+1}+2x^{x+2}$ kann in ein Produkt umgeformt werden, da jeder Summand den Faktor $x^x$ enthält. Die Gleichung $x^x\cdot(4-6x+2x^2)=0$ ist im Bereich der rationalen Zahlen zu der gegebenen Gleichung äquivalent. Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Folglich gilt:

$x^x=0$ oder $4-6x+2x^2=0$.

$x^x=0$ wird von keiner rationalen Zahl erfüllt, folglich ist die Lösungsmenge $L_1$ leer ($L_1=\emptyset$).




$4-6x+2x^2=0$ wird nur von den rationalen Zahlen 1 und 2 erfüllt; die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also $L_2=\{1;2\}$. Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist die Vereinigungsmenge von $L_1$ und $L_2$.

Es gilt $L=L_1\cup L_2=\{1;2\}$.

Ma 9 ▪1903 Nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke gilt:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$. Wegen (1) gilt $\gamma=90°$. Das Dreieck $ABC$ ist rechtwinklig. Sei $D$ der Fußpunkt der Höhe $h_c$ und $x$ die Länge der Strecke $\overline{AD}$. Nach dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke gilt:

$\left(\frac{c}{2}\right)^2=x\cdot(c-x)$ bzw. $x^2-cx+\frac{c^2}{4}=0$. Die Lösungsmenge dieser quadratischen Gleichung ist $L=\left\{\frac{c}{2}\right\}$.

Das bedeutet, daß $D$ Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ (sws).
Man konstruiert das Dreieck $ABC$ aus $a=5$ cm, $b=5$ cm und $\gamma=90°$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ beträgt $12{,}5\,\mathrm{cm}^2$ (halbe Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 5 cm).

Ma 10/12 ▪1904 (1) ist wahr; (2) ist falsch; (3) ist wahr.
Begründungen: zu (1): Man formt $z=a^2+a+17$ in $z=a(a+1)+17$ um. $a(a+1)$ ist stets gerade; folglich ist $a(a+1)+17$ stets ungerade.
zu (2): Man findet z. B. $a=16$. Es gilt $16^2+16+17=289$ und $289=17^2$, also keine Primzahl. Dieses Gegenbeispiel genügt, um die Falschheit der Allaussage nachzuweisen. Es gibt noch weitere Zahlen $a$, für die $a(a+1)+17$ keine Primzahl ist.
zu (3): Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.
1. Es sei $a$ eine durch 3 teilbare Zahl, also $a=3k$. Dann gilt
$z=(3k)^2+3k+17=9k^2+3k+17;$
$z=3(3k^2+k+5)+2.$
Das heißt, $z$ läßt bei Division durch 3 den Rest 2.
2. Es sei $a$ eine Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, also $a=3k+1$. Dann gilt
$z=(3k+1)(3k+2)+17=9k^2+9k+19;$
$z=3(3k^2+3k+6)+1.$
Das heißt, $z$ läßt bei Division durch 3 den Rest 1.
3. Es sei $a$ eine Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 läßt, also $a=3k+2$. Dann gilt
$z=(3k+2)(3k+3)+17=9k^2+15k+23;$
$z=3(3k^2+5k+7)+2.$
Das heißt, $z$ läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Damit haben wir alle möglichen Fälle erfaßt.

Ma 10/12 ▪1905 Aus $(a+1)(b+1)+1=1979$ folgt $(a+1)(b+1)=1978$. Folglich gilt auch
$$(a-2)(b+4)=(a+1)(b+1); \quad (1)$$
$$3a-3b=9$$
$$a-b=3.$$ Durch Einsetzen in Gleichung (1) erhalten wir
$$(a-2)(a+1)=1978;$$
$$a^2-a-1980=0;$$
$$a=45;$$
$$b=42.$$
Nur die natürlichen Zahlen 45 und 42 erfüllen die beiden gegebenen Gleichungen.

Ma 10/12 ▪1906 Wir nehmen an, es gäbe ein $x\in P$, für das gilt:
(1) $\sin x+\cos x=1{,}5.$
Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung und erhalten
(2) $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=2{,}25.$
Wegen $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ und $2\sin x\cos x=\sin 2x$ folgt aus (2):
(3) $\sin 2x=1{,}25.$
Die Gleichung (3) wird von keinem reellen $x$ erfüllt. Daraus folgt, daß die Annahme falsch ist. Folglich gilt das Gegenteil der Annahme: Es gibt kein $x\in P$, für das gilt: $\sin x+\cos x=1{,}5$, q.e.d.

Ma 10/12 ▪1907 Das Volumen dieser Pyramide berechnet man nach der Formel $V=\frac{a^2\cdot h}{3}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Höhe dieser Pyramide $h=\sqrt{s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}$, wobei $s$ die Länge der Seitenkante und $d$ die Länge der Diagonalen der Grundfläche bezeichnet.
Es gilt $V=\frac{5^2\cdot 4{,}97}{3}$; $V=41{,}42\,\mathrm{m}^3$.
Von diesem Volumen ist das Volumen für den Beton zu subtrahieren, um das Volumen des Gesteins zu erhalten. Wir berechnen 55% von $41{,}42\,\mathrm{cm}^3$ und erhalten $22{,}78\,\mathrm{m}^3$ für das Volumen des Gesteins. Es seien $m$ die Masse, $V$ das Volumen und $\varrho$ die Dichte des Gesteins der Pyramide. Dann gilt
$$m=V\cdot\varrho$$
$$m=22{,}78\,\mathrm{m}^3\cdot 2{,}6\,\mathrm{t}\cdot m^{-3}$$
$$m=59{,}2\,\mathrm{t}$$
Die Masse des Gesteins beträgt etwa 59,2 t. Es wurde mit Näherungswerten gerechnet.

Aus Platzgründen können wir zu den Aufgaben des Physik- und des Chemiewettbewerbs nur die Antwortsätze veröffentlichen.

Ph 6 ▪61 Die Lackschicht ist 0,075 mm dick.

Ph 7 ▪62 a) Vom Zeitpunkt des Vorbeifahrens am Punkt $A$ gerechnet überholt der
Radfahrer den Fußgänger nach 6 s,
Autofahrer den Fußgänger nach 2,5 s
Autofahrer den Radfahrer nach 5 s.
b) Die Abstände von $A$ sind entsprechend 28,5 m, 36 m und 75 m.

Ph 8 ▪63 Es stehen rund 41 l pro $\mathrm{m}^2$ und h für die Beregnung der Gemüsefläche zur Verfügung.

Ph 9 ▪64 Das Element hat eine Leerlaufspannung von 4,5 V und einen Innenwiderstand von 30 Ω.

Ph 10/12 ▪65 Die Geschwindigkeit des α-Teilchens beträgt etwa $1{,}52\cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ch 7 ▪49 Das Gasgemisch enthält etwa 9,1% Kohlendioxid.

Ch 8 ▪50 1480 g Sauerstoff sind für die Verbrennung noch zu liefern.

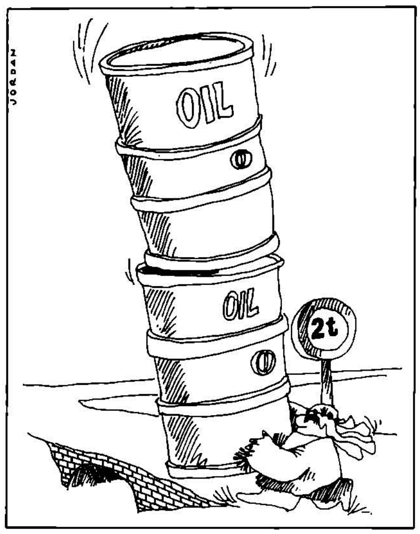
Ch 9 ▪51 32,5 l Chlorwasserstoff werden unter den gegebenen Bedingungen von 310 ml 15%iger Natronlauge absorbiert.

Ch 10/12 ▪52 Die Füllung kostet rund 13 196 Mark.

**VII. Physikwettbewerb**
Fortsetzung von S. 36: Bestimmen Sie
a) die Lage der Linse,
b) ihre Brennweite,
c) die Gegenstandsweiten und die Bildweiten!
Die Lösung kann rechnerisch oder durch Konstruktion oder durch Kombination beider Verfahren erfolgen.

(Auf den Text zur experimentellen Aufgabe müssen wir aus Platzgründen verzichten, d. Red.)

Jürgen Gräfenstein, jüngster Teilnehmer des Wettbewerbs. Er erreichte sowohl im experimentellen als auch im theoretischen Teil unter den 21 Teilnehmern die höchste Punktzahl. Für die experimentelle Aufgabe erreichte er als einziger die volle Punktzahl und erhielt dafür einen Sonderpreis.




Fortsetzung von Seite 29

**III. Finale**

▲1▲ (Aufgabe) Man bestimme die dritte Wurzel der Gleichung $2x^3+mx^2-13x+n=0$, wenn 2 und 3 Wurzeln der Gleichung sind!

▲2▲ (Fragen) a) Geben Sie Synonyme für das Wort „Axiom“ an!
b) Die Funktion $f(x)=x^2+2ax+3$ sei gerade. Bestimmen Sie $a$!
c) Wie heißt das Ellipsoid, das mindestens drei Symmetrieachsen besitzt?
d) Wie nennt man in der Mathematik ein genaues Schema der Vorgehensweise, das zur Lösung einer bestimmten Aufgabe führt?
e) Er war Oberbefehlshaber der russischen Armee im napoleonischen Krieg. In den Jahren 1757 bis 1759 studierte er an der *Adligen Artillerieschule*, an der er später Mathematik lehrte. Wie heißt der Mann?

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■1778 Die Variablen $a, b, c$ des Terms $\frac{a(c-b)}{b-a}$ sollen mit den Zahlen 13, 15 bzw. 20 so belegt werden, daß der Wert des Terms gleich einer positiven ganzen Zahl ist.

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Es ist $\frac{a(c-b)}{b-a} > 0$ genau dann, wenn entweder „$c > b$ und $b > a$" oder „$c < b$ und $b < a$" gilt, d. h., wenn entweder $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt. Für $a < b < c$, also für $a = 13, b = 15, c = 20$ erhalten wir $\frac{13 \cdot (20-15)}{15-13} = 32{,}5$, also keine ganze Zahl. Für $a > b > c$, also für $a = 20$, $b = 15$, $c = 13$ erhalten wir $\frac{20 \cdot (13-15)}{15-20} = 8$.

Wir stellen nun die Lösung von Gerd Heber aus Erfurt vor, der Schüler der Klasse 7 der 11. POS ist. Gerd löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Variablen $a, b, c$ können wie folgt belegt werden:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| (1) | 13 | 15 | 20 |
| (2) | 13 | 20 | 15 |
| (3) | 15 | 13 | 20 |
| (4) | 15 | 20 | 13 |
| (5) | 20 | 13 | 15 |
| (6) | 20 | 15 | 13 |

Fall (1) liefert eine gebrochene Zahl, nämlich $\frac{13(20-15)}{15-13} = \frac{65}{2}$. Die Fälle (2) bis (5) liefern negative Zahlen und entfallen deshalb, denn es gilt

(2) $c-b<0$ und $b-a>0$,
(3) $c-b>0$ und $b-a<0$,
(4) $c-b<0$ und $b-a>0$,
(5) $c-b>0$ und $b-a<0$.

Nur Fall (6) liefert eine positive ganze Zahl, und es gilt $\frac{20(13-15)}{15-20} = 8$.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■1775 Ein Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sie ehrlich teilen sollten. Hans, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil; er entnahm dem Korb den dritten Teil der Anzahl der Nüsse. Bernd, der nicht wußte, daß Hans sich schon bedient hatte, nahm von den verbliebenen Nüssen den dritten Teil. Elke, die nicht wußte, daß Hans und Bernd dem Korb schon Nüsse entnommen hatten, nahm als letzte von den verbliebenen Nüssen ebenfalls den dritten Teil. Danach waren noch 16 Nüsse im Korb. Wieviel Nüsse hat jeder von ihnen dem Korb entnommen?

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, im Korb befanden sich anfangs $n$ Nüsse. Nachdem sich Hans $\frac{n}{3}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse. Nachdem sich Bernd $\frac{2n}{9}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse. Nachdem sich Elke $\frac{4n}{27}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{4n}{9} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse. Nun gilt $\frac{8n}{27} = 16$, also $n = 54$.

Im Korb befanden sich anfangs 54 Nüsse. Hans hat dem Korb 18 Nüsse, Bernd 12 Nüsse und Elke 8 Nüsse entnommen.

Wir stellen nun die Lösung von Jens Beier aus Grimma vor, der Schüler der Klasse 6 der Alfred-Frank-Oberschule ist. Jens löste diese Aufgabe wie folgt:

Es sei $z$ die Anzahl der im Korb anfangs vorhandenen Nüsse. Wegen der gestellten Bedingungen ist $z$ ein Vielfaches von 27. Ich nehme eine Fallunterscheidung vor.

(1) Es sei $z = 27$; dann erhält
Hans 9 Nüsse (Rest 18),
Bernd 6 Nüsse (Rest 12),
Elke 4 Nüsse (Rest 8).
Wegen $8 \neq 16$ entfällt $z = 27$.

(2) Es sei $z = 54$; dann erhält
Hans 18 Nüsse (Rest 36),
Bernd 12 Nüsse (Rest 24),
Elke 8 Nüsse (Rest 16).
Dies stellt eine Lösung dar.

(3) Für $z = k \cdot 27$ mit $k \geqq 3$, wobei $k$ eine natürliche Zahl ist, verbleibt jeweils ein Rest, der größer als 18 ist. Somit existiert genau eine Lösung.

Wir stellen nun die Lösung von Jan-Martin Hertzsch aus Geringswalde vor, der Schüler der Klasse 6a der Diesterweg-Oberschule ist; Jan-Martin löste diese Aufgabe wie folgt:

16 Nüsse sind $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Nüsse, von der Elke $\frac{1}{3}$ entnommen hat; $\frac{1}{3}$ entspricht also 8 Nüssen ($16 + 8 = 24$).

24 Nüsse sind $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Nüsse, von der Bernd $\frac{1}{3}$ entnommen hat; $\frac{1}{3}$ entspricht also 12 Nüssen ($24 + 12 = 36$).

36 Nüsse sind $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Nüsse, von der Hans $\frac{1}{3}$ entnommen hat; $\frac{1}{3}$ entspricht also 18 Nüssen ($36 + 18 = 54$).

Hans nahm sich 18, Bernd 12 und Elke 8 Nüsse.

# Bücher helfen beim Studieren

Drinfel'd
**Quadratur des Kreises und Transzendenz von $\pi$**
etwa 180 S., zahlr. Abb., Preis: 8,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Bestell-Nr.: 570 8950

K.-J. Richter
**Methoden der Optimierung**
**Band I: Lineare Optimierung**
189 Seiten mit 18 Bildern und 44 Tabellen, Preis: 7,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr.: 545 587 7

G. Lochmann
**Nomographie**
140 Seiten, 56 Bilder, 58 Tafeln, 43 Aufgaben mit Lösungen sowie eine Beilage Preis: 9,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr.: 546 427 1

H. Simon/K. Stahl/H. Grabowski
**Mathematik**
Nachschlagbuch für Grundlagenfächer
13. völlig neubearbeitete Auflage
672 Seiten mit 445 Bildern, Preis: 13,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr.: 546 440 7

K. Fehringer
**Näherungsrechnungen, Gleichungen, Ungleichungen**
Einige Probleme der praktischen Mathematik
144 Seiten, 75 Abb., Preis: 3,70 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Bestell-Nr.: 707 150 0

M. Scholltyssek
**Hexeneinmaleins**
160 Seiten, zahlr. lustige Abb., Preis: 6,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin
Bestell-Nr.: 630 659 0

# Buchpremiere

LEIPZIG

Am 31. Oktober 1979 fand im Konferenzsaal der *Deutschen Bücherei* in Anwesenheit zahlreicher in- und ausländischer Gäste eine Buchpremiere statt.
Anläßlich der 19. völlig überarbeiteten Auflage des Taschenbuches der Mathematik fanden sich Wissenschaftler aus der UdSSR und der DDR, Vertreter der Presse, des Buchhandels, der Bibliotheken, des Außenhandels der DDR und des Graphischen Großbetriebes Interdruck Leipzig zu einer Feierstunde zusammen.
*alpha* stellt vor:
I. N. Bronstein/K. A. Semendjajew
**Taschenbuch der Mathematik**
Neubearbeitung
860 Seiten, zahlr. Abb. Preis 29,50 M
Ergänzende Kapitel zu
Bronstein/Semendjajew
**Taschenbuch der Mathematik**
Neubearbeitung
218 Seiten, zahlr. Abb. Preis 12,00 M
1958 erschien im Verlag B. G. Teubner, Leipzig, die erste Auflage des von V. Ziegler ins Deutsche übersetzten Taschenbuches der Mathematik von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. Seitdem sind 18 Auflagen mit insgesamt rund 300000 Exemplaren erschienen. Das Taschenbuch wurde zum unentbehrlichen Arbeitsmittel während des Studiums und in der beruflichen Praxis nicht nur für Ingenieure, für die es ursprünglich vorgesehen war, sondern darüber hinaus für Mathematiker, Physiker und andere Naturwissenschaftler, Ökonomen sowie Mathematik- und Physiklehrer.

Die Entwicklung der Mathematik seit der Konzipierung des Taschenbuches, die Entstehung neuer mathematischer Teilgebiete, die verstärkte Anwendung der Mathematik auf vielen Gebieten von Wissenschaft, Technik und Ökonomie, die daraus resultierenden anspruchsvolleren Studienanforderungen an die Studenten dieser Fachrichtungen sowie die Anpassung des Taschenbuches an den erweiterten Benutzerkreis machten eine gründliche Überarbeitung, Erweiterung und Ergänzung erforderlich.
Diese Überarbeitung erfolgte durch ein Kollektiv von Mathematikern, die zum größten Teil der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig angehören, unter Leitung der Herausgeber G. Grosche und V. Ziegler in Abstimmung mit den Autoren der ursprünglichen Fassung sowie in Zusammenarbeit der beiden Verlage Nauka, Moskau, und B. G. Teubner, Leipzig.
Die neue Fassung wird als Gemeinschaftsausgabe der beiden genannten Verlage gleichzeitig in deutscher und russischer Sprache erscheinen.
Darüber hinaus gibt die B. G. Teubner Verlagsgesellschaft noch einen Ergänzungsband zu dieser Neubearbeitung heraus, der vor allem von Studenten der Mathematik, Physik sowie einiger mathematikintensiver technischer und ökonomischer Fachrichtungen benötigt wird. Diese „Ergänzenden Kapitel" bilden zusammen mit dem Hauptband ein einheitliches Ganzes.

Unser Foto zeigt den Mitautor der Originalausgabe des Taschenbuches der Mathematik, Prof. *K. A. Semendjajew* (Mitte), sowie die beiden Herausgeber Doz. Dr. *G. Grosche* (links) und Dr. *V. Ziegler* (rechts), beide Karl-Marx-Universität Leipzig.

## Eine Aufgabe des Autorenkollektivs des Buches Bronstein/Semendjajew Taschenbuch der Mathematik unter Leitung von Prof. Dr. K. A. Semendjajew

*Hydrometeorologisches Wissenschaftliches Zentrum der UdSSR*

▲ 1964 ▲ Bei vielen mathematischen Untersuchungen treten kombinatorische Probleme auf, deren Eigenart an folgendem Aufgabenkomplex deutlich wird:
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zehn voneinander verschiedene Bücher auf einem Regal anzuordnen?
b) Wie groß ist die Anzahl der eineindeutigen Abbildungen einer $n$-elementigen Menge auf sich?
c) Wieviel verschiedene sechsstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 1; 1; 5; 5; 9 bilden?
d) An einem Turnier beteiligen sich 8 Mannschaften. Wieviel verschiedene Tips bezüglich der drei Erstplazierten (in der Reihenfolge des Wettkampfergebnisses) muß man mindestens angeben, um eine richtige Voraussage gemacht zu haben?
e) Wieviel verschiedene Wörter mit 3 Buchstaben kann man aus den 26 Buchstaben des Alphabetes bilden, wobei unberücksichtigt bleibt, ob das durch Zusammenstellung der Buchstaben gewonnene Wort „sinnvoll" ist oder nicht?
f) Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge von $k$ (verschiedenen) Elementen $r$ Elemente auszuwählen?
g) Wie groß ist die Anzahl der voneinander verschiedenen Würfe mit zwei voneinander nicht zu unterscheidenden Würfeln?

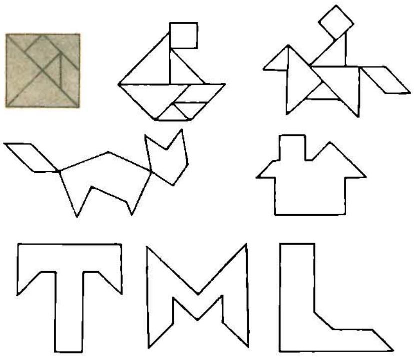
## Zum Titelblatt

Die Abbildung zeigt zwei Spalten des Moskauer *Papyrus Rhind* mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit Seiten 2 und 4, und Höhe 6 Ellen.
Oben: der hieratische Text;
unten: die Umschrift in Hieroglyphen.
Der Text lautet:
(1) Addiere du zusammen diese 16
(2) mit dieser 8 und mit dieser 4.
(3) Es entsteht 28. Berechne du
(4) $\frac{1}{3}$ von 6. Es entsteht 2. Rech-
(5) ne du mit 28 2mal. Es entsteht 56.
(6) Siehe: es ist 56. Du hast richtig gefunden.
Der hieroglyphische Text wird von rechts nach links gelesen. Die obere Länge 2 und ihr Quadrat 4 sind oben in der Zeichnung angegeben, die untere Länge 4 unten, die Höhe 6 und der Inhalt innen. Die Multiplikation von 28 mit 2 steht links neben der Zeichnung.

# allerlei Kurzweil

1. Gegeben sei ein in Dreiecke und Vierecke unterteiltes Quadrat, siehe Bild. Wer legt die sieben Teile so, daß die abgebildeten Figuren entstehen?

*Aus: matematicki list 4/79, Beograd*



2. Die gezeichneten Bausteine sind alle 1 cm hoch und haben folgende Längen und Breiten:

*A*: 5 cm lang, 1 cm breit, ist einfach vorhanden,

*B*: 4 cm lang, 1 cm breit, ist zweifach vorhanden,

*C*: 3 cm lang, 1 cm breit, ist zweifach vorhanden,

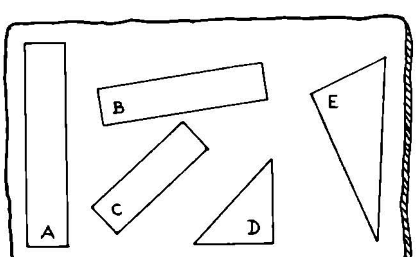
*D*: 2 cm lang, 2 cm breit, halbiert, ist vierfach vorhanden,

*E*: 4 cm lang, 2 cm breit, halbiert, ist zweifach vorhanden.

a) Wie groß muß eine Schachtel sein, in die alle Bausteine ohne Leerraum gerade hineinpassen? Wieviel verschiedene Schachteln sind möglich?

b) Welche Maße müßten die Schachteln haben, wenn plötzlich noch ein Stein der Sorte *B* gefunden würde, der auch noch 'rein soll?

*Aus: Magazin 11/79, Berlin*




3. Löse den (semimagischen) Rösselsprung, und setze für die Silben des Gedichtes der Reihe nach die Zahlen 216 bis 279 in die entsprechenden Kästchen! Du erhältst in jeder Zeile und in jeder Spalte die gleiche Summe.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| du | Sie- | Neun | so | so | Hex, | und | Zehn |
| ist | bracht: | bist | mach | gehn, | und | gleich, | die |
| ben | reich. | ist's | und | Acht, | Drei | mach | Zwei |
| voll- | Eins, | und | Ver- | Eins | laß | sagt | mach |
| thes | lier | mal- | und | so | mal- | Aus | das |
| eins, | Zehn | He- | Aus | ein- | He- | Sechs, | eins! |
| die | Goe- | keins. | mußt | ein- | Fünf | ist | stehn! |
| ist | Du | Vier! | xen- | Das | ver- | xen- | und |

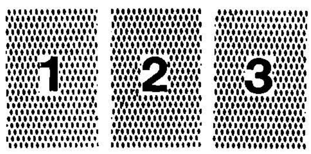
*Schuldirektor H. Förg, Schwaz, Österreich*

4. Vor dir liegen drei Spielkarten mit der Rückseite nach oben. Einiges wissen wir über sie:

1. Rechts vom König liegen eine oder zwei Damen.
2. Links von der Dame liegen eine oder zwei Damen.
3. Links von einer Karokarte liegen eine oder zwei Pikkarten.
4. Rechts von einer Pikkarte liegen eine oder zwei Pikkarten.

Welche Karten liegen also vor dir?

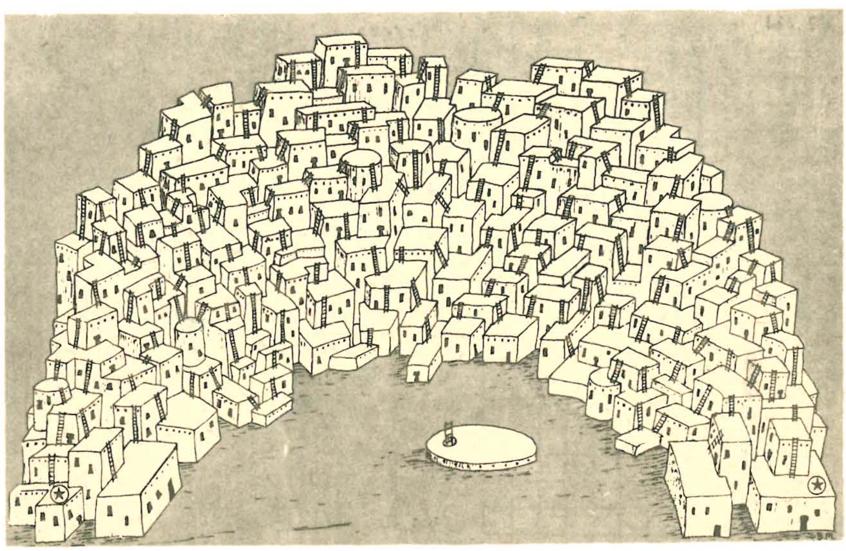
*Aus: Sputnik 11/79, Moskau*




## LABYRINTH

5. Die Bewohner dieses Gebirgsortes können nur mit Hilfe der Leiter von einem Haus zum anderen steigen, aber auch längere Spaziergänge machen. Wo führt der richtige Weg von einem Stern (siehe Bild) zum anderen?

*Aus: Füles 10/79, Budapest*

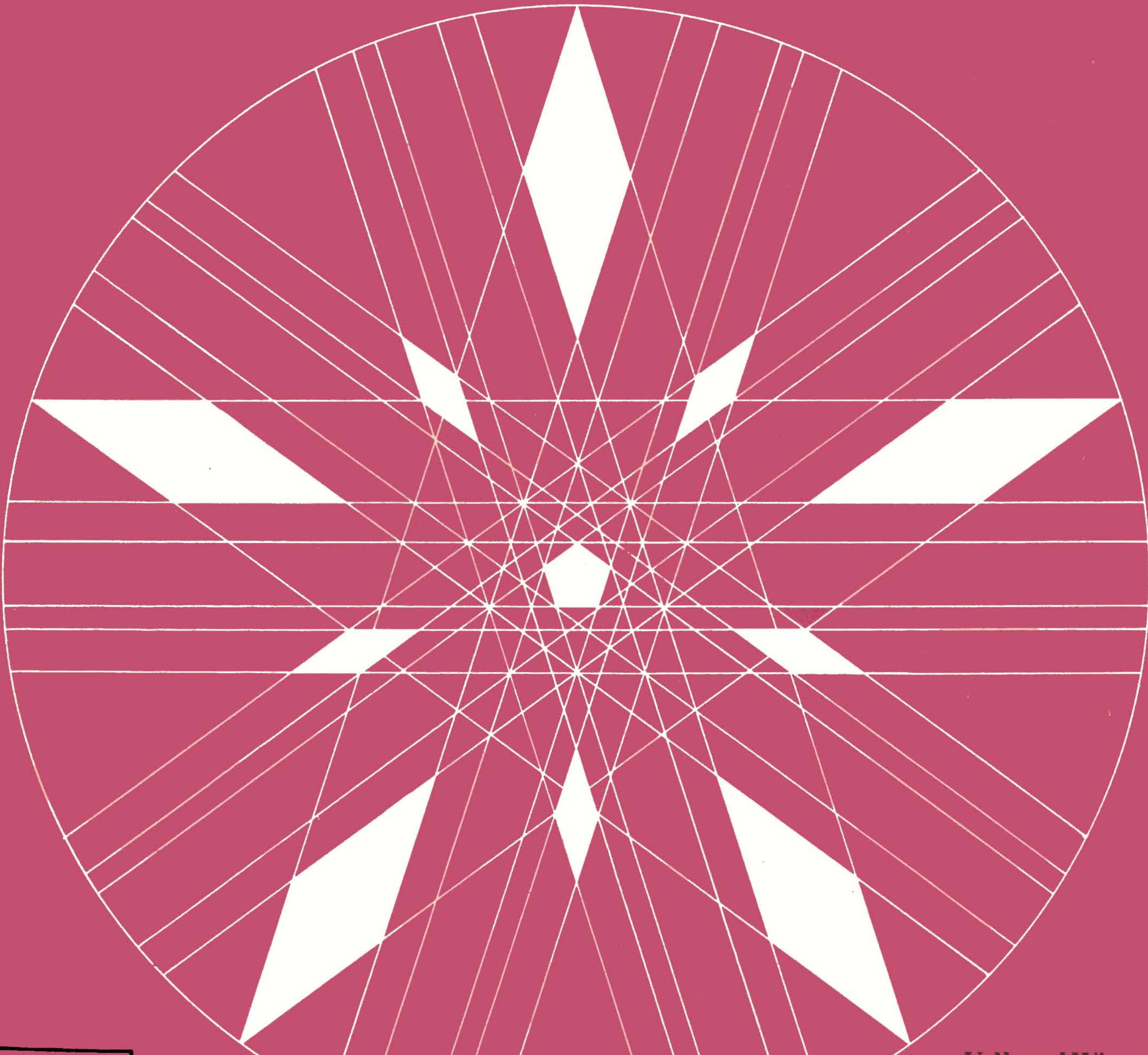


6. Alles nach Maß: Seitdem Frank mit einem Lineal umzugehen weiß, mißt er alles nach. Kürzlich fragte er seine Oma: „Weißt du, wieviel Zahnpaste in einer Tube ist? – Fast zwei Meter!"

(Lösungen siehe Seite 44.)

Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
*Fotos:* R. Kaps, TH Merseburg (S. 51); Archiv FK Mathematik der Stadt Greifswald (S. 55); Wunder der Rechenkunst (1857) aus der Bibliothek von J. Lehmann, Leipzig (III. U.-Seite). Das Titelblatt zu diesem Heft wurde nach dem Titelblatt der mathem. Schülerzeitschrift „Euklid", Athen, gestaltet.
*Titelblatt:* W. Fahr, Berlin
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
*Redaktionsschluß:* 28. Februar 1980

# alpha
## Mathematische Schülerzeitschrift

# Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Über Antipodenpunkte

Unsere Mathematikstudenten *Th. Meusel* und *G. Wallura* aus dem ersten Studienjahr in Merseburg haben sich für den Studentenvortragstag mit einem Stoff beschäftigt, der über den Vorlesungsinhalt hinausgeht und auch für mathematikinteressierte Schüler verständlich und interessant ist. Es ging um Antipodenpunkte auf Kreisen und Kugeln.

Zwei Punkte $P_1, P_2$ auf dem Kreisrand $S^1$ mit dem Radius 1 um den Nullpunkt eines $(x,y)$-Koordinatensystems, die „sich gegenüberliegen", d. h., die auf der gleichen Geraden durch den Nullpunkt liegen, heißen Antipodenpunkte oder auch ein Antipodenpaar des Kreises $S^1$. Hat also $P_1$ die Koordinaten $(x_1, y_1)$, wobei gilt $x_1^2+y_1^2=1$ (weil $P_1$ auf $S^1$ liegt), so muß sein Antipodenpunkt $P_2$ die Koordinaten $(-x_1, -y_1)$ haben. Die Punkte $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ bilden z. B. ein Antipodenpaar des Kreises $S^1$. Entsprechend erklärt man Antipodenpunkte auf der Oberfläche $S^2$ der Kugel mit dem Radius 1 um den Nullpunkt eines $(x,y,z)$-Koordinatensystems. Liegt der Punkt $P_1$ mit den Koordinaten $(x_1, y_1, z_1)$ auf $S^2$, dann gilt

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1,$$

und der Punkt $P_2$ mit den Koordinaten $(-x_1, -y_1, -z_1)$ ist der zu $P_1$ gehörige Antipodenpunkt $P_2$ auf der Kugel (vgl. Bilder 1, 2).

Bild 1

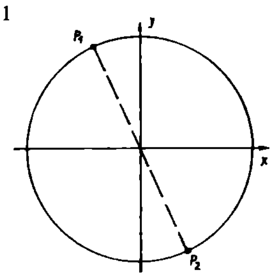
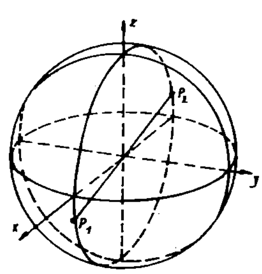
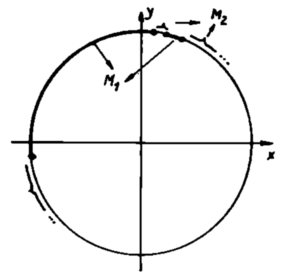



Bild 2




Wir denken uns zwei Teilmengen $M_1, M_2$ von $S^1$, so daß die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ der beiden Mengen wieder die gesamte Menge $S^1$ ergibt. $M_1$ und $M_2$ „überdecken" also $S^1$. Die genannten Mengen sollen „abgeschlossen" sein, das heißt, sie sollen ihre Randpunkte mit enthalten. Die Frage ist, ob eine der Mengen ein Antipodenpaar enthält (vgl. Abb. 3; $M_1$ in Bild 3 enthält sicher keine Antipodenpunkte!).

Bild 3




Bei der Kugel interessiert uns besonders eine „Überdeckung" ihrer Oberfläche $S^2$ durch drei Mengen $M_1, M_2, M_3$. Sie seien ebenfalls abgeschlossen. Um sich den Sachverhalt zu veranschaulichen, kann man sich drei Mengen auf einen Ball aufmalen, die zusammen den gesamten Ball überdecken sollen. Jetzt fällt die Antwort auf die Frage, ob wenigstens eine der drei Mengen $M_1, M_2, M_3$ einen Antipodenpunkt enthält, schon schwerer. Bei der Diskussion dieser Frage „direkt am Ball" wird man feststellen: Wenn man die Kugeloberfläche $S^2$ mit vier (oder mehr) Mengen überdeckt, so kann der Fall eintreten, daß keine der erwähnten Mengen ein Antipodenpaar enthält.

Der berühmte „Antipodensatz" von *L. A. Ljusternik* und *L. G. Schnirelman* (1930) beantwortet unsere Fragen (und ist noch in allgemeineren Fällen gültig): Wird die Kreislinie $S^1$ von zwei bzw. die Kugeloberfläche $S^2$ von drei abgeschlossenen Teilmengen überdeckt, so enthält mindestens eine der Mengen ein Antipodenpaar.

Der an Mathematik interessierte Schüler wird fragen, wie der Beweis eines so einfach zu formulierenden Satzes geführt werden könnte. Darauf wollen wir am Ende unseres Artikels zu sprechen kommen.

Dieser Satz ist nicht nur nützlich zur Lösung solcher geometrischen Probleme, sondern er ist einer der grundlegenden Existenzsätze der modernen Mathematik. Dies wollen wir an zwei Beispielen erläutern. Wir benutzen den Antipodensatz, um nachzuweisen, daß sogenannte „ungerade" Funktionen Nullstellen auf $S^1$ (bzw. $S^2$) haben.

**Beispiel 1:**

Wir denken uns die $(x,y)$-Ebene. Jedem Punkt (mit den Koordinaten $(x,y)$) ordnen wir den Funktionswert

(1) $$f(x,y)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}y+y}{x^2+1}$$

zu. Die so gegebene Funktion $f$ ist ungerade, denn es gilt

$$f(x,y)=-f(-x,-y).$$

Wir fragen, ob die Funktion $f$ Nullstellen hat, die außerdem noch auf $S^1$ liegen. Wir suchen also Punkte $P^*$ der $(x,y)$-Ebene, deren Koordinaten $(x^*, y^*)$ folgende Bedingungen erfüllen:

(2) $f(x^*,y^*)=0$

(3) $(x^*)^2+(y^*)^2=1.$

Wir brauchen somit die Funktionswerte von $f$ nur über den Punkten von $S^1$ zu betrachten. Nun bilden wir zwei Teilmengen $M_1, M_2$ von $S^1$. $M_1$ enthalte die Punkte von $S^1$, über denen die Funktion $f$ nichtnegative Werte hat:

(4) $M_1=\{(x,y)\in S^1 \ / \ f(x,y)\geqq 0\}$,

und $M_2$ sei die Menge der Punkte von $S^1$, über denen $f$ nichtpositive Werte hat:

(5) $M_2=\{(x,y)\in S^1 \ / \ f(x,y)\leqq 0\}$.

Für unsere Funktion $f$ (siehe (1)) sieht man, daß $M_1$ nichtleer ist (z. B. liegt der Punkt $(1,0)$ in $M_1$: $f(1,0)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)>0$), und ebenso ist $M_2$ nichtleer, denn $(-1,0)\in M_2$. Beide Mengen sind abgeschlossen. $M_1$ und $M_2$ zusammen überdecken $S^1$, denn $f$ kann über $S^1$ nur $f(x,y)\geqq 0$ oder $f(x,y)\leqq 0$ erfüllen. So erkennen wir, daß die Voraussetzungen des Antipodensatzes erfüllt sind. Eine der beiden Mengen muß somit ein Antipodenpaar $P_1, P_2$ besitzen. Nehmen wir an, $P_1\in M_2$, so schreiben wir auf, was wir von $P_1$ wissen (die Koordinaten von $P_i$ seien $(x_i, y_i)$, $i=1,2$): es gilt

(6) $f(x_1,y_1)\leqq 0$,

weil $P_1\in M_2$; da $P_1$, $P_2$ ein Antipodenpaar bilden, ist weiter

(7) $x_2=-x_1, y_2=-y_1$

richtig; da auch $P_2$ in $M_2$ liegt, ist folglich

(8) $f(-x_1,-y_1)\leqq 0$

richtig. Wir wissen, daß $f$ eine ungerade Funktion ist.

Daher folgt aus (8)

(9) $f(-x_1,-y_1)=-f(x_1,y_1)\leqq 0$,

also

(10) $f(x_1,y_1)\geqq 0$.

Wir lesen jetzt (10) zusammen mit (6):

(11) $0\leqq f(x_1,y_1)\leqq 0$,

dies kann nur für

(12) $f(x_1,y_1)=0$

erfüllt sein. Hätten wir angenommen, daß $P_1$ in $M_1$ liegt, so erhalten wir (wie man nachrechnen möge) ebenso $f(x_1,y_1)=0$. $P_1$ ist also eine Nullstelle von $f$, die auf $S^1$ liegt.

Nachträglich sieht man: da $P_1$ Nullstelle ist, liegt $P_1$ sowohl in $M_2$ als auch in $M_1$ (man schaue sich nochmals (4) und (5) an). Wir wissen jetzt, *daß* es eine Nullstelle gibt. Da für den zugehörigen Antipodenpunkt $P_2$ gilt

(13) $f(x_2,y_2)=-f(x_1,y_1)$,

folgt aus (12):

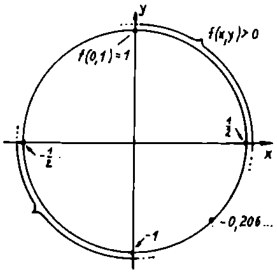
(14) $f(x_2,y_2)=0$,

$P_2$ ist somit auch Nullstelle.

Um nun die Koordinaten $x_1$, $y_1$ bzw. $x_2$, $y_2$ näherungsweise zu bestimmen, nehmen wir Bild 4 zu Hilfe. Wir wollen nämlich gemäß unserer Tabelle an einige Punkte des Kreises $S^1$ die Funktionswerte von $f$ für diese Punkte schreiben.

| $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | $-1$ | $-1$ |
| $-1$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-0{,}206\ldots$ |

Bild 4




Ferner sehen wir aus (1), daß für Punkte auf dem Kreisbogen im 1. Quadranten gilt: $f(x,y)>0$, denn alle eingehenden Größen sind positiv. Entsprechend gilt für Punkte auf dem Kreisbogen im 3. Quadranten, daß dort $f$ stets negativ ist. Folglich müssen (s. Bild 4) die gesuchten Antipodenpunkte im 2. bzw. 4. Quadranten liegen. Zum Beispiel im 4. Quadranten gilt: $f$ hat den Wert $\frac{1}{2}$ über dem Punkt $(1,0)$ und den Wert $-1$ über dem Punkt $(0;-1)$. Man denke sich die Funktionswerte über dem Kreisbogenstück im 4. Quadranten auf einer Schnur angeheftet. Diese Schnur ist über $(1,0)$ in der Höhe $\frac{1}{2}$ anzubringen, über $(0,-1)$ in der Höhe $-1$, also muß es (mindestens) einen Punkt auf dem Kreisbogen im 4. Quadranten geben, durch den die Schnur hindurchgeht (man modelliere oder zeichne den Sachverhalt, wodurch noch besser klar wird, wie man sich einem solchen Punkt weiter nähern kann). Da $f$ ungerade ist, ist dies ein Punkt eines Antipodenpaares, in dem $f$ verschwindet.

Diesen Gedanken mit der Schnur kann man zu einem exakten Beweis unseres Satzes für die $S^1$ benutzen (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen).

**Beispiel 2:**

Bereits recht kompliziert wird die Anwendung des Antipodensatzes für die Kugeloberfläche $S^2$. Wir geben uns ein Gleichungssystem vor, etwa

$$(15)\quad \begin{aligned} xy\sin z + z &= 0 \\ yz\sin x + x &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen wissen, ob Lösungen des Gleichungssystems vorhanden sind, die zugleich auf $S^2$ liegen. Ein Punkt $P$ ist folglich solch eine Lösung, falls seine Koordinaten $(x,y,z)$ die beiden Gleichungen (15) erfüllen und ferner noch gilt

$$(16)\quad x^2+y^2+z^2=1,$$

denn dann liegt $P$ auch auf $S^2$. Wenn wir die linken Seiten in (15) mit $f_1(x,y,z)$ bzw. $f_2(x,y,z)$ abkürzen, gilt ähnlich wie in Beispiel 1: $f_i(-x,-y,-z)=-f_i(x,y,z)$ für $i=1,2$. Man geht diesmal so vor: für eine *feste* Zahl $k=1, 2, \ldots$ bilden wir die zwei Mengen:

$$(17)\quad A_{1k}=\{(x,y,z)\in S^2 \;/\; f_1(x,y,z)\geqq k^{-1}\},$$

$$(18)\quad A_{2k}=\{(x,y,z)\in S^2 \;/\; f_2(x,y,z)\geqq k^{-1}\}.$$

Diese Mengen sind beide nichtleer, dies kann man nachrechnen, ferner abgeschlossen. Keine der beiden Mengen kann ein Antipodenpaar enthalten, denn wäre

$$(19)\quad (x,y,z)\in A_{1k},\ (-x,-y,-z)\in A_{1k},$$

so folgte, daß zugleich gelten müssen

$$(20)\quad f_1(x,y,z)\geqq k^{-1} \text{ und}$$

$$(21)\quad -f_1(x,y,z)\geqq k^{-1},$$

dies ist aber nicht möglich.

Wir überlegen uns nun, welche Punkte $P\in S^2$ wir mit $A_{1k}$ und $A_{2k}$ noch nicht erfaßt haben. Für diese gelten folgende Ungleichungen

$$(22)\quad \begin{aligned} f_1(x,y,z)&<k^{-1} \\ f_2(x,y,z)&<k^{-1} \end{aligned}$$

Deshalb bilden wir als dritte abgeschlossene Menge bei Zulassung des Gleichheitszeichens

$$(23)\quad A_{3k}=\{(x,y,z)\in S^2 \,|\, f_i(x,y,z)\leqq k^{-1},\ i=1,2\}.$$

Da die drei abgeschlossenen Mengen $A_{1k}$, $A_{2k}$, $A_{3k}$ die $S^2$ überdecken, enthält nach dem Antipodensatz mindestens eine ein Antipodenpaar $P_{1k}$, $P_{2k}$. Diese Menge kann nach den obigen Überlegungen nur $A_{3k}$ sein. Wir wollen $A_{3k}$ genauer untersuchen. Wir stellen fest, daß für die Punkte $P$ aus $A_{3k}$, für die $f_1(x,y,z)<-k^{-1}$ oder $f_2(x,y,z)<-k^{-1}$ gilt, die zugehörigen Antipodenpunkte wegen

$$(24)\quad f_i(-x,-y,-z)=-f_i(x,y,z)>k^{-1}$$

(für $i=1$ bzw. $i=2$) zu $A_{1k}$ bzw. $A_{2k}$ gehören. Damit können wir die Menge, in der sich ein Antipodenpaar befinden muß, genauer beschreiben. Bezeichnen wir diese Teilmenge von $A_{3k}$ mit $B_k$, so gilt

$$(25)\quad B_k=\{(x,y,z)\in S^2 \,|\, -k^{-1}\leqq f_i(x,y,z)\leqq k^{-1},\ i=1,2\},$$

und für das Antipodenpaar $P_{1k}$, $P_{2k}$ mit den Koordinaten $(x_{1k},y_{1k},z_{1k})$ bzw. $(-x_{1k},-y_{1k},-z_{1k})$ gilt damit ebenfalls

$$(26)\quad \begin{aligned} -k^{-1}&\leqq f_1(x_{1k},y_{1k},z_{1k})\leqq k^{-1} \\ -k^{-1}&\leqq f_2(x_{1k},y_{1k},z_{1k})\leqq k^{-1}. \end{aligned}$$

Für jedes $k=1, 2, \ldots$ gibt es ein Antipodenpaar $P_{1k}$, $P_{2k}$, das (26) erfüllt, $B_k$ ist also nicht leer. Diese Punkte $P_{ik}$ ($i\subseteqq 1,2$; $k=1,2,3,\ldots$) liegen alle auf der Kugelfläche! Da wegen $(k+1)^{-1}<k^{-1}$ stets $B_{k+1}\subseteqq B_k$ und damit ein Antipodenpaar aus $B_{k+1}$ auch Antipodenpaar in $B_k$ ist, darf man schlußfolgern (unter Berücksichtigung der Abgeschlossenheit der $B_k$), daß ein Antipodenpaar $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ existiert, das allen $B_k$ angehört. Dies ist aber wegen (25) nur möglich, wenn gilt

$$|f_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|=0,\ i=1,2.$$

Dieses Antipodenpaar stellt also zwei Lösungen unserer Aufgabe dar.

Wiederum wissen wir auf diese Weise nur, daß Lösungen existieren. Wir könnten aber nun an die (näherungsweise) Bestimmung einer Lösung herangehen mit der Gewißheit, daß es auch wirklich eine gibt.

Abschließend noch etwas zum Beweis des Antipodensatzes. Obwohl seine Formulierung so leicht verständlich ist, ist ein Beweis schon für die $S^1$ nicht leicht. Für die $S^1$ erkennt man, daß irgend zwei abgeschlossene nichtleere Mengen $M_1$, $M_2$, die die $S^1$ überdecken, also $S^1=M_1\cup M_2$, einen gemeinsamen Durchschnitt $D$ haben. Sie hätten nämlich sonst einen von Null verschiedenen Abstand voneinander, was dem Zusammenhang der Kreislinie widerspricht. Ist nun etwa $P_1$ in $D$, so muß der Antipodenpunkt $P_2$ zu $P_1$ in $M_1$ oder in $M_2$ liegen. Entsprechend ist dann das Paar $P_1$, $P_2$ ein Antipodenpaar in $M_1$ oder $M_2$.

Erst recht schwierig wird der Beweis für die höherdimensionalen Fälle. Eine Überdeckung der $S^2$ mit drei Mengen $M_1$, $M_2$, $M_3$ muß nämlich nicht die Eigenschaft $M_1\cap M_2\cap M_3\neq\emptyset$ haben, wie man am Ballmodell nachprüft.

*A. Göpfert und O. Lange*

# Über das Mathematik-Studium in Merseburg

Zu den Merkmalen der Stadt Merseburg zählen nicht nur die interessante Geschichte (man denke z. B. an die Merseburger Zaubersprüche) und die recht bedeutende Industrie, sondern auch die *Technische Hochschule Carl Schorlemmer**, die heute mit ihren modernen wissenschaftlichen Einrichtungen und Wohnheimen ein kleiner Stadtteil für sich ist, der schön am westlichen Stadtrand von Merseburg gelegen ist. Es geht schon aus unserem Artikel über Antipodenpunkte hervor, daß zu dieser Hochschule eine Sektion Mathematik und Rechentechnik gehört, und manchem wird es gar nicht bekannt sein, daß man an unserer *Technischen Hochschule* Mathematik studieren kann.

Die Sektion Mathematik und Rechentechnik gliedert sich in drei Wissenschaftsbereiche (Analysis, Numerische Mathematik, Stochastik/Optimierung) und ein Organisations- und Rechenzentrum. Ihre Hauptaufgaben bestehen in Forschung, Lehre und Anwendung der Mathematik auf den eben genannten Gebieten. Vielleicht ist es interessant, einiges über das Mathematikstudium in Merseburg und über die Berufsaussichten nach der Diplomverteidigung zu erfahren.

Die Ausbildung wird natürlich entsprechend dem in der DDR gültigen Studienplan für die Ausbildung eines Diplom-Mathematikers vorgenommen, wobei an unserer Hochschule in den höheren Semestern stärker Probleme der Optimierung und Steuerung im Vordergrund stehen. Diese sind moderne Gebiete der Mathematik, welche weit in die Analysis, Stochastik und numerische Mathematik hineinreichen. Sie sind interessante und aktuelle Forschungsgebiete und kommen in sehr vielen Industriezweigen und wissenschaftlichen Einrichtungen der DDR zur Anwendung. Auch die Studenten haben daran bereits aktiven Anteil. Es werden nämlich die vielen Erfahrungen und Verbindungen der Sektion Mathematik und Rechentechnik in der Zusammenarbeit mit der Praxis und mit Nachbarsektionen der Hochschule ausgenutzt, um die Studenten durch dort auftretende mathematische Probleme und kleine Forschungsaufträge zu eigener wissenschaftlicher Arbeit anzuregen. 1979 wurde z. B. ein Studentenkollektiv für die Lösung einer derartigen Aufgabe mit einem Ehrenpreis des Ministers für das Hoch- und Fachschulwesen ausgezeichnet.

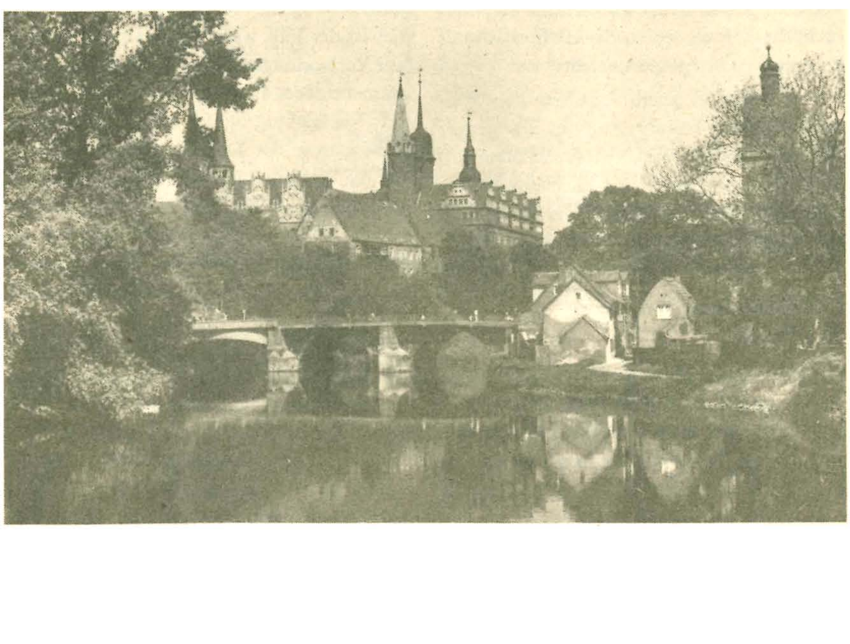
Neben Vorlesungen, Übungen und Seminaren erfolgt die Vorbereitung auf den späteren Berufseinsatz insbesondere durch ein Praktikum (im 6. Semester), durch die Diplomarbeit sowie durch Vorlesungen über Verfahrenstechnik (mathematische Grundlagen von Verfahren vieler Industriezweige). In Fachseminaren (hier stehen die Diskussionen zwischen Professoren und Studenten im Vordergrund) werden Probleme der mathematischen Modellierung technischer oder wissenschaftlicher Fragestellungen und zu anderen wichtigen mathematischen Teilgebieten behandelt.

Dadurch ergeben sich nach Beendigung des Studiums gute Startpositionen bei einer Arbeit als Diplom-Mathematiker in der Industrie oder an einer Hochschule. Die Berufsaussichten sind gut, da der Bedarf an Diplom-Mathematikern in der Industrie und an den Universitäten und Hochschulen der DDR sehr groß ist. Genügend Studienplätze stehen zur Verfügung, und mathematisch interessierte Schüler sollten sich zu den *Tagen der offenen Tür* am 11. und 12. April 1981 oder nach Anmeldung auch zu anderer Zeit selbst noch genauer informieren.

Abschließend wollen wir noch sagen, daß zwischen den FDJ-Studentengruppen und den Gewerkschaftsgruppen der Mitarbeiter unserer Sektion ein aufgeschlossenes Verhältnis besteht, das nicht nur durch fachliche Gespräche geprägt ist. So organisieren wir gemeinsame Ausflüge, sportliche Veranstaltungen und Diskussionsabende im Studenten-Club, die von der Vorstellung individueller Hobbies, über Gespräche mit Professoren, die in engem Forschungskontakt mit Kollegen aus der Sowjetunion stehen, bis hin zu Gesprächen über philosophische Probleme der Mathematik reichen. Selbstverständlich führen die Studenten in ihrem Studenten-Club, den sie selbst ausgestaltet haben, vielfältige kulturelle Veranstaltungen durch. Da zudem die Wohnheime, in denen fast alle Studenten der TH wohnen, mit den Instituts- und Hörsaalgebäuden, der modernen Mensa und den Sportstätten einen gemeinsamen Komplex bilden, kommt – wie die Erfahrung lehrte – eine anregende Studienatmosphäre zustande. *A. Göpfert und O. Lange*

* Carl Schorlemmer (1834 bis 1892) war bedeutender Chemiker und mit Marx und Engels befreundet.

Anblick des historischen Teils von Merseburg

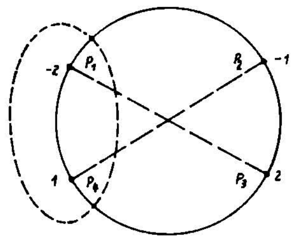


# Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. Göpfert und Dr. O. Lange

*Sektion Mathematik/Rechentechnik der Technischen Hochschule Leuna-Merseburg*

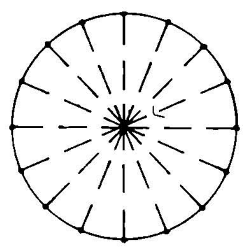
▲1993▲ Wir geben uns einen Kreis vor und legen auf diesem 4 (bzw. $4+2k$) Punkte fest, die sich paarweise gegenüberliegen sollen. Ordnen wir nun jedem Punkt eine der Zahlen $-2$, $-1$, 1, 2 zu, und zwar so, daß sich bei gegenüberliegenden Punkten (Antipodenpaaren) die Summe Null, bei benachbarten Punkten aber nicht Null als Summe ergibt, so ist die Anzahl der Paare benachbarter Punkte, denen die Zahlen 1 und $-2$ zugeordnet wurden, ungerade. Für 4 Punkte zeigt Bild 1 eine mögliche Zuordnung.

Bild 1




*Aufgabe:* Wie in Bild 2 seien 16 Punkte auf dem Kreis festgelegt (d. h. $k=6$).

Bild 2



a) Gebt zwei Möglichkeiten der Zuordnung der 4 Zahlen für die 16 Punkte an und überprüft, daß die Anzahl der Paare benachbarter Punkte mit 1 und $-2$ ungerade ist!

b) Beweist, daß diese Anzahl stets ungerade ist!

Interessierte Leser können die Lösung einsenden an:
TH Leuna-Merseburg, Sektion Mathematik-Rechentechnik, 4200 Merseburg 6. Bei richtiger Lösung erhält der Einsender *zwei* Antwortkarten für den Wettbewerb 1980/81, d. Red.

# Turnierpläne aus mathematischer Sicht

## 1. Ein praktisches Problem

Stellt euch vor, an eurer Schule soll ein Fußballturnier durchgeführt werden. Dabei mögen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Anzahl $n$ der am Turnier teilnehmenden Mannschaften ist gerade. ($n \in N$, $n \neq 0$, $n$ gerade)
- Im Verlauf des Turniers hat jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal zu spielen.

Wenn nach der Eröffnung des Turniers durch den Sportlehrer alle teilnehmenden Mannschaften gleichzeitig mit ihren Spielen beginnen sollen, so müssen wir zunächst überlegen, wieviel Sportplätze benötigt werden. Ihr findet die Lösung sicher selbst ganz leicht:
Wir haben $n$ teilnehmende Mannschaften, auf jedem Sportplatz können jeweils genau zwei Mannschaften gegeneinander spielen – wir benötigen also $\frac{n}{2}$ Sportplätze $\left(\frac{n}{2} \in N\right)$.
Für die weiteren Betrachtungen wollen wir davon ausgehen, daß $\frac{n}{2}$ Sportplätze zur Verfügung stehen.

Das Turnier soll in möglichst kurzer Zeit beendet werden. Damit entsteht die Frage nach einem Turnierplan, bei dem keine Mannschaft in irgendeiner Runde spielfrei ist. Wieviel Runden müssen wir einplanen?

Jede der $n$ Mannschaften hat gegen jede der übrigen $n-1$ Mannschaften anzutreten. Das gäbe zunächst $n \cdot (n-1)$ Begegnungen. Wenn aber eine Mannschaft $A$ die Mannschaft $B$ zum Gegner hat, so hat natürlich gleichzeitig $B$ den Gegner $A$. Unsere ermittelte Anzahl der Begegnungen ist also noch durch 2 zu dividieren. Es müssen demnach in unserem Turnier genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Spiele gespielt werden. (Wer von euch den Begriff „Kombination vom Umfang $m$ aus einer $n$-elementigen Menge" kennt, ist natürlich schneller zum Ergebnis $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ gekommen.)

In jeder Runde werden genau $\frac{n}{2}$ Spiele durchgeführt – das Turnier besteht somit aus genau $n-1$ Runden $\left(\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n-1\right)$.

Unsere Aufgabe lautet nun:
*Die Mannschaften 1, 2, ..., n sind so in ein Schema (siehe unten) einzutragen, daß*
*(1) in jeder Runde jede Mannschaft genau einmal auftritt. (Jede Mannschaft spielt in jeder Runde.)*
*(2) in zwei verschiedenen Runden keine gleichen Spiele auftreten. (Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.)*
Als gleich gelten auch Spiele

$\boxed{i \,|\, j}$ und $\boxed{j \,|\, i}$!

| | Sportplatz 1 | Sportplatz 2 | | Sportplatz $\frac{n}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. Runde | $\square\square$ | $\square\square$ | | $\square\square$ |
| 2. Runde | $\square\square$ | $\square\square$ | | $\square\square$ |
| | ... | ... | | ... |
| $(n-1)\cdot$ Runde | $\square\square$ | $\square\square$ | | $\square\square$ |

Für 4 bzw. 6 teilnehmende Mannschaften finden wir z. B. folgende mögliche Turnierpläne:

$n=4$

| | |
|---|---|
| 1 2 | 3 4 |
| 1 3 | 2 4 |
| 1 4 | 2 3 |

$n=6$

| | | |
|---|---|---|
| 1 4 | 2 3 | 5 6 |
| 1 5 | 2 4 | 3 6 |
| 1 6 | 2 5 | 3 4 |
| 1 2 | 3 5 | 4 6 |
| 1 3 | 2 6 | 4 5 |

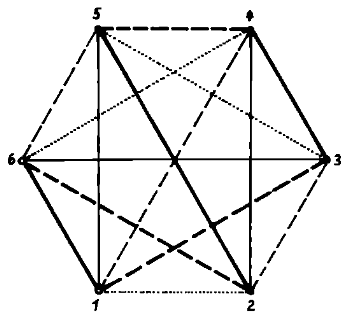
▲1▲ Sucht noch andere Pläne für $n=6$! Versucht selbst, einen Turnierplan für $n=8$ zu finden! Fragt euren Sportlehrer, wie er derartige Turnierpläne aufstellt!

Wir wollen nach einem Verfahren zum Aufstellen solcher Turnierpläne für eine gerade Anzahl $n$ teilnehmender Mannschaften suchen. Dazu erarbeiten wir im nächsten Abschnitt für die praktische Aufgabenstellung eine mathematische Formulierung.

## 2. Mathematische Formulierung des Problems

In einem regelmäßig ebenen $n$-Eck numerieren wir die Eckpunkte mit den Zahlen 1, 2, ..., $n$. Jeder Eckpunkt steht dann für genau eine an unserem Turnier beteiligten Mannschaft und jeder Mannschaft ist genau ein Eckpunkt zugeordnet. Wir zeichnen nun alle möglichen Verbindungsstrecken je zweier Eckpunkte in das $n$-Eck ein. Verbindet eine Strecke die Eckpunkte $i$ und $j$, so stellt diese Verbindungsstrecke das Spiel der Mannschaft $i$ gegen die Mannschaft $j$ dar. Nun färben wir die Verbindungsstrecke so, daß alle Spiele, die in derselben Runde ausgetragen werden, dieselbe Farbe bekommen. Zwei Spiele werden genau dann unterschiedlich gefärbt, wenn sie in verschiedenen Runden stattfinden.
Eine mögliche Färbung für unseren obigen Turnierplan für $n=6$ ist in Bild 1 angegeben.

Bild 1




▲2▲ Welche Farbe entspricht welcher Runde? Sucht selbst weitere mögliche Färbungen für $n=6$ und $n=8$!

Da die Menge der Runden eineindeutig auf die Menge der verwendeten Farben abgebildet wurde, benötigen wir zum Färben der Verbindungsstrecke genau $n-1$ paarweise verschiedene Farben. Wenn eine Färbung einen möglichen Turnierplan darstellen soll, so müssen die Bedingungen (1) und (2) der Aufgabenstellung im 1. Abschnitt erfüllt sein. Dies ist der Fall, wenn an keinem Eckpunkt zwei Verbindungsstrecken gleicher Farbe zusammenstoßen. Ein Objekt aus Eckpunkten und Verbindungslinien dieser Eckpunkte nennt man in der Mathematik einen *Graph*. Für die Verbindungslinien ist die Bezeichnung *Kante* üblich. Sind in einem Graph je zwei beliebige voneinander verschiedene Eckpunkte durch genau eine Kante verbunden, so ist der Graph vollständig (siehe auch den Artikel von Voss „Aus der Graphentheorie", alpha 6/1972, 1, 2, 4/1973). Mit diesen Begriffen kommen wir zu einer ersten mathematischen Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Die Kanten eines vollständigen Graphen mit $n$ Eckpunkten ($n$ gerade) sind mit $n-1$ paarweise verschiedenen Farben so zu färben, daß

an keinem Eckpunkt zwei Kanten gleicher Farbe zusammenstoßen.

▲3▲ Überlege, daß dann jeweils genau $\frac{n}{2}$ Kanten dieselbe Farbe enthalten!

Das „Färben" ist noch der Umgangssprache entnommen. Zur rein mathematischen Formulierung unseres Problems müssen wir noch einen Schritt weiter gehen.
Aus unserem vollständigen Graphen konstruieren wir weitere Graphen – diese werden wir *Linearfaktoren* nennen:
Die Menge der Eckpunkte eines solchen Linearfaktors stimmt mit der Eckpunktmenge des vollständigen Graphen überein. Die Menge der Kanten des Linearfaktors ist eine Teilmenge der Kantenmenge des vollständigen Graphens. Sie wird so gebildet, daß von jedem Eckpunkt des Linearfaktors genau eine Kante ausgeht.
Das Bild zeigt als Beispiel vier Linearfaktoren eines vollständigen 6punktigen Graphen an.

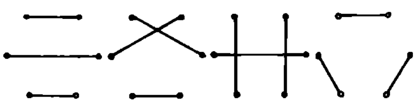


Bild 2

Wir können nun jeden Linearfaktor eines vollständigen Graphen mit $n$ Eckpunkten als eine Runde unseres Turniers für $n$ Mannschaften auffassen. Damit erhalten wir eine weitere Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Ein vollständiger Graph mit $n$ Eckpunkten ($n \in N$, $n$ gerade, $n \neq 0$) ist in $n-1$ Linearfaktoren so zu zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt.

Eine solche Zerlegung für $n=6$ stellt Bild 2 dar, wenn wir die Menge der Kanten einer Farbe mit der zugehörigen Eckpunktmenge als einen Linearfaktor ansehen.
Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen die Begriffe der verschiedenen Formulierungen unserer Aufgabenstellung noch einmal gegenübergestellt werden:

| | | |
|---|---|---|
| Mannschaft | Eckpunkt | |
| Spiel | Kante | |
| Runde | Menge der Kanten derselben Farbe mit der Menge der zugehörigen Eckpunkte | Linearfaktor |

▲4▲ Wie spiegelt sich der Begriff „Sportplatz" in der mathematischen Formulierung wider?

### 3. Ein Verfahren zum Aufstellen eines Turnierplanes

Im Jahre 1947 wurde von dem Mathematiker *W. T. Tutte* bewiesen:

*Satz:* Jeder vollständige Graph mit $n$ Eckpunkten ($n \in N$, $n$ gerade) läßt sich so in $n-1$ Linearfaktoren zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt. (Genaueres könnt ihr z. B. in *Sachs*, Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I nachlesen.)
Dieser Satz sagt aus, daß es eine Lösung für unsere Aufgabenstellung gibt. Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv geführt wird, gibt er Antwort auf die Frage, *wie* man solche $n-1$ Linearfaktoren erhalten kann:
Wir betrachten eine regelmäßige $(n-1)$-seitige Pyramide. Die Eckpunkte der Pyramide bezeichnen wir mit 1, 2, ..., $n$. Zu den schon vorhandenen Kanten fügen wir noch alle Diagonalen der Grundfläche hinzu (Bild 3 – $n=6$). Dadurch erhalten wir einen vollständigen Graphen mit den Eckpunkten 1, 2, ..., $n$.

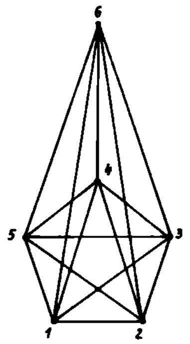


Bild 3

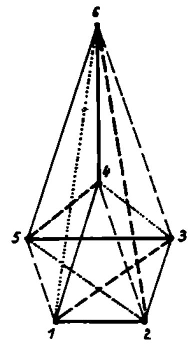


Bild 4

Wir nehmen nun eine beliebige Seite der Grundfläche der Pyramide (regelmäßiges $(n-1)$-Eck) und alle zu dieser Seite parallelen Diagonalen. Durch diese $\frac{n}{2}-1$-Strecken werden alle Eckpunkte der Grundfläche bis auf einen erfaßt. Die Menge der Kanten eines Linearfaktors besteht nun aus diesen $\frac{n}{2}-1$-Strecken und der Strecke, die den noch „freien" Eckpunkt der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet.
Durch die Wahl einer Seite der Grundfläche der Pyramide wird nach obiger Vorschrift genau ein Linearfaktor bestimmt. Es gibt $n-1$ Seiten der Grundfläche, also auch $n-1$ Linearfaktoren. Diese zerlegen den vollständigen Graphen auch wirklich, denn zu jeder Kante gibt es genau einen Linearfaktor, zu dem sie gehört.
Bild 4 zeigt eine solche Zerlegung, die den oben angegebenen Turnierplan für $n=6$ liefert.

▲5▲ Welche Farbe entspricht welcher Runde? Stellt nach diesem Verfahren selbst Spielpläne für $n=4$, $n=6$ und $n=8$ auf!
Sucht selbst andere Verfahren zum Aufstellen von Spielplänen!

*U. Feiste*

**Eine interessante Disziplin**

# Mathematische Psychologie

Vom 6. bis 12. Juli 1980 findet in Leipzig der *XXII. Internationale Weltkongreß für Psychologie* statt. Das ist ein wissenschaftliches Ereignis von überragender Bedeutung und eine große Ehre und hohe Verpflichtung für die Psychologen der gastgebenden DDR. 4000 Wissenschaftler aus etwa 50 Ländern werden daran teilnehmen.

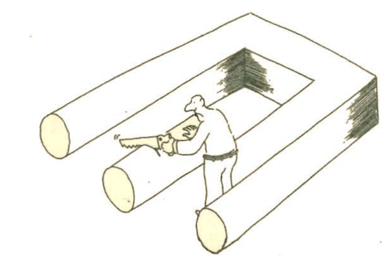
Die Psychologie (Lehre vom Erleben und Verhalten des Menschen) ist im Vergleich zur Mathematik oder zur Astronomie eine verhältnismäßig junge Wissenschaft. Vor etwa 100 Jahren richtete der an die Leipziger Universität berufene *Wilhelm Wundt* ein Laboratorium für experimentelle Psychologie ein, das erste dieser Art in der Welt. Diese Gründung hatte weitreichende Folgen. Schüler *Wundts* trugen den Gedanken, Erkenntnisse der Psychologie mit experimentellen Untersuchungen auf naturwissenschaftlicher Grundlage zu gewinnen, rund um den Erdball. Damit ging das vorwissenschaftliche Stadium der Psychologie, in welchem bloße Beschreibungen von Seelenzuständen vorherrschten, zu Ende.
Die Psychologie hat in den hundert Jahren ihres Bestehens große Fortschritte gemacht. Auch dieser Wissenschaft geht es – wie im Grunde genommen allen anderen – vorrangig um das Aufdecken von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten. Sowohl beim Auffinden als auch beim Formulieren solcher Gesetzmäßigkeiten bedient sich die Psychologie in zunehmendem Maße der Mathematik. Dabei steht sie verständlicherweise noch am Anfang, sind doch ihre Gegenstände nicht die unbelebte Materie (wie in der Physik) oder die allgemeinen Lebensprozesse (wie in der Biologie), sondern das komplizierte Wechselspiel von Wahrnehmungen, Vorstellungen, Gedanken, Gefühlen und Empfindungen im Menschen sowie das soziale Ver-

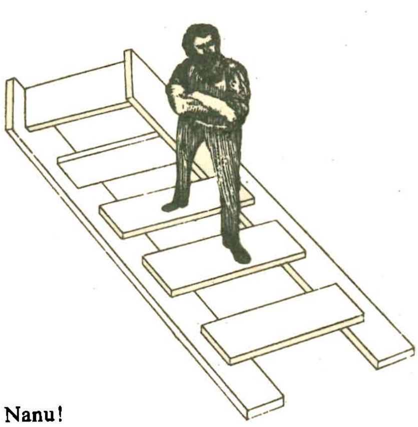
halten zwischen den Menschen (in der Schulklasse, Arbeitsbrigade oder in anderen Kollektiven). Die *Mathematische Psychologie* hat also ein weites Feld vor sich.

*Unter Mathematischer Psychologie versteht man die Gesamtheit von Anwendungen mathematischer Methoden bei der Untersuchung psychischer Prozesse.*

Von den anderen psychologischen Teilgebieten (Entwicklungs-, Persönlichkeits-, Sozialpsychologie, Pädagogische Psychologie usw.) unterscheidet sie sich daher nicht durch ihren Inhalt, sondern durch die Art der Behandlung und Formulierung psychologischer Fragestellungen. Zur Erkenntnisgewinnung hat dabei die mathematische Modellierung besondere Bedeutung. Der Grund für die Anwendung dieser Modellmethode ist vor allem durch den Forschungsgegenstand selbst bedingt, denn psychische Zustände und Prozesse sind einer unmittelbaren Untersuchung meist nicht zugänglich. In Verbindung mit der Nutzung der modernen Rechentechnik wurden z. B. Simulationsmodelle für komplexe psychische, insbesondere vom Denken beeinflußte, Vorgänge erarbeitet.

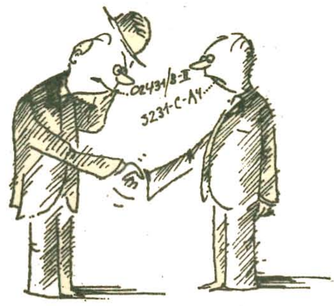
*H. Lohse und I. Kraft*





Nanu!

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen



Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 6/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■ 1800 In einer Klasse, der mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler angehören, wurde eine Klassenarbeit in Mathematik geschrieben, an der alle Schüler teilnahmen. Der 9. Teil der Anzahl der Schüler erhielt die Note 1, der 3. Teil die Note 2, der 6. Teil die Note 4; kein Schüler erhielt die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Note 3?

In Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muß ein Vielfaches von 9 und von 6, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20<n<40$ trifft dies nur zu für $n=36$. Dieser Klasse gehören somit 36 Schüler an. Angenommen, $x$ Schüler haben die Note 3 erhalten; dann gilt

$x=36-\frac{36}{9}-\frac{36}{3}-\frac{36}{6}$, also $x=14$.

Die Note 3 erhielten 14 Schüler.

Wir stellen nun die Lösung von Kerstin Kantiem aus Berlin vor, die Schülerin der Klasse 6b der 3. Oberschule „Erich Weinert“ ist.

Kerstin löste diese Aufgabe wie folgt:

Es sei $x$ die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt $20<x<40$. Es erhielten $\frac{x}{9}$ Schüler die Note 1, $\frac{x}{3}$ Schüler die Note 2, $\frac{x}{6}$ Schüler die Note 4 und $y$ Schüler die Note 3. Nun gilt $\frac{x}{9}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+y=x$, also $y=\frac{7x}{18}$. Nur wenn $x$ ein Vielfaches von 18 ist, erhalten wir für $y$ eine ganze Zahl. Wegen $20<x<40$ gilt $x=36$, also $y=14$.

Es erhielten 14 Schüler die Note 3.

Im Heft 6/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1804 Das Motorschiff „Bummi“ der Weißen Flotte in Berlin hat sechsmal soviel Innen- wie Außenplätze. Würde dieses Schiff über zwei Innenplätze und sechs Außenplätze mehr verfügen, dann wären viermal soviel Innenplätze wie Außenplätze vorhanden. Wie viele Personen finden auf diesem Schiff einen Sitzplatz?

In Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, es sind $x$ Innenplätze und $y$ Außenplätze; dann gilt $x=6y$ (1) und $x+2=4\cdot(y+6)$ bzw. $x=4y+22$ (2).

Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir $4y+22=6y$, $2y=22$, $y=11$. Daraus folgt durch Einsetzen $x=6\cdot 11=66$.

Das Schiff hat für 77 Personen Sitzplätze.

Wir stellen nun die Lösung von Ines Weiche aus Pinnow vor, die Schülerin der Oberschule Bärenklau, Klasse 7b, ist. Ines löste diese Aufgabe unter Verwendung von nur einer Variablen wie folgt:

Angenommen, das Schiff hat $x$ Außenplätze; dann hat es $6x$ Innenplätze. Nun gilt

$$\begin{aligned} 6x+2&=4\cdot(x+6),\\ 6x+2&=4x+24,\\ 2x&=22,\\ x&=11. \end{aligned}$$

Das Schiff hat 11 Außenplätze, $6\cdot 11=66$ Innenplätze. Auf diesem Schiff erhalten 77 Personen einen Platz.

Wir stellen nun die Lösung von Marion Gonschorreck aus Dingelstädt vor. Marion ist Schülerin der Klasse 4 der Makarenko-Oberschule II. Mit Hilfe einer Tabelle löste sie diese Aufgabe wie folgt:

Es sei $n$ die Anzahl der Außenplätze, also $6\cdot n$ die Anzahl der Innenplätze. Ich stelle folgende Tabelle auf:

| $n$ | $6n$ | $n+6$ | $6\cdot n+2$ | $4\cdot(n+6)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 7 | 8 | 28 |
| 2 | 12 | 8 | 14 | 32 |
| 5 | 30 | 11 | 32 | 44 |
| 9 | 54 | 15 | 56 | 60 |
| 10 | 60 | 16 | 62 | 64 |
| 11 | 66 | 17 | 68 | 68 |
| 12 | 72 | 18 | 74 | 72 |

Nur für $n=11$ gilt $6\cdot n+2=4\cdot(n+6)$.

Das Schiff hat 11 Außen- und 66 Innenplätze, also insgesamt 77 Sitzplätze.


# Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken

1. Auf einem karierten Papier mit quadratischen Karos markieren wir Figuren, die sich aus 5 einzelnen untereinander zusammenhängenden Quadraten bilden lassen. Es entstehen die in Bild 1 dargestellten Möglichkeiten für die verschiedenen nichtkongruenten Fälle. Durch Anhängen eines weiteren Karos kann man sich alle denkbaren 6-Zeller aus quadratischen Zellen aufbauen. Kannst du alle Fälle herausfinden? Dabei muß man beachten, daß aus verschiedenen 5-Zellern durchaus gleiche, d. h. kongruente, 6-Zeller entstehen können. Bild 2 zeigt dazu drei solcher Möglichkeiten. Die zum 5-Zeller hinzugenommenen Quadrate sind schraffiert gezeichnet.

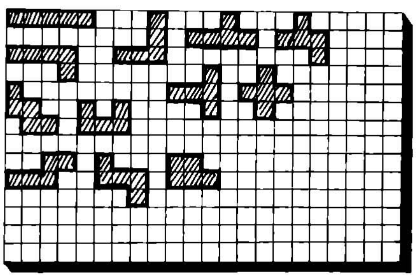


Bild 1

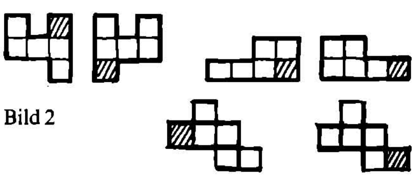


Bild 2

Unter den 6-Zellern sind welche dabei, die zu lustigen Zeichnungen dienen können. Wir geben in Bild 3 einige Beispiele.
Welche Vorschläge fallen dir noch ein?

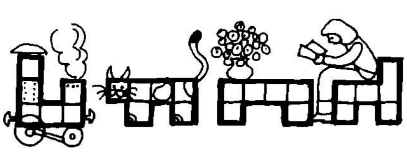


Bild 3

2. Man kann mit den 6-Zellern auch ein 2-Personenspiel spielen. Dazu grenze man sich vorher ein quadratisches oder rechteckiges Feld auf einem karierten Blatt ab. Die Seitenlängen wähle man beliebig aus. Um das Spiel nicht zu lange andauern zu lassen, schränke man sich etwa zunächst auf ein Spielfeld von $10 \times 10$ oder ähnlich ein. Es werden nun abwechselnd von den Spielern I und II Felder markiert, so daß nach je 3 *Zügen* von beiden Spielern ein 6-Zeller entstanden ist. Die markierten Karos müssen dabei stets längs einer Quadratseite mit schon markierten zusammenstoßen. Das Spiel wird fortgeführt. Die entstehenden 6-Zeller sollen alle nichtkongruent sein und sie sollen sich gegenseitig nicht berühren. Der Spieler, dem erstmalig keine Fortsetzung in der vorgeschriebenen Weise gelingt, hat verloren. Bild 4a zeigt ein Spielprotokoll. Hiernach hätte I verloren, da er keinen neuen 6-Zeller mehr beginnen kann. Wäre es jedoch im Protokoll 4b für Spieler I möglich, so zu ziehen, daß er gewinnt?

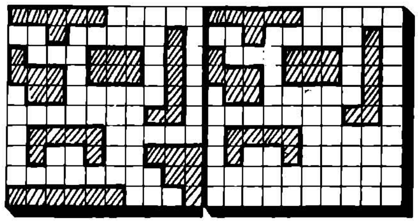


Bild 4a Bild 4b

3. Aus den 6-Zellern sollen durch Falten und Verkleben räumliche Gebilde hergestellt werden. Das Falten geschehe nur längs einer Quadratseite, ebenso erfolge das (gedachte) Verkleben nur längs zweier Quadratseiten. Was kann alles entstehen? Es sind jedenfalls Würfel möglich. Die 6-Zeller, die zu Würfeln verklebt werden können, heißen Würfelnetze. Es gibt 11 verschiedene! Ermittle sie!

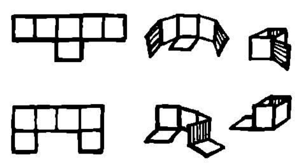


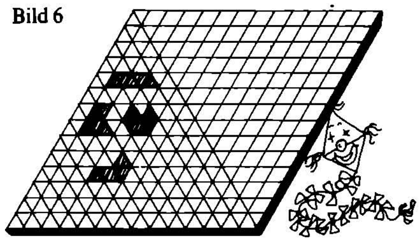
Bild 5

Bild 5 zeigt zwei Verklebungsmodelle von 6-Zellern, die keine Würfelnetze sind. Es ist im ersten Fall eine eckige *Tasse* entstanden, während es im zweiten Falle eine eckige *Schöpfkelle* ist. Welche 6-Zeller liefern noch alle das Klebemodell einer *Tasse* und welche das einer *Schöpfkelle*?

4. Entsprechend zu den Figuren aus Quadraten kombinieren wir nun gleichseitige Dreiecke zu Mehrzellern. Man muß sich zuerst eine Dreiecksfelderung herstellen. Hierzu konstruiert man sich mit Zirkel und Lineal ein großes Parallelogramm aus zwei gleichseitigen Dreiecken und teilt darauf die Seiten in 10 oder mehr gleiche Teile. Durch Ziehen entsprechender Verbindungslinien bekommt man die gewünschte Felderung aus Dreieckszellen. Von den 5-Zellern gibt es jetzt nur vier verschiedene Typen. Bild 6 enthält sie. Von den 6-Zellern sind jetzt 12 nichtkongruente möglich. Finde diese durch Anhängen einer weiteren Dreieckszelle, wenn du von den 5-Zellern ausgehst! Einige phantasievolle Zeichnungen mit 6-Zellern und 7-Zellern zeigt Bild 7. Welche fallen dir noch ein? Bild 8 bringt ein Beispiel für ein räumliches Klebemodell aus zwei verschiedenen Dreiecks-5-Zellern. Es ist eine spitze Tüte mit einer Lasche entstanden. Behandle eine gleichartige Aufgabe wie bei den Quadrat-Zellern!

*J. Flachsmeyer*

Bild 6



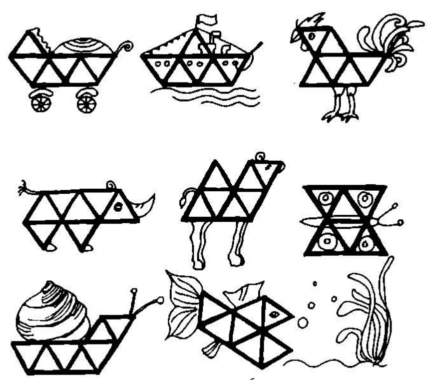


Bild 7

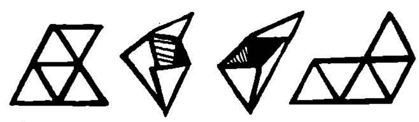
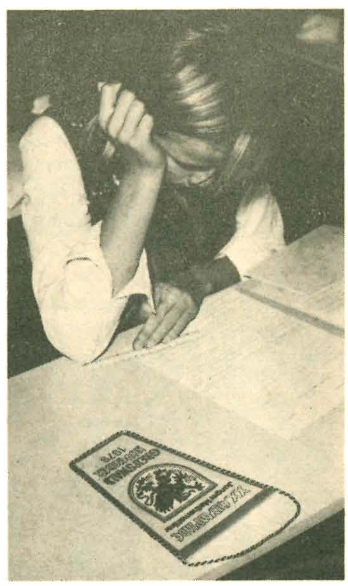


Bild 8



Alle Teilnehmer an der 20. OJM der Stadt Greifswald erhielten einen Ehrenwimpel (siehe unseren Beitrag S. 66/67, d. Red.)

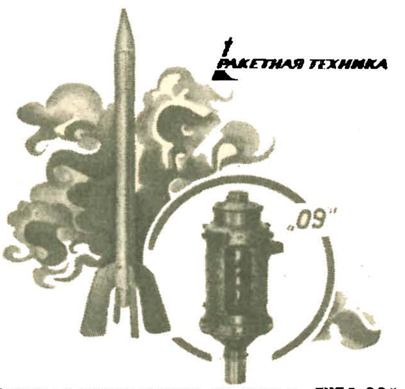
# Helft dem Kosmonauten!

Vor einiger Zeit bekamen wir einen Brief aus Moskau.
Die Komsomolzin *Natascha Shurkowa*, Studentin am Technikum, hatte sich eine Aufgabe ausgedacht, die sie den Lesern unserer Zeitschrift gern stellen möchte. –

Für die aktive Bewegung im schwerelosen Raum gibt es mehrere Möglichkeiten. Am bekanntesten ist uns allen die Bewegung unter Ausnutzung des Rückstoßes, das Prinzip des Raketenantriebs. Es hat den Schritt des Menschen in den Kosmos überhaupt erst möglich gemacht und wurde zu diesem Zweck von dem russischen Gelehrten *Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski* theoretisch ausgearbeitet. Das Rückstoßprinzip findet seine Verwirklichung in Fest- und Flüssigstoffraketen, in ferner Zukunft vielleicht auch eines Tages in Photonentriebwerken. Für Bewegungen im Orbit selbst, wie sie beim Bau und Betrieb von Orbitalstationen vorkommen, kann man sich noch weitere Möglichkeiten denken, nämlich

- die Bewegung unter Ausnutzung des Sonnenlichtes, mit *Sonnensegel*,
- Bewegung infolge der Gravitationskraft zwischen allen Massen und
- die Bewegung unter Ausnutzung elektrischer oder magnetischer Feldkräfte.

Und nun stellt euch einmal die folgende Situation vor:
Auf einer Umlaufbahn um die Erde wird eine Orbitalstation montiert. Die Monteure – Kosmonauten in ihren schweren Raumanzügen – bewegen sich in unmittelbarer Nähe der Station, indem sie sich mit den Händen an überall vorhandenen Griffen oder Kanten festhalten oder sich an dem Seil wieder heranziehen, das sie mit der Station verbindet. Plötzlich löst sich aus irgendeinem Grunde die Halterung des Seils eines Monteurs, der damit beschäftigt ist, mit einem elektromagnetischen Pickhammer Niete zu setzen. (Ein solches Gerät ist eine kleine Ausgabe der mit Preßluft betriebenen Pickhämmer, wie sie beim Straßenbau oder im Bergwerk verwendet werden.) Zum Glück hatte er sich zuvor nur ganz leicht abgestoßen, so daß er jetzt in einiger Entfernung von der Station im freien Raum schwebt und sich nur ganz langsam weiter von ihr entfernt. Die anderen können keine rasche Hilfe bringen, sie können aber über Funk mit dem Verunglückten sprechen, ihm Mut machen und mit Ratschlägen versuchen, ihm in seiner mißlichen Lage beizustehen. Alle überlegen angestrengt. – Endlich hat einer eine Idee. „Du hast doch deinen Pickhammer! Der funktioniert doch noch. Er wird dich zu uns zurückbringen, wenn du es richtig anstellst!“



Первая советская жидкостная ракета „ГИРД-09“ (двигатель „09“). Запущена 17 августа 1933 г.

Nun, liebe Knobelfreunde, denkt einmal mit und versucht, dem verunglückten Kosmonauten zu helfen! Kann er tatsächlich den Pickhammer in seiner Hand dazu benutzen, zur Station zurückzukommen, und wie muß er es anstellen?
Da es uns nur auf das „Wie“ ankommt und wir keine genaueren Berechnungen der Rückkehrzeit und -geschwindigkeit durchführen wollen, können wir bei unseren Überlegungen von einem Gerät ausgehen, das nur die unbedingt notwendigen Konstruktionselemente des wirklichen Pickhammers enthält. Wir „idealisieren“ also und führen ein „Gedankenexperiment“ aus.
Die Wirkung eines Pickhammers beruht auf dem Zusammenspiel dreier Massen:
– Dem Gehäuse, welches die Form eines beiderseits geschlossenen Rohres hat, und das der Kosmonaut fest in seinen Händen hält, mit einer Gesamtmasse $M$,
– den beiden gleichgroßen Massen $\left(\frac{m}{2}\right)$ des insgesamt im Rohr beweglichen Gleiters. Er hat die Form einer Hantel, bei der die beiden Massen im Abstand $S^x$ voneinander durch eine Klemmeinrichtung festgehalten werden, bei einem Stoß aber entlang der Hantelstange aufeinander zu gleiten können (Bild 1).

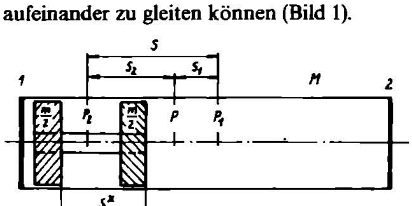


Bild 1

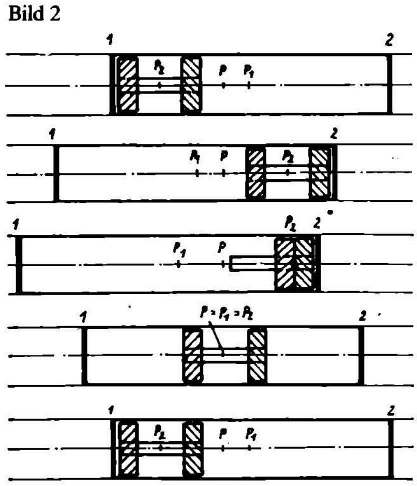
*Wie arbeitet eigentlich ein solcher Pickhammer?*

Wir beginnen unsere Beobachtungen in dem Moment, wo sich die beiden Halbmassen $\frac{m}{2}$ im Abstand $S^x$ voneinander am linken Ende des Körpers befinden. (Beschreibung und Lösung des Problems verwenden zwar die in Bild 1 dargestellte Vorstellung von der Form des Gerätes, fassen die Massen aber dann als punktförmig auf, wie das in der Mechanik üblich ist, da wir sonst nicht ohne Verwendung von höherer Mathematik auskommen könnten!) Durch eine Antriebskraft (Preßluft oder elektromagnetische Kräfte) werden beide Halbmassen in diesem festen Abstand in Richtung auf das andere Ende „2“ hin beschleunigt und stoßen dort nach einer gewissen Zeit $t$ wie eine Masse $m$ mit dem Gehäuse der Masse $M$ zusammen. Durch den Aufprall wird gleichzeitig eine Sperre gelöst, so daß die linke Halbmasse nun auch noch um die Strecke $S^x$ nach rechts gleiten kann, um nach einer kurzen Zeit $t'$ aufzuprallen. Der Stoß wird reflektiert und die Halbmasse läuft wieder nach links, wird im Abstand $S^x$ wieder mit der zweiten Halbmasse gekoppelt und nun gleiten beide gemeinsam zum linken Ende „1“, wo das Spiel von neuem beginnt.
(Im Bild bedeuten:
$P$, $P_1$ und $P_2$ – die Schwerpunkte des Gesamtsystems, des Hammerkörpers und des bewegten Innenteils,
$S$, $S_1$ und $S_2$ – die Abstände der Schwerpunkte.
Das Bild ist nur eine *Momentaufnahme*, alle Größen außer der Gesamtlänge des Körpers und den beteiligten Massen hängen von der Zeit ab!)

*Problemdiskussion:*

(1) Würden keine inneren Kräfte wirken und gäbe es keine Reibung, dann wären die Stöße an den beiden Enden „1“ und „2“ allesamt vollkommen elastisch und der Gleiter würde mit einer einmal gegebenen Geschwindigkeit von „1“ nach „2“ laufen, die erste Halbmasse würde dort auftreffen und reflektiert werden. Inzwischen würde die zweite entlang der Hantelstange auf sie zugleiten und beim Zusammentreffen ebenfalls reflektiert und im Abstand $S^x$ arretiert werden und der Gleiter liefe nach „1“ zurück, wo sich das gleiche Spiel

Bild 2



wiederholte. Trotz dieser recht komplizierten Bewegungsfolge im Inneren würde der Gesamtschwerpunkt ortsfest bleiben, das Gerät würde also im Takt der inneren Bewegung um den Schwerpunkt hin- und herschwingen (Bild 2)!

(2) In einem Pickhammer ist das aber anders! Der Stoß des Gleiters im Punkte „2“ ist unelastisch, d. h., die Bewegung wird abgebremst, die kinetische Energie leistet Arbeit und wird nach außen abgegeben. Im Punkte „1“ erhält er in jedem Takt durch eine innere Kraft (Preßluft, Explosion, elektromagnetische Kraft, ...) einen Impuls nach rechts. Der Stoß der beiden Halbmassen kann als elastischer Stoß angesehen werden. (Die Darstellung ist vereinfacht!)

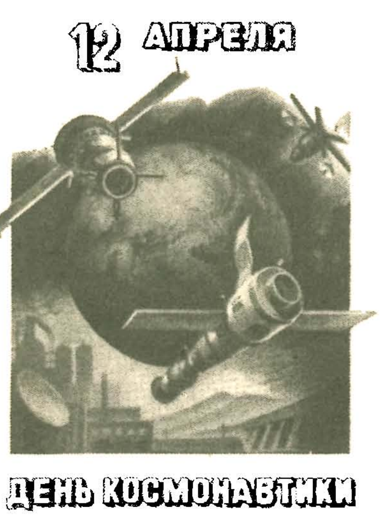
Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, die der Gleiter in „1“ bekommt, mit $v$, so ist der Impuls $mv$. Nach dem Reaktionsprinzip erhält das Gehäuse den gleichen Impuls nach links. Seine Geschwindigkeit $V$ ergibt sich dann aus der Impulsgleichheit

$$MV = mv. \qquad (1)$$

Da $m$ sicher kleiner als $M$ ist, ist die Geschwindigkeit des Gleiters wesentlich größer als die des Gehäuses. Beim Auftreffen der ersten Halbmasse auf die Gehäusewand bei „2“ wird die Geschwindigkeit abgebremst. $M$ und $\frac{m}{2}$ zusammen haben danach nur noch die Geschwindigkeit $v'$ nach links, die sich wiederum aus der Gleichheit der Impulse berechnet:

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)v' = MV - \frac{m}{2}v = MV - \frac{M}{2}V = \frac{M}{2}V. \qquad (2)$$

Die zweite Halbmasse des Gleiters stößt *elastisch* auf die viel größere Masse $\left(M+\frac{m}{2}\right)$, ihre Geschwindigkeit wird in der Richtung lediglich umgekehrt und sie gleitet wieder nach links und überträgt ihren Impuls $\frac{m}{2} \cdot v$ nach Durchlaufen der Strecke $S^x$ auf den ganzen Gleiter, der nun mit der Geschwindigkeit $v''$ von der Wand „2“ weg nach links läuft.




Es gilt offensichtlich

$$v'' = v' + \hat{v}, \qquad (3)$$

mit $$m\hat{v} = \frac{mv}{2}. \qquad (4)$$

Setzen wir (2) und (4) in (3) ein, dann erhalten wir

$$v'' = \frac{MV}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M+\frac{m}{2}}\right) \qquad (5)$$

Wenn der Gleiter bei „1“ eintrifft, hat er gegenüber der Gehäusewand die Relativgeschwindigkeit $\hat{v}$ und überträgt durch elastischen Stoß den Impuls $\frac{m}{2} \cdot \hat{v}$ auf das Gehäuse. Dieser Impuls beträgt nach (1) $\frac{MV}{4}$. Da das Gehäuse nach (2) ohnehin noch die Geschwindigkeit $v' = \frac{M}{2M+m} \cdot V$ hatte, hat es also am Ende eines Arbeitstaktes noch eine Restgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{V}{4} + \frac{M}{2M+m} \cdot V = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2+\frac{m}{M}}\right)V,$$

die für $m \leqq M$ größer als $\frac{7}{12}$ der durch die innere Kraft verursachten Anfangsgeschwindigkeit ist.

(3) Die Antwort lautet also:

Der Pickhammer und mit ihm der Kosmonaut erfährt bei jedem Arbeitstakt einen Impuls in Richtung der Geräteachse des Pickhammers zur Seite des Arbeitspunktes „1“ hin.

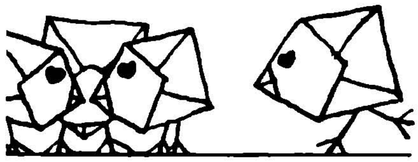
Der Kosmonaut kann sich also mit seinem Arbeitsgerät selbst zur Raumstation zurückmanövrieren!

*Eine notwendige Nachbemerkung*

Die Komsomolzin *Natascha Shurkowa* hat sich diese Aufgabe eigentlich nicht selbst ausgedacht. Sie schrieb uns, daß ihr Vater das Problem untersucht hat, als er vor vielen Jahren selbst im Bergwerk mit einem Preßluft-Pickhammer arbeiten mußte. Ihn hatte die Frage beschäftigt, ob man sich den schweren Umgang mit diesem Gerät bei geschickter Handhabung etwas erleichtern kann! Seine Lösung verwendete die wirklichen Gegebenheiten etwas stärker und enthielt die Verwendung der Integralrechnung. *N. S.* ist ein echtes Kind unserer Zeit und hat das Problem in den Kosmos verlagert; sie liebt aber auch Kinder sehr und hat desbalb versucht, die Aufgabe so einfach zu machen, daß die Lösung mit den Mitteln der Schule ermöglicht wird.

Es wäre schön, wenn ihr die hier nur skizzierte Diskussion einmal in allen Einzelheiten durchführen würdet – das schult das physikalische Denkvermögen.

Wir danken Herrn Dr. R. Hofmann für die Übersetzung des Briefes und seine Umsetzung zu diesem Artikel, d. Red.



# Leserbriefe

- Anbei 15 Antwortkarten und die Urkunde der letzten vier Jahre. Die Arbeit mit der *alpha* macht mir Spaß. In der AG Mathematik, Klasse 4, die ich leite, hilft mir die *alpha* sehr. *Pia Zimmermann, Bleicherode*

- Seit fünf Jahren löse ich die *alpha*-Aufgaben. Sie sind immer sehr interessant und haben mir besonders bei der Entwicklung meines mathematisch-logischen Denkens geholfen. Das macht sich auch im Mathematikunterricht bemerkbar. Im letzten Schuljahr erwarb ich 51 Antwortkarten. Ich habe nun die 8. Klasse an der OS beendet und besuche nun die EOS in Lichtenstein.
*Angela Illing, Gersdorf (Kl. 9)*

- Uns Schülern bereitet die *alpha*, besonders der Wettbewerb, viel Freude, da sie nicht nur zusätzliches Wissen vermittelt, sondern weil sie durch ihre Vielfalt anregt, sich mehr mit der Mathematik zu befassen.
*Karin Lewdon, Lauscha*

- Mathematik ist für mich Hobby, das mir manche Freude bereitet in meiner nun schon vier Jahre währenden „Verbannung“ an Bett und Wohnung aus gesundheitlichen Gründen. Deshalb sind mir besonders die Aufgaben des Wettbewerbs Ablenkung und Anregung. *Rentner M. Pohl, Leipzig (75 Jahre), begeisterter „Esperantist“*

- *alpha* ist wertvoll in dem Sinne, daß sie die Möglichkeit gibt, sein Wissen außerhalb des Unterrichts zu vervollkommnen. Ich bin z. Z. Schüler einer 12. Klasse und habe den Wunsch, Mathematiker zu werden. Deshalb ist mir die *alpha* eine willkommene Bildungsmöglichkeit... Negativ finde ich, daß die Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb erst ziemlich spät erscheinen.
*Rainer Werner, Ruppertsgrün (Kl. 12)*

- Die Lösung der Aufgaben hat mir nicht nur Freude bereitet, sondern vor allem gezeigt, daß mein mathematisches Wissen noch vielfach einer Festigung bedarf, um die ich mich bemühen muß. Die *alpha* hilft mir dabei in angenehmer Weise.
*Georg Lang, Burg-Spreewald (Kl. 8)*

- Seit 1976 bist Du mein treuer Begleiter. Dies hat sich in meinen Kenntnissen in Ma, Ph und Ch bereits mit Erfolgen in der Schule bis zur Stadtbezirksolympiade, abgesehen von einer interessanten Freizeitbeschäftigung, ausgezahlt.
*Lutz Schuppenhauer, Dresden*

● Anlaß für meine sechsjährige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb war mein Sohn Henri, der seit der 5. Klasse ständig die Aufgaben auf den Gebieten Mathematik, Physik und speziell Chemie löst und so eine solide Basis in allen Fächern erarbeitete. Lohn waren etliche Preise in allen Fächern bei Kreisolympiaden und sehr gute Noten beim Abschluß der einzelnen Schuljahre. Nun beginnt er seine EOS-Ausbildung. Wir beide werden auch weiterhin am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen. *Dieter Koch, Arnstadt (42 Jahre)*

● Mit viel Freude gehe ich immer an die Lösung der Wettbewerbsaufgaben. Ich muß allerdings bekennen, daß sie mir meistens recht schwer fallen und ich oft wochenlang daran herumknobele. Um so größer ist dann die Freude, wenn die Lösung richtig war, wenn auch mein Lösungsweg wahrscheinlich umständlicher ist als der eines Wissenschaftlers. *Edith Löffler, Königshain*

● Anbei meine Antwortkarten. Ich bin jetzt 22 Jahre, seit zwei Jahren Verkehrsstudent und beschäftige mich schon viele Jahre mit der Mathe. Die *alpha* hat mich stets dabei unterstützt. Nicht zuletzt dadurch konnte ich als Schüler an den Olympiaden aller Stufen mit Erfolg teilnehmen und im Jahre 1979 als Höhepunkt einen ersten Preis bei der *DDR-Mathematikolympiade der Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen* erringen... Anbei eine Aufgabe für den *alpha*-Wettbewerb aus meiner Studienrichtung. *Student Matthias Bär, Freital*

● Anbei meine Antwortkarten und eine Aufgabe, die Ihr vielleicht in Klasse 5 oder 6 stellen könnt. Es ist mein erster derartiger Versuch. Die *alpha* ist eigentlich toll; es könnten vielleicht mehr *Lustige Logeleien* veröffentlicht werden.
*Marlis Schröder, Brandenburg (Kl. 8)*

● Vielen Dank, daß Sie unseren Artikel veröffentlichten. Ich möchte bemerken, daß Ihre Zeitschrift bei unseren *Jungen Mathematikern* sehr populär ist. Ehrlich gesagt, wenn ich selbst das Material Ihrer Zeitschrift durchsehe, erinnere ich mich eines Ausspruchs *David Hilberts* (1900 auf dem Internat. Mathematikerkongreß in Paris): „Das mathematische Problem muß überdies so schwierig sein, um uns zu fesseln und gleichzeitig so gemeinverständlich, um unsere Bemühungen nicht hoffnungslos zu machen. Es muß wegweisendes Zeichen auf gewundenen Pfaden sein, das zu verborgenen Wahrheiten führt und uns am Ende mit Freude über die gefundene Lösung belohnt."
Diese Aussage wird deutlicher, wenn wir Gelehrten die *Jungen Mathematiker* in ihrem Rahmen betrachten.
*Prof. Dr. Jeganjan, Jerewan*

# Konvexe und konkave Funktionen

Für das geometrische und das arithmetische Mittel zweier beliebiger nichtnegativer reeller Zahlen $y_1$ und $y_2$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{y_1 \cdot y_2} \leqq \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \qquad (1)$$

*Beweis:* Es ist offensichtlich $(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})^2 \geqq 0$, d. h. $y_1 + y_2 - 2\sqrt{y_1 y_2} \geqq 0$. Daraus folgt $y_1 + y_2 \geqq 2\sqrt{y_1 y_2}$ und schließlich $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \geqq \sqrt{y_1 y_2}$, w. z. b. w.

▲1▲ Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (1) die Gleichheit eintritt!

Für jede reelle Zahl $a > 0$ und beliebige reelle Zahlen $x_1$ und $x_2$ sind die Zahlen $a^{x_1}$ und $a^{x_2}$ positiv. Setzen wir nun in (1) $y_1 = a^{x_1}$ und $y_2 = a^{x_2}$, so ergibt sich $\sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} \leqq \frac{1}{2}(a^{x_1} + a^{x_2})$.

Mit der Umformung $\sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} = \sqrt{a^{x_1 + x_2}} = a^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$ erhalten wir aus (1) die Ungleichung

$$a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \leqq \frac{1}{2}(a^{x_1} + a^{x_2}). \qquad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (2) trifft genau dann zu (d. h., $a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{1}{2}(a^{x_1} + a^{x_2})$ ist eine wahre Aussage), wenn $a^{x_1} = a^{x_2}$ ist (vgl. Lösung ▲1▲). Da die Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ für $a \neq 1$ *streng* monoton wächst bzw. fällt, ist dies genau dann der Fall, wenn $x_1 = x_2$ ist. (Für $a = 1$ gilt $a^{x_1} = a^{x_2}$ für alle $x_1$ und $x_2$.)

Gibt es nun außer der Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ noch weitere Funktionen $f$, für die die Ungleichung

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ gilt?}$$

*Definition:* Eine Funktion $f$ heißt *konvex im Intervall I*, wenn für beliebige Zahlen $x_1$, $x_2 \in I$ die Ungleichung (3) erfüllt ist:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (3)$$

Sie heißt konkav in $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (3')$$

Dabei soll die Funktion $f$ *streng* konvex (konkav) heißen, wenn die Gleichheit in (3) (bzw. (3')) genau dann eintritt, wenn $x_1 = x_2$ ist.

Gelten (3) (bzw. (3')) für alle Elemente $x_1$, $x_2$ des *Definitionsbereichs* von $f$, dann heißt die Funktion $f$ *konvex* (bzw. konkav).

**Beispiel 1:**

Wir untersuchen die Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$ mit der Menge der reellen Zahlen als Definitionsbereich (Bild 1).

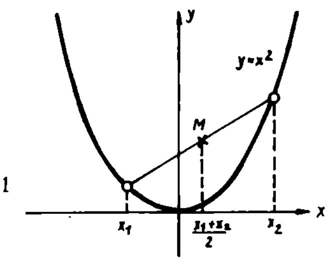



Bild 1

Sie ist streng konvex, wenn (4) für alle $x_1$, $x_2 \in P$ erfüllt ist und wenn die Gleichheit nur für $x_1 = x_2$ eintritt:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \qquad (4)$$

Diese Bedingung ist sicher dann erfüllt, wenn die Beziehung

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geqq 0$$

richtig ist.

Wir formen die linke Seite dieser Ungleichung um:

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{4} - \frac{2x_1x_2}{4} - \frac{x_2^2}{4}$$
$$= \frac{x_1^2}{4} - \frac{2x_1x_2}{4} + \frac{x_2^2}{4} = \frac{1}{4}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} = T$$

Offensichtlich gilt für alle $x_1$, $x_2 \in P$ $T \geqq 0$ und $T$ ist genau dann gleich Null, wenn $x_1 = x_2$ ist.

Damit ist bewiesen, daß die Funktion $f$ mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$ streng konvex ist.

**Beispiel 2:**

Es soll untersucht werden, ob die Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $I = \{x \in P \mid -\infty < x < 0\}$ streng konkav ist (siehe Bild 2). Dies ist nach (3') dann erfüllt, wenn die Beziehung

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqq 0$$

für alle $x_1$, $x_2 \in I$ gilt.

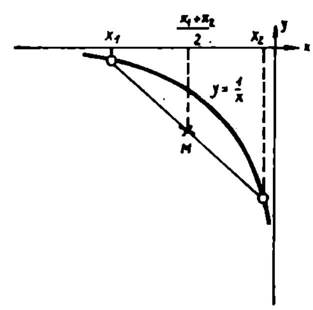



Bild 2

Aus $\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$

$$=\frac{2}{x_1+x_2}-\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2x_2}=T$$

erhalten wir nach weiteren Umformungen

$$T=\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(-x_1-x_2)}.$$

Offensichtlich gilt für das betrachtete Intervall (d.h. $-x_1>0$, $-x_2>0$) $T>0$ für $x_1 \neq x_2$ und $T=0$ für $x_1=x_2$. Die Funktion $f$ mit $f(x) =\frac{1}{x}$ ist also im betrachteten Intervall streng konkav.

Nach diesen Beispielen wollen wir die gewonnenen Erkenntnisse etwas allgemeiner betrachten. Es sei $y=f(x)$ die Gleichung einer reellen Funktion $f$, und wir wählen aus dem Definitionsbereich von $f$ zwei voneinander verschiedene Elemente $x_1$ und $x_2$; dann liegen die Punkte $P_1$ $(x_1;f(x_1))$ und $P_2$ $(x_2;f(x_2))$ auf dem Bild der Funktion mit der Gleichung $y=f(x)$. Zu den beiden Punkten $P_1$ und $P_2$ bilden wir ferner die Strecke $\overline{P_1P_2}$ (siehe Bild 3a, 3b). Der Mittelpunkt dieser Strecke ist

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Bild 3a

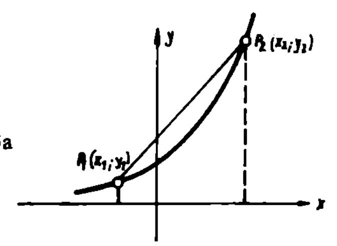
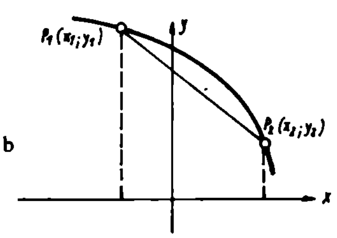



Bild 3b




Die Funktion $f$ ist konvex (konkav), wenn zu zwei beliebigen Elementen $x_1$ und $x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ aus dem Definitionsbereich von $f$ der zugehörige Punkt $M$ oberhalb (unterhalb) des Funktionsbildes von $f$ liegt. Die Forderung, daß *alle* (inneren) Punkte einer Strecke, deren Endpunkte auf dem Bild der Funktion $f$ liegen, oberhalb (unterhalb) des Funktionsbildes liegen, ist gleichwertig mit der Konvexität (Konkavität) von $f$.

*Satz:* Eine im Intervall $I$ stetige[1]) Funktion $f$ mit der Gleichung $y=f(x)$ ist in $I$ genau dann konvex (bzw. konkav), wenn für beliebige Elemente $x_1$, $x_2 \in I$ und für jede Zahl $t \in P$ $(0<t<1)$ die Bedingung (5) (bzw. (5')) erfüllt ist:

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \quad (5)$$

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \geqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \quad (5')$$

*Beweis:* (Für den Fall der Konvexität)

(1) Wir schließen aus der Konvexität von $f$ auf das Bestehen der Beziehung (5). Diesen Beweis führen wir *indirekt*, d.h., wir folgern aus der Annahme, daß (5) nicht für alle $x_1$, $x_2$, $t$ $(0<t<1)$ erfüllt ist, einen Widerspruch zur vorausgesetzten Konvexität von $f$. Ist (5) für alle $x_1$, $x_2$, $t$ erfüllt, so gibt es Elemente $x_1$, $x_2 \in I$ und $t \in P$ mit $0<t<1$, so daß $f(tx_1+(1-t)x_2)>tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$. Geometrisch bedeutet dies, daß es im Bild von $f$ einen Punkt $P^*$ gibt, der oberhalb einer Sehne $\overline{P_1P_2}$ des Funktionsbildes liegt. Dann müßte der Graph von $f$ die Sehne $\overline{P_1P_2}$ wegen der Stetigkeit von $f$ an mindestens zwei Stellen $P_1'$ und $P_2'$ schneiden. Man wähle nun $P_1'$ und $P_2'$ so, daß *auf dem Graph von f*

a) $P^*$ zwischen $P_1'$ und $P_2'$ liegt und

b) zwischen $P_1'$ und $P_2'$ keine weiteren Schnittpunkte des Graphen von $f$ mit der Sehne $\overline{P_1P_2}$ liegen.

Dann läge der Mittelpunkt $M'$ von $\overline{P_1'P_2'}$ unterhalb des Graphen von $f$ – im Widerspruch zur Definition der Konvexität von $f$ (siehe Bild 4).

(2) Wenn (5) für alle $t \in P$ mit $0<t<1$ gilt, so auch speziell für $t=\frac{1}{2}$. (5) geht dann über in (3), w.z.b.w.

**Beispiel 3:**

Für jede positive reelle Zahl $a$ ist die Funktion mit der Gleichung $y=ax^2$ $(x \in P)$ in ihrem Definitionsbereich streng konvex. Um dies nachzuweisen, muß die Ungleichung

$a(tx_1+(1-t)x_2)^2<tax_1^2+(1-t)ax_2^2$

für alle $x_1$, $x_2 \in P$ $(x_1 \neq x_2)$ und alle $t$ mit $0<t<1$ erfüllt sein. Dazu bilden wir wieder die Differenz

$(tax_1^2+(1-t)ax_2^2)-a(tx_1+(1-t)x_2)^2$;

nach Umformen erhalten wir daraus

$at(1-t)(x_1-x_2)^2=T$.

Für alle $x_1$, $x_2$, $t$ mit den genannten Eigenschaften ist $T>0$.

Die im Satz genannten Bedingungen gestatten es, mit elementaren Mitteln die Konvexität bzw. Konkavität einer reellen (stetigen) Funktion für ein bestimmtes Intervall aus ihrem Definitionsbereich festzustellen. So kann z.B. für einen Punkt $P_1$ $(x_1;y_1)$, der zum Bild einer reellen (stetigen) Funktion $f$ mit der Gleichung $y=f(x)$ gehört, festgestellt werden, ob die Funktion $f$ in einer geeignet gewählten Umgebung von $x_1$ konvex oder konkav ist. Dies ermöglicht uns zu entscheiden, ob an einem relativen Extrempunkt einer Funktion ein Maximum oder ein Minimum der Funktion vorliegt.

*Anežika Wohlmutová*

Aus der ČSSR-Zeitschrift *rozhledy* 1/74/75; Übersetzung und Bearbeitung: O. Langer und C. P. Helmholz

[1]) Die Stetigkeit einer Funktion wird in der 11. Klasse exakt definiert. Hier genügt es, sich unter einer stetigen Funktion eine solche vorzustellen, deren Bild sich mit dem Bleistift „ohne abzusetzen" zeichnen läßt.

**Lösung zu konvexe und konkave Funktionen:**

▲1▲ (1) ist äquivalent zu $(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2})^2 \geqq 0$. Es gilt $(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2})^2=0$ genau dann, wenn $\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}=0$, d.h. $\sqrt{y_1}=\sqrt{y_2}$. Letzteres ist dann und nur dann der Fall, wenn $y_1=y_2$ ist.

**Weitere Aufgaben:**

▲2▲ Untersuche die Funktion $f$ mit der Gleichung $y=|x|$ auf Konvexität bzw. Konkavität!

*Lösung:* $f$ ist konvex, aber nicht streng konvex.

▲3▲ Untersuche die Funktion $f$ mit der Gleichung $y=x^3$ auf Konvexität bzw. Konkavität!

*Lösung:* $f$ ist in $I_1=\{x \in P \mid -\infty<x<0\}$ streng konkav und in $I_2=\{x \in P \mid 0<x<\infty\}$ streng konvex.

▲4▲ Die Funktion $f$ mit der Gleichung $y=x^2+6x+8$ hat den Extrempunkt $P\ (-3; -1)$.

Untersuche, ob $f$ an diesem Punkt ein Maximum oder ein Minimum annimmt!

*Lösung:* Es liegt ein Minimum vor.

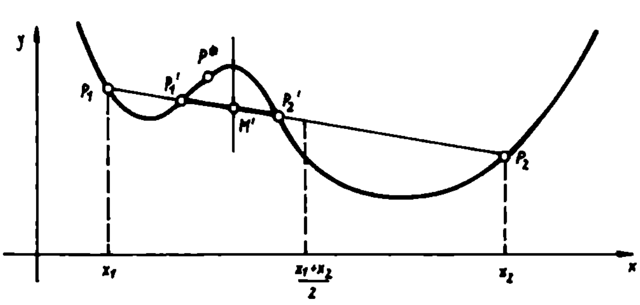
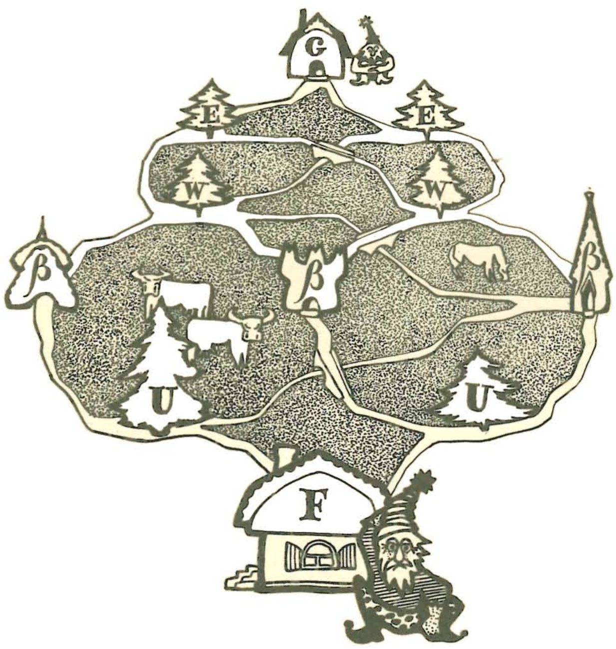



Bild 4


**Die Fußwege zum Bruder**

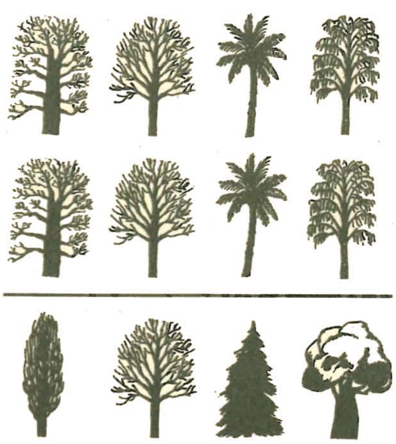
Gnom Nils beabsichtigt, seinen Bruder zu besuchen. Wieviel Marschrouten hat er dafür? (Nils muß den Marschweg „F-u-ß-w-e-g" entlang gehen.)

*Architekt A. W. Radunski, Moskau*




**. . . er sieht den Wald vor lauter Bäumen nicht!**

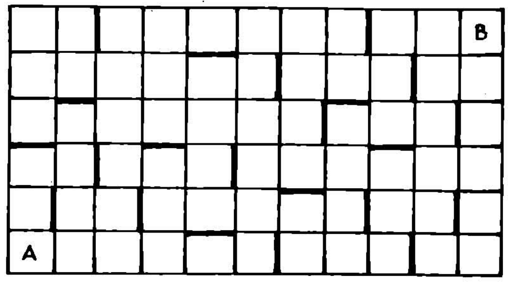
*Rolf Siegmund, OS Gröbers (Kl. 9)*



**Übersicht**

Von A nach B ist ein Weg zu finden, der durch alle Felder führt. Die Linie darf sich nicht kreuzen oder doppelt gezogen werden.

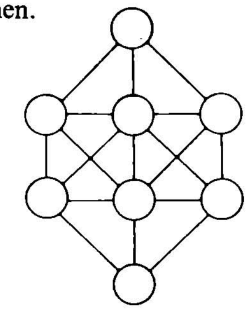
*aus: Troll*




**Von 1 bis 8**

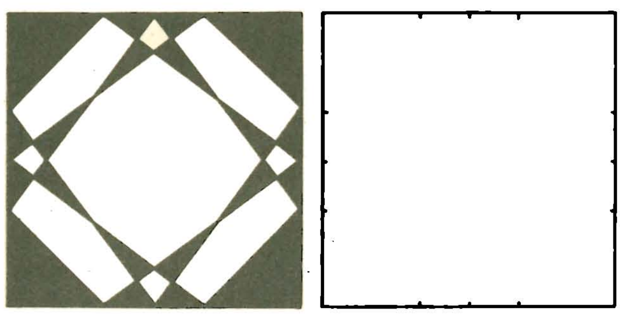
Trage in die Kreise die Zahlen 1 bis 8 so ein, daß die Differenz zwischen zwei benachbarten, auf einer Geraden liegenden Kreise mindestens 2 beträgt! Setzt du beispielsweise in den oberen Kreis 3 ein, so darf in keinem der drei mit ihm verbundenen Kreise 2 oder 4 stehen.

*aus: Sputnik, Moskau*



**Für Tüftler**

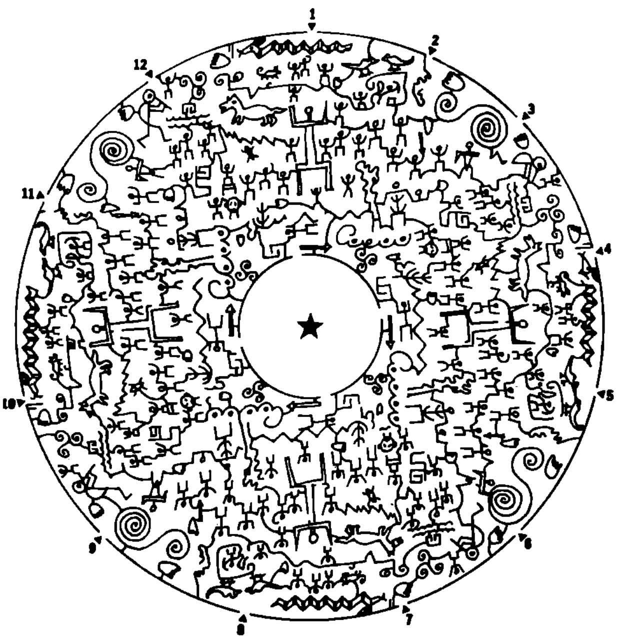
Das abgebildete Muster soll im nachstehenden leeren Quadrat nachgezeichnet werden. Hilfsmittel sind Lineal und Bleistift. Zu messen gibt es nichts, denn die Markierungspunkte im leeren Quadrat reichen aus, um alle geforderten Linien exakt zeichnen zu können.



*aus: WE 5/79, Köln, M. Junga*

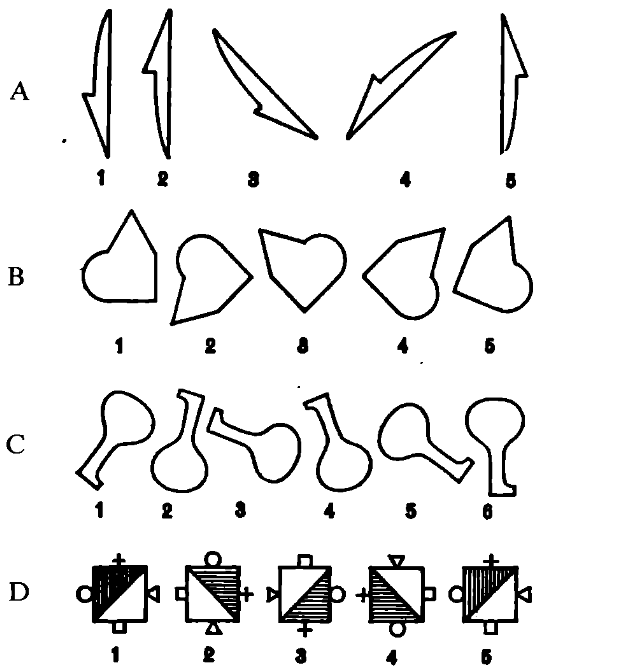

**Wunderbare Komposition**

Unsere Frage: Welchen der 12 Eingänge muß man nehmen, um den Stern in der Mitte zu erreichen?




**Gleich oder nicht gleich?**

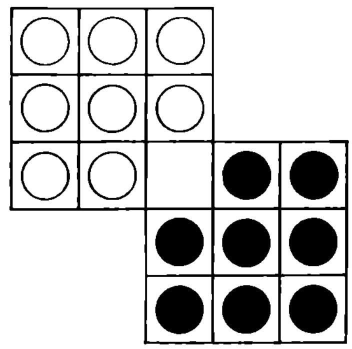
Auf den Bildern A, B, C, D scheinen die Figuren gleich zu sein, jede in anderer Lage. Jedoch gibt es je eine, die nicht zu den anderen paßt. *aus: Füles, Budapest*




**Platzwechsel**

Stelle die weißen und schwarzen Figuren so auf, wie es das Bild zeigt!

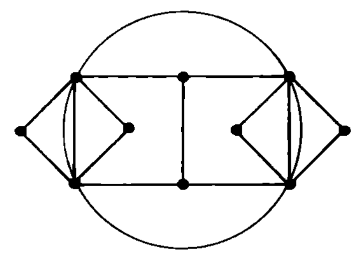
*Aufgabe:* Die weißen und schwarzen Figuren sind so auszutauschen, daß die schwarzen alle links oben und die weißen Figuren alle rechts unten zu stehen kommen. Bedingung: Man darf in waagerechter und senkrechter Richtung auf das nächste leere Feld ziehen, soweit notwendig auch hin und her. Man darf sogar die Figur des Gegners überspringen, falls dahinter ein leeres Feld ist (sogar mehrfach). Mit 46 Schritten ist das Problem lösbar. *aus: Füles, Budapest*



**Magische Figur**

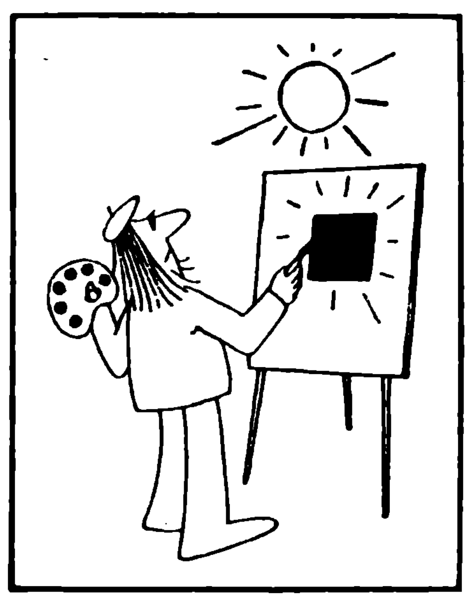
An Stelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 10 so einzutragen, daß die Summe der Zahlen an den Ecken jedes Quadrats und andererseits auf der Kreislinie stets die gleiche ist, insgesamt also 5 gleiche Summen.

*Ing. J. Pěnčik, Praha*



„Ich seh sie aber so!“

*Wladimir Wladow, aus: Trud*



# Mathematikaufgaben aus Freundesland

## 10 Aufgaben aus der Sowjetunion

▲1▲ Es ist nachzuweisen, daß es keine $n$-stellige natürliche Zahl $z_1$ gibt, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der letzten Ziffer eine natürliche Zahl $z_2$ erhält, die fünfmal so groß ist wie die Zahl $z_1$.

▲2▲ Aljoscha, Kolja, Petja und Wanja bestreiten das Finale in einem 100-Meter-Lauf. Drei ihrer Freunde stellen je eine Prognose auf, die jeweils aus zwei Aussagen besteht.
$P_1$: Petja wird Erster. Aljoscha wird Dritter.
$P_2$: Petja wird Zweiter. Wanja wird Erster.
$P_3$: Kolja wird Erster. Aljoscha wird Vierter.
Nach dem 100-Meter-Lauf stellte sich heraus, daß in jeder der drei Prognosen genau eine Aussage wahr, die andere hingegen falsch war. Keiner von den vier Läufern belegte mit einem anderen den gleichen Platz.
Welchen Platz belegte jeder dieser Jungen?

▲3▲ Es ist nachzuweisen, daß es keine dreistellige natürliche Zahl $z_1$ gibt, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der dritten Ziffer eine natürliche Zahl $z_2$ erhält, die viermal so groß ist wie die Zahl $z_1$.

▲4▲ Es sind zwei natürliche Zahlen zu ermitteln, deren Summe 252 beträgt und deren größter gemeinsamer Teiler 36 ist. Dabei soll die größere dieser beiden Zahlen höchstens doppelt so groß sein wie die kleinere Zahl.

▲5▲ Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die sich durch das Produkt derjenigen Zahlen, die jeweils den beiden Ziffern entsprechen, ohne Rest teilen lassen.

▲6▲ Eine Schülerin wollte 187 mit einer dreistelligen natürlichen Zahl multiplizieren. Versehentlich vertauschte sie im zweiten Faktor die Einer- mit der Zehnerstelle und erhielt als Produkt eine Zahl, die um 6732 kleiner war als das richtige Ergebnis. Es ist bekannt, daß im zweiten Faktor die Zahl, die dei Zehnerstelle entspricht, dreimal so groß ist wie die Zahl, die der Einerstelle entspricht. Welches ist die kleinste Zahl, die diese Schülerin unter diesen Bedingungen als Ergebnis erhalten haben könnte?

▲7▲ Es ist zu untersuchen, ob man die Kanten eines Würfels so mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 11, 12 durchnumerieren kann, daß für jeden Eckpunkt des Würfels die Summe aus den Zahlen, die zu den drei in diesem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten gehören, stets die gleiche ist.

▲8▲ Welche zweistelligen natürlichen Zahlen, die in dekadischer Darstellung nicht die Ziffer 0 enthalten, lassen sich ohne Rest durch ihre Quersumme teilen?

▲9▲ Bei einer vierstelligen natürlichen Zahl, die in der dekadischen Darstellung genau eine Ziffer 0 enthält, wird diese Ziffer 0 gestrichen. Man erhält dann eine dreistellige natürliche Zahl, die gleich dem neunten Teil der Ausgangszahl ist.
Man finde eine solche Zahl.

▲10▲ Eine fünfstellige gerade natürliche Zahl enthält in ihrer dekadischen Darstellung keine Ziffer 0. Die aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl ist eine Quadratzahl. Die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl ist eine Kubikzahl.
Um welche natürlichen Zahlen handelt es sich?

Diese zum Teil anspruchsvollen Aufgaben stammen aus Mathematikolympiaden (1. und 2. Stufe) der Sowjetunion. Sie wurden zusammengestellt und mit Lösungen versehen von stud. math. O. Langer (Döbeln), z. Z. Student an der Universität in Leningrad. Bearbeitet für unsere *alpha*-Leser hat sie StR Th. Scholl, Berlin.

**Lösungen:**

▲1▲ Angenommen, es gibt eine solche $n$-stellige natürliche Zahl $z_1$, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der letzten Ziffer eine Zahl $z_2$ erhält, für die $z_2=5\cdot z_1$ gilt, und es seien $z_1=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ und $z_2=\overline{a_na_2a_3\ldots a_1}$ ihre Zifferdarstellungen. Wegen $a_1\neq 0$ endet $z_2$ nicht mit der Ziffer 0. Wegen $z_2=5\cdot z_1$ müßte $z_2$ auf die Ziffer 5 enden, also $a_1=5$ sein. Daraus folgt weiter $z_2=5\cdot z_1$ bzw. $\overline{a_na_2a_3\ldots 5}=5\cdot\overline{5a_2a_3\ldots a_n}$. Wegen $a_n\leq 9$ und $5\cdot 5>9$ ist diese Gleichung nicht erfüllbar. Also war die Annahme der Existenz von $z_1$ falsch, d. h., es gibt keine Zahl mit der geforderten Eigenschaft.

▲2▲ Wir bezeichnen z. B. die beiden Aussagen der ersten Prognose mit $P_1(a)$ und $P_1(b)$ und nehmen eine Fallunterscheidung vor.
*1. Fall:* Angenommen $P_1(a)$ ist eine wahre Aussage. Dann ist $P_1(b)$ eine falsche Aussage. Ferner ist dann $P_2(a)$ eine falsche Aussage und somit $P_2(b)$ eine wahre Aussage. Das führt jedoch zum Widerspruch zur Annahme. Diese Möglichkeit entfällt also.
*2. Fall:* Angenommen $P_1(a)$ ist eine falsche Aussage. Dann ist $P_1(b)$ eine wahre Aussage. Ferner ist dann $P_3(b)$ eine falsche Aussage und somit $P_3(a)$ eine wahre Aussage. Daraus folgt weiter, daß $P_2(b)$ eine falsche und somit $P_2(a)$ eine wahre Aussage ist.
Das führt zu folgendem Ergebnis:
Kolja wurde Erster, Petja Zweiter, Aljoscha Dritter und Wanja Vierter.

▲3▲ Angenommen, es gibt eine solche dreistellige natürliche Zahl $z_1$, aus der man nach Vertauschen der ersten und dritten Ziffer eine Zahl $z_2$ erhält, für die $z_2=4\cdot z_1$ gilt, und es seien $z_1=\overline{abc}$ und $z_2=\overline{cba}$ ihre Zifferndarstellungen. Wegen $z_2=4\cdot z_1$ muß $z_2$ eine gerade natürliche Zahl sein und wegen $a\neq 0$ auf die Ziffer 2, 4, 6 oder 8 enden. Wegen $4a<9$ gilt $a=2$. Wegen $\overline{cb2}=4\cdot\overline{2bc}$ könnte $c=3$ oder $c=8$ sein.
Andererseits gilt aber $c\geqq 4a=4\cdot 2=8$. Folglich muß $c=8$ gelten. Daraus folgt weiter $\overline{8b2}=4\cdot\overline{2b8}$ oder in anderer Schreibweise $802+10b=4(208+10b)$ mit $0\leqq b\leqq 9$, also
$802+10b=832+40b$,
$30b=-30$,
$b=-1$.
Also existiert keine solche dreistellige Zahl $z_1$ mit der geforderten Eigenschaft.

▲4▲ Die zu ermittelnden natürlichen Zahlen seien $x=36k$ und $y=36n$, wobei $k$ und $n$ von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Dann gilt $36k+36n=252$, also $k+n=7$. Es sei $k>n$; dann erfüllen folgende Zahlenpaare $(k;n)$ diese Gleichung:
(6;1), (5;2) und (4;3). Nur das Zahlenpaar (4;3) erfüllt aber die Bedingung $k\leqq 2n$. Die zu ermittelnden Zahlen lauten somit 144 und 108.

▲5▲ Eine zweistellige natürliche Zahl $z$ läßt sich darstellen durch $z=10a+b$ mit $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Nun soll gelten
$\frac{10a+b}{ab}=k$, wobei $k$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt weiter $b\neq 0$. Nun gilt
$10a+b=abk$, $b=abk-10a$,
also $b=a(bk-10)$.
Daraus folgt, daß $a$ Teiler von $b$ ist. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

| $b$ | $a$ | $k$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 11 |
| 2 | 1, 2 | $6, \frac{11}{2}$ | 12 |
| 3 | 1, 3 | $\frac{13}{3}, \frac{11}{3}$ | – |
| 4 | 1, 2, 4 | $\frac{14}{4}, 3, \frac{11}{4}$ | 24 |
| 5 | 1, 5 | $3, \frac{11}{5}$ | 15 |
| 6 | 1, 2, 3, 6 | $\frac{16}{6}, \frac{13}{6}, 2, \frac{11}{6}$ | 36 |
| 7 | 1, 7 | $\frac{17}{7}, \frac{11}{7}$ | – |
| 8 | 1, 2, 4, 8 | $\frac{18}{8}, \frac{14}{8}, \frac{12}{8}, \frac{11}{8}$ | – |
| 9 | 1, 3, 9 | $\frac{19}{9}, \frac{13}{9}, \frac{11}{9}$ | – |

Die gesuchten Zahlen lauten 11, 12, 15, 24 und 36.

▲6▲ Der zweite Faktor läßt sich durch $100a+10b+c$ darstellen. Nun gilt

$$187(100a+10b+c)-187(100a+10c+b)=6732,$$
$$(100a+10b+c)-(100a+10c+b)=36,$$
$$9b-9c=36,$$
$$b-c=4.$$

Wegen $b=3c$ erhalten wir daraus $3c-c=4$, $2c=4$, also $c=2$ und somit $b=6$. Der kleinste dreistellige zweite Faktor lautet 162, und das kleinste Produkt lautet $187 \cdot 126=23\,562$, das diese Schülerin unter diesen Bedingungen als Ergebnis erhalten haben könnte.

▲7▲ Es sei $a$ die Summe aus den Zahlen, die zu den drei in einem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten gehören. Da jede Kante in genau zwei Eckpunkten des Würfels endet und es acht Eckpunkte gibt, gilt

$$8a=2(1+2+\ldots+11+12),$$
$$a=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{2}\cdot(1+12),$$
$$a=\frac{39}{2}.$$

Da $a$ keine natürliche Zahl, sondern eine gebrochene Zahl ist, lassen sich die Kanten des Würfels mit den gegebenen Zahlen nicht entsprechend der geforderten Bedingung durchnumerieren.

▲8▲ Eine solche zweistellige natürliche Zahl läßt sich durch $10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $1\leqq b\leqq 9$ darstellen; sie hat die Quersumme $a+b$. Nun soll gelten $10a+b=k(a+b)$, wobei $k$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$10a+b=ak+bk,$$
$$10a-ak=bk-b,$$
$$a(10-k)=b(k-1).$$

Daraus folgt $2\leqq k\leqq 9$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
Aus $k=2$ folgt $8a=b$, also $a=1$ und $b=8$. Aus $k=3$ folgt $7a=2b$, also $a=2$ und $b=7$. Aus $k=4$ folgt $2a=b$, also $a=1, 2, 3$ oder 4 und $b=2, 3, 6$ oder 8. Aus $k=5$ folgt $5a=4b$, also $a=4$ und $b=5$. Aus $k=6$ folgt $4a=5b$, also $a=5$ und $b=4$. Aus $k=7$ folgt $a=2b$, also $a=2, 4, 6$ oder 8 und $b=1, 2, 3$ oder 4. Aus $k=8$ folgt $2a=7b$, also $a=7$ und $b=2$. Aus $k=9$ folgt $a=8b$, also $a=8$ und $b=1$. Es existieren 14 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 12, 18, 21, 24, 27, 36, 42, 45, 48, 54, 63, 72, 81, 84.

▲9▲ Eine vierstellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $1000a+100b+10c+d$ mit $1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$, $0\leqq c\leqq 9$ und $0\leqq d\leqq 9$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.
Es sei $b=0$; dann gilt

$$1000a+10c+d=9(100a+10c+d),$$
$$100a=8(10c+d),$$
$$25a=20c+2d,$$
$$2d=25a-20c,$$

also $$d=\frac{25a}{2}-10c.$$

Für $a=2$ erhalten wir daraus $d=25-10c$. Nur $c=2$ erfüllt diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen. Aus $c=2$ folgt $d=5$. Damit haben wir bereits eine solche Zahl gefunden; sie lautet 2025. Die weiteren Fälle $c=0$ und $d=0$ brauchen deshalb nicht näher untersucht zu werden.

▲10▲ Es gibt genau fünf dreistellige Kubikzahlen; sie lauten $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$. Da die zu ermittelnde fünfstellige natürliche Zahl gerade sein soll, kommen nur die Kubikzahlen 216 oder 512 in Frage. Damit muß die aus den ersten drei Ziffern gebildete Quadratzahl auf die Ziffern 2 oder 5 enden. Es gibt keine Quadratzahl, die auf die Ziffer 2 endet. Deshalb entfällt die Zahl 216. Wegen $5^2<100$ und $35^2>1000$ kommen nur die Quadratzahlen $15^2=225$ und $25^2=625$ in Frage. Es existieren genau zwei Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 22512 und 62512.

# Campingplätze vom Rechner vermittelt

Mit Hilfe der EDV können jetzt die Zeltplätze des Campingzentrums in Stralsund vermittelt werden. Dafür wurde ein entsprechendes EDV-Projekt vom VEB Datenverarbeitungszentrum (DVZ) Rostock entwickelt.

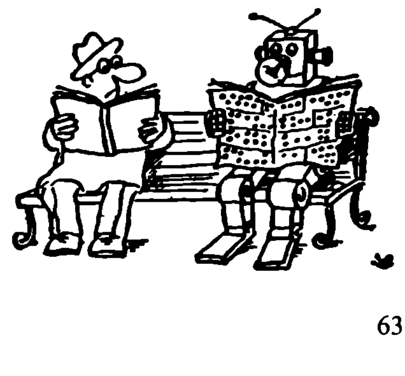
Das Kernstück dieses Projektes ist der Algorithmus zur Ermittlung der Reihenfolge, in der die Anträge vom Rechner abgearbeitet werden sollen. Dafür wird eine Reihe von Prioritäten aufgestellt, die von ganz bestimmten Faktoren abhängig sind. Dazu gehört z. B., ob der Antragsteller kinderreich ist, ob er überhaupt schon einmal gezeltet hat, ob er zum Zelten nur die Vor- bzw. Nachsaison bisher benutzt hat bzw. jetzt beanspruchen möchte oder ob er entgegen den Vermittlungsbedingungen mehr als einen Antrag gestellt hat usw.

Die Beantwortung dieser Fragen wird in einer Bewertungsziffer festgelegt, die zusammen mit der Personenkennzahl auf einem Magnetband, einem sogenannten Stammband, für vier Jahre gespeichert wird. Auf dem Stammband sind also die Daten jedes Bürgers enthalten, der sich um eine Zeltgenehmigung im Ostseebezirk beworben hat. Es gibt Auskunft darüber, wie seine Wünsche in den letzten vier Jahren berücksichtigt worden sind. Die niedrigste Bewertungsziffer erhalten kinderreiche Familien, die höchste der, der mehr als einen Antrag gestellt hat. Im zuletzt genannten Fall wird der Antrag für das laufende Jahr nicht bearbeitet und der Antragsteller für ein weiteres Jahr von der Vermittlung ausgeschlossen.

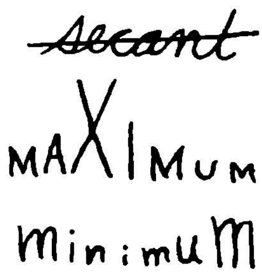
Auf dem Antragformular können vier verschiedene Campingplätze und drei verschiedene Anreisezeiten angegeben werden. Es bestehen dann 12 Möglichkeiten zur Erteilung einer Genehmigung. Diese Maßnahme ist vor allem zur Auslastung der Plätze in der Vor- und Nachsaison gedacht; denn wenn diese als Ersatzzeit angegeben ist, erfolgt in den meisten Fällen eine Genehmigung. Die Bewertungsziffer liegt dann unter der für die Hauptsaison und bietet für das Folgejahr günstigere Bedingungen.

Das Campingzentrum erhält durch dieses Projekt außerdem Informationen über freie Kapazitäten, über die Belegung der Plätze in bestimmten Zeiträumen und eine Übersicht über Mehrantragsteller und fehlerhaft ausgefüllte Anträge. Mit der Einführung des Projektes konnten beispielsweise die erteilten Genehmigungen von 486500 im Jahre 1972 auf 603700 im Jahre 1975 ansteigen. Bis auf wenige Ausnahmen war es möglich, die vorhandenen Campingplätze im Ostseebezirk über die ganze Saison hinweg auszulasten.

Die guten Ergebnisse, die mit diesem Projekt erzielt wurden, sollen nicht nur auf die Ostseebezirke beschränkt bleiben. Im Zusammenhang mit der Umarbeitung des Projektes auf die Datenverarbeitungsanlage *es 1040* bieten sich jetzt günstigere Möglichkeiten an, das Projekt so zu konzipieren, daß in einer Endstufe alle Kapazitäten sämtlicher Campingplätze der DDR gemeinsam mit einem Rechnerlauf vergeben werden können. Für die Antragsteller ergibt sich daraus der große Vorteil, Ersatzplätze aus allen Bezirken der DDR auswählen zu können. *(ADN)*



# In freien Stunden · alpha-heiter




### Wer lügt? Wer sagt die Wahrheit?

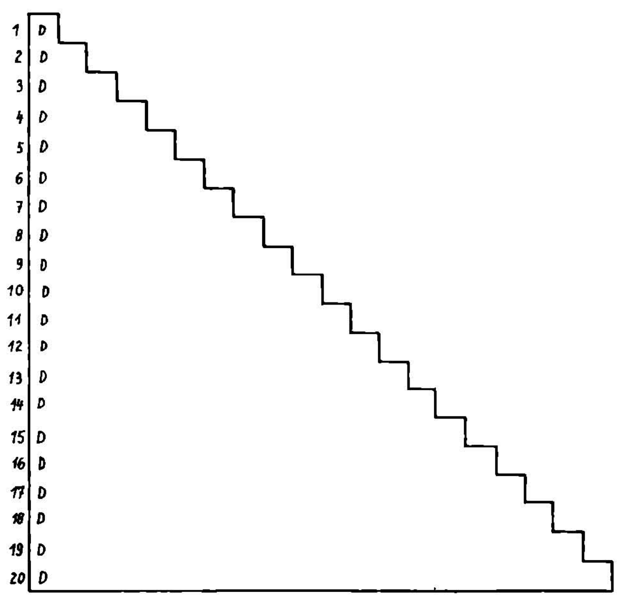
Zwei Zwillingsbrüder Erich und Fritz sind äußerlich nicht zu unterscheiden: gleiche Größe, gleiche Gestalt, gleichen Gesichtsausdruck, gleicher Haarschnitt, gleiche Sprache, gleiche Kleidung. Aber man weiß, daß der eine immer lügt, der andere immer die Wahrheit sagt. Wie kann man durch Fragen ermitteln, wer Erich und wer Fritz und wer der Lügner ist?

*Dr. G. Hesse, Radebeul*

### Rätselspaß mit D

In die folgende Figur sind Wörter mit der angegebenen Bedeutung einzutragen: 2. Abkürzung für Dezitonne; 3. Abkürzung für Dekameter; 4. Zahlwort; 5. griechischer Buchstabe; 6. Zeitraum von 10 Tagen; 7. Teil einer Divisionsaufgabe; 8. graphische Darstellung; 9. französischer Mathematiker; 10. Festlegung eines Begriffs; 11. Term der Form $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; 12. umgangssprachlicher Ausdruck für arithmetisches Mittel; 13. Ausdruck, mit dem entscheidbar ist, wieviel Lösungen eine quadratische Gleichung hat; 14. spezielles Viereck; 15. Eigenschaft von Gebilden, die Länge, Breite und Höhe besitzen; 16. Ergebnis der Multiplikation von 17 mit seinem Nachfolger; 17. Name eines Rechengesetzes; 18. Menge aller Zahlen, für die eine Funktion erklärt ist; 19. Darstellungsverfahren; 20. Teilgebiet der Mathematik.

*OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin*

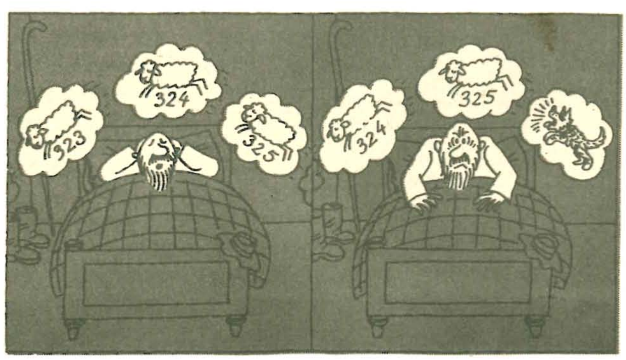



### Wunderbare Arithmetik

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben – verschiedene Ziffern. (Für die verschiedenen Rätsel kann die Bedeutung von Buchstaben verschieden sein.)

*Architekt A. W. Radunski, Moskau*


*aus: Eulenspiegel, H. Schrade*



## Das Zahlenquadrat-Spiel

Zeichne drei Zahlenquadrate $A$, $B$, $C$ (siehe Beispiel)!

A

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 |
| 13 | 1 | 10 |
| 24 | 11 | 3 |

B

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 11 | 15 |
| 14 | 8 | 13 |
| 37 | 35 | 14 |

C

| | | |
|---|---|---|
| 7 | | |
| | | |
| | | |

$A$ ist mit beliebigen natürlichen Zahlen besetzt. Zusätzlich ist ein *Weg* eingezeichnet, der alle Kästchen in einem Zug genau einmal durchläuft. Dieser *Weg* schneidet nur die Seiten der Teilquadrate, also nicht deren Eckpunkte.

$B$ entsteht aus $A$, indem man entlang des *Weges* zu jeder Zahl die nachfolgende addiert und die Summe in das betreffende Teilquadrat schreibt. Das heißt im obigen Beispiel für das erste Teilquadrat $7 + 6 = 13$, für das zweite $6 + 5 = 11$, usw. Am Ende des *Weges* wird auf die Zahl am Anfang als nachfolgende Zahl zurückgegriffen.

$C$ enthält lediglich die erste Zahl von $A$.

Damit hast du die Grundlage geschaffen für eine Reihe von Spielen und Knobelaufgaben:

1. Wie viele *Wege* gibt es, die man im Zahlenquadrat $A$ festlegen könnte? 2. Können Anfang und Ende des *Weges* zusammenfallen? 3. Lege deinem Freund die Zahlenquadrate $B$ und $C$ vor und lasse ihn $A$ ermitteln! 4. Gibt es bei der Aufgabe 3 genau eine Lösung? 5. Wenn es bei Aufgabe 3 mehrere Lösungen gibt, wie hängen diese zusammen?

Natürlich lassen sich in der Aufgabenstellung auch Zahlenquadrate mit 16 und mehr Feldern verwenden. Es können andere Zahlenbereiche festgelegt werden, z. B. kann die Menge der gebrochenen Zahlen Verwendung finden. Und schließlich lassen sich kompliziertere Abmachungen über die *Wege* treffen.

*Diplomlehrer E. Schulze, Mildenberg*
*aus: Journal of Recreational Math., Livermore*

## Krypto-Knobelei

(1) EPS + I − L − ON = LL
(2) E − P − S − I + LO + N = LL
(3) EP − S + IL − O + N = LL
(4) EP : S + I + L + O · N = LL

In den Gleichungen sind für die Buchstaben Ziffern von 0 bis 9 so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

*Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

## Diagonale Verkettung

In jeder Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter folgender mathematischer Bedeutung so einzutragen, daß immer der eingetragene Buchstabe der letzte Buchstabe des ersten Wortes und gleichzeitig der erste Buchstabe des zweiten Wortes ist.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | F | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | E | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | H | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | L | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | E | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | R | | | | |

1. Zeile: Zahlwort – Eindeutige Abbildung (Plural). 2. Z.: Freihandzeichnung – Durch Rotation einer Ellipse entstandener Körper. 3. Z.: Name der Funktion dritten Grades – Kegelschnitt. 4. Z.: Kegelschnitt – Französischer Mathematiker und Astronom (1749 bis 1827). 5. Z.: Teilgebiet der Mathematik – Mathematiker des Altertums. 6. Z.: Begriff aus der Logarithmenrechnung – Vorschrift, Richtschnur.

*D. Völzke, Greifswald*

## „Ideen muß man haben, Kollege!"

*aus: Eulenspiegel, Heinz Behling*

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

## 20 Jahre Kreisolympiaden Junger Mathematiker in der Stadt Greifswald

Die 2. Stufe der XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR war zugleich die 20. Greifswalder Olympiade. Das nahmen Lehrer, Schüler und der Jugendverband zum Anlaß, die Siegerehrung besonders festlich zu begehen und sich der Anfänge zu erinnern.

Die 1. Olympiade wurde am 26. März 1961 mit 24 Schülern der 7. Klassen durchgeführt. (Die Aufgaben findet der Leser unten angegeben.) Jetzt nehmen ständig etwa 220 Schüler der Klassen 5 bis 12 an der Kreisolympiade teil.

Die Siegerehrung findet stets an dem auf die Olympiade folgenden Sonntag statt. Sie wird traditionsgemäß um 9 Uhr mit einstündigen Fachvorträgen eröffnet. Wissenschaftler der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald sprechen vor den Teilnehmern der einzelnen Klassenstufen über interessante mathematische Probleme. Professor Terpe, Direktor der Sektion Mathematik, Professor Asser und Dr. Domm sind seit mehr als 15 Jahren herzlich begrüßte Referenten.

Im Anschluß an die Vorträge treffen sich alle Gruppen zur Auszeichnung der Preisträger, die vom Stadtschulrat und der FDJ-Kreisleitung vorgenommen wird. Ein gemeinsames Mittagessen für die Preisträger, Gäste und Lehrer beschließt die Veranstaltung.

Zur 20. Kreisolympiade hatte das *Haus der Jungen Pioniere*, dem die Zirkel des Klubs *Junger Mathematiker* angeschlossen sind, einen Ehrenwimpel (siehe Bild Seite 55) für alle Teilnehmer anfertigen lassen. Mitarbeiter des Instituts für Kunsterziehung schufen eine Keramikplakette.

Der Schulrat erinnerte an die guten Leistungen, die in den beiden Jahrzehnten von den Teilnehmern der Olympiade gezeigt wurden. Als Ehrengast war Dr. Christoph Bandt eingeladen, der als Greifswalder an den Internationalen Olympiaden 1967 in Cetinje (SFR Jugoslawien) und 1968 in Moskau teilgenommen und jeweils einen 1. Preis für die DDR errungen hatte. Er ist jetzt Mitarbeiter an der Sektion Mathematik der Universität Greifswald. Von den drei Lehrern, die die 1. Olympiade durchgeführt hatten, waren Oberlehrer Klaus Krüger, VLdV, Bad Doberan, und Oberlehrer Erich Walter, Greifswald, anwesend, während Studienrat Uwe Unruh wegen eines Auslandseinsatzes in Afrika der Einladung nicht folgen konnte.

Die Schüler der 5., 6. und 7. Klassen freuen sich jetzt schon auf die 25. Olympiade, an der sie noch selbst teilnehmen können. Aber auch viele der Teilnehmer aus den höheren Klassenstufen werden gern als Gäste 1984 bei der Siegerehrung dabei sein. Auch die Lehrer, die jedes Jahr unermüdlich mitarbeiten, denken an die Jubiläumsolympiade in 4 Jahren. Daß diese Olympiade und auch die dazwischenliegenden mit guten Ergebnissen abschließen, haben sich alle Beteiligten vorgenommen.

### Die Aufgaben der 1. Olympiade (Klasse 7)

▲1▲ Der Kraftstoffverbrauch bei einer Fahrt mit dem Motorroller *Berlin* über 235 km betrug 8 l.
Wie hoch ist der Verbrauch für 100 km?

▲2▲ Nachdem zwei Traktoren die Frühjahrsbestellung auf einem 6,8 ha großen Feld in $2\frac{1}{2}$ Tagen durchgeführt haben, sollen sie die gleiche Arbeit auf einem 3,8 ha Ackerstück in $1\frac{1}{2}$ Tagen erledigen.
Ist das zu schaffen?

▲3▲ Zwei gemischte Zahlen sollen so ausgewählt werden, daß ihr Produkt 100 ergibt! (Eine Lösung genügt!)

▲4▲ Zeichne einen Winkel von 60° und trage auf seinen Schenkeln die Strecken $\overline{ST}=\overline{SU}=5$ cm ab! ($S$ ist der Scheitelpunkt des Winkels.)
a) Konstruiere den Kreis, der die Schenkel in $T$ und $U$ berührt!
b) Ist diese Konstruktion auch möglich, wenn sich die Größe des Winkels ändert? (Begründung!)
c) Läßt sich der Kreis beim Winkel von 60° auch dann konstruieren, wenn $\overline{ST}=7$ cm und $\overline{SU}=5$ cm ist? (Begründung!)

### Auftakt zur 20.

Aus dem Aufruf des *Hauses der Jungen Pioniere* Greifswald, sich durch Lösen (und Einsenden) von Aufgaben durch einen Mathe-Knobel-Wettstreit auf die 20. Kreisolympiade vorzubereiten:

#### Klasse 3

▲1▲ Multipliziere die Summe aus 1874 und 562 mit 3!

▲2▲ Peters neue Schuhe kosten 29,50 M. Vaters Schuhe sind um 13,50 M teurer, Utes Schuhe dagegen um 5,85 M billiger als Peters Schuhe.
Wieviel kosten Vaters und wieviel Utes Schuhe?

▲3▲ Längs einer Landstraße stehen Bäume in regelmäßigen Abständen; vom ersten bis zum sechsten Baum sind es 60 m.
Wieviel Meter sind es vom ersten bis zum neunten Baum?

#### Klasse 4

▲1▲ Zum Quotienten, der durch Division von 360 und 2 entsteht, ist das Produkt aus 120 und 3 zu addieren!

▲2▲ Klaus hatte fünf Zahlen zu addieren. Er führte seine Rechnung zunächst auf einem Zettel aus und schrieb sie dann in sein Heft. Dabei vergaß er einen Summanden; nun stand folgendes in seinem Heft:

$$\begin{array}{r} 3459 \\ 2078 \\ 1097 \\ +\ 8356 \\ \hline 29401 \end{array}$$

Die Summe ist richtig. Welchen Summanden hat er aber ausgelassen?

▲3▲ In einem HO-Bekleidungshaus kauften 3 Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte 3 Meter, der zweite 5 Meter und der dritte 9 Meter. Der zweite Kunde bezahlte 30 M mehr als der erste.
Wieviel Mark hatte jeder der drei Kunden zu zahlen?

#### Klasse 5

▲1▲ Im Betonwerk stellen zwei Facharbeiter zusammen 280 Platten her, wobei der eine Arbeiter 50 Platten mehr als der andere fertigt.
Wieviel Platten produziert jeder?

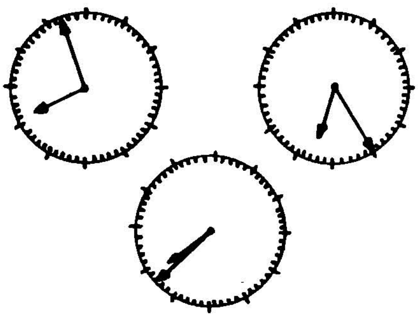
▲2▲ Im Ferienlager sollen von den 6 Jungen Alfred, Bernd, Dieter, Ehrenfried, Frank und Gerald drei in der Küche helfen.
Wie viele und welche Möglichkeiten gibt es, jeweils drei Schüler zur Küchenarbeit einzuteilen?

▲3▲ Ein großer rechteckiger Platz in einem Neubaugebiet wurde mit 5000 Platten ausgelegt. Jede Platte ist 60 cm lang und 40 cm breit. Der Platz ist dreimal so lang wie breit.
Bestimme Länge und Breite des Platzes!

#### Klasse 6

▲1▲ Ermittle die größte und die kleinste sechsstellige Zahl, die durch 2, 3, 4, 5, 6 und 9 teilbar ist!

▲2▲ Die untenstehenden Zifferblätter gehören zu richtiggehenden Uhren. Sie wurden lediglich aus den Gehäusen herausgenommen und beliebig hingelegt.
Kann man allein aus der Stellung der beiden Zeiger die genaue Uhrzeit bestimmen?
Wo es möglich ist, gib an, wie spät es auf den angegebenen Zifferblättern ist!



▲3▲ Fünf Schüler, nämlich Karsten, Henry, Frank, Peter und Andreas wohnen in einem Internatszimmer im NEG. Ihre Heimatorte sind Rostock, Leipzig, Stendal, Berlin und Wolgast.
Aus ihrem Gespräch erfahren wir:
a) Henry und Frank sind Mitglieder des Singeklubs, während die Schüler aus Stendal und Wolgast in der Kabarettgruppe mitarbeiten.
b) Drei Schüler, nämlich Peter, Frank und der Schüler aus Rostock lesen gern.
c) Henry, Andreas und der Schüler aus Rostock haben im Fach Mathematik eine „1".
d) Peter und der Schüler aus Wolgast spielen in ihrer Freizeit gern Schach.
e) Henrys Heimatort ist mehr als 300 km von Greifswald entfernt. Ermittle, in welchen Orten diese fünf Schüler beheimatet sind!

**Klasse 7**

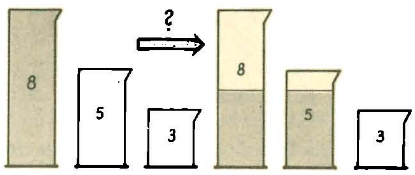
▲1▲ Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er 3 Stunden und 12 Minuten.
Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Stelle nach dem Komma!

▲2▲ In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich zunächst je 6 Personen auf je eine Bank, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur 3 Personen Platz nehmen. Setzen sich hingegen je 5 Personen auf jede der vorhandenen Bänke, so müssen 4 Personen stehen.
Wie viele Bänke und wie viele Personen befinden sich in diesem Aufenthaltsraum?

▲3▲ Gegeben sei eine Gerade $g$ und auf ihr ein fester Punkt $P$ sowie ein Kreis $k_1$ mit dem Mittelpunkt $M_1$ und dem Radius $r_1$, der mit $g$ keinen Punkt gemeinsam hat.
Es ist ein zweiter Kreis $k_2$ mit dem Mittelpunkt $M_2$ und dem Radius $r_2$ zu konstruieren, der $g$ in $P$ und den Kreis $k_1$ von außen in einem Punkt $Q$ berührt.

Auf die Aufgaben der Klassenstufen 8 bis 10 müssen wir aus Platzgründen verzichten, d. Red.

# Weiteres zur Billardkugel




Wir erinnern noch einmal an unser Problem aus Heft 2/80. Gegeben waren drei Gefäße $G_1$, $G_2$ und $G_3$ mit den Fassungsvermögen von genau $a$, $b$ und $c$ Litern ($a>b>c>0$; $a$, $b$, $c$ natürliche Zahlen), dabei sollte $G_1$ bis zum Rande gefüllt sein. Durch Umschütten (ohne Vergießen, Verdunsten u. ä.) sollten $d$ Liter ($d$ ebenfalls natürliche Zahl) abgesondert werden. Wenn also $x$, $y$ und $z$ zu irgendeinem Zeitpunkt die Inhalte der Gefäße $G_1$, $G_2$ und $G_3$ sind, so muß gelten

$$x+y+z=a \qquad (1)$$

mit den Nebenbedingungen, die das Fassungsvermögen der Gefäße berücksichtigen,

$$0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b,\ 0 \leqq z \leqq c. \qquad (2)$$

Wir betrachten den Fall $a<b+c$, wie er z. B. in der *Poisson* gestellten Aufgabe mit $a=12$, $b=8$ und $c=5$ auftrat. Der Billardtisch hat die in Bild 1 gezeigte Form.

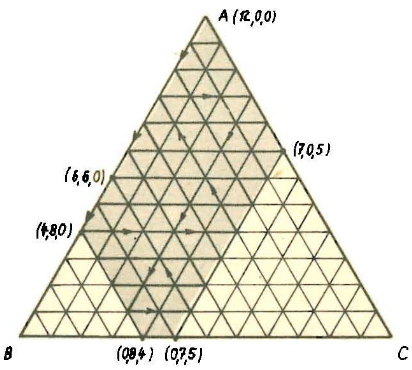



Bild 1: Konstruktion des Billardtisches für 12-, 8- und 5-Liter-Gefäße aus dem Grunddreieck

Ein Beispiel für den Fall $a>b+c$ zeigt Bild 2.
Nun geben wir die versprochene Lösung von *Bachet* an. Dabei ist mit dem ersten, zweiten und dritten Gefäß das 8 Maß, 5 Maß und 3 Maß fassende Gefäß gemeint: „Da es zur Teilung von 8 Maß in zwei gleiche Teile nötig ist, daß man auf der einen Seite 4 und auf der anderen gleichfalls 4 hat, und man diese 4 nur

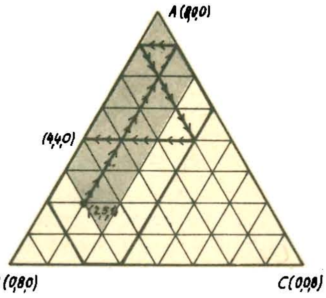



Bild 2: Billardtisch für $a=8$, $b=5$ und $c=2$ (gerasterter Teil). Der eingezeichnete Weg gehört zu dem umrandeten Teil (vergl. Bild 3).

in dem zweiten oder in dem ersten Gefäß bekommen kann, so muß man entweder das eine oder das andere zu erreichen suchen. Hiernach ergeben sich zwei verschiedene Wege. Um den ersteren einzuschlagen, schließe ich folgendermaßen. Um zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 4 Maß bleiben, muß man von diesem Gefäß, wenn es voll ist, gerade 1 Maß fortnehmen. Dies kann aber nur so ausgeführt werden, daß man jenes Maß in eines der beiden anderen Gefäße gießt, wenn demselben nur noch 1 Maß fehlt, um voll zu sein; dies kann bei dem ersten Gefäß nicht vorkommen (denn, wenn das zweite voll wäre und dem ersten nur noch 1 Maß fehlen sollte, um auch voll zu sein, so würde dies schon 12 Maß erfordern); es muß also das dritte Gefäß dasjenige sein, dem nur noch 1 Maß fehlen soll, um voll zu sein, d. h. also: es müssen in ihm 2 Maß enthalten sein. Dieser Zustand kann nun auf zwei Arten erreicht werden: 1. indem dem vollen dritten Gefäß 1 Maß genommen wird oder 2. indem in das leere Gefäß 2 Maß gegossen werden. Der erste Fall ist unmöglich, denn dann müßte ja einem der beiden anderen Gefäße gerade nur noch 1 Maß fehlen, was wir ja bei dem zweiten Gefäß gerade erstreben, also noch nicht voraussetzen dürfen, und was bei dem ersten Gefäß auch nicht möglich ist, weil dann im ersten Gefäß gegen die Voraussetzung 7 Maß und im dritten 3 Maß, also im ganzen 10 Maß Wein vorhanden wären. Es bleibt also nur der zweite Weg, d. h. es müssen in das dritte Gefäß 2 Maß gegossen werden. Diese 2 Maß können aber nicht aus dem ersten Gefäß kommen (denn wenn bei leerem drittem Gefäß das erste nur 2 Maß enthielte, so könnten, auch wenn das zweite ganz voll wäre, nur 7 Maß Wein gegen die Voraussetzung vorhanden sein); die 2 Maß müssen also aus dem zweiten Gefäß kommen. Um nun zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 2 Maß sind, muß man, wenn es voll ist, 3 Maß davon abnehmen, was sehr leicht ist, da wir ein Gefäß für 3 Maß haben. Geht man umgekehrt diesen Weg, so wird man die erste Lösung der Aufgabe finden." – Diese Lösung ist sehr scharfsinnig und widmet sich allen möglichen Fällen. Beweistechnisch wird von der Lösung ausgegangen, so daß das Zurückschließen tatsächlich erforderlich ist, auch wenn es keine Schwierigkeiten bereitet. Die Lösung ist aber in ihrer Länge etwas unübersichtlich. Wir fassen sie in folgendem Schema kurz zusammen:

| | 8-Maß-Gefäß | 5-Maß-Gefäß | 3-Maß-Gefäß |
|---|---|---|---|
| ursprünglicher Zustand | 8 | 0 | 0 |
| nach 1. Umgießen | 3 | 5 | 0 |
| nach 2. Umgießen | 3 | 2 | 3 |
| nach 3. Umgießen | 6 | 2 | 0 |
| nach 4. Umgießen | 6 | 0 | 2 |
| nach 5. Umgießen | 1 | 5 | 2 |
| nach 6. Umgießen | 1 | 4 | 3 |
| nach 7. Umgießen | 4 | 4 | 0 |

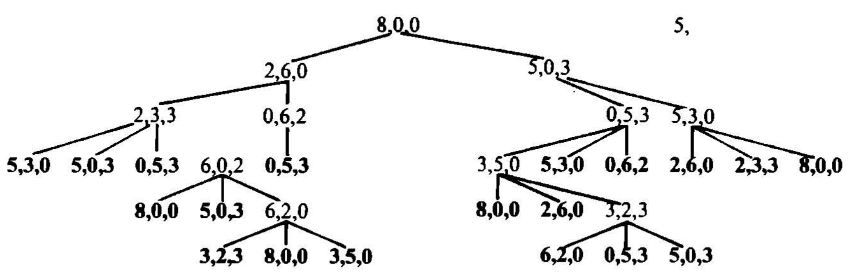
Der erwähnte zweite Weg, auf den wir nicht eingehen, erfordert ein Umgießen mehr.

Die Lösung der *Aufgabe 1* lautet – in dieses Schema gebracht – wie folgt:

| | 12 l | 8 l | 5 l |
|---|---|---|---|
| Ausgang | 12 | 0 | 0 |
| 1. Umgießen | 4 | 8 | 0 |
| 2. Umgießen | 4 | 3 | 5 |
| 3. Umgießen | 9 | 3 | 0 |
| 4. Umgießen | 9 | 0 | 3 |
| 5. Umgießen | 1 | 8 | 3 |
| 6. Umgießen | 1 | 6 | 5 |
| 7. Umgießen | 6 | 6 | 0 |

Die andere Lösung erfordert 12maliges Umgießen.

Der in *Aufgabe 2* gesuchte Graph hat die Gestalt:




Umfüllungsgraph zu 8-, 6- und 3-Liter-Gefäßen

Bild 1 ist die Lösung der *Aufgabe 3*.

Mit unserer Theorie bzw. dem dazugehörigen Computer können wir auch die allgemeinere Aufgabe behandeln, in der $a$, $b$ und $c$ die Bedeutung von Punkt 7 haben und $h$ Liter mit $h \geqq a > b > c$ ($h$ natürliche Zahl) auf die drei Gefäße in ganzzahligen Mengen verteilt sind. Wieder sind $d$ Liter herauszufüllen. Zur Lösung ändern wir lediglich (1) wie folgt ab:

$$x+y+z=h. \qquad (1')$$

Wir zeichnen also ein Grunddreieck mit der Seitenlänge $h$ und grenzen in ihm wie bisher durch (2) den Billardtisch ab.

Für $h=8$, $a=7$, $b=6$ und $c=3$ erhalten wir den in Bild 3 gezeigten Billardtisch. Jeder Punkt des Tisches mit ganzzahligen Koordinaten kommt für ein Aufteilen der $h=8$ Liter auf die drei Gefäße in Frage. Der eingezeichnete Weg in Bild 2 ergibt eine Lösung für die Halbierung der 8 Liter an ($d=4$), wenn anfänglich das erste Gefäß 2, das zweite 5 und das dritte 1 Liter enthalten.

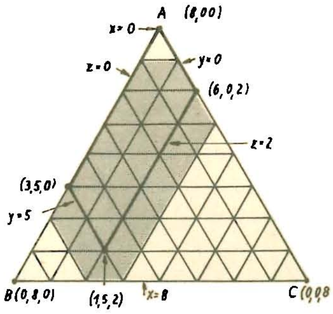



Bild 3: Ein Billardtisch für ein allgemeineres Problem

Das Problem, 10 auf 8-, 6- und 4-Liter-Gefäße verteilte Liter zu halbieren, führt auf folgende Erscheinung (Bild 4):

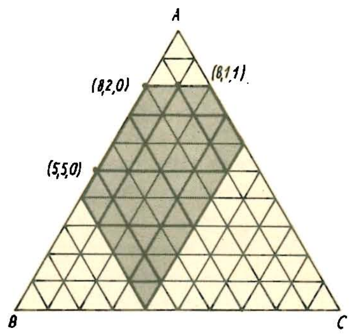



Bild 4: Unlösbare Aufgabenstellung

Zu dem Punkt (5, 5, 0), der die Lösung darstellt, führt nur ein in sich geschlossener Linienzug, der z. B. vom Punkt (8, 2, 0) aus nicht erreichbar ist. Das scheint zunächst verblüffend zu sein, ist aber nur Ausdruck der Tatsache, daß sich ungerade Mengen von Wein nicht mit geradzahligen Meßgefäßen ausmessen lassen. Wenn die geradzahligen Meßgefäße anfangs ungeradzahlige Mengen enthalten, so kann man damit auf den geschlossenen Weg gelangen (z. B. vom Punkt 8, 1, 1).

*Aufgabe:* Zeige, daß 10 Liter, die in ganzzahligen Mengen auf 8-, 7- und 6-Liter-Gefäße verteilt wurden, kein Herausfüllen von 5 Litern erlauben!

Das Bild 5 zeigt den zum Problem gehörigen Billardtisch. Ein Herausfüllen von 5 Litern bedeutet in der *Sprache* unseres Computers, daß die Kugel an einem Punkt reflektiert wird, der als eine Dreieckskoordinate die 5 enthält. Wie der Billardtisch zeigt, werden die 3 fraglichen Punkte durch einen geschlossenen Linienzug verbunden, auf den die Kugel von außen nicht mehr gelangen kann.

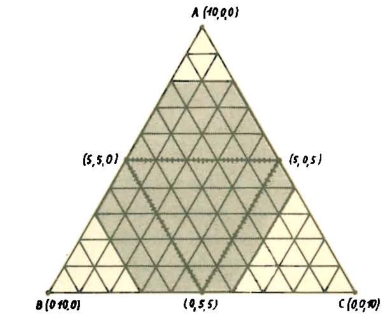



Bild 5: Billardtisch für 8-, 7- und 6-Liter-Gefäße

Unser Problem kann auch auf mehr als drei Gefäße ausgedehnt werden. Wir geben als Beispiel die folgende Aufgabe an:

Gegeben sind vier Gefäße mit je 24, 13, 11 und 7 Litern Fassungsvermögen. Das 24-Liter-Gefäß ist gefüllt, und sein Inhalt ist zu dritteln. Schematische Lösung:

| | 24 l | 13 l | 11 l | 7 |
|---|---|---|---|---|
| Ausgang | 24 | 0 | 0 | 0 |
| 1. Umgießen | 13 | 0 | 11 | 0 |
| 2. Umgießen | 13 | 0 | 4 | 7 |
| 3. Umgießen | 13 | 4 | 0 | 7 |
| 4. Umgießen | 20 | 4 | 0 | 0 |
| 5. Umgießen | 9 | 4 | 11 | 0 |
| 6. Umgießen | 9 | 4 | 4 | 7 |
| 7. Umgießen | 16 | 4 | 4 | 0 |
| 8. Umgießen | 16 | 8 | 0 | 0 |

Damit ist ein Drittel herausgefüllt. Lassen wir das mit 8 Litern gefüllte Gefäß außer Betracht, so haben wir eine bekannte Aufgabe vor uns, nämlich 16 Liter (im 24-Liter-Gefäß) zu halbieren (mit 11- und 7-Liter-Gefäßen):

| | 24 l | 11 l | 7 l |
|---|---|---|---|
| Ausgang | 16 | 0 | 0 |
| 1. Umgießen | 5 | 11 | 0 |
| 2. Umgießen | 5 | 4 | 7 |
| 3. Umgießen | 12 | 4 | 0 |
| 4. Umgießen | 12 | 0 | 4 |
| 5. Umgießen | 1 | 11 | 4 |
| 6. Umgießen | 1 | 8 | 7 |
| 7. Umgießen | 8 | 8 | 0 |

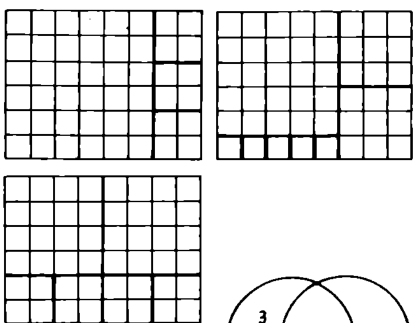
*R. Thiele*

# Lösungen

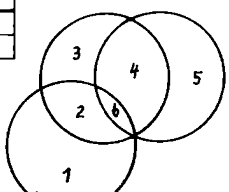
**Lösungen zum alpha-Wettbewerb 6/79:**

Ma 5 ▪1909 Da alle drei Schnecken mit gleicher konstanter Geschwindigkeit vorwärts kriechen, hängt die Zielankunft nur von den Pausenlängen ab.
Wegen $20 \cdot 5\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$ legt Schnecke A 19 Pausen ein; wegen $10 \cdot 10\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$ legt Schnecke B 9 Pausen ein; wegen $5 \cdot 20\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$ legt Schnecke C 4 Pausen ein.
Die Dauer aller Pausen beträgt für Schnecke A $19 \cdot 6\,\text{s} = 114\,\text{s}$, für Schnecke B $9 \cdot 12\,\text{s} = 108\,\text{s}$, für Schnecke C $4 \cdot 25\,\text{s} = 100\,\text{s}$. Folglich erreicht Schnecke C als erste, Schnecke B als zweite, Schnecke A als letzte das Ziel.

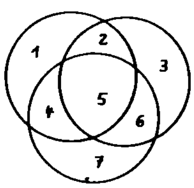
Ma 5 ▪1910
$$36+4+4+4=48$$
$$16+16+4+4+4+4=48$$
$$25+9+9+1+1+1+1+1=48$$



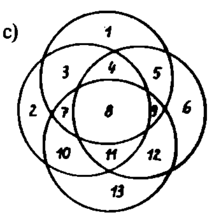
Ma 5 ▪1911 a)




b)




c)




Allgemein gilt: $n$ sich schneidende Kreise können höchstens $[n \cdot (n-1)+1]$ von Kreisbögen begrenzte Flächen erzeugen. In unserem Falle erhalten wir $(4 \cdot 3+1) = 13$ solcher Flächen.

Ma 5 ▪1912 Angenommen, Bernd hat $n$ Briefmarken zu 20 Pf, also noch $(10-n)$ Briefmarken zu 25 Pf gekauft; dann gilt
$$20 \cdot n + 25 \cdot (10-n) = 215,$$
$$20n + 250 - 25n = 215,$$
$$5n = 35,$$
$$n = 7.$$
Bernd hat sieben 20-Pf-Marken und drei 25-Pf-Marken gekauft. ($7 \cdot 20\,\text{Pf} + 3 \cdot 25\,\text{Pf} = 215\,\text{Pf} = 2{,}15\,\text{M}$)

Ma 5 ▪1913 Angenommen, an der Sportart Schach nehmen $x$ Schüler, an der Sportart Judo $y$ Schüler teil; dann gilt
$x+y = 36:9$, also $x+y=4$.
Wegen $y>0$ und $x>y$ existiert genau eine Lösung, nämlich $x=3$ und $y=1$. Es nehmen 3 Schüler an der Sportart Schach und 1 Schüler am Judo teil. Deshalb nehmen $2 \cdot 3 = 6$ Schüler an der Sportart Tischtennis teil.
Angenommen, an der Sportart Leichtathletik nehmen $a$ Schüler, an der Sportart Schwimmen $b$ Schüler teil; dann gilt
$a+b = 36-10$, also $a+b=26$.
Wegen $a>18$ und $b>6$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a=19$ und $b=7$. Es nehmen 19 Schüler an der Sportart Leichtathletik und 7 Schüler am Schwimmen teil.

Ma 5 ▪1914 Angenommen, an der Wanderung beteiligten sich $n$ Personen; dann gilt
$$3 \cdot n + 10 = 2 \cdot n + 50.$$
Nur für $n=40$ wird diese Gleichung erfüllt. An der Wanderung nahmen 40 Personen teil.

Ma 6 ▪1915 Da der ASK und der SCD gegeneinander unentschieden spielten, erhielt jede dieser beiden Mannschaften je einen Punkt aus diesem Spiel. Der SCD erreichte insgesamt aber nur einen Punkt. Deshalb muß der SCD alle übrigen Spiele verloren haben. Somit endeten die Spiele SCM gegen SCD, ASK gegen SCD, SCE gegen SCD und PS gegen SCD sämtlich 2:0. Da der PS insgesamt nur zwei Punkte erreichte und diese aus dem Spiel PS gegen SCD resultieren, hat der PS alle anderen Spiele verloren. Somit endeten die Spiele SCM gegen PS, ASK gegen PS und SCE gegen PS ebenfalls alle 2:0. Aus den Spielen SCM gegen PS und SCM gegen SCD erreichte der SCM genau 4 Punkte. Da der SCM ungeschlagen blieb, muß er aus den Spielen gegen den ASK und gegen den SCE insgesamt noch 2 Punkte erreicht haben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten: SCM gegen ASK 2:0 oder SCM gegen SCE 2:0 oder beide Spiele gingen unentschieden aus, also SCM gegen ASK 1:1 und SCM gegen SCE 1:1. Da der SCE aus den Spielen gegen den PS und den SCD bereits 4 Punkte erreicht hat, muß er das dritte Spiel verloren, das vierte unentschieden gespielt haben. Das ist nur möglich, wenn das Spiel ASK gegen SCE 2:0 ausging. Somit wurden folgende Ergebnisse erreicht:

SCM/ASK 1:1, SCM/SCE 1:1; SCM/PS 2:0; SCM/SCD 2:0; ASK/SCE 2:0; ASK/PS 2:0; ASK/SCD 1:1; SCE/PS 2:0; SCE/SCD 2:0; PS/SCD 2:0.

Ma 6 ▪1916 Aus $ab+bc+ca=abc$ folgt $a=1$ oder $a=2$.
Dabei gilt $1 \leqq a, b, c \leqq 9$. Nun gilt
$$(10a+b)+(10b+c)+(10c+a)$$
$$=100a+10b+c,$$
$$11a+11b+11c=100a+10b+c,$$
$$b+10c=89a.$$
Für $a=2$ erhalten wir $b+10c=178$. Wegen $b, c \leqq 9$ hat diese Gleichung keine Lösung.
Für $a=1$ erhalten wir $b+10c=89$,
$$10c=80+9-b,$$
$$c=8+\frac{9-b}{10}.$$
Nur für $b=9$ und damit für $c=8$ erhalten wir eine positive ganzzahlige Lösung. Deshalb existiert genau eine Lösung; sie lautet: $19+98+81=198$.

Ma 6 ▪1917 Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $49 \cdot (6-c) = 98$; daraus folgt $c=4$ und $(a-b)^2 \cdot c = (7-6)^2 \cdot 4 = 4$.
Aus $(a-b)^2 \cdot c$ erhalten wir durch Einsetzen $(6-b)^2 \cdot 2 = 18$; daraus folgt $b=3$ und $a^2 \cdot (b-c) = 36 \cdot (3-2) = 36$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $a^2 \cdot (1-0) = 16$; daraus folgt $a=4$ und $(a-b)^2 \cdot c = (4-1)^2 \cdot 0 = 0$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $81 \cdot (b-5) = 81$; daraus folgt $b=6$ und $(a-b)^2 \cdot c = (9-6)^2 \cdot 5 = 45$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $a^2 \cdot (b-0) = 1$; daraus folgt $a=1$, $b=1$ und $(a-b)^2 \cdot c = (1-1)^2 \cdot 0 = 0$.
Aus $(a-b)^2 \cdot c = 1$ folgt $c=1$ und $a-b=1$, also $b=a-1$.
Aus $a^2 \cdot (b-c) = 9$ folgt durch Einsetzen $a^2 \cdot (a-2) = 9$, also $a=3$ und somit $b=2$.

Ma 6 ▪1918 Aus $a=b+5c$ und $a+b+c=20$ folgt durch Einsetzen
$$b+5c+b+c=20,$$
$$2b+6c=20,$$
$$b+3c=10.$$
Die folgenden geordneten Zahlentripel $[a,b,c]$ erfüllen die gestellten Bedingungen: $[16,1,3]$, $[14,4,2]$, $[12,7,1]$, $[10,10,0]$.

Ma 6 ▪1919 Aus $\sphericalangle CAD = 90°$ und $\sphericalangle CAB = 60°$ folgt $\sphericalangle BAD = 30°$.
Aus $\sphericalangle CBD = 90°$ und $\sphericalangle CBA = 60°$ folgt $\sphericalangle ABD = 30°$.
Aus $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 30°$ folgt $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.
Analog dazu gilt $\overline{BE} \cong \overline{CE}$ und $\overline{AF} \cong \overline{CF}$.
Aus der Gleichheit der Winkelgrößen und aus $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$ folgt weiter die Kongruenz der Dreiecke $\triangle BAD$, $\triangle CBE$, $\triangle ACF$. Deshalb gilt $\overline{AD} \cong \overline{BD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CE} \cong \overline{AF} \cong \overline{CF}$.

Ma 7 ▪1920
$$56x+252=72x+196,$$
$$72x-56x=252-196,$$
$$16x=56,$$
$$x=3\tfrac{1}{2}.$$
Belegen wir in der dritten, der im Aufgabentext angegebenen Gleichung $7 \cdot (8x-28) = 9 \cdot (8x-28)$ die Variable $x$ mit $3\frac{1}{2}$, so erhal-

ten wir $7\cdot 0=9\cdot 0$, also $0=0$. Das bedeutet, der Schüler hat beim Lösen der Gleichung durch 0 dividiert, was nicht statthaft ist.

Ma 7 ▪1921 Angenommen, $n$ Schüler erhielten die Note 4, dann erhielten $2n$ Schüler die Note 3 und $4n$ Schüler die Note 2, also $(25-7n)$ Schüler die Note 1. Nun gilt

$$1\cdot(25-7n)+2\cdot 4n+3\cdot 2n+4\cdot n=25\cdot 1{,}88,$$
$$25-7n+8n+6n+4n=47,$$
$$11n=22,$$
$$n=2.$$

Es erhielten 11 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 3 und 2 Schüler die Note 4.

Ma 7 ▪1922 Aus $\overline{AB}:\overline{CD}=5:4$ folgt $\overline{CD}=\frac{4}{5}\cdot\overline{AB}$. Aus $\overline{EF}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}+\overline{CD})$ folgt durch Einsetzen

$$5{,}4=0{,}5\cdot(\overline{AB}+0{,}8\cdot\overline{AB}),$$
$$10{,}8=1{,}8\cdot\overline{AB},$$

$\overline{AB}=6$ und somit $\overline{CD}=4{,}8$.

Die parallelen Seiten des Trapezes sind 6 cm und 4,8 cm lang.

Ma 7 ▪1923 Es seien $b$ die Basis und $s$ ein Schenkel; dann gilt $s=b+1{,}5$ und $b:s=2:5$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$b:(b+1{,}5)=2:5,$$
$$5\cdot b=2\cdot b+3,$$
$$3b=3,\text{ also } b=1.$$

Die Leiterenden stehen am Fußboden einen Meter, also 100 cm auseinander.

Ma 8 ▪1924 Es sei $q$ eine ganze Zahl. Wir formen $q^3-q$ äquivalent um und erhalten:

$$q^3-q=q(q^2-1)$$
$$=q(q+1)(q-1).$$

Dieser Term ist ein Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Da äquivalent umgeformt wurde, hat der Term $q^3-q$ die gleiche Eigenschaft.

In einem Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist stets genau eine durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar. Somit ist das Produkt durch 6 teilbar, w. z. b. w.

Ma 8 ▪1925 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

(1) $m=6x+5$ und

(2) $n=6y+5$ mit $x, y\in N$.

Es gilt weiter

$$mn=(6x+5)(6y+5)$$
$$=36xy+30x+30y+25$$
$$=6(6xy+5x+5y+4)+1, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 8 ▪1926 Wir bezeichnen den Betrag (in Rubel), den Lena besitzt, mit $x$ und den von Sweta mit $y$.

Dann gilt nach Aufgabenstellung

(1) $0{,}4x+0{,}45y=2{,}15$

(2) $0{,}45x+0{,}4y=2{,}1$

Aus (2) folgt nach äquivalenter Umformung $0{,}4y=2{,}1-0{,}45x$ bzw. $y=5{,}25-1{,}125x$. (3)

Setzt man (3) in (1) ein, so erhält man

$$0{,}4x+0{,}45(5{,}25-1{,}125x)=2{,}15,$$
$$0{,}4x+2{,}3625-0{,}50625x=2{,}15,$$
$$0{,}10625x=0{,}2125,$$
$$x=2.$$

Das setzt man nun in (3) ein und erhält

$$y=5{,}25-1{,}125\cdot 2$$
$$y=3.$$

Lena besitzt 2 Rubel, Sweta 3 Rubel.

Ma 8 ▪1927 Da jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, gilt:

(1) $\triangle ACD\cong\triangle ABC$,

(2) $\triangle AEF\cong\triangle AIE$,

(3) $\triangle ECH\cong\triangle EGC$.

Daraus folgt: Die Parallelogramme $IBGE$ und $FEHD$ haben den gleichen Flächeninhalt, w. z. b. w.

Ma 9 ▪1928 Die beiden Zahlen seien mit $x$ bzw. $y$ bezeichnet.

Dann gilt nach der Aufgabenstellung:

(1) $xy=16$

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

Durch Quadrieren von (2) erhalten wir

$$x+2\sqrt{xy}+y=16.$$

Wegen $xy=16$, also $\sqrt{xy}=4$ gilt nun

$x+y+8=16$ bzw. $x+y=8$ bzw. $y=8-x$ (3)

Aus (1) und (3) folgt nach Einsetzen

$$x(8-x)=16,\ 8x-x^2=16,$$
$$x^2-8x+16=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-16},$$

$x_1=x_2=4$. Daraus folgt $y=4$.

Die Proben in (1): $4\cdot 4=16$ und in (2): $\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$, $2+2=4$ zeigen, daß $x=4$ und $y=4$ das Gleichungssystem erfüllen. Die Behauptung stimmt. (Es wurde nicht behauptet, daß die zwei Zahlen verschieden sind!)

Ma 9 ▪1929 Es seien $x, x+1, x+2$ und $x+3$ vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Nun gilt nach Aufgabenstellung:

$$x(x+2)=(x+1)+(x+3).$$

Nach äquivalenter Umformung erhalten wir

$$x^2+2x=2x+4$$
$$x^2-4=0 \qquad x_1=2$$
$$(x+2)\cdot(x-2)=0 \qquad x_2=-2$$

Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn $x=2$, so $x+1=3$ und $x+2=4$ und $x+3=5$

2. Wenn $x=-2$, so $x+1=-1$ und $x+2=0$ und $x+3=1$.

Die Quadrupel $[2;3;4;5]$ und $[-2;-1;0;1]$ erfüllen die Bedingungen der Aufgabe, denn $2\cdot 4=3+5$ und $(-2)\cdot 0=(-1)+1$. Es sind die einzigen Quadrupel, die den geforderten Bedingungen genügen, da $x_1$ und $x_2$ die einzigen Lösungen der Gleichung $x(x+2)=(x+1)+(x+3)$ sind.

Ma 9 ▪1930 Das arithmetische Mittel der Zahlen $a$ und $b$ ist $\frac{a+b}{2}$, das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$. Nun gilt

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}.$$

Durch äquivalentes Umformen erhält man

$$a+b=2\sqrt{ab}$$
$$(a+b)^2=4\cdot ab$$
$$a^2+2ab+b^2=4ab$$
$$a^2-2ab+b^2=0 \qquad a-b=0$$
$$(a-b)^2=0 \qquad a=b.$$

Die gesuchten Paare sind (0;0), (1;1), (2;2), ..., (9;9). Alle zweistelligen Zahlen lassen sich durch $10a+b$ mit $a, b\in N$ und $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ darstellen. Wegen $a=b$ gilt $10a+a$ bzw. $11a$ mit $0<a\leqq 9$. Es gilt stets $11/11a$, w. z. b. w.

Ma 9 ▪1931 Aus $5^3+6^3=125+216=341$ und $7^3=343$ folgt $5^3+6^3<7^3$.

Durch äquivalentes Umformen erhalten wir daraus $\frac{5^3}{7^3}+\frac{6^3}{7^3}<1$,

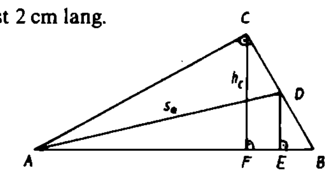
$\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{6}{7}\right)^3<1$. Wegen $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}<\left(\frac{5}{7}\right)^3$ und $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<\left(\frac{6}{7}\right)^3$ gilt somit $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}+\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<1$, also $5^{10}+6^{10}<7^{10}$. Die Aussage ist wahr.

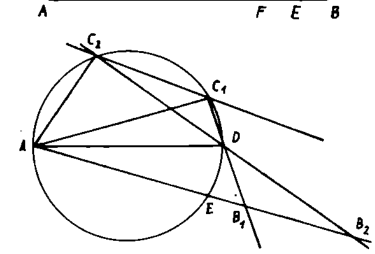
Ma 10/12 ▪1932 Aus dem Text geht hervor, daß Uwes Schulweg 5 min beansprucht. Wegen (2) und (3) folgt, daß Uwe 13.04 Uhr oder 13.05 Uhr zu Hause ankommt.

Aus (1) und (2) folgt, daß Uwe 12.59 Uhr oder 13.00 Uhr die Schule verließ.

Aus (1) und (3) folgt, daß Uwe die Schule 12.59 Uhr verließ. Uwe kam 13.04 Uhr zu Hause an.

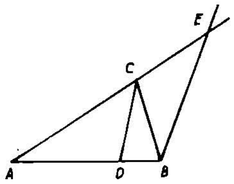
Ma 10/12 ▪1933 In die Planfigur wurde $\overline{DE}\perp\overline{AB}$ eingezeichnet. Somit gilt $\overline{DE}\parallel\overline{CF}$. Fassen wir nun $BA$ und $BC$ als zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt $B$ auf, die von den Parallelen, die durch $E$ und $D$ bzw. durch $F$ und $C$ gehen, geschnitten werden, so verhalten sich $\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{ED}:\overline{FC}=1:2$. Es gilt also: $\overline{DE}$ ist halb so lang wie $\overline{FC}$, d. h. $\overline{DE}$ ist 2 cm lang.




Das rechtwinklige Dreieck $\triangle AED$ ist nach dem Kongruenzsatz (ssw) konstruierbar. Der Punkt $C$ liegt auf dem Kreis mit $\overline{AD}$ als Durchmesser und auf der Parallelen zu $\overline{AB}$ im Abstand $h_c=4$ cm. Bei der Konstruktion entstehen vier Dreiecke, von denen jeweils zwei paarweise kongruent sind. Wegen der besseren Übersicht wurden in der Zeichnung nur zwei nicht kongruente Dreiecke dargestellt.

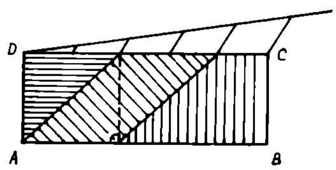
Ma 10/12 ■1934 Man zeichnet zu $\overline{DC}$ durch $B$ die Parallele. Diese schneidet die Verlängerung von $\overline{AC}$ in $E$. Nun gilt
$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)
$\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CBE$ (Wechselwinkel a. g. P.)
Daraus folgt
$\sphericalangle CEB \cong \sphericalangle CBE$; $\triangle BCE$ ist gleichschenklig; $\overline{CB} \cong \overline{CE}$.
Nach dem Strahlensatz gilt
$\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{AD} : \overline{DB}$ und wegen $\overline{CB} \cong \overline{CE}$
$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$ und somit
$\overline{CB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$.
Die Flächeninhalte beider Rechtecke sind gleich groß; sie stehen im Verhältnis 1 : 1.




Ma 10/12 ■1935 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

$$A_D : A_P : A_T = 1 : 2 : 2,$$

wenn $A_D$, $A_P$ bzw. $A_T$ die Flächeninhalte des Dreiecks, des Parallelogramms bzw. des Trapezes bezeichnen.
Man teilt eine Seite des Rechtecks in fünf gleiche Teile ein und verfährt wie das Bild zeigt:




Nun gilt: $A_D = \dfrac{\frac{2}{5}a \cdot b}{2} = \frac{1}{5}ab$

$$A_P = \frac{2 \cdot \frac{2}{5}a \cdot b}{2} = \frac{2}{5}ab$$

$$A_T = \frac{\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}a}{2} \cdot b = \frac{\frac{4}{5}a}{2} \cdot b = \frac{2}{5}ab.$$

Somit gilt

$$A_D : A_P : A_T = \frac{1}{5}ab : \frac{2}{5}ab : \frac{2}{5}ab = 1 : 2 : 2.$$

Ph6 ■66 Geg.:
Eigenmasse des Wagens $m_e = 27\,100$ kg
Ladungsvolumen $V_L = 52\ \text{m}^3$
Dichte der Ladung $\varrho = 960\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Ges.: Gesamtmasse $m$ in t
Die Gesamtmasse $m$ des Großraumwagens berechnet man aus der Summe von Eigenmasse $m_e$ des Wagens und der Masse der Ladung $m_L$,
also $m = m_e + m_L$ mit $m_L = V_L \cdot \varrho$.
Nun ist $m_L = 52\ \text{m}^3 \cdot 960\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m_L = 49\,920$ kg.
Daraus folgt

$$m = 27\,100\ \text{kg} + 49\,920\ \text{kg}$$
$$m = 77\,020\ \text{kg}$$
$$m \approx 77\ \text{t}.$$

Die Gesamtmasse des beladenen Wagens beträgt etwa 77 t.

Ph7 ■67 Geg.:
Zugkraft $F = 11\,000$ kp
Geschwindigkeit $v = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Ges.: Leistung $P$ in PS und kW
Die Leistung $P$ der Elektrolokomotive berechnet man nach der Formel $P = F \cdot v$

$$P = \frac{11\,000\ \text{kp} \cdot 90\ \text{m}}{3{,}6\ \text{s}}$$

$$P = 275\,000\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}.$$

Nun ist noch die Maßeinheit umzurechnen:
$P = 275\,000 \cdot 0{,}0133\ \text{PS} \approx 3666\ \text{PS}$
$P = 275\,000 \cdot 0{,}00981\ \text{kW} \approx 2693\ \text{kW}$.
Die Elektrolokomotive hat eine Leistung von ungefähr 3670 PS bzw. 2690 kW.

Ph8 ■68 Geg.: $p_1 = 75$ at
$T_1 = 288\ ^\circ\text{K}$
$T_2 = 318\ ^\circ\text{K}$
Ges.: $p_2$ in at und Pa
Da das Volumen konstant bleibt, vereinfacht sich die Zustandsgleichung der Gase zu

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1}$$

$$p_2 = \frac{75\ \text{at} \cdot 318\ ^\circ\text{K}}{288\ ^\circ\text{K}}$$

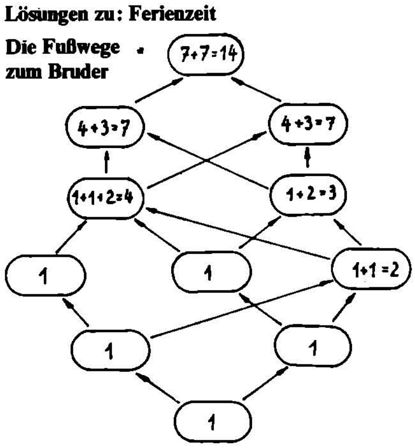
$$p_2 \approx 82{,}8\ \text{at} = 82{,}8 \cdot 98\,100\ \text{Pa}$$

$$p_2 = 8\,122\,680\ \text{Pa} \approx 8{,}12\ \text{MPa}$$

Der Druck erhöht sich auf 82,8 at oder 8,12 MPa.

**Lösungen zu: Ferienzeit**

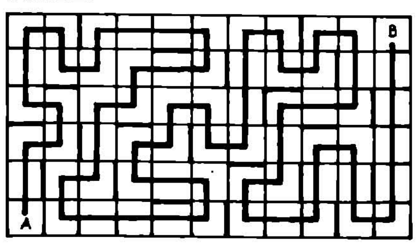
**Die Fußwege zum Bruder**




**... er sieht den Wald vor lauter Bäumen nicht**

4031 + 4031 = 8062; 1043 + 1043 = 2086; 2039 + 2039 = 4078; 3591 + 3591 = 7902 u. a.

**Übersicht**



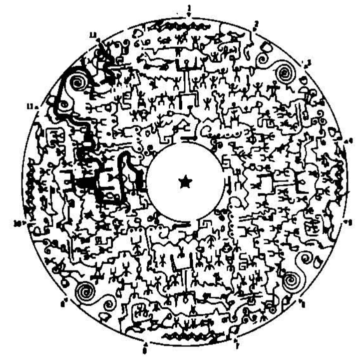

**Von 1 bis 8**

Eine der möglichen Lösungen

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| 6 | 8 | 5 |
| 4 | 1 | 3 |
| | 7 | |

**Wunderbare Komposition**

Der Weg 12 führt zum Stern.

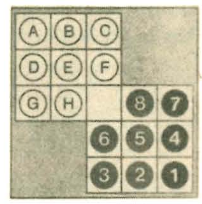


**Gleich oder nicht gleich?**

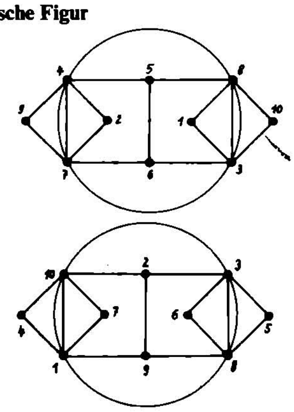
A–2, B–1, C–3, in Bild D dreht sich die Figur stets um 90°. In Figur 3 ist aber die Schattierung anders.

**Platzwechsel**

8, H, G, 8, 6, F, C, 6, 3, 2, H, G, 3, 7, 4, F, C, E, 3, B, A, 8, 7, 4, 1, H, G, 5, C, E, D, 7, 4, 5, B, A, 6, 5, 2, E, D, 2, 1, B, A, 1




**Magische Figur**



**Lösungen zu:**
**In freien Stunden · alpha-heiter**

**Wer lügt, wer sagt die Wahrheit?**

Es genügen zwei Fragen:
Frage 1: beliebig an einen gerichtet: Sagt Erich immer die Wahrheit?
Fallunterscheidung: Wenn Erich der Lügner ist, antwortet Erich mit ja, Fritz mit nein; wenn Fritz der Lügner ist, antwortet Erich mit ja, Fritz mit nein. Auf Grund der Antwort kann man eindeutig dem Befragten seinen Vornamen zuordnen:
ja: Erich bzw. nein: Fritz.
2. Frage an Fritz: Heißt du Fritz? Bejaht Fritz, spricht er die Wahrheit, also ist Erich der Lügner. Verneint Fritz, ist er der Lügner.

**Rätselspaß mit D**

2. dt; 3. dam; 4. drei; 5. delta; 6. Dekade; 7. Divisor; 8. Diagramm; 9. Descartes; 10. Definition; 11. Doppelbruch; 12. Durchschnitt; 13. Diskriminante; 14. Drachenviereck; 15. dreidimensional; 16. dreihundertsechs; 17. Distributivgesetz; 18. Definitionsbereich; 19. Dreitafelprojektion; 20. Differentialrechnung

**Wunderbare Arithmetik**

$4294 - 2147 = 2147$; $1975 + 1975 + 1975 = 5925$; $176 \cdot 176 = 30976$; $3714 \cdot 8 = 29712$

**Krypto-Knobelei**

$E = 1, P = 2, S = 3, I = 4, L = 5, O = 6, N = 7$

**Diagonale Verkettung**

1. Zeile: fünf – Funktionen,
2. Zeile: Skizze – Ellipsoid,
3. Zeile: kubisch – Hyperbel,
4. Zeile: Hyperbel – Laplace,
5. Zeile: Geometrie – Euklid,
6. Zeile: Kennziffer – Regel

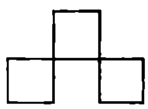
**Lösungen zu: Die Wunder der Rechenkunst**

IV. U.S. (Originaltext aus dem Buch)

1. Das Buch enthält 194 Aufgaben.

10. Die ganze Gesellschaft bestand überhaupt aus 7 Personen. Es war nämlich ein alter Mann mit seiner Frau, dessen Sohn mit seiner Frau und ihren drei Kindern; von diesen Kindern waren zwei Mädchen und ein Knabe.

21. Man wische von den zwei oberen Eckfeldern die 4 äußeren Wände, und auch von dem untersten mittelsten Felde die äußere Wand weg, wodurch noch 3 gleichgroße Felder bleiben, wie folgende Figur zeigt:



29. Carl hatte 180 Stück oder 3 Schock; und verkaufte in jedem Hause 60 Stück oder 1 Schock; denn $\frac{1}{4}$ und $15 = 60$ – erster Verkauf – von 180, bleibt 120; hiervon $\frac{1}{3}$ und $20 = 60$ – zweiter Verkauf – bleibt 60; hiermit ging er in's dritte Haus und verkaufte davon $\frac{1}{2}$ und 30, also sämtliche Aepfel. –

31. Man findet die Zahl 211, wonach man die Zahlen, zu welchen der Spieler die gewonnenen Ducaten durchzählte, bis zur 7, als: 2, 3, 5 und 7, miteinander multiplicirt und zum Product eins addirt.

34. 180 Stück Aepfel und eben soviel Nüsse hatte er gekauft und hatte 11 Kinder.

47. 36 Gänse. Man suche die kleinste Zahl, die sich, wie die Aufgabe lautet, durch 2 und 4 theilen läßt, diese Zahl ist 4; nun vervielfältige und zertheile man dieselbe, wie in der Aufgabe gesagt wird, also noch einmal soviel, halb soviel, ein Viertel soviel genommen, setze die dadurch erhaltenen Zahlen unter einander, und addire solche, also

| | |
|---|---|
| 4 verdoppelt giebt | 8 |
| die Hälfte von 4 giebt | 2 |
| ein Viertel davon giebt | 1 |
| zusammen | 11 |

Hierauf zieht man erst soviel von der geschätzten Anzahl Gänse ab, als noch dazuaddirt werden müssen, um die geschätzte Anzahl zu erhalten, nämlich 1 von 100 bleibt 99, und sagt nun:
11 giebt 4, wieviel giebt 99, so zeigt das Herauskommende an, wieviel Gänse es waren, als giebt 4
wieviel giebt 99
9
36
mit 11 in 99 dividirt, so bleibt in der Colonne rechts 4 und 9, zusammen multiplicirt giebt 36; aus soviel Gänsen bestand der herzugeflogene Schwarm.

69. Auf dem Tisch lagen 5 Thaler. Fritz hatte 10, Bast 30 und Hans 120 Thlr., folglich alle 3 zusammen 160 Thlr.

119.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

142. Um womöglich jedesmal zuletzt wegnehmen zu können, merke man folgende Regel, nach welcher allemal derjenige zuletzt wegnehmen wird, der von den 30 Rechnenpfennigen zuerst wegnimmt, wenn beide damit sich Unterhaltende die Regel kennen. Soll man zuerst von den 30 Rechnenpfennigen einige wegnehmen, so nehme man 2 Stück und habe nun ein Auge auf die andere Person, wieviel sie davon wegnimmt dann nehme man wieder soviel, daß der Person ihre und die selbst zuletzt hinweggenommenen zusammen 7 betragen. Wird so wechselseitig fortgefahren und das Verfahren beobachtet, so werden, wenn man selbst weggenommen hat, alle weggenommenen zusammen entweder 2, 9, 16 oder 23, also eine arithmetische Progression ausmachen: hat man zuletzt weggenommen und die Zahl aller weggenommenen Pfennige beträgt 23, so liegen noch 7 da; weil aber ausgemacht ist, daß nicht über 6 Stück weggenommen werden dürfen, so mag der Gegner wegnehmen, wie er will man wird doch zuletzt wegnehmen können. Hat man aber mit einer Person zu thun, welche diese Regel nicht weiß, so kann man immer etwa einen Rechnenpfennig so lange wegnehmen, bis, wenn man das vorletzte Mal wegnimmt, noch 7 daliegen, um dann gewiß zuletzt wegnehmen zu können. Z. B., man nehme der Regel zufolge von den 30 Rechnenpfennigen 2, eine zweite Person beliebig 3, man selbst wieder 4, eine zweite Person beliebig 5, man selbst wieder 2, eine zweite Person beliebig 4, man selbst wieder 3, eine zweite Person beliebig 3; jetzt sind noch 4 Stück übrig, diese nimmt man zuletzt weg und hat gewonnen.

144.

0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 Ø Ø
0 0 0 Ø Ø Ø
0 0 0 Ø 0 Ø

160. Durch diese Rechnungsweise bleibt jedesmal die Hälfte von der geraden Zahl, welche man dazuaddiren ließ, übrig; z. B. die gedachte Zahl sei

7
mit 2 multiplicirt
14
eine gerade Zahl z. B. 18 dazu addirt,
diese 32 halbirt
16
die gedachte Zahl 7 abgezogen
9

Diese Zahl ist die Hälfte von der geraden Zahl 18. Man spricht also: 9 bleibt übrig.

194. Den Angaben der Aufgabe nach sollen immer 3 der unbekannten Zahlen addirt und eine von deren Summe subtrahirt werden, so daß jede Zahl 3 Mal addirt und 1 Mal abgezogen wird, woraus hervorgeht, daß die Summe der angegebenen Reste gerade noch 1 Mal so groß sein muß, als die Summe der unbekannten 4 Zahlen. Da nun die Reste 79, 61, 39 und 19 zusammen 198 betragen, so ist daher die einfache Summe aller vier Zahlen $= 99$. Nun bleibt, wenn man die erste Zahl von der zweiten, dritten und vierten abzieht, 79 übrig und man erhält, wenn die erste Zahl zu 79 addirt wird, den Betrag der 3 übrigen Zahlen, folglich muß die erste Zahl noch 1 Mal dazuaddirt werden, um die Summe aller 4 Zahlen; also 99, zu erhalten, woraus sich leicht übersehen läßt, daß die Differenz zwischen 79 und 99 doppelt so groß ist, als die erste Zahl; es ist sonach, wenn man 79 von 99 abzieht, die Hälfte des dadurch bleibenden Restes 20, also 10, die erste Zahl, und es ist einleuchtend, daß die übrigen 3 Zahlen sich nach derselben Regel berechnen lassen. Nämlich: den zweiten Rest 61 von 99 abgezogen, bleibt 38, die Hälfte davon ist 19, zweite Zahl; den dritten Rest, 39, von 99 abgezogen bleibt 60, die Hälfte davon ist 30, dritte Zahl; den vierten Rest, 19, von 99 abgezogen bleibt 80, die Hälfte davon ist 40, vierte Zahl. Hieraus ist nun eine Auflösung der Aufgabe gefunden, es ist nämlich buchstäblich:
Die erste Zahl Zehn, die zweite Neunzehn, die dritte Dreißig und die vierte Vierzig und das Wort – von Zehn den zweiten Buchstaben, e, von Neunzehn den ersten, n, von Dreißig ebenfalls den ersten, d, und von Vierzig den dritten, e, zusammengesetzt – Ende.

# Gute Grundkenntnisse gefragt

## Über das Wiederholen

*Der größte Informationsverlust liegt in den frühen Stadien des Einprägens*

Auch das Wiederholen der eingeprägten Informationen ist, wie die vorangegangenen Gedächtnisvorgänge, ein Erkenntnisprozeß. Seine Besonderheit gegenüber der Aufnahme, der Konzentration und dem Einprägen besteht darin, daß es sich hier nicht um einen neu zu erlernenden Erkenntnisprozeß handelt, sondern um das erneute Durchlaufen bereits durchgeführter Erkenntnisprozesse. Mit anderen Worten, das Wiederholen der Information ist das erneute Durchlaufen des Gedächtnisprozesses von der Aufnahme über die Konzentration bis zum Einprägen der Information. Dieses erneute Durchlaufen des Gedächtnisprozesses erhöht die Intensität der Aufnahme, der Konzentration und des Einprägens. Die Information wird auf diese Weise immer allseitiger und umfassender in das Informationsnetz des Gedächtnisses eingebunden und dadurch verfestigt. Doch diese Verfestigung benötigt ihre Zeit. Es wird angenommen, daß der Zeitraum, den das Ultrakurzgedächtnis umfaßt, nämlich etwa 20 Sekunden, nicht ausreicht, um Informationen zu verfestigen. Informationen, die innerhalb von 20 Sekunden aus dem Gedächtnis abgestoßen werden, gehen für immer verloren. Der größte Informationsverlust liegt deshalb in den ersten zwanzig Sekunden. Erst wenn Informationen länger als 20 Sekunden im Gedächtnis verweilen, gehen sie in das Kurzzeitgedächtnis über und lassen sich für eine bestimmte Zeit verfestigen. Auch hier gilt jedoch das Prinzip, daß der größte Informationsverlust in den frühen Stadien liegt. Je länger Informationen wiederholt werden, desto intensiver ist, in der Tendenz, die Verfestigung der Information.

*aus: Gedächtnistraining, Franz Loeser, Urania-Verlag*

Über den Wert der Pausen beim Wiederholen erfährt der Leser in Heft 5/80, d. Red.

## Aufgaben

### Klasse 5

▲1▲ a) Stelle fest, ob 15 eine Lösung der Ungleichung $25+x>20-x$ ist!
b) Stelle fest, ob die Zahlen 7 und 12 die Gleichung $(a+19)\cdot 10=260$ erfüllen!

▲2▲ a) Vergleiche $\frac{1}{9}$ von 72 l mit $\frac{1}{8}$ von 88 l! b) Berechne!

| $a-2$ | $a-1$ | $a$ | $a+1$ |
|---|---|---|---|
| 297 | | | |
| | 4600 | | |
| | | 231 | |
| | | | 7903 |

▲3▲ a) Stelle fest, ob die Gleichung $315\cdot 210=66150$ wahr ist!
b) Ist die Ungleichung $25\cdot 0>12\cdot 0$ wahr oder falsch?

▲4▲ a) Die Zeichenreihe $(37+65)\cdot 8+17$ soll in Worten wiedergegeben werden.
b) Gib folgende wörtliche Formulierungen in einer Zeichenreihe! Die Summe der Zahlen 37 und 65 ist mit der Summe der Zahlen 8 und 17 zu multiplizieren.

▲5▲ a) Auf einer Karte im Maßstab 1:50000 ist eine Strecke 12 mm lang. Wie lang ist sie im Gelände?
b) Eine Strecke von 1,4 km Länge soll in eine Karte im Maßstab 1:25000 eingetragen werden. Wie lang ist sie auf der Karte?

▲6▲ Ein Mastschwein von 68 kg soll bis auf 110 kg gefüttert werden. Wieviel Tage muß es noch gefüttert werden, wenn es täglich 600 g zunimmt?

### Klasse 6

▲1▲ Löse die Gleichung $3t+4=2t+6$!

▲2▲ Welche gebrochenen Zahlen $g$ erfüllen die Gleichung
$$\frac{1}{4}\cdot g=\frac{1}{5}?$$

▲3▲ Vervollständige!

| $a$ | $a\cdot 10$ | $a\cdot 100$ | $a\cdot 1000$ |
|---|---|---|---|
| 17 | | | |
| | | 3400 | |
| 825 | | | |
| | 7240 | | |

▲4▲ Die VR Polen hat eine Fläche von rund 313000 km² und eine Bevölkerungszahl von etwa 33 Mill. Die Fläche der ČSSR beträgt etwa 128000 km², und dort leben etwa 15 Mill. Menschen.
Welches Land ist dichter besiedelt?

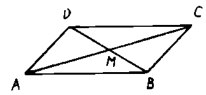
▲5▲ Zur Ausstattung einer Abteilung im Warenhaus werden 600 m² Teppichauslegware benötigt. Wieviel Meter Teppichauslegware müssen beschafft werden, wenn folgende Breiten in Betracht kommen?

| Breite in m | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Lösung in m | 600 | 300 | |

1 m² Teppich kostet 60,00 M

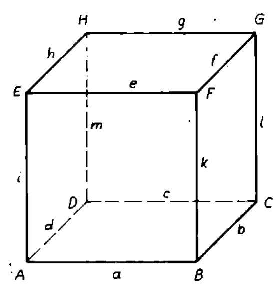
| Fläche in m² | 1,00 | 2,40 | 3,60 |
|---|---|---|---|
| Preis in M | 60 | | |

▲6▲ Ermittle die Größen in den offen gelassenen Feldern, wenn das folgende Parallelogramm gegeben ist:




| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | 8 cm | 5,7 cm | – | |
| $\overline{BC}$ | 3 cm | | – | 5 cm |
| $\overline{CD}$ | | | – | 5 cm |
| $\overline{DA}$ | | 4,5 cm | – | |
| ∢$DAB$ | 60° | | – | |
| ∢$ABC$ | | | – | 75° |
| ∢$BCD$ | | 90° | – | |
| ∢$CDA$ | | | – | |
| $\overline{AM}$ | – | – | 7 cm | – |
| $\overline{MC}$ | – | – | | – |
| $\overline{BM}$ | – | – | 6 cm | – |
| $\overline{MD}$ | – | – | | – |
| ∢$AMB$ | – | – | 100° | – |
| ∢$BMC$ | – | – | | – |
| ∢$CMD$ | – | – | | – |
| ∢$AMD$ | – | – | | – |

▲7▲ Ein Käfer krabbelt entlang der Kante eines Würfels. Er beginnt im Eckpunkt $A$ und gelangt auf dem kürzesten Wege zum Eckpunkt $G$ des Würfels.
Gib an, welche und wie viele Möglichkeiten der Käfer zum Krabbeln hat. (Die Kanten des Würfels sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet.)




(Die Lösungen zu diesem Beitrag siehe Heft 4/80, d. Red.)

# Die Wunder

der

# Rechenkunst.

Eine Zusammenstellung der räthselhaftesten, unglaublichsten und belustigendsten arithmetischen Kunstaufgaben.

Zur

Beförderung der geselligen Unterhaltung und des jugendlichen Nachdenkens.

Von

Joh. Christ. Schäfer.

Achte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Weimar, 1857.

Druck und Verlag von Bernh. Friedr. Voigt.

### 1. Anrede des Buchs.

Ich Büchelchen bin angefüllt
Mit arithmet'schen Sachen,
Wenn damit wird dein Wunsch gestillt,
So soll mir's Freude machen.
Eh Du nun aber weiter lies'st,
Vielleicht die letzte Nummer siehst,
So rechne Du einmal geschwind:
Wie viel Aufgaben in mir sind. —

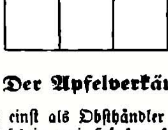
Die Kubikwurzel von 12 Million
8 Hundert 12 Tausend 9 Hundert und 4,
Das heißt, so viel sie beträgt davon,
Findest Du zwar nicht ganz in mir;
Doch ziehst Du ab erst 5 und 2,
Dann wieder 8 wen'ger 3,
Und auch die 4 siebenmal,
So findest Du die rechte Zahl.
Hast Du sie so herausgerathen,
Dann sehe nach in Resultaten!

### 10. Die sonderbare Gesellschaft.

Bei'm Verfasser dieses saß an einem Winter abende eine ganz besondere Gesellschaft in der Stube um den Tisch herum. Es waren da nämlich 1 Großvater, 2 Väter, 2 Mütter, 4 Kinder, 3 Enkel, 1 Bruder, 2 Schwestern, 2 Söhne, 2 Töchter, 2 verheirathete Männer, 2 verheirathete Frauen, 1 Schwiegervater, 1 Schwiegermutter und 1 Schwiegertochter. Wie viel Personen mögen dies wohl gewesen sein?

### 21. Die Sechsfelder-Figur.

Wo werden von folgender, mit Kreide auf den Tisch gezeichneter, Sechsfelder-Figur 5 Wände weggewischt, und zwar so, daß noch 3 gleichgroße Felder bleiben?



### 29. Der Apfelverkäufer.

Karl versuchte einst als Obsthändler sein Heil,
Und bot seine Aefel in drei Häusern feil;
Er halte dabei das unverhoffte Glück,
Daß er nicht einen Apfel brachte zurück,
Und schnell verkaufte der Früchte ganze Zahl.
Such' Leser mir dieselbe jetzt einmal,
Berechne auch dabei und gieb es an,
Wie viele Stücke wohl kaufte jeder Mann.

Vom ganzen Vorrath nimmt ein Viertheil erst heraus
Und funfzehn noch der Mann im ersten Haus.
Im zweiten ist das Glück ihm wieder günstig,
Man kaufte da vom Rest ein Drittheil und noch zwanzig.
Mit den Uebrigen geht er sodann in's dritte Haus
Und bietet sie daselbst zum Verkaufe aus;
Der Mann, der den Vorrath noch zu groß findet,
Nimmt erst die Hälfte. — Doch damit verbindet
Er noch dreißig Stücke. — Carl freute sich sehr,
Denn sein Korb war nun geworden ganz leer.

### 31. Der glückliche Spieler.

Ein Spieler zählte eine Summe gewonnener Ducaten durch, die weniger als 400 beträgt; zählt er sie zu Zweien, Dreien, Fünfen und Sieben, so bleibt allemal einer; zählt er sie aber zu Zwölfen, so bleiben sieben übrig. Wie viel Ducaten hatte er gewonnen?

### 34. Das Weihnachtsgeschenk.

Ein Vater hatte Aepfel und Nüsse, von jedem gleichviel Stück gekauft, um damit am Weihnachtsfeste seine Kinder zu beschenken. Jedem Kinde gab er erst 12 Aepfel und behielt 48 Stück übrig. Dann gab er auch jedem Kinde 15 Nüsse und behielt da 15 Stück übrig. Wie viel Aepfel und Nüsse hatte er gekauft, und wie viel Kinder hatte er?

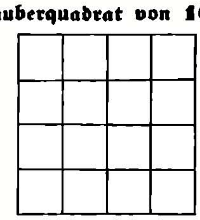
### 47. Der Gänserich und der Gänseschwarm.

Ein Gäns'rich watschelte in Ruh
In einem Erlgesträuche,
Da flog ein Gänseschwarm hinzu
Von einem nahen Teiche.
Der Gäns'rich sprach: Ich grüß euch schön!
Fürwahr, ich bin verwundert,
Euch insgesammt allhier zu seh'n,
Ihr seid gewiß an Hundert!"
Ein kluges Gänschen d'rauf versetzt:
„Wird viel zu Hundert fehlen!
Du hast zu hoch die Zahl geschätzt,
D'rum magst du selbst nun zählen.
Verdopple uns're Zahl, dann sei
Die Hälfte noch gewonnen;
Ein Viertel und Du, Freund, dabei,
Wirst Hundert dann bekommen."
Das kluge Gänslein flog geschwind
Zu den verlass'nen Schaaren;
Du aber sage, liebes Kind,
Wieviel es Gänse waren?

### 69. Die 3 Freunde.

Fritz, Bast und Hans, die sahen Geld
Auf einem Tische hingezählt.
Fritz sagte drauf: Mein Beutel enthält
Zweimal soviel, als dieses Geld.
Da hab ich dreimal soviel, sagt Bast,
Als Du angeblich im Beutel hast.
Hans wendet sich an Bast und setzt hinzu:
Und ich hab' viermal soviel, als Du.
160 Thaler hatten sie alle Drei;
Rechne nun aus und sag es ohne Scheu,
Wieviel Geld auf dem Tische wohl lag
Und jede Person gehabt haben mag? —

### 119. Zauberquadrat von 16 Feldern.



Wie werden die sechszehn Zahlen von 1 bis 16 so in obiges Quadrat vertheilt, daß, wenn man die Zahlen addirt, welche in den vier Feldern in einer und derselben Reihe stehen, die Summe immer 34 beträgt?

### 1[illegible]3. Wer von 3[illegible] [illegible]chenpfennigen den letzten weg[illegible] [illegible] gewonn[illegible].

Wie werden 30 auf den Tisch gelegte Rechenpfennige mit noch Jemandem sämmtlich nach und nach so weggenommen, daß immer einer um den andern eine beliebige Anzahl, aber nicht über 6 Stück, nehmen darf, und man auf solche Weise zuletzt davon nimmt, indem der zuletzt Wegnehmende gewonnen hat?

### 144. Künstliche Wegnahme.

Ein Vater legte 36 Nüsse in ein Quadrat nachstehender Gestalt auf den Tisch und sagte zu seinem Sohne: „Kannst Du 6 Stück so wegnehmen, daß in jeder wag- und senkrechten Reihe eine gerade Anzahl Nüsse liegen bleiben, so sollen Dir die 6 Nüsse geschenkt sein." Der Sohn nahm hierauf auch wirklich auf die ausbedungene Weise 6 Stück davon: welche waren es wohl?

Lage der Nüsse? 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0

### 160. Die errathene Rechnung.

Läßt man Jemand eine beliebige Zahl sich denken, diese Zahl mit 2 multipliciren, dann zu diesem Product irgend eine gerade Zahl addiren, diese Summe halbiren oder, was einerlei ist, durch 2 dividiren und die gedachte Zahl davon abziehen; wie kann man nun die übrig gebliebene Zahl, ohne die Rechnung selbst zu sehen, oder sich etwas sagen zu lassen, nennen?

### 194. Worträthsel.

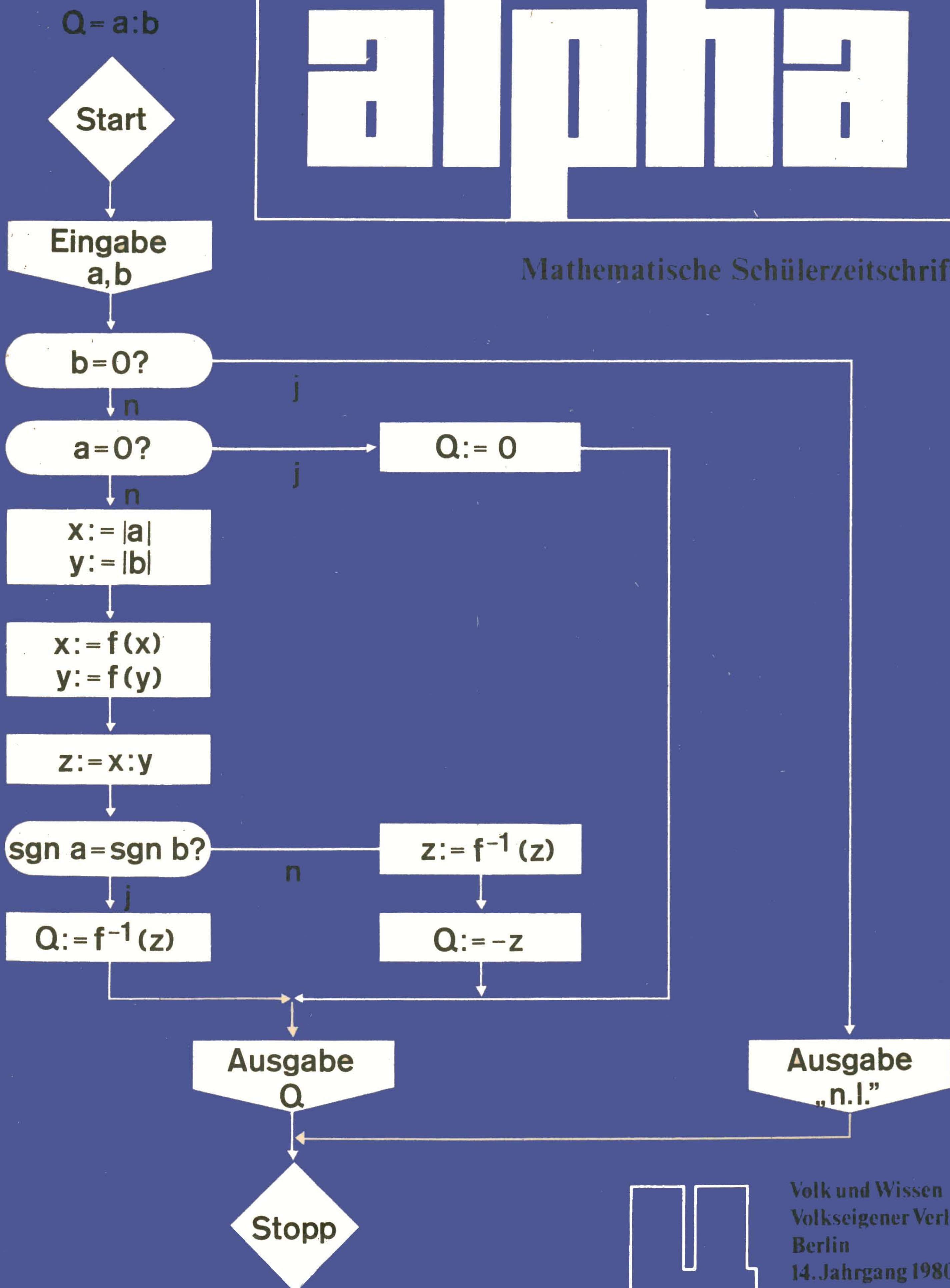
Wenn man vier gewisse Zahlen mit Buchstaben schreibt, und von der ersten den zweiten, von der zweiten und dritten den ersten und von der letzten Zahl den dritten Buchstaben nimmt und daraus ein Wort bildet, so giebt das Wort, in Beziehung zu diesem Schriftchen und besonders zu dieser Aufgabe, eine recht treffende Benennung. Die vier Zahlen sind folgendermaßen zu finden: Subtrahirt man die erste Zahl von der Summe der zweiten, dritten und vierten, so bleibt 79, die zweite Zahl von der Summe der ersten, dritten und vierten, so bleibt 61, die dritte Zahl von der Summe der ersten, zweiten und vierten, so bleibt 39, die vierte Zahl von der Summe der ersten zweiten und dritten, so bleibt 19. Welches sind die Zahlen und wie heißt das Wort?

Vorrede zur ersten Auflage (1831):
Nicht Eigennutz oder die Sucht, in die Reihen der arithmetischen Schriftsteller zu treten, verleiten mich, diese Blätter, die ich früher bloß zu meinem Vergnügen gesammelt habe, dem Drucke zu übergeben; nur das Zureden einiger Freunde und der Wunsch, die gesellige Unterhaltung zu befördern und der Jugend in ihren Freistunden eine angenehme und nützliche Beschäftigung an die Hand zu geben, waren die Triebfedern, welche mich dazu bewogen. Ich schmeichle mir, daß dieses Werkchen seinen Zweck nicht ganz verfehlen werde; erstlich, weil es, wie schon der Titel zeigt, räthselähnliche und belustigende arithmetische Kunstaufgaben enthält, und zweitens, weil das Studium der Mathematik, den Aussprüchen der größten Männer zufolge, eins der vorzüglichsten Bildungsmittel des menschlichen Geistes ist... *Der Verfasser*

(Lösungen zu diesem Beitrag siehe S. 72.)

# alpha

Mathematische Schülerzeitschrift




4


Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos bzw. Vignetten:* Briefmarken: Archiv J. Lehmann, Leipzig (S. 76); Zentralinstitut für Astrophysik, Potsdam-Babelsberg (S. 77); K. Maschkin, Moskau (S. 82, 87, 88, III. US.); J. Lehmann, Leipzig (S. 84).
Das Titelblatt wurde nach Vorlage von L. Flade, Halle, gestaltet.
*Titelblatt:* W. Fahr, Berlin
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
*Redaktionsschluß:* 25. April 1980

# alpha
## Mathematische Schülerzeitschrift

# Inhalt



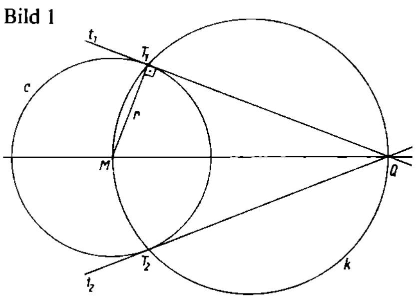
* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Ohne Zirkel geht es auch

**Konstruktionen mit beschränkten Mitteln**

Aus der Schule ist es uns geläufig, für geometrische Konstruktionen auf dem Zeichenblatt außer einem Bleistift die Instrumente Zirkel und Lineal zu verwenden. Sollen z. B. an eine Kreislinie $c$ von einem außerhalb $c$ liegenden Punkt $Q$ die Tangenten konstruiert werden, dann gehen wir in folgender Weise vor: Ist $M$ der Mittelpunkt von $c$, so halbieren wir die Strecke $\overline{MQ}$ mittels Zirkel und Lineal, stechen anschließend mit dem Zirkel im Halbierungspunkt ein und schlagen um diesen Punkt einen Kreis mit $\overline{MQ}$ als Durchmesser. Dieser Hilfskreis $k$ schneidet $c$ in den Punkten $T_1$ und $T_2$. Die mit dem Lineal gezogenen Verbindungsgeraden $t_1 = g(QT_1)$ und $t_2 = g(QT_2)$ sind dann die gesuchten Tangenten an $c$. Der Satz des Thales läßt sich bei dieser Konstruktion verwenden, weil der Berührungsradius eines Kreises und die zugehörige Tangente aufeinander senkrecht stehen (Bild 1).

Bild 1

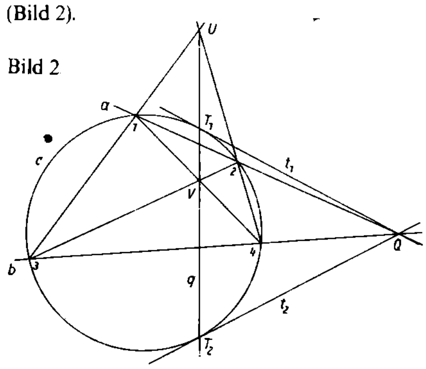



Im folgenden wird nun gezeigt, wie wir die Tangenten an den Kreis $c$ aus $Q$ auch dann konstruieren können, wenn wir den Zirkel einmal vergessen haben und die Kreislinie nur einer Schablone entnehmen. Der Kreismittelpunkt steht daher ebenfalls nicht zur Verfügung. Damit stellt sich uns die Aufgabe:

An eine Kreislinie $c$, deren Mittelpunkt nicht vorliegt, sind von einem außerhalb $c$ liegenden Punkt $Q$ unter alleiniger Verwendung des Lineals die Tangenten zu konstruieren.

Zunächst werde die Konstruktion rezeptmäßig ohne einen Beweis vorgeführt. Durch $Q$ sind zwei Geraden $a$ und $b$ zu legen, von denen lediglich gefordert wird, daß sie die Kreislinie $c$ in je zwei Punkten schneiden. Der Schnitt von $a$ mit $c$ liefert die Punkte 1 und 2. Der Schnitt von $b$ mit $c$ liefert die Punkte 3 und 4. Jetzt bietet es sich an, Verbindungsgeraden zu ziehen. Wir erhalten die Geraden $g_{13} = g(1,3)$, $g_{24} = g(2,4)$, $g_{14} = g(1,4)$, $g_{23} = g(2,3)$. Das Geradenpaar $(g_{13}, g_{24})$ schneidet sich im Punkt $U$. Das Geradenpaar $(g_{14}, g_{23})$ schneidet sich im Punkt $V$. Die Verbindungsgerade $q = g(U,V)$ schneidet $c$ in den Punkten $T_1$ und $T_2$. Es wird behauptet, daß die Verbindungsgeraden $t_1 = g(QT_1)$ und $t_2 = g(QT_2)$ die gesuchten Tangenten von $Q$ an $c$ sind (Bild 2).

Bild 2




Bei genauer Konstruktion finden wir diese Behauptung durch das Ergebnis zunächst rein anschaulich bestätigt. Der Mittelpunkt $M$ ist für diese Konstruktion entbehrlich. Mit den folgenden Ausführungen soll die Richtigkeit dieser Konstruktion bewiesen werden. Hierzu ist etwas weiter auszuholen. Vor allem sind noch einige grundlegende Begriffe einzuführen und Sätze zu beweisen.

### Pol – Polare, Potenz, Inversion

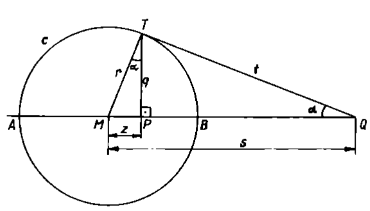
Hat der Kreis $c$ den Radius $r$ und setzt man für die Länge der Strecken $\overline{QT}$ und $\overline{QM}$ die Größen $t$ bzw. $s$, so folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$s^2 = r^2 + t^2 \quad \text{oder} \quad s^2 - r^2 = t^2.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$(s+r)(s-r) = t^2 \quad \text{oder}$$
$$m(AQ) \cdot m(BQ) = t^2 \qquad (1)$$

Bild 3




Man bezeichnet das Produkt der Längen der Strecken $\overline{AQ}$ und $\overline{BQ}$ als die *Potenz* des Punktes $Q$ bezüglich der Kreislinie $c$ (Bild 3).

Das Lot $q$ auf $\overline{AB}$ durch $T$ heißt die *Polare* von $Q$ bezüglich $c$. Andererseits ist der Punkt $Q$ der Pol der Geraden $q$ bezüglich $c$. Der Lotfußpunkt von $q$ auf $\overline{AB}$ werde mit $P$ bezeichnet. Die Distanz $MP$ sei $z$. Dann gilt auf Grund der Ähnlichkeit der zugeordneten Dreiecke die Proportion $z:r = r:s$. Daraus folgt für den Abstand der Polaren vom Kreismittelpunkt:

$$z = \frac{r^2}{s} \qquad (2)$$

Von den Punkten $P$ und $Q$ sagt man, sie liegen *invers* bezüglich der Kreislinie $c$. Die durch den Kreis vermittelte Punktverwandtschaft, welche $P$ in $Q$ überführt, bezeichnet man als *Kreisinversion*. Diese geometrische Verwandtschaft ist *involutorisch*, denn sie führt auch den Punkt $Q$ in den Punkt $P$ zurück.

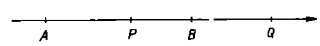
### Doppelverhältnis

Weiterhin ist der Begriff des *Doppelverhältnisses* von vier Punkten, die auf einer Geraden liegen, von Interesse. Auf einer orientierten Geraden $g$ sind die vier Punkte $A$, $B$, $P$, $Q$ willkürlich vorgegeben. Dann versteht man unter dem *Doppelverhältnis* dieser vier Punkte den Ausdruck

$$DV(A,B;P,Q) = \frac{m(AP)}{m(AQ)} : \frac{m(BP)}{m(BQ)} \qquad (3)$$

In (3) bedeutet z. B. $m(AP)$ die Länge der von $A$ nach $P$ führenden orientierten Strecke. Die Längen gehen als vorzeichenbehaftete Größen in den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) ein. Man bezeichnet $A$ und $B$ als die *Grundpunkte* und $P$ und $Q$ als die *Folgepunkte* des Punktequadrupels. Offenbar ist das Doppelverhältnis des Punktequadrupels negativ, wenn sich die Grundpunkte und Folgepunkte gegenseitig trennen (Bild 4a).

Bild 4a




Liegt keine gegenseitige Trennung von Grundpunkten und Folgepunkten vor, so ist das Doppelverhältnis des Quadrupels eine positive Zahl (Bild 4b und 4c). Fallen zwei Punkte zusammen, so sind gesonderte Überlegungen erforderlich, die wir noch zurückstellen.

Bild 4b

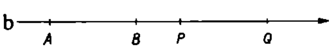
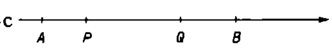



Bild 4c




### Harmonische Lage eines Punktequadrupels

Als Anwendung soll das Doppelverhältnis $DV(A,B;P,Q)$ für das auf dem Durchmesser von $c$ liegende Punktequadrupel $(A,B;P,Q)$ bestimmt werden. Schließt entsprechend Bild

3 die Tangente $t$ mit dem Durchmesser $s$ den Winkel $\alpha$ ein, so findet sich dieser Winkel zwischen dem Berührungsradius und der Polaren wieder. Damit erhält man

$$\begin{aligned} m(AP) &= r(1+\sin\alpha), \\ m(AQ) &= r\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right), \\ m(BP) &= r(\sin\alpha - 1), \\ m(BQ) &= r\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (4) in (3) findet man

$$DV(A,B;P,Q) = \frac{r(1+\sin\alpha)}{r(\sin\alpha - 1)} \cdot \frac{r\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)}{r\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right)} = -1 \tag{5}$$

Gilt, wie hier, für ein Punktequadrupel $DV(A,B;P,Q) = -1$, so sagt man, die vier Punkte liegen *harmonisch* oder sie bilden einen *harmonischen Punktwurf.* Punktequadrupel in harmonischer Lage treten in vielen geometrischen Beziehungen auf.

**Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektion**

Es gilt der Satz: Unterwirft man ein Quadrupel von Punkten, das auf einer Geraden liegt, einer *Zentralprojektion*, so bleibt das Doppelverhältnis ungeändert.

Diese bemerkenswerte Eigenschaft soll bewiesen werden. Gemäß Bild 5 gehen bei der Zentralprojektion $A$ in $A'$, $B$ in $B'$, $P$ in $P'$ und $Q$ in $Q'$ über. Nach unserem Satz besteht die Gleichung

$$DV(A,B;P,Q) = DV(A',B';P',Q') \tag{6}$$

Bild 5

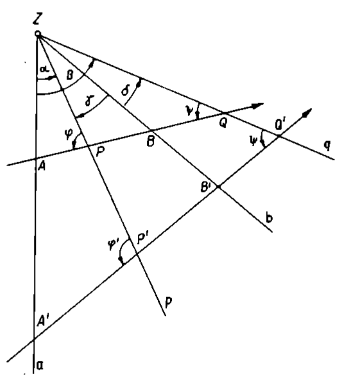



Bild 5 leistet uns Hilfe bei Aufstellung der geometrischen Beziehungen. Durch Anwendung des Sinus-Satzes der ebenen Trigonometrie auf die Teildreiecke des Dreiecks $\triangle ZAQ$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{m(AP)}{m(ZA)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\phi}, \quad \frac{m(AQ)}{m(ZA)} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi}, \\ &\frac{m(BP)}{m(ZB)} = \frac{\sin\gamma}{\sin(180-\phi)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\phi}, \\ &\frac{m(BQ)}{m(ZB)} = \frac{\sin\delta}{\sin\psi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei ist zu beachten, daß den Winkelgrößen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ eine der jeweils gegenüberliegenden Seite entsprechende Orientierung aufzuprägen ist. Setzt man die mittels des Sinus-Satzes aufgestellten Beziehungen (7) in (3) ein, ergibt sich

$$DV(A,B;P,Q) = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \tag{8}$$

Es sei vermerkt, daß in dem vorliegenden Beispiel allein dem Winkel $\gamma$ eine negative Orientierung zuzuordnen ist. Folglich ergibt sich hier für das Doppelverhältnis dieser vier Punkte eine negative Zahl. Wendet man den Sinus-Satz der ebenen Trigonometrie auf die Teildreiecke des Dreiecks $\triangle ZA'Q'$ an, so resultieren folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{m(A'P')}{m(ZA')} = \frac{\sin\alpha}{\sin\phi'}, \quad \frac{m(A'Q')}{m(ZA')} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi'}, \\ &\frac{m(B'P')}{m(ZB')} = \frac{\sin\gamma}{\sin(180-\phi')} = \frac{\sin\gamma}{\sin\phi'}, \\ &\frac{m(B'P')}{m(ZB')} = \frac{\sin\delta}{\sin\psi'}. \end{aligned} \tag{9}$$

Setzt man (9) in (3) ein, so ergibt sich

$$DV(A',B';P',Q') = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \tag{10}$$

Aus (8) und (10) folgt die Bestätigung unseres Satzes, der formelmäßig gefaßt wird durch die Gleichung

$$DV(A,B;P,Q) = DV(A',B';P',Q'). \tag{6}$$

**Doppelverhältnis eines Vierstrahles**

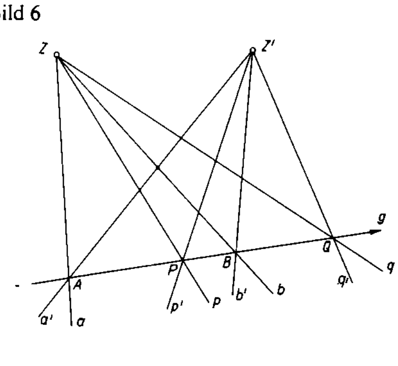
Aus Bild 5 und den Ergebnissen (8) und (10) erkennen wir, daß man auch von vier sich in einem Punkt schneidenden Geraden das Doppelverhältnis bilden kann. Nach der von uns bewiesenen Gleichung (8) resultiert für das Doppelverhältnis der vier Geraden $a,b;p,q$:

$$DV(a,b;p,q) = \frac{\sin\sphericalangle ap}{\sin\sphericalangle aq} : \frac{\sin\sphericalangle bp}{\sin\sphericalangle bq} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \tag{11}$$

Aus (11) folgt der Satz: Das Doppelverhältnis von vier Geraden eines Büschels ist gleich dem Doppelverhältnis der Sinus der von den entsprechenden Geradenpaaren eingeschlossenen orientierten Winkel.

Auch hier kann man zeigen, daß das Doppelverhältnis von vier sich in einem Punkt schneidenden Geraden bei Zentralprojektion ungeändert bleibt. Zu Bild 5 läßt sich ein duales Gegenstück anführen. In Bild 6 sind zwei sich perspektiv zugeordnete Vierstrahlen mit den Punkten $Z$ bzw. $Z'$ als Träger dargestellt.

Bild 6




Offenbar gilt

$$DV(A,B;P,Q) = DV(a,b;p,q) \text{ und}$$
$$DV(A,B;P,Q) = DV(a',b';p',q').$$

Daraus kann man schließen:

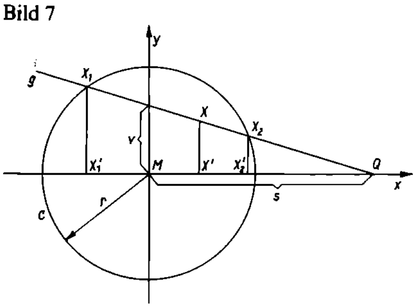
$$DV(a,b;p,q) = DV(a',b';p',q). \tag{12}$$

**Zugang zur Polaren über harmonisches Punktequadrupel**

Für die folgenden analytischen Untersuchungen werde der Mittelpunkt $M$ des Kreises $c$ in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt (Bild 7). Die Gleichung für $c$ lautet dann

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{13}$$

Bild 7




Der feste Punkt $Q$ liege auf der $x$-Achse im Abstand $s$ vom Ursprung. Eine Gerade allgemeiner Lage durch $Q$ hat dann die Gleichung

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{v} = 1. \tag{14}$$

Von der Geraden $g$ werde gefordert, daß sie $c$ in den beiden reellen Punkten $X_1$ und $X_2$ schneidet. Zu den drei Punkten $X_1$, $X_2$ und $Q$ suchen wir jetzt einen vierten Punkt $X$, so daß gilt

$$DV(X_1,X_2,X,Q) = -1. \tag{15}$$

Die Rechnung läßt sich dadurch vereinfachen, daß wir die vier Punkte $X_1$, $X_2$, $X$ und $Q$ auf die $x$-Achse senkrecht projizieren. Wir erhalten dann die vier Punkte $X_1'$, $X_2'$, $X'$, $Q$ mit den Koordinaten $x_1$, $x_2$, $z$ und $s$. Da sich bei Parallelprojektion (Sonderfall der Zentralprojektion) das Doppelverhältnis der vier Punkte nicht ändert, können wir die Forderung (15) auch umschreiben in

$$\begin{aligned} &\frac{-x_1+z}{-x_1+s} : \frac{-x_2+z}{-x_2+s} = -1 \text{ oder} \\ &\frac{-x_1+z}{-x_1+s} = \frac{-x_2+z}{x_2-s}. \end{aligned} \tag{16}$$

Aus der Proportion (16) folgt die Gleichung

$$2x_1x_2 + 2zs - (x_1+x_2)(z+s) = 0. \tag{17}$$

Um den Wert für $z$ aus (17) berechnen zu können, fehlen uns noch die Abszissenwerte $x_1$ und $x_2$ der Schnittpunkte von $g$ mit $c$. Zunächst lösen wir Gleichung (14) nach $y$ auf:

$$y = \left(1 - \frac{x}{s}\right)v. \tag{18}$$

Setzt man (18) in (13) ein, so folgt weiter:

$$x^2(s^2+v^2) - 2xsv^2 + (v^2-r^2)s^2 = 0. \tag{19}$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$x_1=\frac{v^2s-W}{v^2+s^2},\ x_2=\frac{v^2s+W}{v^2+s^2}\ \text{mit}$$
$$W=s\sqrt{r^2(s^2+v^2)-v^2s^2} \qquad (20)$$

Führt man diese Werte aus (20) für $x_1$ und $x_2$ in (17) ein, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung für die Abszisse $z$ des Punktes $X$

$$z=\frac{r^2}{s}. \qquad (21)$$

An dem Ergebnis (21) ist bemerkenswert, daß $z$ unabhängig von $v$, d. h. für jede Gerade des Büschels durch $Q$ gleich ist. Durchläuft also $g$ das Büschel von Geraden durch $Q$, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt $X$ auf einer Geraden parallel zur $y$-Achse im Abstand $z=r^2/s$. Rückblickend auf das Ergebnis (2) stellen wir fest, daß diese Gerade identisch ist mit der Polaren $q$ des Punktes $Q$ bezüglich $c$. Ist also $X$ ein Punkt der Polaren $q$ von $Q$ bezüglich $c$, dann erfüllt das Punktequadrupel $(X_1,X_2;X,Q)$ die Forderung (15).

**Konstruktiver Zugang zur Polaren q mittels Lineal**

Gemäß Bild 8 ist zunächst wieder der Kreis $c$ mit dem außerhalb $c$ liegenden Punkt $Q$ vorgegeben. Von $Q$ werden zwei Sekanten $s_x$ und $s_y$ gezogen, die $c$ in den Punktepaaren $(X_1,X_2)$ bzw. $(Y_1,Y_2)$ schneiden sollen. Wir ziehen fünf weitere Verbindungsgeraden. Die Geraden $a=g(X_1,Y_1)$ und $b=g(X_2,Y_2)$ schneiden sich in dem Punkt $Z_1$. Die Geraden $d=g(X_1,Y_2)$ und $e=g(X_2,Y_1)$ schneiden sich im Punkt $Z_2$. Die Verbindungsgerade $f=g(Z_1,Z_2)$ schneidet $s_x$ im Punkt $X$ und $s_y$ im Punkt $Y$. Wegen der perspektiven Zuordnung der Punktepaare $(X_1,Y_1)$, $(X_2,Y_2)$, $(X,Y)$, $(Q,Q)$ mit $Z_1$ als Perspektivitätszentrum gilt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=DV(Y_1,Y_2;Y,Q)$$
$$=\frac{m(Y_1,Y)}{m(Y_1,Q)}:\frac{m(Y_2,Y)}{m(Y_2,Q)}. \qquad (22)$$

Wegen der perspektiven Zuordnung der Punktepaare $(X_1,Y_2)$, $(X_2,Y_1)$, $(X,Y)$ und $(Q,Q)$ mit $Z_2$ als Perspektivitätszentrum gilt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=DV(Y_2,Y_1;Y,Q)$$
$$=\frac{m(Y_2,Y)}{m(Y_2,Q)}:\frac{m(Y_1,Y)}{m(Y_1,Q)}. \qquad (23)$$

Aus (22) und (23) folgt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=\frac{1}{DV(X_1,X_2;X,Q)} \qquad (24)$$

oder

$$(DV(X_1,X_2;X,Q))^2=1. \qquad (25)$$

Da sich die Paare von Grundpunkten $(X_1,X_2)$ und Folgepunkten $(X,Q)$ nach Konstruktion gegenseitig trennen, gilt weiterhin

$$DV(X_1,X_2;X,Q)<0. \qquad (26)$$

Aus (25) und (26) folgt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=-1 \qquad (27)$$

d. h. das Punktequadrupel $(X_1,X_2;X,Q)$ bildet einen harmonischen Wurf. Die gleiche Aussage gilt für das Punktequadrupel $(Y_1,Y_2;Y,Q)$. Mit (2), (21) und (27) ist gezeigt, daß die Verbindungsgerade $f=g(Z_1Z_2)$ identisch ist mit der Polaren $q$ von $Q$ bezüglich $c$. $Z_1$ und $Z_2$ sind nach Konstruktion gleichfalls Punkte dieser Polaren. Diese Polare schneidet, wie oben festgestellt, den Kreis $c$ in den Berührungspunkten $T_1$ und $T_2$ der Tangente aus $Q$ an $c$. Damit ist der Nachweis der Richtigkeit der Tangentenkonstruktion gemäß Bild (2) erbracht.

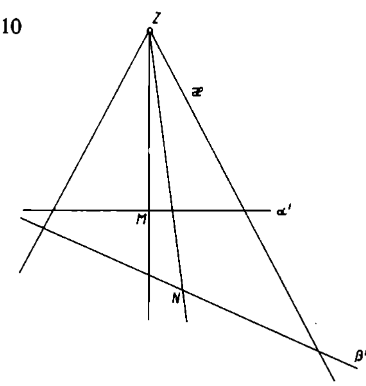
**Verallgemeinerung**

Die Tangentenkonstruktion nach Bild 2 kommt im Vergleich mit der Konstruktion nach Bild 1 mit einfacherem Zeichengerät und weniger Vorgaben aus. Dafür ist die theoretische Begründung der zweiten Konstruktion wesentlich aufwendiger als die Begründung der ersten Konstruktion. Trotzdem hat die zweite Konstruktion noch eine grundsätzliche Überlegenheit gegenüber der ersten Konstruktion. Sie ist nämlich verallgemeinerungsfähig und läßt sich auf beliebige Kegelschnitte übertragen.

Bild 9 demonstriert die Übertragung der Tangentenkonstruktion auf die Parabel. Sie läßt sich auch bei Ellipse und Hyperbel in analoger Weise anwenden. Als Begründung der Übertragbarkeit dieser Konstruktion vom Kreis auf beliebige Kegelschnitte ist zunächst anzuführen, daß sich jeder Kegelschnitt durch Zentralprojektion aus einem Kreis erzeugen läßt. Am einfachsten kann dies mit dem scharf begrenzten Lichtkegel einer Taschenlampe demonstriert werden. Richtet man die Taschenlampe senkrecht auf eine Hauswand, so entsteht ein Kreis als Lichtfleck. Neigt man die Achse der Taschenlampe ein wenig gegen die Hauswand, so entsteht zunächst eine Ellipse. Bei weiterer Neigung der Taschenlampe wird der beleuchtete Teil der Hauswand von einer Parabel und schließlich von einem Hyperbelast begrenzt. Die von uns in Bild 2 zur Konstruktion benutzten Geraden gehen bei Zentralprojektion wieder in Geraden über. Schnittpunkte von Geraden bilden sich auf Schnittpunkte von Geraden ab. Doppelverhältnisse von den auf Geraden liegenden Punktequadrupeln bleiben ungeändert. Also geht ein harmonischer Punktwurf wieder in einen solchen Wurf über. Eine berührende Gerade geht wieder in eine berührende Gerade (Tangente) über. Alle *Konstruktionsschritte* sind damit *projektiv-invariant*.

Hingegen wird bei der ersten Konstruktion mit einem rechten Winkel gearbeitet. Dieser ist nicht projektiv invariant. Auch der Kreismittelpunkt geht bei Zentralprojektion nicht in den Mittelpunkt des Kegelschnittes über. Bild 10 veranschaulicht, wie ein Drehkegel $\kappa$ von zwei projizierenden Ebenen geschnitten wird. Der Schnitt von $\kappa$ mit der Ebene $\alpha$ liefert einen Kreis, dessen Mittelpunkt in $M$ liegt. Der Schnitt von $\kappa$ mit $\beta$ liefert eine Ellipse, deren Mittelpunkt in $N$ liegt. $M$ und $N$ liegen nicht auf einem Projektionsstrahl durch $Z$. Folglich können Mittelpunkte von Kegelschnitten nicht projektiv invariant in Tangentenkonstruktionen einbezogen werden.

Bild 10



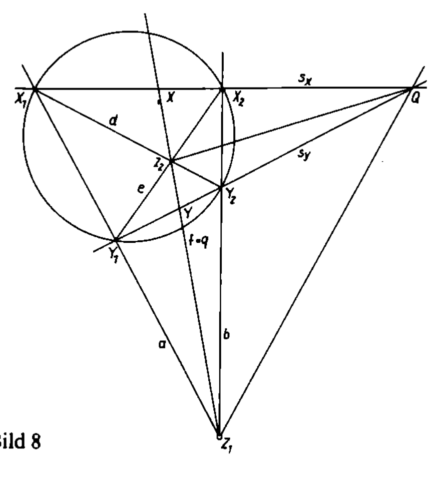
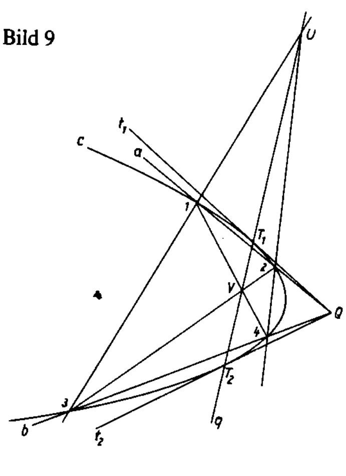




Bild 8

Bild 9




**Weitere Anwendungen**

Mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe und bewiesenen Sätze läßt sich nun auch folgende Aufgabe allein mit Hilfe des Lineals durch Schneiden und Verbinden lösen.

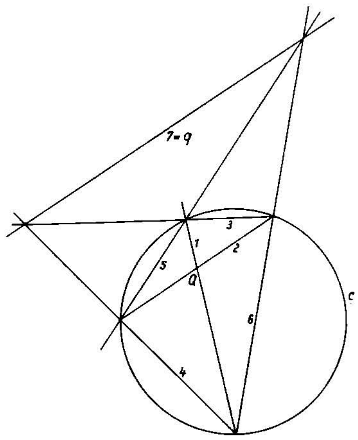
**Aufgabe**

Gegeben ist eine Kreislinie $c$ und ein auf $c$ liegender Punkt $T$. Man konstruiere die Tangente an $c$ in $T$ allein mittels des Lineals.

Als Vorbetrachtung konstruieren wir die Polare $q$ von einem Punkt $Q$, der im Inneren des Bezugskreises $c$ liegt. Hierzu wird $Q$ mit zwei Geraden 1 und 2 angegittert. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit $c$ lassen sich so miteinander verbinden, daß ein vollständiges Vierseit entsteht.

Die dritte, außerhalb $c$ liegende Diagonale $q$ des vollständigen Vierseits ist bereits die gesuchte Polare von $Q$ bezüglich $c$ (Bild 11).

Bild 11



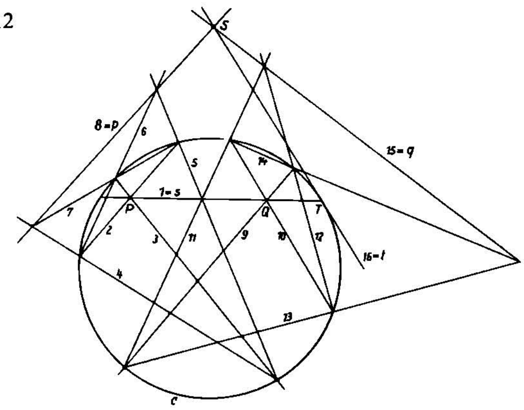

Nun gehen wir an die Lösung der gestellten Aufgabe. Hierzu legen wir durch $T$ eine beliebige Kreissehne $s$. Auf dieser Sehne werden zwei Punkte $P$ und $Q$ willkürlich angenommen. Nach dem oben geschilderten Verfahren bestimmen wir die Polaren $p$ und $q$ von $P$ bzw. $Q$ bezüglich $c$. Diese schneiden sich im Punkt $S$. Die Verbindungsgerade von $S$ mit $T$ ist bereits die gesuchte Tangente $t$ (Bild 12).

Zur Begründung der Konstruktion ist die Tatsache anzuführen, daß die Polare $x$ für jeden Punkt $X \in s$ durch $S$ geht. Da $T \in s$ gilt, wird auch die Tangente $t$ an $c$ in $T$ durch $S$ gehen, denn $t$ ist die Polare von $T$ bezüglich $c$.

**Ausblick**

Ein wesentlich größeres Feld geometrischer Konstruktionen in der Zeichenebene beherrscht man mit dem Lineal allein, wenn außer der Kreislinie $c$ auch deren Mittelpunkt $M$ vorgegeben ist. Zum Beispiel kann man dann durch Schneiden und Verbinden Strecken halbieren, das Lot von einem Punkt auf eine Gerade fällen, Parallelen zu einer Geraden durch einen vorgegebenen Punkt zeichnen und Winkel halbieren. Äquivalent mit der Vorgabe einer Kreislinie und ihres Mittelpunktes ist die Vorgabe von zwei konzentrischen Kreislinien ohne deren gemeinsamen Mittelpunkt. Als Einstimmung auf diese weiterführende Problematik stellen wir uns folgende *Aufgabe:*

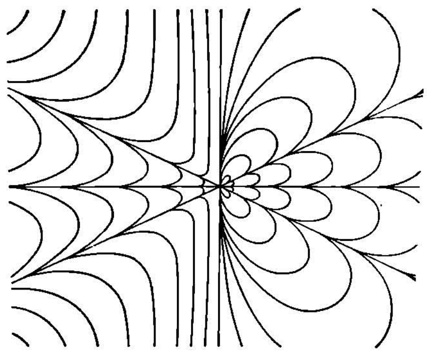
Bild 12




**Schöne Kurve**

Gegeben sind zwei konzentrische Kreislinien $c_1$ und $c_2$. Man konstruiere den gemeinsamen Mittelpunkt dieser Kreislinien unter alleiniger Verwendung des Lineals.

*Eberhard Schröder*



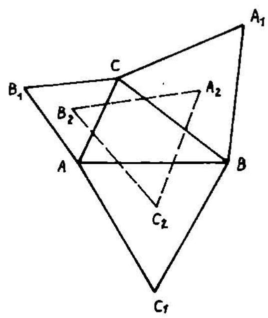
$p \frac{d\theta}{dp} = \operatorname{tg} 4 \operatorname{arc\,tg} \sin\theta$

## Mathematik und Mathematiker auf Briefmarken


# Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat.
# Dierck-Ekkehard Liebscher

*Stellvertreter des Direktors des Zentralinstituts für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR, Potsdam-Babelsberg*

▲1994▲ Über den Seiten eines Dreiecks $ABC$ werden nach außen gleichseitige Dreiecke $AB_1C$, $A_1BC$ und $ABC_1$ errichtet. Beweise, daß das Dreieck $A_2B_2C_2$ aus den Mittelpunkten dieser Dreiecke gleichseitig ist!




**Kurzbiographie**

Dierck-Ekkehard Liebscher
geb. 6.8.1940 in Dresden
Besuch der Albert-Einstein-OS in Neuenhagen, anschließend Besuch der OS Carl von Ossietzky, Berlin-Pankow
1957 bis 1962: Studium der Physik an der Humboldt-Universität Berlin
1966: Promotion zum Dr.rer.nat. an der Humboldt-Universität Berlin
1973: Promotion zum Dr.sc.nat. an der Akademie der Wissenschaften der DDR
1979: Ernennung zum Professor für theoretische Physik

Bücher
1967 (zus. mit E. Kreisel und H.-J. Treder): *Zur Quantengeometrodynamik*, Akademie-Verlag Berlin
1971 (zusammen mit H.-H. v. Borzeszkowski, U. Kasper, E. Kreisel und H.-J. Treder): *Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip*, Akademieverlag Berlin 1971, Atomizdat Moskau 1973
1973: *Theoretische Physik*, Akademie-Verlag Berlin 1973
1977: *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal*, Akademie-Verlag Berlin 1977, Vieweg-Verl. Braunschw. 1978, Izd. Mir Moskau 1980

**Historisch wertvolle Bücher in den Bibliotheken des ZIAP**

Copernicus: *De revolutionibus orbium coelestium* (1543); Alphonsinische Tafeln (1483); Rudolphische Tafeln v. Kepler (1626), Hauptwerke v. Archimedes (1544), Tycho Brahe, Galilei, Kepler, Hevelius; Sternatlanten v. Doppelmayr, Bode u. Schiller.

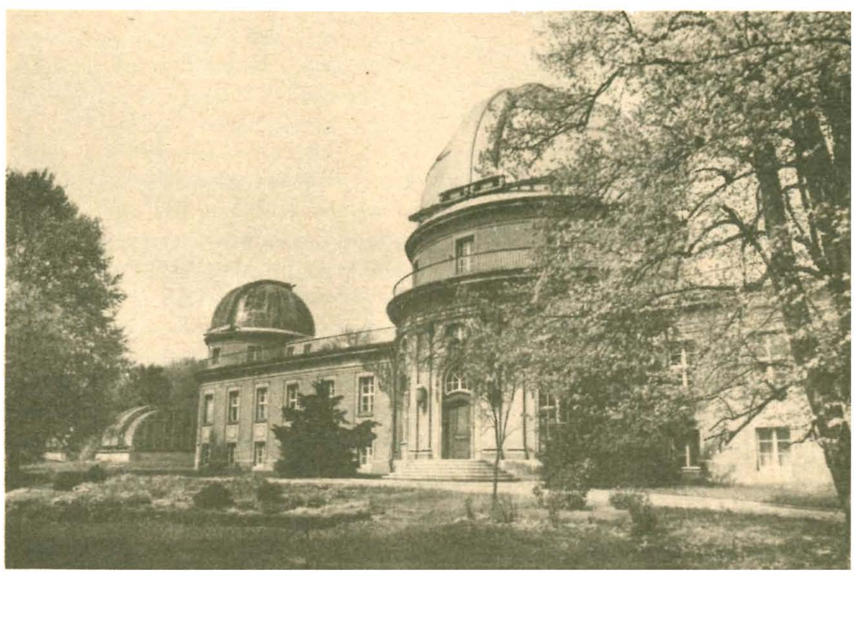
**Das Zentralinstitut für Astrophysik**

Zwei Schwerpunkte kennzeichnen die Arbeit des Zentralinstituts für Astrophysik. Der eine ist die Erforschung der kosmischen Magnetfelder, in Sonderheit die Magnetfelder der Sterne. Das theoretische Hinterland hierzu ist die Magnetohydrodynamik, für deren mathematische Theorie die magnetischen Sterne eindrucksvolle „Modelle" liefern. Die zweite, noch umfassendere Aufgabenstellung des Instituts ist die Erforschung der Struktur und der Entwicklung der Metagalaxis, d.h., des den astronomischen Beobachtungen zugänglichen Teil des Kosmos in seiner Gesamtheit. Diese kosmologische Fragestellung verbindet die Astrophysik mit der relativistischen Gravitationstheorie als einer der vorderen Fronten der physikalischen Grundlagenforschung. Mit diesen astronomischen und theoretisch-physikalischen Arbeiten schließt das ZIAP an die großen Traditionen der Relativitätstheorie, relativistischen Astrophysik und Kosmologie in Berlin und Potsdam an, die für immer mit den Namen von *Albert Einstein* und *Karl Schwarzschild* verbunden sind.

Andromeda-Nebel, aufgenommen mit dem 2-m-Teleskop des Karl-Schwarzschild-Observatoriums des ZI Astrophysik

Das Zentralinstitut für Astrophysik hat anläßlich des 100. Geburtstages von Albert Einstein die Patenschaft über den Mathe-Physik-Zirkel der OS *Albert Einstein* in Caputh übernommen. Alle Abteilungen des Instituts tragen dazu bei. Geometrie, Astronomie (Bau einer Sternuhr) und Arbeit mit Rechenautomaten sind die Gebiete, mit denen die Schüler der Klassen 7/8 bisher vertraut gemacht wurden.

Sternwarte Babelsberg des Zentralinstituts für Astrophysik



# Geometrie pseudoeuklidisch

Auf Grund unserer täglichen praktischen Erfahrungen sind wir es gewohnt, die axiomatisch aufgebaute (euklidische) Geometrie in unserer Vorstellung mit den auf einem Blatt Papier zeichenbaren ebenen Figuren zu verbinden. Zwei Figuren werden als kongruent angesehen, wenn die eine Bild der anderen bei einer Bewegung ist, die dem Bewegen gewöhnlicher Papierschnipsel entspricht.
In unserer Umwelt spielen rechte Winkel eine besondere Rolle. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß sich auch eine Reihe von Sätzen der Geometrie auf rechte Winkel beziehen; einer der wichtigsten davon ist der Satz des Pythagoras (Bild 1).

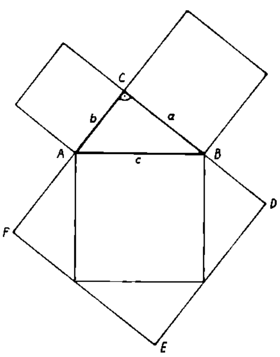



Bild 1

*Der Satz des Pythagoras*
Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*:
$A_\Delta = \frac{a \cdot b}{2}$
Flächeninhalt des Quadrats *CDEF*:
$A_\Box = (a+b)^2$
Es ist $A_\Box = c^2 + 4 \cdot A_\Delta$,
d. h. $(a+b)^2 = c^2 + 2 \cdot ab$,
also $a^2 + b^2 = c^2$

Der Begriff „rechter Winkel" scheint dabei kaum Probleme in sich zu bergen. Wir verbinden mit ihm vor allem zwei Aussagen (vgl. Bild 2):

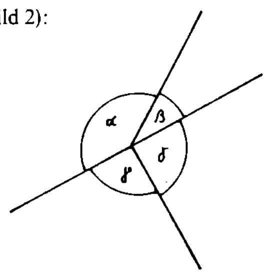


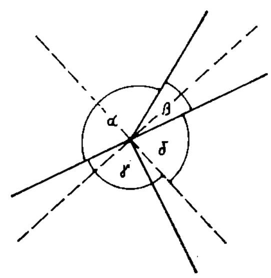

Bild 2

Die Teilung des gestreckten Winkels.
$\gamma$ und $\delta$ sind rechte Winkel, $\alpha$ und $\beta$ nicht.

a) Zwei rechte Winkel ergänzen einander stets zu einem gestreckten Winkel.
b) Ein Winkel ist genau dann ein rechter, wenn er zu seinem Nebenwinkel kongruent ist.
Durch die in diesen Aussagen festgehaltenen Eigenschaften wird aus der Menge aller Winkel eine Klasse von Winkeln, eben die Klasse der rechten Winkel, besonders herausgehoben. Es ist jedoch durchaus möglich, anstatt der üblichen auch eine andere Klasse von Winkeln durch Angeben entsprechender Eigenschaften hervorzuheben und ihr den Namen *rechter Winkel* zu geben.
Dies hat seinen Grund darin, daß der Begriff „kongruent" und der Begriff „rechter Winkel" nicht beide abgeleitet sind, sondern einer axiomatisch gesetzt werden muß, um den anderen finden zu können. Haben wir festgesetzt, was kongruent sein soll, leiten wir aus der Eigenschaft *b* den rechten Winkel ab.
Umgekehrt bestimmen wir mit *b* den Kongruenzbegriff, wenn wir die Klasse der rechten Winkel festlegen.

*Definition 1:* In der Ebene seien zwei Geraden *e* und *f* gegeben, die (im üblichen Sinne) senkrecht aufeinander stehen. Ein Winkel heißt genau dann *rechter Winkel*, wenn er durch eine der beiden durch seinen Scheitel verlaufenden Parallelen zu *e* bzw. *f* (im üblichen Sinne) halbiert wird.
Legt man der Geometrie diese Definition des Begriffs *rechter Winkel* zugrunde, so ist es üblich, von *pseudoeuklidischer Geometrie* zu sprechen.
(Um die Schreibweise zu vereinfachen, wollen wir die im Sinne pseudoeuklidischer Geometrie benutzten Begriffswörter kursiv drukken. Nicht kursiv gedruckte Begriffswörter beziehen sich auf die gewöhnlich euklidische Geometrie.)

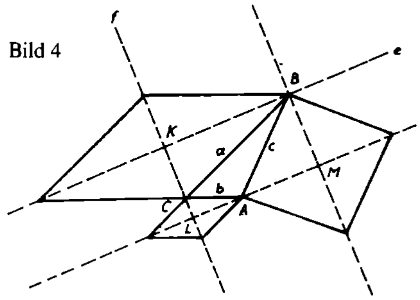
Bild 3




Pseudoeuklidisch *rechte Winkel*

In Bild 3 sind nach dieser Definition $\alpha$ und $\beta$ rechte Winkel, $\delta$ und $\gamma$ aber nicht.
Den Begriff „Flächeninhalt" benutzen wir wie gewohnt.
Das dürfen wir, weil wir entweder zeigen können, daß *kongruente* Dreiecke immer flächengleich sind, oder weil wir mit dieser Maßgabe einen zum Satz des Pythagoras analogen Satz beweisen können. Dies wollen wir im folgenden tun.
Ein *rechtwinkliges Dreieck* entsteht, wenn zwei Strahlen, die einen *rechten Winkel* bilden, von einer Geraden in genau zwei Punkten geschnitten werden (Bild 4).

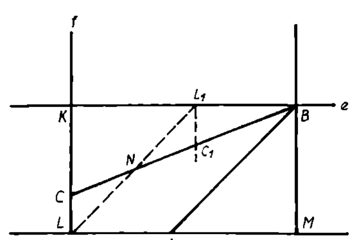
Bild 4




Der *Satz des Pythagoras* in der pseudoeuklidischen Geometrie
$c^2 = a^2 + b^2$

Rhomben, deren Diagonalen zu *e* bzw. *f* parallel sind, sind in der pseudoeuklidischen Geometrie *Quadrate*, denn alle ihre Winkel sind *rechte Winkel*. In Bild 4 sind über allen drei Seiten des *rechtwinkligen Dreiecks ABC Quadrate* gezeichnet worden.
Benutzen wir die Begriffe *Kathete und Hypotenuse* analog zu den entsprechenden Begriffen in der üblichen euklidischen Geometrie, so können wir den pseudoeuklidischen Satz des Pythagoras wie folgt formulieren:
*Satz:* In jedem *rechtwinkligen Dreieck* unterscheiden sich die Flächeninhalte der *Kathetenquadrate* genau um den Flächeninhalt des *Hypotenusenquadrats.*
*Beweis:* Im *rechtwinkligen Dreieck ABC* sei o.B.d.A. $\sphericalangle ACB$ der *rechte Winkel* und $\overline{CA} < \overline{CB}$. (Die Zeichen $<$, $\cong$, und $>$ werden im Sinne der üblichen euklidischen Geometrie gebraucht.)
Die Diagonalschnittpunkte der *Quadrate* über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ seien *M*, *K* bzw. *L*. Das Viereck *BKLM* ist in der üblichen Geometrie ein Rechteck.
Wir stellen (innerhalb der üblichen Geometrie), eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten der Teildreiecke $\triangle ACL$, $\triangle CBK$ und $\triangle BAM$ des Vierecks *BKLM* her (vgl. Bild 5):

Bild 5




Zum Beweis des pseudoeuklidischen Analogons des Satzes des Pythagoras

Durch den Punkt $L_1$ auf der Strecke $\overline{KB}$, für den $\overline{L_1B} \cong \overline{AL}$ gilt, zeichnen wir eine Parallele zu *BM*. Diese schneidet die Strecke $\overline{CB}$ in einem Punkt $C_1$.
Da die Parallele zu *e* durch *C* den Winkel $\sphericalangle ACB$ voraussetzungsgemäß halbiert, ist $\sphericalangle LCA \cong \sphericalangle KCB$ und somit $\triangle CBK \sim \triangle CAL$.

Zusammen mit $\overline{L_1B} \cong \overline{AL}$ folgt daraus

$$\triangle CLA \cong \triangle C_1L_1B. \quad (1)$$

Es gilt also

$$A_{KCC_1L} = A_{KCB} - A_{CLA}. \quad (2)$$

Weiterhin ist

$$\triangle AMB \cong \triangle L_1KL. \quad (3)$$

Ist $N$ der Schnittpunkt von $\overline{LL_1}$ mit $\overline{CB}$, so gilt $\triangle LNC \cong \triangle L_1NC_1$. (4)

Aus (3) und (4) folgt

$$A_{KCC_1L} = A_{AMB}, \quad (5)$$

was zusammen mit (2)

$$A_{AMB} = A_{KCB} - A_{CLA} \text{ ergibt.} \quad (6)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (6) mit dem Faktor 4, so erhält man die Behauptung des Satzes.

Wir definieren nun den Begriff *Länge einer Strecke* in der pseudoeuklidischen Geometrie.

*Definition 2:* Bezüglich einer festgelegten Einheit ist die Maßzahl der *Länge einer Strecke* gleich der Wurzel aus der Maßzahl des Flächeninhalts des *Quadrats* über dieser Strecke. Damit können wir den Satz des Pythagoras auch wie folgt formulieren.

*Satz:* Bei jedem *rechtwinkligen* Dreieck ist der Betrag der Differenz aus den Quadraten der Kathetenmaßzahlen gleich dem Quadrat der Hypotenusenmaßzahl.

Auch zu den übrigen grundlegenden Sätzen der ebenen euklidischen Geometrie (z. B. Satz des Thales, Peripheriewinkelsatz, Sätze über die Schnittpunkte der Höhen, Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden eines Dreiecks, Satz vom Feuerbach-Kreis) lassen sich in der pseudoeuklidischen Geometrie analoge Sätze formulieren und beweisen. Dies hat seinen tieferen Grund darin, daß euklidische und pseudoeuklidische Geometrie der Ebene Zwillingstöchter der projektiven Geometrie sind, die allerdings über den heutigen Schulstoff hinausgeht.

Die pseudoeuklidische Geometrie findet ihre Anwendung als Geometrie der schnellen Bewegungen in der Relativitätstheorie. Die festen Richtungen $e$ und $f$ kennzeichnen die Lage der Bewegungslinien von Lichtsignalen in ebenen Raum-Zeit-Diagrammen.

**Aufgaben**

▲1▲ Welche Strecken haben die Länge Null?

▲2▲ Unter welchen Bedingungen haben zwei Strecken die gleiche Länge? Welche Form hat ein pseudoeuklidischer *Kreis*?

▲3▲ Beweise, daß sich die pseudoeuklidischen Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden!

▲4▲ Versuche, weitere von der üblichen euklidischen Geometrie abweichende Tatsachen in der pseudoeuklidischen Geometrie zu finden!

▲5▲ Formuliere und beweise einige der am Schluß des Artikels genannten Sätze der pseudoeuklidischen Geometrie!

*D.-E. Liebscher*

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 2/79 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■1863 Zwei Fußballmannschaften $A$ und $B$ trugen ein Freundschaftsspiel aus. Insgesamt wurden 13 Tore geschossen. Das erste Spiel verlief unentschieden. Im zweiten Spiel fielen mehr Tore als im ersten Spiel, und zwar erzielte Mannschaft $A$ im zweiten Spiel doppelt soviel Tore wie Mannschaft $B$. Es sind die Ergebnisse beider Spiele zu ermitteln.

Im Heft 5/79 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, im ersten Spiel schoß jede der beiden Mannschaften $x$ Tore; es fielen somit $2x$ Tore. Im zweiten Spiel habe Mannschaft $B$ $y$ Tore, also Mannschaft $A$ $2y$ Tore geschossen; es fielen somit $3y$ Tore. Nun gilt

$$2x + 3y = 13,$$
$$3y = 12 + 1 - 2x,$$
$$y = 4 - \frac{2x-1}{3}.$$

Nur für $x_1 = 2, y_1 = 3$ und $x_2 = 5, y_2 = 1$ besitzt diese Gleichung positive ganzzahlige Lösungen.

| Spiele | Torverhältnis | Anzahl der Tore |
|---|---|---|
| 1. Spiel | 2 : 2 | 4 |
| 2. Spiel | 6 : 3 | 9 |

Die zweite Lösung entfällt (5 : 5, 2 : 1), da in diesem Fall im zweiten Spiel weniger Tore fielen als im ersten.

Wir stellen nun die Lösung von *Andreas Israel* aus Karl-Marx-Stadt vor, der Schüler der Klasse 7 der *Heinrich-Heine*-Oberschule ist. Andreas löste diese Aufgabe wie folgt:

Wenn im zweiten Spiel mehr Tore als im ersten Spiel gefallen sind, können im ersten Spiel höchstens 6 Tore gefallen sein. Da das erste Spiel unentschieden ausfiel, kommen nur die Torverhältnisse 0 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 3 in Betracht. Im ersten Spiel können also 0, 2, 4 oder 6 Tore gefallen sein; im zweiten Spiel 13, 11, 9 oder 7 Tore. Da im zweiten Spiel die Mannschaft $A$ doppelt so viele Tore wie die Mannschaft $B$ schoß, muß die Anzahl der Tore $(2n + n = 3n)$ des zweiten Spiels eine durch 3 teilbare natürliche Zahl sein. Das trifft nur zu für $n = 3$, also $3n = 9$. Das erste Spiel endete 2 : 2, das zweite Spiel endete 6 : 3 bei einem Sieg der Mannschaft $A$.

Wir stellen nun die Lösung von *Axel Schulz* aus Potsdam vor, der Schüler der Klasse 6a der OS 9 ist. Axel löste diese Aufgabe wie folgt:

| | Anzahl der Tore im | |
|---|---|---|
| Mannschaft | 1. Spiel | 2. Spiel |
| $A$ | $x$ | $2y$ |
| $B$ | $x$ | $y$ |

Nun gilt $2x + 3y = 13$ und $2x < 3y$. Daraus folgt weiter $7 \leqq 3y \leqq 13$, also $y = 3$ oder $y = 4$. Wegen $3 \cdot 4 = 12$ und $13 - 12 = 1$ entfällt $y = 4$ als Lösung, da im unentschiedenen ersten Spiel nicht genau 1 Tor gefallen sein kann. Für $y = 3$ erhalten wir $2x + 9 = 13$, also $x = 2$. Das erste Spiel endete 2 : 2, das zweite Spiel endete 6 : 3 für Mannschaft $A$.

# Ferientermine des Schuljahres 1980/81

Es stehen für die Erholung und Freizeitbeschäftigung der Schüler insgesamt 96 unterrichtsfreie Werktage (davon 23 Sonnabende) zur Verfügung.

Herbstferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 18. Oktober 1980
Erster Unterrichtstag:
Montag, 27. Oktober 1980

Ferien zum Jahreswechsel:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 20. Dezember 1980
Erster Unterrichtstag:
Montag, 5. Januar 1981

Winterferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 7. Februar 1981
Erster Unterrichtstag:
Montag, 2. März 1981

Unterrichtsfreie Tage:
Sonnabend, 18. April 1981;
Sonnabend, 2. Mai 1981

Frühjahrsferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 9. Mai 1981
Erster Unterrichtstag:
Montag, 18. Mai 1981

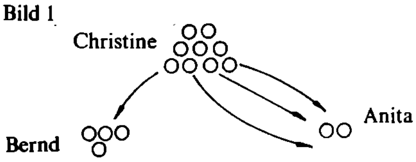
Unterrichtsfreier Tag:
Sonnabend, 6. Juni 1981

Sommerferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 4. Juli 1981
Erster Unterrichtstag:
Dienstag, 1. September 1981


# Das arithmetische Mittel

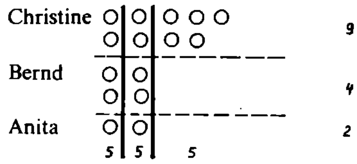
Anita, Bernd und Christine waren fleißig beim Suchen nach den Ostereiern, die ihre Eltern im Garten versteckt hatten.
Christine, die älteste von den dreien, hatte 9 Eier gefunden, Bernd hatte 4 aufgespürt, aber die kleine Anita hatte nur 2 entdeckt und war natürlich traurig.
Christine tröstete sie und schlug vor, ihren Geschwistern so viele ihrer Ostereier abzugeben, daß alle gleich viel besaßen. Und das tat sie dann auch: Bernd gab sie ein Osterei und an Anita 3 Eier. Jetzt hatte jeder gleich viel, und alle waren zufrieden (Bild 1).

Bild 1




Was die drei Geschwister hierbei taten, ist ein Vorgang, der sich in ganz anderen Zusammenhängen häufig abspielt, manchmal in wirklicher Ausführung, manchmal in Gedanken. Die drei hatten nämlich von den Anzahlen der Ostereier, also von 9, 2 und 4 den *Durchschnitt* gebildet.
Diesem Begriff begegnen wir an vielen Stellen. Wir erfahren, daß das Durchschnittsalter einer Fußballmannschaft 23 Jahre beträgt, wir hören, daß die durchschnittliche Körpergröße der Menschen allmählich zunimmt, wir lesen, daß die Durchschnittstemperatur des Monats August unter der üblichen lag. Um die Qualität einer Ernte einzuschätzen, berechnet man den durchschnittlichen Hektarertrag, die ständige Verbesserung unserer Lebensbedingungen zeigt sich unter anderem an dem steigenden Durchschnittsverdienst der Werktätigen, der Lehrer gibt den Zensurendurchschnitt einer Klassenarbeit an, und als Ergebnis einer Spendenaktion wird bekanntgegeben, daß jeder Schüler der Schule durchschnittlich 2,50 M Solidaritätsspenden eingebracht hat.
Aber auch dort, wo nicht vom *Durchschnitt* die Rede ist, bedeuten Zahlenangaben oft einen durchschnittlichen Wert. Angaben über z. B. die Geschwindigkeit von Schiffen, die Leistungen von Betrieben, die Ausgaben des Staates für jeden Schüler, die Menge der von einem Haushalt verbrauchten Energie und vieles andere mehr sind Durchschnittswerte, ohne daß das in jedem Falle extra betont wird.
Wir wollen jetzt sehen, wozu man solche Angaben benötigt, wie man sie berechnet und was sich daraus an Interessantem ergibt. Nehmen wir einmal an, zwei Brigaden einer Klasse haben Altstoffe gesammelt, und wir wollen wissen, welche der beiden Brigaden die bessere Leistung erreicht hat.
Die vier Mitglieder der Brigade I haben 15 kg, 12 kg, 20 kg und 9 kg Altpapier zusammengebracht. Die fünf Mitglieder der Brigade II haben 11 kg, 13 kg, 10 kg, 17 kg und 14 kg gesammelt. Die beste Einzelleistung hat ein Schüler der Brigade I vollbracht. Das sagt aber noch nichts über die Leistung der gesamten Brigade aus. Brigade I hat insgesamt 56 kg, Brigade II 65 kg, also mehr, gesammelt, aber auch das ist noch nicht zum Vergleich geeignet, denn Brigade II besteht ja auch aus 5 Schülern, einem mehr als Brigade I. Die bisherigen Betrachtungen reichen also noch nicht aus, um die Frage zu entscheiden.
Hier bildet man nun für jede Brigade das *durchschnittliche* Sammelergebnis, d. h., man nimmt an, jedes Mitglied der Brigade hätte die gleiche Menge gesammelt und auf diese Weise die gleiche Gesamtleistung erreicht. Es könnte also, wie bei dem Beispiel des Ostereiersuchens der Schüler mit dem höchsten Sammelergebnis an den mit dem schlechtesten Sammelergebnis etwas abgeben, und alle müßten ihre Papiermengen so ausgleichen, bis jeder gleich viel hat. Das ist natürlich sehr umständlich, selbst wenn man es nur in Gedanken ausführt. Man benutzt daher ein anderes Verfahren.
Auch die drei Geschwister hätten eine andere Möglichkeit des *Ausgleichens* gehabt. Sie hätten nämlich alle gefundenen Ostereier zusammenlegen und in drei gleiche Teile aufteilen können (Bild 2). Dann wären auch auf diese Weise auf jeden 5 Ostereier gekommen. Entsprechend verfahren wir bei dem Beispiel der beiden Brigaden. Wir addieren die von jeder Brigade gesammelten Einzelmengen und dividieren diese Summe durch die Anzahl der Mitglieder.

Bild 2




Für die Brigade I erhalten wir 56 kg : 4 = 14 kg und sagen, daß in dieser Brigade jeder durchschnittlich 14 kg gesammelt hat. Auf die gleiche Weise erfahren wir, daß in Brigade II jeder durchschnittlich 13 kg gesammelt hat (65 kg : 5). Jetzt wissen wir, daß Brigade I das bessere Ergebnis erreicht hat (Bild 3).

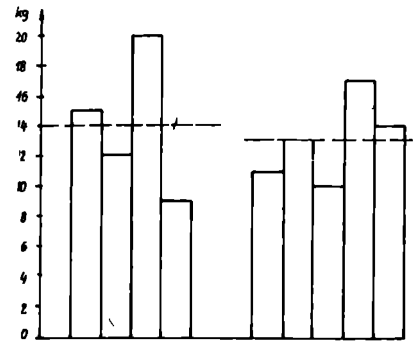



Bild 3

Wollte man zum Beispiel im Jahre 1990 prüfen, ob die zu dieser Zeit lebenden Menschen im Durchschnitt größer sind als die, die 1980 lebten, dann müßte man eigentlich zu beiden Zeitpunkten die Größen aller dann lebenden Menschen messen und diese Summe durch ihre Anzahl dividieren. Das ist nun allerdings weder zweckmäßig (so könnte z. B. zu einem der beiden Zeitpunkte die Zahl der noch nicht erwachsenen Personen beträchtlich größer sein) noch notwendig. Man würde sich also darauf beschränken, die Körpergröße von einer hinreichend großen Zahl von Personen, etwa von 5000, zu ermitteln, hieraus die Durchschnittswerte zu berechnen und diese zu vergleichen.
Wenn der Lehrer den Durchschnitt einer Klassenarbeit errechnet, dann addiert er die erreichten Zensuren und dividiert diese Summe durch die Anzahl der Schüler, die diese Arbeit mitgeschrieben haben.
Angenommen, in einer Arbeit wurden 7 Einsen, 11 Zweien, 8 Dreien, 3 Vieren und 1 Fünf geschrieben, so wäre zu rechnen:
$1+1+1+1+1+1+1+2+\ldots+4+4+4+5 = 70$, und diese Zahl wäre durch die Anzahl der Schüler $7+11+8+3+1=30$ zu dividieren, was den Durchschnitt $2,\overline{3}$ ergibt. Es ist allerdings praktischer, statt die 30 Summanden einzeln zu addieren, vereinfacht zu rechnen:
$7\cdot 1+11\cdot 2+8\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 5=30.$
In der Mathematik nennt man das, was wir hier als *Durchschnitt* bezeichnet haben, *arithmetisches Mittel.*
Das arithmetische Mittel der Zahlen 5 und 9 ist also 7, weil $(5+9):2=14:2=7$ ist.
Man legt demnach fest:
Unter dem arithmetischen Mittel $m_a$ von $n$ Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ versteht man

$$m_a=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Aus all dem bisher Gesagten ergibt sich folgendes:
Das arithmetische Mittel verschiedener Zahlen liegt stets zwischen der größten und der kleinsten dieser Zahlen, ist also größer als die kleinste und kleiner als die größte von ihnen.
Diese Erkenntnis kann zum Beispiel für eine

Kontrolle genutzt werden. Sie findet auch bei der Lösung der Aufgabe 6 (siehe unten) Anwendung.
Das arithmetische Mittel mehrerer Zahlen ist stets eindeutig bestimmt. Umgekehrt kann man im allgemeinen aus dem arithmetischen Mittel keine Rückschlüsse auf die Zahlen ziehen, aus denen es gebildet wurde. Der Durchschnitt von 1,7 bei einer Klassenarbeit schließt nicht aus, daß eine ungenügende Leistung dabei war.
In einem Teich mit einer durchschnittlichen Tiefe von einem halben Meter kann ein Erwachsener ertrinken. Ein Autofahrer, der eine Stunde mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $45\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren ist, hat gewiß nicht zu jedem Zeitpunkt innerhalb dieser Stunde diese Geschwindigkeit eingehalten. Er hat wahrscheinlich einmal anhalten müssen, und es ist aus dem Mittel nicht ersichtlich, daß er nicht die zulässige Höchstgeschwindigkeit auch einmal überschritten hat.
Sind allerdings das arithmetische Mittel von $n$ Zahlen und $n-1$ dieser Zahlen (d.h. alle bis auf eine) bekannt, dann läßt sie sich aus diesen Angaben errechnen.
Das arithmetische Mittel von sechs Zahlen, von denen fünf 17; 28; 21; 30 und 19 lauten, sei 25. Dann kann man die sechste Zahl auf folgende Weise finden:
Wenn das arithmetische Mittel von sechs Zahlen 25 beträgt, dann muß die Summe dieser sechs Zahlen 150 betragen. Die Summe der fünf bekannten Zahlen lautet 115. Demnach ist die fehlende Zahl die Zahl 35.

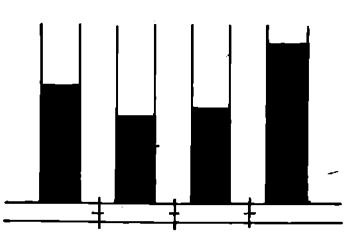
**Aufgaben (I)**

▲1▲ Berechne das arithmetische Mittel der Zahlen 76; 78, 82 und 84!

▲2▲ Eine LPG hat auf einem 25 ha großen Feld 850 dt Weizen geerntet. Bei einer zweiten LPG wurden 1023 dt Weizen von einem 31 ha großen Feld geerntet.
Welche der beiden LPG hatte den besseren Hektarertrag?

▲3▲ Die vier Schüler einer Brigade $A$ spendeten als Solidaritätsbeitrag 2,50 M, 1,75 M, 3,25 M und 3,50 M. Die fünf Schüler einer Brigade $B$ gaben 2 M, 2 M, 2,75 M, 4,25 M und 3 M.
Welche Brigade hatte das bessere (Durchschnitts)ergebnis?

▲4▲ In vier zylindrischen Gefäßen mit gleichem Durchmesser steht die Wassersäule 15 cm, 12 cm, 13,5 cm bzw. 21,5 cm hoch.

Bild 4


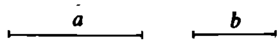
Wie hoch würde die Wassersäule in jedem dieser Gefäße stehen, wenn man die Gefäße unten verbindet, so daß sich die Höhe des Wasserspiegels ausgleicht und in allen vier Gefäßen gleich ist? (Bild 4)

▲5▲ Das arithmetische Mittel von 75 und einer Zahl $x$ ist 81.
Wie lautet die Zahl $x$?

▲6▲ Von den Zahlen 621, 915, 438 und 530 ist das arithmetische Mittel errechnet worden. Es ist eine der folgenden Zahlen:
a) 916, b) 626, c) 420 und d) 530.
Ermittle die richtige Zahl, ohne das arithmetische Mittel auszurechnen!

▲7▲ Eine fünfköpfige Schiffsbesatzung hat ein Durchschnittsalter von 28 Jahren. Der Steuermann ist 31 Jahre alt, der Maschinist 28 Jahre, der Mechaniker 23 Jahre und der jüngste Matrose 19 Jahre alt.
Wie alt ist der Kapitän?

▲8▲ Das Bild zeigt zwei Strecken $a$ und $b$. Konstruiere das arithmetische Mittel ihrer Maßzahlen, ohne die Strecken zu messen! (Bild 5)

Bild 5



▲9▲ Eine Folge von Zahlen sei so beschaffen, daß jedes Glied (außer dem ersten und letzten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist.
a) Wie ist die Folge 3; 7; ... weiterzuführen, damit sie diese Eigenschaft hat?
b) Gib die ersten 10 Glieder einer solchen Folge an, die mit der Zahl 0,5 beginnt!

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie sich eine Veränderung der Ausgangswerte auf das arithmetische Mittel auswirkt.
a) Wenn einer der Ausgangswerte um eine bestimmte Zahl vergrößert, ein anderer um die gleiche Zahl verkleinert wird und alle anderen Werte unverändert bleiben, ändert sich das arithmetische Mittel nicht. Es leuchtet ein, daß die Summe der Ausgangszahlen dabei keine Veränderung erfährt. Diese Gesetzmäßigkeit wurde im übrigen ausgenutzt, als in unserem ersten Beispiel Christine an ihre Geschwister Ostereier abgab.
b) Wenn jede der Ausgangszahlen um die gleiche Zahl vergrößert wird, dann vergrößert sich auch das arithmetische Mittel um diese Zahl. Das sei am Beispiel dreier Zahlen $a$, $b$ und $c$ gezeigt. Das arithmetische Mittel $m_1$ dieser Zahlen ist

$$m_1=\frac{a+b+c}{3}.$$

Wird nun jede dieser Zahlen um $n$ vergrößert, dann erhält man als arithmetisches Mittel $m_2$ dieser neuen Zahlen

$$m_2=\frac{a+n+b+n+c+n}{3}=\frac{a+b+c+n+n+n}{3}$$
$$=\frac{a+b+c}{3}+\frac{3n}{3}=m_1+n.$$

Der Gedankengang läßt sich leicht auf jede andere Anzahl von Ausgangszahlen übertragen. Entsprechendes gilt auch bei Subtraktion der gleichen Zahl von allen Ausgangswerten.
Diese Tatsache läßt sich bei manchen Aufgaben zu einer vorteilhaften Berechnung des arithmetischen Mittels ausnutzen. Es sei zum Beispiel das arithmetische Mittel der Zahlen 64011; 64029 und 64020 gesucht. Dann ermittelt man im Kopf das Mittel der Zahlen 11; 29 und 20, das ist 20, und addiert dazu 64000. Man erhält so recht einfach den Wert 64020.
c) Wird jede der Ausgangszahlen mit einer bestimmten Zahl $n$ multipliziert, so wird auch das arithmetische Mittel dieser Zahlen $n$-mal so groß. Auf einen Beweis sei hier verzichtet.
Als Beispiel seien die vier Zahlen 11; 16; 17 und 20 herangezogen, deren arithmetisches Mittel 16 beträgt, während man als entsprechenden Wert für die 10mal so großen Zahlen 110; 160; 170 und 200 auch das Zehnfache davon, nämlich 160 erhält. Auch bei Division aller Ausgangswerte durch die gleiche Zahl erhält man einen entsprechend veränderten Wert. Hieraus ergeben sich ebenfalls bisweilen Rechenvorteile.
Daß man in all diesen Fällen vom arithmetischen Mittel und nicht einfach vom Mittel spricht, hat seinen Grund darin, daß es auch Mittelwerte anderer Art gibt. In der Mathematik spielt z. B. noch das *geometrische Mittel* eine Rolle.
Das geometrische Mittel $m_g$ zweier positiver Zahlen $a$ und $b$ ist definiert als Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Zahlen, es gilt also

$$m_g=\sqrt{a\cdot b}.$$

So ist zum Beispiel das geometrische Mittel der Zahlen 2 und 8 die Zahl 4, weil $\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$ ist.
Beide Mittelwerte lassen sich geometrisch veranschaulichen. Nimmt man zum Beispiel ein Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$, so ist das arithmetische Mittel $m_a$ beider Maßzahlen $a$ und $b$ die Länge der Seiten eines Quadrats, das den gleichen Umfang hat wie das Rechteck. Es gilt dann nämlich

$$4m_a=2a+2b,\ \text{also}\ m_a=\frac{a+b}{2}.$$

Diese Quadratseite ist leicht zu konstruieren. Man konstruiert zunächst eine Strecke der Länge $2a+2b$ und teilt diese (z. B. mit Hilfe der Mittelsenkrechten) in vier gleiche Teile (Bild 6).

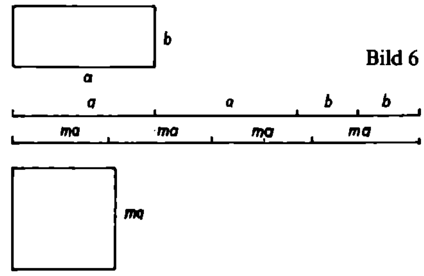


Bild 6

Das geometrische Mittel von $a$ und $b$ erhält man als Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$. Es gilt nämlich dann

$$m_g^2 = a \cdot b,$$

und für positive Zahlen $a$ und $b$ folgt daraus

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}.$$

Die Seite eines solchen Quadrats läßt sich z. B. unter Benutzung des Höhensatzes oder des Kathetensatzes konstruieren (Bild 7).

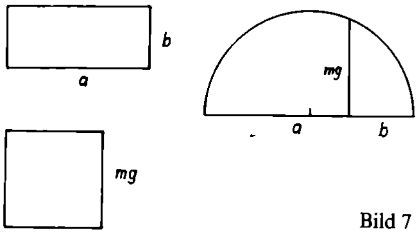



Bild 7

Bildet man von mehreren Zahlenpaaren sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel, so fällt auf, das letzteres stets kleiner ist als das erstere, falls die Zahlen voneinander verschieden sind. So ist z. B. das arithmetische Mittel der Zahlen 2 und 18 die Zahl $\frac{2+18}{2} = 10$, das geometrische Mittel die Zahl $\sqrt{2 \cdot 18} = 6$.

Es läßt sich beweisen, daß das in jedem Falle so ist.

Da das Quadrat einer von Null verschiedenen Zahl stets positiv ist, muß gelten

$(a-b)^2 \quad > 0$, d. h.

$a^2 - 2ab + b^2 > 0$. Durch Addition von $4ab$ auf beiden Seiten erhält man daraus

$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$ und nach Anwendung der ersten binomischen Formel

$(a+b)^2 \quad > 4ab$. Für positive Zahlen $a$ und $b$ folgt

$a+b \quad > 2\sqrt{ab}$ und nach Division durch 2

$\frac{a+b}{2} \quad > \sqrt{ab}$, d. h. also, daß in jedem Falle das arithmetische Mittel von $a$ und $b$ (mit $a \neq b$) größer ist als das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen.

**Aufgaben (II)**

▲10▲ Ermittle (im Kopf) das arithmetische Mittel der Zahlen 2023; 2029; 2021; 2027!

▲11▲ Berechne von den Zahlen 3 und 27 das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel!

▲12▲ Das geometrische Mittel aus 6 und einer Zahl $x$ sei 18. Ermittle $x$!

▲13▲ Bilde eine Folge von Zahlen, die mit 2 und 6 beginnt und in der jedes Glied (außer dem ersten und dem letzten) geometrisches Mittel seiner Nachbarglieder ist!

▲14▲ Setze zwischen die Zahlen 1 und 64 zwei Zahlen $x$ und $y$ so ein, daß diese vier Zahlen eine Folge bilden, in der $x$ und $y$
a) arithmetisches Mittel,
b) geometrisches Mittel ihrer Nachbarglieder sind!

▲15▲ Von drei Zahlen $a$, $b$ und $c$ ist bekannt:
(1) $b$ ist dreimal so groß wie $a$.
(2) $c$ ist um 8 kleiner als $b$.
(3) Das arithmetische Mittel der drei Zahlen ist 30.
Ermittle $a$, $b$ und $c$!

▲16▲ Von drei zweistelligen natürlichen Zahlen $a$, $b$ und $c$ sei bekannt:
(1) $a$ wird weder größer noch kleiner, wenn man seine Ziffern vertauscht.
(2) $b$ ist um 44 größer als $a$.
(3) $a$ ist das arithmetische Mittel von $b$ und $c$.

▲17▲ Von zwei positiven Zahlen $a$ und $b$ ist bekannt:
(1) Ihre Differenz beträgt 70.
(2) Die Differenz aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel beider Zahlen ist 25.
Wie lauten die beiden Zahlen?

▲18▲ In dem folgenden Kryptogramm stellt jeder Buchstabe eine der Grundziffern (von 0 bis 9) dar, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern, und wie üblich ist Null als erste Stelle nicht zugelassen.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, daß die Zahlen $ABC$ und $DA$ das arithmetische Mittel $DE$ haben!

*K. Lehmann*

# Ein Programmablaufplan

Das Titelbild der *alpha* 4/80 zeigt die Vorschrift bzw. den Algorithmus für die Division rationaler Zahlen in Form einer graphischen Darstellung. Solche Darstellungen nennt man auch *Programmablaufpläne* oder *Flußbilder*. Sie stellen eine notwendige Grundlage für die programmtechnische Aufbereitung des Verfahrens für Rechenautomaten, also für die Programmierung des Verfahrens dar. Rechenautomaten können nämlich nur das leisten, worauf sie eingestellt, programmiert sind. Schleicht sich ein Fehler in das Programm ein, so liefern sie die unsinnigsten Ergebnisse.

Zunächst ist sehr wichtig zu wissen, welche elementaren Operationen die Rechenmaschine überhaupt ausführen kann, denn nur solche dürfen in einem Programmablaufplan vorkommen. Weiterhin muß man sehr genau durchdenken, welche Operation die Maschine in welcher Reihenfolge verrichten soll.

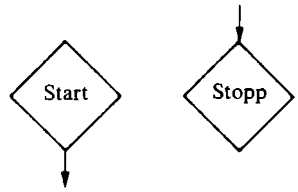
Wir wollen uns nun etwas näher mit dem *Aufbau* von Programmablaufplänen beschäftigen, um das Titelbild zu verstehen.

Programmablaufpläne setzen sich aus einzelnen Bausteinen, auch Sinnbilder genannt, zusammen.

Die *Verbindungslinien* zwischen den einzelnen Kästchen des Programms nennt man *Programmlinien*. Die Pfeilrichtung gibt jeweils die Richtung an, in der das Programm abzuarbeiten ist.

*Organisationskästchen* dienen der Beschreibung von Anfang und Ende des Programms (Bild 1).

Bild 1




*Ein-* und *Ausgabekästchen* werden verwendet, um die Größen, die in die Rechnung eingehen (in unserem Beispiel Dividend $a$ und Divisor $b$) und die Größen, die nach Ablauf der Rechnung als Ergebnis zur Verfügung stehen (in unserem Falle der Quotient $Q$), zu erfassen (Bild 2).

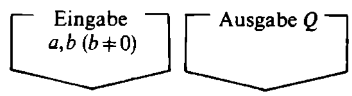
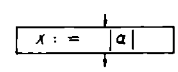


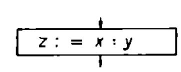

Bild 2

In *Operationskästchen* werden die auszuführenden Operationen genau beschrieben. Das kann mit Hilfe von Formeln oder auch durch Worte geschehen. Häufig wird dabei die *Ergibtanweisung* (Symbol „:=") verwendet. Sie besagt, daß aus bekannten Größen auf der rechten Seite der Anweisung die links stehende Größe zu berechnen ist.

Hier einige Beispiele:




bedeutet, daß von einer beliebigen Zahl $a$ der absolute Betrag zu bilden ist. Das Ergebnis wird mit $x$ bezeichnet.




bedeutet, daß $x$ durch $y$ zu dividieren ist und man das Ergebnis mit $z$ bezeichnet.

Das Symbol $f(x)$ bedeutet in unserem konkreten Beispiel den Übergang von der rationalen Zahl $x$ $(x \geqq 0)$ zur entsprechenden gebrochenen Zahl (Beispiel: $f(+2) = 2$).

Das Symbol $f^{-1}(x)$ bedeutet demnach den Übergang von einer gebrochenen Zahl zu der entsprechenden rationalen Zahl (Beispiel: $f^{-1}(0{,}2) = +0{,}2$).

$\boxed{z := f^{-1}\ (z)}$

bedeutet, daß zur gebrochenen Zahl $z$ die entsprechende rationale Zahl anzugeben ist und diese Zahl der neue Wert von $z$ ist.

*Achtung:* Das Ergibtzeichen darf nicht mit dem Gleichheitszeichen verwechselt werden.

*Fragekästchen* (auch *Alternativkästchen* genannt) werden verwandt, wenn eine Entscheidung zu treffen ist. Zu dem Kästchen führt stets genau ein Pfeil hin, und zwei Pfeile führen davon weg. Die Kästchen enthalten solche Fragen, die man nur mit „ja“ (Symbol: j) oder „nein“ (Symbol: n) beantworten kann.

Beispiele:

Ist $a$ gleich Null?

Symbol: $(\ a = 0\ ?\ ) \rightarrow j$, $\downarrow n$

Stimmen die Vorzeichen von $a$ und $b$ überein?

Symbol: $(\ \mathrm{sgn}\ a = \mathrm{sgn}\ b\ ?\ ) \rightarrow j$, $\downarrow n$

Nun sind alle Symbole des Flußbildes für die Division rationaler Zahlen erklärt, und ihr könnt das Titelbild verstehen.

Das Titelbild stellt allerdings keinen Programmablaufplan für eine EDV-Anlage dar. (Dort würde z. B. die hier verwendete Funktion $f$ gar nicht benötigt!) Das Flußbild auf dem Titelblatt widerspiegelt lediglich das in der Schule behandelte Vorgehen bei der Division rationaler Zahlen.

Hier nun noch einige Aufgaben zur eigenen Kontrolle:

▲1▲ Löse folgende Divisionsaufgaben!

a) $(-3{,}2):(-0{,}8)$, b) $(-4{,}2):7$, c) $3{,}6:(-1{,}2)$

Zeichne jeweils den Weg im Programmablaufplan des Titelblattes ein!

▲2▲ Versuche, einen Programmablauf für das in der Schule behandelte Verfahren der Multiplikation rationaler Zahlen zu entwerfen!

▲3▲ Was bedeutet ?

a) $\boxed{x := b \cdot 7}$ b) $\boxed{x := k + 1}$

*L. Flade*

# Millionengewinne mit mathematischen Tricks?

Mein Großvater war verspielt. Vor und nach dem Ernst kam der Spiel-Spaß. Eines der Spielchen ging so: Wenn mit der Münze ermittelt worden war, wer anfängt, mußte der erste eine beliebige Zahl von 1 bis 10 nennen. Der zweite suchte sich ebenfalls eine dieser Zahlen heraus und addierte sie laut dazu. So ging es abwechselnd weiter. Wer zuerst die 100 erreichte, war Sieger. Großvater gewann immer ... bis er mir sein Geheimnis verriet. Aber vielleicht kommst du ohne Hilfe darauf.

Immer, wenn ich einen Lottoschein ankreuze, frage ich mich, ob es nicht auch für dieses Spiel eine geheimnisvolle Methode gibt, die einen Gewinn garantiert. Wer könnte das besser wissen als einer jener Mathematiker, die sich mit dem *Zufall* beschäftigen und sich deshalb *Stochastiker* nennen. Rein zufällig – wie man so sagt – komme ich mit Prof. Dr. *Hans-Joachim Girlich* ins Gespräch, der dieses Fachgebiet an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität vertritt. Er winkt lächelnd ab, als ich meine Gedanken vortrage. Lotto ist ein absolut faires Spiel, versichert er mir. Kein Spieler – auch nicht ein Mathematiker – kann einen Fünfer voraussagen. Jeder hat die gleichen Chancen.

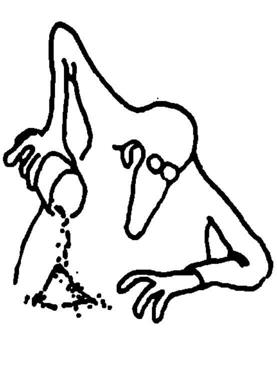
Aber, so erfahre ich, mit der Untersuchung von Glücksspielen begann die Entwicklung wichtiger mathematischer Methoden, die heute unter dem Begriff *Stochastik* zusammengefaßt werden. Dazu gehören die mathematische Statistik und die Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie helfen, mit möglichst großer Sicherheit Voraussagen über beliebige zufallsbedingte Massenerscheinungen in Natur und Gesellschaft, in Wissenschaft und Wirtschaft, in Medizin und Technik zu treffen. Seit langem wird beispielsweise aus Statistiken der Lebenserwartung der individuelle Versicherungsbeitrag abgeleitet. Die Wahrscheinlichkeitstheorie erlaubt es, Wetterprognosen zu errechnen. Ohne zu wissen, wann der einzelne Kunde ins Kaufhaus geht, kann eine solche Minimalbesetzung der Kassen ermittelt werden, die niemals Schlangen entstehen läßt. Das bringt dem Käufer Zeitgewinn, dem Handel erhöhten Umsatz. Mathematiker stellen *Stichprobenpläne* auf, um eine optimale Gütekontrolle in der Großproduktion zu gewährleisten.

Nicht jedes Stück kann auf Herz und Nieren überprüft werden. Dann wäre es unbezahlbar. *Stochastik* ist auch im Spiel, wenn über Investitionen entschieden wird oder wenn für ein neues Produkt die Absatzchancen auf dem Weltmarkt abzuschätzen sind.

So tragen „mathematische Tricks“ dazu bei, den Zufall zu beherrschen und Millionengewinne für uns alle zu sichern.

Zurück zu meinem Großvater. Hast du inzwischen durchschaut, wie er den Zufall ausschaltete? Ganz einfach: Derjenige wird Sieger, der die Zahl 89 erreicht oder – noch besser – vorher die strategischen Zahlen 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1 in Anspruch nimmt. Stimmt's?

*aus: LVZ v. 9./10.2.80*



# XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 4. Stufe (DDR-Olympiade)

## Preisträger

**Einen ersten Preis erhielten:**

*In Olympiadeklasse 10:* Jörg Pietschmann, EOS *J. J. Winkelmann* (Kl. 9), Stendal (1); John Matzke, EOS *G. E. Lessing*, Erfurt (2); Jochen Lattermann, EOS *Pestalozzi* (Kl. 9), Dresden (3); Steffen Deutschmann, EOS *F. Schiller*, Bautzen (4). In Klassenstufe 11/12 wurden keine ersten Preise vergeben.

**Einen zweiten Preis erhielten:**

*In Olympiadeklasse 10:* Christoph Zimmermann, EOS *Friedrich Engels*, Karl-Marx-Stadt; Martin Arnold, *Goethe-Schule* (EOS), Ilmenau; Ralf Hortig, 13. OS Cottbus; Hagen Mrowetz, EOS *A. Puschkin*, Prenzlau; Thorsten Eidner, EOS *F. Heckert* (Kl. 9), Zeulenroda; Volkmar Heinrich, EOS *H. Matern*, Templin; Horst Schulze, Spezialsch. f. Elektronische Industrie *M. A. Nexö*, Dresden; Karsten Petzold, BBS *E. Schneller* (1. Lehrjahr), Lauchhammer-West; Jürgen Anders, EOS *A. Ladwig* (Kl. 9), Ludwigsfelde; Georg Schreckenbach, EOS 4 (Kl. 9), Potsdam.

*In Olympiadeklasse 11/12:* Erasmus Scholz, Spezialsch. f. Elektronische Industrie *M. A. Nexö*, Dresden (5); Andrean Goede, Spezialschule f. Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 11) (6); Peter Zienicke, EOS *O. v. Guericke* (Kl. 10), Magdeburg (7); Bodo Heise, *F.-J.-Curie-Schule* (Kl. 10), Görlitz (8); Meik Hellmund, EOS *Henfling* (Kl. 11), Meiningen (9); Norbert Münch, Erw. Goethe-OS Bad Doberan; Grit Werner, Spezialkl. d. Martin-Luther-Univ. Halle (Kl. 11); Bernd Kichheim, F.-Schiller-EOS Weimar (Kl. 10).

21 Schüler erhielten einen 3. Preis, 42 Schüler eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen. An der XIX. OJM nahmen 180 Schüler, davon 27 Mädchen, teil. 45 Schüler waren „Frühstarter", d. h., starteten in einer höheren Klassenstufe.

Die Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklasse 10 sowie die Aufgaben zur Olympiadeklasse 11/12 veröffentlichen wir in Heft 5/80, d. Red.

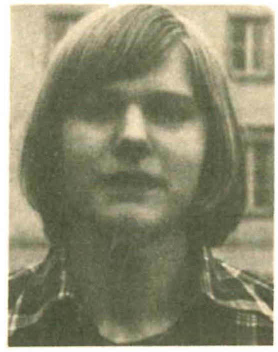
1

2

3

4

5



6

7

8

9

# XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## der Bezirksolympiade (9./10. Februar 1980)

## Aufgaben

### Olympiadeklasse 7

1. Ermittle alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die zweite Zahl $y$ ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl $x$.
(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfaehen der zweiten Zahl beträgt 1680.

2. Von den drei Kreisen $k_1$, $k_2$, $k_3$ mit dem gleichen Radius $r$, aber verschiedenen Mittelpunkten $M_1$, $M_2$ bzw. $M_3$ werde vorausgesetzt:
$k_2$ und $k_3$ schneiden sich in einem Punkt $P$ und einem Punkt $A \neq P$.
$k_3$ und $k_1$ schneiden sich in $P$ und einem Punkt $B \neq P$.
$k_1$ und $k_2$ schneiden sich in $P$ und einem Punkt $C \neq P$.
Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks $ABC$ hat $r$ als Radius!

3. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a=5{,}5$ cm, $c=2{,}5$ cm, $e=4{,}5$ cm, $f=6{,}0$ cm! Dabei seien $a$ bzw. $c$ die Längen der Seiten $AB$ bzw. $CD$; $e$ bzw. $f$ die Längen der Diagonalen $AC$ bzw. $BD$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:
Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40. Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG „Bildende Kunst" teil, genau $66\frac{2}{3}$% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen, genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.
Birgit nennt eine natürliche Zahl $x$ und meint: Aus den Informationen folgt, daß mindestens $x$ Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, daß mehr als $x$ Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.
Frank nennt eine natürliche Zahl $y$ und meint: Aus den Informationen folgt, daß mindestens $y$ Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG „Bildende Kunst", Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.
a) Zeige, daß aus den gegebenen Informationen die Anzahl aller Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!
b) Ermittle eine natürliche Zahl $x$ so, daß Birgits Aussagen wahr sind!
c) Beweise, daß Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y>0$ falsch sind!

5. Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus. Nach dem Einkauf stellt sie fest, daß sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke, wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.
Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

6. Es sei $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge 6 cm und $E$ der Mittelpunkt der Seite $AD$. Auf $CE$ sei ein Punkt $F$ so gelegen, daß die Fläche der Dreiecke $AFE$ und $BCF$ inhaltsgleich sind.
Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks $ABF$!

### Olympiadeklasse 8

1. Klaus erzählt: „Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück."
Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wieviel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur in der DDR gültige Münzen, d.h. Münzen zu 1, 5, 10, 20 und 50 Pf, sowie zu 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

2. Gegeben seien ein Punkt $M$ sowie ein Kreis $k$ mit $M$ als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:
(1) Die Eckpunkte $A$ und $D$ liegen auf der Kreislinie $k$.
(2) Die Quadratseite $BC$ berührt den Kreis $k$ in einem Punkt $P$, der zwischen $B$ und $C$ liegt.
Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis $k$) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenem $k$) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

3. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a$. Eine Parallele zu $AB$ schneide die Seiten $BC$ und $AD$ in den Punkten $E$ bzw. $F$, eine Parallele zu $BC$ schneide $AB$ und $EF$ in den Punkten $G$ bzw. $H$, und eine Parallele zu $AB$ schneide die Strecken $BE$ bzw. $GH$ in den Punkten $J$ bzw. $K$.
a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von $a$ unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!
b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von $a$ unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

4. Beweise, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die 3. Potenz der mittleren Zahl ergibt!

5. Es sei $EG$ ein Durchmesser eines Kreises $k$. Die in $E$ und $G$ an $k$ gelegten Tangenten seien $t$ bzw. $t'$. Auf $t$ sei eine Strecke $AB$ so gelegen, daß $E$ ihr Mittelpunkt ist. Die von $A$ und $B$ aus an $k$ gelegten (und von $t$ verschiedenen) Tangenten mögen $t'$ in $D$ bzw. $C$ schneiden. Der Radius von $k$ sei $r$; die Längen von $AB$ bzw. $CD$ seien $a$ bzw. $c$.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung

$$r^2 = \frac{ac}{4} \text{ gilt!}$$

6. Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.
a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!
b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

**Olympiadeklasse 9**

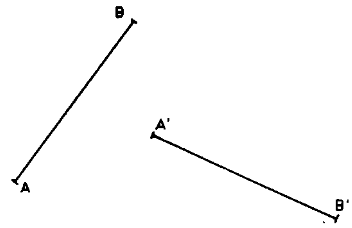
1. Beim Lösen einer Gleichung der Form
$$ax-6=bx-4$$
mit gegebenen natürlichen Zahlen $a$ und $b$ stellt Matthias fest:
(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl $x$ als Lösung.
(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man – zur Durchführung der Probe – jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung $x$ einsetzt.
Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

2. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $\overline{AB}=a\sqrt{2}$ und $\overline{BC}=a$ gilt. Es sei $F$ der Mittelpunkt der Seite $CD$.
Beweisen Sie, daß die Strecken $AC$ und $BF$ senkrecht zueinander verlaufen!

3. Von $n$ Kartons ($n$ eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, daß ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:
Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geqq 2$ ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geqq 3$ ist);
die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geqq 4$ ist);
...
die ersten $n-1$ Kartons können nebeneinander in den $n$-ten gelegt werden.
Beweisen Sie, daß es möglich ist, derartige $n$ Kartons so ineinanderzulegen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:
(1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Kartons (wobei auch 0 als gerade Anzahl zugelassen ist).
(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.
(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

4. a) Beweisen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!
b) Beweisen Sie, daß es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geqq 3$ im Zahlensystem mit der Basis $n$ eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

5. Auf dem Arbeitsblatt sind zwei zueinander kongruente Strecken $AB$ und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt $Z$ der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Drehung um $Z$, die $A$ in $A'$ und $B$ in $B'$ überführt.

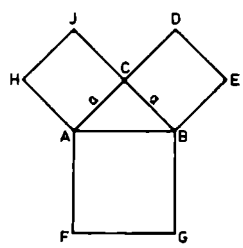



Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes $Z$ (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt $Z$ existiert!

6. Für geeignete natürliche Zahlen $n$ gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen. Zum Beispiel ist für $n=8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl $N$ die Eigenschaft hat, daß es für jede natürliche Zahl $n \geqq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit $n$ Ecken gibt, der von weniger als $n$ ebenen Flächen begrenzt wird! Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl $N$ mit dieser Eigenschaft!

**Olympiadeklasse 10**

1. Das Bild zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit gegebener Kathetenlänge $a$, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.




a) Zeigen Sie, daß es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ und $J$ liegen! Ermitteln Sie (zu gegebenem $a$) den Durchmesser dieses Kreises!
b) Beweisen Sie: Jeder Kreis, der die Punkte $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ und $J$ in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!

2. Ermitteln Sie alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung
$$2^{\sqrt{1+x-3y}}+3^{\sqrt{2x-4y+1}}=2 \qquad (1)$$
der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung (1) erfüllt ist!

3. Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d.h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel d.h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt). Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder (siehe „Tabellen und Formeln", S. 33) sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.
Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, daß die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.
Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1:r_2$, wobei $r_1$ der Radius der Inkugel des Würfels und $r_2$ der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

4. Sind $A$, $B$, $C$ drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius $r$ und hat $\sphericalangle ACB$ die Größe $\gamma$, so gilt
$$\sin\gamma=\frac{\overline{AB}}{2r}.$$

5. Von einer Funktion $f$, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, daß folgendes gilt:
(1) Es ist $f(1)=1$.
(2) Für jedes $x \neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$.
(3) Für alle $x_1, x_2$ mit $x_2 \neq 0, x_1 \neq 0, x_1+x_2 \neq 0$ ist $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.
Beweisen Sie, daß für jede Funktion $f$, die diese Voraussetzungen erfüllt,
$$f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7} \text{ gilt!}$$

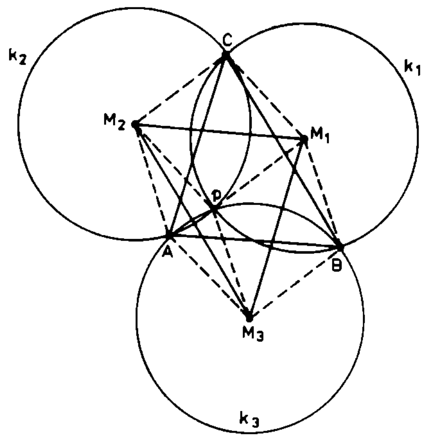
6. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen $a$, $b$ und $c$
$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2} \geqq 2\sqrt{a^2+b^2} \text{ gilt!} \qquad (1)$$

# Lösungen

**Olympiadeklasse 7**

1. Angenommen, für ein Paar $(x;y)$ natürlicher Zahlen seien die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt
$$y=3x-1 \qquad (1)$$
und $6x\cdot 4y=1680$, also
$$xy=70. \qquad (2)$$
Wie man (bei Beachtung von $70=1\cdot 2\cdot 5\cdot 7$) durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle erkennt, wird (2) nur von folgenden Zahlenpaaren erfüllt:
(1;70), (2;35), (5;14), (7;10), (10;7), (14;5), (35;2), (70;1). Von diesen Zahlenpaaren erfüllt aber nur (5;14) auch die Bedingung (1). Daher kann nur das geordnete Paar (5;14) alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Es erfüllt diese Bedingungen tatsächlich; denn es gilt $14=3\cdot 5-1$
und $6\cdot 5\cdot 4\cdot 14=30\cdot 56=1680$.

2. Nach Voraussetzung gilt
$$\overline{PM_1}=\overline{PM_2}=\overline{PM_3}=\overline{AM_2}=\overline{AM_3}=\overline{BM_3}=\overline{BM_1}=\overline{CM_1}=\overline{CM_2}=r. \qquad (1)$$
Daher sind $PM_2AM_3$, $PM_3BM_1$, $PM_1CM_2$ Rhomben. Also gilt
$BM_3 \parallel M_1P \parallel CM_2$, $CM_1 \parallel M_2P \parallel AM_3$, $AM_2 \parallel M_3P \parallel BM_1$.
Hiernach und wegen (1) sind $BCM_2M_3$, $CAM_3M_1$, $ABM_1M_2$ Parallelogramme, also gilt $\overline{BC}=\overline{M_2M_3}$, $\overline{CA}=\overline{M_3M_1}$, $\overline{AB}=\overline{M_1M_2}$.
Folglich ist $\triangle ABC \cong \triangle M_1M_2M_3$ (Kongruenzsatz sss).




Nun hat $\triangle M_1M_2M_3$ wegen (1) den Kreis um $P$ mit $r$ als Umkreis. Also hat das zu $\triangle M_1M_2M_3$ kongruente Dreieck $ABC$ ebenfalls $r$ als Umkreisradius, w.z.b.w.

3. I. Angenommen, $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann schneidet die Parallele durch $C$ zu $BD$ die Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus in einem Punkt $E$, für den $BE \parallel DC$ und $BD \parallel EC$ gilt. Also ist $BECD$ ein Parallelogramm; daher gilt $\overline{EC}=\overline{BD}$ und $\overline{BE}=\overline{DC}$. Somit hat $\triangle AEC$ die Seitenlängen $\overline{AC}=e$, $\overline{EC}=f$ und $\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=a+c$.

II. Daher entspricht $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

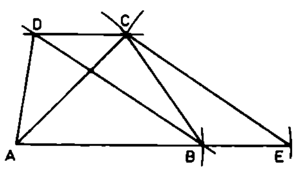
(1) Man konstruiert eine Strecke $AB$ der Länge $a$.

(2) Man verlängert $AB$ über $B$ hinaus um $c$; der erhaltene Endpunkt sei $E$.

(3) Man konstruiert den Kreis um $A$ mit $e$ und den Kreis um $E$ mit $f$. Schneiden sie sich, so sei $C$ einer ihrer Schnittpunkte.

(4) Man konstruiert die Parallele durch $C$ zu $AB$ und die Parallele durch $B$ zu $EC$. Schneiden sie sich, so sei $D$ ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach (1) und (3) ist $\overline{AB}=a$ und $\overline{AC}=e$. Nach (2) und (3) ist ferner $\overline{BE}=c$, $\overline{EC}=f$, und da $BECD$ nach (4) ein Parallelogramm ist, folgt auch $\overline{DC}=\overline{BE}=c$ und $\overline{BD}=\overline{EC}=f$.




IV. Da für die gegebenen $a$, $c$, $e$, $f$ je zwei der Längen $e, f, a+c$ eine größere Summe als die dritte dieser Längen haben, ergibt sich bei den Konstruktionsschritten (1) bis (3) ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck $AEC$; insbesondere wird $AB \nparallel EC$. Hiernach ist auch Konstruktionsschritt (4) eindeutig ausführbar. Daher ist $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. a) Da $60\% = \frac{3}{5}$, $66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ und $50\% = \frac{1}{2}$ gilt, muß die gesuchte Anzahl $z$ durch 2, 3 und 5, wegen der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen also durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar sein. Wegen $0 < z < 40$ folgt somit $z = 30$.

b) Daher und wegen $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$, $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$, $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ nehmen genau 18 Schüler an der AG „Bildende Kunst" teil, genau 20 der Schüler gehen regelmäßig zum Schwimmen und genau 15 der Schüler sind Leser der Kinderbibliothek.

Hiernach folgt, daß mindestens 8 Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen. Wären es nämlich weniger als 8, so gäbe es unter den 20 regelmäßig zum Schwimmen gehenden Schülern mehr als 12, die nicht an der AG „Bildende Kunst" teilnehmen. Diese Schüler und die 18 Teilnehmer der AG wären zusammen bereits mehr als 30 Schüler.

Dagegen folgt nicht, daß mindestens 9 Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben. Denn nach den Informationen ist z.B. folgende Verteilung möglich: Von den 18 Teilnehmern der AG „Bildende Kunst" gehen genau 8 zum Schwimmen, genau die anderen 10 sind Leser der Kinderbibliothek; die übrigen 12 Schüler der Klasse gehen sämtlich zum Schwimmen, genau 5 von ihnen sind außerdem Leser der Kinderbibliothek. Damit ist bewiesen, daß Birgits Aussagen für die Zahl $x = 8$ wahr sind.

c) Wie das ebengenannte Beispiel zeigt, besteht nach den Informationen auch die Möglichkeit, daß kein Schüler der Klasse alle drei Freizeitbeschäftigungen ausübt. Für keine natürliche Zahl $y > 0$ kann daher Franks Aussage wahr sein.

5. Bezeichnet man die Anzahl der Zweimarkstücke, die Cathrin vor dem Einkauf besaß, mit $x$, so hatte sie zur gleichen Zeit $(18-x)$ Fünfzigpfennigstücke. Der Geldbetrag, den sie vor dem Einkauf besaß, betrug somit $(2x + (18-x) \cdot 0{,}5)$ Mark $= (1{,}5x + 9)$ Mark. Da sie davon genau die Hälfte ausgab, hatte sie nach dem Einkauf noch $(0{,}7x + 4{,}5)$ Mark.

Laut Aufgabe setzte sich dieser Betrag aus $(18-x)$ Zweimarkstücken und $x$ Fünfzigpfennigstücken zusammen. Daher gilt $0{,}75x + 4{,}5 = 2(18-x) + 0{,}5x = 36 - 1{,}5x$, woraus man $2{,}25x = 31{,}5$, also $x = 14$ erhält.

Folglich hatte Cathrin vor dem Einkauf genau 14 Zweimarkstücke und genau 4 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 30 Mark, bei sich. Nach dem Einkauf besaß sie genau 4 Zweimarkstücke und genau 14 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 15 Mark.

6. Das Lot von $F$ auf $CB$ habe die Länge von $x$ cm, das Lot von $F$ auf $AD$ hat dann die Länge $(6-x)$ cm. Da die Flächeninhalte der Dreiecke $AFE$ und $BCF$ gleich sind und $E$ Mittelpunkt von $AD$ ist, gilt $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (6-x)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6x, \text{ also}$$

$$9 - \frac{3}{2}x = 3x, \text{ woraus}$$

$$x = 2 \text{ folgt.}$$

Für die Flächeninhalte $A_{ABF}$, $A_{ECD}$, $A_{BCF}$, $A_{ABCD}$ der Dreiecke $ABF$, $ECD$, $BCF$ bzw. des Quadrates $ABCD$ gilt

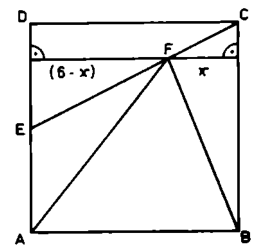
$A_{ABF} = A_{ABCD} - A_{ECD} - 2A_{BCF}$ und

$A_{ABCD} = 36\,\text{cm}^2$, $A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2$,

$$A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2.$$

Folglich ist

$A_{ABF} = 36\,\text{cm}^2 - 9\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 = 15\,\text{cm}^2$.




**Olympiadeklasse 8**

1. Die Differenz zwischen der Summe der Werte der ersten beiden Münzen und dem Wert der dritten Münze beträgt genau 7,00 M. Deshalb ist der Wert der dritten Münze größer als 7 M, also 10 M oder 20 M.

Wäre die dritte Münze eine Münze zu 20 M gewesen, dann müßte die Summe der Werte der beiden anderen Münzen genau 13 Mark betragen haben, das ist mit den angegebenen Münzwerten jedoch nicht möglich.

Also war die dritte Münze eine Münze zu 10 M, und die Summe der Werte der beiden anderen Münzen betrug genau 3 M. Das ist bei den angegebenen Münzsorten nur möglich, wenn Klaus eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich hatte.

Klaus hatte also bei diesem Einkauf eine 10-Mark-Münze, eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich.

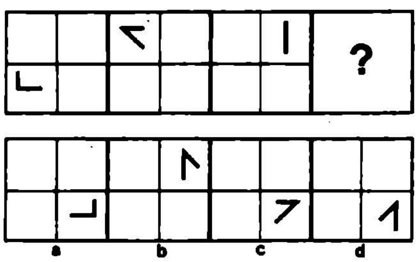
2. I. Angenommen, ein Quadrat $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann liegt $M$ wegen $\overline{MA}=\overline{MD}$ auf der Mittelsenkrechten $m$ von $AD$. Ferner berührt die Gerade $t$ durch $B$, $C$ den Kreis $k$ in $P$, also ist $t$ senkrecht zur Geraden durch $M$, $P$. Diese steht somit wegen $AD \parallel BC$ auch auf $AD$ senkrecht und ist daher die Gerade $m$; damit ist gezeigt, daß $m$ durch $P$ geht. Da $m$ auch Mittelsenkrechte von $BC$ ist, ist folglich $P$ der Mittelpunkt von $BC$. Wendet man auf $ABCD$ eine beliebige zentrische Streckung mit dem Zentrum $P$ an, so entsteht ein Quadrat $A'B'C'D'$, dessen Ecken $B'$, $C'$ auf $t$ liegen und dessen Seite $B'C'$ den Mittelpunkt $P$ hat.

Fortsetzung auf Seite VI

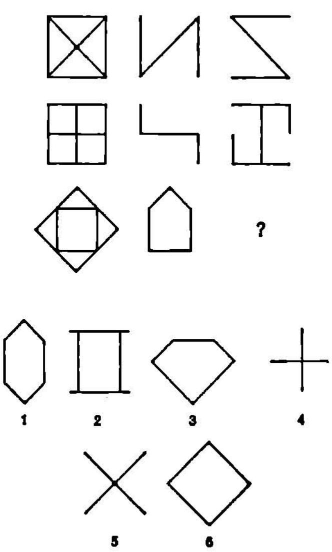
# 1-2-3
# Lustige Logelei
## alpha-Wandzeitung

1. Eine der vielen Lampen steht in vier Exemplaren auf den Regalen. Wer findet sie am schnellsten?

2. a) Welches der Bilder a bis d gehört logischerweise an Stelle des Quadrats mit dem Fragezeichen?



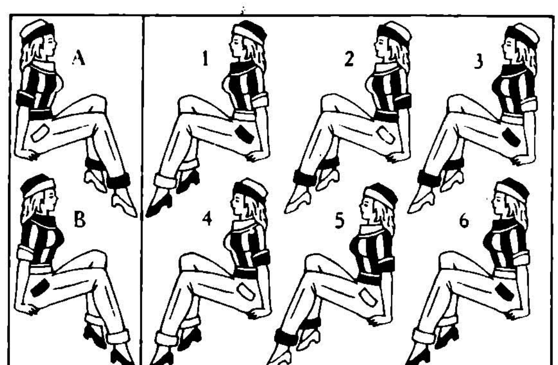

b) Welche der Figuren 1 bis 6 gehört logischerweise an die Stelle des Fragezeichens?



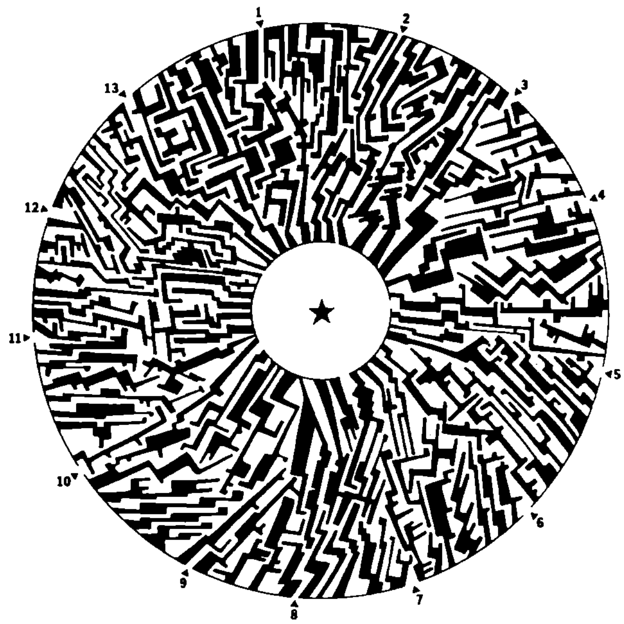

3. Durch welchen Ausgang findet das Eichhörnchen aus seinem Bau heraus?


4. Vexierbild, entstanden um 1900: Wo steckt der Rattenfänger von Hameln?

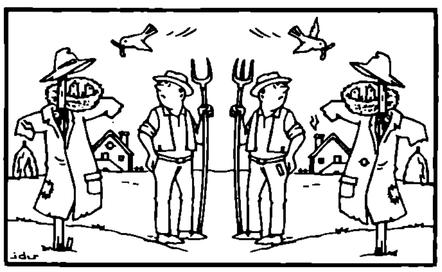
5. Welche zwei der 6 Mädchen sehen ihr Spiegelbild?



6. Starte von einer Zahl aus und erreiche den Stern in der Mitte des Irrgartens, ohne unterwegs eine der eingezeichneten Linien zu kreuzen!

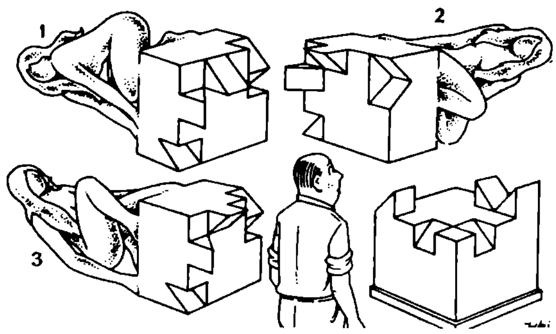



7. Die rechte Hälfte des Bildes ist Spiegelbild der linken bis auf fünf Details, die sich einen anderen Platz gesucht haben.
Wo sind sie wiederzufinden?

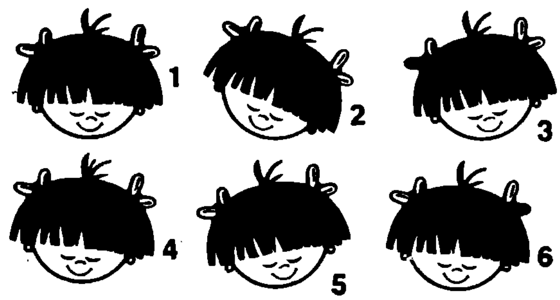


8. Eines der acht Bilder wurde aus je einer Einzelheit der anderen sieben zusammengestellt. Welches?


9. Welches der drei Denkmäler paßt auf den neuen Sockel?



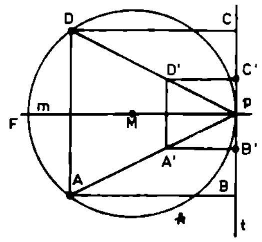

10. Die sechs Kinderköpfe sehen einander sehr ähnlich. Aber nur zwei sind vollkommen gleich. Welche sind es?




Diese lustigen Knobeleien stammen aus:

Füles

*Budapest*




II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Quadrat mit den Eigenschaften (1), (2), wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(3) Man zieht durch $M$ eine Gerade, die $m$ genannt sei. Einen ihrer Schnittpunkte mit $k$ bezeichne man mit $P$.
(4) Man konstruiert die Senkrechte $t$ in $P$ auf $m$.
(5) Auf $t$ wählt man einen beliebigen Punkt $B' \neq P$ und verlängert die Strecke $B'P$ über $P$ hinaus um ihre eigene Länge bis $C'$.
(6) Auf $B'C'$ errichtet man das Quadrat $A'B'C'D'$ (nach der Seite von $t$ hin, auf der $k$ liegt).
(7) Die Strahlen aus $P$ durch $A'$ bzw. durch $D'$ schneiden $k$ in $A$ bzw. $D$.
(8) Man fällt die Lote $AB$ bzw. $DC$ von $A$ bzw. $D$ auf $t$.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (2) ist:
Nach Konstruktion liegen $A$ und $D$ auf $k$, also ist (1) erfüllt. Ferner berührt die Gerade $t$, auf der $B$ und $C$ liegen, den Kreis $k$ in $P$. Nach Konstruktion ist $m$ die Mittelsenkrechte von $B'C'$ und damit auch von $A'D'$. Daher liegen die Geraden durch $P$, $A'$ bzw. durch $P$, $B'$ symmetrisch zu $m$; dasselbe gilt für $k$ und folglich für $A$ und $D$. Somit ist $AD \perp m$, also $AD \parallel A'D'$. Da nach Konstruktion auch $AB \parallel A'B'$ und $DC \parallel D'C'$ ist, geht $ABCD$ aus $A'B'C'D'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $P$ hervor. Folglich ist auch $ABCD$ ein Quadrat, und die Seite $BC$ wird von $k$ in ihrem Mittelpunkt $P$ berührt, so daß (2) insgesamt erfüllt ist.

IV. Konstruktionsschritt (3) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Schritte (5) und (6) führen zwar nicht zu einem eindeutig bestimmten Quadrat $A'B'C'D'$, aber je zwei der Quadrate, die entstehen können, gehen auseinander durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $P$ hervor. Daher sind die in (7) konstruierten Strahlen für alle in (5), (6) zu erhaltenden Quadrate dieselben, d. h. durch ($k$ und) $P$ eindeutig bestimmt; dasselbe gilt somit für $A$, $D$ und nach (8) für $B$, $C$. Also gibt es (zu $k$) bis auf Kongruenz genau ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften.

3. a) Nach Voraussetzung hat jedes der vier genannten Rechtecke den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$.
Daraus folgt $\overline{DF} = \frac{a^2}{4} : \overline{CD} = \frac{a}{4}$, $\overline{AF} = \frac{3a}{4}$, $\overline{FH}$ $= \frac{a^2}{4} : \overline{AF} = \frac{a^2}{4} : \frac{3a}{4} = \frac{a}{3}$, $\overline{EH} = \frac{2a}{3}$, $\overline{EJ} = \frac{a^2}{4} : \overline{EH}$ $= \frac{a^2}{4} : \frac{2a}{3} = \frac{3a}{8}$.
Also ist der gesuchte Umfang $2\overline{EH} = 2\overline{EJ}$ $= \frac{4a}{3} + \frac{3a}{4} = \frac{25a}{12}$.
b) Wir setzen $\overline{BJ} = x$, $\overline{KJ} = y$. Da die Rechtecke $GBJK$ und $KJEH$ umfangsgleich sind, ist $2(x+y) = 2(\overline{JE} + y)$, also $\overline{JE} = x$. Da $AGHF$, $GBJK$ und $FECD$ umfangsgleich sind, ist die Summe der halben Umfänge von $AGHF$ und $GBJK$ gleich dem Umfang von $FECD$, also $\overline{FA} + \overline{AG} + \overline{GB} + \overline{BJ} = 2(\overline{CD} + \overline{CE})$,
d. h. $3x + a = 2(a + a - 2x)$.
Daraus folgt

$$x = \frac{3}{7}a.$$

Da $AGHF$ und $GBJK$ umfangsgleich sind, gilt $\overline{FA} + \overline{AG} = \overline{GB} + \overline{BJ}$, d. h.

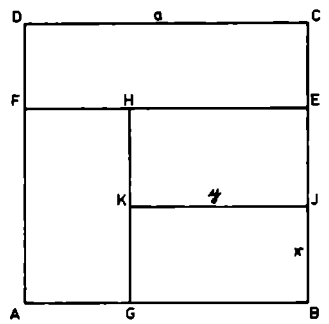
$$\frac{6}{7}a + a - y = y + \frac{3}{7}a.$$

Daraus folgt

$$y = \frac{5}{7}a.$$

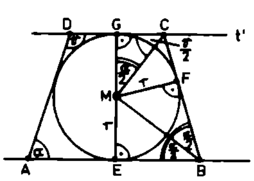
Also ist der gesuchte Flächeninhalt

$$xy = \frac{15a^2}{49}.$$




4. Ist $x$ die mittlere der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $x-1$, $x$ und $x+1$. Bildet man daher ihr Produkt und vermehrt es um die mittlere Zahl, so erhält man $(x-1) \cdot x \cdot (x+1) + x = x^3 - x + x$ $= x^3$, w. z. b. w.

5. Der Mittelpunkt von $k$ sei $M$. Bei Spiegelung an der Geraden durch $E$, $G$ geht $k$ in sich über. Ebenso $t$ und $t'$, und die Punkte $A$, $B$ werden miteinander vertauscht. Das gilt folglich ebenfalls für die von $A$ und $B$ an $k$ gelegten Tangenten und somit auch für $D$ und $C$.




Daher ist $G$ der Mittelpunkt der Strecke $CD$. Ferner folgt, daß im Trapez $ABCD$ die Innenwinkel bei $A$ und $B$ beide dieselbe Größe $\alpha$ und die Innenwinkel bei $C$ und $D$ beide die Größe $\gamma = 180° - \alpha$ haben (Gegenwinkel) an geschnittenen Parallelen).
Berührt $k$ die Gerade durch $B$, $C$ in $F$, so gilt $\triangle BEM \cong \triangle BFM$ (ssw), also $\overline{\sphericalangle EBM}$ $= \overline{\sphericalangle FBM} = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\overline{\sphericalangle GCM} = \frac{\gamma}{2} = 90°$ $- \frac{\alpha}{2}$, also $\overline{\sphericalangle GMC} = \frac{\alpha}{2}$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck $CGM$). Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke $BME$ und $MCG$ einander ähnlich, und es folgt

$$\overline{BE} : \overline{EM} = \overline{MG} : \overline{GC}, \text{ also}$$
$$\frac{a}{2} : r = r : \frac{c}{2} \text{ und somit}$$
$$r^2 = \frac{ac}{4}, \text{ w. z. b. w.}$$

6. a) Bei einer Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ legte der Taxifahrer in 10 Minuten einen Weg von $30 \cdot \frac{1}{6}\,\text{km} = 5\,\text{km}$ zurück. Für diese Strecke hätte er mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{5}{50}\,\text{h} = \frac{1}{10}\,\text{h} = 6\,\text{min}$ benötigt.
Für je 5 km benötigte der Taxifahrer daher 4 min mehr, als er bei einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gebraucht hätte. Da er genau 10 min zu spät kam, hatte er wegen $\frac{5}{4} \cdot 10$ $= 12{,}5$ insgesamt eine Strecke von 12,5 km zurückgelegt.
b) Für die Weglänge 12,5 km wird bei einer Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{12{,}5}{30}\,\text{h} = \frac{5}{12}\,\text{h} = 25\,\text{min}$ benötigt.

**Olympiadeklasse 9**

1. Angenommen, für ein Paar $(a;b)$ natürlicher Zahlen gelten (1) und (2). Dann ist die Lösung $x$ (siehe (1)) nach (2) gleich der Zahl $ax - 6$, d. h. es gilt

$$ax - 6 = x.$$

Daraus folgt

$$ax - x = 6,$$
$$x(a-1) = 6. \qquad (3)$$

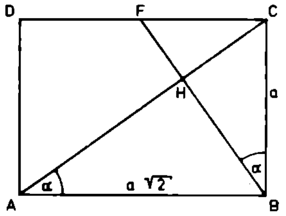
Da $a-1$ eine ganze Zahl ist, ist die natürliche Zahl $x$ ein Teiler von 6, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 3, 6.
Ebenso folgt aus (1), (2), daß

$$bx - 4 = x,$$
$$x(b-1) = 4 \qquad (4)$$

gilt, also $x$ ein Teiler von 4 ist, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 4. Somit kann $x$ nur eine der Zahlen 1; 2 sein.
Ist $x = 1$, so folgt aus (3), (4), daß $a = 7$ und $b = 5$ gilt.
Ist $x = 2$, so folgt aus (3), (4), daß $a = 4$ und $b = 3$ gilt.
Also können nur die Paare (4;3) und (7;5) die Bedingungen (1), (2) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn die Gleichung $4x - 6$ $= 3x - 4$ hat die Zahl 2 als Lösung, beim Einsetzen von 2 in $4x - 6$ bzw. $3x - 4$ ergibt sich ebenfalls 2; die Gleichung $7x - 6 = 5x - 4$ hat die Zahl 1 als Lösung, beim Einsetzen von 1 in $7x - 6$ bzw. $5x - 4$ ergibt sich ebenfalls 1.

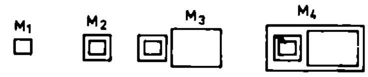
Daher erfüllen genau die Paare (4;3) und (7;5) die Bedingungen (1), (2).

2. Der Schnittpunkt der Strecken $AC$ und $BF$ sei $H$ genannt.




Wegen $\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a}$ gilt $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BC}}$.
Daher stimmen die Dreiecke $ABC$ und $BCF$ im Verhältnis zweier Seiten und in der Größe des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels überein und sind somit ähnlich.
Sei nun $\alpha$ die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$, dann gilt
$\overline{\sphericalangle FBC} = \alpha$, also $\overline{\sphericalangle ABH} = 90° - \alpha$
und somit wegen des Satzes über die Winkelsumme, angewendet auf das Dreieck $ABH$,
$\overline{\sphericalangle AHB} = 90°$, w.z.b.w.

3. Für den ersten Karton sind die Forderungen (1), (2) und (3) erfüllt. Wir beweisen nun: Hat man die Forderungen (1), (2) und (3) durch eine Anordnung $A$ der Menge $M_k$ aus den ersten $k$ Kartons erfüllt ($k$ sei eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$), so kann man (1), (2) und (3) auch für die Menge $M_{k+1}$ aus den ersten $k+1$ Kartons erfüllen. Ist dies bewiesen, dann ist daraus ersichtlich, wie man die Forderungen (1), (2) und (3) für die gesamte Menge der $n$ Kartons schrittweise durch Hinzunehmen des zweiten, dritten, ... Kartons erfüllen kann.
In der Anordnung $A$ gibt es, da sie (2) erfüllt, entweder genau einen oder genau zwei Kartons, die in keinem anderen Karton der Menge $M_k$ enthalten sind.
a) Gibt es genau einen solchen, so lege man den $(k+1)$-ten Karton einfach daneben. Dann bleiben (1) und (3) erfüllt, da der neue Karton die gerade Anzahl von 0 Kartons enthält und die Anordnung der übrigen unverändert bleibt. Ferner ist auch (2) erfüllt, da nun genau zwei Kartons in keinem anderen der Menge $M_{k+1}$ enthalten sind.
b) Gab es aber in $A$ genau zwei Kartons $K$ und $K'$, die in keinem anderen Karton der Menge $M_k$ enthalten waren, so lege man die gesamte Anordnung $A$ unverändert in den $(k+1)$-ten Karton hinein. Hierdurch wird, da (2) für $A$ galt, (3) für den $(k+1)$-ten Karton erfüllt, und für die übrigen Kartons bleibt (3) gültig, da $A$ unverändert geblieben war.
Ferner wird (2) erfüllt, da nun genau der neue Karton in keinem anderen der Menge $M_{k-1}$ enthalten ist. Schließlich bleibt (1) aus folgendem Grunde erfüllt: Alle Kartons der früheren Anordnung $A$ erfüllen (1); zu zeigen ist noch, daß auch der $(k+1)$-te Karton eine gerade Anzahl Kartons enthält. Dies ergibt sich wie folgt: Der Karton $K$ enthält in der Anordnung $A$ eine gerade Anzahl $g$ von Kartons, der Karton $K'$ eine gerade Anzahl $g'$. Daher enthält der $(k+1)$-te Karton in der neuen Anordnung genau diese $g+g'$ Kartons zusammen mit $K$ und $K'$, d.h. genau $g+g'+2$ Kartons, und dies ist eine gerade Anzahl.
Anordnung der Menge $M_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$)




4. a) Alle Mengen aus je drei unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, daß jede dieser drei Zahlen durch eine Ziffer des dekadischen Zahlensystems dargestellt wird, lauten
$\{0;1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{2;3;4\}$, $\{3;4;5\}$, $\{4;5;6\}$, $\{5;6;7\}$, $\{6;7;8\}$, $\{7;8;9\}$.
Jede im dekadischen Zahlensystem dreistellige Zahl, deren Ziffern in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen aus einer dieser Mengen darstellen, hat also eine der Quersummen
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24
und ist folglich durch 3 teilbar. Daher ist keine dieser dreistelligen Zahlen eine Primzahl.
b) Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels. Für $n=3$ gilt z.B.: Die Primzahl 11 (dekadisch geschrieben) hat im 3-adischen Zahlensystem wegen

$$11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2$$

die Ziffern 1, 0, 2, die in der Reihenfolge 0, 1, 2 drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen.

5. I. Angenommen, ein Punkt $Z$ habe die verlangte Eigenschaft. Dann ist $\overline{ZA} = \overline{ZA'}$ und $\overline{ZB} = \overline{ZB'}$, also liegt $Z$ sowohl auf der Mittelsenkrechten von $AA'$ als auch auf der Mittelsenkrechten von $BB'$.
II. Daher kann ein Punkt $Z$ nur dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man konstruiert die Mittelsenkrechte von $AA'$ und die Mittelsenkrechte von $BB'$. Da auf dem Arbeitsblatt $AA'$ und $BB'$ nicht zueinander parallel sind, sind auch diese beiden Mittelsenkrechten nicht zueinander parallel; sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der $Z$ genannt sei.
III. Beweis, daß der so konstruierte Punkt $Z$ die verlangte Eigenschaft hat:
Nach Konstruktion liegt $Z$ auf den Mittelsenkrechten von $AA'$ und von $BB'$, also gilt

$$\overline{ZA} = \overline{ZA'} \tag{1}$$

und $$\overline{ZB} = \overline{ZB'}. \tag{2}$$

Ferner gilt nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
Daher ist $\triangle ZAB \cong \triangle ZA'B'$ (Kongruenzsatz sss), also

$$\overline{\sphericalangle AZB} = \overline{\sphericalangle A'ZB'}. \tag{3}$$

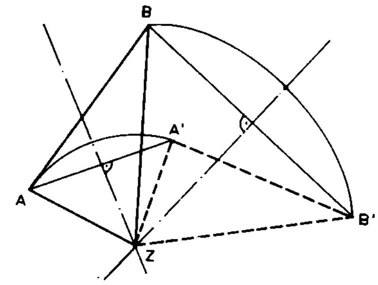
Die Ausführung der Konstruktion auf dem Arbeitsblatt ergibt ferner: Die Strahlen aus $Z$ durch $A$, $B$, $A'$ und $B'$ sind so gelegen, daß

$$\sphericalangle AZA' \text{ und } \sphericalangle BZB' \tag{4}$$

gleichen Drehsinn haben und daß $\overline{\sphericalangle AZA'} = \overline{\sphericalangle AZB} + \overline{\sphericalangle BZA'}$ sowie
$\overline{\sphericalangle BZB'} = \overline{\sphericalangle BZA'} + \overline{\sphericalangle A'ZB'}$ gilt,
woraus wegen (3) auch

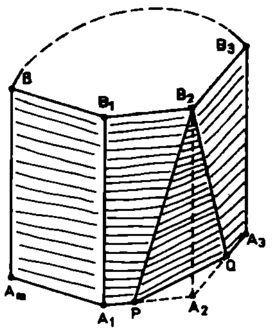
$$\overline{\sphericalangle AZA'} = \overline{\sphericalangle BZB'} \text{ folgt.} \tag{5}$$

Wegen (1) gibt es eine Drehung um $Z$, die $A$ in $A'$ überführt. Wegen (2), (4) und (5) führt diese Drehung auch $B$ in $B'$ über.
IV. Alle Konstruktionsschritte aus II sind bei der vorgegebenen Lage von $A$, $B$, $A'$ und $B'$ auf dem Arbeitsblatt eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt $Z$ mit der verlangten Eigenschaft.




6. Jeder ebenflächig begrenzte Körper hat mindestens vier Ecken. Ist die Eckenzahl $n \leqq 5$, so gibt es nur folgende Fälle:
1. Der Körper hat genau 4 Ecken $A$, $B$, $C$, $D$. In diesem Fall hat der Körper die Flächen der Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$ als Begrenzungsflächen. Ihre Anzahl beträgt 4.
2. Der Körper hat genau 5 Ecken $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Auch in diesem Fall muß jede ebene Fläche aus der Begrenzung des Körpers eine der Flächen der Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ABE$, $ACD$, $ACE$, $ADE$, $BCD$, $BCE$, $BDE$, $CDE$ sein.
Auf folgende Weise kann man ermitteln, wie viele dieser Dreiecksflächen (mindestens) in der Begrenzung des Körpers vorkommen:
Jede Ecke des Körpers muß Ecke von mindestens 3 ebenen Begrenzungsflächen sein. Zählt man auf diese Weise die Flächen auf, wobei sich eine Anzahl $\geqq 15$ ergibt, so tritt jede Fläche in dieser Aufzählung genau dreimal auf, nämlich für jede ihrer Ecken genau einmal. Daher ist die Anzahl der Flächen (jede genau einmal gezählt) $\geqq 5$.
3. Der Körper hat genau 5 Ecken $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, von denen vier, o.B.d.A. etwa $A$, $B$, $C$, $D$, in einer gemeinsamen Ebene liegen. In diesem Fall ist die Fläche des Vierecks $ABCD$ eine der Begrenzungsflächen des Körpers. An jeder ihrer vier Kanten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ muß sich eine weitere Fläche anschließen, wofür nur die Flächen der Dreiecke $ABE$ bzw. $BCE$ bzw. $CDE$ bzw. $DAE$ möglich sind. Damit sind 5 Flächen aus der Begrenzung des Körpers ermittelt.
Mithin gibt es für $n \leqq 5$ keinen Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen.
Für jedes gerade $n \geqq 6$, also $n = 2m$ mit ganzem $m \geqq 3$, gibt es einen Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen, nämlich z.B. ein Prisma mit $m$-eckiger Grund- und Deckfläche; denn wegen $m > 2$ gilt $2m > m+2$, also ist die Eckenzahl $n = 2m$ größer als die Zahl $m+2$ der Flächen.

Auch für jedes ungerade $n \geqq 6$, also $n=2m+1$ mit $m \geqq 3$, gibt es einen Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen. Um einen solchen zu erhalten, wähle man z.B. ein Prisma mit $m$-eckiger Grundfläche $A_1A_2A_3 \ldots A_m$ und $m$-eckiger Deckfläche $B_1B_2B_3 \ldots B_m$.
Ferner wähle man auf den Strecken $A_1A_2$ und $A_2A_3$ je einen Punkt $P$ bzw. $Q$ so, daß $A_1PQA_3 \ldots A$ ein $(m+1)$-Eck wird. Dann kann man von dem Prisma das Tetraeder $B_2PQA_2$ abschneiden und erhält einen Restkörper mit $n=2m+1$ Ecken und $(m+2)+1$ Flächen, der wegen $m>2$, also $2m+1>m+3$ die geforderte Eigenschaft hat.
Damit ist gezeigt, daß die Zahl $N=6$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft hat und daß sie die kleinste natürliche Zahl $N$ mit dieser Eigenschaft ist.




**Olympiadeklasse 10**

1. a) Es sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $AB$. Die Gerade $g$ durch $C$ und $M$ ist Symmetrieachse der gesamten Figur, also gilt $\overline{MD}=\overline{MJ}, \overline{ME}=\overline{MH}, \overline{MG}=\overline{MF}$. (1)
Ferner ist $CM$ zugleich Höhe in $ABC$, also hat $\triangle BCM$ bei $B$ bzw. $M$ Winkel von 45° bzw. 90° und ist daher ebenfalls gleichschenklig mit $\overline{MB}=\overline{MC}$. Also liegt $M$ auf der Mittelsenkrechten von $BC$; diese ist zugleich die Mittelsenkrechte von $DE$, hiernach gilt

$$\overline{MD}=\overline{ME}. \qquad (2)$$

$\triangle BCD$ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\sphericalangle DBC=45°$, also ist $\sphericalangle DBM=90°=\sphericalangle GBM$; ferner gilt $\overline{BD}=a\sqrt{2}=\overline{BG}$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist somit $\triangle DBM \cong \triangle GBM$, also $\overline{MD}=\overline{MG}$. (3)
Aus (1), (2), (3) folgt, daß der Kreis $k$ um $M$ durch $D$ auch durch $E, F, G, H, J$ geht.
Sein Durchmesser ist nach dem Satz des Pythagoras

$$2\overline{MG}=2\sqrt{\overline{MB}^2+\overline{MG}^2}$$
$$=2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2+(a\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{4\left(\frac{a^2}{2}+2a^2\right)}=a\sqrt{10}.$$

b) Zu zeigen ist, daß für jeden Punkt $M' \neq M$ jeder Kreis um $M'$, der in seiner Fläche oder auf seinem Rande die Punkte $D, E, F, G, H, J$ enthält, einen größeren Radius als $k$ hat. O.B.d.A. liege $M'$ auf $g$ oder in derjenigen durch $g$ begrenzten Halbebene, die $A$ enthält. Das Lot von $M'$ auf $g$ habe den Fußpunkt $L$.
Ist $L=M$ (also $M'$ nicht auf $g$ gelegen), so gilt $\overline{M'D}>\overline{MD}$ (siehe Bild a). Ist $L \neq M$ und liegt $L$ auf dem Strahl aus $M$ durch $C$, so gilt $\overline{M'G} \geqq \overline{LG}>\overline{MG}$ (siehe Bild b). Liegt $L$ auf der Verlängerung von $CM$ über $M$ hinaus, so gilt $\overline{M'D} \geqq \overline{LD}>\overline{MD}$ (siehe Bild c).
Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

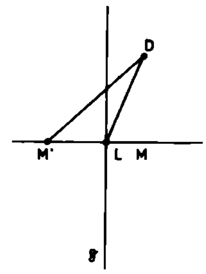


Bild a

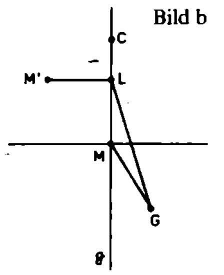


Bild b

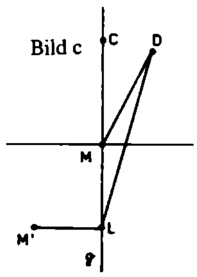


Bild c

2. Der genannte Term ist genau dann definiert, wenn die Ungleichungen

$$1+x-3y \geqq 0 \qquad (2)$$
und $$2x-4y+1 \geqq 0 \qquad (3)$$

gelten. Ist dies der Fall, so gelten die Ungleichungen

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geqq 1 \qquad (4)$$
und $$3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geqq 1. \qquad (5)$$

Also kann (1) nur dann erfüllt werden, wenn sowohl in (4) als auch in (5) das Gleichheitszeichen steht. Dies trifft nur dann zu, wenn

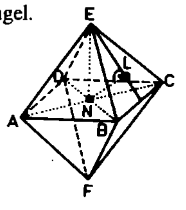
$$1+x-3y=0 \qquad (6)$$
und $$2x-4y+1=0 \qquad (7)$$

gelten. Das Gleichungssystem (6), (7) hat genau das Paar

$$(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ als Lösung.}$$

Umgekehrt folgt für dieses Paar aus (6), (7) auch (2), (3) und (1). Daher hat genau dieses Paar alle verlangten Eigenschaften.

3. Der Mittelpunkt $M$ eines Würfels, d.i. der Schnittpunkt seiner Körperdiagonalen, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und (da er auch Schnittpunkt der Verbindungsstrekken je zweier gegenüberliegender Seitenflächen-Mittelpunkte ist) zu allen Seitenflächen gleichen Abstand. Er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.




Ist $a$ die Kantenlänge des Würfels, also $a\sqrt{3}$ seine Körperdiagonalenlänge, so ist die Entfernung von $M$ zu den Ecken, d.h. der Umkugelradius $r=\frac{a}{2}\sqrt{3}$; der Abstand von $M$ zu den Seitenflächen, d.h. der Inkugelradius, ist $r_1=\frac{a}{2}=\frac{r}{\sqrt{3}}$. Weiter sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Oktaeder (siehe Bild).
Sein Mittelpunkt $N$, d,i. der Schnittpunkt von $AC$, $BD$ und $EF$, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und zu allen Seitenflächen gleichen Abstand; er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist $b$ die Kantenlänge des Oktaeders, also $\overline{BD}=b\sqrt{2}$, so ist der Umkugelradius $r=\overline{NB}$ $=\frac{b}{2}\sqrt{2}=\frac{b}{\sqrt{2}}$. Ferner folgt: $BCEN$ ist eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche $BCE$; für ihre Spitze $N$ gilt $\overline{NB}=\overline{NC}=\overline{NE}$. also handelt es sich um eine gerade Pyramide. Der Fußpunkt $L$ des Lotes von $N$ auf die Fläche $BCE$ ist folglich deren Schwerpunkt. Hiernach gilt $\overline{LE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3}=\frac{b}{\sqrt{3}}$. Daraus und aus $\overline{NE}=\frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras, daß der Inkugelradius

$$r_2=\overline{NL}=\sqrt{\overline{NE}^2-\overline{LE}^2}=\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{3}}=\frac{b}{\sqrt{6}}=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

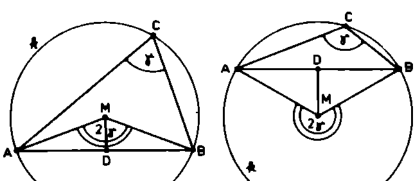
ist. Somit gilt $r_1:r_2=1:1$.

4. Ist $M$ der Mittelpunkt von $k$, so gilt nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel

$$\sphericalangle AMB=2\gamma.$$

Ferner gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:
1. Es gilt $2\gamma \neq 180°$.
In dem gleichschenkligen Dreieck $ABM$ ist die Höhe $MD$ zugleich Winkel- und Seitenhalbierende. Daher ist $\triangle ADM$ bei $D$ rechtwinklig; es gilt $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ und
$\sphericalangle AMD=\gamma$ im Falle $2\gamma<180°$ bzw.
$\sphericalangle AMD=180°-\gamma$ im Falle $2\gamma>180°$.
Wegen $\sin(180°-\gamma)=\sin\gamma$ folgt in beiden Fällen somit

$$\sin\gamma=\frac{\overline{AD}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AB}}{2r}, \text{ w.z.b.w.}$$




2. Es gilt $2\gamma=180°$. Dann ist $\overline{AB}=2r$,
$\sin\gamma=\sin 90°=1=\frac{\overline{AB}}{2r}$, w.z.b.w.

5. Aus (1) und (3) folgt
$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=1+1=2,$
$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=2+1=3,$
$f(5)=f(3+2)=f(3)+f(2)=3+2=5,$
$f(7)=f(5+2)=f(5)+f(2)=5+2=7.$

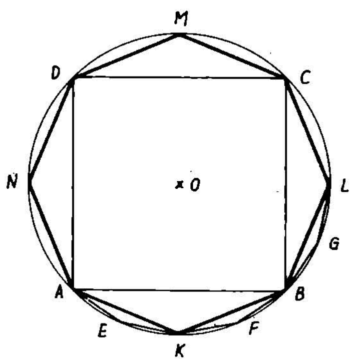
Fortsetzung auf Seite 96.

# Die Exhaustionsmethode

Bekanntlich bestimmt man den Flächeninhalt $A$ eines Kreises mit dem Radius $r$ nach der Formel $A = r^2 \cdot \pi$. Dabei wissen wir, daß die exakte Definition des Flächeninhalts krummlinig begrenzter ebener Figuren und auch seine Berechnung einige Probleme aufwerfen, die eigentlich nur mit den Mitteln der Integralrechnung gelöst werden können.

Wir können aber den Flächeninhalt eines Kreises *annähernd* ermitteln, indem wir in den Kreis ein regelmäßiges Vieleck einbeschreiben und dessen Flächeninhalt als Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises nehmen. Je mehr Seiten das einbeschriebene regelmäßige Vieleck besitzt, desto genauer ist der so erhaltene Wert (siehe Bild 1). Füllt man die Kreissegmente, die zwischen dem Kreis und dem einbeschriebenen regelmäßigen Vieleck verbleiben, durch gleichschenklige Dreiecke (z. B. $\triangle KFB$ im Bild 1) aus, so wird der Kreis schrittweise *ausgeschöpft*. *Ausschöpfen* heißt auf lateinisch *exhaurire* – deshalb bezeichnet man dieses Verfahren als *Exhaustionsmethode*.

Bild 1




Der Flächeninhalt des Achtecks $AKBLMDN$ kommt dem Flächeninhalt des Kreises näher als der des Quadrats $ABCD$. Wird im folgenden Schritt ein Sechszehneck $AEKFBGL\ldots$ konstruiert, so ist sein Flächeninhalt ein noch besserer Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises; ein Zweiunddreißigeck liefert einen noch besseren usw.

Das Verfahren des Ausschöpfens war bereits einige Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung bekannt und wurde von den Mathematikern seitdem verwendet; die obengenannte Bezeichnung wurde dagegen erst im Mittelalter eingeführt. 1651 erläuterte der belgische Mathematiker *Taquet* die Exhaustionsmethode folgendermaßen:

*Man sagt, eine bestimmte Größe (z. B. ein Flächeninhalt, ein Volumen) wird durch eine Folge einbeschriebener Größen ausgeschöpft, wenn sich die einbeschriebenen Größen ab einem bestimmten Schritt von der ursprünglich betrachteten nur um einen Wert unterscheiden, der kleiner als eine beliebig gewählte Konstante ist.*

Als theoretische Grundlage dieser Methode kann ein Satz von *Eudoxos* (etwa 408 bis 355 v. u. Z.) dienen, der besagt:

Wenn man von einer Größe die Hälfte oder mehr als die Hälfte wegnimmt und diesen Vorgang hinreichend oft wiederholt, dann kann man stets zu einer Größe gelangen, die kleiner ist als irgendeine Größe derselben Art.

Einer der ersten, die dieses Verfahren angewendet haben, war *Antiphon* (5. Jh. v. u. Z.), der auch versuchte, das Problem der Quadratur des Kreises zu lösen. Auf Grund von Überlegungen zum Ausschöpfen des Kreises mittels einbeschriebener Vielecke behauptete er: Wenn man ein Vieleck konstruieren kann, das dem Kreis flächengleich ist, so bedeutet dies, daß man auch ein entsprechendes Quadrat konstruieren kann. *Antiphon* berücksichtigte aber nicht, daß alle dem Kreis einbeschriebenen Vielecke nur Näherungswerte für den Flächeninhalt des Kreises liefern – auch wenn sie dem Kreis noch so nahe kommen.

Der berühmte Mathematikhistoriker *Hankel* bemerkte, daß *Antiphon* der erste war, der sich beim Versuch, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren durch Ausschöpfen mit regelmäßigen Vielecken wachsender Seitenzahl zu bestimmen, auf dem richtigen Weg befand. Die Vorgehensweise *Antiphons* ergänzte dessen Zeitgenosse *Brison*, indem er zusätzlich umbeschriebene Vielecke in die Betrachtung einbezog. Dadurch wurde die Exhaustionsmethode ein mathematisch zuverlässiges Verfahren. Jedoch war sie keine universale, d. h. auf alle Probleme der Flächeninhalts- bzw. Volumenberechnung anwendbare Methode wie beispielsweise die Integralrechnung. Sie wurde nur als ein bequemes Verfahren zur Lösung gewisser derartiger Probleme verwendet – z. B. mehrmals von *Euklid* in seinen *Elementen* sowie in einer Reihe von Werken des *Archimedes*. Der bekannte deutsche Mathematikhistoriker *H. G. Zeuthen* weist in der *Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter* darauf hin, daß *Archimedes* später diese Methode weniger als ein Beweisverfahren ansah, sondern vielmehr als *Hilfsmittel* zum Entdecken von mathematischen Sätzen einschließlich ihrer Beweise.

In einer der Arbeiten von *Archimedes*, die man erst in unserem Jahrhundert entdeckte, wurde die Fläche als *Summe von Strecken* und das Volumen als *Summe von Flächen* betrachtet. Das ist aber ein Ansatzpunkt für unsere heutige Integralrechnung!

Abschließend soll die Anwendung der Exhaustionsmethode an einem Beispiel demonstriert werden:

Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die von dem durch die Ungleichung $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ bestimmten Stück der Spirale mit der Gleichung $r = a \cdot \phi$ (in Polarkoordinaten – siehe *alpha* 5/1977) und der Verbindungsstrecke von Anfangs- und Endpunkt dieses Spiralenstücks begrenzt wird (Bild 2).

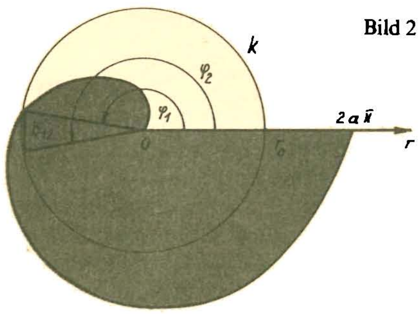


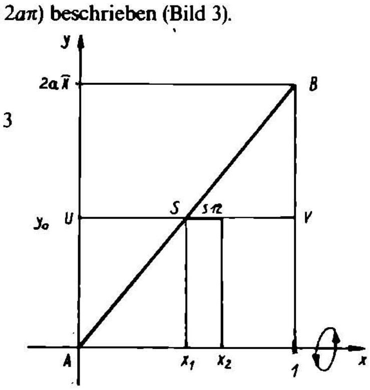

Bild 2

Setzen wir $\frac{\phi}{2\pi} = x$ und $r = y$, so erhalten wir $y = r = a \cdot 2\pi x$ und

| | | |
|---|---|---|
| $r = a \cdot \phi$<br>$0 \leqq \phi \leqq 2\pi$<br>$a$ konstant | geht über in | $y = 2a\pi \cdot x$<br>$0 \leqq x \leqq 1$<br>$0 \leqq y = 2a\pi$<br>$a$ konstant |
| (*) | | (**) |

Fassen wir $x$ und $y$ als Koordinaten von Punkten in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem auf, so wird durch (**) die Strecke mit den Endpunkten $A(0; 0)$ und $B(1; 2a\pi)$ beschrieben (Bild 3).

Bild 3



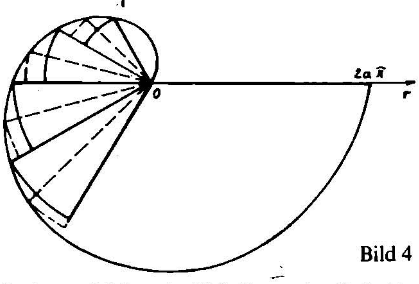



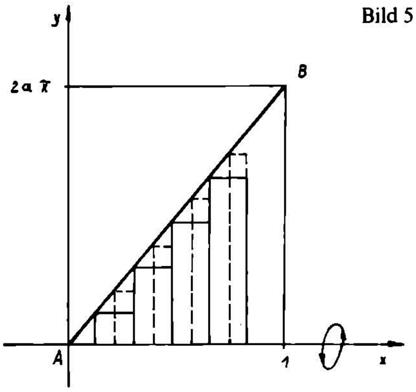

Bild 4

In der nachfolgenden Tabelle werden für beide Auffassungen einige Begriffe einschließlich ihrer mathematischen Beschreibung gegenübergestellt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Spiralenstück | $r=a\cdot\phi$<br>$0\leqq\phi\leqq 2\pi$ | $y=2a\pi\cdot x$<br>$0\leqq x\leqq 1$<br>$0\leqq y\leqq 2a\pi$ | Strecke $\overline{AB}$;<br>$A(0;0)$; $B(1;2a\pi)$ |
| Kreis $k$ um $P$ | $r=r_0$<br>$0\leqq\phi\leqq 2\pi$ | $y=y_0=r_0$<br>$0\leqq x\leqq 1$ | Strecke $s=\overline{UV}$<br>$U(0;y_0)$; $V(1;y_0)$ |
| Maßzahl des Flächeninhalts von $k$ | $\pi r_0^2$ | $\pi y_0^2\cdot 1$ | Maßzahl des Volumens des bei Rotation der Strecke $s$ um die $x$-Achse entstehenden Kreiszylinders |
| Kreisbogen $b_{12}$ (Teil von $k$) | $r=r_0$<br>$\phi_1\leqq\phi\leqq\phi_2$ | $y=y_0$<br>$x_1\leqq x\leqq x_2$ | Strecke $s_{12}$ (Teilstrecke von $s$) |
| Maßzahl des Flächeninhalts des durch $b_{12}$ bestimmten Sektors von $k$ | $\pi r_0^2\dfrac{\phi_2-\phi_1}{2\pi}$ | $\pi y_0^2(x_2-x_1)$ | Maßzahl des Volumens des bei Rotation von $s_{12}$ um die $x$-Achse entstehenden Kreiszylinders |

Schöpft man nun die uns interessierende Fläche durch eine Folge von aus Kreissektoren zusammengesetzten Flächen gemäß Bild 4 aus, so entspricht dem eine Ausschöpfung des Kegels, der bei Rotation der Strecke $\overline{AB}$ um die $x$-Achse entsteht. Der Kegel wird dabei durch eine Folge von aus Kreiszylindern zusammengesetzten Körpern ausgeschöpft (Bild 5).

Bild 5




Die Maßzahl des Volumens des Kegels können wir berechnen:

$$V=\frac{1}{3}\cdot(2a\pi)^2\cdot\pi\cdot 1;\quad V=\frac{4}{3}a^2\cdot\pi^3.$$

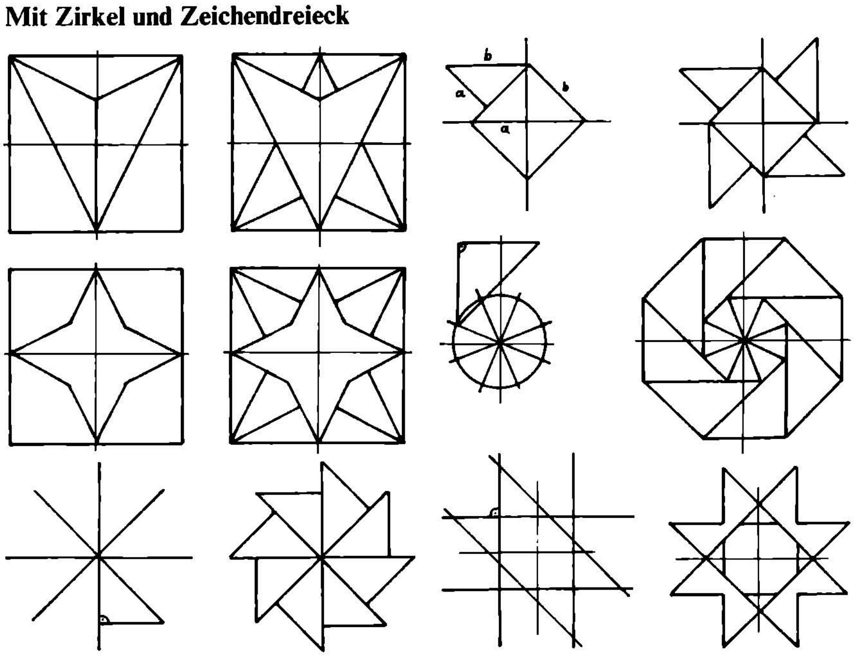
Diese ist nach unseren Überlegungen gleichzeitig die Maßzahl des Flächeninhalts der uns interessierenden Fläche:

$$A=\frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

Es sei betont, daß wir uns beim Ausschöpfen hier der Anschauung bedient haben. Die exakten Beweise lassen sich jedoch mit den Mitteln der 11./12. Klasse führen. Erst dadurch sind wir zu unserem Vergleich berechtigt.

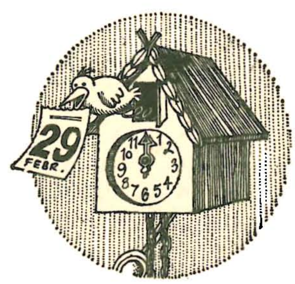
*A. Halameisär/C. P. Helmholz*

## Mit Zirkel und Zeichendreieck




# Seit wann gibt es die Schalttage?

Geschaltet wurde auf die verschiedenste Weise schon im Altertum. Kein Kalenderversuch kam daran vorbei, weil die Erde sich während eines Umlaufs um die Sonne (also in einem Jahr) eben leider nicht genau 365mal um die eigene Achse dreht, sondern fast eine Vierteldrehung mehr macht – genau 365,2422 Sonnentage ist das Jahr lang.
Da die Dezimalstellen einigermaßen genau einen Vierteltag ausmachen, wurde auch schon im 3. Jahrhundert v. u. Z. die Idee geboren, aller vier Jahre einen Tag einzu„schalten". Darauf basiert auch der Julianische Kalender, geschaffen von Julius Caesar im Jahre 46 v. u. Z.




Allerdings hatte sich die „kleine" Ungenauigkeit von 0,0078 Tagen jährlich im 16. Jahrhundert schon auf zehn Tage ausgewachsen, was Papst Gregor XIII. 1582 zu erneuter Kalenderreform veranlaßte: Die zehn Tage wurden gestrichen, und aller 400 Jahre sollte auf drei Tage verzichtet werden, und zwar auf die Schalttage in den Jahren 1700, 1800, 1900 (den nicht durch 400 teilbaren vollen Jahrhundertzahlen). 1600 war also Schaltjahr, 2000 wird auch Schaltjahr sein.
Es bleibt immer noch ein winziger Fehler, der aber erst im Jahre 4905 wieder einen Tag ausmachen wird – vorausgesetzt, daß sich weder Bahn- noch Drehgeschwindigkeit der Erde ändern.
Ebenfalls schon seit Caesar liegt der Schalttag am Ende des Februars, allerdings war der ursprünglich 29 Tage lang und demzufolge der 30. Februar Schalttag. Seit Kaiser Augustus durfte der ihm zu Ehren August genannte Monat natürlich nicht kürzer als ein anderer sein, er erhielt einen 31. Tag auf Kosten des Februars.

*R. Möbius, aus: LVZ v. 28.2.80*

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

# Programmiertes Life-Spiel

Im Rahmen der Pionier- und Jugendakademie Erfurt finden im Haus der Jungen Pioniere Otto Grotewohl Mathematikzirkel statt Für die Teilnehmer dieser Zirkel werden in den Herbst- und Frühjahrsferien Sonderkurse Numerik durchgeführt. Der dritte Numerik-Kurs erhielt in diesem Jahr die Aufgabe, das Life-Spiel aus *alpha* 3/79 und 4/79 zu programmieren. Dazu stehen uns die programmierbaren Kleinrechner Cellatron SER 2c und 2d zur Verfügung. Es wurde nach zwei Methoden vorgegangen.

Die Schüler *Gudrun Mögling*, EOS *Heinrich Mann*, und *Sylvia Hauptmann*, 42. OS, arbeiteten nach der ersten Methode am Rechner SER 2c. Die zweite Methode wurde von mir, *Dietmar Deimling*, EOS *G. E. Lessing*, für den Rechner SER 2d entwickelt.

Beide Programme sind fertiggestellt.

Der SER 2c ist ein programmierbarer Kleinrechner. Programme könnnen über einen bestimmten Code eingegeben werden. Die kleinsten Elemente eines Programms nennt man Befehle.

Der Rechner SER 2c führt an arithmetischen Befehlen nur die vier Grundrechenoperationen aus.

Eingaben erfolgen über einen Lochbandleser oder die Funktionstastatur. Ein Programm wird im Normalfall (codiert) auf ein Lochband gestanzt und dann in den Rechner eingegeben. Der Rechner kann Zahlen über einen Lochbandstanzer oder über die Schreibmaschine ausgeben. Im Hauptspeicher kann man 127 verschiedene Zahlen und 381 Befehle speichern. Die Rechengeschwindigkeit ist im Vergleich zu modernen Großrechnern sehr gering (400 Additionen je 1 s).

Der SER 2d verfügt über einen zweiten Lochbandleser und einen unwesentlich erweiterten Befehlsumfang.

Bei der ersten Methode arbeitet der Rechner SER 2c beim Life-Spiel auf einer Fläche von 6 mal 6 Feldern. Jedem Feld wird eine bestimmte Adresse zugeordnet. So hat z. B. das Feld in der Zeile 2, Spalte 5 die Adresse (2, 5). Die zu bearbeitende Figur wird in den Hauptspeicher eingegeben. Es entspricht ein Speicherplatz einem Feld. In einem Speicherplatz kann eine 1 oder eine 0 stehen, was bedeutet, daß das Feld belegt ist oder nicht. Der Rechner überprüft nun jedes einzelne Feld daraufhin, ob es in der folgenden Generation belegt sein wird oder nicht. Wenn ja, so speichert er die Adresse dieses Feldes ab. Nach und nach erhält er die Adressen aller Felder, die in der nächsten Generation belegt sein werden. Die Fläche, in der das ursprüngliche Feld ist, wird dabei nicht verändert. Die vom Rechner auf diese Weise entwickelten Adressen gibt er an die Schreibmaschine aus. Die Fläche wird mit der neuen Figur überschrieben. Nun kann der Rechner an dieser Figur die Rechnungen zur folgenden Generation fortsetzen.

Im folgenden soll die zweite Methode näher beschrieben werden. Hier arbeitet der Rechner auf einer Fläche von 8 mal 6 Feldern. Die Adressen der Felder spielen nur bei der Eingabe der Anfangsfigur eine Rolle. Beim eigentlichen Rechenvorgang arbeitet der SER 2d ohne die Adressen. Das Prinzip unterscheidet sich von dem der 1. Methode grundsätzlich. Bei der 1. Methode wurde die Figur nicht verändert und die neue Figur parallel zur alten errechnet. Bei meiner Methode wird die Fläche während des Rechnens direkt verändert.

Das Programm besteht aus mehreren Teilprogrammen, die aufeinanderfolgend abgearbeitet werden:

*Teilprogramm I:* Die Fläche, in die die Figur eingegeben werden soll, wird gelöscht, denn es könnten noch aus vorhergehenden Rechnungen Zahlen enthalten sein.

*Teilprogramm II:* Die Ausgangsfigur wird über die Zehnertastatur eingegeben. Man gibt der Reihe nach die Adressen der Felder ein, die belegt sein sollen.

*Teilprogramm III:* Die Figur wird mit der Nummer der Generation durch die Schreibmaschine ausgegeben. Das erfolgt zeilen- und spaltenweise. Dabei entspricht 1 einem Stein und 0 bedeutet, daß das Feld unbelegt ist.

*Teilprogramm IV:* Der Rechner nimmt direkte Veränderungen an der Figur vor. Es wird jedes Feld einzeln bearbeitet. *Als Nachbar eines Feldes sieht der Rechner ein Feld an, dessen Inhalt größer bzw. gleich 1 ist.*

So werden z. B. 2 und 1 als Nachbarn angesehen, 0 und $-1$ jedoch nicht.

Durch Zählen der Nachbarn kann der Rechner bestimmen, wie das Feld in der folgenden Generation belegt ist. Stellt der Rechner fest, daß ein Stein stirbt oder geboren wird, so wird das entsprechende Feld mit 2 bzw. $-1$ belegt.

Die alte Figur wird dadurch jedoch nicht beeinflußt, denn der Inhalt der entsprechenden Felder war vor der Veränderung 1 bzw. 0.

Am Ende dieses Teilprogramms ist das Gesamtfeld folgendermaßen aufgebaut:

Eine 1 oder 0 steht dort, wo in der Ausgangsfigur eine 1 oder 0 stand und sich nichts verändert hat.

Eine $-1$ steht dort, wo in der Ausgangsfigur eine 0 stand und ein Stein geboren wurde.

Eine 2 steht dort, wo in der Ausgangsfigur eine 1 stand und der Stein stirbt.

*Teilprogramm V:* Überall da, wo eine $-1$ steht (neuer Stein), wird diese durch eine 1 ersetzt. Der neue Stein wurde geboren. Überall dort, wo eine 2 steht (Stein stirbt), wird das entsprechende Feld gelöscht (mit 0 belegt).

Nach Abarbeitung auch dieses Teilprogramms liegt die auf die Ausgangsfigur folgende Generation vollständig vor.

*Teilprogramm VI:* Es erfolgt nun noch die Überprüfung der „Fläche". Bei folgenden Bedingungen druckt der Rechner jeweils einen entsprechenden Text gesondert aus und bleibt selbständig stehen:

1. Figur ist ausgestorben (keine „Steine" mehr enthalten),
2. Figur läuft über (da Fläche begrenzt),
3. Figur ist konstant (Weiterrechnen sinnlos).

Es existiert allerdings keine Abbruchbedingung dafür, wenn die Figur periodisch ist. Wenn die Bedingungen 1 bis 3 nicht zutreffen, beginnt der nächste Zyklus mit dem Teilprogramm III.

Ein Zyklus dauert etwa 6 Minuten. Die Handhabung des Programms ist sehr einfach. Außer der Eingabe der Anfangsfigur werden alle anderen Schritte vom Rechner ausgeführt.

Zur Zeit arbeite ich an der Programmierung einer Fläche von 28mal 24 Feldern.

Dieses Programm wird gegenüber dem hier beschriebenen wesentlich komplizierter.

Die Berechnung einer Generation wird knapp 90 min dauern.

*Dietmar Deimling*


## Sport frei!

In der Gleichung

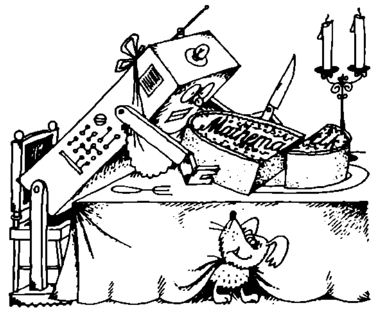
**O + L + Y + M + P + I + A + D + E = 1980**

stellen die Buchstaben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen dar, die zu ermitteln sind.

(Lösung s. Heft 5/80.)

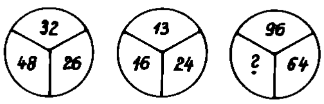
# In freien Stunden · alpha-heiter

**Unterhaltungsmathematik international**

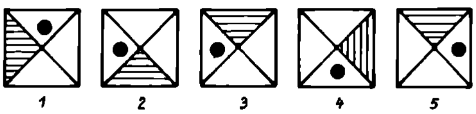


### Prüfe deinen Verstand!

a) Ersetze das Fragezeichen durch die richtige Zahl!




b) Welche der Figuren durchbricht eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?




c) Welche Zahl verletzt eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?

625 361 256 197 144

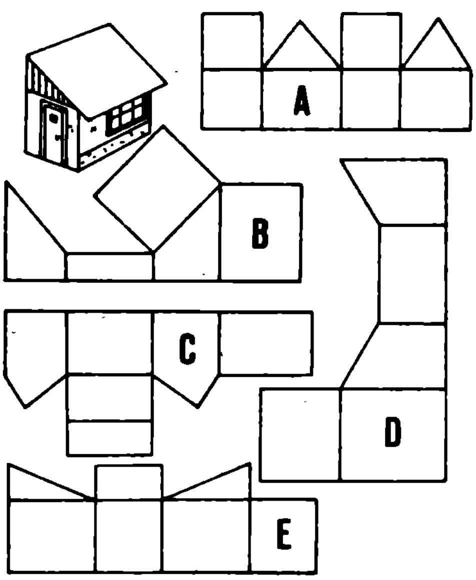
d) Bestimme die fehlenden Buchstaben!

| | | | |
|---|---|---|---|
| *D* | *H* | *L* | |
| *W* | *S* | *O* | |

*aus: Information Bulletin, Educational Research Center, Universität Addis Abeba (Äthiopien)*

### Modell einer Datsche

Welches der fünf Netze gehört zu dem Modell (links oben)? *aus: Füles, Budapest*




### Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern. (Bei a) und b) ist die größte Summe zu finden.)

a)
```
PETER
  IST
   ZU
-----
HAUSE
```

b)
```
  WO
 IST
SEIN
----
BALL?
```
O<T<L

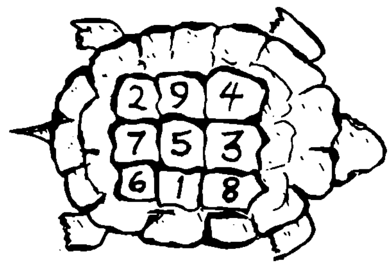
c)
```
  WANN
 KOMMT
------
 VATER?
```
W<O

*Dirigent J. Pěnčik, Praha*

### Magisches Quadrat

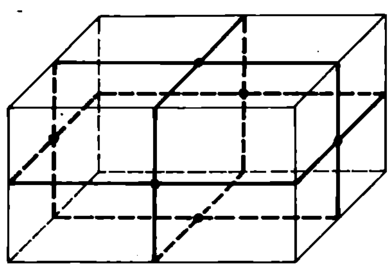
Das Bild zeigt eine Schildkröte mit einem magischen Quadrat. Es stammt aus dem alten China (2000 v. u. Z.). In das danebenstehende magische Quadrat sind die Zahlen $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ so einzutragen, daß die Summe waagerecht, senkrecht und diagonal stets 0 beträgt.

*aus: Mathematical log, Oklahoma*

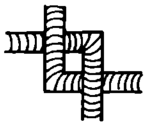



### Verschnürung eines Pakets

Ein quaderförmiges Paket ist mit einem einzigen Bindfaden (stark gezeichnet) auf die folgende Weise zu verschnüren:



Die Schnur soll an keiner Stelle doppelt liegen und an den 6 Treffpunkten (.) auf solche Weise gekreuzt werden:



Auf wie viele Arten ist eine solche Verschnürung möglich? (Der Abschlußknoten ist in obiger Skizze nicht erkenntlich gemacht.)

*Mitgeteilt von Prof. Dr. K. Biermann, Humboldt-Universität zu Berlin*

**Zerlegungsproblem**

Gegeben sei ein u-förmiges Stück Blech (Bild 1a). Es ist a) in vier rechtwinklige Dreiecke und ein Quadrat zu zerlegen. Die fünf Teile sollen das Quadrat (Bild 2) voll bedecken. Es ist (Bild 1b) b) in vier form- und flächengleiche Teile zu zerlegen. Diese vier Teile sollen das Rechteck (Bild 3) voll bedecken.

*aus: Matematički List, Beograd*

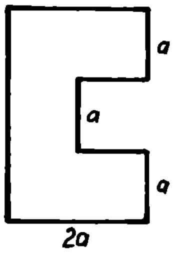



Bild 1a

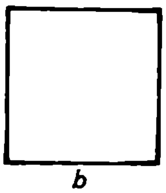



Bild 2

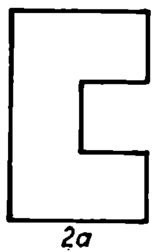



Bild 1b

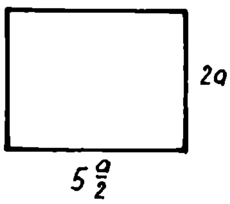


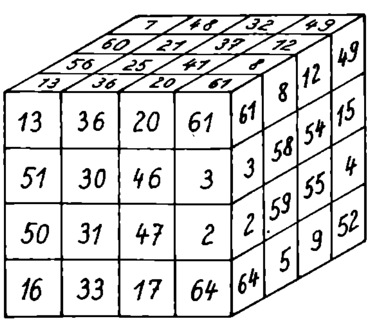

Bild 3

**52mal Summe 130**

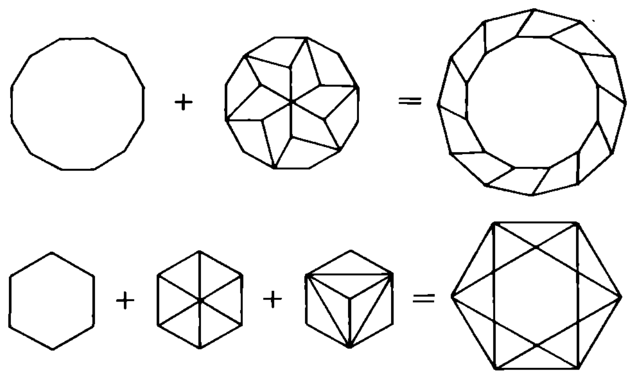
Ein Würfel mit 4 dm Kantenlänge ist aus 64 je 1 dm³ großen Würfeln zusammengesetzt, wobei jedem Würfel eine der Zahlen 1 bis 64 zugeordnet ist. Die Zusammensetzung besteht darin, daß die Zahlen von je vier Würfeln, die nebeneinander, übereinander oder hintereinander liegen, die Summe 130 bilden; ebenfalls bilden die Zahlen der Würfel in den vier Raumdiagonalen die Summe 130.

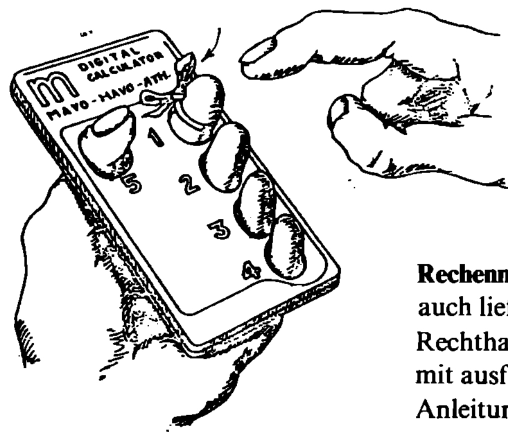
Ordne den verdeckten Würfeln die entsprechenden Zahlen zu!

*Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)*




**Mach's mal nach!** *aus: Pythagoras, Utrecht (Niederlande)*





**Rechenmaschine**
auch lieferbar als Rechthandmodell mit ausführlicher Anleitung (296 S.)

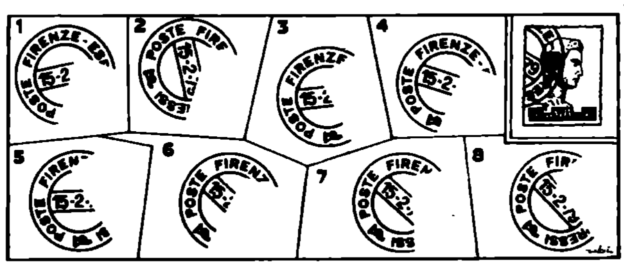
**Euklides (von Alexandria)**

Euklid hat in Alexandrien Mathematik gelehrt (um 300 v.u.Z.). Er war ein Zeitgenosse von König Ptolemeios, dem er zu sagen wagte, daß es für Könige keinen besonders bequemen Weg zur Geometrie gebe. Dies und die Anekdote über den praktischen „Nutzen" der Mathematik sind so ziemlich alles, was über sein Leben bekannt ist. E. ist bekannt geworden als der Autor der „Elemente", jenes bemerkenswerten Lehrbuches, das über 2000 Jahre lang eine Grundlage für den Geometrieunterricht in Schulen und Hochschulen war.

Ein Schüler fragte Euklid: „Was kann ich verdienen, wenn ich diese Dinge lerne?" E. rief seinen Sklaven und sagte: „Gib ihm 3 Obolen; der arme Mann muß Geld verdienen mit dem, was er lernt."

**Aus einer Briefmappe**

Von welchem der acht Umschläge ist die Briefmarke (oben rechts) abgelöst?



# XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 1. Stufe (Schulolympiade)

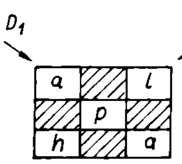
*Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1980*

*Achtung:* Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1980 veröffentlicht.

*Anmerkung:* $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet $AB$ die Strecke mit den Endpunkten $A$ und $B$, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke $AB$ bedeutet.

### Olympiadeklasse 5

200511 Ralph, ein eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft seinen Mitschülern folgende Aufgabe:
In der abgebildeten Figur sind für $a$, $h$, $l$, $p$ natürliche Zahlen so einzutragen, daß sich in jeder der beiden Diagonalen $D_1$, $D_2$ die Summe 135 ergibt. Dabei soll die Zahl $p$ das Dreifache der Zahl $a$ sein, und die Zahl $h$ soll das Fünffache der Zahl $l$ sein.




Ermittle alle derartigen Eintragungen, und erkläre, wie man sie finden kann! Überprüfe dabei auch, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind!

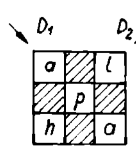
200512 Zum Transport einer bestimmten Menge Schotter hätte ein LKW mit 5 t Ladefähigkeit genau 105 vollbeladene Fuhren durchführen müssen. Nach 35 dieser Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 7 t Ladefähigkeit abgelöst.
Stelle fest, wieviel vollbeladene Fuhren dieser zweite LKW noch durchzuführen hat, um die restliche Schottermenge abzutransportieren!

200513 Annegret, Heidi, Katrin, Lore, Petra und Ruth bewohnen im Pionierlager gemeinsam ein Zelt und beschließen, die Reihenfolge für ihren Ordnungsdienst nach ihrem Alter festzulegen, beginnend mit dem ältesten Mädchen. Alle sechs Mädchen sind im gleichen Jahr geboren, jedes an einem anderen Tag. Katrin ist älter als die fünf anderen Mädchen. Heidi hat einen Monat nach Annegret Geburtstag, sie ist aber älter als Petra. Lore ist jünger als Annegret. Ruth ist älter als Heidi und hat einen Tag später Geburtstag als Lore.
In welcher Reihenfolge müssen die sechs Pioniere ihren Ordnungsdienst versehen, wenn sie ihren Beschluß verwirklichen wollen?

200514 Von den sieben Schülern Annette, Beate, Christine, Dieter, Frank, Gerd und Hans hatte jeder in mindestens einem der beiden Fächer Mathematik und Russisch die Note 1. Auf die Frage, wer in genau einem dieser beiden Fächer die Note 1 hat, meldeten sich von diesen Schülern nur Annette, Christine, Frank, Gerd und Hans. In Mathematik hatten von ihnen nur Beate, Christine, Dieter und Frank die Note 1.
Ermittle aus diesen Angaben alle diejenigen der sieben Schüler, die
a) in Mathematik und in Russisch,
b) in Mathematik, aber nicht in Russisch,
c) in Russisch, aber nicht in Mathematik
die Note 1 hatten!

### Olympiadeklasse 6

200611 Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:
In der abgebildeten Figur sind für $a$, $h$, $l$, $p$ natürliche Zahlen so einzutragen, daß sich in jeder der beiden Diagonalen $D_1$, $D_2$ die Summe 80 ergibt. Dabei soll die Zahl $a$ doppelt so groß wie die Zahl $p$ sein; für $l$ soll eine Primzahl eingetragen werden und für $h$ eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von $l$ ist.

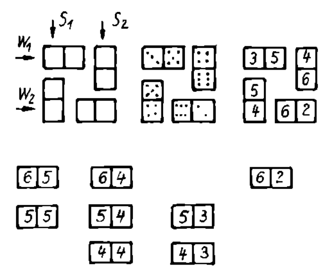



Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

200612 Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, daß man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte. Berechne, wieviel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

200613 Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

200614 Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild $A\,614a$ zeigt. Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen $W_1$, $W_2$ und zwei senkrechte Streifen $S_1$, $S_2$. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild $A\,614b$ z. B. ist diese Summe 12. Die sonst übliche Regel, daß benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild $A\,614c$.
Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild $A\,614d$ abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen $W_1$, $W_2$, $S_1$, $S_2$ die Summe 13 entsteht.
Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.



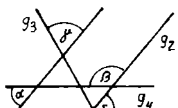

### Olympiadeklasse 7

200711 Anläßlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

200712 Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v. u. Z.) stammt folgende Aufgabe:

Ein Wanderer stellt fest, daß ein Hirt 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: „Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?“ – „Nein“, antwortet der Hirt, „ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide.“
Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

200713 Vier Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4$ mögen sich so schneiden, wie es aus Bild $A$713 ersichtlich ist. Für die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha=50°$, $\beta=130°$, $\gamma=70°$.
Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße $\delta$!



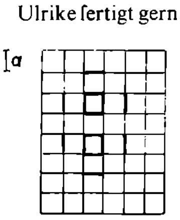

200714 Beweise folgenden Satz:
Ist $M$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks $ABC$ und gilt $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$, so ist das Dreieck $ABC$ rechtwinklig.

**Olympiadeklasse 8**

200811 Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{rcrcr} aac & - & de & = & ffe \\ : & & + & & - \\ gb & \cdot & gf & = & dba \\ \hline h & & e+ig & = & kgf \end{array}$$

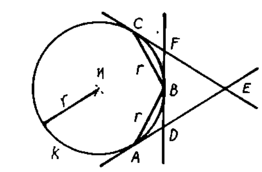
200812 Ulrike fertigt gern Strickarbeiten an.




In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde. Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, daß der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand $a$ hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.
Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, daß eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!

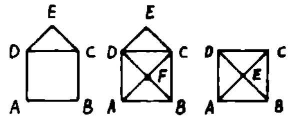
200813 Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: „Im Preis um 20% herabgesetzt.“
Auf dem Heimweg sagte Heinz: „Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart.“ Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: „Stimmt das?“
Dieser erklärte ihm darauf: „Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\frac{1}{9}\%$ des von mir gezahlten Preises eingespart.“
Beweise, daß diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

200814 Gegeben sei ein Kreis $k$ mit dem Radius $r$. $AB$ und $BC$ seien zwei Sehnen der Länge $r$. In $A$, $B$ und $C$ seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte $D$, $E$ und $F$, wie im Bild angegeben.
Beweise aus diesen Voraussetzungen, daß das Dreieck $DEF$ gleichseitig ist!




**Olympiadeklasse 9**

200911 Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!
„In einem Zuge“ soll bedeuten, daß beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muß.




Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

200912 Zwei Personen, $A$ und $B$, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:
Zunächst wird eine ganze Zahl $Z$ vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl $Z$ zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.
Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.
Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z=12$ lautete, ergab sich:
Die von $A$ gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Die von $B$ gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.
Zeigen Sie, daß für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler $A$ als auch der Spieler $B$ einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

200913 a) Kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?
b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl $n$ der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+3}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!
*Hinweis:* Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

200914 Gegeben seien ein Kreis $k_1$ mit dem Mittelpunkt $M_1$ und dem Radius $r_1=4{,}5$ cm sowie ein Kreis $k_2$ mit dem Mittelpunkt $M_2$ und dem Radius $r_2=2{,}5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2}=7$ cm.
Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise $k_1$ und $k_2$! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

**Olympiadeklasse 10**

201011 a) Geben Sie ein Paar $(x, y)$ reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$10y - x \leqq 100, \qquad (1)$$
$$5y - 5x > 0, \qquad (2)$$
$$y + x \geqq 21. \qquad (3)$$

b) Beweisen Sie, daß es mehr als zehn verschiedene derartige Paare $(x, y)$ gibt!

201012 Beweisen Sie, daß

$$\frac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}$$

für alle ganzen Zahlen $x$, $y$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$
a) (als reelle Zahl) definiert ist und sogar
b) eine ganze Zahl ist!

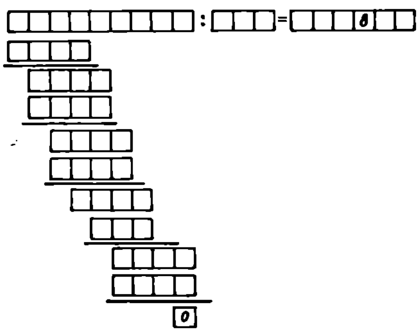
201013 Gegeben seien die Seitenlängen $a=\overline{BC}=15$ cm, $b=\overline{AC}=14$ cm, $c=\overline{AB}=13$ cm eines Dreiecks $ABC$.
Berechnen Sie die Länge $h_b$ der durch $B$ ver-

laufenden Höhe und den Flächeninhalt $F$ dieses Dreiecks!

201014 Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen,
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: „Mußt dich nicht quälen!
's sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag' dir, daß es nicht gelingt,
daß man sie so drin unterbringt,
daß nicht ein Pärchen existier'
des Abstand kleiner ist als vier."
(Er meint natürlich Zentimeter.)
„Und dies beweis mir mal!" sagt Peter:
„Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht."

**Olympiadeklasse 11/12**

201211 In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, daß es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

201212 Vier Personen $A$, $B$, $C$, $D$ machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl $x$.
Es ist bekannt, daß
(1) von $A$, $B$, $C$ genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,
(2) $D$ zwei wahre Aussagen macht.
Die von $A$, $B$, $C$, $D$ gemachten Aussagen lauten:
($A1$) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von $x$ ist gerade.
($A2$) $x$ ist Quadratzahl.
($B1$) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von $x$ mindestens einmal vorhanden.
($B2$) $x$ ist vierstellig.
($C1$) $x$ ist durch 10 teilbar.
($C2$) $x$ läßt bei Division durch 3 den Rest 1.
($D1$) In der dekadischen Darstellung von $x$ ist, falls $x$ aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.
($D2$) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von $x$ ist nicht größer als 2.
Man ermittle alle Zahlen $x$, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

201213 Eine gerade Pyramide $K_1$ mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide $K_2$ und einen Pyramidenstumpf $K_3$ zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von $K_1$ und $K_2$ seien $a_1$ bzw. $a_2$, die Volumina von $K_2$ bzw. $K_3$ seien $V_2$ bzw. $V_3$.
Man ermittle $a_1 : a_2$ so, daß $V_2 : V_3 = 2:3$ gilt!

201214 In einem rechtwinkligen kartesischen $x,y$-Koordinatensystem seien gegeben:
Die Punkte $M$ (0;0), $F_1$ (2;0), $F_2$ (−2;0), $A(4;0)$, $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade $g$ mit der Gleichung $x=-8$,
der Kreis $k_1$ um $M$ durch $A$, der Kreis $k_2$ um $M$ durch $B$.
Unter der „Ellipse mit Brennpunkten $F_1$, $F_2$ und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$" versteht man die Menge $E_1$ aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, für die $\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=2\overline{MA}$ gilt.
Unter der „Ellipse mit Brennpunkt $F_2$, Leitlinie $g$ und Exzentrizität $\frac{1}{2}$" versteht man die Menge $E_2$ aller Punkte $P(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $Q$ der Fußpunkt des Lotes von $P$ auf $g$, so gilt $\overline{F_2P}=\frac{1}{2}\overline{PQ}$.
Unter der „Ellipse durch $A$ mit Hauptscheitelkreis $k_1$ und Nebenscheitelkreis $k_2$" versteht man die Menge $E_3$ aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von $M$ ausgehenden Strahl. Er schneidet $k_1$ bzw. $k_2$ in je einem Punkt $R_1$ bzw. $R_2$. Die Parallele durch $R_1$ zur $y$-Achse und die Parallele durch $R_2$ zur $x$-Achse schneiden sich in $P$.
Beweisen Sie, daß die drei Punktmengen $E_1$, $E_2$, $E_3$ einander gleich sind!

# Lösungen

**Lösungen zu: Gute Grundkenntnisse gefragt (Heft 3/80):**

**Klasse 5**

▲1▲ a) 15 ist Lösung der Ungleichung, denn es gilt $25+15>20-15$.
b) Nur die Zahl 7 erfüllt die Gleichung.

▲2▲ a) $72:9<88:8$
b)

| $a-2$ | $a-1$ | $a$ | $a+1$ |
|---|---|---|---|
| 297 | 298 | 299 | 300 |
| 4599 | 4600 | 4601 | 4602 |
| 229 | 230 | 231 | 232 |
| 7900 | 7901 | 7902 | 7903 |

▲3▲ a) Die Gleichung ist wahr.
b) Die Ungleichung ist falsch.

▲4▲ a) Die Summe der Zahlen 37 und 65 ist mit 8 zu multiplizieren, und zu diesem Produkt ist die Zahl 17 zu addieren.
b) $(37+65)\cdot(8+17)$

▲5▲
a) $12\text{ mm}\cdot 50000=600000\text{ mm}=600\text{ m}$
Die Strecke ist im Gelände 600 m lang.
b) $1{,}4\text{ km}=1400000\text{ mm}$, $140000\text{ mm}:25000=56\text{ mm}$.

▲6▲ $110\text{ kg}-68\text{ kg}=42\text{ kg}$;
$42\text{ kg}=42000\text{ g}$; $42000:600\text{ g}=70$.
Das Mastschwein muß noch 70 Tage gefüttert werden.

**Klasse 6**

▲1▲ $t=2$

▲2▲ $g=\frac{4}{5}$

▲3▲

| $a$ | $a\cdot 10$ | $a\cdot 100$ | $a\cdot 1000$ |
|---|---|---|---|
| 17 | 170 | 1700 | 17000 |
| 34 | 340 | 3400 | 34000 |
| 825 | 8250 | 82500 | 825000 |
| 742 | 7240 | 72400 | 724000 |

▲4▲ Die ČSSR ist dichter besiedelt.

▲5▲ $\frac{3\text{ m}}{200\text{ m}}$

| 240 m² | 3,60 m² |
|---|---|
| 144 M | 216 M |

▲6▲

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | 8 cm | 5,7 cm | – | 5 cm |
| $\overline{BC}$ | 3 cm | 4,5 cm | – | 5 cm |
| $\overline{CD}$ | 8 cm | 5,7 cm | – | 5 cm |
| $\overline{DA}$ | 3 cm | 4,5 cm | – | 5 cm |
| $\sphericalangle DAB$ | 60 | 90 | – | 105 |
| $\sphericalangle ABC$ | 120 | 90 | – | 75 |
| $\sphericalangle BCD$ | 60 | 90 | – | 105 |
| $\sphericalangle CDA$ | 120 | 90 | – | 75 |
| $\overline{AM}$ | – | – | 7 cm | – |
| $\overline{MC}$ | – | – | 7 cm | – |
| $\overline{BM}$ | – | – | 6 cm | – |
| $\overline{MD}$ | – | – | 6 cm | – |
| $\sphericalangle AMB$ | – | – | 100 | – |
| $\sphericalangle BMC$ | – | – | 80 | – |
| $\sphericalangle CMD$ | – | – | 100 | – |
| $\sphericalangle AMD$ | – | – | 80 | – |

▲7▲ Es gibt 6 Möglichkeiten, auf kürzestem Wege zum Ziel ($G$) zu kommen:
$(a,b,e)$, $(a,k,f)$, $(d,e,l)$, $(d,m,g)$, $(i,e,f)$, $(i,h,g)$.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/79 (Fortsetzung):**

Ph9 ▪69 Geg.:
Masse des Triebwagens $m_T=16\,\text{t}=16000\,\text{kg}$
Masse des Anhängers $m_A=8\,\text{t}=8000\,\text{kg}$
Konstante $k=60\frac{Vs}{m}$
Geschwindigkeit $v=50\frac{km}{h}=\frac{50}{3{,}6}\frac{m}{s}$
Reibungskoeffizient $\mu_0=0{,}2$
Fallbeschleunigung $g=9{,}81\frac{m}{s^2}$

Ges.: a) Bremswiderstand $R$
b) Wärmemenge $Q$
c) Verzögerung $a$

a). Man vergleicht die mechanische mit der elektrischen Leistung.

$$P_{mech}\geqq P_{elektrisch}$$
$$F_R\cdot v\geqq\frac{U^2}{R}$$
$$\mu_0\cdot F_N\cdot v\geqq\frac{(kv)^2}{R}$$
$$\mu_0 m_T\cdot g\cdot v\geqq\frac{k^2v^2}{R}$$
$$R\geqq\frac{k^2v}{\mu_0\cdot m_T\cdot g}$$
$$R\geqq\frac{60^2V^2s^2\cdot 50\,m\cdot s^2}{0{,}2\cdot m^2\cdot 16000\,kg\cdot 9{,}81\cdot 3{,}6\,s}$$
$$R\geqq 1{,}59\,\Omega$$

Der Bremswiderstand muß mindestens 1,59 Ω betragen.

b) Die kinetische Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt.

$$Q=\frac{1}{2}(m_T+m_A)v^2$$
$$Q=\frac{1}{2}(16000+8000)\,kg\cdot\frac{50^2\cdot m^2}{3{,}6\cdot s^2}$$
$$Q\approx 2{,}315\cdot 10^6\,Ws$$
$$Q=0{,}643\,kWh$$

Beim Bremsen wird eine Wärmemenge von 0,643 kWh ($\approx 553$ kcal) frei.

c) Die Bremsverzögerung berechnet man nach der Formel $F=ma$, also

$$F_R=m\cdot(-a)$$
$$F_R=(m_T+m_A)(-a)$$
$$a=-\frac{F_R}{m_T+m_A}$$
$$a=-\frac{\mu_0\cdot m_T\cdot g}{m_T+m_A}$$
$$a=-\frac{0{,}2\cdot 16000\,kg\cdot 9{,}81\,m}{(16000+8000)\,kg\,s^2}$$
$$a\approx -1{,}31\frac{m}{s^2}$$

Die auftretende Bremsverzögerung hat den Wert $1{,}31\frac{m}{s^2}$.

Ph10/12 ▪70 Geg.: $r=6370\,km$
$h=750\,m=0{,}75\,km$
$T_0=24\cdot 60\cdot 60\,s$

Ges.: Differenz der Schwingungsdauer $\Delta T$

Aus dem Gravitationsgesetz in der Form $mg=\gamma\cdot\frac{Mm}{r^2}$ folgt

$$g_0=\frac{\gamma\cdot M}{r^2}\text{ und }g=\frac{\gamma\cdot M}{(r+h)^2}.\qquad(1)$$

Die Pendeluhr kann man als ein mathematisches Pendel betrachten.

Aus der Schwingungsdauer $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ergibt sich $\frac{T^2}{T_0^2}=\frac{g_0}{g}$. (2)

(1) in (2) eingesetzt, liefert

$$\frac{T^2}{T_0^2}=\frac{(r+h)^2}{r^2}$$
$$\frac{T}{T_0}=\frac{r+h}{r}$$
$$\frac{T-T_0}{T_0}=\frac{h}{r}$$
$$\Delta T=T-T_0=\frac{h}{r}\cdot T_0$$
$$\Delta T=\frac{0{,}75\,km}{6370\,km}\cdot 24\cdot 60\cdot 60\,s$$
$$\Delta T\approx 10{,}2\,s$$

Da $\Delta T>0$, geht die Uhr täglich 10,2 s nach.

Ch7 ▪53
220 g − 192,6 g = 27,4 g Wasser sind entzogen
220 g Kohle ≙ 27,4 Wasser
100 g $=m$

$$m=\frac{27{,}4\,g\cdot 100\,g}{220\,g}$$
$$m=12{,}5\,g$$

Die Kohle besitzt nach 2 Tagen noch eine Feuchtigkeit von 12,5%.

Ch8 ▪54 a) 10 kg ≙ 11%ig
35 kg ≙ $x$

$$\frac{10\,kg}{35\,kg}=\frac{x}{11\%}$$
$$x=\frac{10\,kg\cdot 11\%}{35\,kg}$$
$$x=3{,}14\%$$

Die neue Lösung ist 3,14%ig

b) $10\,kg\cdot 0{,}11$
$NaOH+HCl\rightarrow NaCl+H_2O$
0,04 kg 0,0585 kg

$$m=\frac{10\,kg\cdot 0{,}11\cdot 0{,}0585\,kg}{0{,}04\,kg}$$
$$m=1{,}6\,kg$$

Es entstehen 1,6 kg Kochsalz.

Ch9 ▪55 500 ml ≙ 40%
(500 − $x$) ml ≙ 32%

$$\frac{500\,ml}{(500-x)\,ml}=\frac{40\%}{32\%}$$
$$x=100\,ml$$

Es wurden 100 ml Flüssigkeit, d.h. 40 ml Alkohol und 60 ml Wasser entnommen.

Ch10/12 ▪56
Zimmer $=10\,m\cdot 5\,m\cdot 4\,m=200\,m^3$

$\frac{200000}{5000}=40\,l\;H_2S$ sind zu vernichten (Schwefelwasserstoff)

bei 0° und 760 Torr sind das:

$$\frac{V_0\cdot p_0}{T_0}=\frac{V_1\cdot p_1}{T_1}$$
$$V_0=\frac{V_1\cdot p_1\cdot T_0}{T_1\cdot p_0}$$
$$V_0=\frac{40\,l\cdot 780\,Torr\cdot 273\,°K}{293\,°K\cdot 760\,Torr}=38{,}3\,l$$
$$m=M\cdot n$$
$$m=M\cdot\frac{v}{Vm}$$
$$m=\frac{34\frac{g}{mol}\cdot 38{,}3\,l}{22{,}4\frac{l}{mol}}=58{,}1\,g$$ Schwefelwasserstoff sind zu vernichten.

Laut Gleichung sind für 38,3 l Schwefelwasserstoff auch 38,3 Chlor erforderlich

$$m_2=M\cdot\frac{V}{Vm}$$
$$m_2=\frac{71\frac{g}{mol}\cdot 38{,}3\,l}{22{,}4\frac{l}{mol}}=121{,}4\,g$$
$$\frac{121{,}4\,g}{0{,}3}=405\,g$$

Zur Reinigung sind 405 g 30%iger Chlorkalk erforderlich.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/80:**

Ma5 ▪1937 Angenommen, die gesuchte Zahl sei $n$; dann gilt $n\cdot 7+9=n\cdot 9+7$. Nur wenn man für $n=1$ setzt, erhält man eine wahre Aussage.
Die gesuchte Zahl ist die Zahl 1.

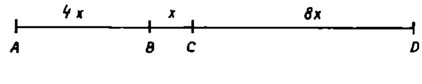
Ma5 ▪1938 Aus $L=38:19$ folgt $L=2$.
Aus $N=4\cdot L$ und $L=2$ folgt $N=8$.
Aus $R\cdot L=18$ und $L=2$ folgt $R=9$.
Aus $E+R+L=16$ und $R+L=9+2=11$ folgt $E=5$.
Aus $L+I=81:R$ und $L=2$ und $R=9$ folgt $2+I=81:9$, $2+I=9$, also $I=7$.
Durch Einsetzen erhalten wir aus ($f$) schließlich $B+5+9+2+7+8=34$, $B+31=34$, also $B=3$. Das Wort *BERLIN* entspricht somit der Zahl 359278.

Ma5 ▪1939 Wegen $9999+9999=19998$ gilt $A=1$. Aus $OTTO+1NN1=1NTON$ folgt $N=0$ und somit $0=9$ und $T=8$.
Wir erhalten $9889+1001=10890$.

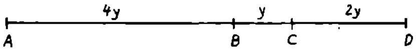
Ma5 ▪1940 Es läßt sich unmittelbar ablesen, daß $A=1$ gilt. Aus $CA+CB=150$ und $A=1$ folgt $B=9$ und somit $C=7$.
Die Jahreszahl für *ABCB* lautet 1979.

Ma5 ▪1941 Der erste Summand könnte 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 oder 999 sein. Der zweite Summand sei $x$, die Summe also $10\cdot x$; dann gilt $9x=111$ oder $9x=222$ und so weiter bis $9x=999$. Nur die Zahlen 333, 666 und 999 sind ohne Rest durch 9 teilbar. Daraus folgt weiter:
$x_1=333:9=37$, $x_2=666:9=74$, $x_3=999:9=111$.
Die drei Aufgaben lauten somit
$333+37=370$, $666+74=740$, $999+111=1110$.

Ma5 ▪1942 a) Es sei $\overline{BC}=x$ cm, also $\overline{AB}=4\cdot x$ cm und $\overline{CD}=2\cdot 4\cdot x$ cm $=8x$ cm. Wir rechnen nur mit den Maßzahlen der Streckenlängen; dann gilt
$4x+x+8x=91$, also $13x=91$ und somit $x=7$. Folglich gilt:
$\overline{AB}=28$ cm, $\overline{BC}=7$ cm, $\overline{CD}=56$ cm.



b) $4y+y+2y=91$, also $7y=91$ und somit $y=13$. Folglich gilt:
$\overline{AB}=52$ cm, $\overline{BC}=13$ cm, $\overline{CD}=26$ cm.




Ma 6 ■ 1943 Die Quersumme der sechs Zahlen 1, 5, 6, 7, 8, 9 lautet 36. Da die gesuchten Zahlen durch 9 teilbar sein sollen, muß ihre Quersumme 27 betragen, denn $1+5+6+7=19>18$.
Deshalb entfallen die Ziffern 1 und 8 wegen $1+8=9$. Die gesuchten Zahlen sind gerade, da sie durch 8 teilbar sein sollen; sie enden demnach auf die Ziffer 6. Die letzten beiden Ziffern der gesuchten Zahlen könnten 56, 76 oder 96 lauten. Von den möglichen Zahlen 7956, 9756, 5976, 9576, 5796, 7596 sind nur die Zahlen 5976, 9576 durch 8 teilbar. Die Zahl 5976 ist aber nicht durch 7 teilbar. Es gibt genau eine solche Zahl, sie lautet 9576.

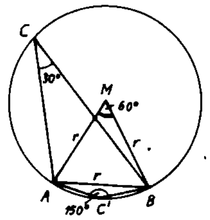
Ma 6 ■ 1944 Im Dreieck $ABD$ gilt $\sphericalangle BAD=180°-40°-70°=70°$ und $\sphericalangle BAC=70°:2=35°$.
Ferner gilt $\sphericalangle EBD=180°-40°=140°$ als Nebenwinkel, also $\sphericalangle CBD=140°:2=70°$ und somit $\sphericalangle ABC=40°+70°=110°$. Im Dreieck $ABC$ gilt deshalb $\sphericalangle ACB=180°-35°-110°=35°$. Aus $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BDA=70°$ folgt $\overline{AB}=\overline{BD}$; aus $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BCA=35°$ folgt $\overline{AB}=\overline{BC}$, d. h., die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ sind gleichschenklig.

Ma 6 ■ 1945 Im Dreieck $DBC$ gilt $\sphericalangle CDB=90°-20°=70°$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt für das Dreieck $AFD$ ferner $\sphericalangle DAF+\sphericalangle DFA=\sphericalangle CDB$, also $\sphericalangle DFA=70°-10°=60°$. Daraus folgt $\sphericalangle AFB=180°-60°=120°$ (als Nebenwinkel).

Ma 6 ■ 1946 Addieren wir die drei gegebenen Gleichungen, so erhalten wir $2a+2b+2c=186$ bzw. $a+b+c=93$.
Aus $a+b=90$ und $a+b+c=93$ folgt $c=3$.
Aus $a+c=75$ und $c=3$ folgt $a=72$.
Aus $a+b=90$ und $a=72$ folgt $b=18$.
Somit gilt $a\cdot b\cdot c=72\cdot 18\cdot 3=3888$.

Ma 6 ■ 1947 Die zu ermittelnden natürlichen Zahlen lassen sich darstellen durch $n=10a+b$. Ihre Quersumme lautet $a+b$. Nun gilt $10a+b-(a+b)=9$, $9a=9$, also $a=1$.
Wegen $0\leqq b\leqq 9$ erhalten wir folgende Zahlen, die die gestellte Bedingung erfüllen: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Ma 7 ■ 1948 Aus $\overline{AB}=\overline{AM}=\overline{BM}=r$ folgt, daß das Dreieck $ABM$ gleichseitig und somit gleichwinklig ist. Deshalb gilt $\sphericalangle AMB=60°$.




*Fallunterscheidung:*
1. Liegen $C$ und $M$ auf der gleichen Seite der Geraden $AB$, so gilt $\sphericalangle ACB=30°$.
2. Liegen $C'$ und $M$ auf verschiedenen Seiten der Geraden $AB$, so gilt $\sphericalangle AC'B=150°$.

*Begründung:*
Zu 1. Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zum gleichen Kreisbogen gehörende Zentriwinkel.
Zu 2. Viereck $AC'BC$ ist ein Sehnenviereck. Im Sehnenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel stets 180°.

Ma 7 ■ 1949 Für die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks gelte ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit $a<b<c$.
Aus $a:c=3:5$ folgt $a=\frac{3c}{5}$. Ferner gilt $b=c-3$.
Aus $a+b+c=36$ erhalten wir durch Einsetzen $\frac{3c}{5}+(c-3)+c=36$ bzw. $\frac{13c}{5}=39$ und somit $c=15$, also $a=9$ und $b=12$.
Die Dreieckseiten sind 9 cm, 12 cm und 15 cm lang.

Ma 7 ■ 1950 Angenommen, es sind $a$ 2-Bett- und $b$ 3-Bett-Zimmer;
dann gilt $2a+3b=41$ bzw. $3b=39+2-2a$, $b=13-\frac{2}{3}\cdot(a-1)$ mit $4<a<10$.
Nur für $a=7$ wird $b=13-\frac{2}{3}\cdot 6=9$ ganzzahlig.
Das Ferienheim verfügt somit über sieben 2-Bett- und neun 3-Bett-Zimmer.
*Probe:* $7\cdot 2+9\cdot 3=41$.

Ma 7 ■ 1951 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $n$, $n+1$ und $n+2$; dann gilt
$n\cdot(n+1)(n+2)=n+(n+1)+(n+2)$,
$n\cdot(n+1)(n+2)=3n+3$,
$n\cdot(n+1)(n+2)=3\cdot(n+1)$, $\quad |:(n+1)$
$n\cdot(n+2)=3$.
Nur für $n=1$ wird diese Gleichung erfüllt. Es existiert genau ein solches Zahlentripel, und zwar (1, 2, 3).
*Probe:* $1\cdot 2\cdot 3=1+2+3=6$.

Ma 8 ■ 1952 $x$ sei die Anzahl der leeren Limonaden- und $y$ die Anzahl der leeren Milchflaschen. Dann ist $30x$ das Pfand für die Limonadenflaschen in Pfennigen und $20y$ das Pfand für die Milchflaschen in Pfennigen. Es gilt nun
$$30x+20y=350 \text{ bzw.}$$
$$3x+2y=35.$$
Stellt man die Gleichung nach $y$ um, so erhält man
$$2y=35-3x$$
$$2y=34+1-3x$$
$$y=17-\frac{3x-1}{2}.$$
$x$ und $y$ müssen natürliche Zahlen sein. Damit $y$ eine natürliche Zahl wird, muß $x$ ungerade sein. Wir setzen für $x$ nacheinander die Zahlen 1, 3, 5, 7, ... ein und stellen eine Wertetabelle auf:

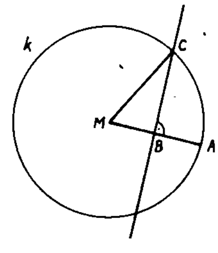
| x | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 16 | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | – |

Aus der Wertetabelle lassen sich die 6 Lösungen ablesen. Es gibt keine weiteren Möglichkeiten.

Ma 8 ■ 1953 Bezeichnet man die Fassungsvermögen der drei Kessel (in l) mit $x$, $y$ bzw. $z$, so kann man nach dem Aufgabentext die folgenden Gleichungen aufstellen:
(1) $\quad x+y+z=1440$
(2) $\quad z=x+\frac{1}{5}\cdot y$
(3) $\quad z=y+\frac{1}{3}\cdot x$.
Setzt man (2) und (3) gleich, so erhält man
(4) $\quad x=\frac{6}{5}y$.
(4) und (2) in (1): $\frac{12}{5}y+x=1440$ (5)
(4) und (3) in (1): $\frac{16}{5}y+\frac{1}{3}x=1440$ (6)
Setzt man (4) in (5) ein, so erhält man
$$\frac{12}{5}y+\frac{6}{5}y=1440,$$
$$\frac{18}{5}y=1440,$$
$$y=\frac{1440\cdot 5}{18},$$
(7) $\quad y=400$.
Setzt man (7) in (4) ein, so erhält man
$$x=\frac{6}{5}\cdot 400$$
$$x=480.$$
Durch Einsetzen folgt weiter: $z=560$.
Die drei Kessel haben Fassungsvermögen von 480 l, 400 l bzw. 560 l.

Ma 8 ■ 1954 Man formt den Term $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ wie folgt um:
$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x+1}$$
$$=x^2+1.$$
$(x+1\neq 0$ wegen $|x|\neq 1!)$
Für die kleinste Primzahl 2 würde $x^2+1=2$ bzw. $|x|=1$ gelten, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.
Die nächstgrößere Primzahl ist 3, und es gilt:
$$x^2+1=3$$
$$x^2=2$$
$$x_1=\sqrt{2};\ x_2=-\sqrt{2}.$$
Die einzigen reellen Zahlen, für die $p$ so klein wie möglich ist, sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Ma 8 ■ 1955 Man zeichnet einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und einem Radius der Länge 2 cm. Man zeichnet einen beliebigen Radius $\overline{MA}$ ein und errichtet die Mittel-



senkrechte auf $\overline{MA}$. Diese schneidet den Kreis in $C$.
Im rechtwinkligen Dreieck $MBC$ gilt nun nach dem Satz des Pythagoras
$\overline{BC}^2=\overline{MC}^2-\overline{MB}^2$
$\overline{BC}^2=(2\text{ cm})^2-(1\text{ cm})^2$ ($B$ halbiert $\overline{MA}$)
$\overline{BC}^2=3\text{ cm}^2$
$\overline{BC}\ =\sqrt{3}\text{ cm}$.

Ma 9 ■1956 Aus (1) folgt $b=a+4$,
aus (2) folgt $c=b+4$,
durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man $c=a+8$. Die drei Zahlen lassen sich folglich darstellen durch $a$, $a+4$, $a+8$. Nun gilt
$$(a+8)^2=(a+4)^2+a^2.$$
Durch äquivalentes Umformen erhält man
$$a^2-8a-48=0.$$
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen 12 und $-4$. Die gesuchten geordneten Tripel sind
$[-4;0;4]$ und $[12;16;20]$.

Ma 9 ■1957 Wegen $\overline{xxyy}=1000x+100x+10y+y=1100x+11y=11(100x+y)$ und $\overline{xx}^2=(10x+x)^2=(11x)^2=121x^2$ und $\overline{yy}^2=121y^2$ gilt
$$11(100x+y=121(x^2+y^2),$$
$$100x+y=\ 11(x^2+y^2),$$
$$x+y=\ 11(x^2+y^2)-99x,$$
$$\frac{x+y}{11}=x^2+y^2-9x.$$
Nun muß $x+y$ ein Vielfaches von 11 sein. Wegen $1\leqq x\leqq 9$ und $1\leqq y\leqq 9$ trifft das nur zu für $x+y=11$, also für $y=11-x$. Daraus folgt weiter
$$1=x^2+(11-x)^2-9x,$$
$$1=x^2+121-22x+x^2-9x,$$
$$2x^2-31x+120=0,$$
$$x^2-\frac{31}{2}x+\ 60=0.$$
Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1=8$ und $x_2=7{,}5$. Die zweite Lösung entfällt, da sie nicht ganzzahlig ist. Es existiert somit genau eine Lösung, nämlich $8833=88^2+33^2$.

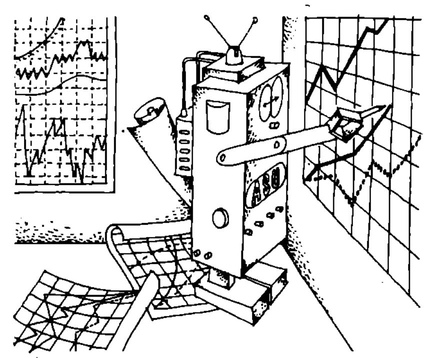
Ma 9 ■1958 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt
$a+a^2+a^3=31a$ bzw. $a(a^2+a-30)=0$.
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist.
Fallunterscheidung:
1. $a=0$. Die Probe zeigt, daß 0 eine Lösung ist.
2. $a^2+a-30=0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen 5 und $-6$.
Die Zahlen 5, $-6$ und 0 erfüllen die geforderten Bedingungen.

Ma 9 ■1959 Bezeichnet man die Länge der Katheten mit $a$ bzw. $b$ und die der Hypotenuse mit $c$, so heißt die Behauptung $a+b\leqq c\cdot\sqrt{2}$.
*Beweis:*
Es gilt sicher $0\leqq(a-b)^2$, da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist. Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung $a^2+2ab+b^2$, so erhält man
$a^2+2ab+b^2\leqq 2a^2+2b^2$ bzw.
$a^2+2ab+b^2\leqq 2(a^2+b^2)$ und wegen $a^2+b^2=c^2$ (Satz des Pythagoras) $a^2+2ab+b^2\leqq 2c^2$. Zieht man auf beiden Seiten der Ungleichung die Wurzel, so ergibt sich $a+b\leqq\sqrt{2}\cdot c$, womit die Behauptung bewiesen ist. Es gilt $a+b=\sqrt{2}\cdot c$ genau dann, wenn das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig ist.

Ma 10/12 ■1960 Für $p=3$ ergibt sich $4^3-16=48$. Die Behauptung ist wahr. Primzahlen $p>3$ sind entweder in der Form $p=6k+1$ oder $p=6k-1$ ($k\in N$) darstellbar.
Es sei $p=6k+1$. Dann gilt
$(6k+2)^3-4(6k+2)$
$=216k^3+216k^2+72k+8-24k-8$
$=216k^3+216k^2+48k$
$=24(9k^3+9k^2+2k)$.
Es ist nun noch zu untersuchen, ob der Term $9k^3+9k^2+2k$ stets durch 2 teilbar ist. Man zerlegt den Term wie folgt:
$9k(k+1)k+2k$. Der erste Summand ist auch stets durch 2 teilbar, da einer der Faktoren $k$ oder $k+1$ durch 2 teilbar ist. Es sei $p=6k-1$. Dann gilt
$$(6k)^3-4(6k)=216k^3-24k$$
$$=24(9k^3-k).$$
Man zerlegt: $9k^3-k=k(3k+1)(3k-1)$ und erkennt, daß wenigstens einer der Faktoren $k$, $3k+1$ oder $3k-1$ durch 2 teilbar ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ma 10/12 ■1961 Die Jahreszahl, die vor 1979 liegt und die größte Quersumme hat, ist 1899. Es gilt $1+8+9+9=27$ und $27\cdot 3=81$ und $1979-81=1898$. Deshalb wurde er nicht vor 1898 und auch nicht 1898 oder 1899 geboren. Es gilt
$3\cdot(1+8+9+8)=3\cdot 26\neq 1979-1898$
$3\cdot(1+8+9+9)=3\cdot 27\neq 1979-1899$.
Er wurde folglich im 20. Jahrhundert geboren, etwa im Jahr $\overline{19ab}$ mit $a$, $b\in N$ und $0\leqq a\leqq 7$ und $0\leqq b\leqq 9$ in dekadischer Schreibweise. Nun gilt
$1979-\overline{19ab}=3(1+9+a+b)$ bzw. $1979-(1900+10a+b)=3(1+9+a+b)$ bzw. $79-(10a+b)=30+3a+3b$ bzw. $49=13a+4b$.
Damit die Gleichung erfüllt wird, muß $a$ ungerade und kleiner als 4 sein. Es kann also nur entweder $a=3$ oder $a=1$ sein.
1. Fall: Es sei $a=3$, dann gilt
$$4b=49-39$$
$$b=\frac{10}{4}.$$
Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $b\in N$ gelten muß.
2. Fall: Es sei $a=1$, dann gilt
$$4b=49-13$$
$$b=9$$
*Probe:* $1979-1919=60$ und $60=3(1+9+1+9)$.
Wie die Probe zeigt, wurde der Mathematiker im Jahre 1919 geboren und war im Jahre 1979 60 Jahre alt.

Fortsetzung in *alpha* 5/80



**Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. D.-E. Liebscher (Heft 4/80):**

1. Der Winkel $B_1CB$ ist gleich dem Winkel $ACA_1$. Die Dreiecke $B_1BC$ und $AA_1C$ sind kongruent, insbesondere ist $B_1B=AA_1$. Der gleiche Schluß an den anderen Ecken führt auf $BB_1=AA_1=CC_1$.
2. Der Winkel $B_2CA_2$ ist gleich dem Winkel $B_1CB$. Weiterhin gilt für die Streckenverhältnisse
$$\frac{CB_2}{CB_1}=\frac{CA_2}{CB}$$
$$=\frac{\text{Umkreisradius des gleichseitigen Dreiecks}}{\text{Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks}}$$
$$=q.$$
Die Dreiecke $B_1BC$ und $B_2A_2C$ sind ähnlich. Das Verhältnis der Strecken $B_2A_2$ zu $B_1B$ ist gleich $q$. Analoges zeigen wir für die Strecken $B_2C_2$ und $C_2A_2$. Wegen dieser Ähnlichkeit und der unter 1. gefundenen Gleichheit der jeweiligen Bezugsstrecken ist der Satz bewiesen.

**Lösungen zu: Das arithmetische Mittel**

1. 80;
2. 1. LPG: 34 dt je Hektar;
   2. LPG: 33 dt je Hektar.
3. Brigade I: 2,75 M; Brigade II: 2,80 M;
4. 15,5 cm;
5. $x=87$;
6. b);
7. 39 Jahre;
9.a) 3; 7; 11; 15; 19; ...;
9.b) z. B. 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; ...;
10. 2025;
11. $m_g=9$; $m_a=15$;
12. $x=54$;
13. 2; 6; 18; 54; 162; ...;
14. a) 1; 4; 16; 64; b) 1; 22; 43; 64;
15. 14; 42; 34;
16. 55; 99; 11;
17. 72 und 2;
18. 103 und 91 haben als Mittel 97;
    105 und 91 haben als Mittel 98.

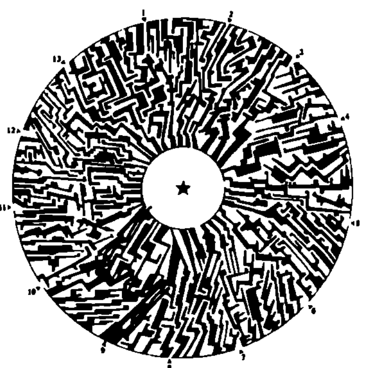
**Lösungen zu alpha-Wandzeitung:**
**1 – 2 – 3 Logelei:**

1. 1. Reihe: 6. Lampe; 2. Reihe: 10. Lampe; 5. Reihe: 4. und 8. Lampe sind gleiche Modelle.
2. a) Figur c; b) Figur 3
3. Durch Ausgang 7 kommt das Eichhörnchen ins Freie.

4. Stelle das Bild auf den Kopf! Der Rattenfänger ist dann in der rechten Hälfte des Bildes zu sehen.

5. Die Mädchen 2 und 6 sehen sich im Spiegel.

6.



7. Der Knopf an der Vogelscheuche ist zum Fenster des Hauses geworden; der Rauch des Hauses findet sich auf dem Ärmel der Vogelscheuche wieder; eine Zinke der Heugabel sitzt an dem Hut der Vogelscheuche; ein Flügel des Vogels bildet einen Teil des Strohhaufens; die Tasche des Mannes findet sich am Stamm des Stockes, der die Vogelscheuchen trägt, wieder.

8. Bild 3 erfüllt die Bedingungen.

9. Figur 3 paßt auf den Sockel.

10. Die Köpfe 1 und 5 sind gleich.

**Lösungen zu:**

**In freien Stunden · alpha-heiter:**

**Prüfe deinen Verstand!**

a) Zahl 52; b) Figur 3; c) Zahl 197; d) $\frac{P}{K}$

Wir danken Herrn Dr. Büchel, IfL Meiningen, für die Einsendung dieses Materials.

**Modell einer Datsche**

Aus dem Netz D wurde das Modell gebaut.

**Kryptarithmetik**

a) $69492+854+13=70359$;
b) $10+682+8763=9455$;
c) $7511+28449=35960$ oder
$6411+28559=34970$.

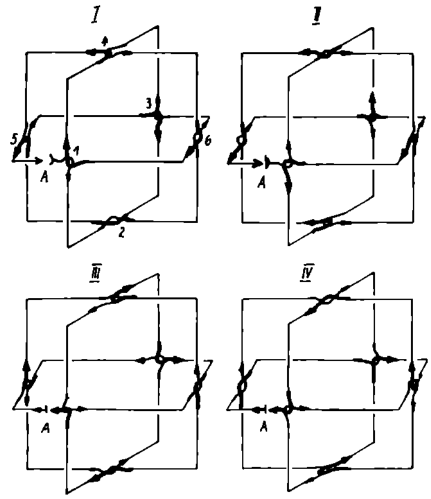
**Magisches Quadrat**

1, 2, −3; −4, 0, 4; 3, −2, −1.

**Verschnürung eines Pakets**

Die Abbildungen sind stark eingezeichnet, wenn der Treffpunkt erstmals berührt wird, gestrichelt, wenn die zweite Berührung erfolgt und die Kreuzung vollzogen wird.

Wenn an einem willkürlich gewählten Punkt $A$ begonnen wird, die Schnur zu legen, so kann dies in zwei Richtungen erfolgen (Skizze: I und II oder III und IV). Am ersten späteren Treffpunkt kann rechts (Skizze: I und III) oder links (Skizze: II und IV) abgebogen werden. Ordnet man den weiteren, zum verlangten Resultat führenden Abbiegungen ein r zu, wenn die Abbiegung nach rechts (in der Richtung des Vorgehens), ein l, wenn sie nach links erfolgt, so ergibt die Zusammenstellung dieser Buchstaben in einer Tabelle folgendes Bild:




| Fall | Abbiegung | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| I | r | r | r | r | l | r | r | l | l | r | r | l |
| II | l | r | l | l | l | l | l | l | r | l | r | r |
| III | r | l | l | r | r | l | l | r | l | l | l | l |
| IV | l | l | r | l | r | r | r | r | r | r | l | r |

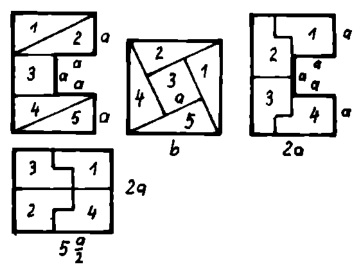
Berücksichtigen wir den Umstand, daß der Anfangspunkt $A$ beliebig gewählt werden kann, und lassen wir Fall II mit Biegung 3, Fall III mit Biegung 9 und Fall IV mit Biegung 6 beginnen, so ist sofort ersichtlich, daß sich Fall I und Fall III, Fall II und Fall IV entsprechen. Es gibt also zwei zu unterscheidende Arten der geforderten Verschnürung.

Numerieren wir die Kreuzungspunkte von 1 bis 6 (wie in der Skizze I eingezeichnet), so passiert sie die Schnur beim Legen in folgender Reihenfolge:

| | |
|---|---|
| I | 1 2 6 3 4 6 1 4 5 3 2 5 |
| II | 1 4 6 3 2 6 1 2 5 3 4 5 |
| III | 5 2 3 5 4 1 6 4 3 6 2 1 |
| IV | 5 4 3 5 2 1 6 2 3 6 4 1 |

(Also I = III rückwärts; I = IV rückwärts.)

**Zerlegungsproblem**




**52mal Summe 130**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 45 | 29 | 52 |
| 57 | 24 | 40 | 9 |
| 53 | 28 | 44 | 5 |
| 16 | 33 | 17 | 64 |

1. Schicht (unten)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 62 | 19 | 35 | 14 |
| 7 | 42 | 26 | 55 |
| 11 | 38 | 22 | 59 |
| 50 | 31 | 47 | 2 |

2. Schicht

| | | | |
|---|---|---|---|
| 63 | 18 | 34 | 15 |
| 6 | 43 | 27 | 54 |
| 10 | 39 | 23 | 58 |
| 51 | 30 | 46 | 3 |

3. Schicht

**Aus einer Briefmappe**

Von Brief 5 ist die Marke abgelöst.

Fortsetzung von Seite VIII

Aus (2) folgt daher

$$f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7^2}\cdot f(7)=\frac{1}{7^2}\cdot 7=\frac{1}{7}.$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$f\left(\frac{2}{7}\right)=f\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{1}{7}\right)+f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7},$$

$$f\left(\frac{3}{7}\right)=f\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7},$$

$$f\left(\frac{5}{7}\right)=f\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\right)=f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7},$$

w. z. b. w.

6. 1. Möglichkeit: geometrische Interpretation:

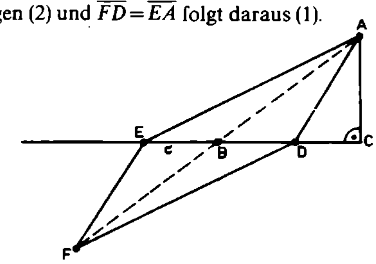
Da nur quadratische Terme in den Radikanden auftreten und bei Vertauschung von $(a+c)$ mit $(a-c)$ wieder (1) entsteht, kann man sich auf positive $a$, $b$, $c$ beschränken. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit dem rechten Winkel bei $C$ (siehe Bild). $AC$ habe die Länge $a$. Man trägt nun auf der Geraden durch $B$ und $C$ von $B$ aus nach beiden Seiten je eine Strecke der Länge $c$ ab und erhält die Punkte $D$ und $E$. Ergänzt man das Dreieck $EDA$ zu dem Parallelogramm $EFDA$, so gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned} \overline{BA}&=\sqrt{a^2+b^2},\\ \overline{DA}&=\sqrt{(a-c)^2+b^2} \qquad (2)\\ \overline{EA}&=\sqrt{(a+c)^2+b^2}. \end{aligned}$$

Da $B$ der Diagonalenmittelpunkt des Parallelogramms $EFDA$ ist, gilt nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck $AFD$,

$$\overline{DA}+\overline{FD}\geqq 2\overline{BA}.$$

Wegen (2) und $\overline{FD}=\overline{EA}$ folgt daraus (1).




2. Möglichkeit: Es gilt

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2\\ &=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2\\ &\geqq a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2\\ &=(a^2+b^2-c^2)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt (die Existenz der nachstehenden Wurzel sowie)

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2}\geqq a^2+b^2-c^2,$$

also

$$\begin{aligned} &\overline{a^2+2ac+c^2+b^2}\\ &+2\cdot\sqrt{(a^2+c^2+b^2+2ac)(a^2+c^2+b^2-2ac)}\\ &+a^2-2ac+c^2+b^2\geqq 4a^2+4b^2,\\ &\left(\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)^2=4(a^2+b^2). \end{aligned}$$

(Diese beiden Wurzeln existieren wegen $(a\pm c)^2+b^2\geqq 0$.)

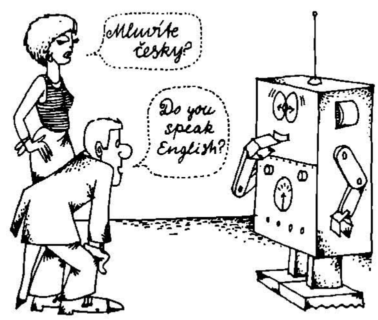
Wegen $(a^2+b^2)\geqq 0$ und $\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geqq 0$

folgt hieraus

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geqq 2\sqrt{a^2+b^2},$$

w. z. b. w.

# Mathematikaufgaben aus Freundesland




## 9 Aufgaben aus der ČSSR

Wir stellen einige Aufgaben vor, die der Zeitschrift *rozhledy* entnommen sind. Mit diesen und ähnlichen Aufgaben werden in der ČSSR die Schüler auf Mathematik-Olympiaden vorbereitet. Wir wünschen allen interessierten *alpha*-Lesern viel Erfolg beim Lösen dieser Aufgaben aus dem benachbarten Freundesland.

### Aufgaben

▲1▲ Die in dekadischer Darstellung aufgeschriebene dreistellige natürliche Zahl $z = \overline{7xy}$ sei durch 44 teilbar. Gib alle Zahlen an, die diese Bedingung erfüllen!

▲2▲ Es sind alle geordneten Paare $[a;b]$ natürlicher Zahlen $a$ und $b$ zu ermitteln, die die Gleichung $a \cdot (b-1) = 12$ erfüllen.

▲3▲ Die Zahl 120 ist als Produkt aus zwei teilerfremden natürlichen Zahlen darzustellen. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.

▲4▲ Welche geordneten Paare $[x;y]$ natürlicher Zahlen $x$ und $y$ erfüllen die Gleichung $2x + y^2 = 81$?

▲5▲ Drei Kreise $k_1, k_2, k_3$ mit den Radien $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm, $r_3 = 10$ cm berühren einander paarweise von außen.
Berechne die Abstände $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_2M_3}$ der Mittelpunkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ dieser Kreise sowie den Flächeninhalt $A$ des von den Mittelpunkten gebildeten Dreiecks $M_1M_2M_3$!

▲6▲ Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich der zweiten Potenz ihrer Quersumme sind.

▲7▲ Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich der dritten Potenz ihrer Quersumme sind.

▲8▲ Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich der vierten Potenz ihrer Quersumme sind.

▲9▲ Es ist nachzuweisen, daß es keine fünfstellige natürliche Zahl gibt, die gleich der fünften Potenz ihrer Quersumme ist.

### Lösungen

▲1▲ Aus der Aufgabenstellung folgt $700 \leqq 44 \cdot k \leqq 799$ für natürliche Zahlen $k$. Deshalb gilt $16 \leqq k \leqq 18$, also $k = 16$ oder $k = 17$ oder $k = 18$. Es existieren drei solche Zahlen; sie lauten $z_1 = 16 \cdot 44 = 704$, $z_2 = 17 \cdot 44 = 748$, $z_3 = 18 \cdot 44 = 792$.

▲2▲ Wegen $a \cdot (b-1) = 12$ gilt auch
$a \cdot (b-1) = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12 \cdot 1$. Daraus folgt weiter $a_1 = 1$ und $b_1 = 13$, $a_2 = 2$ und $b_2 = 7$, $a_3 = 3$ und $b_3 = 5$, $a_4 = 4$ und $b_4 = 4$, $a_5 = 6$ und $b_5 = 3$, $a_6 = 12$ und $b_6 = 2$.
Folgende geordneten Paare erfüllen die gegebene Gleichung:
$[1;13], [2;7], [3;5], [4;4], [6;3], [12;2]$.

▲3▲
$120 = 2 \cdot 60$ (gemeinsamer Teiler 2),
$120 = 3 \cdot 40$,
$120 = 4 \cdot 30$ (gemeinsamer Teiler 2),
$120 = 5 \cdot 24$,
$120 = 6 \cdot 20$ (gemeinsamer Teiler 2),
$120 = 8 \cdot 15$,
$120 = 10 \cdot 12$ (gemeinsamer Teiler 2).

Wird die Kommutativität der Multiplikation nicht berücksichtigt, erhalten wir genau drei Möglichkeiten
$120 = 3 \cdot 40 = 5 \cdot 24 = 8 \cdot 15$.

▲4▲ Aus $2x + y^2 = 81$ erhalten wir $2x = 81 - y^2$. Nun muß $81 - y^2$ durch 2 teilbar sein. Das ist nur der Fall, wenn $y^2$ eine ungerade natürliche Zahl ist, die kleiner als 81 ist.
$y_1 = 1, y_1{}^2 = 1, 2x_1 = 80, x_1 = 40;$
$y_2 = 3, y_2{}^2 = 9, 2x_2 = 72, x_2 = 36;$
$y_3 = 5, y_3{}^2 = 25, 2x_3 = 56, x_3 = 28;$
$y_4 = 7, y_4{}^2 = 49, 2x_4 = 32, x_4 = 16;$
$y_5 = 9, y_5{}^2 = 81, 2x_5 = 0, x_5 = 0.$
Die geordneten Paare $[40;1], [36;3], [28;5], [16;7], [0;9]$ erfüllen die gegebene Gleichung.

▲5▲ $\overline{M_1M_2} = (2+3)\,\text{cm} = 5\,\text{cm};$
$\overline{M_1M_3} = (2+10)\,\text{cm} = 12\,\text{cm};$
$\overline{M_2M_3} = (3+10)\,\text{cm} = 13\,\text{cm}.$
Die Maßzahlen 5, 12, 13 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel $[5;12;13]$, und es gilt $5^2 + 12^2 = 13^2$. Das Dreieck $M_1M_2M_3$ ist somit rechtwinklig; sein Flächeninhalt beträgt
$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 30\,\text{cm}^2$.

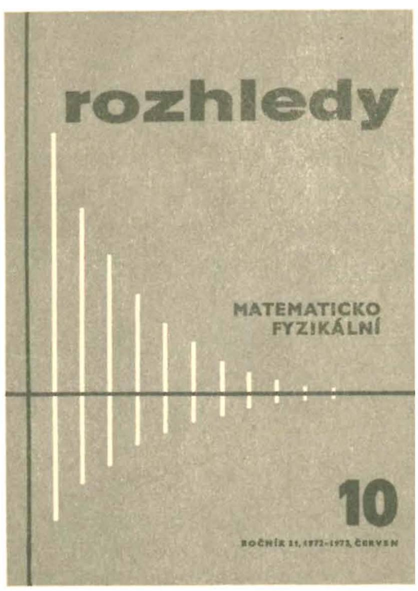
▲6▲ Aus $10a + b = (a+b)^2$ für $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ folgt $10 \leqq (a+b)^2 \leqq 99$. Deshalb könnte $(a+b)^2$ gleich 16, 25, 36, 49, 64 oder 81 sein. Nur für $81 = (8+1)^2 = 9^2$ werden die gestellten Bedingungen erfüllt.

▲7▲ Aus $100a + 10b + c = (a+b+c)^3$ für $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$, $0 \leqq c \leqq 9$ folgt $100 \leqq (a+b+c)^3 \leqq 999$. Deshalb könnte $(a+b+c)^3$ gleich $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$ sein. Nur für $512 = (5+1+2)^3 = 8^3$ werden die gestellten Bedingungen erfüllt.

▲8▲ Aus $(a+b+c+d)^4 = n^4$ folgt analog zu den vorangegangenen Aufgaben $1000 \leqq n^4 \leqq 9999$. Deshalb könnte $n^4$ gleich $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$, $9^4 = 6561$ sein. Nur für $2401 = (2+4+0+1)^4 = 7^4$ werden die gestellten Bedingungen erfüllt.

▲9▲ Aus $(a+b+c+d+e)^5 = n^5$ folgt analog zu den vorangegangenen Aufgaben $10000 \leqq n^5 \leqq 99999$. Wegen $6^5 = 7776 < 10000$ und $10^5 = 100000 > 99999$ könnte die Quersumme $q$ einer solchen fünfstelligen Zahl 7, 8 oder 9 sein. Wegen $a \neq 0$ muß $a$ wenigstens gleich 1 sein. Es endet $7^5$ auf die Ziffer 7, $8^5$ auf die Ziffer 8, $9^5$ auf die Ziffer 9.
Für die Quersumme $q = 7$ müßte $e = 7$ sein. Wegen $a + e \geqq 1 + 7 = 8$ ist dies nicht möglich. Für $q = 8$ müßte $e = 8$ sein. Wegen $a + e \geqq 1 + 8 = 9$ ist dies ebenfalls nicht möglich. Analog dazu entfällt auch $q = 9$.

*Übersetzt und bearbeitet von O. Langer, Döbeln/Th. Scholl, Berlin*




Seit 14 Jahren besteht zwischen der tschechoslowakischen mathematischen Schülerzeitschrift (siehe Bild) und der *alpha* ein enger freundschaftlicher Kontakt.

# Zahlenzauber – Zauberzahlen

| | |
|---|---|
| $0 + 1 = 1$ | $1 \times 1 = 1$ |
| $1 + 3 = 4$ | $2 \times 2 = 4$ |
| $4 + 5 = 9$ | $3 \times 3 = 9$ |
| $9 + 7 = 16$ | $4 \times 4 = 16$ |
| $16 + 9 = 25$ | $5 \times 5 = 25$ |
| $25 + 11 = 36$ | $6 \times 6 = 36$ |
| $36 + 13 = 49$ | $7 \times 7 = 49$ |
| $49 + 15 = 64$ | $8 \times 8 = 64$ |
| $64 + 17 = 81$ | $9 \times 9 = 81$ |
| $81 + 19 = 100$ | $10 \times 10 = 100$ |

$$133 = (1 + 3 + 3) \cdot (1^2 + 3^2 + 3^2)$$
$$315 = (3 + 1 + 5) \cdot (3^2 + 1^2 + 5^2)$$
$$803 = (8 + 0 + 3) \cdot (8^2 + 0^2 + 3^2)$$
$$63 = 6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2$$
$$91 = 9^2 + 9 \cdot 1 + 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$$

$$9 \times 7 = 63$$
$$99 \times 77 = 7623$$
$$999 \times 777 = 776223$$
$$9999 \times 7777 = 77762223$$
$$99999 \times 77777 = 7777622223$$

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$
$$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$
$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$
$$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$
$$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$$
$$92727 = 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5$$
$$93084 = 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5$$

$1 : 1{,}61803\ldots = 0{,}61803\ldots$
$1 : 2{,}41421\ldots = 0{,}41421\ldots$
$1 : 3{,}30277\ldots = 0{,}30277\ldots$
$1 : 4{,}23607\ldots = 0{,}2360678$

Lassen sich diese Reihen fortführen?

In den nachstehenden Gleichungen werden jeweils alle zehn Ziffern verwendet:

$$2 \times 3485 = 1 \times 6970$$
$$4 \times 1957 = 38 \times 206$$
$$7 \times 1406 = 38 \times 259$$
$$2 \times 4589 = 13 \times 706$$
$$5 \times 2968 = 40 \times 371$$
$$8 \times 1735 = 20 \times 694$$
$$3 \times 4158 = 6 \times 2079$$
$$6 \times 1485 = 30 \times 297$$
$$9 \times 2754 = 81 \times 306$$

Die folgenden Gleichungen sind neue Typen von Umkehrprodukten, d. h., die linke und die rechte Seite verhalten sich zueinander wie Bild und Spiegelbild – bis auf das Multiplikationszeichen

$$218 \times 9 = 981 \times 2$$
$$327 \times 8 = 872 \times 3$$
$$412 \times 7 = 721 \times 4$$
$$424 \times 7 = 742 \times 4$$
$$436 \times 7 = 763 \times 4$$
$$545 \times 6 = 654 \times 5$$
$$5 \times 295 = 59 \times 25$$
$$2 \times 8919 = 9 \times 1982$$
$$3 \times 7928 = 8 \times 2973$$
$$5 \times 5946 = 6 \times 4955$$
$$4 \times 2317 = 7 \times 1324$$
$$4 \times 4627 = 7 \times 2644$$
$$4 \times 6937 = 7 \times 3964$$
$$644 \times 1 = 14 \times 46$$

Verblüffend ist die Ähnlichkeit dieser Gleichungen. Nur die Operationszeichen sind ausgetauscht, und bei der Abwandlung wurde eine 10 hinzugesetzt:

| | |
|---|---|
| $40 : 20 = 2$ | $40 - 20 = 2 \cdot 10$ |
| $45 : 15 = 3$ | $45 - 15 = 3 \cdot 10$ |
| $72 : 12 = 6$ | $72 - 12 = 6 \cdot 10$ |
| $121 : 11 = 11$ | $121 - 11 = 11 \cdot 10$ |

$$120 = (1^2 + 2^2 + 0^2)!$$

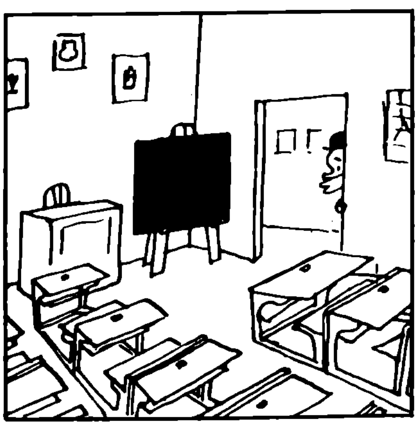
Das Ausrufungszeichen ! (lies: Fakultät) steht in der Mathematik für das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis zur angegebenen Zahl. Unser Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

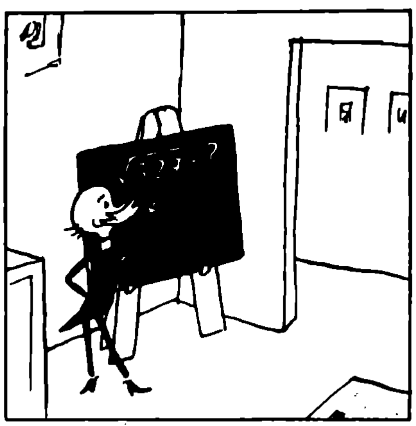
Macht mit euren Freunden, die besonders fix in Kopfrechnen sind, die Probe aufs Exempel. Sie möchten folgende Summanden, die ihr ihnen in gleichbleibendem Tempo nacheinander ansagt, addieren:

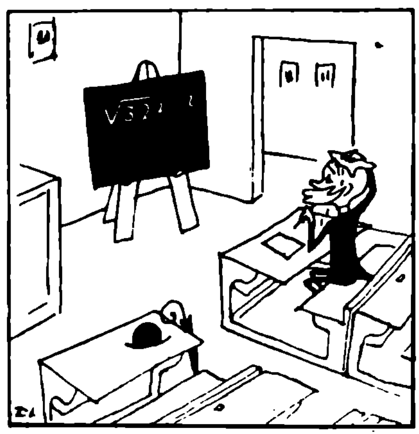
$$1000 + 40 + 10 + 1000 + 40 + 1000 + 10 = x.$$

Als Summe werden die meisten 5000 angeben. Ihr wißt das natürlich besser.

*aus: NBI, Berlin*

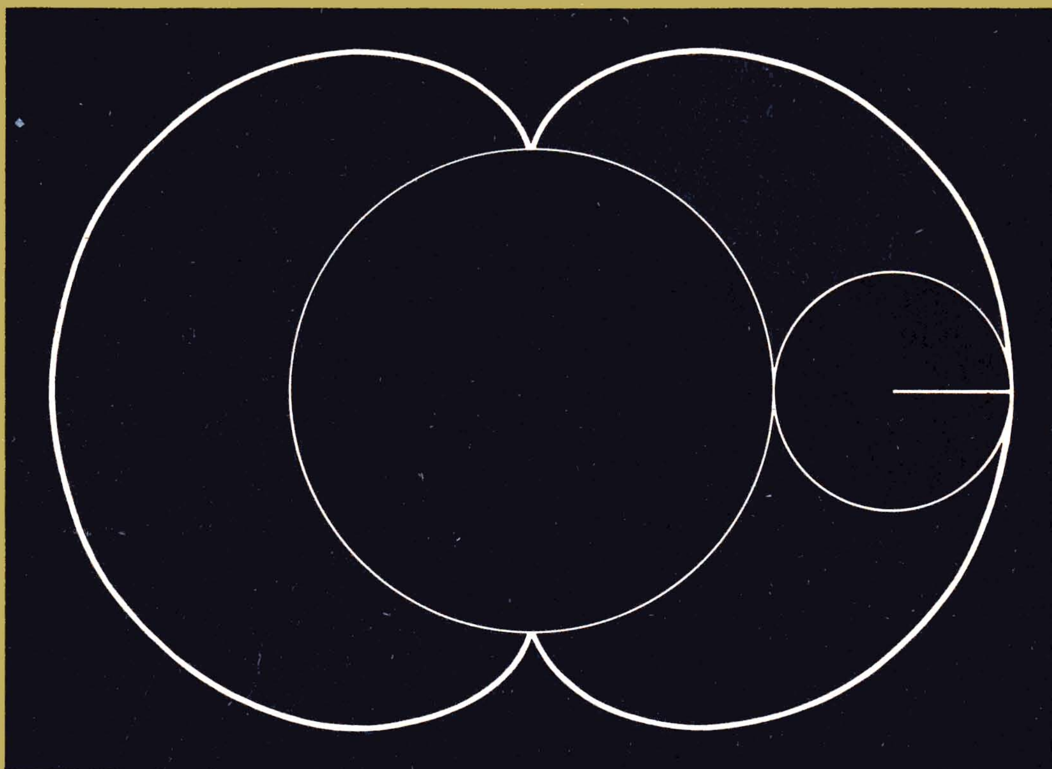


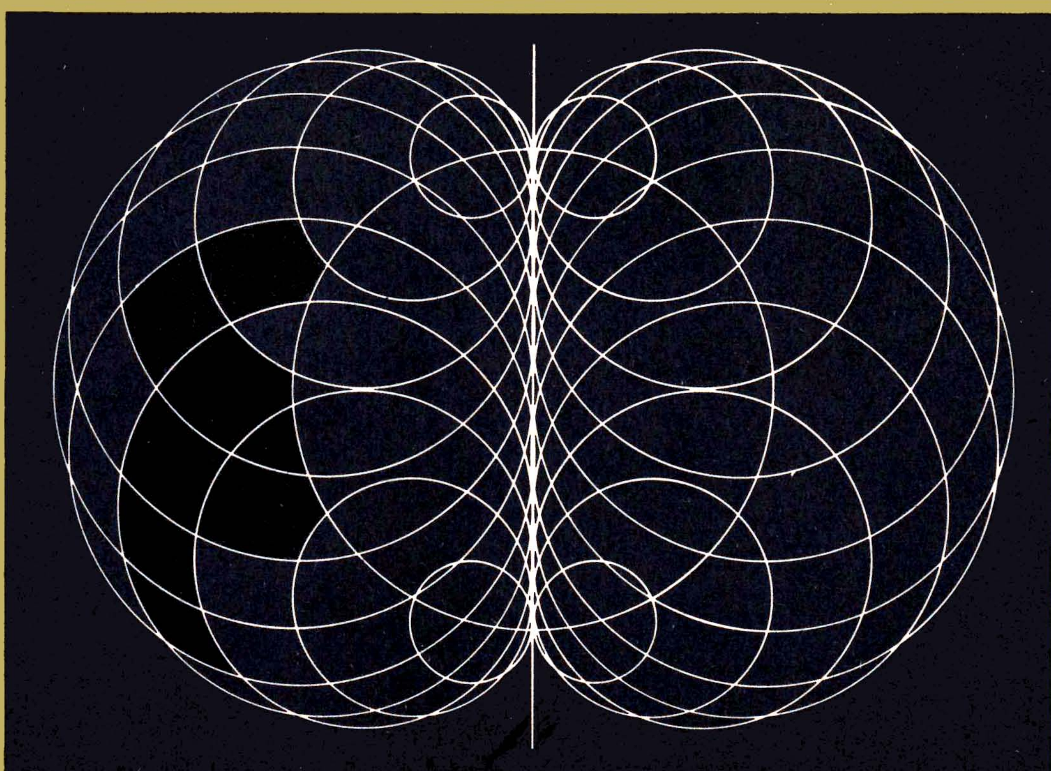




Mathematische
Schülerzeitschrift

# alpha





5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos:* Bild aus: Für Dich 1970/S. 104; *Vignette:* Math. in School, London (S. 107); *Vignette* aus: Füles, Budapest 1980 (III. U.-Seite)
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
*Redaktionsschluß: 30. Juni 1980*

# alpha

# Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Das Berührungsproblem des Apollonios

Aus der Planimetrie ist uns bekannt, wie man mit Zirkel und Lineal den Außenkreis bzw. den Inkreis eines Dreiecks konstruieren kann. Etwas anders formuliert geht es dabei um die Aufgabe, Kreise zu konstruieren, die durch drei gegebene Punkte gehen bzw. drei gegebene Geraden berühren.

Diese beiden Konstruktionsaufgaben führen uns zu dem Problem, wie man Kreise konstruieren kann, die z. B. durch zwei Punkte gehen und eine Gerade berühren oder durch einen Punkt gehen und zwei Geraden berühren. Erweitern wir die Aufgabenstellung weiterhin dadurch, daß außer Punkten und Geraden noch Kreise gegeben sind, so kommen wir auf ein Berührungsproblem, das Jahrtausende alt ist und schon in der Antike die Mathematiker beschäftigte.

Als erster befaßte sich *Apollonios von Perge* mit diesen „Berührungen". Dieser Mathematiker lebte etwa 262 bis 190 v. u. Z. und gehört zu den großen griechischen Gelehrten wie *Euklid* und *Archimedes.* In seinen zwei Büchern über „Berührungen" untersucht er die Lösung der Aufgabe, mit Zirkel und Lineal die Kreise zu konstruieren, die drei gegebene Kreise berühren. In voller Allgemeinheit dieses „Berührungsproblems des Apollonios" gelten dann auch die Ausartungen der gegebenen Kreise zu Punkten und zu Geraden, so daß wir diese allgemeine Kreisaufgabe auch so ausdrücken können:

*Wenn von Punkten, Geraden oder Kreisen irgend drei Stücke gegeben sind, so sind Kreise zu konstruieren, die, wenn Punkte gegeben sind, durch sie hindurchgehen und, wenn Geraden oder Kreise gegeben sind, diese berühren.*

Daraus ergeben sich zehn mögliche Aufgaben, die sich wie folgt zusammenstellen lassen:

Es können gegeben sein in der

1. Aufgabe 3 Punkte;
2. Aufgabe 2 Punkte und 1 Gerade;
3. Aufgabe 1 Punkt und 2 Geraden;
4. Aufgabe 3 Geraden;
5. Aufgabe 2 Punkte und 1 Kreis;
6. Aufgabe 1 Punkt, 1 Gerade und 1 Kreis;
7. Aufgabe 1 Punkt und 2 Kreise;
8. Aufgabe 2 Geraden und 1 Kreis;
9. Aufgabe 1 Gerade und 2 Kreise;
10. Aufgabe 3 Kreise.

Gesucht sind in jedem Fall alle möglichen Berührungskreise.

Bei unseren folgenden Untersuchungen wollen wir von vornherein alle Sonderfälle, besondere Lagen und Ausnahmen der gegebenen Stücke ausschließen. Die gegebenen Punkte sollen also z. B. nicht auf einer Geraden liegen, die Geraden nicht parallel laufen, die Kreise sich nicht schneiden, berühren oder durchdringen usw. Diese Determinationen der einzelnen Aufgaben überlassen wir dem interessierten Leser.

In jeder der folgenden zehn Aufgaben wollen wir immer die Anzahl der möglichen Lösungen angeben und, wenn nötig, eine ausführliche Analysis anfügen.

Die Angaben über die Anzahl der Lösungen beziehen sich also immer auf den allgemeinen Fall. Bei speziellen Lagen der gegebenen Stücke kann die Anzahl der Lösungen deshalb auch kleiner sein. Es sind dann natürlich auch andere Arten der Berührungen möglich, d. h., daß die gesuchten Kreise die gegebenen nur von außen oder nur von innen berühren. (Siehe auch ▲5a▲ und ▲5b▲.)

**Aufgaben**

▲1▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch drei gegebene Punkte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ geht.

Wir verzichten auf eine Analysis, da die Konstruktion allgemein bekannt ist.

▲2▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte $P_1$ und $P_2$ geht und eine gegebene Gerade $g$ berührt.

*Analysis:* Es sei $m_1$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$, der durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ geht und die Gerade $g$ in $R_1$ berührt. Verbindet man $P_1$ mit $P_2$ und verlängert die Gerade $P_1P_2$, bis sie die Gerade $g$ in $T$ schneidet, so gilt nach dem Sekantentangentensatz $\overline{TP_1}\cdot\overline{TP_2}=\overline{TR_1}^2$, wonach $\overline{TR_1}$ als mittlere Proportionale konstruierbar ist, und demzufolge ist der Punkt $R_1$ bekannt. Der Mittelpunkt $M_1$ ergibt sich dann als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{P_1P_2}$ und der Senkrechten in $R_1$ auf $g$. Der Radius von $m_1$ ist dann z. B. $\overline{M_1P_1}$.

Trägt man $\overline{TR_1}$ von $T$ aus auf $g$ noch einmal nach der entgegengesetzten Seite ab, so erhält man den Berührungspunkt $R_2$ eines zweiten Kreises mit dem Mittelpunkt $M_2$, der ebenfalls durch $P_1$ und $P_2$ geht.

Die Aufgabe hat daher zwei Lösungen.

▲2a▲ Führe die Konstruktion an einem selbst gewählten Beispiel aus!

▲3▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Geraden $g_1$ und $g_2$ berührt und durch einen gegebenen Punkt $P$ geht.

*Analysis:* Es sei $m_1$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$, der die Gerade $g_1$ in $R_1$ und die Gerade $g_2$ in $S_1$ berührt und durch den Punkt $P$ geht. Dann ist $\overline{M_1P}=\overline{M_1R_1}$. Verlängert man $g_1$ und $g_2$ bis zum gemeinsamen Schnittpunkt $A$ und verbindet $A$ mit $M_1$, so ist die Gerade $AM_1$ die Winkelhalbierende des $\sphericalangle (g_1, g_2)$ und somit ein geometrischer Ort für $M_1$ bekannt.

Verbindet man weiter $A$ mit $P$ und nimmt auf der Geraden $AP$ einen beliebigen Punkt $B_1$ an und zieht durch $B_1$ zu $M_1P$ die Parallele, so trifft diese die Winkelhalbierende $AM_1$ in $C$. Dann fällt man von $C$ auf $g_1$ das Lot. Dieses schneidet $g_1$ in $D$. Nun gilt nach dem Strahlensatz $\overline{B_1C}:\overline{PM_1}=\overline{AC}:\overline{AM_1}$ und $\overline{AC}:\overline{AM_1}=\overline{CD}:\overline{M_1R_1}$.

Da $\overline{M_1P}=\overline{M_1R_1}$, muß auch $\overline{CB_1}=\overline{CD}$ sein. Nun ist $D$ bekannt (beliebig auf $g_1$), dann $C$ als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $AM_1$ mit der Senkrechten in $D$ auf $g_1$, weiterhin $B_1$ auf $AP$ durch $\overline{CB_1}=\overline{CD}$. Jetzt findet man $M_1$ als Schnittpunkt zwischen der Parallelen zu $CB_1$ durch $P$ und der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle (g_1, g_2)$.

Da der um $C$ mit $\overline{CD}$ gezeichnete Kreis $AP$ noch einmal in $B_2$ trifft, erhält man den Mittelpunkt $M_2$ eines zweiten Kreises, der $g_1$ in $R_2$ und $g_2$ in $S_2$ berührt.

Die Aufgabe hat zwei Lösungen.

▲3a▲ Führe die Konstruktion an einem selbst gewählten Beispiel aus!

▲4▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Geraden $g_1$, $g_2$ und $g_3$ berührt.

Auch hier verzichten wir auf eine Analysis. Wir müssen nur darauf achten, daß es noch drei weitere Kreise gibt, die die drei Geraden berühren. Sie sind auch als Ankreise eines Dreiecks oder als äußere Berührungskreise bekannt.

Die Aufgabe hat vier Lösungen.

▲5▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte $P_1$ und $P_2$ geht und einen gegebenen Kreis $k$ berührt.

*Analysis:* (Bild 1) Es sei $m_1$ bzw. $m_2$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$ bzw. $M_2$, der durch $P_1$ und $P_2$ geht und den Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $K$ in $R_1$ von außen bzw. in $R_2$ von innen berührt, dann haben die Kreise $m_1$ bzw. $m_2$ und $k$ in $R_1$ bzw. $R_2$ eine gemeinsame Tangente. Zieht man durch $P_1$ und $P_2$ eine Gerade, so schneidet diese die gemeinsame Tangente in $T$. (Überlege, warum hier nicht zwei Schnittpunkte $T_1$, $T_2$ auftreten, je nachdem, ob man $m_1$ oder $m_2$ betrachtet! Die folgende Rechnung gibt für diese Überlegung einen Hinweis.)

Zeichnet man von $T$ aus eine beliebige Sekante durch den Kreis $k$, so schneidet diese $k$ in den Punkten $B$ und $C$. Dann gilt nach dem Sekantentangentensatz
$\overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TR_1}^2$ bzw. $\overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TR_2}^2$
und $\overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TR_1}^2$ bzw. $\overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TR_2}^2$,
also $\overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TB} \cdot \overline{TC}$,
und Viereck $P_1P_2CB$ ist ein Sehnenviereck.
Zieht man also durch $P_1$, $P_2$ und Punkt $B$ (beliebig auf $k$) einen Kreis, so muß er durch $C$ gehen. Es ist demzufolge Punkt $C$ bekannt. Ferner ist $T$ bekannt als Schnittpunkt der beiden Geraden $BC$ und $P_1P_2$, dann $R_1$ bzw. $R_2$ durch die von $T$ an $k$ gezogene Tangenten. Der Mittelpunkt $M_1$ bzw. $M_2$ des gesuchten Kreises liegt also einerseits auf der Mittelsenkrechten von $\overline{P_1P_2}$ und andererseits auf der Geraden $R_1K$ bzw. $R_2K$.
Die Aufgabe hat zwei Lösungen je nachdem, ob der gesuchte Kreis den gegebenen von außen oder von innen berühren soll.

▲5a▲ Führe die Konstruktion für den Sonderfall aus, wenn $K$, $P_1$ und $P_2$ auf einer Geraden liegen, $P_1$ und $P_2$ aber außerhalb des Kreises $k$!

▲5b▲ Bei welcher Lage von $P_1$ und $P_2$ gibt es nur einen Berührungskreis?

▲6▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt $P$ geht und eine gegebene Gerade $g$ und einen gegebenen Kreis $k$ berührt.
*Analysis:* (Bild 2) Es sei $M_1$ der Mittelpunkt des gesuchten Kreises $m_1$, der durch $P$ geht, die Gerade $g$ in $R_1$ und den Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $K$ von außen in $S_1$ berührt. Man fällt von $K$ auf $g$ das Lot mit dem Fußpunkt $A$. Dieses schneidet den Kreis $k$ in $B$ und $C$. Die Gerade $CP$ schneidet $m_1$ in $D_1$. Zieht man dann die Zentrale $\overline{KM_1}$, so geht sie durch $S_1$, und verbindet man weiterhin $C$ mit $S_1$ und $R_1$, so müssen $C$, $S_1$ und $R_1$ eine Gerade bilden; denn $\sphericalangle R_1M_1S_1 = \sphericalangle S_1KC$, da $M_1R_1 \parallel CA$. Und weil die Dreiecke $\triangle M_1S_1R_1$ und $\triangle S_1CK$ gleichschenklig sind, muß $\sphericalangle M_1S_1R_1 = \sphericalangle CS_1K$ sein.

Verbindet man noch $B$ mit $S_1$, so ist $\sphericalangle BS_1C = 90°$ als Winkel im Halbkreis, demzufolge ist auch $\sphericalangle BS_1R_1 = 90°$. Daher gilt $\sphericalangle BS_1R_1 + \sphericalangle R_1AB = 180°$, d. h. $R_1S_1BA$ ist ein Sehnenviereck.

Es gilt also nach dem Sekantensatz $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CS_1} \cdot \overline{CR_1}$, und da $\overline{CS_1} \cdot \overline{CR_1} = \overline{CD_1} \cdot \overline{CP}$ ist, so muß auch $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CD_1} \cdot \overline{CP}$ sein, d. h. $PD_1BA$ ist ebenfalls ein Sehnenviereck. Zieht man demzufolge durch die drei bekannten Punkte $A$, $B$ und $P$ einen Kreis, so ist $D_1$ bekannt als Schnittpunkt dieses Kreises mit $CP$.

Es ist also der gesuchte Kreis $m_1$ so zu konstruieren, daß er durch $P$ und $D_1$ verläuft und die Gerade $g$ berührt (siehe Analysis ▲2▲). Man erhält dabei noch einen zweiten solchen Kreis $m_2$ mit dem Mittelpunkt $M_2$, der den Kreis $k$ von außen in $S_2$ und $g$ in $R_2$ berührt.

Der gesuchte Kreis kann den gegebenen Kreis auch von innen berühren. Ist z. B. $M_3$ der Mittelpunkt eines solchen Kreises $m_3$, dann berührt dieser den Kreis $k$ in $S_3$ von innen und die Gerade $g$ in $R_3$. Man verbindet in diesem Fall $B$ mit $P$ und verlängert $BP$, bis die Verlängerung den Kreis $m_3$ zum zweiten Mal in $D_2$ schneidet. Es läßt sich dann ebenfalls nachweisen, daß $R_3$, $B$ und $S_3$ auf einer Geraden liegen und das Viereck $CS_3AR_3$ ein Sehnenviereck ist. (Wegen $\sphericalangle R_3AC = \sphericalangle R_3S_3C = 90°$ über der gleichen Sehne $\overline{R_3C}$.) Dann muß nach dem Sehnensatz wegen $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BR_3} \cdot \overline{BS_3}$ und $\overline{BR_3} \cdot \overline{BS_3} = \overline{BD_2} \cdot \overline{BP}$ auch $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BD_2} \cdot \overline{BP}$ gelten, und Viereck $PCD_2A$ ist ebenfalls ein Sehnenviereck. Demzufolge ist Punkt $D_2$ bekannt als Schnittpunkt dieses Kreises mit $BP$. Nun sind wieder die Kreise zu finden, die durch $P$ und $D_2$ gehen und $g$ berühren (siehe Analysis ▲2▲).
Man erhält also zwei weitere Kreise $m_3$ und $m_4$ mit den Mittelpunkten $M_3$ und $M_4$, die $g$ in $R_3$ bzw. $R_4$ und $k$ in $S_3$ bzw. $S_4$ von innen berühren.
Die Aufgabe hat vier Lösungen, und zwar zwei Kreise, die den gegebenen Kreis von außen und zwei Kreise, die den gegebenen Kreis von innen berühren.

▲7▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt $P$ geht und zwei gegebene Kreise $k_1$ und $k_2$ berührt.
*Analysis:* (Bild 3) Es sei $m_1$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$, der durch $P$ geht und die beiden Kreise $k_1$ und $k_2$ mit den Mittelpunkten $K_1$ und $K_2$, von denen $k_1 > k_2$ sein soll, von außen berührt, und zwar den Kreis $k_1$ in $R_1$ und den Kreis $k_2$ in $S_1$. Man zieht die Gerade $K_1K_2$ (Zentrale der Kreise $k_1$ und $k_2$), die den Kreis $k_1$ in $A$ und den Kreis $k_2$ in $B_1$ schneidet und verlängert $R_1S_1$, bis diese Gerade den Kreis $k_1$ zum zweiten Mal in $D_1$, den Kreis $k_2$ zum zweiten Mal in $E_1$ und $K_1K_2$ in $Z_1$ trifft. Dann verbindet man $K_1$ mit $D_1$ und $M_1$, ebenso $K_2$ mit $E_1$ und $M_1$.
Somit ist
$\sphericalangle K_1D_1R_1 = \sphericalangle K_1R_1D_1 = \sphericalangle M_1R_1S_1$
$= \sphericalangle M_1S_1R_1 = \sphericalangle K_2S_1E_1$,
deshalb gilt $K_1D_1 \parallel K_2S_1$. Folglich ist $Z_1$ der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise $k_1$ und $k_2$ und daher bekannt.
Verbindet man noch $A$ mit $R_1$ und $B_1$ mit $S_1$ und bezeichnet $\sphericalangle B_1K_2S_1$ mit $\alpha$, so ist
$\sphericalangle K_2B_1S_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle AB_1S_1 = 90° + \frac{\alpha}{2}$;
ferner ist der erhabene Winkel $\sphericalangle D_1K_1A = 180° + \alpha$ und $\sphericalangle D_1R_1A = 90° + \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle AR_1S_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Es ist folglich $\sphericalangle AB_1S_1 + \sphericalangle AR_1S_1 = 180°$, d. h., $AR_1S_1B_1$ ist ein Sehnenviereck. Verlängert man $Z_1P$ bis zum zweiten Schnittpunkt $F_1$ mit dem Kreis $m_1$, so ist $\overline{Z_1A} \cdot \overline{Z_1B_1} = \overline{Z_1R_1} \cdot \overline{Z_1S_1} = \overline{Z_1P} \cdot \overline{Z_1F_1}$, also ist $PF_1B_1A$ ebenfalls ein Sehnenviereck,

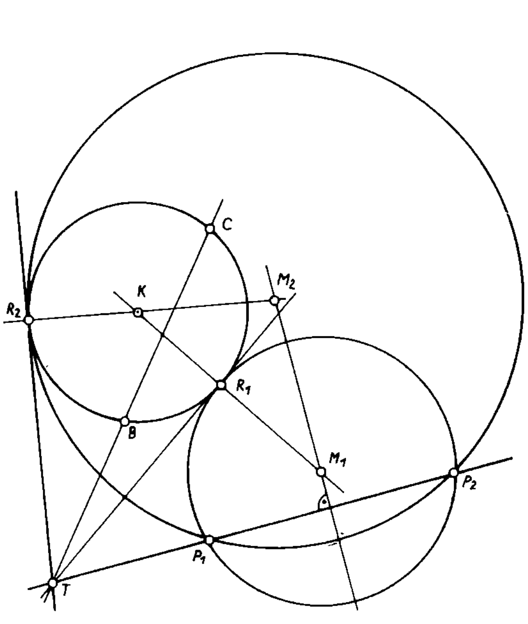


Bild 1

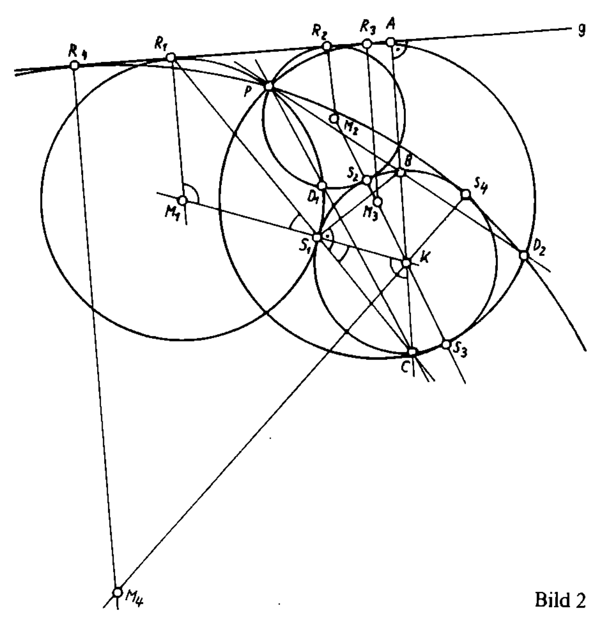


Bild 2

Bild 3

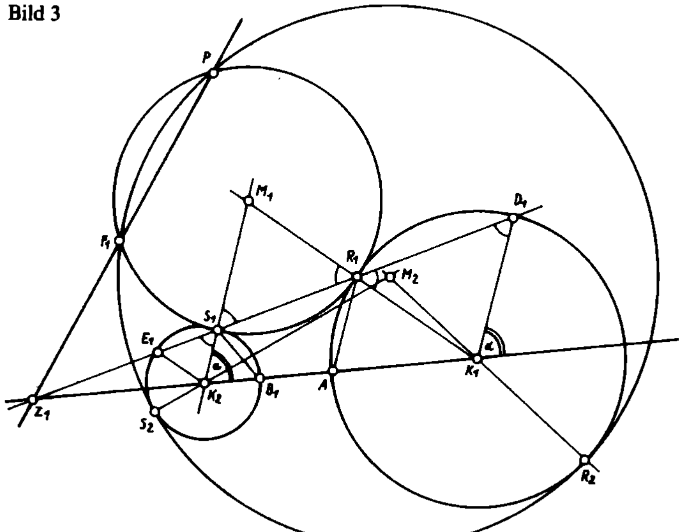


Bild 4

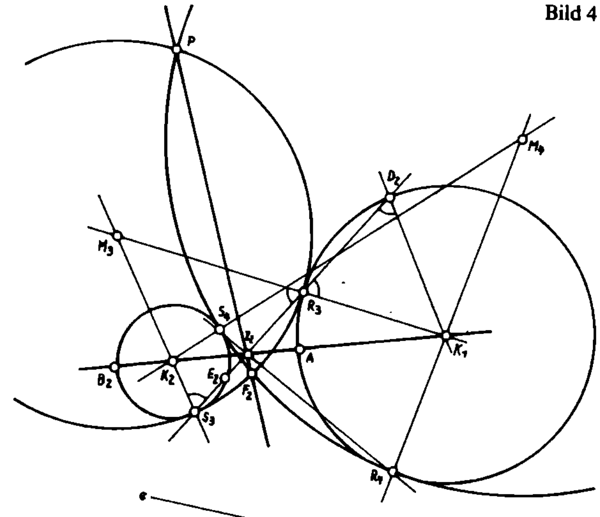


Bild 5a

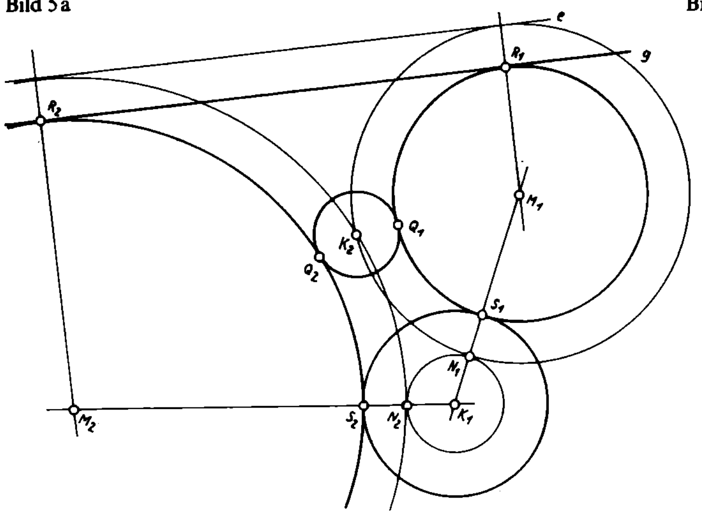
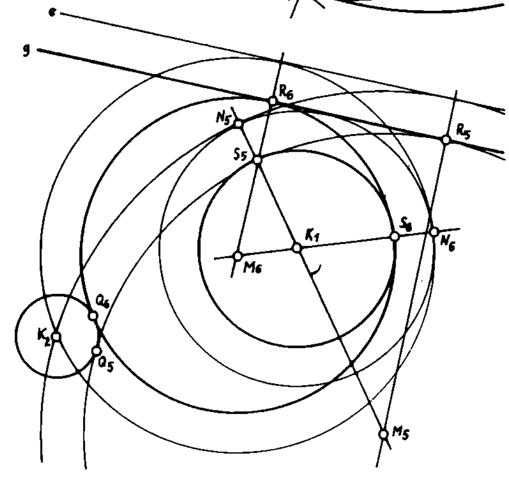


Bild 5b



und $F_1$ ist bekannt als Schnittpunkt des durch $A$, $B_1$ und $P$ gezogenen Kreises mit der Geraden $Z_1P$.

Es ist somit der gesuchte Kreis $m_1$ so zu konstruieren, daß er durch $P$ und $F_1$ geht und einen der gegebenen Kreise berührt (siehe Analysis ▲5▲). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Kreise $m_1$ und $m_2$ mit den Mittelpunkten $M_1$ und $M_2$. $m_1$ berührt $k_1$ in $R_1$ und $k_2$ in $S_1$ von außen, und $m_2$ berührt $k_1$ in $R_2$ und $k_2$ in $S_2$ von innen.

Der gesuchte Kreis kann aber auch $k_1$ in $R_3$ von außen und $k_2$ in $S_3$ von innen berühren (Bild 4). Ist $M_3$ der Mittelpunkt eines solchen Kreises, dann läßt sich nachweisen, daß $Z_2$ innerer Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise ist. Das Viereck $AR_3B_2S_3$ ist ebenso wie das Viereck $APB_2F_2$ ein Sehnenviereck, und $F_2$ ist bekannt als Schnittpunkt des durch $A$, $B_2$ und $P$ gezogenen Kreises mit $Z_2P$.

Es ist somit der Kreis $m_3$ um $M_3$ so zu konstruieren, daß er durch $P$ und $F_2$ geht und $k_1$ von außen berührt (siehe Analysis ▲5▲). Man erhält bei dieser Konstruktion einen zweiten Kreis $m_4$ mit dem Mittelpunkt $M_4$, der $k_1$ in $R_4$ von innen und $k_2$ in $S_4$ von außen berührt.

Die Aufgabe hat vier Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

▲7a▲ Führe die Konstruktion aus, wenn $k_1 = k_2$, also $r_1 = r_2$ gilt!

▲8▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Geraden $g_1$ und $g_2$ und einen gegebenen Kreis $k$ berührt.

*Analysis:* Es sei $m_1$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$, der $g_1$ in $R_1$ und $g_2$ in $S_1$ und den Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $K$ in $Q_1$ von außen berührt. Beschreibt man um $M_1$ mit $\overline{M_1K}$ einen Kreis und zieht an diesen zu $g_1$ und $g_2$ die parallelen Tangenten $l_1$ und $l_2$, $l_1 \parallel g_1$ und $l_2 \parallel g_2$, so ist die Lage von $l_1$ und $l_2$ bekannt, da ihr Abstand von den gegebenen Geraden gleich dem Radius des gegebenen Kreises ist.

Es ist deshalb zunächst ein Hilfskreis um $M_1$ so zu zeichnen, daß er die beiden Tangenten $l_1$ und $l_2$ berührt und durch den Punkt $K$ verläuft (siehe Analysis ▲3▲). Man erhält dabei zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten $M_1$ und $M_2$. Verkürzt man den Radius dieser beiden Hilfskreise um den Radius des Kreises $k$, erhält man die gesuchten Kreise $m_1$ und $m_2$. $m_2$ berührt $g_1$ in $R_2$, $g_2$ in $S_2$ und $k$ in $Q_2$ von außen.

Der gesuchte Kreis kann den gegebenen Kreis auch noch von innen berühren, dann findet man durch entsprechende Überlegung noch zwei weitere Kreise mit den Mittelpunkten $M_3$ und $M_4$.

Die Aufgabe hat vier Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

▲9▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise $k_1$ und $k_2$ und eine gegebene Gerade $g$ berührt.

*Analysis:* (Bild 5a) Es sei $m_1$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$, der $g$ in $R_1$, den Kreis $k_1$ mit dem Mittelpunkt $K_1$ in $S_1$ und $k_2$ mit dem Mittelpunkt $K_2$ in $Q_1$ von außen berührt. Weiterhin sei $r_1 > r_2$ für die entsprechenden Radien $r_1$ und $r_2$. Dann zeichnet man um $M_1$ mit $\overline{M_1K_2}$ einen Kreis, der $M_1K_1$ in $N_1$ trifft und an diesen Kreis die zur Geraden $g$ parallele Tangente $l$. Damit ist die Lage von $l$ bekannt; denn der Abstand zwischen $g$ und $l$ ist gleich dem Radius von $k_2$. Zeichnet man weiter um $K_1$ mit $\overline{K_1N_1}$ einen Kreis, so muß dieser den mit $\overline{M_1K_2}$ beschriebenen Kreis in $N_1$ berühren.

Es ist daher zuerst ein Hilfskreis so zu konstruieren, daß er durch $K_2$ geht, die Parallele $l$ berührt und den um $K_1$ mit $r_1 - r_2 = \overline{K_1N_1}$ gezogenen Kreis berührt (siehe Analysis ▲6▲). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten $M_1$ und $M_2$. Verkürzt man die Radien dieser beiden Hilfskreise um den Radius von $k_2$, ergeben sich die gesuchten Kreise mit den Mittelpunkten $M_1$ und $M_2$. $m_1$ bzw. $m_2$ berührt $g$ in $R_1$ bzw. $R_2$, $k_1$ in $S_1$ bzw. $S_2$ und $k_2$ in $Q_1$ bzw. $Q_2$ von außen.

Da der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise auch von innen berühren kann, findet man analog zwei weitere Kreise mit den Mittelpunkten $M_3$ und $M_4$. Die Konstruktion und Analysis überlassen wir dem Leser. Weiterhin kann der gesuchte Kreis den einen gegebenen Kreis von innen und den anderen von außen berühren. Das Bild 5b zeigt das Beispiel mit den Kreisen um $M_5$ und $M_6$. Auch hier können die entsprechende Analysis sowie die beiden letzten Lösungen mit den Kreisen um $M_7$ und $M_8$ selbst gefunden werden.

Die Aufgabe hat acht Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

▲10▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise $k_1$, $k_2$ und $k_3$ berührt.

*Analysis:* (Bild 6) Es sei $m_1$ der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1$, der die gegebenen Kreise $k_1$, $k_2$ und $k_3$ mit den Mittelpunkten $K_1$, $K_2$ und $K_3$ von außen berührt, und zwar $k_1$ in $R_1$, $k_2$ in $S_1$ und $k_3$ in $Q_1$. Ferner sei $r_1 > r_2 > r_3$ für ihre entsprechenden Radien $r_1$, $r_2$ und $r_3$. Man beschreibe um $M_1$ mit $\overline{M_1K_3}$ einen Hilfskreis, der die Geraden $M_1K_1$ in $N_1$ und $M_1K_2$ in $H_1$ schneidet. Dann ist $\overline{N_1K_1} = r_1 - r_3$ und $\overline{H_1K_2} = r_2 - r_3$. Zieht man um $K_1$ mit $\overline{N_1K_1}$ und um $K_2$ mit $\overline{H_1K_2}$ je einen Kreis, so müssen diese den um $M_1$ mit $M_1K_3$ gezogenen Hilfskreis berühren.

Es ist daher der Hilfskreis um $M_1$ so zu konstruieren, daß er durch den Punkt $K_3$ geht und den um $K_1$ mit $r_1 - r_3$ sowie den um $K_2$ mit $r_2 - r_3$ gezogenen Kreis von außen berührt (siehe Analysis ▲7▲). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten $M_1$ und $M_2$. Verkürzt man den Radius des ersten um den Radius von $k_3$, findet man den gesuchten Kreis $m_1$ mit dem Mittelpunkt $M_1$, der $k_1$ in $R_1$, $k_2$ in $S_1$ und $k_3$ in $Q_1$ von außen berührt. Verlängert man den Radius des zweiten Hilfskreises um den Radius von $k_3$, so erhält man einen zweiten Kreis $m_2$ mit dem Mittelpunkt $M_2$, der $k_1$ in $R_2$, $k_2$ in $S_2$ und $k_3$ in $Q_2$ von innen berührt (Bild 7). Der gesuchte Kreis kann den gegebenen Kreis $k_3$ auch von innen und $k_1$ und $k_2$ von außen berühren. Ein solcher Kreis sei $m_3$ mit dem Mittelpunkt $M_3$, der $k_1$ in $R_3$ und $k_2$ in $S_3$ von außen sowie $k_3$ in $Q_3$ von innen berührt. Dann beschreibt man um $M_3$ mit $\overline{M_3K_3}$ einen Hilfskreis, der die Gerade durch $M_3K_1$ in $N_3$ und $M_3K_2$ in $H_3$ schneidet. Hier ist nun $\overline{N_3K_1} = r_1 + r_3$ und $H_3K_2 = r_2 + r_3$.

Es ist daher zuerst der Hilfskreis um $M_3$ so zu konstruieren, daß er durch den Punkt $K_3$ geht und den um $K_1$ mit $r_1 + r_3$ sowie den um $K_2$ mit $r_2 + r_3$ gezogenen Kreis von außen berührt (siehe Analysis ▲7▲). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten $M_3$ und $M_4$. Verlängert man den Radius des ersten Hilfskreises um $r_3$, findet man den gesuchten Kreis mit dem Mittelpunkt $M_3$, der $k_1$ in $R_3$ und $k_2$ in $S_3$ von außen und $k_3$ von innen berührt. Verkürzt man den Radius des zweiten Hilfskreises um $r_3$, erhält man einen zweiten Kreis $m_4$ mit dem Mittelpunkt $M_4$, der $k_1$ in $R_4$ und $k_2$ in $S_4$ von innen und $k_3$ in $Q_4$ von außen berührt.

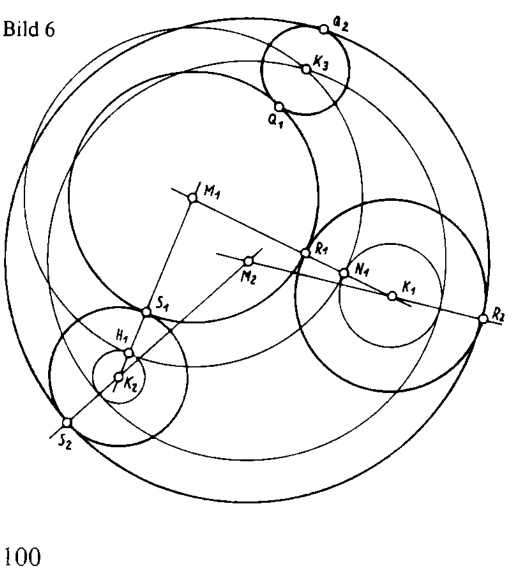
Es gibt noch vier weitere Kreise, die die gegebenen Kreise von innen bzw. außen berühren. Die Konstruktion und Analysis sind ähnlich und vom Leser selbst zu finden.

Die Aufgabe hat acht Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

▲10a▲ Überlege, wie die Konstruktion im Falle $r_1 = r_2 = r_3$ verlaufen kann!

*H. Begander*

Bild 6



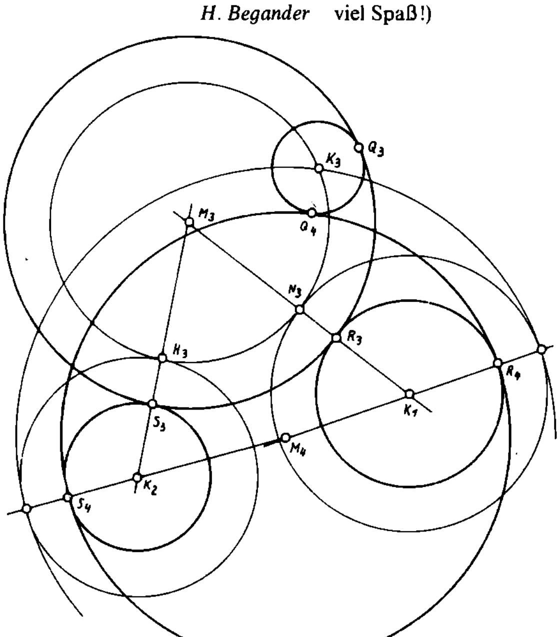
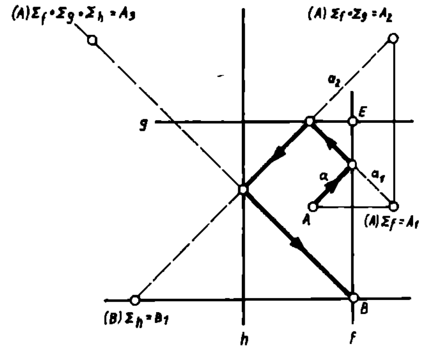




Bild 7

# Eine Aufgabe von Prof. Dr. Max Jeger


*Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*


▲1995▲ Ein rechteckförmiger Billardtisch hat bei der Ecke $B$ ein Loch. Wie muß man eine Kugel im Punkte $A$ anstoßen, damit sie nach Reflexion an den Randgeraden $f$, $g$ und $h$ im Loch $B$ verschwindet? Welchen Weg legt sie dabei zurück?




(Ausgehend von dieser kleinen Aufgabe und ihrer Lösung kann man sich selbst viele schöne „Billard-Aufgaben" ausdenken. Etwa die Frage, ob man von jedem Punkt am Rande so stoßen kann, daß die Kugel nach Berührung aller anderen Banden wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Wir wünschen viel Spaß!)

# Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker

## Teil 1

Im November jährt sich zum 350. Male der Todestag des Astronomen, Mathematikers und Physikers *Johannes Kepler*.

Kepler, der stets von der Copernicanischen Planetentheorie überzeugt war, beseitigte deren Mängel, indem er in mathematischer Form drei Gesetze über die Bewegungen der Planeten um die Sonne aussprach. Er schuf darauf aufbauend mit einer bis dahin nicht dagewesenen Genauigkeit Tafeln für die Vorausberechnung der Planetenpositionen. Bei Keplers Berechnungen erlebten die (von Bürgi, Neper und Briggs erfundenen) Logarithmen eine ihrer ersten Anwendungen. Kepler brachte aber nicht nur der Astronomie große Fortschritte. Als Physiker machte er sich verdient beispielsweise um die Entwicklung der Optik und begründete eine Theorie des (astronomischen) Fernrohrs. „Ich glaube, daß Astronomie und Physik so genau miteinander verknüpft sind, daß keine ohne die andere vervollkommnet werden kann", schrieb Kepler an einen dänischen Astronomen. Als Mathematiker lieferte er Beiträge zur Entwicklung der Theorie der Kegelschnitte, zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung, zur Theorie der Polyeder, zur Berechnung der Logarithmen. „Als Mathematiker gehört Kepler unzweifelhaft in die Reihe jener Persönlichkeiten, bei denen das anschauliche Element gegenüber den rein logischen überstark in den Vordergrund tritt", stellte der Mathematikhistoriker J. E. Hofmann zusammenfassend fest.

Im folgenden sollen einige Streiflichter die mathematischen und astronomischen Studien und Forschungen Keplers beleuchten. (S. auch Übersichten 1. und 2.)

### Kepler studiert Euklids „Elemente"

Eine der verbreitetsten Schriften der Welt ist die des griechischen Gelehrten Euklid mit dem Titel „Elemente". Euklid lebte zwischen 350 und 300 v. u. Z. Man weiß, daß er am Hofe des Königs Ptolemaios I. (der von 305 bis 285 v. u. Z. regierte) in Alexandria große Hochachtung genoß. Es wird berichtet, daß Ptolemaios einmal den Euklid fragte, ob es keinen bequemeren Weg zur Geometrie gäbe als die Elemente; und jener antwortete, es gäbe keinen Königsweg zur Geometrie. Er meinte damit, daß auch für Könige der Weg zur Geometrie, zur Mathematik nicht bequemer gemacht werden könne.

Die Kenntnis des euklidischen Buches verdanken die Europäer den Übersetzungen arabischer Gelehrter (9./10. Jh.). Auf sie geht die erste gedruckte Ausgabe zurück, die dem Giovanni Campano (Mitte des 13. Jh.) zugeschrieben wird und 1482 in Venedig erschienen ist. Während der Renaissance erschienen lateinische Ausgaben, die sich auf griechische Codices stützten, die ihrerseits aus der Bearbeitung der „Elemente" durch Theon von Alexandria (um 350 u. Z.) hervorgegangen sind. (Ein Codex – Plural: Codices – ist die spätantike und mittelalterliche Buchform, bei der mehrere Lagen von Papyrus-, Pergament- oder Papierblättern in einem Holzdeckelband zusammengefügt wurden.) Eine griechische Ausgabe der „Elemente" erschien 1533 in Basel, bearbeitet von Simon Gryneaus. Die lateinische Ausgabe des Clavius von 1574 soll 22 Auflagen gefunden haben. Im Jahre 1808 entdeckte man in durch Napoleon der Vatikanischen Bibliothek geraubten Archivalien eine vollständige Handschrift der „Elemente", die auf ältere und bessere Ausgaben als die des Theon zurückgeht. Hierauf basieren die heutigen Ausgaben. „Es gab in Europa eine Zeit, da man alles, was in Euklids Elementen enthalten war, als bekannt voraussetzen durfte. Die Zeit ist jetzt nicht mehr. Ich sehe mich daher genötigt, den Inhalt ... seines Werkes meinen Lesern etwas ausführlicher vor Augen zu führen, als es vor dreihundert Jahren nötig gewesen wäre", schrieb G. H. F. Nesselmann, ein Schüler von C. G. J. Jacobi (vgl. *alpha* H. 1/1980), 1842 in seinem Buch „Die Algebra der Griechen". Im Mittelalter und bis in die Neuzeit wurde die Professur für Geometrie an den Universitäten häufig als die des Euklid bezeichnet (ja, der Name Euklids geradezu mit der Geometrie identifiziert). Die Studenten lasen den Text, vollständig oder auszugsweise, und der Professor kommentierte.

Während seiner zweijährigen allgemeinen Ausbildung an der Tübinger Artistenfakultät, an der die sieben „freien Künste" (artes liberales: Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) gelehrt wurden, hörte Kepler die Vorlesungen über Geometrie (und Astronomie) beim Mathematiker und Astronomen M. Mästlin (1550 bis 1631). Hier lernte Kepler die „Elemente" des Euklid kennen. Ob Mästlin in seinen Vorlesungen alle 13 Kapitel des Buches behandelte oder nur Auszüge daraus, ist ungewiß.

Euklids Elemente umfassen dreizehn Kapitel. Man spricht von den „planimetrischen" (Kapitel 1 bis 6), den „arithmetischen" (Kapitel 7 bis 10) und den „stereometrischen" (Kapitel 11 bis 13) Büchern. (Planimetrie – Geometrie der Ebene, Arithmetik – Zahlentheorie, Stereometrie – Geometrie des Raumes.) Den Zweck der Elemente beschrieb Proklos (410

**Übersicht 1. Aus der deutschen Geschichte**

| | |
|---|---|
| 1517 | 31. Oktober. Beginn der Reformation. (Sie richtet sich gegen die Vorherrschaft der römisch-katholischen Kirche als Zentrum des Feudalsystems.) |
| 1524 | Beginn des deutschen Bauernkrieges. (Eine Phase der frühbürgerlichen Revolution, mit der der Machtkampf gegen das Feudalsystem einsetzte.) |
| 1531 | Gründung des Schmalkaldischen Bundes. (Ein von protestantischen Fürsten und Städten zur Verteidigung ihrer religiösen und politischen Ziele gegen den habsburgischen Kaiser Karl V. geschlossener Bund; er wurde im Schmalkaldischen Krieg 1546/47 vom Kaiser besiegt.) |
| 1555 | Reichstag zu Augsburg. Zwischen Protestanten und Katholiken wird der „Augsburger Religionsfrieden" abgeschlossen. (Er bestätigte den existierenden Glaubenszustand in den Fürstentümern.) |
| 1608 | Gründung der protestantischen Union in Ahausen. (Ein Zusammenschluß der deutschen protestantischen Fürsten, außer Kursachsen, unter Kurfürst Friedrich IV. von der Pfalz.) |
| 1609 | Gründung der katholischen Liga in München als Gegenpartei zur Union. (Ein Zusammenschluß der katholischen Fürsten.) |
| 1618 | Beginn des Dreißigjährigen Krieges – verursacht durch die konfessionellen Spannungen und politischen Gegensätze. |

**Übersicht 2.**
**Johannes Kepler 1571 bis 1630, Lebensdaten**

| | |
|---|---|
| 1571 | 27. Dezember (julianischen Stils = 6. Januar 1572, gregorianischen Stils). Geburt Keplers in der württembergischen Stadt Weil. |
| 1576 | Übersiedlung mit den Eltern nach Leonberg. |
| 1588 | Nach der Ausbildung, erst auf einer Schreibschule und wenig später auf einer Lateinschule in Leonberg, nach Bestehen des „Landexamens" dann an den Klosterschulen in Adelberg und Maulbronn legt Kepler das Examen als Baccalaureus in Tübingen ab. |
| 1589 | Studium in Tübingen. Zunächst an der Artistenfakultät. Unterweisung in Lateinisch, Griechisch, Hebräisch, Mathematik, Astronomie. 1591 Magister artium (Magister an der Artistenfakultät). Studium der Lutherischen Theologie an der theologischen Fakultät. |
| 1594 | Noch vor Abschluß des Theologiestudiums wird Kepler „Lehrer der Mathematik und der Moral" an der lutherischen Landständeschule in Graz und Mathematiker der Landesregierung („Mathematiker der Landschaft") mit der Verpflichtung, Kalender mit Prognostiken zu verfassen. |
| 1599 | Aus religiösen Gründen wird Kepler aus Graz ausgewiesen. Erst Assistent von Tycho Brahe und dann als Nachfolger von Tycho Brahe Hofastronom und Kaiserlicher Mathematiker in Prag. |
| 1612 | Die Lage des Protestanten Kepler am Hofe des katholischen Kaisers wird unhaltbar. Kepler geht als Mathematiker der Landschaft Österreich ob der Ems nach (dem protestantischen) Linz. |
| 1626 | Nach Ausweisung der Protestanten aus Linz: Ständig wechselnder Aufenthalt Keplers (Regensburg, Ulm u. a.) |
| 1628 | Kepler als Astrologe im Dienste Wallensteins im schlesischen Sagan (heute: Żagań). |
| 1630 | Im Oktober tritt Kepler eine Reise über Leipzig, Nürnberg nach Regensburg an, um auf dem dortigen Reichstag seine rückständigen Bezüge als Kaiserlicher Astronom einzuklagen. 15. November: Tod in Regensburg. |

bis 485 u. Z., zeitweise Leiter der Akademie in Athen) so: Elemente nennt man das, dessen Theorie hinreicht zum Verständnis von allem anderen und mittelst dessen man im Stande ist, die Schwierigkeiten, welche das andere bietet, aus dem Wege zu räumen.

Der letzte Satz in den Elementen lautet: „Weiter behaupte ich, daß sich außer den besprochenen fünf Körpern kein weiterer Körper errichten läßt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfaßt würde.“ Das war wohl auch ein Ziel Euklids, in den „Elementen“ den Nachweis zu führen, daß es nicht mehr als fünf regelmäßige Körper gibt.

Was sind solche, auch „reguläre Polyeder“ genannten Körper?

**Über reguläre Polyeder**

Ein von Ebenen begrenzter Körper heißt Polyeder. Die Seitenflächen des Polyeders sind Polygone (Vielecke). Jede Seite eines Polygons gehört zu zwei Seitenflächen. Diese Seiten werden als die Kanten des Polyeders bezeichnet. Jeder Eckpunkt eines Polygons gehört zu wenigstens drei Seitenflächen. Die Eckpunkte werden als Ecken des Polyeders bezeichnet.

Ein Polyeder heißt konvex, wenn es vollständig auf einer Seite der Ebene jeder seiner Seitenflächen liegt. In diesem Fall gehört die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten im Polyeder vollständig dem Polyeder an. Ist $e$ die Anzahl der Ecken, $f$ die Anzahl der Seitenflächen und $k$ die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt stets $e+f-k=2$. (Diesen Eulerschen Polyedersatz kannte Kepler noch nicht. L. Euler, 1707 bis 1783. Der Satz wurde übrigens schon von R. Descartes, 1596 bis 1650, formuliert.)

Sind die Seitenflächen eines konvexen Polyeders untereinander kongruente regelmäßige Vielecke derselben Seitenzahl und haben sämtliche Ecken dieselbe Kantenzahl, so heißt das konvexe Polyeder regelmäßig oder regulär. Es gibt, wie man beweisen kann, nur fünf reguläre Polyeder: das Tetraeder mit vier gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, das Hexaeder (Würfel) mit sechs Quadraten als Seitenflächen, das Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen (eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche), das Ikosaeder mit zwanzig gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, das Dodekaeder mit zwölf regelmäßigen 5-Ecken als Seitenflächen.

Man kann um ein reguläres Polyeder eine Kugel beschreiben, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt des Polyeders liegt und deren Oberfläche durch alle Ecken des Polyeders geht. Wir nennen sie Umkugel. Man kann einem regulären Polyeder auch eine Kugel einbeschreiben, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt des Polyeders liegt und deren Oberfläche jede Seitenfläche in ihrem Mittelpunkt berührt. Wir nennen sie Inkugel. Es bezeichne $r$ den Radius der Umkugel und $s$ den Radius der Inkugel des Polyeders. Für den Quotienten $\frac{r}{s}$ kann man folgende Werte ausrechnen:

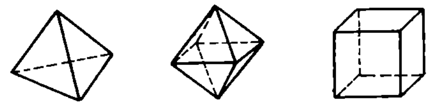
Für das Tetraeder ist $\frac{r}{s}=3$; für den Würfel und das Oktaeder ist $\frac{r}{s}=\sqrt{3}=1{,}7321$ (näherungsweise); für das Ikosaeder und das Dodekaeder ist

$$\frac{r}{s}=\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{15})\sqrt{10+2\sqrt{5}}=1{,}2584$$

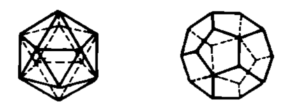
(näherungsweise).

Man nennt Würfel und Oktaeder bzw. Ikosaeder und Dodekaeder duale Polyeder, während das Tetraeder als selbstduales Polyeder bezeichnet wird. Für duale Polyeder ist das genannte Radienverhältnis $\frac{r}{s}$ gleich. Die Anzahl ihrer Kanten ist gleich. Durch Vertauschung von $e$ und $f$ entsteht der duale Körper. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Ecken eines Oktaeders; die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Oktaeders sind die Ecken eines Würfels. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Ikosaeders sind die Ecken eines Dodekaeders; die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Dodekaeders sind die Ecken eines Ikosaeders. Für das Tetraeder ist $e=f$. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Tetraeders sind die Ecken eines (anderen) Tetraeders.

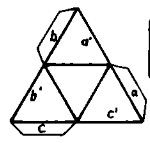
Die Pythagoreer (anonyme Mathematiker zw. 500 und 440 v. u. Z.) kannten wahrscheinlich nur drei reguläre Polyeder, nämlich Tetraeder, Würfel und Dodekaeder, während Oktaeder und Ikosaeder wohl erst von Theaitetos (etwa 410 bis 368 v. u. Z.) entdeckt worden sind. Oft werden die regulären Polyeder



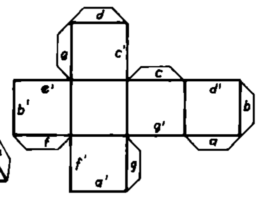
Tetraeder Oktaeder Hexaeder



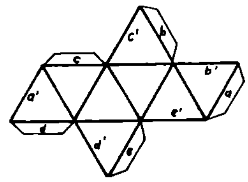
Ikosaeder Pentagondodekaeder



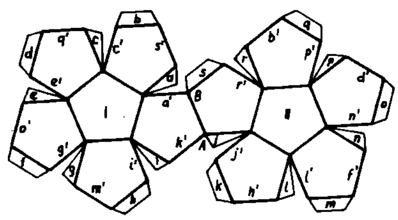
Ebenes Netz des regulären Tetraeders



Ebenes Netz des Würfels



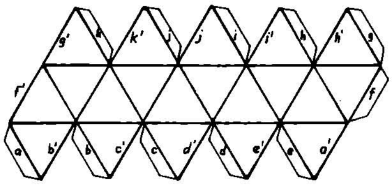
Ebenes Netz des regulären Oktaeders



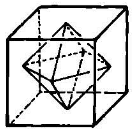
Ebenes Netz des regulären Dodekaeders

**Übersicht 3. Die fünf regulären Polyeder** (M. Miller, Stereometrie, Leipzig 1957)

| | Tetraeder | Würfel | Oktaeder | Ikosaeder | Dodekaeder |
|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der Ecken der Seitenflächen | 3 | 4 | 3 | 3 | 5 |
| Anzahl der Seitenflächen in einer Ecke | 3 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| Anzahl $f$ der Seitenflächen | 4 | 6 | 8 | 20 | 12 |
| Anzahl $e$ der Ecken | 4 | 8 | 6 | 12 | 20 |
| Anzahl $k$ der Kanten | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |
| Oberfläche ($a$ – Kantenlänge) | $a^2\sqrt{3}$ | $6a^2$ | $2a^2\sqrt{3}$ | $5a^2\sqrt{3}$ | $3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ |
| Volumen ($a$ – Kantenlänge) | $\frac{a^3}{12}\sqrt{3}$ | $a^3$ | $\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$ | $\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$ | $\frac{a^3}{3}(15+7\sqrt{5})$ |
| Radius $r$ der Umkugel | $\frac{a}{4}\sqrt{6}$ | $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{a}{4}\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$ |
| Radius $s$ der Inkugel | $\frac{a}{12}\sqrt{6}$ | $\frac{a}{2}$ | $\frac{a}{6}\sqrt{6}$ | $\frac{a}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5})$ | $\frac{a}{20}\sqrt{10}\sqrt{25+11\sqrt{5}}$ |
| Radienverhältnis $\frac{r}{s}$ | 3 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$ |



Ebenes Netz des regulären Ikosaeders



Dualität zwischen Würfel und Oktaeder

nach dem griechischen Philosophen Platon (427 bis 347 v.u.Z.) bezeichnet, in dessen Dialog „Timaios“ sie vorkommen: Platonische Weltkörper, kosmische Körper. In der griechischen Naturphilosophie, und vor allem bei Platon, spielten die Platonischen Körper eine bedeutende Rolle. Aristoteles (384 bis 322 v.u.Z.) berichtete, daß der Philosoph Empedokles (um 440 v.u.Z.) der erste war, der annahm, daß alles aus vier Elementen – Erde, Luft, Feuer und Wasser – zusammengesetzt sei. Der platonische Dialog „Timaios“ zeigt, daß Platons Lehrer Timaios von Lokri diese Hypothese übernommen hatte. Er gab den vier Grundstoffen besondere Gestalten. Der Würfel wurde der Erde zugeordnet, das Oktaeder der Luft, die Pyramide dem Feuer (die Bezeichnung Tetraeder stammt erst von Heron – um 125 u.Z.), das Ikosaeder dem Wasser. Der Weltschöpfer habe die ganze Welt in Form eines Dodekaeders angelegt.

**Kepler findet das „Weltgeheimnis“**

Im Juli 1595 glaubte der dreiundzwanzigjährige Kepler in Graz (s. Übersicht 2), das „Weltgeheimnis“ gefunden zu haben. Ein Jahr später erschien darüber sein Erstlingswerk „Weltgeheimnis“ (Mysterium cosmographicum). Danach gäbe es einen Zusammenhang zwischen den Bahnen der sechs damals bekannten Planeten um die Sonne und den In- und Umkugeln der fünf regulären Polyeder.

In einem nachgelassenen Bericht (November 1595) heißt es:

„Wie kommt es zur Sechszahl der Wandler, wie zu dem Abstand dieser Gestirne, warum ist des Jupiters Laufbahn vom Mars so weit entfernt, da im Äußersten beide? Nimm Pythagoras hin, er lehrt's mit seinen fünf Körpern. Zwischen Saturn und Jupiter steht ein Würfel so, daß die Innenfläche der Saturnsphäre die dem Würfel umschriebene, die Außenfläche der Jupitersphäre die eingeschriebene Kugel ist. Ebenso steht zwischen Jupiter und Mars ein Tetraeder, zwischen Mars und Erde das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder, zwischen Venus und Merkur das Oktaeder. Auch die mittleren Bewegungen stehen in Beziehungen zueinander. Sie verhalten sich nämlich wie die Quadrate der Abstände.“ Kepler nahm die Planetenbahnen – wie Nicolaus Copernicus (latinisiert aus Kopernik, 1473 bis 1543) – als kreisförmig an. Er dachte sich um die Sonne eine Kugel beschrieben, deren Radius gleich dem Radius der Kreisbahn des Merkur ist. Diese werde als Inkugel eines Oktaeders betrachtet. Die Umkugel dieses Oktaeders habe einen Radius, der gleich dem Radius der Kreisbahn der Venus ist. Diese Umkugel des Oktaeders werde als Inkugel eines Ikosaeders betrachtet. Die Umkugel dieses Ikosaeders habe einen Radius, der gleich dem Radius der Kreisbahn der Erde ist. Diese Umkugel des Ikosaeders wiederum werde als Inkugel eines Dodekaeders angesehen. Die Umkugel dieses Dodekaeders habe einen Radius, der so groß ist wie der Sonnenabstand des Mars, der also gleich dem Radius der Kreisbahn des Marses ist. Diese Umkugel des Dodekaeders werde als Inkugel eines Tetraeders betrachtet. Auf der Umkugel dieses Tetraeders bewege sich der Jupiter auf einer Kreisbahn. Diese Umkugel des Tetraeders werde als Inkugel eines Würfels angesehen. Die Umkugel des Würfels habe dann einen Radius, der gleich dem Radius der Kreisbahn des Saturn ist. Auf ihr bewege sich also der Saturn.

In der Übersicht 4 wird die Hypothese Keplers mit den uns heute genau bekannten Werten verglichen: Die Verhältnisse $h$ von Um- und Inkugelradius werden den wirklichen Verhältnissen $w$ der mittleren Sonnenabstände der aufeinanderfolgenden Planeten gegenübergestellt.

Wir wissen heute, daß die Vorstellung von durch die regulären Polyeder bestimmten Planetenbahnen völlig irreal ist, auch wenn sie in gewisser Weise „schön“ und „harmonisch“ erscheint. Das Buch „Weltgeheimnis“


brachte Kepler jedoch die Anerkennung vieler Gelehrter, darunter Galileo Galilei (1564 bis 1642) und Tycho Brahe (1546 bis 1601). Kepler selbst beschrieb später die Bahnen der Planeten genauer in drei (heute nach ihm benannten) Bahngesetzen.

Nach Brahes Tod 1601 kam Kepler in den Besitz der Braheschen Beobachtungsergebnisse. Er versuchte zunächst, die Beobachtungen mit Copernicus' Vorstellungen von exzentrischen, kreisförmigen Planetenbahnen (um die Sonne) in Einklang zu bringen. Nach vielen Rechnungen fand er schließlich, daß sich eine Übereinstimmung mit den Beobachtungen ergibt, wenn man die Gültigkeit der beiden folgenden Gesetze annimmt, die er 1609 in der „Neuen Astronomie“ veröffentlichte.

*Erstes Keplersches Gesetz:* Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem

**Übersicht 4. Keplers Planetenkugeln und die Wirklichkeit**

| Planeten | Keplers Hypothese: Der Planet bewegt sich auf der | Keplers Hypothese $h$: Verhältnis der Radien der Kreisbahnen $=$ Verhältnis $\frac{r}{s}$ (Radius $r$ der Umkugel zu Radius $s$ der Inkugel) | Mittlerer Sonnenabstand der Planeten | Verhältnis $w$ der mittleren Abstände | $\frac{w}{h}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Merkur | Inkugel eines Oktaeders | | 0,3871 | | |
| | | $\frac{r}{s}$ (Oktaeder) $\approx 1{,}7321$ | | 1,8685 | 1,0787 |
| Venus | Umkugel des Oktaeders = Inkugel eines Ikosaeders | | 0,7233 | | |
| | | $\frac{r}{s}$ (Ikosaeder) $\approx 1{,}2584$ | | 1,3826 | 1,0987 |
| Erde | Umkugel des Ikosaeders = Inkugel eines Dodekaeders | | 1,0000 | | |
| | | $\frac{r}{s}$ (Dodekaeder) $\approx 1{,}2584$ | | 1,5237 | 1,2108 |
| Mars | Umkugel des Dodekaeders = Inkugel eines Tetraeders | | 1,5237 | | |
| | | $\frac{r}{s}$ (Tetraeder) $= 3$ | | 3,4145 | 1,1382 |
| Jupiter | Umkugel des Tetraeders = Inkugel eines Würfels | | 5,2026 | | |
| | | $\frac{r}{s}$ (Würfel) $\approx 1{,}7321$ | | 1,8365 | 1,0603 |
| Saturn | Umkugel des Würfels | | 9,5548 | | |

Brennpunkt die Sonne steht. (Die Ellipse ist als Kurve definiert, bei der die Summe der Abstände eines beliebigen Kurvenpunktes von zwei bestimmten Punkten, den Brennpunkten, konstant ist.)

*Zweites Keplersches Gesetz:* Die Verbindungslinie Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (Die Planeten bewegen sich also in Sonnennähe schneller.)
Nun war in gewissem Sinne eine Ordnung am Planetenhimmel gewonnen. Jedoch die Frage nach der Harmonie der Welt blieb in Kepler lebendig. Was war die Ursache für die Bahnformen und ihre Verhältnisse? Kepler versuchte, in seiner „Weltharmonik" (Harmonices mundi 1619) eine Antwort auf diese Frage zu geben. Seine Harmonielehre basiert auf Geometrie, Musik und Astronomie. Im Laufe der Überlegungen zur „Weltharmonik" beschäftigte Kepler immer wieder das Problem, wie etwa die Umlaufzeiten der Planeten mit ihren Sonnenabständen zusammenhängen könnten. (Diese Fragestellung geht bis in die Zeit der Arbeit am „Weltgeheimnis" zurück!) Im Mai 1618 gelang ihm die Lösung; publiziert wurde sie in der „Weltharmonik": „Nachdem ich in unablässiger Arbeit einer sehr langen Zeit die wahren Intervalle der Bahnen mit Hilfe der Beobachtungen Brahes ermittelt hatte, zeigte sich mir endlich die wahre Proportion der Umlaufzeiten in ihrer Beziehung zur Proportion der Bahnen."

*Drittes Keplersches Gesetz:* Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Abstände von der Sonne. (Als Abstand von der Sonne soll die Länge der großen Halbachse der Bahnellipse genommen werden.) Bezeichnen $T_1$, $r_1$ Umlaufzeit und Abstand des einen Planeten und $T_2$, $r_2$ Umlaufzeit und Abstand eines anderen Planeten, so gilt

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Kepler ermittelte die Gesetze induktiv aus den Beobachtungsergebnissen Brahes. Kepler hat zwar diese Gesetze entdeckt, konnte sie jedoch nicht erklären. Es fehlte ihm der Begriff der Masse und das Wissen um die Anziehung (Gravitation). Später konnte Isaac Newton (1642 bis 1727) die drei Planetengesetze rein logisch aus seinem Gravitationsgesetz herleiten. Ausgangspunkt zur Formulierung des Gravitationsgesetzes waren aber andererseits die Keplerschen Gesetze. In seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie" (Principia mathematica ..., 1714) zeigte Newton, daß der Sonnenkörper die Quelle Kraft der Planetenbewegung wäre, wie Kepler es gefordert hatte.
Kepler fiel übrigens bereits die große „Lücke" zwischen Mars und Jupiter auf. (Fortsetzung im Heft 6/1980)

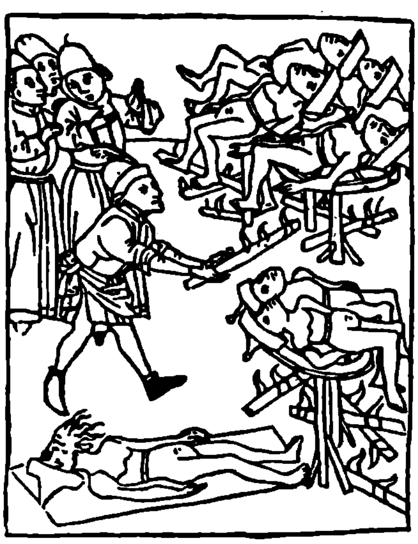
*H. Pieper*

# Die Mathematik und die Inquisition

Am Ende des 15. Jahrhunderts wurde einmal der berühmte Mathematiker *Paolo Walmes* von einem Adligen in Madrid eingeladen. Man sprach über die Lösung der Gleichungen.
„Ich habe angefangen, das Lösen der Gleichungen 2. Grades zu erlernen", erklärte stolz der Hausherr, der für seine Zeit als gebildeter Mensch galt. „Es stellte sich heraus, daß das Quadrat der unbekannten Größe kein unüberwindbares Hindernis für die Bestimmung dieser Unbekannten war..."
„Es gibt sogar Verfahren für die Lösung komplizierterer Gleichungen", bemerkte vorsichtig *Walmes*, der kurz vorher ein Verfahren zur Lösung der Gleichungen 4. Grades gefunden hatte. Vielleicht hätte er mehr gesagt, aber ... unter den Gästen war auch *Torquemada*, der spanische Inquisitor. Könnte er das wohl als Ketzerei auffassen?
Aber *Torquemada* hatte dem Gespräch schon zugehört und kam näher. „Sie haben recht", gab er einschmeichelnd zu, „man kann auch die Gleichungen 3. Grades lösen. Alles jedoch, was darüber ist, ist dem menschlichen Verstand unzugänglich."
„Und trotzdem fand ich sogar die Möglichkeit der Lösung von Gleichungen 4. Grades!" konnte *Walmes* sich nicht enthalten zu sagen. „Und ich hoffe, bei der Diskussion am kommenden Donnerstag, das zu beweisen."
*Torquemada* antwortete nicht darauf. Er ging bald weg. Aber im Morgengrauen wurde der Mathematiker aus dem Bett geholt und auf das „heilige Gericht" geschleppt.
„Also, Ihnen ist ein Verfahren zur Lösung der Gleichungen 4. Grades bekannt?" wünschte der mächtige Inquisitor zu wissen. „Haben Sie das schon irgend jemandem mitgeteilt?"
„Ich hoffe, daß ich das Verfahren beherrsche", antwortete der Gelehrte bescheiden. „Auf jeden Fall habe ich damit verschiedene Gleichungen 4. Grades gelöst. Leider konnte ich nicht wissen, daß sich die Kirche auch für Mathematik interessiert; deshalb habe ich mir vorgenommen, darüber während der Diskussion zu reden, die am kommenden Donnerstag stattfinden soll."
„Nun, wie ist das möglich, Herr Professor?" fragte sarkastisch lächelnd *Torquemada*. „Der liebe Gott erlaubte den Menschen nur, Gleichungen des 1., 2. sowie 3. Grades zu lösen. Und alles, was darüber ist, auch Gleichungen 4. Grades, kann nur der Teufel verstehen. Oder hat Ihnen der Teufel geholfen?"
„Aber ich bitte Sie!" entgegnete der Mathematiker, den große Angst erfaßte (denn die Erklärung, daß er mit dem Teufel im Bunde sei, konnte die Folter bedeuten). „Ich habe nur einige mathematische Berechnungen ausgeführt... Wenn Sie und der liebe Gott es erlauben, kann am kommenden Donnerstag jeder Scholar nach meinem Verfahren rechnen..."
„Jeder Scholar, sagen Sie? Und können Sie darauf auch nach dem heiligen Evangelium schwören?" fragte *Torquemada* mit hinterlistiger Stimme. „Na gut, wir werden eine Kommission einberufen..."
Die Diskussion am Donnerstag fand nicht statt. *Walmes* wurde dem Gericht übergeben und für schuldig befunden, mit dem Teufel im Bunde zu sein, weil er wider den Willen Gottes die Grenzen des menschlichen Verstandes überschreiten wollte. Er wurde zum Tod auf dem Scheiterhaufen verurteilt und als Ketzer verbrannt. Das Verfahren zur Lösung der Gleichungen 4. Grades wurde ein halbes Jahrhundert später von dem italienischen Mathematiker *L. Ferrari* wiederentdeckt.
Es sei noch bemerkt, daß das Verfahren von dem Lehrer Ferraris, dem Mathematiker *Gerolamo Cardano*, veröffentlicht wurde. Dieser nahm die Entdeckung für sich in Anspruch.

*A. Halameisär*

Bis in das 19. Jh. brannten die Scheiterhaufen der Inquisition, wurden Männer und Frauen gequält, weil sie sich gegen kirchliche Dogmen wandten.



# Wissenswertes über das Dreieck

Wir wollen durch diesen Beitrag unsere *alpha*-Leser in Form von Aufgaben mit geometrischen Zusammenhängen vertraut machen, die nicht Gegenstand des Unterrichts der Schule sind. Dabei soll zugleich das Beweisen geübt werden.

**Aufgabe**

Es seien $A$ der Flächeninhalt eines Dreiecks $ABC$, $a$, $b$ und $c$ die Längen seiner Seiten, $2s=a+b+c$ die Länge seines Umfangs, $h_a$, $h_b$ und $h_c$ die Längen seiner Höhen, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ die Größen seiner Innenwinkel, $\varrho$ die Länge seines Inkreisradius, $\varrho_a$, $\varrho_b$ und $\varrho_c$ die Längen seiner Ankreisradien; dann gilt

(1) $A=\varrho\cdot s$

(2) $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(3) $A=\varrho_a\cdot(s-a)=\varrho_b\cdot(s-b)=\varrho_c\cdot(s-c)$

(4) $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}$

(5) $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

(6) $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

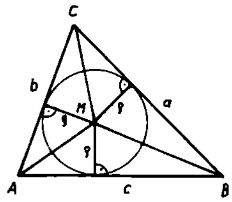
Diese sechs Formeln wollen wir nun am Beispiel eines spitzwinkligen Dreiecks herleiten. Für stumpfwinklige bzw. rechtwinklige Dreiecke gelten diese Formeln ebenfalls. Die Herleitungen dafür wird der interessierte Leser in analoger Weise sicher selbst finden.

**Lösungen**

(1) Für den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ gilt

$$A=A_{ABM}+A_{BCM}+A_{CAM},$$
$$A=\frac{1}{2}c\cdot\varrho+\frac{1}{2}a\cdot\varrho+\frac{1}{2}b\cdot\varrho,$$
$$A=\frac{1}{2}\varrho\cdot(a+b+c),$$
$$A=\frac{1}{2}\varrho\cdot 2s,$$
$$A=\varrho\cdot s \text{ (Bild 1).}$$

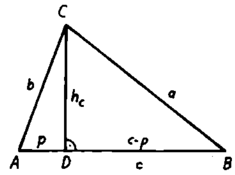
Bild 1




(2) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h_c^2=b^2-p^2$ und $h_c^2=a^2-(c-p)^2$. Daraus folgt durch Gleichsetzen

$$b^2-p^2=a^2-(c-p)^2,$$
$$b^2-p^2=a^2-c^2+2cp-p^2,$$
$$2cp=b^2+c^2-a^2,$$
$$p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \text{ (Bild 2).}$$

Bild 2




Aus $h_c^2=b^2-p^2=(b+p)(b-p)$ und $p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ folgt durch Einsetzen

$$h_c^2=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right),$$
$$h_c^2=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c},$$
$$h_c^2=\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2c},$$
$$h_c^2=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4c^2}.$$

Aus $a+b+c=2s$ folgt

$a+b-c=2(s-c)$, $a+c-b=2(s-b)$,
$b+c-a=2(s-a)$.

Durch Einsetzen erhalten wir dann

$$h_c^2=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4c^2}$$
$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2},$$
$$h_c=\frac{2}{c}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nun gilt

$$A=\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{c}{2}\cdot\frac{2}{c}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

also

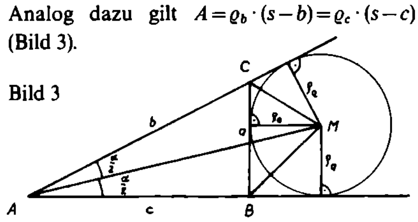
$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(3) Für den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ gilt

$$A=A_{ABM}+A_{CAM}-A_{CBM},$$
$$A=\frac{c}{2}\cdot\varrho_a+\frac{b}{2}\cdot\varrho_a-\frac{a}{2}\cdot\varrho_a,$$
$$A=\frac{1}{2}\varrho_a\cdot(b+c-a),$$
$$A=\frac{1}{2}\varrho_a\cdot 2(s-a),$$
$$A=\varrho_a\cdot(s-a).$$

Analog dazu gilt $A=\varrho_b\cdot(s-b)=\varrho_c\cdot(s-c)$ (Bild 3).

Bild 3




(4) Nach der bereits hergeleiteten Formel (1) gilt $\frac{1}{\varrho}=\frac{s}{A}$.

Nach Formel (3) gilt $\frac{1}{\varrho_a}=\frac{s-a}{A}$, $\frac{1}{\varrho_b}=\frac{s-b}{A}$ und $\frac{1}{\varrho_c}=\frac{s-c}{A}$.

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}=\frac{s-a}{A}+\frac{s-b}{A}+\frac{s-c}{A}$$
$$=\frac{3s-(a+b+c)}{A}=\frac{3s-2s}{A}=\frac{s}{A}.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}.$$

(5) Aus $A=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ folgt $\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2A}$, $\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2A}$, $\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2A}$.

Durch Addition erhalten wir

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2A}=\frac{2s}{2A}=\frac{s}{A}.$$

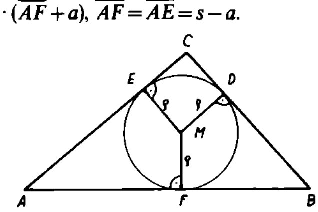
Nach Formel (1) gilt $\frac{1}{\varrho}=\frac{s}{A}$.

Durch Gleichsetzen folgt daraus

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

(6) Wegen $\overline{AE}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BF}$ und $\overline{CD}=\overline{CE}$ gilt $a+b+c=2\cdot(\overline{AF}+\overline{BD}+\overline{CD})$
$=2\cdot(\overline{AF}+a)$,
$2s=2\cdot(\overline{AF}+a)$, $\overline{AF}=\overline{AE}=s-a$.

Bild 4




Analog dazu gilt $\overline{BD}=\overline{BF}=s-b$ und $\overline{CD}=\overline{CE}=s-c$ (Bild 4).

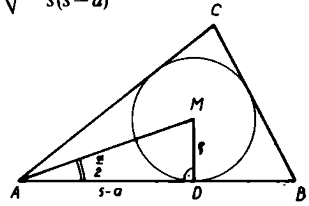
Aus dem nachfolgenden Bild wird folgendes ersichtlich:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a}.$$

Wegen $\varrho=\frac{A}{s}$ erhalten wir durch Einsetzen

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{A}{s(s-a)}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)},$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-a)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Bild 5




Analog dazu gilt

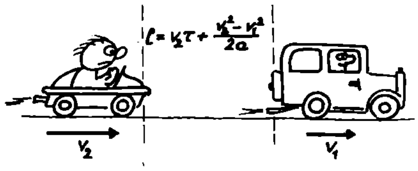
$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$ und

$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ (Bild 5).

*D. Gandel, D. Hetsch, Th. Scholl*

# Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

*Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1981*




## Mathematik

Ma 5 ■1996 An einer Arbeitsgemeinschaft *Junge Mathematiker* einer Schule nehmen insgesamt 40 Schüler der 5., 6. und 7. Klasse teil. Der fünfte Teil der Anzahl der AG-Teilnehmer sind Schüler der 5. Klasse. Aus der 6. Klasse nehmen 8 Schüler mehr als aus der 7. Klasse an der AG teil. Wie viele Schüler aus jeder dieser drei Klassen nehmen an dieser AG teil?

*Schülerin Sabine Kupczyk, Bad Sulza, Kl. 6*

Ma 5 ■1997 Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 30 cm, dessen Oberfläche schwarz gefärbt ist, soll so zersägt werden, daß man kleinere Würfel mit einer Kantenlänge von je 10 cm erhält.

a) Wieviel Sägeschnitte sind dazu erforderlich? (Die anfallenden Sägespäne sollen unberücksichtigt bleiben.)

b) Wieviel kleinere Würfel von je 10 cm Kantenlänge erhält man?

c) Wie viele dieser kleineren Würfel haben genau vier, drei, zwei, eine bzw. keine schwarze Begrenzungsfläche?

*Schülerin Anke Heymann, Pirna*

Ma 5 ■1998 Klaus und Peter gehen einkaufen. Klaus kauft 5 Bleistifte und 3 Hefte, Peter 2 Bleistifte und 10 Hefte. Wieviel Mark muß jeder von ihnen bezahlen, wenn 2 Bleistifte genausoviel kosten wie 4 Hefte und wenn Peter 11 Pfennige mehr bezahlen mußte als Klaus?

*Schüler Peter Hermann, Hoyerswerda, Kl. 5*

Ma 5 ■1999 Klaus hat ausreichend Stäbe von 3 dm und 5 dm Länge. Er behauptet, daß er unter Verwendung von genau fünf dieser Stäbe Strecken von

a) 21 dm, b) 9 dm, c) 1 dm

Länge auf einer Geraden abmessen kann. Wie macht er das?

Ma 5 ■2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 5 ■2001 Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Wasseroberfläche von rund 2600 km². Jemand meint: „Hätte dieser See die Form eines Quadrates, so könnte man auf einer 200 km langen Autostrecke um diesen See herumfahren.“ Begründe, daß diese Aussage falsch ist! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■2002 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß man sechs richtig gelöste Aufgaben erhält.

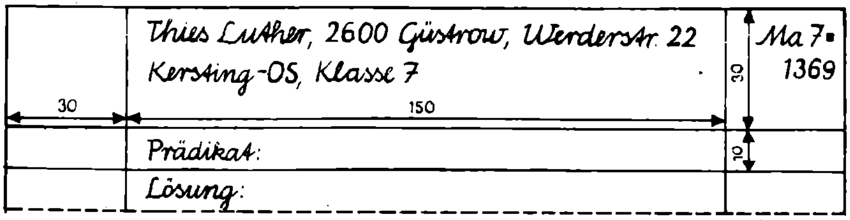
$$\begin{array}{ccccc} ab & \cdot & cd & = & dfgd \\ : & & : & & : \\ sd & \cdot & sd & = & shh \\ \hline a & \cdot & b & = & sp \end{array}$$

*Sch.*

Ma 6 ■2003 Die erfolgreichste Mannschaft bei der VII. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR in den Wintersportarten wurde die des Bezirks Karl-Marx-Stadt mit insgesamt 749 erreichten Punkten. Im Skilauf erreichte diese Mannschaft 14mal soviel Punkte wie im Eiskunstlauf. Im Biathlon wurden von dieser Mannschaft 26 Punkte weniger als im Eiskunstlauf, im Rennschlittensport aber 2 Punkte mehr als die zwölffache Anzahl der Punkte aus dem Biathlon erzielt. Im Eisschnellauf erreichte sie 41 Punkte mehr als im Eiskunstlauf. Wieviel Punkte erzielte diese Mannschaft in den einzelnen Disziplinen?

*Schülerin Sabine Oestreich, Oschersleben, Kl. 7*

Ma 6 ■2004 Eine Mutter hat Erdbeeren, Johannisbeeren und Stachelbeeren eingeweckt. Hätte sie ein Glas Johannisbeeren mehr ein-




**Wettbewerbsbedingungen**

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

**Redaktion alpha**
**7027 Leipzig, Postfach 14.**

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1980/81 läuft von Heft 5/80 bis Heft 2/81. Zwischen dem 1. und 10. September 1981 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/81 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1980/81 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

geweckt, so hätte sie doppelt soviel Gläser Johannisbeeren wie Erdbeeren; sie hat aber dreimal soviel Gläser Stachelbeeren wie Erdbeeren. Wie viele Gläser Erdbeeren, Johannisbeeren bzw. Stachelbeeren hat diese Mutter eingeweckt, wenn sie insgesamt 17 Gläser dieser Obstsorten eingeweckt hat?

*Schülerin Marion Reek, Wittstock, Kl. 6*

Ma 6 ▪2005 Rolf kaufte insgesamt 13 Ansichtskarten, und zwar einige zu 20 Pf und einige zu 30 Pf das Stück. Für die Ansichtskarten zum Preise von 30 Pf zahlte Rolf insgesamt 10 Pf weniger als für die Ansichtskarten zum Preise von 20 Pf. Wie viele Ansichtskarten zu 20 Pf und wie viele zu 30 Pf das Stück hat Rolf gekauft?

*Schüler Bernd Leifheit, Eigenrieden, Kl. 6b*

Ma 6 ▪2006 Es ist nachzuweisen, daß der Flächeninhalt eines spitzwinkligen Dreiecks $ABC$ stets kleiner als $\frac{1}{2}\cdot ab$ ist, wenn $a$ und $b$ die Längen der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind.

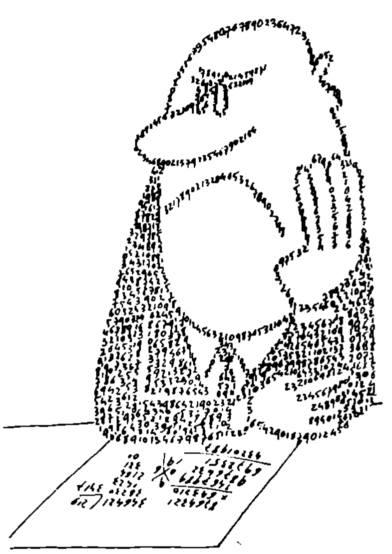
*Schülerin Angelika Drauschke, Neustrelitz, Kl. 6*

Ma 6 ▪2007 Zeichne ein Dreieck $ABC$ mit den Seitenlängen $a=7$ cm, $b=9$ cm und $c=5$ cm! Konstruiere die Winkelhalbierende $\overline{AD}=w$ des Innenwinkels $\sphericalangle CAB$! Auf dieser Winkelhalbierenden ist nun ein Punkt $P$ zu konstruieren, der von der Geraden $BC$ den gleichen Abstand hat wie vom Eckpunkt $A$ des Dreiecks $ABC$. Die Konstruktion des Punktes $P$ ist zu begründen. *Sch.*

Ma 6 ▪2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 7 ▪2008 Es ist nachzuweisen, daß es in jedem Jahr mindestens einen „Freitag, den 13." gibt. *Schüler J. Gräfenstein, Dresden*

Ma 7 ▪2009 Konstruiere einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r=3$ cm! Lege an diesen Kreis zwei Tangenten, die aufeinander senkrecht stehen! Der Schnittpunkt der Tangenten sei $S$, die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreis $k$ seien $P$ und $Q$. Von den Tangentenabschnitten $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ und von dem kürzeren Kreisbogen $\widehat{PQ}$ wird eine Fläche begrenzt, deren Flächeninhalt zu bestimmen ist.



*Schüler Michael Nitsche, Dresden, Kl. 6*

Ma 7 ▪2010 Es sind alle geordneten Tripel $[a, b, c]$ natürlicher Zahlen anzugeben, die zugleich die Gleichung $a\cdot b+8=c$ und die Ungleichung $91<a+b+c<94$ erfüllen.

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ▪2011 Setzt man zwischen die beiden Ziffern einer zweistelligen natürlichen Zahl eine dritte Ziffer, so erhält man eine dreistellige natürliche Zahl, die dreizehnmal so groß ist wie die zweistellige natürliche Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich? *Sch.*

Ma 7 ▪2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 8 ▪2012 In einem Dreieck $ABC$ sei die Seite $\overline{AB}$ doppelt so lang wie die Seite $\overline{BC}$, und die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ betrage 60°. Man drücke den Flächeninhalt dieses Dreiecks allein durch die Länge $a$ der Seite $\overline{BC}$ aus! *Schüler Volker Leutheuser, Kl. 10*

Ma 8 ▪2013 Von einer sechsstelligen Telefonnummer weiß man folgendes:
(1) Je zwei aufeinanderfolgende Ziffern bilden in der vorgegebenen Reihenfolge eine Primzahl.
(2) Die von den ersten beiden Ziffern gebildete Primzahl ist kleiner als 29.
(3) Die von der zweiten Ziffer dargestellte Zahl ist gleich dem Quadrat der von der vierten Ziffer dargestellten Zahl.
(4) Es folgen keine zwei gleichen Ziffern aufeinander.
(5) Die dritte Ziffer stellt eine Zahl dar, die gleich der Summe der durch die letzten drei Ziffern dargestellten Zahlen ist.
(6) Die Ziffern 0 und 2 sind nicht in der Telefonnummer enthalten.
Wie lautet die Telefonnummer?

*Schüler Rainer Wichmann, Weimar, Kl. 8*

Ma 8 ▪2014 Es ist zu beweisen:
Wenn die Differenz zweier natürlicher Zahlen $n_1$ und $n_2$ durch 7 teilbar ist, so ist auch die Differenz ihrer Quadrate stets durch 7 teilbar.

*Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ma 8 ▪2015 Gegeben sei eine beliebige natürliche Zahl $n$ in dekadischer Schreibweise. Man bilde durch eine beliebige Umstellung von Ziffern der Zahl $n$ eine Zahl $n'$. Es ist zu beweisen, daß die Differenzen $n-n'$ und $n'-n$ stets durch 9 teilbar sind! (Die Null als erste Ziffer ist auszuschließen!)

*Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ma 8 ▪2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 9 ▪2016 Man konstruiere einen Rhombus, in dem die Länge des Radius seines einbeschriebenen Kreises kleiner als die halbe Seitenlänge des Rhombus ist. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen.

*Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ma 9 ▪2017 Es ist zu beweisen, daß es keine Quadratzahl gibt, die bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3 läßt.

*Schülerin Sylvia Döring, Gotha, Kl. 10*

Ma 9 ▪2018 Es ist zu beweisen, daß die Summe der Quadrate von vier beliebigen Primzahlen, von denen jede größer als 2 ist, stets durch 4 teilbar ist.

*Dipl.-Lehrer f. Math./Phys. R. Otto, Zschopau*

Ma 9 ▪2019 Man berechne den Wert des Terms

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)!$$

*Sch.*

Ma 9 ▪2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 10/12 ▪2020 Es ist ein Dreieck $ABC$ zu konstruieren, von dem die folgenden Stücke bekannt sind:
$b$ (Länge der Seite $\overline{AC}$), $\alpha$ (Größe des Winkels $BAC$) und
$r_b$ (Länge des Radius desjenigen Ankreises, der die Seite $\overline{AC}$ berührt).
Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!

*Dipl.-Lehrer f. Math./Phys. R. Otto, Zschopau*

Ma 10/12 ▪2021 Der zehnte Teil der Summe aller Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 20, vermehrt um 13, ist das Zehnfache der Anzahl der Schüler einer Klasse. Wieviel Schüler gehen in diese Klasse?

*Schülerin Claudia Möhrdel und Beatrix Flemming, Halle-Neustadt, Kl. 5*

Ma 10/12 ▪2022 Von einem Dreieck sind gegeben: $\alpha=74°$, $\beta=53°$, $h_b=15$ cm.
Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks zu berechnen.

*Aus einem rumänischen Mathematiklehrbuch*

Ma 10/12 ▪2023 Von einem Quader mit den Kantenlängen $a$, $b$, $c$ $(a>b>c)$ ist folgendes bekannt:
Die Länge $f$ der Diagonalen der Begrenzungsfläche mit dem kleinsten Flächeninhalt beträgt $\sqrt{145}$ cm, die Länge $g$ der Diagonalen der Begrenzungsfläche mit dem größten Flächeninhalt beträgt 15 cm, und die Länge der Raumdiagonalen ist $e=17$ cm. Es ist das Volumen dieses Quaders zu berechnen.

*Schüler Jürgen Seifert, Milkau, Kl. 8*

Ma 10/12 ▪2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

# Physik

Ph 6 ▪81 Lutz möchte das Volumen eines würfelförmigen Holzklötzchens aus dem Baukasten seines kleinen Bruders bestimmen.

Dazu mißt er die Kante des Würfels mit 44 mm. Er weiß aber, daß sein Meßstab nicht genau ist und sich ein Meßfehler von 1 mm oder weniger ergeben kann.

a) Berechne das größte und das kleinste Volumen des Holzklötzchens, das innerhalb dieser Fehlergrenze möglich ist!

b) Berechne das Volumen mit dem gemessenen Wert! Um wieviel $mm^2$ unterscheidet es sich von dem Durchschnittswert der Ergebnisse von a)?

Ph 7 ▪82 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Rundfunkwellen beträgt $300000 \frac{km}{s}$. Wer hört in einer Intervisionssendung aus Moskau die Musik früher, der Zuhörer in Moskau, der 40 m vom Orchester entfernt im Saal sitzt oder der Fernsehzuschauer in Berlin in einer Entfernung von 1600 km, der 3 m vor seinem Fernsehapparat sitzt? Um wieviel Sekunden wird die Musik früher wahrgenommen? $\left(\text{Schallgeschwindigkeit: } 340 \frac{m}{s}\right)$

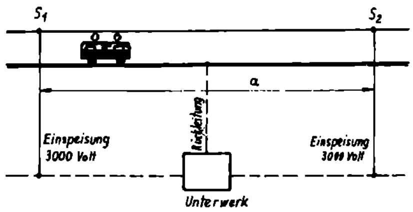
Ph 8 ▪83 In einem Industriebetrieb werden die anfallenden Abwässer über vier Rohrleitungen einem Sammelbecken und von dort durch einen offenen Kanal der Abwasserreinigung zugeleitet. Es seien bekannt:

| | Rohr 1 | Rohr 2 | Rohr 3 | Rohr 4 |
|---|---|---|---|---|
| Durchmesser (cm) | 30 | 30 | 50 | 68 |
| Strömungsgeschwindigkeit $\left(\frac{m}{s}\right)$ | 1,5 | 2,5 | 1,8 | 1,0 |

Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ im Abflußkanal des Sammelbeckens, wenn der Kanal rechteckigen Querschnitt hat, seine Breite $b = 1{,}25$ m beträgt und das Abwasser darin eine Höhe von $h = 50$ cm hat?

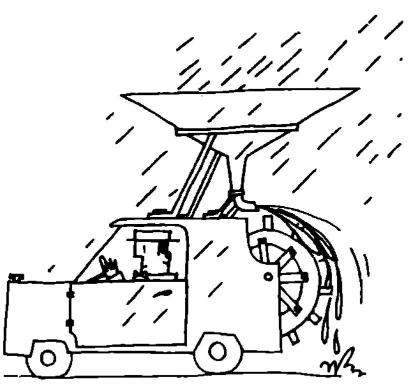
*Bemerkung:* Es wird vorausgesetzt, daß pro Minute aus dem Sammelbecken dieselbe Menge abfließt, die aus den Rohrleitungen zufließt. *Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph 9 ▪84 Bei einer mit Gleichstrom betriebenen elektrischen Bahn beträgt die Fahrleitungsnennspannung $U_n = 3000$ Volt. An den Stromabnehmern der Triebfahrzeuge muß bei maximaler Strombelastung eine minimale Fahrleitungsspannung von $U_{min} = 2800$ Volt gewährleistet sein. Der Fahrdraht hat einen Querschnitt von $A = 180\ mm^2$ und einen spezifischen Widerstand von $\varrho = 0{,}0178 \frac{\Omega mm^2}{m}$. Die maximale Stromentnahme aus dem Fahrdraht durch das Triebfahrzeug beträgt $I_{max} = 900$ Ampere.



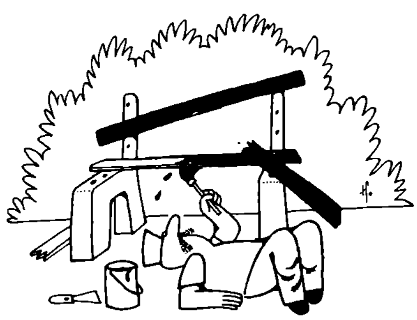

In welchen Abständen $a$ müssen an der Fahrleitung Einspeisungspunkte von den Unterwerken des Bahnkraftwerkes vorgesehen werden, um die minimale Fahrleitungsspannung zu gewährleisten? *Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph 10/12 ▪85 In welcher Höhe muß sich ein Körper über der Erdoberfläche befinden, damit seine Gewichtskraft auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{1000000}$ des Wertes auf der Erdoberfläche abgesunken ist? (Erdradius: 6370 km)



## Chemie

Ch 7 ▪65 Neusilber besteht aus 52% Kupfer, 26% Zink und 22% Nickel. Wieviel Kilogramm von jedem Bestandteil sind in 580 kg der Legierung enthalten?



Ch 8 ▪66 Kalziumcyanamid ($CaCN_2$) findet als wertvolles Düngemittel Verwendung. In den Handel kommt es unter der Bezeichnung Kalkstickstoff.

a) Wieviel Prozent der Elemente sind in diesem Düngemittel enthalten?

b) In der erzeugten Menge Kalkstickstoff im Jahre 1979 sind 16940 t Stickstoff gebunden. Welcher Menge Kalkstickstoff entspricht diese Menge Stickstoff?

Ch 9 ▪67 Für die Bauindustrie soll ein Portlandzement, welcher zu 68% aus Trikalziumsilikat ($Ca_3SiO_5$) besteht, hergestellt werden. Wieviel kg Kalkstein und Sand müssen zur Reaktion gebracht werden, damit 7000 kg dieses Produktes entstehen?

Ch 10/12 ▪68 6 kg einer 35,5%igen Salzsäure sollen mit einer 8,2%igen Salzsäure so verdünnt werden, daß eine 25%ige Säure entsteht. Wieviel kg 8,2%ige Salzsäure müssen zugesetzt werden?

## In eigener Sache

Die Aufgabe 2000 gibt uns Anlaß, einmal all den fleißigen Helfern zu danken, die seit 1967 in mühevoller Kleinarbeit den *alpha*-Wettbewerb in hervorragender Weise unterstützten: Für die Bearbeitung der eingegangenen Aufgaben, ihre Zusammenstellung nach Klassenstufen zeichneten bzw. zeichnen verantwortlich: NPT OStR Dr. R. Lüders, Berlin, Klassenstufe 8 bis 10/12 (1967 bis 1977); OL Dr. W. Fregin, Leipzig, Klassenstufe 8 bis 10/12 (ab 1978); StR Th. Scholl, Berlin, Klassenstufe 5 bis 7 (seit 1967); Mathematikfachlehrer H. Begander, Leipzig (Physik); Diplom-Lehrer Christa Reuter, Erfurt (Chemie). Die Korrektur der rund 750000 Lösungen lag in den Händen von: OStR G. Schulze, Herzberg, Klassenstufe 9 und 10/12 (1967 bis 1977), auch Klassenstufe 8 (1975 bis 1977); Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig, Klassenstufe 7 und 8 (1967 bis 1974); Diplom-Lehrer Christa Döhler und Diplom-Physiker Christian Döhler, beide Leipzig, Klassenstufe 8 bis 10/12 (ab 1978); StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig (Chefredakteur) Klassenstufe 5 und 6 (ab 1967), auch Klassenstufe 7 (ab 1976).

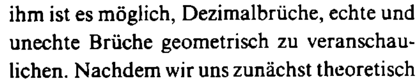
Unser besonderer Dank gilt Wirtschaftskaufmann Rosemarie Schubert (Redaktionsassistent), die die ordnungsgemäße und termingerechte technische Bearbeitung der Lösungen vornahm.

## Ein MMM-Exponat

Unsere Arbeitsgemeinschaft „Praktisches Rechnen" wurde 1978 gegründet. Um die Schüler unserer Schule auf unsere Arbeit aufmerksam zu machen und für sie zu interessieren, beschlossen wir, etwas zu entwickeln und zu bauen, das für unsere Schule einen bleibenden Wert hat. Auf der MMM 1979 stellten wir unser Modell „Der Zahlenstrahl" aus. Mit ihm ist es möglich, Dezimalbrüche, echte und unechte Brüche geometrisch zu veranschaulichen. Nachdem wir uns zunächst theoretisch mit dem Problem beschäftigt hatten, ging es an die praktische Arbeit: Wir stellten eine mit einem Zahlenstrahl versehene Holzleiste (mit eingeschlagenen Nägeln) sowie mit Dezimalzahlen bzw. Brüchen beschriftete Holztäfelchen (mit Loch zum Aufhängen) her.

Uns dient das Modell zur Wiederholung, unseren jüngeren Mitschülern als Anschauungsmittel bei der Arbeit mit dem Stoffgebiet „Gebrochene Zahlen".

*AG-R Diesterweg-OS Geringswalde*



# Ordnung ist das halbe Leben!

*Leseprobe aus:*
*Rund um die Mathematik*

Susi feiert ihren dreizehnten Geburtstag und hat dazu noch vier Freundinnen eingeladen: Inge, Helga, Karin und Dagmar. Beim Kaffeetrinken scherzt man miteinander:

(1) Susi: „Komm du erst mal in meine Jahre, Karin!“

(2) Inge: „Gib doch nicht so an, Susi! Auch wenn du heute Geburtstag hast, fehlen dir immer noch einige Wochen bis zu mir, genau soviel wie mir bis zu Dagmar.“

(3) Karin: „Ich finde, du kannst eigentlich gar nicht mitreden, Helga. Bei euch ist Mathematik doch noch ein Kinderspiel.“

(4) Helga: „Haha, wenn Inge das gesagt hätte, aber du?“

Wir wollen einmal probieren, ob wir aus diesen vier Sätzen die Mädchen nach ihrem Alter ordnen können. Damit wir eine bessere Übersicht behalten, kürzen wir den Namen durch den Anfangsbuchstaben ab, und für „ist älter als“ schreiben wir das Zeichen $>$. Dem ersten Satz können wir entnehmen, daß Susi älter als Karin ist, also kurz:

(1) $S>K$

Satz (2) gibt uns gleich zwei solche Kurz-Zeilen:

(2a) $I>S$

(2b) $D>I$.

Aus Satz (3) können wir erkennen

(3) $K>H$.

Und schließlich zeigt uns Satz (4)

(4) $I>H$.

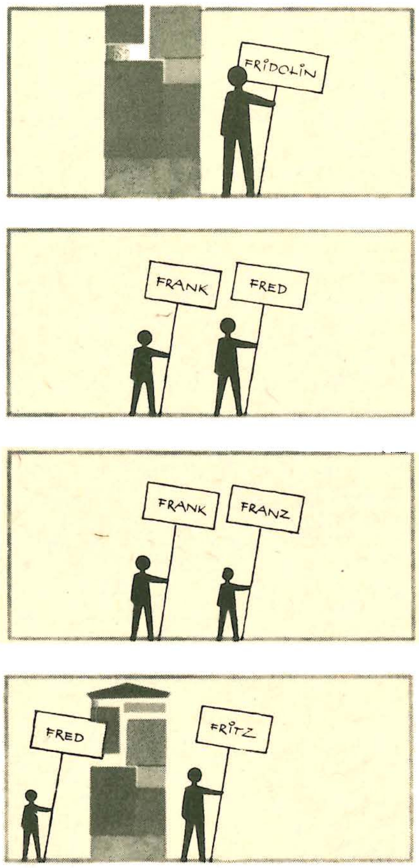
Und nun ist es nicht mehr schwer, die fünf Mädchen dem Alter nach in die richtige Reihenfolge zu bringen:

Offenbar muß diejenige die älteste sein, die in den fünf Zeilen (1) bis (4) niemals rechts steht, denn sie hat dann keine ältere vor sich. Das ist Dagmar. Sie ist nach (2b) älter als Inge; nach (4) und (2a) ist Inge älter als Helga und Susi.

Nach (1) ist Susi älter als Karin, und nach (3) ist Karin wieder älter als Helga. Im ganzen also:

$$D>I>S>K>H.$$

Helga ist also die jüngste. Und das können wir noch überprüfen: H steht in den fünf Zeilen (1) bis (4) niemals auf der linken Seite, Helga ist also nicht älter als irgendeins der anderen vier Mädchen.




Von fünf Jungen haben wir vier Bilder. Leider sind die Jungen auf keinem Bild alle beieinander. Trotzdem kann man die fünf der Größe nach ordnen.

Und nun überlege bitte selbst:

a) Welcher der vier Sätze von Susi, Karin, Helga und Inge war überflüssig?

b) Wenn Karin nichts gesagt hätte, welche Möglichkeiten für die Altersreihenfolge hätten dann bestanden?

Übrigens, wer hat bemerkt, daß wir folgenden Schluß gezogen haben:

„Wenn Dagmar älter als Inge ist und Inge älter als Susi, dann ist Dagmar auch älter als Susi?“

Freilich muß man sich gut überlegen, ob man so schließen darf, denn immer klappt das nicht. Beim Fußball-Toto zum Beispiel kann man damit einen Reinfall erleben. Soll man sich etwa vor dem Spiel Motor Zwickau gegen Lok Stendal für einen Tip entscheiden, so könnte man möglicherweise denken: Stendal hat vor zwei Wochen FC Hansa Rostock geschlagen. Rostock hat vor vier Wochen Zwickau geschlagen, also muß auch Stendal gegen Zwickau siegreich bleiben. Man darf sich nur nicht wundern, wenn Stendal trotzdem verliert, weil hier nicht gilt:

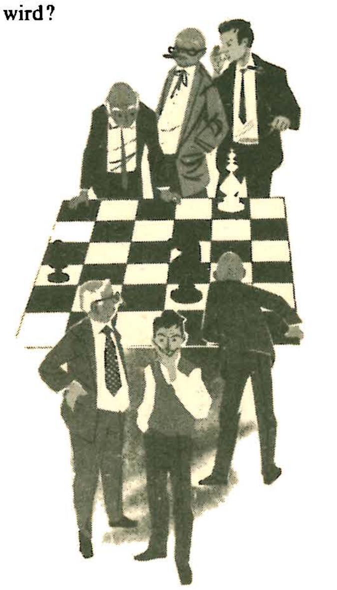
Wenn $A$ vor $B$ und $B$ vor $C$, so auch $A$ vor $C$.

An der folgenden Aufgabe soll jeder allein ein bißchen knobeln.

In einem Schachklub wollen die sechs Spieler Schachner, Schachert, Schachtel, Schachbum, Schachmat und Schachlis versuchen, an einem gemütlichen Abend unter sich ganz zwanglos eine Reihenfolge zu ermitteln. Dazu soll jeder zwei Partien gegen verschiedene Gegner spielen, die unter den übrigen fünf ausgelost werden. Nach einiger Zeit hat sich folgender Spielstand ergeben:

Schachner schlägt Schachtel
und unterliegt Schachlis.
Schachtel schlägt Schachbum
und unterliegt Schachner.
Schachlis schlägt Schachner
und unterliegt Schachert.
Schachbum schlägt Schachmat
und unterliegt Schachtel.

Wie viele Spiele wurden bisher ausgetragen? Wie viele fehlen noch? Bisher stehen vier Spieler punktgleich. Für eine Zwischenwertung will man die Reihenfolge von eins bis sechs nach dem Motto „Wer hat wen besiegt?“ festlegen, also genauso, wie wir vorhin die Mädchen nach dem Alter geordnet haben. Wer belegt nun die Plätze eins bis sechs? Welches Resultat muß sich beim Rest der Spiele ergeben, damit diese Reihenfolge bestätigt wird?




Autorenkollektiv
**Rund um die Mathematik**
160 Seiten, zahlreiche farbige Abb.
Preis 9,80 M, Bestell-Nr. 628 790 1
Der Kinderbuchverlag Berlin
(Mathematische Schülerbücherei Nr. 34)

# Symmetrieeigenschaften von Funktionsgrößen

Ist von dem Graphen einer Funktion bekannt, daß er symmetrisch zur $y$-Achse liegt, so bietet das sicher Vorteile beim Zeichnen des Graphen. Beispiele solcher Funktionen sind $f(x)=x^2$ und $f(x)=x^4$ (Bild 1).

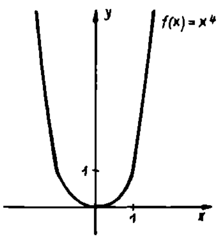



Bild 1

Kann man diese Symmetrieeigenschaft des Graphen einer Funktion formulieren, ohne auf den Graph der Funktion Bezug zu nehmen?

Liegt der Punkt $[x,y]$ auf dem Graphen einer Funktion $f$, und ist der Graph von $f$ symmetrisch zur $y$-Achse, so muß auch das Spiegelbild $[-x,y]$ von $[x,y]$ bezüglich der $y$-Achse auf dem Graphen von $f$ liegen (Bild 2). Bezeichnen wir den Funktionswert an der Stelle $x$ mit $f(x)$, so muß also $f(-x)=f(x)$ gelten, und zwar für beliebiges $x$ aus dem Definitionsbereich von $f$.

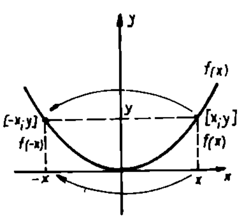



Bild 2

Gilt umgekehrt $f(-x)=f(x)$ für alle $x$ aus dem Definitionsbereich von $f$, so liegt der Graph von $f$ symmetrisch zur $y$-Achse.

Wir kommen nun zu den Ausgangsbeispielen zurück.

$f(x)=x^2$

Für beliebiges $x$ ist

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

$f(x)=x^4$

Für beliebiges $x$ ist

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x).$$

Wir finden damit bestätigt, daß die Graphen der Funktionen $f(x)=x^2$ und $f(x)=x^4$ symmetrisch zur $y$-Achse liegen. Ist $f(x)=x^n$ ($n$ eine natürliche Zahl, $n\geqq 1$), so gilt im Falle gerader $n$ für alle $x$

$$f(-x)=(-x)^n=x^n=f(x).$$

Die Graphen aller Potenzfunktionen mit geradem natürlichem Exponenten liegen symmetrisch zur $y$-Achse. Man nennt deshalb auch eine Funktion $f$ mit der Eigenschaft, daß $f(-x)=f(x)$ für alle $x$ aus dem Definitionsbereich von $x$ gilt, eine *gerade* Funktion.

**Aufgaben**

▲1▲ Untersuche, ob folgende Funktionen gerade sind!

a) $f(x)=x^2+1$

b) $f(x)=|x|$

c) $f(x)=x^2+x$

▲2▲ Für welche Zahlen $m$ und $n$ ist die Funktion $f(x)=mx+n$ eine gerade Funktion?

▲3▲ Für welche Zahlen $a$, $b$ und $c$ ist die Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ eine gerade Funktion?

Wie verhalten sich Potenzfunktionen $f(x)=x^n$ mit ungeradem natürlichem $n$?

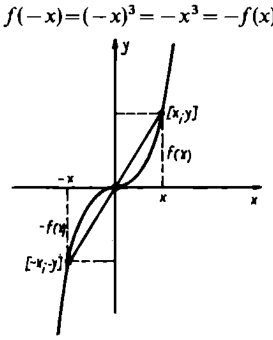
Für alle $x$ gilt

$$f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x).$$

Auch hier liegt eine Symmetrieeigenschaft des Graphen von $f$ vor: mit dem Punkt $[x;y]$ liegt auch der Punkt $[-x;-y]$ auf dem Graphen von $f$. Der Graph von $f$ liegt zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung (Bild 3). Eine solche Funktion nennt man eine *ungerade* Funktion. So ist zum Beispiel die Funktion $f(x)=x^3$ eine ungerade Funktion, denn für alle $x$ gilt

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

Bild 3




▲4▲ Untersuche, ob folgende Funktionen ungerade Funktionen sind!

a) $f(x)=x^3-3x$

b) $f(x)=x^2+x$

c) $f(x)=\frac{1}{x}$

▲5▲ Für welche Zahlen $m$ und $n$ ist die Funktion $f(x)=mx+n$ eine ungerade Funktion?

▲6▲ Für welche Zahlen $a$, $b$, $c$ und $d$ ist die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ eine ungerade Funktion?

▲7▲ a) Beweise!

Ist $f$ eine ungerade Funktion, die an der Stelle $x=0$ definiert ist, so gilt $f(0)=0$.

b) Gibt es Funktionen, die sowohl gerade als auch ungerade (weder gerade noch ungerade) sind?

Aus bekannten Funktionen kann man neue Funktionen zusammensetzen. Sind $f$ und $g$ Funktionen, so verstehen wir unter der Summe der Funktionen $f$ und $g$ jene Funktion $s$, bei der

$$s(x)=f(x)+g(x)$$

für jedes $x$ aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von $f$ und $g$ gilt.

Ist zum Beispiel $f(x)=x^2$ und $g(x)=|x|$, so ist die Summe von $f$ und $g$ die Funktion $s$ mit $s(x)=x^2+|x|$. In diesem Falle ist sowohl $f$ als auch $g$ gerade. Für die Summe $s$ gilt

$$s(-x)=f(-x)+g(-x)=(-x)^2+|-x|$$
$$=x^2+|x|=f(x)+g(x)=s(x)$$

für alle $x$, also ist $s$ ebenfalls eine gerade Funktion.

Diese Aussage können wir verallgemeinern: Sind $f$ und $g$ gerade Funktionen, so ist auch ihre Summe $s$ eine gerade Funktion.

*Beweis:* Für alle $x$ aus dem Definitionsbereich von $s$ gilt

$$s(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=s(x).$$

▲8▲ Beweise!

Sind $f$ und $g$ ungerade Funktionen, so ist auch ihre Summe eine ungerade Funktion.

Analog zur Summe definiert man die Differenz $d$, das Produkt $p$ und den Quotienten $q$ von Funktionen $f$ und $g$. Es ist

$$d(x)=f(x)-g(x)$$
$$p(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ wobei natürlich}$$
$$g(x)\neq 0 \text{ gefordert werden muß).}$$

▲9▲ Untersuche, wie sich die Eigenschaften „gerade“ bzw. „ungerade“ von $f$ und $g$ auf die Funktionen $d$, $p$ und $q$ vererben! Trage deine Ergebnisse in die Tabelle ein!

| $f$ | $g$ | $d$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|
| gerade | gerade | | | |
| gerade | ungerade | | | |
| ungerade | gerade | | | |
| ungerade | ungerade | | | |

Sind $f$ und $g$ Funktionen, und ist der Wertebereich von $f$ im Definitionsbereich von $g$ enthalten, so nennt man die Funktion $v$ mit $v(x)=g(f(x))$ die Verkettung von $f$ und $g$. Ist zum Beispiel $f(x)=x+1$ und $g(x)=x^2$, so ist die Verkettung von $f$ und $g$ die Funktion $v$ mit $v(x)=g(f(x))=(x+1)^2$.

▲10▲ Untersuche, wie sich die Eigenschaften „gerade“ bzw. „ungerade“ von $f$ und $g$ auf die Funktion $v$ vererben!

(Für weitere Überlegungen und Aufgaben dieser Art empfehlen wir das Buch „Funktionen und ihre graphische Darstellung“, Math. Schülerbücherei Nr. 58 von I. M. Gelfand, E. G. Glagolega und E. Schnol. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1971)

**Lösungen**

▲1▲ a) $f(x)=x^2+1$
Für beliebige $x$ gilt $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$ $=f(x)$,
d. h. $f$ ist eine gerade Funktion.
b) $f(x)=|x|$
Für beliebige $x$ gilt $f(-x)=|-x|=|x|$ $=f(x)$, d. h. $f$ ist eine gerade Funktion.
c) $f(x)=x^2+x$
Wegen $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x \neq f(x)$ für $x \neq 0$ ist $f$ keine gerade Funktion.

▲2▲ Es sei $f(x)=mx+n$.
Ist $f$ gerade, so muß $f(-x)=f(x)$ für beliebige $x$ gelten. Aus $f(-x)=f(x)$ folgt $m(-x)+n=mx+n$, also $-mx+n=mx+n$. Gleichwertig damit ist $2mx=0$ für beliebige $x$, woraus $m=0$ folgt.
Damit erhalten wir:
Ist $f$ mit $f(x)=mx+n$ gerade, so gilt $m=0$.
Ist umgekehrt $m=0$, so gilt $f(-x)=m(-x)+n=n=mx+n=f(x)$, d. h. $f$ ist gerade.
*Ergebnis:* Die Funktion $f$ mit $f(x)=mx+n$ ist genau dann gerade, wenn $m=0$ ist.

▲3▲ Es sei $f(x)=ax^2+bx+c$.
Ist $f$ gerade, so gilt $f(-x)=f(x)$ für alle $x$, d. h. $a(-x)^2+b(-x)+c=ax^2+bx+c$ für alle $x$. Daraus folgt $ax^2-bx+c=ax^2+bx+c$, also $2bx=0$ für alle $x$. Folglich ist $b=0$.
Ist andererseits $b=0$, so gilt $f(x)=ax^2+c$ und folglich $f(-x)=a(-x)^2+c=ax^2+c=f(x)$ für beliebige $x$, d. h. $f$ ist gerade.
*Ergebnis:* Die Funktion $f$ mit $f(x)=ax^2+bx+c$ ist genau dann eine gerade Funktion, wenn $b=0$ gilt.

▲4▲ a) $f(x)=x^3-3x$
Für beliebige $x$ gilt
$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x$
$=-(x^3-3x)=-f(x)$,
d. h. $f$ ist eine ungerade Funktion.
b) $f(x)=x^2+x$
Wegen $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x \neq -(x^2+x)$ für $x \neq 0$ ist $f$ keine ungerade Funktion.
c) $f(x)=\frac{1}{x}$
Für alle $x$ mit $x \neq 0$ gilt
$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$,
d. h. $f$ ist eine ungerade Funktion.

▲5▲ Es sei $f(x)=mx+n$.
Ist $f$ ungerade, so gilt $f(-x)=f(x)$ für beliebiges $x$. Für die vorliegende Funktion bedeutet das: $m(-x)+n=-(mx+n)$ bzw. $-mx+n=-mx-n$ für alle $x$. Wir erhalten daraus $2n=0$ und folglich $n=0$.
Ist andererseits $n=0$, so gilt $f(x)=mx$ und deshalb $f(-x)=m(-x)=-mx=-f(x)$ für beliebige $x$, d. h. $f$ ist ungerade.
*Ergebnis:* Die Funktion $f$ mit $f(x)=mx+n$ ist genau dann ungerade, wenn $n=0$ gilt.

▲6▲ Es sei $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
Ist $f$ ungerade, so gilt wegen
$f(-x)=-f(x)$ für alle $x$
$a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d$
$=-(ax^3+bx^2+cx+d)$ bzw.
$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$,
woraus $2bx^2+2d=0$ für alle $x$ folgt. Die letzte Gleichung ist nur dann für beliebige $x$ erfüllt, wenn $b=0$ und $d=0$ gilt.
Ist umgekehrt $b=d=0$, so gilt
$f(x)=ax^3+cx$ und deshalb
$f(-x)=a(-x)^3+c(-x)=-ax^3-cx$
$=-(ax^3+cx)=-f(x)$
für beliebige $x$, d. h. $f$ ist ungerade.
*Ergebnis:* Die Funktion $f$ mit $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ist genau dann ungerade, wenn $b=0$ und $d=0$ gilt.

▲7▲ a) Es sei $f$ eine an der Stelle 0 definierte ungerade Funktion. Da dann $f(-x)=-f(x)$ für alle $x$ aus dem Definitionsbereich von $f$ gilt, ist insbesondere $f(-0)=-f(0)$. Wegen $-0=0$ gilt $f(-0)=f(0)$ und folglich $f(0)=-f(0)$. Wir erhalten daraus $2f(0)=0$, also $f(0)=0$.
b) Nur die „Nullfunktion" $f(x)=0$ für alle $x$ ist sowohl gerade als auch ungerade. Weder gerade noch ungerade ist z. B. die Funktion $y=x+3$.

▲8▲ $f$ und $g$ seien ungerade Funktionen. Für die Summe $s$ gilt dann
$s(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)$
$=-(f(x)+g(x))=-s(x)$
für alle $x$, also ist $s$ ebenfalls ungerade.

▲9▲ Wir erhalten folgende Ergebnisse (G – gerade, U – ungerade):

| $f$ | $g$ | $d$ | $f$ | $g$ | $p$ | $f$ | $g$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G | G | G | G | G | G | G | G | G |
| G | U | / | G | U | U | G | U | U |
| U | G | / | U | G | U | U | G | U |
| U | U | U | U | U | G | U | U | G |

Die Begründungen erfolgen wie bei Aufgabe 8.

▲10▲ Es sei $v$ die Funktion mit $v(x)=g(f(x))$ für alle $x$ aus dem Definitionsbereich von $v$. Dann gilt:
$f$ $g$ $v$

G G G,
denn $v(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=v(x)$.
G U G,
denn $v(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=v(x)$.
U G G,
denn $v(-x)=g(f(-x))$
$=g(-f(x))=g(f(x))=v(x)$.
U U U,
denn $v(-x)=g(f(-x))$
$=g(-f(x))=g(f(x))=-v(x)$.
Beachte! Es gilt sogar allgemeiner: Ist $f$ eine gerade Funktion und $g$ eine beliebige Funktion, so ist $v$ stets eine gerade Funktion.

*W. Stoye*


# Gute Grundkenntnisse gesucht

▲1▲ Kettenaufgabe
a) $75:25\cdot 12:9\cdot 5:10\cdot 6:4\cdot 5=x$
b) $(12+13)\cdot 3+25-98+12-14=x$

▲2▲ Welchen Winkel bilden die Zeiger einer Uhr? Gib in allen Aufgaben jeweils den kleineren der beiden möglichen Winkel an!
24.00 Uhr, 3.30 Uhr, 6.00 Uhr, 23.30 Uhr, 3.00 Uhr, 7.20 Uhr, 10.00 Uhr, 8.40 Uhr.

▲3▲ Löse die Gleichungen!
a) $2b+5=55$; $2(b+5)=50$
$2b-5=55$; $2(b-5)=50$
b) $(42-2):4=x$; $(28-6):2=z$
$15:0-10=y$; $18:1+3=v$

▲4▲ Bestimme $x$!
a) $3x<10$; $x \in N$ $2<x<6$; $x \in N$
b) $x^2=25$ $x \in N$

▲5▲ $a=5$; $b=3$ Berechne: $2a+b^2$!
$a=12$ Berechne: $(a+2)^2$!

▲6▲ Berechne $u$ und $A$ (in mm bzw. $mm^2$)!

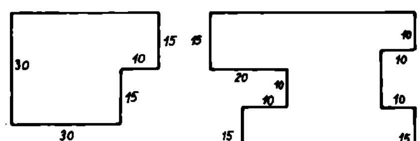



Bild 1a Bild 1b

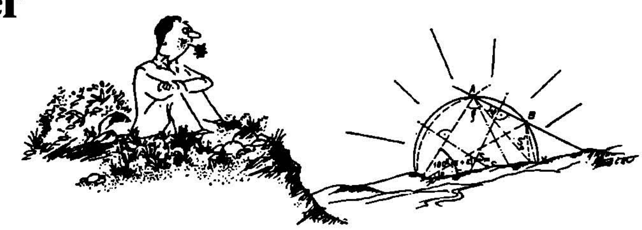
▲7▲ Bestimme den g.g.T. und das k.g.V.!

| g.g.T. | | | k.g.V. |
|---|---|---|---|
| | 10 | 12 | |
| | 16 | 20 | |
| | 25 | 30 | |
| | 6 | 18 | |
| | 15 | 30 | |
| | 8 | 16 | |

▲8▲ Klaus, Uwe, Michael, Hartmut und Lutz wollen wissen, wer von ihnen der Größte und wer der Kleinste ist. Michael ist nicht der Größte, doch er ist größer als Hartmut, Uwe und Klaus. Uwe stellt sich neben Klaus, und so ergibt sich, daß er kleiner ist. Lutz überragt Hartmut um einen ganzen Kopf, jedoch Klaus um etwa 5 cm mehr. Wie ist nun die Reihenfolge der Größe nach?

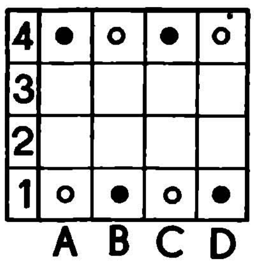
Fortsetzung auf Seite 119

# In freien Stunden • alpha-heiter



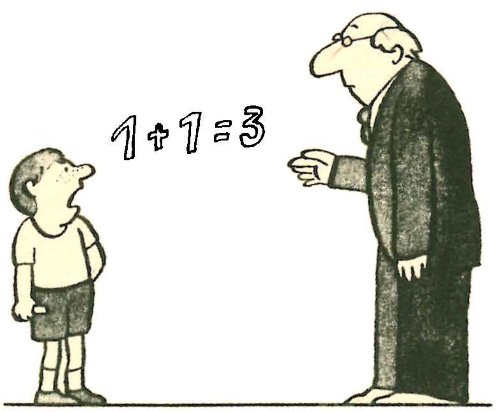
## Remis

Für dieses Spiel zu zweit benötigt ihr vier weiße und vier schwarze Steine sowie 16 Spielfelder, die ihr auf Pappe aufzeichnet. Auf unserem Bild seht ihr die Ausgangsstellung der Steine. Beide Spieler ziehen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe auf ein unbesetztes Nachbarfeld, und zwar senkrecht oder waagerecht, nach oben oder nach unten, aber nicht diagonal.




Wer beginnt, wird durch Los entschieden. Jeder Spieler muß versuchen, drei Steine seiner Farbe nebeneinander oder diagonal in eine Reihe zu bekommen. Die Züge sind möglichst schnell auszuführen. Sicherlich wird einer der Spieler gewinnen, obwohl mit Hilfe eines Computers ermittelt worden ist, daß es bei fehlerfreiem Spiel keinen Gewinner geben kann und das Unentschieden (Remis) unvermeidlich ist.

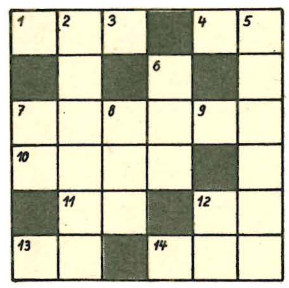
*Aus: NBI, Berlin*




„Es ist nicht einfach für mich, in meinem Alter noch einmal umdenken zu müssen!"

## Kreuzzahlrätsel

*Regeln:* Es sind analog zu Kreuzworträtsel Zahlen einzutragen, so daß in jedem Feld eine Ziffer steht. Ganze Zahlen beginnen stets mit einer Ziffer ungleich Null. Bei Dezimalbrüchen wird das Komma vernachlässigt und je nach Platz die ersten Ziffern, beginnend mit der ersten von Null verschiedenen Ziffer, eingetragen. (Es wird also nicht gerundet.)



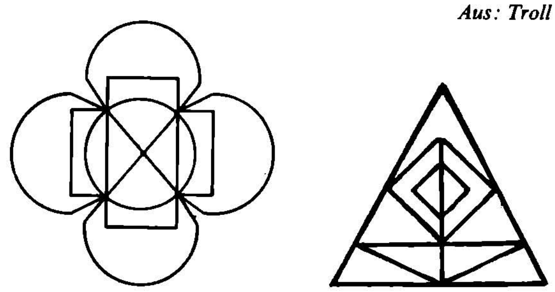

*Waagerecht:* 1. Summe der ersten natürlichen Zahlen bis zu 13. waagerecht; 4. Quadratzahl; 7. Quadratwurzel aus 9. senkrecht; 10. Quadratwurzel aus 11. waagerecht; 11. Dreifaches von 12. waagerecht; 12. Primzahl; 13. Primzahl; 14. Summe einer natürlichen Zahl mit ihrem Quadrat.
*Senkrecht:* 2. Kreiszahl; 3. Primzahl; 5. Potenz von 9. senkrecht; 6. Quadrat von 13. waagerecht; 7. dritte Wurzel von 3. senkrecht; 8. Summe aller Ziffern dieses Rätsels plus 11. waagerecht; 9. natürliche Zahl; 12. Summe zweier Quadrate.

*Dr. A. Felgenhauer, TH Magdeburg*

## In einem Zug

Jede der beiden Figuren läßt sich in einem Zug nachzeichnen, ohne daß Linien doppelt gezogen werden oder sich kreuzen.

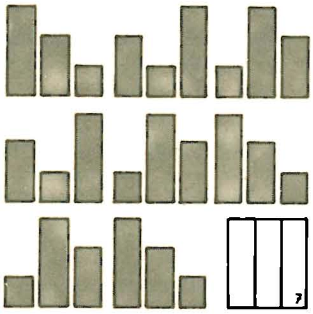
*Aus: Troll*



**Logische Übung**

Bei dieser Übung sind in den beiden oberen Reihen die Figuren in einer gewissen logischen Folge. Es ist die rechte Figur der dritten Reihe sinnvoll zu ergänzen.

*Aus: Füles, Budapest*




**Kryptarithmetik**

| | |
|---|---|
| HÜLLE | A + B = C C |
| + MINE | + – – |
| | C + A = B |
| STIFT | B – C = A |

*Schülerin Ulrike Raddak, Berlin*
*Schüler Rainer Schültke, Dresden (Kl. 5)*

**Diophant (um 250 u. Z.)**

Die Buchstaben in dem Namen des griechischen Mathematikers sind so durch die Ziffern 1 bis 8 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

| | |
|---|---|
| DD · DDD = DIID | DH · DDD = DAAH |
| DI · DDD = DOOI | DA · DDD = DNNA |
| DO · DDD = DPPO | DN · DDD = DTTN |
| DP · DDD = DHHP | DT · DDD = D99T |

*Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

**Heiteres aus der Praxis**

● „Was geschah 1759?“ – „Da wurde Schiller geboren!“ – „Gut! Und 1762?“ – „Da wurde Schiller drei Jahre alt!“

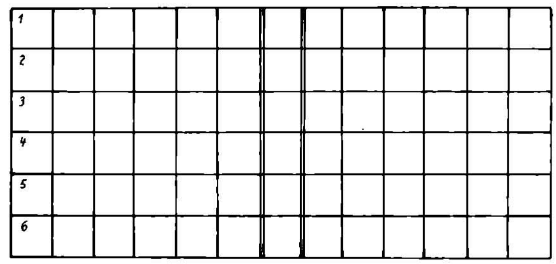
● „Herr Ober, bringen Sie mir bitte ein Eisbein!“ – „Wünschen Sie eins zu drei oder zu fünf Mark?“ – „Was ist denn da für ein Unterschied?“ – „Zwei Mark, mein Herr...“

● Ein Gabrovoer kam in ein Hotel. „Wieviel kostet ein Zimmer?“ fragte er. „Im ersten Stock 10 Lewa, im zweiten 8, im dritten 6 und im vierten 4 Lewa.“ Der Gabrovoer überlegte lange und wollte wieder gehen. „Sind Ihnen die Preise zu hoch?“ – „Nein, das Hotel ist zu niedrig.“

● Hör mal“, sagte ein Junge zu seinem Schwesterchen, „die Hälfte von deiner Apfelsine mußt du mir abgeben!“ – „Warum?“ – „Wenn ich dich nicht am Zopf gezogen hätte, dann hättest du nicht geweint, und Mutti hätte dir keine Apfelsine gegeben.“

**Verkettungsrätsel**

In jeder Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter der folgenden Bedeutung so einzutragen, daß immer der letzte Buchstabe des ersten Wortes mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes übereinstimmt. Bei richtiger Lösung ergeben die sechs markierten Buchstaben von oben nach unten gelesen ein Flächenmaß.

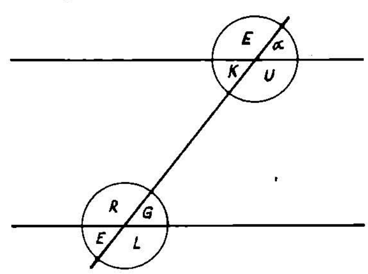



1. Zeile: Name der Funktion dritten Grades – bekannter Mathematiker (1862 bis 1943);
2. Z.: Kegelschnitt – Teil von Größenangaben;
3. Z.: eine Fläche – eine Seite im rechtwinkligen Dreieck;
4. Z.: Ergebnis einer Multiplikation – eine Winkelfunktion;
5. Z.: Teilgebiet der Mathematik – $x$-Achse;
6. Z.: Uranbatterie – ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind.

*Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*

**Auf der Suche nach Winkeln**

Suche entsprechend der Abbildung zu *alpha*




1. den Scheitelwinkel; 2. einen Nebenwinkel; 3. den Stufenwinkel; 4. den Wechselwinkel; 5. den entgegengesetzt liegenden Winkel!
Schreibe die Buchstaben, mit denen diese Winkel bezeichnet sind, in dieser Reihenfolge auf! Du erhältst den Namen eines geometrischen Körpers.

*Oberstudienrat K.-H. Lehmann, Berlin*

**Mütter und Töchter**

Zwei Mütter und zwei ihrer (erwachsenen) Töchter bestellen jede in einer Gaststätte ein Kännchen Kaffee und ein Stück Kuchen. Die Bedienung brachte drei Kännchen und drei Stück Kuchen, und alle waren zufrieden. Wieso genügten drei Portionen?

*Dr. G. Hesse, Radebeul*

# XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 4. Stufe (DDR-Olympiade)

## Aufgaben

**Olympiadeklasse 10**

1. Es seien $a$, $b$, $c$ und $d$ beliebig gegebene reelle Zahlen. $f$ und $g$ seien die für alle reellen $x$ durch

$$f(x)=c\cdot 10^{ax},\ g(x)=10^{bx+d}$$

definierten Funktionen. Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen $a$, $b$, $c$, $d$) alle diejenigen Punkte, die der Graph von $f$ mit dem Graph von $g$ gemeinsam hat!

2. Beweisen Sie, daß die folgende Gleichheit gilt!

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}$$
$$=\frac{1}{234}+\frac{1}{235}+\frac{1}{236}+\ldots+\frac{1}{465}+\frac{1}{466}.$$

3. A. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen $x$, $y$ die Ungleichung

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2(x-y)}$$
$$+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2(x-y)}\geqq 2 \text{ gilt!}$$

3. B. Beweisen Sie, daß es unendlich viele natürliche Zahlen $z$ gibt, für die sich die Gleichung

$$a^{2m}+b^{2n}+c^{2k}=z$$

nicht durch natürliche Zahlen $a$, $b$, $c$, $m$, $n$, $k$ erfüllen läßt!

4. Gegeben seien zwei Längen $a$, $b$ und ein Flächeninhalt $F\leqq\frac{1}{2}ab$. Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten $a$, $b$, $F$ alle diejenigen Längen $r$, die die Eigenschaft haben, daß ein Dreieck $ABC$ mit $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, dem Flächeninhalt $F$ und dem Umkreisradius $r$ existiert!

5. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x$, für die $\sqrt{x^2+5x+28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}$$

erfüllen!

6. Vier Kugeln mit gegebenem Radius $r$ seien so im Raum angeordnet, daß jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt. Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein reguläres Tetraeder. Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von $r$!

**Olympiadeklassen 11/12**

1. Man ermittle alle Paare $(f(x),g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0,$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x=1$, 2, 3 und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.

(2) Wenn $f(1)=0$ oder $f(2)=1$ ist, so ist $g(3)=0$ und $g(4)=1$.

(3) Wenn $f(1)=1$ oder $f(4)=1$ ist, so ist $g(1)=1$ und $g(3)=1$.

(4) Wenn $f(2)=0$ oder $f(4)=0$ ist, so ist $g(2)=0$ und $g(4)=0$.

(5) Wenn $f(3)=1$ oder $f(4)=1$ ist, so ist $g(1)=0$.

2. Es sei $M$ die Menge aller derjenigen Quadratflächen $Q$, die in einer gegebenen Ebene $\varepsilon$ liegen, einen gegebenen Punkt $Z$ der Ebene $\varepsilon$ als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge $a$ als Seitenlänge haben. Für beliebige Quadratflächen $Q$, $Q'$ aus dieser Menge $M$ bezeichne $u\ (Q\cap Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und $Q'$ ergibt. Man untersuche, ob es in $M$ Quadratflächen $Q$, $Q'$ mit kleinstmöglichem $u\ (Q\cap Q')$ gibt. Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von $a$) diesen kleinstmöglichen Wert von $u\,(Q\cap Q')$.

3. Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x,y,z)$ reeller Zahlen, für die

$$2x+x^2y=y,$$
$$2y+y^2z=z,$$
$$2z+z^2x=x \text{ gilt.}$$

Dabei sind $x$, $y$ und $z$ durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, von reellwertigen Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

4. Man beweise, daß es keine natürlichen Zahlen $n$, $m$, $b$ mit $n\geqq 1$, $m\geqq 2$ und

$$(2n)^{2n}-1=b^m \text{ gibt.}$$

5. Man beweise:

Für jede ganze Zahl $n\geqq 2$ und jede ganze Zahl $k\geqq 2$ gilt

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n^k-1}+\frac{1}{n^k}$$
$$>k\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right).$$

6. A. Eine Folge $(x_k)$ reeller Zahlen heiße genau dann $C$-konvergent gegen eine reelle Zahl $z$, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=z \text{ gilt.}$$

Eine Funktion $f$ heiße genau dann $C$-stetig an einer Stelle $a$ ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge $(x_k)$, die $C$-konvergent gegen $a$ ist und deren sämtliche Glieder $x_k$ im Definitionsbereich von $f$ liegen, die Folge $(f(x_k))$ stets $C$-konvergent gegen $f(a)$ ist.

Man zeige:

a) Sind $A$, $B$ und $a$ beliebige reelle Zahlen, so gilt: Die durch $f(x)=Ax+B$ für alle reellen Zahlen $x$ definierte Funktion $f$ ist $C$-stetig an der Stelle $a$.

b) Wenn eine für alle reellen Zahlen $x$ definierte Funktion $f$ an der Stelle $a=0$ den Funktionswert $f(0)=0$ hat und an dieser Stelle $C$-stetig ist, so gilt für beliebige reelle $p$, $q$ die Gleichung $f(p+q)=f(p)+f(q)$.

6. B. In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

5 weiße Handschuhe für die rechte Hand,
5 weiße Handschuhe für die linke Hand,
5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand,
5 schwarze Handschuhe für die linke Hand.

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein „passendes Paar“, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist. Unter einem „Zug“ sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne daß dabei eine Auswahl nach Farbe oder Form möglich ist. Ein „Spiel von $n$ Zügen“ bestehe darin, daß man nacheinander $n$ Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen $n$ Zügen feststellt, ob sich unter den $n$ entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als „erfolgreich“.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl $n$ mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von $n$ Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl $k$ mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von $k$ Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

# Lösungen

**Olympiadeklasse 10**

1. (Bearbeitung des Vorschlages der Aufgabenkommission)
Gegeben sind die reellen Zahlen $a, b, c, d$. Die Graphen von $f$ und $g$ haben genau dann den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(x_0, y_0)$ gemeinsam, wenn

$$y_0 = c \cdot 10^{ax_0} = 10^{bx_0+d} \qquad (1)$$

gilt.

I. (Analyse) Angenommen, es gäbe ein Paar $(x_0, y_0)$, das (1) erfüllt.
Im Fall $c \leqq 0$ ist dies wegen $10^{ax_0} > 0$ und $10^{bx_0+d} > 0$ unmöglich, und somit die Annahme falsch.
Im Fall $c > 0$ existiert $\lg c$, und aus (1) ergibt sich $10^{ax_0+\lg c} = 10^{bx_0+d}$. (2)
Hieraus folgt (wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion)

$$ax_0 + \lg c = bx_0 + d. \qquad (3)$$

Im Unterfall $a \neq b$ folgt weiter

$$x_0 = \frac{d - \lg c}{a - b}, \qquad (4)$$

so daß höchstens das Paar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$ mit $x_0$ aus (4) die Gleichungen (1) erfüllen kann.
Ist aber $a = b$ und auch noch $\lg c \neq d$, so stellt (3) einen Widerspruch dar, d. h., die eingangs gemachte Annahme ist falsch.

II. (Synthese, „Probe") Im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c = d$ ist die Gleichung (2) für beliebiges $x_0$ erfüllt, so daß die Paare $(x_0, y_0)$, $x_0$ beliebig reell und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllen.
Im Fall $c > 0$, $a \neq b$ stellen die Übergänge von der rechten Gleichung (1) über (2), (3) nach (4) äquivalente Umformungen dar, so daß das Paar $(x_0, y_0)$, $x_0$ aus (4) und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllt.

III. Ergebnis: Im Fall $c \leqq 0$ und im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c \neq d$ haben die Graphen von $f$ und $g$ keinen gemeinsamen Punkt.
Im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c = d$ haben die Graphen von $f$ und $g$ die Punkte mit den Koordinatenpaaren $(x, c \cdot 10^{ax})$, $x$ beliebig reell, gemeinsam (die Graphen fallen zusammen).
Im Fall $c > 0$, $a \neq b$ haben die Graphen von $f$ und $g$ genau den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$, $x_0$ aus (4), gemeinsam.
*Bemerkungen:* Mit dieser Aufgabe wurden die Schüler doch nicht so gut fertig, wie man erwarten konnte. Es mußte zwar damit gerechnet werden, daß gelegentlich die Synthese (Probe) ganz fehlte, aber darüber hinaus wurde deutlich – auch in Analogie zu anderen Aufgaben – daß vielfach wohl Unklarheit über den Stellenwert einer solchen „Probe" besteht, sie lediglich als Rechenprobe verstanden wird. Eine Reihe von Punktabzügen mußte erfolgen, weil $\lg c$ ohne Rücksicht auf $c > 0$ gebildet oder, falls man (1) bei $c > 0$ umformt zu $10^{(a-b)x_0} = \frac{10^d}{c}$, aus dieser Gleichung $x_0 = \log_{10^{a-b}}\left(\frac{10^d}{c}\right)$ gefolgert wurde, ohne die Bedingung $a \neq b$ zu stellen, um die Basis 1 für den Logarithmus auszuschließen. Hierdurch entstanden unvollständige Fallunterscheidungen, oder es wurden Umformungen als äquivalent bezeichnet, die keine solchen waren. Leider trat auch häufiger der Fall auf, daß etwa durch $c$ dividiert wurde, ohne $c \neq 0$ vorauszusetzen.
Bei der Korrektur wurde von vornherein ein strenger Maßstab angelegt, auch z. B. auf eine übersichtliche Angabe des Ergebnisses, eine Angabe der Lösungen als Koordinatenpaare geachtet. So ergab sich – wie gesagt etwas überraschend – eine nahezu gleichverteilte Punkteskala:

| Punkte | – | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 2 | 11 | 14 | 15 | 16 | 16 | 33 | 10 |

*Dr. K.-D. Drews, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock*

2. Wir formen die Gleichung in der Aufgabenstellung äquivalent um wie folgt:

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{233} = \frac{2}{234} + \frac{2}{236} + \ldots + \frac{2}{466}$$

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{233} = \frac{1}{117} + \frac{1}{118} + \ldots + \frac{1}{233}$$

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{166} = \frac{2}{118} + \frac{2}{120} + \ldots + \frac{2}{232}$$

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{166} = \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + \ldots + \frac{1}{116}$$

Entsprechend ergeben sich folgende weitere Zwischenergebnisse

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{58} = \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \ldots + \frac{1}{58}$$

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{29}$$

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{14} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{14}$$

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{7}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Die letzte Gleichung ist offensichtlich wahr. Da die Umformungen äquivalent sind, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.
*Bemerkungen:* Der größte Teil der Schüler folgte im wesentlichen dem obigen Lösungsweg. Er bietet sich durch die Form der Gleichung direkt an. Durch ein und denselben Algorithmus kann die Ausgangsgleichung schrittweise in der Anzahl der Summanden reduziert werden. Die Aufgabe war deshalb für die Teilnehmer sehr leicht. Nur wenige vergaßen, bei dem obigen Lösungsweg auf die notwendige Äquivalenz der Umformungen hinzuweisen. – Mit dem gleichen Reduktionsverfahren kann man von der Differenz

$$D = \left(1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{465} - \frac{1}{466}\right) - \left(\frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \ldots + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}\right)$$

ausgehen und erhält $D = 0$. Hier entfällt der Nachweis, daß die Umformungsschritte auch in umgekehrter Folge einander zu Folge haben. Es war zu erwarten, daß einige Teilnehmer eine allgemeine Gesetzmäßigkeit hinter der speziellen Gleichung erkennen.
In der Tat gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$:

$$1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

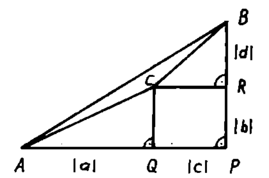
oder kurz, $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$.

Diese Aussage wird mit der Methode der vollständigen Induktion bewiesen. (Dieses mathematische Beweisverfahren ist erst in der 11. Klasse Unterrichtsgegenstand; man kann es sich aber relativ leicht im Selbststudium anhand des Büchleins *J. S. Sominski:* „Die Methode der vollständigen Induktion", Verlag der Wissenschaften (Math. Schülerbücherei Band 8) aneignen.) Da mehr als 10 Schüler derartigen Lösungsgedanken nachgingen, muß hier auf eine namentliche Nennung verzichtet werden.
(In einem speziellen Heft der *alpha* zur XX. OJM (1/81) ist vorgesehen, verschiedene Lösungen zu dieser Aufgabe näher vorzustellen.)

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 4 | 2 | 3 | – | 2 | 1 | 9 | 96 |

*Dr. E. Quaisser, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam*

3. A. Für reelle Zahlen $a, b, c, d$ kann man als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck $APB$ mit Katheten der Längen $\overline{AP} = |a| + |c|$ und $\overline{BP} = |b| + |d|$ betrachten. $Q$ und $R$ seien die Punkte auf den Katheten mit $\overline{AQ} = |a|$ und $\overline{BR} = |d|$. Der Punkt $C$ ergänze das Dreieck $QPR$ zu einem Rechteck (siehe Skizze).




Im Dreieck $ABC$ gilt dann $\overline{AC} + \overline{BC} \geqq \overline{AB}$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich daraus

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$
$$\geqq \sqrt{(|a|+|c|)^2 + (|b|+|d|)^2},$$
$$\geqq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}. \qquad (1)$$

Wählt man entsprechend der Aufgabe
$a = 2\cos x \cos y$, $c = 2 \sin x \sin y$,
$b = d = \sin(x - y)$,
so gilt nach einem Additionstheorem
$a + c = 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$
$= 2\cos(x - y)$
und nach dem trigonometrischen Pythagoras
$(a+c)^2 + (b+d)^2 = 4(\cos^2(x-y)$
$+ \sin^2(x-y)) = 4.$
Durch Einsetzen in (1) erhält man die Behauptung.
*Bemerkungen:* Für die erste Wahlaufgabe entschieden sich 47 Schüler. Neben Lösungen, die Ungleichungen für reelle Zahlen verwenden (z. B. (1)), läßt sich die Ungleichung auch

durch gezieltes Umformen unter Verwendung geeigneter Additionstheoreme nachweisen. Diesen Weg versuchten fast alle Schüler. Es gelang jedoch nur sieben Schülern, das Problem zu vereinfachen, zum Ziel kamen nur zwei. Ein Schüler versuchte eine Lösung mit Hilfe der komplexen Zahlen, die der oben angegebenen geometrischen Interpretation entspricht.

| Punkte | – | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 1 | 36 | 2 | – | 4 | 2 | – | – | 2 |

*Dr. A. Felgenhauer, Technische Hochschule Otto v. Guericke, Magdeburg*

3. B. Da $z$ die Summe dreier Quadratzahlen, nämlich $(a^m)^2+(b^n)^2+(c^k)^2$, sein soll, bietet es sich an, Teilbarkeitsbetrachtungen für solche Zahlen anzustellen. Dabei gelangt man – eventuell nach einigen nicht zum Ziel führenden Versuchen – zur Untersuchung der Restklassen von Quadratzahlen bezüglich 8 und erhält:

Falls $x\equiv 0 \pmod 8$
oder $x\equiv 4 \pmod 8$, so $x^2\equiv 0 \pmod 8$
falls $x\equiv 1 \pmod 8$
oder $x\equiv 3 \pmod 8$
oder $x\equiv 5 \pmod 8$
oder $x\equiv 7 \pmod 8$, so $x^2\equiv 1 \pmod 8$
falls $x\equiv 2 \pmod 8$
oder $x\equiv 6 \pmod 8$, so $x^2\equiv 4 \pmod 8$.

Also können die drei Summanden jeweils nur einen der Reste 0, 1 oder 4 lassen, wenn sie durch 8 dividiert werden. Dann ist aber sofort zu sehen bzw. kann systematisch durchprobiert werden:

$0+0+0=0$
$0+0+1=1$
$0+1+1=2$
$1+1+1=3$
$0+0+4=4$
$0+1+4=5$
$1+1+4=6$, daß die Summe
$(a^m)^2+(b^n)^2+(c^k)^2$

in keinem Fall bei Division durch 8 den Rest 7 lassen kann. Hiermit haben wir bereits unendlich viele Zahlen $z$, nämlich all jene, für die eine natürliche Zahl $z'$ existiert, so daß

$z=8z'+7$ ist, gefunden.

Einem Schüler, *Alexander Schmidt*, der als Frühstarter aus Klasse 8 teilnahm, gelang eine prinzipiell andere Lösung, die wir hier noch anführen möchten:

Angenommen, es existiert eine natürliche Zahl $z_0$ und zu diesem $z_0$ existieren keine natürlichen Zahlen, so daß sich $z_0$ darstellen ließe als

$$z_0=a^{2m}+b^{2n}+c^{2k}. \qquad (*)$$

Dann wird behauptet, daß auch für die Zahl $4z_0$ keine natürlichen Zahlen existieren, so daß sich $4z_0$ in der Form (*) darstellen läßt. Der Beweis dieser Behauptung wird indirekt geführt. Angenommen $4z_0$ ließe sich in der Form (*) darstellen, es existierten also natürliche Zahlen $a_0, b_0, c_0, m_0, n_0, k_0$, so daß

$$4z_0=a_0^{2m_0}+b_0^{2n_0}+c_0^{2k_0} \text{ ist.} \qquad (**)$$

Nun gilt: Ist $x$ eine natürliche Zahl, so ist falls $x\equiv 0 \pmod 4$ oder $x\equiv 2 \pmod 4$,
$x^2\equiv 0 \pmod 4$ und
falls $x\equiv 1 \pmod 4$ oder $x\equiv -1 \pmod 4$,
$x^2\equiv 1 \pmod 4$.

Damit die Summe (**) durch 4 teilbar ist, muß also jede der Zahlen $a_0^{m_0}$, $b_0^{n_0}$, $c_0^{k_0}$ durch 2 teilbar sein. Es sei $a_0^{m_0}=2d$, $b_0^{n_0}=2e$ und $c_0^{k_0}=2f$, dann folgt für die Summe der Quadrate (**):

$4z_0=(2d)^2+(2e)^2+(2f)^2$
$=4(d^2+e^2+f^2)$ bzw. $z_0=d^2+e^2+f^2$

im Widerspruch zur Annahme, daß für $z_0$ keine Darstellung existiert. Da mit $z_0=7$ eine Zahl existiert, die nicht in der Form (*) darstellbar ist, gilt auf Grund der eben bewiesenen Behauptung, daß alle Zahlen der Form

$$z=7\cdot 4^t \quad t=1, 2, 3, \ldots$$

nicht in der Form (*) darstellbar sind.

*Bemerkungen:* Die Aufgabe war für Schüler, die im Rechnen mit Restklassen ungeübt sind, sicher viel schwieriger zu bewältigen als für jene, die den Umgang mit Restklassen schon im Zirkel oder im Selbststudium erlernt hatten. So erklärt sich auch, daß etwa 10 Schüler überhaupt keinen Ansatz zur Lösung fanden. Gehäuft traten Versuche auf zu beweisen, daß, falls ein gewisses $z$ eine Darstellung besitzt, die Zahl $z+1$ oder $z-1$ oder eine sich ähnlich direkt aus $z$ ergebende Zahl keine Darstellung besitzt, wobei von einer gegebenen Darstellung von $z$ durch gewisse $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $m(z)$, $n(z)$, $k(z)$ ausgegangen und übersehen wurde, daß etwa $z+1$ sich mit gänzlich anderen natürlichen Zahlen darstellen lassen kann, die in keiner Weise von $a(z), \ldots, k(z)$ abhängen müssen.

Unter Nutzung der ersten Beweisidee wurde von einer größeren Anzahl von Schülern die Teilbarkeit bzgl. 16 statt der Teilbarkeit bzgl. 8 betrachtet, was mit einem gewissen Mehraufwand selbstverständlich zum selben Ziel wie bei der 8 führte.

*Dr. Monika Noack, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin*

4. Die Lösung zerfällt in zwei Teile. Erstens ist $r$ durch $a$, $b$ und $F$ auszudrücken, und zweitens ist die Existenz eines Dreiecks mit $a$, $b$, $r$ und $F$ nachzuweisen.

I. Angenommen, es existiert ein Dreieck $ABC$ mit $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, dem Flächeninhalt $F$ und dem Umkreisradius $r$. Nun gilt mit $c=\overline{AB}$ und $\gamma=\sphericalangle ACB$: $\sin\gamma=\frac{c}{2r}$ (Bezirksolympiade Aufgabe 191034), $F=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, (1) $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\sin^2\gamma}$ und nach dem Kosinussatz $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ (2).

Damit ergibt sich (3)

$r=c(2\sin\gamma)^{-1}=abc(4F)^{-1}=ab(4F)^{-1}$
$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$
$=ab(4F)^{-1}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2}}$.

II. Wegen $0<F\leqq\frac{1}{2}ab$ ist $a^2b^2>a^2b^2-4F^2\geqq 0$ und

$a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2}\geqq a^2+b^2$
$-2\sqrt{a^2b^2-4F^2}>a^2+b^2-2ab\geqq 0$,

d. h., jeder der in (3) angegebenen $r$-Werte existiert. Da $0\leqq(ab)^{-1}\sqrt{a^2b^2-4F^2}<1$ gilt, existiert ein $\gamma$ mit $0<\gamma<\pi$ und

(4) $\qquad \cos\gamma=\pm(ab)^{-1}\sqrt{a^2b^2-4F^2}$,

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen entsprechend (3) gewählt wird. Hierzu gibt es ein Dreieck $ABC$, in dem (2) mit $c=\overline{AB}$ gilt. Wegen $\sin\gamma>0$ und (4) folgt

$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{1-(ab)^{-2}(a^2b^2-4F^2)}$
$=2F(ab)^{-1}$,

also ist $F=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$. Aus (3), (4) und (2) folgt $r=abc(4F)^{-1}$, d. h., $r$ (mit dem entsprechenden Vorzeichen) ist der Umkreisradius des Dreiecks $ABC$.

Damit haben genau die durch (3) angegebenen Längen $r$ die geforderte Eigenschaft.

*Bemerkungen:* Die Aufgabe erscheint angemessen bis schwer. Mehrere Schüler drückten $r$ nicht durch $a$, $b$ und $F$ aus, sondern hielten ein Ergebnis, in dem $a$, $b$ und eine Winkelfunktion auftraten, für ausreichend. Nur ein Schüler bemerkte, daß die Existenz des Dreiecks $ABC$ mit den Längen $a$, $b$, $r$ und dem Flächeninhalt $F$ nachgewiesen werden mußte. Für diesen Nachweis wurden 2 Punkte erteilt. Ein weiterer typischer Fehler war die fehlende Vorzeichenunterscheidung in (1). Als besonders negativ muß vermerkt werden, daß nur wenige Schüler die Existenz der Wurzeln in (3) absicherten. Dies ist um so bedauerlicher, da die Diskussion praktisch aus dem Ergebnis ablesbar war.

| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 34 | 25 | 22 | 31 | 5 | 0 | 0 |

*Dr. W. Moldenhauer, VEB Kombinat Schiffbau Rostock*

5. Die Lösung zu Aufgabe 5 erscheint in dem Sonderheft: 20 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, alpha 1/81, d. Red.

6. Die vier Mittelpunkte $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ der Kugeln sind die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge $2r$. Es sei $Z$ der Mittelpunkt dieses regulären Tetraeders, d. h. der Schnittpunkt der Lote, die von jeweils einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche gefällt werden. Je ein solches Lot hat nach der Formel für die Höhenlänge im regulären Tetraeder die Länge

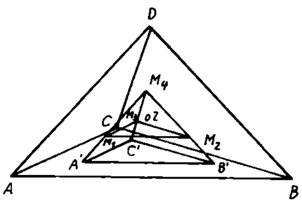
$$h=\frac{2}{3}r\sqrt{6}. \qquad (1)$$

$Z$ teilt jedes Lot im Verhältnis 3 : 1. (2)

Den Satz (2) kann man z. B. über Volumenbetrachtungen (bei Zerlegung des Tetraeders in vier kongruente Tetraeder) oder durch Anwendung des Strahlensatzes beweisen. (Man darf (2) auch als bekannt voraussetzen.)

Die vier Seitenflächen des von den vier Tangentialebenen erzeugten Tetraeders $ABCD$ sind jeweils parallel zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders

$M_1M_2M_3M_4$ im Abstand $r$ (siehe Bild). Damit ist $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit dem Mittelpunkt $Z$. Es kommt nun darauf an, die Höhe $h'$ des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von $h$ zu ermitteln, weil damit dann auch das Volumen $V'$ des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von $h$ und nach (1) in Abhängigkeit von $r$ zu berechnen ist.




Wir geben dafür zwei Möglichkeiten an:

1. $ABCD$ geht durch zentrale Streckung mit dem Streckenzentrum $Z$ aus $M_1M_2M_3M_4$ hervor. Das Streckungsverhältnis $K$ ist wegen (2) (mit (1))

$$K=\left(\frac{1}{6}r\sqrt{6}+r\right):\frac{1}{6}r\sqrt{6}$$

$$K=1+\sqrt{6}. \qquad (3)$$

2. Wir verlängern die Kanten $M_4M_1$, $M_4M_2$, $M_4M_3$ bis zu den Durchstoßpunkten $A'$, $B'$, $C'$ mit der Ebene durch $A$, $B$, $C$ (siehe Bild). Das Tetraeder $M_4A'B'C'$ ist wegen der Parallelität der Ebenen durch $A$, $B$, $C$ bzw. $M_1$, $M_2$, $M_3$ wieder regulär und hat die Höhe $h+r$. Wiederholen wir diesen Prozeß noch dreimal (bzgl. der anderen Flächen), so erhalten wir schließlich das Tetraeder $ABCD$ mit

$$h'=h+4r. \qquad (4)$$

Mit (3) bzw. (4) berechnet man das Volumen

$$V'=\frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3.$$

*Bemerkungen:* Der Punktspiegel besagt, daß es sich um eine für die Schüler schwierige Aufgabe handelte. Damit zeigt diese Aufgabe einmal mehr, daß es selbst sehr guten Schülern schwerfällt, sich Lagebeziehungen im Raum richtig vorzustellen. Die meisten Schüler scheiterten daran, daß sie falsche Beziehungen zu ebenen Problemen herstellten!

So fand sich bei sehr vielen Schülern die falsche Vorstellung, daß die senkrechte Parallelprojektion der drei Kugeln um $M_1$, $M_2$ bzw. $M_3$ in die Ebene (durch $A$, $B$, $C$) Kreise ergibt, die die Seiten $AB$, $BC$, $CA$ berühren! Zum Teil wurde statt (2) das falsche Verhältnis 2 : 1 (aus dem analogen ebenen Sachverhalt) benutzt, es wurde der Schnittwinkel zwischen Ebenen falsch interpretiert und sogar falsche Formeln für das Tetraedervolumen benutzt.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Anzahl | 63 | 6 | 9 | 3 | 5 | 2 | 13 | 16 |

*Dr. H.-J. Sprengel, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam*

# Lösungen

**Lösung zu: Sport frei, Heft 4/80,** S. 87

Aus $s=1980$, $n=9$, $d=1$ folgt

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d],$$

$$1980=\frac{9}{2}\cdot(2a_1+8\cdot 1),$$

$$440=2a_1+8,$$

$$2a_1=432,$$

$$a_1=216.$$

$216+217+218+219+220+221+222+223+224=1980$

(*Aufgabe und Lösung von StR Th. Scholl, Berlin*)

**Lösungen zu: Geometrie pseudoeuklidisch,** Heft 4/80, S. 79

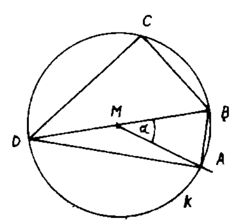
▲1▲ Alle Strecken, die auf Geraden liegen, die zu $e$ oder $f$ parallel sind, haben die Länge Null, da das pseudoeuklidische Quadrat entartet.

▲2▲ Zwei Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ haben die gleiche Länge, wenn $A$ und $B$ auf einer gleichseitigen Hyperbel um $O$ mit den Asymptoten parallel zu $e$ und $f$ liegen.

▲3▲ Wir zeichnen durch alle Punkte des Dreiecks Parallelen zu $e$ und $f$ und erhalten so ein Rechteck, das in vier kleinere zerteilt ist. Jede Dreieckseite ist Diagonale in einem Rechteck der Figur. Die Mittelsenkrechte auf der Dreieckseite ist die zweite Diagonale des gleichen Rechtecks. Der Schnittpunkt $O$ zweier Mittelsenkrechten vergrößert das Muster auf 9 Rechtecke. Mit dem bekannten Satz, daß ein Punkt $P$ genau dann auf der Diagonale eines Rechtecks liegt, wenn die durch die Seitenparallelen durch $P$ erzeugten Nebenrechtecke gleiche Flächen haben, findet man dann, daß durch $M$ auch die dritte Mittelsenkrechte geht.

Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb, Heft 1/80, Fortsetzung:

Ma 10/12 ■1962 Skizze:

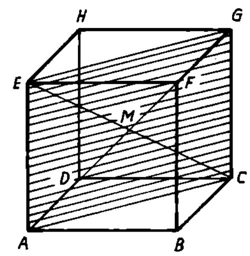



Wenn sich die Längen der Kreisbögen wie 1 : 2 : 3 : 4 verhalten, so stehen die Größen der entsprechenden Zentriwinkel im gleichen Verhältnis.

Bezeichnet man die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$ mit $\alpha$, so betragen die Größen der Winkel $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMD$ bzw. $\sphericalangle DMA$ $2\cdot\alpha$, $3\cdot\alpha$ bzw. $4\cdot\alpha$. Daraus folgt: $\alpha=36°$ und $\overline{BD}$ ist Durchmesser des Umkreises von $ABCD$.

Nun läßt sich das Sehnenviereck $ABCD$ mit den geforderten Eigenschaften konstruieren. Man zeichnet einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und einem Radius der Länge 3 cm. Ein beliebiger Durchmesser liefert die Punkte $D$ und $B$. Nun trägt man in $M$ an $\overline{DB}$ einen Winkel der Größe 36° an, dessen freier Schenkel den Kreis in $A$ schneidet. Der Bogen $AB$ wird auf dem Kreis von $B$ aus zweimal abgetragen; man erhält den Punkt $C$. Man erhält das Sehnenviereck $ABCD$.

Ma 10/12 ■1963 Skizze! Kantenmodell!




Wir betrachten den abgebildeten Würfelschnitt. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\cos\sphericalangle CMG=\frac{\overline{CM}^2+\overline{GM}^2-\overline{CG}^2}{2\cdot\overline{CM}\cdot\overline{GM}}.$$

Die Länge der Raumdiagonalen des Würfels beträgt $a\cdot\sqrt{3}$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\cos\sphericalangle CMG=\frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

$$\cos\sphericalangle CMG=\frac{1}{3}.$$

Die Größe des Winkels $\sphericalangle CMG$, unter dem sich die Raumdiagonalen schneiden, beträgt etwa 70,53°.

Ph 6 ■71 Geg.: Entfernung $s=300\,000$ km

Geschwindigkeit des D-Zuges $v_1=120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Geschwindigkeit des Flugzeuges

$v_2=900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Geschwindigkeit des Raumschiffes

$v_3=8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

Ges.: Die Zeiten $t_1$, $t_2$, $t_3$.

Man rechnet mit der Formel $s=v\cdot t$, also $t=\frac{s}{v}$. Dann erhält man für

$$t_1=\frac{300\,000\text{ km}\cdot\text{h}}{120\text{ km}}=2500\text{ h}\approx 104\text{ d}.$$

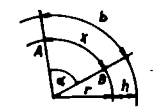
$$t_2=\frac{300\,000\text{ km}\cdot\text{h}}{900\text{ km}}\approx 333\text{ h}\approx 14\text{ d}.$$

$$t_3=\frac{300\,000\text{ km}\cdot\text{s}}{8\text{ km}}=37\,500\text{ s}=625\text{ min}.$$

Das Licht braucht für 300000 km die Zeit von 1 Sekunde, der D-Zug rund 104 Tage, das Flugzeug 14 Tage und das Raumschiff 625 Minuten.

Ph7 ▪72 Höhe $h=16$ km
Erdradius $r=6370$ km
Geschwindigkeit $v=800\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Zeit $t=5$ h

Ges.:
Die Entfernung auf der Erdoberfläche: $x$



Die Länge des Kreisbogens $x$ findet man mit Hilfe der Proportion

$$x:2\pi r=\alpha:360, \quad (1)$$

den Winkel $\alpha$ mit Hilfe der Proportion

$$b:2\pi(r+h)=\alpha:360$$

$$\alpha=\frac{180\cdot b}{\pi(r+h)} \text{ (siehe Bild).} \quad (2)$$

Nach (1) ist dann

$x=\frac{\pi r\alpha}{180}$ und (2) eingesetzt, ergibt

$$x=\frac{\pi r\cdot 180\cdot b}{180\cdot\pi(r+h)},$$

$$x=\frac{br}{r+h}.$$

Nun ist $b=v\cdot t$ und damit ist

$$x=\frac{v\cdot t\cdot r}{r+h},$$

$$x=\frac{800\text{ km}\cdot 5\text{ h}\cdot 6370\text{ km}}{(6370\text{ km}+16\text{ km})\cdot\text{h}},$$

$$x\approx 3990\text{ km}.$$

Die Punkte $A$ und $B$ sind rd. 3990 km voneinander entfernt.

Ph8 ▪73 Geg.: Anfangstemperatur
$\vartheta_1=20\,°\text{C}$
Ringdurchmesser vor dem Erwärmen
$l_0=79{,}97$ mm
Ringdurchmesser nach dem Erwärmen
$l_1=80{,}25$ mm
Ausdehnungskoeffizient $\alpha=0{,}0000117\,\frac{1}{°\text{C}}$

Ges.: Durchmesser des Ringes nach dem Erwärmen: $\vartheta_2$.

Die Endtemperatur $\vartheta_2$ erhält man aus der Temperaturdifferenz nach $\Delta\vartheta=\vartheta_2-\vartheta_1$. Zuerst jedoch ist die Formel für die Längenausdehnung nach $\Delta\vartheta$ aufzulösen.

$$l_1=l_0(1+\alpha\cdot\Delta\vartheta)$$

$$1+\alpha\cdot\Delta\vartheta=\frac{l_1}{l_0}$$

$$\Delta\vartheta=\left(\frac{l_1}{l_0}-1\right)\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$\Delta\vartheta=\frac{l_1-l_0}{l_0}$$

$$\Delta\vartheta=\frac{(80{,}25-79{,}97)\text{ mm}\cdot°\text{C}}{79{,}97\text{ mm}\cdot 0{,}0000117}\approx 299{,}26\,°\text{C}.$$

Nun ist $\Delta\vartheta=\vartheta_2-\vartheta_1$,
also $\vartheta_2=\Delta\vartheta+\vartheta_1$,
und $\vartheta_2=299{,}26\,°\text{C}+20\,°\text{C}\approx 319\,°\text{C}$.

Der Ring muß auf die Temperatur von rd 319 °C erwärmt werden.

Ph9 ▪74 Geg.:
$t_1=0{,}5$ s
$t_2=0{,}3$ s (wegen $\Delta t=|t_1-t_2|=0{,}3$ s)
$g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ges.: $\Delta h$

Bezeichnet man mit $h_1$ den Weg des ersten und mit $h_2$ den Weg des zweiten Tropfens, dann gilt nach der Formel für die beschleunigte Bewegung $s=\frac{1}{2}gt^2$ des freien Falls

$$h_1=\frac{1}{2}gt_1^2 \text{ und } h_2=\frac{1}{2}gt_2^2.$$

Außerdem gilt
$\Delta h=|h_1-h_2|$, daraus folgt

$$\Delta h=\frac{1}{2}g(t_1^2-t_2^2)=\frac{1}{2}g(t_1+t_2)(t_1-t_2),$$

$$\Delta h=\frac{9{,}81\text{ m}\cdot 0{,}8\text{ s}\cdot 0{,}2\text{ s}}{2s^2}$$

$$\Delta h\approx 0{,}78\text{ m}.$$

Der Abstand der zwei Tropfen beträgt rd. 0,78 m.

Ph10/12 ▪75 Geg.:

Radius des Ballons $r=5$ m
Dichte der Luft $\varrho_L=1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Dichte des Wasserstoffs $\varrho_W=0{,}089\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Gesamtmasse $m_1=300$ kg
Fallbeschleunigung $g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ges.: Restauftriebskraft

Bevor die Restauftriebskraft berechnet werden kann, muß die Tragkraft $F$ des Ballons ermittelt werden. Die Auftriebskraft $F_A$ beträgt nach dem Archimedischen Prinzip $F_A=G_0$. Die Tragkraft $F$ des Ballons ist dann gleich dem Gewicht der verdrängten Gasmenge $G_0$ vermindert um das Gesamtgewicht $G$ des Ballons:

$F=G_0-G$. Nun ist (1)

$G_0=m_0\cdot g$ mit $m_0=\varrho_L\cdot V$

und $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, also

$$G_0=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3\cdot\varrho_L\cdot g. \quad (2)$$

Das Gesamtgewicht des Ballons errechnet man aus der gesamten Masse des Ballons. $G=m\cdot g$ mit $m=m_1+m_2$ und $m_2=\varrho_W\cdot V$ (Masse des Füllgases), also

$$G=(m_1+m_2)\cdot g$$

bzw. $$G=\left(m_1+\varrho_W\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\right)g. \quad (3)$$

Jetzt werden (3) und (2) in (1) eingesetzt, und man erhält für die Tragkraft

$$F=G_0-G,$$

$$F=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\varrho_L\cdot g-(m_1+\varrho_W\cdot\frac{4}{3}\pi r^3)g,$$

$$F=\left[\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\varrho_L-m_1-\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\varrho_W\right]\cdot g,$$

$$F=g\left[\frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_L-\varrho_W)-m_1\right],\ F=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\left[\frac{4}{3}\,3{,}14\cdot 125\cdot(1{,}29-0{,}089)-300\right]\text{kg},$$

$$F\approx 3223\text{ N}.$$

Jede Person mit der Masse von 75 kg hat eine Gewichtskraft von

$$G_P=m_p\cdot g,$$

$$G_P=75\text{ kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$G_P\approx 736\text{ N}.$$

Da $3223\text{ N}:736\text{ N}\approx 4$ beträgt, können also 4 Personen mitfahren. Wegen $4\cdot 736\text{ N}=2944\text{ N}$ und $3223\text{ N}-2944\text{ N}=279\text{ N}$ bleibt eine Restauftriebskraft von 279 N ($\approx 28$ kp).

Ch7 ▪57

a) 12 g $m$ Gewichtszunahme
$2Fe+O_2\rightarrow 2FeO$ $15{,}4\text{ g}-12\text{ g}=3{,}4\text{ g}$
112 g 144 g

$$\frac{12\text{ g}}{112\text{ g}}=\frac{m}{144\text{ g}}$$

$$m=\frac{12\text{ g}\cdot 144\text{ g}}{112\text{ g}}=15{,}4\text{ g}$$

b) 12 g $m$
$4Fe+3O_2\rightarrow 2Fe_2O_3$ $17{,}1\text{ g}-12\text{ g}=5{,}1\text{ g}$
224 g 320 g

$$\frac{12\text{ g}}{224\text{ g}}=\frac{m}{320\text{ g}}$$

$$m=\frac{12\text{ g}\cdot 320\text{ g}}{224\text{ g}}=17{,}1\text{ g}$$

c) 12 g $m$
$3Fe+2O_2\rightarrow Fe_3O_4$ $16{,}6\text{ g}-12\text{ g}=4{,}6\text{ g}$
168 g 232 g

$$\frac{12\text{ g}}{168\text{ g}}=\frac{m}{232\text{ g}}$$

$$m=\frac{12\text{ g}\cdot 232\text{ g}}{168\text{ g}}=16{,}6\text{ g}$$

Ch8 ▪58

$m$ 0,47 g
$HCl+AgNO_3\rightarrow AgCl+HNO_3$
36,5 g 143,5 g

$$m=\frac{36{,}5\text{ g}\cdot 0{,}47\text{ g}}{143{,}5\text{ g}}$$

$$m=0{,}12\text{ g}$$

290 cm³ Lösung $\hat{=}$ 29,2 g
15 cm³ $\hat{=}\,x$

$$x=\frac{15\text{ cm}^3\cdot 29{,}2\text{ g}}{290\text{ g}}$$

$$x=1{,}15\text{ g}$$

0,12 g $\hat{=}\,x$%
1,51 g $\hat{=}$ 100%

$$x=\frac{0{,}12\text{ g}\cdot 100\%}{1{,}51\text{ g}}=7{,}94\%$$

Die eingesetzte Lösung von Salzsäure ist 7,94%ig.

Ch9 ▪59

$m_1$ $m_2\cdot 0{,}96$ $m_3\cdot 0{,}89$ 34 l
$2NaCl+2H_2SO_4+MnO_2\rightarrow Cl_2+Na_2SO_4$
117 g 196 g 87 g 22,4 l
$+MnSO_4+2H_2O$

$$\frac{m_1}{117\text{ g}}=\frac{34\text{ l}}{22{,}4\text{ l}}$$

$$m_1=\frac{34\text{ l}\cdot 117\text{ g}}{22{,}4\text{ l}}$$

$$m_1=177{,}6\text{ g}$$

$$\frac{m_2\cdot 0{,}96}{196\text{ g}}=\frac{34\text{ l}}{22{,}4\text{ l}}$$

$$m_2=\frac{34\text{ l}\cdot 196\text{ g}}{22{,}4\text{ l}\cdot 0{,}96}$$

$$m_2=309{,}9\text{ g}$$

$$\frac{m_3\cdot 0{,}89}{87\text{ g}}=\frac{34\text{ l}}{22{,}4\text{ l}}$$

$$m_3=\frac{34\text{ l}\cdot 87\text{ g}}{22{,}4\text{ l}\cdot 0{,}89}$$

$$m_3=148{,}4\text{ g}$$

Zur Bildung von 34 l Chlor sind 177,6 g Kochsalz, 309,9 g Schwefelsäure und 148,4 g Braunstein einzusetzen.

Ch 10/12 ▪60

$m \cdot 0{,}34 \quad 310\,\text{kg} \cdot 0{,}96$

$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$

$73\,\text{g} \quad 111\,\text{g}$

$m = \frac{310\,\text{kg} \cdot 0{,}96 \cdot 73\,\text{g}}{111\,\text{g} \cdot 0{,}34}$

$m = 575{,}6\,\text{kg}$

Es müssen 575,6 kg 34%ige Salzsäure eingesetzt werden.

$m \cdot 0{,}872 \quad 310\,\text{kg} \cdot 0{,}96$

$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$

$100\,\text{g} \quad 111\,\text{g}$

$m = \frac{310\,\text{kg} \cdot 0{,}96 \cdot 100\,\text{g}}{111\,\text{g} \cdot 0{,}872}$

$m = 307{,}5\,\text{kg}$

$m \cdot 0{,}872 \quad 0{,}04 \cdot 310\,\text{kg}$

$CaCO_3 - CaO$

$100\,\text{g} \quad 56\,\text{g}$

$m = \frac{0{,}04 \cdot 310\,\text{kg} \cdot 100\,\text{g}}{56\,\text{g} \cdot 0{,}872}$

$m = 25{,}4\,\text{kg}$

$307{,}5\,\text{kg} + 25{,}4\,\text{kg} = 332{,}9\,\text{kg}$ Kalkstein müssen eingesetzt werden.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb,** Heft 2/80:

Ma 5 ▪1965 Angenommen, der Betonschaft des Fernsehturms hat eine Länge von $x$ Metern; dann ist der Antennenträger $(x-52)$ m lang. Nun gilt

$x + (x-52) = 164,$

$2x = 216$, also $x = 108$.

Der Betonschaft ist 108 m, der Antennenträger 56 m lang.

Ma 5 ▪1966 Wir rechnen $113 - 11 = 102$; $102 : 3 = 34$; $2 \cdot 34 = 68$; $68 + 11 = 79$. Es nahmen 34 Mädchen und 79 Jungen teil. Oder: Es sei $x$ die Anzahl der teilnehmenden Mädchen; dann haben $(2x+11)$ Jungen teilgenommen. Nun gilt

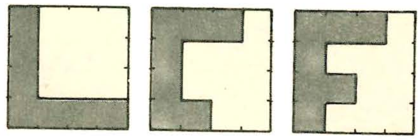
$x + (2x+11) = 113,$

$3x = 102$, also $x = 34$.

Ma 5 ▪1967 Aus c) folgt: Der Schüler Blume hat weder den Vornamen Dieter noch den Vornamen Bruno.
Aus e) folgt: Der Schüler Blume heißt mit Vornamen auch nicht Alfons. Deshalb lautet der volle Name Christoff Blume.
Aus a) folgt: Der Schüler Cramer hat nicht den Vornamen Alfons.
Aus d) folgt: Der Schüler Cramer hat auch nicht den Vornamen Dieter. Da er auch den Vornamen Christoff nicht haben kann, heißt er mit vollem Namen Bruno Cramer.
Aus f) folgt: Der Schüler Decker hat nicht den Vornamen Dieter. Da er auch nicht die Vornamen Christoff oder Bruno haben kann, heißt er mit vollem Namen Alfons Decker. Der vierte Schüler heißt somit Dieter Althoff.
Es seien $a$, $b$, $c$ bzw. $d$ die ganzen Zahlen der Lebensalter von Alfons, Bruno, Christoff bzw. Dieter. Dann gilt nach c) $d < b < c$. Aus b) folgt: $a = b$. Deshalb gilt: $d < a = b < c$.

Ma 5 ▪1968 Addieren wir diese drei Gleichungen, so erhalten wir $2a + 2b + 2c = 1552$ mm, also $a + b + c = 776$ mm. Aus $a + b = 464$ mm und $a + b + c = 776$ mm folgt $c = 312$ mm. Aus $b + c = 563$ mm und $c = 312$ mm folgt $b = 251$ mm. Aus $a + c = 525$ mm und $c = 312$ mm folgt $a = 213$ mm.

Ma 5 ▪1969



a) b) c)

Ma 5 ▪1970 In 1 Stunde befördern 4 Bagger $20 \cdot 18\,\text{m}^3 = 360\,\text{m}^3$ Erde; in 1 Stunde befördert 1 Bagger $360\,\text{m}^3 : 4 = 90\,\text{m}^3$ Erde; in 8 Stunden befördert 1 Bagger $8 \cdot 90\,\text{m}^3 = 720\,\text{m}^3$ Erde.
Nun gilt $144 \cdot 5\,\text{m}^3 = 720\,\text{m}^3$; deshalb können durch einen einzigen Bagger 144 Erdarbeiter ersetzt werden.

Ma 6 ▪1971 Angenommen, an der Hafenrundfahrt nehmen $n$ Männer teil; dann nehmen noch $4 \cdot n$ Frauen und Kinder daran teil, und es gilt $n + 4n = 75$, $5n = 75$, $n = 15$. An der Hafenrundfahrt nehmen also 15 Männer teil. Angenommen, unter den Fahrgästen sind $x$ Frauen, also $5 \cdot x$ Kinder; dann gilt $x + 5x = 60$, $6x = 60$, $x = 10$. An der Hafenrundfahrt nehmen 10 Frauen und 50 Kinder teil.

Ma 6 ▪1972 Angenommen, Katja hat $6n$ Mark eingebracht; dann entfallen auf Erik $3n$ Mark, auf Hagen $2n$ Mark, auf Claudia $(80 - 11n)$ Mark. Nun gilt

$80 - 11n < 35$ und $6n < 35$, also

$45 < 11n$ und $n < 5\frac{5}{6}$, also

$n \geqq 5$ und $n \leqq 5$.

Daraus folgt $n = 5$. Auf Claudia entfallen somit $(80 - 11 \cdot 5)\,\text{M} = 25\,\text{M}$.

Fortsetzung von Seite 111

▲9▲ Von den 100 Schülern der Klassen 1 bis 4 nahmen im letzten Sommer viele an den örtlichen Ferienspielen und am Schwimmlager teil.

- Nur 10 Schüler nahmen an keiner der beiden Möglichkeiten teil.
- 75 Schüler waren Teilnehmer der örtlichen Ferienspiele.
- 83 Schüler waren Teilnehmer am Schwimmlager.

Ermittle die Anzahl der Schüler, die an beiden Möglichkeiten teilnahmen!

▲10▲ Berechne $\alpha$, $\beta$, $\gamma$!

Bild 2a

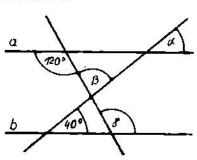
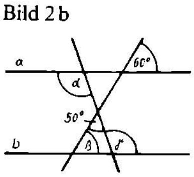



Bild 2b



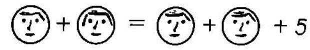

▲11▲ 15 Pferde benötigen für 6 Tage 900 kg Hafer. Wieviel Hafer benötigen 20 Pferde für einen Tag und 1 Pferd für 20 Tage?

▲12▲ Wie alt ist das Mädchen mit dem Mittelscheitel? (obere Gleichung, rechte Seite)

Bild 3

$a - b =$

$b + a = b + b + 5$




*Aus einer Aufgabensammlung (Klasse 6) für tägliche Übungen des Kreises Löbau*

**Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jeger, Zürich,** S. 100

▲1995▲ Das Reflexionsgesetz besagt bekanntlich, daß die Kugel nach dem Stoß unter dem gleichen Winkel von der Kante wegrollt, unter dem sie auf dieselbe aufgetroffen ist. Das bedeutet aber gerade, daß sie sich so bewegt, als würde sie vom Bild des Startpunktes $A$ unter der Geradenspiegelung $\sum_f$ mit der Fixgeraden $f$ herkommen. Setzt man diese Überlegungen fort, so erkennt man, daß die gesuchte Bahn dadurch konstruiert werden kann, daß $A$ nacheinander an den Geraden $f$, $g$ und $h$ gespiegelt und das entstehende Bild geradlinig mit $B$ verbunden wird, wodurch sich zunächst der Berührungspunkt der Kugel mit der Kante $h$ ergibt. Die Konstruktion entnimmt man am besten der Zeichnung. Dort erkennt man auch, daß man die gleiche Lösung etwas platzsparender bekommt, wenn man auch $B$ spiegelt. Auch die Beantwortung der zweiten Frage lesen wir aus der Zeichnung heraus: Die Länge des Rollweges ist gleich $s = \overline{A_3B} = \overline{A_2B_1}$.
(Diese Aufgabe wurde aus einem Originalartikel des Verfassers aus „Didaktik der Mathematik, 3/78, München" entnommen und für die *alpha*-Leser von Dozent Dr. R. Hofmann, Leipzig, bearbeitet.)

**Lösungen zu: Rund um die Mathematik – Ordnung ist das halbe Leben,** S. 109

● a) Helgas Satz ist überflüssig.
b) Drei Möglichkeiten hätten dann bestanden:

D > I > H > S > K

D > I > S > H > K

D > I > S > K > H

Jetzt ist aber Helgas Satz nicht mehr überflüssig.

● Mit dem größten Jungen beginnend: Fritz, Fridolin, Fred, Frank, Franz.

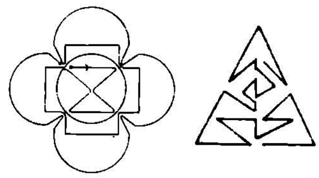
● Bisher wurden fünf Spiele ausgetragen, eins fehlt noch. Bisherige Reihenfolge: Schachert, Schachlis, Schachner, Schachtel, Schachbum, Schachmat. Sie bleibt erhalten, wenn beim Nachholen Schachert gegen Schachmat gewinnt. Verliert er dagegen, stürzt alles zusammen.

**Lösungen zu: alpha-heiter:**

**Kreuzzahlrätsel**

4 3 5 X 8 1 7 1 4 1 X 0
X 1 X 8 X 3 X 5 1 X 1 7
1 4 1 4 2 1 2 9 X 1 3 2

**In einem Zug**



**Logische Übung**

**Kryptarithmetik**

$$\begin{array}{r} 85006 \\ +\ \underline{7136} \\ 92142 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 5 & + & 6 & = & 11 \\ + & & - & & - \\ 1 & + & 5 & = & 6 \\ \hline 6 & - & 1 & = & 5 \end{array}$$

**Diophant (um 250 u. Z.)**

$11 \cdot 111 = 1221$ $15 \cdot 111 = 1665$
$12 \cdot 111 = 1332$ $16 \cdot 111 = 1776$
$13 \cdot 111 = 1443$ $17 \cdot 111 = 1887$
$14 \cdot 111 = 1554$ $18 \cdot 111 = 1998$

**Verkettungsrätsel**

1. Zeile: kubisch – Hilbert;
2. Zeile: Ellipse – Einheit;
3. Zeile: Viereck – Kathete;
4. Zeile: Produkt – Tangente;
5. Zeile: Algebra – Abszisse;
6. Zeile: Reaktor – Rhombus;

*Lösungswort:* Hektar

**Auf der Suche nach Winkeln**

Kegel bzw. Kugel

**Mütter und Töchter**

Die drei Frauen gehörten drei aufeinanderfolgenden Generationen an: Oma, Mutti, Tochter. Die Mütter sind: Oma und Mutti; die zwei Töchter sind: Mutti und Tochter.

**Lösungen zu: Mitgemacht – scharf nachgedacht,** III. U. S.

▲1▲ Das Feld 6-C erfüllt die gestellten Bedingungen.

▲2▲ Unterschiedliche Details: 1. Der Ast über der Dachrinne; 2. ein Blatt der linken Sonnenblume; 3. eine Zaunslatte; 4. ein Zopf des Mädchens; 5. der rechte Strumpf des Mädchens; 6. ihr rechter Arm; 7. das Hemd des Jungen; 8. sein rechtes Hosenbein.

▲3▲ waagerecht: $4 \cdot 3 - 6 = 6$; $2 \cdot 5 - 3 = 7$; $1 + 2 + 1 = 4$.

▲4▲ a) 24,28; b) 5,0; c) 69; d) 67.

▲5▲ Figur B gehört zum Bild ganz links (größer als A, C, D, E).

▲6▲ Die beiden Quadrate 1-C und 4-B stimmen überein.

▲7▲ Bildausschnitte von oben nach unten: 3C, 4F, 9B, 5C, 3E.

**Lösungen zu: Zahlenzauber um das Jahr 1980,** IV. U. S.

*Magisches Quadrat:* In die leeren Felder des magischen Quadrates sind folgende Ziffern einzutragen, und zwar jeweils von links nach rechts:

1. Zeile: 202, 213
2. Zeile: 212, 201
3. Zeile: 205, 207, 218
4. Zeile: 210
5. Zeile: 209, 220
6. Zeile: 206, 219, 208
7. Zeile: 200, 211
8. Zeile: 215, 217, 204
9. Zeile: 216, 203, 214

*Darstellung der Zahl 1980:*

$$1980 = (111 - 1) \cdot (11 - 1 - 1) \cdot (1 + 1)$$
$$1980 = 2222 + 2 - 222 - 22$$
$$1980 = 333 \cdot (3 + 3) - 3 \cdot 3 \cdot \left(3 - \frac{3}{3}\right)$$
$$1980 = \frac{5}{5} \cdot 55 \cdot \left(5 + \frac{5}{5}\right)^{\frac{5 \pm 5}{5}}$$
$$1980 = 6^{\frac{6 \pm 6}{6}} \cdot \left(66 - 6 - 6 + \frac{6}{6}\right)$$
$$1980 = \left(7 + 7 + 7 - \frac{7}{7}\right) \cdot \left[(7 + 7) \cdot 7 + \frac{7}{7}\right]$$
$$1980 = \sqrt{8^8} : \left(\frac{8}{8} + \frac{8}{8}\right) - 8 \cdot 8 - \sqrt{8 + 8}$$
$$1980 = \left(\frac{99}{9} - 9\right) \cdot \left(999 - \frac{9 \cdot 9}{9}\right)$$

*Ein Dreieck* $(1 + \sqrt{9} + 8 + 0)$ *cm:*

Wegen $(1 + \sqrt{9} + 8^0)\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$, $(1 + \sqrt{9} + 8 + 0)\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ und $[(1 \cdot 9 + 8 \cdot 0) + (1 + \sqrt{9} \cdot 8^0)]\,\text{cm} = 13\,\text{cm}$ bilden die Maßzahlen der Seitenlängen dieses Dreiecks ein pythagoreisches Zahlentripel $[5; 12; 13]$, für das $5^2 + 12^2 = 13^2$ gilt. Das vorliegende Dreieck ist somit ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 5 cm und 12 cm und der Hypotenusenlänge 13 cm.

Polygon: $(n - 2) \cdot 180 = 1980$;
$n = 13$.
Das 13-Eck erfüllt die gestellte Bedingung.

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1895 Drei 7. Klassen einer Schule gehören zusammen 89 Schüler an. In Klasse 7a sind zwei Jungen mehr als Mädchen. In Klasse 7b sind sieben Jungen weniger als Mädchen. In Klasse 7c sind zwei Mädchen mehr als Jungen. Jede Klasse hat höchstens 30 Schüler. Wieviel Jungen sind insgesamt in diesen drei Klassen?

Im Heft 2/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Wir stellen folgende Tabelle auf:

| Klasse | Anzahl d. Jungen | Anzahl d. Mädchen |
|---|---|---|
| 7a | $a$ | $a - 2$ |
| 7b | $b$ | $b + 7$ |
| 7c | $c$ | $c + 2$ |
| insges. | $a + b + c$ | $a + b + c + 7$ |

Nun gilt $2 \cdot (a + b + c) + 7 = 89$, $2 \cdot (a + b + c) = 82$, $a + b + c = 41$.

Diesen drei 7. Klassen gehören insgesamt 41 Jungen an.

Wir stellen nun die Lösung von *Kai-Uwe Walter* aus Döbeln vor, der Schüler der Klasse 7R der Clara-Zetkin-Oberschule ist. Kai-Uwe löste diese Aufgabe wie folgt:

In allen drei Klassen sind zusammen 7 Jungen weniger als Mädchen. Angenommen, den drei Klassen gehören $j$ Jungen und $m$ Mädchen an; dann gilt

(1) $j + m = 89$ und
(2) $j + 7 = m$. Aus (1) und (2) folgt
$j + (j + 7) = 89, 2j + 7 = 89, 2j = 82, j = 41.$

In diesen drei Klassen sind insgesamt 41 Jungen.

Wir stellen nun die Lösung von Ralf Arnold aus Eisenach vor, der Schüler der Klasse 7c der 9. POS ist. Ralf löste diese Aufgabe wie folgt:

Da jede Klasse höchstens 30 Schüler hat, läßt sich die Anzahl 89 aller Schüler nur auf genau eine Weise in drei Summanden zerlegen; es gilt $30 + 30 + 29 = 89$. Wegen $2 \mid (29 - 7)$ hat Klasse 7b genau 29 Schüler; zur Klasse 7a und 7c gehören jeweils 30 Schüler. Nun gilt $(30 + 2) : 2 = 16, (29 - 7) : 2 = 11, (30 - 2) : 2 = 14$ und $16 + 11 + 14 = 41$.

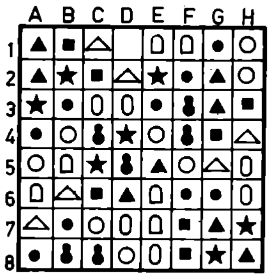
In diesen drei Klassen sind insgesamt 41 Jungen.

Wir stellen nun die Lösung von *Uwe Schwerk* aus Ruthen vor, der Schüler der Klasse 7 der Artur-Becker-Oberschule in Passow ist; Uwe löste diese Aufgabe wie folgt:

In Klasse 7a sind zwei Jungen mehr als Mädchen. In Klasse 7c sind zwei Mädchen mehr als Jungen, also zwei Jungen weniger als Mädchen. In Klasse 7b sind 7 Jungen weniger als Mädchen. Deshalb sind in allen drei Klassen 7 Jungen weniger als Mädchen. Aus $(89 - 7) : 2 = 41$ folgt, daß in diesen drei Klassen insgesamt 41 Jungen sind.

# Mitgemacht – scharf nachgedacht!

▲1▲ Man suche dasjenige Feld des Schachbretts mit einem eingezeichneten Quadrat, in dessen Nachbarschaft – also ringsherum – nur Felder mit unterschiedlichen Bildern zu finden sind.



▲2▲ Die beiden Bilder sehen nur auf den ersten Blick einander ähnlich. In Wirklichkeit unterscheiden sie sich in acht Details. Wer findet sie am schnellsten?

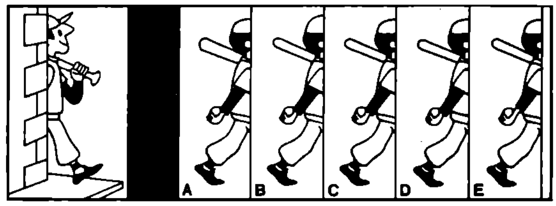
▲3▲ In die leeren Quadrate sind natürliche Zahlen so einzusetzen, daß waagerecht wie senkrecht sinnvolle Aufgaben entstehen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | × | | − | | 6 |
| × | | + | | + | |
| | × | | − | | 7 |
| − | | − | | − | |
| | + | | + | | 4 |
| 7 | | 6 | | 8 | |

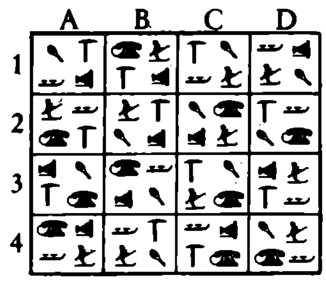
▲4▲ Ergänze die fehlenden Zahlen in den vier Folgen!

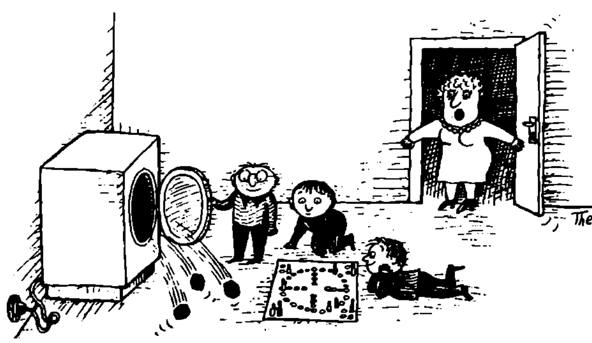
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 8 | 12 | 16 | 20 | ? | ? |
| b) | 25 | 20 | 15 | 10 | ? | ? |
| c) | 4 | 9 | 17 | 35 | ? | 139 |
| d) | 7 | 15 | 32 | ? | 138 | 281 |

▲5▲ Auf dem Bild links verdeckt die Hauswand den Rücken des Mannes. Eine der mit den Buchstaben *A* bis *E* bezeichneten Figuren enthält den „richtigen" Rücken. Welche?

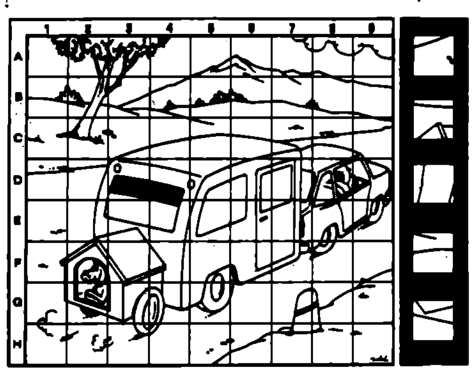



▲6▲ Welches sind die beiden Quadrate, auf denen die gleichen kleinen Bilder wiederzufinden sind?




▲7▲ Die rechts abgebildeten fünf Bildausschnitte stimmen in ihren Einzelheiten mit jeweils einem der durch Buchstaben und Ziffern gekennzeichneten Quadrate des lustigen Campingbildes überein. Mit welchem?



AUFGABE 2000

# Alles dreht sich um die Jahreszahl 1980

Mit dieser Jubiläumsaufgabe stellen wir unseren Lesern Probleme mit zum Teil ähnlichem Inhalt mit steigendem Schwierigkeitsgrad für die Leser der Klassenstufen 4 bis 10/12 sowie für Erwachsene vor.

Wer eine Lösung zu einer seiner Klassenstufe entsprechenden Aufgabe oder einer höheren oder einer höheren Klassenstufe entsprechenden Aufgabe einsendet,
erhält zwei Antwortkarten,
die für den *alpha*-Wettbewert 1980/81 gewertet werden.

Die gestellten Probleme stammen aus der Feder von StR H.-J. Kerber, Neubrandenburg, und StR Th. Scholl, Berlin. Viel Erfolg!

Redaktion *alpha*

**Ma 4 ▪2000** In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} 9{*}{*} \\ +\,{*}8{*} \\ +\,{*}{*}7 \\ \hline 1980 \end{array}$$

ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll der erste Summand möglichst groß, der zweite Summand größer als der dritte sein.

**Ma 5 ▪2000** In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} {*}{*}{*} \\ +\,{*}{*}{*} \\ \hline 1980 \end{array}$$

sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei dürfen aber nur die vier Ziffern 1, 9, 8, 0 der Summe benutzt werden, und der erste Summand darf nicht kleiner sein als der zweite.
Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

**Ma 6 ▪2000** In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} {*}8{*} \\ +\,9{*}{*} \\ +\,{*}{*}0 \\ \hline 1980 \end{array}$$

sind die Sternchen unter Verwendung von nur genau zwei verschiedenen Ziffern so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

**Ma 7 ▪2000** In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} {*}{*}{*}{*}{*} \\ -\,{*}{*}{*}{*} \\ \hline 1980 \end{array}$$

sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Subtraktionsaufgabe entsteht. Dabei dürfen nur drei der vier Ziffern 1, 9, 8, 0 der Differenz benutzt werden, keine von ihnen mehr als dreimal. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

**Ma 8 ▪2000** Olaf und Ute sind Zwillinge. Ihr Vater ist gegenwärtig 28 Jahre alt. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und das der Mutter (in ganzen Zahlen) angeben, multipliziert man die so erhaltene Summe zunächst mit der Zahl, die das Lebensalter von Olaf und danach mit der Zahl, die das Lebensalter von Ute angibt, so erhält man als Ergebnis die Jahreszahl 1980. Wie alt war die Mutter, als die Zwillinge geboren wurden?

**Ma 9 ▪2000** Welche natürlichen Zahlen $a$ erfüllen die Gleichung

$$(a+1)(a+2)(a+a)=1980?$$

**Ma 10/12 ▪2000** Zu ermitteln sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen $p$, für die $p=33p_1$ und $p=2p_2$ gilt. Dabei ist sowohl $p_1$ als auch $p_2$ jeweils das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, und der kleinste Faktor von $p_2$ ist dreimal so groß wie der kleinste Faktor von $p_1$. Matthias löste diese Aufgabe mit Hilfe der Gleichung

$$33n(n+1)(n+2)=2\cdot 3n(3n+1)(3n+2),$$

wobei $n$ eine natürliche Zahl größer als Null ist. Als Lösung fand er $p=1980$. Seine jüngere Schwester Erika löste diese Aufgabe nicht mit Hilfe einer quadratischen Gleichung. Welchen anderen Lösungsweg könnte Erika gefunden haben?

# Zahlenzauber um das Jahr 1980

$1=1^9\cdot 8^0$

$2=1+9-8+0$

$3=1\cdot\sqrt{9}+8\cdot 0$

$4=\sqrt{-1+9+8-0}$

$5=1+\sqrt{9}+8^0$

$6=1-\sqrt{9}+8+0$

$7=-1^9+8+0$

$8=1^9\cdot 8+0$

$9=1\cdot 9+8\cdot 0$

$10=1\cdot 9+8^0$

*Schüler Andreas Fittke, EOS Heinrich Hertz, Berlin*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 226 | 237 | | 259 | 180 | 191 | 248 | | 224 |
| 236 | 247 | | 188 | 190 | | 258 | 223 | 225 |
| | | 253 | 229 | 240 | 251 | | 183 | 194 |
| 256 | 186 | 232 | 199 | | 221 | 197 | 234 | 245 |
| 185 | 196 | 242 | | | 231 | 198 | 244 | 255 |
| 195 | | 243 | | 230 | 241 | | 254 | 184 |
| 246 | 257 | 222 | 189 | | | 187 | 233 | 235 |
| | | 182 | 239 | 250 | 252 | 228 | 193 | |
| | 227 | 192 | 249 | 260 | 181 | 238 | | |

Trage in die leeren Felder des abgebildeten magischen Quadrates die natürlichen Zahlen von 200 bis 220 so ein, daß man in den senkrechten Spalten, in den waagerechten Zeilen und in den Diagonalen als Ergebnis der Addition der entsprechenden Zahlen stets die Summe 1980 erhält!

*Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)*

Die Zahl 1980 ist unter Verwendung von jeweils genau zehnmal der gleichen Ziffer, von Operationszeichen, von Klammern darzustellen!

*Beispiel:* $1980=4^4\cdot(4+4)-44-4\cdot 4-4-4$

Finde Beispiele für die Ziffern 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 und 9!

$1980=0+12^3+45\cdot 6-7-8-\sqrt{9}$

$1980=(-1)\cdot 2+34\cdot 56+78\cdot 9^0$

$1980=-2+345\cdot 6-78-9+0-1$

$1980=345\cdot 6+(7-8)\cdot 90\cdot 1^2$

$1980=(-4+5+6+7+8)\cdot 90\cdot 1^{2^3}$

$1980=(-5)\cdot(67+8-9^0-1)+2345$

$1980=678\cdot\sqrt{9}+0\cdot 1-2\cdot 3\cdot(4+5)$

$1980=(7+89+0+1+2)\cdot(3\sqrt{4}+5+6)$

$1980=89+0\cdot 1-2+3+45\cdot 6\cdot 7$

$1980=901\cdot 2+34\cdot 5-(6-7)\cdot 8$

*Schüler Th. Merten, Stralsund*

$1980 = \mathrm{MCMLXXX}$

$\mathrm{MC}-\mathrm{M}=\mathrm{L}\cdot\mathrm{XX}:\mathrm{X}$

$(\mathrm{MC}-\mathrm{M}):\mathrm{I}=\mathrm{XX}:\mathrm{X}$

$0891:8019=1089:9801$

$1980=44^2+44$

*Ing. H. Decker, Köln*

$1-9+8=0$ $\quad 1=9-8-0$

$1^9=8^0$ $\quad 1=98^0$

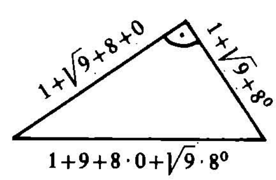
$\lg 1=9\cdot 8\cdot 0$ $\quad \mathrm{ld}\,1+\sqrt{9}=\mathrm{ld}\,8+0$

(ld heißt $\log_2$.) *Dr. S. Schneider, PH Dresden*

Ein Dreieck hat die Seitenlängen $(1+\sqrt{9}+8+0)$ cm, $(1+\sqrt{9}+8^0)$ cm und $[(1\cdot 9+8\cdot 0+(1+\sqrt{9}\cdot 8^0)]$ cm.
Um was für ein spezielles Dreieck handelt es sich in diesem Falle?

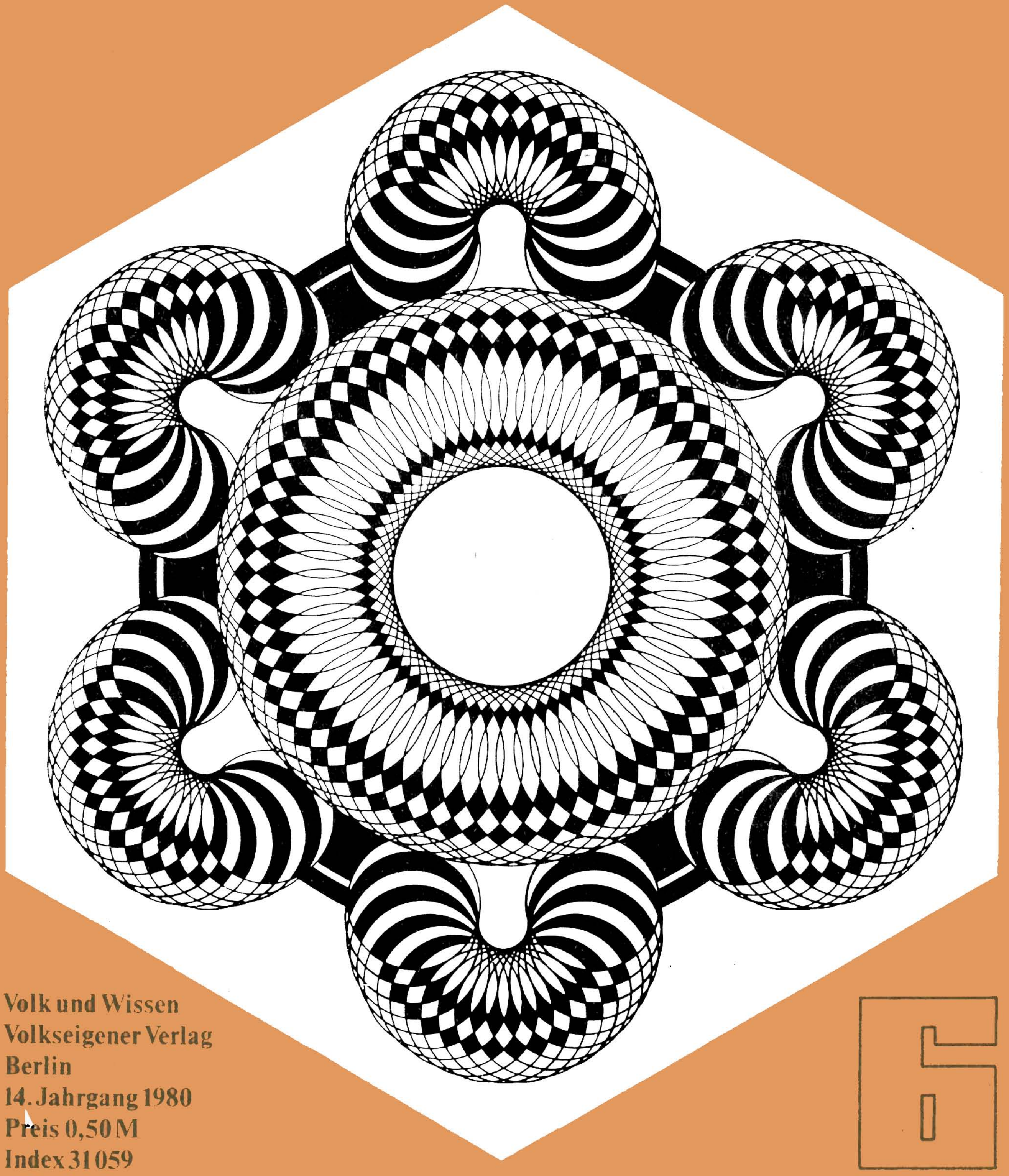
*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Für welches Polygon ist die Winkelsumme gleich 1980? *Johannes Paasonen, Helsinki*



Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1080 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
*Fotos:* H. Büttner, Berlin (S. 130); Schwott, Beograd (S. 130); Archiv Dr. Schreiber, Greifswald (S. 132/33, [3]); G. Stelzer, Greifswald (S. 132); A. Nekrassow, Moskau (S. 134); Zentralbild, Berlin (S. 135); B. Henniger, Berlin (S. 138); Vaclav Johans, Prag (S. 138); Mose, Paris (S. 138); Tscherepanow, Moskau (S. 139). Das Titelblatt zu diesem Heft wurde der Zeitschrift *mathematics in school*, Essex (England), entnommen.
*Titelblatt:* W. Fahr, Berlin
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
*Redaktionsschluß:* 24. Juli 1980

alpha
# Mathematische Schülerzeitschrift

# Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Mit Zirkel, Lineal und Zeichenstift

**Wir bestimmen Funktionswerte und Nullstellen quadratischer Funktionen**

### 1. Problemstellung

Funktionswerte und Nullstellen quadratischer Funktion $f$ mit Gleichungen der Form $y=x^2+px+q$ sollen durch geometrische Konstruktionen mit Hilfe von Zirkel, Lineal und Zeichenstift in einer Ebene bestimmt werden.

### 2. Beispiel

Von der quadratischen Funktion $f$ mit der Gleichung $y=x^2+4x+3$ sind

a) die Funktionswerte an den Stellen $x_1=-5$; $x_2=-2$; $x_3=0{,}5$,

b) eventuell vorhandene Nullstellen $x_{01}$ und $x_{02}$ zu bestimmen.

**Vorbemerkung**

Zur geometrischen Lösung der Beispielaufgabe benötigen wir Strecken, deren Längen (bzgl. einer gewählten Längeneinheit – z.B. 1 cm) die Maßzahlen 1;4; 3; 5; 2 bzw. 0,5 haben.

Wir betrachten unsere Aufgabe als gelöst, wenn es uns gelungen ist, Strecken mit den Längenmaßzahlen $|f(x_1)|$, $|f(x_2)|$, $|f(x_3)|$ und $|x_{01}|$, $|x_{02}|$ zu konstruieren. Aus der Lage der konstruierten Strecken soll dann jeweils das Vorzeichen der Funktionswerte bzw. der Nullstellen abgelesen werden.

**Lösung**

*Bestimmung von Funktionswerten*

Wir fertigen eine Zeichnung gemäß Bild 1 an. (Bild 1)

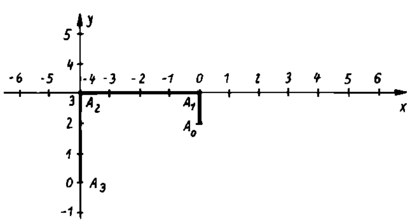
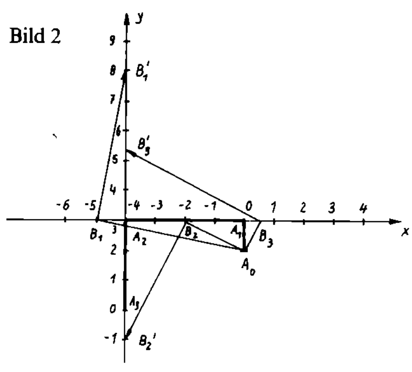



Bild 1

Die Längenmaßzahlen der Strecken $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ betragen 1, 4 bzw. 3. $\sphericalangle A_0A_1A_2$ und $\sphericalangle A_1A_2A_3$ sind beide rechte Winkel. Zum Antragen der $x$-Werte und zum Ablesen der $y$-Werte verwenden wir zwei Skalen, die entsprechend der gewählten Längeneinheit geteilt sind. Die $x$-Skale hat ihren Nullpunkt in $A_1$, die $y$-Skale in $A_3$. Wir tragen nun auf der $x$-Skale einen beliebigen Wert $x_1$ ab und bezeichnen den entsprechenden Punkt mit $B_1$. Den zugehörigen Funktionswert $y_1$ ($y_1=f(x_1)$) erhalten wir auf der $y$-Skale, indem wir auf der Strecke $\overline{A_0B_1}$ in $B_1$ die Senkrechte errichten und deren Schnittpunkt mit der $y$-Skale bestimmen. Bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit $B'_1$, so markiert dieser den Funktionswert $y_1$. (Bild 2)

Bild 2




Aus Bild 2 lesen wir ab:

$y_1=f(-5)=8$; $y_2=f(-2)=-1$; $y_3=f(0{,}5)=5{,}25$.

Die Richtigkeit dieser Ergebnisse können wir leicht durch Einsetzen in die Funktionsgleichung $y=x^2+4x+3$ bestätigen.

Natürlich erhebt sich jetzt die Frage: Erhalten wir so für jeden $x$-Wert den zugehörigen Funktionswert? Wenn ja – auf Grund welcher Gesetzmäßigkeiten?

*Begründung des Verfahrens zur Bestimmung von Funktionswerten*

Unabhängig von der Lage des Punktes $B_1$ gilt $\triangle A_0A_1B_1 \sim \triangle A_2B_1B'_1$. (Die Dreiecke stimmen in ihren Winkeln überein, weil die Schenkel paarweise senkrecht aufeinanderstehen.) Es ist dann

$$\overline{A_0A_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_1} : \overline{A_2B'_1}. \qquad (*)$$

Wir bezeichnen mit $r$ die Maßzahl von $\overline{A_2B'_1}$ und beachten, daß $|(-4)-x_1|$ die Maßzahl von $\overline{A_2B_1}$ ist.

Damit geht die Verhältnisgleichung (*) über in

$$1:|x_1|=|(-4)-x_1|:r. \qquad (**)$$

Bezüglich der Größe von $x_1$ (bzw. der Lage von $B_1$) haben wir folgende Fälle zu unterscheiden: (vgl. Bild 2)

*Fall 1:* $x_1<-4$

Es ist dann $0<-4-x_1$, d.h. $|-4-x_1|=-4-x_1$. Außerdem ist $|x_1|=-x_1$. (**) geht über in

$1:(-x_1)=(-x_1-4):r$

$r=x_1^2+4x_1$.

Wegen $y_1=3+r$ (s. Bild 2) erhalten wir daraus

$y_1=x_1^2+4x_1+3$.

*Fall 2:* $-4<x_1<0$

Es ist dann $-4-x_1<0$, d.h. $|-4-x_1|=-(-4-x_1)=4+x_1$.

Außerdem ist $|x_1|=-x_1$.

(**) geht über in

$1:(-x_1)=(4+x_1):r$

$r=-x_1^2-4x_1$.

Wegen $y_1=3-r$ erhalten wir daraus

$y_1=x_1^2+4x_1+3$.

*Fall 3:* $0<x_1$

Es ist $|x_1|=x_1$ und wegen $x_1>0>-4$ ist $|-4-x_1|=4+x_1$. (**) geht über in

$1:x_1=(x_1+4):r$

$r=x_1^2+4x_1$.

Wegen $y_1=3+r$ erhalten wir daraus

$y_1=x_1^2+4x_1+3$.

*Fall 4:* $x_1=0$

Nach Konstruktion erhalten wir $y_1=3=f(0)$.

*Fall 5:* $x_1=-4$

Nach Konstruktion erhalten wir sofort $y_1=3=f(-4)$.

Für *alle* $x_1\in P$ erhalten wir somit nach unserem Verfahren

$y_1=x_1^2+4x_1+3=f(x_1)$.

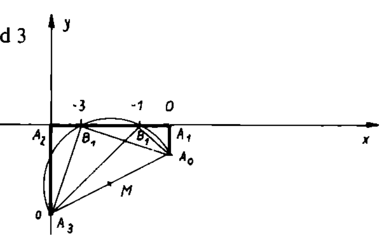
*Bestimmung von Nullstellen*

Wir suchen alle reellen Zahlen $x_0$, für die gilt $f(x_0)=x_0^2+4x_0+3=0$.

Dazu sind alle Punkte $B_1$ auf der $x$-Skale zu konstruieren, denen nach unserem Verfahren als $B'_1$ der Nullpunkt der $y$-Skale zugeordnet wird. Das sind genau die Punkte der $x$-Skale, für die $\sphericalangle A_0B_1A_3$ ein rechter Winkel ist.

Die Menge *aller* Punkte $C$ der Ebene, für die $\sphericalangle A_0CA_3$ ein rechter Winkel ist, ist bekanntlich der Thaleskreis über der Strecke $\overline{A_0A_3}$. Die gesuchten Punkte $B_1$ erhalten wir somit als Schnittpunkte des Thaleskreises über $\overline{A_0A_3}$ mit der $x$-Skale. In unserem Beispiel finden wir die Nullstellen $-3$ und $-1$. (Bild 3)

Bild 3




### 3. Allgemeines Konstruktionsverfahren

Die Funktionswerte und die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f$ mit der Gleichung

$y=x^2+px+q$ lassen sich mit Hilfe von Zirkel und Lineal folgendermaßen finden:

In der Ebene konstruieren wir zwei senkrecht aufeinanderstehende orientierte Geraden und bezeichnen sie – nach Wahl einer gemeinsamen Längeneinheit – als $x$-Skale bzw. als $y$-Skale. Den Schnittpunkt beider Skalen nennen wir $A_2$.

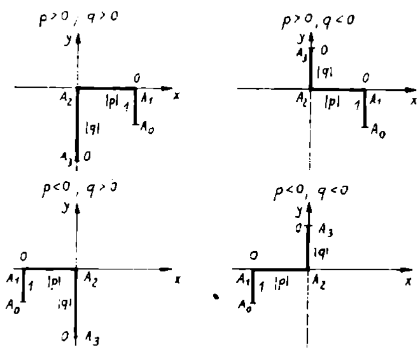
Auf der $x$-Skale tragen wir von $A_2$ aus die Strecke $\overline{A_2A_1}$ mit der Längenmaßzahl $|p|$ ab, und zwar für $p>0$ in positiver Richtung und für $p<0$ in negativer Richtung der $x$-Skale. Wir erhalten den Punkt $A_1$; diesen verwenden wir als Nullpunkt der entsprechend der gewählten Längeneinheit geteilten $x$-Skale.

Auf der $y$-Skale tragen wir von $A_2$ aus die Strecke $\overline{A_2A_3}$ mit der Längenmaßzahl $|q|$ ab, und zwar für $q>0$ in negativer Richtung und für $q<0$ in positiver Richtung der $y$-Skale. Den so gefundenen Punkt $A_3$ wählen wir als Nullpunkt der entsprechend der gewählten Längeneinheit geteilten $y$-Skale.

Senkrecht zur $x$-Skale tragen wir in $A_1$ die Strecke $A_1A_0$ mit der Längenmaßzahl 1 in negativer Richtung der $y$-Skale an und erhalten den Punkt $A_0$.

Bild 4 veranschaulicht für $p\neq 0$ und $q\neq 0$ die Lage der Skalen und Strecken.

Bild 4




Tragen wir nun auf der $x$-Skale einen beliebigen Wert $x_1$ ab und bezeichnen den entsprechenden Punkt mit $B_1$, so finden wir den zugehörigen Funktionswert $y_1$ auf der $y$-Skale, indem wir auf der Strecke $\overline{A_0B_1}$ in $B_1$ die Senkrechte errichten und deren Schnittpunkt mit der $y$-Achse bestimmen. Bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit $B'_1$ und die Maßzahl der Länge von $\overline{A_3B'_1}$ mit $y$, so gilt $y_1=x_1{}^2+px_1+q=f(x_1)$. (Da $\overline{A_0B_1}$ für alle $B_1$ nicht parallel zur $x$-Skale verläuft, existiert $B'_1$ stets und ist eindeutig bestimmt.)

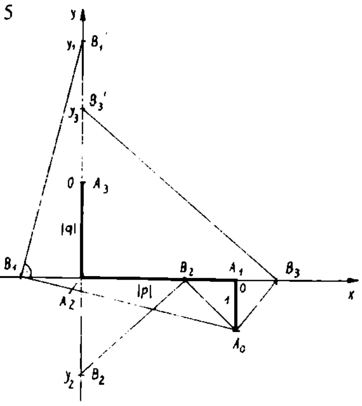
Für den Fall $p>0$; $q<0$ soll nun bewiesen werden, daß unser Verfahren für alle $x\in P$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ liefert.

In diesem Fall ist $|p|=p$ und $|q|=-q$.

Unabhängig von der Lage von $B_1$ ist $\triangle A_0A_1B_1 \sim \triangle A_2B_1B'_1$. Demnach gilt $\overline{A_0A_1}:\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_1}:\overline{A_2B'_1}$. Wir bezeichnen mit $r$ die Maßzahl von $\overline{A_2B'_1}$; die Maßzahl von $\overline{A_2B_1}$ ist $|-p-x_1|$. Damit erhalten wir die Verhältnisgleichung

$1:|x_1|=|-p-x_1|:r.$ (***)

Bild 5



*Fall 1:* $x_1<-p$

Es ist $-p-x_1>0$ und $x_1<0$. (***) geht über in $1:(-x_1)=(-p-x_1):r$. Daraus folgt $r=x_1{}^2+px_1$ und wegen $y=r-|q|=r+q$ (Bild 5) ist schließlich $y=x_1{}^2+px_1+q$.

*Fall 2:* $-p<x_1<0$

Es ist $-p-x_1<0$. (***) geht über in $1:(-x_1)=(p+x_1):r$.

Daraus folgt $r=-x_1{}^2-px_1$ und wegen $y=-(r+|q|)=-r+q$ ist schließlich $y=x_1{}^2+px_1+q$.

*Fall 3:* $x_1>0$

Es ist $-p-x_1<0(x_1>0>-p)$. (***) geht über in $1:x_1=(p+x_1):r$. Daraus folgt $r=x_1{}^2+px_1$ und wegen $y=r-|q|=r+q$ ist schließlich $y=x_1{}^2+px_1+q$.

*Fall 4:* $x_1=0$

Wir erhalten sofort $y=-|q|=q=f(0)$.

*Fall 5:* $x_1=-p$

Wir erhalten sofort $y=-|q|=q=f(-p)$.

Im Fall $p>0$, $q<0$ erhalten wir also nach unserem Verfahren für alle $x_1\in P$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x_1)$.

**Aufgaben**

▲1▲ Führen Sie für die übrigen Fälle (Bild 4) jeweils den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens!

▲2▲ Ist das Konstruktionsverfahren auch dann anwendbar, wenn $p=0$ oder $q=0$ ist?

▲3▲ Bestimmen Sie mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens die Funktionswerte der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y=x^2-5x-2$ an den Stellen $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=6$!

▲4▲ Beweisen Sie! Besitzt die quadratische Funktion mit der Gleichung $y=x^2+px+q$ Nullstellen, so erhalten wir diese, indem wir die Schnittpunkte des Thaleskreises über der Strecke $\overline{A_0A_3}$ mit der $x$-Skale bestimmen.

▲5▲ Zeigen Sie mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens, daß es für $q<0$ stets zwei Nullstellen $x_{01}$ und $x_{02}$ mit unterschiedlichen Vorzeichen gibt und daß $x_{01}+x_{02}=-p$ ist!

▲6▲ Untersuchen Sie für $q>0$ die Anzahl der Nullstellen!

*U. Sonnemann*

## ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

# Pokal-Wettkampf in Berlin-Lichtenberg

Seit dem Jahre 1966 – allerdings mit einer Unterbrechung – führen wir in unserem Stadtbezirk neben der Mathematik-Olympiade einen weiteren Wettbewerb auf mathematischem Gebiet durch. Er ist in seinem Aufbau dem Europapokal-Wettbewerb der Leichtathleten vergleichbar. Es geht auch um einen von der FDJ-Kreisleitung gestifteten Pokal, der die Gestalt eines Ikosaeders hat.

Während bei der Olympiade die Einzelleistung im Vordergrund steht, geht es hier um mannschaftliche Geschlossenheit und Ausgeglichenheit. Jede teilnehmende Schule stellt eine Mannschaft, die aus je einem Schüler der Klassen 4 bis 9 besteht, also sechs Teilnehmer umfaßt. Jeder Teilnehmer hat innerhalb von zwei Stunden zwei Aufgaben zu lösen. Die Bedingungen entsprechen denen der Olympiade. Die Lösungen werden mit Punkten bewertet. Insgesamt kann jeder Teilnehmer 15 Punkte erreichen. Innerhalb der einzelnen Klassen ergibt sich aus den Punktzahlen eine Rangfolge. Jedem Teilnehmer wird so eine Platzziffer zugeordnet. Die sechs Platzziffern der Schule werden addiert, und die Schule mit der niedrigsten Summe ist Sieger. Sie erhält für ein Jahr den Pokal. Auf einer seiner Flächen werden der Name der Schule und das Schuljahr eingraviert. Mit den Mitgliedern der drei erfolgreichsten Mannschaften wird eine Exkursion oder ein Theaterbesuch durchgeführt.

Dieser Wettbewerb erfreut sich großer Beliebtheit. Im Schuljahr 1979/80 nahmen 36 der 42 zehnklassigen Oberschulen unseres Stadtbezirks teil. Wir führten daher eine Vorrunde durch, und aus jeder der 6 Gruppen gelangten die beiden besten Mannschaften in die Endrunde.

Die Aufgaben werden von der Fachkommission zusammengestellt. Wir benutzen dabei Aufgaben aus der *alpha*, aus früheren Olympiaden und auch aus Büchern, bilden jedoch einen Teil der Aufgaben auch selbst.
Im folgenden seien einige Aufgaben aus dem diesjährigen Wettbewerb vorgestellt.

## Aufgaben (Mathematik-Cup 1980)

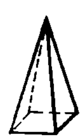
**Klasse 4 – Vorrunde**

▲1▲ Setze in jeder Zeile zwischen die Zahlen Rechenzeichen (in jeder Zeile 3 Zeichen) so ein, daß das angegebene Ergebnis entsteht!

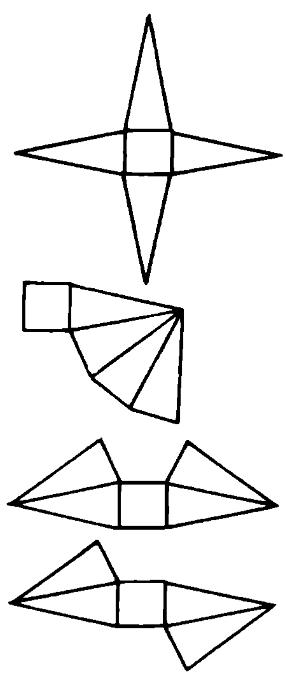
a) 1 2 3 4 = 1
b) 1 2 3 4 = 2
c) 1 2 3 4 = 3
d) 1 2 3 4 = 24

▲2▲ Jens möchte aus Papier eine pyramidenförmige Turmspitze bauen. Sie ist in Bild 1 dargestellt.
Dafür stehen ihm vier Netze zur Verfügung (Bild 2).
Gib für jedes dieser Netze (durch „ja“ oder „nein“) an, ob sich diese Figur daraus bauen läßt!
In den Fällen, bei denen das möglich ist, bezeichne diejenigen Kantenpaare, die beim Zusammenbau aneinanderstoßen, mit der gleichen Farbe oder mit dem gleichen Buchstaben!

Bild der Turmspitze (Bild 1):



Netze (Bild 2):



**Klasse 4 – Endrunde**

▲1▲ Erik denkt sich eine zweistellige Zahl. Wenn man die Hälfte dieser Zahl mit sich selbst multipliziert, dann erhält man dasselbe, als wenn man die Ziffern der gedachten Zahl vertauscht.
Welche Zahl hat Erik sich gedacht?

▲2▲ Zeichne auf Papier mit quadratischen Kästchen vier Rechtecke, jedes davon 6 Kästchen breit und 4 Kästchen lang!
Jedes dieser vier Rechtecke soll in Quadrate zerlegt werden, und zwar das erste in 3, das zweite in 6, das dritte in 8 und das vierte in 10 Quadrate. Dabei sollen die Trennungslinien entlang der Ränder der Kästchen verlaufen, also kein Kästchen kreuzen.
Trage in deine Zeichnung eine solche Zerlegung ein!

**Klasse 5**

▲1▲ An die Tafel ist eine bestimmte Anzahl von Vierecken gezeichnet. Über sie ist folgendes bekannt:
(1) Unter diesen Vierecken ist genau ein Quadrat.
(2) Genau vier dieser Vierecke sind Parallelogramme.
(3) Ein Drittel der Vierecke sind Rechtecke.
(4) Die Gesamtzahl der Vierecke ist eine ungerade Zahl.
Wieviel Vierecke sind an die Tafel gezeichnet?

**Klasse 6**

▲1▲ Gibt es einen Bruch mit dem Nenner 20, der größer ist als $\frac{4}{13}$ und kleiner ist als $\frac{5}{13}$?

▲2▲ a) Entscheide, ob es Dreiecke gibt, in denen zwei der Winkelhalbierenden senkrecht zueinander stehen! (Beweise deine Aussage!)
b) Entscheide, ob es Dreiecke gibt, in denen zwei der Winkelhalbierenden gleich lang sind! Beweise deine Aussage!

**Klasse 7**

▲1▲ Ihr habt vor euch 7 Zeilen mit Ziffern:
1 2 3 = 1
1 2 3 4 = 1
...
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Aus jeder dieser Zeilen soll eine wahre Aussage hergestellt werden. Dazu ist gestattet,
- zwischen Ziffern eines der Rechenzeichen „+“, „−“, „·“ oder „:“ einzufügen,
- Klammern einzusetzen,
- zwischen Ziffern kein Zeichen einzufügen und sie so als mehrstellige Zahlen aufzufassen.

Es ist nicht gestattet,
- die Reihenfolge der Ziffern zu ändern,
- das Gleichheitszeichen durchzustreichen.
Für jede Zeile ist ein Beispiel anzugeben; eine Begründung wird nicht gefordert.

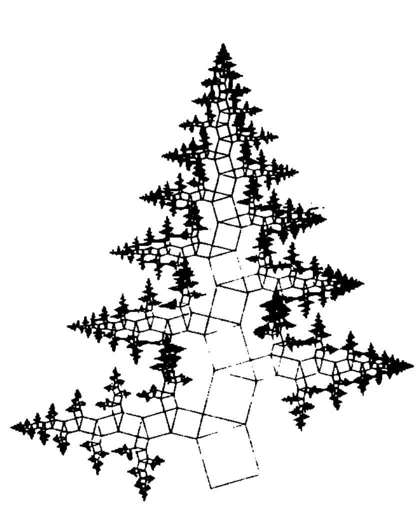
▲2▲ Entscheide für jeden der drei angegebenen Fälle a), b), und c), ob die von beiden (richtig) gezeichneten Dreiecke kongruent zueinander sein müssen oder nicht!
a) Richard und Isolde zeichnen unabhängig voneinander je ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von 45° und einer Basis, die 8 cm lang ist.
b) Ludwig und Leonore zeichnen unabhängig voneinander je ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von 90° und einer Basis, die 8 cm lang ist.
c) Wolfgang und Susanne zeichnen unabhängig voneinander je ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von 60°, in dem eine Seite 8 cm lang ist.
Begründe deine Entscheidungen!


**Klasse 8**

▲1▲ Von einem Drachenviereck *ABCD* sei bekannt:
(1) Seine Diagonalen sind gleich lang.
(2) Eine Seite des Drachenvierecks hat die gleiche Länge wie eine der Diagonalen.
Berechne die Größe jedes der vier Innenwinkel dieses Drachenvierecks!

*K. Lehmann*

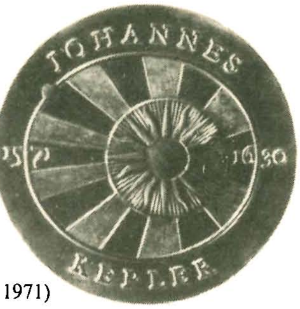
Lösungen siehe Heft 1/81.



*Aus: Pythagoras, Niederlande*

# Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker

## Teil 2



Kepler-Gedenkmünze (DDR 1971)

Kepler schloß aus der Tatsache, daß es nur fünf reguläre Polyeder gibt, nicht auf das Nichtvorhandensein weiterer Planeten, sondern äußerte schon 1596, daß es zwischen Mars und Jupiter noch einen Planeten geben könne. Bekanntlich gibt es zwischen Mars und Jupiter einen ganzen Gürtel jedoch sehr kleiner Planeten (Planetoiden genannt).
Die Geschichte der Entdeckung des ersten Planetoiden sei kurz erzählt: In der Neujahrsnacht des Jahres 1801 entdeckte der in Palermo tätige Astronom Guiseppe Piazzi (1746 bis 1826) im Sternbild Stier ein Objekt 8. Größe, das seinen Ort am Sternenhimmel beträchtlich veränderte und das er zunächst für einen Kometen hielt. Vom Berliner Astronomen Bode (1747 bis 1826) wurde es später als Planet erkannt und Ceres benannt. Piazzi beobachtete die Ceres nur 41 Tage bis Mitte Februar. Der kleine Planet (er hat einen Durchmesser von 768 km) mit seiner verhältnismäßig geringen Helligkeit ging verloren und war nicht mehr zu finden. Es galt, die Bahn der Ceres aus den wenigen von Piazzi gefundenen Beobachtungsdaten zu berechnen. Mehrere Astronomen begannen mit der Bahnberechnung. Die bisher angewandten Methoden gestatteten jedoch nicht eine vollständige Bestimmung der Bahn aus Beobachtungen, die einen kürzeren Zeitraum umfaßten. Nachdem Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) durch die Zeitschrift „Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ von dem Problem erfahren hatte, machte er sich im Herbst 1801 an die Bahnberechnungen. Gauß entwickelte dabei ganz neue Methoden zur Bestimmung einer Keplerbahn aus wenigen Beobachtungen und konnte auf Grund der Piazzischen Beobachtungen die Bahn der Ceres tatsächlich berechnen und damit die Wiederauffindung des Objekts ermöglichen. Ein Jahr nach der Entdeckung fand dann Olbers (1758 bis 1840) in Bremen den ersten der in der Folgezeit entdeckten vielen Planetoiden, die sich auf elliptischen Bahnen zwischen den Bahnen des Mars und des Jupiter um die Sonne bewegen, genau an dem Ort des Himmels wieder, an dem Gauß' Berechnung dies vorausgesagt hatte.
Es sei bemerkt, daß die anderen heute bekannten Planeten 1781 (Uranus durch W. Herschel), 1846 (Neptun durch Galle nach Berechnungen von Leverrier) und 1930 (Pluto durch Tombaugh) entdeckt worden sind, während die mit bloßem Auge sichtbaren Planeten von Merkur bis Saturn bereits im Altertum bekannt waren.

### Wandel des Weltbildes

Euklids rund 300 Jahre vor dem Beginn unserer Zeitrechnung geschriebenes Buch „Elemente“ war ein Höhepunkt des geometrischen Denkens in der Antike. Die „Elemente“ wurden in der Folgezeit zum Vorbild für die Mathematik und für alle anderen Wissenschaften. Einleuchtende Axiome, exakte Definitionen, strenge Beweise gaben dem Denken eine *Sicherheit*, die auf allen Wissensgebieten anzustreben war.
François Viète (1540 bis 1603) und andere Mathematiker der Keplerzeit (siehe auch Anhang) bemühten sich, der wissenschaftlich begründeten Geometrie eine in entsprechender Weise *gesicherte* Algebra an die Seite zu stellen. Es galt insbesondere, algebraische Beziehungen geometrisch zu deuten und umgekehrt, geometrische Probleme algebraisch zu lösen. Eine Verbindung zwischen Algebra und Geometrie, die sogenannte „analytische Geometrie“ wurde 1636/37 gleichzeitig von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) und René Descartes (lateinisch Cartesius, 1596 bis 1650) geschaffen.
Konnte Copernicus, den Kepler „den Mann freien Geistes“ nannte, der die Vorurteile seiner Zeit bekämpfte, den man als „Mittler zwischen antiker und neuer Naturwissenschaft“ bezeichnet hat, im 16. Jahrhundert *sicher* sein, daß das schon von Aristarch von Samos (etwa 320 bis 250 v. u. Z.) gelehrte heliozentrische Planetensystem mit der Sonne als Mittelpunkt und der planetarischen Erde im Gegensatz zum geozentrischen Weltbild des Ptolemäus mit der Erde als Mittelpunkt „richtig“ ist? Erst nachdem Tycho Brahe das Beobachtungsmaterial entscheidend verbessert hatte, nachdem Kepler auf Copernicus und Brahe aufbauend seine Planetenbewegungsgesetze formuliert hatte, nachdem die Grundzüge einer neuen Physik von Galilei, Kepler, Descartes, Huygens entwickelt worden waren, nachdem Newton auf Galilei, Descartes, Huygens aufbauend die neue Physik auf die Himmelsbewegung angewandt und sein Gravitationsgesetz erkannt hatte (was wiederum durch Fortschritte in der Mathematik möglich geworden war), konnte das heliozentrische System – verbessert durch die Keplerellipsen an Stelle der copernicanischen Kreise – als gesichert gelten.
Als ein Irrtum dagegen – und das hatte Kepler selbst erkannt – erwies sich das Keplersche Planetenmodell aus In- und Umkugeln der fünf regulären Polyeder. Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) machte in seinem *Kosmos* (3. Band) darauf aufmerksam, wie Keplers „beweglicher Geist Hypothesen aufstellte und schnell wieder verließ, um sie mit anderen zu vertauschen. Immer blieb ihm ein hoffnungsvolles Vertrauen, ... Zahlengesetze zu entdecken.“

### Kepler gibt eine Theorie der halbregulären Polyeder

Es wird berichtet, daß bereits Archimedes (etwa 287 bis 212 v. u. Z.) *nahe Verwandte* der regulären Polyeder suchte und sich mit sogenannten halbregulären Polyedern befaßt hat. Solche Polyeder haben, wie die fünf regulären, ebenfalls nur regelmäßige Vielecke als Seitenflächen, aber, im Unterschied zu diesen,

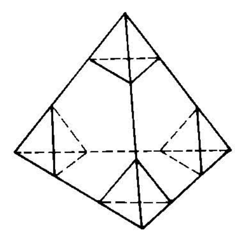


Bild 1
Ebene Schnitte im regulären Tetraeder zur Konstruktion des abgestumpften Tetraeders.

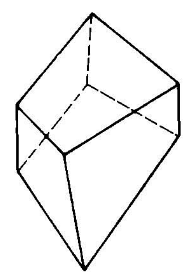


Bild 2
Archimedisches Antiprisma mit quadratischen Grundflächen

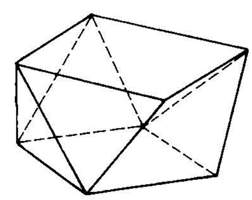


Bild 3
Archimedisches Trapezoeder

regelmäßige Vielecke verschiedener Art. Als Beispiel sei das abgestumpfte Tetraeder angeführt. Man schneide ein Tetraeder mit zu jeweils einer Seitenfläche parallelen Ebenen, deren Abstand von der Ecke $\frac{1}{3}$ der entsprechenden Höhe beträgt. Die Seitenflächen des so *abgestumpften* Tetraeders sind vier regelmäßige Sechsecke und vier gleichseitige Dreiecke. Ähnlich findet man auch aus den anderen regulären Polyedern abgestumpfte Polyeder, die halbregulär sind. Ein *Antiprisma* genanntes halbreguläres Polyeder und den dazu *dualen* Körper *(Trapezoeder)* findet man als Abbildung.
Eine vollständige Theorie dieser halbregulären Polyeder entwickelte Kepler in seinem Buch *Weltharmonik*. (Eine Beschreibung und die Konstruktion der 15 Arten halbregulärer Polyeder und der dazu *dualen* Körper findet man in dem in Teil 1 angeführten Büchlein von T. Roman.)
In der *Weltharmonik* wird zunächst eine umfassende Darstellung des 10. Kapitels der Euklidischen „Elemente" gegeben. In diesem auf Theaitetos zurückgehenden Kapitel setzte Euklid sich das Ziel, die bei regulären Polyedern auftretenden irrationalen Zahlen (wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $15+7\sqrt{5}$, $\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$, vergleiche Übersicht 3, zu kennzeichnen und zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man auf Wurzelschachtelungen in $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ verzichten kann. Die Ergebnisse hatte er dann bei seinen Konstruktionen regulärer Polyeder im 13. Kapitel verwendet.
In den folgenden Teilen der *Weltharmonik* stehen dann die Untersuchungen zur Theorie der regulären und halbregulären Polyeder, ferner Betrachtungen über sternenförmige Körper, über die die Ebene lückenlos ausfüllenden Vielecknetze, über die musikalische Intervall-Lehre, über Astrologie und Astronomie.

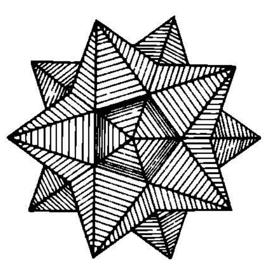


Bild 4
Großes Sterndodekaeder mit konvexen Flächen

#### Kepler berechnet das Volumen der Weinfässer

„Als ich im November 1613 meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, als an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am vierten Tag der Verkäufer mit der Meßrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalt nach bestimmte. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen." Dies schrieb Kepler in der Vorrede seiner „Faßlehre". Er war überaus erstaunt, daß der Verkäufer den Inhalt des Fasses angeben konnte, nachdem er mit der Meßrute durch den Spund die Entfernung bis zur entgegengesetzten Faßwölbung gemessen hatte, ohne Rücksicht auf die Art der Krümmung der Fässer und ohne sonstige Abmessungen. Kepler dachte nur wenige Tage darüber nach und fand die richtige Berechnung des Faßinhaltes.

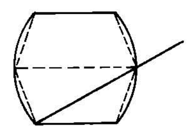


Bild 5
Bestimmung des Faßinhalts mit der Meßrute

In wesentlich erweiterter Form erschienen seine Resultate 1615 in der lateinischen Schrift *Nova stereometria doliorum vinariorum*, kurz *Faßlehre* (die Kepler auf eigene Kosten drucken lassen mußte) und 1616 in einer volkstümlichen deutschen Bearbeitung („Auszug aus der uralten Messekunst Archimedis"). Das Buch besteht aus drei Teilen. Der erste Teil ist der Inhaltsbestimmung von 92 Körpern gewidmet, zunächst von Körpern, die bereits Archimedes bekannt waren (Zylinder, Kugel, Kegel) und dann von neuen Körpern, von denen einige mit den Namen von Früchten oder anderen Gegenständen des Alltags, denen sie ähneln, versehen wurden (apfelförmiger Körper, zitronenförmiger Körper, olivenförmiger Körper, Kürbis, Ring, Spindel u. a.).
Im zweiten Teil wird gezeigt, daß die damals in Österreich häufigste Faßgestalt zugleich die zweckmäßigste sei, d. h. diejenige, welche bei Verbrauch der geringsten Menge von Faßholz den größten Inhalt besitzt. Als Beispiel eines der sich dabei ergebenden Probleme sei genannt: Es ist der Zylinder größten Volumens in einer Kugel gegebenen Durchmessers zu bestimmen. Dieses Problem läßt sich heutzutage durch Anwenden der Differentialrechnung einfach erledigen. Kepler, dem dieser Kalkül noch nicht zur Verfügung stand, mußte schwierige räumlich-geometrische Überlegungen bei der Lösung anstellen. In einem dritten Teil wird beschrieben, wie man in der Praxis zu verfahren habe, um den Inhalt von Fässern zu bestimmen.
Kepler schrieb für Praktiker. Die Aussagen und Regeln der *Faßlehre* ergeben sich auf Grund von Analogieschlüssen und durch Betrachtungen von Summen, bei denen *ins unendlich Kleine gehende Größen* eine Rolle spielen (sogenannte Infinitesimalbetrachtungen), durch Zerlegen von Flächen und Körpern in viele *sehr kleine* Teile, nicht auf Grund strenger Beweise (wie bei Archimedes oder heutzutage). Sie zeugen aber von Keplers großer Erfindungskunst. In der *Faßlehre* sind wichtige Keime neuer Schlußweisen, eine Reihe genialer Ideen und phantasievolle Annahmen enthalten, die später in der Integralrechnung systematisch behandelt wurden.

Die Ergebnisse Keplers diskutierte man in England, Frankreich und Italien. Henry Briggs (1556 bis 1630) in London bestätigte durch Zahlenrechnungen unter Verwendung von Logarithmen, daß beispielsweise tatsächlich (wie Kepler gezeigt hatte) der einer Kugel einbeschriebene Würfel ein größeres Volumen besitzt als ein nur wenig von der Würfelgestalt abweichendes der Kugel einbeschriebenes Parallelepiped (Parallelepiped oder Parallelfläche – ein von drei Paaren von parallelen Ebenen begrenzter Körper mit 6 Seitenflächen, 12 Kanten, 8 Ecken). In Deutschland gab es fast keine Reaktionen. Hier wütete seit 1618 der Dreißigjährige Krieg. Erst in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts gab es in diesem durch den Krieg materiell und geistig ausgesogenen Land einen erstrangigen Mathematiker: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716). Er wurde zu einem der Begründer der Differential- und Integralrechnung. Unabhängig von ihm wurde dieser Kalkül durch Isaac Newton bei der Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Planetengesetzen entwickelt.

#### Kepler berechnet Logarithmen

Kaufmännische Rechnungen, Berechnungen zur Astronomie, Navigation und Trigonometrie stellten oft an die Rechenmeister jener Zeit hohe Anforderungen. Sie suchten nach vereinfachenden Rechenverfahren, mit denen z. B. die Multiplikation von Zahlen auf eine Addition zurückgeführt werden sollte. Aber erst nachdem man die dezimale Schreibweise von Brüchen hatte, war die Möglichkeit zur Herstellung von Logarithmentafeln gegeben. (Logarithmen besitzen ja die fundamentale Eigenschaft, die Multiplikation der Zahlen durch die Addition ihrer Logarithmen zu ersetzen.)
Der Schotte John Neper (1550 bis 1617) führte das logarithmische Rechnen ein. Im Jahr 1614 erschien in Edinburgh seine erste Logarithmentafel mit dem Titel „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" (Beschreibung der bewundernswerten Regel der

Logarithmen). Im Juli 1619 gelangte Nepers *Descriptio* in Linz in Keplers Besitz. Es gab darin mehrere Dinge, wie z. B. die Anordnung der Neperschen Tafeln, die Kepler und anderen Gelehrten nicht zusagten. So schuf Kepler seine eigenen Tafeln. Es muß bemerkt werden, daß die *Descriptio* zwar die Tafeln enthielt, aber nicht ihre Herstellung lehrte. (Erst 1620 wurde Nepers *Constructio* – Herstellung der Tafeln der Logarithmen – publiziert, in der sein Verfahren zur Berechnung der Logarithmen beschrieben wurde. In demselben Jahr erschien in Prag eine Logarithmentafel des Schweizers Jobst Bürgi.)
Die Aufstellung von Tafeln fand Kepler somit unabhängig von Neper. Kepler vollendete seine die Zahlen 1 bis 1000 umfassende Tafel im Winter 1621/22. Später verfaßte er eine Anweisung zum Gebrauch der Logarithmen. Die Logarithmen benutzte er auch in seinen 1627 herausgegebenen astronomischen sogenannten Rudolphinischen Tafeln. (Dieses von den beobachtenden Astronomen sehnlichst erwartete Werk verdrängte die älteren, längst als unzuverlässig erkannten astronomischen Tafeln und lieferte den entscheidenden Beitrag zur Anerkennung der Planetentheorie.) Die Verbreitung und Anerkennung der Logarithmen wurde durch diese Verwendung in der Astronomie durch Kepler wesentlich beschleunigt.

### Astronomie und Mathematik

Das Leben und Wirken des genialen Johannes Kepler macht die engen Beziehungen deutlich, die zwischen der Astronomie und der Mathematik, zwei Wissenschaften mit jahrhundertelanger Geschichte und Tradition, damals bestanden. Diese wurden im 17., 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch Newton, Euler, Gauß, Jacobi, Bessel und viele andere Astronomen und Mathematiker noch enger. In diesen Jahrhunderten entwickelte sich eine äußerst fruchtbare Wechselwirkung zwischen der Astronomie und der Mathematik.
Ohne die Mathematik wäre die Astronomie nur eine Anhäufung von Erfahrungen und Beobachtungen und nicht eine Wissenschaft, die harmonisch aufgebaut ist und einfache und übersichtliche Gesetze enthält.
So wie die Logarithmen ihre ersten Anwendungen bei Keplers astronomischen Berechnungen fanden, so waren auch später die Fortschritte der Astronomie, insbesondere der Himmelsmechanik, aufs engste verbunden mit den Fortschritten in der Mathematik. Andererseits sind die Forschungen in verschiedenen Teilen der Mathematik durch neuartige astronomische, speziell himmelsmechanische Fragestellungen ausgelöst worden.

### Würdigung Keplers durch A. v. Humboldt

Alexander von Humboldt, ein Naturforscher von universeller Bildung, versuchte das naturwissenschaftliche Wissen seiner Zeit in seinem Hauptwerk „*Kosmos:* Entwurf einer physischen Weltbeschreibung" zusammenzufassen. Dazu gehörte auch das astronomische Wissen. Humboldt ging bei seiner Darstellung stets auf die historischen Quellen zurück. So studierte er im Herbst 1846 *zweimal Seite für Seite* (wie er im Brief vom 6. 9. 1847 an Jacobi betonte) Copernicus' Hauptwerk *De revolutionibus*. Er bemühte sich auch, von kompetenten Zeitgenossen über Astronomie und Astronomiegeschichte, verbunden mit Mathematikgeschichte, Auskünfte zu erhalten. In den Briefwechseln mit bekannten Astronomen wie Herschel, Galle, Encke, Bessel und Jacobi spielen diesbezügliche Fragen eine Rolle. Er hat beispielsweise Auskunft darüber erbeten, wie Kepler durch Induktion richtige Ergebnisse erhalten habe; in seinen *Kosmos* gehöre auch, wie er am 8. 11. 1846 an Jacobi schrieb, die „leise Berührung des Aufkeimens der Gedankenfolge ohne welche die Gesetze der Bewegung der Himmelskörper ... nicht hätten ergründet werden können".
Im 2. Band seines *Kosmos* (1847) hat er Kepler dann so gewürdigt: „Wenn ich in diesen Betrachtungen über den Einfluß der unmittelbaren Sinnesanschauung Kepler vorzugsweise genannt habe, so war es, um daran zu erinnern: wie sich in diesem großen, herrlich begabten und wunderbaren Manne jener Hang zu phantasiereichen Kombinationen mit einem ausgezeichneten Beobachtungstalente und einer ernsten, strengen Induktionsmethode; mit einer mutigen, fast beispiellosen Beharrlichkeit im Rechnen; mit einem mathematischen Tiefsinne vereinigt fand, der, in der ‚Stereometrica doliorum' offenbart, auf Fermat und durch diesen auf die Erfindung der Rechnung des Unendlichen einen glücklichen Einfluß ausgeübt hat. Ein solcher Geist war nicht vorzugsweise vor allen dazu geeignet, durch den Reichtum und die Beweglichkeit seiner Ideen, ja durch die Wagnisse kosmologischer Ahndungen Leben um sich her zu verbreiten; die Bewegung zu vermehren, welche das siebzehnte Jahrhundert unaufhaltsam seinem erhabenen Ziele erweiterter Weltanschauung zuführte."
Dieser Würdigung dürfen wir uns auch heute anschließen. *H. Pieper*

### Astronomie, Mathematik und Physik der Keplerzeit

1572 An einem Novemberabend beobachtet Tycho Brahe am Zenit im Sternbild Cassiopea einen hellen Stern an einer Stelle, an der zuvor kein Stern zu sehen gewesen war (eine Supernova in unserem Milchstraßensystem, einen veränderlichen Stern, der eine plötzliche riesige Helligkeitszunahme aufweist).

1579 François Viète (lateinisch Vieta) berechnet im „Mathematischen Regelbuch" (Canon mathematicus, lateinisch) die Zahl $\pi$, die den für alle Kreise konstanten Quotienten von Kreisumfang und Durchmesser bezeichnet, auf 10 Stellen.

1579 Die zweite Auflage der „Algebra" des Rafael Bombelli erscheint. (Verwendung komplexer Zahlen zur Lösung kubischer Gleichungen.)

1585 Simon Stevin gibt die „Arithmetik" des Diophant neu heraus.

1588 Jobst Bürgi benutzt zur Erleichterung seiner Rechnungen Logarithmen.

1591 François Viète führt allgemeine Buchstabenkoeffizienten in Gleichungen ein.

1593 François Viète gibt die folgende Darstellung von $\frac{1}{\pi}$ als unendliches Produkt

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

1596 Die genauere Berechnung der Zahl $\pi$ bildet den Hauptgegenstand der Schriften Ludolph von Ceulens, auch des Werkes „Van den Circkel". (Noch in den Büchern des 19. Jahrhunderts wird darum $\pi$ als Ludolphsche Zahl bezeichnet.)

1596 Der erste periodisch veränderliche Stern wird entdeckt.

1596 Keplers „Mysterium cosmographicum" (Weltgeheimnis) erscheint.

1599 F. Bacon mißt die Schallgeschwindigkeit der Luft.

1600 W. Gilberts Werk über die magnetischen und elektrischen Kräfte erscheint.

1600 Giordano Bruno wird als Anhänger des 1542 erschienenen Werkes „De revolutionibus orbium coelestium" (Über die Umdrehungen der Himmelskörper) des Nicolaus Copernicus auf dem Scheiterhaufen verbrannt.

1601 Keplers Spekulationen über die elliptische Marsbahn beginnen.

1604 Arbeiten Keplers über die Struktur des Auges und die Theorie des Sehens.

1604 In einer Schrift zur Kegelschnittlehre erkennt Kepler die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte und faßt die Parabel als Grenzfeld der Ellipse auf.

1604 Galileo Galilei findet die Gesetze der Fallbewegung.

1604 Kepler beobachtet im Sternbild Ophiuchus eine Supernova. „Wie mächtig das Erscheinen neuer Sterne ... die Neugierde gefesselt, den Anteil an astronomischen Entdeckungen vermehrt, ja zu phantasiereichen Kombinationen angeregt hat: lehren Keplers Schriften." (A. v. Humboldt)

1607 Der Halleysche Komet (nachweislich 466 v. u. Z. erstmals beobachtet) ist sichtbar. (Die letzte Wiederkehr war 1910; die nächste wird 1986 erwartet.)

1608 Peter Roth spricht in seiner „Arithmetica philiphica" ohne Beweis den Satz aus, daß eine algebraische Gleichung höchstens so viel Lösungen haben kann, wie ihr Grad angibt.

1608 Holländische Brillenmacher erfinden das Fernrohr.

1609 Galileo Galilei konstruiert auf Grund ihm zugegangener Berichte ein Fernrohr.

1609 Keplers „Astronomia nova" (Neue Astronomie) enthält die ersten beiden Gesetze der Planetenbewegung.
„Durch das Studium der Bahn des Planeten Mars müssen wir zu den Geheimnissen der Astronomie gelangen oder wir bleiben in derselben auf immer unwissend. Es ist mir durch hartnäckig fortgesetzte Arbeit gelungen, die Ungleichheiten der Bewegung des Mars einem Naturgesetz zu unterwerfen", schreibt Kepler.

1610 Galilei wird zum Ersten Mathematiker in Pisa ernannt.

1610 Galilei entdeckt die Jupitermonde.

1610 Im November meldet Galilei an Kepler, daß der Saturn aus drei Sternen bestehe, die sich gegenseitig berühren (In dieser Beobachtung liegt der Keim zur Entdeckung des Saturnringes.)

1611 Keplers Schrift „Dioptrik“ enthält die Theorie des terrestrischen Fernrohres und die des von Kepler neu erfundenen astronomischen Fernrohrs.

1611 Erste Beobachtung der Sonnenflecken.

1612 Der Andromedanebel wird als erster Spiralnebel beschrieben.

1612 Die von C. G. Bachet de Méziriac gesammelten überlieferten, teilweise uralten zahlentheoretischen und algebraischen Aufgaben in anekdotenmäßiger Einkleidung erscheinen.

1614 Die Logarithmentafeln des John Napier (lateinisch: Neper) erscheinen (zusammen mit einer Erklärung ihrer Verwendung).

1615 Keplers „Faßlehre“ (Stereometria doliorum) enthält Volumenbestimmungen von Drehkörpern und zielt auf die zweckmäßigste Form von Weinfässern (dolia) ab. (Kepler erweist sich als Vorläufer der Integralrechnung.)

1616 Der Kardinal Bellarmin erklärt im Februar vor Galilei, daß die copernicanische Weltsicht mit der katholischen Glaubenslehre unvereinbar sei. Im März kommt Copernicus' „De revolutionibus“ bedingt auf den Index der verbotenen Bücher.

1617 Henry Briggs, ein Freund Nepers, führt die Berechnung der Logarithmen mit der Basis 10 durch und kann die ersten 1000 Logarithmen mit acht Dezimalstellen veröffentlichen.

1617 John Neper gibt die erste Beschreibung von Rechenstäben.

1619 Keplers „Harmonice mundi“ (Weltharmonie) enthält das dritte Gesetz der Planetenbewegung, aber auch Untersuchungen über regelmäßige Vielecke und Sternkörper.

1619 Eine vor 1614 verfaßte Schrift, in der Neper die Berechnung seiner Logarithmentafeln erklärt, wird mit Anmerkungen von Briggs herausgegeben.

1620 In Prag erscheinen Logarithmentafeln des seit 1605 als Kammeruhrmacher am kaiserlichen Hof (in Prag) tätigen Freunds von Kepler, J. Bürgi.

1620 W. Snellius abstrahiert aus Messungen das Gesetz von der Strahlenbrechung (Brechungsgesetz).

1621 Bachet gibt die „Arithmetik“ des Diophant in griechischer und lateinischer Sprache mit beigefügten mathematischen Anmerkungen heraus.

1624 Kepler leistet mit seinem „Chilias logarithmorum“ einen Beitrag zu dem Fortschritt, der zur Erleichterung des Rechnens dient.

1624 Es erscheint die „Arithmetica logarithmica“ von Briggs mit 14stelligen Logarithmen der ersten 20000 Zahlen und der Zahlen von 90000 bis 100000.

1627 Keplers astronomische Tafeln „Tabulae Rudolphinae“ (Rudolphinische Tafeln) erscheinen. Sie gehen auf Beobachtungsergebnisse Tycho Brahes zurück. Kepler benutzt Logarithmen. (Er hat dadurch die Anerkennung und Verbreitung der Logarithmen wesentlich gefördert.)

1627 Mit der „Rechtmäßigen Lehre von Dreiecken“ (Doctrina triangulorum canonica) des W. Snellius erscheint ein systematisches Lehrbuch der Trigonometrie.

1629 In seiner „Invention nouvelle en l'algèbre“ (Neue Entdeckung der Algebra) erkennt Albert Girard neben den positiven Lösungen auch negative und komplexe Lösungen an (wobei er sich die Bedeutung negativer Lösungen geometrisch veranschaulicht). Er formuliert den Satz: Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat n Lösungen.

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 6/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■1913 Von den 36 Schülern einer Klasse nimmt jeder an genau einer der Sportarten Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Schach und Judo teil. Der neunte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse nimmt entweder an der Sportart Schach oder Judo teil; dabei ist die Anzahl der Teilnehmer der Sportart Schach größer als die der Sportart Judo. An der Sportart Tischtennis beteiligen sich zweimal soviel Schüler wie an der Sportart Schach. Mehr als die Hälfte der Anzahl der Schüler dieser Klasse betreibt Leichtathletik. An der Sportart Schwimmen beteiligen sich mehr Schüler als am Tischtennis. Ermittle für jede dieser Sportarten die Anzahl der an ihr teilnehmenden Schüler dieser Klasse!

Im Heft 3/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Angenommen, an der Sportart Schach nehmen $x$ Schüler, an der Sportart Judo $y$ Schüler teil; dann gilt $x+y=36:9$, also $x+y=4$. Wegen $y>0$ und $x>y$ existiert genau eine Lösung, nämlich $x=3$ und $y=1$. Es nehmen 3 Schüler an der Sportart Schach und 1 Schüler am Judo teil. Deshalb nehmen $2\cdot 3=6$ Schüler an der Sportart Tischtennis teil. Angenommen, an der Sportart Leichtathletik nehmen $a$ Schüler, an der Sportart Schwimmen $b$ Schüler teil; dann gilt $a+b=36-10$, also $a+b=26$. Wegen $a>18$ und $b>6$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a=19$ und $b=7$. Es nehmen 19 Schüler an der Sportart Leichtathletik und 7 Schüler am Schwimmen teil.

Wir stellen nun die Lösung von *Mario Thiel* aus Eilsleben vor, der Schüler der Kl. 5 der Dr.-Richard-Sorge-Oberschule ist. Mario löste diese Aufgabe wie folgt:
Zuerst dividiere ich die Anzahl der Schüler dieser Klasse durch 9, weil jeder neunte Schüler entweder die Sportart Schach oder Judo betreibt. ($36:9=4$.) Jetzt muß ich vier in zwei Summanden so aufteilen, daß der eine Summand größer ist als der andere. Dafür kommen nur die Zahlen 3 und 1 in Frage. Es nehmen 3 Schüler am Schach und 1 Schüler am Judo teil. Nun muß ich die Anzahl der Teilnehmer am Schach mit 2 multiplizieren. ($3\cdot 2=6$.) Am Tischtennis nehmen 6 Schüler teil. Ich muß jetzt die Hälfte von 36 ermitteln. ($36:2=18$.)
Mehr als 18 Schüler betreiben also Leichtathletik, und mehr als 6 Schüler sind Schwimmer. ($36-10=26$.) Nur die Zahlen 19 und 7 kommen in Frage. Es betreiben 19 Schüler Leichtathletik, und 7 Schüler gehen schwimmen.

Wir stellen nun die Lösung von *Karin Dietrich* aus Brucke vor, die Schülerin der Klasse 4 der POS Friedeburg ist. Karin löste diese Aufgabe wie folgt:
Ich weiß, daß 36 Schüler dieser Klasse angehören. Der 9. Teil beteiligt sich entweder an der Sportart Schach oder Judo. ($36:9=4$.) Da die Anzahl der Schüler der Sportart Schach größer ist als die für Judo, müssen 3 Schüler sich am Schachspiel, 1 Schüler am Judo beteiligen. ($4=3+1$.) Nun stelle ich eine Tabelle auf. Dabei beachte ich, daß sich an der Sportart Leichtathletik mehr als die Hälfte der Schüler dieser Klasse, also mehr als 18 Schüler, an der Sportart Tischtennis zweimal soviel wie am Schach, also 6 Schüler, beteiligen. Weiterhin muß ich beachten, daß sich beim Schwimmen mehr beteiligen als beim Tischtennis.

Anzahl der Teilnehmer an der Sportart

| Judo | Schach | Tischtennis | Leichtathletik | Schwimmen |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 19 | 7 * |
| 1 | 3 | 6 | 19 | 8 |
| 1 | 3 | 6 | 20 | 7 |

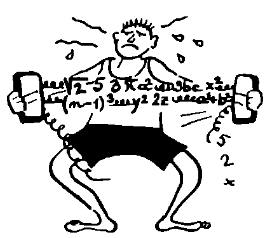
* Lösung

Aus der ersten Zeile der Tabelle ergibt sich die Anzahl der Teilnehmer an den einzelnen Sportarten.

**Vorbildliche Hilfe**

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2400 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig; Leipziger Volkszeitung; Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Leipzig.

# Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



*Aus: rozhledy, Prag*

*Letzter Einsendetermin: 8. März 1981*

## Mathematik

Ma 5 ■2026 In einem Haus wohnen die vier Familien Ackermann, Brauer, Christensen und Dahlmann. Jede dieser vier Familien hat entweder ein Kind oder zwei Kinder. Die Kinder dieser vier Familien haben die Vornamen Egon, Fred, Gudrun, Hans, Inge, Jochen. Die elfjährige Gudrun und der 13jährige Egon sind Geschwister. Hans ist mit dem Sohn von Familie Brauer befreundet. Die beiden Familien Ackermann und Dahlmann haben je ein Kind. Die beiden Kinder der Familie Brauer sind Zwillinge. Der 10jährige Sohn der Familie Brauer hat den Vornamen Fred. Jochen und Fred sind gleichaltrig. Die Tochter der Familie Ackermann ist 8 Jahre alt. Welchen Vor- und Nachnamen haben diese sechs Kinder?

*Schülerin Heide Friedemann, Köthen, Kl. 6*

Ma 5 ■2027 Heinz geht einkaufen und erhält dafür von seiner Mutter einen bestimmten Geldbetrag. Im ersten Laden gibt er den vierten Teil dieses Geldes aus. Im dritten Laden bezahlt er halb soviel Geld wie im ersten Laden. Im zweiten Laden bezahlt er dreimal soviel Geld wie im dritten Laden. Welchen Geldbetrag hat Heinz von seiner Mutter erhalten, wenn er nach dem Einkauf 10 M übrig behält?

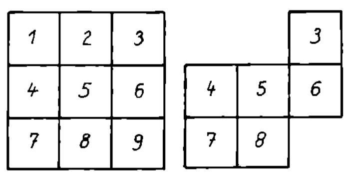
*Schülerin Ilona Glöckel, Prora*

Ma 5 ■2028 Jeder der drei Jungen Joachim, Frank und Thomas haben bei der Spartakiade 1979 an einer der drei Sportarten Tischtennis, Speerwurf bzw. 100-m-Lauf teilgenommen. Sie erkämpften zusammen eine Gold-, eine Silber- und eine Bronzemedaille, und zwar jeder eine dieser drei Medaillen.
Es ist folgendes bekannt:

a) Der Tischtennisspieler, der mit Joachim befreundet ist, erhielt eine Bronzemedaille.
b) Im Speerwurf erreichte keiner dieser drei Jungen eine Goldmedaille.
c) Thomas ist kein Leichtathlet.
d) Joachim ist kein Speerwerfer.
Wer beteiligte sich an welcher Sportart, und wer erkämpfte welche Medaille?

*Schülerin Heike Beringer, Nordhausen*

Ma 5 ■2029 Das abgebildete Quadrat umfaßt neun kleinere Quadrate, denen jeweils eine der Ziffern 1 bis 9 zugeordnet wurde.

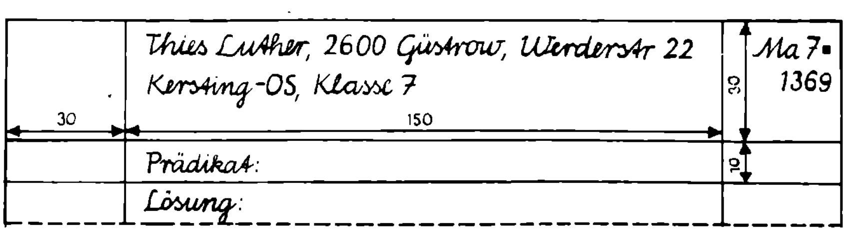



Aus dem großen Quadrat soll ein oben offener, würfelförmiger Behälter gefaltet werden, nachdem die kleineren Quadrate mit den Ziffern 1, 2 und 9 bereits ausgeschnitten worden sind. Welches vierte kleinere Quadrat muß noch ausgeschnitten werden, um einen solchen Behälter falten zu können? Gib alle Möglichkeiten an! Ordne den verbliebenen fünf kleineren Quadraten statt der Ziffern die Buchstaben $u$, $v$, $h$, $r$, $l$ zu, die zum Ausdruck bringen, welches Quadrat den Behälter unten, vorn, hinten, rechts bzw. links begrenzt!

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■2030 a) Schreibe alle Dreiecke auf, die in der abgebildeten Figur den Punkt $A$ als einen Eckpunkt haben (z. B. $\triangle AEI$)!
b) Schreibe alle Vierecke auf, die in der abgebildeten Figur den Punkt $G$ als einen Eckpunkt haben (z. B. Viereck $GDNL$)!

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*




**Wettbewerbsbedingungen**

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

**Redaktion alpha**
**7027 Leipzig, Postfach 14.**

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

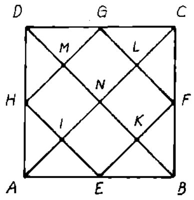
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. **Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.**

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1980/81 läuft von Heft 5/80 bis Heft 2/81. Zwischen dem 1. und 10. September 1981 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/81 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1980/81 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*




Ma 5 ▪2031 Wenn man vor eine einstellige natürliche Zahl die Ziffer 8 schreibt, ist die so erhaltene Zahl um 9 größer als jene, die man erhält, wenn man die Ziffer 8 hinter die einstellige natürliche Zahl setzt. Um welche Zahl handelt es sich? *Sch.*

Ma 6 ▪2032 Es sind drei natürliche Zahlen $a$, $b$, $c$ mit $a<b<c$ zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:
a) Die größte der drei Zahlen ist gleich dem Quadrat der kleinsten.
b) Die mittlere dieser drei Zahlen ist gleich dem Dreifachen der kleinsten.
c) Die mittlere dieser drei Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden anderen Zahlen.

*Schüler Eberhard Kerstan, Cottbus*

Ma 6 ▪2033 Ein Wanderer begegnete einer Schulklasse, die einen Ausflug machte. Er grüßte: „Guten Tag, ihr einhundert Schüler." Ein Schüler antwortete darauf: „Wären wir noch einmal soviel und noch $\frac{1}{2}$mal soviel und noch $\frac{1}{4}$mal soviel Schüler wie wir sind, und würden wir Sie noch hinzurechnen, dann wären wir genau 100 Personen." Wie viele Schüler machten einen Ausflug?

*Schüler Armin Singer, Teichwolframsdorf, Kl. 7*

Ma 6 ▪2034 Bei einer Klassenarbeit im Fach Mathematik, an der alle Schüler teilnahmen, wurde folgendes Ergebnis erzielt:
Die Note 2 erhielten doppelt soviel Schüler wie die Note 1. Die Note 3 erhielten 14 Schüler weniger als es Schüler waren, die die Noten 1 oder 2 erreichten. Der fünfte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 4. Die Note 5 erhielt kein Schüler. Dieser Klasse gehören mehr als 16, aber weniger als 24 Schüler an. Wie viele Schüler erhielten die Noten 1, 2, 3 bzw. 4?

*Schülerin Heike Brüggemann, Friedeburgerhütte*

Ma 6 ▪2035 Im Jahre 1977 war Axels Bruder Claus doppelt so alt wie Axel. Wenn man das damalige Lebensalter (in ganzen Zahlen) von Claus mit 3 multipliziert, danach 2 addiert und diese Summe durch 4 dividiert, so erhält man Axels Lebensalter im Jahre 1983. Wie alt war Axel im Jahre 1977?

*Schüler Bernd Winkelmann, Schmalkalden*

Ma 6 ▪2036 Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck $ABC$ mit $\overline{AC}=\overline{BC}$, bei dem die Länge eines Schenkels 6 cm, die Summe aus den Größen eines Basiswinkels und des Winkels an der Spitze 110° beträgt! Die Konstruktion ist zu begründen.

*Schüler Daniel Hammer, Berlin, Kl. 7*

Ma 7 ▪2037 Angela geht einkaufen. Von dem Geld, das die Mutter ihr gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus. Im Milchladen gibt sie 2% weniger Geld aus als im Fleischerladen. Im Gemüsegeschäft gibt sie weitere 21% des Geldes aus. Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt soviel Geld aus, wie sie wieder mit nach Hause bringt. Von dem verbliebenen Geld gibt die Mutter ihr die Hälfte als Taschengeld; das waren genau 2,10 M. Welchen Geldbetrag hat Angela von der Mutter zum Einkauf erhalten?

*Schüler Tom Schilling, Oschersleben, Kl. 7*

Ma 7 ▪2038 Gegeben sei eine Gerade $g$ und ein Punkt $M$, der von ihr den Abstand 1 cm hat. Es sind alle Punkte $P$ zu konstruieren, die von $g$ den Abstand 2 cm und von $M$ den Abstand 4 cm haben. Die Konstruktion ist zu begründen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ▪2039 Aus einem Aquarium mit den Innenmaßen 80 cm Länge und 25 cm Breite werden fünf Kannen voll Wasser geschöpft. Anschließend werden sechs Liter frisches Wasser in das Aquarium gefüllt. Danach ist der Wasserspiegel um 7 cm niedriger als zuvor. Wieviel Liter Wasser faßt die Kanne?

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ▪2040 Auf einem Tisch steht ein Würfel, der aus einer bestimmten Anzahl gleichgroßer Würfel zusammengesetzt ist. Die Anzahl der kleinen Würfel ist gleich der Anzahl der sichtbaren Flächen der kleinen Würfel. Aus wieviel kleinen Würfeln ist der große Würfel zusammengesetzt?

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪2041 Ein Urlauberschiff hat Kabinen mit einem, mit zwei oder mit drei Betten. Der Fahrgast Müller behauptet, daß es insgesamt 100 Betten sind. Fahrgast Schmidt aber weiß, daß es 5 Dreibettkabinen weniger sind als Einbettkabinen. Er meint, daß Müllers Behauptung falsch sei. Hat Herr Schmidt recht? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪2042 $\frac{3}{5}$ aller Schüler der Klassen 8a und 8b entschieden sich für eine Reise in den Spreewald; die anderen wollten gern an die Ostsee fahren. Für die Spreewaldreise waren 12 Schüler mehr als für die Ostseereise. Wieviel Schüler sind in Klasse 8a, wieviel in Klasse 8b, wenn in Klasse 8a zwei Schüler mehr sind als in Klasse 8b?

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪2043 Für welche ein-, zwei- oder dreistelligen natürlichen Zahlen, die von 0 verschieden sind, ist die Summe aus zwei dieser Zahlen gleich der dritten Potenz des ersten Summanden? *Sch.*

Ma 8 ▪2044 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$, dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Längen 4 cm und 6 cm haben. Es ist der Umkreis $k$ dieses rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren. Durch $C$ ist eine Parallele zu $\overline{AB}$ zu zeichnen, die $k$ in $D$ schneidet. Die Geraden $BC$ und $AD$ schneiden sich im Punkte $S$. Es ist die Länge der Strecke $\overline{CS}$ zu berechnen. *Sch.*

Ma 9 ▪2045 Im Inneren oder auf dem Rand eines Rechtecks $ABCD$ mit der Länge von $\overline{AB}=6$ cm und der Länge von $\overline{BC}=5$ cm lassen sich 8 Punkte so einzeichnen, daß jeder Punkt von jedem anderen einen Absta ' $d>\sqrt{8}$ cm hat. Geben Sie eine solche Lage der Punkte an, und beweisen Sie die Behauptung! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ▪2046 Man konstruiere ein Dreieck $ABC$, das folgenden Bedingungen genügt:
(1) der Radius des Umkreises von $ABC$ habe eine Länge von $r_u=4$ cm,
(2) die Längen der Seiten des Dreiecks verhalten sich wie $2:3:4$.

*Schüler Volker Sachse, Mülsen, Kl. 8*

Ma 9 ▪2047 Die folgende Summe ist auf rationelle Weise zu ermitteln:
$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+99^2-100^2$.

*Schüler Ralf Krause, Neubrandenburg, Kl. 10*

Ma 9 ▪2048 Welche der beiden Zahlen $15^{30}$ und $30^{15}$ ist die kleinere? *Sch.*

Ma 10/12 ▪2049 Ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit $\gamma=90°$ habe Kathetenlängen mit den Maßzahlen $a=1{,}26$ und $b=0{,}74$. Über den Seiten von $ABC$ seien nach außen diejenigen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke $\underline{ADB}$, $\underline{BEC}$ und $\underline{ACF}$ gezeichnet, die $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ jeweils als Hypotenuse haben. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks $DEF$ zu berechnen.

*Schüler Volkmar Türke, Auerbach*

Ma 10/12 ▪2050 Von einem Dreieck $ABC$ ist folgendes bekannt:
(1) $\alpha_1+\beta_1=240°$
(2) $u-c=15$ cm
(3) $A=\frac{25}{2}\cdot\sqrt{3}$ cm²
(4) $a<b$.

Es sind $a$, $b$, $c$ die Seitenlängen; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Größen der Innenwinkel; $\alpha_1$ die Größe des Nebenwinkels von $\alpha$; $\beta_1$ die Größe des Nebenwinkels von $\beta$; $A$ der Flächeninhalt und $u$ der Umfang des Dreiecks $ABC$. Es sind $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zu ermitteln!

*Schüler Tilo Schaarschmidt, Bad Lauchstädt*

Ma 10/12 ▪2051 Man ermittle alle geordneten Paare $[p;q]$ mit $p, q\in P$, die die Gleichung
$3^{[(p-q)(p+q)-2q(p-q)]\cdot(p-q)^2}+4\sqrt{3p+2q+2}-\sqrt[2p]{4^p}=0$ erfüllen!

*Schülerin Katrin Lippuner, Rheinsberg*

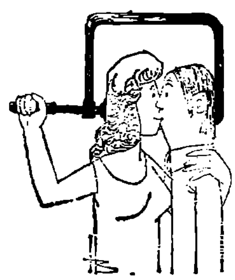
Ma 10/12 ■2052 Man konstruiere ein Dreieck $ABC$, wenn die folgenden Stücke gegeben sind:
Die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ des Winkels $\sphericalangle BAC$; ihre Länge $\omega_\alpha$ betrage 5 cm;
die 3 cm lange Strecke $\overline{DE}$, wobei $E$ Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist;
der Winkel $\sphericalangle ADB$, dessen Größe 105° beträgt.
Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen.

*Schülerin Katrin Lippuner, Rheinsberg*

# Physik

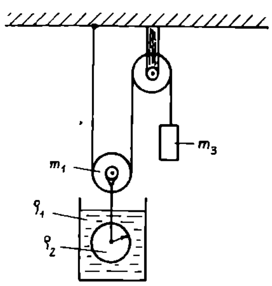
Ph 6 ■86 An einer Zugfeder hängt ein Körper mit einem Gewicht von 600 N (rd. 60 p) und hat die Feder dadurch um 3 cm verlängert. Um wieviel cm wird die Feder ausgedehnt, wenn sie mit 1500 N (rd. 150 p) belastet wird? Löse die Aufgabe mit Hilfe eines Diagramms!

Ph 7 ■87 Ein Fußgänger läuft gegen den Wind mit einem Druck von 5 Pa $\left(\text{rd. } 0{,}5 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}\right)$ eine Strecke von 150 m. Die vom Wind getroffene Oberfläche des Menschen nimmt man mit rd. 0,45 $\text{m}^2$ an. Welche Arbeit gegen den Luftwiderstand verrichtet der Fußgänger?



Ph 8 ■88 Als zu Hause gebadet wurde, stellte Jens fest, daß das kalte Wasser eine Temperatur von 20°C und das warme Wasser eine Temperatur von 80°C hatte. Wieviel kg von beiden mußte gemischt werden, um 500 kg von 35°C zu erhalten?
*Bemerkung:* Von Wärmeverlusten durch Erwärmen der Wanne und der Luft soll abgesehen werden.

Ph 9 ■89 In dem skizzierten Rollensystem sei an einer losen Rolle mittels eines geeigneten Verbindungsstückes eine Stahlkugel starr befestigt. Diese Kugel tauche in ein mit Wasser gefülltes Gefäß vollständig ein. Wie groß muß die Masse $m_3$ sein, mit der die eingetauchte Kugel mitsamt der Rolle im Gleichgewicht gehalten wird?




Es seien: der Kugelradius $r = 2$ cm, die Masse der losen Rolle $m_1 = 100$ Gramm, die Dichte des Wassers $\varrho_1 = 1{,}0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
die Dichte des Stahls $\varrho_2 = 7{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
das Verbindungsstück masselos angenommen.

*Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph 10/12 ■90 Eine Glühlampe wandelt bekanntlich elektrische Energie in Licht und Wärme um. Um einen bestimmten Lichtstrom $\Phi$ [Einheit Lumen (lm)] zu erzeugen, muß eine entsprechende elektrische Leistung $P_{el}$ [Einheit Watt (W)] aufgebracht werden. Das Verhältnis $\Phi : P_{el}$ wird als Lichtausbeute $\eta_L$ bezeichnet. Edisons Kohlefadenlampen hatten eine Ausbeute von $3 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$. Eine moderne 75-Watt-Doppelwendellampe sendet 950 lm aus. Berechnen Sie die Lichtausbeute, und geben Sie die Steigerung in % an!

*Karl Eichhorn, Steinach*

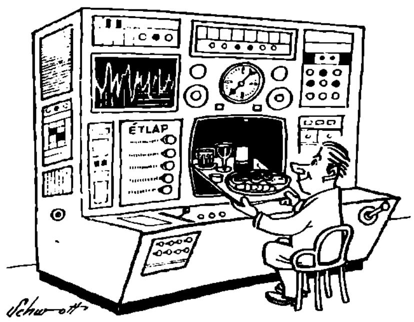
# Chemie

Ch 7 ■69 Kaliumsulfat ($K_2SO_4$) ist ein wichtiger Bestandteil der Kalidüngemittel. Zur Steigerung der Hektarerträge streute eine LPG 380 kg Kaliumsulfat auf 5 ha Boden aus. Wieviel Kilogramm Kaliumoxid wurden auf diesem Wege jedem Hektar zugeführt?

Ch 8 ■70 Eine Sodalösung ist bei 20°C gesättigt, wenn sie in einem Liter Lösung 182 g Natriumkarbonat enthält. $\left(\text{Dichte der Lösung } 1{,}19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$. Wie groß ist die Gesamtstoffmenge in einem Liter Lösung?

Ch 9 ■71 Wie groß ist die Gesamtoberfläche (in $\text{cm}^2$) aller Tröpfchen von 1 mol Wasser, wenn jedes Tröpfchen einen Radius von 0,002 mm besitzt?

Ch 10/12 ■72 Eine Kochsalzlösung, welche 20 g Natriumchlorid je Liter enthält, wird abgekühlt. Bei welcher Temperatur beginnt die Kristallisation, wenn das Salz zu 70% dissoziiert vorliegt? (Ein Mol Kochsalz bewirkt eine Gefrierpunktserniedrigung des Wassers von 1,86°C.)



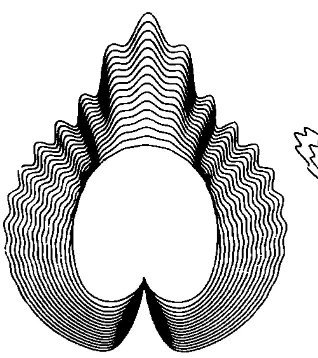
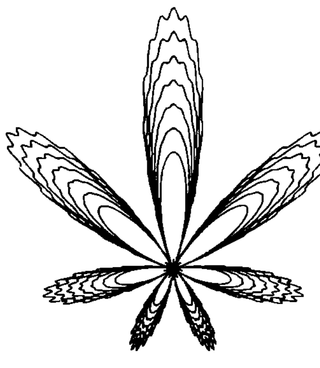
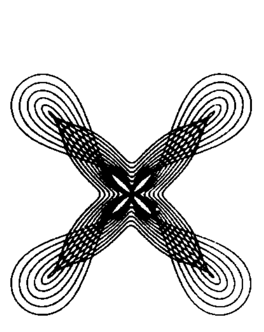
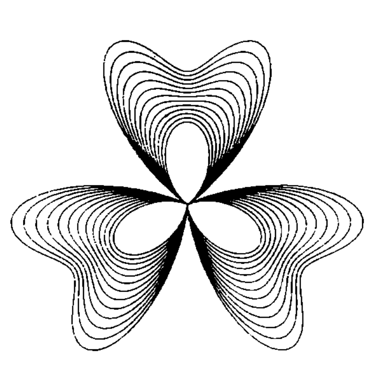
### Wir suchen ein Teil des Atoms

a – ach – der – e – genz – glas – koh – le – lek – len – li – lin – meß – nen – neu – nungs – on – ord – re – re – sa – säu – scha – schreib – se – tan – ter – ti – ti – tra – tro – wei – zahl – zy

Aus vorstehenden Silben sind Wörter mit folgender Bedeutung zu bilden:
1. Eine stabile Elektronenanordnung im Atom; 2. chemisches Element – 4. Nebengruppe; 3. steht im Periodensystem; 4. Gerät zum Abmessen von Flüssigkeiten; 5. Stoff, der durch die Formel $H_2CO_3$ symbolisiert wird; 6. Ausführungsart der chemischen Zeichensprache; 7. für viele Experimente verwendetes chemisches Gerät; 8. die Reaktion einer Säurelösung mit einer Basenlösung.
Bei richtiger Lösung ergeben die Anfangsbuchstaben – von oben nach unten gelesen – ein Teil des Atoms.

*Vignetten entnommen aus Quant, Moskau*

▼

# alpha-Wettbewerb 1979/80

## Preisträger

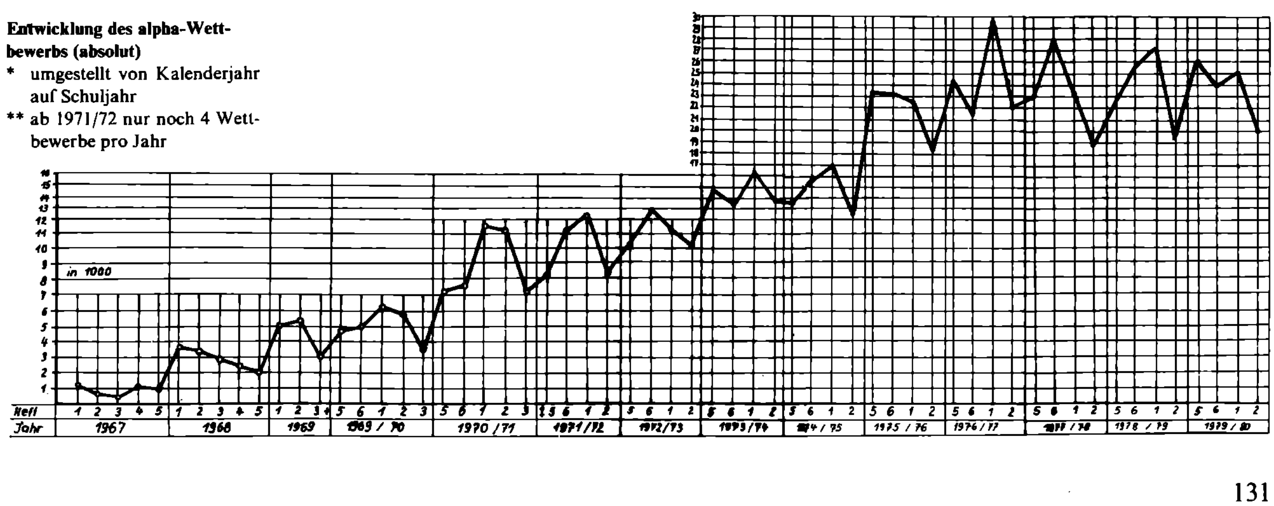
Anka Sommer, Augsdorf; Evelyn Heyer, Aue; Beate Gössel, Bad Doberan; Tilo Schaarschmidt, Bad Lauchstädt; Ulrich Zülicke, Bergwitz; Martin Schnauß, Stefan Müller, Karen Böhme, Steffen Padelt, Stefan Röhl, alle Berlin; Gunnar Bittersmann, Bernau; Heiko Prehl, Bernsbach; Helge Dürschke, Bitterfeld; Stephan Wernicke, Brandenburg; Guido Siegel, Breitenworbis; Ramona Blank, Clingen; Uwe Martin, Crossen; Jürgen Anders, Dahlewitz; Bert Kühne, Dahme; Michael Nitsche, Thomas Hübner, beide Dresden; Monika Glaß, Ulf Arnold, beide Eisenach; Ute Berthold, Finsterwalde; Ulf Winkler, Frankenberg; Henry Kost, Freiberg; Udo Schulte, Freienbessingen; Mario Richter, Gadebusch; Annette Grundert, Gräfenhainichen; Mathias Schleif, Gransee; Thomas Hommel, Görlitz; Jens Dietrich, Großberndten; Silke Maulhardt, Großbodungen; Katrin Kießling, Großschönau; Erik Opelt, Gerald Ullerich, beide Güstrow; Beate Thomas, Halle; Heike Reichelt, Matthias Schädlich, beide Hammerbrücke; Jutta Schumann, Havelberg; Mirko Schulze, Hoyerswerda; Silke Umbreit, Ilmenau; Christian Dietrich, Jena; Jens Steiniger, Kleinmachnow; Gert Künzelmann, Krina; Martin Böhm-Schweizer, Lauscha; Cornelia Zinke, Petra Gollewsky, Torsten Tok, Timo Zenker, Matthias Hübern, alle Leipzig; Anett Westland, Leubnitz; Michael Seidel, Leuna; Jörg Zimmermann, Sandra Ernst, beide Lössau; Claudia Popien, Magdeburg; Lutz Büttner, Torsten Ortloff, beide Martinroda; Volker Sachse, Mülsen; Antje Krause, Neubrandenburg; Arndt Kritzner, Neustadt; Dorothee Heidrich, Oberlungwitz; Frank Jäger, Oberschönau; Silke Stieber, Olbersdorf.

Weitere Preisträger und Wettbewerbsteilnehmer mit vorbildlichen Leistungen veröffentlichen wir in Heft 1/81.

## Kollektive Beteiligung

P.-Neruda-OS, Ahlbeck; OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP, Altenburg; W.-Pieck-OS, Altenweddingen; Walter-Ulbricht-OS, Altwigshagen; Karl-Marx-Schule, Anklam; OS der Botschafter der ARÄ, Kairo; OS G. Titow, Arenshausen; OS Ansbach; Kreis-AG Math., Aschersleben; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; OS H. Duncker, Bad Kleinen; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; Anton-Saefkow-OS (V), Otto-Grotewohl-OS, Magnus-Poser-OS, alle Bad Salzungen; OS H. Beimler, Bärenklau; OS Fr. Engels, Barby; OS E. Weinert, Berka; 39. OS E. Schönhaar, 26. OS, Wolodja-Dubimin-OS, H.-Weigel-OS, alle Berlin; OS A. Becker, Berlingerode; Kreis-AG Math., OS Fr. Mehring, beide Bernburg; Max-Planck-OS, OS Fr. Schiller, beide Bleicherode; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; Diesterweg-OS, Borna; OS Brandshagen; OS Breitenworbis; W.-Seelenbinder-OS, Breitungen; Pablo-Neruda-OS, Britz; M.-Poser-OS, Bürgel; TOS Büttstedt; OS Burkau; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; Sonderschule f. körperbehinderte Kinder, Station Jg. Naturf. u. Techniker, Klub Jg. Math., beide Cottbus; H.-Beimler-OS, Damgarten; OS Deutschenbora; OS I AG Math., OS Makarenko, beide Dingelstädt; K.-Bürgel-OS, Dobbertin; Marie-Curie-OS, Dohna; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS Dorfchemnitz; OS Alexander Matrossow, Dorndorf; 39. OS Fritz Schulze, 73. OS Hanns Rothbarth, 38. OS A. Thiele, Paul-Gruner-OS, alle Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; OS Effelder; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; J.-Schehr-OS, Eisleben; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Th.-Müntzer-OS, Fambach; OS Janusz Korczak, Finsterwalde; B.-Brecht-Floh; OS Frauenhain; OS Frauensee; W.-Pieck-OS, Freital; OS Friedeburg; H.-Heine-Schule, Gadebuxch; AG Math. Friedensschule, Gartz; R.-Arnstadt-OS, Geisa; W.-Pieck-OS, Geißen; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; J.-Brinckmann-OS, Goldberg; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; Pestalozzi-OS, Greiffenberg; 10. OS Otto Drews, E.-Thälmann-OS, Karl-Kuell-OS, alle Greifswald; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbodungen; Haus der JP, AG Math., Großenhain; G.-Dimitroff-OS, Groß Köris; Lessingschule, Großpostwitz; OS Großschönau; OS Großtreben; Dr.-S.-Allende-OS, Großweitzschen; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Haus der JP, Hagenow-Land; VI. OS, Haldensleben; M.-Gorki-OS, Hainichen; OS f. Körperbehinderte, Diesterwegschule, Bezirksklub Jg. Math., alle Halle; W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; Schule der DSF, Heiligengrabe; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; EOS E. Weinert, 1. OA H. Beimler, beide Herzberg; OS Hohendodeleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS Horka; Kreisklub Jg. Math., Hoyerswerda; OS Hundeshagen; G.-Ewald-OS, Ivenack; OS A. Bekker, Jatznick; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; E.-Thälmann-OS, Pionierhaus J. Gagarin, Alexander-Matrossow-OS, P.-Tschaikowski-OS, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; OS E. Schneller, Kirchberg; OS Kirchworbis; OS Kleinberndten; G.-Eisler-OS, Erw. Spezial-OS, beide Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; OS Könitz; Päd. Hochschule, AG Jg. Math., Köthen; OS Küllstedt; OS Kuhfelde; P.-Fürnberg-OS, Laage; *alpha*-Club, Latdorf; Schulkombinat, Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; EOS K. Marx, K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, alle Leinefelde; 146. OS, Leipzig; OS Liebstadt; W.-Pieck-OS, Lichte; Pestalozzi-OS, Limbach-Oberfrohna; EOS A. Becker, A.-Diesterweg-OS, beide Lobenstein; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; R.-Neddermeyer-OS, Löwenberg; G.-Eisler-OS, Martinroda; Fr.-Heckert-OS, Milkau; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille/Springstille; OS Naundorf; OS Neuhaus; OS Neundorf; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; EOS W. v. Humboldt, OS J. Gagarin, beide Nordhausen; OS Nordhausen-Niedersalze; Pestalozzi-OS, Oberlungwitz; OS E. Weinert, Oberschönau; W.-Seelenbinder-OS, Oechsen; OS Osternienburg; W.-Pieck-OS, Osterwieck; Station Jg. Naturf. u. Techn. Kreis-Klub Jg. Math., EOS, beide Parchim; EOS R. Fetscher, Pirna; Makarenko-OS, Plessa; A.-Becker-OS, Prenzlau; Station Jg. Naturf. u. Techn., Pritzwalk; OS Franz Plura, Pultitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Radis; Pestalozzi-OS, Radebeul; Cl.-Zetkin-OS, Raschau; J.-Gagarin-Schule, Fr.-Engels-OS, beide Ribnitz; H.-Matern-OS, Riesa; Kreis-AG Rochlitz; Ziolkowski-OS, Rossdorf; Haus d. JP, 34. OS, beide Rostock; *alpha*-Club W.-Pieck-OS, Rotta; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; OS M. Kirchner, Rudolstadt; OS Rüdnitz; OS Saal; OS II, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; M.-Gorki-OS, Schkölen; OS Schleiz; J.-G.-Seume-Schule, OS K. Marx, EOS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; H.-Beimler-Schule, Schönhausen; OS Kuba, Schule der DSF, Schorssow; E.-Thälmann-OS, Sebnitz; A.-Hennecke-OS, Senftenberg; OS A. Hennecke, Siersleben; OS W. Seelenbinder, Sitzendorf; OS W. Pieck, Sondershausen; OS A. Becker, K.-Liebknecht-OS, beide Spremberg; OS Stadtlengsfeld; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; O.-Grotewohl-OS, Stralsund; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; EOS K. Marx, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; W.-Schröder-OS, Teterow; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; OS Ückeritz; Goetheschule, A.-Nietz-OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS J.-G. Seume, Vacha; OS Viernau; OS Vitte; EOS J. Fučik, Waldheim; Goetheschule, Waren; OS Wasungen; OS L. Fürnberg, Wegeleben; Sprachheiloberschule, Weimar; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; OS Weißenborn-L.; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS Wernshausen; OS O. Grotewohl, Westerengel; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; *alpha*-Kollektiv OS Wingerode; OS W. Lohmann, Wittenberg; Station Jg. Naturf. u. Techn., OS IV, beide Wittstock; OS H. Heine, Wörmlitz; OS H. Beimler, Wolfen; OS Fr. Gießner, Wolfleben; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; OS II, Spezialistenlager d. Kreises, beide Worbis; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; OS Zahna; Peter-Lamberz-OS, Zehdenick; Betriebs-OS Robotron, Lutherschule, beide Zella-Mehlis; 9. OS, EOS, beide Zittau; OS Zöblitz; Lenin-OS, Zwenkau.

**Entwicklung des alpha-Wettbewerbs (absolut)**
* umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
** ab 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe pro Jahr



# Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald


Die 1456 gegründete Greifswalder Universität ist nach denen in Leipzig (1409) und Rostock (1419) die drittälteste der heute auf dem Territorium der DDR bestehenden Universitäten und zugleich nach Rostock die zweitälteste im gesamten nordeuropäischen Raum. Sie trägt heute den Namen des Patrioten und Kämpfers gegen die Leibeigenschaft Ernst Moritz Arndt (1769 bis 1860), der in Greifswald studierte und dort einige Jahre als Professor für Geschichte wirkte. Greifswald war jahrhundertelang ein verträumtes Städtchen am Rande des Weltgeschehens, dessen einzige Bedeutung in der kleinen, aber ehrwürdigen Universität bestand. In den letzten Jahren hat sich die Stadt vor allem auf Grund des in unmittelbarer Nähe entstehenden Kernkraftwerks *Bruno Leuschner* und der neuangesiedelten elektronischen Industrie sprunghaft entwickelt und zählt heute bereits über 70000 Einwohner.

Die Mathematik hat in der Greifswalder Universität bis zum Ende des 19. Jh. keine bedeutende Rolle gespielt. Erst in unserem Jh. gab es hier eine Reihe in der Fachwelt bekannter Mathematiker. Unter diesen ragt Felix Hausdorff (1868 bis 1942, siehe Foto) hervor, der von 1913 bis 1921 in Greifswald wirkte und zu den Begründern der Punktmengenlehre und der mengentheoretischen Topologie zählt. Er gilt heute international als einer der bedeutendsten Mathematiker in der ersten Hälfte des 20. Jh. Die Topologie ist ein junges und relativ abstraktes Gebiet der modernen Mathematik, das ähnlich der Mengenlehre, der mathematischen Logik und der allgemeinen Algebra zu den Grundlagen vieler anderer mathematischer Disziplinen beiträgt. Vereinfacht gesagt geht es in der Topologie darum, gewisse sehr allgemeine geometrische Begriffe wie z. B. Umgebung eines Punktes, Abstand zweier Punkte, Rand einer Menge, Dimension einer Menge, zusammenhängende Menge u. ä. und auf solche Begriffe bezügliche Sachverhalte von ihrer ursprünglichen anschaulichen Bedeutung im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum auf möglichst allgemeine „Räume" (d. h. Mengen, deren Elemente irgendwelche mathematische Objekte sind) zu übertragen und damit weite Teile der Mathematik für die geometrische Denkweise zu erschließen. Die Topologie und die ihr benachbarten Disziplinen (u. a. Maßtheorie, metrische Geometrie, Differentialgeometrie) haben aber auch viel für die kritische Analyse unserer anschaulichen Vorstellungen vom realen physikalischen Raum geleistet. Zum Beispiel zeigte Hausdorff, daß es möglich ist, eine Kugel so in drei Teilmengen $A$, $B$, $C$ und einen unwesentlichen Rest $R$ zu zerlegen, daß $A$, $B$, $C$, $R$ paarweise keine gemeinsamen Punkte besitzen, $A$, $B$, $C$ paarweise kongruent sind, aber auch $A \cup B$ kongruent $C$ ist. Hieraus folgt, daß es unmöglich ist, *allen* beschränkten räumlichen Mengen ein Volumen $V$ so zuzuordnen, daß dabei die folgenden Grundforderungen erfüllt sind:

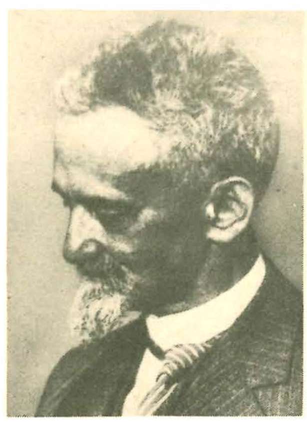
1. Für jede beschränkte (d. h. in einem genügend großen Würfel enthaltene) Punktmenge $M$ ist $V(M)$ als nichtnegative reelle Zahl definiert.
2. Sind $M$ und $N$ kongruent, so ist $V(M) = V(N)$.
3. Haben $M$ und $N$ höchstens Randpunkte gemeinsam, so ist $V(M \cup N) = V(M) + V(N)$.
4. Für einen Würfel $E$ der Kantenlänge 1 ist $V(E) = 1$.

Aus der sogenannten „paradoxalen Kugelzerlegung" von Hausdorff ergibt sich, falls man annimmt, daß die beteiligten Mengen $A$, $B$, $C$, $R$ ein Volumen besitzen:
$V(A) = V(B) = V(C) = V(A) + V(B)$,
d. h. $V(A) = V(B) = V(C) = 0$. Da auch $V(R) = 0$

Das 1747 bis 1750 vom ehemaligen Greifswalder Mathematikprofessor Andreas Maier erbaute Hauptgebäude der Greifswalder Universität (Bild links)

Die 1956 anläßlich des 500jährigen Bestehens der Greifswalder Univ. erschienene Briefmarke, die das Siegel der Univ. zeigt (oben)

Felix Hausdorff



sein muß, folgt, daß die betrachtete Kugel (und damit jede Kugel) das Volumen 0 hat. Dies steht im Widerspruch zu den Forderungen 1. bis 4. Überlegt selbst, wieso!

Warum wurde in diesem Rahmen so ausführlich auf die Topologie eingegangen? Sie und die mit ihr nahe verwandte Maßtheorie (zu der das dargelegte Volumenproblem gehört) werden in Greifswald besonders gepflegt. Von 1950 bis 1971 wirkte in Greifswald der international bekannte Topologe W. Rinow (1907 bis 1979, siehe Foto) als Direktor des Mathematischen Instituts bzw. der 1968 daraus hervorgegangenen Sektion Mathematik, der 1964 für seine Forschungen auf dem Gebiet der Topologie den Nationalpreis erhielt. Die durch Hausdorff und Rinow in Greifswald begründete Tradition wird heute im Wissenschaftsbereich *Analysis* der Sektion Mathematik weitergeführt und fließt in die Ausbildung der Diplommathematiker der Fachstudienrichtung Analysis ein. Im Wissenschaftsbereich Analysis gibt es außerdem Forschungskollektive, die sich mit harmonischer Analysis bzw. optimaler Steuerung von Prozessen beschäftigen. Diese Theorien finden Anwendung u. a. in der Physik der Elementarteilchen bzw. im Kernkraftwerksbetrieb.

W. Rinow

Der Wissenschaftsbereich *Mathematische Kybernetik/Rechentechnik/Grundlagen der Mathematik*, der der zweiten in Greifswald bestehenden Fachstudienrichtung für Diplommathematiker entspricht, besitzt ebenfalls eine nun schon 20jährige Tradition, die 1960 mit der Berufung von G. Asser nach Greifswald begann. Eine 1976 unter Leitung des jetzigen Sektionsdirektors E. Griepentrog gegründete Forschungsgruppe dieses Wissenschaftsbereiches beschäftigt sich vorwiegend mit mathematischen Problemen in der Entwicklung der Mikroelektronik. Sie hat in der VVB Nachrichtenelektronik, speziell im Greifswalder Betrieb NEG, einen wichtigen Praxispartner gefunden. Die Studenten beider Fachstudienrichtungen wachsen durch die enge Verbindung von Lehre und praxisverbundener Forschung frühzeitig in ihre zukünftigen Einsatzgebiete hinein.

Außer Diplommathematikern der beiden genannten Fachstudienrichtungen werden an der Universität Greifswald

Diplomlehrer in den Kombinationen Physik/Mathematik, Mathematik/Geographie und Geographie/Mathematik

ausgebildet. Die beiden letztgenannten Kombinationen gibt es sonst nur an der PH Dresden. Sie haben bisher vorwiegend weibliche Studenten „angelockt", was aber von der Sache her keineswegs begründet ist. Es gibt zwischen diesen beiden Fächern kaum weniger interessante Verbindungen als zwischen dem traditionsreichen Gespann Mathematik/Physik. Verwiesen sei nur auf mathematische Aspekte der Kartographie und Geodäsie, auf den Einsatz statistischer Methoden in der ökonomischen, Bevölkerungs- und Verkehrsgeographie und auf die immer bedeutsamer werdenden Probleme des Umweltschutzes, deren erfolgreiche Lösung ohne Mathematik undenkbar ist. Ein weiterer charakteristischer Zug der Lehrerausbildung an der Greifswalder Sektion Mathematik besteht darin, daß die Studenten im Rahmen der zur Diplomarbeit führenden wahlobligatorischen Fachausbildung näher mit einem von mehreren kleineren mathematischen Gebieten bekannt werden, die in enger Beziehung zur Schulmathematik stehen bzw. sich besonders für Schülerarbeitsgemeinschaften eignen, z. B. Mengenlehre, Kombinatorik, Graphentheorie, anschauliche Topologie, geometrische Konstruktionen.

Nicht zuletzt sei bemerkt, daß die trotz modernen, pulsierenden Lebens in mancher Hinsicht immer noch romantische Stadt Greifswald mit ihren historischen Gebäuden und der nicht nur wegen der nahen Ostseeküste reizvollen Umgebung und die kleine Universität mit ihrem persönlicheren Verhältnis zwischen Studenten und Lehrkräften manchen Ausgleich für die fehlenden Attraktionen einer Großstadt zu bieten vermag.

*P. Schreiber*

**Kepler-Gedenkmünze** (s. Bild S. 124)

Gesetzliches Zahlungsmittel seit 15. 10. 1971. Auflage 100000 Stück; Nennwert Mark 5,–; Prägestätte Berlin; Neusilber-Legierung – Kupfer (Cu 620/1000), Nickel (Ni 180/1000), Zink (Zn 200/1000); Gewicht 12,2 g; Durchmesser 29 mm; Darstellung des 2. Kepl. Gesetzes mit der elliptischen Erdumlaufbahn um die Sonne.

## Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Horst Melcher

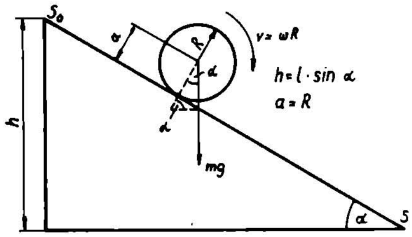
*Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule Dr. Theodor Neubauer, Erfurt*

▲2025▲ Ein rotationssymmetrischer homogener Körper der Masse $m$ rollt auf einer geneigten Ebene abwärts. Es ist die Energiebilanz aufzustellen, aus der die Endgeschwindigkeit ermittelt werden kann. Die Gleichung ist zu erläutern.

Welche Endgeschwindigkeiten erreichen auf der geneigten Ebene (Bild, $a = R$) folgende homogene Rollkörper gleicher Masse:

A) Vollkugel $v_K$, B) Vollzylinder $v_V$, C) Hohlzylinder $v_H$?

Das Ergebnis ist zu erläutern.




Rollkörper auf der geneigten Ebene (Kugel, Voll- und Hohlzylinder). Meßstrecke $s - s_0$.

### Unterhaltsamer Mathe-Unterricht

1. Welches Stundenthema behandelt

RENE VELT
7901 REICHO?

2. Welches Stundenthema behandelt

N. LUNG-GUN
1501 EICHE?

3. Mit welchem Arbeitsmittel arbeitet

M. KESSLER · WIEN

4. Mit welchem Arbeitsmittel arbeitet

J. Z. DRENCKE
EICHE?

5. Welchen Beruf hat

SIEGESMUND REEDERS-
NELFEN
WIEN?

*Fachlehrer D. Knape, Jessen*


# Mathematik und Wasserwirtschaft

**Der Wasserhaushalt und das Wasserdargebot der Erde**

Die Erde ist außerordentlich reich an Wasser. Ihre Gesamtvorräte belaufen sich auf die gewaltige Zahl von 1 386 000 000 km$^3$. Leider ist der größte Teil davon Salzwasser (Ozeane) und damit einer direkten Nutzung nicht zugänglich. Von der Oberfläche der Meere und des Festlandes verdunsten durchschnittlich jährlich 570 000 km$^3$ Wasser. Die gleiche Menge fällt in Form atmosphärischer Niederschläge.

Im Prozeß des Wasserkreislaufs erfolgt in der Natur eine Erneuerung und Selbstreinigung des Wassers, und im Unterschied zu anderen Ressourcen ist das Wasserdargebot unerschöpflich. Die Kompliziertheit des Problems der Wasserversorgung besteht nicht darin, daß 96,5 % Salzwasser sind. Die für 100 Jahre reichenden Süßwasservorräte der Erde sind beschränkt, sie betragen nur 35 Millionen km$^3$ oder 2,5 % der gesamten Wasservorräte der Erde. Dabei ist ihr größter Teil (über 70 %) in den Gletschern der Antarktis und Grönlands enthalten und damit für eine Nutzung nur schwer zugänglich.

Das sich im Kreislauf des Wassers regenerierende Süßwasserdargebot, das gegenwärtig die Hauptwasserquelle zur Befriedigung der vielfältigen Bedürfnisse der menschlichen Gesellschaft ist, beträgt nur 45 000 km$^3$ pro Jahr (ohne den Gletscherwasserabfluß der Antarktis) oder etwas über 0,003 % der gesamten Wasservorräte der Erde für 100 Jahre.

*Die Perspektiven der Wasserversorgungsbilanz:* Nach Angaben der Monographie ist in der Welt der Wasserverbrauch in der Industrie von 1900 bis 1975 um mehr als das Zwanzigfache gestiegen und steigt weiterhin. Von 45 000 km$^3$ sich erneuerndem Süßwasser werden gegenwärtig auf der ganzen Erde rund 3000 km$^3$ jährlich genutzt. Im Jahre 2000 werden es mindestens 6000 km$^3$ sein, was rund 13 % ausmacht. Am angespanntesten ist die Wasserversorgungsbilanz in Europa, wo 7 % des sich regenerierenden Süßwasserdargebots der Welt rund 20 % der Bevölkerung zur Verfügung stehen.

Auf den ersten Blick kann aus den angeführten Zahlen der optimistische Schluß gezogen werden, daß sogar in Europa die Nutzung des Wasserdargebots im Jahre 2000 25 % nicht übersteigen wird.

Die Monographie zeigt allerdings, daß von den 45 000 km$^3$ des sich jährlich regenerierenden Süßwasserdargebots, unter Beachtung dessen ungleichmäßiger Verteilung in Zeit und Raum, kaum mehr als 40 % praktisch genutzt werden können. Folglich beträgt der Anteil des im Jahre 2000 zu nutzenden Wasserdargebots nicht 13 %, sondern über 30 %. Zweitens wird dabei nicht die qualitative Verschlechterung des Wasserdargebots berücksichtigt. Für die Verdünnung sogar gereinigter industrieller, gewerblicher und häuslicher Abwässer, deren Volumen um die Jahrhundertwende 2000 km$^3$ übersteigen wird, sind jährlich über 20 000 km$^3$ frisches Wasser erforderlich.


Unter Beachtung des Gesagten wird die Wasserversorgungsbilanz der Erde im Jahre 2000 äußerst angespannt sein. In vielen Gebieten wird sich der Wasserbedarf dem realen Süßwasserdargebot nähern.

*Erforderliche Maßnahmen:* Die Bekämpfung unwiederbringlicher Verluste, der Kampf um die Einsparung von Wasser, die Einführung wasserfreier Fertigungsverfahren in die Produktion, die Verhütung von Wasserverschmutzung und die Mehrfachnutzung des Wassers sind die wichtigsten Maßnahmen.

Novosti Junesko 79

**DDR-Wasserwirtschaft**

Zur ausreichenden Bereitstellung von Trink- und Brauchwasser sind der Wasserwirtschaft unseres Landes folgende Aufgaben gestellt:

1. Gewährleistung eines stabilen Wasserdargebots in allen Jahreszeiten (Ausgleich des unterschiedlichen Wasserabflusses durch Speicherung in Talsperren, Speicher- und Rückhaltebecken, Bau von Wehren, Erschließen von Grundwasser usw.);
2. Bau von Anlagen zur Überleitung größerer Wassermassen von Überfluß- in Mangelgebiete;
3. Verstärkung der Mehrfachnutzung des Brauchwassers in den Industriebetrieben;
4. Erhöhung der Kapazität der Wasserwerke in den Großstädten und in Wasserspeichergegenden entsprechend dem steigenden Trinkwasserbedarf durch eine moderne Technologie der Aufbereitung von Oberflächen- und Grundwasser;
5. Erhöhung der Kapazität der Abwasserreinigungsanlagen (Kläranlagen der Städte; Abwasserreinigung als „letzte Produktionsstufe" in der chemischen Industrie);
6. Durchführung von Maßnahmen zur Überwachung, Reinhaltung und Sanierung der Gewässer;
7. Einflußnahme auf die Entwicklung wassersparender oder wasserfreier industrieller Produktion.

● Täglicher Wasserbedarf in der DDR 1977: Industrie 17 Mill. l, Landwirtschaft 3,8 Mill. l (13 Prozent der landwirtschaftlichen Nutzfläche werden bewässert, d. s. 800 000 ha), Haushalte 3,3 Mill. l. 900 kommunale Kläranlagen bereiten täglich nahezu 2,3 Mill. m$^3$ Abwasser auf. (Sie enthalten etwa 40 000 t Stickstoff, 20 000 t Kali, 15 000 t Phosphorsäure, 400 000 t organische Substanzen.)

● Der Verbrauch in der DDR ist heute 10mal so groß wie zur Jahrhundertwende auf unserem Gebiet. Für 1990 rechnet man mit einem um zwei Drittel höheren Wasserbedarf. 5300 Wasserwerke sorgen dafür, daß 1980 im Durchschnitt täglich 6,8 Mill. m$^3$ Trinkwasser in das zentrale Netz fließen.

● Es bestehen 78 500 km Trinkwasserleitungen mit 1500 Pumpstationen und 31 000 km Kanalisation. 31 000 km Wasserläufe, 13 200 Seen und Teiche, 162 Talsperren, Speicher und Rückhaltebecken, 4200 km Deiche und die 340 km lange Ostseeküste werden von den Werktätigen der Wasserwirtschaft betreut.

Neun von zehn Bürgern entnehmen ihr Trinkwasser aus dem zentralen Netz. Mehr als zwei Drittel der Wohnungen sind an die Kanalisation angeschlossen.

● In 100 Tagen ist der Verbrauch der Berliner Bevölkerung so groß wie die Masse an Wasser im Berliner Müggelsee (7,5 km$^2$, bis zu 8 m tief).

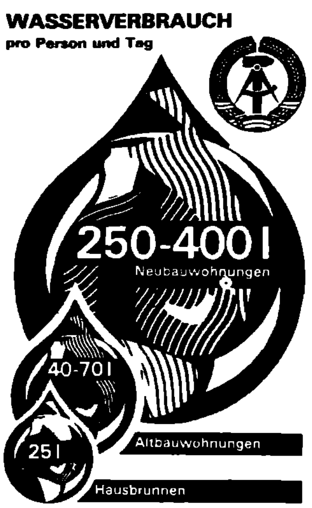
Der Wasserverbrauch für die Herstellung einiger Produkte:

1 t Stahl 86 000 l, 1 t Roheisen 1000 ... 12 000 l, 1 t Aluminium 1,2 Mill. l, 1 t synthetischer Kautschuk 2,3 Mill. l Wasser.

● Das Kombinat VEB Chemische Werke Buna braucht in einer Stunde mehr Wasser als Halle in 24 Stunden.

**Mecklenburgische Oberseen im Spiegel der Mathematik**

Auch der Bereich Wasserwirtschaft benötigt zur Lösung verschiedener Probleme die Mathematik. Am Beispiel der „Mecklenburgischen Oberseen“ sei das hier gezeigt.
Zu den „Mecklenburgischen Oberseen“ gehören die Müritz, der Kölpin-See, der Fleesen-See, der Plauer See und das Elde-Quellgebiet. Das sind insgesamt 235 $km^2$ Wasseroberfläche. Davon hat die Müritz, als größter See unserer Republik, allein 117 $km^2$. Der Fluß Elde, nicht verwechseln mit der Elbe, durchfließt die Oberseen bis zum Plauer See und mündet dann bei Dömitz (Wittenberge) in die Elbe.




**Aufgaben der Wasserwirtschaft**

1. Wasserreservoir

Die Speicherkapazität der „Mecklenburgischen Oberseen“ beträgt 100000000 $m^3$ Wasser, das entspricht etwa dem Fassungsvermögen der Rappbodetalsperre, die 105 mal $10^6$ $m^3$ Wasser aufnehmen kann. Die Aufgabe als Wasserreservoir besteht darin, den landschaftlich notwendigen Mindestabfluß zu garantieren. Das bedeutet unter anderem, daß die Elde ab Plau ganzjährig als Wasserstraße erhalten bleibt. Ab Schleuse Mirow wird durch Wasserabgabe in die Havel ebenfalls der Schiffahrtsverkehr aufrechterhalten. Es fließen in jeder Sekunde 5 $m^3$ Wasser in die Elde und 3,5 $m^3$ Wasser in die Havel. Das sind in jeder Sekunde 8500 Liter Wasser! Es ist von Fachleuten berechnet worden, daß diese Menge 200 Tage im Jahr ohne Gefahr für die Oberseen abfließen kann.

2. Bereitstellung von Bewässerungswasser

Neben der Aufgabe, den Schiffahrtsverkehr auf Elde und Havel zu gewährleisten, müssen die Oberseen auch Wasser für die Beregnung und für die Einstaubewässerung in Gräben zur Verfügung stellen. Diese Leistung ist nicht auf das Müritzgebiet beschränkt. Nach dem Bericht des IX. Parteitages der SED soll die Müritz für die Beregnung von 40000 ha Havellandschaft genutzt werden. Man bedient sich dabei der „Riesenwasserleitung“ Elde-Havel-Kanal!

3. Erholungsfunktion der Gewässer

Im Müritz-Seenpark verleben jährlich etwa 150000 Urlauber mit Zelt oder vom Boot aus ihren Urlaub. Dazu kommen noch Tagesurlauber, die mit dem PKW anreisen, und die Urlauber, die im FDGB-Urlauberkomplex Klink wohnen. Dem Sportangler bieten die Seen, neben der Möglichkeit einen guten Fisch zu fangen, bleibende Naturerlebnisse in landschaftlich einmaliger Umgebung. Aktiver Sport wird überall auf den Oberseen betrieben, dabei sind Segeln und Wasserski an erster Stelle zu nennen.

4. Fischwirtschaft

Die Fischereiproduktionsgenossenschaften fangen Zander, Barsch, Aal, Brachsen, Hecht, Schlei und Karpfen. An verschiedenen Stellen gibt es Forellenmastanlagen, die bis zu 550 t Forellen jährlich liefern.

5. Bedeutung als Wasserstraße

Neben dem Transport von Kies, Getreide, Steinen und Schrott darf die Funktion als Wasserstraße für die Urlauber nicht unterschätzt werden. Von der Müritz aus kann man mit dem Sportboot bis Prag fahren, und man sieht jedes Jahr Boote aus Polen und der ČSSR auf den Oberseen.

6. Einige Zahlen

Richtwasserstand für die Oberseen: Am 1. Mai eines jeden Jahres soll der Wasserstand 62,3 m über NH (Normalhöhe) betragen. Anfang Mai ist stets der höchste, Anfang November stets der niedrigste Wasserstand. Das Einzugsgebiet für die „Mecklenburgischen Oberseen“ beträgt 2300 $km^2$. Man rechnet mit 600 mm Niederschlag je Jahr, davon verdunsten 500 mm, und es bleiben als Nutzungsmenge jährlich nur 100 mm.
Der Eldequerschnitt bei Dömitz beträgt etwa 18 $m^2$. Bei hohem Wasserstand fließt die Elde 0,6 m pro Sekunde, bei niedrigem Wasserstand nur 0,1 m pro Sekunde.

7. Berufsmöglichkeiten

1. Wasserbaufacharbeiter oder Wasserwerkstechniker
Zentrale Ausbildungsstätte: Neubrandenburg beim VEB WAB (Wasserversorgung und Abwasserbehandlung)
2. Ingenieur für Wasserwirtschaft
Ingenieurhochschule für Wasserwirtschaft Magdeburg
3. Hochschulstudium Wasserwirtschaft und Hydrologie an der TU Dresden.

**Aufgaben**

▲1▲ Wie groß ist die jährliche Nutzungsmenge im gesamten Gebiet der Oberseen in $m^3$, wenn 100 mm als Nutzung zugrunde gelegt werden?

▲2▲ Die stärksten Beregner, die in der Landwirtschaft eingesetzt werden, haben eine Leistung von 16 Liter je Sekunde. Sie beregnen eine kreisförmige Fläche mit einem Radius von 35 m.
a) Wie groß ist die beregnete Fläche in $m^2$?
b) Wieviel Kubikmeter Wasser werden bei einem Einsatz von 80 derartigen Beregnern in 4 Stunden auf das Feld gebracht?
c) Wie lange müßte diese Anlage arbeiten, damit der Wasserspiegel der Müritz um 1 cm fällt?

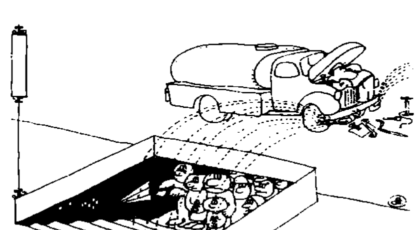
▲3▲ Eine Schleuse ist 38 m lang, 5,40 m breit und hebt bei jedem Schleusenvorgang die Schiffe um 3,50 m.
Wieviel Liter Wasser werden dabei jedesmal vom Oberlauf in den Unterlauf befördert?

▲4▲ Bei Sturm rechnet man mit der doppelten Tiefe für die notwendige Länge der Ankerleine, um einen sicheren Halt des Ankers zu gewährleisten. So nimmt man bei 8 m Wassertiefe 16 m Ankertau.
Unter welchem Winkel steht dann die Ankerleine zum Grund?

▲5▲ Der Preis für einen Kubikmeter Wasser beträgt 0,30 M. Man rechnet pro Person und Tag mit einem durchschnittlichen Verbrauch von 330 Liter in einem Eigenheim.
Wieviel Haushaltsgeld muß eine vierköpfige Familie für ein Jahr für diese Ausgabe einplanen?

▲6▲ Ein Abwasserkanal hat einen trapezförmigen Querschnitt. Die untere Breite beträgt 2,80 m, die obere Breite 3,60 m. Die Höhe beträgt 1,60 m. Wieviel $m^3$ Abwasser fließen in einer Stunde durch den Kanal, wenn er bis zur halben Höhe gefüllt ist und die Strömungsgeschwindigkeit 1,8 m/s beträgt?

*H. Pätzold*



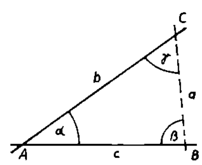
# Schriftliche Abschlußprüfung

## Fach Mathematik Klasse 10 – Schuljahr 1979/80

### Pflichtaufgaben

1. In der sowjetischen Weltraumstation Salut 6 arbeiteten bisher drei Stammbesatzungen, die jeweils Weltrekorde im Langzeitflug aufstellten. Der Flug der ersten Stammbesatzung dauerte 96 Tage. Der Flug der zweiten Stammbesatzung, mit der auch unser Kosmonaut Sigmund Jähn zusammenarbeitete, dauerte 140 Tage.
a) Um wieviel Prozent überbot die zweite Stammbesatzung die Flugzeit der ersten?
b) Nach internationaler Festlegung muß die Dauer eines Weltraumfluges mindestens 10% über der bisherigen Rekordzeit liegen, um als neuer Weltrekord anerkannt zu werden. Nach wieviel Tagen ihres Fluges hatte die dritte Stammbesatzung diese Bedingung erfüllt?

2. Zwei Straßen schneiden einander im Punkt $A$. Durch Punkt $B$ auf der einen Straße wird eine Rohrleitung gelegt, welche die andere Straße im Punkt $C$ schneidet (siehe Skizze!).



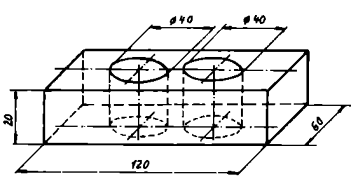

Bei der Vermessung wurden folgende Werte ermittelt:

$\overline{AB} = c = 4{,}7$ km,
$\sphericalangle BAC = \alpha = 35°$,
$\sphericalangle CBA = \beta = 85°$.

a) Konstruieren Sie das Dreieck $ABC$ in einem geeigneten Maßstab!
b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$!
c) Berechnen Sie die Länge $a$ des Abschnittes $\overline{BC}$ der Rohrleitung!
d) Um einen Näherungswert $a_N$ für die Länge des Abschnitts $\overline{BC}$ zu erhalten, wurde für den Winkel $\sphericalangle CBA = \beta$ der Näherungswert 90 verwendet. Die Werte für $AB = c$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ blieben unverändert. Berechnen Sie den Näherungswert $a_N$!
e) Geben Sie den absoluten Fehler $a_N - a$ an!

3. Gegeben ist das Gleichungssystem
(1) $y = -x + 5$ (2) $3y = 4x - 6$.
a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem rechnerisch!
b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion! Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar!
c) Bezeichnen Sie den Schnittpunkt beider Graphen mit $S$! Geben Sie die Koordinaten von $S$ an, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von a)!

4. Die Skizze zeigt ein quaderförmiges Werkstück mit zwei durchgehenden zylinderförmigen Bohrungen.
a) Berechnen Sie das Volumen des Werkstücks, und geben Sie es in Kubikzentimeter an!
b) Das Werkstück besteht aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$. Berechnen Sie seine Masse!




5. a) Für alle natürlichen Zahlen gilt folgende Aussage:
„Wenn die kleinste von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen gerade ist, so ist deren Summe durch 10 teilbar.“
- Geben Sie mit Hilfe von Variablen fünf derartige Zahlen an!
- Beweisen Sie, daß die obenstehende Aussage wahr ist!

b) Zeigen Sie, daß folgende Aussage falsch ist!
„Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist *immer* durch 10 teilbar.“

6. a) Gegeben ist die Ungleichung $3x < 9{,}6$ $(x \in P)$.
- Lösen Sie diese Ungleichung!
- Geben Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

b) Zeichnen Sie eine beliebige Strecke $\overline{CD}$, und konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte dieser Strecke!
c) Gegeben ist $\cos x = 0{,}6782$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$. Geben Sie alle Lösungen im vorgegebenen Intervall an!
b) Berechnen Sie $x$!

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 10^7 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2}}{3{,}6 \cdot 10^3}$$

### Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur *eine* zu lösen.

7.1. a) Durch $y = x^2 - 2$ $(x \in P)$ ist eine Funktion gegeben.
- Zeichnen Sie den Graph der Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq +3$!
- Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes $S$ dieses Graphen an!
- Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

b) Durch die Gleichung

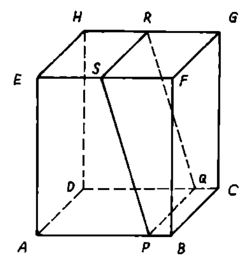
$$y = \frac{1}{2}x^2 \; (x \in P)$$

ist eine weitere Funktion gegeben.
- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq +3$!
- Berechnen Sie alle Werte $x$ dieser Funktion, für die der Funktionswert $y = 4{,}5$ ist!

c) Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an, der im II. Quadranten liegt!

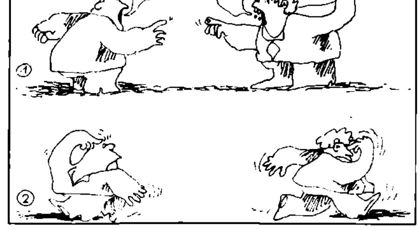
7.2. Ein Dreieck $PQR$ soll zentrisch gestreckt werden.
a) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem auf Millimeterpapier (Koordinateneinheit: 1 cm) das Dreieck $PQR$ mit $P\,(2;1)$, $Q\,(5;1)$ und $R\,(2;3)$!
b) Zeichnen Sie das Dreieck $P'Q'R'$, das bei der zentrischen Streckung des Dreiecks $PQR$ mit dem Streckungszentrum $Z\,(0;0)$ und dem Streckungsfaktor $k = 2$ entsteht!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A$ des Dreiecks $PQR$!
d) Es sei $A'$ der Flächeninhalt des Dreiecks $P'Q'R'$. Geben Sie das Verhältnis $A' : A$ an!

7.3. Gegeben ist ein Quader, der von einer Ebene in den Punkten $P, Q, R, S$ geschnitten wird (siehe Skizze).




$\overline{AB} = \overline{BC} = 6{,}0$ cm
$\overline{AE} = 7{,}0$ cm
$\overline{AP} = \overline{DQ} = 5{,}0$ cm
$\overline{ES} = \overline{HR} = 2{,}0$ cm

a) Stellen Sie den Quader einschließlich der Schnittfigur in senkrechter Zweitafelprojektion (auf unliniiertem Papier) dar!
Bezeichnen Sie alle Punkte entsprechend der Skizze!
b) Konstruieren Sie die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt!
c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PS}$!



# VIII. Physikwettbewerb 1980

Der VIII. Physikwettbewerb der DDR fand vom 25. bis zum 29. Februar 1980 an der Pädagogischen Hochschule *Liselotte Herrmann* in Güstrow statt. Es wurden dazu die 50 besten Teilnehmer der Auswahlklausur im November 1979 eingeladen, je 25 aus den Klassenstufen 9/10 und 11/12.
Im ersten Teil des Wettbewerbs wurden den Teilnehmern vier theoretische Aufgaben aus den Gebieten Mechanik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre und Optik gestellt. Für die Lösung standen ihnen fünf Stunden zur Verfügung. Im zweiten Teil sollten sie – ebenfalls in 5 Stunden – eine experimentelle Aufgabe lösen. Für die Lösung jeder theoretischen Aufgabe wurden bis zu 10 Punkten, für die vollständig richtige Lösung der experimentellen Aufgabe 20 Punkte vergeben, so daß insgesamt höchstens 60 Punkte erreicht werden konnten.
Zum Abschluß des Wettbewerbs wurden die erfolgreichsten Teilnehmer ausgezeichnet.

*B. Träger/U. Walta*

**Klassenstufe 11/12**

*1. Preis:* Ralf Muschall (Kl. 11), EOS *Ernst Abbe*, Eisenach; Axel Fröhlich (Kl. 12), Spezialschule *Carl Friedrich Gauß*, Frankfurt (O); Stefan Müller-Pfeiffer (Kl. 11), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena
*2. Preis:* Peter Wüstner (Kl. 11), EOS *Karl Marx*, Leipzig; Jürgen Gräfenstein (Kl. 11), Spezialschule *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Ralf Fritzsch (Kl. 12), Spezialklasse an der TH Karl-Marx-Stadt; Bernd König (Kl. 12), Thomas-EOS Leipzig
*3. Preis:* Ralf Malz (Kl. 11), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena

**Klassenstufe 9/10**

*1. Preis:* Volker Leutheuser (Kl. 10), EOS *Hermann Pistor*, Sonneberg; Ulf Heim (Kl. 9), Spezialschule *Carl Friedrich Gauß*, Frankfurt (O); Gert Hagner (Kl. 9), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena
*2. Preis:* Frank Hietzge (Kl. 10) und Karsten Kunze (Kl. 10), beide Spezialschule *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Günther-Matthias Trausch (Kl. 10), EOS *Max Klinger*, Leipzig; Jens-Uwe Umbreit, EOS *J. W. Goethe*, Ilmenau
*3. Preis:* Lutz Hille (Kl. 10), EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Axel Stiebritz (Kl. 10), Spezialschule *Carl Friedrich Gauß*, Frankfurt (O); Arndt Stietritz (Kl. 9), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena; Peter Damaschke (Kl. 10), EOS Worbis; Jörg Neugebauer (Kl. 10), EOS *Heinrich Hertz*, Berlin

**Theoretische Aufgaben (Klasse 9 und 10)**

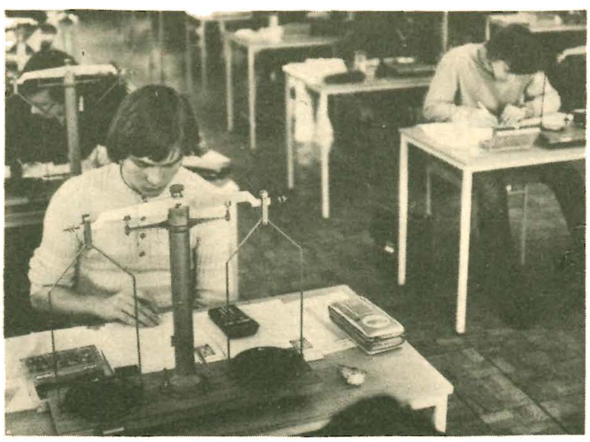
▲1▲ Eine 5 mm dicke quadratische Aluminiumplatte (Seitenlänge 20 cm) hat in der Mitte ein kreisförmiges Loch (Durchmesser 10 cm). Auf diesem Loch liegt eine Eisenkugel (Durchmesser 10,02 cm). Platte und Kugel haben zunächst die gleiche Temperatur. Die Platte wird durch eine elektrische 100-W-Heizung gleichmäßig erwärmt, bis die Kugel durch das Loch fällt. Durch Wärmeleitung wird auch die Kugel erwärmt. Deren Temperatur erhöht sich bis zum Durchfallen durch das Loch um halb so viel wie die der Platte. Es wird angenommen, daß keine Wärmeverluste auftreten.
Stoffkonstanten für Aluminium:
Dichte $\varrho_{Al} = 2{,}7\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$,
linearer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha_{Al} = 23{,}4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K^{-1}}$,
spezifische Wärmekapazität
$c_{Al} = 909\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.
Stoffkonstanten für Eisen:
Dichte $\varrho_{Fe} = 7{,}86\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$,
linearer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha_{Fe} = 12{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K^{-1}}$,
spezifische Wärmekapazität
$c_{Fe} = 465\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.
Wie lange dauert es, bis die Kugel durch das Loch fällt?

▲2▲ An die Klemmen einer Batterie (Urspannung $U = 12$ V, Innenwiderstand $R_i = 0{,}5\ \Omega$) sind zwei parallel geschaltete Widerstände $R_1$ und $R_2$ angeschlossen. An diesen Widerständen wird während 1,5 Stunden eine Wärme von $W_w = 62{,}1$ kJ frei.
a) Wie groß ist der Gesamtwiderstand von $R_1$ und $R_2$?
b) Wie groß ist die Gesamtstromstärke $I$ im Stromkreis?
c) Wie groß sind $R_1$ und $R_2$, wenn nach dem Ausschalten von $R_2$ die Stromstärke auf die Hälfte sinkt?

▲3▲ Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 4 \cdot 10^7\ \mathrm{ms^{-1}}$ auf einer waagerechten Bahn und tritt dann senkrecht zu den Feldlinien in das elektrische Feld eines Plattenkondensators ein (quadratische Platten, Plattenlänge $l_1 = 4$ cm, Plattenabstand $d = 1{,}6$ cm, Längskanten parallel zur Anfangsbahn des Elektrons). Die Spannung zwischen den Platten beträgt $U = 910$ V. Im Abstand $l_2 = 10$ cm hinter dem Kondensator steht senkrecht zur Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ein Fluoreszenzschirm.
a) Welche Kraft wirkt zwischen den Platten auf das Elektron?
b) Welche Form hat die Bahn des Elektrons vom Eintritt in das elektrische Feld bis zum Auftreffen auf den Schirm?
c) Welche Geschwindigkeit hat das Elektron beim Austritt aus dem elektrischen Feld?
d) Wie groß ist auf dem Schirm der Abstand zwischen dem Auftreffpunkt des Elektrons und dem Punkt, auf den es ohne Ablenkung getroffen wäre?
e) Welche Form hätte die Bahn des Elektrons in einem magnetischen Feld?
Die relativistische Massenänderung kann vernachlässigt werden. Das Elektron bewege sich immer im Vakuum.

▲4▲ Ein zylindrisches Gefäß mit der Grundfläche $A$ ist bis zur Höhe $h$ mit Wasser gefüllt und schwimmt auf Wasser. Die Eintauchtiefe ist $H$.
Wie verändern sich die Höhen $h$ und $H$, wenn in das Gefäß ein Würfel mit dem Gewicht $G = 12$ p gebracht wird, dessen Kantenlänge a) $l_1 = 2{,}5$ cm, b) $l_2 = 2$ cm ist?
Die Dicke der Gefäßwand wird vernachlässigt.

*Hinweis:* Die experimentelle Aufgabe Klasse 9 bis 12 sowie die theoretischen Aufgaben zu den Klassen 11 und 12 findet der interessierte Leser in der Zeitschrift *Physik in der Schule*, Heft 6/80, d. Red.



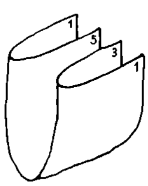
Der beste Teilnehmer des Wettbewerbs, Ralf Muschall, EOS *Ernst Abbe* Eisenach, bei der experimentellen Klausur

JUNGER PHYSIKER WETTBEWERB GÜSTROW

# In freien Stunden · alpha heiter

### Gefalztes

Man kniffe einen unbeschriebenen Bogen Papier zweimal, um so ein unaufgeschnittenes „Minitagebuch“ zu erhalten. Numeriert nun, ohne das Tagebuch zu entfalten, die einzelnen Seiten hintereinander von 1 bis 8! Faltet den Bogen dann auseinander! Es ergibt sich auf der Vorder- und Rückseite eine bestimmte Anordnung der Zahlen (s. die beiden unteren Abbildungen). Versucht nun, die Aufgabe in umgekehrter Weise zu bewältigen, indem ihr ein weißes Blatt beiderseits in vier Teile teilt und diese dann so numeriert, daß beim Zusammenfalten des Bogens die Seiten fortlaufend richtig numeriert sind!




| | |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 5 | 8 |

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 7 | 6 |

Dann wagt euch an eine schwierigere Aufgabe: Teilt einen unbeschriebenen (größeren) Bogen in 8, 16 oder 32 Teile, numeriert diese und faltet den Bogen dann entsprechend zusammen! Wie müßte beispielsweise die Vornumerierung für ein 32seitiges derartiges Tagebuch aussehen? *NBl, Berlin*

### alpha-Produkte

In nachfolgenden Gleichungen sind die Buchstaben so durch die Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

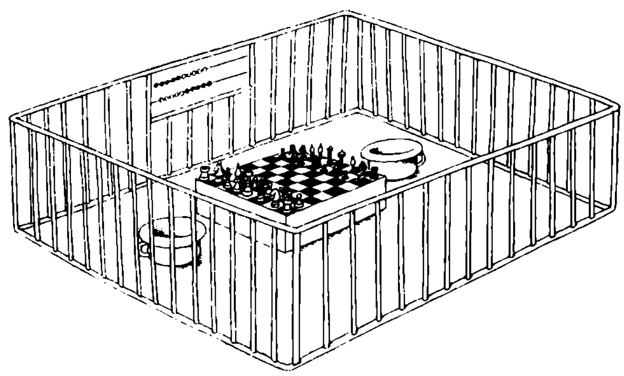
| | |
|---|---|
| $\alpha \cdot \alpha \cdot EVE = PEPE$ | $D \cdot \alpha \cdot EVE = UDUD$ |
| $P \cdot \alpha \cdot EVE = RTRT$ | $U \cdot \alpha \cdot EVE = KOKO$ |
| $R \cdot \alpha \cdot EVE = OKOK$ | $K \cdot \alpha \cdot EVE = TRTR$ |
| $O \cdot \alpha \cdot EVE = DUDU$ | $T \cdot \alpha \cdot EVE = EPEP$ |

*OL Ing. K. Koch, Schmalkalden*

### Vier Züge auf dem Schachbrett

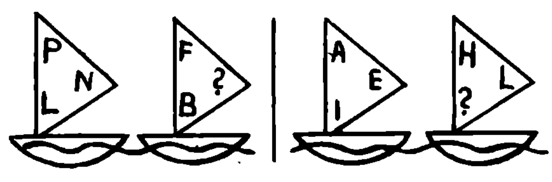
Auf dem leeren Schachbrett (8 ×8 Felder) soll die Schachfigur „Turm“ durch vier Züge aus dem linken unteren Eckfeld in das rechte obere Eckfeld gebracht werden. Man bestimme die Anzahl der Vierzüger, wenn nur Züge nach rechts und nach oben verwendet werden, also keine rückläufigen wie beim Schachspiel.

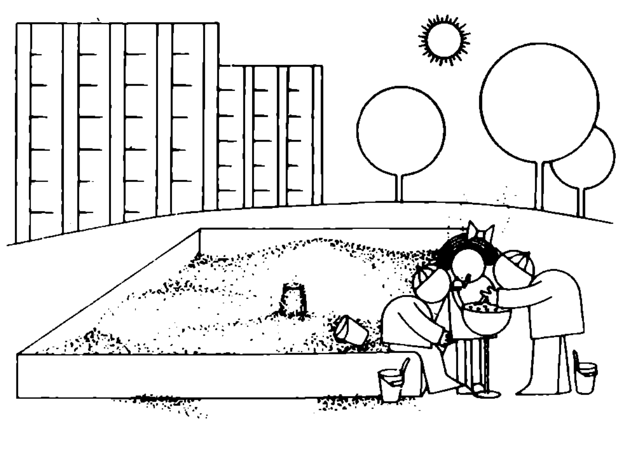
*Dr. G. Hesse, Radebeul*



### Logische Überlegung

Betrachte die beiden Bilder! Welche Buchstaben gehören an Stelle der Fragezeichen? *Aus: Troll, Berlin*



**Füllrätsel**

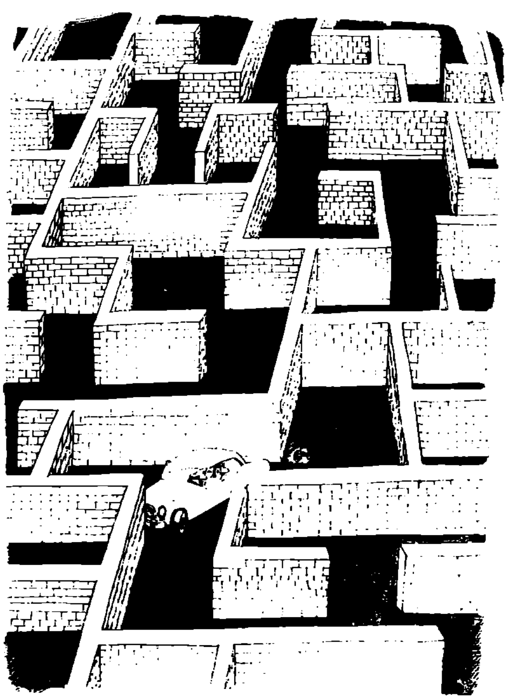
Waagerecht:

1. Tschechischer Math. (1781 bis 1848), der u. a. die Infinitesimalrechnung vervollständigte
2. Ein Kegelschnitt
3. Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind
4. Begriff aus der Logarithmenrechnung
5. Größenbeziehung in der Mengenrechnung
6. Gleichmäßig gekrümmte Kurve, die für jedes Dreieck existiert
7. Deutscher Math. (1646 bis 1716), Begründer der Infinitesimalrechnung
8. Deutscher Math. (1728 bis 1777), leistete u. a. Vorarbeiten zur Begründung einer nichteuklidischen Geometrie
9. Gleichmäßig gekrümmte Kurve, die die Seiten eines Vielecks berührt.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |

Die Anfangsbuchstaben, von oben nach unten gelesen, nennen den Namen einer Schweizer Gelehrtenfamilie, der große Mathematiker entsprangen.

*Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*



**Kryptarithmetik**

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.
a) Es sind die kleinste und die größte Summe zu finden.
b) Es ist die größte Summe zu finden.
c) Es ist eine Summe zu finden.

a)
WEBER
REGER
BERG
MUSIK

b)
UHU
EULE
FALKE
VÖGEL
$H < K$

c)
LILIE
TULPE
NELKE
BLUMEN
$P < K$

*Dirigent Jindrich Pěnčik, Praha*

**Zahlenmagie**

Fünf Quadrate mit je vier Zahlen ergeben jeweils die Summe 27. Viel Spaß!

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 4 | 8 | 2 | 12 | 16 | 25 | 24 | 27 |
| 3 | 11 | 9 | 13 | 5 | 9 | 9 | 4 | 26 |
| 7 | 22 | 26 | 11 | 11 | 4 | 6 | 8 | 11 |
| 11 | 13 | 9 | 2 | 17 | 2 | 23 | 2 | 14 |
| 3 | 3 | 6 | 10 | 12 | 55 | 4 | 34 | 5 |
| 13 | 8 | 1 | 15 | 6 | 15 | 26 | 18 | 3 |
| 9 | 17 | 21 | 2 | 13 | 9 | 17 | 5 | 25 |
| 14 | 20 | 5 | 3 | 1 | 6 | 14 | 1 | 47 |
| 18 | 20 | 4 | 35 | 7 | 19 | 2 | 10 | 9 |
| 27 | 2 | 1 | 20 | 10 | 12 | 5 | 9 | 27 |

**Die Angst der Ochsen**

Als seinerzeit im alten Griechenland,
wo Weise gerne von sich reden machten,
Pythagoras zu seinem Lehrsatz fand,
ließ er vor Freude hundert Ochsen schlachten.
Seither, so heißt es, fangen überall
auf dieser Welt die Ochsen an zu zittern,
wenn sie, wie im erwähnten Beispielsfall,
das Werden einer neuen Wahrheit wittern... R. S.

*Aus: Freie Welt 12/80*

**Abschied von 1980**

Ein Großvater, seine Tochter und ihr kleiner Sohn haben am selben Tag Geburtstag. Bei der Feier stellt man fest, daß das Produkt aus den Zahlen, die ihre Lebensalter in vollen Jahren angeben, genau 1980 ergibt.
Die Summe der drei Altersangaben ergibt eine Primzahl. Auch die Summe der Jahre von Großvater und Enkel ergibt ebenso wie die Summe der Lebensjahre von Mutter und Sohn eine Primzahl.
Wie alt sind Großvater, Mutter und Sohn?

*Schuldirektor W. Förg, Schwaz (Österreich)*

# Lösungen

**Lösung zu: Wir suchen ein Teil des Atoms,** S. 130:

1. Achterschale, 2. Titan, 3. Ordnungszahl, 4. Meßzylinder, 5. Kohlensäure, 6. Elektronenschreibweise, 7. Reagenzglas, 8. Neutralisation. – *Atomkern*

Zusammengestellt von Schülern der Polytechnischen Oberschule *Leutnant Lutz Meier*, 3706 Schierke. Eingesandt von Ingrid Hinze, Fachlehrerin für Chemie.

**Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Melcher,** S. 133

Es wird die Bewegung des Schwerpunktes betrachtet. Die potentielle Energie wird in Bewegungsenergie umgewandelt, die sich aus der kinetischen Energie der Translation und der kinetischen Energie der Rotation zusammensetzt:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{J_S\omega^2}{2}. \qquad (1)$$

($J_S$ als Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt)

Mit der Rollbedingung $v=\omega a$ folgt aus (1) nach Umformung für die Endgeschwindigkeit

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{J_S}{ma^2}}}. \qquad (2)$$

Im speziellen Fall nach dem Bild ist der Abstand der Drehachse von der Schwerpunktachse $a=R$.

Die Gleichung (2) ergibt sich auch aus dem Ansatz $mgh=J_A\frac{\omega^2}{2}$ mit dem Steinerschen Satz $J_A=J_S+ma^2$ und der Rollbedingung. Das Trägheitsmoment der drei Rollkörper ist $J_S=kmR^2$, mit $k=\frac{2}{5}$ Vollkugel, $k=\frac{1}{2}$ Vollzylinder und $k=1$ Hohlzylinder.

Damit ist gemäß Gleichung (2):

A) $v_K=\sqrt{\frac{5}{7}\cdot 2gh}$, B) $v_V=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot 2gh}$,

C) $v_H=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2gh}$.

Ein Vergleich dieser drei Geschwindigkeiten ergibt: $v_K>v_V>v_H$. Bei einem gemeinsamen Start der drei Rollkörper gleicher Masse passiert die Kugel als erste das Ziel, der Hohlzylinder ist wegen seines großen Trägheitsmoments am langsamsten.

Weitere 16 Aufgaben im Zusammenhang mit dem Thema: „Bewegung von Rollkörpern auf einer geneigten Ebene" findet der interessierte Leser in der Zeitschrift *Physik in der Schule* 6/1980.

**Lösung zu: Unterhaltsamer Mathe-Unterricht,** S. 133

1. Rechenvorteile; 2. Ungleichungen; 3. Winkelmesser; 4. Zeichendreieck; 5. Ingenieur des Fernmeldewesens.

**Lösungen zu: Mathematik und Wasserwirtschaft,** S. 135

▲1▲ Nutzungsmenge: 230000000 $m^3$ Wasser

▲2▲ a) Fläche, die ein Beregner beregnet: 3846,5 $m^2$

b) 80 Beregner verbrauchen in 4 Stunden 18432 $m^3$ Wasser.

c) Die Anlage müßte etwa 369 Stunden ununterbrochen arbeiten, das sind rund 15 Tage.

▲3▲ Es werden bei jedem Schleusenvorgang 718000 l Wasser benötigt.

▲4▲ Der Winkel ist 30° groß.

▲5▲ 142,56 M bei 360 Tagen.

▲6▲ 15552 $m^3$ in einer Stunde.

**Lösungen zu alpha-heiter,** S. 138

**Gefalztes**

Die Numerierung der Seiten für ein 32seitiges Tagebuch muß so aussehen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 28 | 29 | 4 |
| 12 | 21 | 20 | 13 |
| 9 | 24 | 17 | 16 |
| 8 | 25 | 32 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 30 | 27 | 6 |
| 14 | 19 | 22 | 11 |
| 15 | 18 | 23 | 10 |
| 2 | 31 | 26 | 7 |

**alpha-Produkte**

Die Ergebnisse der Multiplikationen sind vierstellige Zahlen mit der Struktur

$1000a+100b+10a+b=1010a+101b$

$=101(10a+b)$

$[a=1,\ldots 9;\ b=0,\ldots 9]$.

Der in allen Gleichungen auftretende Faktor EVE muß folglich die Zahl 101 sein.

Wird jede der Gleichungen durch diesen Faktor dividiert, vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$\alpha\cdot\alpha=\mathrm{PE}$

$\mathrm{P}\cdot\alpha=\mathrm{RT}$

$\vdots$

$\mathrm{T}\cdot\alpha=\mathrm{EP}$

Wegen E = 1 kann $\alpha$ in $\alpha\cdot\alpha=\mathrm{PE}$ nur 9 sein, woraus P = 8 folgt. P = 8 in $\mathrm{P}\cdot\alpha=\mathrm{RT}$ eingesetzt, liefert R = 7 und T = 2. Dieses Verfahren kann bis zur letzten Gleichung fortgesetzt werden. Die Lösung lautet: $\alpha=9$, P = 8, R = 7, O = 6, D = 5, U = 4, K = 3, T = 2, E = 1, V = 0.

**Vier Züge auf dem Schachbrett**

Symbolik: $r^i$ mit $i\in(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ bedeutet einen Zug um $i$ Felder nach rechts, $o^i$ um $i$ Felder nach oben.

Die Folge von vier Symbolen gibt die vier Einzelzüge an, die sich zum Vierzüger zusammensetzen. Ein Vierzüger kann zusammengesetzt werden

a) aus drei $r$-Zügen und einem $o$-Zug,

b) zwei $r$-Zügen und zwei $o$-Zügen,

c) aus einem $r$-Zug und drei $o$-Zügen.

In der folgenden Aufstellung sind die Symbole nach steigenden Hochzahlen geordnet.

a) $r^1r^1r^5o^7 \quad r^1r^2r^4o^7 \quad r^1r^3r^3o^7 \quad r^2r^2r^3o^7$

In $r^1r^2r^4o^7$ kann man $4!=24$ Umstellungen (Permutationen) der Symbole vornehmen, in den übrigen drei wegen der Wiederholung je $\frac{4!}{2!}=12$ Permutationen. Es gibt also $24+3\cdot 12=60$ Vierzüger (a).

b) Man bildet das sogenannte Mengenprodukt

$(r^1r^6, r^2r^5, r^3r^4)\cdot(o^1o^6, o^2o^5, o^3o^4)$,

indem man jeden Symbolzweier der ersten Klammer mit jedem Symbolzweier der zweiten Klammer zu insgesamt 9 Symbolvierern zusammenfügt, in denen je $4!=24$ Permutationen möglich sind.

Es gibt somit 216 Vierzüger der Art (b).

c) Analog zu (a) findet man 60 Vierzüger der Art (c).

Ergebnis: Es gibt $60+216+60=336$ Vierzüger, durch die der Turm von links unten nach rechts oben gezogen werden kann.

**Logische Überlegung**

Linke Zeichnung: Zwischen L und N fehlt der Buchstabe M (1), also fehlt beim rechten Boot das D. – Rechte Zeichnung: Zwischen A und E fehlen die Buchstaben B, C, D (3), also fehlt beim rechten Boot P.

**Füllrätsel**

1. Bolzano, 2. Ellipse, 3. Rhombus, 4. Numerus, 5. Ordnung, 6. Umkreis, 7. Leibniz, 8. Lambert, 9. Inkreis – *Bernoulli*

**Kryptarithmetik**

a) $13832+23632+8326=45790$

$27574+47374+5743=80691$

b) $101+4194+68954=73249$

c) $65654+73604+24684=163942$ oder

$60609+25639+79649=165897$

**Zahlenmagie**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | 9 | 4 | |
| | | | | | | 6 | 8 | |
| | | 9 | 2 | | | | | |
| 3 | 3 | 6 | 10 | | | | | |
| 13 | 8 | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | 14 | 1 | |
| | 20 | 4 | | | | 2 | 10 | |
| | 2 | 1 | | | | | | |

**Abschied von 1980**

$66\cdot 30\cdot 1=1980$

**Lösungen zu: Glücksbringer wünschen ein frohes und erfolgreiches 1981,** S. 144

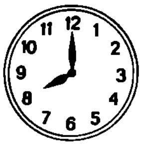
▲1▲ 36,82%, rund 37%

▲2▲ 12,39 $m^3$ pro kg Brennstoff, rund 12,4 $m^3$ pro kg Brennstoff

▲3▲ 12,48 $m^2$, rund 12,5 $m^2$

**Lösungen zu: Knobeleien zum Jahreswechsel,** IV. U.S.

**Silvester 1980**




**Winterliche Pracht**

**Weihnachtliche Freuden**

1. Der Tannenbaumschmuck links hängt in der Luft;
2. eine Kerze ist verkehrt gezeichnet;
3. der Baumstamm hängt über dem Topf;
4. auf dem Päckchen neben dem Baum ist das Band nicht vollständig;
5. eine Tür ist kleiner als die andere auf der Kommode;
6. auf dem Bild an der Wand ragt die Spitze des Bootes über den Rahmen hinaus;
7. die Gardine ist unter dem Arm des Jungen länger, als sie sein dürfte;
8. ein Fensterriegel ist auf der Fensterscheibe;
9. ein Ärmel ist länger als der andere auf dem Hemd des Jungen;
10. der linke Arm des Weihnachtsmannes ist mangelhaft gezeichnet.

**Lösungen zu alpha-Wettbewerb,**
Heft 2/80 (Fortsetzung):

Ma6 ▪1973 Eine dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $100a+10b+c$ mit $1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$ und $0\leqq c\leqq 9$; ihre Quersumme beträgt $a+b+c$. Nun gilt

$$100a+10b+c=40(a+b+c),$$
$$100a+10b+c=40a+40b+40c,$$
$$30b=60a-30c-9c,$$
$$b=2a-c-\frac{3c}{10}.$$

Nur für $c=0$, also für $b=2a$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Es gibt genau vier Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 120, 240, 360, 480.

Ma6 ▪1974 Angenommen der Autobus verfügt über $x$ Sitzplätze, dann waren $\left(\frac{1}{3}\cdot x\right)$ Plätze von Kindern, $\left(\frac{1}{3}\cdot x+6\right)$ Plätze von Erwachsenen besetzt, und es gilt

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+6+9=x,$$
$$\frac{1}{3}x=15, \text{ also } x=45.$$

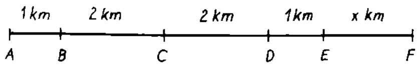
Der Autobus verfügt über 45 Sitzplätze.

Ma6 ▪1975 Der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen:

$[(6+x)+(3+x)]\cdot 10$
$=[(5+x)+(1+x)+x]\cdot 10,$
$2x+9=3x+6$, also $x=3$.

Die Orte E und F sind 3 km voneinander entfernt.

| Zusteigeort | Fahrstrecke | Fahrpreis |
|---|---|---|
| A | 9 km | 0,90 M |
| B | 8 km | 0,80 M |
| C | 6 km | 0,60 M |
| D | 4 km | 0,40 M |
| E | 3 km | 0,30 M |




Ma7 ▪1976 Es seien $a, b, c, m, v$ die Zahlen, die das gegenwärtige Lebensalter von Axel, Bernd, Christine, ihrer Mutter und ihres Vaters angeben; dann gilt

$$a+b+c+m+v=71. \qquad (1)$$
$$m=14a, \text{ also } a=\frac{m}{14}, \qquad (2)$$
$$m=7b, \text{ also } b=\frac{m}{7}, \qquad (3)$$
$$m=4c, \text{ also } c=\frac{m}{4}, \qquad (4)$$
$$m=v-2, \text{ also } v=m+2. \qquad (5)$$

Setzt man (2), (3), (4) und (5) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{m}{14}+\frac{m}{7}+\frac{m}{4}+m+(m+2)=71,$$
$$\frac{m}{14}+\frac{m}{7}+\frac{m}{4}+2m=69,$$
$$2m+4m+7m+56m=69\cdot 28,$$
$$69m=69\cdot 28,$$
$$m=28.$$

Gegenwärtig sind Axel 2 Jahre, Bernd 4 Jahre, Christine 7 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre alt.

Ma7 ▪1977 Für den Betrag von 22,81 M wird mindestens eine 1-Pf-Münze benötigt. Für den Betrag von 22,81 M − 0,02 M = 22,79 M wären weitere Pfennigmünzen erforderlich. Deshalb hatte Susanne genau eine 1-Pf-Münze. Aus 22,81 M − 6,15 M = 16,66 M und 10,00 M < 16,66 M < 20,00 M folgt, daß Susanne kein 20-M-Stück und höchstens ein 10-M-Stück hatte. Wegen
2 · (5 M + 2 M + 1 M + 50 Pf + 20 Pf + 10 Pf + 5 Pf) = 2 · 8,85 M = 17,70 M und 17,70 M < 22,80 M hatte Susanne genau ein 10-Mark-Stück. Wegen 22,81 M − 10 M − 5 M − 0,01 M = 7,80 M und 2 · (2 M + 1 M + 50 Pf + 20 Pf + 10 Pf + 5 Pf) = 2 · 3,85 M = 7,70 M und 7,70 M < 7,80 M hatte Susanne genau zwei 5-Mark-Stücke. Für den Betrag von 6,15 M wird mindestens eine 5-Pf-Münze benötigt. Für den Betrag von 22,81 M − 6,15 M = 16,66 M wird eine weitere 5-Pf-Münze benötigt. Deshalb hatte Susanne genau zwei 5-Pf-Münzen. Nun verbleibt ein Restbetrag von 22,81 M − 10 M − 2 · 5 M − 2 · 0,05 M − 0,01 M = 2,70 M, der näher zu untersuchen ist. Susanne könnte höchstens ein 2-Mark-Stück gehabt haben. Wegen 1 M + 2 · 50 Pf + 2 · 20 Pf + 2 · 10 Pf = 2,60 M und 2,60 M < 2,70 M hatte sie genau zwei 1-M-Stücke. Wegen 2,70 − 2,00 M = 0,70 M und 2 · (20 Pf + 10 Pf) = 0,60 M und 0,60 M < 0,70 M hatte sie genau eine 50-Pf-Münze. Für die Beträge von 6,15 M und von 16,66 M werden Münzen zu 10 Pf benötigt. Deshalb hatte Susanne keine 20-Pf-Münze, aber zwei 10-Pf-Münzen.

Ma7 ▪1978 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt:

(1) $BP+PDA=IAP$
(2) $PDA=0{,}1\cdot IAP$
(3) $180+PDA=IAP.$

Durch Umstellung erhalten wir

$180=IAP-PDA,$
$180=IAP-0{,}1\cdot IAP$
(durch Einsetzen von (2)),
$180=0{,}9\cdot IAP,$
$200=IAP.$

Nun gilt $200000-180000=20000$.
Der Betrieb muß 20000 M Produktions- und Dienstleistungsabgabe entrichten.

Ma7 ▪1979 Wegen $r+e=e$ gilt $r=0$
Wegen $e+e+e+e=4e=10k$ mit $k\in N$ gilt $e=5$.
Wegen $o+o=20<10$ gilt $o<5$, also $o+o+o+o=40<20$; somit gilt $f=1$.
Wegen $40\geqq 10+o-3$, also $30\geqq 7$ gilt $o\geqq 3$.
Aus $3\leqq o<5$ folgt $o=3$ oder $o=4$. Es sei $o=4$:
Dann gilt $4\cdot 4+x=14$, was nicht möglich ist.
Also gilt $o=3$. Ferner gilt $4n+2=10+u$; wegen $n\neq 3$ und $u\neq 0$ erhalten wir $n=4$ und somit $u=8$, also $v=2$ und $i=7$.
Es gibt also genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 345\\ +\ 345\\ +\ 345\\ +\ 345\\ \hline 1380 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1380\\ +\ 345\\ \hline 1725 \end{array}$$

Ma8 ▪1980 Die letzte Ziffer des Termwertes entspricht einer Zahl, die als Rest bleibt, wenn man den Term durch 10 dividiert. Deshalb betrachtet man die Reste, die die einzelnen Summanden bei Division durch 10 lassen:

1. 17 läßt bei Division durch 10 den Rest 7; wir können schreiben: $17=10\cdot 1+7$.
$17^2$ läßt bei Division durch 10 den Rest $7\cdot 7=49$, und 49 läßt den Rest 9.
$17^3$ läßt den Rest $9\cdot 7=63$, und 63 läßt den Rest 3.
$17^4$ läßt den Rest $3\cdot 7=21$, und 21 läßt den Rest 1.
2. 13 läßt den Rest 3; $13^2$ läßt Rest 9; $13^3$ läßt Rest 7; $13^4$ läßt Rest 1; $13^5$ läßt Rest 3.
3. 29 läßt Rest 9; $29^2$ läßt Rest 1; $29^3$ läßt Rest 9; $29^4$ läßt Rest 1; $29^5$ läßt Rest 9; $29^6$ läßt Rest 1.
4. $17^4+13^5-29^6$ endet wegen $17^4+13^5<29^6$ auf 7.

Ma8 ▪1981 Wir nehmen an, der große Zeiger überstreicht $x$ Minuten, bis er mit dem kleinen Zeiger einen gestreckten Winkel bildet. In dieser Zeit überstreicht der kleine Zeiger $\frac{x}{12}$ Minuten. Wenn beide Zeiger einen gestreckten Winkel bilden, liegt zwischen ihnen eine Differenz von 30 Minutenstrichen.

Deshalb gilt:

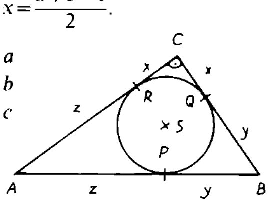
$$x-\frac{x}{12}=30,$$
$$12x-x=360,$$
$$11x=360,$$
$$x=32\frac{8}{11}.$$

Die Zeiger bilden nach $32\frac{8}{11}$ Minuten einen gestreckten Winkel.

Ma 8 ▪1982 Die Längen der Strecken $\overline{CR}$ und $\overline{CQ}$ sind gleich (Satz über die Tangentenabschnitte) und wurden mit $x$ bezeichnet. Das gleiche gilt für die mit $y$ bzw. $z$ bezeichneten Längen. Setzt man $y=a-x$ und $z=b-x$ in $c=y+z$ ein, so erhält man $c=a-x+b-x$ bzw. $c=a+b-2x$ und damit

$$x=\frac{a+b-c}{2}. \qquad (1)$$

$x+y=a$
$x+z=b$
$y+z=c$




Setzt man (1) in $y=a-x$ und $z=b-x$ ein, so erhält man

$$y=\frac{a-b+c}{2} \text{ und } z=\frac{-a+b+c}{2}.$$

Für das Produkt $yz$ gilt:

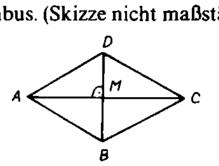
$$yz=\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4} \text{ bzw.}$$
$$yz=\frac{-a^2-b^2+c^2+2ab}{4}. \qquad (2)$$

Nun gilt für das abgebildete Dreieck $ABC$ nach dem Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$. Dadurch geht (2) über in

$$yz=\frac{ab}{2}. \qquad (3)$$

Da der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks $ABC$ nach der Formel $A=\frac{ab}{2}$ berechnet wird, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 8 ▪1983 Aus (2) und (3) folgt: $\overline{BD}$ ist 4 cm lang.
Aus (1) folgt: Das Viereck $ABCD$ ist ein Rhombus. (Skizze nicht maßstäblich)




Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2,$$
$$\overline{AB}^2=16\text{ cm}^2+4\text{ cm}^2,$$
$$\overline{AB}=\sqrt{20\text{ cm}^2},$$
$$\overline{AB}\approx 4{,}47\text{ cm}.$$

Der Umfang $u$ des Rhombus $ABCD$ ist gleich der vierfachen Länge einer Seite. Es gilt $u\approx 4\cdot 4{,}47$ cm; $u\approx 17{,}88$ cm.
Der Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$ ist gleich dem halben Produkt aus den Längen der beiden Diagonalen. Es gilt:

$$A=\frac{8\text{ cm}\cdot 4\text{ cm}}{2};\ A=16\text{ cm}^2.$$

Ma 9 ▪1984 $(2n-1)^2+(2n+1)^2+38=3(2n-2)^2,$

$$n^2-6n-7=0,$$
$$n=3\pm 4,$$
$$n_1=7,$$
$$n_2=-1 \text{ (entfällt)}.$$

Die Zahlen lauten 13 und 15, und es gilt

$$13^2+15^2+38=3\cdot 12^2.$$

Ma 9 ▪1985 Angenommen, das Schiff hat eine Länge von $x$ Metern, eine Breite von $y$ Metern und einen Tiefgang von $z$ Metern; dann gilt

$$x+y+z=181, \qquad (1)$$
$$x=4y+20, \qquad (2)$$
$$y+z=41. \qquad (3)$$

Wir subtrahieren (3) von (1) und erhalten $x=140$. Durch Einsetzen in (2) erhalten wir

$$140=4y+20,$$
$$4y=120,$$
$$y=30 \text{ und damit } z=11.$$

Der Atomeisbrecher „Arktika" hat einen Tiefgang von 11 m.

Ma 9 ▪1986 Da jedes ebene konvexe $n$-Eck $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen hat, gilt nach Aufgabenstellung

$$\frac{n}{2}(n-3)=119.$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit 2 und Auflösen der Klammer erhält man die quadratische Gleichung

$$n^2-3n-238=0.$$

Man wendet die bekannte Lösungsformel an und erhält schließlich die beiden Lösungen 17 und $-14$. Letztere entfällt. Ein ebenes konvexes 17eck hat 119 Diagonalen.

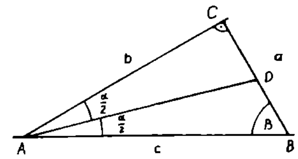
Ma 9 ▪1987 Bezeichnet man den Inhalt der im Äußeren des Quadrats liegenden Flächen mit $A_a$ und den Inhalt der im Inneren des Quadrats liegenden Flächen mit $A_i$ und gilt $A_a=A_i$, so ist der Flächeninhalt des Quadrats gleich dem des Kreises.
Folglich gilt:

$$\frac{d^2\cdot\pi}{4}=a^2;$$
$$d^2=\frac{4a^2}{\pi};$$
$$d=\sqrt{\frac{4a^2}{\pi}};$$
$$d=\frac{2a}{\sqrt{\pi}};$$
$$d\approx 1{,}128\cdot a.$$

Der Durchmesser des Kreises ist etwa 1,128-mal so lang wie die Quadratseite.

Ma 10/12 ▪1988 9 läßt bei Division durch 4 den Rest 1; also läßt auch $9^5$ bei Division durch 4 den Rest 1. Da jede Potenz mit der Basis 9 und mit einem natürlichen Exponenten bei Division durch 4 den Rest 1 läßt, gilt das auch für $9^{5u}$ unter den Bedingungen der Aufgabe.
Das gleiche gilt für die Potenz $5^{3u}$.
Nun läßt der Term $9^{5u}-5^{3u}$ bei Division durch 4 den Rest $1-1=0$. Das heißt aber, daß der gegebene Ausdruck stets durch 4 teilbar ist, w. z. b. w.

Ma 10/12 ▪1989 (Skizze nicht maßstäblich)




Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$c^2=a^2+b^2,$$
$$c^2=8^2+6^2,$$
$$c^2=100,$$
$$c=10.$$

Weiter gilt $\tan\beta=8:6=1{,}333$, also $\beta=53{,}12°$; somit gilt $\alpha=90°-\beta=36{,}88°$ und $\frac{1}{2}\alpha=18{,}44°$.
Im rechtwinkligen Dreieck $ADC$ gilt

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\overline{CD}:8,$$
$$\overline{CD}=8\cdot\tan 18{,}44°$$
$$\overline{CD}=2{,}67.$$

Da der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem halben Produkt aus den Längen der Katheten ist, gilt weiter:

$$A_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2{,}67=10{,}66,$$
$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=24,$$
$$A_{ABD}=24-10{,}66=13{,}34.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABD$ beträgt $13{,}34\text{ cm}^2$, der des Dreiecks $ADC$ beträgt $10{,}66\text{ cm}^2$ (alles Näherungswerte!).

Ma 10/12 ▪1990 Das Dreieck $ABC$ ist gleichschenklig, da $\overline{AB}=\overline{BC}$ Radien von $k$ sind. Man berechnet zuerst die Länge $r$ des Radius von $k$:

$100°:360°=5\text{ cm}:\pi\cdot d;$

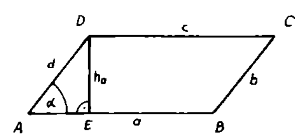
$$d=\frac{5\text{ cm}\cdot 360°}{100°\cdot\pi};$$
$$d=5{,}73\text{ cm, also } r=2{,}86\text{ cm}.$$

Für den Flächeninhalt des Kreises $k$ gilt:
$A_K=\pi\cdot r^2$; $A_K=\pi\cdot 2{,}86\text{ cm}^2$; $A_K=25{,}7\text{ cm}^2$.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ gilt:

$$A_D=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \text{ und wegen } a=c:$$
$$A_D=\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\beta;$$
$$A_D=\frac{1}{2}\cdot 2{,}86^2\text{ cm}^2\cdot\sin 100°;$$
$$A_D=4{,}03\text{ cm}^2.$$

Es gilt $A_D:A_K=1:6{,}38$.
Die Fläche des Dreiecks $ABC$ ist in der Fläche des Kreises $K$ etwa $6\frac{1}{2}$mal enthalten.

Ma 10/12 ▪1991 (Skizze nicht maßstäblich)




Wegen $a=c$ und $b=d$ gilt für den Umfang des Parallelogramms $u=2a+2d$ bzw.

$$\frac{u}{2}=a+d. \qquad (1)$$

Im rechtwinkligen Dreieck $AED$ gilt $h_a = d \cdot \sin\alpha = d \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} d$, also

$$2 \cdot h_a = d. \qquad (2)$$

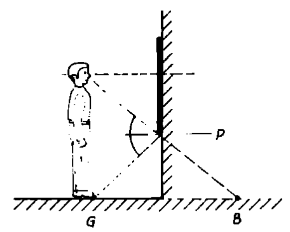
Für den Flächeninhalt des Parallelogramms gilt $A = a \cdot h_a$ bzw. $2A = a \cdot 2h_a$. (3)

Setzt man (2) in (3) ein, so erhält man $2A = a \cdot d$. Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Variablen, das man wie folgt löst:

$$a+d=34;\ d=34-a$$
$$a \cdot d = 225$$
$$a \cdot (34-a) = 225$$
$$34a - a^2 = 225$$
$$a^2 - 34a + 225 = 0$$
$$a_{1,2} = 17 \pm 8$$
$$a_1 = 25;\ \text{also } d_1 = 9$$
$$a_2 = 9;\ \text{also } d_2 = 25.$$

Die Seite $\overline{AB}$ ist 25 cm, die Seite $\overline{AD}$ ist 9 cm lang.

Ph6 ■76 Da am ebenen Spiegel der Bildpunkt $B$ ebenso weit hinter dem Spiegel wie der Gegenstandspunkt $G$ vor dem Spiegel liegt, läßt sich der Reflexionspunkt $P$ leicht konstruieren (siehe Bild).




Man erkennt, daß sich der unterste Rand des Spiegels nicht höher als in der halben Größe des Betrachters befinden darf.
Für unseren Fall sind das 75 cm.

Ph7 ■77 Geg.:
Druck im Inneren $p_1 = 0{,}025$ at
Luftdruck $p_2 = 760$ Torr $\approx 1{,}033$ at
Durchmesser $d = 10$ cm
Ges.: Druckkraft $F$
Die Druckkraft errechnet man nach der Formel $F = p \cdot A$ mit $p = p_2 - p_1$ und $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Also ist

$$F = (p_2 - p_1) \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

$$F = \frac{(1{,}033 - 0{,}025)\,\text{kp} \cdot 3{,}14 \cdot 10^2\,\text{cm}^2}{4\,\text{cm}^2}.$$

$F \approx 79$ kp.
Der Deckel wird mit einer Kraft von rund 79 kp (rd. 775 N) auf das Glas gepreßt.

Ph8 ■78 Geg.:
Spannung $U = 0{,}23$ V
Spez. Widerstand $\varrho = 0{,}0178 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$
Querschnittsfläche $A = 70\,\text{mm}^2$
Länge $l = 6$ m
Ges.: Stromstärke $I$
Nach dem Ohmschen Gesetz gilt $I = \frac{U}{R}$ mit $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$. Also ist

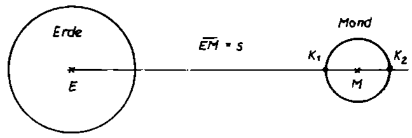
$$I = \frac{U \cdot A}{\varrho \cdot l},$$

$$I = \frac{0{,}23\,\text{V} \cdot 70\,\text{mm}^2 \cdot \text{m}}{0{,}0178\,\frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{mm}^2 \cdot 6\,\text{m}},$$

$I \approx 150{,}74$ A.
In der Leitung ist eine Stromstärke von rund 151 A enthalten.

Ph9 ■79 Geg.:
Masse des Mondes: $m_M = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg
Masse der Erde: $m_E = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg
Radius des Mondes: $r_M = 1{,}738 \cdot 10^3$ km
Entfernung Erde–Mond: $s = 3{,}844 \cdot 10^5$ km
Gravitationskonstante: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$
Ges.: Differenz der Gewichtskräfte $\Delta G$
Das Gewicht eines Körpers ist davon abhängig, welche Fallbeschleunigung auf ihn einwirkt. Es gilt die Formel $G = mg = F$. Die Fallbeschleunigung, die von der Erde aus in den Punkten $K_1$ und $K_2$ einwirkt, wird wie folgt berechnet. Aus dem Gravitationsgesetz $F = \frac{\gamma \cdot m_1 m_2}{r^2}$ und $F = mg$ ergibt sich

$$mg = \frac{\gamma \cdot m_1 m_2}{r^2}.$$




In unserem Fall gilt dann mit $m_1 = m$ und $r = (s \mp r_M)$
für $K_1$:

$$g_{E_1} = \frac{\gamma \cdot m_E}{(s - r_M)^2}$$

$$= \frac{6{,}67\,\text{kg m}^3 \cdot 5{,}979 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{10^{11}\,\text{kg}^2\text{s}^2 \cdot (3{,}82662 \cdot 10^8)^2\,\text{m}^2}$$

$g_{E_1} \approx 0{,}002723\,\text{ms}^{-2}$,
für $K_2$:

$$g_{E_2} = \frac{\gamma \cdot m_E}{(s + r_M)^2}$$

$$= \frac{6{,}67\,\text{kg m}^3 \cdot 5{,}979 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{10^{11}\,\text{kg}^2\text{s}^2 \cdot (3{,}86138 \cdot 10^8)^2\,\text{m}^2}$$

$g_{E_2} \approx 0{,}0026747\,\text{ms}^{-2}$.
Für die Fallbeschleunigung, die vom Mond auf $K_1$ und $K_2$ einwirkt, gilt:

$$g_M = \frac{\gamma \cdot m_M}{r_M^2}$$

$$= \frac{6{,}67\,\text{kg m}^3 \cdot 7{,}347 \cdot 10^{22}\,\text{kg}}{10^{11}\,\text{kg}^2\text{s}^2 \cdot (1{,}738 \cdot 10^6)^2\,\text{m}^2}$$

$g_M \approx 1{,}6223\,\text{ms}^{-2}$.
Für $K_1$ wirken nun $g_M$ und $g_{E_1}$ genau gegeneinander. Es gilt:
$G_1 = m(g_M - g_{E_1}) = m \cdot 1{,}6196$ N.
Für $K_2$ wirken $g_M$ und $g_{E_2}$ in gleicher Richtung. Es gilt:
$G_2 = m(g_M + g_{E_2}) = m \cdot 1{,}625$ N.
Für die gesuchte Differenz $\Delta G$ gilt nun:

$$\Delta G = |G_2 - G_1|$$
$$\Delta G = (0{,}0054\,m)\,\text{N}.$$

Die Differenz der Gewichtskräfte $G_1$ und $G_2$ der Körper $K_1$ und $K_2$ beträgt (0,0054 m) Newton.

Ph 10/12 ■80
Geg.: $r = 200$ m Ges.: a) $v$
$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $\alpha$
$\mu = 0{,}25$

a) Die Geschwindigkeit des Kraftrades errechnet man aus der Formel für die Zentrifugalkraft $F_Z$ (Fliehkraft):

$$F_Z = \frac{\text{m} \cdot v^2}{r},\quad v^2 = \frac{F_Z \cdot r}{\text{m}}. \qquad (1)$$

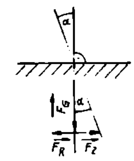
Nun ist die Zentrifugalkraft dem Betrage nach gleich der Zentripedalkraft, und diese ist in unserem Fall gleich der Haftreibungskraft $F_R$ (siehe Bild).
Also ist $F_Z = F_R$, und da $F_R = \mu \cdot F_G$ ist, muß $F_R = F_Z = \mu \cdot F_G$ sein
bzw. $F_Z = \mu \cdot \text{m} \cdot g$. (2)
Setzt man (2) in (1) ein, erhält man

$$v^2 = \frac{F_Z \cdot r}{\text{m}},\quad v^2 = \frac{\mu \cdot \text{m} \cdot g \cdot r}{\text{m}},$$

$$v = \sqrt{\mu \cdot g \cdot r},\quad v = \sqrt{0{,}25 \cdot 9{,}81 \cdot 200}\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v \approx 22{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Der Motorradfahrer kann die Kurve mit einer Geschwindigkeit von rund 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren. Dabei spielt die Masse keine Rolle.



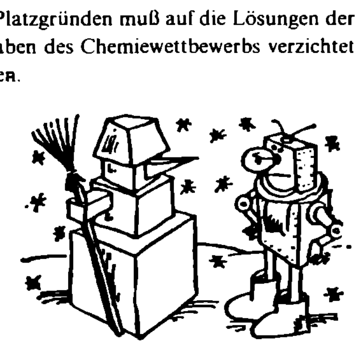

b) Um das Kippen des Kraftrades infolge der Zentrifugalkraft $F_Z$ zu vermeiden, muß (im Idealfall) die Schräglage so groß sein, daß die Resultierende aus $\vec{F}_Z$ und der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ durch den Berührungspunkt der Reifen mit der Fahrbahn geht (siehe Bild).
Also gilt $\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G}$ mit $F_G = mg$ und nach (2)

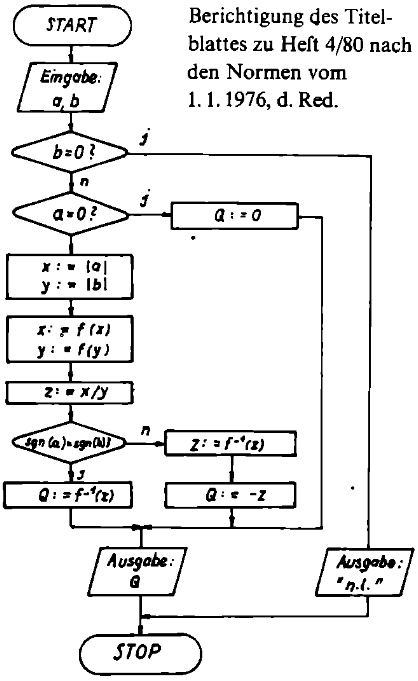
$$F_Z = \mu mg \text{ und } \tan\alpha = \frac{F_Z}{mg},$$

$$\tan\alpha = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{m \cdot g},\quad \tan\alpha = \mu,$$
$$\tan\alpha = 0{,}25,$$
$$\alpha \approx 14°.$$

Der Winkel gegenüber der Senkrechten beträgt rund 14°.

Aus Platzgründen muß auf die Lösungen der Aufgaben des Chemiewettbewerbs verzichtet werden.






Berichtigung des Titelblattes zu Heft 4/80 nach den Normen vom 1. 1. 1976, d. Red.

**Berichtigung zum Beitrag „Helft dem Kosmonauten", 3/80, S. 56**

Der Impulssatz besagt, daß in einem System, in welchem nur innere Kräfte wirken, der Gesamtimpuls konstant bleibt. Kosmonaut und Pickhammer bilden ein solches System – also driftet er mit konstanter Geschwindigkeit weiter von der Station weg, wobei der Pickhammer die im Punkt (1) der Problemdiskussion beschriebenen Schwingungen vollführt. Also:

Der *funktionierende* Pickhammer nutzt dem Kosmonauten wenig. Nur wenn er das Gerät als *Masse* in der richtigen Richtung mit hinreichend großer Geschwindigkeit wegstößt, dann kann er sich durch Rückstoß zur Station zurückbringen.

**Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. D.-E. Liebscher,** Heft 4/80

1. Der Winkel $B_1CB$ ist gleich dem Winkel $ACA_1$. Die Dreiecke $B_1BC$ und $AA_1C$ sind kongruent, insbesondere ist $B_1B=AA_1$. Der gleiche Schluß an den anderen Ecken führt auf $BB_1=AA_1=CC_1$.

2. Der Winkel $B_2CA_2$ ist gleich dem Winkel $B_1CB$. Weiterhin gilt für die Streckenverhältnisse

$$\frac{CB_2}{CB_1}=\frac{CA_2}{CB}$$

$$=\frac{\text{Umkreisrad. d. gleichseitigen Dreiecks}}{\text{Seitenlänge d. gleichseitigen Dreiecks}}=q.$$

Die Dreiecke $B_1BC$ und $B_2A_2C$ sind ähnlich. Das Verhältnis der Strecken $B_2A_2$ zu $B_1B$ ist gleich $q$. Analoges zeigen wir für die Strecken $B_2C_2$ und $C_2A_2$. Wegen dieser Ähnlichkeit und der unter 1. gefundenen Gleichheit der jeweiligen Bezugsstrecken ist der Satz bewiesen.

# Glücksbringer wünschen ein frohes und erfolgreiches 1981

Wer glaubt, daß der Schornsteinfeger nur zum Kehren der Schornsteine da ist oder geeignet erscheint, als Glücksbringer zu fungieren, der hat sich nicht nur früher, sondern erst recht heute geirrt.

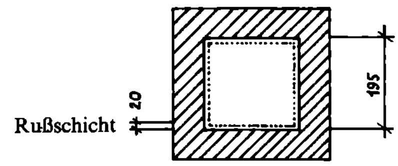
Natürlich ist es auch heute noch so, daß der Schornsteinfeger die Feuersicherheit der Wohn- und Gesellschaftsbauten durch das Abkehren des feuergefährlichen Rußes entscheidend mit gewährleistet. Infolge der Veränderung der Bauweise nimmt der Anteil der Wartung und Überprüfung von Schornsteinsystemen, die der Abführung von Luft aus den Wohnräumen dienen, weiterhin zu. Der Schornsteinfeger reinigt darüber hinaus auch Öfen und Zentralheizungskessel. Durch teilweise falsche Bedienung von Öfen kommt es vor, daß sich Teerstoffe im Schornstein absetzen, die den Schornsteinquerschnitt verengen und vor allem eine Brandgefahr darstellen. Mit einem üblichen Kehrgerät können solche festklebenden Teersubstanzen nicht vom Schornsteinmauerwerk abgekehrt werden. Hier bedient sich der Schornsteinfeger der Technik des sogenannten *Ausbrennens*. Etagenweise wird zum Beispiel Petroleum eingespritzt, entzündet und der Teer abgebrannt.

Diese gefährliche Arbeit darf natürlich nur von zwei Schornsteinfegern ausgeführt werden, da der Schornstein durch die entstehenden hohen Temperaturen stark belastet wird. Großes fachliches Können und eine ganze Menge Berufserfahrung gehören natürlich dazu, um zu erkennen, welche Faktoren dazu beigetragen haben, daß sich solche Teerstoffe ablagerten. Oftmals muß der Schornsteinfeger dann den einzelnen Bürger über das richtige Bedienen der Feuerstätten, natürlich höflich aber deutlich, beraten, damit größere Schäden am Schornstein gar nicht erst aufkommen. Der Schornsteinfeger unterstützt aber auch die Gebäudewirtschaft bei kleineren Instandsetzungsarbeiten, hauptsächlich den Arbeits- und Schutzeinrichtungen über Dach, denn in dieser Höhe wird Sicherheit ganz groß geschrieben.

Unsichere Zeiten, wie es sie noch im vorigen Jahrhundert gab und wo die Hausbesitzer sich für die Reinigung der Schornsteine den Schornsteinfeger mit der geringsten Reinigungsgebühr heraussuchen konnten, gehören zum Glück der Vergangenheit an. Es ist selbstverständlich, daß jeder Schornsteinfeger wie jeder andere Bürger in der DDR ein gesichertes Einkommen hat. Heute hat auch jeder Schornsteinfegerlehrling seine gesicherte Perspektive, auch über das Jahr 2000 hinaus, da durch den Einsatz von Braunkohle die Ofenheizung auch zukünftig keine untergeordnete Rolle spielen wird.

Da insbesondere in der berufstheoretischen Ausbildung die Mathematik eine bedeutende Rolle spielt, füge ich einige Aufgaben zum Knobeln bei:

▲1▲ Ein Schornstein mit einem lichten Querschnitt von 195 mm · 195 mm wird durch eine gleichmäßige Rußschicht von 20 mm verengt (siehe Bild). Wieviel Prozent beträgt die Querschnittsverengung?




▲2▲ Ein Rauchgas nimmt im Normzustand (273 K, 101,3 kPa) ein Volumen von $8\,m^3$ pro kg Brennstoff ein. Wenn dieses Rauchgas in den Schornstein einströmt, besitzt es eine Temperatur von 150 °C. Welches Volumen nimmt das Rauchgas ein, wenn der Druck konstant bleibt?

▲3▲ Welche Reibungsfläche in $m^2$ würde sich für die entlangströmenden Rauchgase ergeben, wenn der lichte Querschnitt 260 mm · 260 mm und die Schornsteinhöhe 12 m betragen? *J. Naumann*

Rund 700 Schornsteinfeger aus der gesamten DDR erhielten seit 1971 in Eilenburg ihre berufstheoretische Ausbildung. In diesem Monat absolvierten wiederum 80 künftige „Glücksbringer" die dortige Berufsschule des Leipziger Baukombinates, die einzige derartige Bildungsstätte in der Republik. Insgesamt gibt es in der DDR etwa 3000 Schornsteinfeger.

## alpha-Kalender

Zwischen dem Haus der JP *Georg Schwarz* Leipzig und dem Haus der JP Brno bestehen seit langem partnerschaftliche Beziehungen. Anläßlich des 30jährigen Bestehens des Pionierpalastes Brno wurden an alle interessierten tschechischen Pioniere im Rahmen von außerunterrichtlichen Veranstaltungen Modellbogen – sie enthalten eine Würdigung dieses Jahrestages – als Geschenk überreicht. Auch die Leipziger Delegation, die an den Feierlichkeiten teilnahm, erhielt solche Blätter zum Basteln. *H. Scheibe*

Die Redaktion *alpha* entwickelte anläßlich des 20. Jahrestages des Bestehens der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR einen Kalender. Viel Freude und Erfolg beim Bau des Vielflächners!

# alpha-Kalender 1981



**20 Jahre Mathematik-olympiaden**

1981

Januar

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 5 | 12 | 19 | 26 |
| Di | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| Mi | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Do | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Fr | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Sa | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| So | 4 | 11 | 18 | 25 | |

1981

Februar

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 2 | 9 | 16 | 23 |
| Di | | 3 | 10 | 17 | 24 |
| Mi | | 4 | 11 | 18 | 25 |
| Do | | 5 | 12 | 19 | 26 |
| Fr | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| Sa | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| So | 1 | 8 | 15 | 22 | |

1981

März

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Di | | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| Mi | | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| Do | | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| Fr | | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| Sa | | 7 | 14 | 21 | 28 | |
| So | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | |

1981

April

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| Di | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Mi | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Do | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Fr | 3 | 10 | 17 | 24 | |
| Sa | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| So | 5 | 12 | 19 | 26 | |

Mai

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 4 | 11 | 18 | 25 |
| Di | | 5 | 12 | 19 | 26 |
| Mi | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| Do | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Fr | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Sa | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| So | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |

Juni

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Di | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Mi | 3 | 10 | 17 | 24 | |
| Do | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| Fr | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| Sa | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| So | 7 | 14 | 21 | 28 | |

Juli

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| Di | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Mi | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Do | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Fr | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| Sa | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| So | 5 | 12 | 19 | 26 | |

August

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| Di | | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| Mi | | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| Do | | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| Fr | | 7 | 14 | 21 | 28 | |
| Sa | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | |
| So | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 | |

September

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Di | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Mi | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Do | 3 | 10 | 17 | 24 | |
| Fr | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| Sa | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| So | 6 | 13 | 20 | 27 | |

Oktober

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 5 | 12 | 19 | 26 |
| Di | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| Mi | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Do | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Fr | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Sa | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| So | 4 | 11 | 18 | 25 | |

November

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Di | | 3 | 10 | 17 | 24 | |
| Mi | | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| Do | | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| Fr | | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| Sa | | 7 | 14 | 21 | 28 | |
| So | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | |

Dezember

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mo | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Di | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| Mi | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| Do | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| Fr | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| Sa | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| So | 6 | 13 | 20 | 27 | |

**XX. OJM Bezirks-olympiade 7./8. 2. 81**

**alpha**

**Mathematische Schüler-zeitschrift**

**XX. OJM DDR-Olympiade 13.–16. 4. 81**

**Einsendetermine alpha-Wettbewerb**

| | |
|---|---|
| 5/80 | 11. 1. 81 |
| 6/80 | 8. 3. 81 |
| 1/81 | 1. 5. 81 |
| 2/81 | 12. 6. 81 |

**XXI. OJM Schul-olympiade Sept. 1981**

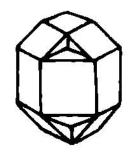
**alpha**

**Mathematische Schüler-zeitschrift**

**XXI. OJM Kreisolympiade 18. 11. 1981**

**Wer alpha liest, kann auch beta sagen!**

**alpha**

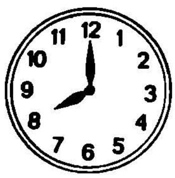


# Knobeleien zum Jahreswechsel

| | |
|---|---|
| $1-9+8+1=1$ | $1\cdot\sqrt{9}+\sqrt{8+1}=6$ |
| $1^{9+8}+1=2$ | $1+\sqrt{9}+\sqrt{8+1}=7$ |
| $1+9-8+1=3$ | $-1^{9}+8+1=8$ |
| $1\cdot\sqrt{9+8-1}=4$ | $1^{9}+8\cdot 1=9$ |
| $1+\sqrt{9+8-1}=5$ | $19-8-1=10$ |

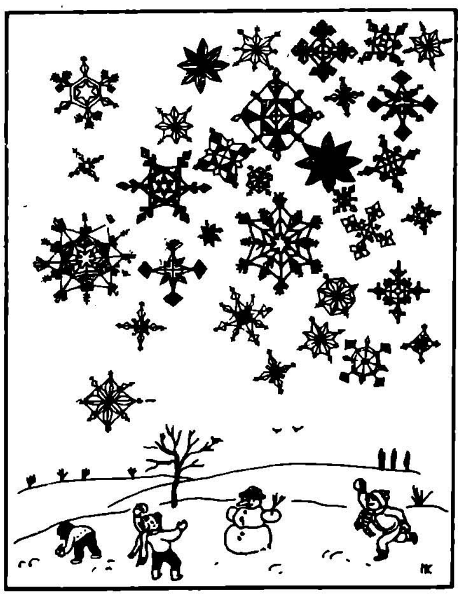
**Silvester 1980**

Die Uhr ist so in drei Felder einzuteilen, daß die Summe eines jeden 26 beträgt. Zu jedem Feld gehören vier Zahlen.



**Winterliche Pracht**

Was in der Natur nur ganz selten vorkommt, hier sind zwei Schneekristalle völlig gleich. Wenn ihr das Bild genau betrachtet, findet ihr sie heraus.



**Gesellschaftsspiel**

Ein Würfel und für jeden Mitspieler eine Figur aus dem Spielzeugdorf sind notwendig. Die Spieler werfen nacheinander mit dem Würfel und rücken, ausgehend vom „Start", den Augen des Wurfs entsprechend auf den numerierten Feldern weiter. Sieger ist, wer die bunte Kugel an der Spitze als erster erreicht hat. Bis dahin sind aber einige Hindernisse zu überwinden: Derjenige, der auf ein Feld mit dem Fisch trifft, muß aufs vorhergehende Feld mit dem Fischbild zurück, von 5 aus zurück zum Start. Auf dem Feld mit einem Herzen darf der Spieler dagegen aufs nächste Feld mit einem Herzen vorrücken, von 47 auf 56. Beim Sternbild muß der Spieler einmal, bei der Glocke zweimal mit Würfeln aussetzen. Beim Bild mit einem Apfel dagegen darf er zweimal würfeln. Viel Spaß!

**Weihnachtliche Freuden**

Der Weihnachtsmann spielt mit. Der Vater des Jungen hat die Szene schnell aufgezeichnet, allerdings nicht ohne Makel. Er hat nämlich 10 Fehler begangen. Findet sie!