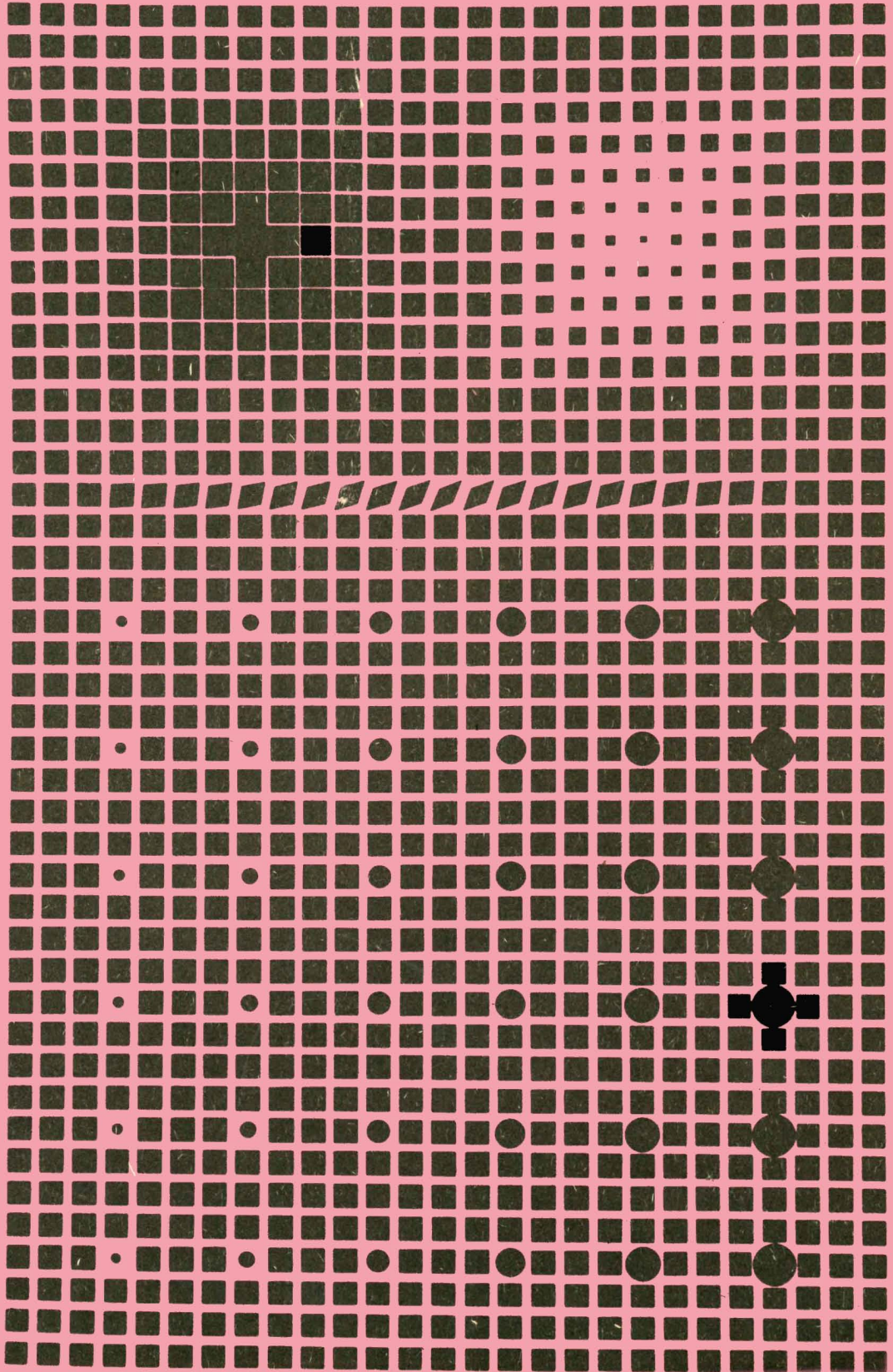
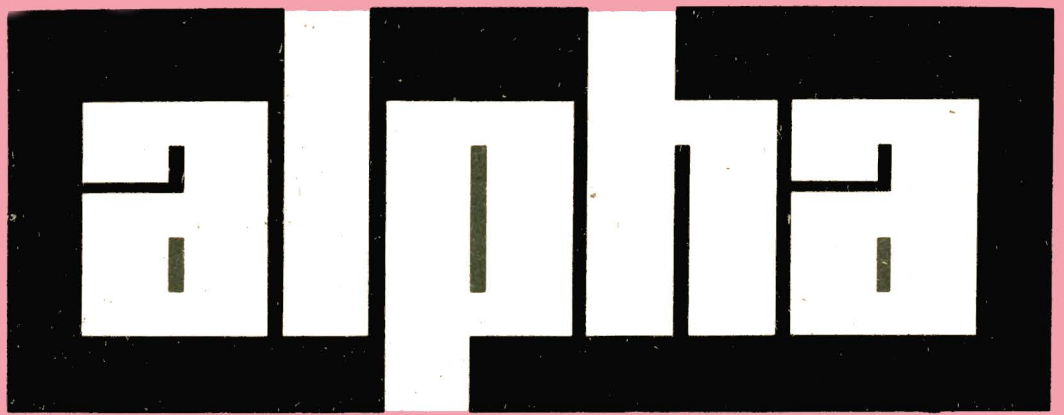


**Mathematische
Schülerzeitschrift**



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059**

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Schröder, Karl-Marx-Stadt (S. 3);
Hochschulbildstelle TH Karl-Marx-Stadt
(S. 4); Hochschul-Film und Bildstelle der
Karl-Marx-Universität Leipzig (S. 6, 7, 8);
K. Voigt, Leipzig (S. 7); Foto Michaelis,
Lübbenau/Spreewald (S. 9); Rolf F. Müller,
Erfurt (S. 20); H. Büttner, Berlin (S. 22).

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig.



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 28. Oktober 1981

Erscheinungstermin: 20. Februar 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 **Der Moskauer mathematische Papyrus [8]***
Dr. A. Volodarskij, Institut für Geschichte der Naturwissenschaften und Technik,
Moskau/Dr. Sonja Bentjes, Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 3 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Volkmar Friedrich [9]**
Direktor der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 4 **Ausbildung von Diplommathematiker mit vertieften technischen Kenntnissen [8]**
Prof. Dr. V. Friedrich, TH Karl-Marx-Stadt
- 5 **Ein *Hobelspan* aus Gauß' Werkstatt [7]**
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, Leiter der
A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle
- 6 **Mathematiker-Kongreß der DDR 1981 [7]**
OSTR J. Lehmann, Leipzig/Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-
Universität Leipzig
- 8 **aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [1]**
Speziell für Klasse 1 bis 7 · Ungleichungen
Zusammenstellung: OSTR J. Lehmann/OSTR Th. Scholl, Berlin
- 9 **Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [6]**
Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule Karl Liebknecht,
Potsdam
- 10 **Was tun, wenn die Formelsammlung nicht mehr helfen kann?**
Lösungsverfahren statt Lösungsformel, Teil 2 [8]
Prof. Dr. I. O. Kerner, Sektion Mathematik/Geographie, Wissenschaftsbereich Nu-
merische Math. u. Informationsverarbeitung, Päd. Hochschule Karl Friedrich
Wander Dresden
- 12 **Für den Briefmarkenfreund [6] · Aristarch von Samos**
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 13 **XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR**
Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (18. Nov. 1981) [5]
- 16 **Lösungsweg zur Ordnung des *Magischen Würfels* [5]**
Aus practic 3/81
- 18 **In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 20 **Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]**
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie
- 23 **Differential- oder Differenzengleichungen [8]**
Prof. Dr. L. Berg, Sektion Mathematik der W.-Pieck-Universität Rostock
- 23 **Lösungen [5]**

III./IV.-U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb [5]

Preisträger, Vorbildliche Leistungen, Abzeichen in Gold

Das Titelbild wurde gestaltet von W. Fuhr, Berlin nach Vasarely, Supernovae 1959
bis 1961, Öl, Tute Gallery London

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Moskauer mathematische Papyrus

Aus der Geschichte der altägyptischen Mathematik

In jener weit zurückliegenden Zeit, als der Moskauer mathematische Papyrus entstand, war das alte Ägypten ein Agrarstaat. Seine natürliche landwirtschaftliche Nutzfläche war sehr klein und reichte zur Versorgung der Bevölkerung nicht aus. Um sie zu vergrößern, baute man Bewässerungskanäle, legte Sümpfe trocken und errichtete Dämme. Das neu gewonnene Land wurde in Felder aufgeteilt, deren Grenzen bestimmt werden mußten, um das Eigentumsrecht zu klären. Zur Lagerung des geernteten Getreides wurden Speicher errichtet. Dazu mußte man wissen, wie man die Größe der erzielten Ernte berechnet und wie die Ernte zu verteilen war. So erwuchsen aus der täglichen Praxis allmählich eine Vielzahl mathematischer Aufgaben. Die dabei geschaffenen mathematischen Methoden gestatteten es den alten Ägyptern, neben den bereits erwähnten Problemen bei der Flächenvermessung von Feldern und beim Bau von Dämmen oder Getreidespeichern auch solche zu lösen, die bei Bauarbeiten, der Erhebung von Steuern, der Umwandlung von Gewichts- und Flüssigkeitsmaßen ineinander u. a. m. auftraten.

Wir besitzen heute nur noch einige wenige Texte mathematischen Inhalts. Sie sind auf

sprödem Papyrus geschrieben, einem Material, das aus den Stengeln der gleichnamigen Pflanze hergestellt worden ist. Von der Vielzahl der einmal wahrscheinlich vorhandenen Werke blieben nur jene erhalten, die in Pyramiden aufbewahrt wurden, damit die Seelen der dahingeschiedenen hochgestellten Persönlichkeiten, die in diesen Gräbern bestattet worden sind, ihre geliebten Bücher auch im Jenseits lesen konnten.

Die umfangreichste, uns bekannte altägyptische Aufgabensammlung ist der *Papyrus Rhind*. Er erhielt diesen Namen nach seinem Besitzer, einem englischen Archäologen. Seine Länge beträgt 5,25 m und seine Breite 33 cm. In ihm sind 87 Aufgaben zusammengestellt. Der *Papyrus Rhind* ist heute im *Britischen Museum* in London deponiert. Ein anderer Text mit einer Länge von 5,44 m, einer Breite von 8 cm und 25 Aufgaben befindet sich im *Staatlichen Museum der darstellenden Künste „A. S. Puschkin“* in Moskau. Deshalb wird er der *Moskauer Papyrus* genannt. Beide Texte gehören etwa in die gleiche Zeit, in die Epoche des Mittleren Reiches (2000 bis 1800 v. u. Z.). Die Kultur des Mittleren Reiches hatte ein hohes materielles und geistiges Niveau erreicht. Schreiber überlieferten im

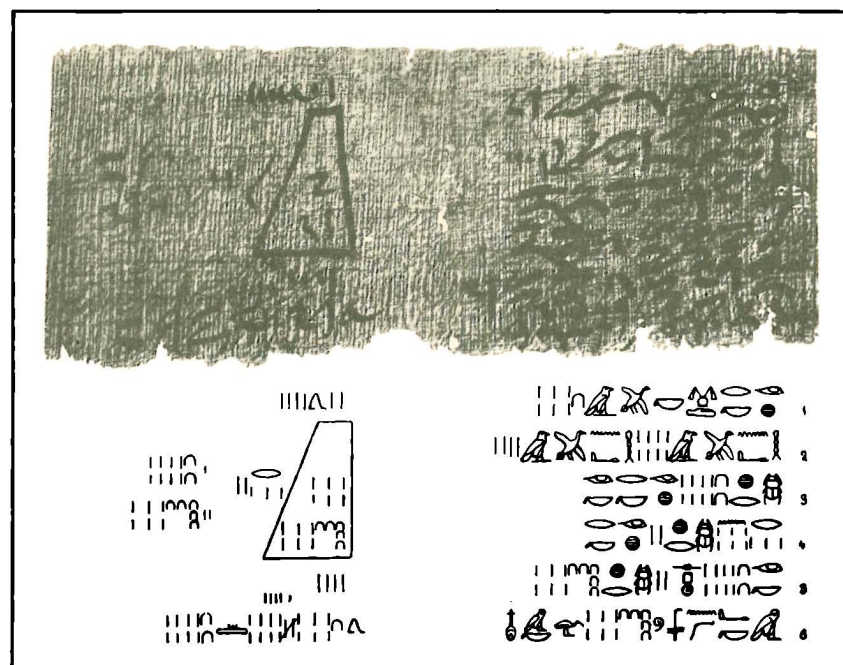
Dienste des Staates oder der Tempel wissenschaftliche Kenntnisse. Sie wurden an Spezialschulen ausgebildet und genossen bestimmte Privilegien. In einem der Papyri kann man über sie lesen: „Diese Pflicht steht über allen anderen und nichts gleicht ihr in diesem Land.“

„Ein Schreiber leitet alle anderen. Die Schreibarbeiten sind nicht mit Steuern belegt.“ heißt es in einem anderen Text.

Beide mathematische Papyri waren für den Unterricht bestimmt. Der Moskauer Text entstammt der Feder eines Schülers einer Schreiberschule. Er entstand zwischen 1800 und 1600 v. u. Z. und ist eine Kopie einer Vorlage aus etwa dem 20. Jh. v. u. Z. Der *Papyrus Rhind*, in dem das Material systematischer angeordnet ist, geht auf ein Werk aus der zweiten Hälfte des 19. Jh. v. u. Z. zurück und wurde in der heutigen Form von einem Schreiber namens A'hmosé angefertigt. Neben diesen beiden fraglos wichtigsten mathematischen Papyri sind uns noch einige kleinere Auszüge aus anderen Werken überliefert, auf die wir hier aber nicht eingehen werden.

Da die uns bekannten mathematischen Schriften alle einer Periode angehören, haben wir kaum Vorstellungen über die Entwicklung der altägyptischen Mathematik. Aber wir wissen, daß es bereits im 3. Jt. v. u. Z. eine entwickelte Schrift, ein Zahlen-, ein Maßsystem und einen Kalender gab. Das Jahr wurde in 12 Monate zu 30 Tagen geteilt. Das Ende des Jahres beschlossen fünf zusätzliche Tage. Diese Jahreseinteilung stammt aus der Zeit, in der die ersten Pyramiden gebaut wurden, die die Griechen zu den sieben Weltwundern zählten.

Betrachtet man die altägyptische Mathematik, so erscheint sie vom Standpunkt selbst der Schulmathematik aus gesehen als ziemlich primitiv, gelangten doch die Ägypter über die Arithmetik gebrochener Zahlen, über lineare und unvollständige quadratische Gleichungen nicht hinaus. Da ein Begriff für Gleichungen fehlte, waren diese auch nicht von der Art, wie wir es heute gewöhnt sind. In ihrer Mehrheit tragen die Aufgaben einen konkreten Charakter. Im Mittelpunkt des



Das Foto zeigt zwei Spalten des *Moskauer Papyrus* mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit Seiten 2 und 4, und Höhe 6 Ellen. Oben: der hieratische Text; unten: die Umschrift in Hieroglyphen.

Der Text lautet:

- (1) Addiere du zusammen diese 16
- (2) mit dieser 8 und mit dieser 4.
- (3) Es entsteht 28. Berechne du
- (4) $\frac{1}{3}$ von 6. Es entsteht 2. Rech-
- (5) ne du 28 2mal. Es entsteht 56.
- (6) Siehe: er ist 56. Du hast richtig gefunden.

Interesses standen die Rechnungen. Das Zahlensystem war recht einfach. Spezielle Zeichen gab es lediglich für die Zehnerpotenzen bis zu Zehnmillionen. Die anderen Zahlen wurden additiv gebildet. Bei 345 beispielsweise wiederholt sich das Zeichen für Hundert dreimal, das Zeichen für Zehn viermal und das Zeichen für Fünf fünfmal. Addition und Subtraktion werden in den Papyri nicht erläutert, da sie offensichtlich zu einfach waren. Wenn man addiert, so fügt man dem einen Summanden die Anzahl der Zeichen für die Einer, Zehner, Hunderter usw. des zweiten Summanden einfach hinzu. Dabei geht man von einer Potenz zur nächst höheren über, wenn zehn Zeichen der niederen geschrieben worden sind. Die Multiplikation mit einer ganzen Zahl wurde auf das Verdoppeln und somit auf die Addition zurückgeführt.

Beispiel (mit modernen Zahlzeichen):

$$\begin{array}{r} 29 \times 21 \\ / 1 \quad 29 \\ \quad 2 \quad 58 \\ / 4 \quad 116 \\ \quad 8 \quad 232 \\ / 16 \quad 464 \\ \hline \text{Ergebnis: } 21 \quad 609 \end{array}$$

Die Schrägstriche kennzeichnen die notwendigen Summanden. Ihre Summe entspricht dem Produkt der beiden Faktoren. Mitunter führte man die Multiplikation anstelle mit 2 mit 5 und 10 aus.

Die Division wurde als eine Art Umkehrung der Multiplikation verstanden. Um 297 durch 11 zu teilen, stellte sich ein Schreiber offenkundig die Frage:

Mit welcher Größe muß man 11 multiplizieren, um 297 zu erhalten?

Modern geschrieben ergibt sich:

$$\begin{array}{r} / 1 \quad 11 \\ / 2 \quad 22 \\ \quad 4 \quad 44 \\ / 8 \quad 88 \\ / 16 \quad 176 \\ \hline \text{Ergebnis: } 27 \quad 297 \end{array}$$

War der Quotient keine ganze Zahl, sondern eine gemischte Zahl oder ein Bruch, ersetzten die altägyptischen Rechner die Division $m:n$ durch die Multiplikation $m \cdot \frac{1}{n}$. Dadurch gelangten sie zu einer Klasse von Brüchen, deren Zähler Eins ist. Derartige Brüche werden Stammbrüche genannt und modern, dem altägyptischen Vorgehen angepaßt, als $\bar{n}$ geschrieben. Zu dieser Klasse zählten die Ägypter auch den Bruch $\frac{2}{3}$, der durch $\bar{3}$ gekennzeichnet wird. Da alle anderen Brüche durch diese Stammbrüche dargestellt wurden, mußten sie in Summen von Stammbrüchen zerlegt werden.

Diese Aufgabe nun hat keine eindeutige Lösung. Aus diesem Grunde entstanden als

Hilfsmittel spezielle Tabellen mit derartigen Zerlegungen. Auf das Potenzieren und Radizieren stießen die Schreiber im alten Ägypten bei der Berechnung quadratischer Flächen, kubischer Körper oder der Seite eines Quadrates aus seiner Fläche. Sie erläuterten diese Operationen jedoch nicht speziell und schufen auch keine besondere Terminologie dafür.

In den Papyri gibt es Aufgaben, die heute im Algebraunterricht in der Schule behandelt werden: lineare Gleichungen mit einer Unbekannten, unvollständige quadratische Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen.

Beispiel: Aufgabe 19, Moskauer Papyrus

„Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$ mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?

Berechne du die Größe dieser 10 über dieser

4. Es entsteht 6. Rechne du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$. Berechne du von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich. Du hast richtig gefunden.“

Modern ausgedrückt bedeutet das:

$$\frac{3}{2}x + 4 = 10$$

1. Schritt $\frac{3}{2}x + 4 - 4 = 10 - 4 = 6$

2. Schritt $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$

3. Schritt $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Lösung: $x = 4$.

In der Aufgabe 6 des Moskauer Papyrus werden die Seiten eines Rechtecks gesucht,

wenn die Breite $\frac{3}{4}$ der Länge beträgt und die

Fläche 12 ist. In moderner Form heißt das, daß die unvollständige quadratische Gleichung $ax^2 = b$ zu lösen ist. Der altägyptische Rechner bewältigt dieses Problem verbal mit der Methode des „falschen Ansatzes“. Der Schreiber nimmt zuerst an, daß die Länge 1 ist. Dann wird die Breite $\frac{3}{4}$. Ebenso groß wird der Flächeninhalt. Aber in der Aufgabe wurde gefordert, daß er 16mal größer sein soll, was bedeutet, daß die Länge gleich $\sqrt{16} = 4$ und die Breite 3 sein müssen.

Die Aufgabe 79 im Papyrus Rhind führt zur Summe einer geometrischen Reihe:

„Inventar eines Haushaltes:

7 Häuser 2401 Getreideähren
49 Katzen 16807 hekat (ein Getreidemaß)
343 Mäuse zusammen: 19607.“

Diese Aufgabe ist dafür berühmt, daß sie sich mit geringfügigen Änderungen in der Formulierung bei verschiedenen Völkern zu unterschiedlichen Zeiten nachweisen läßt.

In der Geometrie bestimmten die alten Ägypter Flächeninhalte und Volumina von Körpern. Dabei erzielten sie gute Ergebnisse, ohne jedoch die Geometrie zu einer selbständigen mathematischen Disziplin zu entwickeln.

Probleme zur Ermittlung von Flächeninhalten ebener Figuren erwuchsen aus der Praxis der Landvermessung. Da keine Spezialausdrücke wie „Fläche“ oder „Figur“ vorhanden waren, sprach man in den Aufgaben von Feldern, von Flächenstücken mit festen Grenzen oder mit fester „Breite“ und „Länge“.

Die Flächen eines Rechtecks, eines Dreiecks oder eines Trapezes werden noch heute nach denselben Formeln ermittelt, wie es damals geschah. Ein beliebiges Viereck berechnete man approximativ $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, wo a und c , b und d die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks sind. Die Kreisfläche bestimmte man mit der Formel $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, wo d der Durchmesser ist. Das entspricht der ziemlich guten

Näherung von 3,1605 für π . Das Volumen vieler Körper, z. B. des Würfels, des Parallelepipedes, des Prismas oder des Zylinders, berechneten die Ägypter als Produkt von Grundfläche und Höhe. Das war nötig, um die Getreidemengen in Speichern und Lagern derartiger Form feststellen zu können.

Obwohl seit der Veröffentlichung des Moskauer Papyrus einige Jahrzehnte vergangen sind, streiten sich die Mathematikhistoriker noch heute und stellen Hypothesen auf, wie diese oder jene Regel gefunden worden ist, wie diese oder jene Formulierung einer einzelnen Aufgabe zu deuten ist. Das betrifft z. B. die zehnte Aufgabe des Moskauer Papyrus. V. V. Struve übersetzte diese Aufgabe so: „Form der Berechnung eines Korbes, wenn man dir nennt einen Korb mit einer Mündung zu $4\frac{1}{2}$ in Erhaltung. O laß mich wissen seine (Ober)fläche. Berechne du $\frac{1}{9}$ von 9, weil ja der

Korb die Hälfte eines Eies ist. Es entsteht 1. Berechne du den Rest als 8. Berechne du $\frac{1}{9}$ von 8. Es entsteht $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$. Berechne du den Rest von dieser 8 nach diesen $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$. Es entsteht $7 + \bar{9}$. Rechne du mit $(7 + \bar{9}) \cdot 4\frac{1}{2}$ mal. Es entsteht 32. Siehe: es ist seine (Ober)fläche. Du hast richtig gefunden.“

In der Interpretation von V. V. Struve wird der in der Aufgabe genannte „Korb“ zu einer Halbkugel, und es ergibt sich die exakte Formel für die Oberfläche der Halbkugel (Bild 1). Diese Deutung wird von einigen Mathematik-



Bild 1

historikern geteilt. Zu ihnen gehören B. L. van der Waerden und R. Gillings.

E. T. Peet übersetzte die Bedingungen dieser Aufgabe anders. Seiner Meinung nach ist der „Korb“ ein halber Zylinder. Damit ergibt sich die richtige Formel für die Mantelfläche eines Halbzylinders (Bild 2).

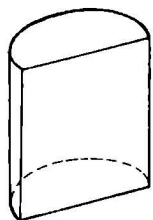


Bild 2

Eine dritte Erklärung gab O. Neugebauer. Er faßt den „Korb“ als einen kuppelförmigen Getreidespeicher auf, wie er auf ägyptischen Zeichnungen abgebildet ist. Die Berechnung interpretiert er als Approximation (Bild 3).

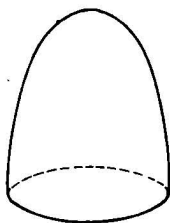


Bild 3

Vielleicht wird sich einer der Leser dieser Zeitschrift später beruflich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigen und seine eigene Ansicht zu dieser und anderen ägyptischen Aufgaben vorstellen.

Eine bemerkenswerte Leistung der altägyptischen Mathematik ist die exakte Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche, die in Aufgabe 14 des Moskauer Papyrus enthalten ist:

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2),$$

h Höhe, a , b Seiten der Deck- und Grundfläche.

Wir haben gesehen, daß die Mathematik im alten Ägypten sich nicht in Arithmetik, Algebra und Geometrie aufgliederte, sondern sich als eine Menge von Regeln zur Lösung einfachster Aufgaben, die hauptsächlich aus der Praxis genommen worden sind, darbietet. Das Ergebnis wird häufig empirisch, durch Versuche gefunden. Dadurch läßt sich die Schwerfälligkeit vieler Regeln sowie die Tatsache erklären, daß die Lösungen nicht immer auf dem kürzesten Weg ermittelt werden. Gleichzeitig damit wurde Anfang des 2. Jahr. v. u. Z. eine intensive theoretische Überarbeitung der Lösungsmethoden durchgeführt. Die Aufgaben selbst wurden in zunehmendem Maße verallgemeinert und nahmen einen abstrakten Charakter an. Die Mathematik Altägyptens beeinflusste ohne Zweifel die weitere Entwicklung der Wissenschaft, vor allem die altgriechische Mathematik.

A. I. Volodarskij (als Autor/

S. Brentjes (als Übersetzer und Bearbeiter)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Volkmar Friedrich

Direktor der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

▲2206▲ Peter probiert zusammen mit seinem Vater einen neu gekauften einfachen Taschenrechner aus, der die vier Grundrechenarten ausführen kann. Begeistert ist er, wie schnell jetzt Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen zu bewältigen sind.

Bei der Berechnung von $(9 - \sqrt{80})^3$ wird es aber problematisch:

Da der kleine Taschenrechner keine Taste für Quadratwurzeln besitzt, greift Peter zu einer Zahlentafel und entnimmt ihr

$$\sqrt{80} \approx 8.9443.$$

Während Vater direkt

$$9 - \sqrt{80} \approx 0.0557$$

und $(9 - \sqrt{80})^3 \approx 0.000173$

berechnet, benutzt Peter die ebenfalls in der Zahlentafel enthaltene Formel

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

und formt diese zu

$$(a - b)^3 = a^3 + 3ab^2 - (3a^2 + b^2)b$$

um.

Ihm scheint diese Formel günstiger, da er dann $a = 9$ und $b^2 = 80$ verwenden kann und nur für b den Näherungswert $b' = 8.9443$ benutzen muß. Erschrocken stellt er fest, daß er hiermit

$$a^3 + 3ab^2 - (3a^2 + b^2)b' = -0.0089$$

erhält, was natürlich vollkommen falsch ist, da wegen $9 > \sqrt{80}$ auch $(9 - \sqrt{80})^3 > 0$ gilt.

Vater kennt eine Methode, wie man auch ohne eine $\sqrt{\quad}$ -Taste auf diesem kleinen Rechner die Quadratwurzel ermitteln kann und erhält $\sqrt{80} \approx 8.9442719$.

Die zuerst verwendete Näherung für $\sqrt{80}$ ist also recht gut. Der Taschenrechner scheint also nicht richtig zu funktionieren. Beide beschließen, ihn am kommenden Tag in der Verkaufsstelle umzutauschen.

Der Verkäufer hört sich die Beschwerde beider an. Sie probieren alle noch nicht verkauften Taschenrechner an dieser Aufgabe aus – und alle verhalten sich gleich. Der Verkäufer beschließt, alle Rechner als Ausschuß an den Herstellerbetrieb zurückzuschicken. Doch da fällt Peter etwas ein. Er rechnet ohne Hilfe des Taschenrechners nach – und steckt den gekauften Taschenrechner wieder ein.

Wie erklärte sich Peter, daß er, obwohl er den gleichen Näherungswert b' wie sein Vater verwendet hat, für $(9 - \sqrt{80})^3 > 0$ mit der

negativen Zahl -0.0089 eine wesentlich schlechtere Näherung (sogar mit falschem Vorzeichen!) erhalten hatte?

Welche Schlußfolgerungen zieht er für die Rechnung mit Näherungswerten?

Mit dem letzten Satz weisen wir die *alpha*-Leser auf den in Heft 2/81 erscheinenden Artikel von Dr. J. Gronitz (TH Karl-Marx-Stadt) hin:

Was jeder wissen sollte:

Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten.



1939 in Brunndöbra (Kreis Klingenthal) geboren.

Besuch der Grundschule in Adorf/Vogtl.

und der Oberschule in Lichtenstein,

Abitur 1957 an der ABF II Halle.

1957 bis 1962 Mathematikstudium in

Leningrad,

1962 Diplom.

1962 bis 1964 Assistent in Jena,

1964 bis 1965 Zusatzstudium in Leningrad.

1966 bis 1969 Tätigkeit als Mathematiker

im VEB Elektronische Rechenmaschinen

Karl-Marx-Stadt (heute Bestandteil des

VEB Robotron).

1969 Promotion (Dr. rer. nat.),

1969 bis 1970 Oberassistent an der

Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt,

1970 bis 1972 Dozent,

1971 Promotion B (Dr. sc. nat.),

seit 1972 Professor für *Numerische*

Mathematik an der Technischen Hochschule

Karl-Marx-Stadt,

seit 1980 Direktor der Sektion Mathematik

der TH Karl-Marx-Stadt, 2 Monographien

und etwa 20 Publikationen in wissen-

schaftlichen Zeitschriften.

Ausbildung von Diplommathematikern

mit vertieften technischen Kenntnissen
an der Sektion Mathematik
der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt (THK)



An der Sektion Mathematik der THK werden seit 1963 Diplommathematiker und seit 1965 Diplomlehrer für Mathematik und Physik ausgebildet (vgl. Schülerzeitschrift alpha 5/1976). Ab Studienjahr 1981/82 werden auch Diplommathematiker mit vertieften technischen Kenntnissen ausgebildet.

Warum wurde diese Ausbildungsmöglichkeit geschaffen?

Die Mathematik dringt in immer mehr Bereiche der gesellschaftlichen Praxis ein. In den Naturwissenschaften, in den technischen Wissenschaften, in vielen Bereichen der Volkswirtschaft sowie in der Planung und Leitung werden mathematische Theorien und Verfahren angewandt. Moderne Entwicklungen auf vielen Gebieten, so z. B. in der Mikroelektronik, in der chemischen Industrie, im Maschinenbau und im Bauwesen, wären ohne die Hilfsmittel der Mathematik nicht möglich. Durch die Entwicklung der EDV, die es erlaubt, umfangreiche und komplizierte Rechnungen in kurzer Zeit auszuführen, sind die Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Modelle und Methoden weiter gewachsen.

Voraussetzung für jede Anwendung ist die richtige mathematische Modellierung von naturwissenschaftlichen, technischen und

volkswirtschaftlichen Prozessen. Dabei verstehen wir unter Modellierung die Erfassung der wesentlichen Zusammenhänge in diesen Prozessen durch mathematische Beziehungen (Gleichungen, Ungleichungen) zwischen den verschiedenen Ausgangs-, Ergebnis- und Einflußgrößen, d. h. zwischen den Größen (Variable, Funktionen), die Ausgangssituation und Endzustand beschreiben sowie Größen, über die wir den Prozeß steuern können oder die ihn zufällig beeinflussen. Zur Modellierung gehört auch eine mathematische Formulierung des angestrebten Zieles (z. B. Angabe der Abhängigkeit der Ergebnis- von den Ausgangsgrößen als Funktionen bzw. Funktionswerttabellen, Bestimmung des günstigsten (wirtschaftlichsten) Prozeßablaufs (Optimierung).) Wenn man solche mathematischen Modelle schaffen will, benötigt man vertiefte Kenntnisse auf physikalischem und technischem Gebiet, ist die Zusammenarbeit mit Physikern und Technikern notwendig. Deshalb werden in der Zukunft in viel stärkerem Maße Mathematiker mit vertieften Kenntnissen in den wesentlichsten Anwendungsgebieten benötigt.

Entsprechend dem Profil der THK sollen bestimmte Erfordernisse des Maschinenbaus als Grundlage für die vertiefte technische Ausbildung auf ausgewählten Gebieten als

Schwerpunkte genommen werden. Dieses Ziel ist deshalb von uns zu verwirklichen, weil wir uns in den zurückliegenden Jahren auch mit unterschiedlichen angewandten Aufgabenstellungen befaßt haben. In diese Forschungsaufgaben sind auch viele Studenten einbezogen.

Die nachstehenden Beispiele sollen die Vielfalt technischer und naturwissenschaftlicher Aufgaben charakterisieren, die von Lehrkräften und Studenten der Sektion Mathematik der THK untersucht wurden oder noch werden.

- Die Berechnung von Temperatur- und Spannungsverteilungen während der Wärmebehandlung von Gußkörpern erlaubte dem SKET Magdeburg bedeutende Energieeinsparungen und Erweiterung der Produktionskapazität.

- Temperaturfeldberechnungen sind auch Grundlage für die Verbesserung von Patentierungstechnologien für Stahlstränge im VEB Draht- und Seilwerke Rothenburg.

- Als Jugendobjekt wurden Methoden zur Lösung großer Optimierungsaufgaben auf die Produktionsplanung im VEB Waschgerätekwerk Schwarzenberg angewandt.

- Berechnungen an Ansaugsystemen und Dieseleinspritzanlagen verschiedener Varianten von Pkw-Motoren ermöglichten wesentliche Einsparungen bei Bau und Erprobung von Versuchsmustern.

- Mathematische Betrachtungen führten zu Verbesserungen an der Konstruktion von Zahnrädern und bei der Technologie des Fräsens von Schnecken und helfen bei der Untersuchung hochproduktiver Schleiftechnologien.

- Ein Kollektiv aus Ingenieur- und Mathematikstudenten erhielt für Untersuchungen zur zerstörungsfreien Prüfung von Gußstücken den Jugendneuererpreis.

- Die mathematische Nachbildung einzelner physikalischer Vorgänge bei der Herstellung und bei der Nutzung mikroelektronischer Bauelemente unterstützt Physiker und Technologen in ihrer Forschung.

- Untersuchungen zur Genauigkeit, mit der aus Satellitenmeßwerten die gesamte Temperaturverteilung in der Atmosphäre berechnet werden kann, ermöglichten dem *Meteorologischen Dienst* Schlußfolgerungen zur Nutzung spezieller Meßgeräte in Satelliten.

Die Erfahrungen aus diesen Untersuchungen und aus der Einbeziehung der Studenten in diese Anwendungen mathematischer Methoden zeigen deutlich, daß es notwendig ist, Mathematiker mit vertieften naturwissenschaftlichen und technischen Kenntnissen auszubilden. Für eine derartige Ausbildung besitzen Technische Hochschulen beste Voraussetzungen auf Grund der vorhandenen engen Zusammenarbeit von Mathematikern mit naturwissenschaftlichen und technischen Sektionen sowie mit unmittelbaren Praxis-



partnern. Entsprechend dem Profil der THK werden in der Mathematikerausbildung die Fragen der Modellierung an Problemstellungen des Maschinenbaus (im weiteren Sinne) erörtert. Die Möglichkeit einer Kombination der Mathematikerausbildung mit Problemen der Informationstechnik (mathematische Methoden des Schaltungsentwurfs, der Schaltungsanalyse usw.) werden gegenwärtig geprüft.

Was ist der Inhalt des Studiums?

Wie sieht der Studienplan aus?

Das Studium dauert 5 Jahre. Es ist ein Diplommathematiker-Studium. Der Studienplan unterscheidet sich von bisherigen Plänen durch eine verlängerte Grundstudienphase zugunsten physikalischer und technischer Gebiete. Der Plan orientiert auf die Vermittlung umfangreicher Kenntnisse aus allen wichtigen mathematischen Disziplinen (Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Algebra, Geometrie, Näherungsmethoden, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Optimierung) und auf die Entwicklung der erforderlichen Fertigkeiten in der Handhabung des mathematischen Apparates dieser Disziplinen entsprechend den für alle Universitäten und Hochschulen einheitlichen Zielen in der Mathematikerausbildung.

Eine wichtige Rolle im Studienplan spielen auch die Kenntnisse und Fertigkeiten in der Nutzung der modernen Rechentechnik, Grundlagen für die mathematische Modellierung werden vom ersten Studienjahr an vor allem durch die Ausbildung in Physik (Mechanik der Massenpunkte und Starrkörper sowie elastischer Körper und strömender Medien; Wärmelehre, elektrische und magnetische Felder) und durch die Diskussion grundlegender technischer Funktionselemente und der durch sie realisierten physikalischen Grundgesetze geschaffen.

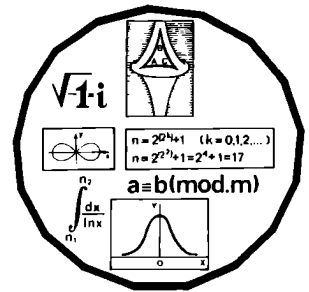
Hierauf aufbauend werden in der Spezialausbildung sowohl analytische als auch numerische Untersuchungsmethoden vertieft als auch Ergebnisse und Tendenzen der Modellierung kontinuierlicher und diskontinuierlicher technologischer Verfahren und Prozesse im Maschinenbau an ausgewählten Beispielen behandelt (z. B. durch wahlobligatorische Lehrveranstaltungen zu mathematischen Modellen technologischer Verfahren, zum Stand der mathematischen Beschreibung von Werkstoffeigenschaften, zu Grundbegriffen der Regelungstheorie und technischen Regelungen, zur (optimalen) Steuerung technologischer Verfahren und zu vielfältigen Problemen des Einsatzes der Rechentechnik in der Steuerung von Produktionsprozessen).

Die Studenten haben günstige Voraussetzungen zur Mitarbeit bei Forschungsaufgaben, die stark anwendungsorientiert sind und für die Zusammenarbeit mit technischen Sektio-

Ein Hobelspan aus Gauß' Werkstatt



C.F. Gauß
* 30. April 1777
† 23. Februar 1855



Am 22. 9. 1836 teilte der Altonaer Astronom H. C. Schumacher (1780 bis 1850) seinem Freund Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in Göttingen mit, er habe von dem Hamburger Astronomen K. L. Rümcker (1788 bis 1862) folgende Aufgabe mit Lösung erhalten: *Es ist eine Ellipse und in ihrer Ebene außerhalb von ihr ein Punkt P gegeben. Von diesem Punkt sind Tangenten an die Ellipse zu ziehen, ohne einen Zirkel zu gebrauchen.*

Die Rümckersche Lösung sah so aus (siehe Bild 1): Von P werden 4 beliebige, die Ellipse schneidende Geraden gezogen. Sie schneiden die Ellipse in A und a, B und b, C und c, D und d. Nun wird A mit b, B mit a, C mit d, D mit c verbunden. Die jeweiligen Schnittpunkte sind Q und R. Die Gerade durch Q und R schneidet die Ellipse in E und F, das sind die Berührungspunkte der von P an die Ellipse gezogenen Tangenten.

Schumacher fügte hinzu, offenbar habe Rümcker eine Gerade zu viel gezogen, denn man könnte mit 3 Geraden durch P, die die Ellipse schneiden, auskommen.

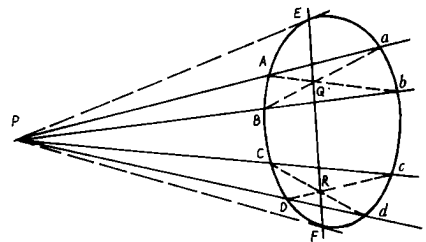


Bild 1

Konstruktion von Rümcker

Am 28. 9. 1836 antwortete Gauß, Rümcker habe in der Tat zu viele Linien gezogen und 3 Geraden reichten aus. Aber auch das sei noch zuviel – zwei Geraden durch P, die die Ellipse schneiden, seien schon hinreichend. Zugleich gab Gauß seine Lösung an. Zu finden ist die zu dieser Auskunft von Gauß gehörige Konstruktion unter Angabe des Satzes, auf dem sie beruht (siehe Bild 2).

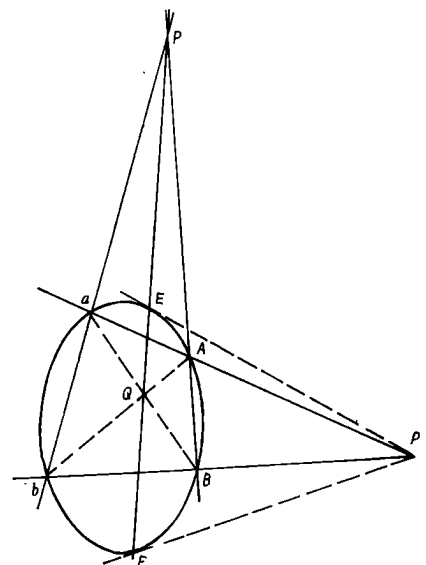


Bild 2

Lösung (Schnittpunkte der Polaren von P mit der Ellipse sind die Berührungspunkte der Tangenten von P an die Ellipse)

Mitgeteilt von K.-R. Biermann

nen und Praxispartnern, insbesondere aus dem Maschinenbau. Eine solche Arbeit ist in Vorbereitung auf künftige Einsatzmöglichkeiten vorgesehen.

Beim Betriebspraktikum, bei der Vergabe der Themen für die Jahres- und Diplomarbeit sowie beim Einsatz nach Abschluß des Studiums wird die spezielle Ausbildungsrichtung starke Berücksichtigung finden.

Welche Einsatzmöglichkeiten gibt es für die Absolventen?

Die Diskussion verschiedenartiger Probleme der mathematischen Modellierung an Beispielen aus dem Maschinenbau engt das Einsatzgebiet des Absolventen jedoch nicht auf den Maschinenbau ein, sondern eröffnet gleichzeitig den Zugang zu Anwendungen in der chemischen Industrie, der Energetik, der Elektrotechnik und Mikroelektronik u. ä. Ebenso bestehen Möglichkeiten einer weiterführenden wissenschaftlichen Entwicklung an der Sektion auch zur mathematischen Grundlagenforschung, vor allem zu Näherungsmethoden (Numerische Mathematik), zur Mathematischen Physik, zur Optimierung und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik.

V. Friedrich

Mathematiker-Kongreß der DDR 1981



Sonderstempel

Aus dem Referat des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen der DDR
zur Eröffnung des Mathematiker-Kongresses

... Wenn auf dem X. Parteitag der SED im April 1981 festgestellt wurde, daß „die Möglichkeiten der wissenschaftlich-technischen Revolution unmittelbar zur Hauptreserve für Leistungswachstum und Effektivität unserer Volkswirtschaft geworden“ sind, so gehört die Mathematik zweifellos zu den unverzichtbaren Kettengliedern bei der allseitigen Beschleunigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts.

Reichen die Wurzeln mathematischen Denkens in die Frühzeit der menschlichen Entwicklung zurück, so können wir doch heute feststellen, daß die Mathematik eine jung gebliebene und dynamische Wissenschaft ist. Besonders spürbare Impulse erwachsen ihrer Entwicklung und breiten Anwendung aus den modernen und revolutionierenden Möglichkeiten höchst leistungsfähiger Rechen-technik in den letzten Jahren.

In neuer Dimension stellen sich heute die Ansprüche an die Mathematik. Bereits Friedrich Engels schrieb dazu im Anti-Düring „Wie alle anderen Wissenschaften ist die Mathematik aus den Bedürfnissen der Menschen hervorgegangen.“

... Aber wie in allen Gebieten des Denkens werden auf einer gewissen Entwicklungsstufe die aus der wirklichen Welt abstrahierten Gesetze von der wirklichen Welt getrennt, ihr als etwas Selbständiges gegenübergestellt, als von außen kommende Gesetze.“

Deshalb gelten unsere Aufmerksamkeit und Förderung stets sowohl dem fundamentalen theoretischen Fortschritt der Mathematik als auch der konsequenten Anwendung und Nutzung ihrer Ergebnisse und Potenzen. Auf dem Gebiet der applikativen und interdisziplinären Forschung erschließen sich ständig neue Felder für volkswirtschaftlich interessante produktivitätswirksame Anwendungen.

Es ist daher eine Aufgabe von gesellschaftlicher Tragweite, die Mathematik in stärkerem Maße für die Entwicklung anderer Wissenschaftsdisziplinen wirksam zu machen.

Im Jahr des X. Parteitages der SED war die Karl-Marx-Universität Schauplatz eines für die mathematische Wissenschaft bedeutsamen Ereignisses: Aus Anlaß des 100. Geburtstages des Mathematischen Seminars der Leipziger Universität (siehe *alpha* 2/81) fand in der Zeit vom 28. 9. bis 2. 10. 1981 in Leipzig der „Mathematiker-Kongreß der DDR 1981“ statt. (Der nächste Kongreß wird 1986 in Rostock sein.) Er wurde veranstaltet von der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Zusammenarbeit mit der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität. Dieser erste „Kongreß“ stellte infolge der gewachsenen Breite, Leistungsfähigkeit und Praxiswirksamkeit der DDR-Mathematik und durch seinen auch auf Nichtmitglieder der Mathematischen Gesellschaft und ausländische Wissenschaftler erweiterten Teilnehmerkreis eine qualitativ und quantitativ neue Fortsetzung der bisher durchgeführten „Haupttagungen“ der Mathematischen Gesellschaft dar.

Teilnehmer

Am Mathematiker-Kongreß nahmen etwa 1000 Fachwissenschaftler von den Universitäten, Hoch- und Fachschulen der DDR, Mathematiker und Praktiker aus vielen Bereichen der sozialistischen Volkswirtschaft, Mathematiklehrer aus unserem Volkswirtschaftswesen sowie Wissenschaftler aus der UdSSR, der CSSR, der VR Polen, der VR Bulgarien, der Ungarischen VR, der SR Rumänien, der SR Vietnam, der VDR Jemen, aus Kuba, Äthiopien, den USA, der BRD, der Schweiz, aus Japan, Österreich, Finnland, den Niederlanden, Belgien und Frankreich teil.

Wissenschaftliches Programm

Der Mathematiker-Kongreß verfolgte das Ziel, den bisher erreichten Entwicklungsstand und die Entwicklungstendenzen der Mathematik einzuschätzen sowie über neueste Forschungsmethoden und Forschungsergebnisse sowie ihre Anwendungen, insbesondere in der Physik und in anderen Natur- und Technikwissenschaften zu informieren. Er diente der Weiterbildung und Information für die in Forschung, Praxis und Volksbildung tätigen Fachkollegen. Auf dem Programm des Kongresses standen etwa 180 Veranstaltungen, darunter 4 Plenar-, 40 Übersichts- und etwa 80 Halbstundenvorträge. Des weiteren wurden auf 47 Poster-Beiträgen an Übersichtstafeln bedeutsame Forschungsergebnisse in Kurzform dargestellt. Außerdem fanden sieben Diskussionsveranstaltungen statt, in denen Probleme der Mathematik-Ausbildung in Schule und Hochschule, der Talentförderung, der Rolle der Mathe-

Prominente Gäste zur Eröffnung des Kongresses (v. l. n. r.): Prof. Dr. H. Schumann, Direktor der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig, Prof. H.-J. Böhme, Minister für Hoch- und Fachschulwesen der DDR, Prof. Dr. L. Rathmann, Rektor der KMU Leipzig, Prof. Dr. W. Engel, Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der DDR (1971 bis 1981), Dr. D. Keller, Sekretär für Wissenschaften der SED-Bezirksleitung Leipzig



Prof. H.-J. Böhme

matik in der sozialistischen Praxis sowie des Zusammenwirkens von Mathematik und Informationsverarbeitung beraten und dabei gewonnene Erfahrungen ausgetauscht wurden.

Traditionspflege

Aus dem 1881 an der Universität Leipzig gegründeten *Mathematischen Seminar*, dessen Gründer und erster Direktor Felix Klein (1849 bis 1925) war, gingen das spätere Mathematische Institut und die heutige Sektion Mathematik hervor. Einige Aktivitäten der Sektion in Vorbereitung auf den 100. Jahrestag der Gründung des Leipziger Mathematischen Seminars waren die Einrichtung eines Traditionskabinetts und die Herausgabe eines Jubiläumsbandes „100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig“, der zum Kongreß erschienen ist. Auch der Mathematiker-Kongreß stand ganz im Zeichen der Pflege fortschrittlicher Traditionen. Der Eröffnungsvortrag des Kongresses, gehalten vom Direktor der Sektion Mathematik der KMU, Prof. Dr. H. Schumann, „Zum 100. Jahrestag der Gründung des Leipziger Mathematischen Seminars“ war ein würdiger Auftakt dazu und gab dem Kongreß das Gepräge. Ein weiterer Plenarvortrag war der mathematikhistorische Beitrag „Bernard Bolzano zum 200. Geburtstag, Beiträge zur Analysis“ von Prof. Dr. H. Wußing (siehe *alpha* 6/81). Ebenso war das wissenschaftliche Programm des Kongresses stark ausgerichtet auf das historisch gewachsene, breite und anwendungsorientierte Forschungsprofil der Leipziger Mathematiksektion, in dem die Analysis eine dominierende Stellung einnimmt.

Studentenkonferenz

Am Vorabend des Mathematiker-Kongresses, am 25. 9. und 26. 9. 1981, fand in Leipzig ein weiteres – besonders für die studentische Forschung bedeutsames – Ereignis, die „3. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik“ statt. Veranstalter waren der Wissenschaftliche Beirat für Mathematik beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, die Mathematische Gesellschaft und der Zentralrat der FDJ. Teilnehmer der zweitägigen Konferenz waren etwa 200 Mathematik- und Mathematiklehrerstudenten von den Universitäten sowie Technischen und Pädagogischen Hochschulen der DDR, im sozialistischen Ausland studierende DDR-Studenten sowie ausländische Studentenvertreter. Teilnehmende Wissenschaftler und Praktiker standen den Studenten als erfahrene Gesprächspartner zur Seite. Wie schon bei den vorangegangenen Konferenzen dieser Art (1977 und 1979 in Leipzig) stellten die Studenten in 4 Plenar- und 33 Kurzvorträgen Ergebnisse ihrer mathematischen Forschungsarbeit vor, die sie im Rahmen von Jugendobjekten, Studenten-

zirkeln, Jahres-, Praktikums- und Diplomarbeiten oder als Forschungsstudenten in Dissertationen erzielt haben. Darüber hinaus wurden 23 der besten Exponate in einer Ausstellung gezeigt. Die vorgetragenen und ausgestellten Arbeiten waren durch eine Jury aus etwa 100 zur Konferenz eingereichten Arbeiten ausgewählt worden. Sie wurden mit Reisen, Geld- und Buchprämien sowie Ehrenmedaillen der Mathematischen Gesellschaft ausgezeichnet. Auswahlkriterien waren dabei wissenschaftlicher Erkenntniszuwachs, mathematische Originalität sowie praktische Nutzbarkeit. Als Beispiele hervorragender Exponate seien genannt: die im Rahmen eines Jugendobjekts entstandene Arbeit „Einhaltung des Komparatorprinzips bei der Herstellung mikroelektronischer Bauelemente“ von Norman Bitterlich (FSU Jena), die Diplomarbeit „Thermoschockvorgänge bei metallurgischen Prozessen“ von Andreas Schürer (TH Karl-Marx-Stadt), die Diplomarbeit „Ein relationales Datenbankmodell“ von Christina Adler (KMU Leipzig), die Praktikumsarbeit „Spannungsgeometrie bei Stirnzahnrädern“ von Eckard Wildgrube (MLU Halle) und die Dissertationen „Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren“ von Helga Baum (HU Berlin), s. Foto, und „Grenzwert-

sätze“ von Lothar Heinrich (TU Dresden). Neben dem von Prof. Dr. G. Laßner (KMU Leipzig) gehaltenen Eröffnungsvortrag „Zum mathematisch-physikalischen Weltbild“ gehörten zum Konferenzprogramm noch zwei Diskussionsrunden, die sich mit den Anforderungen der Praxis an einen Mathematikabsolventen und den Möglichkeiten zur Förderung begabter Schüler auf dem Gebiet der Mathematik beschäftigten. Studentenkonferenzen dieser Art werden auch in Zukunft alle zwei Jahre stattfinden.

Weitere Veranstaltungen

Zum Geschehen des Mathematiker-Kongresses gehörte auch eine Mitgliederversammlung der Mathematischen Gesellschaft der DDR, auf welcher der neue Vorstand der Gesellschaft gewählt wurde. Ebenso wurde auf dem Kongreß erstmalig die *Ehrenmedaille der Mathematischen Gesellschaft* verliehen, und zwar an zwei Wissenschaftler und drei ehemalige Forschungsstudenten. Auch erwartete die Kongreßteilnehmer ein interessantes Rahmenprogramm: Führungen und Besichtigungen in Leipzig, Ausflüge nach Kohren-Sahlis, Wörlitz, Altenburg und Rochsburg und ein geselliger Abend. J. Lehmann/R. Mildner



Prof. Dr. sc. nat. Rolf Klötzler, während des Kongresses zum neuen Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft gewählt

Kurzbiographie

Geboren 1931 in Chemnitz (jetzt Karl-Marx-Stadt), hier Besuch der Grundschule von 1937 bis 1945 und der Oberschule mit Abitur von 1945 bis 1949. 1949 bis 1953 Studium in Leipzig, 1953 Diplom, Aspirantur bei Ernst Hölder, 1956 Promotion zum Dr. rer. nat., 1960 Habilitation, 1956 bis 1959 tätig am Forschungsinstitut für reine Mathematik der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, ab 1959 Dozent und von 1963 bis 1965 ordentlicher Professor an der Hochschule für Bauwesen in Leipzig, anschließend (1965 bis 1971) an der Martin-Luther-Universität Halle tätig, seit 1972 ord. Prof. an der Sektion Mathematik der KMU Leipzig. Hier baute er die

Forschungsrichtung „Mathematische Methoden der Operationsforschung“ mit auf. Sein wissenschaftliches Arbeitsgebiet: Variationsrechnung und Steuerungstheorie; bisher etwa 40 Veröffentlichungen, seit Anfang 1981 Chefredakteur der neugegründeten internationalen „Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen“. Prof. K. leitete während seiner Tätigkeit an der Hochschule für Bauwesen Leipzig eine Arbeitsgemeinschaft zur Förderung *Junger Mathematiker* und war stets Förderer der Olympiadebewegung.



Prof. Dr. W. Engel überreicht Helga Baum (Humboldt-Universität zu Berlin) die Ehrenmedaille der Mathematischen Gesellschaft. Weiter erhielten für ihre Beiträge zur Studentenkonferenz eine Ehrenmedaille: Albrecht Heß (Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald) und Thomas Runst (Friedrich-Schiller-Universität Jena). Diese drei jungen Wissenschaftler werden wir in *alpha* vorstellen.

Grußadresse aus der UdSSR

An den Mathematiker-Kongreß
der DDR 1981

Liebe Freunde und Kollegen!

Gestatten Sie mir bitte, den Teilnehmern des 1. Mathematiker-Kongresses der DDR – einer wichtigen Etappe der Entwicklung der Wissenschaft in Ihrem Land – die herzlichsten Grüße zu übermitteln.

Ich bin glücklich, wenn ich daran denke, daß ich Anfang der 50er Jahre am Wiederaufleben des Hochschulwesens Ihrer damals ganz jungen Republik teilnehmen konnte. Ich bin stolz, daß ich eine Reihe von Mathematikern Ihres Landes zu meinen Schülern zählen darf und daß sie zu führenden Gelehrten herangewachsen sind, die wichtige Gebiete der Wissenschaft bereichern.

Ich möchte meine große Bewunderung zum Ausdruck bringen, welche ich bei der Arbeit mit der mathematischen Jugend empfand, denn sie besitzen Fähigkeiten, hervorragend zu arbeiten, sind gewohnt, eine begonnene Arbeit bis zum Ende durchzuführen und dringen in ein vor ihnen stehendes Problem bis zum Kern ein.

Ohne Zweifel ist, daß Wissenschaft und Bildung zusammengehören; es kann keine wertvolle mathematische Bildung sein, ohne daß dabei moderne Probleme der Wissenschaft aufgezeigt und eine tiefe Klärung der Rolle der mathematischen Methoden in den Erkenntnissen der Natur, Entwicklung der Technik und Organisation der Industrie gezeigt werden.

Für mich ist ein Ideal der Mathematiker, welcher erstens der Mathematik in ihren wichtigsten Entwicklungsrichtungen Fortschritt verleiht, zweitens die mathematischen Methoden für die Lösung der Aufgaben in der Praxis benutzen kann und in Anwendungsfragen die Quelle der neuen Möglichkeiten der Entwicklung der Mathematik selbst sieht und drittens die Schüler so erziehen kann, daß sie zur Begeisterung des wissenschaftlichen Suchens fähig sind. Ich selbst bin glücklich, daß ich solche Lehrer – Kolmogorow, Chintschin u. a. – hatte.

Leider kann ich an Ihrem Kongreß nicht teilnehmen. Ich wünsche Ihnen von ganzem Herzen große Erfolge bei der Arbeit des Kongresses und weitere stürmische Entwicklung der theoretischen und angewandten Mathematik in Ihrem Land.

B. Gnedenko

Leninpreisträger Prof. Dr. B. W. Gnedenko
Akademienmitglied der Ukrainischen SSR,
Sektion Mathematik der Lomonossow-
Universität



Ungleichungen

Klasse 1

- ▲1 ▲ $a < 3$
- ▲2 ▲ $3 + a < 7$
- ▲3 ▲ $7 - u > 3$
- ▲4 ▲ Vergleiche 62 mit 69!

Klasse 2

- ▲1 ▲ Vergleiche 7 mit 11! Begründe mit Hilfe der Addition!
- ▲2 ▲ $48 < x < 53$
- ▲3 ▲ Vergleiche die Produkte $3 \cdot 4$ und $5 \cdot 4$!
- ▲4 ▲ $y \cdot 4 < 11$

Klasse 3

- ▲1 ▲ Vergleiche 700 mit 900, und begründe das Ergebnis!
- ▲2 ▲ Für welche Zahlen x gilt die Ungleichung $5897 < x < 5903$?
- ▲3 ▲ Ordne die Zahlen 857, 386, 397, 75, 392 der Größe nach!
- ▲4 ▲ Welche Zahlen x erfüllen die Ungleichung $580 < 10 \cdot x < 620$?

Klasse 4

- ▲1 ▲ Vergleiche 70000 mit 40000, und begründe den Vergleich!
- ▲2 ▲ Welche Vielfachen von 10000 erfüllen die Ungleichung $70000 - a < 20000$?
- ▲3 ▲ Ermittle jeweils die kleinste und die größte Zahl x , die die Ungleichung $10000 < x < 100000$ erfüllt!
- ▲4 ▲ Gib alle möglichen Zahlenpaare an, die die Ungleichung $m + n < 3$ erfüllen!

Klasse 5

- ▲1 ▲ Vergleiche die Brüche $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}$ miteinander!
- ▲2 ▲ Gibt es zwischen den folgenden Ungleichungen einen Zusammenhang?
a) $2 < 3$ und $7 < 8$,
b) $9 > 6$ und $99 > 66$.
- ▲3 ▲ Welche natürlichen Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $27 > 3 \cdot x - 2$,
b) $3z + 3 < 17$,
c) $d + 4 < 11$,
d) $11 > a - 1$,
e) $3 < x + 4 < 11$.

▲4 ▲ Vergleiche $4 \cdot 3$ mit 4^3 !

▲5 ▲ Für das Volumen V eines Quaders gilt $V < 12 \text{ cm}^2$.

Welche Kantenlängen a, b, c (gemessen in cm) mit $a < b < c$ erfüllen diese Ungleichung, wenn die Maßzahlen natürliche Zahlen sind?

Klasse 6

▲1 ▲ Für welche natürlichen Zahlen x gelten folgende Ungleichungen?

- a) $\frac{3}{5} < \frac{x}{5} < \frac{8}{5}$,
- b) $\frac{9}{11} < \frac{x}{2} < \frac{8}{9}$,
- c) $\frac{3}{5} < \frac{4}{x} < \frac{5}{3}$ mit $x \neq 0$.

▲2 ▲ Gib mindestens drei gebrochene Zahlen x an, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen!

- a) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$,
- b) $\frac{25}{7} < x < \frac{24}{9}$,
- c) $\frac{6}{4} > x > \frac{6}{4}$.

▲3 ▲ Setze zwischen die folgenden Terme die richtigen Zeichen ($<$; $>$; $=$)!

- a) $1,83 + 0,5 \square 1,14 + 1,17$,
- b) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \square \frac{36}{12}$,
- c) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} \square \frac{27}{5} - \frac{22}{7}$.

▲4 ▲ Es seien a, b, c, d , die Längen der Seiten und e, f die Längen der Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$.

Weise nach, daß dann stets $e + f < a + b + c + d$ gilt!

Klasse 7

▲1 ▲ Es seien a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks ABC und h_a, h_b, h_c die Längen der zugehörigen Dreieckshöhen.

Weise nach, daß aus $a < b < c$ stets $h_a > h_b > h_c$ folgt.

▲2 ▲ Es sind 3 Liter 70%ige Säure mit 12%iger Säure so zu mischen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die weniger als 30%, aber mehr als 20% Säure enthält.

Wieviel Liter 12%iger Säure darf man zusetzen?

▲3 ▲ Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a < b$, die beide von Null verschieden sind.

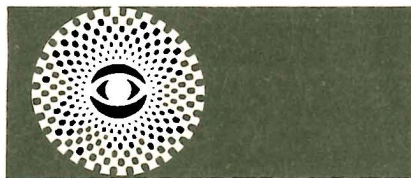
Beweise, daß dann $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ gilt!

▲4 ▲ Löse die folgenden Ungleichungen im Grundbereich der rationalen Zahlen!

- a) $|x| > 2x$, c) $|x+2| < 12$,
- b) $|x| + 2 > 10$, d) $|x+1| > 1$.

Zusammenstellung aus den Mathematiklehrbüchern der DDR (Klasse 1 bis 7) von J. Lehmann/Th. Scholl

Die Lösungen folgen in Heft 2/82 sowie weitere Probleme für die Klassen 8 bis 10, d. Red.



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Sechs mal sechs

2. Bezirksvergleich Junger Mathematiker zwischen den Bezirken Cottbus und Potsdam für Schüler der Klassenstufe 6

Seit vielen Jahren bestehen gute Kontakte zwischen den Bezirken Cottbus und Potsdam in der Mathematikbewegung. Eines von vielen Beispielen dafür ist dieser Bezirksleistungsvergleich, der 1980 in Potsdam und 1981 in Cottbus stattfand. Jeder Bezirk delegiert dafür sechs Schüler aus der Klassenstufe 6. Am wichtigsten ist der mathematische Wettbewerb, aber interessiert und begeistert werden natürlich auch alle anderen Eindrücke aufgenommen. In Cottbus besuchten die Schüler das Raumfahrt-Planetarium, und mit der Pioniereisenbahn ging die Fahrt in den Tierpark, den Abschluß der drei Tage bildete eine Spreewaldrundfahrt.

Aber die Aufgaben des Wettbewerbes möchten wir unseren *alpha*-Lesern auch noch vorstellen:

Aufgaben

▲ 1 ▲ Gib alle Teiler der Zahl 777 an!

Spreewaldrundfahrt

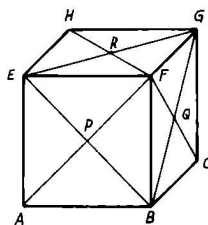


▲ 2 ▲ In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$. Es ist zu beweisen, daß die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ aufeinander senkrecht stehen!

▲ 3 ▲ Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 50 Pfennigen an, die sich unter alleiniger Verwendung von 1-Pfennig-Stücken, 5-Pfennig-Stücken und 10-Pfennig-Stücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennigen angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl von Münzen!

(Beispiel: Ist x die Anzahl der Pfennig-Stücke, y die der 5-Pfennig-Stücke und z die der 10-Pfennig-Stücke, so erfüllen die Zahlen $x=20$, $y=4$ und $z=1$ alle gestellten Bedingungen, da $20 \text{ Pf} + 20 \text{ Pf} + 10 \text{ Pf} = 50 \text{ Pf}$.)

▲ 4 ▲ Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge a , so wie im Bild veranschaulicht. P , Q und R seien die Mittelpunkte der Flächen $ABFE$, $BCGF$ und $EFGH$. Axel behauptet, daß P , Q und R die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind. Bernd behauptet, daß Axel nicht recht hat. Wer hat recht?



Das Ergebnis zeigte, daß diese Aufgaben für einen solchen Wettbewerb sehr gut ausgewählt waren. Einerseits wurden im Durchschnitt 54% der vollen Punktzahl erreicht, andererseits war es wohl sehr schwer, hohe Punktzahlen zu erzielen.

Ingo Warnke (aus Oranienburg) erhielt für 27 von 30 Punkten einen 1. Preis; einen 2. und zwei 3. Preise erhielten Schüler aus dem Bezirk Cottbus.

Zum nächsten Vergleich 1982 hat nun wieder Potsdam eingeladen. Vielleicht können wir dann auch eine Delegation aus einem dritten Bezirk begrüßen?
H.-J. Sprengel

Lösungen

▲ 1 ▲ Man sieht leicht, daß 7 und 3 Teiler der Zahl 777 sind. $777 : 21 = 37$ ergibt den restlichen Primfaktor.

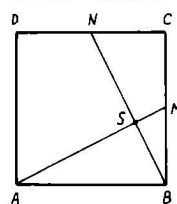
Aus der Darstellung $777 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$ kann man alle Teiler ablesen: 1, 3, 7, 37, $3 \cdot 7 = 21$, $3 \cdot 37 = 111$, $7 \cdot 37 = 259$ und 777.

▲ 2 ▲ Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ sei S (vgl. Bild). Aus den Quadrat-eigenschaften folgt: Da die Dreiecke ABM und BCN in zwei Seiten ($\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BM} = \overline{CN}$) und dem eingeschlossenen Winkel (90°) übereinstimmen, gilt

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN.$$

Daraus folgt

$$\sphericalangle NBC = \sphericalangle MAB.$$



Daher ergänzen sich die Winkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle NBC$ ebenso wie die Winkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle MAB$ zu 90° , d. h. $\overline{AM} \perp \overline{BN}$.

▲ 3 ▲ Sind x , y , z die Anzahlen der Münzen, wie angegeben, so gilt für die Gesamtzahl a

$$(1) \quad a = x + y + z$$

$$\text{und für den Geldbetrag } b$$

$$(2) \quad b = x + 5y + 10 \cdot z.$$

Aus dem Text folgt dann weiter

$$(3) \quad b = 2 \cdot a = a + a \text{ und}$$

$$(4) \quad b \leq 50.$$

Schreibt man für (2)

$$(2') \quad b = x + y + z + 4y + 9z,$$

so ergibt sich mit (1) und (3)

$$(5) \quad a + a = a + 4y + 9z.$$

Vergleicht man die linke und rechte Seite von (5) miteinander, so ergibt sich

$$(6) \quad a = 4y + 9z.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$(7) \quad a \leq 25.$$

Aus (6) und (7) ergeben sich nun die für z und y möglichen Werte. Für z sind nur die Werte $z=1$ oder $z=2$ möglich, da schon $9 \cdot 3 > 25$. Es sei $z=2$: Dann ist für y nur der Wert $y=1$ möglich, da schon $4 \cdot 2 + 9 \cdot 2 > 25$. Es sei $z=2$. Dann ist für y nur der Wert $y=1$ möglich, da schon $4 \cdot 2 + 9 \cdot 2 > 25$.

Mit $z=2$ und $y=1$ folgt aus (6), daß $a=22$ (also ist (2) bzw. (4) erfüllt). Aus (1) folgt $x=19$. Aus (2) folgt $b=44$. Damit ist (3) erfüllt. Also ist $x=19$, $y=1$, $z=2$ eine Lösung.

Fortsetzung auf Seite 24

Was tun, wenn die Formelsammlung nicht mehr helfen kann?

Lösungsverfahren statt Lösungsformel Teil 2

Im ersten Teil, der euch hoffentlich neben der Arbeit und Knobelei auch Freude gemacht hat, nannte ich einige Probleme und stellte Fragen. Hier sind nun die Antworten als Bestätigung für diejenigen von euch, die eine Antwort fanden – eventuell auch als Korrektur, falls eure Antwort nicht in Ordnung ist oder ihr keine finden konntet.

1. Der „3A + 1“-Algorithmus

Die entstehenden Zahlenfolgen für 3, 11 und 40 lauten:

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1;
11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1;
40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

In diesen Beispielen kommt man immer zu einem Ende. Das nahende Ende erkennt man sogar schon, sobald eine Potenz von 2 erzeugt wird, denn dann erreicht man durch dauern-des Halbieren stets die 1.

In den drei Beispielen war diese Potenz von 2 immer $2^4 = 16$. Das muß aber nicht sein. Manchmal sind auch sehr lange Zahlenfolgen bis zum Erreichen einer Zweierpotenz erforderlich:

31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Es kommen auch unerwartet große Zahlen (hier z. B. 9232) vor.

Streicht man die Endevorschrift bei 1, so ergibt sich in allen Fällen, die oben bei 1 endeten, am Schluß jetzt ein Zyklus

..., 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Läßt man auch negative ganze Zahlen zu, so entstehen am Schluß andere Zyklen:

-80, -40, -20, -10, -5, -14, -7,
-20, -10, -5, ...;
-108, -54, -27, -80, -40, -20, ...;
-3, -8, -4, -2, -1, -2, -1, ...

Es ist aber nicht immer derselbe Zyklus wie bei positiven Zahlen. Man hat für negative Zahlen bis jetzt 3 verschiedene Zyklen gefunden:

-20, -10, -5, -14, -7;
-2, -1;
-272, -136, -68, -34, -17, -50, -25,
-74, -37, -110, -55, -164, -82, -41,
-122, -61, -182, -91.

Nimmt man den Zyklus 0 für 0 und den Zyklus 4, 2, 1 für positive Zahlen dazu, so kennt man beim 3A+1-Algorithmus 5 Zyklen, in die er bei Anwendung auf ganze Zahlen einlaufen kann. Es gibt dafür aber keinen Beweis. Bereits 1972 hat man mit einem Computer alle ganzen Zahlen im Bereich $-10^8 \leq A \leq 6 \cdot 10^7$ überprüft. Es zeigten sich keine anderen Zyklen als die angegebenen. Später sollen noch Überprüfungen für $6 \cdot 10^7 \leq A \leq 2^{39} \approx 5 \cdot 10^{11}$ und sogar $A \leq 10^{40}$ durchgeführt worden sein. Es gab stets den Zyklus 4, 2, 1.

2. Eine Funktion zur Erzeugung von Primzahlen

Die ersten 10 ganzzahligen Glieder der Folge

$$a_n = \sqrt{24n+1} \text{ lauten}$$

n	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40
a _n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31

Es entstehen fast nur Primzahlen. Lediglich die 25 stört bis zum 10. Glied die Aussage, daß nur Primzahlen geliefert werden.

Wir wollen den Sachverhalt näher untersuchen. Nach Quadrieren haben wir

$$a_n^2 = 24n + 1.$$

Da $24 = 2^3 \cdot 3$ als Primfaktoren die 2 und 3 enthält, kann $24n + 1$ für kein positives ganzes n diese Faktoren auch enthalten. Stets liegt $24n + 1$ in den Restklassen 1 modulo 2 und modulo 3, d. h., stets liefert $24n + 1$ bei den Divisionen durch 2 oder durch 3 die Reste 1. Der Ausdruck $24n + 1$ kann also nie eine Quadratzahl sein, die 2 oder 3 als Primfaktoren enthält. Also kann auch a_n diese Faktoren nicht enthalten. Demnach können die Zahlen

6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30 nicht geliefert werden.

Wird aber jede ganze Zahl > 5 ohne Primfaktoren 2 und 3 auf diese Weise gewonnen?

Es muß also ein ganzzahliges n aus

$$\frac{a_n^2 - 1}{24} = n$$

bestimmbar sein, d. h. $a_n^2 - 1$ muß durch 24 teilbar sein.

Da a_n bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2 läßt, ist es darstellbar als

$$\begin{aligned} a_n &= 3M + 1 \\ a_n^2 &= 9M^2 + 6M + 1 \\ a_n^2 - 1 &= 9M^2 + 6M \quad \text{oder} \\ a_n &= 3M + 2 \\ a_n^2 &= 9M^2 + 12M + 4 \\ a_n^2 - 1 &= 9M^2 + 12M + 3. \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist $a_n^2 - 1$ durch 3 teilbar.

Da a_n ungerade ist, ergibt es bei der Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3. Genau wie eben folgert man

$$\begin{aligned} a_n &= 4N + 1 \\ a_n^2 &= 16N^2 + 8N + 1 \\ a_n^2 - 1 &= 16N^2 + 8N \quad \text{oder} \\ a_n &= 4N + 3 \\ a_n^2 &= 16N^2 + 24N + 9 \\ a_n^2 - 1 &= 16N^2 + 24N + 8. \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist $a_n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Da 3 und 8 zueinander teilerfremd sind, ist somit $a_n^2 - 1$ durch 24 teilbar, d. h. stets gibt es ein ganzzahliges n , und alle Zahlen ohne Teiler 2 oder 3 werden durch die Folge erzeugt.

Als nächste (11.) würde $35 = 5 \cdot 7$ für $n = 51$ zu bilden sein.

3. Drei Anweisungen

A	a	B	b
1. Schritt A	a + b	B	b
2. Schritt A	a + b	B	a
3. Schritt A	b	B	a

Die Kästcheninhalte werden vertauscht. Die drei Schritte werden als Computerbefehle

$A := A + B;$
 $B := A - B;$
 $A := A - B$

geschrieben. Das Gleichheitszeichen bekommt durch den Doppelpunkt einen Richtungssinn und dynamisch-algorithmischen Charakter. Ein neuer Inhalt von A (links) wird aus dem alten Inhalt von A (rechts) durch Addition des Inhalts von B gebildet. Es kommt auch streng auf die Reihenfolge der Abarbeitung der Befehle oder Anweisungen an. Dies muß „seriell“ in der angegebenen Reihenfolge der Niederschrift geschehen. Zu verschiedenen Zeitpunkten der Abarbeitung sind A und B Namen für unterschiedliche Zahlwerte; Dynamische Anweisungen gegenüber statischen Formeln!

Beispiel:

A	3	B	5
1. A	8	B	5
2. A	8	B	3
3. A	5	B	3

4. Eine Zahlenfolge

Der angegebene Algorithmus ändert die Zahl 153 nicht.

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3, \\ = 1 + 125 + 27.$$

Die Zahl 153 ist für den Algorithmus ein „Fixpunkt“. Es ist also sinnvoll, ihn mit 153 abbrechen zu lassen.

Für $A=9$ entsteht die Zahlenfolge
9, 27, 351, 153.

Sie endet also sehr schnell. Zur Beantwortung der Frage nach einem größten A , das durch den Algorithmus vergrößert wird, erinnern wir uns an die Bedeutung von Dezimalzahlen Z mit den Ziffern $z_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Eine $(K+1)$ stellige Zahl Z ist

$$Z = z_K z_{K-1} \dots z_1 z_0 \\ = z_K \cdot 10^K + z_{K-1} \cdot 10^{K-1} + \dots + z_1 \cdot 10 + z_0.$$

Der Algorithmus macht daraus die Zahl Y .
 $Y = z_K^3 + z_{K-1}^3 + \dots + z_1^3 + z_0^3$.

Die größte 3. Potenz einer Ziffer ist natürlich $9^3 = 729$.

Stand diese 9 in der Hunderterstelle von Z , d. h. $900 = 9 \cdot 10^2$ mit $k=2$ war ihr Beitrag zu Z , so ist jetzt ihr Beitrag zu Y nur 729. Es ist eine Verkleinerung des Beitrages um $900 - 729 = 171$ eingetreten. Stand sie in der Zehnerposition, d. h. 90 war ihr Beitrag zu Z , so ergibt sich eine Vergrößerung des Beitrages um $729 - 90 = 639$ zu Y . Wir fertigen uns eine Tabelle an, die diese Vergrößerungen (positiv) bzw. Verkleinerungen (negativ) beim Übergang von Z zu Y angibt.

Stellung der Ziffer in Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720
Zehner	0	-9	-12	-3	24	75	156	273	432	639
Hunderter	0	-99	-192	-273	-336	-375	-384	-357	-288	171
Tausender	0	-999	-1992	-2973	-3936	-4875	-5784	-6657	-7488	-8271

Aus ihr liest man ab, daß 1999 die größte Zahl ist, die noch vergrößert werden kann. Der Verlust von 999 für die 1 in der Tausenderstelle wird durch die Gewinne der drei Neunen $171 + 639 + 720 = 1530$ aufgehoben. Der Verlust 1992 bei einer 2 in der Tausenderstelle kann nicht mehr kompensiert werden. Aber 1999 ist nicht durch 3 teilbar. Die nächstgelegene durch 3 teilbare Zahl, die noch vergrößert wird, ist 1998 mit $-999 + 171 + 639 + 504 = 315$ als Vergrößerung.

Man erkennt ferner den Fixpunkt 153, denn Verlust und Gewinn heben sich auf $-99 + 75 + 14 = 0$.

Läßt man die Bedingung der Teilbarkeit durch 3 fallen, so wären z. B. 1, 370, 371, 407 auch Fixpunkte (kursive Werte in der Tab.).

Es ist noch interessant nachzuweisen, daß aus einer durch 3 teilbaren Zahl auch wieder eine durch 3 teilbare Zahl entsteht:

Bei einer durch 3 teilbaren Zahl ist die Quersumme

$$Q = z_K + z_{K-1} + \dots + z_1 + z_0 = \sum_{k=0}^K z_k$$

ebenfalls durch 3 teilbar. Erhebt man die Quersumme zur dritten Potenz, so ist diese natürlich auch wieder durch 3 teilbar,

$Q^3 = (z_K + z_{K-1} + \dots + z_1 + z_0)^3$, und man schließt nun wie folgt. Ihr könnt leicht den binomischen (bi = zwei, Vorsilbe aus dem Griechischen) Ausdruck

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

nachrechnen. Wir wenden ihn an für

$$a = z_K$$

$$b = z_{K-1} + \dots + z_1 + z_0,$$

und wenn $Q^3 = (a+b)^3$ durch 3 teilbar ist, so muß es auch

$$a^3 + b^3 = z_K^3 + (z_{K-1} + \dots + z_1 + z_0)^3 \equiv 0 \pmod{3}$$

sein. Man schreibt das so, wie es rechts angegeben ist und liest es „kongruent 0 modulo 3“. Das bedeutet nichts anderes, als daß bei Division durch 3 der Rest 0 entsteht. Nun wenden wir dieselbe Überlegung für die in der dritten Potenz stehende Klammer an, die aber nun um ein Glied kürzer ist, usw.

Es entsteht schließlich

$$z_K^3 + z_{K-1}^3 + \dots + (z_1 + z_0)^3 \equiv 0 \pmod{3},$$

und es bleibt noch ein letzter Schritt

$$z_K^3 + z_{K-1}^3 + \dots + z_1^3 + 3z_1^2 z_0 + 3z_1 z_0^2 + z_0^3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Da Summanden mit dem Faktor 3 in der Teilbarkeitsbetrachtung weggelassen werden können, hat man endlich

$$z_K^3 + z_{K-1}^3 + \dots + z_1^3 + z_0^3 \equiv \sum_{k=0}^K z_k^3 \equiv 0 \pmod{3},$$

daß auch die Summe der dritten Potenzen der Ziffern einer durch 3 teilbaren Zahl wieder durch 3 teilbar ist. Der Algorithmus führt also aus der Menge der durch 3 teilbaren Zahlen nicht heraus.

Ein Nachweis, daß er stets bei 153 endet, könnte nun dadurch geführt werden, daß es einfach für alle durch 3 teilbaren Zahlen Z aus dem Bereich $3 \leq Z \leq 1998$, es sind 666 Stück, nachgerechnet wird. Dies ist ein Beispiel für den Beweis einer mathematischen Aussage, der nicht mehr kurz und „eleganter“, sondern aufwendig in der Durchführung – wenn auch trivial – ist. Probleme dieser Art mit z. T. ungeheurer Beweisarbeit, die nur noch mit Computern zu bewältigen ist, tauchen in alten und neuen mathematischen Fragestellungen auf. Die Mathematik kommt auch (wie die Technik z. B.) in Bereiche der Forschung, wo zwar prinzipiell etwas zu tun möglich ist, es aber aus ökonomischen Gründen (Zeit, Aufwand, auch Geld) unterbleiben muß.

5. Eine Funktion, die selbst wieder zu ihrer Definition verwendet wird

Nach der Definition ist, da $101 > 100$,

$$f(101) = 91.$$

Wendet man die Definition für das Argument 100 an, $f(100) = f(f(111))$, so entsteht zunächst für die „innere“ Anwendung auf 111

$$f(111) = 101,$$

so daß $f(100) = f(101) = 91$ wird.

Für die Anwendung auf 99 erhält man

$$f(99) = f(f(110)) = f(100) = 91$$

wieder 91, da uns $f(100)$ schon bekannt ist. So weiterschließend kommt man zu folgender Tabelle für die Werte von $f(n)$

n	$f(n)$	n	$f(n)$
111	101	100	$f(f(111)) = f(101) = 91$
110	100	99	$f(f(110)) = f(100) = 91$
109	99	98	$f(f(109)) = f(99) = 91$
108	98	97	$f(f(108)) = f(98) = 91$
107	97	96	$f(f(107)) = f(97) = 91$
106	96	95	$f(f(106)) = f(96) = 91$
105	95	94	$f(f(105)) = f(95) = 91$
104	94	93	$f(f(104)) = f(94) = 91$
103	93	92	$f(f(103)) = f(93) = 91$
102	92	91	$f(f(102)) = f(92) = 91$
101	91	90	$f(f(101)) = f(91) = 91$
		89	$f(f(100)) = f(91) = 91$
		88	$f(f(99)) = f(91) = 91$
		.	.
		.	.
		3	$f(f(14)) = f(91) = 91$
		2	$f(f(13)) = f(91) = 91$
		1	$f(f(12)) = f(91) = 91$

Es kommt also für $n \leq 101$ stets der Wert 91 heraus. In der mathematischen Literatur wird diese Funktion deshalb auch „91er Funktion“ genannt. Wir haben uns bei der Werteberechnung die Arbeit mit Hilfe der Tabelle sehr erleichtert. Folgt man lediglich der Definition ohne Kenntnis schon vorberechneter Werte, so verläuft bei $n=100$ der Rechengang der wiederholten Anwendung der Funktion zwar genau wie oben in der Tabelle, aber bei $n=99$ nimmt er die Gestalt an

$$f(99) = f(f(110)) = f(100) = f(f(111))$$

$$= f(101) = 91,$$

bei $n=97$ entsteht sogar

$$f(97) = f(f(108)) = f(98) = f(f(109))$$

$$= f(99) = f(f(110)) = f(100) = f(111))$$

$$= f(101) = 91$$

und bei $n=1$ wäre der Anfang dieser Kette von Anwendungen der Funktion

$$f(1) = f(f(12)) = f(f(f(23))) = f(f(f(f(34))))$$

$$= \dots$$

Dieses wiederholte oder verschachtelte Anwenden einer Funktion wird in der Mathematik oft durch einen Exponenten angezeigt, der dann aber nicht das Potenzieren bedeutet, hier also $f(1) = f^4(34)$

$$= f^{10}(100) = f^{11}(111) = f^{10}(101) = f^9(91)$$

$=f^{10}(102)=f^9(92)=f^{10}(103)=f^9(93)$
 $=f^{10}(104)=f^9(94)=f^{10}(105)=f^9(95)$
 $=f^{10}(106)=f^9(96)=f^{10}(107)=f^9(97)$
 $=f^{10}(108)=f^9(98)=f^{10}(109)=f^9(99)$
 $=f^{10}(110)=f^9(100)=f^{10}(111)=\dots$

An dieser Stelle ist die Zahl der Anwendungen von f auf das Argument 100 um 1 abgebaut worden.

Der Zyklus von 21 Anwendungen der Funktionsdefinition (Anzahl der Gleichheitszeichen zwischen $f^{10}(100)$ und $f^9(100)$) muß noch achtmal wiederholt werden, bis man schließlich $f(100)=f^2(111)=f(101)=91$ erreicht. Das tatsächliche Berechnen rekursiv definierter Funktionen ist in der Dynamik der auf- und absteigenden Verschachtelungstiefe ein meist arbeitsaufwendiger Vorgang, auch für Computer. Aber rekursive Funktionen sind in der Mathematik und in jüngster Zeit auch in der Praxis ein interessantes und wirksames dynamisches Arbeitsmittel.

I. O. Kerner

Eine Schachstudie Intellektuelles Boxen

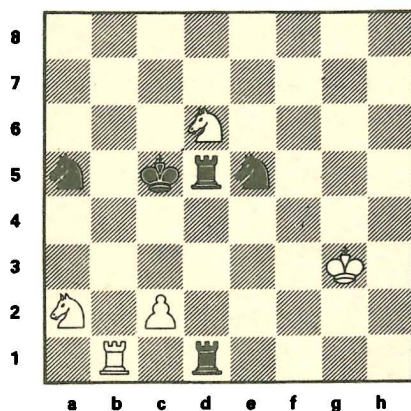
Dr. Emanuel Lasker (1868 bis 1941) ist als großartiger Schachpraktiker bekannt; er ist der Weltmeister, der die Krone von allen dreizehn Schachkönigen am längsten trug, nämlich 27 Jahre, von 1894 bis 1921! Lasker, der 1902 promovierte, legte längere Turnierpausen ein und arbeitete an wissenschaftlichen Werken. Er galt als bedeutender Mathematiker und Philosoph. Das Schach betrachtete er als Geistesport, als „intellektuelles Boxen“, als Kampf der schöpferischen Individualitäten.

Dr. Lasker, der aus Berlinchen stammt und lange Zeit in Berlin lebte, machte auch auf dem Gebiet des Problemschachs von sich reden. Er löste nicht nur gern Aufgaben und Studien, sondern komponierte auch.

In der nachstehenden Studie hat Schwarz einen Turm mehr, doch findet Weiß eine geistreiche Möglichkeit, das gegnerische Übergewicht so zu wandeln, daß Schwarz nicht gewinnen kann.

Dr. Emanuel Lasker, 1905

Weiß zieht und macht remis



Aristarch von Samos

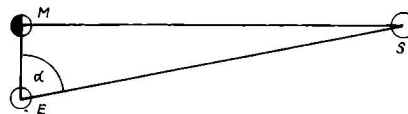


Im Mai 1980 erschienen in Griechenland zwei Briefmarken zum Gedenken an den griechischen Astronomen und Mathematiker Aristarch von Samos (um 320 bis um 250 v. u. Z.). Aristarch stellte als erster die im 16. Jh. von Copernicus (1473 bis 1543) erneuerte und längst als wahr erkannte Hypothese auf, daß die Sonne und nicht, wie damals allgemein angenommen, die Erde das Zentrum unseres Planetensystems bildet. Die Hypothese des Aristarch fand bei seinen Zeitgenossen keine Anerkennung, denn sie stand im Widerspruch zu den damals herrschenden, vor allem von Aristoteles (384 bis 322 v. u. Z.) fixierten physikalischen Vorstellungen. Zum Beispiel meinte man, von einer bewegten Erde müßten alle beweglichen Dinge heruntergeschleudert werden, man müßte den „Fahrtwind“ spüren usw. Die Hypothese des Aristarch ist nur durch eine Bemerkung in der Schrift „Die Sandzahl“ von Archimedes (287? bis 212 v. u. Z.) überliefert worden. Sie war Copernicus bekannt, der in seinem astronomischen Hauptwerk „De revolutionibus“ seinen Vorgänger Aristarch rühmend erwähnte. Diese Bemerkung wurde jedoch beim Druck unterschlagen. Sie befindet sich nur im handschriftlichen Manuskript von Copernicus, das in der Universitätsbibliothek in Warszawa aufbewahrt wird. Erhalten blieb durch Vermittlung mittelalterlicher islamischer Gelehrter eine kleine

astronomisch-mathematische Abhandlung des Aristarch, in der er für das Verhältnis

$$v = \frac{\text{Abstand Erde-Sonne}}{\text{Abstand Erde-Mond}}$$

die Abschätzung $18 < v < 20$ herleitete. (In Wahrheit ist v ungefähr 370.) Aristarch ging dabei von der richtigen Überlegung aus, daß Erde E, Sonne S und Mond M ein bei M rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn wir genau die Hälfte des Mondes beleuchtet sehen (siehe Bild): Man braucht also „nur“ den Winkel α zu messen, um v zu bestimmen.



Rechnet aus, wie groß dieser Winkel bei $v=370$ in Wahrheit ist und welche falschen Abschätzungen für α Aristarch gemessen haben muß, um zu seiner Abschätzung für v zu gelangen!

Übrigens gab es zu Aristarchs Zeiten und noch lange danach keine trigonometrische Tafeln, und als echter Grieche verschmähte Aristarch auch die naheliegende Methode, ein genügend großes ähnliches Dreieck zu konstruieren und dann die Seiten einfach zu messen, bestimmte vielmehr den v -Wert durch umständliche, aber streng bewiesene geometrische Abschätzungen. Diese machen den mathematischen Gehalt seiner Arbeit aus.

Lest über Aristarch und Copernicus in dem Buch *Entdecker des Himmels* von Dieter B. Herrmann (Urania-Verlag 1978) nach!

P. Schreiber

In der gleichen Abhandlung bestimmte er den Sonnendurchmesser als das 6,75fache (in Wahrheit das 109fache des Erddurchmessers. Die zu dieser Überlegung gehörige Skizze ist auf der 10-Drachmen-Marke wiedergegeben.

Welche auf der Erde beobachtbare Größe muß man messen, um das genannte Verhältnis v schon hiernach zu bestimmen?

Lest über Aristarch und Copernicus in dem Buch

Dieter B. Herrmann

Entdecker des Himmels

Urania-Verlag, Leipzig 1978

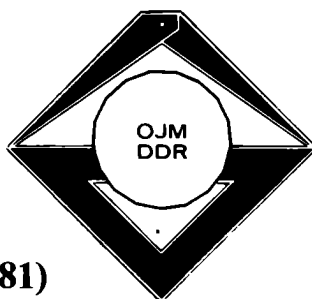
nach!

Aus Anlaß des 2300. Geburtstages des Begründers der heliozentrischen Theorie fand im Juni 1980 auf der Insel Samos ein wissenschaftliches Kolloquium statt.

P. Schreiber

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (18. November 1981)



Fortsetzungen von alpha 6/81

Lösung: I. Wenn ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt:

Es gibt natürliche Zahlen m, n mit

$$a = 15m, b = 15n. \quad (1)$$

Wegen $0 < a < b$ folgt

$$0 < m < n, \quad (2)$$

wegen $ab = 7875$ folgt $15m \cdot 15n = 7875$, also $225mn = 7875$,

$$mn = 35. \quad (3)$$

Da 35 die Primfaktorzerlegung $35 = 5 \cdot 7$ hat, gibt es für (2), (3) nur die Möglichkeiten, daß entweder $m = 1, n = 35$ oder $m = 5, n = 7$ gilt. Aus (1) folgt daher, daß nur die Paare $(15; 525)$, $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt

$$0 < 15 < 525, 0 < 75 < 105;$$

wegen der Primfaktorzerlegungen

$15 = 3 \cdot 5, 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7, 75 = 3 \cdot 5^2, 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $3 \cdot 5 = 15$ der g.g.T. von 15 und 525 sowie auch der g.g.T. von 75 und 105; schließlich gilt $15 \cdot 525 = 7875$ und $75 \cdot 105 = 7875$.

Daher erfüllen genau die Paare $(15; 525)$ und $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe.

4. Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich „Melancholie“ ein „magisches Quadrat“ aus den Zahlen 1 bis 16, d. h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.

In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.

16	3	2	13
			8
9			12
4			

Im Bild ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben.

Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

Lösung: Wegen $16 + 3 + 2 + 13 = 34$ ist die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsumme 34. Daraus folgt, daß die fehlende Zahl in der

ersten Spalte 5 und die fehlende Zahl in der vierten Spalte 1 beträgt. Für die restlichen 6 Felder bleiben die Zahlen 6, 7, 10, 11, 14 und 15 übrig.

Die Summe der beiden fehlenden Zahlen der vierten Zeile beträgt 29, sie läßt sich nur mit den Zahlen 15 und 14 bilden; die Summe der fehlenden Zahlen der dritten Zeile beträgt 13, sie läßt sich nur mit den Zahlen 6 und 7 bilden. Die Summe der restlichen Zahlen 10 und 11 beträgt 21. Sie ergibt zusammen mit den bereits in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die verlangte Summe 34.

Die Anordnung der beiden mittleren Zahlen der zweiten bzw. dritten Zeile muß nun so erfolgen, daß auch in beiden Diagonalen die Summe 34 erreicht wird. Da jeder der beiden Diagonalen zu dieser Summe noch 17 fehlt, kann die Anordnung nur

11	10	10	11
7	6	6	7

oder

10	11	11	10
6	7	7	6

lauten.

In der zweiten Spalte fehlt an der Summe 34 noch 16 oder 17, je nachdem, ob die zweite Zahl der vierten Zeile 14 oder 15 lautet. Daher erfüllt nur die zweite der oben angeführten Anordnungen die gestellten Bedingungen. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit die folgende Eintragung:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sie erfüllt alle Bedingungen eines magischen Quadrates. Das Entstehungsjahr des Stiches lautet mithin 1514.

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a , für die

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$$

gilt!

Lösung: I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderte Ungleichung erfüllt, so gilt

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \quad (1)$$

$$\text{und } \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Aus (1) folgt $a+12 < 4a$, also $12 < 3a$, folglich $4 < a$. (3)

Aus (2) folgt $3a < a+12$, also $2a < 12$, folglich $a < 6$.

Die einzige natürliche Zahl, die (3) und (4) erfüllt, ist $a = 5$. Daher kann nur diese Zahl die geforderte Ungleichung erfüllen.

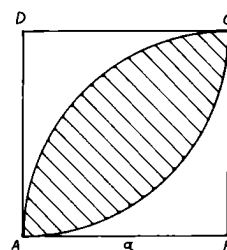
II. Sie erfüllt diese Ungleichung; denn es gilt

$$\frac{1}{4} < \frac{5}{17}, \text{ da } \frac{1}{4} = \frac{17}{68} \text{ und } \frac{5}{17} = \frac{20}{68} \text{ ist, sowie}$$

$$\frac{5}{17} < \frac{1}{3}, \text{ da } \frac{5}{17} = \frac{15}{51} \text{ und } \frac{1}{3} = \frac{17}{51} \text{ ist.}$$

Daher erfüllt genau $a = 5$ die Bedingungen der Aufgabe.

2. Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild schraffiert) einschließen.



a) Berechne für $a = 3,5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!

Lösung: a) Durch die Diagonale AC wird das Quadrat und (wegen der symmetrischen Lage der beiden Kreisbögen) auch die schraffierte Fläche halbiert. Daher ergibt sich die Hälfte des gesuchten Flächeninhaltes, indem man vom Flächeninhalt des um B gezeichneten Viertelkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (d. h. den halben Flächeninhalt des Quadrates) subtrahiert. Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3,5^2 - \frac{1}{2} \cdot 3,5^2 \right) \text{ cm}^2 \\ = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot 3,5^2 \text{ cm}^2 = 0,57 \cdot 12,25 \text{ cm}^2 \\ \approx 6,98 \text{ cm}^2.$$

b) Mit derselben Begründung wie in a) ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt die Formel

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} a^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2.$$

Hinweise: 1. Man kann natürlich auch den Aufgabenteil b) zuerst lösen und dann durch Einsetzen von $a = 3,5$ cm das Ergebnis a) ermitteln.

3. a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen

Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt!

Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Lösung: a) Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, dann beträgt jeder Innenwinkel 60° , jeder Außenwinkel also $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Die Summe der zu zwei Ecken gehörenden Außenwinkel beträgt mithin 240° , die Summe der zu diesen Ecken gehörenden Innenwinkel beträgt 120° . Da 240° das Doppelte von 120° ist, ist hiermit der geforderte Beweis geführt.

b) Die zu den Ecken A, B, C gehörenden Innenwinkelgrößen seien α, β bzw. γ ; die zugehörigen Außenwinkelgrößen sind dann $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta$ bzw. $180^\circ - \gamma$. In der zu untersuchenden Umkehrung besagt die Voraussetzung daher, daß die drei Gleichungen $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 2 \cdot (\alpha + \beta)$, $(180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 2 \cdot (\beta + \gamma)$, $(180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \alpha) = 2 \cdot (\gamma + \alpha)$ gelten. Aus (1) folgt $360^\circ - \alpha - \beta = 2\alpha + 2\beta$, also $3\alpha + 3\beta = 360^\circ$ und daher

$$\alpha + \beta = 120^\circ. \quad (4)$$

Aus (2) und (3) folgt ebenso

$$\beta + \gamma = 120^\circ \quad (5)$$

bzw. $\alpha + \gamma = 120^\circ$.

Aus (4) und (5) folgt $\alpha = \gamma$,

aus (5) und (6) folgt $\alpha = \beta$.

Mit (7) und (8) ist aber die Aussage gewonnen, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Damit ist bewiesen, daß auch die zu untersuchende Umkehrung gilt.

4. Über den Mitgliederstand einer Betriebs-sportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.

Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.

Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.

Genau drei Siebtel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.

Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.

Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.

Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.

Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so daß alle diese Aussagen zutreffen!

Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch

die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

Lösung: I. Wenn für eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen alle genannten Aussagen zutreffen, so folgt:

Ist x die Mitgliederzahl der BSG, so sind die Mitgliederzahlen der genannten Sektionen

$$22, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \frac{3}{7}x, \frac{2}{9}x. \quad (1)$$

Addiert man diese Zahlen, so hat man damit jedes Mitglied der BSG so oft erfaßt, wie die Anzahl der Sektionen angibt, denen das betreffende Mitglied angehört. Dieselbe Art der Erfassung kann man folgendermaßen erreichen: Man erfasse jedes der x Mitglieder zunächst einmal, dann die im Aufgabentext genannten 72 Mitglieder, noch ein zweites Mal und schließlich die zuvor genannten 8 Mitglieder noch ein drittes Mal. Daher gilt

$$22 + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{3}{7}x + \frac{2}{9}x = x + 80.$$

Durch Subtraktion von $22 + x$ und Multiplikation mit 315 folgt

$$105x + 63x + 135x + 70x - 315x = 18270, \\ 58x = 18270, \\ x = 315.$$

Nach (1) können daher die genannten Aussagen nur dann zutreffen, wenn 315 die Mitgliederzahl der BSG ist und

$$22, 105, 63, 135, 70$$

die Mitgliederzahlen der Sektionen sind.

Olympiadeklasse 9

1. In der Divisionsaufgabe $a:b=c$ sind a, b, c , so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen:

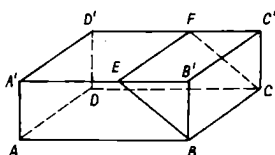
Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Lösung: Die Tripel $(52; 13; 4)$ und $(52; 4; 13)$ sind die gesuchten.

2. Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt.

Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Lösung: Der gegebene Quader sei $ABCD A' B' C' D'$ mit $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{AA'} = a$.



In der Ebene des Rechtecks $ABB'A'$ zeichne man den Kreis um B mit dem Radius b . Er schneidet wegen $\overline{BB'} < b < \overline{A'B'}$ die Strecke $A'B'$ in einem inneren Punkt, der E genannt sei. Die Parallele zu $B'C'$ durch E schneidet

$D'C'$ in einem Punkt, der F genannt sei. Dann gilt $\overline{EF} = \overline{BC} = b$ und wegen der Kongruenz der Dreiecke $EB'B$ und $FC'C$ (nach s, w, s) auch $\overline{FC} = \overline{EB} = b$. Folglich bilden B, E, F und C die Ecken eines Rhombus. Da BC auf der Ebene $ABB'A'$ nach Voraussetzung senkrecht steht, steht BC auf jeder Geraden dieser Ebene durch B senkrecht und damit auch auf EB . $EBCF$ ist also sogar ein Quadrat. Damit ist gezeigt, daß es einen ebenen Schnitt durch den Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist.

3. Beweisen Sie, daß reelle Zahlen x, y, z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$x + y + z > 0,$$

$$x \cdot y \cdot z > 0,$$

$$xy + xz + yz > 0$$

erfüllen, wenn x, y und z positiv sind!

Lösung: I. Wenn x, y und z positive reelle Zahlen sind, dann gelten die genannten Ungleichungen

$$x + y + z > 0, \quad (1)$$

$$xyz > 0, \quad (2)$$

$$xy + xz + yz > 0, \quad (3)$$

da Summe und Produkt von positiven Zahlen stets wieder positive Zahlen ergeben.

II. Wenn x, y und z die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllen, dann folgt:

Wäre $x \leq 0$, so ergäbe sich aus (1) und (3)

$$x(x + y + z) \leq 0 < xy + xz + yz,$$

also $x^2 < yz$ und daher wegen $x^2 \geq 0$ erst recht $yz > 0$. Hieraus und aus $x \leq 0$ folgte $xyz \leq 0$ im Widerspruch zu (2). Somit ist die Annahme $x \leq 0$ widerlegt, d. h. $x > 0$ bewiesen. Entsprechend erhält man die Schlußfolgerungen $y > 0$ und $z > 0$, w.z.b.w.

4. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC .

Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, daß sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BC}$ gilt!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es (zu gegebenem Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Lösung: I. Angenommen, eine Parallele zu BC hat die verlangte Eigenschaft. Wegen $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BC}$ gibt es einen Punkt P auf ED mit $\overline{PD} = \overline{DB}$ und $\overline{PE} = \overline{EC}$. Für diesen gilt $\sphericalangle DBP = \sphericalangle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BPD) = $\sphericalangle PBC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen); d. h., P liegt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$. Ebenso erhält man, daß P auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ liegt.

II. Daraus folgt, daß eine Gerade g nur dann eine Parallele zu BC mit der verlangten Eigenschaft ist, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die von $\sphericalangle ACB$. Sie schneiden sich in einem Punkt, der P genannt sei.

(2) Man zeichne die Parallele g zu BC durch P .

III. Wenn eine Gerade g durch diese Konstruktion erhalten wird, so genügt sie den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Es gilt:

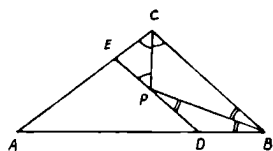
$$\angle EPC = \angle BCP \text{ sowie } \angle DPB = \angle PBC$$

als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Ferner gilt laut Konstruktion

$$\angle BCP = \angle PCE \text{ sowie } \angle PBC = \angle PBD.$$

Also gilt

$\angle EPC = \angle PCE$ sowie $\angle DPB = \angle PBD$ d. h., die Dreiecke EPC und BPD sind gleichschenkelig mit $EP = EC$ bzw. $PD = DB$. Folglich gilt $ED = EP + PD = EC + DB$, w.z.b.w.



IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau eine Parallele der verlangten Art.

Olympiadeklasse 10

1. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$ mal so lang wie die Hypotenuse AB .

Für den Höhenfußpunkt D gilt $\overline{AD} < \overline{DB}$.

In welchem Verhältnis $\overline{AD}:\overline{DB}$ teilt er die Hypotenuse?

Lösung: Für die Längen $\overline{AB} = c$, $\overline{DC} = h$, $\overline{AD} = q$, $\overline{DB} = p$ gilt

$$h = \frac{2}{5}c \quad (1)$$

$$\text{sowie } p + q = c \quad (2)$$

$$\text{und } q < p. \quad (3)$$

Ferner gilt nach dem Höhensatz

$$pq = h^2. \quad (4)$$

Setzt man h aus (1) in (4) ein, so folgt

$$pq = \frac{4}{25}c^2, \quad (5)$$

setzt man q aus (2) in (5) ein, so folgt

$$p(c-p) = \frac{4}{25}c^2,$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{4}{25}c^2}$$

$$= \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{100}c^2(25-16)}$$

$$= \frac{c}{10}(5 \pm 3),$$

also entweder $p = \frac{4}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{1}{5}c$ oder $p = \frac{1}{5}c$ und dann nach (2)

weiter $q = \frac{4}{5}c$.
Von diesen beiden Möglichkeiten verbleibt wegen (3) nur die erste. Daher beträgt das gesuchte Verhältnis $\overline{AD}:\overline{DB} = q:p = 1:4$.

2. Über das Ergebnis eines 100-m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:

(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.

(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.

(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.

(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.

Entscheiden Sie, ob es möglich ist, daß

a) alle vier Aussagen (1) bis (4),

b) genau drei dieser Aussagen,

c) genau zwei dieser Aussagen,

d) genau eine dieser Aussagen,

e) keine dieser Aussagen gleichzeitig wahr sind!

Lösung: a) Wenn die Aussagen (2) und (3) wahr sind, so wurde A Zweiter und B Dritter, also ist dann Aussage (1) falsch. Daher ist es nicht möglich, daß alle vier Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig wahr sind.

b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, daß die genannte Zahl von Aussagen wahr ist. Dabei bedeute das Zeichen x irgendwelche von A, B, C verschiedene Teilnehmer.

Zu b) $BAxCxx$ (genau (1), (2) und (4) sind wahr),

zu c) $xACBxx$ (genau (2) und (4) sind wahr),

zu d) $BACxxx$ (genau (1) ist wahr),

zu e) $CAXBxx$ (alle Aussagen sind falsch).

3. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y , für die $x^2 - y^2 = 1981$ gilt!

Lösung: Ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn es $(x-y)(x+y) = 1981$ erfüllt. Wegen der Primzerlegung

$1981 = 7 \cdot 283$ gibt es für (1) in ganzen Zahlen $x-y$ und $x+y$ genau die in der folgenden

Tabelle genannten Möglichkeiten. Durch

Addieren bzw. Subtrahieren und jeweils anschließendes Halbieren erhält man, daß nur

die anschließend angegebenen Werte von x und y die genannten Zahlen $x-y$ bzw. $x+y$

ergeben können; eine Probe zeigt jeweils, daß

sie in der Tat diese Ergebnisse liefern.

$x-y$	$x+y$	x	y
1	1981	991	990
-1	-1981	-991	-990
1981	1	991	-990
-1981	-1	-991	990
7	283	145	138
-7	-283	-145	-138
283	7	145	-138
-283	-7	-145	138

Daher haben genau die Paare $(991; 990)$, $(-991; -990)$, $(991; -990)$, $(-991; 990)$, $(145; 138)$, $(-145; -138)$, $(-145; 138)$, $(145; -138)$ die verlangte Eigenschaft.

4. Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.

Beweisen Sie, daß die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

Lösung: Die über BC und AC nach außen errichteten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke seien BCE bzw. ACF . Wegen $\angle FCA + \angle ACB + \angle BCE = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

liegt C auf der Geraden durch E und F .

Die Mittelpunkte von BC , CA , AB seien U , V bzw. W . Der Kreis mit AB als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes von Thales durch C , ist also der Umkreis des Dreiecks ABC . Folglich liegt sein Mittelpunkt W auf den Mittelsenkrechten von BC und AC . Somit ist $WUCV$ ein Rechteck; E , F liegen auf den Verlängerungen von WU bzw. WV , und es gilt:¹⁾

$$\overline{WE} = \overline{WU} + \overline{UE} = \overline{WU} + \overline{UC} = \overline{WV} + \overline{VC} = \overline{WV} + \overline{VF} = \overline{WF}, \quad (1)$$

Die Mittelsenkrechte von AB schneide EF in G . Dann gilt

$$\angle FWG = 90^\circ - \angle AWW = 90^\circ - \angle WBW = \angle EWB \quad (2)$$

$$\text{und } \angle GFW = 45^\circ = \angle BEW. \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle FGW \cong \triangle EBW$, also $\overline{WG} = \overline{WB}$. Daher ist $\triangle ABG$ das über AB nach innen errichtete gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck. Dessen Ecke G liegt somit ebenfalls auf der Geraden durch E , F , w.z.b.w.

¹⁾Nach den vorangehenden Feststellungen kann die folgende Gleichung $\overline{WE} = \overline{WF}$ auch aus $\angle FFW = 45^\circ = \angle FEW$ geschlossen werden.

Olympiadeklasse 11/12

1. Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

Ferner werde für $n = 1, 2, 3, \dots$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad z_n = \sum_{k=1}^n s_k.$$

a) Man ermittle a_1 und d so, daß $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.

b) Man beweise, daß für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, \dots$

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2} \left(a_1 + \frac{n-1}{3} d \right) \text{ gilt.}$$

2. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x , für die

$$\sqrt{2x^2 - 1} < \frac{1}{x} \text{ gilt.}$$

3. Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d ; sein Flächeninhalt sei F .

Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \quad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

4. Man beweise: Für jede ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

Lösungsweg zur Ordnung des Magischen Würfels

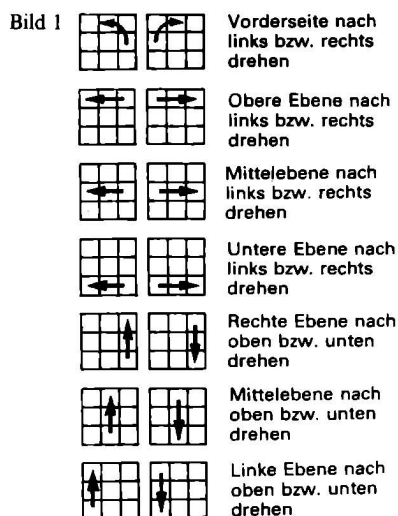
Das Lösungsbeispiel wurde so gewählt, daß die Übersichtlichkeit jederzeit möglichst erhalten bleibt. Deshalb werden die Ebenen des Würfels nacheinander von oben nach unten geordnet. Die schon richtig stehenden Würfel kehren dabei nach jeder Operation in ihre Ausgangslage zurück.

Bezugspunkte des Würfels sind immer die sechs einfarbigen Mittelstücke. Diese verändern ihre Lage zueinander nicht und geben somit die für die jeweilige Fläche aufzubauenende Farbe an. Alle anderen Kanten- und Eckstücke hingegen lassen sich vertauschen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit muß der Würfel bei jeder Operation in der gleichen Lage gehalten werden. In unserem Beispiel zunächst immer so, daß weiß oben und blau vorn liegt. Wo diese Regel nicht zutrifft, wird das im Lösungsbeispiel gesondert angegeben.

Die verwendeten Symbole für die Drehbewegungen (Darstellung 1) gehen immer von der Vorderseite des Würfels aus und stellen jeweils eine Vierteldrehung dar.

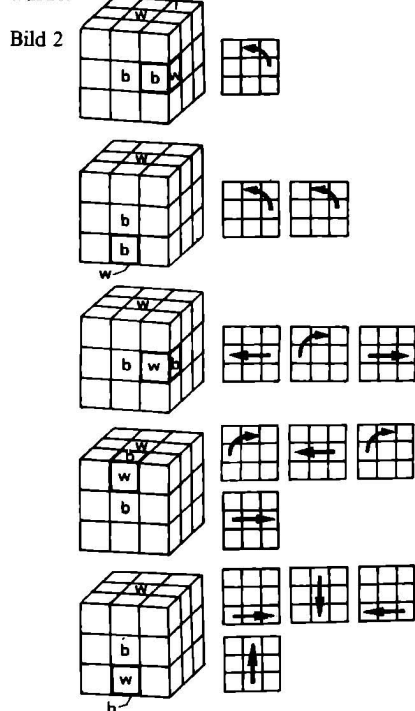
Haben wir uns mit der Symbolik vertraut gemacht, können wir mit dem Einordnen beginnen.



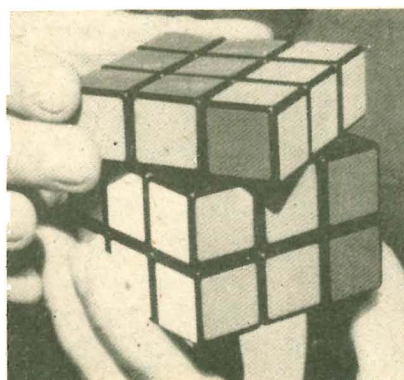
Aufbau der oberen Ebene

Wir drehen den gesamten Würfel so, daß das weiße Mittelstück oben und das blaue vorn liegt. Dann den Kantenwürfel blau/weiß nach

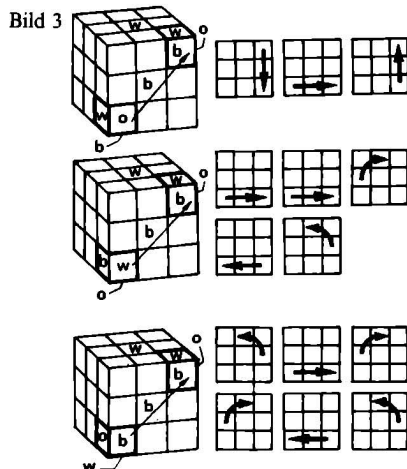
vorn drehen. Steht er nicht zufällig richtig, kann man ihn mit einem der in Darstellung 2 gezeigten Züge in die richtige Lage bringen. Mit den anderen Kantenstücken verfahren wir ebenso, nachdem der ganze Würfel mit der entsprechenden Farbe nach vorn gedreht wurde.



Sind alle Kantenstücke der oberen Ebene eingeordnet, ist auf der Oberseite ein weißes Kreuz entstanden, und die Seitenfarben stimmen mit den Mittelstücken der Seitenflächen überein.



Als nächstes sind die vier Eckstücke einzuordnen. Weiß ist wieder oben und blau vorn. Ein Eckstück mit weißer Fläche (hier blau/weiß/orange) soll nach rechts oben an seinen Platz gebracht werden. Dazu wird es zunächst nach links unten gedreht und nach Darstellung 3 eingeordnet.

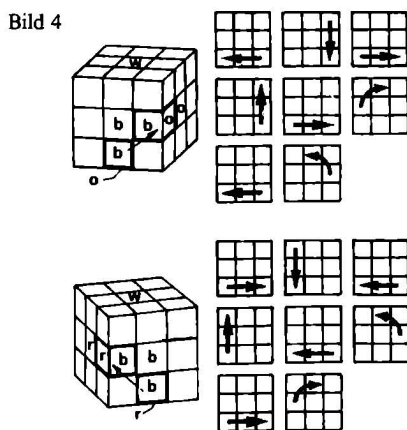


Entsprechend ist mit den anderen Eckstücken zu verfahren, nachdem jeweils der gesamte Würfel mit der zugehörigen Seite nach vorn gedreht wurde.

Nun ist die obere Ebene richtig sortiert.

Aufbau der mittleren Ebene

Hier sind die vier Kantenstücke einzuordnen. Wieder liegt weiß oben und blau vorn. Ein Kantenstück blau/orange oder blau/rot wird durch Drehen der unteren Ebene nach vorn und nach Darstellung 4 an die richtige Stelle gebracht.

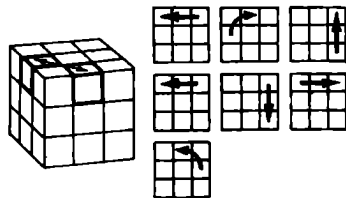


Sollten beide Kantenstücke mit ihrer blauen Seite nach unten zeigen, wählen wir eine andere Seitenfläche für diese Operation. Es kann aber auch vorkommen, daß alle gesuchten Kantenstücke schon in der mittleren Ebene sind, aber verdreht oder an falscher Stelle stehen. Dann müssen sie mit den gezeigten Zügen zunächst nach unten transportiert und eingeordnet werden.

Aufbau der unteren Ebene

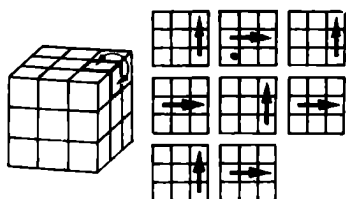
Hierzu drehen wir den Würfel um, so daß die weiße Fläche nach unten zeigt und die gelbe Fläche nach oben. Zunächst sind wieder die Kantenstücke einzuordnen. Die jetzt obere Ebene ist so zu drehen, daß ein Kantenstück zur farbig passenden Seite zeigt. Dabei ist es gleichgültig, ob gelb schon oben liegt. Befinden sich die anderen Kantenstücke noch nicht an ihrem Platz, sind sie nach Darstellung 5 auszutauschen.

Bild 5



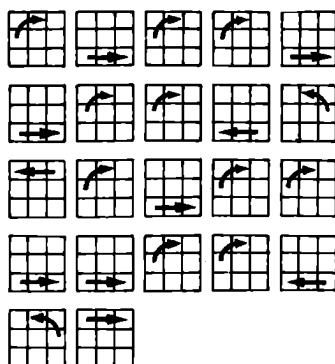
Jetzt müssen diese Kantenwürfel eventuell noch gedreht werden. Dazu wird der gesamte Würfel so gehalten, daß das erste zu drehende Kantenstück rechts oben liegt. Es folgen die in Darstellung 6 gezeigten Züge.

Bild 6



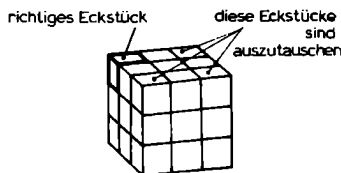
Danach kann der Würfel recht durcheinander aussehen. Davon sollte man sich nicht verwirren lassen. Wir drehen die obere Ebene (nicht den ganzen Würfel!) so, daß das nächste zu kippende Kantenstück nach oben rechts zeigt, und wiederholen die acht Züge. So wird verfahren, bis alle Kantenstücke richtig stehen. Danach ist oben ein gelbes Kreuz entstanden. Die Ebene wird so gedreht, daß die Seitenfarben übereinstimmen. Jetzt sind noch die Eckstücke in die richtige Position zu bringen (wobei die Seitenfarben noch vertauscht sein dürfen). Wenn noch keines der Eckstücke an der richtigen Stelle steht, sind die 22 Züge der Darstellung 7 auszuführen. Wenn danach noch kein Würfel an der richtigen Stelle steht, muß man die 22 Züge wiederholen.

Bild 7



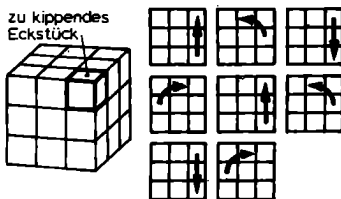
Wichtig ist, daß die gleiche Seite wieder nach vorn zeigt. Ist das geschehen, richten wir den gesamten Würfel durch Drehen der oberen Ebene entsprechend den Seitenfarben aus und bringen das richtig stehende Eckstück durch Drehen des gesamten Würfels nach links hinten, wie Darstellung 8 zeigt.

Bild 8



Nun sind die 22 Züge ein- oder zweimal zu wiederholen. Dann stehen die Eckwürfel richtig, aber eventuell noch nicht mit ihrer gelben Seite nach oben. Darstellung 9 zeigt die nun auszuführenden Züge.

Bild 9



Der Würfel wird dabei so gehalten, daß ein zu drehendes Eckstück vorn rechts oben liegt. Zeigt die Operation nicht den gewünschten Erfolg, muß sie wiederholt werden.

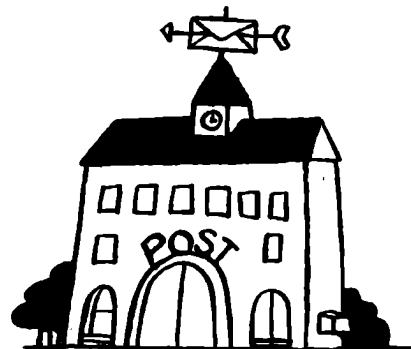
Zum Drehen des nächsten Eckstücks muß dieses wieder nach rechts vorn gebracht werden. Dazu nur die obere Ebene drehen (nicht den ganzen Würfel). Es folgen wieder die acht Züge mit eventueller Wiederholung. So werden alle Eckstücke in die richtige Lage gebracht.

Jetzt brauchen wir nur noch die obere (gelbe) Ebene so zu drehen, daß die Seitenfarben mit denen der anderen Ebenen übereinstimmen.

Aus: *practic 3/81*

Der Zauberwürfel hat Nachfolger

Dem Zauberwürfel, den der ungarische Professor Ernoe Rubik entwickelt hat, sind weitere logische Spiele gefolgt. Mit Begeisterung beschäftigen sich die Ungarn jetzt auch mit dem Zauber-Domino, der Zauberkuugel, dem Zauberstern und dem Zaubermais. Um neue, die menschliche Logik entwickelnde Spiele zu fördern, wurde in Ungarn ein Wettbewerb ausgeschrieben. Das Ergebnis übertraf alle Erwartungen. Insgesamt trafen 5600 Vorschläge für neue Spiele ein, die von 2179 Personen ausgedacht wurden. 30 Ideen wurden von einer Jury ausgewählt, von denen fünf sogar einen Sonderpreis errangen.



...Das Lösen von Aufgaben macht mir so viel Spaß, daß ich schon sechs Jahre lang regelmäßig am Wettbewerb teilgenommen habe. Für die Lösung der Aufgaben haben stets die Schulkenntnisse ausgereicht. Die Aufgaben haben mir sehr geholfen, mein logisches Denken zu trainieren. Alle Aufgaben habe ich mir aufgehoben, denn viele, vor allem theoretische Probleme, werden auch für mich als zukünftigen Physik-Studenten wichtig sein.

Ralf Launhardt, Rathenow

... Ist es nicht möglich, dem Schach in *alpha* Raum zu verschaffen, um damit jungen Menschen die Möglichkeit zu geben, dieses interessante Spiel zu betreiben?

Harald Rüdiger, Grünheide

...Das Knobeln an den Aufgaben bereitet mir viel Spaß. Nicht nur das logische Denken wird geschult, sondern man lernt auch Geduld und Ausdauer, wenn es beim ersten Versuch nicht klappt.

Anke Krukenberg, Schönberg

...Seitdem ich mich am *alpha*-Wettbewerb beteilige, habe ich nun auch nicht mehr so große Angst vor Mathematikarbeiten. Ich konnte meine Leistungen durch den Wettbewerb verbessern. Ich mache auch künftig weiter mit!

Annett Vogel, Empfertshausen

...Sehr gut gefallen mit die theoretischen Betrachtungen zu mathematischen Problemen und die Seite „In freien Stunden – *alpha* heiter“. Macht weiter so!

Frank Wagner, Hettstedt

...Unsere Kinder nehmen gern an Ihrem Wettbewerb teil. Wir freuen uns als Eltern, daß sie durch Ihre Zeitschrift die Möglichkeit haben, ihre Kenntnisse in Mathematik und Deutsch zu festigen.

Familie Baitalow, Kasan (UdSSR)

...Die Knotelei in *alpha* macht mir riesigen Spaß und deshalb vielen Dank für die interessanten Aufgaben.

Jörg Peschke, Sebnitz (Kl. 6)

...Obwohl ich schon einige Jahre aus der Schule bin, löse ich gern Ihre Aufgaben. Mir macht Mathematik einfach Spaß, obwohl ich arbeitsmäßig nicht viel damit zu tun habe. Es ist sozusagen ein Hobby von mir.

Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde

In freien Stunden • alpha-heiter



Sport frei!

Auf einer Wäscheleine hängen 8 Fußballjerseys einer Mannschaft. Ermittelt man das arithmetische Mittel dieser sichtbaren Rückennummern, so erhält man die Zahl 7. Die Summe aus den Rückennummern der drei fehlenden Trikots ergibt die Summe 10. Welche Dresse mit welchen Rückennummern fehlen auf der Leine?

Fachlehrer D. Knappe, Jessen

Begriffe gesucht

Verändere je Wort einen Buchstaben, so daß mathematische Begriffe entstehen! Alle neuen Buchstaben aneinandergereiht ergeben einen weiteren mathematischen Ausdruck!

Keiler, Ur, Mütze, Tal, Sahne, Kenner, Sonne, Schinkel

Mathematikfachlehrer Regina Brincks, OS II, Saalfeld

Kryptarithmetik

Bei einer Divisionsaufgabe waren alle Ziffern mit Ausnahme der „1“ unleserlich. Wie heißt die vollständige Aufgabe, wenn die Ziffer „1“ genau an diesen sechs Stellen auftritt?

$$xxxxxx:xx = x1x1$$

$$\begin{array}{r} xx1 \\ 11x \\ \hline xx \\ \hline xxx \\ \hline 1xx \\ \hline xx \\ \hline xx \end{array}$$

$$C + B = S$$

$$B + R = A$$

$$= = =$$

$$C - R = D$$

Schüler Stefan Löbel, Karow/Lübz

$$A : B = C$$

$$: : +$$

$$D + B = E$$

$$A - D = F$$

Mathematikfachlehrer Regina Brincks, OS II, Saalfeld

Schülerin Elke Schwetz, Schmalkalden

Peter Gossányi, Bratislava



Rund um Pilze

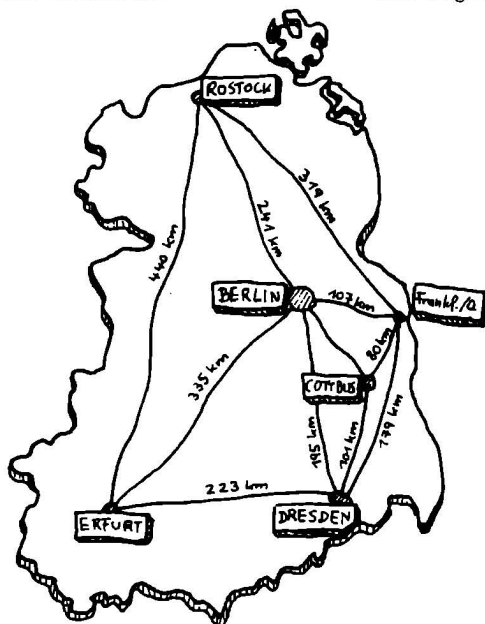
„Steinpilze habe ich mit dem Hasen nach dem Regen gesammelt“, erzählte der Bär, „und wir konnten sie kaum nach Hause tragen, aber in der Hauptsache haben wir Wasser getragen, denn die frisch gesammelten Pilze enthalten 90% Wasser. Als aber die Pilze ein wenig abgetrocknet waren, wurden sie um 15 kg leichter, denn sie enthielten nur noch 60% Wasser.“ Wieviel kg Pilze brachten Bär und Hase aus dem Wald?

Aus einem sowjetischen Unterhaltungsbuch

Heimatkunde

Von Berlin aus soll eine Rundreise durch die angegebenen fünf Städte gemacht werden. Welches ist die kürzeste Reiseroute?

Aus: Magazin 9/81

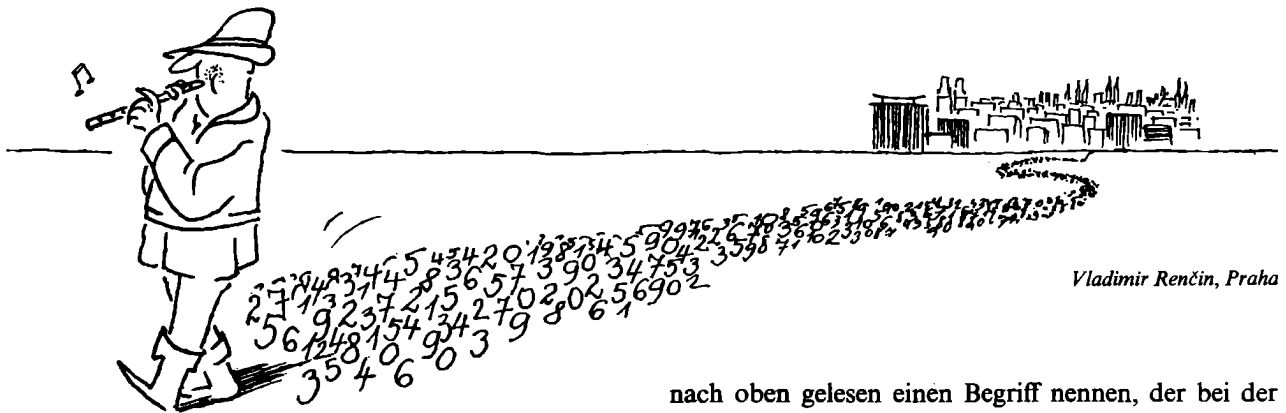


Kniffliges Zerlegungsproblem

Man zerlege ein rechtwinkliges Dreieck in 7 spitzwinklige Dreiecke, ein Quadrat in 8 spitzwinklige Dreiecke und überlege sich jeweils, daß eine Zerlegung in eine kleinere Zahl spitzwinkliger Dreiecke nicht möglich ist.

Dr. P. Schreiber,

E.-Moritz-Arndt-Universität Greifswald



Vladimír Renčín, Praha

$$19 + 82 = 1 + 98 + 2$$

$$1^2 = (1 + 9) : (8 + 2)$$

$$2^2 = 1 + 9 - 8 + 2$$

$$3^2 = 19 - 8 - 2$$

$$4^2 = 1 + 9 + 8 - 2$$

$$5^2 = 1 \cdot 9 + 8 \cdot 2$$

$$6^2 = 1 \cdot 9 \cdot 8 : 2$$

$$7^2 = 1 \cdot 98 : 2$$

$$8^2 = 1^9 \cdot 8^2$$

$$9^2 = -1^9 + 82$$

$$10^2 = (1 + 9)(8 + 2)$$

$$11^2 = (19 - 8)^2$$

$$12^2 = 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2$$

Ing. H. Decker, Köln

Lesen – denken – lösen

Von der durch 11 teilbaren Zahl „1320“ ausgehend sind neue vierstellige Zahlen zu bilden, indem jeweils eine Ziffer entnommen und eine andere hinzugefügt wird. Durch Permutieren der Ziffern ergeben sich dann Zahlen mit nachfolgenden Eigenschaften:

1. Größte gerade durch 11 teilbare Zahl;
2. kleinste gerade durch 11 teilbare Zahl;
3. größte ungerade durch 11 teilbare Zahl;
4. kleinste ungerade durch 11 teilbare Zahl;
5. größte gerade durch 11 teilbare Zahl;
6. kleinste gerade durch 11 teilbare Zahl.

	–	1 3 2 0	+
1.	0		4
2.	1		5
3.	2		6
4.	3		7
5.	4		8
6.	5		9

Hinweis: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 12 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter von oben nach unten gelesen ergeben den Namen eines genialen Mathematikers des Altertums (275 bis 194 v. u. Z.), während die Endbuchstaben von unten

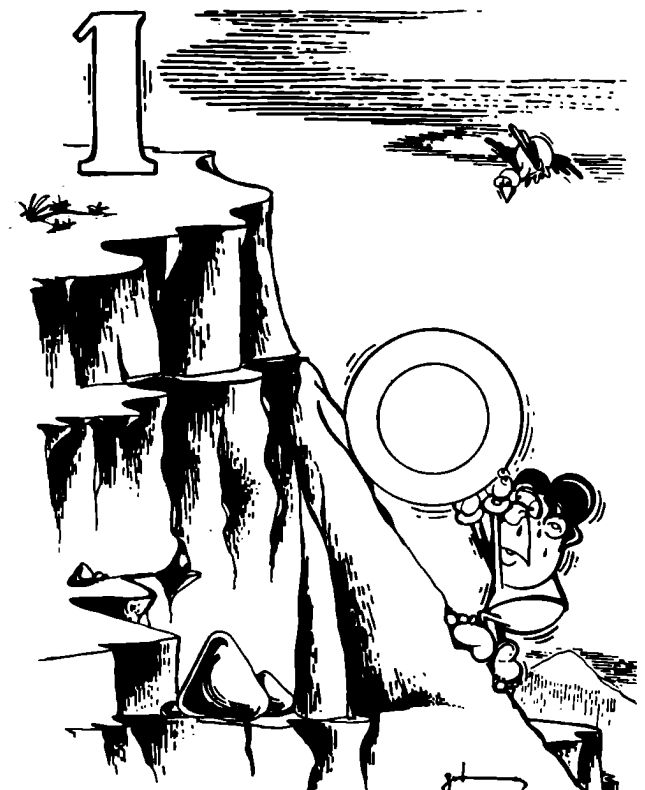
nach oben gelesen einen Begriff nennen, der bei der k. g. V.-Bestimmung auftritt.

a – a – di – eck – ep – eu – ex – ga – go – haff – jekt – ki – le – ler – lon – mum – na – na – ob – raum – sa – sechs – si – stop – ta – the – to – to – tom – tre – uhr.

1. Griechischer Buchstabe;
2. für sie gilt: $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;
3. Zeitmeßgerät höchster Genauigkeit;
4. Spiel, in dem die Kombinatorik eine Rolle spielt;
5. Element einer Menge;
6. ein n -Eck;
7. griechischer Buchstabe;
8. vom Meer abgetrennter flacher Strandsee;
9. Begriff der Differentialrechnung;
10. Hafenstadt in Japan;
11. genialer schweizerischer Mathematiker;
12. Kennzeichnung des Programmendes.

Ing. D. Völzke, Greifswald

M. Bukowan, Moskau



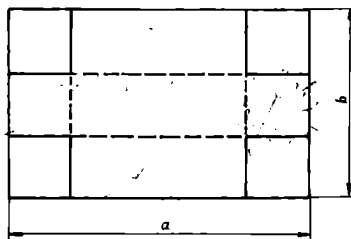
Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1982



Mathematik

Ma 5 ■2179 Von einem rechteckigen Stück Pappe mit den Seitenlängen $a=90\text{ cm}$ und $b=45\text{ cm}$ werden an jeder Ecke gleich große Quadrate ausgeschnitten. Es verbleibt danach eine Fläche mit einem Flächeninhalt von 3650 cm^2 .



- a) Wie lang ist die Seite jedes der vier ausgeschnittenen Quadrate?
b) Faltet man das so entstandene Stück Pappe um die gestrichelten Linien, so entsteht ein oben offener Karton. Welchen Rauminhalt hat dieser Karton?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2180 Setze für die fünf Sternchen fünf paarweise voneinander verschiedene Ziffern so ein, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht! Dabei soll der erste Summand größer sein als jeder andere. (Die erste Ziffer des ersten bzw. dritten Summanden darf nicht die Ziffer 0 sein.)

$$\begin{array}{r} *** \\ + 19* \\ + *81 \\ \hline 1981 \end{array}$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2181 In einem Verkaufsregal liegen vier verschiedene Seifensorten A, B, C und D. Von Sorte A sind es halb soviel Stück Seife wie von Sorte B. Von Sorte B sind es halb so-

viel Stück Seife wie von Sorte C. Von der Sorte D sind es 15 Stück Seife; das sind halb soviel Stück Seife wie von den Sorten B und C zusammengekommen. Wieviel Stück Seife liegen im Regal?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2182 Von zwei leeren Zuckerdosen weiß man folgendes: Die größere der beiden Dosen ist doppelt so schwer wie die kleinere. Füllt man in die kleinere 300 g Zucker und in die größere 100 g Zucker, so sind beide Dosen gleich schwer. Wie schwer ist jede der beiden leeren Zuckerdosen? StR H.-J. Kerber

Ma 5 ■2183 Ein Winzer schenkte seinen drei Söhnen (A, B, C) sieben volle, sieben halbvoll und sieben leere Weinfässer, die sie unter sich so aufteilen sollten, daß jeder von ihnen gleich viel Fässer und gleich viel Wein erhält. Wie könnte die Aufteilung vorgenommen werden? Schülerin Bettina Fröhlich,

Manschnow (Kl. 5)

Ma 5 ■2184 Die Mutter von Jens wurde im Jahre 1980 zehnmal so alt, wie sie (vom Jahre 1980 zurück gerechnet) vor 27 Jahren alt war. Welches Lebensalter erreicht die Mutter von Jens im Jahre 1981?

Schüler Jens Taggeselle, Borna

Ma 6 ■2185 Ein Radfahrer und ein PKW brechen zur gleichen Zeit im gleichen Ort auf und fahren dieselbe Wegstrecke mit konstanter Geschwindigkeit, der Radfahrer mit $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der PKW mit $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach $1\frac{1}{2}$ Stunden

Fahrzeit macht der Kraftfahrer 2 Stunden Rast in einer Gaststätte und fährt danach den gleichen Weg wieder zurück. Wieviel Minuten nach Abfahrt von der Gaststätte trifft der PKW auf den Radfahrer?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
30	150	
	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 2186 Auf einer Weide grasen Pferde, Schafe und Ziegen; es sind zusammen mehr als 30, aber weniger als 36 Tiere. Es sind zwei Ziegen weniger und 11 Pferde mehr als Schafe. Wieviel Pferde, Schafe bzw. Ziegen grasen auf dieser Weide?

Schülerin Claudia Popien,
Magdeburg (Kl. 8)

Ma 6 ■ 2187 Von zwei natürlichen Zahlen sei die erste doppelt so groß wie die zweite. Multipliziert man die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus diesen beiden Zahlen miteinander, so erhält man 192. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schülerin Claudia Popien,
Magdeburg (Kl. 8)

Ma 6 ■ 2188 Fritz fordert seinen Freund Fred auf: „Denke dir eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl, multipliziere sie mit 5, addiere zum Produkt 2, multipliziere die so erhaltene Summe mit 4, addiere zu diesem Produkt 3, multipliziere die nunmehr erhaltene Summe mit 5, addiere schließlich 7, und nenne mir dein Ergebnis!“ Fritz gibt nach kurzem Überlegen dem erstaunten Fred die von ihm gedachte Zahl an. Wie ist das möglich?

Schüler Jens Weber, Karl-Marx-Stadt

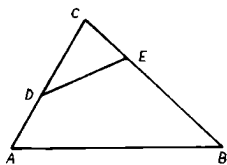
Ma 6 ■ 2189 Gesucht sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende beiden Bedingungen erfüllen:

- Die Quersumme einer solchen Zahl ist eine Primzahl.
- Dividiert man eine solche Zahl durch ihre Quersumme, so ist der Quotient um 1 größer als die Quersumme.

Schülerin Kathrin Gnatowski, Mühlhausen

Ma 7 ■ 2190 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Ein beliebiger innerer Punkt E der Seite BC wurde mit einem beliebigen inneren Punkt D der Seite AC verbunden. Es sei $\overline{AD}$ genau so lang wie $\overline{CE}$. Es habe $\overline{DE}$ die Länge 5 cm, und es sei $\overline{CD}$ genau 5 cm länger als $\overline{AD}$. Dann wäre der gerade Weg von A nach C genau so lang wie der Weg von A über D und E nach C . Dies kann jedoch nicht sein, da der gerade Weg $\overline{AC}$ immer der kürzeste ist. Wo steckt der Fehler?

StR H.-J. Kerber



Ma 7 ■ 2191 Zeige, daß

- die in dekadischer Darstellung gegebene sechsstellige natürliche Zahl $z_1 = \overline{a2b3c4}$ nicht durch 4 teilbar sein kann, wenn z_1 durch 9 teilbar ist und $a+b=c$ gelten soll;
- diese Behauptung für $z_2 = \overline{2a3b4c}$ nicht gilt!

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 2192 Ein Großvater unterhält sich mit seinem Enkelkind. Das Enkelkind stellt folgendes fest: „Wenn du von meinem (ganzzahligen) Lebensalter den fünften Teil von 5 subtrahierst und diese Differenz mit 5 multiplizierst, dann erhält man genau das Lebensalter von dir.“ Der Großvater meint darauf: „Wenn du zu meinem Lebensalter die Quadratzahl von 7 addierst, von dieser Summe das Zweifache von 7 subtrahierst und das so erhaltene Ergebnis durch 7 dividierst, so erhält man das Lebensalter von dir.“ Wie alt ist jeder?

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 2193 Angenommen, es gäbe im Lande „Utopia“ nur Geldscheine zu 5 Uto und zu 7 Uto (angenommene Währung dieses Landes). Es sollten Wertgegenstände bezahlt werden, die

- 1 Uto, b) 2 Uto, c) 3 Uto, d) 4 Uto kosten.
- Wie kann das geschehen, wenn Käufer und Verkäufer genügend Scheine dieser beiden Sorten haben? Wie macht man das bei einem Kaufpreis von 99 Uto? Begründe, daß jeder beliebige ganzzahlige Betrag bezahlt werden kann!

StR H.-J. Kerber

Ma 8 ■ 2194 In der Gleichung $\overline{abc} = (\overline{bc})^b$ stellt $\overline{abc}$ eine dreistellige, $\overline{bc}$ eine zweistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise dar. Die Buchstaben a, b, c sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine wahre Aussage entsteht. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

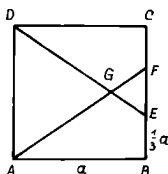
Sch.

Ma 8 ■ 2195 Es ist zu beweisen, daß die Summe aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen a und b mit $a > b$ stets größer ist als das zweifache Produkt dieser Zahlen.

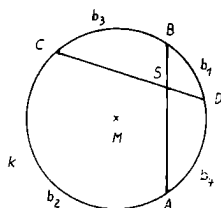
Sch.

Ma 8 ■ 2196 Das Bild zeigt ein Quadrat $ABCD$. Die Punkte E und F sind derart eingezeichnet, daß gilt: $\overline{BE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FG}$. Ist das Dreieck EFG gleichseitig? Die Vermutung ist zu beweisen.

Schüler Axel Schulz, Potsdam (Kl. 8)



Ma 8 ■ 2197 In einen Kreis k wurden zwei verschieden lange Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die sich im Punkte S schneiden, eingezeichnet. Die Endpunkte dieser Sehnen erzeugen, wie aus dem Bild ersichtlich, vier Kreisbögen der



Länge b_1, b_2, b_3 bzw. b_4 . Es ist zu beweisen: Wenn $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$, dann $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. Sch.

Ma 9 ■ 2198 In der Sowjetunion gibt es gegenwärtig insgesamt 138 Zirkusse. Es sind viermal soviele Standortzirkusse wie Wanderzirkusse, zwei Tierzirkusse weniger als Wanderzirkusse, zehn Bühnenzirkusgruppen weniger als Standortzirkusse. Wieviel Zirkusse jeden Typs gibt es gegenwärtig in der Sowjetunion?

Aufgabe aus der UdSSR

Ma 9 ■ 2199 Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts eines Kreises zum Flächeninhalt des ihm einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Studentin Marion Staskowiak,
Päd. Hochschule Kötten

Ma 9 ■ 2200 Es ist nachzuweisen, daß die Zahl $1211^{100} - 1211^{98}$ durch 1111 teilbar ist.

Schüler Jens Grundmann,
Limbach-Oberfrohna (Kl. 12)

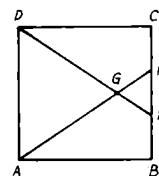
Ma 9 ■ 2201 Es ist zu beweisen, daß der Term $7^{2n} - 4^{2n}$ für alle natürlichen Zahlen n durch 33 teilbar ist.

Schüler Volker Sachse, Mülsen (Kl. 9)

Ma 10/12 ■ 2202 Man ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die genau so groß sind wie das Produkt aus ihrer Quersumme und der Zahl, die ihre letzte Ziffer darstellt. Andreas Fitte, Berlin, z. Z. NVA

Ma 10/12 ■ 2203 Das Bild zeigt ein Quadrat $ABCD$. Die Punkte E und F sind derart eingezeichnet, daß gilt: $\overline{BE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FC}$. Ist das Dreieck EFG gleichseitig? Die Vermutung ist zu beweisen.

Schüler Axel Schulz, Potsdam (Kl. 8)



Ma 10/12 ■ 2204 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Flächeninhalt $A_k = 19,63 \text{ cm}^2$. Die drei Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC liegen auf k , wobei $\overline{AC}$ Durchmesser von k ist. Die Seite $\overline{AB}$ ist genau so lang wie der vierte Teil des Umfangs von k . Der Winkel $\sphericalangle BAC$ hat die Größe 35° .

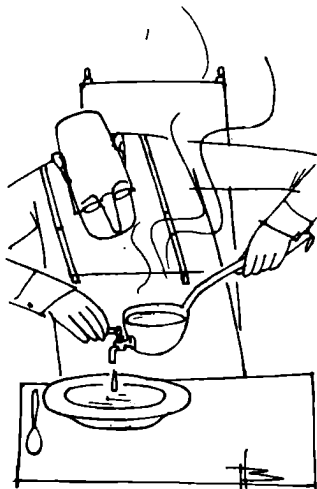
- Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC ?

- Wieviel Prozent der Kreisfläche nimmt die Fläche des Dreiecks ein?

Schüler André Pohlars, Dresden (Kl. 10)

Ma 10/12 ■ 2205 In einer Entfernung von $a = 10 \text{ m}$ vom Ufer eines Flusses steht ein Haus. Visiert man von zwei senkrecht übereinanderliegenden Fenstersimsen, deren Höhenunterschied $e = 8 \text{ m}$ ist, das andere Ufer an, so erhält man Neigungswinkel von $\alpha = 18,4^\circ$ und $\beta = 24,6^\circ$. Wie breit ist der Fluß?

Steffen Lausch,
Grimma (Elektromechanikerlehrling)



Victor Kubal, Prag

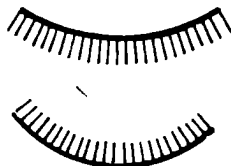
Physik

Ph 6 ■111 Betrachte die beiden Bilder 1 und 2! Welche Strecke ist länger, welcher Kreisbogen ist kürzer? Miß nach! Welche Schlußfolgerungen mußt du ziehen?

Bild 1



Bild 2



Ph 7 ■112 Ein Taucher kann mit einem Druckluftgerät bis in ungefähr 45 m Tiefe vordringen. Berechne den Schweredruck, dem der Taucher im Meer (Wichte des Meerwassers $1,03 \frac{\text{P}}{\text{cm}^3}$) ausgesetzt ist! Welche Druckkraft wirkt auf den gleichen Taucher, wenn man seine Körperoberfläche mit $1,6 \text{ m}^2$ annimmt?

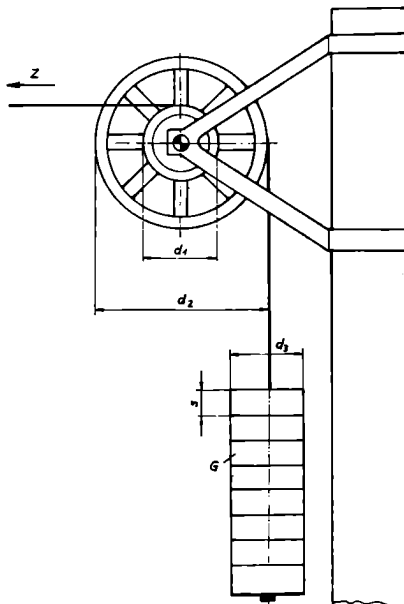
Ph 8 ■113 Der Gesamtwiderstand von drei parallel geschalteten Widerständen beträgt $28 \text{ k}\Omega$. Wie groß sind die anderen drei Widerstände, wenn man weiß, daß die ersten beiden gleich sind und der dritte doppelt so groß ist wie die Summe der beiden anderen?

Schüler Stefan Franze, Dresden

Ph 9 ■114 Bei Eisenbahnen, die mit elektrischer Oberleitung betrieben werden, muß der Fahrdrabt durch entsprechende Spannwerke stets in einer bestimmten Höhenlage gehalten werden. Die Spannwerke haben also die Aufgabe, Längenänderungen des Fahrdrabtes infolge von Temperaturänderungen auszugleichen. Das Bild zeigt den prinzipiellen Aufbau eines sogenannten Radspanners. Dabei wird die konstante Zugspannung im Fahrdrabt durch das Gewicht

G, das aus einzelnen Betonscheiben besteht, erzeugt. Durch einen solchen Radspanner soll ein Fahrdrabt von 700 m Länge bei $+15^\circ\text{C}$ unter einer konstanten Zugspannung von $z = 98,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \left(10 \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \right)$ gehalten werden. Ermitteln Sie die Anzahl der erforderlichen Betonscheiben, wenn der Beton eine Dichte von $\rho = 2,25 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ hat, der Durchmesser der Scheiben $d_3 = 30 \text{ cm}$ beträgt und jede Scheibe eine zentrische Bohrung von $d_b = 4 \text{ cm}$ Durchmesser hat! Die Dicke der Scheiben sei $s = 12 \text{ cm}$. Gegeben seien weiterhin $d_1 = 30 \text{ cm}$, $d_2 = 80 \text{ cm}$ und der Fahrdrabtquerschnitt $A_f = 100 \text{ mm}^2$. Sonstige Details bleiben unberücksichtigt.

Ing. A. Körner, Leipzig



Ph 10/12 ■115 Ein mathematisches Pendel wird um die Hälfte seiner Länge gekürzt. In welchem Verhältnis steht die Schwingungsdauer der beiden Pendel?

Chemie

Ch 7 ■89 Kupfer(II)-oxid soll durch Oxydation gewonnen werden. Es werden 60 kg Kupfer eingesetzt.

a) Wieviel Kilogramm Kupfer(II)-oxid läßt sich aus dieser Kupfermenge gewinnen?

b) Welcher Sauerstoffmenge ist diese Kupfermenge äquivalent?

c) Die monatliche Planproduktion von Kupfer(II)-oxid ist um 200 t höher als die, die aus 60 kg Kupfer gewonnen wird.

Wieviel Tonnen Kupfer(II)-oxid werden bei einer Planerfüllung von 104% produziert?

Ch 8 ■90 Wassergas ist ein Gasgemisch, welches aus 50% Wasserstoff und 40% Kohlenmonoxid besteht. Die restlichen 10% sind andere Gase, die in der Rechnung vernachlässigt werden sollen.

a) Wieviel m^3 Wasserdampf sind zur Umsetzung von 1 kg Hüttenkoks erforderlich?
b) Wieviel m^3 Wassergas entstehen dabei?
c) Wieviel m^3 Wassergas werden stündlich in einer modernen Wassergasanlage produziert, wenn der Koksdurchsatz $5,8 \frac{\text{t}}{\text{h}}$ beträgt?

Ch 9 ■91 Kalkmörtel, der als Baubindemittel sehr große Bedeutung besitzt, wird in großen Industriebetrieben produziert. So z. B. wird ein Kalkmörtel geliefert, der zu einem Drittel aus Löschkalk besteht. Wieviel Kubikmeter Luft sind notwendig, um 2,4 kg Kalkmörtel der angegebenen Zusammensetzung abzubinden? (1 Liter Luft enthält 0,03% Kohlendioxid)

Ch 10/12 ■92 Im VEB Chemiewerk Coswig/Anhalt erfolgt die technische Herstellung von Schwefeldioxid durch Reduktion von Anhydrit. Als Reduktionsmittel dient Kohlenstoff. Die Ausbeute an Schwefeldioxid beträgt 94%. Aus 6 t Anhydrit, welches 20% Verunreinigungen enthält, soll eine 65%ige Schwefelsäure hergestellt werden. Wieviel Tonnen Schwefelsäure dieser prozentualen Zusammensetzung entstehen?

Gestalt der Erde wurde präzise vermessen

Der Durchmesser der Erde, von der schon Newton vermutete, daß sie aufgrund ihrer Rotation keine ideale Kugelgestalt haben könnte, ist zwischen den Polen gemessen um 42,77 km kleiner als am Äquator. Das stellten englische Wissenschaftler anhand präziser Vermessungen von Satellitenbahnen fest. Schon in den sechziger Jahren war entdeckt worden, daß die tatsächliche Gestalt der Erde auch von einer Ellipsoidform abweicht, daß sie eher die Form einer Birne hat. Sie ist am Nordpol etwas ausgebeult und hat am Südpol eine Senke. Wie die Zeitschrift „Nature“ berichtet, ist nun auch die Gestalt der Erde genauer bestimmt worden, als dies bisher möglich war. Wie die englischen Wissenschaftler berichten, ist jetzt die Gestalt der Erde bis in Breiten von 86 Grad auf 50 Zentimeter genau bekannt. Den neuen Daten zufolge ragt der Nordpol um 17,84 Meter über die Ellipsoidfläche, und der Südpol liegt 27,23 Meter tiefer. Mit diesen Angaben wird jedoch nicht die tatsächliche Topographie wiedergegeben, sondern das sogenannte Geoid beschrieben. Darunter ist jene Fläche zu verstehen, die der Meeresspiegel unter dem Einfluß von Schwerkraft und Rotation einnehmen würde. Die Abweichungen von der Ellipsoidform sind eine Folge der unsymmetrischen Verteilung der Massen in der Erde. Dies führt zu Änderungen der Umlaufbahn von Satelliten, aus denen sich die Verzerrungen des Schwerfeldes bestimmen lassen.

Differential- oder Differenzgleichungen?

Bei der mathematischen Modellierung der unterschiedlichsten Vorgänge in Natur und Technik stellen *Differentialgleichungen* ein unentbehrliches Hilfsmittel dar. Zu den ältesten Beispielen gehören die Bewegungsgleichungen der Himmelskörper. Größere Teilgebiete der Theoretischen Physik sind in ihrem mathematischen Kern nichts anderes als Folgerungen aus den grundlegenden Differentialgleichungen dieser Gebiete. Von modernen Anwendungen sei etwa die Beschreibung biokybernetischer Systeme durch Differentialgleichungen erwähnt.

Um mit Differentialgleichungen arbeiten zu können, benötigt man zum Verständnis den Begriff des Differentialquotienten, der nach dem heutigen Lehrplan in der 11. Klasse behandelt wird. Im Zeitalter der Rechentechnik haben Differentialgleichungen den Nachteil, daß sie sich auf digitalen Rechenautomaten nicht direkt lösen lassen, sondern dort näherungsweise durch Differenzgleichungen ersetzt werden.

Mit *Differenzgleichungen* kann man sich schon ab Klasse 8 beschäftigen, denn sie erfordern neben dem Funktionsbegriff nur die vier Grundrechnungsarten. Da das qualitative Verhalten der Lösungen von Differenzgleichungen dem der Lösungen von Differentialgleichungen entspricht, hat diese Beschäftigung den Vorteil, daß man dabei schon viel für ein späteres Studium der Differentialgleichungen lernt. Wegen ihres elementaren Charakters sind Differenzgleichungen als Gegenstand mathematischer Schülerzirkel bestens geeignet, zumal sie in Form von Rekursionsformeln (vgl. *alpha* 9 (1975), S. 73 bis 75) immer häufiger in Olympiadeaufgaben auftreten.

Differenzgleichungen sind aber nicht nur elementare Approximationen für Differentialgleichungen, sondern sie machen ihnen in Form diskreter Modelle (vgl. Wiss. u. Fortschritt 28 (1978) S. 146 bis 149) bereits Konkurrenz. Ihre Verwendung zur mathematischen Beschreibung konkreter Vorgänge ist vor allem in solchen Wissenschaftsdisziplinen angebracht, die sich noch am Anfang der Mathematisierung befinden. Für zahlreiche weitere numerische Verfahren bilden Differenzgleichungen die Grundlage, wobei ihre einfache Programmierbarkeit sie als besonders nutzerfreundlich erscheinen läßt. Eine Einführung in verschiedene Anwendungsmöglichkeiten dieser Gleichungen bietet der Band 97 der Mathematischen Schülerbücherei *Differenzgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen*, VEB DVW, Berlin 1979.

An drei Stellen des Heftes 3 von *alpha* (1981) wurde in dessen Titel das erste Wort irrtümlich durch „Differentialgleichungen“ ersetzt, was der Anlaß zu diesem kurzen Artikel war.

L. Berg

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb

Heft 5/81

Ma 5 ■ 2124 $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 = 100$

Ma 5 ■ 2125 Angenommen, Dorothea sammelte x kg Altpapier; dann sammelte Astrid $3x$ kg Altpapier, und es gilt $x + 3x = 43 - 19$, $4x = 24$, $x = 6$. Dorothea sammelte 6 kg Altpapier, Astrid 18 kg. Beate sammelte $6 \text{ kg} + 4 \text{ kg} = 10 \text{ kg}$, Cordula $19 \text{ kg} - 10 \text{ kg} = 9 \text{ kg}$ Altpapier.

Ma 5 ■ 2126 Die fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $n, n+1, n+2, n+3, n+4$; dann gilt $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 25$,

$$5n + 10 = 25,$$

$$5n = 15, \text{ also } n = 3.$$

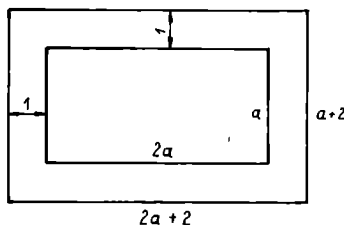
Daraus folgt weiter $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$.

Ma 5 ■ 2127 Die Rasenfläche sei a Meter breit, also $2a$ Meter lang. Das vom äußeren Rand des Fußweges gebildete Rechteck hat dann eine Breite von $(a+2)$ Metern und eine Länge von $(2a+2)$ Metern. Für den Umfang gilt deshalb

$$2 \cdot (3a + 4) = 248, 3a + 4 = 124, 3a = 120, a = 40.$$

Die Fläche des Rasens beträgt somit

$$A = 2a \cdot a = 2a^2 = 2 \cdot 40^2 \text{ m}^2 = 3200 \text{ m}^2.$$



Ma 5 ■ 2128 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $10a + b$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$. Nun gilt

$$10a + b + 27 = 10b + a,$$

$$9b - 9a = 27,$$

$$b - a = 3.$$

Es existieren genau sechs solcher Zahlen; sie lauten 14, 25, 36, 47, 58, 69.

Ma 5 ■ 2129 Angenommen, Klasse 8c erreichte n Ringe, also Klasse 8b $(n+15)$ Ringe und Klasse 8a $(n+25)$ Ringe. Das sind insgesamt $(3n+40)$ Ringe; nun gilt $3n+40=901$, $3n=861$, $n=287$. Die Klasse 8a erreichte

312 Ringe, die Klasse 8b 302 Ringe und die Klasse 8c 287 Ringe.

Ma 6 ■ 2130 Angenommen, Anna hat n Äpfel gekauft; dann gilt

$$(3 \cdot n + 5) \cdot 3 = 10 \cdot n,$$

$$9n + 15 = 10n, \text{ also } n = 15.$$

Anna hat 15 Äpfel gekauft.

Ma 6 ■ 2131 17^7 endet auf die Ziffer 3; 12^3 endet auf die Ziffer 8; 15^2 endet auf die Ziffer 5; 16^4 endet auf die Ziffer 6. Wegen $3+8+5-6=10$ endet der Wert des Terms auf die Ziffer 0.

Ma 6 ■ 2132 Da eine solche Zahl z durch 8 teilbar sein soll, muß sie gerade sein. An der vierten Stelle kann folglich nur die Primzahl 2 stehen. An der zweiten bzw. dritten Stelle könnten die Primzahlen 3, 5 oder 7 stehen. Deshalb sind folgende Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 8 zu untersuchen: 352, 532, 372, 732, 572, 752. Von diesen Zahlen sind nur 352 und 752 durch 8 teilbar. Nur die Zahlen 3752 und 7352 besitzen die geforderten Eigenschaften.

Ma 6 ■ 2133 Aus $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ folgt, daß

Frau Heller $\frac{4}{5}$ der Menge der im Keller vorhandenen Kohlen verbraucht hat. Es verbleibt somit $\frac{1}{5}$ des ursprünglich vorhandenen

Bestands an Kohlen; das sind 120 kg Kohlen. Deshalb waren im Keller $5 \cdot 120 \text{ kg} = 600 \text{ kg}$ Kohlen vorhanden. Das sind zwölf Säcke mit je 50 kg Kohlen.

Ma 6 ■ 2134 Angenommen, Frau Schulze kaufte a Pfannkuchen und c Streuselkuchen, Frau Lehmann b Spritzkuchen; dann kaufte Frau Meier $(a+3)$ Pfannkuchen und $(b+5)$ Spritzkuchen, und Frau Winkler kaufte $(c+2)$ Streuselkuchen. Das sind zusammen $(2a+2b+2c+10)$ Stück Kuchen. Nun gilt

$$2a + 2b + 2c + 10 = 22,$$

$$2a + 2b + 2c = 12,$$

$$a + b + c = 6.$$

Wegen $a < b < c$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a=1$, $b=2$ und $c=3$.

Frau Meier kaufte 4 Pfannkuchen und 7 Spritzkuchen; Frau Schulze kaufte 1 Pfannkuchen und 3 Streuselkuchen; Frau Lehmann kaufte 2 Spritzkuchen, Frau Winkler 5 Streuselkuchen.

Ma 7 ■ 2135 Angenommen, Peter dachte sich die vier natürlichen Zahlen a, b, c, d ; dann gilt

$$a + b + c = 13, \quad (1)$$

$$b + c + d = 17, \quad (2)$$

$$a + c + d = 14, \quad (3)$$

$$a + b + d = 16. \quad (4)$$

Addieren wir diese vier Gleichungen, so erhalten wir

$$3a + 3b + 3c + 3d = 60,$$

$$a + b + c + d = 20. \quad (5)$$

Durch Einsetzen erhalten wir aus (1) und (5)
 $13 + d = 20$, also $d = 7$,
 aus (2) und (5)
 $a + 17 = 20$, also $a = 3$,
 aus (3) und (5)
 $b + 14 = 20$, also $b = 6$,
 aus (4) und (5)
 $c + 16 = 20$, also $c = 4$.

Peter dachte sich die Zahlen 3, 6, 4 und 7.

Ma 7 ■ 2136 Angenommen, Jürgen hat die Zahlen a, b, c, d, e mit $a < b < c < d < e$ getippt. Dann gilt

- (1) $a + b + c + d + e = 78$,
- (2) $d + e = 2 \cdot (a + b + c)$,
- (3) $a + b = c$,
- (4) $a + 5 = b$,
- (5) $d : e = 5 : 8$.

Aus (1) und (2) folgt durch Einsetzen $3(a + b + c) = 78$, also $a + b + c = 26$ (6) und $d + e = 52$ (7).

Aus (3) und (6) folgt $2c = 26$, also $c = 13$ und somit (8) $a + b = 13$.

Aus (4) und (8) folgt $2b = 18$, also $b = 9$ und somit $a = 4$. Aus (5) und (7) folgt $d : (52 - d) = 5 : 8$, also $d = 20$ und somit $e = 32$. Jürgen hat die Zahlen 4, 9, 13, 20 und 32 getippt.

Ma 7 ■ 2137 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z = 10a + b$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$. Die Quersumme der gesuchten Zahl lautet $a + b = 9$. Nun gilt

$$(10a + b) \cdot 3 - 9 = 10b + a,$$

$$30a + 3b - 9 = 10b + a,$$

$$29a - 7b = 9.$$

Wegen $b = 9 - a$ erhalten wir durch Einsetzen

$$29a - 7(9 - a) = 9,$$

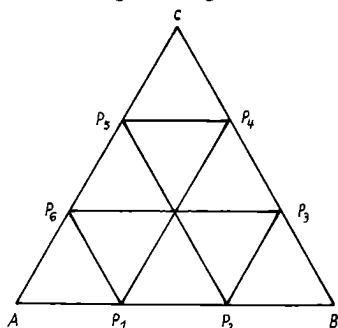
$$29a - 63 + 7a = 9,$$

$$36a = 72, \text{ also } a = 2$$

und somit $b = 7$.

Die gesuchte Zahl lautet 27, und es gilt $27 \cdot 3 - 9 = 72$.

Ma 7 ■ 2138 Das Dreieck ABC läßt sich, wie aus dem Bild ersichtlich, in genau neun kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Das regelmäßige Sechseck setzt sich aus sechs dieser kongruenten Dreiecke zusammen. Die Flächeninhalte verhalten sich also wie $6:9 = 2:3$. Der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks beträgt somit $66\frac{2}{3}\%$ des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks.



Lösungen zu: alpha-heiter

Sport frei!

Die Zahlen 1, 4 und 5 erfüllen die Bedingungen.

Begriff gesucht

Teiler, Ar, Münze, Tag, Sehne, Nenner, Tonne, Schenkel – *Tangente*

Kryptarithmetik

$$\bullet\bullet\bullet\bullet y \cdot xy = \bullet 1 \bullet 1$$

$$\bullet\bullet 1$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

$$\frac{abc}{11 \bullet}$$

$$\frac{1de}{11 \bullet}$$

$$\frac{fy}{11 \bullet}$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

- (1) Da keine weitere „1“ und der Divisor zweistellig $\rightarrow a = 2$.

Da die Differenz $f = x$ sogar einstellig $\rightarrow b = 0$ und $d = 9$

$$(2) \bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$11 \bullet$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

$$\frac{20 \bullet}{11 \bullet}$$

$$\frac{19 \bullet}{11 \bullet}$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

$$\frac{xy}{11 \bullet}$$

$$(3) \bullet\bullet\bullet y \cdot 9y = \bullet 1 \bullet 1$$

$$\bullet\bullet 1$$

$$3 \cdot 7 \text{ oder } 7 \cdot 3 \rightarrow \text{wegen } y > 5 \ y = 7;$$

$$(4) \bullet\bullet 27 \cdot 7 : 97 = 3121$$

$$291$$

$$117$$

$$97$$

$$20 \bullet$$

$$19 \bullet$$

$$97$$

$$97$$

$$97$$

Ergebnis: $302737 : 97 = 3121$

$$8 + 1 = 9$$

$$\cdot \cdot -$$

$$1 + 5 = 6$$

$$= = =$$

$$8 - 5 = 3$$

$$8 : 2 = 4$$

$$: : +$$

$$1 + 2 = 3$$

$$8 - 1 = 7$$

$$8 - 1 = 7$$

Rund um Pilze

$$0,9x - 15 = 0,6(x - 15)$$

$$x = 20$$

Bär und Hase brachten 20 kg frische Pilze mit nach Hause.

Heimatkunde

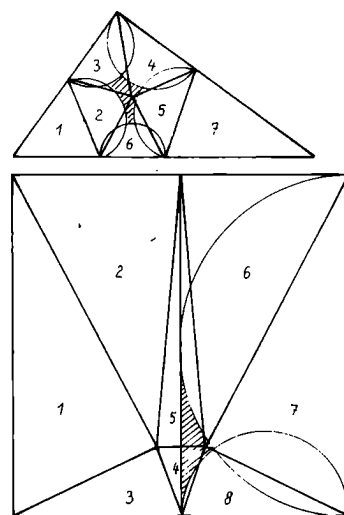
Berlin – Rostock – Erfurt – Dresden – Cottbus – Frankfurt/O. – Berlin oder umgekehrt (1192 km).

Victor Kubal, Prag



Kniffliges Zerlegungsproblem

Damit wirklich alle Teildreiecke spitzwinklig sind, müssen die inneren Zerlegungspunkte im jeweils schraffierten Gebiet liegen.



Lesen – denken – lösen

1. 4312; 2. 2354; 3. 6435; 4. 4675; 5. 8756; 6. 6798.

Silbenrätsel

1. Epsilon, 2. Raumdigonale, 3. Atomuhr, 4. Toto, 5. Objekt, 6. Sechseck, 7. Theta, 8. Haff, 9. Extremum, 10. Nagasaki; 11. Euler, 12. Stop – Eratosthenes – Primfaktoren

Fortsetzung von Seite 9

Für $z = 1$ erhält man durch ähnliche Schlüsse:

z	y	a	x	b
1	1	13	11	26
1	2	17	14	34
1	3	21	17	42
1	4	25	20	50

Die Tabelle enthält vier weitere Lösungen (von denen die letzte schon im Text angegeben war). Die Fallunterscheidung ist vollständig, damit haben wir alle Lösungen erhalten.

▲ 4 ▲ Man zerlege den gegebenen Würfel durch drei ebene Schnitte, die durch P, Q bzw. R gehen und paarweise senkrecht zueinander stehen, in acht gleich große Würfel. In einem so entstandenen Würfel sind P, Q, R und F Eckpunkte und somit PQ, QR und RP Flächendiagonalen. Flächendiagonalen eines Würfels sind aber von gleicher Länge, folglich gilt $PQ = QR = RP$. Das besagt aber gerade, daß das Dreieck PQR gleichseitig ist. Axel hat recht.

Lösung zu Schachstudie:

Intellektuelles Boxen, S. 12

1. Tb5+ K:d6 2. T:d5+ T:d5 3. Sc3 (interessant, daß der schwarze Turm kein geeignetes Fluchtfeld hat) 3. ... Sac4 4. S:d5, und Schwarz kann mit den verbleibenden zwei Springern nicht matt setzen.

alpha-Wettbewerb · Preisträger

Carla Müller, Friedeburg; Matthias Bauer, Gentin; Urte Conrad, Gielow; Kerstin Schneider, Goßwitz; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Grit Möckel, Grünbach; Petra Brandstädter, Güstrow; Günter Schielinsky, Roger Fischl, beide Halle-Neustadt; René Geipel, Hartha; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf; Jens Fiebig, Hohnstedt; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Marion Endrigkeit, Jessen; Ralph Gruber, Frank Hübner, Andreas Berner, alle Karl-Marx-Stadt; Andreas Kardos, Ralf Häntsch, beide Köthen; Joachim Braun, Koßdorf; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Petra Pluta, Lauchhammer; Gerald Pfützenreuter, Reiner Nolte, Steffi Begau, Meike Pfützenreuter, Jörg Drechsel, Dagmar Schunk, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Petra Sarodnick, beide Leipzig; Heike Nowara, Ingo Göll, Uwe Lautenschläger, alle Lössau; Birgit Arndt, Loitz; Matthias Neundorf, Carola Hönn, beide Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Dieter Seifert, Pinnau; Sigurd Assing, Karsten Milek, Axel Schulz, Thomas Schreckenbach, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausitz; Tim Planke, Premnitz; Lutz Hübschmann, Raschau; Ina und Manfred Hille, Uwe Mattutat, alle Riesa; Katrin Lippuner, Rheinsberg; Ines Dalisda, Ulrike Martin, Hans Nitschke, Klaus Vilbrandt, Anette Müller, Sylke Giese, alle Rostock; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladitz; Beate und Gabi Rein, Bernd Winkelmann, Mathias Brandt, Michael Gerth, alle Schmalkalden; Anke Krukenberg, Schönberg; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Klaus Pfeiffer, Taubach; Christine Mohr, Teterow; Lars Herrmann, Töplitz; Reiner Burkhardt, Voigtendorf; Birgit Schmidt, Weißwasser; Ralph Nemitz, Wittenförsen; Steffen Klimpel, Uwe Eix, beide Wolgast; Rolf Heubner, Wolfen; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl Oertel, Zeitz; Uwe Müller, Thorsten Eidner, beide Zeulenroda; Olaf Kretschmar, Gerald Sommer, Gabriele Schubert, Ingrid Soblik, Kerstin Hoffmann, alle Zittau; Ulrich Zeitmann, Zingst; Norbert Welzel, Birgit Schenke, beide Zschornowitz; Uta Escher, Zwickau

Für fünfjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Jens und Sven Fache, Altenburg; Olaf Köbernack, Babelsberg; Roland Hesse, Bad Blankenburg; Silke Schröder, Maïke Jorzyk, beide Bad Kleinen; Esther Goroncy, Bahrendorf; Silke Rechner, Baruth; Michael Krüger, Berlin; Heidrun Spurell, Bernau; Andreas Jock, Blankenfelde; Marlis Schröder, Thomas Streich, beide Brandenburg; Sylvia Burgemann, Britz; Corelia Kopte, Callenberg; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Christian Kunze, Karsten Mittag, alle Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Frank Sarodnick, Dallgow; Simone Marks, Mario Dette, Ruth Backhaus, Astrid Schunck, Hanna Baumgarten, alle Dingelstädt; Mario Jäpel, Dohna; Brigitte Rotter, Titus Ziegler, Cornelia Müller, Heike und Lutz Lauter, Maja Oelschlägel, Ute Schulze, Cathrin Engel, Rainer Schültke, Karsten Zosel, Grit Kammer, Stefan Franze, Christine und Werner Kirsch, André Pohlars, alle Dresden; Hardy Kutzscher, Dürrenhofe; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wolter, Eddertitz; Olaf Hein, Eisenach; Volkmar Kolleck, Eisenhüttenstadt; Astrid Kafka, Katrin Schröter, beide Eisleben; Elvira Stallbohm, Eldena; Anke Adolf, Feldberg; Antje Hollstein, Fred Mettke, beide Frankfurt; Birgit Voigtmann, Thomas Heidrich, beide Freiberg; Marion Meyer, Goldbeck; Torsten Knaust, Gossa; Sylvia Döring, Gotha; Frank Creutzburg, Gransee; Britta und Achmed Schulz, Greifswald; Jörn Wintsche, Steffen Lausch, beide Grimma; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Anke Misch, Michael Schulze, beide Halberstadt; Dany Linden-berg, Matthias Schünemann, Frank Siebert, alle

Halle; Cordelia Kripnner, Kerstin Frank, beide Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Frank Pampel, Heinrichsort; Sabine Trommler, Ingo Wickner, beide Hermannsdorf; Steffen Frigge, Herzberg; Axel Herbst, Hohendodeleben; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Anita und Felix Baitalow, Kasan (UdSSR); Birgit Sandhop, Kasnevit; Eske Röhrich, Ricarda Ramm, Andreas Niepel, alle Karl-Marx-Stadt; Bernd Schmutzler, Kirchberg; Christoph Hübel, Königsee; Ines Reichert, Königs Wusterhausen; Elke Willek, Kriebitzsch; Jens-Uwe Eigenwillig, Lauchhammer; Gabi Gold, Karola Pfützenreuter, beide Leinefelde; Uta Hubrig, Leipzig; Heiko Schinke, Stefan Hähnel, beide Leuna; Ralf Schmidt, Lössau; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Jenny Pelzer, Lübars; Sabine Gerlach, Lübs; Beate Krause, Menteroda; Jürgen Welz, Meyenburg; Michael Simang, Mittel-Herwigsdorf; Olaf Wender, Mühlhausen; Andrea Weber, Neukirch; Holger Alsguth, Neuseddin; Kerstin Paul, Nordhausen; Dietmar Hennig, Olbersdorf; Kerstin und Petra Köbke, Oranienburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Margit Möllhoff, Piesau; Gudrun Zirnstein, Steffen Gottschlich, beide Pirna; Manuela Krause, Plauen; Rainer Räthe, Torsten Kühn, beide Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Tobias Mahlow, Radebeul; Frank Berndt, Radeburg; Andreas Korb, Raschau; Kristian Lauritzen, Reichenberg; Silke Gubick, Röbel; Ines Gülden, Roitzsch; Bernd Schentschischin, Annegret Opitz, Gitta Schöne, Mathias Slosarek, alle Rostock; Evelin Neumann, Jürgen Schmalisch, beide Rotta; Claudia Lieske, Saalfeld; Karola Klitsch, Scharlibbe; Ronald Borsarski, Saßnitz; Holger Laube, Schlotheim; Birgit Nöbler, Bernd Winkelmann, Andre Wiegand, Sibylle Heuer, alle Schmalkalden; Sylke Lüder, Schönborn; Angela Böttcher, Liane Pappe, beide Schönfeld; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Thomas Bienek, Schwepnitz; Andreas Pripic, Thomas Vorn-dran, beide Sonneberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Ralf-Birger Häfner, Theresa Häfner, Corina Kaiser, Anke Sauerteig, Sabine Dziatzko, Doreen Wahl, Ramona Holland-Nell, Stefan Kürth, Elfi Recknagel, Ines Nothnagel, Sabine Marr, Frank Pfannschmidt, Petra Preiß, Uwe Holland-Nell, Frank König, Gabriele Knebel, alle Steinbach-Hallenberg; Ramona Löser, Stendal; Stephan Meyerhöfer, Strassburg; Sabine Scheller, Teltow; Doris Grüner, Thierbach; Heiko van Schyndel, Trebsen; Silke Raßmann, Annette Stephan, beide Unterbreizbach; Birgit Lorenz, Meike Dallüge, beide Waren; Jens Köhler, Weida; Hartmut Boettcher, Weimar; Beate Hentschke, Ines Hoffmann, Sylvia Feige, alle Weißwasser; Marita Kalisch, Wismar; Steffen Thiele, Steffen Noack, beide Wittenberg; Petra Zander, Marion Reek, Kerstin Häntschke, alle Wittstock; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Henry Jahn, Zittau; Jörg Steinbach, Zwickau; Markus Kostrzewa, Bad Liebenstein; Birgit Nöbler, Bernd Winkelmann, André Wiegand, alle Schmalkalden

Für vierjährige Teilnahme

Arndt Löber, Ahrenshoop; Frank Schönherr, Anklam; Heike Dittmar, Beate Zimmer, Angelika Heilgeist, Simone Jung, Kathrin Arndt, Heike Himmel, Sabine Weisheit, Wolfgang Klee, Mario Martin, alle Asbach; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckardt, Manuela Wings, beide Bad Liebenstein; Kerstin Kantiem, Berit Kleinbauer, Karin Leonhardt, Karin Gröber, Holger Neye, Andris Möller, René Damm, Thomas Strobel, Udo Bellack, alle Berlin; Elvira Hundeshagen, Berlingero-de; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Kai Fischer, Bitterfeld; Micaela Ewert, Boizenburg; Kerstin Westphal, Heike Fischer, beide Borna; Susanne Kraska, Jenz Przbylla, Mathias Tauscher, alle Breitenworbis; Annegret Richter, Andrea Fischer, beide Burkau; Heike Köhler, Callenberg; Peter Strempel, Daniela Syrbe, Andreas Heinze, Karsten Kehler, Christian Har-nath, Uta Bolz, alle Cottbus; Stefan Klinzing,

Creutzburg; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ulf Fache, Culitzsch; Holger Schmidt, Demmin; Wolfgang Tenor, Katrin und Dieter Horn, alle Dessau; Heike Rosenthal, Thomas Strecker, Monika Ifland, Sabine Wetzell, Heike Arnold, Beate Meinhardt, alle Dingelstädt; Olaf Jenker, Dorfchemnitz; Jens Danzer, Ines Lauter, Horst Seidel, Heinz Moll, Christoph Metzner, Pedro Thiele, Heiko Ringel, Christian Donath, Astrid Roll, Susann Piry, Kerstin Urban, Gerald Eichler, alle Dresden; Annette Wöhner, Eilenburg; Claudia Pleyer, Peter Kallenbach, beide Eisenach; Enrico Dietrich, Stefan Nitzsche, beide Elsterwerda; Lars Mönch, Kerstin Heer, beide Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Cornelia Kreher, Heidi Kahleyß, beide Floh; Annett Helbig, Frankfurt; Karsten Thon, Freyburg; Mathias Gerlach, Friedeburg; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Kathrin Köhler, Gossa; Holger Stoffel, Grabow; Christian Röhl, Gräfenhainichen; Ines Schicker, Greiz; Ingolf Hintzsche, Gremmin; Thomas Wedekind, Grimma; Bianca Potthoff, Groß Wüstenfelde; Kerstin Vinke, Gr. Zarnenwanz; Gunnar Müller, Güstrow; Thomas Koch, Halle; Annett Eichner, Andreas Löffler, beide Halle-Neustadt; Jens Strobel, Hammerbrücke; Bernd Müller, Heyerode; Thomas Ben-usch, Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Gabi Missal, Insel; Susanne Valentini, Detlef Ritter, beide Jena; Kai-Uwe Scherer, Jessen; Steffen Herpich, Ralph Guckisch, beide Kamsdorf; Andreas Paukert, Karbow; Hendrik Pönisch, Tanja Mittag, Katrin Richter, alle Karl-Marx-Stadt; Silvia Kriesche, Klaus; Axel Dübner, Klausdorf; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Thomas Senger, Klosterfelde; Kerstin Vogel, Kmehlen; Sonnfried Lättsch, Edith Löffler, beide Königshain; Karsten Rieger, Ingolf Raabe, beide Langengrassau; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Uta Mersiowsky, Sabine Mersiowsky, beide Langewiesen; Matthias Heller, Lauscha; Solveig Woitek, Sabine Hartung, beide Leinefelde; Max Pohl, Vera Wilhelm, Torsten Lill, Petra Polster, Andreas Eisler, Jan Klemm, alle Leipzig; Elke Hoffmann, Leisnig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Mathias Springwald, Löderburg; Andre Kerl, Lössau; Jörg Ladendorf, Lüththeen; Angela Zschörper, Maltitz; Gerd Eckstein, Mehltheuer; Norbert Fuchs, Meiningen; Steffen Hirn, Mellenbach-G.; Ute Krampitz, Bettina Heß, beide Mengersgereuth-H.; Hagen Haberland, Meschekenhagen; André Wiegand, Mittelschmalkalden; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Jörg Fiebig, Mülsen; Michael Münzer, Michael Glockenstein, beide Neubrandenburg; Uwe Knispel, Neuburxdorf; André Ewert, Neuhaus; Eva Hartmann, Neustadt; Dieter Beyer, Neustrelitz; Heike Engelhardt, Niedersachsenwerfen; Volker Frank, Petra Hahn, beide Nordhausen; Timo Kaiser, Niederschmalkalden; Andy Marr, Oberschöna; Olaf Winkler, Oschatz; Birgit Seifert, Pinnau; Jörg Stark, Plauen; Iris Bernhardt, Podelwitz; Steffen Hoffmann, Potsdam-B.; Friedemann Domke, Premnitz; Annett Schmidt, Rackwitz; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Ralf Launhardt, Rathenow; Sabine Ehrlich, Rechlin; Ute Zahn, Reichenbach; Katrin Dorendorf, Riesa; Andreas Puls, Röbel; Gunter Siebenhaar, Roßdorf; Ralf Heidenreich, Roßleben; Grit Maciejewski, Lutz Andrews, beide Rostock; Bodo Bricks, Sabine Pfeffer, beide Saalfeld; Rolf Richter, Schkölen; Annett Spalteholz, Schladitz; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Sabine Schüler, Schöna; Petra Joschenak, Schwaz (Österreich); Heiko Schulz, Schwedt; Michael Goletzka, Senftenberg; Frank Zöllner, Sabine Rahner, beide Sondershausen; Birgit Götz, Sonneberg; Peter Lehmann, Rainer Schwäblein, Kay-Uwe Weber, André Seling, Ralf Hoffmann, Silke Fischer, Sabine Recknagel, Heike Nothnagel, Stefan Menz, alle Steinbach-Hallenberg; Christian Wiegand, Steinheid; Cordula Gottwald, Stendal; Anke und Erhard Zilinske, Stralsund; Nicole Gößner, Syrau

alpha-Wettbewerb Preisträger

Fortsetzung aus Heft 6/81

Steffen Scharnowski, Möser; Volker Sachse, Mülsen; Claudia Nosek, Packisch; Michael Taeschner, Parchim; Diana Schlüter, Parchim; Steffen Scheithauer, Parley; Claudia Tiersch, Heiko Kühn, beide Potsdam; Ines Schmidt, Reuth; Dirk Röske, Riesa; Antje Pöhlmann, Röppisch; Michael Gräber, Annette Kersten, Heiner Ruser, Anne Ruser, alle Rostock; Katja Klotzsch, Rotta; Knut Marzisch, Rudolstadt; Annette Polt, Saalfeld; Jörg Fuchs, Schkölen; Sabine Schweigien, Anja Bohne, beide Schönhäusen; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Matthew Harrison, Barbara Ploner, Andrea Schiedlbauer, Anke Donau, alle Schwaz (Österreich); Kerstin Klement, Schwerin; Mike Selig, Stauchitz; Beate Neuber, Steinbach-Hallenberg; Frank Leißring, Tauche; Wolfgang Vogel, Thalheim; Olaf Gleim, Trinkenbach; Silke Wings, Trusetal; Kati Pforr, Unterbreizbach; AG Junge Math., Vitzendorf; Thomas Vandahl, Völkershäusen; Edith Boettcher, Weimar; Lutz Grothe, Andreas Döring, beide Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Chris Törpe, Wilkau-Haßlau; Maren Zech, Zahna; Angelika Weyh, Zella-Mehlis; Andreas Burkhart, Zeulenroda; Christine Thomas, Zittau.

Vorbildliche Leistungen

Angela Heiser, Abbendorf; Jana Koschka, Bad Gottleuba; Marko Jorzyk, Bad Kleinen; Uwe Völker, Bad Salzungen; Marko Pohl, Matthias Röder, Karen Böhme, alle Berlin; Thomas Franke, Barbara Richter, beide Bernsbach; Karsten Kühne, Blankenfelde; Carsta Patzschke, Böhlitz; Katrin Schulz, Böhne; Bärbel Scholz, Borkow; Anett Sperling, Bräunrode; Jörg Nachilla, Cottbus; Silke Fröhlich, Culitzsch; Yvonne Wagner, Matthias Ludwig, Michael Ludwig, alle Dahme; Jutta Schwabe, Kathrin Wiehe, beide Diesdorf; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Michael Dietsch, Fambach; Anke Thiel, Farnroda; Michael Scheibe, Ferdinandsdorf; Wolfgang Krüger, Kai Mettke, beide Frankfurt; Annemarie Heidrich, Freiberg; Frank Schulze, Udo Schulte, beide Freienbessingen; Kersten Ehberg, Gebersdorf; Hanka Pruditsch, Geithain; Uwe Knaust, Gossa; Mario Kapp, Gräfenhainichen; Thomas Bahls, Greifswald; Ralf Kramer, Greiz; Kathrin Henker, Großritsch, Cordula Hesse, Halle; Karen Beume, Halle-Neustadt; Susan Meinel, Hammerbrücke; Maik Otto, Holzthaleben; Manuela Plunert, Kaltennordheim; Steffen Müller, Gesine Festag, beide Kamsdorf; Carla Umlauf, Udo Weiße, beide Karl-Marx-Stadt; Rolf Trautmann, Tobias Hoffmann, beide Leinefelde; Karl Heyde, Leipzig; Silke Blume, Liederstadt; Jörg Deichsel, Bettina Denecke, beide Löderburg; Frank Schmidt, Ludwigsfelde; Ute Korell, Lützen; Christian Eisele, Mölkau; Dirk Franke, Mülsen; Susanne Lind, Christoph Hachtmann, beide Neuhäus; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Ines Hartmann, Silke Stieber, beide Olbersdorf; Antje Reichel, Pirna; Peter Mattke, Plauen; Wolfgang Schneider, Radeberg; Sabine Lätsch, Röppisch; Oliver Eidam, Niels Hansen, Stephan Dittmann, Martin Wolf, alle Rostock; Bert Exner, Saalfeld; Katrin Mandel, Schlaitz; Anke Friedrich, Undine Link, Steffi Peterhänsel, Simone Peterhänsel, alle Schönbrunn; Jörg Gersonde, Schwerin; Steffen Jacob, Sondershausen; Uta Linz, Suhle; Petra Tiersch, Vacha; Lutz Müller, Weigsdorf; Claudia Genée, Wiederau; Susann Reichel, Wiesenburg; Ulrike Korb, Zoppoten; Alexandra Polenz, Schwerin.

Abzeichen in Gold

Für vierzehnjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Lutz Püf-feld, Hennigsdorf

Für dreizehnjährige Teilnahme

Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blossfeld, Halle

Für zwölfjährige Teilnahme

Ulrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald

Für elfjährige Teilnahme

Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Rainer Seifert, Kamenitz; Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Abmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Sondershausen

Für zehnjährige Teilnahme

Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Wolfgang Seeber, Gehren; Bengt Nölting, Greifswald; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornowitz (Rentner)

Für neunjährige Teilnahme

Volkmar Türke, Auerbach; Andrea Nießen, Cordula Becher, Andreas Gude, alle Berlin; Werner Jerock, Frank Regensburg, beide Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Claudia Endtricht, Görnitz; Wolfhart Umlauf, Freital; Armin Körner, Leipzig; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Thomas Richter, Neuhausen; Wilfried Röhner, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Armin Hoell, Ribnitz; Heinz-Olaf Müller, Heiko Müller, beide Schmalkalden; Bernadette Domaschke, Seifhennersdorf; Torsten Löwe, Schleiz; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Dirk Herrmann, Töplitz; Sylvia Kunze, Weißenfels; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick

Für achtjährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; Frank Maschke, Altenburg; Henri und Dieter Koch, Arnstadt; Peter Möller, Bad Doberan; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Katrin Kolliver, Berlin; Werner König, Berlingeroode; Jens Purand, Ellen Harnath, Andrea Dreyer, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Klaus Schlegel, Angela Jircik, Peter-Alexander Pöhler, Annett Körner, alle Dresden; Daina Semper, Eisenleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Bernd Dübe, Forst; Bernd Hartwig, Heike Brüggemann, Ute Ribbe, alle Friedeburg; Silvio Klose, Gera; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; Hubert Steinmeth, Gröningen; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Uwe Müller, Hohenstein-E.; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhlend, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Jens Rudolf, Leipzig; Ute Barbara Heuer, Leisnig; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Gabriele Otto, Meissen; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Rüdiger Düsing, Osterburg; Uwe Langer, Oybin; Ute Möllhoff, Piesau; Sigrud und Jens-Peter Planke, Premnitz; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Regina Bricks, Saalfeld; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Thomas Gerth, Henry Kriechling, Susanne Heuer, alle Schmalkalden; Torsten Jeschke, Schwarz-

Gabriele Herzog, alle Zittau; Ute Baumann, Zschöcken

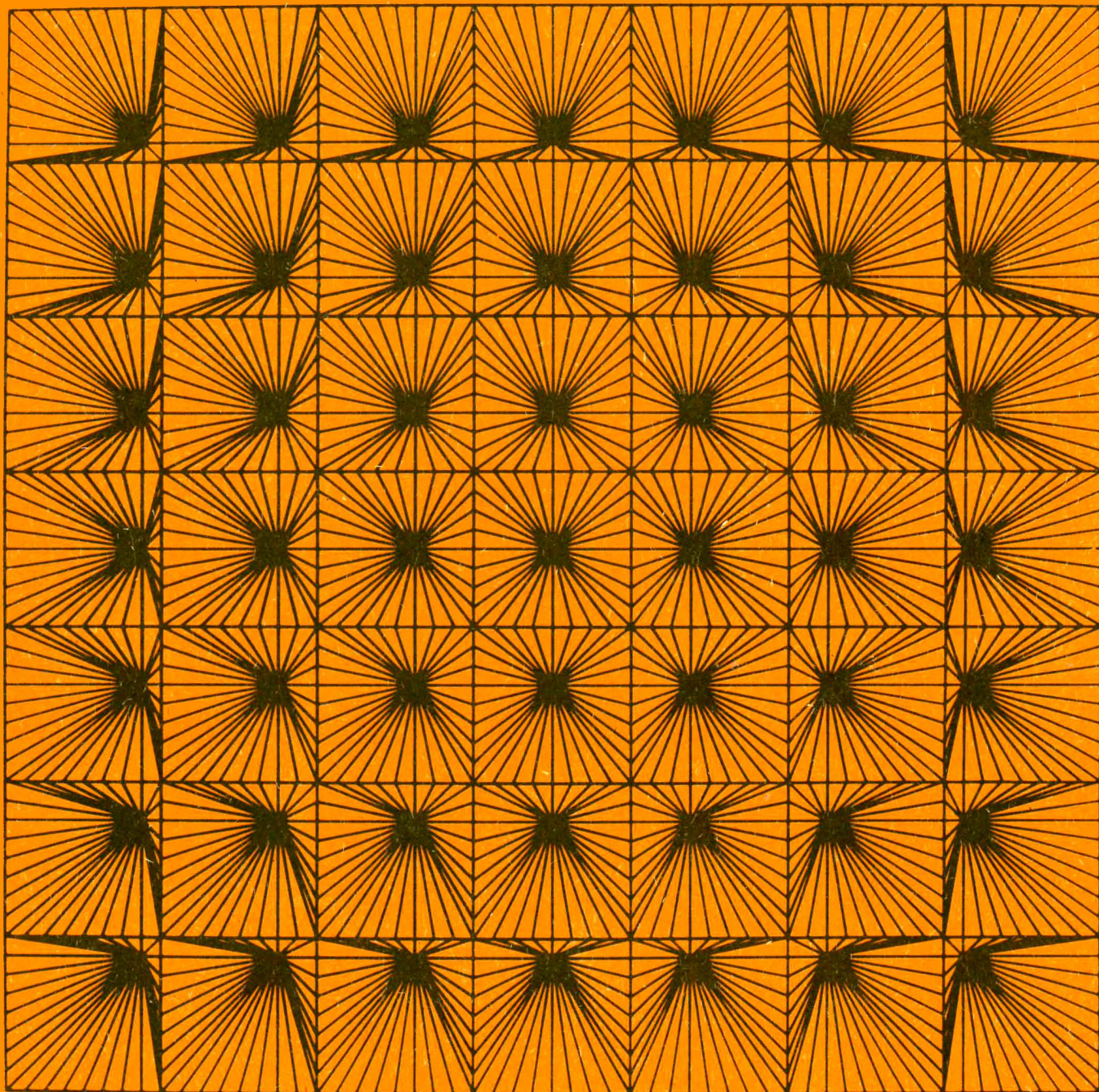
Für siebenjährige Teilnahme

Frank Kämpfer, Altenburg; Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Birgit Wolleschlager, Bergwitz; Stefan Berg, Frank Bendin, Claudia Ziehm, alle Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Ralph Voigtländer, Guido Mehne, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossebaude; Claudia Kerstan, Susanne Liebelt, Kathrin Magister, alle Cottbus; Harry Höfer, Dorndorf; Carolin Engel, Thomas Schindhelm, Lutz Jerock, Ingolf Körner, Karl-Heinz Jünger, Jürgen Gräfenstein, Jörn Wittig, Jens Rotsch, Uta Oelschläger, Susanne Müller, alle Dresden; Volker Georgy, Dirk-Thomas Orban, Henrik Seifert, Renate Lützkendorf, Thomas Mittelbach, alle Erfurt; AG Math. der Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Jörg Butter, Freiberg; Steffi Hauke, Ralf Baumbekel, beide Freital; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Frank Scheffler, Gnoien; Gunnar Boll, Ines Kath, Stefan Göckeritz, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Regine Binder, Mathias Berle, beide Halle-Neustadt; Volker Reck, Heiligenstadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Eike Harmel, Hohenferchesar; Mathias Grundmann, René und Chonchita Schüppel, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Fliegner, Jarmen; Birgit Hofmann, Andreas Hengst, Jens Pönisch, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Peter Witte, Königs Wusterhausen; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Birgit Schmidt, Monika Nolte, Astrid Markgraf, alle Leinefelde; Stephan Bönewitz, Heiko Rudolf, beide Leipzig; Thomas Eller, Meiningen; Tobias Lücke, Meissen; Heidrun Jänchen, Mohlsdorf; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Uwe Grasenack, Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Kerstin Feigl, Neundorf; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Kerstin Johannes, Oranienbaum, Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pinnau; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Claudia Würker, Reichenbach; Hartmut Lipke, Ribnitz; Astrid Wruck, Rostock; Ina und Uwe Ebert, Ruppertsdorf; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Elke Meißner, Sitzendorf; Bert Hoffmann, Söllichau; Roland Goldenbogen, Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhle; Heidrun Tiedt, Teterow; Margit Creutzburg, Thal; Annekatrin Heuer, Tietzkow; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Stefan Syring, Warin; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Karsten Schlutter, Wittstock; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Anett Schulzensohn, Zittau

Für sechsjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Kirsten Rechner, Baruth; Marc Schewe, Berlin; Henry Fischer, Bitterfeld; Tilman Völzke, Böhlen; Irene Palm, Brieselang; Uta Boldt, Burg Stargard; Royald Lenk, Christine Pompe, Stefan Jakubasch, alle Cottbus; Gabriele Sprotte, Döbeln; Manuela Schwenke, Dohna; Kathrin Wustmann, Ulf Riechen, Stefan Edelmann, Jörg Hempelt, Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, alle Dresden; Reinhard Weißnicht, Siegfried Obst, beide Eberswalde; Marlies und Petra Patz, Eisenach; Thomas Pigorsch, Eisenleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Karsten Meißner, Forst;

Mathematische
Schülerzeitschrift



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Hochschulbildstelle Potsdam (S. 26),
A. Herrmann, Berlin (S. 27); Zentralbild
(S. 30); aus: Infeld, *Wen die Götter lieben*,
Wien (S. 32); Haus der JP Rostock (S. 42);
Ondrej Zimka, Prag (S. 48)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelbild: Autor: H. Bartnig, gestaltet von
H. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 11. Dezember 1981



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 **Tangentialebenen an regelmäßige Polyeder [9]***
Dr. E. Quaisser, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam
- 27 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Kaiser [9]**
Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam
- 27 **Mathematik-Computergrafik-Informatik [8]**
Dipl.-Math. M. Fischer/Dr. M. Grabow, beide Berlin
- 30 **Spezialklasse für Mathematik, Physik und Technik an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt [8]**
Dipl.-Math. D. Zaddach, Leiter der Spezialklassen
- 31 **Geometrische Idee vom Strumpfband [7]**
Gespräch mit Prof. Dr. Schumann, Karl-Marx-Universität Leipzig
- 32 **Évariste Galois [7]**
Kurzbiographie und Zahlenrätsel von Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 33 **Touristische Attraktion [5]**
J. Lehmann/U. Passon, beide Leipzig
- 34 **Ungleichungen mit mehreren Variablen, deren Summe konstant ist [7]**
Dr. W. Gutenmacher, Moskau/Dr. C.-P. Helmholtz, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (aus Quant 9/79)
- 36 **Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb**
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie
- 38 **Für den Briefmarkenfreund: M. W. Keldysch [7]**
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 39 **Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]**
- 39 **XXII. Internationale Mathematik-Olympiade Aufgaben [10]**
- 40 **In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 42 **Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]**
Aus dem Haus der Jungen Pioniere Rostock berichtet
Oberlehrer R. Rösel, Fachlehrer für Mathematik/AG-Leiter im Haus der JP Rostock
- 43 **XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]**
4. Stufe (DDR-Olympiade), Aufgaben Klasse 10, 11/12, Lösungen Kl. 10
- 44 **Ungleichungen Teil II [8]**
- 45 **Lösungen [5]**
- III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb – Abzeichen in Gold [5]**
- IV. U.-Seite: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht · Speziell für Klasse 5/6 · Geometrische Plaudereien [5]**
Dr. L. Flade/Dr. H. Knopf, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Tangentialebenen an regelmäßige Polyeder

Bevor wir unsere Aufgabenstellung formulieren, möchten wir einige Begriffe und Sachverhalte bereitstellen.

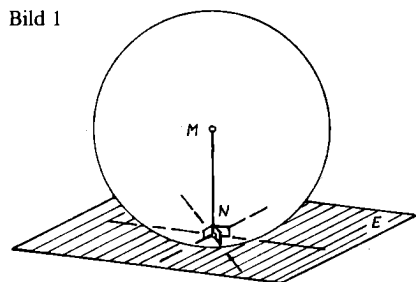
1. *Regelmäßige Polyeder* sind konvexe Körper mit kongruenten n -Ecken als Seitenflächen. Da die Summe der Größe der Innenwinkel derjenigen n -Ecke, die in einer Ecke des regelmäßigen Polyeders zusammenstoßen, kleiner als 360° sein muß, kann es nur die folgenden Arten regelmäßiger Polyeder geben:

n -Eck	Anzahl der Seitenflächen an einer Körperecke	e	f	k	Bezeichnung des Körpers
Gleichs. Dreieck	3	4	4	6	regelm. Tetraeder
gleichs. Dreieck	4	6	8	12	Oktaeder
gleichs. Dreieck	5	12	20	30	Ikosaeder
Quadrat	3	8	6	12	Hexaeder (Würfel)
regelm. Fünfeck	3	20	12	30	Pentagondodekaeder

In dieser Tabelle bedeuten e – Anzahl der Ecken, f – Anzahl der Seitenflächen und k – Anzahl der Kanten des Polyeders. (Nach der Eulerschen Polyederformel gilt $e + f = k + 2$.) Jeder dieser Körper besitzt eine Umkugel, d. h. eine Kugel, die durch seine Ecken geht. Außerdem haben sie eine Inkugel, d. h., es gibt eine Kugel, die alle Seitenflächen berührt. Diese Berührungspunkte sind aus Symmetriegründen die Mittelpunkte der n -Ecke.

Berührt eine Ebene ε eine Kugel (mit dem Mittelpunkt M) im Punkt N , dann ist die Verbindungsgerade MN senkrecht zu ε (kurz $MN \perp \varepsilon$; und dies heißt, daß jede Gerade in ε , die durch N geht, senkrecht zu MN ist – siehe Bild 1). Man nennt ε eine *Tangentialebene*.

Bild 1



In Analogie zu diesem Sachverhalt legen wir nun an ein regelmäßiges Polyeder mit dem Mittelpunkt M (d. i. der Mittelpunkt seiner Umkugel) jeweils durch den Mittelpunkt N einer Kante $\overline{AB}$ die Ebene ε , für die $MN \perp \varepsilon$. Da die Abstände $|AM|$ und $|BM|$ gleich sind, ist $MN \perp AB$, und damit liegt AB ganz in ε . Folglich liegt das regelmäßige Polyeder ganz auf einer Seite von ε .

Die Gesamtheit aller so festgelegten Tangentialebenen eines regelmäßigen Polyeders begrenzt ein konvexes Polyeder. Von Interesse ist nun, welche Polyeder auf diese Weise entstehen.

2. Wir beginnen mit dem *regelmäßigen Tetraeder*

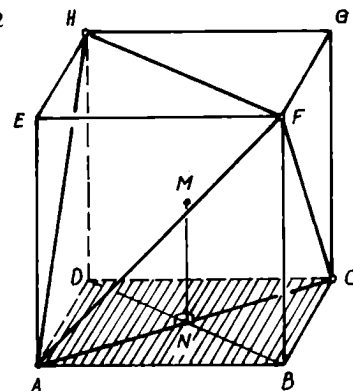
Der hohe Grad an Regelmäßigkeit läßt vermuten, daß ein regelmäßiges Polyeder entsteht. Da $k=6$ ist, müßte der entstehende Körper ein 6-Flächner sein. Diesen Bedingungen genügt nur der Würfel.

Geht man von irgendeinem Schrägbild eines regelmäßigen Tetraeders aus, so erscheint diese Vermutung auf den ersten Blick fragwürdig. Doch sie ist richtig und läßt sich recht einfach wie folgt beweisen.

Wir gehen von einem Würfel $ABCDEFGH$ mit dem Mittelpunkt M aus. Die Punkte A , C , F und H bilden ein regelmäßiges Tetraeder (Bild 2), denn seine Kanten sind Flächendiagonalen des Würfels und damit gleich lang. Der Mittelpunkt dieses Tetraeders fällt mit dem Mittelpunkt M des Würfels zusammen, da beide Körper die gleiche Umkugel besitzen. Die Fußpunkte der Lote von M auf die Seitenflächen des Würfels sind bekanntlich die Mittelpunkte der Seitenflächen. Damit

bilden die Seitenflächen des Würfels die Tangentialebenen des regelmäßigen Tetraeders $ACFH$ durch die Mitten seiner Kanten, d. h., bezüglich des *regelmäßigen Tetraeders* $ACFH$ bilden die betrachteten Tangentialebenen einen Würfel. Da alle regelmäßigen Tetraeder einander ähnlich sind, gilt diese Aussage auch für jeden dieser Körper.

Bild 2



3. Bilden die Tangentialebenen durch die Mitten der Kanten auch für die übrigen vier regelmäßigen Polyeder wieder Polyeder dieser Art?

Bei oberflächlicher Betrachtung der vielen Regelmäßigkeiten dieser Körper könnte man geneigt sein, eine positive Antwort zu erwarten. Doch bei Ikosaeder und Pentagondodekaeder müßte wegen $k=30$ ein 30-Flächner vorliegen; ein derartiges regelmäßiges Polyeder gibt es jedoch nicht.

Zur Klärung des Sachverhalts betrachten wir eingehend, wie die neuen Seitenflächen entstehen. Durch die Kanten eines regelmäßigen n -Ecks ($n=3, 4$ oder 5), das eine Seitenfläche eines regelmäßigen Polyeders ist, gehen n Tangentialebenen, die sich in einem Punkt S schneiden.

Denn auf Grund der gleichen Neigung dieser Ebenen bezüglich der betrachteten Seitenfläche entsteht eine gerade Pyramide (siehe Bild 3 für $n=4$ und Bild 4 für $n=3$).

Eine *Seitenfläche* des Körpers der aus den Tangentialebenen gebildet wird, setzt sich demnach aus zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zusammen, ist also *stets ein Rhombus* (siehe Bild 3 und 4).

Damit wird deutlich, wie oberflächlich eigentlich unser Hinweis auf die große Regelmäßigkeit der zugrundeliegenden Körper mitsamt ihren betrachteten Tangentialebenen und die damit ausgesprochenen Erwartungen waren. Eine erneute Bestätigung des Resultats für ein regelmäßiges Tetraeder ergibt jetzt der Nachweis, daß hier die Diagonalen des Rhombus gleich lang sind, d. h. bezüglich des Bildes 4, daß $|SN| = |A_1N|$ gilt. (Dabei ist N der Mittelpunkt der Kante A_1A_2 .) Da der Punkt S , der Mittelpunkt T des gleichseitigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ und die Ecke A_4 zusammen mit dem Mittelpunkt M des Tetraeders

Bild 3

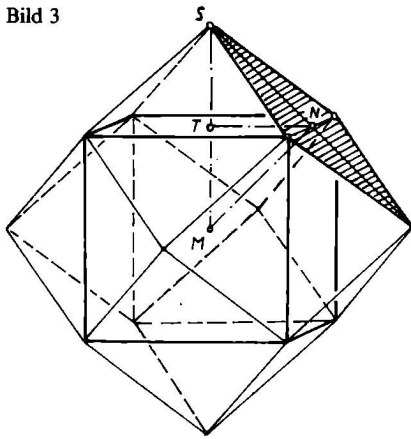
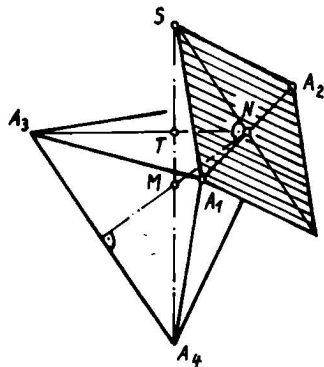


Bild 4



auf einer Geraden liegen und die Gerade A_3N durch T geht, liegen A_3 , A_4 , N , S und M in einer gemeinsamen Ebene. Außerdem ist $MN \perp A_3A_4$ und $MN \perp SN$, da die Ebene durch S , A_1 , A_2 nach Voraussetzung senkrecht zu MN ist.

Folglich gilt $A_3A_4 \parallel SN$. Ferner ist $|A_3T|:|TN| = 2:1$ (Teilverhältnis der Seitenhalbierenden!) und damit nach dem Strahlensatz schließlich $|SN| = \frac{1}{2}|A_3A_4| = \frac{1}{2}|A_1A_2|$,

was zu zeigen war.

4. Liegt ein Würfel unseren Betrachtungen zugrunde, so gilt $|ST| = |TM|$, da sich seine Seitenflächen rechtwinklig schneiden und demzufolge $\angle SNT = 45^\circ = \angle MNT$ gilt (Bild 3). Damit ist $|SN| = \sqrt{|ST|^2 + |TN|^2} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{2}|A_1A_2|\right)^2} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{2}|A_1A_2|\right)^2}$.

Hier liegen also echte Rhomben vor.

Beim Würfel bilden die betrachteten Tangentialebenen einen Körper, der von 12 kongruenten Rhomben begrenzt wird, wobei die Diagonalenlängen dieser Rhomben im Verhältnis $1:\sqrt{2}$ stehen. Ein derartiges Polyeder heißt *Rhombendodekaeder*.

Ein Schrägriß dieses Körpers läßt sich leicht zeichnen, wenn man vom Würfel ausgeht und $|ST| = |TM|$ für die Konstruktion der neuen Körperecken nutzt. [Beim Schrägriß empfehlen wir den Verzerrungswinkel $\alpha = 22,5^\circ$ sowie das Verzerrungsverhältnis $q = \frac{1}{4}$ für die Tiefenlinien (Bild 3)].

Diese Körperform kommt in der Natur als Kristallform vor; so kristallisiert der Halbedelstein *Granat* häufig in dieser Form. Die Körperform hat auch Verwendung in der Technik gefunden. Es zeigt sich, daß sie ein geeignetes Modell zum Zuschnitt des Materials bei der Herstellung hohlkugelförmiger Gegenstände wie Ballons, Flüssigkeitsbehälter ist.

5. Als nächstes wäre zu klären, welches Polyeder die betrachteten Tangentialebenen bei einem Oktaeder bilden. Hier verhilft uns eine Betrachtung rasch zum Ziel, die wir bezüglich des regelmäßigen Tetraeders unter 2. angestellt haben. Wir gehen vom *Rhombendodekaeder* aus, das aus dem Würfel entstanden ist (Bild 3), und betrachten jetzt die Diagonalen der Rhomben, die nicht Würfelkanten sind. Diese bilden ein Oktaeder (Bild 5). Es ist sofort einzusehen, daß die Seitenflächen des Rhombendodekaeders die Tangentialebenen durch die Kantenmitten dieses Oktaeders darstellen.

Bild 5

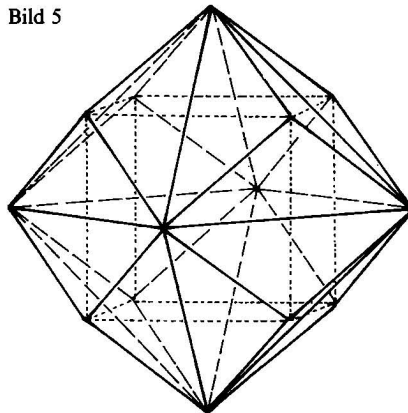
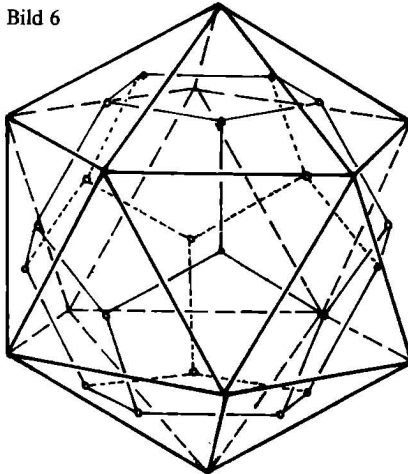


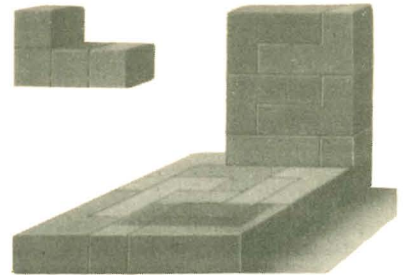
Bild 6



Beim *Ikosaeder* (Bild 6) entsteht wegen $k=30$ ein Polyeder, das von 30 kongruenten Rhomben begrenzt wird; auch hier ist genau eine Diagonale in jedem Rhombus eine Körperkante des Ikosaeders. Die anderen Diagonalen der Rhomben bilden ein *Pentagondodekaeder*. Also entsteht aus den Tangen-

Räumliche Geometrie

E. Quaisser · H.-J. Sprengel



VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

tialebenen durch die Kantenmitten eines Pentagondodekaeders ein gleiches Polyeder wie bezüglich des Ikosaeders.

Aufgaben

▲1▲ Um das Wievielfache vergrößert sich das Volumen, wenn man von einem regelmäßigen Polyeder zu dem Körper übergeht, der von den Tangentialebenen durch die Kantenmitten gebildet wird? Dieser Faktor ist gleich $|SM|:|TM|$. (Warum?)

▲2▲ Man kann bezüglich der regelmäßigen Polyeder Tangentialebenen durch die Polyederecken betrachten und wiederum nach den Körpern fragen, die dabei entstehen. Diese Aufgabe ist leicht zu beantworten, wenn man die Polyeder untersucht, die von den Mitten der Seitenflächen der regelmäßigen Polyeder gebildet werden. (Siehe dazu auch Bild 6 bezüglich des Ikosaeders.)

E. Quaisser

Prof. Dr. Hans Kaiser,
Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam



Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Kaiser

Pädagogische Hochschule
Karl Liebknecht, Potsdam

Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Kaiser wurde am 31. 5. 1926 in Nägelstedt/Thüringen geboren. Das Abitur legte er in Erfurt ab. Nach der Kriegsgefangenschaft studierte er Mathematik und Physik zunächst von 1946 bis 1948 in Jena, von 1948 bis 1951 in Berlin. Dabei wurde er besonders nachhaltig beeinflusst von Kurt Schröder, Erhard Schmidt und Karl Schröter. 1956 folgte die Promotion, 1967 schließlich habilitierte sich Prof. Kaiser mit einer Arbeit zur *Löwnerschen Differentialgleichung*.

Er war bis 1964 an der Humboldt-Universität in Berlin tätig. Seit dieser Zeit arbeitet er an der Pädagogischen Hochschule Karl Liebknecht Potsdam.

Prof. Kaiser ist in den Jahren seiner wissenschaftlichen Tätigkeit in außerordentlich vielfältiger Weise wirksam geworden. Lehrbücher zu angewandten Problemen, die Redaktion von übersetzter Literatur, Lehrmittel sowie Hochschulfilme sind Ausweis und Ergebnis seiner Arbeit.

Unter seiner Leitung hat sich der Wissenschaftsbereich *Angewandte Mathematik* profiliert. Sowohl Aufgaben der Lehre als auch der Forschung konnten mit beachtlichem Erfolg gelöst werden.

In der Lehrveranstaltung *Numerik* werden u. a. Regeln zur Ermittlung oberer Schranken für die Nullstellen eines Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ betrachtet.

Nach der Regel von *Lagrange und Maclaurin* erhält man z. B., daß $L=3$ eine obere Schranke für die Nullstellen des Polynoms $P(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 4$ ist.

Die Ermittlung einer solchen Schranke ist aber häufig auch ohne Kenntnis entsprechender Regeln möglich. Damit ergibt sich unsere Aufgabe.

Aufgabe

▲ 2207 ▲ Man beweise, daß für kein $x > 3$ die Gleichung

$$P(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 4 = 0$$

gelten kann.

Mathematik-Computergrafik- Informatik

Wissenschaft und Technik durchdringen in zunehmendem Maße eine immer größer werdende Anzahl von Bereichen der menschlichen Gesellschaft. Neben der Vergrößerung ihres Einflusses ist eine Eroberung neuer Gebiete zu beobachten. So erleben wir in der wissenschaftlich-technischen Revolution ein neu- und einzigartiges Wechselspiel zwischen der Ausweitung des Erkenntnis- und Wissensstandes der Grundlagenforschung einerseits und dessen immer schnellere und umfassendere Nutzbarmachung in einem immer komplexer werdenden Produktionsprozeß andererseits. Technische Wissenschaften und Technik schlechthin haben neuartige Kenntnisse und Fertigkeiten zutage gefördert, die Neuerungen in kurzer Frist massenwirksam werden lassen, welche im täglichen Leben vieler Menschen nicht mehr wegzudenken sind. Als Beispiel sei auf chemische Produkte und elektronische Geräte verwiesen, mit denen jeder täglich vielfach umgeht. Mathematische Strukturen und Denkweisen spielen dabei ebenso eine entscheidende Rolle wie in zunehmendem Maße Rechner aller Art mit den zu ihrer Nutzung erforderlichen Programmen.

So gesehen wundert es uns nicht, daß diese Entwicklung eine Entsprechung in der Kunst findet. Wir wollen uns mit diesem Artikel auf die darstellende Kunst beschränken und den Berliner Maler und Grafiker *Horst Bartnig* (siehe Bild 1) vorstellen. Er versucht in seinen Arbeiten Lageverhältnisse von Elementen

tarformen und mathematische Gesetzmäßigkeiten zuletzt als Computergrafiken ins Sinnlich-Wahrnehmbare zu übersetzen und so auf diese Weise das Zusammenspiel der Elemente und die Struktur von komplexeren Systemen erlebbar zu machen. Damit bietet er eine Möglichkeit an, die Wirkungsweise komplizierter Objekte und Geräte zu errahnen oder gar zu erkennen und sich daher nicht von ihnen wegen ihrer Undurchsichtigkeit oder des Unverständnisses ihres Aufbaus erdrücken zu lassen. Hingewiesen werden soll jedoch gesondert auf die Wirkungen, die er mathematischen Gebilden und rechentechnischen Realisierungen abgewinnt. Auch für unsere alltägliche Arbeit als Mathematiker und Programmierer wirken seine Grafiken anregend und belebend.

Nach einer ersten Begegnung im Jahre 1977 mit seinen Arbeiten auf einer Ausstellung des *Zentralen Akademie-Archivs* in Berlin über mathematische Formen in der Kunst entwickelte sich sehr bald eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Mathematikern unseres Institutes, die bei einer solchen Kunst-richtung unerläßlich erscheint, aber auch eine Bereicherung für beide Seiten darstellt. Es ist schon erstaunlich, wie selbst durch eine bewußte Darstellung mathematischer Figuren und Gesetzmäßigkeiten mit möglichst elementaren geometrischen Formen und in ebenso einfachen Lageverhältnissen eine derartige Vielfalt an optischen Wirkungen zu erzielen ist.

Für den Grafiker waren anfangs vor allem die Aussagen eines Mathematikers zu kombinatorischen Problemen von Interesse. Ihm ging es darum, aus der Vielzahl möglicher Kombinationen deckungsgleiche Elemente auszusondern. So wurden z. B. bei den „Tausendvierundvierzig Variationen“

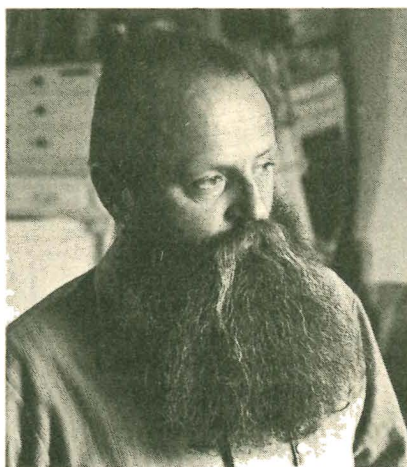


Bild 1

Horst Bartnig, Mitglied des Verbandes der Künstler der DDR, wurde 1938 in Militsch geboren. Nach einer Malerlehre besuchte er von 1954 bis 1957 die *Fachschule für angewandte Kunst* in Magdeburg. Bartnig beteiligte sich mit Arbeiten an der VIII. Kunstausstellung der DDR, an der Akademie-Ausstellung zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß und an der Einstein-Mappe

(Bild 2 und 3) alle diejenigen Sechzehner-Gruppierungen ausgesondert, die sich durch Drehungen in Deckung bringen ließen. Rechner-Programme und die Rechenanlage selbst halfen dabei entscheidend, Ordnung und Übersicht in die Vielzahl der Möglichkeiten zu bringen. Ein weiterer Schritt war die Einbeziehung eines Zufallszahlengenerators und die zufällige Erzeugung von Anordnungen. Schließlich wurde ein mit einem Grafik-Softwarepaket über den Rechner steuerbares Zeichengerät in die Zusammenarbeit einbezogen. Dabei folgte der Ideenskizze des Künstlers mit dem darzustellenden Bildungsgesetz die Erstellung eines Programms, das mit Hilfe eines schon in der Programm-bibliothek vorhandenen Softwarepaketes bei einem Rechnerlauf eine Folge von Steuersymbolen erzeugt, die auf einem Magnetband oder einem Lochstreifen zwischengespeichert werden. Dabei wurde auch eine Optimierung von Leerfahrten auf dem Zeichengerät bei der Programmierung berücksichtigt. Die Zeit, die der Zentralprozessor des Rechners für die Erstellung des Steuerstreifens für eine Zeichnung benötigt, beträgt für die Computerzeichnungen aller abgebildeten Grafiken 43 s. Für H. Bartnig stellt die Beobachtung der Entstehung des Bildes auf dem Zeichentisch ein ihn inspirierendes Erlebnis dar. Nach der Fertigstellung der Computerzeichnung überprüft er die Vorlage und nimmt danach die grafische Reproduktion vor.

Wie ordnen sich nun die Arbeiten von H. Bartnig im Umfeld der bildenden Künste ein? Dazu zitieren wir eine Darstellung von G. Ziller aus seinem Artikel *Prozeß als Kunstwerk* aus *Sächsische Neueste Nachrichten* vom 22. 9. 80:

„Die Arbeiten des Berliners Horst Bartnig stehen unverwechselbar in der Tradition des Konstruktivismus, der 1913 mit Kasimir Malewitschs ‚Schwarzem Quadrat‘ seinen kunstphilosophischen Urknall erlebte. ...

Durch Kriegswirren hindurch hielten einige Künstler dem Konstruktivismus und damit der Faszination rational-ästhetischer Flächen- und Raumordnungen die Treue. Genannt seien nur der nach Amerika emigrierte Bauhauslehrer *Josef Albers* und der Dresdner *Hermann Glöckner*.

Inzwischen hatte der in Frankreich lebende gebürtige Ungar *Victor Vasarely* (siehe Titelblatt Heft 1/82) die Grundlagen der auf Konstruktivismus basierenden Op-Art gelegt. ...

Aus dem Bewußtsein einer zunehmend rational komplexen Gesellschaft drang immer mehr Gedankengut exakter Grundlagenwissenschaft auch in die bildenden Künste ein. Plötzlich wurden innere Strukturanalysen optischer Wirkungen und umgekehrt die optischen Auswirkungen exakten mathematischen Denkens interessant. Von diesen Ufern stießen in den sechziger und siebziger Jahren neue Kräfte zu einem neuartig ver-

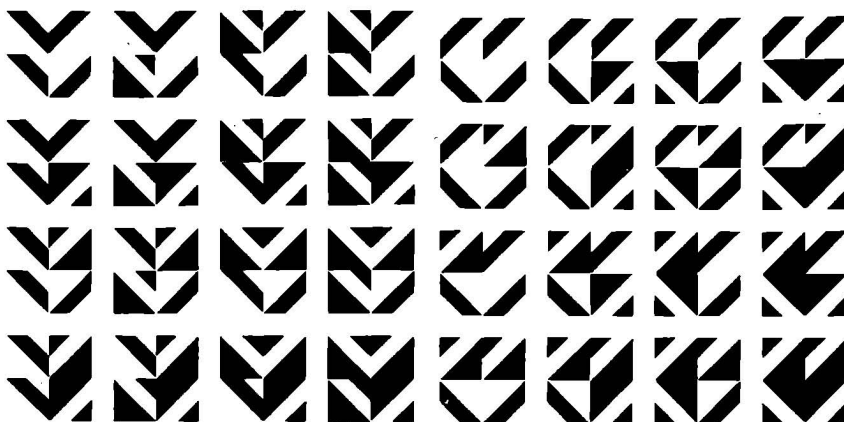


Bild 2
Tausendvierundvierzig Variationen,
70 Blätter, Linolschnitt, gelb auf weißem
Grund (1975 bis 1979). Unser Foto zeigt
davon Blatt 27.

„In Zusammenarbeit mit Physikern bzw. Mathematikern habe ich (H. Bartnig) von den vielen Variationen die herausgenommen, die sich in Drehungen wiederholen. Von 256 blieben 70 übrig. Auf jedem Blatt ist eine Variante von diesen 70 zu sehen, der Ablauf erfolgt von positiv bis negativ.“

Bild 3
Blatt 9 der 70 Blätter (siehe links)

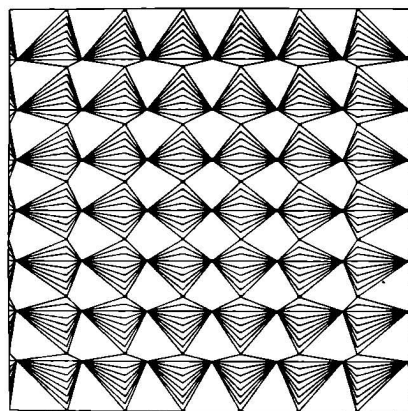
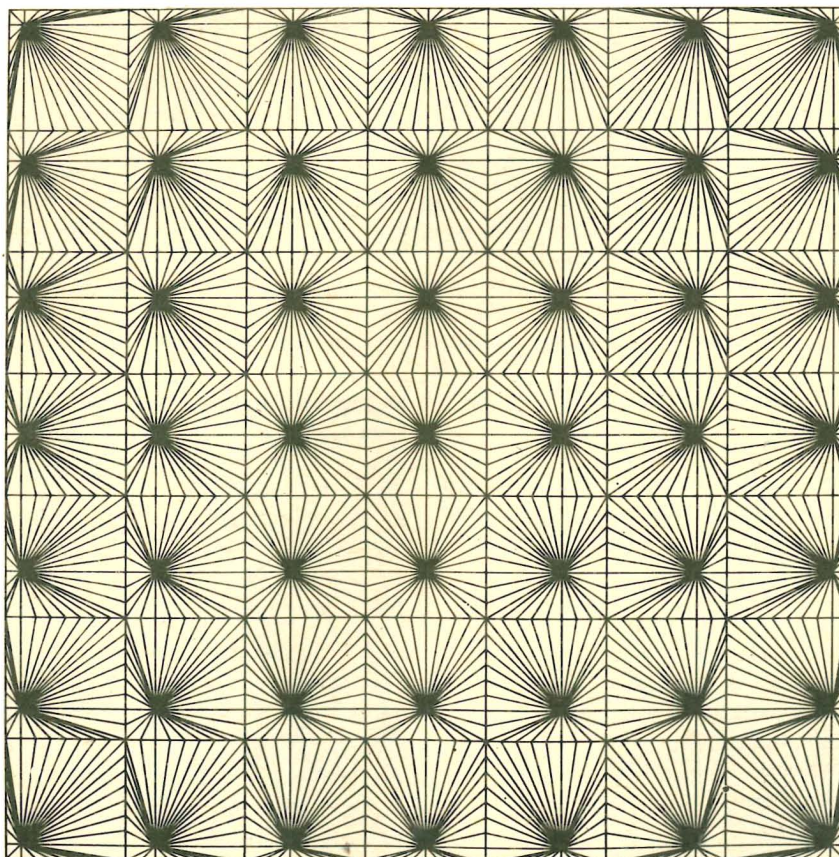


Bild 5
Computergrafik 1

Bild 4
Computergrafik 4



standenen Konstruktivismus. Flächen und Räume wurden immer ausgeklügelteren mathematischen Programmen unterzogen.“

Immer mehr Grafiker und Programmierer bedienen und bedienen sich jetzt digitaler Zeichengeräte und grafischer Displays.

H. Bartnig nutzt jedoch ganz bewußt nicht die heute zur Verfügung stehenden technischen Möglichkeiten der Rechentechnik ebensowenig wie die Vielfalt mathematischer Gesetzmäßigkeiten aus. Er beschränkt sich in mehrerer Hinsicht, um zu zeigen, wie vielfältig eine Kombination von Einfachem sein kann und wie ausdrucksstark. Alle abgebildeten Grafiken befassen sich z. B. mit dem Quadrat und seiner Auflösung entweder durch Dreiecke und Trapeze oder durch Linien von einem Knotenpunkt zu Randpunkten des Quadrates. Dabei werden die Grundquadrate wiederum in Quadrate zerlegt, z. B. bei den „Tausendvierundvierzig Variationen“ und bei den „Computergrafiken 5 und 6“ in 4 Teilquadrate. Letztere untergliedern sich bei allen 6 Computergrafiken erneut, und zwar in ein Netz von 64 Quadraten. Auf der anderen Seite werden die Grundquadrate auch wieder zu größeren Quadraten zusammengefaßt, einmal zu 16 und bei den zuletzt genannten zu 49 Elementen. Durch diese Zergliederung bzw. Zusammensetzung von Elementarformen kann H. Bartnig nun Gesetzmäßigkeiten optisch erlebbar machen. So werden bei einer Wanderung in einem Blatt der „Tausendvierundvierzig Variationen“ vom Ausgangselement in der linken oberen Ecke bis zum Zielelement unten rechts je nach dem Weg auf verschiedene Weise die Teilflächen entgegengesetzt eingefärbt.

Bei den „Computergrafiken 1 bis 6“ wandern dagegen die Zentren in ganz bestimmter Weise über die Knoten des genannten Netzes von Quadraten hinweg. Mit diesen Gesetzmäßigkeiten erreicht Bartnig einerseits Spannungen, andererseits aber auch Zusammenhang und Geschlossenheit und weckt Neugier und Interesse.

Uns beeindruckt immer wieder, wie der Grafiker es versteht, geometrische Figuren und rechentechnische Möglichkeiten nicht nur sichtbar, sondern erlebbar zu machen. Ihre Aussagen bereichern die Betrachtung gegenüber derjenigen mit „nur“ mathematischem Sachverstand. Horst Bartnig beschränkt sich bewußt auf ebene Darstellungen und elementare geometrische Formen sowie auf einfache Beziehungen und Verhältnisse. Diese Durchsichtigkeit seiner Grafiken und die trotzdem erzielte Wirkungsvielfalt regen zum eignen Gestalten an, zum Ausprobieren von optischen und ästhetischen Wirkungen des Zusammenspiels solcher Elementarformen und der Struktur ihrer Anordnungen. Sollten Leser dieser Zeitschrift in dieser Hinsicht aktiv werden, so wäre neben dem Bekannt-

werden mit einem Künstler ein noch höherer Zweck dieses Artikels erreicht worden. Wichtig für die Ausstrahlung der Bartnigschen Blätter ist ihre Anordnung in Serien. Durch sie gelangt das Zusammenspiel der Formen und Strukturen zu voller Entfaltung. Durch den Versuch, rational gedachte Zusammenhänge darzustellen und erlebbar zu machen, stellen seine Arbeiten eine Möglichkeit dar,

auch von der Seite der Mathematik, der Computergrafik und der Informatik her in einem schöpferischen Prozeß immer neue Seiten menschlicher Möglichkeiten zu erkennen und zu begreifen und sich in unserer realen und technisierten Welt besser zurechtzufinden.

M. Fischer/M. Grabow

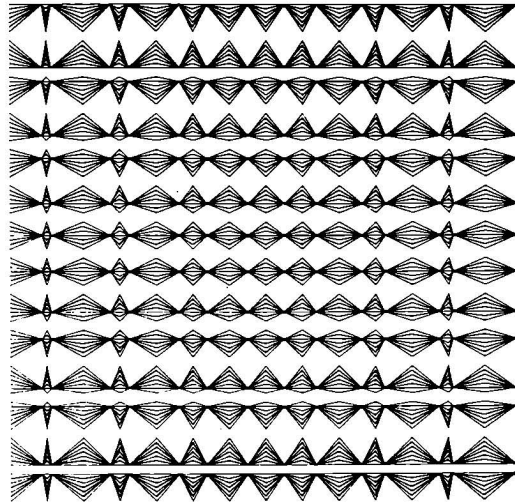


Bild 6
Original-Computerzeichnung
für Computergrafik 5
(nur waagerechte Strukturen)

Bild 7
Computergrafik 6

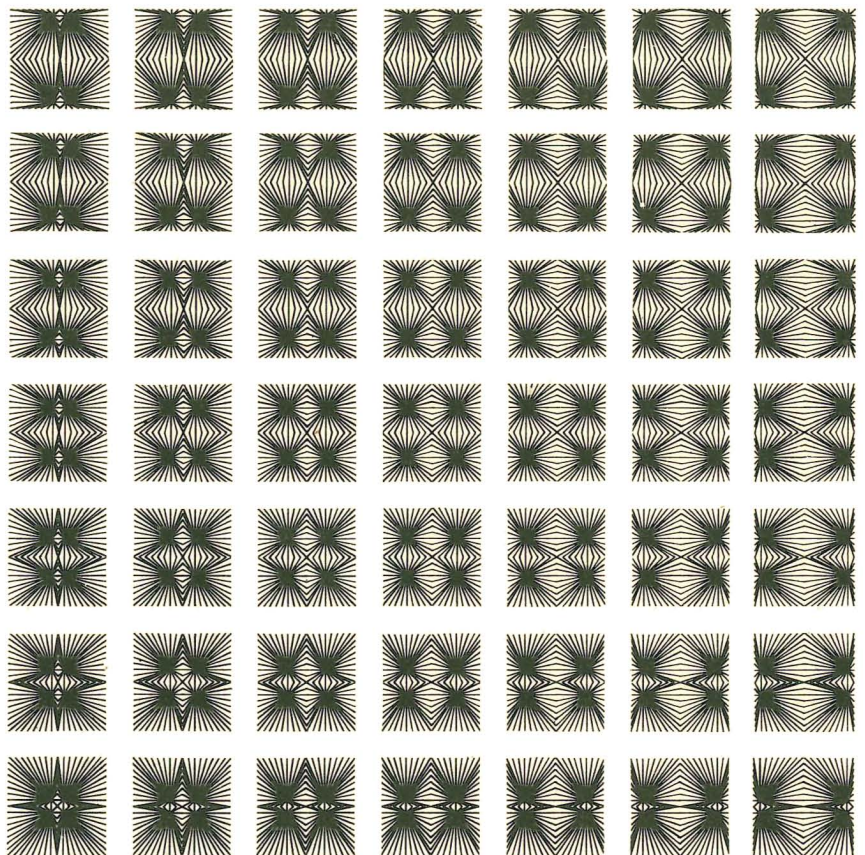


Bild 8
(Titelblatt dieser alpha)
Computergrafik 2
Es wurden Computergrafiken des Künstlers
verwendet, ausgeführt im Siebdruck bzw. als
Strichätzung

Spezialklasse für Mathematik, Physik und Technik der TH Karl-Marx-Stadt

Unsere Spezialklasse, die bereits 1964 gegründet wurde, ist eine der vier an den Sektionen für Mathematik der Universitäten und Hochschulen der DDR bestehenden Einrichtungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler. Sie dient somit zugleich der Entwicklung des eigenen wissenschaftlichen Nachwuchses in den mathematischen, physikalischen und technischen Fachdisziplinen.

In einer zweijährigen Ausbildung, die mit dem Erwerb des Abiturs abschließt, werden durch die Anwendung hochschulgemäßer Formen des Lehrens und Lernens die besten Voraussetzungen dafür geschaffen, daß unsere Absolventen im späteren Fachstudium sowohl in der gesellschaftlichen als auch fachlichen Arbeit hohe Maßstäbe setzen.

Die Bildungs- und Erziehungsziele der erweiterten Oberschule stellen auch für uns die Grundlage der Ausbildung in allen Fächern dar. So unterscheidet sich unser Stundenplan von dem der EOS lediglich darin, daß in Mathematik wöchentlich acht und in Physik vier Stunden unterrichtet werden.

Eine wichtige Voraussetzung für eine hohe Intensität des Unterrichts, der in der Regel von Hochschulangehörigen, d. h. wissenschaftlichen Mitarbeitern, Lehrern im Hochschuldienst, Oberassistenten oder Dozenten, erteilt wird, ist die niedrige Klassenfrequenz (15 Schüler pro Klasse).

Alle Spezialklassenschüler, die nicht aus Karl-Marx-Stadt kommen, wohnen mietfrei in schönen Zweimannzimmern des Studentenwohnheimes der Sektion Mathematik. Man hilft sich gegenseitig beim Lernen und Knobeln, treibt gemeinsam Sport und besucht kulturelle Einrichtungen der Stadt.

Nützlich ist diese Zusammenarbeit der Besten auch für die erfolgreiche Lösung der schwierigen Aufgaben aus den Korrespondenzkreisen oder Arbeitsgemeinschaften für Mathematik. Man spornt sich gegenseitig an, holt sich Rat (manchmal auch in der umfangreichen Sektionsbibliothek oder bei den unterrichtenden wissenschaftlichen Mitarbeitern) und entdeckt stets neue, ungelöste Probleme.

Der beliebteste Ausgleich zur anstrengenden Lernarbeit und zu den Verpflichtungen, die sich aus dem Arbeitsprogramm der FDJ-

Gruppe ergeben, ist bei uns seit Jahren – sowohl bei den Mädchen als auch Jungen – das Schachspiel.

Leider ist die Freizeit viel zu knapp, da wir unseren Spezialklassenschülern, die in der Regel aus den Bezirken Karl-Marx-Stadt, Dresden und Gera kommen, den Übergang vom gewohnten Zuhause zum studentischen Internatsleben erleichtern möchten, indem sie wöchentlich am Freitagnachmittag nach Hause fahren können. Das bedeutet aber, daß der gesamte obligatorische Unterricht, die Arbeitsgemeinschaften oder die FDJ-Versammlungen an fünf Tagen absolviert werden müssen.

Dennoch bewältigen unsere Schüler ihre Gesamtaufgaben gut und sind mit dieser Regelung, wie mit der Spezialklasse überhaupt, sehr zufrieden. Beinahe alle der bisher 250 Absolventen unserer Spezialklassen versichern uns, z. B. auch während der regelmäßig stattfindenden Wiedersehenstreffen einzelner Jahrgänge, daß der Spezialklassenbesuch ihre Persönlichkeitsentwicklung entscheidend beeinflusst hat.

Die Absolventen der ersten Jahrgänge sind heute bereits erfolgreiche Wissenschaftler oder Leiter, wie z. B. an unserer Sektion Dozent Dr. sc. nat. Georg Heinig oder Dr. Hans-Jürgen Fischer, ehemaliger IMO-Preisträger.

Jüngere Absolventen, wie z. B. Thomas Maiwald, mehrfacher Preisträger auf DDR-Olympiaden, oder Lutz Dietrich, der 1979 auf der IMO einen 2. Preis errang, sind als Beststudenten an ihren Bildungseinrichtungen bekannt.

Thomas Maiwald leitet erfolgreich einen studentischen Forschungszirkel an der Sektion Automatisierungstechnik.

Lutz Dietrich studiert, wie sein Klassenkamerad Ralf Fritzsche, in der Sowjetunion (Lutz Physik in Moskau und Ralf Mathematik in Leningrad).

Unsere gegenwärtig an der Spezialklasse studierenden erfolgreichsten Schüler sind Detlef Horbach (Klasse 12) und Bodo Heise (Klasse 11), die über den obligatorischen Unterricht hinausgehend innerhalb der Bestenförderung durch Wissenschaftler unserer Sektion besonders betreut werden.

Erwähnenswert ist auch, daß im Rahmen der

wissenschaftlich-praktischen Arbeit naturwissenschaftliche Praktika in Mathematik, Physik und Chemie durchgeführt werden, die auf hohem Niveau stehen und die technischen Möglichkeiten, die eine modern ausgestattete Hochschule bieten kann, ausnutzen. Zum Beispiel stehen im Mittelpunkt des mathematischen Praktikums eine Einführung in die Programmierung und die selbständige Realisierung der von den Schülern zu einem mathematischen Problem erarbeiteten Programme auf dem Kleinrechner.

Die Spezialklassen wirken darüber hinaus in enger Zusammenarbeit mit der EOS Dr. Theodor Neubauer in Karl-Marx-Stadt und der LPG Pflanzenproduktion in Großwaltersdorf, um die verbindlichen Lehrpläne für erweiterte Oberschulen in jeder Weise zu erfüllen.

Dabei beweisen die Spezialklassenschüler auch in der vormilitärischen Ausbildung und während der Produktionseinsätze, daß sie Ausgezeichnetes zu leisten imstande sind.

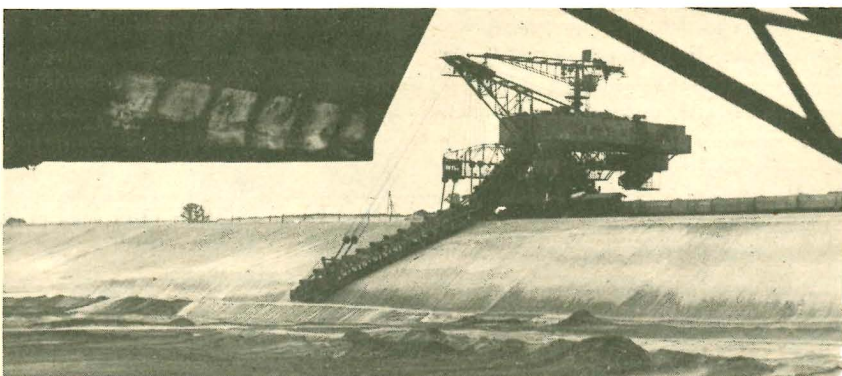
Für die Aufnahme in die Spezialklasse können sich Schüler der Klasse 10 bewerben. Jährlich werden zwei Klassen aufgenommen. Dabei werden solche Schüler ausgewählt, die sich durch sehr gute schulische Leistungen, besonders auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet, durch vorbildliche Verhaltensweise und durch gesellschaftliche Aktivität auszeichnen.

Günstige Voraussetzungen besitzen natürlich diejenigen Schüler, die seit Jahren erfolgreich an den Mathematikolympiaden oder den Messen der Meister von morgen oder anderen wissenschaftlich-technischen Leistungsvergleichen, nicht zuletzt aber auch am *alpha*-Wettbewerb teilgenommen haben.

Die Bewerbungen erfolgen in der Regel über die Schulen, sie können aber auch direkt an uns gerichtet werden. Im letzten Fall bemühen wir uns um die notwendige Zustimmung der Volksbildungsorgane.

Weiteres über die Spezialklasse, z. B. über die finanzielle Unterstützung der Schüler oder Besonderheiten bei der Förderung und Betreuung von ehemaligen Schülern, die ihren Ehrendienst bei der NVA leisten, können die Leser der *alpha* dem Informationsblatt entnehmen, das wir jedem Leser auf Wunsch gern zuschicken.

D. Zaddach



Geometrische Idee vom Strumpfband

Gespräch mit Prof. Dr. Horst Schumann,
Direktor der Sektion Mathematik der KMU Leipzig

Frage: In der Geschichte der Mathematik half nicht selten auch der Zufall dem blitzartigen Aufleuchten einer Idee nach, die zu einer neuen Hypothese oder Theorie weiterentwickelt wurde. Gibt es dafür unter den Leipziger Mathematikern Beispiele?

Prof. Schumann: Der Name eines von vielen profilierten Leipziger Mathematikern, August Ferdinand Möbius (1790 bis 1868) ist mit dem mathematischen Begriff „Möbiussches Band“ verknüpft. Möbius hatte seine Frau beim Nähen beobachtet, als sie ein Strumpfband aus Versehen verdreht zusammennähte. Dabei ist ihm die Idee für eine bedeutende Bereicherung der Geometrie gekommen. Er hatte das erste Beispiel einer sogenannten nicht orientierbaren Fläche vor sich. Das Band hat nur eine Seite, im Gegensatz zu der landläufigen Vorstellung, daß eine Fläche immer zwei Seiten haben muß (z. B. „obere“ und „untere“ Seite, mathematisch „positive“ und „negative“ Seite). Der mathematische Flächenbegriff wurde dadurch klarer erfassbar. Auch heute geschieht der Riemenantrieb bestimmter Maschinen in Form des Möbiusschen Bandes, was eine gleichmäßige Abnutzung des Riemens gewährleistet.

So wie Möbiussches Band zeugen auch andere Begriffe – wie *Mollweidsche Formeln* oder *Höldersche Ungleichung* – von bleibenden mathematischen Erkenntnissen, mit denen Leipziger Gelehrte weltweite Wirksamkeit erlangten.

Frage: Welche Rolle spielt heute der Zufall bei der Ausarbeitung einer neuen Theorie?

Prof. Schumann: Sicher wird heute und auch in Zukunft manche neue Idee durch einen Zufall gewonnen, doch ist die Erfassung und Deutung in der Regel nur auf der Grundlage eines bereits vorhandenen ausgeprägten geistigen Potentials möglich. Heute dominiert in der Wissenschaft beim Suchen nach neuartigen theoretischen und experimentellen Lösungswegen das zielstrebige und hartnäckige Vordringen in unbekannte Erkenntnisbereiche, wobei der Drang, ein für die Gesellschaft nutzbares Resultat zu erzielen, eine ausschlaggebende Rolle spielt.

Frage: Auf welchen Gebieten hat sich die heutige Generation der Leipziger Mathematiker einen Namen gemacht?

Prof. Schumann: Die mathematische Forschung an der Leipziger Universität hat besonders auf dem Gebiet der Analysis große Traditionen. Daß diese fortgeführt wurden und besonders in den letzten 10 bis 15 Jahren viele stark beachtete Ergebnisse erzielt werden konnten, ist das wesentliche Verdienst der seit 1969 auf dem Gebiet der Analysis arbeitenden drei Forschungskollektive der Sektion. So entwickelte sich die Sektion Mathematik der KMU Leipzig zu einem der führenden Zentren der Analysis.

Frage: Wohl in keiner anderen Wissenschaft gibt es so unumstößliche Gesetze, Theorien wie in der Mathematik, die über Jahrhunderte ihre Richtigkeit beweisen. Wandlungen gab es hinsichtlich des gesellschaftlichen Auftrags in Forschung und Lehre. Was vermag die Sektion Mathematik heute, was den Mathematikern vergangener Zeiten noch nicht möglich war?

Prof. Schumann: Seit über 500 Jahren werden an der Leipziger Universität mathematische Vorlesungen gehalten, doch erst in den letzten 35 Jahren werden die Plätze in den Hörsälen

des *Mathematischen Instituts* auch von Studenten belegt, denen die Brechung des Bildungsprivilegs den Weg dahin ermöglichte. Heute kommen mehr als die Hälfte unserer Studenten aus Arbeiter- und Bauernfamilien. Erwähnenswert ist auch, daß Oberschüler bisweilen in die Hörsäle kommen, denn seit 1974 gibt es im Bezirk Leipzig eine *Mathematische Schülergesellschaft* (MSG, siehe *alpha* 3/81) mit mehr als 20 Zirkeln, in denen sich aller 14 Tage etwa 200 Schüler aus den Klassen 6 bis 12 treffen und unter Anleitung von Assistenten und Studenten der Sektion mit Begeisterung arbeiten. Wir beginnen also schon beizeiten, Talente zu fördern. Eines der herausragendsten Kennzeichen der Mathematik heute ist ihre gesellschaftliche Wirksamkeit, ihre zielgerichtete Anwendung in der Volkswirtschaft. Das betrifft sowohl die direkte Nutzung mathematischer Methoden und Ergebnisse in den verschiedensten Zweigen der Industrie, der Planung und Leitung als auch die verstärkte Zusammenarbeit mit Forschungsgruppen an naturwissenschaftlichen Sektionen. Wir erfüllen zur Zeit Forschungsverträge, die wir mit Kombinat der Braunkohle-, chemischen und metallurgischen Industrie abgeschlossen haben.

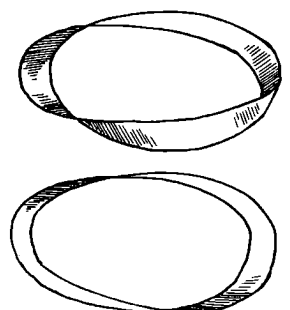
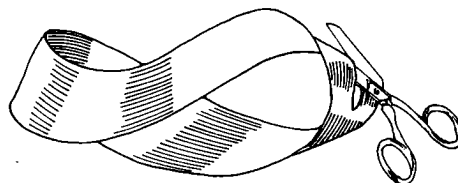
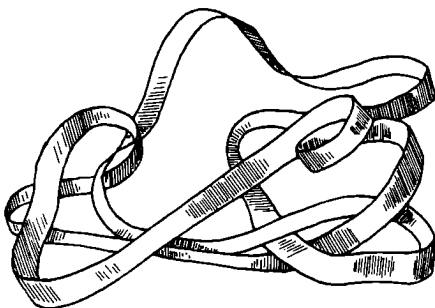
Frage: Was hat sich dabei besonders bewährt?

Prof. Schumann: Die Praxis stellt zunehmend komplizierte Aufgaben. Die Bildung einer Applikationsgruppe vor vier Jahren an unserer Sektion trägt dazu bei, unmittelbar solche Aufgaben zu lösen, die vom Vertragspartner an die Sektion herangetragen werden oder Forschungsergebnisse für die Anwendung aufzubereiten. So wurde z. B. für das Stahlwerk Unterwellenborn ein Vorhersagemodell für das Verhalten der Stahlschmelze entwickelt, das ermöglicht, Energiekosten und Nacharbeit einzusparen.

Nicht zuletzt haben diese Ergebnisse der Sektion Mathematik dazu beigetragen, den ersten Kongreß der Mathematiker der DDR an die Karl-Marx-Universität Leipzig zu vergeben.

Text zu dem Bild auf Seite 30:

Für die Förderriesen eines Tagebaus ist ein Böschungswinkel notwendig, der Standicherheit wie maximale Förderleistung garantiert. Die Leipziger Mathematiker fanden dafür eine optimale Variante.



Évariste Galois

nach der Erinnerung
gezeichnet von seinem Bruder Alfred Galois im Jahre 1848



Der französische Mathematiker *Évariste Galois*, der ein glühender Republikaner war, wurde im Alter von knapp 21 Jahren in einem von der reaktionären monarchistischen Polizei inszenierten Duell getötet. Die letzten Ergebnisse seines sehr kurzen, aber äußerst fruchtbaren mathematischen Schaffens legte er in einem Brief an seinen Freund Auguste Chevalier dar, den er in der Nacht vor seinem Tode schrieb (siehe Faksimile).

Galois gilt als Mitbegründer der modernen Algebra. Es gelang ihm, einen genauen und vollständigen Überblick über alle durch Radikale¹⁾ auflösbaren Gleichungen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ beliebigen Grades²⁾ zu geben, und zwar durch eine geniale Verbindung der von ihm geschaffenen Gruppentheorie³⁾ mit der Gleichungslehre. In dieser nach ihm benannten Galois-Theorie⁴⁾ wird jeder Gleichung eine Permutationsgruppe⁵⁾ zugeordnet, deren Struktur dann darüber Auskunft gibt, ob sich die Lösungen der Gleichung durch Radikale darstellen lassen oder nicht. So sind die algebraischen Gleichungen bis einschließlich zum 4. Grad stets durch Radikale auflösbar – denkt etwa an die Lösungsformel der quadratischen Gleichung oder an die Cardanische Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades –, während dies für Gleichungen höheren Grades allgemein nicht mehr der Fall ist.

Auf der Grundlage der Galois-Theorie ist die Algebra auch in der Lage, erschöpfend Auskunft darüber zu geben, ob eine geometrische Konstruktionsaufgabe nur mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Es konnte nachgewiesen

werden, daß die drei berühmten Probleme der klassischen griechischen Mathematik, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (Quadratur des Kreises), einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu zerlegen (Dreiteilung des Winkels) und die Kantenlänge eines Würfels zu bestimmen, der den doppelten Rauminhalt eines gegebenen Würfels hat (Verdopplung des Würfels), mit Zirkel und Lineal unlösbar sind.

Die Figur unseres Zahlenrätsels stellt – in richtigem Zusammenhang gesehen – eine auf der Galois-Theorie beruhende notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit einer geometrischen Konstruktionsaufgabe mit Zirkel und Lineal dar. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe ist genau dann mit Zirkel und Lineal lösbar, wenn bei irgendeiner (der Aufgabe angemessenen) Wahl des Koordinatensystems zu den Körpern K und Λ ein Körperturm $K = \Lambda_0 \subseteq \Lambda_1 \subseteq \dots \subseteq \Lambda_r = \Omega$ mit $\Lambda \subseteq \Omega$ existiert, bei dem jeder Teilschritt höchstens vom Grade 2 ist. $K = P(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$ als Grundkörper ergibt sich dabei aus dem Körper P der rationalen Zahlen durch Adjunktion der Koordinaten der bei der Konstruktion vorgegebenen Punkte $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$, und $\Lambda = K(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots)$ entsteht aus K durch Adjunktion der Koordinaten der bei der Konstruktion gesuchten Punkte $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$.

Auf weitere Begriffserklärungen sei hier verzichtet, denn ihr merkt sicher, liebe Freunde, daß das Verständnis und die Beherrschung

der Galois-Theorie ein tiefgehendes Studium der Mathematik, insbesondere der abstrakten Algebra, erfordern.

Derjenige von euch, der später einmal ein Mathematikstudium an einer unserer Universitäten oder Hochschulen aufnehmen will, wird sich dann gründlich mit der modernen Algebra beschäftigen können und auch die mathematisch exzellente Galois-Theorie begreifen lernen.

R. Mildner

R. Mildner

¹⁾Unter einem Radikal versteht man einen Ausdruck, der durch Ineinanderschachtelung von Wurzeln mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet wird, z. B. $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$.

²⁾Die Koeffizienten $a_i, i=0, 1, 2, \dots, n$, können dabei einem beliebigen Körper K entstammen. Dabei ist ein Körper – grob gesprochen – eine Menge von Elementen, die bezüglich zweier Operationen (etwa Addition und Multiplikation) und ihrer Umkehrungen (etwa Subtraktion und Division) abgeschlossen ist. Denkt dabei etwa an die Menge der rationalen, reellen oder komplexen Zahlen, die jeweils bezüglich der Addition und Multiplikation Körper bilden!

³⁾Eine Gruppe ist – grob gesprochen – eine Menge von Elementen, die bezüglich einer in ihr erklärten Operation (etwa Multiplikation) und deren Umkehrung (etwa Division) abgeschlossen ist. So bilden etwa die reellen Zahlen bezüglich der Addition eine (additive) Gruppe und (sofern man jetzt die 0 ausschließt) bezüglich der Multiplikation eine (multiplikative) Gruppe. Beides zusammen macht schließlich die Körpereigenschaft der reellen Zahlen aus.

4) Die Galois-Theorie befaßt sich über die Auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen hinaus mit gruppentheoretischen Strukturuntersuchungen von Körpern.

⁵⁾Gruppe, deren Elemente Permutationen von n Elementen sind, wobei die Gruppenoperation die Hintereinanderausführung von Permutationen ist.

Der Schlußteil des Briefes, den Galois in der Nacht vor dem Duell an Chevalier schrieb. Die Übersetzung lautet (siehe nebenan):

Lasse diesen Brief in der *Revue encyclopédique* abdrucken. Ich habe in meinem Leben oft gewagt, Behauptungen aufzustellen, deren ich nicht gewiß war; aber alles, was ich hier niedergeschrieben habe, ist seit fast einem Jahr in meinem Kopfe, und es liegt sehr in meinem Interesse, mich nicht dem Verdacht auszusetzen, daß ich Lehrsätze verkünde, für die ich nicht den vollständigen Beweis habe.

Richte an *Jacobi* oder *Gauß* die öffentliche Bitte, ihr Urteil abzugeben – nicht über die Wahrheit, sondern über die Wichtigkeit dieser Theoreme.

Dann werden sich hoffentlich Leute finden, die es für lohnend halten werden, diesen ganzen Wirrwarr zu entziffern.

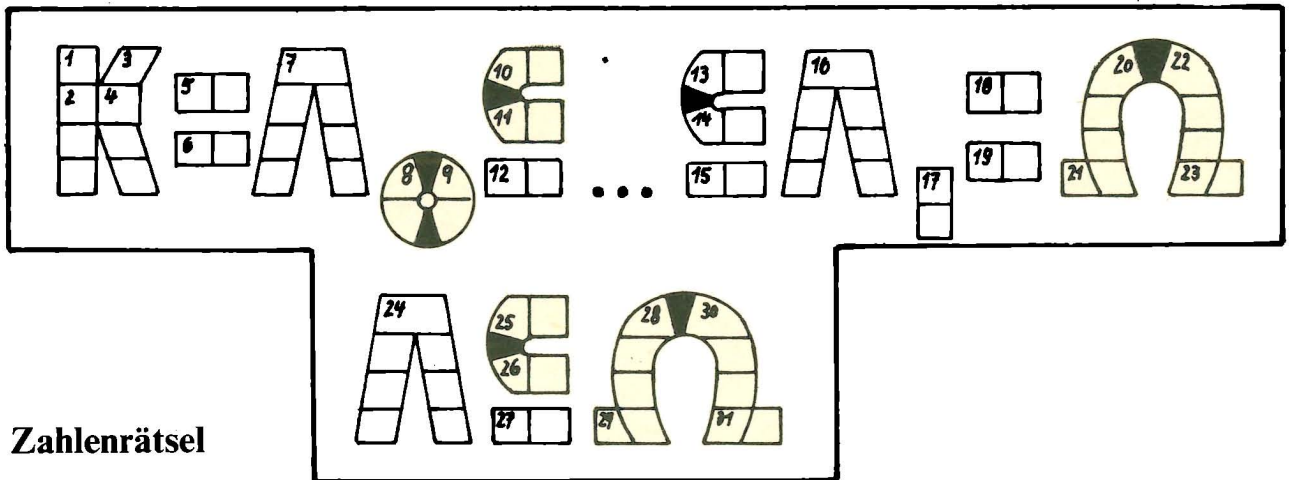
Je t'embrasse avec effusion. E. Galois.

On fera l'impression de cette lettre dans le recueil Evangelical Magazine.
 Le Lord Jervis nous a écrit hier soir à propos de ce projet. Vous sentez j'ai dit
 par tout. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis l'entret. un an ou deux au
 plus, et j'ai il est trop de nos intérêts de ne pas en parler pour qu'on
 ne suppose d'avoir l'usage de l'histoire que j'ai l'intention de la publier
 bientôt.

Le ~~comité~~ priera publiquement l'abbé Gauss de donner lui aussi
voix sur la note, mais sur l'importance de l'élection.

Après cela il se trouva, j'ignore, des gens qui trouvaient leur profit à déchiffrer tout ce gachis.

Je t'embrasse avec affection. P. BARRY. Le 29 Mai 1832.



Zahlenrätsel

Waagerecht:

2. dividiert man das Dreifache der gesuchten Zahl durch 2 und subtrahiert davon 60, so erhält man 15,
5. arithmetisches Mittel der Zahlen 12, 33, 35, 37, 39 und 60,
6. natürliche Zahl n mit $9^2 + n^2 = 15^2$,
10. Seitenlänge (in cm) eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$,
11. neuntes Glied der arithmetischen Folge (a_n) mit dem Anfangsglied $a_1 = -10$ und der Differenz $d = 5$,
12. Fermatsche Primzahl,
13. größte Lösung der Gleichung $x^4 - 148x^2 + 576 = 0$,
14. Anzahl der Permutationen von 4 verschiedenen Elementen,
15. Mersennesche Primzahl,
18. eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 13x + 22 = 0$,
19. größter gemeinsamer Teiler der Zahlen 210 und 126,
21. zweistellige Primzahl p , $p < 70$, bei der die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern 50 beträgt,
23. natürliche Zahl n mit $\binom{n}{3} = 286$,
25. Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen 8-Eck,
26. Anzahl der nichttrivialen natürlichen Teiler von 144,
27. Wert von $a = \sin \frac{\pi}{2} + \ln e^2 + \left[\log_{0,5} \left(\frac{1}{64} \right) \right]^2$,
29. Anstieg der Geraden $36x - 2y + 2 = 0$,
31. Lösung der Gleichung $\frac{x-2}{x-20} = \frac{x+1}{x-19}$,

Senkrecht:

1. kleinste gerade natürliche Zahl, die durch 13 und 97 teilbar ist,
8. Primzahl p mit $70 < p < 100$, deren Quotient eine gerade und durch 9 teilbare Zahl ist,
9. eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - 11x^2 + 8x + 20 = 0$,
17. Primzahl p mit $p \equiv 2 \pmod{57}$,
20. Wert der Funktion $y = f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$ an der Stelle $x = 6$,

22. eine vierte Wurzel aus der gesuchten Zahl ist 7,
28. siebentes Glied der geometrischen Folge (a_n) mit dem Anfangsglied $a_1 = 2$ und dem Quotienten $q = 3$,
30. kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 154 und 286,

Schräg links nach unten:

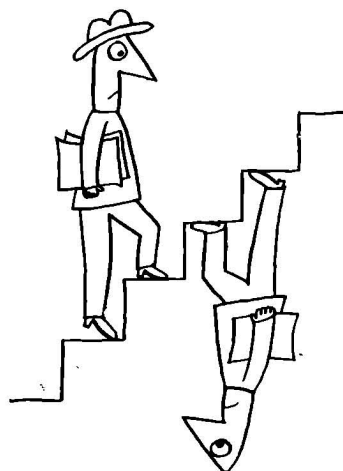
3. Basiszahl des Dezimalsystems,
7. Geburtsjahr des französischen Mathematikers Jean d'Alembert,
16. Geburtsjahr des genialen deutschen Mathematikers Carl Friedrich Gauß,
24. Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 130,

Schräg rechts nach unten:

4. ungerade Permutation der Ziffern 0, 1, 2,
7. Geburtsjahr des französischen Mathematikers Joseph-Louis Lagrange,
16. Geburtsjahr des norwegischen Mathematikers Niels Henrik Abel,
24. Zweierpotenz.

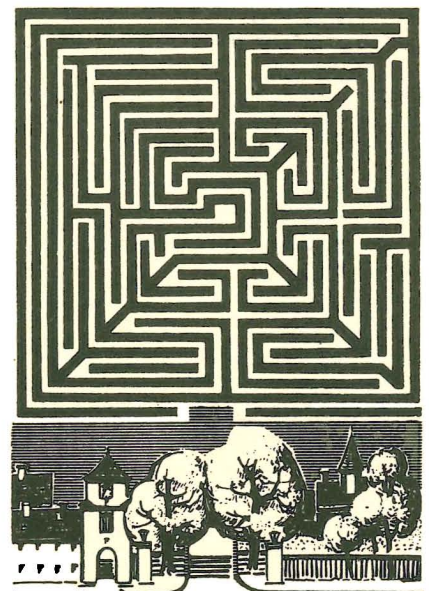
Bei richtiger Lösung ergeben die Ziffern der im folgenden angegebenen Kästchen die Lebensdaten des genialen französischen Mathematikers Évariste Galois:

1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 12–15, 16, 17, 21, 24, 27, 30



Touristische Attraktion

Dieser Irrgarten (Größe 0,25 ha) wurde im Jahre 1732 auf Veranlassung des Barons Nicolaus, Leopold von Ende durch einen französischen Gartenbaufachmann angelegt. Im Jahre 1945 ging der Park in die Hände des Rates der Gemeinde Altjeßnitz (Kreis Bitterfeld) über.



Interessanterweise weist der Irrgarten, mitten im Park gelegen, keine Sackgasse auf. Unter den ca. 2 m hohen Taxushecken befinden sich künstliche Bewässerungsanlagen, die auch bei trockener Witterung das Begießen der dicht geschlossenen Sträucherreihen erübrigen. Jährlich besuchen viele tausend Schaulustige das unter der Schirmherrschaft der Staatlichen Schlösser und Gärten Wörlitz stehende Naturdenkmal. Es gehört schon Geschick dazu, um in weniger als 10 Minuten die im Zentrum gelegene, erhöht angelegte, Plattform, von der man den Irrgarten überblicken kann, zu erreichen.

J. Lehmann/U. Passon

Ungleichungen mit mehreren Variablen, deren Summe konstant ist

Viele wichtige Aufgaben aus der Ökonomie und aus anderen Anwendungsgebieten der Mathematik führen auf das Lösen von Ungleichungen mit mehreren Variablen. Wir wollen uns in diesem Artikel anhand einfacher Aufgaben mit wichtigen Gedanken vertraut machen, die euch helfen werden, mit Ungleichungen sicher umzugehen.

Aufgaben über die Verteilung von Mehl auf drei Tüten

In den ersten Aufgaben geht es um Zahlen-tripel $[a; b; c]$, für die $a+b+c=1$ gilt. Im letzten Teil behandeln wir dann die zeichnerische Darstellung solcher Tripel in einer Ebene.

▲1▲ In drei Tüten befindet sich insgesamt 1 kg Mehl. Außerdem ist bekannt, daß die erste Tüte nicht mehr Mehl enthält als die zweite und die zweite nicht mehr als die dritte.

- Kann die dritte Tüte genau $\frac{2}{5}$ kg Mehl enthalten?
- Kann die dritte Tüte genau $\frac{1}{5}$ kg Mehl enthalten?
- Wieviel Mehl muß die dritte Tüte mindestens enthalten?
- Wieviel Mehl kann die dritte Tüte höchstens enthalten?

Lösung: a) Ja. Beispiel: Das Mehl sei wie folgt verteilt:

1. Tüte: $\frac{3}{10}$ kg, 2. Tüte: $\frac{3}{10}$ kg, 3. Tüte: $\frac{2}{5}$ kg.

Damit sind alle Bedingungen erfüllt: $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = 1$, in der ersten Tüte ist nicht mehr Mehl als in der zweiten ($\frac{3}{10} \leq \frac{3}{10}$), und in der zweiten Tüte ist nicht mehr Mehl als in der dritten ($\frac{3}{10} \leq \frac{2}{5}$).

b) Nein. Beweis: Wir nehmen an, daß sich in der dritten Tüte genau $\frac{1}{5}$ kg Mehl befindet. Dann enthält die zweite Tüte nicht mehr als $\frac{1}{5}$ kg und die erste Tüte auch nicht. In diesem Fall befinden sich aber in allen drei Tüten zusammen nicht mehr als $\frac{3}{5}$ kg Mehl, was der

Aufgabenstellung widerspricht. Folglich ist unsere Annahme ($\frac{1}{5}$ kg Mehl in der dritten Tüte) falsch.

c) In der dritten Tüte muß mindestens $\frac{1}{3}$ kg Mehl enthalten sein. Beweis: Wir zeigen zunächst, daß in der dritten Tüte nicht weniger als $\frac{1}{3}$ kg Mehl sein kann. Dazu nehmen wir das Gegenteil an: Es sei in der dritten Tüte weniger als $\frac{1}{3}$ kg Mehl enthalten. Dann befinden sich auch in der 2. und in der 1. Tüte weniger als $\frac{1}{3}$ kg. Das bedeutet aber, daß in allen drei Tüten zusammen weniger als 1 kg Mehl enthalten ist – im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Folglich befindet sich in der dritten Tüte nicht weniger als $\frac{1}{3}$ kg Mehl.

Nun zeigen wir, daß die dritte Tüte genau $\frac{1}{3}$ kg Mehl enthalten kann: Wenn man in jede der drei Tüten genau $\frac{1}{3}$ kg schüttet, dann ist dies insgesamt 1 kg. In der 1. Tüte befindet sich nicht mehr als in der zweiten und in dieser nicht mehr als in der dritten.

d) Die dritte Tüte kann höchstens 1 kg Mehl enthalten.

Beweis: Mehr als 1 kg kann es nach Aufgabenstellung nicht sein, aber 1 kg erhält man, wenn in der ersten und in der zweiten Tüte überhaupt kein Mehl ist.

Die folgenden zwei Aufgaben sind von genau demselben Typ wie die Aufgabe ▲1▲. Schreibt ihre Lösungen auf, indem ihr unsere Lösungen der Aufgabe ▲1▲ als Muster benutzt!

▲2▲ Es gelten dieselben Bedingungen wie in Aufgabe ▲1▲.

Beantworte folgende Fragen!

- Kann die zweite Tüte genau $\frac{2}{5}$ kg Mehl enthalten?
- Kann die zweite Tüte genau $\frac{3}{5}$ kg Mehl enthalten?

Beweise folgende Aussagen!

- Die zweite Tüte enthält höchstens $\frac{1}{2}$ kg Mehl.

d) In der zweiten Tüte können 0 kg Mehl enthalten sein.

▲3▲ Es gelten dieselben Bedingungen wie in Aufgabe 1.

Beantworte folgende Fragen!

- Kann die erste Tüte genau $\frac{13}{37}$ kg Mehl enthalten?
- Kann die erste Tüte genau $\frac{12}{37}$ kg Mehl enthalten?
- Wieviel Mehl befindet sich höchstens in der ersten Tüte?
- Wieviel Mehl befindet sich mindestens in der ersten Tüte?

Statt Mehl: Zahlen und Winkelgrößen

Wir wenden uns nochmals der Aufgabe ▲1▲ zu. Man kann sie auch anders formulieren:

▲4▲ Für Zahlen a, b, c ist bekannt: $a+b+c=1$ und $0 \leq a \leq b \leq c$.

- Kann $c = \frac{2}{5}$ sein?
- Kann $c = \frac{1}{5}$ sein?
- Finde den kleinstmöglichen Wert (das Minimum) von c !
- Finde den größtmöglichen Wert (das Maximum) von c !

Die Lösung der Aufgabe 4 kann man wie folgt aufschreiben:

a) c kann gleich $\frac{2}{5}$ sein. Zum Beispiel ist für $c = \frac{2}{5}, a = \frac{3}{10}, b = \frac{3}{10}, a+b+c = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = 1$ und $a \leq b \leq c$ ($\frac{3}{10} \leq \frac{3}{10} \leq \frac{2}{5}$).

b) $c = \frac{1}{5}$ ist nicht möglich: Wenn $c = \frac{1}{5}$, so ist $b \leq \frac{1}{5}, a \leq \frac{1}{5}$ und damit $a+b+c \leq \frac{3}{5} < 1$ – im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

c) Der kleinstmögliche Wert von c ist $\frac{1}{3}$.

Wir zeigen zunächst, daß $c \geq \frac{1}{3}$ gilt. Nehmen wir das Gegenteil an ($c < \frac{1}{3}$), so ist $b < \frac{1}{3}$ und

$a < \frac{1}{3}$ und somit $a+b+c < 1$, was unmöglich ist. Folglich ist $c \geq \frac{1}{3}$. Für $a=b=c=\frac{1}{3}$ sind alle Bedingungen erfüllt.

d) Der größtmögliche Wert von c ist 1.

▲5▲ Formuliere Aufgabe 2 in der Art von Aufgabe 4! Löse sie so, wie es für Aufgabe 4 dargestellt wurde!

Löst jetzt die folgenden Aufgaben, die den Aufgaben 4 und 5 ähnlich sind!

▲6▲ Für Zahlen a_1, a_2, a_3 gelte $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ und $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

- Bestimme das Maximum von $2a_1 + 3a_2$!
- Bestimme das Minimum von $2a_1 + 3a_2$!

- ▲7▲ a) Kann der größte Innenwinkel in einem Dreieck 50° betragen?
b) Kann der zweitgrößte Innenwinkel in einem Dreieck 88° betragen?
c) Kann der kleinste Innenwinkel in einem Dreieck 66° betragen?

▲8▲ Welches ist der kleinste Wert, den der größte Innenwinkel in einem Dreieck annehmen kann?

▲9▲ In drei Tüten befindet sich insgesamt 1 kg Mehl, wobei in der ersten Tüte halb so viel Mehl ist wie in der zweiten und in der zweiten nicht mehr als in der dritten. Wieviel Mehl kann sich in der zweiten Tüte höchstens befinden?

▲10▲ Fünf Geraden liegen 'so in einer Ebene, daß keine zwei von ihnen parallel sind.

Zeige, daß es unter diesen Geraden mindestens zwei gibt, deren Schnittwinkel nicht kleiner als 36° ist!

Hinweis: Wähle einen beliebigen Punkt in der Ebene, und zeichne durch ihn Parallelen zu den gegebenen Geraden!

▲11▲ Beweise, daß es in einem konvexen Fünfeck nicht mehr als drei spitze Innenwinkel geben kann!

▲12▲ Für Zahlen a, b, c, d gelte $a+b+c+d=4$ und $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

a) Zeige, daß $c \leq 2$ gilt!

b) Zeige, daß $\frac{8}{3}$ das Maximum von $b+c$ ist!

c) Bestimme das Minimum von $a+d$!

▲13▲ Für Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gelte $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$ und $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$.

a) Zeige, daß $a_3 \leq \frac{1}{3}$ gilt!

b) Bestimme das Maximum von $a_2+a_3+a_4$!

c) Bestimme das Minimum von a_1+a_5 !

Aufgaben über das gleichseitige Dreieck

▲14▲ Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Bestimme die Menge aller seiner inneren Punkte, die

a) von der Seite $\overline{AB}$ nicht weiter entfernt sind als von der Seite $\overline{BC}$;

b) von der Seite $\overline{BC}$ nicht weiter entfernt sind als von der Seite $\overline{AC}$;

c) gleichzeitig die Bedingungen a) und b) erfüllen!

Die Lösung zu Teilaufgabe a) ist durch die Schraffur in Bild 1a angegeben, die zu b) durch die Schraffur in Bild 1b usw. Die Auf-

Bild 1a

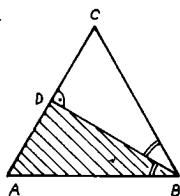


Bild 1b

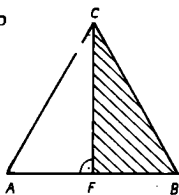
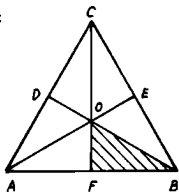


Bild 1c



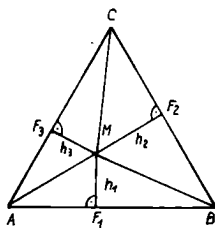
gabe 14c) hängt eng mit der Aufgabe 1 zusammen. Um dies zu verdeutlichen, lösen wir die folgende Aufgabe.

▲15▲ Beweise, daß die Summe der Abstände eines beliebigen inneren Punktes eines gleichseitigen Dreiecks ABC von den Seiten des Dreiecks gleich der Länge der Höhe h dieses Dreiecks ist!

Lösung: Von einem beliebigen inneren Punkt M des Dreiecks ABC fallen wir die Lote auf die Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$.

Die Fußpunkte dieser Lote bezeichnen wir mit F_1, F_2 bzw. F_3 und die Längen der Strecken $\overline{MF_1}, \overline{MF_2}$ bzw. $\overline{MF_3}$ mit h_1, h_2 bzw. h_3 (vgl. Bild 2). h_1, h_2 und h_3 sind dann die Abstände zu den einzelnen Seiten des Dreiecks ABC , und wir haben die Gültigkeit der Gleichung $h_1 + h_2 + h_3 = h$ zu zeigen.

Bild 2



Dazu verbinden wir M mit den Eckpunkten A, B und C des Dreiecks. Für die Flächeninhalte der so erhaltenen Teildreiecke gilt

$$A_{ABM} + A_{BCM} + A_{ACM} = A_{ABC}$$

bzw. (mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$)

$$\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2} = \frac{ah}{2},$$

woraus unmittelbar folgt

$$h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

Ergänzung zu Aufgabe 15: Die in dieser Aufgabe formulierte Behauptung gilt nicht nur für innere Punkte des Dreiecks, sondern auch für Punkte auf den Dreiecksseiten einschließlich der Eckpunkte. (Ein Punkt auf einer Dreiecksseite habe zu dieser Seite den Abstand Null.) Zeigt dies selbständig!

Es sei nun ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Höhe $h=1$ gegeben. Beim Lösen der Aufgabe 15 erkannten wir, daß jedem inneren Punkt des Dreiecks ABC drei Zahlen $h_1, h_2,$

h_3 entsprechen, deren Summe 1 ist. Denkt selbst über den Beweis der „umgekehrten“ Aussage nach: Wenn drei Zahlen h_1, h_2, h_3 gegeben sind, so daß gilt $h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, h_3 \geq 0, h_1 + h_2 + h_3 = 1$, dann kann man im Innern oder auf den Seiten des Dreiecks ABC einen Punkt M finden, dessen Abstand zu $\overline{AB}$ gleich h_1 zu $\overline{BC}$ gleich h_2 und zu $\overline{AC}$ gleich h_3 ist. Natürlich genügt es, für M die ersten beiden Bedingungen zu stellen, denn der Abstand von M zur dritten Dreiecksseite ist gemäß Aufgabe 15 gleich $1 - h_1 - h_2 = h_3$. Somit ist es uns gelungen, Tripel nichtnegativer Zahlen $[h_1; h_2; h_3]$ mit $h_1 + h_2 + h_3 = 1$ geometrisch darzustellen. Wir werden auch vom Punkt $[h_1; h_2; h_3]$ sprechen. Die Zahlen h_1, h_2, h_3 werden auch *baryzentrische Koordinaten* der Punkte eines gleichseitigen Dreiecks genannt.

Geometrische Veranschaulichung der ersten Aufgaben

Ab jetzt setzen wir voraus, daß die Höhe des jeweils auftretenden Dreiecks ABC gleich 1 ist.

Sehen wir uns noch einmal Bild 1c zur Aufgabe 14 an. Durch die Schraffur werden die Punkte $[h_1; h_2; h_3]$ hervorgehoben, für die $h_1 \leq h_2$ und $h_2 \leq h_3$ gilt. Auf vielen Fragen, die in den ersten Aufgaben gestellt worden sind, kann man mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten sehr leicht antworten. Nehmen wir beispielsweise Aufgabe 4:

Mit den veränderten Bezeichnungen $a=h_1, b=h_2, c=h_3$ müssen wir die Bedingungen der Aufgabe in der Form $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3, h_1 + h_2 + h_3 = 1$ schreiben.

Frage 4c) kann man jetzt so formulieren:

Welcher Punkt des Dreiecks BOF liegt der Seite $\overline{AC}$ am nächsten?

Frage 4d): Welcher Punkt des Dreiecks BOF ist von der Seite $\overline{AC}$ am weitesten entfernt?

▲16▲ Formuliere die Fragen c) und d) von Aufgabe 2 in der Sprache der Geometrie!

▲17▲ Bestimme im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC bzw. auf seinen Seiten Punkte $[h_1; h_2; h_3]$, für die gilt.

a) $h_1 = \frac{1}{4},$

b) $h_1 + h_2 = \frac{1}{2},$

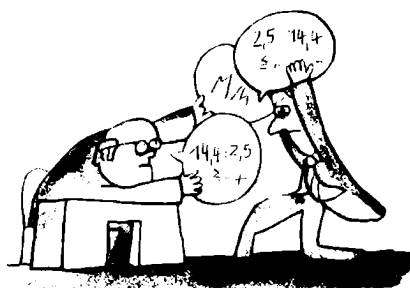
c) $h_1 + h_2 \leq \frac{3}{5}!$

Die geometrische Darstellung zeigt uns anschaulich, warum die Extremwerte der Variablen in den ersten Aufgaben dann erreicht werden, wenn bei den Ungleichungen die Gleichheit eintritt.

W. Gutenmacher/C. P. Helmholtz

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1982



Mathematik

Ma 5 ■ 2208 Andrea, Beate, Carola und Doris sind Freundinnen. Ihre Nachnamen lauten (in anderer Reihenfolge) Mayer, Schulz, Lehmann und Becker. Jedes dieser vier Mädchen gehört genau einer der Klassen 5a, 5b, 6a, 6b der gleichen Schule an.

Von ihnen ist folgendes bekannt:

a) Doris und das Mädchen mit dem Nachnamen Schulz sind Schülerinnen zweier Parallelklassen derselben Klassenstufe.

b) Andrea und das Mädchen mit dem Nachnamen Mayer sind Schülerinnen der Klassenstufe 5.

c) Doris und das Mädchen mit dem Nachnamen Mayer gehören den Klassen 5a oder 6a an.

d) Carola und das Mädchen mit dem Nachnamen Lehmann gehören den Klassen 5b oder 6b an.

Wie heißt jede dieser vier Freundinnen mit Vor- und Nachnamen?

Welcher Klasse gehört jede von ihnen an?

Schülerin Dörte Conert, Hosena

Ma 5 ■ 2209 Uwe kam mit dem Zeugnisheft nach Hause. Die Mutter fragte gespannt: „Nun, wieviel Einsen sind es diesmal?“ Uwe antwortete: „Zähle zur Zahl der Einsen vier hinzu, multipliziere danach mit 4, dann erhältst du 4 mehr als 44!“ Die Mutter hatte es gleich heraus. Schaffst du es auch?

Ma 5 ■ 2210 Es sind alle fünfstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die jeweils das Produkt aus der Zahl, die von den ersten beiden Ziffern gebildet wird, und der Zahl, die von den letzten drei Ziffern gebildet wird, 1111 beträgt.

Sch.

Ma 5 ■ 2211 Die Schüler einer Klasse unterhielten sich über ihre Ferienerlebnisse. Dabei stellte sich folgendes heraus:

a) Genau 13 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon einmal an der Ostsee.

b) Genau 15 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon einmal im Harz.

c) Genau 6 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon sowohl an der Ostsee als auch im Harz.

d) Genau 4 Schüler dieser Klasse waren während ihrer Ferien weder an der Ostsee noch im Harz.

Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an, wenn es außer den unter a) bis d) genannten Schülern keinen weiteren Schüler gibt, der dieser Klasse angehört?

Schülerin Una Gehrman, Groß-Glienicke

Ma 5 ■ 2212 Otto, der 11 Jahre alt ist, sagte zu seinem Freund Emil: „Meine Schwester Inge ist siebenmal so alt wie mein Bruder Axel. Wenn man die Zahl, die das Lebensalter meiner Schwester angibt, mit 6 multipliziert, zum erhaltenen Produkt 2 addiert und diese Summe dann noch durch 4 dividiert, so erhält man als Ergebnis genau die Zahl, die mein Lebensalter angibt.“ Wie alt sind die Geschwister von Otto?

Schülerin Carsta Patzschke, Böhlitz

Ma 5 ■ 2213 Gesucht sind alle durch 3 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 und durch 2 jeweils den Rest 1 lassen.

Schülerin Kathrin Wagner, Antonsthal

Ma 6 ■ 2214 In einer Klasse mit 29 Schülern soll von jedem Schüler ein Unkostenbeitrag in Höhe von 6 Mark für eine Wandernung eingesammelt werden. Einige Schüler haben schon 4 M eingezahlt; ebenso viele Schüler haben noch kein Geld mitgebracht. Vier Schüler haben bisher jeder 3 M, die restlichen Schüler jeder 2 M eingezahlt. Wieviel Geld muß insgesamt noch eingesammelt werden?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 ■ 1369
	Prädikat:	2
	Lösung:	2

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 2215 Ralf und Rita haben jeder einen Würfel aus je 27 kleineren, gleich großen Würfel zusammengesetzt. Ralf hat danach längs einer Kante des großen Würfels alle drei kleinen Würfel entfernt. Rita hingegen hat von jeder Ecke des großen Würfels je genau einen kleineren Würfel entfernt. So entstanden zwei unterschiedliche Restkörper. Ralf behauptete, daß bei seinem Restkörper jetzt insgesamt weniger kleine Quadratflächen die Oberfläche bilden als bei dem Restkörper von Rita. Hat Ralf recht? Die Antwort ist zu begründen! Fertige eine Skizze beider Restkörper an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2216 Gib alle dreistelligen geraden natürlichen Zahlen an, die sich mit Hilfe der Ziffern 0, 3, 6 darstellen lassen. Jede dieser Ziffern darf auch mehr als einmal vorkommen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2217 Gegeben sind folgende sechs Zahlenfolgen:

- (1) 4, 7, 10, 13, a, 19
- (2) 1, 2, b, 8, 16, 32
- (3) 1, 4, 8, c, 19, 26
- (4) d, 6, 10, 18, 34, 66
- (5) 1, 2, 6, 24, 120, e
- (6) 1, f, 13, 40, 121, 364

Finde heraus, auf Grund welcher Vorschrift jede dieser Zahlenfolgen gebildet wurde und mit welchen natürlichen Zahlen die vorkommenden Variablen a, b, c, d, e, f belegt werden müßten!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2218 Peter hat mehr als 400, aber weniger als 600 Nüsse. Zählt er sie zu je 11 ab, so bleiben 3 übrig. Zählt er sie jedoch zu je 13 ab, so bleiben 11 übrig. Wieviel Nüsse hat Peter?

Ma 7 ■ 2219 In der Gleichung $\overline{aa^2} = \overline{bbcc}$, die eine zweistellige und eine vierstellige natürliche Zahl in dekadischer Darstellung enthält, sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

Sch.

Ma 7 ■ 2220 Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 85mal so groß wie die Summe dieser Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich?

Sch.

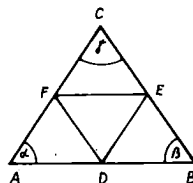
Ma 7 ■ 2221 Zeichne ein Dreieck ABC mit den Innenwinkelgrößen $\angle CAB = \alpha = 70^\circ$ und $\angle CBA = \beta = 60^\circ$! Konstruiere den Umkreis k dieses Dreiecks; sein Mittelpunkt sei M! Zeichne die Geraden AM und BM! Die Gerade AM schneide BC in D; die Gerade BM schneide AC in E. Führe den Nachweis, daß das Dreieck DMB gleichschenkelig ist!

Nach „Quant“

Ma 7 ■ 2222 In dem abgebildeten Dreieck ABC mit den Innenwinkeln α , β und γ wurden die Mittelpunkte E, F und G der Dreiecks-

seiten miteinander verbunden. Es ist die Größe jedes Innenwinkels des Dreiecks DEF zu ermitteln. Die Antwort ist zu begründen!

Fr.



Ma 8 ■ 2223 Es sind alle Primzahlen p der Form $p = 4x^4 + 1$ ($x \in \mathbb{N}$) zu bestimmen.

Schülerin Vera Wilhelm, Leipzig, Kl. 9

Ma 8 ■ 2224 Es ist nachzuweisen, daß es eine einzige dreistellige natürliche Zahl gibt, die fünfmal so groß ist wie das Produkt aus den drei Zahlen, die ihre Grundziffern darstellen.

Thomas Bienetz, Schwepnitz

Ma 8 ■ 2225 Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl ist größer als 3000, aber kleiner als 4000. Welche natürlichen Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

Sch.

Ma 8 ■ 2226 Beweise, daß die Mittelpunkte der Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks und der Fußpunkt einer der Dreieckshöhen Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes sind!

Sch.

Ma 9 ■ 2227 Es ist nachzuweisen, daß die Ungleichung $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt!

Sch.

Ma 9 ■ 2228 Es ist zu beweisen, daß das Produkt aus den drei Zahlen eines pythagoreischen Zahlentripels stets durch die Summe aus diesen drei Zahlen teilbar ist.

Schüler Guido Vollbeding,

Haldensleben, Kl. 9

Ma 9 ■ 2229 Peter stellte an einem Tag in einem Jahr, das kein Schaltjahr war, fest: „Der Quotient aus der Anzahl der verfloßenen Tage des Jahres und der vor uns liegenden ist um 1 größer als eine Primzahl. Dabei rechne ich den heutigen schon zu den verfloßenen.“

Es ist das Datum anzugeben, an dem Peter dies sagte.

Andreas Fittke, Berlin (z. Zt. NVA)

Ma 9 ■ 2230 Gegeben sei ein Rechteck ABCD. Die Länge von AB wollen wir mit a, die Länge von BC mit b bezeichnen. Auf BC liege ein Punkt E, so daß die Länge von BE gleich $\frac{3}{4}b$ beträgt. Der Mittelpunkt von AD sei mit F bezeichnet; der Schnittpunkt von BD mit FE sei G. Es ist der Flächeninhalt des Vierecks ECDG in Abhängigkeit von a und b zu berechnen.

Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard, Kl. 9

Ma 10/12 ■ 2231 Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung

$$3^x + 4^x = 5^x$$

im Bereich der reellen Zahlen!

Le Anh Dung, SR Vietnam, z. Zt. Weimar

Ma 10/12 ■ 2232 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x, y die folgende Ungleichung eine wahre Aussage wird!

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Dr. W. Moldenhauer, Eisenach

(nach einer Aufgabe aus Lapok, Budapest)

Ma 10/12 ■ 2233 Es sei n eine natürliche Zahl. Man beweise, daß dann für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

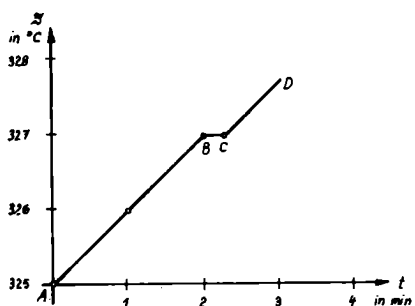
$$\frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} \leq \frac{2}{a+b}$$

Schüler Torsten Eidner, Zeulenroda, Kl. 10

Ma 10/12 ■ 2234 Es ist ein Winkel der Größe 54° nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen.

Physik

Ph 6 ■ 116 Das folgende Temperatur-Zeit-Diagramm ist beim Erwärmen von Blei aufgenommen worden. Erkläre dieses Diagramm,



und beantworte die folgenden Fragen!

- a) Was zeigt der Bereich von A bis B?
- b) Welcher Zustand ist in B erreicht?
- c) Welcher Vorgang liegt im Bereich von B bis C vor?
- d) Was zeigt der Bereich von C bis D?

Ph 7 ■ 117 Ein quaderförmiger Ponton schwimmt im Wasser und hat ein Gewicht von 3,5 Mp (34,335 kN). Seine Grundfläche hat die Maße 2,5 m mal 4,5 m. Wie weit taucht der Ponton in das Wasser hinein?

Ph 8 ■ 118 100 Kilometer Wolframdraht für Glühlampen haben eine Masse von 250 g.

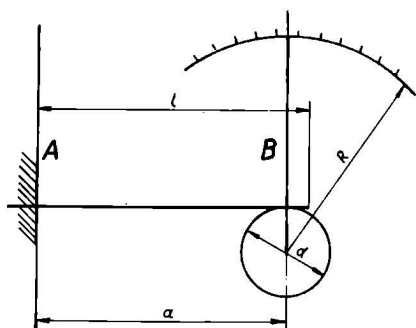
Die Dichte von Wolfram beträgt $19,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Welchen Durchmesser hat demzufolge der Draht? (in mm)

Karl Eichhorn, Steinach

Ph 9 ■ 119 Bei einem Schulversuch zur Demonstration der Ausdehnung fester Körper

bei Erwärmung wird ein Stück Vierkantstahl waagrecht an einem Ende fest eingespannt, während das andere Ende auf einer waagrecht gelagerten Rolle aufliegt. An der Rolle ist ein Zeiger senkrecht zur Rollennachse befestigt. Das Stahlstück sei 1,30 m lang, wobei 10 cm für die Einspannung benötigt werden. Die Auflagelänge, d. h. der Abstand: Einspannstelle – Auflagestelle, sei $a = 1$ m. Die Rolle habe einen Durchmesser von 10 mm. Der Zeiger sei 20 cm lang. Das Stahlstück werde von $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 70^\circ\text{C}$ erwärmt.



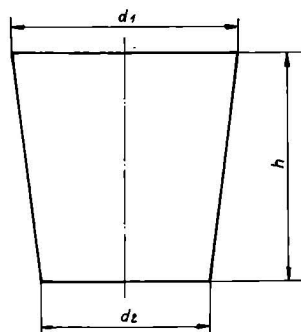
Wie lang ist der Kreisbogen, den die Spitze des Zeigers infolge der durch die Ausdehnung des Stahlstückes hervorgerufenen Drehung der Rolle auf einer Seite zurücklegt?

Für die Lösung der Aufgabe ist die Länge a zwischen Einspannstelle A und Auflagepunkt B maßgebend. Das Differenzstück $\Delta l = l - a$ trägt nicht zur Drehung der Rolle bei.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 10/12 ■ 120 Ein Flugzeug der Abteilung Agrarflug wird zum Düngerstreuen aus der Luft eingesetzt. Zum Füllen des Düngerbunkers wird ein Kübel benutzt, der die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes hat. Die Abmessungen betragen:

$d_1 = 75$ cm, $d_2 = 40$ cm, $h = 85$ cm.



Welche Tragkraft muß der zum Beladen des Flugzeuges eingesetzte fahrbare Kran mindestens haben, wenn der Kübel eine Eigenmasse von $m_k = 60$ kg hat und die Dichte des Düngemittels $\varsigma = 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ beträgt? Der Kübel wird stets bis zum Rand gefüllt.

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch 7 ■ 93 100 g Wassergas, welches aus 50% Wasserstoff und 40% Kohlenmonoxid besteht, wird verbrannt. Der Rest sind andere Gase, die in der Rechnung vernachlässigt werden sollen.

Wie groß ist die Masse der entstehenden Verbrennungsprodukte des Wasserstoff- und Kohlenmonoxidanteils?

Ch 8 ■ 94 Aus 2,3 g Braunstein entstehen durch Umsetzung mit Salzsäure 580 ml Chlorgas von 17°C und 757 Torr.

Wieviel Prozent Mangan(IV)-oxid enthält der Braunstein?

Projekt Chemiebetrieb



„Na, das hat mir noch gefehlt, ich habe die Reinigungsanlagen vergessen.“

Ch 9 ■ 95 In einer Zellstofffabrik fallen täglich 150 t Ablauge mit 2% Glukose an. Wir nehmen an, daß die Glukose durch Gärung verlustlos in Äthanol umgewandelt wird. Welche Menge Äthanol entsteht aus einer Tagesmenge Ablauge?

Ch 10/12 ■ 96 Ein Schachtofen produziert in drei Schichten (24 Stunden) 8 t Branntkalk. Die benötigte Wärmeenergie beträgt 180 000 kcal je 100 kg Branntkalk.

a) Welche Menge Kalkstein muß dem Ofen zugeführt werden?

b) Wieviel Kubikmeter Kohlendioxid entstehen dabei?

c) Wie groß ist die benötigte Brennstoffmenge? (Heizwert der Braunkohlen-

briketts $\approx 4500 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$)



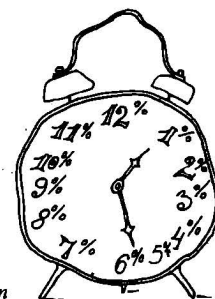
M. W. Keldysch



Eines der modernen Forschungsschiffe der Sowjetunion (1980 in der Briefmarkenserie „Forschungsschiffe der UdSSR“) trägt den Namen *Akademikmitglied Mstislav Keldysch*. Eine weitere Briefmarke wurde diesem bedeutenden Mathematiker 1981 in der SU gewidmet. M. W. Keldysch (10. 2. 1911 bis 24. 6. 1978) gehört zu den bedeutendsten Vertretern jener schon seit dem 19. Jahrhundert für Rußland charakteristischen engen Verbindung der Mathematik mit ihren Anwendungen in Physik und Technik. Er wurde in Riga geboren, studierte in Moskau und war dort ab 1932 als Hochschullehrer an der Lomonossow-Universität tätig. Außerdem arbeitete er in verschiedenen Instituten der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften, deren ordentliches Mitglied er 1946 wurde und deren Präsident er von 1961 bis 1975 war. Keldysch beschäftigte sich mit verschiedenen Gebieten der Mathematik, u. a. Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Theorie der konformen Abbildungen, und ihren Anwendungen in der Mechanik, Aerodynamik, Schwingungstheorie. Seine hohen Verdienste um die Entwicklung der sowjetischen Flugzeugtechnik wie auch um die Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses und die Wissenschaftsorganisation wurden durch zahlreiche hohe Auszeichnungen (u. a. Leninpreis 1957, zweimal Staatspreis, Ziolkowski-Orden) gewürdigt. Keldysch war auch Ehrenmitglied zahlreicher ausländischer Akademien und ein guter Freund und Helfer der Mathematiker der DDR. Übrigens ist auch seine Schwester Ljudmila (geb. 1904) eine namhafte Professorin der Mathematik.

P. Schreiber

In freien Stunden • alpha-heiter

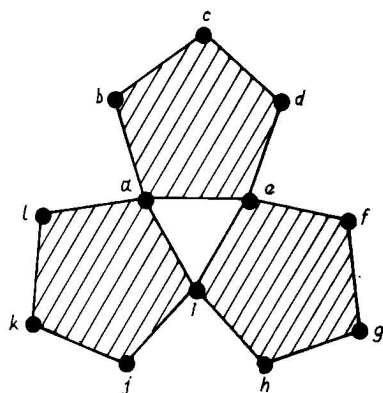


Jez, Jugoslawien

Magische Figur

Ersetze die Buchstaben a bis l durch die Zahlen 1, 2, 3, ..., 12, so, daß die Summe der Zahlen in jedem Fünfeck zunächst 28, dann 31, 34 und 37 beträgt!

Dirigent Jindřich Pěňčík, Praha



Mathematische Grüße

$$19 - \sqrt{81} = 1^9 \cdot (8 + 2)$$

$$1 - 9 - 8 - 1 = -19 + \sqrt{8 \cdot 2}$$

$$1 + (9 \cdot 8) + 1 = 1 \cdot 9 \cdot 8 + 2$$

$$(1 + 9) \cdot (8 + 1) = (1 \cdot 9) \cdot (8 + 2)$$

$$19 + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{9} + (8 \cdot 2)$$

Wir fordern zur Mitarbeit auf: Die Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., 20 sind mit Hilfe der in der Jahreszahl 1982 vorhandenen Grundziffern und unter Verwendung verschiedener Rechenoperationen darzustellen. Folgende Bedingungen sollen gelten:

(1) Jede der in der Jahreszahl darzustellenden Grundziffern tritt bei der jeweils darzustellenden natürlichen Zahl genau einmal auf.

(2) Als Rechenoperationen sind zugelassen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Radizieren. Es dürfen Klammern gesetzt werden.

Beispiele:

$$0 = 1 + \sqrt{9} - \sqrt{8 \cdot 2}; 1 = (1 + \sqrt{9}) : \sqrt{8 \cdot 2};$$

$$\dots 4 = 1^9 \cdot \sqrt{8 \cdot 2};$$

$$\dots 20 = (1 + 9) \cdot \sqrt{8 \cdot 2}$$

Dr. M. Krebs, PH Dresden/Rainer Bauer,
EOS E. Weinert, Mittweida (Kl. 11)

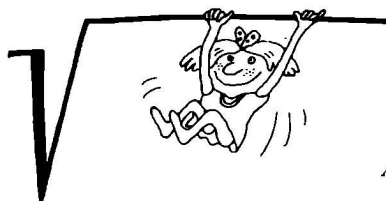
Mathematische Begriffe gesucht

Bei einem Kongreß entdecken vier der Teilnehmer, daß sich aus den Buchstaben ihres Namens und Heimatortes durch Umstellen jeweils mathematische Begriffe aus ein und demselben Stoffkomplex ergeben. Welche Begriffe sind das?

(Es ist jeder Buchstabe so oft zu verwenden, wie er auftritt.)

Ernst Geit Aken Philip Keerer Wien
Kurt Sis Steinach Sven Renk Eiche

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



Andreas J. Mueller

Kryptogramme

In die horizontalen und vertikalen Reihen der Kryptogramme sind so Ziffern einzusetzen, daß sinnvolle Aufgaben entstehen. Hierbei bedeuten gleiche Ziffern auch gleiche Variable.

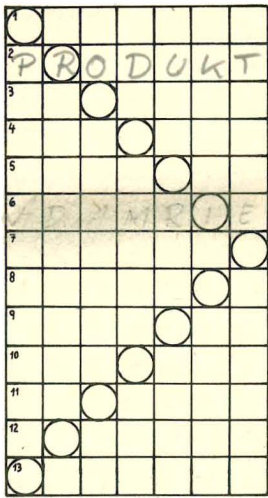
EINS	DREI	VIER
VIER	DREI	VIER
FÜNF	VIER	EINS
ZEHN	ZEHN	EINS
(S < R)	(D < V)	ZEHN

Schülerin
Jarmila Pěňčíková, Praha

Rodoj Geordow, Gabrowo (Bulgarien)



Füllrätsel

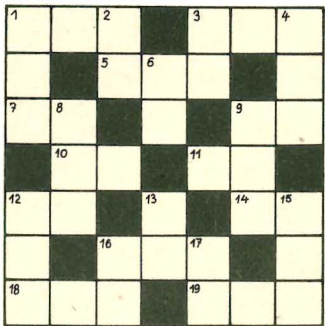


In die waagerechten Reihen der Figur sind Wörter folgender Bedeutung einzutragen:

- 1. Zusammenstellung von Werten; 2. Ergebnis einer Multiplikation; 3. deutscher Mathematiker (1646 bis 1716, Begründer der Infinitesimalrechnung); 4. eine Winkelfunktion; 5. ist z. B. a in $f(x)=f(x+a)$; 6. eine Bewegung; 7. tschechischer Mathematiker (1781 bis 1848), vervollständigte u. a. die Infinitesimalrechnung; 8. dreigliedrige Zahlengröße (Plural!); 9. Kurve, die jede Dreiecksseite in genau einem Punkt berührt; 10. wird z. B. durch m in der linearen Funktion $y=mx$ gebildet; 11. kürzeste Verbindung zweier Punkte; 12. Teil von Größenangaben; 13. ein Kegelschnitt.
- Die Buchstaben in den Kreisfeldern – von oben nach unten gelesen – ergeben ein Gebiet der Mathematik, das sich mit Dreiecksmessung und -berechnung befaßt.

Ing. D. Völzke, Greifswald

Kreuzzahlrätsel



Waagrecht:

- 1. die Quersumme dieser Zahl ist gleich s_2
- 2. das Quadrat von w_7
- 5. das Querprodukt von s_{15}
- 7. die 3. Potenz der Quadratwurzel aus der Quersumme von w_{10}
- 9. die Spiegelzahl von s_2
- 10. die Zahl ist gleich dem Quadrat ihrer Quersumme

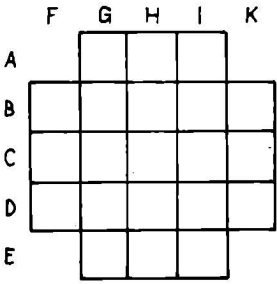
- 11. die Hälfte von w_{19}
- 12. eine Primzahl
- 14. eine Quadratzahl
- 16. die Zahl ist gleich dem Querprodukt von w_3
- 18. eine Kubikzahl
- 19. diese Zahl ist das Achtfache ihres Querproduktes

Senkrecht:

- 1. das Doppelte von w_{18}
- 2. eine Primzahl
- 3. die Quersumme dieser Zahl ist gleich s_2
- 4. das Querprodukt dieser Zahl ist gleich w_{10}
- 6. die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quersumme von w_{19}
- 8. eine Primzahl
- 9. die 3. Potenz der Quersumme von s_{16}
- 12. diese Zahl ist gleich dem Querprodukt von s_8
- 13. der Nachfolger von w_{10}
- 15. die Summe aus der ersten und dritten Stelle ist gleich dem Doppelten der zweiten Stelle
- 16. die Spiegelzahl von s_{17}
- 17. eine Primzahl

Ing. H. Decker, Köln

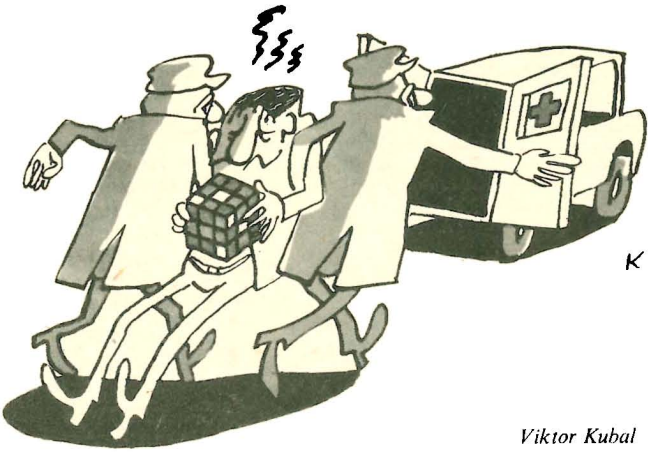
Magisches Kreuz



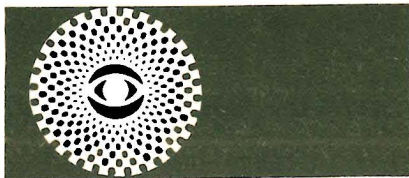
Dieses magische Kreuz ist mit 5 Kreuzen und 10 Kreisen so auszufüllen, daß gilt:

- (1) Jedes Seitenfeld ($BF-DF$; $EG-EI$; $DK-BK$; $AG-AI$) soll 1 Kreuz und 2 Kreise enthalten.
- (2) In jeder Zeile ($FB-KF$; $CF-CK$; $DF-DK$) und in jeder Spalte ($AG-EG$; $AH-EH$; $AI-EI$) sollen sich auch 1 Kreuz und 2 Kreise befinden.

Schülerin Claudia Popien, Karl-Marx-OS, Magdeburg (Kl. 9)



Viktor Kubal



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Aus dem Haus der Jungen Pioniere Rostock berichtet

Die Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft *Junge Mathematiker* der Klassenstufe 6 treffen sich seit über einem Jahr regelmäßig im Haus der Pioniere in Rostock. Beim Knobeln ist ihnen die Schülerzeitschrift *alpha* ein wertvoller Freund und Helfer. Der Leiter dieser Arbeitsgemeinschaft, Oberlehrer Rainer Rösler, Fachlehrer für Mathematik, regte die teilnehmenden Schüler an, selbst interessante Aufgaben auszudenken und uns zuzustellen. Aus der Fülle der bei uns eingegangenen Aufgaben wählten wir einige aus, die wir allen *alpha*-Lesern vorstellen möchten. Sie stammen aus der Feder der Schüler Heiner Ruser, Anne Ruser, Ines Andrews, Meike Wenzel, Oliver Eidam, Annegret Passargus.

Die Redaktion dankt allen Schülern dieser Arbeitsgemeinschaft, auch denen, deren Aufgaben wir nicht veröffentlicht haben, und wünscht ihnen viele frohe Stunden beim Knobeln und in der Freizeitbeschäftigung mit der Mathematik.

Aufgaben

▲1▲ In einer Kiste befinden sich genau 15 rote, 17 gelbe, 12 blaue, 16 weiße und 19 schwarze Kugeln.

Wie viele Kugeln muß man im Dunkeln nacheinander aus der Kiste herausnehmen, um mit Gewißheit zwei Kugeln einer jeden Farbe zu erhalten?

▲2▲ Einer Schulklasse gehören 31 Schüler an. Sie sitzen in vier Bankreihen hintereinander. In der ersten Bankreihe sitzen halb so viele Schüler wie in der zweiten Bankreihe. In der zweiten Bankreihe sitzen zwei Schüler mehr als in der dritten Bankreihe. In der dritten und vierten Bankreihe sitzen gleich viel Schüler.

Wie viele Schüler sitzen in jeder der vier Bankreihen?

▲3▲ Anett geht noch in den Kindergarten; ihre Schwester Brigitte besucht bereits die Schule. Der Schulweg von Brigitte führt am Kindergarten von Anett vorbei. Eines Morgens macht sich Anett bereits vor Brigitte auf den Weg zum Kindergarten. Nachdem Anett den dritten Teil ihres Weges zurückgelegt hat, wird sie von Brigitte, deren

mittlere Geschwindigkeit $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt, eingeholt. Für den restlichen Weg bis zum Kindergarten, den sie zusammen im langsameren Tempo von Anett zurücklegen, benötigen sie noch 10 Minuten. Bis zur Schule verbleiben für Brigitte dann noch 400 Meter Fußweg; das ist gleich dem vierten Teil ihres Schulweges.

a) Nach wieviel Minuten hat Brigitte ihre Schwester Anett eingeholt?

b) Wieviel Minuten benötigt Anett für den Weg zum Kindergarten?

▲4▲ Zu einer Schulklasse gehören mehr als 21, aber weniger als 29 Schüler. An einer Klassenarbeit im Fach Mathematik konnten zwei Schüler wegen Erkrankung nicht teilnehmen. Die Note 1 erhielten fünf Schüler weniger als es Schüler waren, die die Note 2 erhielten. Die Note 4 erhielten halb soviel Schüler wie die Note 3. Kein Schüler erhielt die Note 5. Die Note 3 erhielt der vierte Teil derjenigen Schüler, die diese Klassenarbeit mitgeschrieben hatten.

Wie viele Schüler erhielten jeweils die Noten von 1 bis 4?

▲5▲ Dirk kaufte 13 Ansichtskarten, und zwar einige zu 20 Pf und einige zu 40 Pf das Stück. Er bezahlte dafür insgesamt 2,80 M.

Wie viele Ansichtskarten zu 20 Pf bzw. zu 40 Pf das Stück hat Dirk gekauft?

▲6▲ Die Summe aus vier Summanden, von denen der nächstfolgende stets immer dreimal so groß wie der vorhergehende, ist gleich der Summe aus den Quadraten der natürlichen Zahlen von 3 bis 9.

Wie lauten diese vier Summanden?

▲7▲ Eine Strecke $\overline{AE}$ ist 42 cm lang. Auf dieser Strecke sind drei innere Punkte B, C, D so festgelegt, daß $\overline{AB}$ doppelt so lang wie $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ dreimal so lang wie $\overline{AB}$, aber nur halb so lang wie $\overline{DE}$ ist.

Welche Länge hat jede der Teilstrecken $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$?

▲8▲ Multipliziert man das Quadrat einer dreistelligen natürlichen Zahl a mit einer zweistelligen natürlichen Zahl b , so erhält man als Produkt 1980.

Wie lauten die Zahlen a und b ?

▲9▲ Sechs Schüler gingen Pilze sammeln; sie erzielten folgende Ergebnisse: Peter fand doppelt soviel Pilze wie Heiner. Anja fand drei Pilze weniger als Heiner. Birgit überbot den dreifachen Pilzertrag von Andreas um drei Pilze. Andreas brachte es nur auf halb soviel Pilze wie Heiner. Otto fand genau sieben Pilze. Zusammen fanden diese sechs Schüler fünf Pilze weniger als das Zehnfache der Anzahl dieser Kinder.

Wieviel Pilze fand jeder von ihnen?

▲10▲ Christine geht einkaufen. Sie hat dafür von der Mutter einen bestimmten Geldbetrag erhalten, von dem sie beim Fleischer den dritten Teil, im Milchladen den sechsten Teil ausgibt. Im Blumengeschäft muß sie halb soviel Geld wie beim Fleischer bezahlen. Beim Bäcker gibt Christine halb soviel Geld aus wie im Blumengeschäft. Im Gemüseladen gibt sie soviel Geld aus wie sie beim Bäcker und im Milchladen zusammen ausgibt.

Welchen Teil des von der Mutter erhaltenen Geldes bringt Christine wieder mit nach Hause?



XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie die folgende Aussage! Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ und b , für die

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2$$

gilt.

2. Gegeben sei eine Länge r_1 . Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{CD} < \overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, daß sie einander von außen berühren und daß k_1 die Seiten AD , AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC , CD und AD berührt! Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

3. A. Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

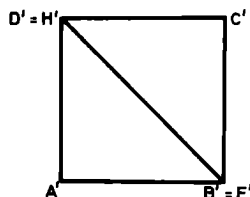
$$\begin{aligned} x \cdot \log_2(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x &= 2 \cdot \log_2(5 - \sqrt{24}), \\ y - x &= 2 \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

3. B. Beweisen Sie, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl

$$625 + 4 \cdot (9^{2n})$$

eine Primzahl sein kann!

4. Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriß haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a .) Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrißebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D .



Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrißebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von

oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.

Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60^\circ$, $q = \frac{1}{2}$) dar! Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

5. Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 5$$

und für alle $n = 1, 2, \dots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.

Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \dots, 1000$ die Ungleichung

$$4 \leq x_n \leq 5$$

gilt!

6. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c , für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c, \quad (1)$$

$$y < x + c, \quad (2)$$

$$y < -2x + 1. \quad (3)$$

Olympiadeklassen 11/12

1. In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreiecksseiten.

Man beweise: Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF , so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

2. In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung. Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen. Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.

Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!

Hinweis: Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei G die Anzahl aller diejenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist. Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, \dots, 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i -te Entnahme eines Karpfens erfolgte. Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

3. Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$. Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{(x^4 + 1)(x^4 + 6x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2} \\ = \frac{(a^4 + 1)(a^4 + 6a^2 + 1)}{a^2(a^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

4. Es sei $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \text{ und} \\ a_{n+1} &= 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \\ (n &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

gilt.

Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

5. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}. \quad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d.h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von n so darstellt, daß zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).

Hinweis: Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x] + 1$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 6. A und 6. B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

6. A. Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch „wiederholtes Halbieren“ in 10 näherungsweise gleich lange Strecken zerlegt werden:

(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.

(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als „ n -te Näherung“ Punkte $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \dots, P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A, P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, \dots, 9$ $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n)} P_j^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, \dots, Q_9$ die Punkte auf AB die AB in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also $AQ_1 = Q_1Q_2 = \dots = Q_8Q_9 = Q_9B = 1$ m gilt.

Beweisen Sie, daß eine natürliche Zahl N so existiert, daß für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$ auf AB gilt:

Bei der „ N -ten Näherung“ weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ ($j=1, 2, \dots, 9$) um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d. h., es gilt

$$P_j^{(N)} Q_j < 1 \text{ mm.}$$

6. B. Ist $T = ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T . Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben. Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt. Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s . Die geforderten Eigenschaften sind:

- (1) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = \sphericalangle ADB = 90^\circ$.
- (2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.
- (3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

Lösungen

Olympiadeklasse 10

1. Zum Beweis kann die Methode der vollständigen Induktion herangezogen werden. Für $n=2$ gilt wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ die Aussage mit $a_1 = 3, a_2 = 4, b = 5$. Sei nun k eine natürliche Zahl, so daß die Aussage für $n=k$ gilt, d. h., es gebe von Null verschiedene natürliche Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_k, d$ mit $d > 1$ und

$$(1) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 = d^2.$$

(Wir können jedenfalls $k=2$ setzen.) Aus dieser Gleichung folgerten z. B. Matthias Hübner (Bezirk Leipzig) und Karin Gröger (Berlin) durch Multiplikation mit 2^2 die Beziehung

$$(2c_1)^2 + (2c_2)^2 + \dots + (2c_k)^2 = (2d)^2 = (d^2 + 1)^2 - (d^2 - 1)^2.$$

Setzt man $a_1 = 2c_1, \dots, a_k = 2c_k, a_{k+1} = d^2 - 1, b = d^2 + 1$, so erhält man von Null verschiedene Zahlen $a_1, \dots, a_{k+1}, b$ mit $b > 1$ und der Eigenschaft $a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2 = b^2$, d. h., die Aussage gilt auch für $n=k+1$.

Durch den Beweis für $n=2$ und den Schluß von $n=k$ auf $n=k+1$ ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n , die ≥ 2 sind, bewiesen.

Varianten und Bemerkungen: Für die Aufgabe ersannen die Schüler vielfältige Lösungsvarianten, von denen im folgenden noch einige angegeben seien. Vollständige Induktion wurde oft verwendet, und es ist erfreulich, wie gut viele Schüler (der Olympiadeklasse 10) schon mit dieser Methode vertraut sind. Mehrfach wurde dabei die Ungeradheit

der auftretenden Zahlen b ausgenutzt. So folgert z. B. Oliver Geupel (Bezirk Dresden) aus (1) für $d=2p+1$ ($p \in \mathbb{N}, p \neq 0$) und somit $d^2 = 4s+1$ ($s=p^2+p$) die Beziehung $c_1^2 + \dots + c_k^2 + (2s)^2 = (2s+1)^2$ und erhält mit $a_1 = c_1, \dots, a_k = c_k, a_{k+1} = 2s, b = 2s+1$ die Aussage für $n=k+1$ sowie gleichzeitig, daß b wieder ungerade ist. Dieser letzte Nachweis fehlte gelegentlich, wenn Schüler denselben Gedanken verfolgten. (Übrigens kann man analog auch einen Beweis mit geradzahligem b führen.)

Jörg Wenzel (Bezirk Gera) gab die Folge der hier auftretenden $a_1, a_2, \dots$ rekursiv an:

$$a_1 = 3, a_2 = 4, \\ a_i = \frac{(a_{i-1} + 1)^2 - 1}{2} \text{ für } i = 3, 4, \dots, n$$

(es ist $a_i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0$), $b = a_n + 1$.

Andere Schüler nannten – unabhängig von der vollständigen Induktion – explizite Lösungen, so Henry Mittel (Bezirk Suhl):

$$a_1 = (n-1)c^2 - 1, a_2 = \dots = a_n = 2c, \\ b = (n-1)c^2 + 1 \text{ mit } c > 1. \text{ Setzt man } c = 1, \text{ wie z. B. Jens Rammhøldt (Bezirk Potsdam), so muß man zwar den Fall } n=2 \text{ (wegen } a_1=0) \text{ extra behandeln, hat aber alle anderen Fälle in der simplen Gleichung } (n-2)^2 + (n-1) \cdot 2^2 = n^2 \text{ erfüllt.}$$

Einfach ist auch der Gedanke (für $n > 2$) von Andreas-Maik Wolf (Bezirk Erfurt):

$$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1) \cdot 1^2 \\ = k^2 + 2^2 + (2k-3) \cdot 1^2$$

liefert die Lösung für $n=2k+2 \geq 4$ bzw. $n=2k-1 \geq 3$, d. h. für alle geraden bzw. ungeraden n , die größer als 2 sind.

Als verbreiteter Mangel in den Bearbeitungen ist zu erwähnen, daß Induktionsvoraussetzung oder -behauptung nicht vollständig oder nicht sauber als Existenzaussagen formuliert waren. Das führte zu Beweislücken, für welche etwa der erwähnte fehlende Nachweis der Ungeradheit von b als typisches Beispiel gelten kann.

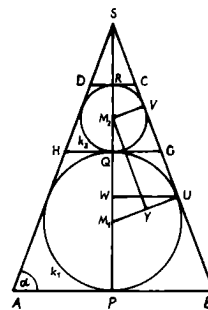
Die Bewertung hatte folgendes Ergebnis:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	18	9	7	5	11	8	39

Dr. K.-D. Drews, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

2. I. Angenommen, ein Trapez $ABCD$ mit den Kreisen k_i (Mittelpunkte M_i , Radien $r_i, i=1, 2$) habe die geforderten Eigenschaften. Gilt $AD \parallel BC$, so ist $ABCD$ wegen $\overline{AD} = \overline{BC}$ ein Parallelogramm im Widerspruch zu $\overline{AB} > \overline{CD}$. Also gilt $AB \parallel CD$, und das Trapez ist wegen $\overline{AD} = \overline{BC}$ gleichschenkelig. Da k_1 und k_2 die Schenkel AD, BC berühren, deren Verlängerungen über D bzw. C hinaus sich in S schneiden, liegen M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden m des $\sphericalangle ASB$, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von AB und CD ist. Ferner liegt auch Q (der Berührungspunkt von k_1 und k_2) auf m . Die Parallele zu AB durch Q ist somit die gemeinsame innere Tangente von k_1 und k_2 , die AD in H und BC in G schneidet. Das Trapez $HGCD$,

dessen Seiten von k_2 berührt werden, geht durch eine Streckung mit dem Zentrum S in das Trapez $ABGH$ über, dessen Seiten von k_1 berührt werden. Es sei $x = r_2 : r_1, a = \overline{AB}, b = \overline{HG}, c = \overline{DC}$. Es ist $x = \overline{DC} : \overline{HG} = \overline{HG} : \overline{AB}$, also $b = ax, c = bx = ax^2$. U und V seien die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit BC .



Es gilt

$$a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BU} + \overline{UG} + \overline{GV} + \overline{VC} \\ = \overline{BP} + \overline{QG} + \overline{QG} + \overline{CR} \text{ (nach dem Satz über die Gleichheit der Tangentenabschnitte)}$$

$$= \frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{a}{2} (1 + 2x + x^2). \text{ Diese Gleichung wird wegen } x > 0 \text{ nur von } x = \sqrt{2} - 1 \text{ erfüllt. Also kann ein Trapez } ABCD \text{ nur dann den Bedingungen genügen, wenn } r_2 = r_1 (\sqrt{2} - 1) \text{ gilt.} \quad (1)$$

Weitere Möglichkeiten:

1. Sei W der Fußpunkt des Lotes von U auf m . Es gilt $\triangle M_1 U W \sim \triangle M_1 M_2 Y$ und hieraus folgt $r_1 : r_2 = \overline{M_1 M_2} : \overline{M_1 Y} = \frac{(r_1 + r_2)}{(r_1 - r_2)}$.

Dies führt ebenfalls auf (1).

2. Es ist $\triangle B M_1 P \cong \triangle B M_1 U \sim \triangle M_1 G U \cong \triangle M_1 G Q \sim \triangle G M_2 Q \cong \triangle G M_2 V \sim \triangle M_2 C V \cong \triangle M_2 C R$. Hier kann man z. B. der Reihe nach $\overline{GU} = \overline{GQ} = \overline{VG}$ und $\overline{CV}$ durch r_1 und $\frac{1}{2}a = \overline{BP} = \overline{BU}$ ausdrücken. Man erhält aus $\overline{BC} = a$ eine Gleichung zwischen r_1 und a , die auf $a = 2r_1 \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ führt.

3. Matthias Hübner (Bezirk Leipzig) geht folgenden Weg:

Es ist $\triangle B M_1 P \cong \triangle B M_1 U$ und somit

$$\frac{\sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r_1}{a} \quad (2).$$

$$\text{Weiter ist } a = \overline{BC} = \overline{BG} + \overline{GC} = \frac{2r_1}{\sin \alpha} + \frac{2r_2}{\sin \alpha} \quad (3).$$

Aus (2) und (3) folgt $r_2 = r_1 \cos \alpha$ (4). Im Dreieck $M_1 Y M_2$ ist

$$\cos \alpha = \frac{\overline{M_1 Y}}{\overline{M_1 M_2}} = \frac{(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)} = \frac{(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)}$$

nach (4). Hieraus folgt $\cos \alpha = \sqrt{2} - 1$.

Dieser Winkel wird dann konstruiert.

II. Konstruktionsbeschreibung

(1) Aus r_1 konstruiere man $r_2 = r_1 (\sqrt{2} - 1)$.

(2) Man konstruiere die sich von außen in Q berührenden Kreise k_i (Mittelpunkte M_i , Radien $r_i, i=1, 2$).

(3) Man konstruiere die beiden äußeren Tangenten t und t' von k_1, k_2 .

- (4) Die Gerade durch M_1 und M_2 schneide die Kreise k_1, k_2 zusätzlich in R und P . Man errichte die Senkrechten auf diesen Geraden in R und P . Diese schneiden t und t' in A, D und B, C .

$ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

III. Beweist, daß jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD} = \overline{BC}$. Die Kreise k_1, k_2 haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen $r_2 < r_1$ ist $\overline{CD} < \overline{AB}$. Wie in I. kann man herleiten, daß mit $x = r_2 : r_1$ die Gleichung $\overline{BC} = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$ gilt. Da nach Konstruktionsschritt (1) $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$ ist, erfüllt x die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 2$, und es folgt $\overline{BC} = a = \overline{AB}$.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig ausführbar.

(2) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, und (3) und (4) sind es anschließend auch. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Bemerkungen: Die Aufgabe erscheint angemessen. Der Nachweis der Parallelität von AB und CD fehlte häufig. Viele Schüler versuchten, den Zusammenhang $r_2 = f(r_1)$ (oder ähnlich geeigneter Größen) zu beschreiben, ohne ihn explizit angeben zu können. Damit ist eine Aussage über die Konstruierbarkeit nur schwer zu gewinnen. Gleiches muß zu den Versuchen gesagt werden, die größere Gleichungssysteme bis zu 6 Unbekannten, darunter nichtlineare oder Gleichungen höherer Ordnung, erhielten, ohne die Wurzeln bestimmen zu können. Die Schritte III. und IV. fehlten häufig, wie überhaupt einige Beweise recht oberflächlich geführt wurden.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	52	18	4	0	2	11	3	6	1

$\emptyset = 1,6$

Dr. W. Moldenhauer,
Pädagogische Hochschule
Dr. Theodor Neubauer,
Erfurt/Mühlhausen

3. A. Angenommen, ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$ erfülle (1) und (2). Wegen $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - \sqrt{24}$ folgt dann $x^2 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Da $\sqrt{3} \neq \sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq 1$ ist, ist $\log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ definiert und ungleich Null. Daraus folgt

$$x^2 = 4.$$

Wegen (2) und $y > 0$ ist $x = y - 2 > -2$, also muß $x = 2$ sein.

Nach (2) ergibt sich $y = 4$.

Folglich kann nur das Paar $(x; y) = (2; 4)$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

Wegen $2 \cdot \log_4(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4(5 - \sqrt{24})$ und $4 - 2 = 2$ erfüllt es diese beiden Gleichungen tatsächlich.

Daher ist genau das Paar $(2; 4)$ das gesuchte.

Bemerkungen: Die Aufgabe besitzt einen angemessenen Schwierigkeitsgrad. Der häufigste Fehler bestand darin, daß Exponenten bei gleichen Potenzen verglichen wurden, ohne die Basen 0 und 1 auszuschließen, bzw. daß in Produkten die Möglichkeit, daß ein Faktor den Wert 0 annimmt, nicht ausgeschlossen wurde.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	5	2	11	2	7	16	35

Dr. Ingeborg Bartsch, Institut
für Lehrerbildung Jacques Duclos, Rostock

3. B. Der Versuch, eine Produktdarstellung mit Hilfe binomischer Formeln zu erreichen, führt auf folgendes:

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot 3^{4n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n})^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3^{2n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 3^n)(5^2 + 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= [(5 + 3^n)^2 + 3^{2n}] \cdot [(5 - 3^n)^2 + 3^{2n}]. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß beide Faktoren größer als 1 sind.

Es gilt jedoch

$$(5 + 3^n)^2 + 3^{2n} \geq (5 + 3^0)^2 > 1 \text{ und}$$

$$5 \neq 3^n, \text{ also } (5 - 3^n)^2 > 0,$$

$$(5 - 3^n)^2 + 3^{2n} > 0 + 3^0 = 1,$$

womit auch dieser Teil der Lösung erbracht ist: Die Zahl $625 + 4 \cdot (9^{2n})$ ist in zwei ganzzahlige Faktoren, die beide größer als 1 sind, zerlegbar und ist somit keine Primzahl.

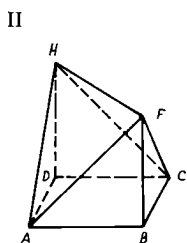
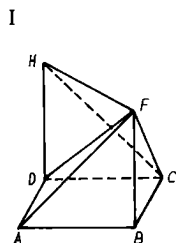
Bemerkungen: Von den teilnehmenden 98 Schülern entschieden sich 19, also etwa ein Fünftel, für diese Wahlaufgabe. Zur Lösung der Aufgabe war eine durchaus nicht unmittelbar ins Auge springende Idee für die Zerlegung des Terms $625 + 4 \cdot 9^{2n}$ nötig. Versuche, eine natürliche Zahl zu finden, die als Faktor in allen Zahlen $625 + 4 \cdot 9^{2n}$ - bzw. in allen, für die n größer als ein gewisses $n_0 > 0$ ist - enthalten ist, schlugen fehl. Nur 5 der 19 Schüler fanden die in der Lösung angegebene Zerlegung.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	10	4	0	0	0	1	4

Dr. Monika Noack, Ministerium für Hoch-
und Fachschulwesen, Berlin

4. Lösung des Schülers Andrei Josiek (EOS Clara Zetkin Eisenhüttenstadt, bearbeitet):

Der Körper I (siehe Bild) erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, da er genau sechs Ecken (A, B, C, D, F, H) und den angegebenen Grundriß besitzt. Letzteres folgt aus der Lage von AF über AB , von HF und DF über BD , von FC über BC , von HC über CD , sowie der Lage von F über B und der von



H über D . Damit wird jede Kante entweder auf eine der Seiten des Quadrates $ABCD$, auf dessen Diagonale BD oder - bei senkrechter Lage zur Grundrißebene - als Punkt auf A, B, C oder D im Grundriß abgebildet. Nach Konstruktion liegt F (bzw. H) im Abstand a über B (bzw. D). Der Körper I ist auch - wie gefordert - ebenflächig begrenzt, da alle Seitenflächen Dreiecke sind und die Fläche $ABCD$ nach Voraussetzung eben ist. Analoge Betrachtungen zeigen, daß auch der Körper II den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es ist noch zu zeigen, daß die Körper I und II unterschiedliches Volumen haben, und es sind diese Volumina zu berechnen. Ergänzt man den Körper I durch die Pyramide $AFDH$, so erhält man offensichtlich den Körper II, damit unterscheiden sich die Volumina V_I und V_{II} der Körper um das Volumen V_P der Pyramide $AFDH$ (und sind damit auch unterschiedlich).

$$V_{II} = V_I + V_P \quad (1)$$

Den Körper I kann man sich aus den drei Pyramiden $ABDF$, $DBCF$ und $DCHF$ zusammengesetzt denken. Ergänzt man den Körper I zu einem Würfel mit der Kantenlänge a , so erkennt man, daß für jede dieser Pyramiden als Grundfläche eine halbe Seitenfläche des Würfels und als Höhe die Kantenlänge a gewählt werden kann. Das gilt auch für die Pyramide $AFDH$ (mit der Grundfläche ADH). Damit gilt

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a,$$

$$V_P = \frac{1}{6} a^3. \quad (2)$$

Daher folgt

$$V_I = \frac{1}{2} a^3$$

und mit (1)

$$V_{II} = \frac{3}{2} a^3.$$

Bemerkungen: Die vorstehende Lösung unterschied sich von den anderen durch die Sorgfalt der Begründung und die Ökonomie der Berechnung. Der Schüler erhielt für diese Lösung ein Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe. Insgesamt lösten etwa 60% der Schüler diese Aufgabe richtig. Dabei wurden auch noch andere Körper als die Körper I und II gewählt. Etwa 30% der Schüler fanden allerdings nur einen solchen Körper und gaben als zweiten fälschlicherweise einen mit sieben Eckpunkten an. Der siebente Eckpunkt war zumeist der Schnittpunkt der Strecken DF und HB . Bei einer so sorgfältigen Darstellung wie unserer obigen hätte dieser Fehler erkannt werden müssen!

Fehler bei der Ausführung der schrägen Parallelprojektion waren gering

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	-	5	26	7	16	41

Dr. H.-J. Sprengel, Pädagogische
Hochschule Karl Liebknecht Potsdam

5. Die endliche Folge $\{x_1, \dots, x_{1000}\}$ ist induktiv vorgegeben, indem das erste Glied und jedes weitere Glied mit Hilfe des vorhergehenden angegeben wird:

$$x_1 = 5 \text{ und } x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

($n = 1, \dots, 999$).

Diese Vorgabe in der Aufgabe setzte stillschweigend voraus, daß stets $x_n \neq 0$ ist.

Zum Beweis der Behauptung

$$4 \leq x_n \leq 5 \text{ für alle } n = 1, \dots, 1000$$

bietet sich damit die Methode der vollständigen Induktion an, wobei dann diese Ungleichung sogar für jede natürliche Zahl n bewiesen werden kann.

a) Beweis von $x_n \geq 4$. Wir zeigen die Verschärfung $x_n > 4$. Für $n = 1$ gilt diese Behauptung wegen $x_1 = 5 > 4$. Es sei jetzt $x_k > 4$. Dann ergibt sich für das folgende Glied x_{k+1} ebenfalls

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 16}{2x_k} = \frac{(x_k - 4)^2}{2x_k} + 4 > 4.$$

Demnach gilt $x_n > 4$ für alle natürlichen Zahlen.

b) Beweis von $x_n \leq 5$.

Aus $x_n > 4$ folgt $x_n^2 + 16 < 2x_n^2$ und damit

$$\text{weiter } x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} < x_n, \text{ d. h.,}$$

die Folge x_n ist streng monoton fallend.

Wegen $x_1 = 5$ gilt dann sogar $x_n < 5$ für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

Bemerkungen: Fast alle Teilnehmer haben induktive Schlußweisen benutzt, wenn auch mit recht unterschiedlich ausgeprägten Darstellungsweisen. (Hier hatten einige Frühstarter Schwierigkeiten. Die Methode der vollständigen Induktion ist erst Unterrichtsgegenstand der 11. Klasse.) Durch Teile mit indirekter Beweisführung haben dabei einige Schüler die logische Struktur ihres Beweises unnötig verkompliziert.

Fehler traten bei der Behandlung von Ungleichungen auf. (So wurden z. B. Ungleichungen ohne nähere Untersuchungen dividiert; oder es wurde durch x_n dividiert, ohne vorher zu zeigen, daß $x_n > 0$ ist.)

In einzelnen Beweisteilen wurden zum Teil recht interessante Ansätze vorgelegt. Für den Schluß aus $4 \leq x_k \leq 5$ auf $4 \leq x_{k+1} \leq 5$ wurden unter anderem

$$x_k = 4 + a \text{ und } x_k = 5 - b$$

$$\text{mit } 0 \leq a, b \leq 1$$

gesetzt oder folgende Umformungen benutzt

$$-1 \leq x_k \leq 0, (x_k - 5)^2 \leq 1,$$

$$\frac{x_k^2 + 16}{2x_k} \leq 5 - \frac{4}{x_k} < 5.$$

Schließlich sei bemerkt, daß sich aus dem bekannten Vergleich des arithmetischen und geometrischen Mittels ergibt

$$\frac{x_n^2 + 16}{2x_n} \geq \frac{2\sqrt{x_n^2 \cdot 16}}{2x_n} = 4;$$

daraus ergibt sich dann leicht $x_n \geq 4$ für alle n .

Die Aufgabe war für die Teilnehmer leicht; das unterstreicht der folgende Ergebnis-

Punkte 0 1 2 3 4 5 6 7

Anzahl - 1 4 4 3 9 18 59

Dr. sc. E. Quaisser, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht Potsdam

6. (nach einem Vorschlag der Aufgabenkommission)

Angenommen, für ein reelles c habe das System (1), (2), (3) eine Lösung (x, y) . Dann ergibt sich aus (1) und (3) die Beziehung $x^2 - 2x + c < -2x + 1$, d. h. $c < 1 - x^2$ und somit $c < 1$. Eine Lösung kann daher höchstens für $c < 1$ existieren. Umgekehrt hat das System (1), (2), (3) für jedes c mit $c < 1$ eine Lösung, z. B. eine mit $y = c$. Für diesen Wert von y ist es nämlich äquivalent zu

$$x^2 - 2x < 0, \quad (4)$$

$$0 < x, \quad (5)$$

$$c < -2x + 1; \quad (6)$$

(4) und (5) sind äquivalent mit den Ungleichungen

$$0 < x < 2, \quad (7)$$

und (6) ist äquivalent mit

$$x < \frac{1-c}{2}. \quad (8)$$

Wegen $c < 1$ gilt $\frac{1-c}{2} > 0$, und demnach sind

(7) und (8) durch reelle x erfüllbar.

Das System (1), (2), (3) hat folglich genau für alle reellen Zahlen c , die kleiner als 1 sind, eine Lösung.

Bemerkungen: Einen solchen rein analytischen Weg versuchten nur wenige Schüler. Überwiegend wurde ein Lösungsweg beschritten, bei dem man die Funktionen

$$y = x^2 - 2x + c, \quad (1')$$

$$y = x + c, \quad (2')$$

$$y = -2x + 1 \quad (3')$$

graphisch darstellt und die Lösungsmenge des Ungleichungssystems (1), (2), (3) als Menge aller Punkte mit den Koordinaten (x, y) erhält, die sowohl oberhalb der Parabel (1') als auch unterhalb der Geraden (2') und unterhalb der Geraden (3') liegen. Hierbei wurde jedoch oft die Anschauung zu stark benutzt, so daß die gezogenen Folgerungen nicht immer schlüssig waren. Insbesondere fehlte vielfach eine saubere Behandlung des Falles $c = 1$, denn die anschauliche Feststellung, daß dann die Gerade (3') Tangente der Parabel (1') ist, bedarf natürlich einer Begründung. Die Bewertung ergab folgende Punkteverteilung:

Punkte 0 1 2 3 4 5 6 7

Anzahl 5 4 12 9 11 26 11 20

Dr. K.-D. Drews, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Ungleichungen

Teil II

Fortsetzung aus Heft 1/82

Klasse 8

▲ 1 ▲ Gegeben ist die Ungleichung $3x + 4 < 15$ mit $x \in \mathbb{R}$. Nenne rationale Zahlen, die nach dem Einsetzen für x die gegebene Ungleichung

a) zu einer wahren Aussage,

b) zu einer falschen Aussage werden lassen!

▲ 2 ▲ Ein Vater ist viermal so alt wie sein Sohn. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und das seines Sohnes (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die größer als 50, aber kleiner als 60 ist. Ermittle das Lebensalter von Vater und Sohn!

▲ 3 ▲ Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, daß $0 < p < q$ gilt.

a) Ordne die Zahlen $1, \frac{p}{q}, \frac{q}{p}$ der Größe nach!

Beginne mit der kleinsten Zahl!

b) Stelle fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

▲ 4 ▲ Welcher der beiden Brüche

$$\frac{5678901234}{6789012345} \text{ und } \frac{5678901235}{6789012347}$$

$$\text{ist der größere von beiden?}$$

Klasse 9

▲ 1 ▲ Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln oder Nachschlagen in einer Zahlentafel fest, welche der beiden reellen Zahlen $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ die größere von beiden ist!

▲ 2 ▲ Lösen Sie das folgende lineare Ungleichungssystem!

$$\begin{cases} 3x - 4 < x \\ 8 - 7x < 25 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in P \text{ (Menge der reellen} \\ \text{Zahlen)} \end{matrix}$$

▲ 3 ▲ Es ist zu untersuchen, ob die Ungleichung $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$ eine wahre Aussage darstellt!

Klasse 10

▲ 1 ▲ Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , welche die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} > 1 \text{ erfüllen!}$$

▲ 2 ▲ Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x stets $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ gilt!

▲ 3 ▲ Es ist zu beweisen, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c die Ungleichung $a + b + c \geq 2 \cdot \sqrt{c(a+b)}$ gilt!

▲ 4 ▲ Beweisen Sie, daß $6 > \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ gilt!

J. Lehmann/Th. Scholl

Lösungen



Lösungen zu: Ungleichungen

Teil I und Teil II

(Klasse 1 bis 7, siehe Heft 1/82 und Klasse 8 bis 10, siehe S. 46)

Klasse 1

▲ 1 ▲ $a=0, 1, 2$; wenn $a=0$, so $a<3$; wenn $a=1$, so $a<3$; wenn $a=2$, so $a<3$.

▲ 2 ▲ $a=0, 1, 2, 3$

▲ 3 ▲ $u=0, 1, 2, 3$

▲ 4 ▲ $62<69$, denn $2<9$

Klasse 2

▲ 1 ▲ $7<11$, denn $7+4=11$

▲ 2 ▲ x liegt zwischen 48 und 53, also $x=49, 50, 51, 52$

▲ 3 ▲ $3 \cdot 4 < 5 \cdot 4$, denn $3 < 5$

▲ 4 ▲ $y=0, 1, 2$

Klasse 3

▲ 1 ▲ $700 < 900$, denn $7 \cdot 100 < 9 \cdot 100$, weil $7 < 9$

▲ 2 ▲ x liegt zwischen 5897 und 5903, also $x=5898, 5899, 5900, 5901, 5902$

▲ 3 ▲ $75 < 386 < 392 < 397 < 857$

▲ 4 ▲ $x=59, 60, 61$

Klasse 4

▲ 1 ▲ $70000 > 40000$, denn $7 \cdot 10000 > 4 \cdot 10000$, weil $7 > 4$

▲ 2 ▲ $a=60000, 70000$

▲ 3 ▲ $x_1=10001$ und $x_2=99999$

▲ 4 ▲ $(0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (2; 0)$

Klasse 5

▲ 1 ▲ $\frac{1}{9} < \frac{4}{9} < \frac{5}{9}$, denn $1 < 4 < 5 < 10$

▲ 2 ▲ a) Aus $2 < 3$ folgt $2+5 < 3+5$, also $7 < 8$

b) Aus $9 > 6$ folgt $9 \cdot 11 > 6 \cdot 11$, also $99 > 66$

▲ 3 ▲ a) $x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

b) $z=0, 1, 2, 3, 4$

c) $d=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

d) $a=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

e) $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

▲ 4 ▲ $4 \cdot 3 < 4^3$, denn $12 < 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

▲ 5 ▲ Es existieren genau drei Zahlentripel (a, b, c) ; sie lauten $(1, 2, 3), (1, 2, 4)$ und $(1, 2, 5)$.

Klasse 6

▲ 1 ▲ a) Aus $\frac{3}{5} < \frac{x}{5} < \frac{8}{5}$ folgt $3 < x < 8$, also $L=\{4, 5, 6, 7\}$

b) $\frac{162}{198} < \frac{99 \cdot x}{198} < \frac{176}{198}$, also $162 < 99 \cdot x < 176$,

also $L=\emptyset$

c) $3x < 20$ und $12 < 5x$,

also $1 \leq x \leq 6$ und $x \geq 3$,

also $L=\{3, 4, 5, 6\}$

▲ 2 ▲ a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) : 2 = \frac{5}{8}$;

$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) : 2 = \frac{9}{16}$; $\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) : 2 = \frac{11}{16}$

b) Wegen $\frac{225}{63} < x$ und $x < \frac{168}{63}$ existiert keine gebrochene Zahl x , die diese Ungleichung erfüllt.

c) $\frac{27}{4} > x > \frac{6}{4}$,

also $x = \frac{7}{4}$ oder $x = \frac{8}{4}$ oder $x = \frac{11}{4}$

▲ 3 ▲ a) $1,83 + 0,5 > 1,14 + 1,17$, denn $2,33 > 2,31$

b) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} < \frac{36}{12}$, denn $\frac{17}{6} < \frac{18}{6}$

c) $2\frac{3}{4} - \frac{1}{5} < \frac{27}{5} - \frac{22}{7}$, denn $\frac{31}{20} < \frac{79}{35}$,

weil $31 \cdot 35 < 20 \cdot 79$

▲ 4 ▲ Aus der Dreiecksungleichung folgt $e < a+b$ und $e < c+d$, also $2e < a+b+c+d$ bzw. $f < a+d$ und $f < b+c$, also $2f < a+b+c+d$ und somit $2e+2f < 2a+2b+2c+2d$, also auch $e+f < a+b+c+d$.

Klasse 7

▲ 1 ▲ Aus $a < b$ folgt $\frac{a}{b} < 1$. Aus $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$ folgt $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Daraus folgt weiter

$\frac{h_b}{h_a} < 1$, also $h_b < h_a$. Analog dazu gilt $h_c < h_b$, also auch $h_c < h_b < h_a$ und somit $h_a > h_b > h_c$.

▲ 2 ▲ Aus $3 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{12}{100} < (3+x) \cdot \frac{30}{100}$ und $3 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{12}{100} > (3+x) \cdot \frac{20}{100}$ folgt

$210 + 12x < 90 + 30x$ und

$210 + 12x > 60 + 20x$, also $120 < 18x$ und

$150 > 8x$, also $x > \frac{20}{3}$ und $x < \frac{75}{4}$, also

$\frac{20}{3} < x < \frac{75}{4}$. Es müssen mehr als $6\frac{2}{3}$ Liter,

aber weniger als $18\frac{3}{4}$ Liter 12%iger Säure zugesetzt werden.

▲ 3 ▲ Aus $a < b$ folgt $a+ab < b+ab$, also $a(b+1) < b(b+1)$, also $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$.

▲ 4 ▲ a) $x < 0$, b) $x > 8$ oder $x < -8$,

c) $-14 < x < 10$, d) $x > 0$ oder $x < -2$

Klasse 8

▲ 1 ▲ a) $3x < 11$, also $x < \frac{11}{3}$; alle rationalen

Zahlen kleiner als $\frac{11}{3}$ lassen nach dem Einsetzen für x die gegebene Ungleichung zu einer wahren Aussage werden.

b) Alle rationalen Zahlen größer als $\frac{11}{3}$

lassen die gegebene Ungleichung zu einer falschen Aussage werden.

▲ 2 ▲ Der Sohn sei x Jahre, der Vater also $4x$ Jahre alt; dann gilt $50 < x+4x < 60$, also $50 < 5x < 60$, also $10 < x < 12$, also $x=11$. Der Sohn ist 11 Jahre, der Vater 44 Jahre alt.

▲ 3 ▲ a) Aus $p < q$ folgt nach Division durch p bzw. q zunächst

$1 < \frac{q}{p}$ und $\frac{p}{q} < 1$. Daraus folgt $\frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}$.

b) Man bildet $\frac{q}{p} - 1 = \frac{q-p}{p}$ und $1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$.

Da $p < q$ und somit $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$ ist, gilt $\frac{q-p}{q} < \frac{q-p}{p}$.

Also liegt $\frac{p}{q}$ näher an 1 als $\frac{q}{p}$.

▲ 4 ▲ Setzt man $\frac{5678901234}{6789012345} = \frac{x}{y}$,

so gilt $\frac{5678901235}{6789012347} = \frac{x+1}{y+2}$ und weiter

$\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy+2x-xy-y}{y(y+2)} = \frac{2x-y}{y(y+2)}$.

Da $2x > y$ ist, folgt $2x-y > 0$

und wegen $y > 0$ somit $\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} > 0$.

Es gilt also $\frac{5678901234}{6789012345} > \frac{5678901235}{6789012347}$.

Klasse 9

▲ 1 ▲ Es gilt $\sqrt{57} > \sqrt{49} = 7$.

Also ist $4 \cdot 70 = 280 < 253 + 20 \cdot 7 < 253 + 20\sqrt{57} + 4 \cdot 57$

und somit

$(2\sqrt{70})^2 < (5+2\sqrt{57})^2$, $2\sqrt{70} < 5+2\sqrt{57}$, $7+2\sqrt{70}+10 < 3+2\sqrt{57}+19$ und damit

$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2 < (\sqrt{3}+\sqrt{19})^2$,

also $\sqrt{7}+\sqrt{10} < \sqrt{3}+\sqrt{19}$.

▲ 2 ▲ Aus $3x-4 < x$ folgt $L_1 = \{x < 2; x \in P\}$; aus $8-7x < 25$ folgt $L_2 = \{x > -\frac{17}{7}; x \in P\}$.

Daraus folgt weiter $L = L_1 \cap L_2 = \{-\frac{17}{7} < x < 2; x \in P\}$.

▲ 3 ▲ Aus $5^3+6^3=125+216=341$ und $7^3=343$ folgt $5^3+6^3 < 7^3$. Durch äquivalentes Umformen erhalten wir daraus

$\frac{5^3}{7^3} + \frac{6^3}{7^3} < 1$, $\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1$.

Wegen $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} < \left(\frac{5}{7}\right)^3$ und $\left(\frac{6}{7}\right)^{10} < \left(\frac{6}{7}\right)^3$

gilt somit $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1$,

also $5^{10}+6^{10} < 7^{10}$. Die Aussage ist wahr.

Klasse 10

▲ 1 ▲ Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der Ungleichung nur, wenn $2x-1 > 0$ und $x-9 > 0$ gilt. Dies ist genau für $x > 9$ der Fall. Nun gilt

$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x-1) + \frac{1}{2} \cdot \lg(x-9) > 1$,

$$\lg(2x-1) + \lg(x-9) > 2,$$

$$\lg(2x-1)(x-9) > \lg 100,$$

$$(2x-1)(x-9) > 100, 2x^2 - 19x - 91 > 0,$$

$$x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2} > 0, (x-13)(x+3,5) > 0.$$

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

a) $x-13 > 0$ und $x+3,5 > 0$, $x > 13$ und $x > -3,5$ also $L_1 = \{x > 13; x \in P\}$

b) $x-13 < 0$ und $x+3,5 < 0$, $x < 13$ und $x < -3,5$, also $L_2 = \{x < -3,5; x \in P\}$.

Wegen $x > 9$ ist nur $x > 13$ Lösung der gegebenen Ungleichung.

▲ 2 ▲ Aus $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ folgt

$$(|\sin x + \cos x|)^2 \leq 2.$$

Nun gilt $(\sin x + \cos x)^2 =$

$$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 + \sin 2x. \text{ Daraus folgt}$$

weiter $1 + \sin 2x \leq 2$, also $\sin 2x \leq 1$. Weil $-1 \leq \sin x \leq 1$ für alle reellen x gilt, wird die Ungleichung erfüllt.

▲ 3 ▲ Durch Quadrieren erhalten wir

$$(a+b+c)^2 \geq 4c(a+b)$$

$$(a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 \geq 4c(a+b),$$

$$(a+b)^2 - 2c(a+b) + c^2 \geq 0$$

$$(a+b+c)^2 \geq 0.$$

▲ 4 ▲ Aus $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ folgt $\frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2}$,

also $6 < 3+2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < 3$, denn $8 < 9$

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Kaiser,
S. 23

▲ 2207 ▲ Aus $x > 3$ folgt $x^2 > 9$ und $x^5 = x^2 \cdot x^3 > 9x^3$. Dann gilt $x^5 - 4x^3 > 5x^3 > 0$.

Außerdem folgt aus $x^2 > 9$, daß

$$x^4 = x^2 \cdot x^2 > 9x^2$$

$$= 3x^2 + 2x^2 + 4x^2 \text{ und damit}$$

$$x^4 > 3x^2 + 2x + 4, \text{ d. h.}$$

$$x^4 - 3x^2 - 2x - 4 > 0. \quad (2)$$

Addiert man die gleichsinnigen Ungleichungen (1) und (2), so erhält man

$$x > 3 \Rightarrow P(x) > 0.$$

Folglich kann für $x > 3$ nicht $P(x) = 0$ gelten.

Lösung zum Zahlenrätsel, S. 33

Wagerecht: 2. 50, 5. 36, 6. 12, 10. 10, 11. 30, 12. 17, 13. 12, 14. 24, 15. 31, 18. 11, 19. 42, 21. 17, 23. 13, 25. 20, 26. 13, 27. 39, 29. 18, 31. 29

Senkrecht: 1. 2522, 8. 89, 9. 10, 17. 59, 20. 2017, 22. 2401, 28. 1458, 30. 2002

Schräg links nach unten: 3. 10, 7. 1717, 16. 1777, 24. 8515

Schräg rechts nach unten: 4. 021, 7. 1736, 16. 1802, 24. 8192

Lösungswort (Lebensdaten von Évariste Galois): 25. 10. 1811 bis 31. 5. 1832

Lösung zu: Olympiade-Kryptogramm, S. 39

Angenommen, es gäbe eine Lösung dieses Gleichungssystems, dann kann 0 nur 1 sein.

Das folgt aus Gleichung (1) $0 \cdot 0 = 0$ und den Bedingungen der Aufgabe. Durch Einsetzen von 0 = 1 in die Gleichungen (1) bis (9) ergibt sich die Lösung:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \\ 11 \cdot 11 &= 121 \\ 111 \cdot 111 &= 12321 \\ 1111 \cdot 1111 &= 1234321 \\ 11111 \cdot 11111 &= 123454321 \\ 111111 \cdot 111111 &= 12345654321 \\ 1111111 \cdot 1111111 &= 1234567654321 \\ 11111111 \cdot 11111111 &= 123456787654321 \\ 111111111 \cdot 111111111 &= 12345678987654321 \end{aligned}$$

Lösung zu: Geometrische Plaudereien,

IV. Umschlagseite

▲ 1 ▲ 1. b, c, d; 2. a, c, d

▲ 2 ▲ 1. a und b; 2. a und c; 3. a, c und d

▲ 3 ▲ a) 9 Quadrate bzw. 11 Quadrate

b) Diese Figur ist ein Quadrat, dessen Seiten aus 4 Hölzchen bestehen.

▲ 4 ▲ a) 4 Symmetrieachsen;

b) 1 Symmetrieachse;

c) 2 Symmetrieachsen;

d) unendlich viele Symmetrieachsen;

e) 2 Symmetrieachsen;

f) keine Symmetrieachse;

g) 4 Symmetrieachsen;

h) 2 Symmetrieachsen;

▲ 5 ▲ Bedeutung Anzahl der Symmetrieachsen

a) Einfahrt verboten 2

b) Einbahnstraße 1

c) Parkverbot 2

d) Fahrverbot für mehrspurige Kraftfahrzeuge 1

e) Flugbetrieb 1

f) Warnkreuz am Bahnübergang 2

g) Wartepflicht bei Gegenverkehr keine

h) Sackgasse 1

▲ 6 ▲ a) Netz einer Pyramide;

b) kein Netz eines Körpers;

c) Netz eines Quaders;

d) Netz eines Würfels;

e) kein Netz eines Körpers;

f) Netz eines dreiseitigen Prismas

▲ 7 ▲ b, c

▲ 8 ▲ $\overline{NO} \cong \overline{KJ}$; $\overline{CD} \cong \overline{AB}$; $\overline{FE} \cong \overline{LM}$;

▲ 10 ▲ a) EHE; b) HEIDE; c) EI; d) EID;

e) ECKE; f) BEIDE

Lösung zu:

In freien Stunden • alpha-heiter

Mathematische Begriffe gesucht

Kreistangente; Peripheriewinkel; Kreisausschnitt; Sehnenviereck

Kryptogramme

$$2635 + 4627 + 1031 = 8293$$

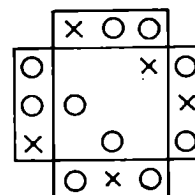
$$1086 + 1086 + 7680 = 9852$$

$$1827 + 1827 + 2803 + 2803 = 9260$$

Magische Figur

Summe	28				31				34				37
a	2	2	2	5	5	5	8	8	8	10	11	11	
b	8	7	4	7	1	1	5	1	1	4	1	1	
c	12	4	9	3	9	12	3	6	12	3	6	9	

Magisches Kreuz



Füllrätsel

1. Tabelle, 2. Produkt, 3. Leibniz,
4. Tangens, 5. Periode, 6. Drehung,
7. Bolzano, 8. Trinome, 9. Inkreis,
10. Anstieg, 11. Strecke, 12. Einheit,
13. Ellipse

Lösungswort: Trigonometrie

Kreuzzahlrätsel

4	8	2	1	3	7	2	9
3		5	3	3	6		9
2	8	7		8	3	1	
	10	8	1	6	4		
3	7		8	3	6		
9		16	1	2	6		7
2	1	6		1	2	8	

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

Für dreijährige Teilnahme (Fortsetzung)

Carsten Karl, Aken; Cathrin Münster, Anklam; Kathrin Wagner, Antonsthal; Sylvia Köttig, Apolda; Tino Viertel, Auerbach; Anka Sommer, Augsdorf; Uwe Schröder, Bad Brambach; Solveig vander Velde, Ines Wagner, Ralph Voigt, Jens Humpisch, Jan Reichenbach, Sven Stoeßer, alle Bad Gottleuba; Steffen Weber, Uta Bittorf, Joachim Krug, alle Tiefenort; Kathrin Gädke, Torgelow; Ralf Gössinger, Ray Langlotz, Ole Glänzer, alle Unterbreizbach; Uwe Landgraf, Vacha; Dirk Wenzlaff, Heike Schulz, beide Vitte; Gisbert Thieme, Wallhausen; Regina Frindt, Udo Michallik, Irene Michallik, Susanne Anschutz, alle Waren; Margret Boettcher, Thomas Harz, Stefan Thäter, Dirk Lehmann, alle Weimar; Barbara Schütze, Weißenfels; Steffen Konietzky, Weißwasser; Annett Seidel, Agnes Jorzyk, beide Wismar; Thomas Peuker, Jörg Angelmann, Karsten Busse, alle Wittenberg; Irene Zöll, Wittenberge; Thomas Pribus, Wolfgang Behrend, beide Wittstock; Maik Weiss, Kerstin Jung, beide Wöbbelin; Claudia Bock, Wolfen; Astrid Keller, Wolgast; Udo Riedel, Zeitz; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Birgit Erdmann, Heide Hilse, Ralph Paulsen, Annegret Linke, alle Zittau; Romi Riedel, Zollschtwitz; Mathias Goltzsche, Zschopau; Elke Gorau, Zwickau; Hella Gössel, Sönke Maeß, beide Bad Doberan; Kerstin Messerschmidt, Heiko Stein, beide Bad Liebenstein; Ute Baumberg, Sybille Kerner, beide Bad Salzungen; Raik Langlotz, Bärenklau; Kirsten Hantke, Bautzen; Annette Pietsch, Berga; Ines Vinzelberg, Bergwitz; Christiane Mayer, Oliver Wenzel, Bernhard Napiontek,

Reinhard Wegener, Rainer Krenzke, Norbert Dorn, Cathrin Voigt, Carmen Voigt, Jens Prochno, Michaela und Steffen Padelt, Cornelia Wolf, Beate und Stefan Müller, Steffen Meißner, Thomas Honigmann, Grit Weber, Tom Pfeifer, Hans-Jörg Wieser, alle Berlin; Jörg Leine, Berlestedt; Marlies Reschke, Karen Sourell, beide Bernau; Joachim Riedel, Oliver Haase, beide Bestensee; Helge Dürschke, Bitterfeld; Jens Steiner, Blöderstedt; Susanne Sternberg, Borne; Marlis Schröder, Brandenburg; Klaus Asmus, Kati Riedel, Mario Bachmann, Ulrike Langer, Lutz Reum, Jens Füssel, alle Breitenungen; Dirk Hampicke, Buchwäldchen; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Thomas Bartmuß, Burow; Olaf Nitzsche, Callenberg; Bernd Schütze, Camin; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Angelika Jung, Jörg Rubelowski, alle Clingen; Matthias Winkler, Cossebaude; Anne Ruprecht, Silke Riedel, Jens Hoffmann, Tina Thümmel, Manfred Ertelt, alle Coswig; Andreas Stenzel, Barbara Konzack, Anke Richter, Iris Forth, Thomas Lindershausen, Jens Leberwurst, Tino Seidler, alle Cottbus; Jürgen Baum, Creuzburg; Jörg Uhlig, Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Jens Fuchs, Jörg Lorenz, alle Dahme; Ralf-Torsten Scheel, Dahmen; Katrin Möller, Damgarten; Volker Schmidt, Norbert Klawuhn, beide Demmin; Ute Fehrmann, Deutschenbora; Katrin Mädler, Dessau; Gabriele Kruse, Dingelstädt; Kornelia Tolkmitt, Döbertin; Evelyn Scharf, Döbeln; Antje Remke, Döberitz; Carola Schwerdtner, Heiko Scholz, Heiko Merwitz, alle Dohna; Michael Beetz, Dreetz; Ralf Laguna, Dreileben; René Pratsch, Martin Jäger, Stefan Mattausch, Klaus Dieter Pursche, Michael Nitsche, Iris Wislicenus, Oliver Geupel, Peter Förster, Sylvia Günther, Sabine Mönnig, Helmut und Carsten Schreiber, Michael Gehre, Rolf Dach, Thomas Hübner, Carola Matthes, Annett Wustmann, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droybig; Kathrin Wegner-Repke, Bert Minske, Norma Koenig, alle Eberswalde; Sven Weißbach, Ehrenfriedersdorf; Thomas König, Ehrenhain; Monika Gläß, Holger Fey, Winnie Günther, Ulf Arnold, Jana Schwabe, Bolko Schumann, alle Eisenach; Olaf Leschnik, Anke Edler, Maria Thiel, alle Eisleben; Jens Kühne, Ellrich; Bertram Siebenkäs, Martina Helms, beide Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Heike Morgner, Falkenstein; Andreas Möller, Silke Weisheit, Astrid Abt, Manuela Mäder, Uwe Weyh, Annette Spangenberg, Finowfurt; Hans Schröder, Bernd Müller, beide Finsterwalde; Roland Leffler, Claudia Niebock, Susanne Herrmann, Ilka Forbrig, Beate Rothamel, alle Floh; Roberto Hubein, Forst; Jan Seyfarth, Frankfurt; Heike Voigt, Frauenhain; Henry Kost, Freiberg; Frank Ribbe, Katrin Pommer, Martina Haackert, alle Friedeburg; Jördis Drunk, Jens Lull, beide Friedland; Henry Mäder, Frohburg; Michaela Köhler, Susann Laue, beide Gerbstedt; Torsten Pfützenreuter, Gerterode; Ansgar Heise, Görlitz; Jens Penzler, Görsbach; Karola Suppe, Gotha; Karsten Sonnemann, Grabow; Sigurd Werner, Mathias Schleif, beide Gransee; Signe Orawski, Kathrin Weiß, Andreas Kersten, Annette Grunert, alle Gräfenhainichen; Dirk Langheir, Annette Surkus, beide Greifswald; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Ronald Herzog, Rainer Mielke, beide Gr. Bademeusel; Martina Mager, Großharthau; Katrin Weiß, Großbrösersdorf; Katrin Kießling, Boris Friedrich, beide Großschönau; Ramiro Viertel, Grünbach; Thorsten Hannusch, Peter Meusel, Uta Riedel, alle Guben; Herbert Süßlohn, Erik Opelt, beide Güstrow; Olaf Zill, Hainichen; Katrin Strathaus, Dirk Lichtblau, beide Halberstadt; Guido Vollbeding, Haldensleben; Henning Salz, Gudrun Schleiff, beide Halle; Karsten Müller, Jörg Oehlschläger, Thomas Höche, Holger Röbner, alle Halle-Neustadt; Annett Hochmuth, Karsten Dressel, beide Hammerbrücke; Ulrich Möhrke, Uta Schumann, Ina Lenz, Jutta Schumann, alle Havelberg; Robert Siegel, Hecklingen; Uta Reck, Heiligenstadt; Viola Mettner,

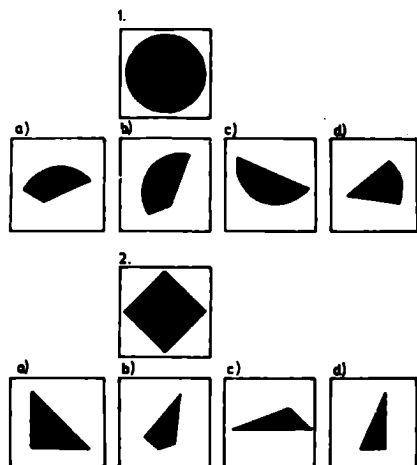
Hennigsdorf; Falk Hartmann, Hermannsdorf; Stefan Huth, Herzberg; Mario Laufer, Heyerode; Katrin Döbel, Hohenleipisch; Annett Neubert, Carsten Leibnitz, beide Hohenstein; Heike Rose, Holzdorf; Kai Schröder, Holzengel; Henry Möller, Peter Hermann, beide Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Elke Schumann, Jahnishausen; Christian Engel, Jarmen; Katrin Tschirpke, Ulrich Scheler, Christian Dietrich, Michael Mannstadt, alle Jena; Heike Bahls, Kandelin; Susanne Ritzke, Traute Ziegler, beide Karbow; Ingolf Knopf, Andreas Israel, Uwe Lippmann, Annett Schotte, Riko und Steffen Richter, Andreas Richter, Frank Ernst, Sebastian Horbach, Hildegard Geisler, alle Karl-Marx-Stadt; Matthias Schneider, Kemmlitz; Michael Fiedler, Udo Streller, beide Kleinmachnow; Anke Drewitz, Klosterfelde; Beate Hübner, Helge Müller, beide Königsee; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Dorit Wernicke, Köthen; Thoralf Blättermann; Könnern; Karsten Schmidt, Kolochau; Andreas Blaudzun, Krakow; Gert Künzelmann, Krina; Astrid Montag, Küllstedt; Kirsten Flohr, Torsten Büttner, Cathrin Ziemens, alle Laage; Steffen Heyde, Latdorf; Matthias Polle, Lauter; Diana Dreger, Legde; Jens-Uwe Lange, Gerald Nachtweih, Dietmar Schröder, Michael Herrmann, Michael Klaus, Andre Weber, alle Leinefelde; Ralf Laue, Petra Gollewsky, Johanna Düwel, Bianka Schulze, Sylvia Richter, Steffen Brumme, Thomas Kluge, Cornelia Zinke, Matthias Hübner, Stephan, Klemens und Thomas Rebbelmund, alle Leipzig; Ute Ukat, Leuna; Peter Groß, Lichtentanne; Lars Lange, Frank Klingenhöfer, beide Limlingerode; Christoph Kürner, Linz (Österreich); Bärbel Krieg, Marion Friedrich, Birgit Müller, Peter Remmert, Katrin Busch, Beate Lindig, Sabine Gottschling, Susann Neumeister, Torsten Matysik, Kerstin Klee, alle Lobenstein; Elke Springer, Glen Stachowski, Stefan Benada, alle Löbau; Simone Springwald, Heike Kühne, Stefan Brünner, alle Löderburg; Rene Schuster, Jürgen Hempel, Andrea Busch, Jörg Kerl, Silke Wiedewilt, alle Lössau; Ulf Brandes, Lüblow; Rainer Gerlach, Lübs; Christiane Höfer, Lugau; Ekkehard Ludwig, Lühmannsdorf; Jan Fuhge, Frank Wunderling, Peter Zienicke, Gaby Brandt, Susanne Wolf, alle Magdeburg; Achim Beinroth, Mansfeld; Lutz Thieme, Wolfram Hoppe, beide Marienberg; Martin Müller, Marlow; Lutz Büttner, Martinroda; Simone Brundgräber, Marxwalde; Joachim Kleinert, Meiningen; Thomas Baumann, Meißen; Andreas Strecker, Mario Steller, beide Merseburg; Gitta Knorre, Micheln; Beate Bozek, Müdenburg; Utz-Eckart Henze, Milow; Ramona Linß, Kerstin Roßmann, Petra Klein, Katrin Bischoff, alle Mittelstille; Tilo Grüneberger, Nerchau; Gunnar Mörke, Neubrandenburg; Arndt Kritzer, Steffen Göldner, Hans-Dieter Büchler, Anja Voß, alle Neustadt; Udo Heinß, Neustrelitz; Frank Schmidtmann, Nieder-crinitz; Annett Ludwig, Niederorla; Silke Riechen, Niederseidewitz; Steffen Göbel, Niederwiesa; Torsten Linß, Nordhausen; Matthias Drochner, Nossen; Astrid Hecker, Oberbösa; Frank Jäger, Oberschönau; Veit Wonneberger, Ohorn; Lutz Urban, Oppeln; Joern Grell, Oranienburg; Roland Pommer, Oschatz; Steffen Zielinski, Osternienburg; Gerlinde Lehmann, Pahrenz; Aike Hinrichs, Tibor Leitz, beide Parchim; Hellmut Schenk, Pirna; Andreas Denecke, Pogendorf; Heike Neumann, Henning Schulz, beide Potsdam; René Zimmer, Premnitz; Annett Braßel, Probstzella; Wieland Handke, Pulsnitz; Petra Richwien, Monika Müller, beide Quitzdöbel; Klaus-Peter Lindner, Stephan Weise, Ingolf Pitz, alle Rockwitz; Jens Papperitz, Carsten Rabeneck, Ingo Bandemer, Bettina Beurich, Kathrin Prescher, Enrico Handke, alle Radebeul; Dietrich Zwicker, Rastenberg; Irma Gößmann, Rheinsberg (Rentnerin); Anja Meuser, Jens Neubert, beide Ribnitz; Axel Kaminski, Frank Müller, beide Riesa; Heike Morgenstern, Röblingen; Beate Wichmann, Rodewitz; Uwe Gers, Ro-

senow; Thomas Holzerland, Kristin Saß, Andres Wiebke, Annett Seliger, alle Rostock; Sylvia Kirchner, Katrin Anton, Silke Luther, alle Roßdorf; Frank Schröter, Rotta; Andreas Gahabka, Ruhla; Sabine Wilk, Ruhland; Uwe Schwerk, Ruthen; Maren Pantzke, Bärbel Hössel, Jens Sommermann, alle Saalfeld; Marian Klima, Jana Musch, Sonja Marx, alle Saßnitz; Andrea Weidensdörfer, Sayda; Annette Schubert, Schalkau; Jörg Jähnel, Schkölen; Sven Hader, Schlottheim; Dirk Köpnick, Schladitz; Torsten Häfner, André Mau, Beate Malsch, Saskia Hellwig, alle Schmalkalden; Kurt Schulze, Schernberg; Petra Vater, Frank Sauber, Antje Klinder, Regina Schalle, Kornelia Heyer, Jana Radau, alle Schorssow; Ralf Stentzel, Jan Dehnelt, beide Schwarzenberg; Evi Binder, Schwaz (Österreich); Uta Möbius, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Frank Vollborth, Ralf Gretsche, beide Sondershausen; Heiko Granzow, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Andrea Neuber, Beate Nothnagel, Silke Recknagel, Heike Zimmermann, Michael Holland-Moritz, Angela Müller, Rene Bieber, Peter Luck, Jacqueline Häfner, Katrin Möller, Katarina Eckstein, Silke Holland-Moritz, Sabine Recknagel, Gabriele Reum, Katrin Gensler, Sigrid Szegunis, Michael Zeiske, Jens Wilhelm, Petra Zimmermann, alle Steinbach-Hallenberg; Math.-Club der Dr.-S.-Allende-OS, Stralsund; Heike Fehringer, Helmut Sauerbrei, beide Suhl; Torsten Schliephake, Stendal; Winfried Ulbrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Maik und Tobias Schönherr, Schmölln; Maik Kühne, Schwepnitz; Antje Kurtz, Schönebeck; Olaf Putensen, Thomas Fittkau, Matthias Herrmann, alle Schwerin; Ralph Huck, Sebnitz; Andrea Rosenau, Siegersleben; Susanne Krieger, Arlette Wetzel, beide Sömmerda; Heidi Böttger, Lydia Balzer, beide Sondershausen; Angelika Frank, Sponholz; Bernd Urbank, Spremberg; Torsten Roßnick, Stendal; Ines Voigt, Stülpe; Kerstin Mey, Suhl; Armin Singer, Teichwolframsdorf; Michael Frenz, Silvia Reinwarth, beide Teltow; Steffi Herrmann, Tiefenort; Grit Rosin, Töplitz; Wolfram Fischer, Torgau; Andrea Bähr, Torgelow; Andreas Beileites, Trebnitz; Dorothea Bornschein, Tröglitz; Ralf Krüger, Uebigau; Kerstin Schmidt, Silvia Schwierske, Christine Fladung, Christine Becker, Lars Brückner, Ingo Blaurock, Mario Blau-rock, Mike Herrmann, Mike Hindermann, Ullrich Kallenbach, Steffen Lämmerhirt, Frank Landsiedel, Jörg Raßbach, Jan Schneider, Holger Zapf, Christine Demny, Kristin Günther, Petra Guth, Marion Herbig, Christine Hermes, Silke Hoferichter, Regina Leinewer, Antje Meister, Doreen Siebert, Christiane Schmidt, Sabine Ullmann, Olaf Schaub, Mario Fischer, Dirk Ißbrücker, Thomas Matern, Wiebke Fleischhauer, Bettina Landsiedel, alle Vacha; Petra und Ute Borchers, Uwe und Ralf Dittmar, Edith Kirwitzke, Kerstin Nicolovius, Uta Michallik, alle Waren; Britta Bernhardt, Warin; Michael Fries, Wasserthaleben; Jan Herrmann, Wechselburg; Astrid Liebergesell, Weimar; Guntram Opitz, Weinböhla; Diana Ammann, Weißborn; Steffen Schröder, Birgit Koss, beide Weißwasser; Ramona Strickbrodt, Westerengel; Jürgen Jahns, Wilsleben; Gundel Müller, Wimmelburg; Klaus Michel, Wismar; Hans Gühring, Steffen Pietz, Kerstin Blüthner, alle Wittenberg; Andrea Hartwig, Ronald Reschke, Mario Bobzin, alle Wittstock; Astrid Merx, Wischershausen; Ralph Bock, Wolfen; Antje Grosa, Wolferstedt; Elke Eix, Cornelia Escher, beide Wolgast; Volker Richter, Wutha; Maik Schülermann, Zarrentin; Petra Schlawicke, Zehdenick; Antje Fiebig, Zeithain; Pier Bierbach, Anka Bönsch, Steffen Wunderlich, alle Zeitz; Andrea Schmidt, Grit Keiner, beide Zella-Mehlis; Jürgen Teßmann, Zerbst; Birgit Gawlik, Ronald Peschel, Andreas Seidel, Steffi Spatzier, alle Zittau; Harald Hempel, Zschoppach; Maik Dröbler, Marion Nenczak, Kerstin Kowaczek, Rüdiger Rabe, alle Zschornowitz; Sven Moldenhauer, Deutschenbora; Bernd Walter, Adorf

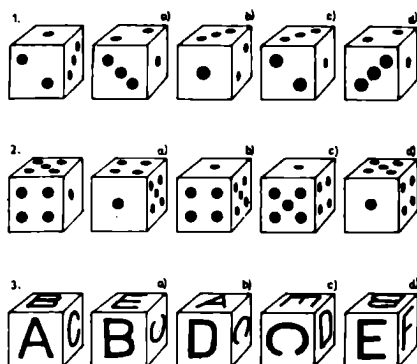
Speziell
für Klasse 5/6

Geometrische Plaudereien

▲1▲ Gib jeweils an, aus welchen der drei Figuren man die Ausgangsfigur zusammensetzen kann!



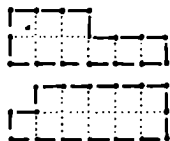
▲2▲ Welcher der Würfel a bis d in Bild 2 geht durch Drehung in den Ausgangswürfel 1, 2 bzw. 3 über?



▲3▲ Der Umfang der beiden Figuren wird durch 16 Hölzchen gebildet.
a) Bestimme die Anzahl der eingeschlossenen

Quadrate, deren Seitenlänge mit der Länge eines Hölzchens übereinstimmt!

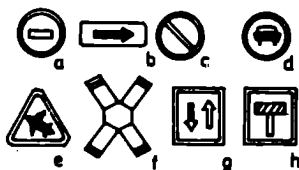
b) Lege aus den 16 Hölzchen eine Figur mit der größtmöglichen Anzahl von Quadraten, deren Seitenlänge mit der Länge eines Hölzchens übereinstimmt!



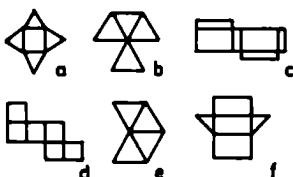
▲4▲ Zeichne, falls möglich, in jede der angegebenen Figuren alle Symmetrieachsen ein!



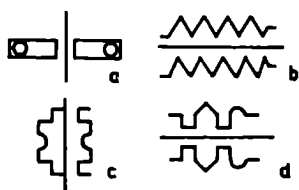
▲5▲ a) Welche Bedeutung haben die einzelnen Verkehrszeichen?
b) Wieviel Symmetrieachsen hat jedes dieser Zeichen?
Zeichne sie ein!



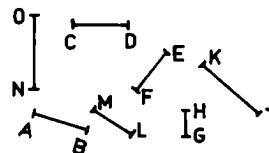
▲6▲ a) Welche der im Bild gezeichneten Figuren sind Netze von Körpern?
b) Benenne die Körper, zu denen Netze gezeichnet sind!



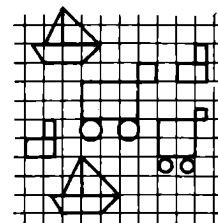
▲7▲ Jedes Beispiel in Bild 7 zeigt eine Gerade und zwei Figuren F1 und F2. Bei welchem Beispiel ist F2 nicht das Bild von F1 bei einer Spiegelung an der gezeichneten Geraden?



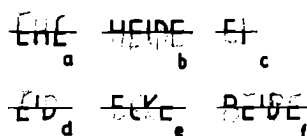
▲8▲ Versuche, nach Augenmaß zueinander kongruente Strecken zu finden!



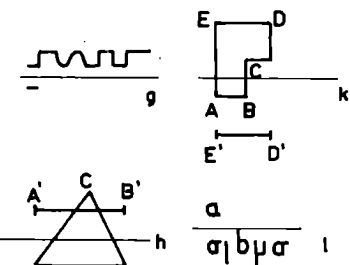
▲9▲ Welche der Figuren sind durch Verschiebungen auseinander hervorgegangen?



▲10▲ Welches Wort erhältst du, wenn du spiegelst?



▲11▲ Vollende, so daß jeweils das Spiegelbild der gezeichneten Figur entsteht!



L. Flade/H. Knopf

Das verunglückte Rechteck

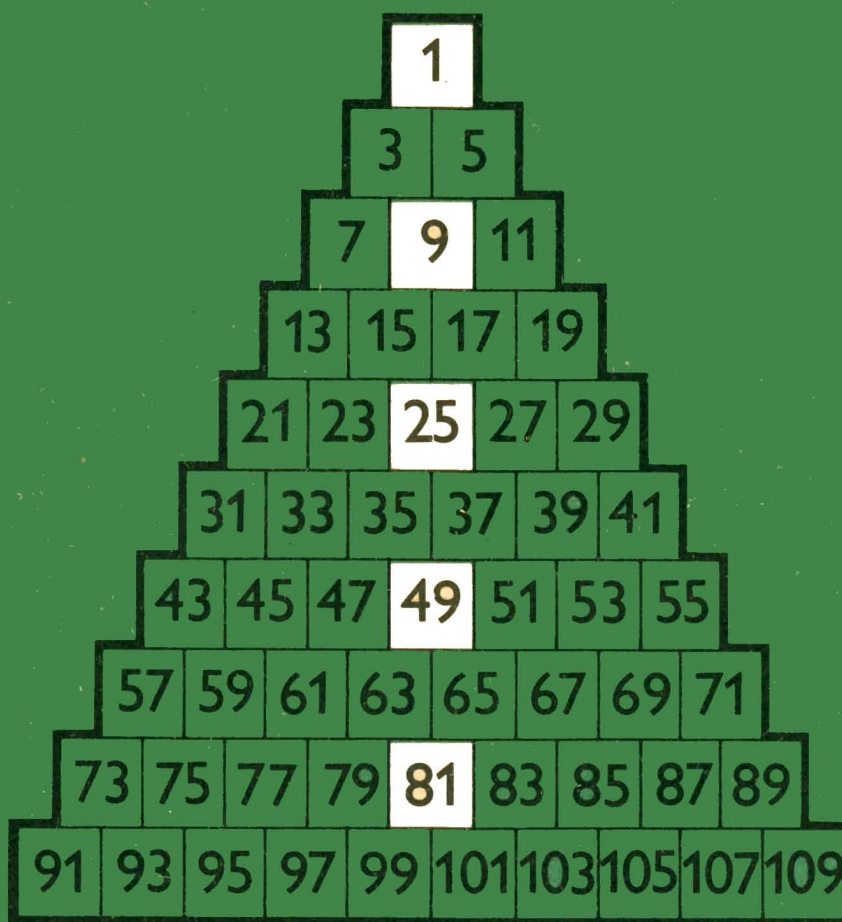
Ein Rechteck fuhr mit dem Quadrat auf einem schnellen Motorrad. Doch kamen beide nicht sehr weit! Zu hoch war die Geschwindigkeit. Woran sie beide nicht gedacht, in einer Kurve hat's gekracht. Sie ramnten eine Häuserwand, an der man sie verunglückt fand. Nun waren beide Invalid: ein Rhombus und ein Rhomboid.

Ehrenfried Winkler
(aus: Sächsisches Tageblatt)

alpha

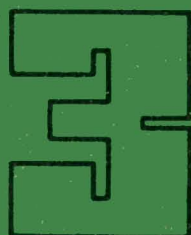
$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$1^3 =$	1
$2^3 =$	8
$3^3 =$	27
$4^3 =$	64
$5^3 =$	125
$6^3 =$	216
$7^3 =$	343
$8^3 =$	512
$9^3 =$	729
$10^3 =$	1000



$1^2 =$	1
$3^2 =$	9
$6^2 =$	36
$10^2 =$	100
$15^2 =$	225
$21^2 =$	441
$28^2 =$	784
$36^2 =$	1296
$45^2 =$	2025
$55^2 =$	3025

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Gerhard Hammer, Dresden (S. 52);
J. Jordan, Leipzig (S. 53, S. I.); ADN, Zen-
tralbild (S. 54, S. 55, S. 57); P. Schreiber (S.
59); Nitsche, Schwerin (S. 60); Bildarchiv
EOS C. F. Gauß (S. 61); H. Raphaelis, Leipzig
(III. U.-Seite) J. Sliva, Prag (S. 67)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Mathematikfachlehrer W. Scholz/
OS I, Königswusterhausen/W. Fahr, Berlin
(graph. Gestaltung)



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 26. Februar 1982

Erscheinungstermin: 22. Juni 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Was jeder wissen sollte:
Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten können [9]*
Dr. J. Gronitz, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 51 Eine Aufgabe und vier Lösungen [8]
Prof. Dr. W. Jungk, Direktor der Sektion Mathematik der Pädagogischen Hoch-
schule *Wolfgang Ratke* Köthen
- 52 „Schönste Mathematikbücher“ 1981
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 53 Eine „abenteuerliche“ Aufgabe [7]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 54 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jacob A. Smorodinsky [8]
Redaktion *Quant*/Kurtschatow-Institut für Atomenergie, Moskau
- 55 Zahlen und Fakten [5] Sach- und Anwendungsaufgaben
S. Rosin, IfL Quedlinburg, aus *Mathematik in der Schule*
- 56 Unser Haushalt und die Elektronik [6]
Christa Baran, aus *Guter Rat* 4/81
- 58 Die Mathematikerin *Emmy Noether* (1882 bis 1935) [7]
Die Frau als Mathematikerin
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 60 Sommerlager des Bezirksklubs Schwerin
Dr. H. Thamm, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Liselotte
Herrmann* Güstrow
- 61 Spezialschule physikalisch-technischer Richtung EOS C. F. Gauß
Frankfurt/Oder [8]
Autorenkollektiv der EOS C. F. Gauß
- 62 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 4 bis 6
Autorenkollektiv unter Leitung von Studienrat H.-J. Kerber, Bezirkskabinett für
außerunterrichtliche Tätigkeit Neubrandenburg
- 64 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: OStR J. Lehmann, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 66 Für den Briefmarkenfreund:
Der Admiral der Schiffbauwissenschaft [7]
A. Halameisär, Literat, Moskau
- 67 Für den Schachfreund: Matt durch die Dame [5]
H. Rüdiger, Grünheide
- 67 Zahlenspiel mit mathematischem Hintergrund [5]
Dr. K. Reichold, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 68 und Seiten VII, VIII Lösungen [5]
III. U.-Seite: mehr lesen – mehr wissen [5]
IV. U.-Seite: Ornamente aus der Mongolischen Volksrepublik [5]
Seite I, II, VII. XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]
3. Stufe (Bezirksolympiade, 6./7. Februar 1982)
Seite III, IV, V, VI: *alpha*-Ferienknobelheft
* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Was jeder wissen sollte:

Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten

1. Einleitung

Bei praktischen Aufgabenstellungen muß man ausgehend von einem Sachverhalt versuchen, ein mathematisches Modell aufzustellen. (Ein Modell ist dabei eine geeignete mathematische Beschreibung der in der Aufgabenstellung enthaltenen wesentlichsten naturwissenschaftlichen, technischen oder ökonomischen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten.) Es ist also die vorliegende Aufgabe „in Formeln oder in Gleichungen zu fassen“. Dieses Modell wird dann mit Hilfe eines entsprechenden Verfahrens gelöst. Dabei geht es im allgemeinen um eine zahlenmäßige (numerische) Lösung.

Vielfach verwendet man auch Rechenhilfsmittel (z. B. Tabellen, Rechner). Beim zahlenmäßigen Lösen treten eine Reihe von Problemen auf. Sie sind einerseits bedingt durch die Tatsache, daß die Werte (Daten), die in die Rechnung eingehen, meist Näherungswerte sind (Meßdaten, Werte aus Tabellen usw.), andererseits dadurch, daß man z. B. mit Digitalrechnern arbeitet, bei denen die reellen Zahlen durch eine endliche Ziffernfolge dargestellt werden und in denen nur elementare Operationen (Grundrechenoperationen, Vergleichsoperationen) möglich sind. Häufig muß man auch die Ausgangsaufgabe durch eine „Ersatzaufgabe“ annähern und zur Lösung ein Näherungsverfahren verwenden. Das führt dazu, daß sich Fehler „einschleichen“ und fortpflanzen. So muß man z. B. auch im Laufe der Rechnung ständig runden. Diese Rundungsfehler können sich *aufschaukeln*.

Einige Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten, sollen hier zusammengestellt und an Beispielen veranschaulicht werden.

2. Beispiel

Die genannte Problematik soll zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Aufgabe: Es ist bei gegebenem Flächeninhalt A die Seitenlänge x eines Quadrates auszurechnen.

Modell: Es gilt $x = \sqrt{A}$, damit erhält man als Gleichung $f(x) = x^2 - A = 0$. Das mathematische Modell ist also hier eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Lösung: Die erhaltene Gleichung kann man z. B. so lösen, daß man $\sqrt{A}$ mit Hilfe einer Näherungsformel berechnet. (Das Rahmenprogramm für Arbeitsgemeinschaften der Klassen 9 und 10 – *Praktische Mathematik* – sieht eine Behandlung der Näherungsberechnung von Potenzen und Wurzeln vor.)

Mit Hilfe der *Binomischen Reihe* erhält man

$$\sqrt{A} = \sqrt{k^2 + b} \approx k + \frac{b}{2k} = \frac{1}{2} \left(k + \frac{A}{k} \right).$$

Falls $A = 24$ ist, ergibt sich z. B.

$$\sqrt{24} = \sqrt{16 + 8} \approx \frac{1}{2} \left(4 + \frac{24}{4} \right) = 5 \text{ (Tafelwert: 4,899).}$$

Mit Hilfe einer bereits von Newton angegebenen Vorschrift

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{A}{x_i} \right); \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

und als Startwert x_0 , könnte man schrittweise eine Folge von Näherungen für die Lösung der Gleichung berechnen. (Man erhält ein sogenanntes *Iterationsverfahren*. Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die Folge der Näherungslösungen gegen die exakte Lösung.)

Man erhält mit $x_0 = 5$:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{24}{5} \right) = 4,9 \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(4,9 + \frac{24}{4,9} \right) = 4,899.$$

Bei der Lösung der Gleichung treten die für das numerische Rechnen typischen Probleme auf: Auswahl eines Verfahrens (meist ein Näherungsverfahren); Rundung; Fortpflanzung von Eingangs- und Rundungsfehlern usw.

Allgemein könnte die Aufgabenstellung unter der Überschrift *Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten* betrachtet werden.

3. Quellen und Klassifizierung von Fehlern

In einer beliebigen mathematischen Aufgabenstellung treten meist verschiedene Variable und Parameter auf. Um eine konkrete Lösung zu erhalten, müssen für die Variablen und Parameter Werte – Zahlen – eingesetzt werden.

$$\text{Beispiel: } A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2}; \quad g = 5 \text{ cm,}$$

$$h = 10 \text{ cm; damit } A_\Delta = 25 \text{ cm}^2.$$

Die Gesamtheit aller Werte, die gegeben sein müssen, um die geforderte Lösung einer Aufgabe zu erhalten, heißen *Anfangsdaten* oder *Anfangsinformationen*.

Die allgemeine Lösung einer Aufgabe ist somit eine Funktion der Anfangsdaten (z. B.: $A_\Delta = f(g, h)$). Bei den meisten Aufgaben sind diese Anfangsdaten Näherungswerte. Sie sind mit Fehlern behaftet, da sie z. B. Meßergebnisse aus Experimenten, Werte aus Tabellen, durch Runden entstandene Zahlen oder Lösungen anderer Aufgaben sind. Man erhält also bei der Lösung einer Aufgabe Resultate, deren Genauigkeit von den Anfangsdaten abhängt. Die Abweichung der exakten Lösung x von der Näherungslösung $\tilde{x}$ heißt *Fehler* ($\tilde{x} - x$). Fehler, die beim Lösen von Aufgaben durch ungenaue Anfangsdaten entstehen, heißen *Eingangsfehler*.

Die Eingangsfehler hängen nicht von der mathematischen Theorie ab. Sie pflanzen sich fort, und man muß deren Auswirkungen auf das Resultat untersuchen.

Wenn man eine Aufgabe löst, so muß man diese meistens durch eine andere Aufgabe ersetzen, die praktisch lösbar ist. Sehr oft ist eine analytische Lösung nicht möglich. Außerdem will man auch Rechenhilfsmittel einsetzen. Soll z. B. die Quadratwurzel aus einer Zahl bestimmt werden, verwendet man Näherungsformeln ($\sqrt{A} = \sqrt{k^2 + b} \approx \frac{1}{2} \left(k + \frac{A}{k} \right)$),

oder man bestimmt die Wurzel iterativ.

Die Lösung der *Ersatzaufgabe* muß der der Ausgangsaufgabe *benachbart* sein. Es dürfen keine zu großen Abweichungen auftreten. Wenn man genaue Anfangsdaten hat und anstelle der Lösung der Aufgabe die Lösung der Ersatzaufgabe vornimmt, erhält man natürlich nur eine Näherung der exakten Lösung.

Fehler, die dadurch entstehen, daß die Aufgabe durch eine *Ersatzaufgabe* angenähert wird, heißen *Verfahrensfehler*.

Bei der zahlenmäßigen Lösung einer Aufgabe erhält man außerdem Fehler durch Ungenauigkeiten im Rechengang selbst. So werden z. B. irrationale Zahlen ($\sqrt{2}$, π , e), die im Rechenprozeß benötigt werden, durch Näherungswerte ersetzt. Außerdem entstehen, da ein Rechner mit Zahlen, die aus endlich vielen Ziffern bestehen, rechnet, weitere Ungenauigkeiten durch das Runden.

Fehler, die durch Ungenauigkeiten im Rechengang entstehen, heißen *numerische Fehler*.

Der *vollständige Fehler* einer Lösung ($\tilde{x} - x$) setzt sich aus Eingangs-, Verfahrens- und numerischen Fehlern zusammen:

vollständiger Fehler

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{vollständiger Fehler}}$
Eingangsfehler (Anfangsdaten) $\rightarrow$
Verfahrensfehler (Ersatzaufgabe) $\rightarrow$ Lösung
numerischer Fehler $\rightarrow$
(Ungenauigkeiten im Rechengang)

Neben den bisher genannten Erscheinungen können noch weitere Probleme beim numerischen Rechnen auftreten. So können z. B. kleine relative Fehler in den Anfangsdaten zu großen relativen Fehlern im Ergebnis führen. Man spricht dann von einem *schlecht-konditionierten Problem*.

Nach diesem Überblick über einige Effekte, die beim numerischen Rechnen auftreten können, sollen diese an Beispielen erläutert werden.

4. Eingangsfehler und deren Fortpflanzung

$\varepsilon = \bar{x} - x$, wobei $\bar{x}$ der Näherungswert und x der exakte Wert ist, heißt *absoluter Fehler*; der Absolutbetrag der maximalen Abweichung vom exakten Wert heißt *absolute Fehler-schranke* Δx .

Es gilt $|\varepsilon| = |\bar{x} - x| = |x - \bar{x}| \leq \Delta x$ und $\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$.

Will man die Fortpflanzung von Fehlern untersuchen, dann muß man davon ausgehen, daß der Wert maximal mit dem Fehler $\pm \Delta x$ behaftet sein kann. Man muß also mit $x = \bar{x} \pm \Delta x$ rechnen.

Beispiel: Die Länge eines Eisenträgers sei $x = (134,44 \pm 0,01)$ m. Die absolute Fehler-schranke ist dann $\Delta x = 0,01$ m. Man kann das Meßergebnis nur bis auf eine Genauigkeit von $\pm 0,01$ m angeben, x liegt zwischen 134,43 m und 134,45 m.

Die Fortpflanzung von eingangsbedingten Fehlern läßt sich allgemein untersuchen. Hier sollen nur Fehler von Summe, Differenz und Produkt betrachtet werden.

Es seien $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Näherungswerte, Δx und Δy die absoluten Fehler-schranken. $\varepsilon_x = \bar{x} - x$ und $\varepsilon_y = \bar{y} - y$ die absoluten Fehler.

Es gilt dann:

$\varepsilon_{x+y} = (\bar{x} + \bar{y}) - (x + y) = \varepsilon_x + \varepsilon_y$, damit

$|\varepsilon_{x+y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$ und

$\Delta(x + y) \leq \Delta x + \Delta y$

$\varepsilon_{x-y} = (\bar{x} - \bar{y}) - (x - y) = \varepsilon_x - \varepsilon_y$, damit

$|\varepsilon_{x-y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$ und

$\Delta(x - y) \leq \Delta x + \Delta y$

$(\bar{x} - \varepsilon_x)(\bar{y} - \varepsilon_y) = \bar{x}\bar{y} - (\varepsilon_x\bar{y} + \varepsilon_y\bar{x} - \varepsilon_x\varepsilon_y)$, damit

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x\bar{y} + \varepsilon_y\bar{x} - \varepsilon_x\varepsilon_y$,

$|\varepsilon_{xy}| \leq |\bar{x}||\varepsilon_y| + |\bar{y}||\varepsilon_x| + |\varepsilon_x||\varepsilon_y| \leq |\bar{x}|\Delta y + |\bar{y}|\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$

und $\Delta(x \cdot y) \leq |\bar{x}|\Delta y + |\bar{y}|\Delta x$.

Beispiel: Die Seiten eines Quadrates haben die Länge $(113,5 \pm 0,1)$ m. Für den Umfang erhält man $(454,0 \pm 0,4)$ m, für die Fläche als Fehler-schranke $\Delta A = 22,7$ m².

Man kann sich vorstellen, daß bei vielen Rechenoperationen sich die Eingangsfehler sehr stark *aufschaukeln* können und damit das Ergebnis *verfälschen*.

Beim Potenzieren erhält man als Fehler-schranke

$\Delta(x^n) = n \cdot |\bar{x}| \Delta x$.

Wenn man ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* löst (vgl.: Schülerzeitschrift *alpha*, 1977 3/4, *Wir lösen*

lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus), muß man eine Vielzahl von Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen) ausführen. Man kann sich also vorstellen, daß sich bei einem solchen direkten Verfahren, wie es der Gaußsche Algorithmus ist, die Fehler sehr stark fortpflanzen.

5. Verfahrensfehler

Bei der Lösung einer Aufgabe können verschiedene Verfahren gleichwertig sein. Sie würden bei exakter Rechnung dasselbe Ergebnis liefern, können aber beim Rechnen mit endlicher Stellenzahl (so wie man in der Praxis tagtäglich rechnet, auch auf Rechnern) völlig verschiedene Ergebnisse bringen.

Die Auswirkungen solcher Verfahrensfehler soll an zwei Beispielen demonstriert werden.

Beispiel: Es ist

$$S = 1,5 \cdot 1,3 + 2,5 \cdot 0,7 + 3,5 \cdot 0,5 + 3,7 \cdot 1,5 + 4,5 \cdot 0,3 + (-1,7) \cdot 1,3$$

zu berechnen.

Als exakten Wert erhält man $S = 10,14$.

Wenn man ohne Rundung multipliziert, aufsummiert und anschließend auf eine Komma-stelle rundet, erhält man $\tilde{S}_1 = 10,1$. Der Fehler beträgt $\tilde{S}_1 - S = -0,04$.

Wenn man multipliziert, nach jeder Teil-multiplikation das Produkt rundet und dann summiert, erhält man $\tilde{S}_2 = 10,4$. Der Fehler beträgt $\tilde{S}_2 - S = 0,26$.

Wenn man auf Einer rundet, anschließend multipliziert und addiert, erhält man $\tilde{S}_3 = 15$ mit dem Fehler $\tilde{S}_3 - S = 4,86$.

Beispiel: Für den Ausdruck z gilt

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 (\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2 (\sqrt{2}-1)^2} = (\sqrt{2}-1)^4 \\ &= [(\sqrt{2}-1)^2]^2 = (3-2\sqrt{2})^2 \\ &= 9 - 12\sqrt{2} + 4 \cdot 2 = 17 - 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Berechnet man den Ausdruck mit Hilfe der vier verschiedenen *Verfahren* (Formeln), so erhält man mit $\sqrt{2} \approx 1,41$

$$z_1 = 0,0289,$$

$$z_2 = 0,0283,$$

$$z_3 = 0,0324 \text{ und}$$

$$z_4 = 0,0800,$$

also unterschiedliche Ergebnisse.

Wenn man mit $\sqrt{2} \approx 1,4$ rechnet, erhält man

$$z_1 = 0,0278,$$

$$z_2 = 0,0256,$$

$$z_3 = 0,0400 \text{ und}$$

$$z_4 = 0,2000.$$

6. Kondition eines Problems

Beim numerischen Rechnen spielt auch die *Kondition* des Problems eine Rolle. Da die Anfangsdaten im Normalfall mit einem Fehler behaftet sind, weist auch bei exakter

Rechnung das Ergebnis einen gewissen Fehler auf.

Es kann vorkommen, daß kleine Änderungen in den Ausgangsdaten zu großen Änderungen im Ergebnis führen. Wenn das der Fall ist, spricht man von einem *schlecht-konditionierten Problem*, sonst von einem *gut-konditionierten*.

Es handelt sich hierbei um eine Eigenschaft des Problems, nicht aber des verwendeten Algorithmus. Maßzahlen, die die Begriffe gut- und schlecht-konditioniert quantitativ erfassen, heißen *Konditionszahlen*.

Zur Erläuterung dieses Effektes betrachten wir die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten.

Beispiel:

$$2x + 6y = 8$$

$$2x + 6,0001y = 8,0001.$$

Man erhält

$$0,0001y = 0,0001; \text{ damit } y = 1 \text{ und } x = 1.$$

Es werden nun kleine Änderungen in den Koeffizienten des Gleichungssystems (in den *Ausgangsdaten*) vorgenommen und die Auswirkungen auf das Ergebnis betrachtet:

$$2x + 6y = 8$$

$$2x + 5,9999y = 8,0002.$$

Man erhält $y = -2$ und $x = 10$.

$$2x + 6y = 8$$

$$2x + 5,9998y = 8,0001.$$

Man erhält $y = -0,5$ und $x = 5,5$.

Bei $2x + 6y = 8$

$$2x + 5,9999y = 8,0004,$$

erhält man $y = -4$ und $x = 16$.

Es ist deutlich zu erkennen, daß bei diesem Problem kleine Änderungen der Koeffizienten zu wesentlichen Änderungen im Ergebnis führen. Das Gleichungssystem ist *schlecht-konditioniert*.

7. Zusammenfassung

An Beispielen wurden einige Effekte demonstriert, die beim numerischen Rechnen auftreten können. Von solchen Effekten muß man wissen, wenn man zahlenmäßig ein Problem löst. Man muß auch versuchen, solche Effekte quantitativ zu erfassen, damit man Aussagen über die Güte seiner Ergebnisse machen kann. Das ist für die Praxis von großer Bedeutung. Es sind also u. a. Fehlerbetrachtungen und Untersuchungen zur Kondition eines Problems notwendig.

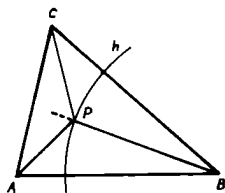
Die *Numerische Mathematik*, eine wichtige Disziplin der Mathematik, die Verfahren zur zahlenmäßigen Lösung von mathematischen Problemen entwickelt und diskutiert unter Beachtung der Verwendung von Rechanlagen, hat u. a. auch die Aufgabe, die hier zusammengestellten numerischen Effekte (Eigenheiten des numerischen Rechnens) zu untersuchen und quantitativ zu erfassen.

J. Gronitz

Eine Aufgabe und vier Lösungen

Drei Orte A, B und C sollen eine gemeinsame Trafostation erhalten. Aus ökonomischen Gründen soll sie so gelegen sein, daß die Summe der Entfernungen zu den drei Orten ein Minimum ist (Bild 1). Dieses Problem, innerhalb eines Dreiecks ABC einen Punkt P so zu konstruieren, daß $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = s$ minimal wird, geht auf Jakob Steiner zurück (1796 bis 1863) und läßt sich mit unterschiedlichen mathematischen Mitteln lösen.

Bild 1



Wie die Analyse einer Lösung Hinweise auf weitere Möglichkeiten zur Lösung bietet, soll in diesem Beitrag gezeigt werden. Wir beschränken unsere Betrachtungen zunächst auf Dreiecke, in denen alle Innenwinkel kleiner als 120° sind.

(1) Die Idee zu einer ersten Lösung besteht darin, die Strecken $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ zu einem Streckenzug zusammenzufügen. Die Länge dieses Streckenzuges soll dann ein Minimum werden.

Im Dreieck ABC wird zunächst ein beliebiger Punkt Q gewählt. Dann bilden wir das Dreieck AQB durch eine Drehung um A mit dem Drehwinkel 60° auf das Dreieck $AB'Q_1$ ab. Für die betrachtete Summe der Entfernung gilt $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} = \overline{QC} + \overline{Q_1B'} + \overline{QQ_1}$ (wegen des Drehwinkels von 60° ist das Dreieck AQQ_1 gleichseitig).

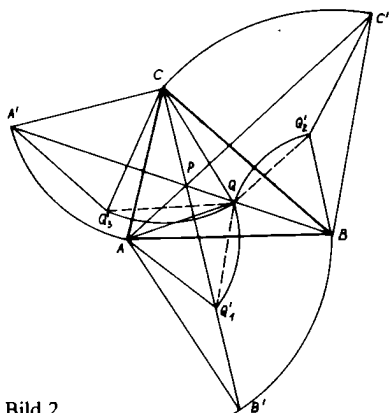


Bild 2

Ebenso wird das Dreieck BCQ durch eine Drehung um B mit dem Drehwinkel 60° auf das Dreieck $BC'Q_2$ abgebildet (Bild 2). Der entsprechende Streckenzug ist jetzt AQQ_2C' . Wegen der willkürlichen Wahl von Q werden weder CQQ_1B' noch AQQ_2C' in einer Geraden liegen. Wäre das jedoch der Fall, dann wäre der Streckenzug am kürzesten, und zwar gleich $\overline{CB'}$ bzw. $\overline{AC'}$. Daraus ergibt sich: Der gesuchte Punkt P ist der Schnittpunkt von AC' und CB' . Zur Kontrolle wurde im Bild 2 auch BA' konstruiert.

(2) Die Analyse von Bild 2 führt auf eine recht einfache Konstruktion des Punktes P . Über den Seiten des Dreiecks ABC werden gleichseitige Dreiecke konstruiert. Die dabei sich ergebenden Punkte A', B' und C' werden mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden. Es gilt dann: Die Transversalen AC', BA' und CB' schneiden einander in einem Punkt P , und die Strecken $\overline{AC'}, \overline{BA'}$ und $\overline{CB'}$ sind gleich lang (Bild 3).

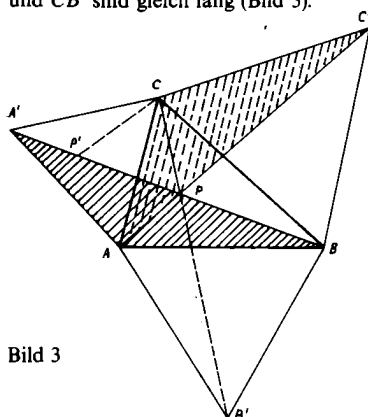


Bild 3

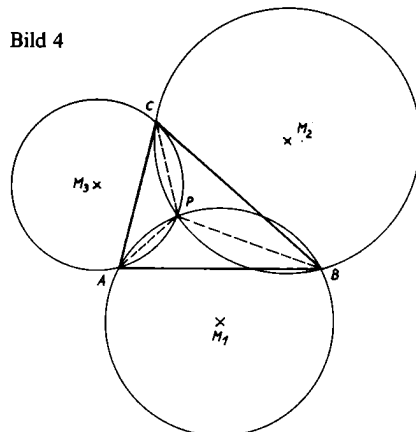
Dieser Sachverhalt soll bewiesen werden. AC' und BA' mögen den Punkt P gemeinsam haben. Wir beweisen, daß CB' durch P geht. Nach dem Kongruenzsatz sws sind die Dreiecke $AC'C$ und $A'BC$ kongruent. Durch die Drehung um C mit dem Drehwinkel 60° kann $\triangle AC'C$ auf $\triangle A'BC$ abgebildet werden. Bei dieser Abbildung wird $P \in AC'$ auf $P' \in A'B$ und die Strecke $\overline{AC'}$ auf die Strecke $\overline{A'B}$ abgebildet. Die beiden Strecken sind also gleich lang, und sie bilden Winkel von 60° bzw. 120° .

$\triangle P'PC$ ist gleichseitig, also ist $\angle A'PB$ Winkelhalbierende von $\angle APC$; denn $\angle APA' = 60^\circ$. Dann ist $\angle ACP = 60^\circ - \angle PAC = 60^\circ - \angle PA'C$. Weiterhin gilt aber auch $\triangle ABA' \cong \triangle ABC$ nach sws. Dann ist $\angle ACB' = \angle AA'B = 60^\circ - \angle PA'C$. Die Winkel $\angle ACP$ und $\angle ACB'$ sind also gleich, d. h., P liegt auf CB' . Außerdem folgt aus der Kongruenz der beiden letztgenannten Dreiecke, daß die Transversalen gleich lang sind.

(3) Aus der näheren Betrachtung des Bildes 3 wird deutlich, daß P derjenige Punkt im Inneren des Dreiecks ist, von dem aus jede der Dreiecksseiten unter einem Winkel von 120° gesehen werden kann. Diese Eigenschaft von P legt eine weitere Möglichkeit seiner

Konstruktion nahe: Es ist der Schnittpunkt der Kreise zu ermitteln, in denen die Dreiecksseiten Sehnen sind und die zugehörigen Peripheriewinkel 120° betragen. Im Bild 4 wurde die Konstruktion ausgeführt. Der dritte Kreis dient der Zeichenkontrolle.

Bild 4



(4) Zu der Erkenntnis, daß P derjenige Punkt sein muß, von dem aus man die Dreiecksseiten jeweils unter einem Winkel von 120° sieht, kommt man auch durch die folgende Überlegung:

Angenommen, im Dreieck ABC sei P der Punkt, für den $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ ein Minimum ist. Es sei weiter der Kreis k um B durch P gezeichnet. Dann muß P offensichtlich der Punkt dieses Kreises sein, für den $\overline{PA} + \overline{PC}$ ein Minimum ist (Bild 5). Dazu muß P so gelegen sein, daß PA und PC mit dem Kreis, d. h. mit der Tangente in P , gleiche Winkel bilden. Die gleiche Überlegung läßt sich für die Kreise um A bzw. um C anstellen. Von P aus müssen alle Dreiecksseiten unter dem gleichen Winkel gesehen werden, d. h., dieser Winkel beträgt 120° . Im Bild 6 ist an einem einfacheren Beispiel erläutert, daß $\overline{PA} + \overline{PC}$ nur dann am kleinsten wird, wenn PA und PC mit g gleiche Winkel bilden. Jeder andere Punkt P_1 führt zu einem längeren Streckenzug (Dreiecksungleichung).

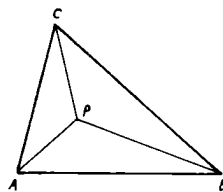


Bild 5

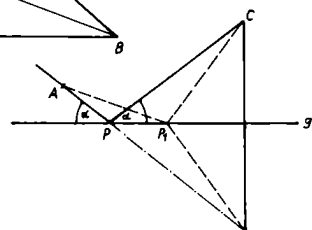
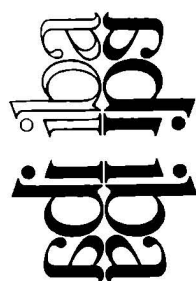
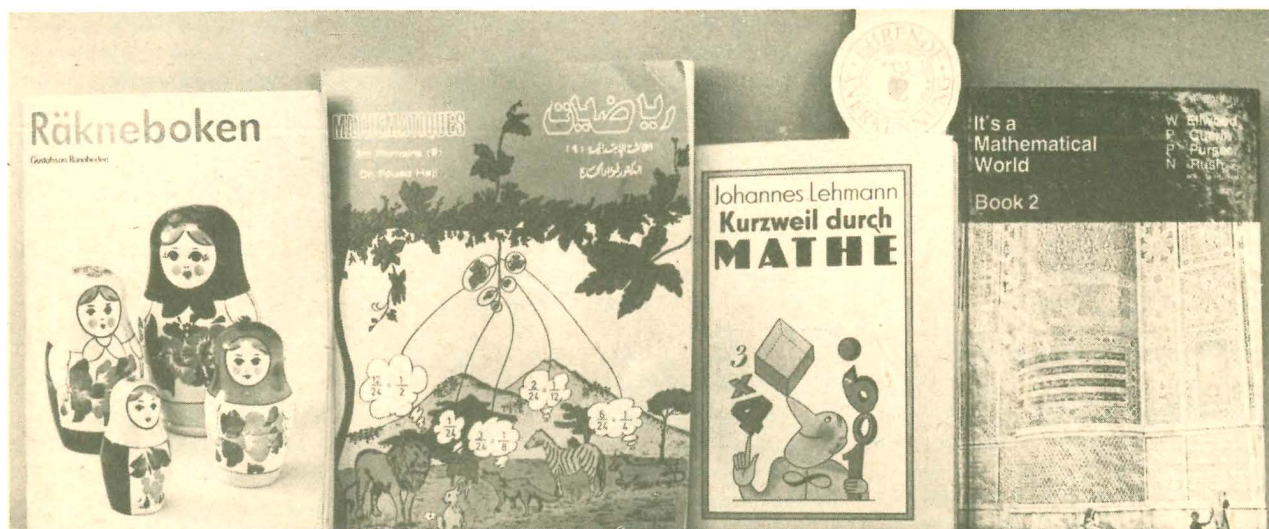


Bild 6

(5) Es war vorausgesetzt worden, daß im Dreieck ABC alle Winkel kleiner als 120° sein sollten. Sollte ein Innenwinkel gleich oder größer als 120° sein, dann ist der gesuchte Punkt P der Scheitel dieses Winkels. Versucht dafür eine Begründung zu finden!

W. Jungk



**Internationale
Buchkunst-
Ausstellung,
Leipzig**

**Ausgezeichnet mit dem Prädikat
Ehrende Anerkennung
wurden 30 Bücher**

Folgende vier mathematischen Titel erhielten die Auszeichnung:

Autorenkollektiv

Mathematika

Finnische Mathematiklehrbücher
(Kl. 1 bis 5)

Verlag: Esselte Herzogs, Naucka 1980

Foud Haji

Mathématiques

libanesisches Mathematiklehrbücher für die
Klassen 1 bis 6 in arabisch, französisch und
englisch

Editions Librairie St. Paul,
Beyrouth 1980

Autorenkollektiv

It's a Mathematical World

Mathematiklehrbuch für obere Klassen
und Erwachsene

Verlag: Longman Paul Limited,
New Zealand 1980

Johannes Lehmann

Kurzweil durch Mathe

Mathematikunterhaltungsbuch für
obere Klassen und Erwachsene

Urania-Verlag
Leipzig · Jena · Berlin, 1980

„Schönste Bücher aus aller Welt“ wurden im Herbst 1963 erstmals in Leipzig ausgestellt. Veranstalter: Rat der Stadt und Börsenverein. Im Herbst 1981 wurden 650 Titel eingereicht, 30 davon erhielten einen Preis, 30 eine „Ehrende Anerkennung“.

Gleichzeitig fanden die Besucher eine Sonderschau „Das mathematisch-naturwissenschaftliche Schulbuch“ vor. Vier Bücher dieser Sonderschau erhielten eine „Ehrende Anerkennung“. Aus der Vielfalt der ausgestellten Mathematikbücher wurden für den *alpha*-Leser zehn meist unterhaltsame Probleme ausgewählt. Viel Spaß beim Knobeln!

J. Lehmann

Aufgaben

Aus der Fülle des vorliegenden Materials wählten wir für unsere Leser folgende – meist unterhaltsame – Probleme aus:

▲1▲ Vier Personen geben folgende Auskunft:

1. Person: „Ich wiege 5 kg weniger als die dritte Person.“

2. Person: „Ich wiege die Hälfte von dem, was die 1. Person und die 4. Person zusammen wiegen.“

3. Person: „Ich wiege 29 kg mehr als die 4. Person.“

4. Person: „Ich bringe ein Viertel von dem auf die Waage, was die 1., 2. und 3. Person insgesamt wiegen.“

Dürfen die 4 Personen in einem Aufzug fahren, der 350 kg Masse befördern kann?

(Finnland)

Ein zerbrochenes Fenster

▲2▲ Wer war es?

„Ich nicht“, sagte Pete.

„Es war einer der Jungen“, sagte Jenny.

„Nein, Jessica tat es“, sagte Tim.

„Ich tat es nicht“, rief Jessica.

Nur eines der Kinder lügt!

Wer ist schuldig?

(Neuseeland)

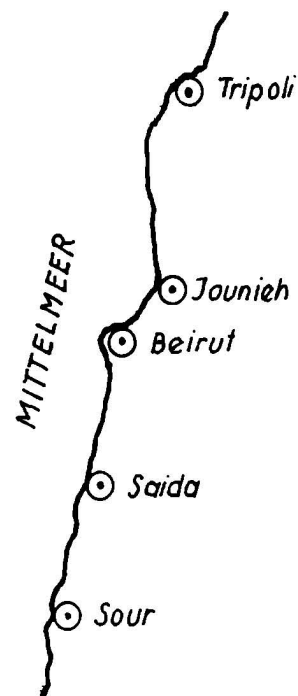
▲3▲ Auf der Karte des Libanon beträgt die Entfernung zwischen Saida und Beirut 2 cm. Die wirkliche Entfernung auf der Erde ist 40 km.

I. Welche Entfernung muß auf der Karte zwischen Beirut und Jounieh angegeben werden, wenn sie auf der Erde 18 km beträgt?

II. Wieviel Kilometern entspricht ein Zentimeter auf der Karte?

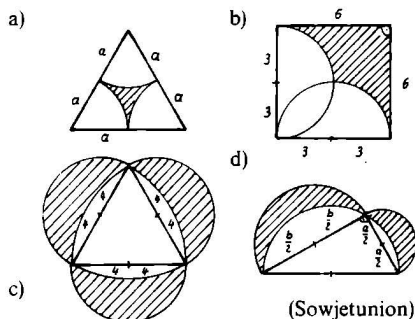
III. Wie groß ist die wirkliche Entfernung zwischen Beirut und Sour?

IV. Wie groß ist die wirkliche Entfernung zwischen Saida und Tripoli? (Libanon)

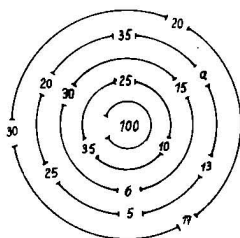


▲4▲ Eine Streichholzschachtel hat die Kanten mit den Längen $a = 17$ mm, $b = 37$ mm, $c = 52$ mm. Es ist eine Zehnschachtelpackung zu entwerfen, für die möglichst wenig Einschlagpapier verbraucht wird. (DDR)

▲5▲ Berechne in jeder Figur die schraffierte Restfläche!

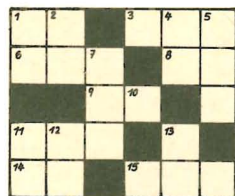


▲ 6 ▲ Wie ist es möglich, so durch die vier äußeren Kreise zu laufen, daß die Summe der vier Zahlen 100 ergibt? (Bulgarien)



Kreuzzahlrätsel

▲ 7 ▲ Trage die Lösungen der folgenden Aufgaben, durch Sternchen gekennzeichnet, in das Kreuzzahlrätsel ein! (Indien)



Waagrecht

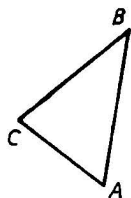
1. $x^5 \cdot x^{10} = x^*$
3. $2^7 = *$
6. $(8^2 \cdot 10) + 1 = *$
8. $a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^*$
9. $7 \cdot 3^2 = *$
11. $c^{94} \cdot c^{25} = c^*$
14. $3^4 = *$
15. $(6 \cdot 2)^2 + 5 = *$

Senkrecht

1. $4^2 = *$
2. $x^9 \cdot x^9 \cdot x^9 \cdot x^9 \cdot x^9 = x^*$
4. $(y^3)^7 = y^*$
5. $\frac{p^{1000}}{p^{177}} = p^*$
7. $13^2 = *$
10. $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^*$
11. $(a^6)^3 = a^*$
12. $\frac{a^6 \cdot a^{15}}{a^{10}} = a^*$
13. $2^2 \cdot 6 = *$

▲ 8 ▲ Drehe das Dreieck ABC um den Punkt S in Uhrzeigerrichtung erst um 60° und dann noch einmal um 120° !

Wie kann man beide Drehungen vereinigen? (Jugoslawien)



▲ 9 ▲ Ein LKW muß bei der Zufahrt zu einer Baustelle über eine Brücke fahren, die für eine Belastung von 3 t und mehr gesperrt ist. Der LKW wiegt leer 1,5 t.

Wieviel Sack Zement zu je 50 kg kann er bei einer Fahrt höchstens laden? (BRD)

▲ 10 ▲ Die Winkelsumme eines konvexen Vielecks ist 2340° .
Wieviel Seiten hat das Vieleck? (Rumänien)

Eine „abenteuerliche“ Aufgabe

Fünf Räuber erbeuteten eine Kasse mit Talern und beschlossen, den Schatz am anderen Morgen gerecht zu teilen. Nachts befürchtete jedoch einer, von den anderen betrogen zu werden. Er versuchte deshalb heimlich, die Beute in fünf gleiche Teile zu zerlegen. Dabei blieb allerdings ein Goldstück übrig. Er nahm sich einen der Teilhaufen sowie den restlichen Taler und legte sich wieder schlafen. Nach einer Weile erging es dem zweiten Räuber ebenso. Er stand heimlich auf, bildete aus den in der Kasse liegenden Talern fünf Teilhaufen mit gleicher Taleranzahl, und es blieb ebenfalls ein Taler übrig. Auch er nahm das einzelne Goldstück und einen Teilhaufen an sich.



Nach ihm holten sich der dritte, vierte und fünfte Räuber den ihnen vermeintlich zustehenden Teil Goldstücke. Den bei jeder gleichmäßiger Aufteilung übriggebliebenen Taler steckten sie sich jeweils ein. Als die fünf Räuber am anderen Morgen sorgenfrei erwachten, teilten sie die in der Kasse verbliebenen Goldstücke gleichmäßig untereinander auf (dies war nun möglich).

Aufgabe 1

Wieviel Taler können anfangs in der Kasse gewesen sein?

Aufgabe 2

Wieviel Taler erhielten die einzelnen Räuber, falls die Kasse höchstens 10000 Goldstücke faßt?

Aufgabe 3

Verallgemeinere die Aufgabe auf den Fall einer Bande von n Räubern ($n \geq 2$). Dabei versuche wieder jeder Räuber, den Kassetteninhalt in n gleiche Teile zu zerlegen und sich heimlich seinen vermeintlichen Anteil zu nehmen. Bei den Aufteilungen bleibe jeweils ein Taler übrig, den sich auch dieser Räuber nimmt. Am anderen Tag teilen die n Räuber den verbliebenen Kassetteninhalt untereinander gleichmäßig auf.

Aus wieviel Talern kann der Schatz bestanden haben? Gib für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die kleinstmögliche Zahl der Goldstücke des Schatzes an!

W. Schmidt

Görlitz gibt die Uhrzeit an

Görlitz ist die einzige Großstadt der Erde, durch die der 15. Meridian verläuft.

Unmittelbar vor der Brücke der Freundschaft, dem Übergang über die Neiße zur VR Polen, steht links im Garten der Stadthalle, genau auf dem 15. Längengrad, ein Steinglobus mit einem Durchmesser von 105 cm, der, wie seine Inschrift verrät, im Jahre 1961, dem Jahr des ersten Raumfluges des Menschen, errichtet worden ist. Weiter erfährt der Betrachter: „Nach der mittleren Ortszeit des 15. Längengrades richtet sich die gesamte mitteleuropäische Zeitzone.“



Die mitteleuropäische Zeit – MEZ – gilt in Skandinavien, den Staaten Mitteleuropas, Ungarn, Jugoslawien, Italien, Tunesien, Kamerun.“

Eine Aufgabe von Prof. Dr.

Jacob A. Smorodinsky

Prof. Dr. Smorodinsky wirft in seinem Beitrag einige Probleme auf, die im Zusammenhang mit unserem *Kalender* stehen.

In den ersten beiden Abschnitten macht er uns auf Schwierigkeiten aufmerksam, die entstehen, wenn wir von einem bestimmten Tag – z. B. einem Gedenktag, dessen Datum nach dem früher üblichen *Julianischen Kalender* angegeben ist, sein Datum im heutigen *Gregorianischen Kalender* bestimmen wollen.

Nach kurzen Bemerkungen zu den Bezeichnungen der *Wochentage* (Abschnitt III) lenkt er schließlich im vierten Abschnitt unser Interesse auf Effekte, die beim Überqueren der im Stillen Ozean verlaufenden *Datumsgrenze* auftreten.

Kalendergeschichten

I. Das Problem entstand ganz unerwartet. Man mußte im Kalender einen Gedenktag – den 200. Todestag *Leonhard Eulers* – vermerken. Euler starb in Sankt Petersburg (heute Leningrad) am 7. September 1783. Der 200. Jahrestag dieses Ereignisses fällt auf den 7. September 1983. Aber das ist gar nicht so!

Im 18. Jahrhundert galt in Rußland der Julianische Kalender (*alte Zeitrechnung*), nach dem die orthodoxe Kirche auch heute noch ihre Feiertage begeht. Nach der Oktoberrevolution wurde der Julianische durch den Gregorianischen Kalender abgelöst (*neue Zeitrechnung*), der bereits damals in den meisten Ländern der Welt gültig war.

Bekanntlich geht der Julianische gegenüber dem Gregorianischen Kalender nach: Im 18. Jahrhundert betrug dieses Nachgehen 11 Tage. Deshalb war der Todestag Eulers nach der neuen Zeitrechnung der 18. September 1783 (wie er auch in Büchern vermerkt ist), und als Jahrestag mußte der 18. September 1983 (nach neuer Zeitrechnung) vermerkt werden.

Aber man kann auch noch anders denken. Der Jahrestag war nach alter Rechnung der 7. September. Im 20. Jahrhundert mußte man beim Übergang zur neuen Zeitrechnung 13 Tage einfügen (die Jahre 1800 und 1900 waren nach dem Julianischen Kalender Schaltjahre, nach dem Gregorianischen aber

nicht). Deshalb fällt nach der neuen Zeitrechnung der Jahrestag auf den (7 + 13). = 20. September 1983.

▲2235a▲ Wann muß man denn nun den 200. Todestag Eulers wirklich in den Kalender eintragen – am 18. oder 20. September?

II. Es scheint so, als sei der Übergang von Daten der alten Zeitrechnung zu Daten der neuen eine einfache Sache: Im 18. Jahrhundert muß man 11 Tage einfügen, im 19. Jahrhundert 12 und im 20. Jahrhundert 13 Tage.

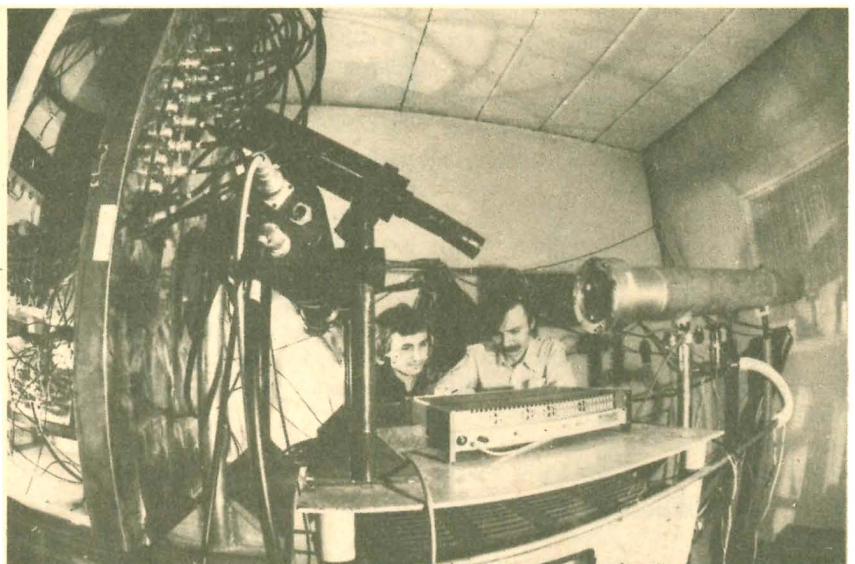
▲2235b▲ Aber wie ist es, wenn wir auf eine Jahrhundertwende geraten? Wir wollen beispielsweise ermitteln, welches neue Datum dem 25. Dezember 1900 (alter Zeitrechnung) entspricht.

Es ist dies der 6. Januar 1901 (es wurden – wie für das 19. Jh. nötig – 12 Tage eingefügt). Oder ist es der 7. Januar 1901 (wenn man entsprechend dem 20. Jahrhundert 13 Tage addiert)? Der 25. Dezember 1900 liegt nach alter Rechnung im 19. Jahrhundert, aber im 20. Jahrhundert nach der neuen Zeitrechnung.

III. Früher nahm man an, daß die Tage der Woche unter dem Schutz von Himmelskörpern stünden. Montag ist der Tag des Mondes, Dienstag der Tag des Mars, Mittwoch – Merkur, Donnerstag – Jupiter, Freitag – Venus, Sonnabend – Saturn und schließlich Sonntag – Sonne. Diese Verbindung spiegelt sich auch in den lateinischen Bezeichnungen der Wochentage wider: dies Lunae, dies Martis, dies Mercurii, dies Jovis, dies Veneris, dies Saturni, dies Solis.

Teilweise blieb dieser Zusammenhang in den europäischen Sprachen und auch in der Hindusprache erhalten.

Ein Blick in eines der zahlreichen Labors des *Vereinigten Instituts für Kernforschung* Dubna



▲2235c▲ Kann man irgendeine Ordnung in dieser Reihenfolge der Bezeichnungen erkennen?

IV. Im Stillen Ozean verläuft die (natürlich unsichtbare) Datumsgrenze. Schiffe, die diese Linie von West nach Ost überfahren, verlieren einen Tag: Die Uhren auf Alaska gehen gegenüber denen auf der Tschuktschen-Halbinsel um 24 Stunden nach. Wir stellen uns vor, daß wir die Erde in Richtung von West nach Ost sehr schnell – d. h. in wenigen Stunden – umrunden, z. B. auf einem Breitenkreis in der Nähe des Nordpols oder auch in einem Überschallflugzeug über zivilisierten Gegenden.

Während unserer Reise schneiden wir die Datumsgrenze und verlieren einen Tag. Wenn wir die Reise einige Male wiederholten, so würden wir in die Vergangenheit gelangen. Natürlich ist das nicht so. Man *verliert* den Tag nur deshalb, weil man beim Überschreiten der Zeitzonen (aller 24) die Uhr jedesmal um eine Stunde vorstellen muß. Das Ändern des Datums an der Datumsgrenze um einen Tag kompensiert dieses Verstellen der Uhrzeiger.

Während eines Fluges braucht man seine Uhr überhaupt nicht zu stören, und auch die Datumsgrenze braucht man nicht zu beachten. Im Flugzeug lebt man nach einer eigenen Zeit, oder genauer nach der Zeit des Start- bzw. des Landeflugplatzes.

Erinnern wir uns jetzt an eine andere Begebenheit. Als das Schiff *Viktoria* als einziges die von Magalhaes begonnene Weltumsegelung beendete, holte es auf der Insel Santiago an der Westküste Afrikas Proviant. Hierbei zeigte sich, daß die auf der Insel lebenden Portugiesen Donnerstag, den 10. Juli 1522 schrieben. Demgegenüber war der Expeditionsteilnehmer *Antonio Pigafetti*, der akkurat

Tagebuch geführt hatte, der Meinung, daß erst Mittwoch, der 9. Juli sei. Erst später verstand er, daß das Schiff bei seiner Bewegung von Ost nach West (von Spanien in Richtung Atlantik) die Erdachse einmal weniger als die Erde selbst umkreist hatte und deshalb einen Tag verlor. Andererseits wußten die Reisenden weder etwas von Zeitzonen noch von einer Datumsgrenze – sie lebten nach Schiffszeit.

▲ 2235d ▲ Warum zeigten ihre Uhren (und ihre Kalender) nicht dasselbe an wie die Uhren an der Küste? Warum gingen die Uhren auf dem Schiff langsamer als die auf dem Festland?

Kurze Antworten

▲ 2235a ▲ Der Widerspruch entstand daraus, daß nicht festgelegt worden war, ob Jahrestage nach julianischen oder nach gregorianischen Jahren bestimmt werden sollten. Das julianische Jahr ist länger als das gregorianische. Am 18. September sind 200 gregorianische Jahre vergangen, aber am 20. erst sind 200 julianische Jahre vorbei.

▲ 2235b ▲ Der zusätzliche Tag ist der 29. Februar 1900. Diesen Tag gibt es im Gregorianischen Kalender nicht (kein Schaltjahr!). Der 25. Dezember liegt später, und man muß zu ihm schon 13 Tage – wie im 20. Jahrhundert – hinzufügen.

▲ 2235c ▲ Die Reihenfolge der Wochentage entspricht der Reihenfolge der Himmelskörper im System des Ptolemäus: Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Sonne.

▲ 2235d ▲ In Wirklichkeit gab es auf den Schiffen keine Uhren. Die Vollendung eines Tages wurde nach der Sonne bestimmt. Damit wurden auf dem Schiff die Zeitzonen beachtet, nicht aber die Datumsgrenze. Der Tag, der beim Überschreiten der Datumsgrenze von Ost nach West nicht eingefügt wurde, war der *verlorene*.

Unser Bild zeigt einen alten arabischen Tierkreis



Zahlen und Fakten

Sach- und Anwendungsaufgaben

In unserer Republik entstand in den letzten Jahren ein großes materielles und geistiges Potential. Dies gilt es, noch besser zu nutzen. Während im Jahre 1960 im produzierenden Bereich der Volkswirtschaft jeder Beschäftigte mit Grundmitteln im Werte von 24944 M ausgestattet war, erhöhte sich der Ausstattungsgrad bis zum Ende des Jahres 1979 auf 70597 M.

▲ 1 ▲ Um wieviel Mark erhöhte sich der Ausstattungsgrad mit Grundmitteln, bezogen auf jeden einzelnen Werktätigen, vom Jahre 1960 bis zum Jahre 1979?

▲ 2 ▲ Prüfe, ob dem Gesamtzuwachs je Beschäftigten vom Jahre 1960 bis zum Jahre 1979 eine durchschnittliche Zuwachsrate von rund 2403 M entspricht! Von welcher Annahme gehen wir dabei aus?

▲ 3 ▲ Vom Jahre 1960 bis zum Jahre 1979 stieg der Grundmittelbestand im produzierenden Bereich der Volkswirtschaft von 161,9 Mrd. M auf 456,3 Mrd. M. Wieviel Beschäftigte gab es etwa im produzierenden Bereich der Volkswirtschaft im Jahre 1979?

Für die Vergrößerung des gesellschaftlichen Reichtums ist entscheidend, daß mit dem gewaltigen Potential an Maschinen und Ausrüstungen ein wesentlich größeres Ergebnis erwirtschaftet wird als bisher. In den 70er Jahren wurden in dieser Hinsicht die ersten Schritte getan. Im Jahre 1970 wurden hochproduktive Maschinen und Anlagen in der Industrie im Durchschnitt täglich 12,5 h produktiv genutzt, im Jahre 1979 waren 14,9 h erreicht.

▲ 4 ▲ Wieviel Stunden und Minuten wurden die Maschinen im Jahre 1979 im Durchschnitt täglich mehr genutzt als im Jahre 1970?

▲ 5 ▲ Nimm an, daß im Jahre 1971 die Maschinen in dem gleichen Maße wie im Jahre 1970 genutzt wurden! Schätze und prüfe durch Rechnen mit dem Stab, wieviel Tage des Jahres 1971 noch zusätzlich zu denen des Jahres 1970 nötig gewesen wären, um die gleiche Gesamtzahl der Einsatzstunden der Maschinen und Anlagen wie im Jahre 1979 zu erreichen!

Erkläre, durch welche innerbetrieblichen Maßnahmen eine Erhöhung der Einsatzstunden der Maschinen möglich wird; denn ein Jahr hat ja nur 365 Tage!

Braunkohle ist unser wichtigster Roh- und Brennstoff. Von Jahr zu Jahr steigen jedoch durch den Aufschluß neuer Tagebaue, durch wachsenden Abraum und geringe Mächtigkeit der Flöze die Aufwendungen je Tonne Kohle. Im Jahre 1971 betrugen die Selbstkosten zur Förderung 1 t Rohbraunkohle 6,70 M, davon mußten 4,26 M für den Abraum aufgewendet werden.

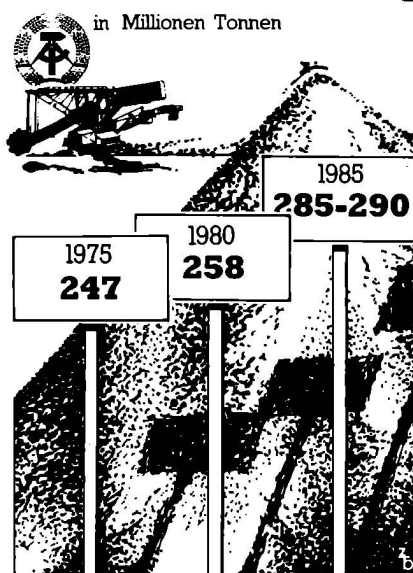
Im Jahre 1979 stiegen die Selbstkosten im Vergleich zum Jahre 1971 um 4,32 M, und allein die Kosten für die Abraumbeseitigung je Tonne Kohle waren im Jahre 1979 um 24 Pfennig höher als die Gesamtselbstkosten je Tonne Kohle im Jahre 1971.

▲ 6 ▲ Welche Höhe haben die Selbstkosten für 1 t Rohbraunkohle im Jahre 1979 erreicht?

Welche Kosten je Tonne Rohbraunkohle werden durch die Abraumbeseitigung verursacht?

H. Rosin

Rohbraunkohlenförderung



Zuwendungen des Staates aus gesellschaftlichen Fonds

monatlich berechnet auf eine vierköpfige Familie



Unser Haushalt und die Elektronik

Ob es eines Tages so sein wird, daß sich auf Befehl des Hausroboters der Tisch mit fertig gegarten Speisen deckt? Ob die einzige Mühe unsererseits dann nur noch darin besteht, mit Messer, Gabel und Löffel bewaffnet, tüchtig zuzulangen? Wohl kaum! Das kann auch künftig nur den Märchen- und Fabelwesen gelingen. Doch sicher ist, daß der wissenschaftlich-technische Fortschritt mehr und mehr im Haushalt Fuß faßt, daß Haushaltgeräte zunehmend durch „Knopfdruck“ die vielfältigsten Hausarbeiten übernehmen, für uns „denken“ und handeln. Zwar bleibt der universelle Hauscomputer eine Vision, aber sein „Schrittmacher“, die *Mikroelektronik*, hält bereits Einzug.

Je kleiner, desto leistungsstärker

Transistoren, Dioden, Widerstände, Kondensatoren – Teile, die sich mit dem Begriff Elektronik verbinden – sind schon seit langem bekannt. Das Herzstück der Mikroelektronik, der sogenannte *Chip* jedoch, der auf einem einkristallinen Siliziumplättchen von wenigen Quadratmillimetern einen ganzen Schaltkreis beherbergt, bleibt bis heute dem menschlichen Auge normalerweise verborgen. Mit seinen feinen Strukturen, nur Bruchteile eines Millimeters groß, versteckt sich dieses „Wunder“ der Technik vor dem menschlichen Betrachter. Dieser Chip aber, zum Synonym der Mikroelektronik geworden, beschleunigt den wissenschaftlich-technischen Fortschritt so enorm, daß die Automatisierung ganzer Produktionsprozesse möglich ist und Roboter zunehmend schwere körperliche Arbeit übernehmen.

Je kleiner die Bauelemente wurden, desto größer ihr Siegeszug. Die in den 20er Jahren zur „Königin“ der Elektronik gekrönte Elektronenröhre war groß und brauchte viel Platz.

Die ersten mit diesen Röhren bestückten Rechner benötigten noch viele Tausende von Röhren, waren riesengroß, wogen etliche Tonnen und fraßen Unmengen an Strom. Schon der in den 40er Jahren erfundene Transistor verringerte Maße und Gewichte wesentlich. Ein Rechner gleicher Leistung mit Transistoren bestückt, hätte bereits in einen normalen Kleiderschrank gepaßt und sich mit Strom aus einer normalen Steckdose be-

gnügt. Im Laufe der Zeit hat sich die Halbleiterphysik rasant weiterentwickelt, und angeregt durch die Erfolge des Transistors wurde die Miniaturisierung der Bauelemente soweit vorangetrieben, daß heute mikroelektronisch betriebene Rechner im Taschenformat weitaus größere Leistungen vollbringen als der röhrengespeiste „Goliath“ der 20er Jahre.

Erst die Menge macht es möglich

Allerdings – die Kosten für die Entwicklung und die Produktion mikroelektronischer Bauelemente sind enorm. Sie rentieren sich nur, wenn die Produktion höchster Stückzahlen möglich ist, was wiederum die massenhafte Anwendung der Mikroelektronik voraussetzt. Doch nun, da klein genug, läßt sich diese Forderung realisieren, denn die Mikroelektronik kann sich jetzt jene Sphären erobern, die ihr bislang versagt bleiben mußten: die gesamte Industrie, das Büro, sogar den Haushalt.

Wenn die durchgängige Anwendung der Mikroelektronik in Konsumgütern bis auf wenige Ausnahmen noch in den Kinderschuhen steckt, so beginnt sie doch bereits in einige Hauptgebiete einzudringen. In der DDR finden wir sie schon vielfach praktiziert, beispielsweise in der Unterhaltungselektronik, vor allem der Fernsehtechnik, in Taschenradios und Taschenrechnern, einigen Fotoapparaten, Schreibmaschinen und einzelnen Haushaltgeräten. Nun ist, wie der X. Parteitag feststellte, die Zeit herangereift, die Weichen weiterzustellen.

Gesellschaftliche und persönliche Interessen zählen

Die Entwicklungsarbeiten für die Anwendung der Elektronik in Haushaltgeräten konzentrieren sich hierbei auf vier Schwerpunkte: die Nahrungsmittelzubereitung, die Nahrungsmittellagerung, die Wäschereinigung und die Entstaubung. Gründe hierfür sind vor allem volkswirtschaftliche Anforderungen an eine höhere Material- und Energieökonomie, denn durch elektronische Schalt- und Steuerkreise im Kleinformat lassen sich Maße und Gewichte unserer Haushaltgeräte beträchtlich verringern und damit materialsparender bauen. Waschgeräte in Niedrig- und Schmalbauweise zum Beispiel, Heißluftgar- und Mikrowellengeräte, Staubsauger kleinerer Abmessungen bei gleichzeitiger Erhöhung des Leistungs-Masse-Verhältnisses. Mit der gezielten Anwendung der Mikroelektronik zur Leistungsregelung, zur Steuerung von zeitlichen Abläufen, zur Meßwertgewinnung, -verarbeitung und -anzeige bis hin zur automatischen Steuerung komplexer Prozesse (wie bei Waschautomaten, Elektroherden, Elektrogrills) läßt sich ferner der Energieverbrauch dieser heute noch relativ energieintensiven Haushaltgeräte um ein Beträchtliches verringern, was in der heute und künftig



Produktion regelbarer Widerstände für Fernseh-, Rundfunk- und Tonbandgeräte im VEB Bauelemente Dorfheim



Damit die Hausarbeit leichter wird: Rosemarie Zinke, VEB „acosta“, Thal, bei der Montage von Reglerbügelleisen



weltweit angespannten Energiesituation ein Erfordernis der Zeit ist.

Dabei treffen sich – wenn sinnvoll angewendet – die volkswirtschaftlichen mit den persönlichen Interessen: Die Geräte werden kleiner, leichter, handlicher, haben höheren Gebrauchswert bei geringerer Bedienungszeit durch höheren Bedienkomfort und garantieren mehr Zuverlässigkeit und längere Lebensdauer.

Kochen

Während die gegenwärtig noch allgemein üblichen traditionellen Elektroherde per Hand geschaltet werden und es allein dem Ermessen des Benutzers obliegt, durch Betätigung der Schalter die Temperatur einzustellen, steuert die Elektronik den Garprozeß genau dem Charakter und der Menge der Speisen entsprechend. Die Backröhre eines elektronisch gesteuerten Elektroherdes könnte man z. B. so programmieren, daß sie den Braten kurz und schnell erhitzt, bei kleiner Temperatur weiter dünstet und ihm durch abschließendes kurzes Aufheizen knusprige Bräune gibt. Der Benutzer brauchte also nur den zubereiteten Braten einzuschieben, das Programm einzuspeichern und darauf zu warten, bis der Computer signalisiert, daß alles fertig ist. Zwischendurch ließe sich unter Umständen noch abfragen und das Programm während des Ablaufs ändern. Ähnlich würde auch der Elektrogrill künftig funktionieren.

Der momentan zeitlich hohe Aufwand von wöchentlich 15,5 Stunden für die Speisenzubereitung könnte über dieses automatische energiesparende Garen hinaus außerdem verkürzt werden durch die Anwendung des Druckgartens, den Einsatz von Heißluftgeräten, Mikrowellenherden, Induktionskochfeldern bei Elektroherden und Kombination von Garverfahren.

Lagern

Ähnlich sähe auch künftig die Wirkungsweise der Elektronik bei der Nahrungsmittellagerung, in den Kühlmöbeln also, aus, die z. Z. noch etwa 20% der gesamten Energie eines Haushaltes verbrauchen. Hier allerdings befindet sich der Einsatz elektronischer Steuerungs-, Regelungs- und Schutzeinrichtungen international noch in den Anfängen. Die elektronischen Bauteile würden bei Kühlmöbeln Regel- und Schutzfunktionen übernehmen, indem sie für energiesparende, den Lebensmitteln entsprechende richtige Lagertemperaturen sorgen, im richtigen Moment vollautomatisch abtauen und unter Umständen sogar die maximal mögliche Lagerdauer von Gefriergut signalisieren.

Waschen

Am weitesten hat sich die Elektronik wohl das Gebiet der Wäschereinigung erobert. Waschmaschinen mit Steuergerät und elek-

tronischer Schaltverstärkung machen heute bereits eine Vielzahl von automatisch ablaufenden Waschprogrammen möglich. Durch den Einsatz mikroelektronischer Steuerungs- und Regelungssysteme, unter Verwendung von Mikroprozessoren, kann der Waschprozeß hinsichtlich Wäscheart, Wäschemenge, Verschmutzungsgrad und dem gewünschten Waschergebnis, verbunden mit dem optimalen Einsatz von Energie, Wasser und Waschmittel rationell gestaltet werden. Während der Benutzer gegenwärtig noch selbst entscheiden muß, ob mit Vorwäsche oder ohne gewaschen, ob geschleudert werden soll oder nicht und oftmals bei der Programmwahl Fehlentscheidungen entstehen, fragt dann künftig der computergesteuerte Waschvollautomat schrittweise die einprogrammierten Daten ab: Wäscheart, Grad der Verschmutzung sowie Wäschemenge und steuert danach den Waschvorgang. Dabei entscheidet er über den notwendigen Wasserstand, den Rhythmus der Trommelbewegung und die Waschtemperatur zugunsten des rationellsten Verbrauchs.

Säubern

Gewiß wäre wünschenswert, wenn sich zur Wohnungsreinigung der Staubsauger allein durch Knopfdruck dem jeweiligen Saugvorgang entsprechend automatisch zusammen-

setzen lassen würde: unter Möbeln langes Rohr und Normaldüse, auf Polstermöbeln kurzes Rohr und Polsterdüse z. B. Doch soweit wird die Elektronik die Staubbeseitigung vorerst nicht revolutionieren – wenn überhaupt je. Die Grundrichtung des Einsatzes der Elektronik bleibt hier vornehmlich dem rationellen Energieverbrauch vorbehalten. Obwohl bereits 400 Watt für die Staubbeseitigung ausreichen, nur Bodenstaubsauger etwa 600 Watt haben und Gerätetypen von 800 und mehr Watt immer mehr an Bedeutung verlieren, läßt sich durch die Elektronik mit der elektrischen Leistung der Geräte noch sinnvoller umgehen. Gardinen, Stoffe und leichtere Raumtextilien säubern sich schon bei einer Leistungsaufnahme von etwa 200 Watt, werden andernfalls sogar viel zu sehr strapaziert. Bei einigen Gerätetypen hat man bereits heute dieser Tatsache Rechnung getragen und sie mit einer elektronischen Leistungsregulierung versehen, die es möglich macht, bei geringerem Leistungsbedarf durch Knopfdruck bzw. Schalter die Wattzahlen und damit den Stromverbrauch entsprechend zu verringern. Und hier zeichnet sich ein weites Feld ab, das leichtere und geräuschärmer laufende Geräte erwarten läßt, die alle Raumtextilien energiesparend, materialgerecht und schonend säubern.

Ch. Baran

Mehr Motoren für Konsumgüter – für Hand- und Bodenstaubsauger – aus dem Werk Schleusingen des Elektrogerätewerkes Suhl



Die Mathematikerin

Emmy Noether (1882 bis 1935)

Am 23. März 1882 jährte sich zum 100. Male der Geburtstag der deutschen Mathematikerin *Emmy Noether*. Sie zählt zu den hervorragendsten Schöpfern der abstrakten axiomatischen Algebra und trug wesentlich dazu bei, daß die strukturtheoretische Denkweise zu einem beherrschenden Zug der modernen Mathematik geworden ist. Mathematische Begriffe, wie *Noetherscher Ring*, *Noetherscher Fünf-Axiome-Ring* und *E. Noetherscher Satz*, sind bleibender Ausdruck ihres äußerst fruchtbaren mathematischen Schaffens, das sie einreicht unter die bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts.

Emmy Noether wurde am 23. März 1882 als erstes Kind jüdischer Eltern in Erlangen geboren. Sie hatte noch drei Brüder. Ihr Vater, Max Noether (1844 bis 1921), war ein bekannter Mathematiker, der seit 1875 als Professor der Mathematik an der Universität Erlangen wirkte und durch bedeutsame wissenschaftliche Arbeiten vor allem zur Theorie der algebraischen Funktionen, der binären Formen sowie zur Eliminationstheorie hervortrat.

Emmy Noether war ein kluges und freundliches Kind, das nicht etwa durch eine besondere mathematische Begabung auffiel. Sie absolvierte von 1889 bis 1897 eine vorwiegend

sprachlich und hauswirtschaftlich orientierte Ausbildung an der Städtischen Höheren Töchterschule in Erlangen. Danach beschäftigte sie sich intensiver mit Fremdsprachen und legte im Jahre 1900 die bayrischen Staatsprüfungen für Lehrerinnen der französischen und englischen Sprache mit der Gesamtnote *sehr gut* ab, wodurch sie berechtigt war, an weiblichen Erziehungs- und Unterrichtsanstalten zu unterrichten.

Doch erwachte in dieser Zeit ihr Interesse an einem Universitätsstudium – in der damaligen Zeit ein ganz ausgefallener Wunsch für ein Mädchen. Nach den geltenden gesetzlichen Bestimmungen nämlich konnten damals weibliche Interessenten noch nicht als ordentliche Studierende immatrikuliert, sondern nur als Hörerinnen ohne Rechte auf Prüfungen (Hospitantinnen) zugelassen werden, wenn der jeweilige Professor es erlaubte. So hospitierte sie – ihren Wunsch durchsetzend – in den Jahren 1900 bis 1902 an der Universität Erlangen und bereitete sich in dieser Zeit auf ihr Abitur vor, das sie 1903 am Königlichen Realgymnasium in Nürnberg ablegte. Im Wintersemester 1903/1904 hospitierte sie an der Universität Göttingen, dem damaligen führenden mathematischen Zentrum in Deutschland, wo sie Vorlesungen bei dem Astronomen Karl Schwarzschild (1873 bis 1916) und den namhaften Mathematikern Hermann Minkowski (1864 bis 1909), Otto Blumenthal (1876 bis 1944), Felix Klein (1849 bis 1925) und David Hilbert (1862 bis 1943) hörte.

Inzwischen war das Frauenstudium gesetzlich erlaubt, und Emmy Noether setzte ab 1904 als *ordentliche* Studentin ihr Studium in Erlangen fort. Sie war im Bereich der Sektion II der Philosophischen Fakultät (dem der Naturwissenschaften) neben 46 männlichen die einzige weibliche Studierende. Sie hörte auch Vorlesungen bei ihrem Vater und bei Paul Gordan (1857 bis 1912), unter dessen Einfluß sie ihre Dissertation *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form* schrieb.

Im Dezember 1907 legte sie dann die mündliche Prüfung zur Erlangung der Würde eines *doctor philosophiae* mit dem Prädikat *summa cum laude* ab..

In den folgenden Jahren war Emmy Noether – und zwar ohne Anstellung oder Auftrag – am Mathematischen Institut in Erlangen tätig. Sie unterstützte ihren Vater und widmete sich eigenen mathematischen Untersuchungen über algebraische Invarianten. Ihr eigentlicher wissenschaftlicher Berater und Förderer in Erlangen war der Mathematiker Ernst Fischer (1875 bis 1954), unter dessen Einfluß sie die Gordansche Richtung des rein Rechnerischen und ausgeprägt Algorithmischen verließ und sich der ganz abstrakten Seite der Algebra zuwandte, die vor allem durch einige grundlegende Arbeiten von David Hilbert, in denen er das Fundament für die Theorie der abstrakten Körper, Ringe und Moduln legte, initiiert wurde.

Inzwischen als Spezialistin für die Theorie der algebraischen Invarianten anerkannt, übersiedelte Emmy Noether im Jahre 1915 nach Göttingen. Und Klein und Hilbert mußten kämpfen, um sie – als Frau – überhaupt an die Universität zu bringen. Auch konnte ihre Habilitation – trotz bedeutender Arbeiten über Differentialinvarianten – erst 1919 erfolgen, da bis dahin nach der Privatdozentenverordnung nur männliche Bewerber habilitieren durften. Im Jahre 1922 erhielt sie die Berechtigung zur Führung der Dienstbezeichnung *außerordentlicher Professor*, jedoch ausdrücklich ohne Besoldung und Änderung ihrer Stellung als Privatdozent. Erst 1923 erhielt sie einen Lehrauftrag für Algebra und die zugehörigen Übungen und somit wenigstens ein kleines festes Einkommen. Sie lebte genügsam und bescheiden von ererbtem Vermögen.

Ihre Göttinger Jahre waren die eigentlich wissenschaftlich fruchtbaren: Emmy Noether veröffentlichte grundlegende Arbeiten zur Eliminationstheorie, zur Ideal- und Darstellungstheorie, zur Klassenkörpertheorie sowie zur Theorie der Invarianten und Differentialinvarianten und zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Dabei lagen ihre besondere Stärke und ihr Schöpferium in ihrer neuen Arbeits- und Auffassungsmethode:

In der Abkehr vom Rechnerischen und Formelhaften, in der Bevorzugung des gedanklichen Schließen mittels abstrakter Definitionen und in der Herausarbeitung und begrifflichen Durchdringung der abstrakt-algebraischen Strukturen, wie Gruppe, Ring, Körper, Modul, Ideal und hyperkomplexes System. Über ihre Forschungsergebnisse hielt Emmy Noether im In- und Ausland zahlreiche wissenschaftliche Vorträge, u. a. auf den internationalen Mathematikerkongressen in Bologna (1928) und Zürich (1932). Im Jahre 1932 erhielt sie zusammen mit Emil Artin (1898 bis 1962) den *Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis* – eine Anerkennung ihrer bedeutsamen wissenschaftlichen Leistungen. Emmy Noether regte in Göttingen eine Reihe von Dissertationen an und förderte ihre



Schüler, die von anderen oft scherzhaft als *Noether-Knaben* bezeichnet wurden, uneigennützig und voller Hingabe. Einer ihrer Lieblings Schüler, der überragende holländische Mathematiker B. L. van der Waerden (geb. 1903), charakterisiert ihre Vorlesungen wie folgt: „Die kleine, treue Hörschar, meistens bestehend aus einigen fortgeschrittenen Studenten und häufig ebensovielen Dozenten und auswärtigen Gästen, mußte sich ungeheuer anstrengen, um mitzukommen. War das aber gelungen, so hatte man weit mehr gelernt als aus dem tadellosesten Kolleg. Es wurden fast nie fertige Theorien vorgetragen, sondern meistens solche, die erst im Werden begriffen waren. Jede ihrer Vorlesungen war ein Programm. Und keiner freute sich mehr als sie selbst, wenn ein solches Programm von ihren Schülern ausgeführt wurde. Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler“.

Und besonders durch ihre Schüler wurden die moderne Mathematikauffassung von Emmy Noether und die von ihr praktizierte strukturelle mathematische Denkweise an fast alle deutschen Universitäten und die ausländischen Zentren der mathematischen Forschung getragen.

Die Göttinger Zeit, die für Emmy Noether ausgefüllt war mit Vorlesungen, intensiver Forschungsarbeit und vor allem mit fruchtbaren Diskussionen über Mathematik im Kreise ihrer Schüler, wurde nur durch zwei kurze Gastprofessuren in Moskau (1928/29) und Frankfurt/Main (1930) unterbrochen. Doch dann kam das Jahr 1933 und mit ihm der Machtantritt der deutschen Faschisten. Vor allem ihrer jüdischen Herkunft wegen wurde Emmy Noether noch im gleichen Jahr die Lehrbefugnis entzogen, ein Los, das auch viele andere deutsche Wissenschaftler traf. So ging sie im Oktober 1933 als Gastprofessorin an die Frauenhochschule in Bryn Mawr (USA). Hier wandte sie sich neben ihren Ausbildungsaufgaben in der wissenschaftlichen Arbeit vor allem der nichtkommutativen Algebra zu und hielt auch im nahegelegenen Princeton, wo u. a. auch Albert Einstein (1879 bis 1955) als deutscher Emigrant Zuflucht gefunden hatte, Vorlesungen. Nach einem kurzen Zwischenaufenthalt in ihrer Heimat übersiedelte sie 1934 endgültig in die USA.

Am 14. April 1935 ist Emmy Noether in Bryn Mawr – für alle ihre Freunde völlig unerwartet und leider allzu früh – an den Folgen einer Operation verstorben. Doch ihr Name lebt in der Mathematik fort und bleibt unvergessen.

R. Mildner

Die Frau als Mathematikerin

Vorurteile – Einsichten – Tatsachen

Vorurteile

Sonja Kowalewsky¹ in einem Brief an ihren Freund, Prof. G. Mittag-Leffler (1888): „Als Weihnachtsgeschenk erhielt ich ... einen Artikel von Strindberg (einem bedeutenden schwedischen Schriftsteller), in dem er so klar beweist, wie zwei mal zwei vier ist, daß eine solche Ungeheuerlichkeit wie ein weiblicher Professor der Mathematik schädlich, unnützlich und unangenehm sei. Ich finde, daß er im Grunde ganz recht hat, nur gegen eines protestiere ich, daß nämlich in Schweden eine große Anzahl Mathematiker leben sollen, die mir weit überlegen seien, und daß man mich nur aus Galanterie berufen habe.“

Aus „Ueber die Anlage zur Mathematik“ von P. I. Möbius (1900):

„Will man sich auf statistische Vermutungen einlassen, so kann man annehmen, daß im günstigsten Falle auf 1 Million weiblicher Personen 1 mit mathematischem Talent komme. Es ergibt also diese Betrachtung dasselbe, was die tägliche Erfahrung lehrt, daß die Weiber in der Regel ohne Anlage für Mathematik sind. Gewöhnlich sind die Weiber nicht nur unfähig, mathematische Beziehungen aufzufassen, sondern sie empfinden auch eine Art von Abscheu gegen alles Zahlenmäßige. Damit hängt wohl auch die weitverbreitete weibliche Unpünktlichkeit zusammen. In gewissem Sinne kann man sagen, das Mathematische ist der Gegensatz des Weiblichen. ... Sieht man von den wenigen weiblichen Wesen ab, die „aus der Art geschlagen“ sind, so gibt es kaum einen schrofferen Gegensatz als den Mathematikerkopf und den Weiberkopf einerseits, den Mathematikergeist und den Weibergeist andererseits.“

1Sofia Wasiljewna Kowalewskaja (1850 bis 1891), die sich selbst „Sonja“ nannte, war eine bedeutende russische Mathematikerin, die im Jahre 1888 an der Universität Stockholm (Schweden) eine Professur für Mathematik erhielt (erstmalig eine Frau als Universitätsprofessor). Sie veröffentlichte vor allem mathematische Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und zur Kreiseltheorie.

Einsichten

Karl Marx in einem Brief an Ludwig Kugelmann (1868): „Jeder, der etwas von der Geschichte weiß, weiß auch, daß große gesellschaftliche Umwälzungen ohne das weibliche Ferment unmöglich sind. Der gesellschaftliche Fortschritt läßt sich exakt messen an der gesellschaftlichen Stellung des schönen Geschlechts (die Häßlichen eingeschlossen).“

Friedrich Engels in einem Brief an Gertrud Guillaume Schack (1885): „Eine wirkliche Gleichberechtigung von Frau und Mann kann nach meiner Überzeugung erst eine Wahrheit werden, wenn die Ausbeutung beider durch das Kapital beseitigt und die private Hausarbeit in eine öffentliche Industrie verwandelt ist.“

Tatsachen

– Die Anzahl der Mathematikerinnen an der Universität Leipzig betrug im Zeitraum von 1409 bis 1945 gleich Null.

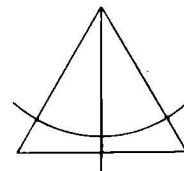
– Der Anteil der Frauen und Mädchen an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig betrug im Jahre 1981

- bei Lehrerstudenten (Math./Phys.): 54 Prozent,
- bei Mathematikstudenten: 28 Prozent,
- bei den Wissenschaftlern: 15 Prozent.

Eine Plastik: Schulkinder



Die Plastik „Schulkinder“ von Hans Klakow fand 1967 ihren Platz auf dem Gelände der IGA in Erfurt. Offenbar handelt es sich um *Junge Mathematiker*, von denen einer den beiden anderen einen geometrischen Sachverhalt erklärt. Aber welchen wohl? Auf den Boden ist die abgebildete Figur geritzt: wir erwarten eure Deutungsvorschläge.



Jedenfalls freuen sich alle Mathematiker sehr über dieses kleine Kunstwerk, denn Darstellungen der Mathematik und des Mathematik treibenden Menschen in der bildenden Kunst sind doch recht selten, erst recht solche, die sich der mathematischen Aktivität unseres Nachwuchses zuwenden. In dieser Hinsicht ist die *Erfurter Gruppe* vielleicht einzigartig in der Welt.

P. Schreiber

Sommerlager des Bezirksklubs Schwerin

Vom 17. bis 21. August 1981 führte der Bezirksklub *Junge Mathematiker* Schwerin sein traditionelles Sommerlager in der Touristenstation Mueß der Bezirkshauptstadt durch. Neben den Ferienlehrgängen in Güstrow findet dieses Treffen jährlich an wechselnden Orten statt. Es kommen hier über 40 der besten Mathematik-Schüler des Bezirkes aus den Klassen 7 bis 11 zusammen, um ihr Wissen und Können in der Mathematik zu erweitern, aber auch, um sich zu erholen und bei Sport und Spiel einander noch besser kennenzulernen. Die materiellen Bedingungen werden vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit Schwerin geschaffen, die inhaltliche Betreuung erfolgt durch Lehrkräfte der Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule *Liselotte Herrmann* Güstrow.

Vormittags wurde intensiv gruppenweise Mathematik betrieben. Die Nachmittage und Abende waren ausgefüllt durch einen Besuch im Klub-Kino, eine touristische Wanderung, eine mehrstündige Dampferfahrt mit Abendbrottafel auf dem Schweriner See und eine Vielzahl von Wettbewerben. Unter starker Mitwirkung des FDJ-Aktivs wurden ein Schach-, ein Tischtennis- und ein Skatturnier sowie ein Schießwettkampf organisiert. An einem Tag wurde eine Mathematik-Lagerolympiade durchgeführt.

Trotz des Regens brauchte dank der über-

dachten Baude der beliebte Grillabend nicht auszufallen, an dem auch die Ehrung der Sieger aus den einzelnen Wettbewerben vorgenommen wurde. Ein besonderer Höhepunkt war der Besuch von Oberstudienrat J. Lehmann, der Interessantes aus seiner Arbeit mit der *alpha*, unterstützt durch zahlreiche Colordias, berichtete und durch seinen lebendigen Vortrag die Begeisterung der Schüler für die Mathematik verstärkte.

H. Thamm

Aufgaben der Lagerolympiade

(Die angegebene Klassenstufe bezieht sich auf das neue Schuljahr.)

Klasse 8

▲ 1 ▲ In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\angle ACB$.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\angle DCE = \frac{1}{2} (\angle ABC - \angle CAB) \text{ gilt!}$$

▲ 2 ▲ In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.

Beweise, daß dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

▲ 3 ▲ Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H . K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE .

Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!

▲ 4 ▲ Beweise folgenden Satz:

Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k , so hängt die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\angle CAB$ ab.

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ in Abhängigkeit von α !

Klasse 9

▲ 1 ▲ Wieviel verschiedene siebenstellige natürliche Zahlen kann man mit Hilfe von

sieben verschiedenen Grundziffern bilden, a) wenn alle Grundziffern von Null verschieden sind,

b) wenn eine der Grundziffern die Null ist?

▲ 2 ▲ Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50^\circ$, $h_b = 3$ cm und $h_a = 2,5$ cm!

Stellen Sie einen Konstruktionsplan auf, begründen Sie die Konstruktion, und prüfen Sie ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

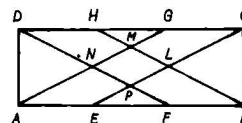
▲ 3 ▲ Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C . Die Seite AB habe die Länge $c = 20$ cm. D sei der Höhenfußpunkt der Höhe h_c .

Wie lang sind die Strecken $\overline{AD} = q$ und $\overline{DB} = p$, wenn h_c folgende Längen annimmt:

a) $h_c = 6$ cm, b) $h_c = 10$ cm, c) $h_c = 11$ cm?

▲ 4 ▲ Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$. Jede der beiden Rechteckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei in drei gleiche Teile geteilt, so daß gilt $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ und $\overline{DH} = \overline{HG} = \overline{GC}$.

Wie verhält sich der Flächeninhalt A_1 des Vierecks $PLMN$ zum Flächeninhalt A_2 des Rechtecks $ABCD$ (siehe Bild)?



Klasse 10

▲ 1 ▲ Welche reellen Zahlen x erfüllen die Gleichungen

a) $\frac{\log_2(\sqrt{x+1}+1)}{\log_2\sqrt{x-40}} = 3,$

b) $2^{18x-1} + 2^{18x+2} = 3^{18x-1} + 3^{18x},$

c) $x^{\log_a x} = a^2 x, a \in P^+, a \neq 1?$

▲ 2 ▲ Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{BC} = a$ und der Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A .

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksflächen ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a !

Küche mit offenem Herd



XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)



Aufgaben

Olympiadeklasse 7

1. In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel: „An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate.“

Beate: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate.“

Christa: „An der Tafel ist genau ein Parallelogramm.“

Detlev: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.“

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

- Von wem kam die falsche Aussage?
- Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!
- Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

2. Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

3. Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3,1$ cm, $\alpha = 100^\circ$ und $\beta = 120^\circ$! Dabei bezeichne a die Länge $AB = BC$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M . Auf k liegen die Punkte A und B derart, daß der Winkel $\sphericalangle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

- C liegt auf k .
- Es gilt $\overline{MB} = \overline{BC}$.
- Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D .

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\sphericalangle CDB$!

5. Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

6. Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200-g-Flasche kostet 1,20 M, jede gefüllte 500-g-Flasche kostet 2,80 M. Der Preis der leeren 500-g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200-g-Flasche. Die leere 1000-g-Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500-g-Flasche.

Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200-g-Flaschen eine gefüllte 1000-g-Flasche gekauft wird?

Olympiadeklasse 8

1. In dem Schema

$$\begin{array}{r} A B B C - D C E = F B E G \\ : \quad + \quad - \\ C D \cdot H E = J D A F \\ \hline J F K - D D A = J J F C \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ..., 9) ersetzt werden, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

2. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M . Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E . Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenkelig ist!

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem Radius 5,5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$, und beweise, daß es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine „Analyse“ (Schlußfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine „Determination“ (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

4. Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$ gilt. Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

5. Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine. Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

6. Ermittle alle sechststelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft!

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entsprechende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z .

Olympiadeklasse 9

1. Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:

(1) x ist eine zweistellige Zahl.

(2) x ist kleiner als 1000.

Paar B:

(1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.

(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.

Paar C:

(1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.

(2) x ist durch 37 teilbar.

Paar D:

- (1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
 (2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist! Gibt es solche Zahlen x , so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

2. Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = \overline{AD} = 6$ cm und $a = \overline{AB} > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB , für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, daß es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

3. Beweisen Sie, daß die Ungleichung $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$ gilt!

4. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50^\circ$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm! Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC . Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke $ABC, A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

5. Beweisen Sie den folgenden Satz!
 Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

6. Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{AD} = 13$ cm, $\overline{BD} = 13$ cm gegeben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, daß durch diese Angaben die Länge der Kante $\overline{CD}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!

- (1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.
 (2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

2. Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)! Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem

Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = 1$.

3. Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$\begin{aligned} [a] + 2b &= 6,6, \\ [2a] + 3b &= 11,9. \end{aligned}$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g+1$ gilt. So ist z. B.

$$\begin{aligned} [4,01] &= 4, \text{ da } 4 \leq 4,01 < 5 \text{ gilt,} \\ [7] &= 7, \text{ da } 7 \leq 7 < 8 \text{ gilt,} \\ [-\pi] &= -4, \text{ da } -4 \leq -\pi < -3 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

4. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , die die Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 1 \quad \text{erfüllen!}$$

5. In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:

„Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile usw.

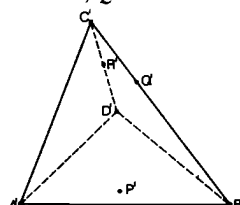
Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Als Lösung mußte bewiesen werden, daß es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

6. Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D' bzw. P' haben. Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC ; ein Punkt R liege auf der Strecke CD ; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R' . Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier



Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Olympiadeklassen 11/12

1. Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 .

Man beweise: Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

2. a) Beweisen Sie, daß kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!

b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!

Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

3. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt!

Die für alle reellen $x \neq -c$

durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f

genügt den folgenden Bedingungen:

(1) Es gibt reelle Zahlen x , für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.

(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$

$$\text{gilt} \quad f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}.$$

4. Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q , die die folgende Eigenschaft haben:

Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, daß in der durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

definierten Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

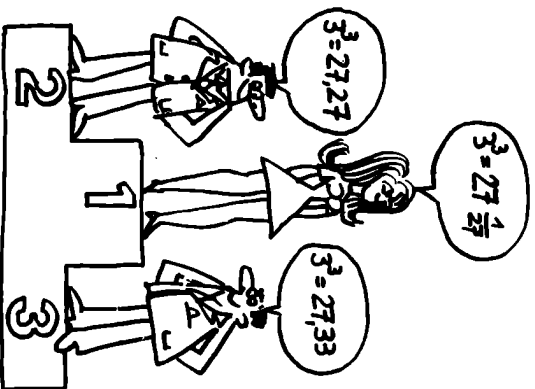
5. 37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, daß genau 9 von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen. Es sollen nun in „Arbeitsgängen“ Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen „Arbeitsgang“ genau 20 beliebige der 37 Karten.

Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen „Arbeitsgängen“ erreichen kann, daß alle 37 Karten

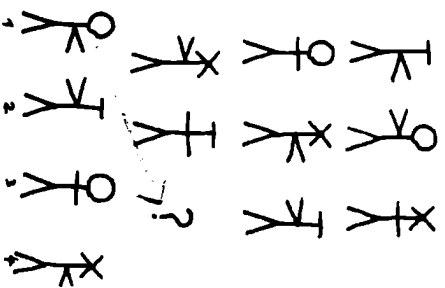
a) oben ihre rote Seite,

b) oben ihre blaue Seite

zeigen! Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden „Arbeitsgänge“!



Welche der Figuren 1 bis 4 gehört logischerweise an Stelle des Fragezeichens?



2

Lösungen

Tafelreite:

58015 16850
+ 65412 + 20640
123427 usw. 37490 usw.

82193 19845
+ 8364 + 628
90557 usw. 20473 usw.

Seite 2

Nr. 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

Seite 3

100°; 110°; 110°; 55°; 55°; 100°.

Seite 4

1. $L = \{0, 1, 2, 3\}$
2. $L = \{12, 13, 14, \dots\}$
3. $L = \{-1, -2, -3, \dots\}$
4. $L = \emptyset$
5. $L = \{5\}$
- 15 6. $L = \{8\}$

Seite 7

Er kann 114 km pro Stunde fahren.

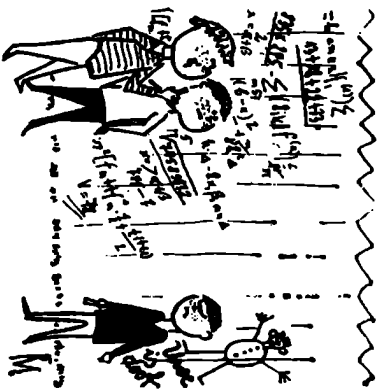
Seite 6

- II + IV = IV
- VI + IV = X
- VI - III = III
- VII - II = V
- VI - IV ≠ X

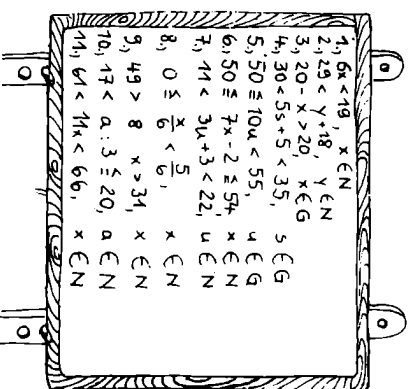
Seite 5

Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280 : 7 = 40$ $u = 40$.
Aus (2) findet man $z = 4 \cdot 40 = 160$.
Aus (4) ergibt sich $v = 120$.
dann aus (5) $y = 160 + 120 = 280$.
Schließlich findet man aus (1) $x = 280 : 40 = 7$.

7. $L = \{3, 4, 5, 6\}$
8. $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
9. $L = \{4, 5, 6\}$
10. $L = \{54, 57, 60\}$
11. $L = \emptyset$

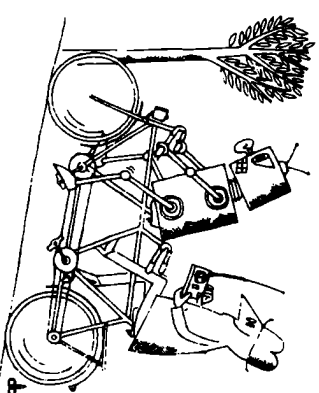


„Was soll bloß mal aus dem werden?“

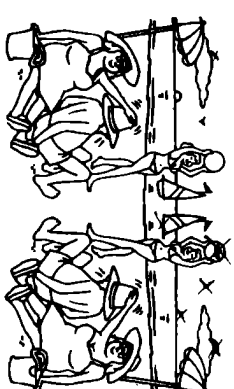


Auf einen Blick:
 $L_1 = \{\dots\}$; $L_2 = \{\dots\}$; ...

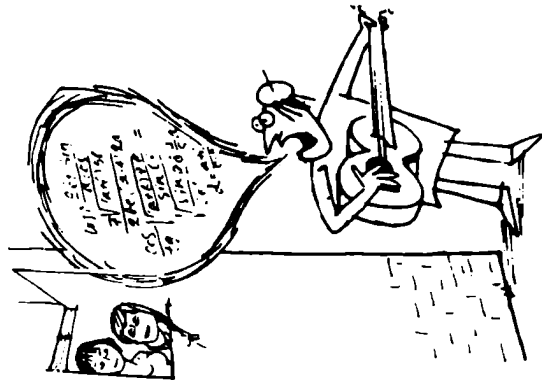
4



13



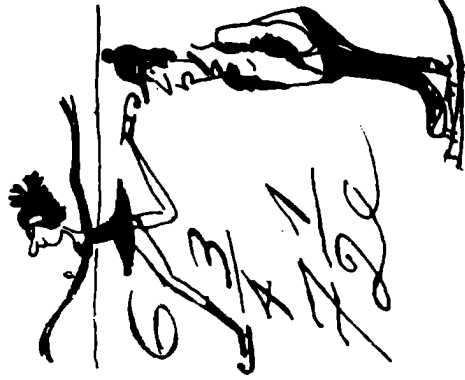
Die rechte Hälfte des Bildes ist Spiegelbild der linken Hälfte bis auf fünf kleine Details, die sich einen anderen Platz gesucht haben.
Wo sind sie zu finden?



Unten an einer schönen Linden
war gar ein kleiner Wurm zu finden.
Der kroch hinauf mit aller Macht,
acht Ellen richtig bei der Nacht,
und alle Tage kroch er wieder
vier Ellen dran hernieder.
Zwölf Nächte trieb er dieses Spiel,
bis daß er von der Spitze fiel,
am Morgen in die Pfütze,
und kühlte sich ab von seiner Hitze.
Mein Schüler, sage ohne Scheu,
wie hoch dieselbe Linde sei!

Adam Ries (1550)

12

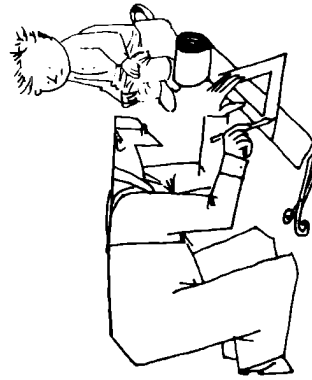


1. $x = y : 40$
2. $z = 4 \cdot u$
3. $u = 280 : 7$
4. $160 = v + 40$
5. $y = z + v$

Bei den fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

5

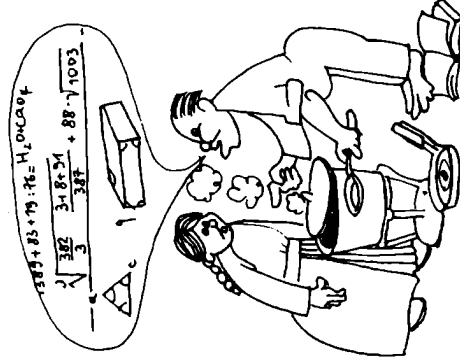


•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Setze einstellige Zahlen so ein, daß sowohl waagrecht als auch senkrecht richtig gelöste Aufgaben entstehen!

10



„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

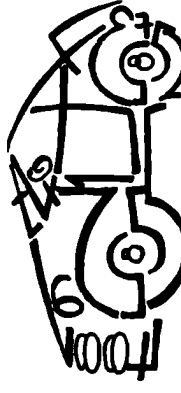
„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

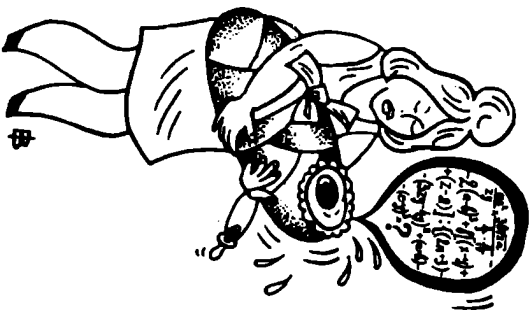
„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

„Und jetzt bitte die Acht üben ...“



Addiere die einstelligen Zahlen des PKW und du weißt, wieviel Kilometer je Stunde er fährt. Entspricht das der Straßenverkehrsordnung?

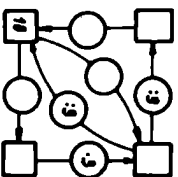
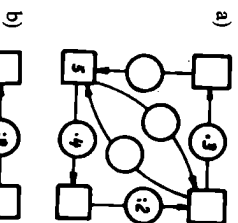
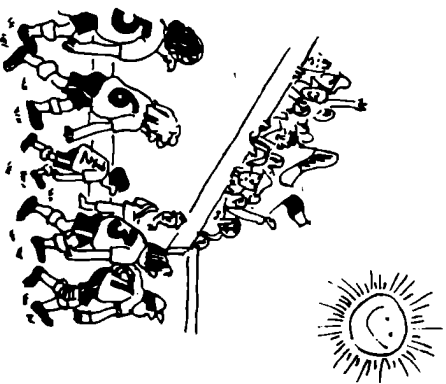
Das Rezept für die Zubereitung ist 7 ganz einfach.



~~III~~ - II = IV
 VI - IV ≠ X
 VI + II = III
 VII + I = V
 VI - IV = IX

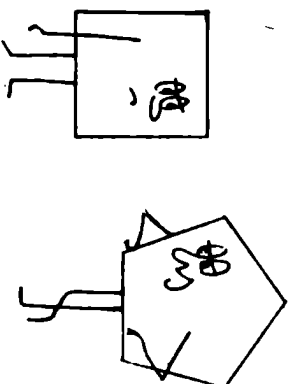
In jeder der fünf Reihen ist ein Hölzchen so umzulegen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht!

6



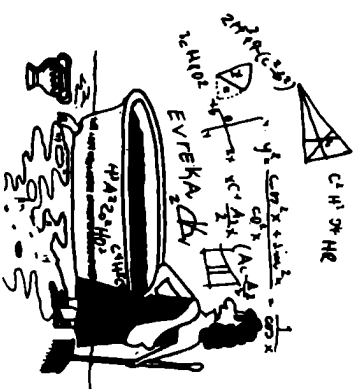
Vervollständige!

8



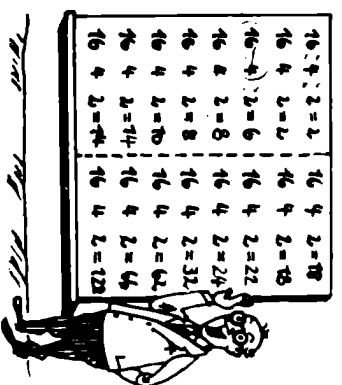
Sie sollten sich auch qualifizieren!

11

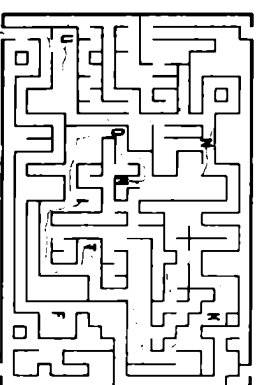


„Archimedes, eine Minute!
Was soll diese Schweinelei?“

9

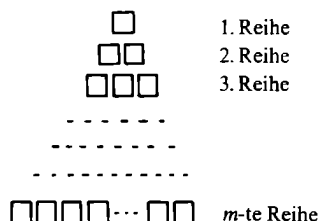


Setze die richtigen Rechenzeichen!



Von einem der vier Eingänge führt ein Weg über alle angeführten Buchstaben zu einem anderen Ausgang. Bei richtiger Lösung findet ihr einen wichtigen mathematischen Begriff!

6.A Unter einem „Stapel“ von Gegenständen (wie z.B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie im Bild verstanden, bei der jeweils für $k=1, \dots, m$ in der k -ten Reihe genau k Gegenstände stehen. Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als „Höhe“ des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.) Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leq z \leq 10000$ so existiert, daß es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen läßt!



6.B Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$: Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}.$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten läßt.

Aus Platzgründen verzichten wir auf die Veröffentlichung der Lösungen. Interessierte Leser erhalten sie (zur Einsichtnahme) bei ihrem Kreisfachberater Mathematik oder bei den Bezirkskabinetten für außerunterrichtliche Tätigkeit.

Lösungen

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. V. Friedrich
(aus alpha 1/82, S. 3):

Um die unterschiedlichen Näherungswerte für $(9 - \sqrt{80})^3$ zu erklären,

verwenden wir wieder die Beziehung $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (1) mit $a=9$, $b=\sqrt{80}$. Der Fehler $\delta = b' - b$ der für $b=\sqrt{80}$ verwendeten Näherung $b' = 8.9443$ ist wegen $\sqrt{80} \approx 8.9442719$ sehr klein: $\delta \approx 0,00003$.

Vaters Näherung $(a-b')^3$ kann wegen $(a-b')^3 = (a-(b+\delta))^3 = ((a-b)-\delta)^3$ unter Verwendung von $c=a-b$ und (1) in $(a-b')^3 = c^3 - 3c^2\delta + 3c\delta^2 - \delta^3$ umgeformt werden, so daß ihr Fehler $(a-b')^3 - (a-b)^3 = -3c^2\delta + 3c\delta^2 - \delta^3 \approx -3 \cdot (0,056)^2 \cdot 0,00003 \approx -0,0000003$ (2) beträgt (die Summanden $3c\delta^2 \approx 10^{-10}$, $\delta^3 \approx 10^{-13}$ sind ohne Einfluß auf die Größenordnung des in (2) angegebenen Fehlers).

Peters Näherung $a^3 + 3ab^2 - (3a^2 + b^2)b'$ weist dagegen den Fehler $a^3 + 3ab^2 - (3a^2 + b^2)b' - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = -(3a^2 + b^2)(b' - b) = -(3a^2 + b^2)\delta \approx -323 \cdot 0,00003 \approx -0,01$ auf. (3)

Bei der Verwendung von Näherungswerten kann das Ergebnis wesentlich vom verwendeten Rechenweg abhängen, so daß man mit Überschlagsrechnungen sich vergewissern muß, daß beim gewählten Rechenweg die Näherungswerte das Ergebnis nur wenig verfälschen können. (Näheres dazu in einem Artikel in der folgenden Nummer.)

Lösungen zu: Internationale

Buchkunstausstellung (IBA), S. 52

▲1▲ Bezeichnet man die vier Personen der Reihe nach mit a, b, c und d , dann ergeben sich auf Grund der Aussagen die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= c - 5, \\ b &= \frac{1}{2}(a + d), \\ c &= d + 29, \\ d &= \frac{1}{4}(a + b + c). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung:

$$a = 89, b = 77, c = 94, d = 65.$$

Da dann $a + b + c + d = 325$ ist, also $325 < 350$, dürfen die vier Personen in dem Aufzug fahren.

▲2▲ (1) Wenn Pete lügt, so wäre er es. Dann sagt aber auch Tim die Unwahrheit. Es ergibt sich ein Widerspruch.

(2) Wenn Jenny lügt, so kann es nur Jenny oder Jessica sein. Dann sagt aber Jessica oder Tim die Unwahrheit. Es ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch.

(3) Wenn Tim lügt, sagen die drei übrigen die Wahrheit, also ist Tim schuldig.

(4) Wenn Jessica lügt, ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch.

$$\begin{aligned} \text{▲3▲ I. } 2: 40 &= x: 18 \\ x &= 0,9 \end{aligned}$$

Die Entfernung auf der Karte beträgt 0,9 cm.
II. 2 cm : 40 km = 1 cm : 20 km

Ein Zentimeter auf der Karte entspricht 20 km auf der Erde.

III. Zwischen Beirut und Sour sind es auf der Karte 3,8 cm.

$$\begin{aligned} 1: 20 &= 3,8: x \\ x &= 76 \end{aligned}$$

Die Entfernung beträgt 76 km.

IV. Zwischen Saida und Tripoli sind es 5,4 cm.

$$\begin{aligned} 1: 20 &= 5,4: x \\ x &= 108 \end{aligned}$$

Die Entfernung beträgt 108 km.

▲4▲ Die Kanten der Packungen seien l , m und n . Dabei gilt $l = a \cdot x$, $m = b \cdot y$ und $n = c \cdot z$ (x, y, z sind die Anzahl der Längen einer Streichholzschachtelkante.) Das Volumen der Packung ist $lmn = abcxyz$. Das Produkt xyz gibt die Anzahl der Schachteln an, und es gilt $xyz = 10$.

Da $x, y, z \in \mathbb{N}$, gibt es neun Möglichkeiten:

x	1	1	10	1	1	2	2	5	5
y	1	10	1	2	5	1	5	1	2
z	10	1	1	5	2	5	1	2	1

Da Papierverbrauch und Oberflächengröße der Packung gleich sind, ist

$$2ln + 2ln + 2mn = 2(abxy + acxz + bcyz).$$

Da die Oberfläche möglichst klein sein soll, muß auch der Faktor $(abxy + acxz + bcyz)$ möglichst klein sein. Man berechnet diesen in allen 9 Fällen und erhält den kleinsten Wert 14558 für $x=5$, $y=2$ und $z=1$. Das ist die ökonomischste Packung, wie man sich beim Kauf leicht überzeugen kann.

▲5▲ a) Die Restfläche A ist gleich der Differenz A_D und der Halbkreisfläche A_K (siehe Bild 1), also

$$\begin{aligned} A &= A_D - A_K = \frac{4a^2}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{a^2}{2} (2\sqrt{3} - \pi) \\ &\approx 0,16a^2. \end{aligned}$$

b) Die Restfläche A ist gleich der Differenz von Quadratfläche A_Q , Halbkreisfläche A_K und kleiner Quadratfläche A_q (siehe Bild 2), also

$$A = A_Q - A_K - A_q,$$

$$A = 6^2 - \frac{\pi}{2} 3^2 - 3^2 = 36 - 4,5 \cdot 3,14 - 9 = 12,87.$$

c) Ein Drittel der Restfläche A (siehe Bild 3) ist gleich der Differenz von Halbkreisfläche A_k und der Fläche des Kreissegmentes A_S . Das letztere ist wieder die Differenz von der Kreissektorfläche A_K und der Fläche des gleichseitigen Dreiecks A_D , also

$$\frac{A}{3} = A_k - A_S = A_k - (A_K - A_D),$$

$$\frac{A}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} - \frac{\pi \cdot 8^2}{6} + \frac{8^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$\frac{A}{3} \approx 19,3, A \approx 58.$$

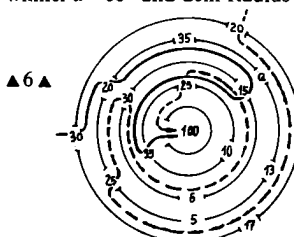
d) Es sind die sogenannten Mönchen des Hippokrates. Die Summe A der Flächeninhalte der beiden Mönchen ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks A_D , also

$$A = A_D = \frac{ab}{2}.$$

A_k ist die Fläche des Halbkreises über $\overline{CB}$.

A_S ist die Fläche des Kreissegmentes über $\overline{CB}$ mit $\alpha = 60^\circ$ und Radius $\overline{AC}$.

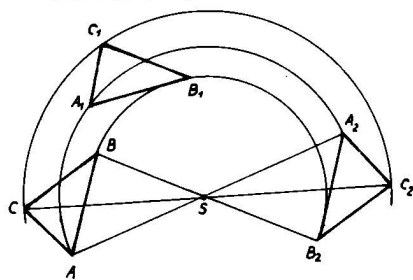
A_K ist die Kreissektorfläche mit dem Zentrwinkel $\alpha = 60^\circ$ und dem Radius $\overline{AC}$.



▲7▲

1	5		3	2	8	
6	4	7	1	8	2	
		9	6	3	3	
1	1	9		2		
8	1		7	1	4	9

▲ 8 ▲ Man verlängert $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$ um sich selbst über S hinaus und erhält A_2 , B_2 und C_2 , da $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$.



▲ 9 ▲ Wir schreiben die Variable x für die Zahl der Säcke auf dem LKW.
Bedingung: $1500 + 50x < 3000$.
Dann gilt $50x < 1500$
 $x < 30$

Der LKW darf höchstens 29 Sack Zement laden.

▲ 10 ▲ Die Winkelsumme eines beliebigen konvexen Vielecks berechnet man nach der Gleichung $w_s = 180(n - 2)$, wobei n die Anzahl der Seiten ist.

Dann ist $n = \frac{w_s}{180} + 2$,

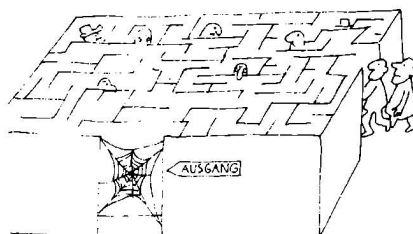
$$n = \frac{2340^\circ}{180^\circ} + 2,$$

$n = 15$. Das Vieleck hat 15 Seiten.

Lösungen zu Zahlen und Fakten, S. 55

- ▲ 1 ▲ um 45653 M;
- ▲ 2 ▲ ja, Annahme gleicher absoluter Zuwachsraten;
- ▲ 3 ▲ etwa 6,5 Mill. Beschäftigte;
- ▲ 4 ▲ 2 h 24 min;
- ▲ 5 ▲ nach 36,5 Tagen;
- ▲ 6 ▲ Selbstkosten je Tonne Rohbraunkohle: 11,02 M;

Kosten, die je Tonne Rohbraunkohle durch den Abraumabbau entstehen: 6,94 M.



In freien Stunden · alpha-heiter, S. 64

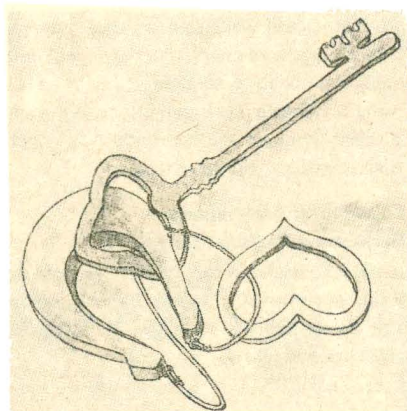
Erraten des Geburtstages

Wenn du die Geburtskalendertage mit x , den Geburtsmonat mit y und das Geburtsjahr mit z bezeichnest, ergibt sich folgender Ansatz:
 $(200y + 2x + 7) \cdot 50 + 1632 = z$
 $10000y + 100x + 350 + 1632 = z$
 $10000y + 100x + 1982 = z$
Die Differenz $1982 - z$ gibt die Lebensjahre an.

Durch die Multiplikation der Geburtsangaben mit 10000 bzw. 100 erhalten die Angaben einen bestimmten Stellenwert. So können – von rechts nach links – in der 1. und

2. Stelle das Alter, in der 3. und 4. Stelle der Geburtskalendertag und in der 5. und 6. Stelle der Geburtsmonat abgelesen werden. Bei Verwendung der Aufgabe im Jahre 1983 muß anstatt der Zahl 1632 die Zahl 1633 in der Berechnung verwendet werden.

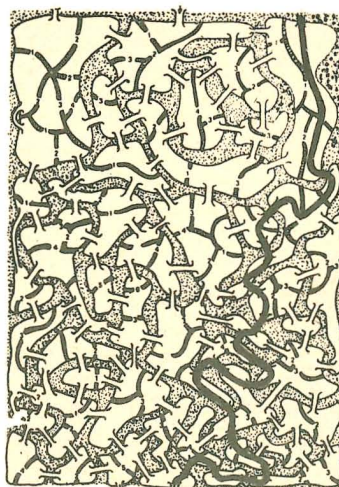
Rätsel mit einem Schlüssel



Die verflixte 7

1	2	1
7	3	4
5	5	6
2	2	1
7	3	4
6	6	5
1	1	2
4	2	5
7	4	4

Zollschranken



Fröhliche Mathematik

Judith hat sich die Zahlen 880 und 88 gedacht. – Beide haben $9 \cdot 20 \text{ min} = 180 \text{ min}$ gespielt. – Nein. Auf jedem Telefon mußten sieben Anschlüsse sein, insgesamt also $7 \cdot 31$. Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B zugleich Verbindung von B zu A ist, müßte die Gesamtzahl der Anschlüsse, also $7 \cdot 31$, durch 2 teilbar sein. – Für die Hälfte des Schulwegs braucht Uwe 10 Minuten und Karin 15 Minuten. Da Karin 5 Minuten Vorsprung hatte, holte Uwe sie in 10 Minuten ein.

Begriffe gesucht

Zahl; Aussage; Höhe; Lineal; eben; Netz; Teiler; Hundert; Einheit; Olympiade; Radius; Intervall; Elf – Zahlentheorie

Lösungen zu: Matt durch die Dame, S. 66

Acht Möglichkeiten gibt es!

- a) 1. Db5 Ka8/Kc8 2. De8 matt;
- b) 1. Dc1 Ka8 2. Dc8 matt;
- c) 1. Dc2 Ka8 2. Dc8 matt;
- d) 1. De1 Ka8/Kc8 2. De8 matt;
- e) 1. De4 Kc8 2. De8 matt;
- f) 1. Df5 Ka8 2. Dc8(f8) matt;
- g) 1. Dg6 Kc8 2. De8 matt;
- h) 1. Dh7 Ka8/Kc8 2. Da7(b7, g8, h8)/Dc7 matt.

Andere Versuche scheitern, weil der schwarze König dann über c8 nach d7 aus dem Mattnetz fliehen könnte.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. V. Friedrich: (aus alpha 1/82, S. 3)

	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
1				X		7			X	
2	X					8				X
3			X			9		X		
4		X				10			X	
5			X			11			X	
6	X					12	X			

Lösungen zu: Zahlenspiel mit mathematischem Hintergrund, S. 67:

▲ 1 ▲ Für $a = 3$ gilt: $z - a = 100 - 3 = 97$. Da 97 eine Primzahl ist, gibt es keine echten Teiler und folglich keine Lösung für $n \leq 15$.

▲ 2 ▲ Mit $a = 4$ und $a \leq n \leq 10$ lassen sich bei $z = 100$ als Lösungen finden: $n = 5$ und $n = 7$.

▲ 3 ▲ $a = 2, z = 200, n = 5$

$n = 8$

$n = 10$

$a = 4, z = 200, n = 13$

$a = 5, z = 200, n = 12$.

▲ 4 ▲ Für $a = 1, a = 3, a = 6, a = 7$ und $a = 9$ lassen sich keine Lösungen finden.

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Wert von 2400 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B.G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Leipziger Volkszeitung; Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Leipzig

Spezialschule physikalisch- technische Richtung EOS „C. F. Gauß“ Frankfurt (Oder)

Die Spezialschule (phys.-techn. Richtung) Frankfurt/Oder ist 1964 gegründet worden. Gleich von Anfang an gab es eine enge Verbindung zum VEB Halbleiterwerk Frankfurt/Oder, dem heutigen Leitbetrieb im Kombinat Mikroelektronik, unserem Trägerbetrieb.

Trotzdem sind wir zunächst eine allgemeinbildende Schule, die von Kl. 9 bis zur Hochschulreife führt. Talente und Begabungen, vor allem auf mathematischem und physikalisch-technischem Gebiet, werden bei uns weiter gefördert mit dem Ziel, daß sie als junge sozialistische Persönlichkeiten Spitzenleistungen für unsere Republik vollbringen, während der Schulzeit, in der Olympiade- und MMM-Bewegung, aber auch später im Studium und im Beruf. Dementsprechend sind unsere Aufnahmebedingungen. Der Bedeutung, die die Mikroelektronik im Rahmen des wissenschaftlich-technischen Fortschritts hat, entsprechen Arbeitsgemeinschaften für Elektronik für alle interessierten Schüler der Klassen 9 und 10, ein spezieller Lehrgang Elektronik in Klasse 11, die wissenschaftlich-praktische Arbeit in der Abiturstufe für alle Schüler im VEB Halbleiterwerk sowie die engen Verbindungen zwischen Klassen unserer Schule und Kollektiven des Werkes.

Hervorragende Ergebnisse in der MMM-Bewegung waren in der Vergangenheit ein Ergebnis dieser Zusammenarbeit.

Besonderheiten, die in gleicher Weise auch für die vier anderen Spezialschulen physikalisch-technischer Richtung in Jena, Dresden, Riesa und Kleinmachnow gelten, sind erst einmal höhere Wochenstundenzahlen in Mathematik und Physik.

So werden in Mathematik, Klasse 9, allen Schülern nach einem Zusatzlehrplan z.B. Kenntnisse über Determinanten und Kegelschnitte vermittelt.

In Klasse 10 ist u. a. ein Lehrgang über komplexe Zahlen, Grundlage für jedes Studium in Richtung Elektronik/Elektrotechnik, Schwerpunkt. Die Klasse 11 enthält u. a. einen besonderen Abschnitt zur Fehlerrechnung, während in Klasse 12 vor allem Anwendungen zur Vektorrechnung sowie Differential- und Integralrechnung zusätzlich vermittelt werden.

In Physik ist die selbständige experimentelle

Arbeit der Schüler hervorzuheben, die in die Ausbildung von Fähigkeiten im schöpferischen Anwenden des Wissens und Könnens münden soll.

Im Jahre 1977, anlässlich des 200. Geburtstages von Carl Friedrich Gauß, erhielt unsere Schule den ehrenvollen Namen *C. F. Gauß*. Die Verleihung war für uns Ansporn zu weiterer fleißiger Arbeit. Wir ehren Gauß, einen Revolutionär der Wissenschaft, seither in einer Gauß-Festwoche, in der u. a. die Schul-MMM sowie ein Mathematik-Mannschaftswettbewerb (1982 zum 14. Mal) stattfinden.

Ein Wettbewerb in Physik, der gleichfalls die kollektive Arbeit fördert, wird 1982 zum 5. Mal stattfinden.

Seit 1977 werden an Schüler unserer Schule, die sich bereits bei Olympiaden auszeichnen konnten, Leistungsaufträge – ähnlich wie im Sport – vergeben, die eine weitgehende (z. T. individuelle) Förderung garantieren.

Für Abiturienten, die sich bei tadelloser Haltung durch besondere schöpferische Leistungen auszeichnen konnten (z. B. Preisträger der DDR-Olympiade in Mathematik), haben der VEB Halbleiterwerk und die Schule einen *Gaußpreis* gestiftet, die höchste schulspezifische Auszeichnung.

1979 feierten wir den 15. Geburtstag unserer Schule. Viele Absolventen berichteten über ihre weitere Entwicklung nach dem Abitur, darunter ein Hauptmann unserer Nationalen Volksarmee, eine Lehrerin für Mathematik und Physik und ein Diplomingenieur aus dem Halbleiterwerk. Es war eine gute Bilanz zum 30. Jahrestag der Gründung unserer Republik, die uns mit Stolz erfüllte und uns Kraft für die weitere Arbeit vermittelte.

Wenn Schüler aus 8. Klassen des Bezirkes Frankfurt/Oder Interesse haben, an unserer Schule zu lernen, wenden sie sich an ihre Klassenleiter bzw. ihren Direktor, die die genauen Aufnahmebedingungen kennen.

Oberlehrer Dieter Jacob,
Direktor

Mathematik

Aufgaben der Klassenstufe 9/10

▲1▲ Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a . Dem Würfel werde ein gerader Kreiszylinder so umbeschrieben, daß die Zylinderachse mit einer Raumdiagonale zusammenfällt und alle Würfeleckenpunkte auf der Zylinderoberfläche liegen.

Stellen Sie das Volumen des Zylinders als Funktion von a dar!

(Ergebnis: $V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}a^3$)

▲2▲ In dem nebenstehenden Bild 1 ist die Anzahl der Wege längs der Linien von A nach Z ohne Umwege zu bestimmen!

(Ergebnis: 140 Wege)

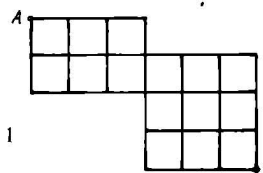


Bild 1

▲3▲ Ein PKW, der ein Kraftstoff-Öl-Gemisch von $33\frac{1}{3} : 1$ benötigt, wurde versehentlich mit 5 Liter reinem Kraftstoff betankt.

Wieviel Liter Gemisch 25:1 sind nachzufüllen, um das richtige Mischungsverhältnis wieder herzustellen?

(Ergebnis: 15 Liter)

▲4▲ Von 50 befragten Schülern betreiben 8 Schwimmen und Radfahren und Handball, 19 Schwimmen und Radfahren, 17 Schwimmen und Handball, 20 Radfahren und Handball, 28 Schwimmen, 34 Radfahren und 31 Handball.

Wieviel Schüler betreiben genau eine Sportart, wieviel Schüler betreiben keine dieser Sportarten?

(Ergebnis: 5 Schüler genau eine, 5 Schüler keine dieser Sportarten)

Armin Bochmann,
Fachzirkelleiter Mathematik

Fortsetzung auf Seite 72





Ein Knobelheft

Herausgegeben vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Neubrandenburg.

Im Schuljahr 1981/82 ist nun das 3. Knobelheft an diejenigen Schüler des Bezirks Neubrandenburg gegangen, die sich für mathematische Knebelien besonders interessieren. Unsere Pionierhäuser oder die Stationen Junger Naturforscher und Techniker versenden diese Heftchen an die Schulen. Bis zu einem bestimmten Tag müssen dann die angekreuzten Kästchen (siehe Bild 1) zurückgeschickt werden. Auf den Mathetreffen in den Kreisen werden dann die Lösungen besprochen und die erfolgreichsten Knobler ausgezeichnet.

Bild 1

	a	b	c	d	e		a	b	c	d	e
1						7					
2						8					
3						9					
4						10					
5						11					
6						12					

Wir wissen, daß viele Pioniere nach Bekanntschaft mit diesen Heftchen sich auch weiterhin mit schwierigeren Aufgaben befaßten. Wir hoffen, daß recht viele dieser Jungen und Mädchen einmal zu den erfolgreichen *Jungen Mathematikern* gehören werden. Dies zu erreichen, war der Grund für die Herausgabe der Heftchen. An dieser Stelle sei Herrn Heinz Schob vom Potsdamer Pionierhaus herzlich gedankt, der bereits seit 10 Jahren solche Heftchen für die Klassenstufe 3 zusammenstellt und der damit Anregung für unsere Heftchen gab. *H.-J. Kerber*

Nun könnt auch ihr euer Können überprüfen. Bei jeder der folgenden Aufgaben könnt ihr eure Lösungen entweder bei a, b, c, d oder e anstreichen, nachdem ihr gut überlegt und alles noch einmal überprüft habt. Zum Schluß kreuzt eure Ergebnisse in den Kästchen an! (Bild 1) Laßt euch ein wenig Zeit! An nur einem Nachmittag ist so etwas natürlich nicht zu schaffen.

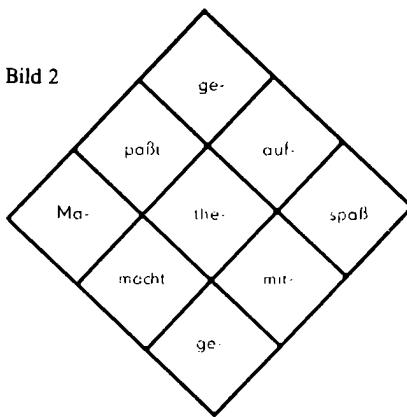
Nach Fertigstellung könnt ihr dann im Lösungsteil dieser Ausgabe eure Lösungen kontrollieren. ... Übrigens! 10 Richtige: „Gut gelöst“, 11 Richtige: „Sehr gut gelöst“, 12 Richtige: „Ausgezeichnet gelöst“! Und nun

Aufgabe 1

„Aufgepaßt! Mathespaß! Mitgemacht!“ Zähle alle Silben dieser Zeile!

Richtig! Es sind neun. – Nun nummeriere sie der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 9! Beginne mit: Auf (1), ge (2) und so weiter! Jetzt trage die neun Zahlen in die Felder des Quadrates genau so ein, wie ihre Silben, im Titelbild auf der Umschlagseite stehen (siehe Bild 2)! Am besten ist es, wenn du dir die Figur noch einmal auf Karopapier zeichnest und dann nur die Zahlen einträgst.

Bild 2



Wenn du die Summe von je drei Zahlen bildest, die in gleicher Richtung stehen, so erhältst du stets 15 als Ergebnis. Und das nicht nur in einem Falle, sondern mehr als viermal! (Solltest du beim besten Willen jedoch höchstens viermal die Summe 15 finden, so beachte: Es gibt zweimal die Silbe „ge“! Also „Auf-ge-paßt...“)

Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Summe 15 zu bilden?

Die Anzahl der Möglichkeiten ist

a	b	c	d	e
5	6	7	8	9

Aufgabe 2

Wir betrachten noch einmal die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wähle nun drei Zahlen so aus, daß du als Summe die Zahl 15 erhältst!

Die Frage ist nun aber: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um diese Summe zu bilden? Dabei sollen zum Beispiel

1 + 5 + 9 und 1 + 9 + 5

zwei verschiedene Möglichkeiten sein. (Wer die Aufgabe 1 richtig gelöst hat, kommt schneller zum Ziel!)

Du kommst sicherer zum richtigen Ergebnis, wenn du ganz „systematisch“ vorgehst. Ja, und was „systematisch“ bedeutet, das mußt du dir in aller Ruhe überlegen!

Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt

a	b	c	d	e
48	40	36	32	24

Aufgabe 3

Wir kommen noch einmal auf unser Quadrat zurück, das aus 9 kleinen Quadraten besteht. (Bild 2)

Zuerst einmal etwas Gedankenarbeit. – Wir denken uns die große Quadratfläche ausgeschnitten. Dann schneiden wir noch 4 kleine Quadratflächen ab, so daß nur noch die Quadrate mit den Silben „paßt – auf – the – macht – mit“ übrig bleiben. Nun faltet die 4 Flächen „paßt – auf – macht – mit“ so nach oben, daß ein würfelförmiges Gebilde entsteht, das oben offen ist!

Susanne hat aus Versehen die Felder mit den Silben „auf – ge – ge“; abgeschnitten. Sie möchte aber auch solch einen Behälter falten. Nun sollst du helfen und ihr sagen, welches 4. Feld sie jetzt noch abschneiden muß! Die Frage ist: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um Susanne zu helfen, damit sie sich noch solch einen Behälter falten kann?

Die Anzahl der Möglichkeiten ist!

a	b	c	d	e
1	2	3	4	5

Aufgabe 4

Jedem Buchstaben des Pioniergrußes

S E I D B E R E I T !

1 2 3 4 5 2 6 2 3 7

ist eine Zahl zugeordnet ($S = 1$, $E = 2$, usw.). Rate und rechne! Nur mit diesen 7 verschiedenen Buchstaben sollst du jetzt ein Wort schreiben:

Es ist eine Pflanze. Sie wird von den meisten Gartenbesitzern angepflanzt. Ihre Frucht ist rot und befindet sich nicht weit vom Boden entfernt.

Addierst du bei diesem Wort die Zahlen, die seinen Buchstaben zugeordnet sind, so erhältst du 29. Kontrolliere das!

Nun sollst du die drei Buchstaben, die du für diese Frucht noch nicht benutzt hast, aufschreiben!

Die 3 zugeordneten Zahlen sollst du miteinander multiplizieren!

Das Produkt lautet:

a	b	c	d	e
12	21	60	84	168

Aufgabe 5

Sicher ist die Gleichung $1982 = 1982$ wahr.

Setze zwischen die Ziffern genau drei Pluszeichen (+) so, daß auf jeder Seite dieser Gleichung Summen entstehen. Die neu gebildete Gleichung soll auch wieder eine wahre Aussage sein. Die Summe auf jeder Seite der Gleichung beträgt

a	b	c	d	e
29	92	101	200	983

Aufgabe 6

Wie müßte in der Zahlenfolge die nächste Zahl lauten?

Die ersten Aufgaben sind zum Üben. Sie werden immer etwas schwieriger. Schließlich kommt es dann auf die Lösung der letzten Zahlenfolge an. Schau dir dabei immer noch die bisher gelösten Aufgaben an!

- a) 0, 6, 12, 18, 24, ...
- b) 4, 7, 10, 13, 16, ...
- c) 1, 2, 4, 8, 16, ...
- d) 1, 4, 8, 13, 19, ...
- e) 1, 4, 9, 16, 25, ...
- f) 27, 18, 11, 6, 3, ...
- g) 1, 3, 9, 27, 81, ...
- h) 2, 6, 12, 20, 30, ...
- i) 5, 10, 20, 40, 80, ...

Nun aber zur eigentlichen Aufgabe:

3, 5; 9, 17, 33, ...

Welche Zahl findest du bei dieser letzten Zahlenfolge?

Es ist die Zahl

a	b	c	d	e
65	51	50	49	41

Aufgabe 7

Zehn Telefonsprechstellen sollen so miteinander verbunden werden, daß von jeder Stelle aus mit jeder anderen eine Verbindung besteht. Wieviel Verbindungen müssen gebaut werden? Solche praktische Aufgaben kannst du lösen, wenn du weitermachst:

Zeichne dir einen Kreis! Auf diesem Kreis liegen 3 verschiedene Punkte. Nun soll jeder Punkt mit jedem anderen verbunden werden.

Wieviel Strecken mußt du zeichnen?

Richtig gezeichnet, denn es war leicht: Es sind drei Strecken. Nun sind auf dem Kreis 4 Punkte! Wenn du richtig gezeichnet hast, so sind es 6 Strecken. Bei 5 und bei 6 Punkten wirst du das richtige Ergebnis sicher noch finden. (Schreibe dir alle Ergebnisse schön untereinander!)

Die Aufgabe lautet: Wieviel Strecken sind bei 10 verschiedenen Punkten zu zeichnen? (Vielleicht könnte man dabei noch einmal an die Übungen zur Aufgabe 6 denken!)

Bei 10 Punkten ist die Anzahl der Strecken

a	b	c	d	e
36	38	40	45	90

Aufgabe 8

Welche Zahlen kann man für a und b setzen, damit $a + b = 4$ eine wahre Aussage wird? Suche alle Möglichkeiten! Hast du alle gefunden? Es gibt genau 5 Möglichkeiten!

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Die Summe von 3 natürlichen Zahlen x , y und z soll 12 ergeben. Wir schreiben also:

$$x + y + z = 12.$$

Nun könnte man für x , y , und z eine ganze Anzahl von Möglichkeiten finden, für die diese Gleichung stimmt. Wir wollen aber

wissen: Welches ist der größte Wert, den ich erreichen kann, wenn ich das Produkt $x \cdot y \cdot z$ mit diesen drei Zahlen bilde?

Solche Aufgaben löst man leichter mit einer Tabelle. Wir beginnen mit

x	y	z	Summe	Produkt
10	1	1	12	10
9	...	...	12	

und so weiter.

(Mit $x = 11$ oder $x = 12$ brauchen wir nicht zu rechnen, denn dann müßte mindestens eine weitere Zahl Null sein. Und ein Produkt mit mindestens einer Null ergibt ja stets Null – wie jeder weiß!)

Der größte Wert des Produktes $x \cdot y \cdot z$, den man erreichen kann, ist

a	b	c	d	e
48	50	54	60	64

Aufgabe 9

Wir haben einen Würfel von 3 cm Kantenlänge aus 27 kleinen Würfeln zusammengeklebt. Überlegen, welche Kantenlänge jeder der 27 kleinen Würfel hat! Nun wissen wir: Jeder Würfel hat 6 gleich große Quadratflächen. Überlege, wieviel kleine Quadratflächen auf jeder großen Quadratfläche zu sehen sind!

Und jetzt zur Aufgabe: Von jeder Ecke des großen Würfels wird genau ein kleiner Würfel weggenommen. Wieviel kleine Quadratflächen sind nun auf dem gesamten Restkörper zu sehen?

Die Anzahl der kleinen Quadrate auf diesem Restkörper beträgt

a	b	c	d	e
62	54	46	38	30

Aufgabe 10

Wir schreiben die Zahlen 1 bis 30 der Reihe nach hintereinander.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... usw.
... 28 29 30.

(Schreibe dir die 30 Zahlen erst einmal ordentlich hin!) Überlege, wie viele Ziffern es sein müßten!

a) Streiche 45 Ziffern so, daß die verbliebenen Ziffern eine möglichst kleine sechsstellige Zahl darstellen! Die Reihenfolge der Ziffern darf dabei nicht verändert werden!

Für die nächste Aufgabe schreibe dir noch einmal die 30 Zahlen auf!

b) Streiche jetzt 45 Ziffern so, daß eine möglichst große sechsstellige Zahl übrigbleibt! Auch hier darf dabei die Reihenfolge der Ziffern nicht verändert werden!

Meinst du die beiden Lösungen gefunden zu haben, so addiere die beiden Ergebnisse! Dann ergibt sich die Summe

a	b	c	d
1028209	1098757	1099050	1100910
e			
1111120			

Aufgabe 11

Stefan erzählt: In meiner Klasse 4a sind 29 Schüler. Wenn alle Schüler der Klassen 4a, 4b und 4c da sind und sich ordentlich zum Schulbeginn auf dem Schulhof aufstellen, dann ist das so:

Stehen alle in Dreierreihe, dann bleibt einer übrig, stehen alle in Viererreihe, dann bleibt auch einer übrig, stellen wir uns aber in Fünferreihe auf, so bleibt keiner übrig.

Nun untersuche, wie viele Schüler außer uns, also aus den anderen beiden 4. Klassen, noch auf dem Schulhof standen!

Die Schülerzahl aus 4b und 4c betrug

a	b	c	d	e
66	61	60	56	51

Aufgabe 12

Schreibe dir eine ganz beliebige dreistellige Zahl auf, bei der die erste Ziffer mindestens um 2 kleiner ist als die dritte Ziffer! (Weil man später etwas subtrahieren soll, und das ginge sonst nicht.)

Nun setze darüber die dreistellige Zahl in genau umgekehrter Reihenfolge der Ziffern! (Also die aufgeschriebene Zahl „rückwärts“ gelesen!) – Hast du? – Nun subtrahiere!

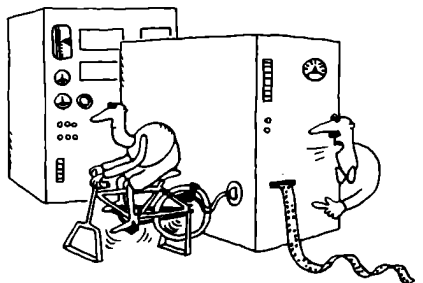
Als Ergebnis erhältst du wieder eine dreistellige Zahl. Diese Zahl schreibe in genau umgekehrter Reihenfolge der Ziffern jetzt darunter! – Addiere jetzt diese beiden Zahlen!

Das Ergebnis lautet:

a	b	c	d	e
999	1089	1150	1159	1299

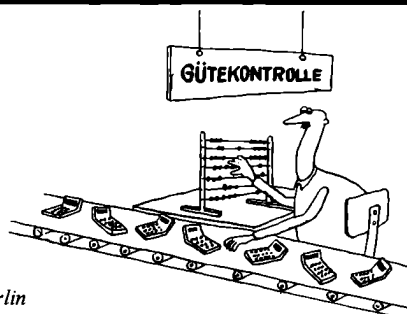


D. Dimitrov, Sofia



„Wenn Sie nicht gleichmäßig treten, bekomme ich laufend ein anderes Ergebnis.“

In freien Stunden • alpha-heiter



Lothar Schneider, Berlin

Erraten des Geburtstages

Karin behauptet gegenüber Dirk, den Geburtstag seines Vaters erraten zu können. Sie sagt:

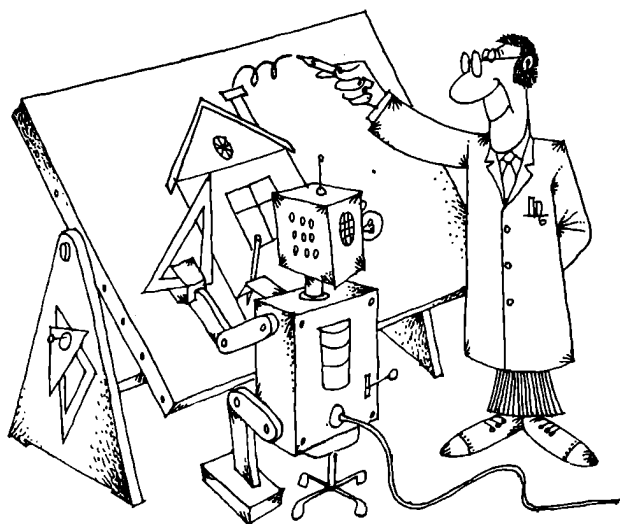
„Multipliziere den Geburtsmonat deines Vaters mit 200! – Addiere hierzu das Doppelte des Geburtskalendertages und die Zahl 7! – Multipliziere die erhaltene Summe mit der Zahl 50! – Addiere hierzu die Zahl 1632! Subtrahiere nunmehr das Geburtsjahr deines Vaters, und nenne mir die erhaltene Zahl!“

Karin zerlegt die erhaltene Zahl von rechts nach links in Zweiergruppen. Die erste Zweiergruppe – von links nach rechts gelesen – (kann auch eine „Einergruppe“ sein) gibt den Geburtsmonat an, die zweite Zweiergruppe den Geburtskalendertag und die dritte das Lebensjahr, woraus unschwer auf das Geburtsjahr geschlossen werden kann.

Beweise, daß die Lösung für jedes beliebige Alter (außer bei Personen von 100 und mehr Lebensjahren) stimmt!

Wie ist die Berechnung zu verändern, wenn sie auch im Jahre 1983 gelten soll?

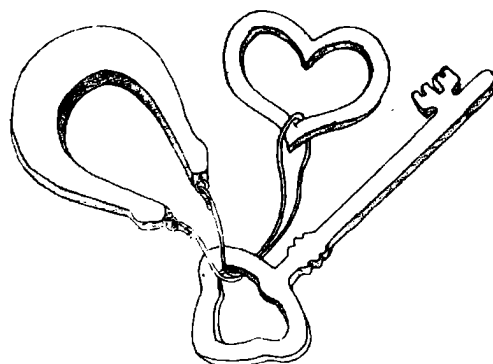
Dr. G. Lorenz, Leipzig



Rätsel mit Schlüssel

Unser Bild zeigt ein unterhaltsames Rätsel. Die Rätselgegenstände könnt ihr aus verschiedenen Werkstoffen anfertigen. Die Aufgabe besteht darin, den Schlüssel von Hufeisen und Herz freizubekommen.

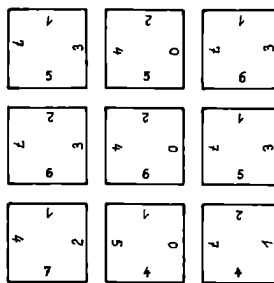
Josef Svoboda, aus *rozhledy, der mathematischen Schülerzeitschrift* (9-81/82), Prag



Die verflixte 7

Fertige dir neun quadratische Kästchen mit folgender Bedingung an!

Die neun Karten sind nun zu einem Quadrat zusammenzusetzen, und zwar so, daß die zwei Zahlen, die jeweils an den Kanten zusammenstoßen, immer die Summe 7 ergeben. Schüler Michael Nitsche, Dresden (Kl. 8)



Zahlenspiele

$n \quad n^{19-(8 \cdot 2)}$

1	1^3	$1^3 = \sqrt{1 \cdot 9} - \sqrt{8 : 2}$
2	2^3	$2^3 = 1 + \sqrt{98 : 2}$
3	3^3	$3^3 = 1 + \sqrt{9 \cdot 8} + 2$
4	4^3	$4^3 = (1 - 9 - 8)^2$

Ing. H. Decker, Köln

Zollschranken

Die auf dem Bild zu sehenden Inseln sind durch Brücken verbunden, aber leider sind sie voller Zollschranken. Wer durch diese hindurchgeht, hat soviel Forint Zoll zu zahlen, wie auf unserem Bild durch Zahlen angegeben ist. Die Aufgabe ist folgende:

Finde einen Weg über die Inseln und Brücken von einem der drei oberen Eingänge zu einem der beiden Ausgänge unten, auf dem man insgesamt 6 Forint Zoll zu zahlen hat!

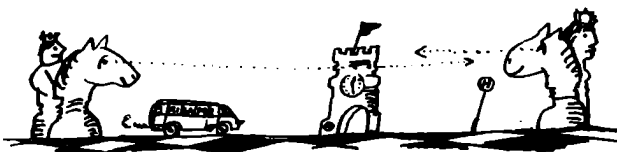
aus: Füles, Budapest



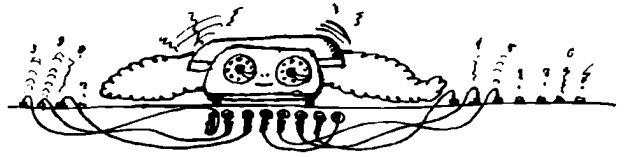
Fröhliche Mathematik

● Judith denkt sich 2 natürliche Zahlen. Die eine Zahl endet mit Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl. Die Summe beider Zahlen ist 968. Wer weiß, welche Zahlen sich Judith gedacht hat?

● Jana hat mit Jirka Schach gespielt: „Wie lange haben wir gespielt?“ fragt Jirka. Jana antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, wie oft in dieser Zeit der Bus in Stadt-richtung an unserem Haus vorbeifuhr. Der erste kam, als wir zu spielen begannen, der zehnte kam, als wir gerade fertig waren.“ Wie lange haben die beiden gespielt, wenn alle 20 Minuten ein Bus fuhr?



● Lassen sich 31 Telefone so miteinander verbinden, daß jedes mit genau 7 anderen verbunden ist?



● Uwe und seine jüngere Schwester Karin haben den gleichen Schulweg. Karin braucht von zu Hause bis zum Schultor 30 Minuten. Uwe 20 Minuten. An einem Tage ging Karin 5 Minuten vor Uwe aus dem Haus. Nach wieviel Minuten holte Uwe seine Schwester ein?

Dr. M. Rehm (aus: Pionierkalender 1982)

Begriffe gesucht

Zu finden ist jeweils ein Begriff aus dem Mathematikunterricht, der für den ersten Bestandteil als Schluß und für den zweiten als Anfang eingesetzt wird, so daß sinnvolle Wörter entstehen. Die Anfangsbuchstaben dieser Brückenwörter ergeben aneinandergereiht ein Teilgebiet der Mathematik.

(Jeder Punkt entspricht einem Buchstaben.)

Dreh	Wort
Gleichheits	Form
Dreiecks	nsatz
Holz	Kante
Dan	flächig
Würfel	Hemd
Raum	fremd
Jahr	Schaft
Maß	skreis
Mathematik	Sieger
Erd	Länge
Ton	Schachtelung
National . . .	Meter

OStR K.-H. Lehmann,
VLdV, Berlin

– Neorealismus!!!

Milan Vavro, Belgrad





Der Admiral der Schiffbauwissenschaft



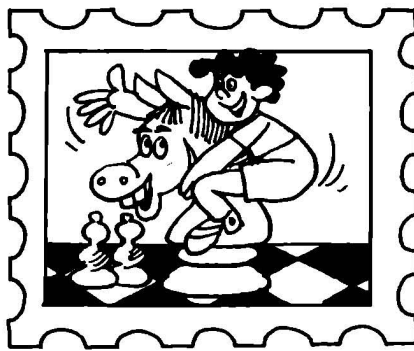
Die enge Verbindung der Mathematik mit ihren Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik besitzt in der Sowjetunion eine besondere, bis ins 18. Jh. zurückreichende Tradition. Zu den bedeutendsten Repräsentanten dieser Tradition gehört *Alexej Nikolajewitsch Krylow*, den man mit gutem Recht zu den Begründern des theoretisch exakt fundierten Umgangs mit fehlerbehafteten mathematischen Objekten (Zahlen, Funktionen usw.) zählen kann.

Hängt das Ergebnis einer Rechnung von gegebenen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ ab, so sind bei Aufgaben der Praxis für diese Größen meist nur Näherungswerte und Aussagen über deren maximale Abweichungen Δx_i von den genauen Werten bekannt. Die Fehlertheorie gewinnt hieraus Abschätzungen für die maximal mögliche Abweichung Δy des mit den Näherungswerten berechneten Resultats y von dessen richtigem Wert. Ist z. B. $\Delta x_i = 0,1$, so ist es sinnlos, zur Rechnung einen Näherungswert für x_i mit vielen Dezimalstellen zu verwenden. Der Rechenaufwand wird unnötig groß, und die vielen erhaltenen Dezimalstellen des Ergebnisses täuschen eine in Wirklichkeit nicht vorhandene Genauigkeit des Resultats vor. So notwendig und verdienstvoll es ist, solchen Überlegungen aus mathematischer Sicht nachzugehen, so ist doch ihre breite Anwendung und Durchsetzung in der Praxis gegen zählbeige alte Gewohnheiten ein noch größeres Verdienst. Werfen wir also einen Blick auf das Leben eines Mannes, der sich nicht nur einer solchen wissenschaftlichen Lebensaufgabe verschrieben hatte, sondern schlechthin der Aufgabe,

seinem Heimatland und der Gesellschaft mit den Mitteln des Wissenschaftlers zu dienen.

N. A. Krylow wurde am 3. August 1863 in einem Dorf in der Nähe von Simbirk (das heute ihm zu Ehren den Namen Krylowo trägt) als Sohn eines Gutsbesitzers und ehemaligen Artillerieoffiziers geboren. Bereits als Kind begleitete er seinen Vater auf weiten Auslandsreisen, wo er neben vielen anderen Kenntnissen und Erfahrungen eine perfekte Beherrschung der wichtigsten Fremdsprachen Englisch, Französisch, Deutsch erwarb. Schon 1878 begann seine Ausbildung an der Marineoffiziersschule in Petersburg, wo ein hohes Niveau der Ausbildung in Mathematik, Mechanik, Astronomie, Ballistik und anderen mathematisch orientierten technischen Fächern herrschte. Nach Beendigung dieser Schule wurde der frischgebackene Unterleutnant *Krylow* zunächst in die Kompaßabteilung der Hydrographischen Verwaltung versetzt, wo er unter der Leitung eines berühmten Fachmannes auf diesem Gebiet an dem Problem der Deviation des Kompasses arbeitete. Darunter versteht man die durch die Eisenmasse des Schiffes hervorgerufene Ablenkung der magnetischen Kompaßnadel. Später absolvierte *Krylow* die berühmte *Petersburger Marineakademie*, an der er anschließend als Professor Mathematik und Schiffbautechnik lehrte. 1906 hielt er dort zum ersten Mal seine legendäre Vorlesung über Approximationstheorie, die 1911 in Buchform publiziert wurde und bis heute eine wichtige Rolle in der mathematischen Ausbildung sowjetischer Ingenieure spielt. Ohne seine pädagogische und wissenschaftliche Tätigkeit an der Marineakademie zu unterbrechen, wurde *Krylow* Hauptinspektor für den Schiffbau in Rußland und Vorsitzender des Marinetechnischen Komitees. Der von ihm bekleidete Posten war so bedeutend, daß er das Recht hatte, persönlich dem Zaren Vortrag zu halten. Er wirkte auch direkt an der Projektierung von Kriegsschiffen mit.

Ungeachtet seiner adligen Herkunft, seines Generalsranges und seiner führenden Stellung in der zaristischen Marineführung gehörte *Krylow* zu den ersten russischen Intellektuellen, die sich vorbehaltlos auf die Seite der Revolution stellten. Er setzte seine ganze Kraft für den Neuaufbau und die Modernisierung der nun dem Volke gehörenden Flotte ein und wurde 1919 zum Leiter der Marineakademie ernannt, aber bald darauf im Auftrage der sowjetischen Regierung als Leiter einer Gruppe von Gelehrten ins Ausland gesandt, um wissenschaftliche Verbindungen wiederherzustellen, Ausrüstungen und wissenschaftliche Literatur einzukaufen. Nahezu zehn Jahre verbrachte *Krylow* mit solchen wichtigen Aufgaben, fern der Heimat und fern von seiner wissenschaftlichen Arbeit. 1927 übernahm er die Leitung des Mathematischen Instituts der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften, und ab 1929 konnte



Matt durch die Dame

Um Varianten einer Schachpartie und auch einzelne Züge beschreiben zu können, sind alle Felder des Schachbretts unterschiedlich gekennzeichnet: Von Weiß aus gesehen, versteht man die senkrechten Linien am Rand mit den Buchstaben a bis h und die waagerechten Reihen am Rand mit den Zahlen 1 bis 8. Wenn nun bei dieser matrix-ähnlichen Systematik z. B. in der abgebildeten Diagrammstellung die weiße Dame von b1 nach h1 zieht, so heißt das in der Schachsprache Db1-h1 oder abgekürzt nur Dh1, indem dann nur das Feld angegeben wird, auf das die entsprechende Figur gezogen hat. Bei Figurenzügen wird – im Unterschied zu den Bauern – stets der Anfangsbuchstabe (K für König, D – Dame, T – Turm, L – Läufer und S – Springer) vor die berührten Felder geschrieben.

Ein Zug im Schachspiel (mit Ausnahme der Rochade) ist die Bewegung eines Steines von einem Feld auf ein anderes, das entweder frei oder von einem gegnerischen Stein besetzt ist. Zieht ein Stein auf ein vom Gegner besetztes Feld, so schlägt er mit dem gleichen Zug den dort befindlichen Stein und entfernt diesen vom Brett.

Der König bewegt sich von seinem Feld auf ein angrenzendes Feld, das nicht von einem feindlichen Stein bedroht ist. So kann in der Diagrammstellung der schwarze König b8

er sich wieder voll seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Tätigkeit widmen. Insgesamt veröffentlichte *Krylow* über 300 Lehrbücher und wissenschaftliche Arbeiten, hauptsächlich über mathematische und technische Fragen, die mehr oder weniger eng mit dem Schiffbau und der Seefahrt zusammenhängen, aber auch zu Fragen der Geschichte der Mathematik, insbesondere der Erschließung des Erbes von Newton, Euler und Gauß für die Angewandte Mathematik. *Krylow* starb am 26. Oktober 1945. Sein Andenken ehrte die Sowjetunion u. a. durch die Ausgabe zweier Briefmarken (1956 anlässlich des 10. Todestages, 1963 zum 100. Geburtstag).

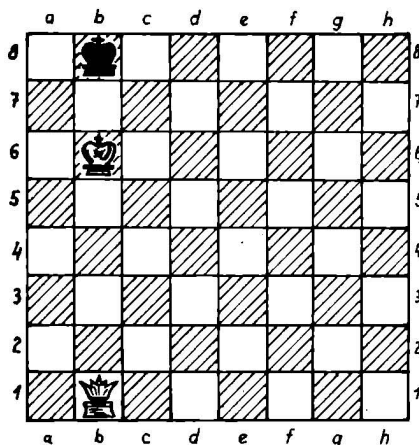
A. Halameisär

nicht nach a7, b7 und c7 ziehen, ebenso der weiße König.

Die Dame bewegt sich auf den senkrechten Linien, waagerechten Reihen oder schrägen Diagonalen.

Im Schach steht der König, wenn das von ihm besetzte Feld von einem feindlichen Stein bedroht wird (z. B. wenn die weiße Dame auf h2 stehen würde). Diesem Schachgebot ist im darauffolgenden Zug zu begegnen (der König verläßt das angegriffene Feld, eine andere Figur stellt sich vor den bedrohten König oder eine andere Figur schlägt die schachbietende Figur), andernfalls – matt (z. B. wäre der schwarze König matt, wenn in der angeführten Stellung die weiße Dame auf h8 stehen würde).

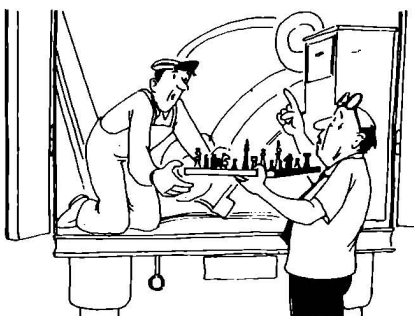
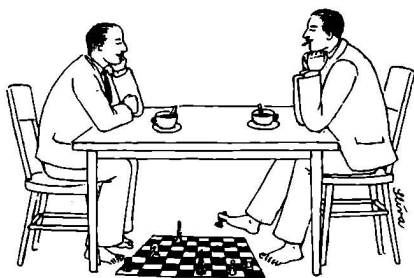
Aufgabe



Setze den schwarzen König in zwei Zügen matt!

Wieviel Möglichkeiten gibt es?

H. Rüdiger



„Und – hön vorsichtig fahren, damit nichts verrückt!“

Zahlenspiel mit mathematischem Hintergrund

Wir gehen von einem Spiel aus, das ihr vielleicht schon kennt und das man ohne Schwierigkeiten überall spielen kann:

Von zwei Partnern wird einer ausgelost oder bestimmt, der das Spiel eröffnet. Das geschieht durch Nennen einer natürlichen Zahl zwischen 1 und 9 (1 und 9 eingeschlossen). Nun kommt abwechselnd einer der Partner an die Reihe und hat zu der vom Vorgänger genannten Zahl eine der Zahlen zwischen 1 und 9 zu addieren. Sieger des Spieles ist, wer zuerst die Zahl 100 erreicht.

Beispiel:

	1. Spieler	2. Spieler
1. Zug	6	
2. Zug		13
3. Zug	21	
4. Zug		24
5. Zug	30	
6. Zug		39
7. Zug	44	
8. Zug		53
9. Zug	62	
10. Zug		70
11. Zug	75	
12. Zug		82
13. Zug	90	
14. Zug		91
15. Zug	100	

Für dieses Spiel kann man sehr leicht herausbekommen, wie man spielen muß, um zu gewinnen (man kann also eine Erfolgsstrategie entwickeln). Unser Ausgangspunkt ist nicht der Beginn, sondern das Ende des Spieles. Wir bedienen uns also zum Finden der Erfolgsstrategie der sogenannten Methode des Rückwärtsarbeitens:

Was ist unser Ziel? (Was ist gesucht?)

Wir wollen zuerst die Zahl 100 erreichen und verhindern, daß der Gegenspieler zuerst die 100 schafft.

Von welchem naheliegenden Zwischenspiel kann man das gestellte Ziel erreichen? (Von welcher Bedingung aus kann man das Ziel erreichen?)

Hätte man im vorhergehenden Zug als Spieler die Zahl 90 erreicht, dann kann der Gegenspieler im nächsten Zug eine der Zahlen zwischen 91 und 99 erreichen, und der Spieler kann das Spiel im nächsten Zug für sich entscheiden.

Welche weiteren Zwischenziele muß man anstreben?

80 ... 70 ... 60 ... 10

Man muß also offenbar im Laufe des Spieles eine der Zahlen 10, 20, ..., 70, 80, 90 erreichen. Dann kann man das Spiel für sich entscheiden. Das bedeutet insbesondere, daß immer zu gewinnen ist, wenn man nicht selbst beginnt, weil man im 2. Zug die Zahl 10 erreichen kann und dann mit Sicherheit die anderen notwendigen Zwischenziele erreicht.

Ändert man die Bedingungen des Spieles, so kann man auch gewinnen, wenn man das Spiel beginnen muß. Darf man z. B. stets Zahlen addieren, die zwischen 1 und 10 liegen (1 und 10 eingeschlossen), dann kann man gewinnen, wenn man mit 1 beginnt und über die Zwischenziele 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 das Spiel für sich entscheidet.

Wir wollen jetzt dieses Spiel verallgemeinern, indem wir andere Bedingungen für Anfangszahl a , Zielzahl z und die höchste der zu addierenden Zahlen n zulassen (wobei a nicht größer als n sein soll). Die Frage, die wir stellen wollen, ist die, unter welchen Bedingungen jeweils der mit dem Spiel Beginnende das Spiel für sich entscheiden kann.

Wie wir an den Beispielen gesehen haben, erhält man die erfolgsversprechenden Zwischenzahlen, wenn man von der Zielzahl z jeweils Vielfache der Zahlen $n+1$ subtrahiert (also im Falle $n=9$ hatte man von der Zielzahl $z=100$ jeweils Vielfache von 10 – also $9+1=10$ – zu subtrahieren).

Es gilt also die Gleichung:

$$(1) \quad a + k \cdot (n+1) = z.$$

Aus dieser Gleichung kann man für vorgegebenes z und zu einer vorgegebenen Anfangszahl a die höchste jeweils zu addierende Zahl n so bestimmen, daß man als 1. Spieler mit Sicherheit gewinnen kann. Wir formen dazu (1) um und erhalten:

$$(2) \quad k \cdot (n+1) = z - a.$$

Die Teiler von $z - a$ sind dann mögliche Lösungen für $n+1$. Betrachten wir die Aufgabe für $z=100$ und $a=1$, so erhalten wir als mögliche Werte für $n+1$ die Teiler von $z - a = 99$. Das sind 1, 3, 9, 11, 33 und 99.

Für $n+1=1$ ist $n=0$ und damit keine Lösung im gewünschten Sinne.

Für $n+1=99$ ist $n=98$, und das Spiel ist in 3 Zügen entschieden. Man wird deshalb für n

größere Werte ausschließen und beispielsweise $n \leq 15$ fordern.

Es kämen also für unsere Betrachtungen nur in Frage:

$$\begin{aligned} n+1 &= 3, \text{ also } n = 2, \\ n+1 &= 9, \text{ also } n = 8, \\ n+1 &= 11, \text{ also } n = 10. \end{aligned}$$

In diesen drei Fällen kann man mit der Anfangszahl 1 das Spiel für sich entscheiden.

Zur Weiterführung sollte man folgende Aufgaben überdenken:

▲1▲ Zeige, daß man für $z=100$ und $n \leq 15$ ein Spiel nicht mit Sicherheit für sich entscheiden kann, wenn man als Anfangszahl 3 wählt!

▲2▲ Bestimme für $z=100$ alle n mit $1 \leq n \leq 10$, mit dem sich Spiele mit der Anfangszahl $a=4$ gewinnen lassen, wenn man selbst beginnen muß und der Gegner optimal spielt!

▲3▲ Bestimme für $z=200$ und für $n \leq 15$ alle n , mit denen sich bei den Anfangszahlen $a=2, 4, 5$ Spiele mit Sicherheit gewinnen lassen, wenn man beginnt!

▲4▲ Bei welchen Anfangszahlen a mit $1 \leq a \leq 10$ läßt sich für $z=200$ keine Zahl n mit $n \leq 15$ so finden, daß man als erster Spieler das Spiel mit Sicherheit für sich entscheiden kann?

Viel Spaß beim Nachdenken!

K. Reichold

Lösungen



Lösungen zu: Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt, Heft 2/82

▲1▲ Im ungünstigsten Fall entnimmt man der Kiste 15 rote, 17 gelbe, 16 weiße und 19 schwarze Kugeln, ohne eine blaue Kugel erwischen zu haben. Das sind zunächst $15+17+16+19$ Kugeln, also 67 Kugeln. In der Kiste verbleiben in diesem ungünstigsten Falle nur noch blaue Kugeln. Also muß man der Kiste noch zwei weitere (blaue) Kugeln, insgesamt also 69 Kugeln entnehmen, um mit Gewißheit zwei Kugeln jeder Farbe zu erhalten.

▲2▲ Angenommen, in der ersten Bankreihe sitzen x Schüler; dann sitzen in der zweiten Bankreihe $2x$ Schüler, in der dritten und vierten Bankreihe je $(2x-2)$ Schüler. In allen vier Bankreihen sitzen also $[x+2x+(2x-2)+(2x-2)]$ Schüler, also $(7x-4)$ Schüler. Nun gilt $7x-4=31$, $7x=35$, $x=5$. In der ersten Bankreihe sitzen 5 Schüler, in der zweiten 10 Schüler, in der dritten und vierten je 8 Schüler.

▲3▲ a) Brigitte hat einen Schulweg von $4 \cdot 400 \text{ m} = 1600 \text{ m} = 1,6 \text{ km}$. Der Weg für Anett bis zum Kindergarten beträgt $1600 \text{ m} - 400 \text{ m} = 1200 \text{ m} = 1,2 \text{ km}$. Nachdem Anett $1,2 \text{ km} : 3 = 0,4 \text{ km}$ zurückgelegt hatte, wurde sie von Brigitte eingeholt, und zwar wegen $t = \frac{s}{v}$ nach $\frac{0,4}{6} \text{ h} = \frac{4}{60} \text{ h} = 4 \text{ min}$.

b) Für Anett verbleiben danach noch $\frac{2}{3}$ des

Weges bis zum Kindergarten, wofür sie 10 min benötigte. Aus $10 \text{ min} : \frac{2}{3} = 15 \text{ min}$ folgt, daß Anett für den Weg zum Kindergarten 15 min benötigt.

▲4▲ Es sei n die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt $22 \leq n \leq 28$. Da zwei Schüler nicht an der Klassenarbeit teilgenommen hatten, gilt für die Anzahl t der teilnehmenden Schüler $22 \leq t \leq 26$. Angenommen, es haben x Schüler die Note 3 erhalten; dann gilt $22 \leq 4 \cdot x \leq 26$, also $x=6$. Es haben 24 Schüler die Klassenarbeit mitgeschrieben. Die Note 3 erhielten 6 Schüler, die Note 4 erhielten 3 Schüler. Die Noten 1 und 2 erhielten somit $24-9=15$ Schüler. Angenommen, es erhielten y Schüler die Note 2, also $(y-5)$ Schüler

Ferien im Schuljahr 1982/83

1. Zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschulen einschließlich Spezialklassen 9 und 10 an Einrichtungen der Volksbildung, Sonderschulen und Berufshilfsschulen

Herbstferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 16. 10. 1982
Erster Unterrichtstag	Montag, 25. 10. 1982

Ferien zum Jahreswechsel

Erster Ferientag	Mittwoch, 22. 12. 1982
Erster Unterrichtstag	Dienstag, 4. 1. 1983

Winterferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 5. 2. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 28. 2. 1983
Unterrichtsfreier Tag	Sonnabend, 2. 4. 1983

Frühjahrsferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 7. 5. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 16. 5. 1983
Unterrichtsfreier Tag	Sonnabend, 21. 5. 1983

Sommerferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 2. 7. 1983
Erster Unterrichtstag	Donnerstag, 1. 9. 1983

2. Klassen 11 und 12 der erweiterten Oberschulen und der Spezialschulen der Volksbildung

Ferien zum Jahreswechsel

Erster Ferientag	Mittwoch, 22. 12. 1982
Erster Unterrichtstag	Dienstag, 4. 1. 1983

Winterferien

Klassen 11	
Erster Ferientag	Sonnabend, 5. 2. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 21. 2. 1983
Klassen 12	
Erster Ferientag	Sonnabend, 12. 2. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 28. 2. 1983
Unterrichtsfreie Tage	Sonnabend, 2. 4. 1983
	Sonnabend, 21. 5. 1983

Sommerferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 2. 7. 1983
Erster Unterrichtstag	Donnerstag, 1. 9. 1983

die Note 1; dann gilt $y + (y - 5) = 15$, $2y = 20$, $y = 10$. Es erhielten 10 Schüler die Note 2 und 5 Schüler die Note 1.

▲ 5 ▲ Angenommen, Dirk kauft x Ansichtskarten zu 20 Pf, also $(13 - x)$ Ansichtskarten zu 40 Pf das Stück; dann gilt

$$\begin{aligned} 20 \cdot x + 40 \cdot (13 - x) &= 280, \\ 20x + 520 - 40x &= 280, \\ 20x &= 240, \text{ also } x = 12. \end{aligned}$$

Dirk kaufte 12 Ansichtskarten zu 20 Pf und eine zu 40 Pf das Stück.

▲ 6 ▲ Es sei a der erste, also $3a$ der zweite, $9a$ der dritte und $27a$ der vierte Summand; ihre Summe beträgt $40a$. Die Summe aus den Quadraten der natürlichen Zahlen von 3 bis 9 lautet $3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 280$. Nun gilt $40a = 280$, also $a = 7$. Es gilt somit für die vier Summanden $7 + 21 + 63 + 189 = 280$.

▲ 7 ▲ Die Teilstrecke $\overline{CD}$ habe die Länge a ; dann hat die Teilstrecke $\overline{AB}$ die Länge $2a$, die Teilstrecke $\overline{DE}$ die Länge $12a$, die Teilstrecke $\overline{BC}$ die Länge $6a$. Die Summe aller Teilstrecken beträgt somit $21a$. Nun gilt $21 \cdot a = 42 \text{ cm}$, also $a = 2 \text{ cm}$.

Somit hat $\overline{AB}$ die Länge 4 cm , $\overline{BC}$ die Länge 12 cm , $\overline{CD}$ die Länge 2 cm , $\overline{DE}$ die Länge 24 cm .

▲ 8 ▲ Es soll gelten $a^2 \cdot b = 1980$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $10 \leq b \leq 99$. Wegen $1980 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ existiert genau eine Lösung, nämlich $6^2 \cdot 55 = 1980$. Daraus folgt $a = 6$ und $b = 55$.

▲ 9 ▲ Angenommen, Andreas fand x Pilze; dann fand Heiner $2x$ Pilze, Peter $4x$ Pilze, Anja $(2x - 3)$ Pilze, Birgit $(3x + 3)$ Pilze, Otto 7 Pilze. Das sind zusammen $(12x + 7)$ Pilze. Nun gilt

$$12x + 7 = 10 \cdot 6 - 5,$$

$$12x + 7 = 55, 12x = 48, \text{ also } x = 4.$$

Peter fand 16, Heiner 8, Anja 5, Birgit 15, Andreas 4, Otto 7 Pilze.

▲ 10 ▲ Vom erhaltenen Geldbetrag gab Christine aus beim Fleischer $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, im

Milchladen $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, im Blumengeschäft

$\frac{4}{12} : 2 = \frac{2}{12}$, beim Bäcker $\frac{2}{12} : 2 = \frac{1}{12}$, im Ge-

müseladen $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12}$. Das sind zusammen $\frac{12}{12} = 1$. Christine hat das erhaltene Geld voll-

ständig ausgegeben; sie bringt kein Geld wieder mit nach Hause.

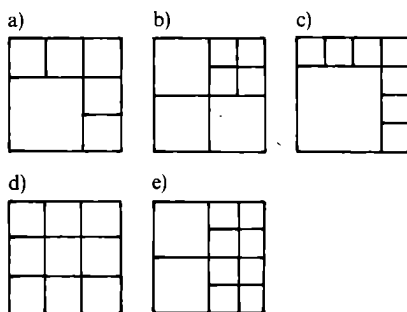
Lösung zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/81

Ma5 ■ 2151 Der Betrag von 5 Pf, der im Gesamtbetrag von 42,15 M enthalten ist, kann nur aus den Kosten für Güterwagen stammen. Ferner kauft Peter eine ungerade Anzahl von Güterwagen. Da er aber wenigstens je einen Personen- und Doppelstockwagen anschafft, gibt er dafür wenigstens 5,50 M + 19,70 M = 25,20 M aus. Für den Kauf von

Güterwagen verbleiben ihm somit höchstens 42,15 M - 25,20 M = 16,95 M. Drei Güterwagen kosten $3 \cdot 5,95 \text{ M} = 17,85 \text{ M}$, also mehr als 16,95 M. Deshalb kauft Peter genau einen Güterwagen. Für den Kauf von Personen- und Doppelstockwagen verbleiben also 42,15 M - 5,95 M = 36,20 M. Zwei Doppelstockwagen kosten $2 \cdot 19,70 \text{ M} = 39,40 \text{ M}$, also mehr als 36,20 M. Deshalb kauft Peter genau einen Doppelstockwagen. Es verbleiben somit 36,20 M - 19,70 M = 16,50 M für den Kauf von Personenwagen. Aus $16,50 \text{ M} : 3 = 5,50 \text{ M}$ folgt, daß Peter genau drei Personenwagen anschafft.

Ma5 ■ 2152 Aus $100 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$ und $96 \text{ cm} : 12 = 8 \text{ cm}$ folgt, daß das gefertigte Drahtmodell eines Würfels eine Kantenlänge von 8 cm besitzt.

Ma5 ■ 2153 Die fünf abgebildeten Quadrate stellen eine mögliche Lösung dar.



Ma5 ■ 2154 Wir rechnen nacheinander $7 \cdot 8,60 \text{ M} = 60,20 \text{ M}$, $7 + 1 = 8$, $8 \cdot 8,60 \text{ M} = 68,80 \text{ M}$, $8 + 1 = 9$, $9 \cdot 8,60 \text{ M} = 77,40 \text{ M}$, $9 + 1 = 10$, $10 \cdot 8,60 \text{ M} = 86,00 \text{ M}$, $10 + 1 = 11$, $11 \cdot 8,60 \text{ M} = 94,60 \text{ M}$, $11 + 1 = 12$, $12 \cdot 8,60 \text{ M} = 103,20 \text{ M}$, $12 + 1 = 13$, $13 \cdot 8,60 \text{ M} = 111,80 \text{ M}$, $13 + 1 = 14$, $14 \cdot 8,60 \text{ M} = 120,40 \text{ M}$, $14 + 1 = 15$, $15 \cdot 8,60 \text{ M} = 129,00 \text{ M}$, $15 + 1 = 16$, $16 \cdot 8,60 \text{ M} = 137,60 \text{ M}$, $16 + 1 = 17$, $17 \cdot 8,60 \text{ M} = 146,20 \text{ M}$, $17 + 1 = 18$, $18 \cdot 8,60 \text{ M} = 154,80 \text{ M}$, $18 + 1 = 19$, $19 \cdot 8,60 \text{ M} = 163,40 \text{ M}$, $19 + 1 = 20$, $20 \cdot 8,60 \text{ M} = 172,00 \text{ M}$, $20 + 1 = 21$, $21 \cdot 8,60 \text{ M} = 180,60 \text{ M}$, $21 + 1 = 22$, $22 \cdot 8,60 \text{ M} = 189,20 \text{ M}$, $22 + 1 = 23$, $23 \cdot 8,60 \text{ M} = 197,80 \text{ M}$, $23 + 1 = 24$, $24 \cdot 8,60 \text{ M} = 206,40 \text{ M}$, $24 + 1 = 25$, $25 \cdot 8,60 \text{ M} = 215,00 \text{ M}$, $25 + 1 = 26$, $26 \cdot 8,60 \text{ M} = 223,60 \text{ M}$, $26 + 1 = 27$, $27 \cdot 8,60 \text{ M} = 232,20 \text{ M}$, $27 + 1 = 28$, $28 \cdot 8,60 \text{ M} = 240,80 \text{ M}$, $28 + 1 = 29$, $29 \cdot 8,60 \text{ M} = 249,40 \text{ M}$, $29 + 1 = 30$, $30 \cdot 8,60 \text{ M} = 258,00 \text{ M}$, $30 + 1 = 31$, $31 \cdot 8,60 \text{ M} = 266,60 \text{ M}$, $31 + 1 = 32$, $32 \cdot 8,60 \text{ M} = 275,20 \text{ M}$, $32 + 1 = 33$, $33 \cdot 8,60 \text{ M} = 283,80 \text{ M}$, $33 + 1 = 34$, $34 \cdot 8,60 \text{ M} = 292,40 \text{ M}$, $34 + 1 = 35$, $35 \cdot 8,60 \text{ M} = 301,00 \text{ M}$, $35 + 1 = 36$, $36 \cdot 8,60 \text{ M} = 309,60 \text{ M}$, $36 + 1 = 37$, $37 \cdot 8,60 \text{ M} = 318,20 \text{ M}$, $37 + 1 = 38$, $38 \cdot 8,60 \text{ M} = 326,80 \text{ M}$, $38 + 1 = 39$, $39 \cdot 8,60 \text{ M} = 335,40 \text{ M}$, $39 + 1 = 40$, $40 \cdot 8,60 \text{ M} = 344,00 \text{ M}$, $40 + 1 = 41$, $41 \cdot 8,60 \text{ M} = 352,60 \text{ M}$, $41 + 1 = 42$, $42 \cdot 8,60 \text{ M} = 361,20 \text{ M}$, $42 + 1 = 43$, $43 \cdot 8,60 \text{ M} = 369,80 \text{ M}$, $43 + 1 = 44$, $44 \cdot 8,60 \text{ M} = 378,40 \text{ M}$, $44 + 1 = 45$, $45 \cdot 8,60 \text{ M} = 387,00 \text{ M}$, $45 + 1 = 46$, $46 \cdot 8,60 \text{ M} = 395,60 \text{ M}$, $46 + 1 = 47$, $47 \cdot 8,60 \text{ M} = 404,20 \text{ M}$, $47 + 1 = 48$, $48 \cdot 8,60 \text{ M} = 412,80 \text{ M}$, $48 + 1 = 49$, $49 \cdot 8,60 \text{ M} = 421,40 \text{ M}$, $49 + 1 = 50$, $50 \cdot 8,60 \text{ M} = 430,00 \text{ M}$, $50 + 1 = 51$, $51 \cdot 8,60 \text{ M} = 438,60 \text{ M}$, $51 + 1 = 52$, $52 \cdot 8,60 \text{ M} = 447,20 \text{ M}$, $52 + 1 = 53$, $53 \cdot 8,60 \text{ M} = 455,80 \text{ M}$, $53 + 1 = 54$, $54 \cdot 8,60 \text{ M} = 464,40 \text{ M}$, $54 + 1 = 55$, $55 \cdot 8,60 \text{ M} = 473,00 \text{ M}$, $55 + 1 = 56$, $56 \cdot 8,60 \text{ M} = 481,60 \text{ M}$, $56 + 1 = 57$, $57 \cdot 8,60 \text{ M} = 490,20 \text{ M}$, $57 + 1 = 58$, $58 \cdot 8,60 \text{ M} = 498,80 \text{ M}$, $58 + 1 = 59$, $59 \cdot 8,60 \text{ M} = 507,40 \text{ M}$, $59 + 1 = 60$, $60 \cdot 8,60 \text{ M} = 516,00 \text{ M}$, $60 + 1 = 61$, $61 \cdot 8,60 \text{ M} = 524,60 \text{ M}$, $61 + 1 = 62$, $62 \cdot 8,60 \text{ M} = 533,20 \text{ M}$, $62 + 1 = 63$, $63 \cdot 8,60 \text{ M} = 541,80 \text{ M}$, $63 + 1 = 64$, $64 \cdot 8,60 \text{ M} = 550,40 \text{ M}$, $64 + 1 = 65$, $65 \cdot 8,60 \text{ M} = 559,00 \text{ M}$, $65 + 1 = 66$, $66 \cdot 8,60 \text{ M} = 567,60 \text{ M}$, $66 + 1 = 67$, $67 \cdot 8,60 \text{ M} = 576,20 \text{ M}$, $67 + 1 = 68$, $68 \cdot 8,60 \text{ M} = 584,80 \text{ M}$, $68 + 1 = 69$, $69 \cdot 8,60 \text{ M} = 593,40 \text{ M}$, $69 + 1 = 70$, $70 \cdot 8,60 \text{ M} = 602,00 \text{ M}$, $70 + 1 = 71$, $71 \cdot 8,60 \text{ M} = 610,60 \text{ M}$, $71 + 1 = 72$, $72 \cdot 8,60 \text{ M} = 619,20 \text{ M}$, $72 + 1 = 73$, $73 \cdot 8,60 \text{ M} = 627,80 \text{ M}$, $73 + 1 = 74$, $74 \cdot 8,60 \text{ M} = 636,40 \text{ M}$, $74 + 1 = 75$, $75 \cdot 8,60 \text{ M} = 645,00 \text{ M}$, $75 + 1 = 76$, $76 \cdot 8,60 \text{ M} = 653,60 \text{ M}$, $76 + 1 = 77$, $77 \cdot 8,60 \text{ M} = 662,20 \text{ M}$, $77 + 1 = 78$, $78 \cdot 8,60 \text{ M} = 670,80 \text{ M}$, $78 + 1 = 79$, $79 \cdot 8,60 \text{ M} = 679,40 \text{ M}$, $79 + 1 = 80$, $80 \cdot 8,60 \text{ M} = 688,00 \text{ M}$, $80 + 1 = 81$, $81 \cdot 8,60 \text{ M} = 696,60 \text{ M}$, $81 + 1 = 82$, $82 \cdot 8,60 \text{ M} = 705,20 \text{ M}$, $82 + 1 = 83$, $83 \cdot 8,60 \text{ M} = 713,80 \text{ M}$, $83 + 1 = 84$, $84 \cdot 8,60 \text{ M} = 722,40 \text{ M}$, $84 + 1 = 85$, $85 \cdot 8,60 \text{ M} = 731,00 \text{ M}$, $85 + 1 = 86$, $86 \cdot 8,60 \text{ M} = 739,60 \text{ M}$, $86 + 1 = 87$, $87 \cdot 8,60 \text{ M} = 748,20 \text{ M}$, $87 + 1 = 88$, $88 \cdot 8,60 \text{ M} = 756,80 \text{ M}$, $88 + 1 = 89$, $89 \cdot 8,60 \text{ M} = 765,40 \text{ M}$, $89 + 1 = 90$, $90 \cdot 8,60 \text{ M} = 774,00 \text{ M}$, $90 + 1 = 91$, $91 \cdot 8,60 \text{ M} = 782,60 \text{ M}$, $91 + 1 = 92$, $92 \cdot 8,60 \text{ M} = 791,20 \text{ M}$, $92 + 1 = 93$, $93 \cdot 8,60 \text{ M} = 800,00 \text{ M}$, $93 + 1 = 94$, $94 \cdot 8,60 \text{ M} = 808,60 \text{ M}$, $94 + 1 = 95$, $95 \cdot 8,60 \text{ M} = 817,20 \text{ M}$, $95 + 1 = 96$, $96 \cdot 8,60 \text{ M} = 825,80 \text{ M}$, $96 + 1 = 97$, $97 \cdot 8,60 \text{ M} = 834,40 \text{ M}$, $97 + 1 = 98$, $98 \cdot 8,60 \text{ M} = 843,00 \text{ M}$, $98 + 1 = 99$, $99 \cdot 8,60 \text{ M} = 851,60 \text{ M}$, $99 + 1 = 100$, $100 \cdot 8,60 \text{ M} = 860,00 \text{ M}$, $100 + 1 = 101$, $101 \cdot 8,60 \text{ M} = 868,60 \text{ M}$, $101 + 1 = 102$, $102 \cdot 8,60 \text{ M} = 877,20 \text{ M}$, $102 + 1 = 103$, $103 \cdot 8,60 \text{ M} = 885,80 \text{ M}$, $103 + 1 = 104$, $104 \cdot 8,60 \text{ M} = 894,40 \text{ M}$, $104 + 1 = 105$, $105 \cdot 8,60 \text{ M} = 903,00 \text{ M}$, $105 + 1 = 106$, $106 \cdot 8,60 \text{ M} = 911,60 \text{ M}$, $106 + 1 = 107$, $107 \cdot 8,60 \text{ M} = 920,20 \text{ M}$, $107 + 1 = 108$, $108 \cdot 8,60 \text{ M} = 928,80 \text{ M}$, $108 + 1 = 109$, $109 \cdot 8,60 \text{ M} = 937,40 \text{ M}$, $109 + 1 = 110$, $110 \cdot 8,60 \text{ M} = 946,00 \text{ M}$, $110 + 1 = 111$, $111 \cdot 8,60 \text{ M} = 954,60 \text{ M}$, $111 + 1 = 112$, $112 \cdot 8,60 \text{ M} = 963,20 \text{ M}$, $112 + 1 = 113$, $113 \cdot 8,60 \text{ M} = 971,80 \text{ M}$, $113 + 1 = 114$, $114 \cdot 8,60 \text{ M} = 980,40 \text{ M}$, $114 + 1 = 115$, $115 \cdot 8,60 \text{ M} = 989,00 \text{ M}$, $115 + 1 = 116$, $116 \cdot 8,60 \text{ M} = 997,60 \text{ M}$, $116 + 1 = 117$, $117 \cdot 8,60 \text{ M} = 1006,20 \text{ M}$, $117 + 1 = 118$, $118 \cdot 8,60 \text{ M} = 1014,80 \text{ M}$, $118 + 1 = 119$, $119 \cdot 8,60 \text{ M} = 1023,40 \text{ M}$, $119 + 1 = 120$, $120 \cdot 8,60 \text{ M} = 1032,00 \text{ M}$, $120 + 1 = 121$, $121 \cdot 8,60 \text{ M} = 1040,60 \text{ M}$, $121 + 1 = 122$, $122 \cdot 8,60 \text{ M} = 1049,20 \text{ M}$, $122 + 1 = 123$, $123 \cdot 8,60 \text{ M} = 1057,80 \text{ M}$, $123 + 1 = 124$, $124 \cdot 8,60 \text{ M} = 1066,40 \text{ M}$, $124 + 1 = 125$, $125 \cdot 8,60 \text{ M} = 1075,00 \text{ M}$, $125 + 1 = 126$, $126 \cdot 8,60 \text{ M} = 1083,60 \text{ M}$, $126 + 1 = 127$, $127 \cdot 8,60 \text{ M} = 1092,20 \text{ M}$, $127 + 1 = 128$, $128 \cdot 8,60 \text{ M} = 1100,80 \text{ M}$, $128 + 1 = 129$, $129 \cdot 8,60 \text{ M} = 1109,40 \text{ M}$, $129 + 1 = 130$, $130 \cdot 8,60 \text{ M} = 1118,00 \text{ M}$, $130 + 1 = 131$, $131 \cdot 8,60 \text{ M} = 1126,60 \text{ M}$, $131 + 1 = 132$, $132 \cdot 8,60 \text{ M} = 1135,20 \text{ M}$, $132 + 1 = 133$, $133 \cdot 8,60 \text{ M} = 1143,80 \text{ M}$, $133 + 1 = 134$, $134 \cdot 8,60 \text{ M} = 1152,40 \text{ M}$, $134 + 1 = 135$, $135 \cdot 8,60 \text{ M} = 1161,00 \text{ M}$, $135 + 1 = 136$, $136 \cdot 8,60 \text{ M} = 1169,60 \text{ M}$, $136 + 1 = 137$, $137 \cdot 8,60 \text{ M} = 1178,20 \text{ M}$, $137 + 1 = 138$, $138 \cdot 8,60 \text{ M} = 1186,80 \text{ M}$, $138 + 1 = 139$, $139 \cdot 8,60 \text{ M} = 1195,40 \text{ M}$, $139 + 1 = 140$, $140 \cdot 8,60 \text{ M} = 1204,00 \text{ M}$, $140 + 1 = 141$, $141 \cdot 8,60 \text{ M} = 1212,60 \text{ M}$, $141 + 1 = 142$, $142 \cdot 8,60 \text{ M} = 1221,20 \text{ M}$, $142 + 1 = 143$, $143 \cdot 8,60 \text{ M} = 1229,80 \text{ M}$, $143 + 1 = 144$, $144 \cdot 8,60 \text{ M} = 1238,40 \text{ M}$, $144 + 1 = 145$, $145 \cdot 8,60 \text{ M} = 1247,00 \text{ M}$, $145 + 1 = 146$, $146 \cdot 8,60 \text{ M} = 1255,60 \text{ M}$, $146 + 1 = 147$, $147 \cdot 8,60 \text{ M} = 1264,20 \text{ M}$, $147 + 1 = 148$, $148 \cdot 8,60 \text{ M} = 1272,80 \text{ M}$, $148 + 1 = 149$, $149 \cdot 8,60 \text{ M} = 1281,40 \text{ M}$, $149 + 1 = 150$, $150 \cdot 8,60 \text{ M} = 1290,00 \text{ M}$, $150 + 1 = 151$, $151 \cdot 8,60 \text{ M} = 1298,60 \text{ M}$, $151 + 1 = 152$, $152 \cdot 8,60 \text{ M} = 1307,20 \text{ M}$, $152 + 1 = 153$, $153 \cdot 8,60 \text{ M} = 1315,80 \text{ M}$, $153 + 1 = 154$, $154 \cdot 8,60 \text{ M} = 1324,40 \text{ M}$, $154 + 1 = 155$, $155 \cdot 8,60 \text{ M} = 1333,00 \text{ M}$, $155 + 1 = 156$, $156 \cdot 8,60 \text{ M} = 1341,60 \text{ M}$, $156 + 1 = 157$, $157 \cdot 8,60 \text{ M} = 1350,20 \text{ M}$, $157 + 1 = 158$, $158 \cdot 8,60 \text{ M} = 1358,80 \text{ M}$, $158 + 1 = 159$, $159 \cdot 8,60 \text{ M} = 1367,40 \text{ M}$, $159 + 1 = 160$, $160 \cdot 8,60 \text{ M} = 1376,00 \text{ M}$, $160 + 1 = 161$, $161 \cdot 8,60 \text{ M} = 1384,60 \text{ M}$, $161 + 1 = 162$, $162 \cdot 8,60 \text{ M} = 1393,20 \text{ M}$, $162 + 1 = 163$, $163 \cdot 8,60 \text{ M} = 1401,80 \text{ M}$, $163 + 1 = 164$, $164 \cdot 8,60 \text{ M} = 1410,40 \text{ M}$, $164 + 1 = 165$, $165 \cdot 8,60 \text{ M} = 1419,00 \text{ M}$, $165 + 1 = 166$, $166 \cdot 8,60 \text{ M} = 1427,60 \text{ M}$, $166 + 1 = 167$, $167 \cdot 8,60 \text{ M} = 1436,20 \text{ M}$, $167 + 1 = 168$, $168 \cdot 8,60 \text{ M} = 1444,80 \text{ M}$, $168 + 1 = 169$, $169 \cdot 8,60 \text{ M} = 1453,40 \text{ M}$, $169 + 1 = 170$, $170 \cdot 8,60 \text{ M} = 1462,00 \text{ M}$, $170 + 1 = 171$, $171 \cdot 8,60 \text{ M} = 1470,60 \text{ M}$, $171 + 1 = 172$, $172 \cdot 8,60 \text{ M} = 1479,20 \text{ M}$, $172 + 1 = 173$, $173 \cdot 8,60 \text{ M} = 1487,80 \text{ M}$, $173 + 1 = 174$, $174 \cdot 8,60 \text{ M} = 1496,40 \text{ M}$, $174 + 1 = 175$, $175 \cdot 8,60 \text{ M} = 1505,00 \text{ M}$, $175 + 1 = 176$, $176 \cdot 8,60 \text{ M} = 1513,60 \text{ M}$, $176 + 1 = 177$, $177 \cdot 8,60 \text{ M} = 1522,20 \text{ M}$, $177 + 1 = 178$, $178 \cdot 8,60 \text{ M} = 1530,80 \text{ M}$, $178 + 1 = 179$, $179 \cdot 8,60 \text{ M} = 1539,40 \text{ M}$, $179 + 1 = 180$, $180 \cdot 8,60 \text{ M} = 1548,00 \text{ M}$, $180 + 1 = 181$, $181 \cdot 8,60 \text{ M} = 1556,60 \text{ M}$, $181 + 1 = 182$, $182 \cdot 8,60 \text{ M} = 1565,20 \text{ M}$, $182 + 1 = 183$, $183 \cdot 8,60 \text{ M} = 1573,80 \text{ M}$, $183 + 1 = 184$, $184 \cdot 8,60 \text{ M} = 1582,40 \text{ M}$, $184 + 1 = 185$, $185 \cdot 8,60 \text{ M} = 1591,00 \text{ M}$, $185 + 1 = 186$, $186 \cdot 8,60 \text{ M} = 1600,00 \text{ M}$, $186 + 1 = 187$, $187 \cdot 8,60 \text{ M} = 1609,00 \text{ M}$, $187 + 1 = 188$, $188 \cdot 8,60 \text{ M} = 1618,00 \text{ M}$, $188 + 1 = 189$, $189 \cdot 8,60 \text{ M} = 1627,00 \text{ M}$, $189 + 1 = 190$, $190 \cdot 8,60 \text{ M} = 1636,00 \text{ M}$, $190 + 1 = 191$, $191 \cdot 8,60 \text{ M} = 1645,00 \text{ M}$, $191 + 1 = 192$, $192 \cdot 8,60 \text{ M} = 1654,00 \text{ M}$, $192 + 1 = 193$, $193 \cdot 8,60 \text{ M} = 1663,00 \text{ M}$, $193 + 1 = 194$, $194 \cdot 8,60 \text{ M} = 1672,00 \text{ M}$, $194 + 1 = 195$, $195 \cdot 8,60 \text{ M} = 1681,00 \text{ M}$, $195 + 1 = 196$, $196 \cdot 8,60 \text{ M} = 1690,00 \text{ M}$, $196 + 1 = 197$, $197 \cdot 8,60 \text{ M} = 1699,00 \text{ M}$, $197 + 1 = 198$, $198 \cdot 8,60 \text{ M} = 1708,00 \text{ M}$, $198 + 1 = 199$, $199 \cdot 8,60 \text{ M} = 1717,00 \text{ M}$, $199 + 1 = 200$, $200 \cdot 8,60 \text{ M} = 1726,00 \text{ M}$, $200 + 1 = 201$, $201 \cdot 8,60 \text{ M} = 1735,00 \text{ M}$, $201 + 1 = 202$, $202 \cdot 8,60 \text{ M} = 1744,00 \text{ M}$, $202 + 1 = 203$, $203 \cdot 8,60 \text{ M} = 1753,00 \text{ M}$, $203 + 1 = 204$, $204 \cdot 8,60 \text{ M} = 1762,00 \text{ M}$, $204 + 1 = 205$, $205 \cdot 8,60 \text{ M} = 1771,00 \text{ M}$, $205 + 1 = 206$, $206 \cdot 8,60 \text{ M$

Ma7 ■ 2164 Aus $a+b=67$, $a+c=33$, $b+c=58$ folgt durch Addition dieser drei Gleichungen $2a+2b+2c=158$, $a+b+c=79$. Wegen $a+b=67$ ist $c=12$; wegen $a+c=33$ ist $b=46$, wegen $b+c=58$ ist $a=21$. Deshalb gilt $a \cdot b \cdot c = 21 \cdot 46 \cdot 12 = 11592$.

Ma7 ■ 2165 Jedes Quadrat ist auch ein Parallelogramm, ein Trapez und ein Drachenviereck, aber nicht umgekehrt. Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez, aber nicht umgekehrt.

Die Wandtafel A könnte 8 Quadrate, 1 Rhombus, der kein Quadrat ist, 1 Parallelogramm, das kein Rhombus ist, 1 Trapez, das kein Parallelogramm ist, 1 Drachenviereck, das kein Rhombus ist, enthalten. Deshalb könnte die Feststellung für die Wandtafel A wahr sein.

Die Feststellung für die Wandtafel B trifft nicht zu. Diese Wandtafel könnte höchstens 1 Quadrat und 3 Rhomben, also 4 Parallelogramme enthalten. Hinzu kämen 2 Drachenvierecke, die keine Rhomben sind. Die verbleibenden 6 Vierecke könnten Trapeze sein, die keine Parallelogramme sind. Deshalb sind höchstens 10, also nicht 11 Trapeze möglich.

Die Wandtafel C könnte 5 Quadrate, 1 Parallelogramm, das kein Rhombus ist, 5 Trapeze, die keine Parallelogramme sind, 1 Drachenviereck, das kein Rhombus ist, enthalten. Deshalb könnte die Feststellung für die Wandtafel C wahr sein.

Ma8 ■ 2166 Es seien a und b zwei reelle Zahlen, für die $a-b=1$ gilt.

Dann ist

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b), \\ &= (a+b) \cdot 1, \\ &= a+b, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Ma8 ■ 2167 Nach Voraussetzung gilt $a+b=10 \cdot n$ mit $a, b, n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$b = 10 \cdot n - a. \quad (1)$$

Die Differenz der Quadrate der zwei natürlichen Zahlen ist

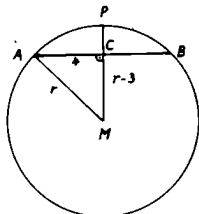
$$a^2 - b^2. \quad (2)$$

Wir setzen (1) in (2) ein und erhalten

$$\begin{aligned} a^2 - (10n - a)^2 &= a^2 - 100n^2 + 20an - a^2, \\ &= 20an - 100n^2, \\ &= 20(an - 5n^2). \end{aligned}$$

$an - 5n^2$ ist stets eine ganze Zahl, also ist $a^2 - b^2$ stets durch 20 teilbar, w. z. b. w.

Ma8 ■ 2168 Das Dreieck AMB ist gleichschenkelig und $\overline{MC}$ ist Höhe zur Basis $\overline{AB}$. Deshalb hat $\overline{AC}$ die Länge 4 cm. Es habe $\overline{AM}$ die Länge r , also hat $\overline{CM}$ die Länge $(r-3)$. Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras



$$\begin{aligned} r^2 &= (r-3)^2 + 4^2, \\ r^2 &= r^2 - 6r + 9 + 16, \\ 6r &= 25, \text{ also } r = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Kreises k beträgt somit $A = \frac{625\pi}{36} \text{ cm}^2 \approx 54,5 \text{ cm}^2$.

Ma8 ■ 2169 Angenommen, die gesuchte Zahl heißt x . Dann ist $x-1$ durch 2, 3, 5 und 11 teilbar.

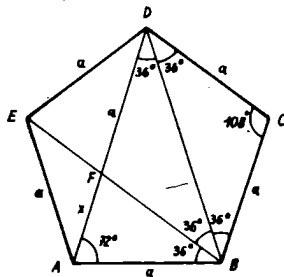
Die kleinste derartige Zahl ist 330 (das k. g. V. von 2, 3, 5, 11). 330 läßt bei Division durch 7 den Rest 1, also läßt das Sechsfache von 330, bei Division durch 7 den Rest 6. $6 \cdot 330 + 1 = 1981$ ist also durch 7 teilbar.

1981 ist die gesuchte Zahl x , denn sie läßt bei Division durch 2, 3, 5 bzw. 11 jeweils den Rest 1.

Ma9 ■ 2170 Die Summe der Größen der Innenwinkel der Dreiecke $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ und $\triangle ADE$ ist gleich der Summe der Größen der Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$. Folglich hat jeder Innenwinkel des Fünfecks die Größe $\frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$. Aus

$\overline{BC} = \overline{CD}$ folgt $\angle CDB = \angle CBD$; jeder dieser beiden Winkel hat somit die Größe $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$. Nun lassen sich die Größen aller übrigen Winkel, wie sie in der Abbildung angegeben sind, berechnen. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ABD$ schneide $\overline{AD}$ in dem inneren Punkt F . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABF$ und $\triangle ABD$ folgt $x : a = a : (a+x)$, $x : 4 = 4 : (4+x)$, $x^2 + 4x - 16 = 0$, also $x = 2 \cdot (\sqrt{5} - 1)$.

Die Diagonale hat, wie jede andere, somit die Länge $[4 + 2(\sqrt{5} - 1)] \text{ cm} \approx 6,5 \text{ cm}$.



Ma9 ■ 2171 Durch Anwendung der Potenzgesetze erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{a) } 27^{400} &= 27^{200+200} = 27^{200} \cdot 27^{200}; \\ \text{b) } 54^{200} &= (2 \cdot 27)^{200} = 2^{200} \cdot 27^{200}. \end{aligned}$$

Wegen $2^{200} < 27^{200}$ gilt $54^{200} < 27^{400}$.

Ma9 ■ 2172 Es sei $z = (2n-1)^2$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Der Vorgänger von z ist

$$\begin{aligned} z-1 &= (2n-1)^2 - 1, \\ &= 4n^2 - 4n + 1 - 1, \\ &= 4(n^2 - n). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist stets durch 4 teilbar.

Der Nachfolger von z ist

$$\begin{aligned} z+1 &= (2n-1)^2 + 1, \\ &= 4n^2 - 4n + 2. \end{aligned}$$

Da nicht in jedem Summanden der Faktor 4 enthalten ist, ist der Ausdruck nicht durch 4 teilbar.

Ma9 ■ 2173 Die ersten drei Ziffern können nur sein:

162, 174, 186, 198.

Bei den ersten drei Möglichkeiten kann 2) nie erfüllt werden. Beim letzten Fall ergibt sich 1983 als einzige Möglichkeit.

1983 ist die einzige Lösung der Aufgabe.

Ma10/12 ■ 2174 Sofort folgt $a=1$.

$a \cdot b \cdot c \cdot d$ kann maximal werden, wenn $b=9$ ist. Daraus würde $d=2$ folgen.

$c=8$ ist maximal, denn $c=9$ ist wegen $b=9$ nicht möglich (Voraussetzung!). Es folgt dann $e=0$.

Für den Maximalfall gilt $a=1$, $b=9$, $c=8$, $d=2$, $e=0$.

Dann ist $abcd$ die Zahl 1982. $19+82=101$.

Ma10/12 ■ 2175 Nach dem Kosinussatz gilt

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Aus $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ folgt durch Einsetzen

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)}{2}},$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}}, \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} < \frac{a}{2\sqrt{bc}}. \end{aligned}$$

Analog dazu gilt $\sin \frac{\beta}{2} < \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ und

$\sin \frac{\gamma}{2} < \frac{c}{2\sqrt{ab}}$. Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} &< \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} \\ &= \frac{abc}{8abc} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ma10/12 ■ 2176 Wir formen die Gleichung (1) um und erhalten

$$c - \frac{b}{2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2},$$

$$\left(c - \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{3}{4}b^2,$$

$$c^2 - bc + \frac{1}{4}b^2 = a^2 - \frac{3}{4}b^2,$$

$$c^2 + b^2 - bc = a^2. \quad (2)$$

Nach dem Kosinussatz gilt

$$c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha = a^2. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion

$$-bc + 2bc \cos \alpha = 0,$$

$$2 \cos \alpha = 1,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Wegen $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ erfüllt nur $\alpha = 60^\circ$ diese Gleichung. Somit ist α eindeutig bestimmt.

Ma10/12 ■ 2177 Die längere Kathete sei x cm lang, dann beträgt die Länge der kürzeren Kathete $(x-2)$ cm und die der Hypotenuse $(x+2)$ cm.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$x^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 \text{ bzw. } x^2 - 8x = 0.$$

Wegen $x > 0$ hat diese Gleichung nur die Lösung 8.

Die Hypotenuse ist 10 cm, die längere Kathete 8 cm und die kürzere Kathete 6 cm lang.
Für die entsprechenden Innenwinkel gilt
 $\tan \alpha = \frac{6}{8}$; $\alpha = 36,87^\circ$ und $\tan \beta = \frac{8}{6}$; $\beta = 53,13^\circ$.

Ph6 ■ 106 a) Der Körper bewegt sich gleichförmig. Die Geschwindigkeit beträgt
 $\frac{20 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Der Körper befindet sich in Ruhe. Er steht in einer Entfernung von 150 m.

c) Der Körper bewegt sich zuerst gleichförmig und anschließend gleichförmig mit der gleichen Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung.

d) Der Körper bewegt sich zunächst gleichförmig, ist dann in Ruhe und bewegt sich anschließend gleichförmig mit der gleichen Geschwindigkeit weiter.

e) Der Körper bewegt sich zuerst gleichförmig, bleibt dann in Ruhe und bewegt sich anschließend in entgegengesetzter Richtung mit kleinerer Geschwindigkeit.

Ph7 ■ 107

Geg.: $P = 1690 \text{ kW} = 172380 \text{ kp} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $h = 1 \text{ m}$
 $l = 100 \text{ m}$
 $G = 1223 \text{ Mp}$

Ges.: v

Die Geschwindigkeit der Lokomotive erhält man aus der Gleichung

$$P = F \cdot v,$$

$$\text{also } v = \frac{P}{F}.$$

Die Größe F ist hier gleich der Hangabtriebskraft F_H , die man aus der Gleichung für die geneigte Ebene erhält, also

$$F_H \cdot l = G \cdot h,$$

$$F_H = \frac{G \cdot h}{l}.$$

Dann ist

$$v = \frac{P}{F_H},$$

$$v = \frac{P \cdot l}{G \cdot h},$$

$$v = \frac{172380 \text{ kp} \cdot \text{m} \cdot 100 \text{ m}}{1223000 \text{ kp} \cdot \text{s} \cdot 1 \text{ m}},$$

$$v \approx 14,09 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 50,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Die Diesellokomotive kann eine Geschwindigkeit von $50,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen.

Ph8 ■ 108

Geg.: $c_E = 0,5 \frac{\text{kcal}}{(\text{kg} \cdot \text{grd})}$
 $c_T = 0,11 \frac{\text{kcal}}{(\text{kg} \cdot \text{grd})}$
 $c_W = 1 \frac{\text{kcal}}{(\text{kg} \cdot \text{grd})}$
 $q = 79,7 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$

$$\theta_1 = -10^\circ \text{C}$$

$$\theta_2 = +90^\circ \text{C}$$

$$\theta_0 = 0^\circ \text{C}$$

$$H = 3800 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3}$$

Ges.: Wirkungsgrad η

$$m_T = 2,77 \text{ kg}$$

$$m_E = 3 \text{ kg}$$

$$x = 30 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

$$t = 45 \text{ min}$$

1. Erforderliche Wärmemengen

1.1. Erwärmung des Topfes von -10°C auf $+90^\circ \text{C}$

$$Q_1 = m_T \cdot c_T \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

$$Q_1 = 2,77 \text{ kg} \cdot 0,11 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}} \cdot [90 - (-10)]^\circ \text{C}$$

$$Q_1 = 30,47 \text{ kcal}$$

1.2. Erwärmung des Eises von -10°C auf 0°C

$$Q_2 = m_E \cdot c_E \cdot (\theta - \theta_1)$$

$$Q_2 = 3 \text{ kg} \cdot 0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}} \cdot [0 - (-10)]^\circ \text{C}$$

$$Q_2 = 15 \text{ kcal}$$

1.3. Schmelzwärme des Eises

$$Q_3 = m_E \cdot q$$

$$Q_3 = 3 \text{ kg} \cdot 79,7 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

$$Q_3 = 239,1 \text{ kcal}$$

1.4. Erwärmung des Wassers von 0°C auf $+90^\circ \text{C}$

$$Q_4 = m_W \cdot c_W \cdot (\theta_2 - \theta_0)$$

$$Q_4 = 3 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}} \cdot (90 - 0)^\circ \text{C}$$

$$Q_4 = 270 \text{ kcal}$$

1.5. Gesamtwärmemenge

$$Q_g = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q_g = (30,47 + 15,0 + 239,1 + 270) \text{ kcal} = 554,57 \text{ kcal}$$

2. Zugeführte Wärmemenge Q_z

Gasverbrauch in 45 Minuten ist V_g .

$$Q_z = H \cdot V_g \text{ mit } V_g = x \cdot t$$

$$Q_z = H \cdot x \cdot t$$

$$Q_z = \frac{3800 \text{ kcal} \cdot 0,30 \text{ m}^3 \cdot 45 \text{ min}}{\text{m}^3 \cdot 60 \text{ min}} = 855 \text{ kcal}$$

Für die Erwärmung einschließlich des Topfes gilt

$$\eta = \frac{Q_g}{Q_z},$$

$$\eta = \frac{554,57 \text{ kcal}}{855 \text{ kcal}} \approx 0,649 = 64,9\%.$$

Der Wirkungsgrad beträgt 64,9%, d.h., es wurden 64,9% der in Form von Gas zugeführten Wärmemenge ausgenutzt.

Ph9 ■ 109 1. Skizze und Bezeichnungen

Bild 1

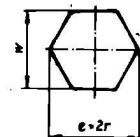
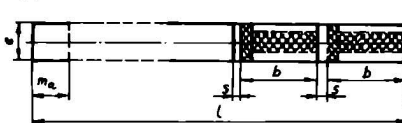


Bild 2



Aus Bild 1 und Bild 2 entnimmt man:

e = Eckmaß = Durchmesser des Umkreises des Sechsecks

w = Schlüsselweite

k = Kopfhöhe

l = Stangenlänge

m_a = Spannrest (Abfall)

s = Abstechbreite

d = Bolzendurchmesser

a = Bolzenlänge

Geg.: $d = 10 \text{ mm}$

$a = 60 \text{ mm}$

$k = 7 \text{ mm}$

$s = 2 \text{ mm}$

$w = 17 \text{ mm}$

$l = 5 \text{ m}$

$b = a + k = 67 \text{ mm}$

$m_g = 74 \text{ t}$

$$q = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Gesucht:

Anzahl der

Schrauben q

Materialverlust

V_m (absolut)

p (in Prozent)

2. Berechnung

2.1. Masse der Schraube

2.1.1. Flächeninhalt A_G des Sechsecks

$$A_G = \frac{3r^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Da } \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{w}{2} \text{ ist, gilt } r = \frac{w}{\sqrt{3}} \text{ und}$$

$$A_G = \frac{3w^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{w^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

2.1.2. Volumen V der Schraube (nach Bild 1)

$$V = A_G k + \frac{d^2 \pi}{4} \cdot a$$

$$V = A_G k + \frac{d^2 \pi a}{4} = \frac{kw^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(kw^2 \sqrt{3} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{2} \right)$$

2.1.3. Masse m der Schraube

$$m = V \cdot q = \frac{q}{2} \left(kw^2 \sqrt{3} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{2} \right)$$

2.2. Anzahl n der Schrauben aus einer Stange Sechskantstahl. Laut Bild 2 folgt

$$l = n(b + s) + m_a,$$

$$n = \frac{l - m_a}{b + s} = \frac{l - m_a}{a + k + s} = \frac{(5000 - m_a) \text{ mm}}{(60 + 7 + 2) \text{ mm}}$$

$$= \frac{5000 - m_a}{69} \text{ mit } m_a < 69.$$

Dann ist $n = \frac{5000}{69} - \frac{m_a}{69} = 72,46 - 0,46 = 72$, da $n \in \mathbb{N}$. (72 Schrauben je Stange)

2.3. Masse m_s einer Stange Sechskantstahl

$$m_s = A_g \cdot l \cdot q \quad (A_g \text{ aus 2.1.1.})$$

$$m_s = \frac{w^2 \sqrt{3} \cdot l \cdot q}{2}$$

2.4. Anzahl n_g der Stangen bei der Gesamtmasse

$$n_g = \frac{m_g}{m_s} = \frac{m_g \cdot 2}{w^2 \cdot l \cdot q \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{74000 \text{ kg} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \text{cm}^2 \cdot 1000}{1,7^2 \text{ cm}^2 \cdot 3 \cdot 500 \text{ cm} \cdot 7,85 \text{ kg}}$$

$$n_g = 7533$$

2.5. Anzahl q der Schrauben aus allen Stangen

$$q = n_g \cdot n = 7533 \cdot 72 = 542376$$

Aus 74 Tonnen Sechskant-Stabstahl lassen sich 542376 Schrauben herstellen.

2.6. Materialverlust V_m

$$V_m = m_g - m_q \text{ mit } m_q = m \cdot q$$

$$V_m = m_g - q \cdot m = m_g - q \cdot \frac{q}{2} \left(kw^2 \sqrt{3} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{2} \right)$$

$$V_m = 74000 \text{ kg} - \frac{542376 \cdot 7,85}{2 \cdot 1000}$$

$$\cdot \left(0,7 \cdot 1,7^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{6 \cdot 1^2 \cdot 3,14}{2} \right) \text{ kg}$$

$$V_m = 46487 \text{ kg}$$

Der Materialverlust beträgt absolut 46487 kg.

$$p = \frac{46487 \text{ kg}}{74000 \text{ kg}} \cdot 100 \approx 62,8\%$$

Der Materialverlust beträgt 62,8%.

Ph10/12 ■ 110

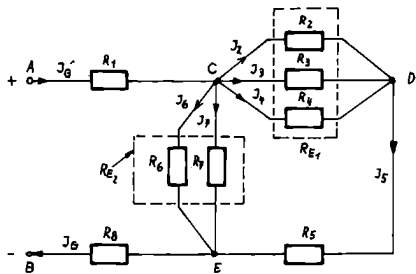
Geg.: $R_1 = 10\Omega$ $R_6 = 10\Omega$

$R_2 = 60\Omega$ $R_7 = 10\Omega$

$R_3 = 30\Omega$ $R_8 = 6\Omega$

$R_4 = 30\Omega$ $U = 60 \text{ V}$

$R_5 = 8\Omega$ Ges.: R_G, I_G, U_2, I_3

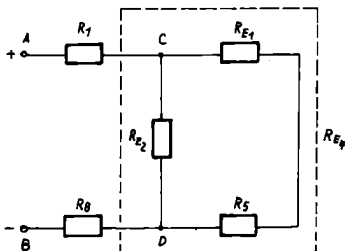


Spannung zwischen AC ist U_1 ,

CD ist $U_2 = U_3 = U_4$,

DE ist U_5 , EC ist $U_6 = U_7$,

EB ist U_8 , AB ist U



$$\frac{1}{R_{E1}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{E2} = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} = \frac{60 \cdot 30 \cdot 30}{60 \cdot 30 + 60 \cdot 30 + 30 \cdot 30} \Omega = 12\Omega$$

$$R_{E2} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} = \frac{10\Omega \cdot 10\Omega}{10\Omega + 10\Omega} = 5\Omega$$

$$R_{E3} = R_{E1} + R_5 = 12\Omega + 8\Omega = 20\Omega$$

$$R_{E4} = \frac{R_{E2} \cdot R_{E3}}{R_{E2} + R_{E3}} = \frac{5\Omega \cdot 20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 4\Omega$$

$$R_G = R_1 + R_{E4} + R_8 = 10\Omega + 4\Omega + 6\Omega = 20\Omega$$

$$I_G = \frac{U}{R_G} = \frac{60 \text{ V}}{20\Omega} = 3 \text{ A}$$

$$U_1 = I_G \cdot R_1 = 3 \text{ A} \cdot 10\Omega = 30 \text{ V}$$

$$U_8 = I_G \cdot R_8 = 3 \text{ A} \cdot 6\Omega = 18 \text{ V}$$

$$U_6 = U - U_1 - U_8 = 60 \text{ V} - 30 \text{ V} - 18 \text{ V} = 12 \text{ V}$$

$$U_7 = U_6$$

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = \frac{12 \text{ V}}{10\Omega} = 1,2 \text{ A}$$

$$I_7 = I_6$$

$$I_G = I_5 + I_6 + I_7$$

$$I_5 = I_G - I_6 - I_7 = 3 \text{ A} - 1,2 \text{ A} - 1,2 \text{ A} = 0,6 \text{ A}$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5 = 0,6 \text{ A} \cdot 8\Omega = 4,8 \text{ V}$$

$$U_2 = U_6 - U_5 = 12 \text{ V} - 4,8 \text{ V} = 7,2 \text{ V}$$

$$U_3 = U_4 = U_2$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{7,2 \text{ V}}{30\Omega} = 0,24 \text{ A}$$

$$I_4 = I_3$$

Der Gesamtstrom des vermaschten Stromkreises beträgt 20A, die Gesamtstrom-

stärke 3 A, die Spannung U_2 7,2 V und die Stromstärke I_3 0,24 A.

Ch7 ■ 85 380 kg m

Fe_2O_3 2Fe

160 g 112 g

$$m = \frac{380 \text{ kg} \cdot 112 \text{ g}}{160 \text{ g}}$$

$$m = 266 \text{ kg}$$

$$266 \text{ kg} \triangleq 100\%$$

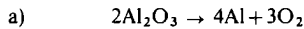
$$m \triangleq 98\%$$

$$m = \frac{266 \text{ kg} \cdot 98\%}{100\%}$$

$$m = 260,7 \text{ kg}$$

260,7 kg Roheisen lassen sich aus 1 t Erz gewinnen.

Ch8 ■ 86 1260 kg m



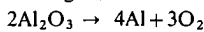
204 g 108 g

$$m = \frac{1260 \text{ kg} \cdot 108 \text{ g}}{204 \text{ g}}$$

$$m = 667 \text{ kg}$$

Aus 2 t Bauxit mit 63% Aluminiumoxid-gehalt gewinnt man 667 kg Aluminium.

b) 1260 kg · 0,70 m



1260 kg · 0,70 = m

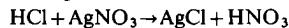
$$\frac{1260 \text{ kg} \cdot 0,70}{204 \text{ g}} = \frac{m}{108 \text{ g}}$$

$$m = \frac{1260 \text{ kg} \cdot 0,70 \cdot 108 \text{ g}}{204 \text{ g}}$$

$$m = 467 \text{ kg}$$

Nach erfolgter Reinigung des Bauxits können nur 467 kg Aluminium gewonnen werden.

Ch9 ■ 87 0,2 · 6 g 0,03 · x



36,5 g 170 g

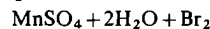
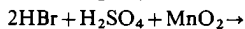
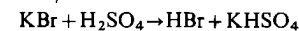
$$0,03 \cdot x = \frac{0,2 \cdot 6 \text{ g} \cdot 170 \text{ g}}{36,5 \text{ g}}$$

$$x = \frac{0,2 \cdot 6 \text{ g} \cdot 170 \text{ g}}{36,5 \text{ g} \cdot 0,03}$$

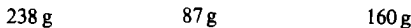
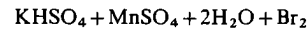
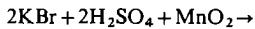
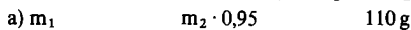
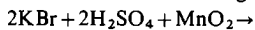
$$x = 186 \text{ g}$$

186 g 3%ige Silbernitratlösung müssen eingesetzt werden, damit die Chloridionen restlos ausgefällt werden.

Ch10/12 ■ 88



Addition beider Gleichungen

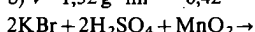
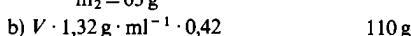


$$m_1 = \frac{238 \text{ g} \cdot 110 \text{ g}}{160 \text{ g}}$$

$$m_1 = 164 \text{ g}$$

$$m_2 = \frac{87 \text{ g} \cdot 110 \text{ g}}{160 \text{ g} \cdot 0,95}$$

$$m_2 = 63 \text{ g}$$



$$V = \frac{196 \text{ g} \cdot 110 \text{ g}}{160 \text{ g} \cdot 1,32 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1} \cdot 0,42}$$

$$V = 243 \text{ ml}$$

164 g reines Kaliumbromid, 63 g Braunstein (95%ig) und 243 ml 42%ige Schwefelsäure müssen zur Reaktion gebracht werden, um 110 g Brom darzustellen.

Fortsetzung von Seite 61

Physik

Aufgaben der Klassenstufe 9/10

▲ 1 ▲ (Mechanik) Zwei Fahrzeuge bewegen sich von einer Kreuzung aus senkrecht zueinander gleichmäßig beschleunigt. Nach einer Fahrzeit von 10 Sekunden haben sie einen Abstand von 150 m voneinander. Fahrzeug 1 ist zu diesem Zeitpunkt doppelt so weit von der Kreuzung entfernt wie Fahrzeug 2.

a) Welche Geschwindigkeit haben die Fahrzeuge zu diesem Zeitpunkt?

b) In welchem Verhältnis stehen die beschleunigenden Kräfte, wenn sich die Massen der Fahrzeuge wie 3 : 4 verhalten?

(Ergebnis: a) $V_1 = 13,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $V_2 = 26,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

b) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{8}$)

▲ 2 ▲ (Elektrizitätslehre) Aus einem Draht der Länge l mit dem Widerstand R wird ein Quadrat mit einer Diagonalen gelötet (Bild 2)!

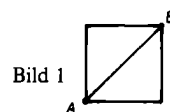


Bild 1

Wie groß ist der Widerstand zwischen den Punkten A und B des Quadrates?

(Ergebnis: $R_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{6 + \sqrt{2} \cdot 5} R$)

▲ 3 ▲ (Auftrieb) Eine Holzplatte ($\rho_H = 0,75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $l = b = 1 \text{ m}$, $h = 10 \text{ cm}$) schwimmt auf Wasser!

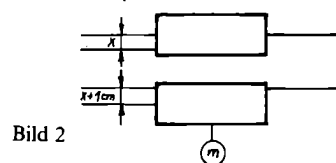


Bild 2

a) Wie tief taucht die Holzplatte in das Wasser ein?

b) Welche Masse muß eine Eisenkugel haben, die an die Holzplatte angehängt wird und diese einen Zentimeter tiefer unter die Wasseroberfläche ziehen soll? ($\rho_E = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) (Ergebnis: a) $x = 7,5 \text{ cm}$; b) $m = 11,5 \text{ kg}$)

Dr. W. Weiss-Motz,
Fachzirkelleiter Physik

**mehr lesen –
mehr wissen**



A. Hilbert

Gleichungen und Ungleichungen

Reihe: Wir wiederholen

111 Seiten mit 49 Bildern, 62 Beispielen
und 43 Aufgaben mit Lösungen

Bestell-Nr. 5466584 Preis: 4,80 M

Vektorrechnung

112 Seiten mit 94 Bildern, 51 Beispielen
und 31 Aufgaben mit Lösungen

Bestell-Nr. 5466605 Preis: 4,80 M

Gleichungssysteme

100 Seiten mit 32 Bildern, 44 Beispielen
und 21 Aufgaben mit Lösungen

Bestell-Nr. 5466592 Preis: 4,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

B. Klotzek

Einführung in die Differentialgeometrie I

144 Seiten, 75 Abb., zahlr. Beispiele

Bestell-Nr. 5709785 Preis: 8,00 M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin

E. Naumann

Entscheiden – aber wie?

240 Seiten, 49 Bilder, 43 Tabellen

Bestell-Nr. 5465442 Preis: 5,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

L. Tarassow/A. Tarassow

Physik im Gespräch

Etwa 360 Seiten, 200 Bilder

Bestell-Nr. 5466410 Preis: 12,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Autorenkollektiv

100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig

340 Seiten, 56 Abb., 2 Tabellen

Dieser Jubiläumsband ist zum Preise
von 65,- M erhältlich an der Sektion
Mathematik der Karl-Marx-Universität
Leipzig (Bibliothek)

Friedrich Kaden

Rund um die Astronomie

144 Seiten, 270 Abb. (mehrfarbig)

Bestell-Nr. 6305459 Preis: 17,80 M

Der Kinderbuchverlag, Berlin

Friedrich Kaden

Wieviel Sterne hat der Große Bär?

Wir beobachten den Sternenhimmel

200 Seiten, zahlr. Abb.

Bestell-Nr. 6292969 Preis: 4,80 M

Der Kinderbuchverlag Berlin

S. I. Seleschnikow

Wieviel Monde hat ein Jahr?

Kleine Kalenderstunde

245 Seiten, 34 Abb., 30 Tabellen

Bestell-Nr. 6536652 Preis: 9,80 M

Verlag MIR Moskau/Urania-Verlag Leipzig

W. Gilde

Noch mehr Spaß mit dem Taschenrechner

Etwa 216 Seiten, 48 Bilder

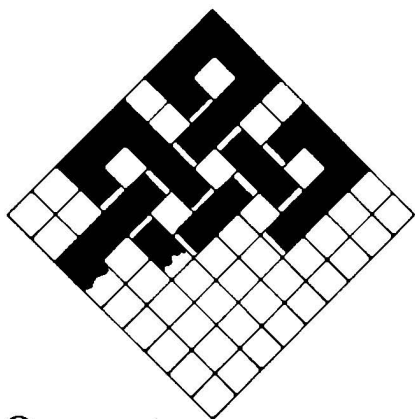
Bestell-Nr. 5466058 Preis: etwa 5,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

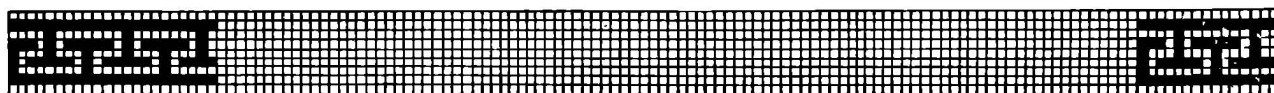
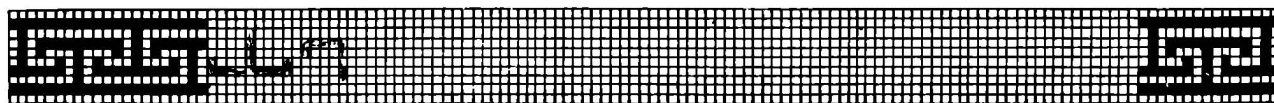
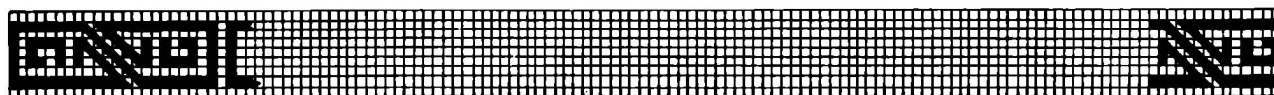
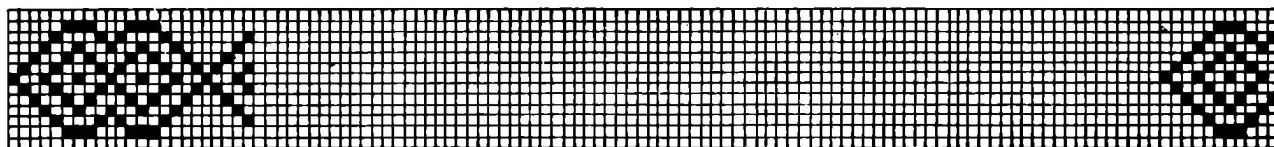
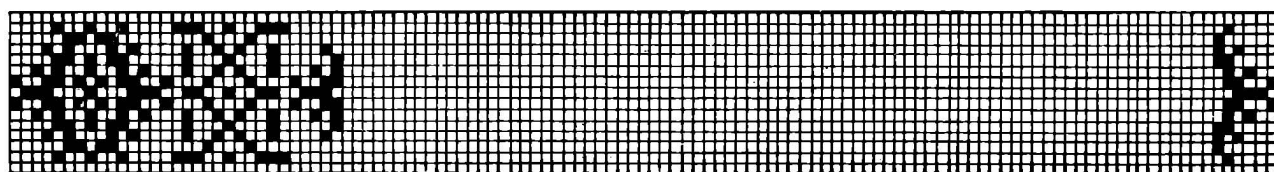
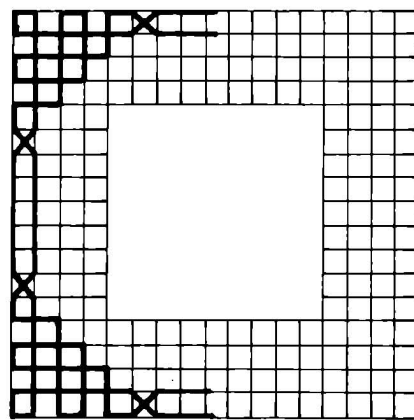
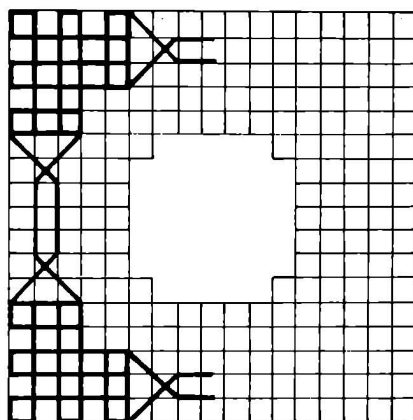
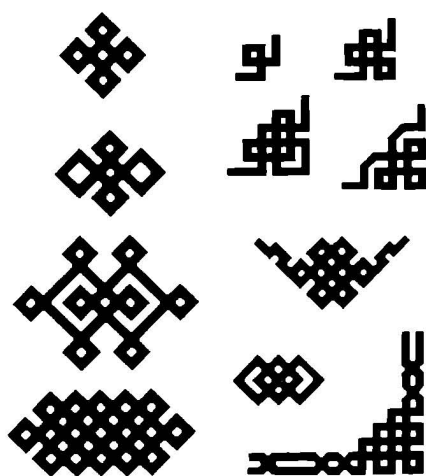
Alljährlich findet eine umfassende Solidaritätsaktion der Journalisten der DDR,
Bezirksgruppe Süd, auf dem Leipziger Markt statt.

Unser Foto: Der Chefredakteur der *alpha*, stets eng umringt, verkauft Bücher der *Mathematischen Schülerbücherei (MSB)*. Reinerlös fürs Solidaritätskonto: 310 Mark.





Ornamente
aus der Mongolischen
Volksrepublik



**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059**

alpha



4

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTr J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: K.-H. Guckuk, LVZ Leipzig (S. 78,
S. 87); Miroslav Stejska, Dikobraz Beograd
(S. 79); Eigenfoto E. Müller-Pfeiffer (S. 83);
Eigenfotos H. Pollack, U. Baumann, M.
Jentsch, Dresden (S. 86); Briefmarken von:

Prof. Dr. G. Helmberg, Innsbruck

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Mathematical Themes in Orna-
ment, Rutherford Boyd, Yeshiva-University
New York, gestaltet von W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Auslieferungstermin: 23. August 1982

Redaktionsschluß: 26. April 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 73 Sind Mausefallenbeweise nötig? Teil 1 [9]*
Dr. R. Thiele, leitender Lektor im Hirzel-Verlag Leipzig
- 76 Ungleichung von Erdős-Mordell [9]
Dipl.-Math. F. Rehm, Berlin (NVA)
- 78 Ein weiterer Algorithmus zum Ungarischen Würfel
G. Scheithauer, Forschungsstudent an der Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 80 Mathematik in Landwirtschaft und Medizin [9]
Prof. Dr. D. Rasch, Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf – Rostock/
Honorarprof. an der Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität*, Rostock
- 82 Ausgewählte Aufgaben aus den Rayon-Mathematik-Olympiaden
der UdSSR [7]
Dozent A. R. Sawin, Moskau/Dr. W. Moldenhauer, Päd. Hochschule
Dr. Th. Neubauer, Erfurt
- 83 Ein viertel Jahrhundert Mathematiklehrerausbildung in Erfurt [6]
Dr. G. Sommerfeld, Päd. Hochschule Erfurt
- 83 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Erich Müller-Pfeiffer [8]
Päd. Hochschule Erfurt
- 84 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6 · Bilderbogen Geometrie [5]
H. Begander, Leipzig
- 85 Für den Schachfreund: Springerwege übers ganze Brett [5]
H. Rüdiger, Grünheide
- 86 Studentenwettstreit an der PH *Karl Friedrich Wilhelm Wander*,
Dresden [7]
Autorenkollektiv unter Ltg. von Dr. A. Hilbert
- 88 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 90 XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Schulolympiade
- 93 Lösungen [5]
- 96 Für den Briefmarkenfreund: Der Escherwürfel und andere
unmögliche Konstruktionen [7]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität*, Rostock
- III. U.-Seite: Ein Leben für die Wissenschaft – Zum 200. Todestag von
Daniel Bernoulli [8]
Dr. M. Krebs, Päd. Hochschule *Karl Friedrich Wilhelm Wander*, Dresden
Unsere historische Mathematikaufgabe [8]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akad. der Wis. der DDR
- IV. U.-Seite: Würfeleien [4]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Sind Mausefallenbeweise nötig?

Teil 1

1. Beweisen muß ich diesen Käs'!

Mathematische Probleme sind uralt, denn als die Menschen sich bewußt mit der Außenwelt (objektiven Realität) auseinanderzusetzen begannen, da mußten sie sich im Raum orientieren und Dinge zu Mengen zusammenfassen, also Geometrie und Arithmetik betreiben. Gewiß mögen uns heute nach mehreren tausend Jahren einige der ursprünglichen Schwierigkeiten als nichtig oder unbegründet vorkommen, wie etwa die umständlichen Ziffersysteme der Griechen und Römer einfachste arithmetische Aufgaben zu komplizierten Rechnungen aufblähten (Probiert einmal, in römischen Ziffern 5321 durch 13 zu dividieren!), aber die rasante Entwicklung elektronischer Rechner, die bereits im Taschenformat Unglaubliches leisten, könnte auch unsere Nachfahren lächelnd auf uns herabblicken lassen! Und genau wie wir meinen, unser Bestes zur Lösung der anstehenden Probleme zu geben, so ist dies wohl auch zu allen Zeiten gewesen.

Babylonier und Ägypter gaben vor rund 4000 Jahren bereits praktische Anweisungen zur Lösung von mathematischen Aufgaben, aber erst bei den Griechen schälten sich die bei der Rechnung gewonnenen Erfahrungen, die mathematischen Begriffe und ihre Beziehungen zueinander, als *Theorie* heraus. Ein Beispiel hierfür hat uns Euklid übermittelt: Jedes Produkt aus geraden bzw. ungeraden Zahlen ist wiederum gerade bzw. ungerade. Diese Aussage über gerade und ungerade Zahlen nach Ausführung einer Rechenoperation geht offenbar über jede Erfahrung hinaus, denn es wird für alle (also unendlich viele) natürliche Zahlen etwas behauptet. Und, das ist wichtig, das Behauptete wird auch begründet, oder wie Mathematiker sagen, bewiesen. Der praktische Umgang mit Zahlen führte auf widerspruchsfreies Denken mit mathematischen Begriffen. *Mathemata* (Lehrstücke) nannten die Griechen solche kleinen theoretischen Probleme wie das obige und gaben damit der neuen Wissenschaft ihren Namen: *Mathematik*.

Das Ende eines Beweises wurde bei Euklid stereotyp durch den Satz „Hoper edei deixai“ (Was zu zeigen war) kenntlich gemacht. Die lateinische Version lautet „Quod erat demon-

strandum“ (Was zu beweisen war), abgekürzt q. e. d. (deutsch w. z. b. w.), und hat sich bis heute erhalten, auch wenn sie mitunter kenntlich nur noch als typografisches Zeichen ■ am Ende einer Beweisführung erscheint. Das Beweisprinzip mit seiner Traditionslinie von der griechischen Mathematik bis in unsere Zeit, also die Pflicht, alles Behauptete auch stichhaltig zu beweisen, ist unveräußerlicher Bestand der Mathematik geworden. Ein zeitgenössischer Mathematiker, Friedrich Wille, hat humorvoll diese Beweislast in einer bekannten mathematischen Zeitschrift in einer ernsthaften Arbeit im Stile eines Gedichtes von Wilhelm Busch beschrieben, aus der auch die Überschrift dieses Abschnitts entnommen ist. Vollständiger führte Wille aus: „Beweisen muß ich diesen Käs', sonst ist die Arbeit unseriös“. In der Mathematik geht es also nicht wie in der alten preußischen Anekdote zu, wo ein neuer und eifriger Mathematiklehrer an einer Kadettenanstalt sich erkühnte, einen Offizierschüler aufzufordern, den Satz des Pythagoras zu beweisen, und prompt zur Antwort erhielt: „Bei uns wird nicht bewiesen, bei uns wird aufs Wort geglaubt!“

2. Für Nichtmathematiker kein Zutritt

Diese Überschrift würde uns heute, beispielsweise in einem mathematisch orientierten Institut vor dem Rechnerraum, kaum überraschen. Das wäre nur eins der vielen Verbotsschilder. Überraschender ist aber, daß diese Zeile bereits vor rund 2000 Jahren mathematisches Selbstbewußtsein artikuliert, indem sie nämlich als Inschrift über dem Eingang zu Platons berühmter Akademie prangte. Zugegeben, dort stand etwas genauer übersetzt „Es trete kein der Geometrie Unkundiger ein“, aber beide Sätze besagen grundsätzlich das gleiche, denn Mathematik und Geometrie waren damals (und noch bis ins 18. Jahrhundert) Synonyme. Dieses stolze Motto, das Platon gewählt hatte, zeigt uns deutlich, wie sehr sich die griechischen Mathematiker der Kraft und Wirksamkeit mathematischen Denkens bewußt waren, und dieses Denken fußte wesentlich auf der Beweisbarkeit mathematischer Sachverhalte durch logisches Denken.

Die griechische Formel für ein Beweisende lautete, wie bereits angegeben, was zu zeigen war. Vermutlich können wir hier noch die anschaulichen Anfänge der Beweisverfahren früher griechischer Mathematiker erkennen: das Aufzeigen von etwas anschaulich Gegebenem und ohne weiteres Einsichtigem. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist der Dialog des Sokrates mit einem Sklaven, in dem Sokrates mit seiner Hebammenmethode (d. h. die Lösung nach und nach durch Antworten auf gezielte Fragen hervorbringt) das Problem mit dem Sklaven behandelt, wie man wohl die Seitenlänge eines Quadrates finden könne, das doppelt so groß sei wie ein gegebenes Quadrat. Natürlich schlägt der Sklave zunächst ein Quadrat mit doppelt so großer Seitenlänge als Lösung vor (vgl. Bild 1, wo $AG = 2AB$) Sokrates zeigt, daß dann die Fläche vier mal so groß ist, und lenkt auf die Erkenntnis hin, daß das Quadrat $BFED$ doppelt so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist, was durch kongruente Dreiecke fast unmittelbar einleuchtet. Auch die indische Mathematik liebte solche offensichtliche Beweisgründe. In ihr ist den Figuren, die zum Beweis der Sätze dienen, in der Regel nur die Bemerkung „Siehe!“ beigegeben, wie z. B. in Bild 2. Wer Augen zum Sehen hat, der sieht es: nämlich der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Fläche des Rechtecks aus Grund-

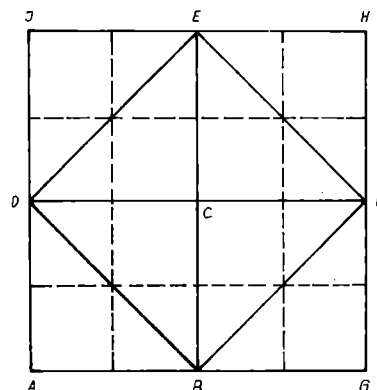


Bild 1
Figur zum Dialog des Sokrates. Das Quadrat $BFED$ hat die doppelte Fläche wie das Quadrat $ABCD$.

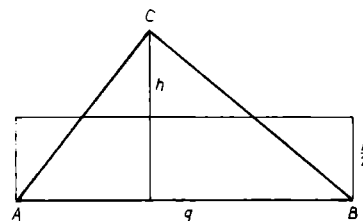


Bild 2
Typische Figur für einen indischen Beweis, hier zum Beweis der Formel für die Dreiecksfläche $F = \frac{1}{2}gh$. Der beigegebene Text besteht in der Aufforderung „Siehe!“.

seite mal halber Höhe des Dreiecks (symbolisch: $F = \frac{1}{2}gh$). Ähnlich anschauliche Beispiele enthält z. B. die frühe chinesische Mathematik.

Aber das Sehen hat auch seine Grenzen: Wir alle kennen optische Täuschungen. Hier sind einige zur Erinnerung (Bild 3). Der griechische Mathematiker Euklid zog bereits deshalb eine logische Ableitung der anschaulichen vor. Sein begründender Abschlusssatz „Was zu zeigen war“ ist also schon eine formale Floskel. Der Grund für die Zuwendung zur Logik liegt, wie der zeitgenössische ungarische Mathematikhistoriker A. Szabó vermutet, in dem Schock, den die Entdeckung verursacht hatte, daß die Diagonale im Einheitsquadrat in keinem rationalem Verhältnis zur Seite steht. D. h., es gab im griechischen Verständnis der Zahl eine Krise, denn die anschaulich aufweisbaren Strecken hatten kein gemeinsames (rationales) Maß, und das pythagoreische Dogma „Alles ist Zahl“, was ja bedeuten soll, daß sich alles durch Zahlen bzw. Zahlenverhältnisse ausdrücken läßt,

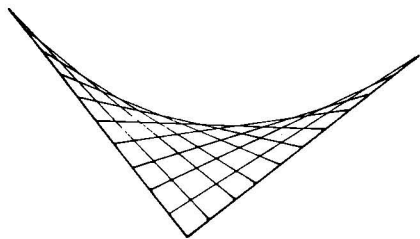
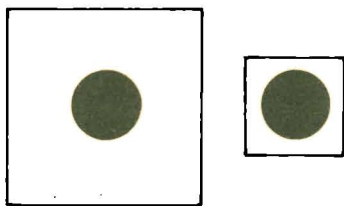
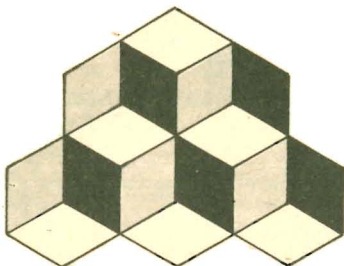


Bild 3
Einige optische Täuschungen

a) Man glaubt, eine gekrümmte Kurve zu sehen. In Wirklichkeit besteht die Kurve jedoch aus 20 Geradenstücken.



b) Beide Kreise scheinen verschiedene Größe zu haben. Das falsche Urteil beruht darauf, daß wir die Größe in bezug auf das umgebende Quadrat einschätzen.



c) Wie viele Würfel sind zu sehen? Je nach Einstellung des Lesers 3 oder 5. Nach Drehung der Figur um 180° werden im allgemeinen 5 Würfel gesehen.

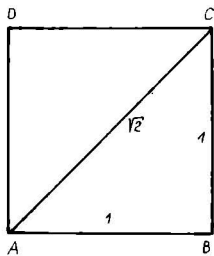


Bild 4

Die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat ist irrational. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich $\sqrt{2}$ als ihre Länge. Wäre $\sqrt{2}$ rational bzw. es bestünde eine Gleichung $\sqrt{2} = m/n$ (m und n natürliche Zahlen, o. B. d. A. auf Teilerfremdheit gekürzt), so folgte $2n^2 = m^2$. Also müßte 2 die Zahl m^2 und damit auch m selbst teilen. Folglich wäre die rechte Seite m^2 durch 4 teilbar, mithin auch die linke Seite. Damit folgte aber aus 4 teilt $2n^2$, daß 2 die Zahl n teilt. Das widerspräche der Teilerfremdheit von m und n . Also ist eine Gleichung der Art $\sqrt{2} = m/n$ unmöglich.

wurde ziemlich in Frage gestellt. Heute wird dieser Sachverhalt gern als einfaches Beispiel eines indirekten Beweises benutzt, um nämlich zu zeigen, daß für natürliche Zahlen m und n eine Gleichung $\sqrt{2} = m/n$ nicht möglich ist.

Die logische Ableitung mathematischer Aussagen führte dazu, daß eine bestimmte Menge an unbewiesenen Grundaussagen, sogenannten Axiomen, als wahr angesehen werden mußten, denn sonst wären die Beweise entweder ins Endlose zurückgegangen oder hätten bereits zu beweisende Sätze irgendwann vorausgesetzt (Zirkelschluß). Aus diesen Grundsätzen, den Axiomen, können mit logischen Mitteln alle Sätze einer Theorie abgeleitet werden, und sie müssen es auch, wenn sie in die Theorie aufgenommen werden sollen. Die korrekte Ableitbarkeit mittels logischer Schlüsse aus den Axiomen ist entscheidend für die Zugehörigkeit eines Satzes zu einer Theorie oder für die Wahrheit eines Satzes in dieser Theorie. Euklids geometrisches Axiomensystem in seinem Buch „Elemente“ ist hierfür ein Musterbeispiel; das Buch diente in Europa fast 2000 Jahre als Lehrbuch der Geometrie.

Den Verlust der Anschaulichkeit und den hohen Grad abstrakter logischer Überlegungen wollen wir an einem indirekten Beweis Euklids aufzeigen, der darlegt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Beweis: Wir stellen zunächst fest, daß es überhaupt Primzahlen gibt, z. B. 2, 3, 5 und 7. Aus der Erklärung einer Primzahl folgt: Jede natürliche Zahl n (> 1) ist entweder durch eine Primzahl p ($1 < p < n$) teilbar oder selbst Primzahl. Nun beginnt der eigentliche Beweis. Wir nehmen dazu das Gegenteil der im Satz behaupteten Aussage an. Es soll also nur endlich viele Primzahlen geben, insbesondere muß

dann eine größte Primzahl p vorhanden sein. Nun bilden wir das Produkt aus den endlich vielen Primzahlen 2 bis p und addieren die 1 hinzu:

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p + 1.$$

Wenn diese Zahl P Primzahl wäre, so wäre offenbar $P > p$, also wäre p nicht größte Primzahl. Wäre aber andererseits P keine Primzahl, so müßte eine gewisse Primzahl a die Zahl P teilen. Nun ist aber klar, daß die Primzahlen von 2 bis p (also alle als bekannt angesehenen Primzahlen) die Zahl P nicht ohne Rest teilen. Also muß P doch Primzahl sein! Damit ist P eine neue Primzahl mit $P > p$. Unsere Annahme, daß es eine größte Primzahl gäbe, läßt sich nicht halten, folglich muß das Gegenteil zutreffen, bzw. es gibt zu jeder Primzahl eine noch größere. (Durch den Beweis wissen wir zwar, daß es zu jeder vorgelegten Primzahl eine größere gibt, aber es bleibt offen, ob P die nächstgrößere Primzahl nach p ist. Einfache Beispiele zeigen, daß unser Verfahren nicht alle Primzahlen nacheinander erzeugt:

$$p=3, P=2 \cdot 3 + 1=7; p=5, P=2 \cdot 3 \cdot 5 + 1=31).$$

Die Struktur dieses Beweises aus der griechischen Mathematik ist recht kompliziert: Man nimmt das Gegenteil einer Behauptung an und zeigt durch ein Beweisverfahren, daß das Gegenteil der Behauptung zu verwerfen ist, um daraus die Gültigkeit der unverneinten Behauptung zu folgern.

3. Ein Einwand aus der Philosophie

Die Mathematik hat bedeutende Persönlichkeiten ständig zu Stellungnahmen veranlaßt, wobei entweder enthusiastische Zustimmung oder kühle Ablehnung erschien, Gleichgültigkeit gegenüber der Mathematik gab es kaum. Daß Naturwissenschaftler, die Gebrauch von dieser exakten Wissenschaft machten, ihren Gebrauch lobten, das liegt auf der Hand. Aber auch Dichter und Philosophen priesen die Mathematik. Zwei Beispiele: „Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein“ (Novalis); „Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist“ (Kant). Jedoch gibt es außerhalb der Naturwissenschaften auch häufig kritische Töne; von Goethe kennen wir distanzierte Stellungnahmen, und der Dichter Strindberg führte dilettantische Angriffe gegen die Mathematik. Der Philosoph Schopenhauer äußerte sich recht präzise über die Unzulänglichkeiten der mathematischen Methode, so daß eine Auseinandersetzung mit ihm möglich ist. Schopenhauer schrieb in seinem Buch „Die Welt als Wille und Vorstellung“ (1818) polemisch:

„Erst jetzt können wir einsehen, daß des Euklids logische Behandlungsart der Mathematik eine unnütze Vorsicht, eine Krücke

für gesunde Beine ist, daß sie einem Wanderer leicht, der nachts, einen heller, festen Weg für ein Wasser haltend, sich hütet, ihn zu betreten, und stets daneben auf holprigem Boden geht, zufrieden, von Strecke zu Strecke an das vermeinte Wasser zu stoßen. Erst jetzt können wir mit Sicherheit behaupten, daß, was bei der Anschauung einer Figur sich uns als notwendig ankündigt, nicht aus der auf dem Papier vielleicht sehr mangelhaft gezeichneten Figur kommt, auch nicht aus dem abstrakten Begriff, den wir dabei denken, sondern unmittelbar aus der uns a priori (= von vornherein) bewußten Form aller Erkenntnis.“

Damit drückt Schopenhauer sein Unbehagen an unanschaulichen und indirekten Beweisführungen aus. Er sagt genauer:

„Daß, was Euklid demonstriert (= beweist), alles so sei, muß man, durch den Satz vom Widerspruch gezwungen, zugeben; warum es aber so ist, erfährt man nicht. Man hat daher fast die unbehagliche Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der Tat sind einem solchen die meisten Euklidischen Beweise auffallend ähnlich. Fast immer kommt die Wahrheit durch die Hintertür herein, indem sie sich per accidens (= zufällig) aus irgendeinem Nebenumstand ergibt. Oft schließt ein apagogischer (= indirekter) Beweis alle Türen, eine nach der anderen, zu und läßt nur die eine offen, in die man nun bloß deswegen hinein muß. Oft werden, wie im pythagoreischen Lehrsatz, Linien gezogen, ohne daß man weiß warum; hinterher zeigt sich, daß es Schlingen waren, die sich unerwartet zuziehen und den Assensus (= Zustimmung) des Lernenden gefangen nehmen, der nun verwundert zugeben muß, was ihm seinem inneren Zusammenhang nach völlig unbegreiflich bleibt.“

Schopenhauers Polemik richtet sich gegen den Mausefallencharakter, durch den er an anderem Ort diese Beweisverfahren charakterisierte. Für den Satz des Pythagoras (In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat) schlägt Schopenhauer, der es nicht bei Kritik bewenden lassen will, anstelle der zuschnappenden Mausefallenbeweise seine Beweismethode vor:

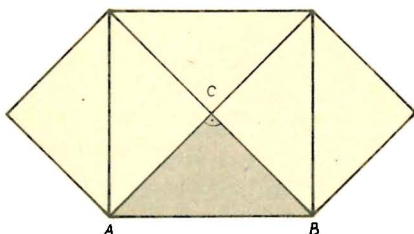


Bild 5
Schopenhauers Beweisfigur. Das Quadrat über AB ist offenbar flächengleich den beiden Quadraten über AC und BC .

„Daß es so sei, beweist freilich Euklid im 35. Satz des dritten Buches: das Warum steht noch dahin. Ebenso lehrt der pythagoreische Lehrsatz uns eine qualitas occulta (= geheimnisvolle Eigenschaft) des rechtwinkligen Dreiecks kennen; des Euklids stelzbeiniger, ja hinterlistiger Beweis verläßt uns beim Warum, und bestehende, schon bekannte, einfache Figur gibt auf einen Blick weit mehr als jener Beweis Einsicht in die Sache und innere feste Überzeugung von jener Notwendigkeit und von der Abhängigkeit jener Eigenschaft vom rechten Winkel. Auch bei ungleichen Katheten muß es sich zu einer solchen anschaulichen Überzeugung bringen lassen, wie überhaupt bei jeder geometrischen Wahrheit, schon deshalb, weil ihre Auffindung allemal von einer solchen angeschauten Notwendigkeit ausging und der Beweis erst hinterher hinzu ersonnen ward.“

4. Ein Beweis im Sinne Schopenhauers für den Satz des Pythagoras

Gegen den Beweis Schopenhauers ist mathematisch gar nichts einzuwenden, wenn er als Begründung für den speziellen Fall eines gleichschenkligen Dreiecks beim pythagoreischen Satz gelten soll. Dieser an den erwähnten Dialog des Sokrates erinnernde Beweis hat auch methodische Vorzüge, nämlich schnell an einem speziellen Fall die Gültigkeit der allgemeinen Behauptung einzusehen. Wie sieht es aber bei ungleichen Katheten aus? Hier bleibt uns Schopenhauer den Beweis schuldig. Wir wollen nicht fragen „Warum?“, sondern einen anschaulichen Beweis selbst geben. (Ein 1940 erschienenes Buch zählt gegen 370 Beweisvarianten dieses Satzes auf, so daß schwer nachzukommen ist, wer zuerst diese oder jene Version erdachte. In der mathematischen Schülerbücherei gibt es ein Bändchen von W. Lietzmann „Der pythagoreische Satz“, das interessierten Lesern erstaunlich viele Beweisvarianten vorführt.)

Nun zum Beweis. Wir betrachten ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ABC , wobei über den Dreiecksseiten die Quadrate errichtet sein sollen. In der Zeichenebene denken wir uns das Hypotenusenquadrat um die Hypotenuse als Drehachse um 180° herumgeklappt. Weiterhin verlängern wir die Seiten der Kathetenquadrate QS und EF bis zum gemeinsamen Schnittpunkt O sowie denken uns das Quadrat $ABFE$ längs der Strecke AS so verschoben, daß F mit O zusammenfällt. Das umgeklappte Hypotenusenquadrat überdeckt Teile der Kathetenquadrate, nämlich das Viereck $CBUP$ und das Dreieck ABD . Wir wollen zeigen, daß die nicht überdeckten Teile der Kathetenquadrate, nämlich die Dreiecke CQP und PSU sowie das Viereck $AEFD$ (als Teil I, III und V in der Figur bezeichnet), sich so in das umgeklappte Hypo-

tenusenquadrat zu den bereits überdeckten Teilen einfügen lassen, daß das Hypotenusenquadrat vollständig und einfach überdeckt ist. (Der Beweis ist wie ein Puzzlespiel, bei

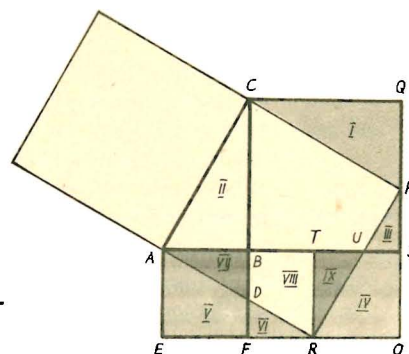


Bild 6
Ein Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes im Stile von Schopenhauer.

dem aus fünf Teilen ein Quadrat zu legen ist.) Folgende Flächengleichheiten sind wegen der Kongruenz der Figuren offensichtlich und durch unterlegtes Raster in der Abbildung besonders kenntlich gemacht:

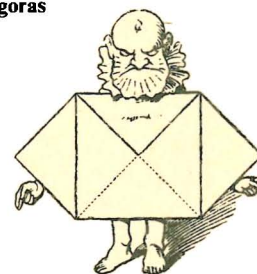
- a) $I = II$;
- b) $(III + IV) = (V + VI) = (VII + VIII)$,
also wegen $IV = V$, $III = VI$ schließlich
 $(III + V) = (VII + VIII)$;
- c) $VII = IX$,

hieraus folgt, was zu zeigen war.

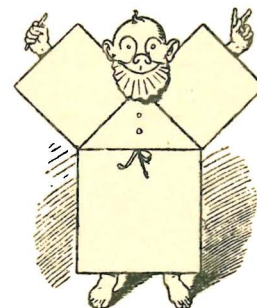
R. Thiele

(Ein 2. Teil folgt im nächsten Heft.)

Pythagoras



vor der Erfindung seines Lehrsatzes und nach der Erfindung desselben.

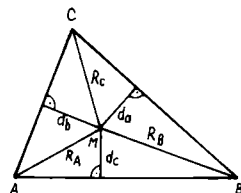


(aus: Münchner fliegende Blätter 1886, Lesereinsendung J. Weitendorf, Schwerin)

Ungleichung von Erdős-Mordell

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c gilt für einen beliebigen im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt M mit den Abständen d_a, d_b, d_c zu den Seiten und R_A, R_B, R_C zu den Eckpunkten des Dreiecks die Ungleichung $R_A + R_B + R_C \geq 2(d_a + d_b + d_c)$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn das Dreieck gleichseitig ist und M im Dreiecksmittelpunkt liegt. (Bild 1)

Bild 1



Die Beziehung formulierte erstmals im Jahre 1935 der ungarische Mathematiker *P. Erdős*, der allerdings noch keinen Beweis dafür erbrachte. Der erste Nachweis für die Gültigkeit der Ungleichung gelang dem englischen Mathematiker *L. J. Mordell*, einem Spezialisten der Zahlentheorie. Der Beweis von Mordell, der übrigens ziemlich kompliziert ausfiel, benutzte ebenso wie der später von *D. F. Barrow* gefundene Beweis vorrangig die Hilfsmittel der ebenen Trigonometrie.

Den ersten rein geometrischen Beweis der Erdős-Mordell-Ungleichung führte im Jahre 1945 der Amerikaner *D. K. Kazarinoff*. Andere, oftmals recht einfache Beweise derselben Ungleichung schlugen Ende der 50er Jahre der Amerikaner *L. Bankoff*, die Holländer *G. R. Veldkamp* und *H. Bralant*, der Engländer *Eglestone*, der sowjetische Wissenschaftler *S. A. Skopetz* (die von den zuletzt genannten drei Mathematikern stammenden Beweise waren fast identisch) sowie erneut *L. J. Mordell* vor. Im folgenden stellen wir drei verschiedene Beweisvarianten für die betrachtete Ungleichung vor, daran schließen sich einige Folgerungen und Übungen. Im Dreieck werden die in der Schulmathematik üblichen Bezeichnungen für Seiten, Winkel und Transversalen verwendet.

Wir benötigen im Beweisverlauf die folgenden drei Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Für beliebige positive Zahlen a gilt die Beziehung

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Beweis:

Die Gültigkeit folgt aus der Identität

$$a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + 2.$$

Hilfssatz 2: Es seien U, V und W auf den Seiten BC, AC bzw. AB des Dreiecks $\triangle ABC$ gelegene Punkte, wobei die Gerade UV und AB, UW und AC sowie VW und BC jeweils parallel verlaufen. Man zeige, daß die Punkte die Dreiecksseiten halbieren.

▲ 1 ▲ Aufgabe: Wende dabei mehrmals den Strahlensatz an!

Hilfssatz 3: Für einen beliebigen innerhalb des Winkelraums BAC (d.h. innerhalb des durch die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gebildeten Teils der Ebene) gelegenen Punkt M gilt

$$aR_A \geq bd_b + cd_c.$$

Beweis: Die Strecke $\overline{BC}$ schneide den Strahl $\overrightarrow{AM}$ in dem Punkt A_1 . Weiter seien $\overline{BQ}$ und $\overline{CR}$ die Lote von den Punkten B bzw. C auf die Gerade AM . Dann gilt offenbar

$$a = BC = BA_1 + A_1C \geq BQ + CR,$$

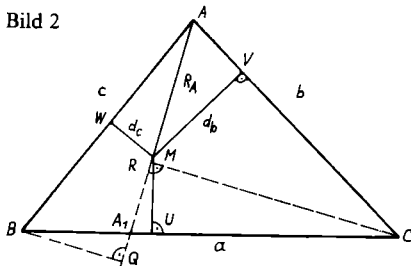
da in den (ggf. entarteten) rechtwinkligen Dreiecken $\triangle A_1BQ$ und $\triangle A_1CR$ die Katheten nicht länger als die Hypothenusen sein können. Hieraus ergibt sich

$$aR_A = BC \cdot AM \geq BQ \cdot AM + CR \cdot AM = 2S(\triangle AMB) + 2S(\triangle AMC)$$

und damit $aR_A \geq cd_c + bd_b$, w. z. b. w. Wir haben dabei mit $S(F)$ den Flächeninhalt der Figur F bezeichnet.

Aus dem Beweis ergibt sich, daß das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn die betrachteten Dreiecke entarten, d.h. wenn A_1, Q und R identisch sind und somit mit U zusammenfallen, was aber bedeutet, daß die Geraden AM und BC einen rechten Winkel bilden. (Bild 2)

Bild 2



Beweisvariante 1:

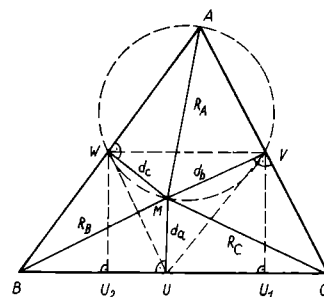
Zunächst fällen wir die Lote $\overline{MU}, \overline{MV}$ und $\overline{MW}$ des Punktes M auf die die Dreiecksseiten BC, AC bzw. AB enthaltenden Geraden und verbinden ihre Endpunkte U, V und W miteinander (Bild 3). Der über MA als Durchmesser konstruierte Kreis, dessen Radius $\frac{1}{2}R_A$ beträgt, verläuft laut Umkehrung

des Thalesatzes durch die Punkte V und W . Der zu VW als Sehne gehörige Peripheriewinkel ist gleich α und der entsprechende Zentriwinkel demnach 2α . Man erhält damit die Beziehung $VW = R_A \sin \alpha$. (Beweise dies!) Nun projizieren wir die Strecke VW auf

die Gerade BC . Ist $\overline{U_1U_2}$ die Projektion, so gilt offenbar

$$VW \geq \overline{U_1U_2} = \overline{UU_1} + \overline{UU_2}. \quad (1)$$

Bild 3



Durch eine Fallunterscheidung läßt sich leicht zeigen, daß die Geraden MV und BC einen Winkel der Größe $|90^\circ - \gamma|$ einschließen und analog die Geraden MW und BC einen Winkel der Größe $|90^\circ - \beta|$. (Führe den Nachweis dafür ausführlich durch Betrachtungen der Fälle $\gamma < 90^\circ$ und $\gamma \geq 90^\circ$!) Daraus lassen sich die Längen der Teilprojektionen UU_1 und UU_2 errechnen: $UU_1 = d_b \sin \gamma$ und $UU_2 = d_c \sin \beta$.

Eingesetzt in die obige Ungleichung (1) ergibt sich die folgende Abschätzung der Größe R_A von unten:

$$R_A \geq \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} d_b + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} d_c.$$

Aus Symmetriegründen gelten analoge Beziehungen für R_B und R_C :

$$R_B \geq \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} d_a + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} d_c,$$

$$R_C \geq \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} d_a + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} d_b.$$

(Zum Beweis die folgende Überlegung: man vertauscht die Bezeichnungen der Ecken, Seiten und übrigen Stücke in geeigneter Weise und betrachtet aber nach wie vor dieselben Hilfslinien wie oben.)

Addiert man jetzt die erhaltenen Abschätzungen für die Größen R_i und faßt die Glieder in geeigneter Weise zusammen, dann folgt die Ungleichung

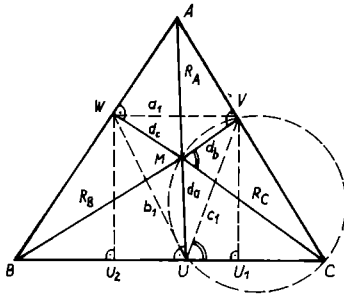
$$R_A + R_B + R_C \geq d_a \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + d_b \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + d_c \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right).$$

Durch mehrmalige Anwendung des Hilfssatzes 1 auf die Klammerausdrücke folgt schließlich die Ungleichung von Erdős-Mordell. Die Ungleichung wird zur Gleichung, wenn im Hilfssatz 1 das Gleichheitszeichen gilt, d.h. wenn gilt $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$ und damit

$\beta = \gamma$ und analog $\alpha = \gamma$ sowie $\alpha = \beta$, mit anderen Worten, das Dreieck ist gleichseitig. Außerdem muß in der Ungleichung (1) das Gleichheitszeichen gelten, d.h. die Geraden VW und BC parallel verlaufen, analog die Geraden AC und UW sowie UV und AB . Nach Hilfssatz 2 ist M somit der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, also gleich dem Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweisvariante 2:

Bild 4



Wir gehen wie in Variante 1 vor und betrachten die Ungleichung (1). Nun wollen wir die Strecken $\overline{UU_1}$ und $\overline{UU_2}$ durch einfachere Ausdrücke ersetzen (ohne Verwendung der Trigonometrie). Dazu bezeichnen wir $c_1 = \overline{UV}$, $b_1 = \overline{UW}$ sowie $a_1 = \overline{VW}$ (Bild 4).

Erneut errichten wir den Thaleskreis über einer der Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$, etwa $\overline{CM}$. Wieder nach Thalesatz verläuft der Kreis durch die Punkte U und V . Da Peripheriewinkel über derselben Sehne (auf derselben Seite dieser Sehne) gleich groß sind, gilt $\angle VUC = \angle VMC$, und die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle VUU_1$ und $\triangle CVM$ sind ähnlich. Also gilt $\overline{UU_1} : \overline{MV} = \overline{UV} : \overline{MC}$, oder in den gewählten Bezeichnungen $\overline{UU_1} = \frac{c_1 d_b}{R_C}$, analog $\overline{UU_2} = \frac{b_1 d_c}{R_B}$. (Leite die letzte Gleichung her!) Die Ungleichung (1) schreiben wir in folgender Weise:

$$R_A \geq R_A \frac{\overline{UU_1}}{\overline{WW}} + R_A \frac{\overline{UU_2}}{\overline{WW}}.$$

Nach Substitution der eben erhaltenen Werte für $\overline{UU_1}$ und $\overline{UU_2}$ folgt daraus die Ungleichung

$$R_A \geq \frac{c_1 R_A}{a_1 R_C} d_b + \frac{b_1 R_A}{a_1 R_B} d_c.$$

Auf die nun schon bekannte Art lassen sich analog die Beziehungen

$$R_B \geq \frac{a_1 R_B}{b_1 R_A} d_c + \frac{c_1 R_B}{b_1 R_C} d_a \text{ und}$$

$$R_C \geq \frac{a_1 R_C}{c_1 R_A} d_b + \frac{b_1 R_C}{c_1 R_B} d_a \text{ nachweisen.}$$

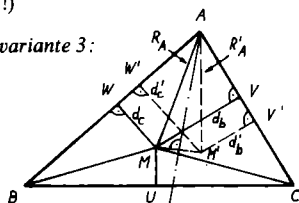
Durch Addition und Umformung der erhaltenen Abschätzungen der R_i ergibt sich die Ungleichung

$$R_A + R_B + R_C \geq d_a \left(\frac{c_1 R_B}{b_1 R_C} + \frac{b_1 R_C}{c_1 R_B} \right) + d_b \left(\frac{c_1 R_A}{a_1 R_C} + \frac{a_1 R_C}{c_1 R_A} \right) + d_c \left(\frac{b_1 R_A}{a_1 R_B} + \frac{a_1 R_B}{b_1 R_A} \right)$$

und daraus schließlich nach Anwendung des Hilfssatzes 1 die zu beweisende Ungleichung von Erdős-Mordell. (Ermittle analog zu Beweisvariante 1, in welchem Fall Gleichheit eintritt!)

Beweisvariante 3:

Bild 5



Zunächst ersetzen wir den Punkt M durch seinen Spiegelpunkt bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$ und bezeichnen diesen mit M' (siehe Bild 5). Jetzt wenden wir auf das Dreieck $\triangle ABC$ und M' den Hilfssatz 3 an, wonach gilt

$$aR'_A \geq cd'_c + bd'_b, \quad (2)$$

dabei ist $R'_A = \overline{AM'}$ und d'_b bzw. d'_c sind die Abstände des Punktes M' zu den Geraden AC bzw. AB . Nun gilt aber $R'_A = R_A$, $d'_c = d_b$ sowie $d'_b = d_c$.

▲ 2 ▲ Führe den Nachweis für diese 3 Identitäten, setze die Werte in (2) ein, und leite im Anschluß daran die zu beweisende Ungleichung nach dem in den vorigen Beweisvarianten demonstrierten Schema selbständig her!

Folgerungen und Aufgaben:

$$1. \quad \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \right)$$

Zum Beweis wird die Ungleichung von Erdős-Mordell auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$ und den Punkt M angewendet, wobei die Eckpunkte A' , B' und C' derart auf den Strahlen $\overline{MU}$, $\overline{MV}$ bzw. $\overline{MW}$ gewählt werden, daß gilt $\overline{MA'} = \frac{1}{d_a}$, $\overline{MB'} = \frac{1}{d_b}$ und $\overline{MC'} = \frac{1}{d_c}$. Mit anderen Worten, es wird zum Dreieck mit denjenigen Eckpunkten übergegangen, die sich aus der Polartransformation der Ecken des Ausgangsdreiecks bezüglich des Zentrums M ergeben.

Beweise, daß dann gilt $R'_A = \frac{1}{d_a}$, $d'_a = \frac{1}{R_A}$ und analoge Beziehungen für die übrigen R'_i und d'_i und daß daraus die Behauptung folgt!

$$2. \quad R_A R_B R_C \geq 8 d_a d_b d_c$$

▲ 3 ▲ Leite diese Beziehung unter Verwendung von Hilfssatz 3 und der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel von Zahlen her!

3. Die bisherigen drei erhaltenen Ungleichungen kann man infolge ihrer Symmetrie bzgl. der Dreiecksseitenlängen noch in folgender Form niederschreiben

$$M_k(R_A, R_B, R_C) \geq 2 M_k(d_a, d_b, d_c), \quad k = -1; 0; 1. \quad (3)$$

Dabei bezeichnet $M_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ das Mittel k -ten Grades der positiven Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ nach der Formel

$$M_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} (x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k) \right)^{\frac{1}{k}}$$

für $k \neq 0$ und

$$M_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Bekanntlich heißt M_0 das geometrische, M_1 das arithmetische und M_{-1} das harmonische Mittel der betreffenden Zahlen x_i . Im nächsten Abschnitt formulieren wir Aufgaben, in denen die Beziehung (3) noch für andere Werte k nachzuweisen ist. Dabei fällt auf, daß lediglich für $k=2$, d. h. für die quadratischen Mittel die Ungleichung (3) keine Gleichheit zuläßt und dabei $\sqrt{2}$ anstelle 2 steht! (Anmerkung: Es läßt sich dafür zeigen, daß beide

Ungleichungsseiten beliebig nahekommen können!)

$$4. \quad aR_A + bR_B + cR_C \geq 2(ad_a + bd_b + cd_c)$$

▲ 4 ▲ Folgere diese Ungleichung aus dem Hilfssatz 3!

5. Im gleichseitigen Dreieck gilt $R_A + R_B + R_C \geq \sqrt{3}a$.

▲ 5 ▲ Folgere diese Ungleichung aus der Ungleichung von Erdős-Mordell!

Weiterführende Übungen

Wer sich mit weiteren Beziehungen zwischen Dreiecksstücken und den Größen R_A, R_B, R_C sowie d_a, d_b, d_c beschäftigen will, sollte sich an den nun folgenden Aufgabenvorschlägen versuchen.

Es bezeichne S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$, h_a, h_b und h_c seine Höhen und r bzw. R die Radien von In- und Umkreis des Dreiecks.

$$1. \quad \min(h_a, h_b, h_c) \leq d_a + d_b + d_c \leq \max(h_a, h_b, h_c)$$

▲ 6 ▲ Anleitung: Betrachte die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle MBC$, $\triangle MAC$ und $\triangle MAB$!

$$2. \quad d_a d_b d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}$$

▲ 7 ▲ Anleitung: Betrachte die ebengeannte Flächensumme (siehe 1.), und wende die Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel dreier Zahlen an!

$$3. \quad \sqrt{R_A} + \sqrt{R_B} + \sqrt{R_C} \geq \sqrt{2} (\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c})$$

▲ 8 ▲ Diese Ungleichung entspricht der in Bemerkung 3. enthaltenen Beziehung (3) für $k = \frac{1}{2}$. Zum Beweis gehe man von der in Beweisvariante 3 hergeleiteten Beziehung (2) aus und benutze die Ungleichung

$$\sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \text{ für beliebige } x, y \geq 0, \text{ die zunächst aber noch nachzuweisen ist.}$$

$$4. \quad R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 > 2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$$

▲ 9 ▲ Anleitung: Benutze die Ungleichung (2)!

Die hier behauptete Ungleichung entspricht der Beziehung (3) für $k=2$ allerdings mit dem Faktor $\sqrt{2}$ statt 2 und läßt, wie bereits in Bemerkung 3. erwähnt, keine Gleichheit, dafür aber eine beliebige Annäherung der beiden Seiten zu.

$$5. \quad R_A R_B R_C \geq (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c)$$

▲ 10 ▲ Zum Beweis sind Hilfssatz 3 und Beziehung (2) zu benutzen.

$$6. \quad R_A + R_B + R_C \geq 6r$$

▲ 11 ▲ Benutze die Ungleichung von Erdős-Mordell, und leite die Beziehungen $R_A + d_a \geq h_a$ sowie $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ her, mit deren Hilfe dann der Nachweis der Behauptung gelingt.

Anmerkung: Diese Aufgabe besitzt im Gegensatz zu den bisherigen Aufgaben einen größeren Schwierigkeitsgrad.

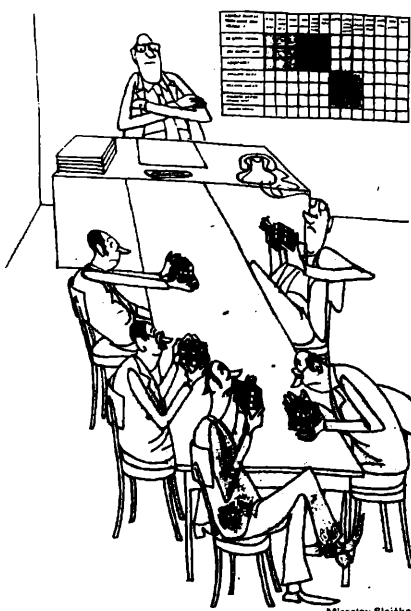
7. $R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 \geq 12r^2$

▲ 12 ▲ Gehe beim Beweis direkt von der Ungleichung von Aufgabe ▲ 11 ▲ aus, und benutze die Beziehung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel dreier Zahlen!

8. $R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C$
 $\geq (d_a + d_b)(d_a + d_c) + (d_a + d_b)(d_b + d_c)$
 $+ (d_a + d_c)(d_b + d_c)$

Wir haben diese Ungleichung bewußt an den Schluß dieses Beitrages gesetzt und sie auch nicht gleich den übrigen als Aufgabe formuliert. Als erster hat A. Oppenheim die Gültigkeit dieser Ungleichung vermutet. Bislang ist aber der Nachweis dafür nicht gelungen, es wurde aber auch noch kein Gegenbeispiel ermittelt, so daß nach wie vor offen ist, ob diese natürlich scheinende Ungleichung tatsächlich Gültigkeit besitzt. Vielleicht ist hier ein interessantes Feld für alle, die sich weitergehend mit Beziehungen zwischen den genannten Dreiecksstücken beschäftigen wollen.

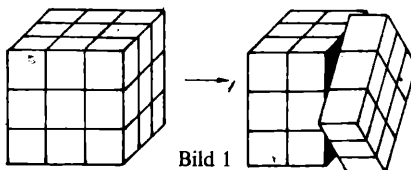
F. Rehm



Ein weiterer Algorithmus zum Ungarischen Würfel

Seit mehreren Jahren beschäftigt das Problem des *Ungarischen Würfels*, vielfach wird er auch als magischer Würfel – magic cube – bezeichnet, immer mehr Menschen auf der ganzen Welt. 1975 entwickelte Ernő Rubik, ein Ungar, diesen Würfel. Bei seinem Unterricht als Lehrer an der Hochschule für Typografie – Planung in Budapest bemerkte er, daß die Schüler nach Verlassen der Oberschule oft nicht räumlich denken können, sondern nur flächenbezogen. Da aber das räumliche Denkvermögen für die Absolventen seiner Sektion sehr wichtig ist, ließ er sich diesen Würfel einfallen, ohne allerdings vorzusehen, daß dieser eine explosionsartige Verbreitung finden und zu einem Exportschlager Ungarns würde.

Worin besteht nun das Problem, das so viele fasziniert? Dieser Würfel besteht aus 26 kleinen Würfeln, wovon auf jeder Seite neun zu sehen sind. Das Besondere ist, daß jede Seite des Würfels, also jeweils neun kleine Würfel, um ihren Mittelpunkt gedreht werden kann.



Der Würfel besitzt sechs Farben: Weiß, Rot, Orange, Blau, Grün und Gelb. Im Ausgangszustand sind die sechs Seiten des Würfels einfarbig. Aber bereits nach 4 bis 5 Drehungen verschiedener Seitenflächen ist die farbliche

Anordnung so durcheinander, daß es schwierig erscheint, diese in den Ausgangszustand zurückzudrehen. Aber gerade darin besteht das Problem. In diesem Artikel möchte ich einen Algorithmus bzw. eine Strategie zum Ordnen des beliebig verdrehten Würfels vorstellen. Zunächst aber noch eine interessante Zahl – die Anzahl aller möglichen verdrehten Zustände des Würfels –, die ich einem Heftchen von David Singmaster „Notes on the „Magic cube““ entnahm.

Der Würfel besitzt 8 Eckwürfel, diese können miteinander permutiert werden, also 8! – Gleichfalls die 12 Kantenwürfel: 12!.

Da aber jede Permutation der Eck- und Kantenwürfel zusammen eine gerade Permutation sein muß, halbiert sich die Anzahl aller Permutationen. Die Kantenwürfel besitzen 2 unterschiedlich gefärbte Flächen, die natürlich verschieden orientiert werden können, also 2^{12} . Da aber jeweils mindestens 2 Kantenwürfel zusammen verdreht werden, ergibt sich wieder ein Faktor $\frac{1}{2}$. Analog erhält man

für die Orientierung der 8 Eckwürfel den Faktor $\frac{3^8}{3}$. Die Mittelsteine jeder Seite können nicht weggedreht werden, ergeben also keine weiteren Zustände, bestimmen aber damit die Farbe ihrer Seite. Insgesamt gibt es also $N = \frac{8!12!}{2} \cdot \frac{3^8}{3} \cdot \frac{2^{12}}{2} = 43252003274489856000 \approx 4,3 \cdot 10^{19}$ verschiedene Zustände des Würfels, von denen ein einziger zu erreichen ist, bei dem alle Seitenflächen des Würfels einfarbig sind. Ein



Computer, der einen Zustand pro Mikrosekunde zählt, benötigt allein für das Zählen aller verschiedenen Zustände über 1,4 Millionen Jahre.

Zur Beschreibung des Algorithmus benötigen wir noch einige Bezeichnungen. Da der Würfel bez. seiner Farben gleich aufgebaut ist, wähle ich eine von den Farben unabhängige Beschreibungsweise. Der Würfel besitzt 6 drehbare Ebenen:

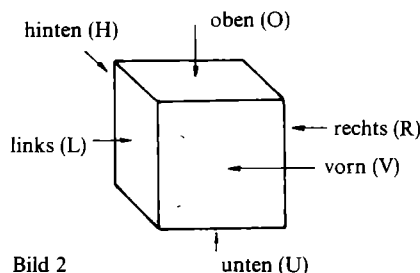


Bild 2

Die Drehrichtung (bei Draufsicht auf die entsprechende Ebene) und Drehlänge wird als Exponent bez. des Uhrzeigersinnes angegeben. V^2 bedeutet 2 Vierteldrehungen der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn, V^{-1} 1 Vierteldrehung entgegen dem Uhrzeigersinn, $V^1 = V$. Mehrere Drehungen werden durch Aneinanderfolge von links nach rechts beschrieben. Ein Eckstein heißt positioniert, falls er sich in der Ecke befindet, die durch seine 3 Farben bestimmt ist. Ein Eckstein heißt orientiert, falls die Farben aller 3 Seiten mit den Farben der zugehörigen Ebenen übereinstimmen. Ein Kantenstein der vorderen Ebene heißt orientiert, falls die Farbe der auf der vorderen Ebene liegenden Seite des Kantenwürfels mit der Farbe der vorderen Ebene übereinstimmt.

Nun kann der Algorithmus angegeben werden.

Schritt 1: Ordne den Würfel so, daß 2 benachbarte Schichten vollständig geordnet sind! Die durch die 3. Schicht bestimmte (noch nicht geordnete) Ebene wird als vordere Ebene angesehen.

Schritt 2: Positionierung der Ecksteine der vorderen Ebene.

Schritt 3: Erzeugung eines Zustandes, bei dem die Ecksteine positioniert sind (farbliche Orientierung noch beliebig) und alle Kantensteine farblich orientiert sind (Reihenfolge der Kantensteine zueinander noch beliebig).

Schritt 4: Vollständige Ordnung des Würfels. Im weiteren werden einige Teilalgorithmen, die zur Realisierung der Schritte 1 bis 4 verwendbar sind, angegeben.

Um 2 geordnete Schichten zu erhalten, wählt man zunächst eine obere Ebene und bringt alle 4 Kantensteine farblich orientiert an ihren richtigen Platz. Danach stellt man die jeweils entsprechenden Eck- und Kantensteine der ausgewählten 2 Schichten zusammen und dreht diese an ihren richtigen Ort.

Zum Beispiel:

Gegeben ist der Zustand in Bild 3. Nun dreht man so, daß der Zustand von Bild 4 erreicht ist. Dann ergibt die Drehfolge $LU^2L^{-1}V^{-1}U^2V$ den Zustand in Bild 5. Durch viermaliges Anwenden des eben Gezeigten erreicht man die 2 geordneten Schichten. Da in den Schritten 2 bis 4 nur zwischenzeitlich erreichte *günstige* Zustände zerstört werden, nach Abschluß aber stets die 2 in Schritt 1 geordneten Schichten geordnet sind, soll im weiteren eine andere Veranschaulichung die Algorithmen illustrieren.

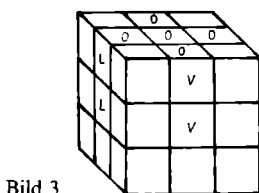


Bild 3

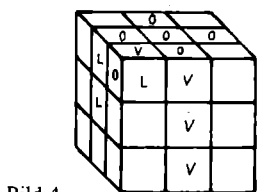


Bild 4

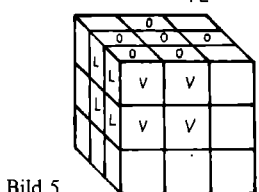


Bild 5

Zur Realisierung von Schritt 2 kann zum Beispiel der Algorithmus IIa verwendet werden (siehe Bild 6).

Bild 6:
Algorithmus IIa

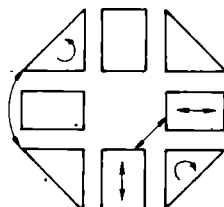


Bild 7:
Algorithmus IIIa

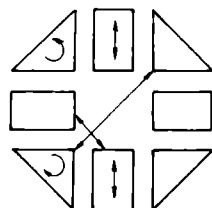
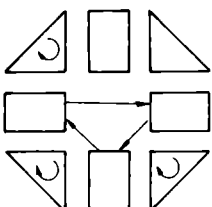


Bild 8:
Algorithmus IVa



Algorithmus IIa:

$$O^{-1}VOV^{-1}O^{-1}VO^2$$

$$LVL^{-1}V^{-1}O^2V^2OLV^2L^{-1}$$

Aber auch Algorithmus IIb ist möglich.

Algorithmus IIb:

$$OV^{-1}O^{-1}VOV^{-1}O^2R^{-1}V^{-1}$$

$$RVO^2V^2O^{-1}R^{-1}V^2R$$

Und es gibt zahlreiche weitere Möglichkeiten. Wesentlich ist hier, daß zwei benachbarte Ecksteine vertauscht werden und damit durch evtl. mehrmaliges Anwenden der Algorithmen II jede beliebige Reihenfolge der Ecksteine erreichbar ist. Zur Realisierung von Schritt 3 sind zum Beispiel die Algorithmen IIIa und IIIb geeignet.

$$\text{Algorithmus IIIa: } O^{-1}R^{-1}V^{-1}RVOV^{-1}$$

$$\text{Algorithmus IIIb: } OLVL^{-1}V^{-1}O^{-1}V$$

Die Orientierung von zwei Kantenwürfeln wird geändert. Es ist aber zu beachten, daß 2 gegenüberliegende Eckwürfel vertauscht werden. Deshalb muß Algorithmus III im allgemeinen zweimal angewendet werden.

Für Schritt 4 verwende ich folgende drei Algorithmen:

$$\text{Algorithmus IVa: } O^{-1}V^2OVO^{-1}VOV^2$$

$$\text{Algorithmus IVb: } V^2OVO^{-1}VOV^2O^{-1}$$

$$\text{Algorithmus IVc: }$$

$$OV^2O^2V^{-1}O^2V^{-1}O^2V^2OV^2$$

Durch Kombination der Algorithmen oder Anwendung auf den gedrehten Würfel erreicht man recht schnell das gewünschte Ziel. Vielfach können die Algorithmen auch in entgegengesetzter Richtung verwendet werden. Zum Beispiel ergibt sich ein weiterer Algorithmus als entgegengesetzter zu IVa.

$$\text{Algorithmus IVd: }$$

$$V^2O^{-1}V^{-1}OV^{-1}O^{-1}V^2O$$

Es soll aber noch einmal betont werden, daß dies nur einige, längst nicht alle Möglichkeiten sind. Der Leser sollte sich weitere Algorithmen zu den Schritten 1 bis 4 überlegen. Auch das vorgeschlagene Konzept ist nicht das einzig Mögliche. Ich wünsche euch viel Erfolg und Spaß bei der Beschäftigung mit dem *Ungarischen Würfel*!

G. Scheithauer

Ich habe einen Mann gekannt, der die seltsame Grille hatte, nach Tisch beim Obst aus Äpfeln regelmäßige stereometrische Körper zu schneiden, wobei er immer den Abfall aufaß.

Meistens endigte sich die Auflösung des Problems mit einer gänzlichen Aufzehrung des Apfels.

Georg Christoph Lichtenberg

Mathematik in Landwirtschaft und Medizin



Wie kommt es, daß im Schulunterricht im Fach Biologie keine Mathematik benötigt wird, die biologischen Wissenschaften aber heute ohne Mathematik nicht mehr auskommen?

Ein wichtiger Grund besteht darin, daß die mathematischen Teilgebiete, die in den biologischen Wissenschaften am stärksten eingesetzt werden, im Mathematikunterricht der erweiterten Oberschulen nicht behandelt werden. Es handelt sich um die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und um die *Mathematische Statistik*.

Diese Teilgebiete ermöglichen die mathematische Beschreibung von Erscheinungen und Zusammenhängen, die in starkem Maße auch vom Zufall abhängen. Zufällige Erscheinungen sind aber für biologische Wissenschaften charakteristisch. Vom Zufall abhängig sind z.B. die Höhe des Ertrages an Wintergerste in einer LPG im Jahre 1982, die mittlere Anzahl geborener Ferkel in einer Sauenherde, die Anzahl der Grippeerkrankungen im Dezember 1982 in einer bestimmten Stadt oder der Prozentsatz des Waldbestandes eines Bezirkes, der von Borkenkäfern befallen ist. Zufällige Erscheinungen in der Biologie sind mathematisch anders zu beschreiben als viele Vorgänge in der Physik, die mehr oder weniger exakt vorhersagbar sind.

Beispiel 1

Welche Abhängigkeit besteht zwischen Brustumfang y und Körperhöhe x bei Milchrindern?

Tabelle 1

Meßwerte von Brustumfang (y_i) und Körperhöhe (Widerristhöhe) (x_i) von 12 weiblichen Kälbern einer Milchrindrasse

Tier Nr. i	Körperhöhe x_i	Brustumfang y_i
1	111	150
2	114	156
3	112	145
4	119	157
5	114	145
6	115	139
7	121	170
8	120	160
9	108	149
10	124	154
11	118	156
12	121	155

Tabelle 1 enthält von 12 Tieren die Meßwerte $(x_1, y_1), \dots, (x_{12}, y_{12})$, dieser beiden Merkmale. Wir sagen kurz, das Tier mit der Nummer i , wobei i eine Zahl zwischen 1 und 12 ist, habe die Meßwerte (x_i, y_i) .

In Bild 1 sind die 12 Wertepaare (x_i, y_i) abgetragen. Man hatte vor den Messungen si-

cher schon angenommen, daß größere Tiere auch einen größeren Brustumfang haben. Dieser Zusammenhang besteht sicher auch, aber die Meßwerte in Tabelle 1 lassen sich nicht durch eine eindeutige Funktionsgleichung $y = f(x)$ verknüpfen. Z. B. haben Tiere mit gleichem Brustumfang (145 bei den Tieren 3 und 5) nicht die gleiche Körperhöhe und Tiere mit gleicher Körperhöhe (121 bei den Tieren 7 und 12) doch erheblich voneinander abweichende Brustumfänge. Damit ist der Brustumfang keine Funktion der Körperhöhe bzw. umgekehrt, wenn man die Definition einer Funktion entsprechend dem Mathematiklehrbuch der Klasse 9 verwendet, denn dem Wert 114 wird nicht *eindeutig* ein Element aus der Menge der y -Werte zugeordnet.

Als Modell für die Beschreibung des Zusammenhanges kommt also sicher auch keine Funktionsgleichung $y = f(x)$ in Frage. Vielmehr wird der Zusammenhang durch ein sogenanntes Regressionsmodell der Form

$$(1) \quad y(x_i) = \alpha + \beta x_i + e_i = m + nx_i + e_i \quad (i = 1, \dots, 12)$$

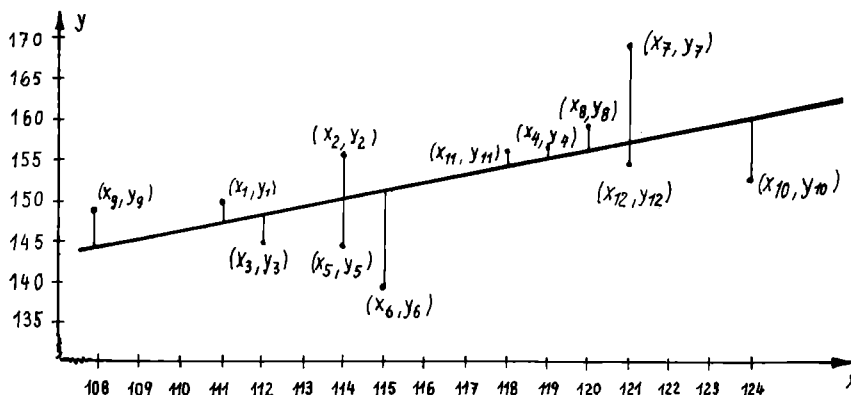
beschrieben. In (1) sind (x_i, y_i) die Meßwertpaare, $\alpha = m$ und $\beta = n$ noch zu bestimmende Konstanten einer Geradengleichungen und e_i zufällige Abweichungen von einem mittleren oder durchschnittlichen Zusammenhang, der durch $\eta_i = \alpha + \beta x_i$ charakterisiert ist. An die Stelle funktionaler Abhängigkeiten in der Physik treten also in der Biologie sogenannte Regressionszusammenhänge. Die Werte α und β sind unbekannt, aus den Meßwerten berechnet man sogenannte Schätzwerte a bzw. b für α bzw. β nach folgender (von Gauß stammenden) Methode der kleinsten Quadrate: Die Größen a und b werden so berechnet, daß die Funktion $y = a + bx$ die Summe der Abweichungsquadrate

$$(2) \quad S = (y_1 - a - bx_1)^2 + \dots + (y_{12} - a - bx_{12})^2$$

so klein wie nur möglich macht.

Bild 1

Wertepaare (x_i, y_i) für 12 Tiere und der Graph der geschätzten Regressionsgerade $\hat{y}(x) = 37,915 + 0,98856x$



In Bild 1 sind der Graph von $y = a + bx$ und die Abweichungen e_i der Beobachtungswerte y_i an der Stelle x_i von dem Punkt auf dem Graphen von $a + bx$ über dem Punkt x_i eingezeichnet.

Jedes andere Paar (α, β) führt zu einer größeren Summe von Abweichungsquadraten.

Die Koeffizienten a und b , die (2) am kleinsten werden lassen, erhält man aus

$$(3) \quad b = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_{12} y_{12} - \frac{1}{12} (x_1 + \dots + x_{12})(y_1 + \dots + y_{12})}{x_1^2 + \dots + x_{12}^2 - \frac{1}{12} (x_1 + \dots + x_{12})^2} \text{ und}$$

$$(4) \quad a = \frac{1}{12} (y_1 + \dots + y_{12}) - b \frac{1}{12} (x_1 + \dots + x_{12}).$$

Speziell für unsere 12 Wertepaare in Tabelle 1 erhält man

$$b = \frac{111 \cdot 150 + \dots + 121 \cdot 155 - \frac{1}{12} (111 + \dots + 121)(150 + \dots + 155)}{111^2 + \dots + 121^2 - \frac{1}{12} (111 + \dots + 121)^2} = 0,98856 \text{ und}$$

$$a = \frac{1}{12} 1836 - 0,98856 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1397 = 37,915$$

und damit für die als geschätzte Regressionsgerade bezeichnete Gerade die Gleichung

$$(5) \quad y = 37,915 + 0,98856x,$$

die den mittleren Zusammenhang zwischen x und y beschreibt. Wie eng der Zusammenhang ist, kann mit dem Korrelationskoeffizienten r beurteilt werden, der Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen kann und für unser Beispiel den Wert $r=0,586$ hat. Je näher r an $+1$ oder -1 liegt, um so näher liegen die den Wertepaaren entsprechenden Punkte an der geschätzten Regressionsgeraden und um so mehr entspricht die Regressionsbeziehung einer Funktion. Man kann den Grad eines Zusammenhangs auch für Merkmale berechnen, die nicht zu Meßwerten, sondern zu einer Zuordnung zu Kategorien führen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2

Zusammenhang zwischen Zahnsteinbildung und Rauchen

Es soll geprüft werden, ob zwischen der Art der Zahnsteinbildung und der Intensität des Rauchens ein Zusammenhang besteht. Von $N=5690$ Patienten liegen Angaben über beide Merkmale mit den Kategorien kein Zahnstein, Zahnstein Typ I (supragingival) und Zahnstein Typ II (subgingival) beim Merkmal Zahnsteinbildung und Nichtraucher, schwacher bzw. starker Raucher beim Merkmal Rauchintensität vor. Die Anzahl der Patienten in den neun möglichen Kombinationen enthält Tabelle 2.

Tabelle 2:
Verteilung von 5690 Patienten auf Kategorien bei Zahnsteinbildung und Intensität des Rauchens

Intensität des Rauchens	kein Zahnstein	Zahnstein Typ I	Zahnstein Typ II	Summe
Nichtraucher	284	236	48	568
schwacher Raucher	606	983	209	1798
starker Raucher	1028	1871	425	3324
Summe	1918	3090	682	5690

Würde keine Abhängigkeit zwischen beiden Merkmalen bestehen, müßten nach einfachen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in jeder der neun Klassen etwa so viele Patienten auftreten, wie das Produkt von Zeilen- und Spaltenrandsumme der jeweiligen Klasse, dividiert durch die Gesamtzahl an Patienten (5690), ausmacht. Z. B. in der Klasse („Nichtraucher, kein Zahnstein“) wären danach $191,5 = \frac{1}{5690} \cdot 568 \cdot 1918$ (also rund 192) Patienten zu erwarten.

Die bei vollständiger Unabhängigkeit theoretisch zu erwartenden Werte in den neun Klassen enthält Tabelle 3.

Tabelle 3:

Bei Unabhängigkeit zwischen Intensität des Rauchens und Zahnsteinbildung zu erwartende theoretische Verteilung von 5690 Patienten

Intensität des Rauchens	kein Zahnstein	Zahnstein Typ I	Zahnstein Typ II
Nichtraucher	191,46	308,46	68,08
schwache Raucher	606,07	976,42	215,51
starke Raucher	1120,46	1805,12	398,41

Ein Maß für die Abhängigkeit müßte eine Funktion der Differenzen zwischen diesen theoretischen und den tatsächlichen beobachteten Werten sein. Wir bezeichnen mit (i, j) die Klasse, die der i -ten Kategorie ($i=1, 2, 3$) bei der Intensität des Rauchens und der j -ten Kategorie ($j=1, 2, 3$) bei der Zahnsteinbildung entspricht. n_{ij} sind die beobachteten Werte der Tabelle 2 (z. B. ist $n_{23}=209$) und t_{ij} die entsprechenden theoretischen Werte der Tabelle 3. Dann ist durch den sogenannten Kontingenzkoeffizienten

$$(6) \quad A = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 5690} \left[\frac{(284 - 191,46)^2}{191,46} + \dots + \frac{(425 - 398,41)^2}{398,41} \right]}$$

ein Maß für den Zusammenhang gegeben. A nimmt allgemeine Werte zwischen Null und Eins an und ist bei fehlendem Zusammenhang (Unabhängigkeit) wegen $n_{ij}=t_{ij}$ gleich Null.

In unserem Fall ist $A=0,0837$, und das bedeutet einen geringen Zusammenhang zwischen beiden Merkmalen.

Das sind einige ganz einfache Beispiele. Oft sind die Probleme komplizierter. Beim menschlichen, tierischen und pflanzlichen Wachstum als Funktion des Alters lassen sich nicht (wie in Beispiel 1) Geraden durch die beobachteten Punkte legen, sondern oft Graphen von Funktionsgleichungen der Form

$$(7) \quad \eta_i = \alpha - \beta e^{-\gamma x_i} + e_i \quad (i=1, \dots, n),$$

$$(e=2,71828 \dots),$$

die mit wachsendem Alter gegen einen maximalen Wert $y=\alpha$ streben. Die Konstante γ mißt die Wachstumsgeschwindigkeit, und $\alpha=\beta$ gibt den mittleren Wert beim Alter Null an.

Bild 2 enthält den Graphen der Funktion $\eta = 100 - 50e^{-0,05x}$, um den z. B. Meßwerte y_i des Körperwachstums beim Rind streuen ($y_i = \eta_i + e_i$). Solche Beziehungen werden u. a. auch in der forstwirtschaftlichen Ertragskunde verwendet.

In der medizinischen Diagnostik steht man oft vor der Aufgabe, anhand einer Vielzahl von Meßwerten (wie den Ergebnissen von Urin- und Blutanalysen, EKG-Messungen, Blutdruck, Pulsfrequenz und bestimmten Krankheitssymptomen) einen Patienten einer Krankheit zuzuordnen oder ihn als gesund zu diagnostizieren. Diese Zuordnung muß mit hoher Wahrscheinlichkeit richtig sein, damit die zweckmäßigste Behandlung angewendet wird. Die Zuordnung wird heute teilweise schon von Diagnosecomputern vorgenommen, in deren Programmen die Erfahrungen der besten Spezialisten ihren Niederschlag finden. Dabei kommen komplizierte mathematische Verfahren zum Einsatz.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie stark alle biologischen Wissenschaften mit der Mathematik verbunden sind. Andererseits erkennt man das auch an der Vielzahl der allein in der DDR erschienenen

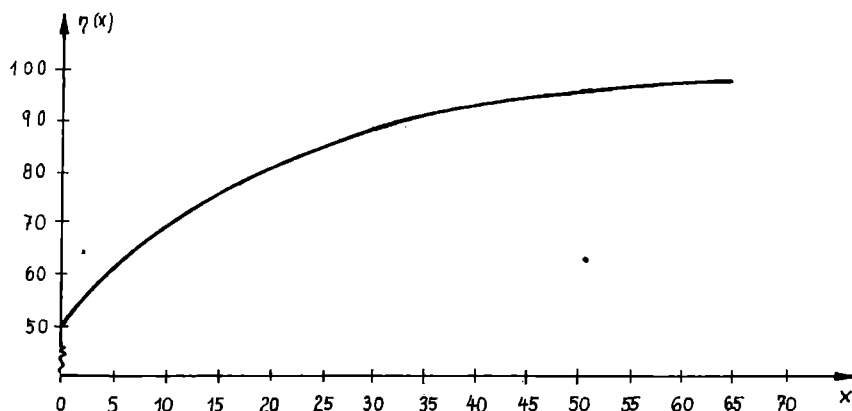


Bild 2

Graph der Funktion $\eta(x) = 100 - 50e^{-0.05x}$.

Bücher über biomathematische Methoden (es sind über 30). Wesentlich zur Vereinheitlichung der Symbolik und Begriffsbildung auf dem Gebiet der Biomathematik/Biometrie hat das erstmals 1968 im VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag erschienene *Biometrische Wörterbuch*, dessen dritte Auflage in Vorbereitung ist, beigetragen. Es enthält Erläuterungen von etwa 2500 biometrischen Begriffen und Übersetzungen in sieben Sprachen.

Aus der dritten Auflage dieses Wörterbuches folgt die Erläuterung des Begriffes *Biometrie*. „Biometrie heißt die Anwendung der Methoden der Mathematik, insbesondere der Mathematischen Statistik, in den biologischen und ihnen verwandten Wissenschaften (Biologie, Landwirtschaftswissenschaften, Medizin, Pharmakologie usw.). Da die Variabilität der Lebewesen und die durch sie entstehende Formenmannigfaltigkeit nur selten eine Beschreibung biologischer Zusammenhänge durch streng funktionale Beziehungen zulassen, sind die untersuchten Merkmale bzw. Eigenschaften fast immer zufallsbedingt. Zu ihrer Beschreibung müssen deshalb Zufallsvariable herangezogen werden, und es ist die Untersuchung ihrer Gesetzmäßigkeiten notwendig. Viele Methoden der mathematischen Statistik sind auf Grund biologischer Fragestellungen entwickelt worden.

In der Biometrie werden die allgemeinen mathematisch-statistischen Methoden im Zusammenhang mit der biologischen Fragestellung betrachtet. Die Biometrie beginnt bereits bei der Formulierung der Fragestellung, umfaßt die Gewinnung und Auswertung der Daten und reicht bis zur Interpretation der Ergebnisse. Da mit Hilfe der Biometrie Antwort auf biologische Fragen gegeben werden soll, müssen das biologische Element und die mathematisch-statistischen Methoden eine Einheit bilden. In den biologischen und ihnen verwandten Forschungsgebieten hat die Biometrie eine wachsende Bedeutung gewonnen.

Durch die Biometrie wird es erst möglich, rationell und mit bekannten Fehlerwahrscheinlichkeiten bzw. Risiken Schlußfolgerungen aus biologischen Daten zu ziehen. Mitunter wird Biometrie eingeengt als Synonym für Biostatistik verwendet, während die nichtstatistischen Verfahren der Biologie und die Biometrie gemeinsam als Biomathematik bezeichnet werden. Der Sprachgebrauch ist in dieser Hinsicht nicht einheitlich. Zur Biometrie gehören die Teilgebiete Biologische Prüfung – Quantitative Genetik – Populationsgenetik – Statistische Genetik – Genetische Algebra – Populationsmathematik (darunter Bevölkerungsmathematik) – Versicherungsmathematik – Medizinische Statistik – Feldversuchswesen – Analyse von Wachstumskurven.“

Während Physik und Chemie in ihrer Anwendung auf biologische Disziplinen bereits unter der Bezeichnung Biophysik bzw. Biochemie nicht nur in der Forschung, sondern auch als Studienfächer eingeführt sind, war das bislang bei der Biomathematik als Studienfach nicht der Fall. Das wird sich ändern, da ab Herbst 1982 an der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock für jährlich fünf Studenten die Möglichkeit besteht, die Spezialisierungsrichtung Biometrie mit einer Nebenfachausbildung in Biologie (Genetik, Tier- und Pflanzenphysiologie, Biochemie, Anatomie und Physiologie des Menschen) und Spezialvorlesungen in Mathematischer Statistik zu wählen. Absolventen dieser Spezialisierungsrichtung werden dringend in Medizin und Landwirtschaft benötigt und haben dort gute Entwicklungsmöglichkeiten.

D. Rasch

Aufgaben aus Freundesland

Ausgewählte Aufgaben aus den Rayon-Mathematik-Olympiaden der UdSSR

▲ 1 ▲ (4. Klasse, Leningrad)

Gibt es eine ganze Zahl, so daß das Produkt ihrer Ziffern gleich 2340 ist?

▲ 2 ▲ (5. Klasse, Leningrad)

Gegeben ist eine Menge von fünf Zahlen, von denen jede gleich +1 oder -1 ist. Wir führen folgende Operation aus: Wir ändern gleichzeitig das Vorzeichen von genau vier Zahlen. Ist es möglich, mit Hilfe mehrerer solcher Operationen von der Menge $\{1, 1, 1, -1, -1\}$ zur Menge $\{-1, -1, -1, -1, 1\}$ zu kommen?

▲ 3 ▲ (6. Klasse, Krim)

Zeige, daß in einem beliebigen 7-Eck zwei Diagonalen existieren, die einen Winkel kleiner als 13° einschließen!

▲ 4 ▲ (7. Klasse, Swerdlowsk)

Zeige, daß die Ungleichung $\overline{ДБА} \times \overline{ШЕКТБ} < \overline{ДБАДЦАТБ}$ gilt, wobei jeder Buchstabe eine Ziffer bedeutet und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen!

▲ 5 ▲ (8. Klasse, Krim)

Im Stadium der Tausendfüßler und der dreiköpfigen Drachen gab es zusammen 26 Köpfe und 298 Beine. Jeder Tausendfüßler hat 40 Beine und einen Kopf. Wieviel Beine hat ein dreiköpfiger Drache?

▲ 6 ▲ (9. Klasse, Mogilew, Belorußland)

Von den positiven ganzen Zahlen a und b sei bekannt, daß von den folgenden vier Aussagen drei wahr und eine falsch sind.

1) $a+1$ ist durch b teilbar.

2) a ist gleich $2b+5$.

3) $a+b$ ist durch 3 teilbar.

4) $a+7b$ ist eine Primzahl.

Bestimmen Sie alle möglichen Paare a, b !

▲ 7 ▲ (Klasse 10, Moskau)

Einem Künstler gab man zwei kongruente kreisförmige Blätter Papier und bat ihn, darauf zwei kongruente einäugige Drachen zu zeichnen. Die gezeichneten Drachen unterschieden sich auf den Zeichnungen in ihrer Lage wie folgt: Bei einem befand sich das Auge des Drachens im Mittelpunkt des Kreises, beim anderen nicht. Zeigen Sie, daß man den zweiten Kreis so in zwei Teile zerschneiden kann, daß beide Teile zusammengesetzt wieder die Zeichnung des Drachens ergeben und sich das Auge jetzt im Mittelpunkt befindet!

A. P. Sawin/W. Moldenhauer

Ein viertel Jahrhundert Mathematiklehrausbildung in Erfurt

Im September 1957 begann nach der Gründung des Lehrstuhls Mathematik am damaligen *Pädagogischen Institut Erfurt* die Ausbildung von Fachlehrern für Mathematik und Kunsterziehung. Seinerzeit nahmen 47 Abiturienten unter Anleitung von drei Mitarbeitern im Bereich Mathematik das Studium auf.

In den folgenden Jahren wurde die Mathematiklehrausbildung auch mit anderen Fächern gekoppelt, z. B. mit Grundlagen der Produktion, Werken oder Physik. Es erfolgten zunächst noch wesentliche Kapazitätserweiterungen, später jedoch auch wieder eine Einschränkung der Anzahl der Fachkombinationen.

Seit 1969, dem Gründungsjahr der Sektion Mathematik/Physik an der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* Erfurt/Mühlhausen, wird die Ausbildung von Mathematiklehrern nur noch gekoppelt mit Physik oder Kunsterziehung durchgeführt. Zur Zeit werden jährlich etwa 180 Studenten für das Diplomlehrerstudium mit dem Fach Mathematik immatrikuliert. Ungefähr ein Drittel davon wird nach Abschluß der 10. Klasse und erfolgreichem Absolvieren eines einjährigen Vorkurses in das Studium übernommen.

Insgesamt haben bisher etwa 3000 in Erfurt ausgebildete Mathematiklehrer ihre Arbeit in Schulen aller Bezirke der DDR aufgenommen. Im Bereich Mathematik der Sektion Mathematik/Physik arbeiten fünf Professoren, zwei Dozenten und mehr als 30 wissenschaftliche Mitarbeiter. Im September 1982 wird an unserer Sektion mit der 5jährigen Diplomlehrausbildung begonnen, in der nach wie vor Mathematik mit Physik oder Kunsterziehung kombiniert ist. Das Studium wird zum Teil anders als bisher organisiert, z. B. steht den Studenten dann zwischen den Semestern mehr Zeit für das Selbststudium zur Verfügung.

Im Grundkurs Mathematik erfolgt die Ausbildung in den Teilgebieten Algebra, Analysis, Arithmetik, Geometrie und Grundlagen der Mathematik. Da außerdem mehrere Praktika zum Lösen von Aufgaben stattfinden, wird eine gute Grundlage für das Erteilen eines wissenschaftlichen Unterrichts gelegt. In den höheren Studienjahren erfolgt

eine Ergänzung durch Darstellende Geometrie, Geschichte der Mathematik, Numerische Mathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik und eine wahlweise obligatorische Ausbildung in einer speziellen Disziplin, aus der das Thema der Diplomarbeit gestellt wird. Es wird so gewählt, daß der Student die Möglichkeit hat, mit seiner Arbeit einen Beitrag zur mathematischen Forschung zu leisten.



Oft wird von Interessenten die Frage nach der Vorbereitung auf das Diplomlehrerstudium mit dem Fach Mathematik gestellt. Eine gute Voraussetzung dazu ist die Fähigkeit zur selbständigen Bearbeitung angemessener Aufgaben, wie sie etwa bei den mathematischen Olympiaden oder in der Zeitschrift *alpha* gestellt werden, in Verbindung mit der Beherrschung des im Schulunterricht vermittelten Wissens. Ebenfalls nützlich ist die Beschäftigung mit Problemen, die in den in ansehnlicher Anzahl vorhandenen Bänden der Mathematischen Schülerbücherei (MSB) vorgestellt werden.

G. Sommerfeld

Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. Müller-Pfeiffer

Leiter des Wissenschaftsbereichs Analysis
der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor
Neubauer“ Erfurt/Mühlhausen

▲ 2236 ▲ Auf einem Gummiband $[A, B]$, das zum Zeitpunkt $t=0$ die Länge von 100 cm haben soll, bewege sich ein Beobachter (sagen wir ein Käfer) von A aus in Richtung B (siehe Bild).



Das Ende B des bei A festgehaltenen Gummibandes wird mit der Geschwindigkeit von $V \text{ cm sec}^{-1}$ in Richtung von A nach B weggezogen (V ist die Geschwindigkeit von B von dem festen Punkt A aus gemessen). Der Käfer laufe auf dem Weg von A in Richtung B mit der konstanten Geschwindigkeit $v \text{ cm sec}^{-1}$. (Das heißt: Geschwindigkeitsmessungen des Käfers für seine Bewegung ergeben zu verschiedenen Zeiten immer den festen

$$\text{Wert } v = \frac{ds}{dt}.$$

Der Käfer trägt eine Uhr und einen Maßstab bei sich, mit dessen Hilfe er Entfernungen s in seiner Welt $[A, B]$ messen kann. So ergibt auch die Geschwindigkeitsmessung des Käfers für den Punkt B den Wert V , wenn sich der Käfer bei dieser Messung im Punkt A aufhält.) Wird der Käfer, der zum Zeitpunkt $t=0$ im Punkt A startet, den Punkt B jemals erreichen, wenn $0 < v < V$ vorausgesetzt wird? (Zahlenbeispiel:

$$v = 1 \text{ cm sec}^{-1}, V = 50 \text{ cm sec}^{-1})$$

Kurzbiographie

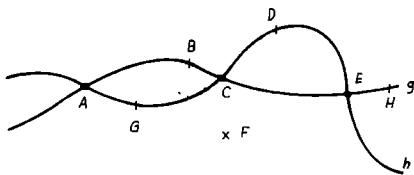
Prof. Dr. Erich Müller-Pfeiffer, geboren 1930 in Sonneberg (Thür.), 1949 Abitur in Steinach (Thür.), 1949 bis 1955 Mathematikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena, dort auch Diplom, Promotion (Differentialgeometrie) und Habilitation (Partielle Differentialgleichungen), seit 1969 ordentlicher Professor und Leiter des Bereichs Analysis an der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ in Erfurt, Arbeitsgebiet Spektraltheorie von Differentialoperatoren, 45 wissenschaftliche Veröffentlichungen, darunter eine Monographie (Teubner-Text).





Bilderbogen Geometrie

▲1▲ In der Zeichnung befinden sich die Linien g und h sowie die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H .

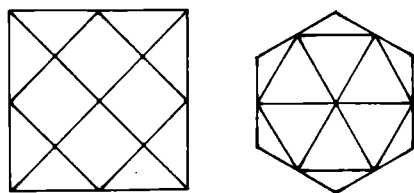


Gib die Menge aller Punkte an, die

- auf g liegen,
- auf h liegen,
- auf g und h liegen und
- weder auf g noch auf h liegen!

▲2▲ Wieviel Flächen siehst du?

- Wieviel Quadrate und Dreiecke findest du in dieser Figur?



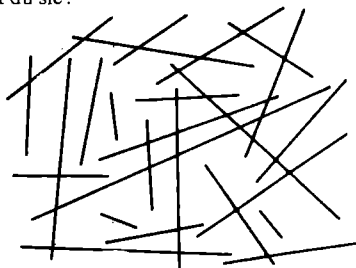
- Gib die Anzahl der Dreiecke, Trapeze, Parallelogramme und Sechsecke in dieser Figur an!

Wieviel Vierecke siehst du noch?

▲3▲ Zeichne drei Geraden so, daß

- 0 Schnittpunkte entstehen,
- 1 Schnittpunkt entsteht,
- 2 Schnittpunkte entstehen und
- 3 Schnittpunkte entstehen!

▲4▲ Hier sind nur zwei Geraden parallel. Findest du sie?

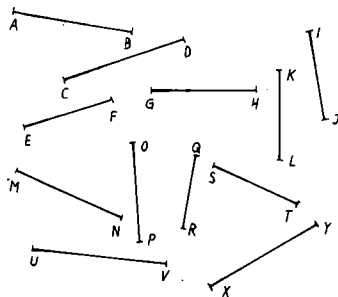


▲5▲ Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M !

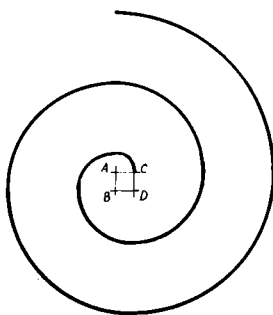
Gib auf dem Kreis zwei Punkte A und B so an, daß der $\angle AMB = 135^\circ$ beträgt! Zeichne auf dem Kreis den Punkt C , so daß $\angle AMC = 60^\circ$ ist!

Berechne $\angle CMB$ und die erhabenen Winkel $\angle AMB$, $\angle AMC$ und $\angle CMB$! Miß mit dem Winkelmesser nach!

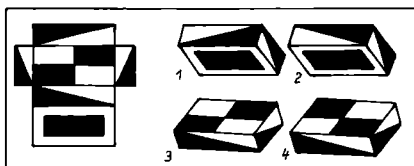
▲6▲ Miß die folgenden Strecken! Welche ist die längste, welche ist die kürzeste? Welche Strecken sind gleich lang?



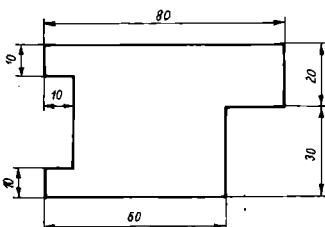
▲7▲ Erkläre die Konstruktion der Kurve in der gezeichneten Figur!



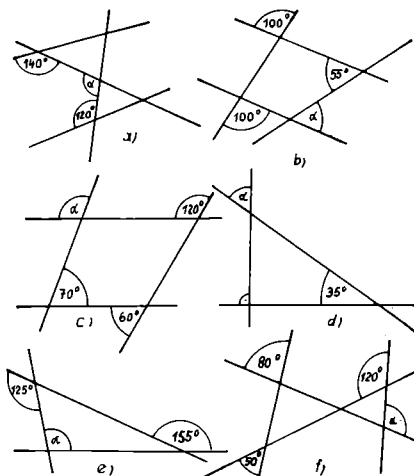
▲8▲ Übe dein Vorstellungsvermögen! Welcher Quader gehört zu dem abgebildeten Netz?



▲9▲ Berechne den Inhalt des abgebildeten Flächenstückes!

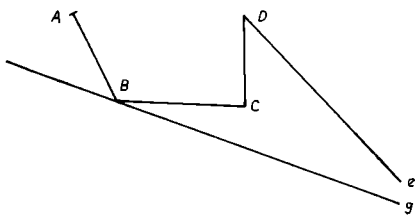


▲10▲ Bestimme jeweils die Größe des Winkels α !

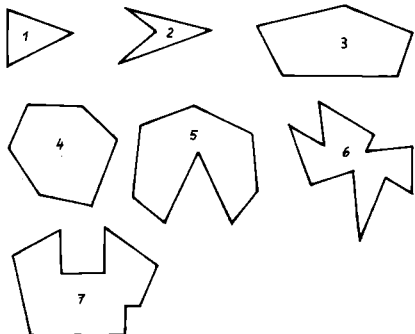


▲11▲ Zeichne die Punkte A, B, C, D und E so, daß jeweils 2 Punkte auf einer Geraden liegen! Wieviel Geraden erhältst du?

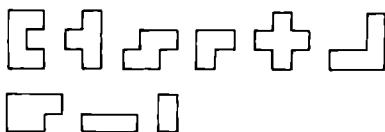
▲12▲ Spiegele diesen Streckenzug an der Geraden g !



▲13▲ Benenne die folgenden Vielecke!



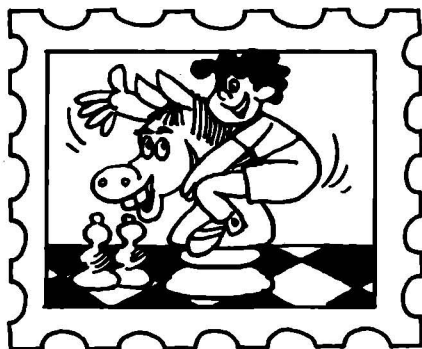
▲14▲ Übertrage die abgebildeten 9 Teile in einem vergrößerten Maßstab auf ein Stück Pappe, schneide sie aus, und lege sie so zusammen, daß ein Quadrat entsteht!



▲15▲ Es ist ein Dreieck zu konstruieren, wenn die Längen der Seite a , der Seitenhalbierenden s_a und der Höhe h_c gegeben sind. Unter welchen Bedingungen für die gegebenen Stücke ist die Konstruktion durchführbar?

▲16▲ In ein gegebenes rechtwinkliges Dreieck ist ein Quadrat so zu zeichnen, daß sie den rechten Winkel des Dreiecks gemeinsam haben und die drei anderen Ecken des Quadrates auf die Seiten des Dreiecks fallen.

H. Bögander



Springerwege übers ganze Brett

Springerzüge sind im Schachspiel am schwersten zu berechnen; deshalb gibt es selbst in Meisterpartien oft Überraschungen durch diese Figur. Die Gangart des Springers: vom Standfeld aus kann der Springer in jede beliebige Richtung springen, und zwar zwei Felder nach vorn und ein Feld zur Seite, oder anders ausgedrückt über ein Feld hinweg schräg auf ein andersfarbiges. Infolge dieser eigenartigen Gangart kann der Springer als einzige Figur im Schachspiel über alle anders- und gleichfarbigen Steine, die seinem Standfeld unmittelbar gerade oder schräg benachbart stehen, hinwegspringen. So könnte in der Diagrammstellung z.B. der schwarze Springer Sa4 in drei Zügen zum Feld g1 gelangen, Sa4-c3-e2-g1.

Nach einer Schachpartie stellt Sven auf dem leeren Schachbrett einen weißen Springer auf d4 (Siehe auch Diagramm!) und sagt zu seiner Partnerin Heike: „Ziehe mit dem Springer von d4 aus auf alle Felder des Brettes, ohne dabei ein Feld zweimal „besucht“ zu haben, so könntest du anhand der Nummerierung der Züge auf h1 mein Alter (18) und auf a8 das Alter meines Vaters (50) erfahren. Als zusätzliche Bedingung gilt, daß der Springer nach seiner vorgeschriebenen Wanderoute auf d4 zurückkehrt.“

Heike überlegte nicht lange und zeigte ihm den Weg des Springers. Anschließend stellte auch sie eine Aufgabe: „Ziehe mit dem schwarzen Springer von a4 aus ebenfalls auf

alle Felder des Schachbrettes, ohne dabei ein Feld zweimal berührt zu haben, unter der Bedingung, daß anhand der Nummern der Zugreihenfolge auf der vierten Reihe die Quadratzahlen zusammenkommen! Also a4-1, b4-4, c4-9, d4-16, e4-25, f4-36, g4-49 und h4-64!“

Wie müssen die beiden Springer jeweils ziehen um die gestellten Bedingungen zu erfüllen?

Anmerkung: Das jeweilige Standfeld der Springer (a4 und d4) zählt als 1. Zug!

Lösung zu:

Das Diagramm 1 zeigt den Lösungsweg (Zugreihenfolge), den der weiße Springer von d4 aus zurücklegen muß, um die geforderten Bedingungen zu erfüllen. Addiert man dabei die Nummern der Reihenfolge der Springerzüge sowohl in den Vertikalen (Linien) als auch in den Horizontalen (Reihen), so ergibt sich als Summe der Zahlen jeweils 260. Auch wenn man den Springer von einem anderen Ausgangsfeld aus über alle Felder des Brettes führt, bleibt diese Gesetzmäßigkeit, die der russische Mathematiker und Schachmeister Karl Janisch (1813 bis 1872) bewies, erhalten.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	50	11	24	63	14	37	26	35
7	23	62	51	12	25	34	15	38
6	10	49	64	21	40	13	36	27
5	61	22	9	52	33	28	39	16
4	48	7	60	1	20	41	54	29
3	59	4	45	8	53	32	17	42
2	6	47	2	57	44	19	30	55
1	3	58	5	46	31	56	43	18
	a	b	c	d	e	f	g	h

Das Diagramm 2 zeigt den geforderten Lösungsweg des schwarzen Springers. Imponierend, was Springer so können – was im Schach möglich ist!

H. Rüdiger

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	21	30	19	54	33	56	39	52
7	18	27	22	31	38	53	34	57
6	23	20	29	26	55	32	51	40
5	28	17	24	37	50	41	58	35
4	1	4	9	16	25	36	49	64
3	10	7	12	3	42	61	46	59
2	13	2	5	8	15	44	63	48
1	6	11	14	43	62	47	60	45
	a	b	c	d	e	f	g	h

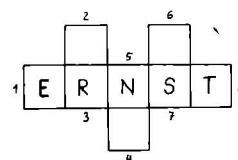
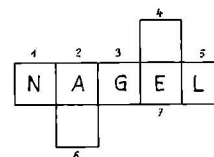
Spielwettbewerb „Schiebung!“

Hier wird ein Spiel von unserem Autor Radunski aus Moskau vorgestellt. Das Problem kennt ihr sicher schon von den sogenannten *Rangieraufgaben*.

Mit möglichst wenig Verschiebungen, wobei nur die vorgegebenen Felder benutzt werden dürfen, soll das eine Wort in das andere überführt werden. Es geht am besten, wenn man sich die Buchstaben auf kleine Pappkärtchen schreibt und das Netz so aufzeichnet, daß die Felder etwas größer als die Pappkärtchen sind. Dann kann man die Verschiebungen wiederholen und sogar kleine Wettbewerbe austragen. Sieger ist derjenige, der es mit den wenigsten Zügen geschafft hat. Als ein Zug gilt die Verschiebung eines Buchstaben um ein Feld. Wenn der Buchstabe also über drei Felder geschoben wird, dann sind das drei Züge!

Beachtet, daß die Netze für die verschiedenen Wörter unterschiedlich sind! Das müßt ihr bedenken, wenn ihr neue Begriffe findet und die Netze dafür entwerft! Es dürfen nicht zu viel *Springfelder* sein, sonst wird es zu leicht, aber auch nicht zu wenig, sonst ist das Problem nicht lösbar. A 3 bedeutet z.B. den Buchstaben A auf Feld 3 schieben.

Für NAGEL → ANGEL und ERNST → STERN haben wir Lösungsvorschläge in diesem Heft veröffentlicht.



Wer weniger als die angegebene Anzahl von Zügen benötigt, soll die Lösung an unseren *alpha*-Mitarbeiter Oberlehrer Helmut Pätzold, 2060 Waren, Mattei 62 schicken. Die besten Lösungen werden später einmal veröffentlicht.

Zum Spiel „Vom NEBEL zum LEBEN“ sollt ihr selbst Netz und Lösung finden.

Wenn gleiche Buchstaben vorkommen, dann müssen sie gekennzeichnet werden (E₁, E₂ usw.).

Studentenwettstreit an der Pädagogischen Hochschule „Karl Friedrich Wilhelm Wander“ Dresden

Im „Wissenschaftlichen Wettstreit der Studenten und jungen Wissenschaftler“ ist ein Bewährungsfeld für jeden Studenten geschaffen worden, um Talente und Begabungen frühzeitig zu erkennen und allseitig zu fördern. Dabei sollen die Studenten ihre im Studium erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten schöpferisch bei der Lösung von Aufgaben, die die Praxis stellt, anwenden.

Aufgaben aus Lehre und Forschung werden den Studenten von den einzelnen Sektionen zur Bearbeitung angeboten (ausgeschrieben), z. T. sind es solche Aufträge, die die Studenten an die Forschungsaufgaben der Forschungskollektive heranführen, z. T. sind es aber auch wichtige Teile in Forschungsaufgaben selbst. Die Bearbeitung erfolgt dann einzeln oder im Kollektiv unter Betreuung eines Hochschullehrers oder eines wissenschaftlichen Mitarbeiters in einer vorgegebenen Zeit (ein oder zwei Jahre). Die eingereichten Arbeiten werden begutachtet und für die Forschung und Lehre genutzt, die besten Arbeiten prämiert und in Leistungsschauen der Studenten ausgestellt.

Die Studentinnen *Heike Pollack*, *Ulrike Baumann*, *Martina Jentsch* beteiligten sich als Studenten des 1. Studienjahres am Studentenwettstreit 1980/81, um „Material“ für die Arbeit im *Klub Junger Mathematiker Dresden* zu schaffen. Sie stellten verschiedene Lösungsverfahren für logisch-kombinatorische Aufgaben zusammen und bildeten selbst 34 Aufgaben, von denen einige ausgewählt im folgenden vorgestellt werden.

A. Hilbert

Heike Pollack

Schon in den ersten Schuljahren gehörte die Mathematik zu meinen Lieblingsfächern. Später, etwa in der 7. Klasse, wurde sie zu meinem Interessengebiet. Ich abonnierte die Zeitschrift *alpha* und beteiligte mich aktiv am *alpha*-Wettbewerb. Besonders die Knobelaufgaben machten mir viel Spaß. Mehrere Jahre hintereinander wurde ich zu Kreisolympiaden delegiert und konnte dabei vordere Plätze erzielen. Außerdem nahm ich an Mathematikzirkeln der EOS Zittau teil. In dieser



Zeit entstand in mir der Wunsch, einmal Lehrerin für Mathematik und Physik zu werden. Mit der Aufnahme des Lehrerstudiums an der Pädagogischen Hochschule Dresden begann für mich ein neuer Lebensabschnitt. Um im Studium voranzukommen, ist es notwendig, das erworbene Wissen schöpferisch anzuwenden. Dazu nutzten wir den Studentenwettstreit.

Jetzt, im 2. Studienjahr, übernahm ich eine Arbeitsgemeinschaft des *Klubs Junger Mathematiker der Stadt Dresden*. Hier kann ich unsere Sammlung logisch-kombinatorischer Aufgaben, die im Rahmen des Studentenwettstreits gemeinsam mit Ulrike Baumann und Martina Jentsch entstanden ist, gleich selbst „an den Mann bringen“.

Ulrike Baumann

Mit meinem Studium wird eines meiner Hobbys zu meinem Beruf. Schon in der Schulzeit galt mein besonderes Interesse der Mathematik. Als Leser der *alpha* beteiligte ich mich mehrere Jahre am Wettbewerb,



nahm erfolgreich an Kreis- und Bezirks-mathematikolympiaden teil, war Mitglied von mathematischen Arbeitsgemeinschaften, u. a. des *Klubs Junger Mathematiker der Stadt Dresden*. Mir selbst bereitete es immer besonders viel Freude, Aufgaben aus dem Gebiet der Logik-Kombinatorik zu lösen. So beteiligte ich mich auch auf diesem Gebiet am Studentenwettstreit.

Martina Jentsch

Zu meinen Lieblingsfächern gehörte schon seit Beginn meiner Schulzeit die Mathematik. Jedoch wurde mein Interesse für Knobelaufgaben erst viel später geweckt, nämlich in der 5. Klasse. Damals besuchte ich einen Mathematikzirkel an unserer Schule. Im 6. Schuljahr wurde ich erstmals zu einer Mathematikolympiade delegiert und konnte den ersten Platz belegen. Später nahm ich an weiteren Olympiaden teil und errang noch verschiedene Preise. Außerdem beteiligte ich mich am *alpha*-Wettbewerb und war Mitglied eines Korrespondenzzirkels.



In dieser Zeit prägte sich auch mein Wunsch, einmal Mathematik zu unterrichten. Seit September 1981 studiere ich nun an der PH Dresden.

Einige logisch-kombinatorische Aufgaben für die Klassenstufen 7 bis 9

▲ 1 ▲ Drei benachbarte LPGs beschäftigen sich mit der Pferdezucht. Anlässlich des Tages der Republik veranstalteten die drei LPGs ein großes Volksfest, auf dem unter anderem die Gestüte A, B, C ihre besten Pferde vorstellten, einen Schimmel, einen Schwarzen und einen Braunen. Die Namen der Pferde lauten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) Pluto, Cäsar, Rosa. Aus einem Gespräch dreier Zuschauer wurden folgende Aussagen entnommen:

1. Rosa verlor bereits ein Rennen gegen den Schimmel.
2. Cäsar wurde von Gestüt A gekauft und wurde dort mit Rosa zusammen aufgezogen.

3. Gestüt C züchtet keine Rennpferde und stellte auch keinen Braunen vor.
Es ist zu ermitteln, welches Gestüt welches Pferd vorstellt und wie diese heißen.

▲2▲ In den Endausscheid einer Fußballmeisterschaft einer OS kamen die Mannschaften der Klassen 9b, 10a und 10b. Es war vereinbart worden, daß jede dieser Mannschaften gegen jede der übrigen genau ein Spiel auszutragen hatte. Für ein gewonnenes Spiel wurden an die Siegermannschaft 2 Punkte, für ein unentschiedenes Spiel an jede Mannschaft je 1 Punkt vergeben. Nach Austragung der Spiele gab es folgenden Stand:

Klasse	Punktverhältnis	Torverhältnis
9b	(1) 2:2	(1') 3:1
10a	(2) 3:1	(2') 3:2
10b	(3) 1:3	(3') 2:5

Es ist das Torverhältnis jedes der ausgetragenen Spiele zu ermitteln.

▲3▲ Sechs Schüler halfen bei der Obsternte. Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages an das Solidaritätskonto. Es ist folgendes bekannt:

- (1) Keiner spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.
 - (2) Konrad spendete mehr als Peter.
 - (3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
 - (4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Inge.
 - (5) Helga spendete 2 M weniger als Frank und Peter 2 M mehr als Inge.
 - (6) Alle spendeten volle Markbeträge.
- Wieviel Geld erhielt jeder beim Obstpflücken?

▲4▲ Drei Freunde Andreas, Bernd und Claus beteiligen sich an einem Spiel mit farbigen Kugeln. Die Ausgangsbedingungen des Spiels sehen so aus, daß die drei Freunde in beliebiger Reihenfolge hintereinander sitzen. Jeder dieser drei Freunde hat zu Beginn zwei Kugeln. Es sind die Farben Gelb, Rot, Grün, Blau im Spiel. Nun ist folgendes bekannt:

- (1) Es ist nur eine gelbe Kugel im Spiel. Claus hat keine gelbe Kugel.
- (2) Wenn Andreas seine Kugeln zu Bernd oder Claus rollt, wobei die Kugeln in beiden Fällen den gleichen Weg zurücklegen müssen, dann hat Bernd bzw. Claus zwei Kugeln gleicher Farbe.
- (3) Rollt Claus seine Kugeln zu Bernd, dann hat Bernd nur Kugeln unterschiedlicher Farben.
- (4) Derjenige, der als letzter in der Reihe sitzt (von vorn nach hinten), hat zu Beginn des Spiels keine gelbe Kugel.
- (5) Eine der beiden Kugeln von Andreas ist rot.

(6) Eine der beiden Kugeln von Claus ist mit ihrer Farbe nur einmal im Spiel.

(7) Es sind auf jeden Fall genau zwei blaue Kugeln im Spiel.

(8) Keiner der Freunde hat zu Beginn eine blaue und eine grüne Kugel.

Es ist anzugeben, in welcher Reihenfolge die drei Freunde hintereinander sitzen und welche Kugeln sie zu Beginn des Spiels haben.

▲5▲

$$\begin{array}{ccc} \square & + & \square = \square \\ + & + & + \\ \square & - & \square = \square \\ \hline \square & + & \square - \square = \square \end{array}$$

▲6▲ Auf einem Bahnhof treffen sich vier Studenten, die alle nach Hause fahren wollen und in die gleiche Richtung fahren müssen. Sie steigen alle gemeinsam in ein Abteil.

Auf dieser Strecke hält der Zug viermal in gleichen Abständen, und an jeder der Stationen, die wir mit α , β , γ , δ (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) bezeichnen, steigt einer der Studenten A, B, C, D aus.

Folgendes wissen wir:

- (1) Zwischen den Ausstiegsbahnhöfen von Student A und Student B liegt die Station β .
- (2) Student D steigt von der 2. Haltestation des Zuges genau soweit entfernt aus, wie der Ausstiegsbahnhof von Student A von der Station α entfernt liegt.
- (3) Die Fahrzeit von Student D ist ungefähr so groß, wie die Fahrzeit von Student A und B zusammengenommen.
- (4) Student C steigt später als Student A aus.
- (5) Die Station γ liegt vor dem Ausstiegsbahnhof von D.

Es ist zu ermitteln, in welcher Reihenfolge und an welchen Stationen die Studenten aussteigen.

▲7▲

10			
		20	
	30		
			40

Alle geraden Zahlen von 10 bis 40 sind in die Felder so einzusetzen, daß sie in jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe die Summe von 100 ergeben!

▲6▲ Le boulanger sait que la masse du pain qu'il fabrique est les $\frac{10}{9}$ de la masse de la farine utilisée.

- a) Quelle quantité de pain obtient-il avec 72 kg de farine? avec 117 kg? avec 108 kg?
- b) Quelle masse de farine faut-il pour fabriquer 100 kg de pain? 150 kg? 190 kg?



Erst übersetzen, dann lösen!

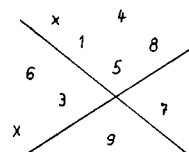
Квадраты в квадрате.

▲1▲ Переставьте цифры так, чтобы три образовавшихся трехзначных числа были точными квадратами.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

▲2▲ Удивительные цифры.

Приведенная здесь запись обладает удивительным свойством. Посмотрите на нее со стороны нижнего левого угла книги. Вы увидите правильно выполненный пример на сложение. Теперь посмотрите со стороны нижнего правого угла. Что вы видите? Опять правильно выполненный пример на сложение! К тому же в нем использованы все цифры от 1 до 9.



February 14th.

▲3▲ Suppose we want to use the numerals 1, 9, 8, 1, each exactly once, with no other numerals, to represent 14. (For example, we could represent 13 by writing $1 + \sqrt{9+8+1}$.) How can we do this, using any mathematical symbols we wish, other than more numerals?

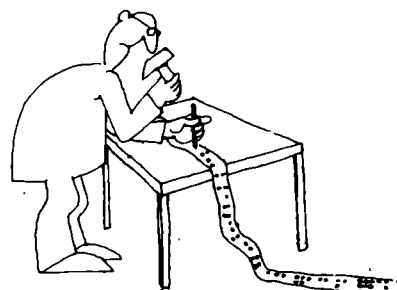
French Flags.

▲4▲ The French flag is the Tricolor, with three bands of color.

How many of these flags can be made with five colors?

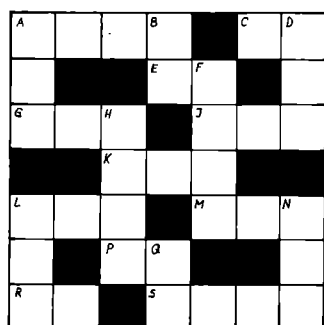
▲5▲ Le réservoir d'essence de la voiture de papa a une capacité de 32l. Cette voiture consomme 8 litres d'essence aux 100 kilomètres. Papa a fait le plein de son réservoir avant de partir et nous avons fait un voyage de 400 km. Combien reste-t-il d'essence dans le réservoir, sachant que papa en a ajouté 14l en cours de route?

In freien Stunden • alpha-heiter



Kreuzzahlrätsel

Ermittle die durch 9 teilbaren Zahlen! Dividiere sie durch 9, und trage den Quotienten in die entsprechenden Kästchen ein!



Waagerecht

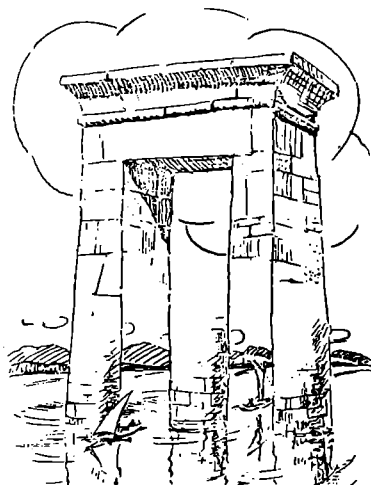
A 9144; 9145;
C 567; 568;
E 557; 558;
G 4294; 4293;
J 3690; 3689;
K 945; 946;
L 1260; 1259;
M 2835; 2836;
P 730; 729;
R 387; 388;
S 74683; 74682.

Senkrecht

A 1387; 1386;
B 594; 595;
D 2880; 2879;
F 22076; 22077;
H 63971; 63972;
L 1386; 1385;
N 4932; 4933;
Q 161; 162.

H. Begander/
J. Lehmann, Leipzig

Ein „unmögliches“ Bauwerk



Unterhaltsame Mengenlehre

Abbildung von M_1 in M_2 : Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{\alpha, \beta, T, R, A, P, E, Z\}$ und $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sowie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^x + \alpha \\ \alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^T + \alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^R + \alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^A + \alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^P + \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^E + \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^Z + \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\end{aligned}$$

Bilde die Menge M_1 so in die Menge M_2 ab, daß sämtliche Gleichungen zu wahren Aussagen werden!

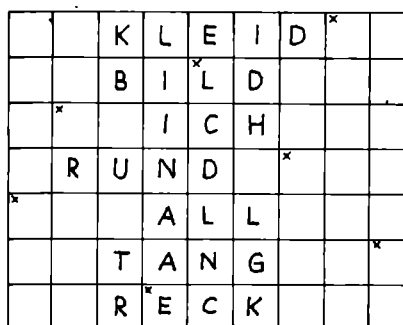
Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kreuzworträtsel

In die offenen Felder der abgebildeten Figur sind Buchstaben so einzusetzen, daß in den einzelnen Zeilen Begriffe aus der Mathematik entstehen.

Sie haben folgende Bedeutung:

1. Name eines griechischen Mathematikers
2. Begriff aus der darstellenden Geometrie
3. Zwei Terme und ein Gleichheitszeichen
4. Ergebnis einer bestimmten Projektion
5. abstandsgleiche Gerade
6. Winkelfunktion
7. Begriff aus der Ähnlichkeitslehre



In jeder Zeile ist ein Feld angekreuzt. Liest man die darin stehenden Buchstaben von oben nach unten, so erhält man den Namen einer geometrischen Figur.

Ing. D. Völzke, Greifswald

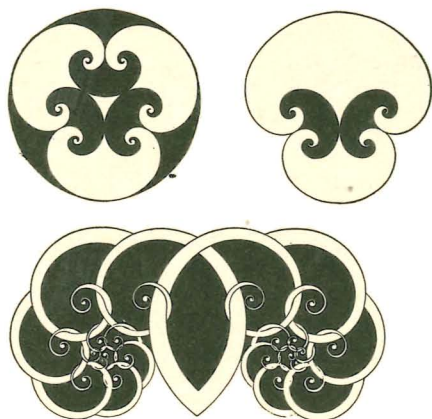
MCMLXXXII

$M:C+M:L+X=XX \cdot II$ $\sqrt{MC-M+L=XXX \cdot II}$

n	$n^{1-9+8+2}$	n	$n^{1-9+8+2}$
1	$(1+9):(8+2)$	7	$1 \cdot 98:2$
2	$1+9-8+2$	8	$1^9 \cdot 8^2$
3	$19-8-2$	9	-1^9+82
4	$1+9+8-2$	10	$(1+9)(8+2)$
5	$1 \cdot 9+8 \cdot 2$	11	$(19-8)^2$
6	$1 \cdot 9 \cdot 8:2$	12	$1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2$

Ing. H. Decker, Köln

Mathematical Themes in Ornament



Rutherford Boyd, Yeshiva Universität, New York

Mathematik in Vierzeilern

Das erste schwimmt im Wasser,
das zweite schwimmt darauf.
Das Ganze trifft in einem Punkt
den Kreis in seinem Lauf.

Mit „r“ drin sendet man's dem Freund,
statt mit ihm anzustoßen.
Wird nun das „r“ durch „a“ ersetzt,
war's einer unserer Großen.

Für manche Dreiecksfläche ist
es eine seiner Grenzen.
Doch kennt man es genau so als
Bestandteil von Potenzen.

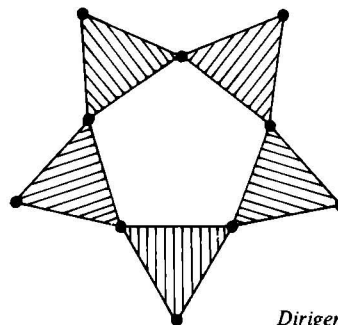
Die beiden Silben stellen dar
der Gleichung beide Seiten.
Vertauscht man sie, benutzt man es
als Maßeinheit für Weiten.

Dasselbe Wort erscheint zu dritt:
Wenn's aus Papier ist, ist er weiß.
Zum zweiten schießt man auch damit.
Und schließlich ist's ein Teil vom Kreis.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Magische Figur

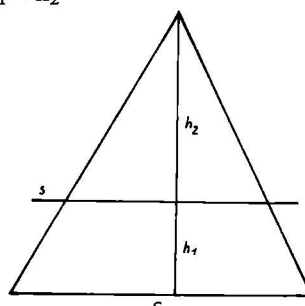
An Stelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 10 so einzutragen, daß die Summen am Umfang jedes Dreiecks zunächst 14, dann 16, 17 und 19 sind.



Dirigent Jindřich Pěncík, Prag

$h_1 : h_2 = ?$

c und s seien parallel! s soll die Fläche halbieren!
 $h = h_1 + h_2$

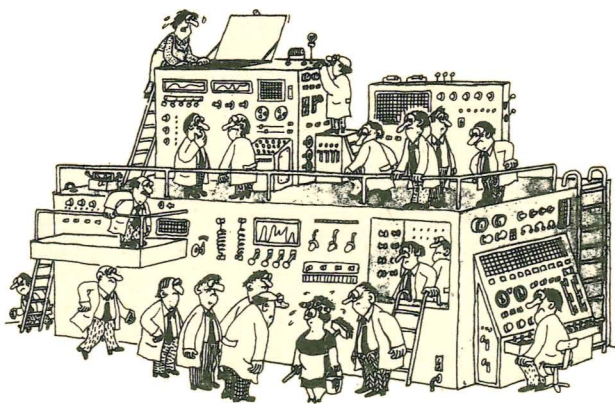


$\frac{h_1}{h_2} = ?$

S. Tunn, Berlin

Behauptung: $2 + 11 = 12$

Beweis: $\text{zwo} + \text{elf} = \text{zwölf}$



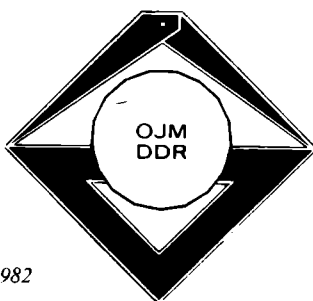
„Die Reparatur der Anlage kann Wochen dauern;
ganz unten hat sich 'ne Haarnadel verklemmt.“

aus: Eulenspiegel, Berlin

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1982



Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1982 veröffentlicht.

Anmerkung: $\angle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\angle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B , während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

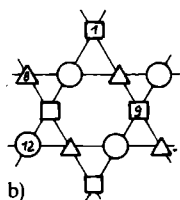
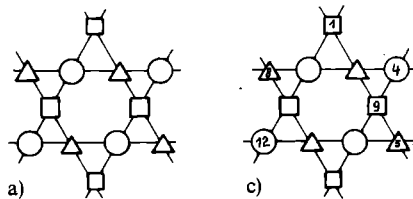
220511 In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, daß folgendes gilt:

Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;

die Summe der Zahlen in den vier Dreiecksfeldern beträgt 26;

die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;

die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.



a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!

b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!

c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z. B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs „äußeren“ Felder steht!

220512 Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.

Wieviel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

220513 Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} B \cdot J \cdot M &= 135, \\ M + A + T + H + E &= 32, \\ (H + E + I) : (T - E - R) &= 3. \end{aligned}$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben $A, B, E, H, I, J, M, R, T$ so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: „Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht.“

Welche drei Zahlen sind dies?

b) Bertolt sagt: „Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet.“ Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?

c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung.

Welche könnte es z. B. sein?

220514 Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, daß sie die geforderten Eigenschaft hat! Wieviel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?

b) Beweise, daß in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen!

Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?

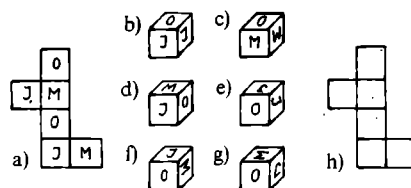
Olympiadeklasse 6

220611 In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.

Wieviel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter faßt?

220612 Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz im Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein? Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, daß sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen läßt:

(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.

(2) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild d) entsteht.

(3) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

220613 Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettkampf. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.

(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher als Ernst sprang.

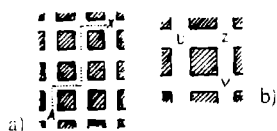
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.

(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten läßt!

Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

220614 Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z. B. X , fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will – für jede von A verschiedene Kreuzung Z – wissen, wieviel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.



a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wieviel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wieviel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?

c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise: Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z. B. w für waagrecht, s für senkrecht!

Olympiadeklasse 7

220711 Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,

b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,

c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45^\circ$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, daß sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!

Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

220712 Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit. Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine. – Nach Abschluß der Fahrt stellte man fest, daß genau 121 Servietten verbraucht wurden.

Wieviel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

220713 Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von 2,4 km Länge säubern. Der LPG A gehören davon 1,5 km, die LPG B besitzt die übrigen 0,9 km. Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, daß jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt. Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen.

Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

220714 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M . Ferner sei AB ein Durchmesser von k . Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC , durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

Olympiadeklasse 8

220811 Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:

(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.

(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.

(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.

a) Beweise, daß Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!

b) Beweise, daß sich aus den Angaben eindeutig ermitteln läßt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!

c) Beweise, daß sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln läßt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

220812 Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert: z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.

Beweise, daß es genau eine solche Zahl z gibt! Ermittle diese Zahl!

220813 Eine NVA-Marschkolonne ist 3,2 km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach 5,6 km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.

a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?

b) Wieviel Minuten muß der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

220814 In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B , den Kreis k_2 in C .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist!

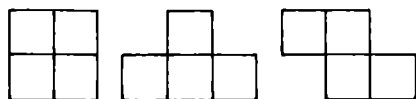
Olympiadeklasse 9

220911 Uwe sagt zu Gert: „Ich habe hier eine zweistellige Zahl z , deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z “. Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z , die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, daß aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

220912 Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n^2 gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von

Papptäfelchen der abgebildeten Form (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden. (Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.) Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.



- a) Beweisen Sie, daß diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!
 b) Zeigen Sie, daß die Bedingungen für $n=6$ erfüllbar sind!
 c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

220913 a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , für die der Term

$$\frac{4x-4}{2x-3} \text{ definiert ist.}$$

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

220914 In einer Ebene ε befinde sich ein n -Eck mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \dots, A_n$. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S . Das Volumen der Pyramide sei V_P . Die Mittelpunkte der Kanten $A_1S, A_2S, \dots, A_nS$ seien $M_1, M_2, \dots, M_n$. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε . Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte $M_2, M_3, \dots, M_n$ schneide ε in $B_2, B_3, \dots$, bzw. B_n . Der Körper K mit den Eckpunkten $B_1, B_2, \dots, B_n, M_1, M_2, \dots, M_n$ habe das Volumen V_K .

- a) Beweisen Sie, daß alle Punkte $M_1, M_2, \dots, M_n$ in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!
 b) Beweisen Sie, daß V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P !

Olympiadeklasse 10

221011 In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.

Beweisen Sie, daß es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeug-

Kostenart	Kosten in M je Stück für			Insgesamt zur Verfügung stehende Mittel in Mark
	E_1	E_2	E_3	
Rohstoffkosten	6	7	9	4950
Energiekosten	1	2	2	1100
Lohnkosten	5	6	8	4300

nisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, daß alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden! Beweisen Sie, daß durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

221012 In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, daß $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind. Peter meinte: „Dann muß auch $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ irrational sein.“ „Wie beweist du das?“ fragte Katrin. „Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x + y$ irrational sein muß, wenn x und y irrational sind.“ „Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, daß auch ihre Summe $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ irrational ist“, erwiderte Peter.

- a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, daß es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x + y$ gibt!
 b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

221013 Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel durch den braven Lehrer Lämpel. Welcherart man soll sich plagen, ließ er einstmals so ihn sagen:
 „Nicht allein im Schreiben, Lesen übt sich ein vernünftig Wesen, sondern auch in Rechnungssachen soll der Mensch sich Mühe machen.“
 Liest man dieses umgekehrt, ist es sicher auch viel wert:
 „Nicht allein in Rechnungssachen soll der Mensch sich Mühe machen, sondern ein vernünftig Wesen soll auch manchmal etwas lesen.“

Darum zögert bitte nicht, lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt, daß nach Zahlen wird gefragt. Unter diesen sei'n vorhanden zwei dreistellige Summanden. Der Summe wir nun unterstelle (da's möglich ist in vielen Fällen), sie habe eine Stelle mehr.

Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer zu zählen, daß zehn Ziffern man für diesen Fall gut brauchen kann: Die Ziffern sei'n's von 0 bis 9, die uns zu diesem Zweck erfreu'n! Und jede Ziffer treffe man in dieser Rechnung einmal an, und zwar genau (wie man so sagt)! Damit auch später keiner fragt: Die 0 würd' vorne sehr schlecht passen,

drum ist sie dort nicht zugelassen. Genau ein Übertrag auch sei, nicht etwa zweie oder drei! (Ein Übertrag – das sie erklärt, damit es jedermann erfährt –, das ist ein Fall, der dann passiert, wenn jemand Zahlen hat addiert und ihre Summe, wie sich zeigt, die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn, was kann bei dieser Addition man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten. Als Lösung seien angegeben – zumindest soll man danach streben – alle möglichen E und d beträge! Dabei beweise man recht rege, daß es, hält man die Regeln ein, nur diese Summen können sein. (Der Summanden vielfache Möglichkeiten sollen uns keine Sorgen bereiten, nach ihnen ist hier nicht gefragt.)

Nun frisch ans Werk und nicht verzagt! Denn nicht alleine nur im Lesen übt sich ein vernünftig Wesen ...

221014 Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2 \dots P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehneckes. Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r !

Olympiadeklassen 11/12

221211 Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3}, \quad (1)$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}. \quad (2)$$

221212 Man beweise: Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt $a^2 - b^2 < ef$.

221213 In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142857 mit einer natürlichen Zahl n , die größer als 7 ist, angegeben:

Man dividiere zunächst n durch 7 und schreibe als erste Zahl den ganzzahligen Teil des Ergebnisses auf. Dann multipliziere man 142857 mit dem Rest und schreibe das Produkt hinter die zuerst aufgeschriebene Zahl.

Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man die zuerst aufgeschriebene Zahl. Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.

Beispiel für $n = 326$

$$\begin{array}{r} (326 : 7 = 46, \text{ Rest } 4) \\ 46 \\ (142857 \cdot 4 = 571428) \\ 46571428 \\ - \quad 46 \\ \hline 46571382 = 142857 \cdot 326 \end{array}$$

Es zeigt sich jedoch, daß dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis führt.

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n > 7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!

b) Nennen und begründen Sie für die anderen $n > 7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!

221214 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden Aussagen (A) bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

(A) x ist eine positive rationale Zahl.

(B) x ist eine natürliche Zahl oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x = \frac{1}{g}$ darstellbar.

(C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.

(D) Es gilt $7 < x^2 < 9$.

(E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.

(F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form „Wenn p , so q “ ist genau dann wahr, wenn die Aussage „(nicht p) oder q “ wahr ist. Eine Aussage der Form „ u oder v “ ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.

Wegen des unerwartet starken Umfangs der Aufgaben der Schulolympiade veröffentlichen wir die Lösungen zum α -Wettbewerb 1/82 in Heft 5/82 und zum α -Wettbewerb 2/82 in Heft 6/82.

Erfolgreiche Fehlersuche:

Heft 4/81, α -heiter: Eine 2. Lösung lautet: $1928 + 1952 + 1906 + 1936 + 1957 = 9679$, stellt Elke Kammann (17 J.), Berlin fest.

Heft 5/81, S. 115: EINS + EINS + EINS + EINS = VIER; richtige Lösungen: $4 \cdot 0326 = 1304$; $4 \cdot 0327 = 1308$; $4 \cdot 0651 = 2604$; $4 \cdot 0976 = 3904$ stellt Dr. J. Paasche, Stockdorf (BRD) fest.

Heft 6/81, S. 139: Die beiden Dreieckseiten sind vertauscht worden (Kathete mit Hypo-

Lösungen zu: Tangentialebenen an regelmäßige Polyeder, Heft 2/82

▲ 1a ▲ Das zugrundegelegte regelmäßige Polyeder läßt sich in Pyramiden zerlegen, deren Grundflächen eine Seitenfläche und deren Spitze der Mittelpunkt M des Polyeders ist. Durch die betrachteten Tangentialebenen kommt zu jeder dieser Pyramiden eine Pyramide mit der gleichen Grundfläche und der Spitze S hinzu (siehe Bild 3). Das Volumen vergrößert sich damit um den Faktor $(|TM| + |TS|) : |TM| = |SM| : |TM|$.

▲ 1b ▲ Die Mittelpunkte der Seitenflächen bilden beim regelmäßigen Tetraeder ein regelmäßiges Tetraeder, beim Oktaeder einen Würfel, beim Ikosaeder ein Pentagondodekaeder (siehe Bild 6), beim Würfel ein Oktaeder und beim Pentagondodekaeder ein Ikosaeder.

Außerdem steht die Verbindungsgerade des Mittelpunkts eines regelmäßigen Polyeders mit dem Mittelpunkt einer Seitenfläche stets senkrecht auf dieser Seitenfläche. Auf Grund der Ähnlichkeit gleichartiger regelmäßiger Polyeder ist damit eine Übersicht über die gesuchten Körper gegeben.

Lösung zu:

Eine „abenteuerliche Aufgabe“, Heft 2/82

▲ 1 ▲ Es bezeichne M die ursprüngliche Taleranzahl und M_i die Anzahl der Taler, die sich nach der Aufteilung durch den i -ten Räuber in der Kasette befinden ($i = 1, \dots, 5$).

tenuse, stellt Schüler R. Zimmermann, Kirchmöser, fest.

Heft 1/82, α -heiter: Weitere Lösungen für „Sport frei!“ 5, 3, 2; 6, 3, 1; 7, 2, 1; stellt Synke Hochmann (15 J.), Riesa, fest.

Heft 1/82, „Schachstudie“, S. 12: Nach der in α veröffentlichten Lösung verbleiben nicht zwei Springer gegen König, sondern zwei Springer gegen König und Bauer. Da der weiße Bauer noch auf c2 steht, ist für schwarz ein forcierter Gewinn möglich. Für diese Endspiele ist die 50-Züge-Regel auf 100 Züge erhöht worden, da für einen zwangsläufigen Gewinn mehr als 50 Züge benötigt werden, stellt Thomas Meyer, Vacha/Rhön, fest.

Dann ist $M_1 = \frac{4}{5}(M - 1)$ und $M_{i+1} = \frac{4}{5}(M_i - 1)$, $i = 1, \dots, 4$.

Aus diesen Formeln folgt

$$M_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 M - \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}.$$

Die letzten fünf Summanden werden addiert (z. B. läßt sich die Summenformel für eine endliche geometrische Reihe anwenden).

Somit finden wir

$$M_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 (M + 4) - 4.$$

Der Problemstellung entsprechend muß M_5 eine natürliche Zahl sein. Weil 4 und 5 teilerfremd sind, ist M_5 genau dann eine natürliche Zahl, wenn $M + 4$ ein Vielfaches von 5^5 ist. Folglich besitzt M die Darstellung $M = k5^5 - 4$, und es ist $M_5 = 4(256k - 1)$, wobei k eine geeignete natürliche Zahl ist.

Nun soll M_5 durch 5 teilbar sein. Wegen $256k - 1 = 255k + (k - 1)$ ist M_5 genau dann durch 5 teilbar, wenn $k - 1$ durch 5 teilbar ist. Für k kommen daher die Zahlen 1, 6, 11, 16, 21, ... in Frage, und für alle diese Werte ist das zugehörige M eine Lösung. Der Kassetteninhalt war also $(5m + 1)5^5 - 4$ Taler, dabei ist m eine beliebige nichtnegative ganze Zahl.

▲ 2 ▲ Für $m = 1$ ist der Kassetteninhalt 18746 Taler, also bereits größer als 10000. Daher kann nur $m = 0$ sein. In diesem Fall erhalten wir als Gesamtbeute 3121 Taler. Sie wird folgendermaßen aufgeteilt:

1. Räuber
 $624 + 1 + 204 \text{ Taler} = 829 \text{ Taler}$
2. Räuber
 $499 + 1 + 204 \text{ Taler} = 704 \text{ Taler}$
3. Räuber
 $399 + 1 + 204 \text{ Taler} = 604 \text{ Taler}$
4. Räuber
 $319 + 1 + 204 \text{ Taler} = 524 \text{ Taler}$
5. Räuber
 $255 + 1 + 204 \text{ Taler} = 460 \text{ Taler}$

▲ 3 ▲ Mit zu Aufgabe 1 analogen Bezeichnungen erhalten wir

$$M_1 = \frac{n-1}{n} (M - 1).$$

$$M_{i+1} = \frac{n-1}{n} (M_i - 1), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Daher ist

$$M_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n (M + n - 1) - n + 1.$$

Weil M_n eine natürliche Zahl sein muß, ist $M + n - 1$ ein Vielfaches von n^n , daher besitzt M die Darstellung $M = kn^n - (n - 1)$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl k . Dann finden wir $M_n = (n - 1) [(n - 1)^{n-1} k - 1]$. Die Forderung, daß M_n durch n teilbar ist, wird genau dann erfüllt, wenn der Ausdruck in den eckigen Klammern durch n teilbar ist. Untersuchen wir zuerst, wie sich $k(n - 1)^{n-1}$ bei Division durch n verhält. Es ist $k(n - 1)^{n-1} = kn(n - 1)^{n-2} - k(n - 1)^{n-2}$, $= kn(n - 1)^{n-2} - kn(n - 1)^{n-3} + k(n - 1)^{n-3}$, $= \dots$, $= kn(n - 1)^{n-2} - kn(n - 1)^{n-3} + kn(n - 1)^{n-4} - \dots + (-1)^n kn + (-1)^{n-1} k$,

und diese Zahl hat bei Division durch n den gleichen Rest wie $(-1)^{n-1}k$. Daher ist k so zu wählen, daß $(-1)^{n-1}k-1$ durch n teilbar ist.

1. Fall: n gerade Zahl

Wähle k so, daß $-k-1$ durch n teilbar ist, äquivalent dazu ist die Teilbarkeit von $k+1$ durch n . Folglich ist $k=n-1, 2n-1, \dots$

2. Fall: n ungerade Zahl

Wähle k so, daß $k-1$ durch n teilbar ist. Wir finden $k=1, n+1, 2n+1, \dots$

Wir verifizieren leicht, daß alle mit diesen Zahlen k gebildeten Zahlen M Lösungen der Aufgabe sind. Die kleinstmögliche Zahl der Goldstücke erhält man nun für $k=1$ bei ungeradem n und für $k=n-1$ bei geradem n .

Lösungen zu: Aufgaben aus Freundesland (Rayon-Aufgaben aus der UdSSR), S. 82

▲ 1 ▲ Wir zerlegen 2340 in seine Teiler. Es ist $2340 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Unter den Teilern gibt es die Primzahl 13, die keine Ziffer oder das Produkt irgendwelcher Ziffern sein kann. Daher gibt es keine solche Zahl.

▲ 2 ▲ Wir betrachten eine oben eingeführte Menge. Das Produkt ihrer fünf Elemente ist gleich $+1$ oder -1 . Wir führen eine Operation aus, indem wir genau vier Vorzeichen ändern. Das Produkt ändert sich um den Faktor $(-1)(-1)(-1)(-1)=1$, d. h., sein Wert bleibt erhalten. Nun hat die erstgenannte Menge das Elementenprodukt -1 und die zweite das Produkt $+1$. Damit ist es aber nicht möglich, durch eine Folge von Operationen von der einen zur anderen Menge zu gelangen.

▲ 3 ▲ Wir betrachten die Menge aller Diagonalen des 7-Ecks. Von jeder der 7 Ecken gehen 4 Diagonalen aus. Mithin gibt es genau $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14$ Diagonalen, da wir alle doppelt gezählt haben. Durch einen Punkt P der Ebene zeichnen wir 14 Geraden, wobei jede Gerade zu einer Diagonalen parallel ist. Diese Geraden zerlegen die Ebene in 28 Winkelräume mit einer Winkelsumme von 360° . Angenommen, alle Winkel sind größer gleich 13° . Dann ist die Summe größer gleich $28 \cdot 13^\circ = 364^\circ$. Wir erhalten einen Widerspruch. Also gibt es einen Winkel kleiner als 13° .

▲ 4 ▲ Wir bezeichnen die Zahl $\overline{DBA}$ mit x . Da die Zahl $\overline{ШЕСТЬ}$ fünfziffrig ist, ist sie kleiner als 100000. Damit ist $\overline{DBA} \times \overline{ШЕСТЬ}$ kleiner als 100000x, aber die Zahl $\overline{DBA} \cdot \overline{ЦАТЬ}$ ist größer als 100000x. Damit gilt die Ungleichung.

▲ 5 ▲ Es sei x die Anzahl der Beine eines dreiköpfigen Drachens, a die Anzahl der Tausendfüßler und b die Anzahl der Drachen. Dann gilt:

$$(1) \quad a + 3b = 26 \text{ und}$$

$$(2) \quad 40a + xb = 298.$$

Aus (1) folgt, daß a bei der Division durch

3 den Rest 2 läßt, also ist $a = 3k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten mit (2) $120k + xb = 218$. Offenbar kommt nur $k=0$ und $k=1$ in Betracht. Für $k=0$ folgt $a=2, b=8, x=27,25$. Für $k=1$ folgt $a=5, b=7$ und $x=14$. Damit hat ein dreiköpfiger Drache 14 Beine.

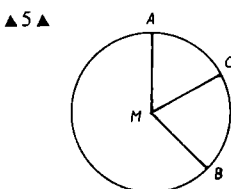
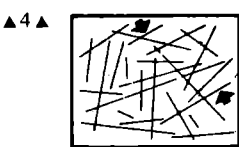
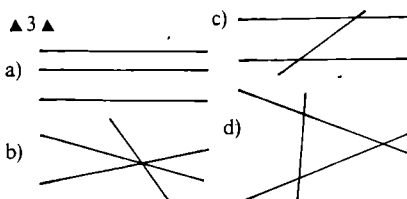
▲ 6 ▲ Angenommen, die Aussagen 3) und 4) sind wahr. Dann ist $a + 7b = a + b + 6b$, und da $a+b$ durch 3 teilbar ist, ist $a+7b$ keine Primzahl. Wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme, also ist Aussage 3) oder 4) falsch, und die Aussagen 1) und 2) sind wahr. Nun ist $a+1=2b+6$ durch b teilbar. Dies ist offenbar ($2b$ ist ohne Rest durch b teilbar) nur für die Teiler von b , also für $b=1, 2, 3$ oder 6 möglich. a hat folglich die Werte 7, 9, 11 oder 17. Auf Grund der Probe bleiben von diesen möglichen Paaren nur die Paare 9, 2 und 17, 6 übrig.

▲ 7 ▲ Wir legen die beiden Blätter so übereinander, daß die Drachen zur Deckung kommen. Dann befinden sich die Drachen im Durchschnitt beider Kreise, und die Ergänzungsmöndchen sind kongruent. Wenn wir das Möndchen des zweiten Kreises abschneiden und es über das Möndchen des ersten legen, erhalten wir das Gewünschte.

Bilderbogen Geometrie, S. 84

- ▲ 1 ▲ a) $M = \{A, B, C, E, H\}$
b) $M = \{A, G, C, D, E\}$
c) $M = \{A, C, E\}$
d) $M = \{F\}$

- ▲ 2 ▲ a) Es sind 6 Quadrate und 20 Dreiecke.
b) Es sind 12 Dreiecke, 6 Trapeze, 4 Parallelogramme und 2 Sechsecke. Es sind noch 6 Vierecke.



$$\angle CMB = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ$$

$$\angle AMB = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$$

$$\angle AMC = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$\angle CMB = 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ$$

▲ 6 ▲ Die längste Strecke ist $\overline{UV}$. Die kürzeste Strecke ist $\overline{QR}$. Gleich lange Strecken sind $\overline{IJ}, \overline{ST}, \overline{EF}$ sowie $\overline{AB}$ und $\overline{XY}$.

▲ 7 ▲ Man zeichnet um A mit $\overline{AD}$ bei D beginnend einen Viertelkreis. Daran wird anschließend ein Viertelkreis um B mit $2 \cdot \overline{AD}$, dann um C mit $3 \cdot \overline{AD}$, dann um D mit $4 \cdot \overline{AD}$, um A mit $5 \cdot \overline{AD}$ usw. gezeichnet.

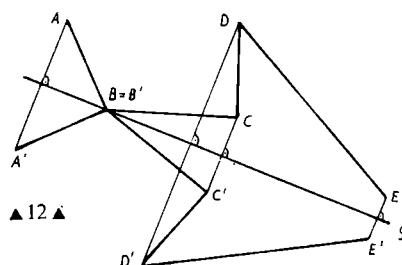
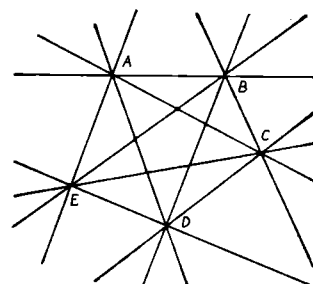
▲ 8 ▲ Es ist Quader Nr. 3.

▲ 9 ▲ $A = 80(20+30) - 10 \cdot 30 - 20 \cdot 30$
 $A = 3100$

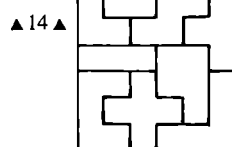
Die Fläche beträgt 3100 mm^2 .

▲ 10 ▲ a) $\alpha = 100^\circ$ b) $\alpha = 55^\circ$ c) $\alpha = 110^\circ$
d) $\alpha = 55^\circ$ e) $\alpha = 100^\circ$ f) $\alpha = 110^\circ$.

▲ 11 ▲ Man erhält $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Geraden.



▲ 13 ▲ 1) Dreieck; 2) Viereck; 3) Fünfeck; 4) Sechseck; 5) Achteck; 6) Elfeck; 7) Zehneck.



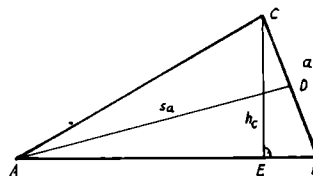
▲ 15 ▲ Es sei $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck mit den gegebenen Stücken a, s_a und h_c . Dann ist das $\triangle CEB$ konstruierbar nach dem Kongruenzsatz ssw. Damit ist die Lage von D bekannt; denn er ist der Mittelpunkt von a . Der Punkt A liegt einmal auf der Verlängerung von BE und auf dem um D mit s_a gezogenen Kreisbogen.

1. Im rechtwinkligen Dreieck EBC muß $a > h_c$ sein.

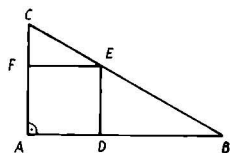
2. Wenn s_a kleiner ist als das Lot von D auf EB , entsteht kein Dreieck.

3. Wenn s_a gleich dem Lot ist, entsteht ein Dreieck.

4. Ist s_a größer als das Lot, so trifft der Kreisbogen um D die Gerade EB zweimal, und es entstehen zwei verschiedene Dreiecke.



▲ 16 ▲ Es seien $\triangle ABC$ das gegebene rechtwinklige Dreieck mit $\angle CAB = 90^\circ$ und $ADEF$ das gesuchte Quadrat. Verbindet man A mit E , so ist $\angle FAE = \angle FEA = \angle EAB$. Deshalb halbiert AE den $\angle CAB$.



Lösungen zu: Spielwettbewerb

„Schiebung!“, S. 85

NAGEL $\rightarrow$ ANGEL – E4; A6; G7; N3; A1; N2; C3; E7.

STERN $\rightarrow$ ERNST – T2; R6; E7; S4; E1; R3; S6; R4; T7; R2; T3; N4; T8; R3; N5; S7.

Lösungen zu: alpha-Sprachecke, S. 87

Quadrate im Quadrat

▲ 1 ▲ Stellt die Ziffern so um, daß die drei dann in den Zeilen stehenden dreistelligen Zahlen Quadratzahlen sind!

Lösung: $\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 8 & 4 \end{array}$

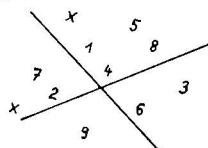
Merkwürdige Ziffern

▲ 2 ▲ Das hier aufgeschriebene Ziffernschema hat eine merkwürdige Eigenschaft. Seht es von der linken unteren Ecke des Blattes aus an! Ihr seht eine richtig gerechnete Additionsaufgabe.

Jetzt schaut das Schema von rechts unten an! Was seht ihr? Wieder eine richtig gerechnete Additionsaufgabe! Außerdem sind alle Ziffern von 1 bis 9 verwendet worden.

Findet noch solch ein Schema der Ziffern von 1 bis 9!

Lösung:



Der 14. Februar

▲ 3 ▲ Angenommen, wir würden die Ziffern 1, 9, 8 und 1, jede genau einmal, verwenden, um die Zahl 14 mathematisch darzustellen, ohne noch andere Ziffern zu benutzen. (Z. B. können wir die Zahl 13 durch den Ausdruck $1 + \sqrt{9 + 8 + 1}$ darstellen.) Wie können wir das unter Verwendung irgendwelcher mathematischer Symbole durchführen?

Lösung: $18 - (1 + \sqrt{9}) = 14$.

Die französische Flagge

▲ 4 ▲ Die französische Flagge ist eine Trikolore mit 3 verschiedenfarbigen Streifen. Wie viele derartige Flaggen kann man mit 5 Farben herstellen?

Lösung: Bezeichnet man die 5 Farben mit a, b, c, d und e , dann findet man mit Farbe a

am Anfang $abc, abd, abe, acb, acd, ace, adb, adc, ade, aeb, aec, aed$. Das sind 12 Möglichkeiten. Da sich auch für b, c, d und e am Anfang die gleiche Anzahl ergibt, erreicht man $12 \cdot 5 = 60$ Möglichkeiten. Es ist eine Variation ohne Wiederholung mit $n = 5$ Elementen zur $k = 3$ ten Klasse.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$$

▲ 5 ▲ Der Benzintank in Vaters Wagen hat ein Fassungsvermögen von 32,5 l. Dieser Wagen verbraucht 8 l Benzin auf 100 km. Vater hat seinen Tank vor der Abfahrt voll gefüllt, und wir haben eine Fahrt von 400 km unternommen. Wieviel Benzin verbleibt im Tank, wenn man weiß, daß Vater während der Reise 14 l nachgefüllt hat?

Lösung: Auf der Fahrt wurden $\frac{400 \text{ km} \cdot 8 \text{ l}}{100 \text{ km}} = 32 \text{ l}$ verbraucht. Im Benzintank sind dann noch $32,5 \text{ l} - 32 \text{ l} + 14 \text{ l} = 14,5 \text{ l}$.

▲ 6 ▲ Der Bäcker weiß, daß die Masse des Brotes, das er herstellt, $\frac{10}{9}$ der Masse des verwendeten Mehls ausmacht.

a) Welche Menge Brot erhält er aus 72 kg, aus 117 kg und aus 108 kg Mehl?

b) Welche Masse Mehl braucht er, um 100 kg, 150 kg und 190 kg Brot herzustellen?

Lösung: a) $72 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 80 \text{ kg}$;

$117 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 130 \text{ kg}$; $108 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 120 \text{ kg}$.

b) $100 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 90 \text{ kg}$; $150 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 135 \text{ kg}$;

$190 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 171 \text{ kg}$.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter, S. 88

Kreuzzahlrätsel

Waagrecht: A: 1016, C: 63, E: 62, G: 477, J: 410, K: 105, L: 140, M: 315, P: 81, R: 43, S: 8298.

Senkrecht: A: 154, B: 66, D: 320, F: 2435, H: 7108, L: 154, N: 548, Q: 18.

Unterhaltsame Mengenlehre

(1) Aus der Struktur der Gleichungen folgt, daß die Basis der Potenzen nur auf Null enden kann, also $\beta = 0$ gilt.

(2) Nach äquivalenter Umformung der Gleichung $\alpha\alpha = \alpha\beta^\alpha + \alpha$ in $\alpha\alpha - \alpha = \alpha\beta^\alpha$ und Einsetzen von $\beta = 0$, ergibt sich $\alpha 0 = \alpha 0^\alpha$, woraus $\alpha = 1$ folgt.

(3) Die übrigen Gleichungen liefern entsprechend $T = 2$, $R = 3$, $A = 4$, $P = 5$, $E = 6$, $Z = 7$.

(4) Die Proben

$$11 = 10^1 + 1$$

$$11111111 = 10^7 + 1111111$$

bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

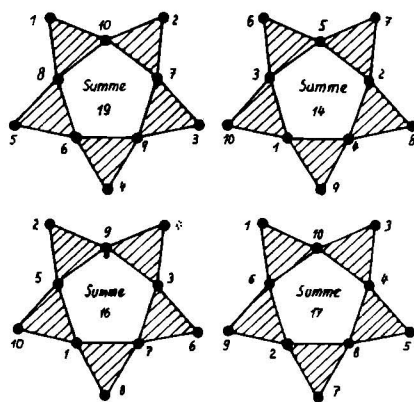
Kreuzworträtsel

Eukleides, Abbildung, Gleichung, Grundriss, Parallele, Kotangens, Streckung, – Ellipse

Mathematik in Vierzeilern

Tang – ente, Gruß/Gauß, Basis, Terme/Meter, Bogen.

Magische Figur



$$h_1 : h_2 = ?$$

$$h_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)h; h_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}h$$

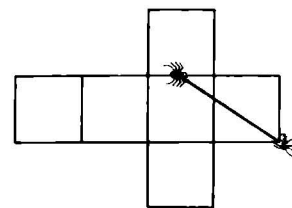
Lösungen zu: Würfeleien, IV. U. S.

▲ 1 ▲ 1d; 2f; 3e; 4a; 5b; 6c.

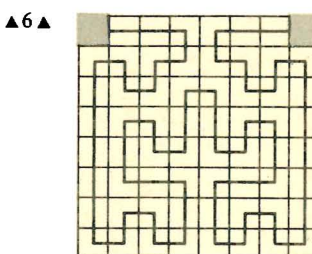
▲ 2 ▲ In jeder waagerechten Reihe beträgt die Summe der Punkte 15. Deshalb muß der letzte Würfel 3 Punkte haben.

▲ 3 ▲ Es treten 8 Dreiecke und 6 Quadrate auf. Der Körper hat 12 Ecken.

▲ 4 ▲ Die Spinne muß auf einer Geraden laufen, weil diese die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten einer Ebene ist. Das Bild zeigt diese Gerade, die die Kante des Würfels im Verhältnis 1 : 2 teilt.

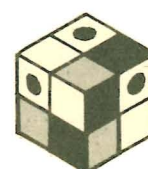


▲ 5 ▲ Es ist der Würfel a .



▲ 7 ▲ Es ist das Netz 4.

▲ 8 ▲





Der Escherwürfel und andere unmögliche Konstruktionen

Das künstlerische Schaffen des niederländischen Graphikers *M. C. Escher* (1898 bis 1972) spiegelt in vielfältiger und eigenwilliger Weise die Eindrücke wider, die die Mathematik interessierten Laien zu vermitteln vermag. Am populärsten ist wohl seine der Lithographie „Belvedere“ (1958, Bild 1) zugrunde liegende Idee geworden, durch falsches Zusammenfügen zweier in sich logischer perspektivischer Bildhälften eine unmögliche, widerspruchsvolle Ansicht eines Objekts zu konstruieren. Das Rezept, nach dem der Pavillon der Lithographie gebaut ist, ist in dem nach dem gleichen Prinzip konstruierten

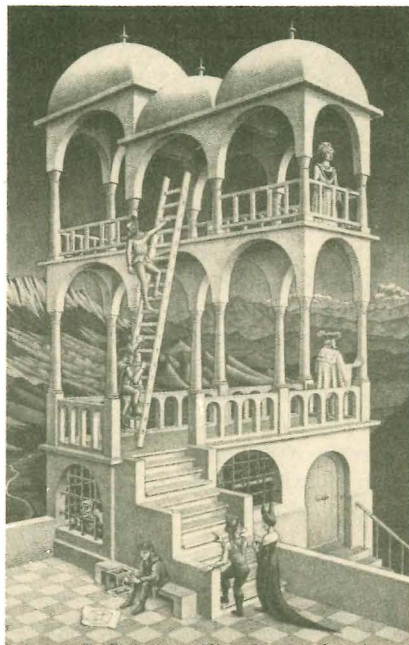


Bild 1 Belvedere

Selbstporträt von M. C. Escher



Escherwürfel verborgen, den der Narr links unten im Bild ratlos in seinen Händen dreht. Das Bild 2 veranschaulicht dieses Rezept: Die Parallelprojektion des Kantengerüsts eines mathematischen Würfels (oder Quaders) (Bild 2a) läßt sich bei materieller Realisierung der Kanten auf zwei verschiedene

Weisen (Bild 2b, c) deuten. Der Escherwürfel ist aus der oberen Hälfte von b) und der unteren von c) zusammengesetzt.

Der Escherwürfel wurde mittlerweile so etwas wie ein inoffizielles Emblem der angewandten Geometrie (darstellenden Geometrie, automatischen elektronischen Bildverarbeitung usw.) und taucht in den verschiedensten Varianten auch als Symbol von mathematischen Tagungen, Zeitschriften u.ä. auf. Im September 1981 diente er zur Freude aller Mathematik-Briefmarken-Fans als Motiv für eine Marke (Bild 3), die anlässlich des 10. Internationalen Österreichischen Mathematiker-Kongresses in Innsbruck (d. h. nationaler österreichischer Kongreß mit starker internationaler Beteiligung) ausgegeben wurde. Am 16. Februar 1982 kamen drei Gebrauchsmarken (Bild 4) an die schwedischen Postschalter, die ebenfalls perspektivisch widerspruchsvolle Figuren zeigen, entworfen von dem schwedischen Graphiker *Oscar Reuterswärd*. Er ist in der internationalen mathematischen Öffentlichkeit bisher nicht annähernd so bekannt und populär wie Escher. Nach den Angaben der schwedischen Post soll er jedoch sogar der erste Künstler gewesen sein, der sich schon vor 25 Jahren mit der Konstruktion solcher Bilder beschäftigte und die meisten Varianten hierzu fand. Dem Leser sei empfohlen, die „Rezepte“, nach denen die drei abgebildeten Figuren von Reuterswärd erzeugt wurden, nach dem hier für den Escherwürfel durchgeführten Muster zu enthüllen.

P. Schreiber

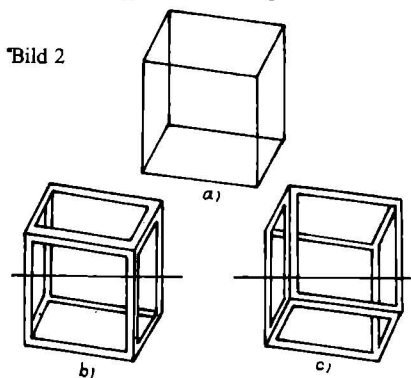


Bild 2

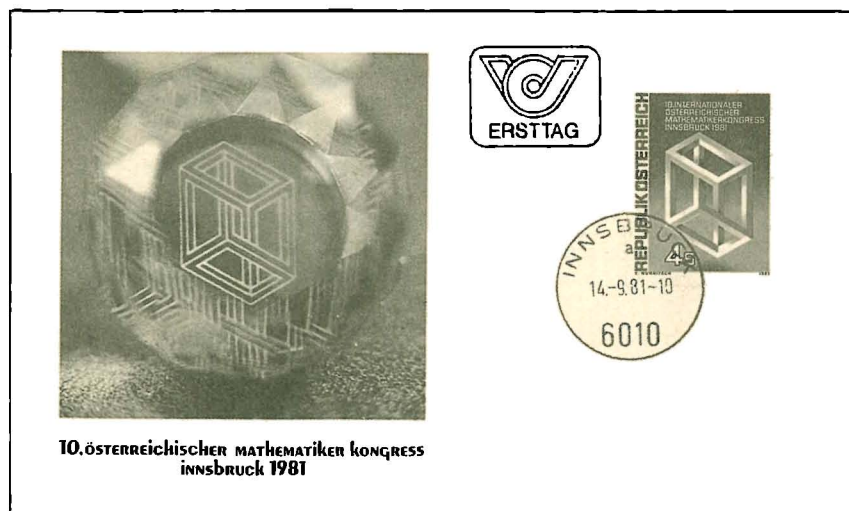


Bild 4

Ein Leben für die Wissenschaft

Zum 200. Todestag
von Daniel Bernoulli
(8. 7. 1700 bis 17. 3. 1782)

In der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften hat der Name *Bernoulli* dasselbe Ansehen wie etwa der Name *Bach* in der Musikgeschichte, handelt es sich doch hier wie dort um Generationen von Männern, die sich auf ihren Arbeitsgebieten – hier der Mathematik und Naturwissenschaften, dort der Musik – bleibende Verdienste erwarben.

Daniel Bernoulli war ein Sohn des ebenfalls berühmten Mathematikers Johann Bernoulli (1667 bis 1748) und seiner Frau Dorothea, die einer Baseler Ratsfamilie entstammte. Er wurde am 8. 7. 1700 in der niederländischen Universitätsstadt Groningen geboren. Dort bekleidete der Vater zu dieser Zeit eine Professur für Mathematik und arbeitete auch erfolgreich auf physikalischen und medizinischen Gebieten. Zur Schule ging Daniel in Basel, wo die Familie nun seit 1705 lebte. Er zeigte schon sehr zeitig eine besondere Begabung für mathematische Fragestellungen, sollte aber dennoch nach dem Wunsch des Vaters, der inzwischen in Basel Professor für Mathematik war, Kaufmann werden. Daniel begann zwar eine dementprechende Lehre, aber er brach diese zweimal ab, ohne dazu die Erlaubnis seiner Eltern einzuholen. Schließlich durfte er 1718 dann noch ein Medizinstudium aufnehmen, das er an den Universitäten in Basel, Strasbourg und Heidelberg absolvierte und 1721 abschloß. In den folgenden Jahren finden wir Daniel Bernoulli als Arzt in Italien. Im Jahre 1725 folgte er dann schließlich gemeinsam mit seinem Bruder Nicolaus (1695 bis 1726), der ebenfalls Mathematiker war, einer Berufung an die Akademie in St. Petersburg. Dort arbeitete er auch mit dem 1727 aus Basel gekommenen Leonard Euler (1707 bis 1726), der bei Daniels Vater Mathematik studiert hatte, zusammen. Aber schon 1733 mußte Daniel Bernoulli diese mathematisch fruchtbare Zusammenarbeit mit Euler abbrechen, da er Petersburg wegen des ihm nicht zuträglichen Klimas verlassen mußte. Er nahm nun in Basel die Professur für Anatomie und Botanik und ab 1750 die für Physik an. Obwohl sich Daniel Bernoulli in Basel (wohl auch wegen des sehr gespannten Verhältnisses zu seinem rechthaberischen und streitsüchtigen Vater, der sich mit ihm zerstritten hatte, weil Daniel einen Preis gewann, um den sich auch

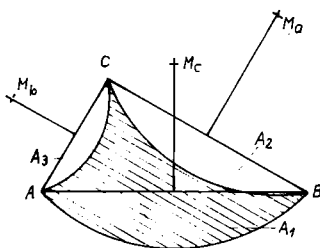
der Vater beworben hatte) nicht so recht wohl fühlte, schlug er einige Berufungen in zum Teil ehrenvolle auswärtige Professuren ab. Nach seiner Versetzung in den Ruhestand widmete sich Daniel Bernoulli, der unverheiratet blieb, mit seiner ganzen Person der wissenschaftlichen Arbeit. Ihm war das Glück beschieden, auch im hohen Alter bis zu seinem Tode am 17. 3. 1782 in geistiger Frische tätig sein zu können.

Die Leistungen Daniel Bernoullis können hier nur andeutungsweise hervorgehoben werden. Auf mathematischem Gebiet hat er beispielsweise Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie bearbeitet und erzielte bedeutende Ergebnisse beim Bearbeiten partieller Differentialgleichungen. Seine bedeutendsten Leistungen finden wir auf dem Gebiete der Physik. Sein 1738 erschienenes Werk *Hydrodynamik oder über die Kräfte und Bewegungen der Flüssigkeiten* enthielt eine Reihe von wichtigen Gesetzmäßigkeiten und Hypothesen, von denen eine die Grundlage für den Aufbau der kinetischen Gastheorie bildet. In einem Zerstäuber kommt praktisch eine Gesetzmäßigkeit zur Anwendung, die in der Strömungslehre nach ihrem Entdecker als *Bernoullische Gleichung* bezeichnet wird. Die Ergebnisse Daniel Bernoullis auf medizinischem Gebiet – z. B. Abhandlungen über die Muskelbewegung und Atemphysiologie – weisen ihn auch dort als leistungsfähigen Forscher aus, erlangten aber nicht die Bedeutung der Ergebnisse seiner mathematisch-physikalischen Forschungsarbeit. Daniel Bernoulli (wie übrigens auch die anderen Wissenschaftler der Gelehrtenfamilie Bernoulli) erfreute sich bereits zu seinen Lebzeiten aufgrund seiner wissenschaftlichen Leistungen hoher Wertschätzung und war Mitglied der seinerzeit bedeutendsten Akademie wie der Royal Society und der Berliner und Pariser Akademie.

M. Krebs

Aufgabe

Über Daniel Bernoulli ist bekannt, daß er sich im Jahre 1724 mit der Frage der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke befaßte:



In dem Bild ist eine sogenannte *Pelekoide* dargestellt. Man erhält sie, indem man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks jeweils Viertelkreisbögen beschreibt, und zwar über der Hypotenuse nach außen und über den Katheten nach innen. Es ist zu untersuchen, in welcher Beziehung die schraffierte Fläche und die Fläche des Dreiecks *ABC* zueinander stehen.



Die historische Mathematikaufgabe

Ich hab's gefunden!

Der im 3. Jahrhundert v. u. Z. lebende Gelehrte *Archimedes* gilt unbestritten als der bedeutendste Mathematiker der Antike. Er wirkte vorwiegend in seiner Vaterstadt Syrakus und verkehrte dort am Hofe der Könige Hieron II. und Gelon. Mit vielen Gelehrten seiner Zeit stand er im Briefwechsel.

Der Architekt Vitruvius, der etwa 200 Jahre später zur Zeit des Kaisers Augustus in Rom lebte, hat die folgende Anekdote über Archimedes überliefert.

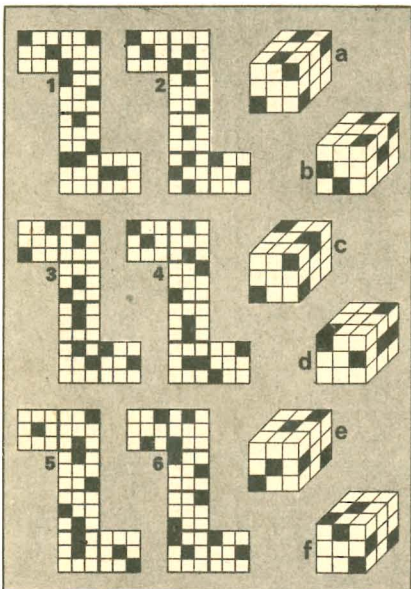
Der König Hieron II. von Syrakus übergibt einem seiner Goldschmiede einen Klumpen reinen Goldes. Der Handwerksmeister soll daraus einen Weihkranz herstellen. Als die Arbeit ausgeführt ist, befürchtet der König jedoch, daß der Schmied im Innern des Kranzes einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt habe. Er wendet sich an Archimedes und bittet ihn, die Sache zu untersuchen, also festzustellen (ohne das Kunstwerk zu zerbrechen), ob Silber für den Kranz verwendet worden sei. Der Gelehrte kann das Problem nicht sogleich lösen. Als er sich eines Tages in der Badewanne waschen will, bemerkt er beim Einsteigen in die mit Wasser ganz gefüllte Wanne, daß wohl ebenso viel Wasser überläuft, wie sein Körper verdrängt. Da kommt ihm plötzlich der Gedanke, daß man die vom König gestellte Aufgabe lösen muß, indem man den Kranz in ein voll mit Wasser gefülltes Gefäß taucht und die überlaufende Wassermenge bestimmt. In der Freude über seine Entdeckung eilt Archimedes nackt aus dem Bade auf die Straße und ruft: „Heureka, heureka! (Ich hab's gefunden, ich hab's gefunden!)“

Wie konnte Archimedes die Aufgabe lösen? Kann man das Gold-Silber-Mischungsverhältnis des Kranzes berechnen?

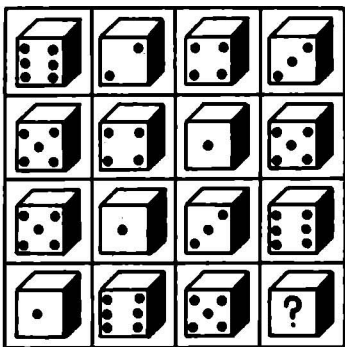
H. Pieper

Würfeleien

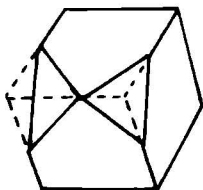
▲1▲ Welches Netz gehört zu welchem Würfel?



▲2▲ Jede waagerechte Reihe der Würfel hat eine gemeinsame Eigenschaft. Wie heißt diese, und wieviel Punkte muß der letzte Würfel in der letzten Reihe erhalten?

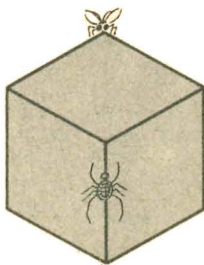


▲3▲ Ein Holzwürfel wird an seinen 8 Ecken so abgefeilt, wie es für zwei Ecken im Bild gezeigt ist, d.h., die entstehenden Flächen berühren sich an den Ecken. Es entsteht offensichtlich ein Körper, der Dreiecke und Quadrate als Begrenzungsfläche hat.

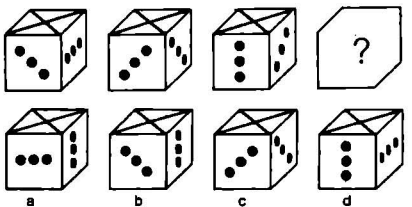


Wie viele Dreiecke und Quadrate treten auf?
Wie viele Ecken hat dieser Körper?

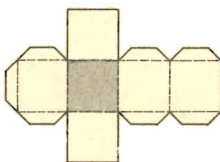
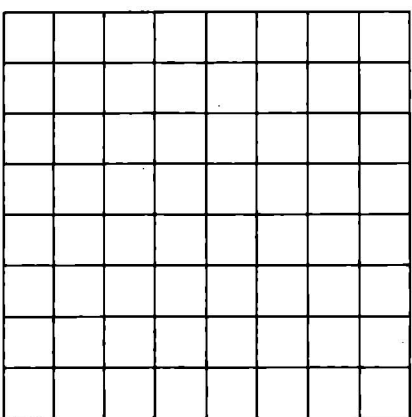
▲4▲ Eine Spinne sitzt in der Mitte der Kante eines Würfels und will die Fliege, die an einer gegenüberliegenden Ecke des Würfels sitzt, auf dem kürzesten Weg erreichen. Wie muß sie laufen?



▲5▲ Welcher Würfel von a bis d gehört an die Stelle des Fragezeichens?



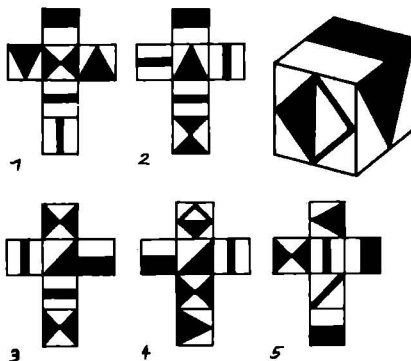
▲6▲ Würfelspiel: In diesem Spiel braucht man zwei Dinge, ein quadratisches Netz mit 64 quadratischen Feldern und einen Würfel, dessen eine Seitenfläche blau und genau so groß ist wie das quadratische Feld (siehe Bild).



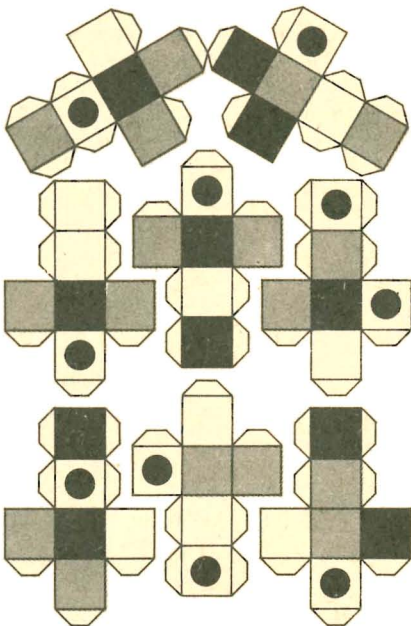
Man darf nun auf dem Netz so vorwärtsschreiten, indem man den Würfel über eine Kante von einem Feld auf das andere wälzt, nach oben, nach unten, nach rechts oder nach links, nur nicht diagonal oder über eine Ecke.
Man lege den Würfel in die linke obere Ecke des Netzes mit der blauen Seite nach oben.

Man wälze den Würfel durch alle 64 Felder (jedes nur einmal) und erreiche am Ende die rechte obere Ecke des Netzes mit der blauen Seitenfläche nach oben. Unterwegs darf die blaue Seitenfläche niemals nach oben kommen.

▲7▲ Welches Netz entspricht dem abgebildeten Würfel?



▲8▲ Man schneide die 8 Würfelnetze aus und klebe sie jeweils zu einem Würfel zusammen.

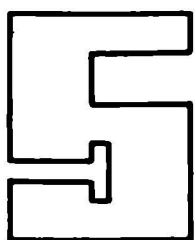


Dann stelle man von den 8 kleinen Würfeln einen großen Würfel so zusammen, daß sich auf den sichtbaren Seiten des großen Würfels nirgendwo gleiche Muster der kleinen Würfel berühren.



**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059**



Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
 1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
 Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
 Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
 rates der Deutschen Demokratischen Repu-
 blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
 nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
 im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
 derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
 handel und der Deutschen Post entgegen-
 genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
 land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
 handel; für das sozialistische Ausland über
 das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
 für alle übrigen Länder über: Buchexport
 Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. A. Gurwitsch, Eigenfoto (S. 99);
 Originalskizzen von F. W. A. Fröbel (S. 103);
 Bildstelle Vobi, Rat des Bezirks Cottbus
 (S. 104); Lothar Otto, Leipzig (S. 106);
 B. Ehrenburg, Moskau (S. 108); E. Walter,
 Tallinn (S. 108); J. Lehmann, Eigenfoto
 (S. 109); Fotos aus Urania (S. 111)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Autor H. Goehre, Bad Berka,
 gestaltet von H. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
 Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
 AN(EDV) 128–ISSN 0002–6395
 Redaktionsschluß: 28. Juni 1982
 Auslieferungstermin: 21. Oktober 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 97 Chemische Reaktionen – mathematisch berechnet [9]*
 Dr. R. Schimming, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität*
 Greifswald
- 99 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. techn. Jakob A. Gurwitsch [8]
 Wissenschaftl. Institut für Gummi- und Latexwaren, Moskau
- 100 Konstruktionen mit einem Spiegellineal [7]
 Mathematikfachlehrer U. Sonnemann, Oberschule Grabow
- 102 Für Spezialisten: Anspruchsvolle Olympiadeaufgaben [9]
Zusammenstellung: J. Lehmann/Dr. W. Moldenhauer
- 103 Für den Briefmarkenfreund: Russisch für Mathematiker? [5]
 Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität*
 Greifswald
- 104 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
 15 Jahre mathem. Mannschafts-Wettbewerbe im Bezirk Cottbus
 Oberstudienrat M. Mäthner, Rat des Bezirks Cottbus, Abt. Vobi/Oberstudienrat
 Gerhard Schulze, Herzberg
- 105 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]
 Speziell für Klasse 5/6 · Wer knobelt mit?
 Oberstudienrat G. Schulze, Herzberg
- 105 Gute Grundkenntnisse gefragt [5]
 Sieben Geometrieaufgaben auf einen Streich – Wir betrachten
 Flächen
 Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 106 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
 Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie
- 108 Unsere historische Aufgabe: Die Vielfachen der 9 [7]
 Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften
 der DDR
- 109 16 Jahre *alpha*-Wettbewerb [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann
- 110 Sind Mausefallenbeweise nötig? (Teil 2) [8]
 Dr. R. Thiele, leitender Lektor im Hirzel-Verlag Leipzig
- 111 Ein Kulturschatz unserer Heimat – Das Fröbelzimmer in
 Schweina [5]
- 112 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 114 XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
 4. Stufe (DDR-Olympiade)
- 116 Lösungen [5]

III. U.-Seite: Ein „eigener Algorithmus“ zum Ordnen des Zauber-
 würfels [5]

Achmed Schulz, Schüler der EOS Greifswald (Kl. 12)

IV. U.-Seite: Mit Zirkel und Zeichendreieck [5]

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Chemische Reaktionen – mathematisch berechnet

Die Ähnlichkeit zwischen der Formelsprache der Chemie und der Formelsprache der Mathematik ist nicht nur äußerlich. Es gibt einen inneren Zusammenhang, über den wir hier sprechen wollen. Genauer: Es wird eine Methode entwickelt, mit der man die möglichen Reaktionen zwischen gegebenen chemischen Verbindungen mathematisch ausrechnen kann.

Wir verwenden die übliche chemische Symbolik, z. B.

H = Wasserstoff, C = Kohlenstoff,

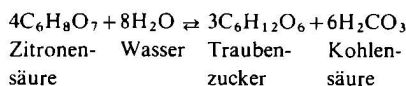
N = Stickstoff, O = Sauerstoff,

S = Schwefel, Cl = Chlor.

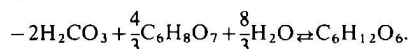
Es empfiehlt sich, die auftretenden Berechnungen mit Papier und Bleistift mitzumachen.

Ein Beispiel

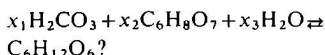
Die chemische Reaktion



eignet sich besonders gut, um unsere Methode zu erläutern. (Sie besitzt allerdings kaum praktische Bedeutung.) Die Faktoren 4, 8, 3, 6 in der Reaktionsgleichung heißen stöchiometrische Zahlen. Es seien auch negative sowie gebrochene stöchiometrische Zahlen zugelassen. Solche treten z. B. auf, wenn wir $6\text{H}_2\text{CO}_3$ mit minus auf die linke Seite bringen und das Ganze durch 3 dividieren:



Nun wollen wir diese Reaktionsgleichung vorübergehend „vergessen“ und fragen: Gibt es eine chemische Reaktion mit Kohlensäure, Zitronensäure, Wasser auf der linken Seite und Traubenzucker auf der rechten Seite, d. h. eine Reaktion der Form



Die Aufgabe besteht gerade darin, die unbekannten stöchiometrischen Zahlen x_1, x_2, x_3 zu berechnen. Wir zählen die verschiedenen Atomsorten auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung ab:

H-Atome: links $2x_1 + 8x_2 + 2x_3$, rechts 12.

C-Atome: links $x_1 + 6x_2$, rechts 6.

O-Atome: links $3x_1 + 7x_2 + x_3$, rechts 6.

Entscheidend ist, daß die Atomzahlen links und rechts übereinstimmen müssen, d. h. es gelten die Bedingungen

$$G_1: 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 12,$$

$$G_2: x_1 + 6x_2 = 6,$$

$$G_3: 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 6.$$

Damit ist unser chemisches Problem auf ein mathematisches Problem zurückgeführt, nämlich auf ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen G_1, G_2, G_3 und drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 . Es gibt verschiedene Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Wir wählen das sogenannte Gaußsche Verfahren aus. In unserem Beispiel läuft es wie folgt ab: Im ersten Schritt addiert man geeignete Vielfache von G_1 zu G_2 bzw. G_3 , so daß sich dort die Glieder mit x_1 wegheben:

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ mal } G_1 \text{ plus } G_2 \text{ ergibt}$$

$$G_2': 2x_2 - x_3 = 0.$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ mal } G_1 \text{ plus } G_3 \text{ ergibt}$$

$$G_3': -5x_2 - 2x_3 = -12.$$

Im zweiten Schritt addiert man ein geeignetes Vielfaches von G_2' zu G_3' , so daß sich dort das Glied mit x_2 weghebt:

$$\frac{5}{2} \text{ mal } G_2' \text{ plus } G_3' \text{ ergibt}$$

$$G_3'': -\frac{9}{2}x_3 = -12.$$

Aus dem sogenannten gestaffelten Gleichungssystem

$$G_1: 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 12,$$

$$G_2': 2x_2 - x_3 = 0,$$

$$G_3'': -\frac{9}{2}x_3 = -12$$

kann man nun „von unten nach oben“ die



Lösung ausrechnen. Es ergibt sich, genau wie es sein muß,

$$x_3 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, x_1 = -2,$$

und das Problem des Chemikers ist gelöst.

Rechnen mit Matrizen

Der Mathematiker ist noch nicht zufrieden: er will die Rechnung noch eleganter gestalten. Startpunkt ist für ihn jetzt das Zahlenschema, welches die Zusammensetzung der gegebenen chemischen Verbindungen erfaßt:

$$\begin{array}{cccc|c} & \text{H}_2\text{CO}_3 & \text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7 & \text{H}_2\text{O} & & \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \\ \text{H} & 2 & 8 & 2 & & 12 \\ \text{C} & 1 & 6 & 0 & & 6 \\ \text{O} & 3 & 7 & 1 & & 6 \end{array}$$

Ein derartiges Zahlenschema heißt Matrix (Mehrzahl: Matrizen). Eine Matrix besteht aus Zeilen (nebeneinanderstehende Zahlen) und Spalten (untereinanderstehende Zahlen). Der vertikale Strich vor der letzten Spalte dient nur zur Erhöhung der Übersichtlichkeit und könnte auch weggelassen werden. Das „Rezept“ für das Gaußsche Verfahren lautet nun wie folgt:

Im ersten Schritt addiert man geeignete Vielfache der 1. Zeile zur 2. bzw. 3. Zeile, so daß sich dort in der 1. Spalte jeweils eine Null ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 1 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

Im zweiten Schritt addiert man ein geeignetes Vielfaches der neuen 2. Zeile zur neuen 3. Zeile, so daß sich dort in der 2. Spalte eine Null ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -12 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix könnte nun in das gestaffelte Gleichungssystem G_1, G_2', G_3'' zurückverwandelt werden. Besser ist es, auch das endgültige Ausrechnen von x_3, x_2, x_1 mit Matrizen abzuwickeln:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 0 & \frac{20}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 0 & \frac{20}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

Das Ziel ist ein charakteristisches Muster aus Nullen und Einsen links vom vertikalen Strich. Man erzeugt dieses Muster, indem man (von unten nach oben) geeignete Viel-

fache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert bzw. indem man eine Zeile mit einem geeigneten Faktor durchmultipliziert. Nach jedem Schritt ist es prinzipiell möglich, in das entsprechende Gleichungssystem zurückzuverwandeln. Wenn man nach dem letzten Schritt zurückverwandelt, so steht die Lösung da:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= -2, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= \frac{4}{3}, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

oder $x_1 = -2, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{8}{3}$.

Die Lösung kann also direkt rechts vom vertikalen Strich abgelesen werden. Das Verfahren in der neuen erweiterten Form heißt Gauß-Jordan-Verfahren. Wer mitgerechnet hat, wird bemerken, daß rein rechnerisch dasselbe passiert ist wie oben, als wir mit Gleichungssystemen arbeiteten. In der neuen Form wird aber Schreiarbeit eingespart.

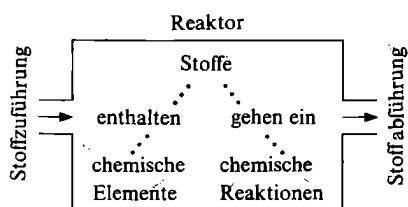
Schlüsselstoffe und Nichtschlüsselstoffe

„Rezepte“ zum Lösen bestimmter Aufgaben sind die eine Seite der Wissenschaft; nützliche allgemeine Begriffe sind die andere Seite. Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir uns begriffliche Klarheit verschaffen. Stellen wir uns einen „chemischen Reaktor“ vor, d. h. irgendeine (künstliche oder natürliche) Art von Behälter. Der Reaktor enthält chemische Stoffe, welche bestimmte chemische Reaktionen eingehen. Auf der linken Seite einer Reaktionsgleichung stehen die „Ausgangsstoffe“ und auf der rechten Seite die „Endstoffe“. Diese Begriffe sind relativ, da wir ja auch negative stöchiometrische Zahlen zulassen und da ein Endstoff in einer nächsten Reaktion wieder Ausgangsstoff sein kann. Nicht mehr so relativ sind die Begriffe

Schlüsselstoffe = minimale Anzahl von Ausgangsstoffen,

Nichtschlüsselstoffe = restliche Stoffe.

Bild 1 Schema eines chemischen Reaktors



Damit ist folgendes gemeint:

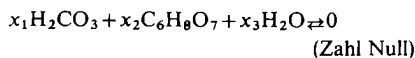
1. Es gibt keine Reaktion, in der nur Schlüsselstoffe auftreten.
2. Jeder Nichtschlüsselstoff ist einziger Endstoff in einer Reaktion mit Schlüsselstoffen als Ausgangsstoffen.

Die unter 2. angesprochenen Reaktionen nennt man auch Schlüsselreaktionen, denn aus ihnen lassen sich alle nur möglichen Reaktionen zusammensetzen.

Nochmals das erste Beispiel

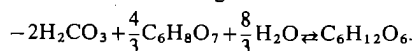
In unserem Demonstrationsbeispiel kann man H_2CO_3 , $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7$, H_2O als Schlüsselstoffe nehmen und $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ als Nichtschlüsselstoff. Beweis:

1. Der Ansatz



liefert nach dem Gauß-Jordan-Verfahren $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Folglich gibt es keine Reaktion zwischen H_2CO_3 , $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7$, H_2O .

2. Wir hatten oben ausgerechnet



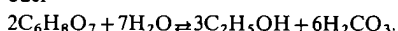
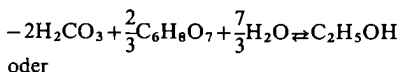
Was passiert nun, wenn wir den Nichtschlüsselstoff $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ durch $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ (Ethylalkohol) ersetzen?

Bei Weglassen der Zwischenschritte erhalten wir nach dem Gauß-Jordan-Verfahren

$$\begin{array}{cccc|c} \text{H}_2\text{CO}_3 & \text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7 & \text{H}_2\text{O} & \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} & \\ \text{H} & \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{21}{2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array} \right)$$

und können die gesuchte Reaktionsgleichung ablesen:



Links vom vertikalen Strich hat sich die Rechnung offenbar nicht geändert; nur rechts vom Strich treten neue Zahlen auf. Man kann Doppelarbeit vermeiden und die Rechnung für $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ und für $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ gemeinsam in einem Zuge durchführen: Das Gauß-Jordan-Verfahren wird auf die Zusammensetzungs-Matrix

$$\begin{array}{cccccc|c} \text{H}_2\text{CO}_3 & \text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7 & \text{H}_2\text{O} & \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 & \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} & & \\ \text{H} & \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 12 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} & & & & \end{array}$$

angewendet und liefert

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ & & & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$



Links vom Strich in der Zusammensetzungs-Matrix stehen die Schlüsselstoffe und rechts vom Strich die Nichtschlüsselstoffe. Anstatt zwei kann man natürlich auch drei, vier, ... Nichtschlüsselstoffe betrachten.

Schlüsselstoffe in der Uratmosphäre der Erde

Vor einigen Milliarden Jahren bestand die Erdatmosphäre hauptsächlich aus

CO	CO_2	H_2O
Kohlenmonoxid	Kohlen-dioxid	Wasser
CH_4	NH_3	SO_2
Methan	Ammoniak	Schwefeldioxid

Welche dieser Stoffe sind als Schlüsselstoffe auszuwählen, wenn man als Nichtschlüsselstoffe alle übrigen aus C, O, H, N, S zusammengesetzten Verbindungen annimmt?

Bild 2

Die Uratmosphäre der Erde als chemischer Reaktor

Uratmosphäre

CO	CO_2
H_2O	CH_4
NH_3	SO_2



Urozean

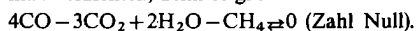
Antwort: Jede der Kombinationen

- $\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}, \text{CH}_4, \text{NH}_3, \text{SO}_2$
- $\text{CO}, \text{H}_2\text{O}, \text{CH}_4, \text{NH}_3, \text{SO}_2$
- $\text{CO}, \text{CO}_2, \text{CH}_4, \text{NH}_3, \text{SO}_2$
- $\text{CO}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}, \text{NH}_3, \text{SO}_2$

kommt in Frage.

Beweis:

1. Auf NH_3 und SO_2 kann man als Lieferanten von N bzw. S nicht verzichten. Auf je einen der Stoffe CO , CO_2 , H_2O , CH_4 kann man verzichten, denn es gilt



Auf je zwei Stoffe kann man aber nicht verzichten, denn es gibt keine Reaktion zwischen je dreien der Stoffe. (Dies ist natürlich nachzurechnen!)

2. Das Gauß-Jordan-Verfahren „klappt“ für jede der obigen Kombinationen und für jeden anderen aus C, O, H, N, S bestehenden Nichtschlüsselstoff. Das bedeutet, daß beispielsweise die Zusammensetzungs-Matrix

$$\begin{array}{c} \text{CO}_2 \quad \text{H}_2\text{O} \quad \text{CH}_4 \quad \text{NH}_3 \quad \text{SO}_2 \\ \begin{pmatrix} \text{C} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{O} & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \text{H} & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ \text{N} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

in das charakteristische Muster aus Nullen und Einsen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überführt wird.

Beispiel mit praktischer Bedeutung

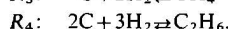
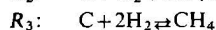
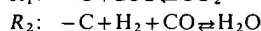
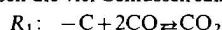
Das folgende Beispiel entstammt einer Chemievorlesung an der Karl-Marx-Universität Leipzig. Bei der sogenannten Synthesegasgewinnung enthält der Reaktor die Stoffe C, H₂, CO, CO₂, H₂O, CH₄, C₂H₆ (Ethan). Durch geschickte Anordnung erreichen wir, daß das Gauß-Verfahren schon fertig ist, ehe es begonnen hat!

$$\begin{array}{c} \text{C} \quad \text{H}_2 \quad \text{CO} \quad \text{CO}_2 \quad \text{H}_2\text{O} \quad \text{CH}_4 \quad \text{C}_2\text{H}_6 \\ \text{O} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{H} \\ \text{C} \end{array}$$

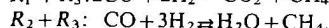
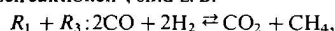
Die Fortsetzung zum Gauß-Jordan-Verfahren erfordert nur noch zwei Rechenschritte und liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen die vier Schlüsselreaktionen ab:



Andere mögliche Reaktionen, also „Nicht-schlüsselreaktionen“, sind z. B.



Aufgaben für den Leser

▲ 1 ▲ Man berechne Schlüsselreaktionen zwischen den Stoffen

CO, CO₂, H₂O, CH₃OH, C₂H₅OH.

Hinweis: Wie in allen unseren Beispielen, so gilt auch hier Anzahl Schlüsselstoffe = Anzahl der beteiligten chemischen Elemente.

▲ 2 ▲ Man berechne Schlüsselreaktionen zwischen den Stoffen (Te = Tellurium)

Te₂, TeO₂, TeOCl₂, TeCl₂, TeCl₄.

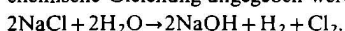
Dies ist ein Beispiel aus der anorganischen Chemie!

R. Schimming

Eine Aufgabe aus

der Abschlußprüfung Kl. 10 (1981)

Aus Natriumchloridlösung wurden auf elektrochemischem Wege Natriumhydroxid, Wasserstoff und Chlor hergestellt. Für die Stoffumwandlung bei diesem technischen Prozeß kann zusammenfassend folgende chemische Gleichung angegeben werden:



In unserer Republik werden jährlich 750000 t Natriumchlorid für die Produktion von Natriumhydroxid, Wasserstoff und Chlor verbraucht.

Berechnen Sie das Volumen des Chlors, das bei der Umsetzung dieser Masse an Natriumchlorid entsteht!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jakob A. Gurwitsch und Dozent Dr. H.-J. Binder

Wissenschaftl. Inst. f. Gummi- und Latexwaren, Moskau/TH Leuna-Merseburg

▲ 2237 ▲ Man lasse Kaliumpermanganat und Salzsäure miteinander reagieren.

a) Stellen Sie die Reaktionsgleichung mit zunächst unbestimmten Koeffizienten x_i auf!

b) Berechnen Sie die unbestimmten Koeffizienten x_i durch Aufstellung und Lösung eines linearen Gleichungssystems!

Beachten Sie, daß die Lösungen x_i nur ganzzahlig sein können!

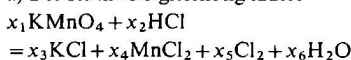
c) Geben Sie die Reaktionsgleichung an!



Prof. Dr. sc. techn. Jakob A. Gurwitsch, Moskau

Lösung:

a) Die Reaktionsgleichung lautet



b) Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\text{K: } x_1 = x_3 \quad (1)$$

$$\text{Mn: } x_1 = x_4 \quad (2)$$

$$\text{O: } 4x_1 = x_6 \quad (3)$$

$$\text{H: } x_2 = 2x_6 \quad (4)$$

$$\text{Cl: } x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 \quad (5)$$

das sind 5 Gleichungen für 6 Unbekannte.

$$\text{Wegen (1) und (2) folgt } x_3 = x_4 = x_1 \quad (6)$$

$$\text{und wegen (3) und (4) } 8x_1 = x_2 = 2x_6. \quad (7)$$

Aus (4) und (5) folgt

$$2x_6 = x_3 + 2x_4 + 2x_5,$$

also wegen (6) und (7)

$$8x_1 = 3x_1 + 2x_5$$

und damit

$$5x_1 = 2x_5.$$

Eine Variable ist also frei wählbar, z. B. $x_5 = 5$.

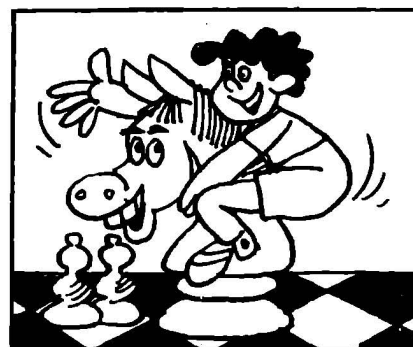
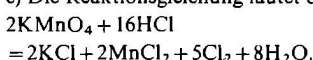
Damit ergeben sich $5x_1 = 10$,

$$\text{also } x_1 = 2 \quad x_4 = 2$$

$$x_2 = 16 \quad x_6 = 8.$$

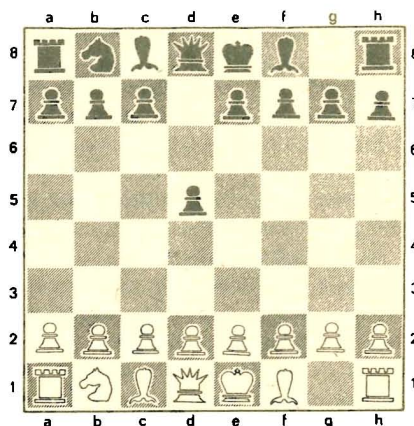
$$x_3 = 2$$

c) Die Reaktionsgleichung lautet damit



Geheimnisvolles Verschwinden

Im Schachspiel bewegt sich der Bauer nur vorwärts. Ausgenommen den Schlagfall, geht er von seinem ursprünglichen Standfeld (für weiße Bauern – die 2. Reihe, für schwarze Bauern – die 7. Reihe) aus um ein oder zwei freie Felder auf seiner Linie vor sowie in der Folge um je ein freies Feld. Beim Schlagen bewegt er sich auf ein solches Feld vorwärts, das in der Diagonale an sein eigenes angrenzt. Jeder Bauer, der die letzte Reihe (für Weiß die 8., für Schwarz die 1.) erreicht hat, ist sofort – als Bestandteil des gleichen Zuges – in eine Figur gleicher Farbe (außer dem König) nach Wahl des Spielers zu verwandeln.



In unserem Aufgabendiagramm ist die Partieanfangsstellung noch fast erhalten, nur der weiße Springer g1 und der schwarze Springer g8 sind vom Brett verschwunden, und der schwarze Bauer d7 ist nach d5 gelangt. Welche kürzeste Zugfolge führte aus der Partieanfangsstellung zu dem abgebildeten Stellungsdiagramm? Gibt es dabei unterschiedliche Zugreihenfolgen?

H. Rüdiger

Anmerkung: Die Züge der gesuchten Zugfolge sind zwar bei weitem nicht die besten, aber nach den Spielregeln durchaus machbar!

Konstruktionen mit einem Spiegellineal

Geometrische Konstruktionen können mit verschiedenen Zeichengeräten ausgeführt werden. Oft verwendet man Zirkel, Lineal und Zeichendreiecke.

Wir wollen im folgenden Konstruktionen mit einem Spiegellineal ausführen. Es besteht aus einem ebenen Metall- oder Glasspiegel, der gerade Kanten hat und senkrecht auf der Zeichenebene steht.

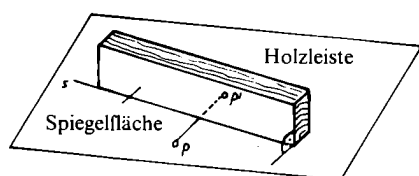


Bild 1 Zeichenebene

Ein Spiegellineal können wir sehr einfach anfertigen. Dazu benötigen wir einen rechteckigen ebenen Spiegel, etwa 20 cm lang und 4 cm breit. Auf der Rückseite dieses Spiegels befestigen wir als Stütze eine quaderförmige Holzleiste. Steht ein Spiegel mit diesen Maßen nicht zur Verfügung, können wir uns auch mit einem rechteckigen Taschenspiegel behelfen, den wir jeweils senkrecht auf die Zeichenebene stellen.

Aus dem Physikunterricht wissen wir, daß ein ebener Spiegel einen Gegenstand so abbildet, daß sein Spiegelbild symmetrisch zur Ebene des Spiegels erscheint. Steht der Spiegel senkrecht auf der Zeichenebene, so liegen ein Punkt P der Zeichenebene und sein Spiegelbild P' symmetrisch bezüglich der unteren Spiegelfläche s . Insbesondere liegt P' wieder in der Zeichenebene. Der Spiegel unseres Lineals bildet also jede Figur F der Zeichenebene so ab, daß die im Spiegel erkennbare Bildfigur F' in dieser Zeichenebene und symmetrisch zu s liegt.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Zeichne einen beliebigen Kreis k mit dem Mittelpunkt M ! Lege das Spiegellineal so auf die Zeichenebene, daß die Spiegelfläche s

- durch M geht,
- nicht durch M geht, aber k schneidet,
- den Kreis k nicht schneidet!

Beobachte jeweils die Bildfigur im Spiegel!

▲ 2 ▲ Zeichne ein Quadrat!

Wie muß man das Spiegellineal auf das Quadrat legen, damit die nicht überdeckte Restfigur durch die im Spiegel erscheinende Bildfigur zu einem vollständigen Quadrat ergänzt wird?

▲ 3 ▲ Zeichne eine Gerade g !

Wie muß man das Spiegellineal auf die Gerade legen, damit die im Spiegel erkennbare Bildgerade g'

- „ohne Knick“, also in gleicher Richtung weiterläuft,
- unter einem Winkel von 90° weiterläuft?

Die Aufgaben zeigen, daß das Spiegellineal nützlich sein kann, um die Symmetrieeigenschaften einer Figur aufzufinden und zu untersuchen. Das Spiegellineal ist als Zeichengerät aber vor allem zum Ausführen bestimmter geometrischer Konstruktionen geeignet.

Mit ihm können verschiedene Grundkonstruktionen ausgeführt werden. Die erste Grundkonstruktion K_1 entspricht der üblichen Verwendung eines Lineals zum Ziehen von Geraden. Sie ergibt sich daraus, daß unser Spiegel eben und die Spiegelfläche s gerade ist.

K_1 : Man kann mit dem Spiegellineal die Gerade konstruieren, die durch zwei verschiedene Punkte hindurchgeht.

Dazu legt man die Spiegelfläche s an die beiden Punkte P und Q an und zieht längs dieser Kante die Gerade PQ .

Eine zweite Grundkonstruktion K_2 beruht auf der Spiegelwirkung des Lineals.

K_2 : Man kann mit dem Spiegellineal einen beliebig vorgegebenen Winkel halbieren.

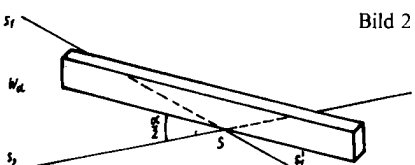


Bild 2

Dazu stellt man das Spiegellineal so auf die Zeichenebene, daß seine Kante s durch den Scheitel S des gegebenen Winkels $\angle(s_1, s_2)$ geht und dreht das Spiegellineal solange um S bis das Spiegelbild von s_2 mit dem Schenkel

s_1' des Nebenwinkels $\angle(s_2, s_1')$ und daher auch mit s_1 in einer Geraden liegt. Die Spiegelfläche s ist dann Symmetrieachse zu s_1, s_2 und gibt die Winkelhalbierende w_α von $\angle(s_1, s_2)$ an.

Die nächsten Konstruktionen sollen mit dem Spiegellineal als endliche Folge der Grundkonstruktion K_1 und K_2 ausgeführt werden.

In Aufgabe 3 haben wir bereits festgestellt:

Eine Senkrechte h zu einer Geraden g im Punkte $P \in g$ konstruiert man, indem man das Spiegellineal so auf P stellt, daß das Spiegelbild von g ohne Knick im Spiegel weiterläuft. Nach der Grundkonstruktion K_2 haben wir dann einen gestreckten Winkel halbiert und dadurch eine Senkrechte konstruiert.

▲ 4 ▲ Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P , der nicht auf g liegt.

- Konstruiere das Lot l von P auf g !
- Konstruiere die Parallele h von g durch P !

▲ 5 ▲ Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ über der gegebenen Seite AB !

Hinweis: Errichte in A und B die Senkrechten zur Strecke AB ! Halbiere den rechten Winkel $\angle DAB$! Die Winkelhalbierende schneidet die in B errichtete Senkrechte von AB in C . Die Senkrechte in C zu BC liefert den Punkt D . Begründe die Konstruktion!

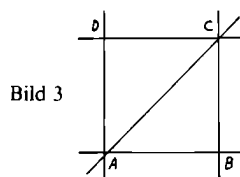


Bild 3

▲ 6 ▲ Konstruiere die Mittelsenkrechte zur Strecke AB ! Fülle dazu vom Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $ABCD$ das Lot auf AB !

▲ 7 ▲ Konstruiere über einer Strecke AB ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck!

Mit den Ergebnissen der Aufgaben 5 und 6 läßt sich zu jeder gegebenen Strecke ein ganzes Vielfaches davon konstruieren. Außerdem ist es möglich, eine Strecke in eine natürliche Anzahl von Teilen zu zerlegen.

▲ 8 ▲ Verfünffache eine gegebene Strecke AB !

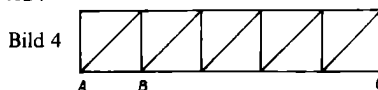
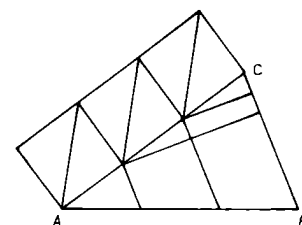


Bild 4

Hinweis: Setze fünf Quadrate aneinander!

▲ 9 ▲ Teile eine gegebene Strecke AB in drei gleiche Teile!

Bild 5



Hinweis: Trage auf dem Hilfsstrahl dreimal die gleiche Strecke ab (siehe Aufgabe 8)!
Verbinde den Punkt C mit B , und zeichne Parallelen durch die Teilpunkte (siehe Aufgabe 4b)!

Konstruktionen, die wir üblicherweise mit dem Zirkel ausführen, sind mit dem Spiegellineal nicht so einfach zu bewältigen. Ein Kreis läßt sich mit dem Spiegellineal nur „punktweise“ konstruieren. Ist der Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises gegeben, so zeichnen wir von Punkt A aus beliebig viele Strahlen und fällen von Punkt B das Lot auf jeden Strahl. Die Schnittpunkte liegen nach der Umkehrung des Satz des Thales auf einem Kreis.

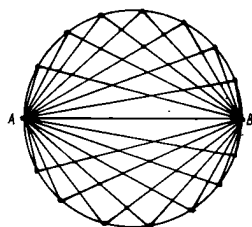


Bild 6

Zur Lösung der folgenden Aufgabe würde man üblicherweise den Zirkel benutzen. Sie ist aber auch mit dem Spiegellineal lösbar.

▲ 10 ▲ Eine Strecke $\overline{AB}$ ist auf einer Geraden g von einem Punkt C aus abzutragen.

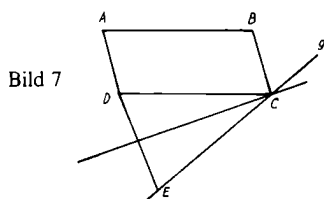


Bild 7

Hinweis: Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ durch zweimaliges Zeichnen von Parallelen! Halbiere den Winkel $\sphericalangle(CD, g)$, und fälle das Lot von D auf die Winkelhalbierende! Die Verlängerung des Lotes schneidet g in E .

Konstruiere auch die zweite Lösung der Aufgabe! Trage $\overline{AB}$ an C auf der Halbgeraden ab, die E nicht enthält!

▲ 11 ▲ Ein gegebener Winkel α ist an eine Gerade g im Punkt P anzutragen!

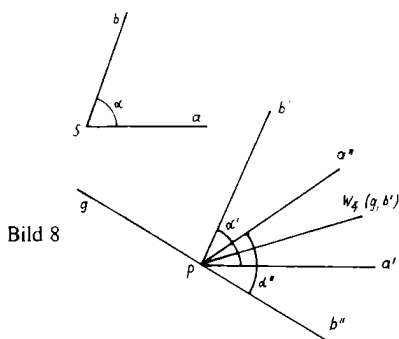


Bild 8

Hinweis: Führe mit dem Spiegellineal folgende Konstruktion aus:

- Verschiebung $\vec{SP}$
- Konstruktion der Winkelhalbierenden $w \sphericalangle(g, b)$
- Spiegelung des Winkels $\sphericalangle(a', b')$ an $w \sphericalangle(g, b')$

Begründe die Konstruktion, und führe sie mit dem Spiegellineal aus!

Beachte, daß es weitere Lösungen gibt, entsprechend der möglichen Lagen des einen Schenkels auf der Geraden und des anderen Schenkels in der jeweiligen Halbebene.

Auf Schwierigkeiten stößt man, wenn mit dem Spiegellineal unter Verwendung der Grundkonstruktionen K_1 und K_2 Schnittpunkte von Kreis und Geraden oder Schnittpunkte zweier Kreise ermittelt werden sollen.

▲ 12 ▲ Gegeben sind eine Gerade g und von einem Kreis k der Mittelpunkt M und ein beliebiger Kreispunkt P , der nicht auf g liegt. Die Schnittpunkte von g und k sind zu konstruieren! Diese Aufgabe ist mit den Grundkonstruktionen K_1 und K_2 nicht lösbar. Sie wird erst ausführbar, wenn wir eine weitere Grundkonstruktion K_3 für das Spiegellineal einführen:

K_3 : Man kann das Spiegellineal so an den Endpunkt Q einer gegebenen Strecke $\overline{PQ}$ legen, daß das Spiegelbild P' des Punktes P auf eine gegebene Gerade g fällt.

Dazu stellt man das Spiegellineal mit der Kante s auf Q und bewegt es so, daß s weiterhin auf Q liegt und der Spiegelpunkt von P auf dem Rande des Spiegels seitlich oder oben mit der gegebenen Geraden g durch Peilung zur Deckung kommt. Hat man diese Lage des Spiegellineals erreicht, muß der Punkt P' konstruiert werden. Dabei ist zu beachten, daß die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q}$ wiederum symmetrisch zur Spiegelkante s sind und daß auf Grund der Peilung P' auf g liegt. Das gleichschenklige Dreieck PQP' wird konstruiert, indem man entlang der Spiegelkante s eine Gerade h zieht und von P aus das Lot l auf h fällt. Der Schnittpunkt des Lotes l mit der Geraden g ist der gesuchte Spiegelpunkt P' von P . Da die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q}$ kongruent sind und P' auf g liegt, hat man mit dieser Konstruktion einen Schnittpunkt des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ und der Geraden g konstruiert.

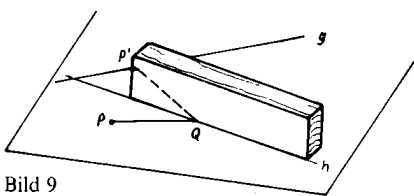


Bild 9

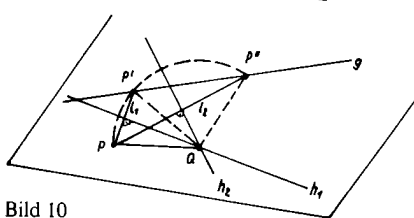


Bild 10

Die Grundkonstruktion K_3 hat je nach der Lage von g und $\overline{PQ}$ zwei, genau eine oder keine Lösung, je nachdem ob die Entfernung des Punktes Q von der Geraden g kleiner, gleich oder größer ist als die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Da die Längen der Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q}$ und $\overline{P''Q}$ gleich sind, läßt sich mit der Grundkonstruktion K_3 auch Aufgabe 12 lösen. Vergleicht man die Genauigkeit der Grundkonstruktionen K_1 , K_2 und K_3 miteinander, so erkennt man leicht, daß bei der Grundkonstruktion K_3 auf Grund der Lagebestimmung des Spiegellineals durch Peilung größere Ungenauigkeiten auftreten können.

▲ 13 ▲ Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, wenn die Seite $\overline{AB}$ gegeben ist!

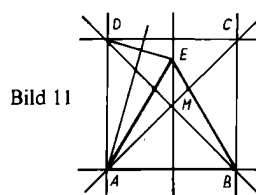


Bild 11

Hinweis: Konstruiere das Quadrat $ABCD$, den Schnittpunkt M der Diagonalen und die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$, die durch M geht! Mit Hilfe von K_3 läßt sich dann die Strecke $\overline{AD}$ so um A drehen, daß der Spiegelpunkt E von D auf die Mittelsenkrechte fällt. Das Dreieck ABE ist nach der ausgeführten Konstruktion gleichseitig.

Als letztes zeigen wir, daß mit dem Spiegellineal auch die Konstruktion der Schnittpunkte zweier Kreise zwar kompliziert, aber grundsätzlich möglich ist.

▲ 14 ▲ Von zwei Kreisen k_1 , k_2 sind die Mittelpunkte M_1 , M_2 und je ein weiterer Kreispunkt P_1 , P_2 gegeben. Konstruiere mit dem Spiegellineal die Schnittpunkte Q_1 , Q_2 der beiden Kreise!

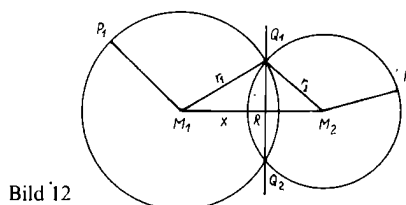


Bild 12

An Hand der Planfigur überlegen wir uns eine Möglichkeit für die Konstruktion.

Da wir mit dem Spiegellineal keine Kreise zeichnen können, ist es erforderlich, die Verbindungsgerade Q_1Q_2 der Schnittpunkte zu konstruieren. Die folgenden Rechnungen ergeben eine Orientierung für diese Konstruktion.

Gegeben sind $|P_1M_1|=r_1$, $|P_2M_2|=r_2$, $|M_1M_2|=a$, gesucht sei $|M_1R|=x$.

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für die rechtwinkligen Dreiecke M_1RQ_1 und RM_2Q_1

$$r_1^2 = x^2 + h^2, h^2 = r_2^2 - (a-x)^2$$

und weiter

$$r_1^2 = x^2 + r_2^2 - (a-x)^2$$

$$r_1^2 = x^2 + r_2^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$x = \frac{r_1^2 + a^2 - r_2^2}{2a}. \text{ Wir setzen für}$$

$$r_1^2 + a^2 = b^2.$$

(1)

Dann ist

$$x = \frac{b^2 - r_2^2}{2a} = \frac{(b+r_2) \cdot (b-r_2)}{2a} \text{ und}$$

$$\frac{x}{b-r_2} = \frac{b+r_2}{2a}.$$

(2)

Auf Grund der Gleichungen (1) und (2) kann man Strecken der Länge b und x nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem Strahlensatz mit dem Spiegellineal konstruieren.

Trägt man dann von M_1 eine Strecke der Länge x auf dem Strahl M_1M_2 ab, so erhält man R . In R kann man leicht die Senkrechte zu M_1M_2 errichten. Abschließend kann man von M_1 aus eine Strecke der Länge r_1 mit Hilfe der Grundkonstruktion K_3 so drehen, daß ihr Endpunkt auf dieser Senkrechten liegt. Damit erhält man die Schnittpunkte Q_1, Q_2 der Kreise k_1, k_2 .

Mit dieser Aufgabe erhält man ein recht erstaunliches Resultat. Man kann mit dem Spiegellineal Kreise nur punktweise konstruieren. Ansonsten sind jedoch alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen, die darauf beruhen, Schnittpunkte von zwei Geraden oder von Kreis und Geraden oder von zwei Kreisen zu ermitteln, mit dem Spiegellineal lösbar.

Beim praktischen Ausführen bestimmter Konstruktionen stellt man fest, daß es Aufgaben gibt, die mit dem Spiegellineal einfacher als mit Zirkel und Lineal lösbar sind (siehe z. B. Aufgabe 15).

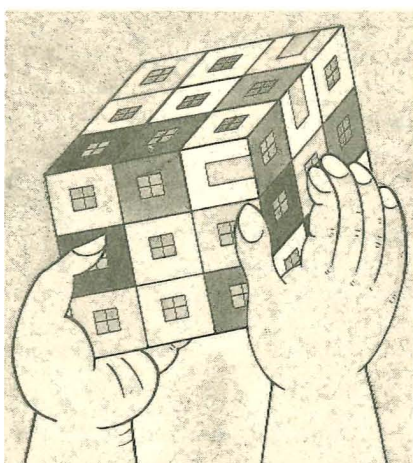
Andere Aufgaben erfordern jedoch mit dem Spiegellineal erheblich mehr Aufwand als mit Zirkel und Lineal!

▲ 15 ▲ Konstruiere ein regelmäßiges Achteck

a) mit dem Spiegellineal,

b) mit Zirkel und Lineal!

U. Sonnemann



Für Spezialisten: Anspruchsvolle Olympiadeaufgaben

▲ 1 ▲ Zehn Spieler begannen zu spielen, jeder mit derselben Geldsumme. Jeder warf der Reihe nach fünf Würfel. Bei jedem Spielerwechsel bezahlte der Spieler, der eben gewürfelt hatte, jedem der neun Mitspieler $1/n$ der Geldsumme, die jener Mitspieler in dem Augenblick besaß, wobei n die geworfene Augensumme bezeichnet. Alle Spieler würfelten und zahlten reihum. Beim zehnten Wurf zeigten die Würfel die Augensumme 12. Als alles bezahlt war, stellte man fest, daß jeder Spieler genau die Summe besaß, die er zu Beginn hatte.

Man bestimme, wenn möglich, die Augensumme der Würfel bei jedem Wurf.

Internationaler Wettbewerb zwischen Großbritannien, Niederlande, Belgien, Jugoslawien, Luxemburg in Luxemburg (10./11. Juli 1980)

▲ 2 ▲ Zwei Kreise berühren sich (außen oder innen) im Punkt P . Eine Gerade berührt den einen Kreis in A und schneidet den anderen in B und C .

Man beweise, daß die Gerade PA eine der Winkelhalbierenden des Winkels BPC ist.

Internationaler Wettbewerb zwischen Großbritannien, Niederlande, Belgien, Jugoslawien, Luxemburg in Luxemburg (10./11. Juli 1980)



▲ 3 ▲ Die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ sind durch $a_0 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$ definiert. Man beweise: $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

Internationaler Wettbewerb zwischen Großbritannien, Schweden, Finnland und Ungarn auf den Åland-Inseln, Finnland (29. 6. bis 4. 7. 1980) – siehe Teilnehmerplakette

▲ 4 ▲ x_1 und x_2 seien die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0,$$

wobei $p \neq 0$ ein reeller Parameter ist.

Beweise die Ungleichung $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$!

3. Stufe der Mathematikolympiade, VR Bulgarien (18./19. 4. 1980)

▲ 5 ▲ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über der Menge der reellen Zahlen als Grundbereich an:

$$\sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}!$$

3. Stufe der Mathematikolympiade, VR Bulgarien (18./19. 4. 1980)

▲ 6 ▲ Gegeben ist die (arithmetische) Zahlenfolge 0, 5, 10, 15, 20, ...

Die wievielte Zahl in der gegebenen Folge ist die kleinste, deren Quersumme 45 ist?

Ergänzende Aufgabe: Man bestimme die kleinste Zahl, deren Quersumme 27 beträgt und die durch 36 teilbar ist.

Olympiadeaufgabe aus der SR Rumänien (Klassenstufe 7)

▲ 7 ▲ Ermitteln Sie, welche Ziffer rechts neben dem Komma bei der Dezimalentwicklung der Zahl $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$ steht!

Vorbemerkung: Bei der Lösung derartiger Aufgaben sollte man versuchen, die reziproke Zahl $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ zu nutzen.

Ergänzende Aufgabe: Man bestimme alle reellen Zahlen x , für die $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = a \geq 2$ gilt.

Hinweis: Die Substitution $y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$ führt auf die quadratische Gleichung $y^2 - ay + 1 = 0$.

Olympiadeaufgabe aus der SR Rumänien (Klassenstufe 7)

Für die Bereitstellung von Olympiadeaufgaben, aus denen wir eine kleine Auswahl trafen, danken wir den Mitgliedern der Olympiadekomitees P. Kenderov, Sofia; J. Reiman, Budapest; Th. Mühlgassner, Eisenstadt (Österreich); Gazeta Matematică, Bukarest; für ihre Bearbeitung W. Moldenhauer, Erfurt.



Russisch für Mathematiker?

Für den thematischen Sammler ist es häufig besonders lehrreich, Zusammenhänge solcher Briefmarken mit seinem Sammelgebiet aufzudecken, die auf den ersten Blick anscheinend keinerlei Bezüge dazu aufweisen (vgl. den philatelistischen Beitrag in *alpha* 1981, Heft 3, S. 54 bis 55). In diesem Sinne wollen wir hier die 1979 in der DDR anlässlich des IV. Internationalen Kongresses der Lehrkräfte für russische Sprache und Literatur in Berlin erschienene Briefmarke zum Anlaß nehmen, um etwas über die russische Sprache als internationale Vermittlerin mathematischen Wissens auszusagen.



Der erste westeuropäische Mathematiker, der sich für die russische Sprache interessierte, wenn er es auch nicht zu ihrer völligen Beherrschung brachte, scheint *G. W. Leibniz* (1646 bis 1716) gewesen zu sein. Eine nennenswerte Pflege der Mathematik in russischer Sprache gab es zu dieser Zeit noch nicht. Am Beginn eines wissenschaftlichen Lebens in Rußland stehen erst die Gründung der Petersburger Akademie 1725 und der Moskauer Universität 1755. Dort hatten jedoch bis ins 19. Jahrhundert Ausländer, insbesondere Schweizer und Deutsche wie *Daniel und Nikolaus Bernoulli*, *Leonhard Euler*, *Christian Goldbach* und *J. Ch. M. Bartels* (vormals Lehrer von Gauß) die führenden Positionen in der Mathematik inne. Freilich lernten sie alle die russische Sprache zu meistern, und vor allem Euler verfaßte nicht nur einige Lehrbücher, sondern auch einen kleinen Teil seiner wissenschaftlichen Aufsätze in russischer Sprache. Die Ergebnisse des ersten be-

deutenden russischen Mathematikers, *N. I. Lobatschewski*, von denen in Westeuropa zunächst nur „Kostproben“ in Deutsch und Französisch erschienen, veranlaßten *C. F. Gauß* noch im Alter von über 60 Jahren, Russisch zu lernen, um weitere Arbeiten Lobatschewskis lesen zu können. Um die Mitte des 19. Jahrhunderts wurde in Berlin eine Zeitschrift „Archiv für wissenschaftliche Kunde von Rußland“ gegründet, in der nur deutsche Übersetzungen von wichtigen Arbeiten russischer Gelehrter erschienen. Insbesondere auf dem Gebiet der Mathematik rückte Rußland in der zweiten Hälfte des 19. Jh. zu den führenden Nationen auf. Deutscher Einfluß spielte jedoch nach wie vor eine mannigfache Rolle in der russischen Mathematik, und Deutsch blieb die wichtigste Fremdsprache in Rußland, die von vielen russischen Mathematikern ausgezeichnet beherrscht wurde, während es umgekehrt stets nur vereinzelte deutsche Mathematiker gab (um 1900 z. B. *Friedrich Engel* und *Heinrich Liebmann*), deren russische Sprachkenntnisse ausreichten, um russische Arbeiten im Original zu lesen und an ihrer Übersetzung und Herausgabe in deutscher Sprache mitwirken zu können. In den Jahren zwischen 1922 und 1933 wirkten verschiedene namhafte sowjetische Mathematiker, u. a. der Topologe *P. S. Alexandroff* und der Mathematikhistoriker *W. W. Struve*, zeitweise in Deutschland. Die berühmte Göttinger Algebraikerin *Emmy Noether* lehrte 1928/29 als Gast an der Moskauer Universität. All dies trug dazu bei, daß die Sprachbrücke zwischen deutschen und sowjetischen Mathematikern nicht abriß. Man muß dabei berücksichtigen, daß zum Verstehen mathematischer Texte in einer fremden Sprache gewöhnliche Sprachkenntnisse im allgemeinen nicht ausreichen, es ist nötig, die Fachausdrücke zu kennen. (In der belletristischen Literatur kommt es auch jetzt noch vor, daß Mengenlehre – schon fast ein Wort der Umgangssprache – mit „Theorie der Vielheiten“ übersetzt wird.) Inzwischen hatte die sowjetische Mathematik Weltgeltung erreicht. Erste Projekte, bestimmte Werke auch in den USA zu übersetzen, wurden in Angriff genommen, aber erst nach dem 2. Weltkrieg zum Abschluß gebracht. (Heute besteht ein hoher Anteil der Produktion der meist multinationalen Verlagskonzerne, die den kapitalistischen Weltmarkt auf dem Gebiet der mathematischen Fachliteratur beherrschen, aus Übersetzungen aus dem Russischen.)

In den ersten Jahren nach der Befreiung vom Faschismus erhielt auch die wiedererstehende Lehre und Forschung auf mathematischem Gebiet bei uns vielfache Hilfe durch die Sowjetunion, teils durch sowjetische Gastprofessoren wie *B. W. Gnedenko* und *L. A. Kaloujnine*, vor allem aber durch die Bereitstellung von Fachliteratur zur Übersetzung

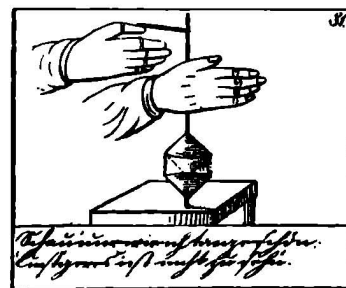
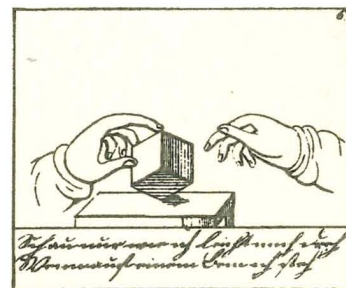
ins Deutsche, wobei auch die Übersetzungen selbst anfangs kaum ohne sowjetische Hilfe zustande kamen. Dieser Unterstützung ist es zu danken, daß Verlage der DDR etwa ab 1950 rund zwei Jahrzehnte lang eine führende Rolle bei der Erschließung sowjetischer mathematischer Fachliteratur nicht nur für Benutzer der DDR, sondern auch für solche in Westeuropa und den USA spielen konnten. Heute verstehen alle Mathematiker der DDR die russische Sprache wenigstens so gut, daß sie die neueste sowjetische Fachliteratur ohne Probleme in der Originalsprache lesen können. Viele von ihnen haben ein Studium in der Sowjetunion oder einen längeren Studienaufenthalt dort aufzuweisen. Daher erscheinen bei uns nur noch wenig Übersetzungen aus dem Russischen. Dafür gibt es verschiedene mehrsprachige Fachwörterbücher und seit 1978 das Lehrbuch „Russisch für Mathematiker“ (VEB Verlag Enzyklopädie). Wer Fremdsprachen beherrscht, braucht nicht die drei bis fünf Jahre zu warten, die es im allgemeinen dauert, bis neue Ergebnisse der Wissenschaft in Übersetzungen erscheinen oder in lehrbuchmäßige Darstellungen einfließen. Russisch ist eine Weltsprache der Wissenschaft geworden.

Die hübsche quadratische Marke mit dem kyrillischen Alphabet verdient daher sehr wohl einen Platz in der mathematischen Briefmarkensammlung.

P. Schreiber

Fröbel-Zitate

„Der Würfel ist der reine Gegensatz zur Kugel, ersetzt die Mannigfaltigkeit ihrer Bewegung durch seine Form, durch die Verschiedenartigkeit seiner Glieder, seiner Eigenschaften und besonders seiner Anschauungsweisen.“



„Das Spiel ist nicht Spielerei, es hat hohen Ernste und tiefe Bedeutung...“



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

15 Jahre mathematische Mannschaftswettbewerbe im Bezirk Cottbus

In *alpha* (Heft 3/1967) berichteten wir über einen erstmalig im Bezirk Cottbus durchgeführten mathematischen Mannschaftswettbewerb.

Er wird in jedem Jahr für eine Klassenstufe ausgeschrieben. Je drei Schüler bilden eine Mannschaft und lösen in kollektiver Zusammenarbeit zehn Aufgaben. Im Oktober wurde ein Kreisausscheid durchgeführt. Zum Bezirksausscheid, der in diesem Jahr im Mai durch den Kreis Senftenberg ausgerichtet wurde, delegierte jeder Kreis seine beste Mannschaft, die aus einer Schule kommen mußte. Der Sieger wurde durch einen Pokal geehrt, den der Vorsitzende der Bezirkssektion der Mathematischen Gesellschaft der DDR gestiftet hatte.

Der Gedanke, durch gemeinsame Arbeit Freude an der Bewältigung mathematischer Probleme zu erzeugen, hat sich bewährt. Im Schuljahr 1981/82 fand nunmehr der 15. Mannschaftswettbewerb statt.

Welche Anforderungen gestellt wurden, zeigen die Aufgaben, die beim Kreisausscheid 1981/82 der Klasse 5 zu lösen waren.

M. Mäthner/G. Schulze

15. Mannschaftswettbewerb

Klasse 5

Kreisausscheid – Schuljahr 1981/82

Arbeitszeit 120 Minuten

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu begründen. Der Lösungsweg muß deutlich erkennbar sein.

Hinweis: Arbeite nach folgenden Regeln:

1. Lies alle Aufgaben sorgfältig durch!
2. Wähle eine Aufgabe aus, von der du meinst, daß du sie lösen kannst!
3. Teile deinem Mannschaftskapitän mit, welche Aufgabe du bearbeitest!
4. Kommst du mit der Lösung nicht zurecht oder bist du unsicher, ob dein Lösungsweg richtig ist, so hole Rat und Hilfe bei deinen Mannschaftskameraden ein!

5. Entwirf die Lösung so, daß sie übersichtlich und jeder Schritt treffend begründet ist!
6. Übergib deinem Mannschaftskapitän den Entwurf deiner Lösung zur Kontrolle!
7. Fertige nach nochmaliger Kontrolle jedes einzelnen Lösungsschrittes die Reinschrift an! Schreibe gut lesbar! Achte auf einwandfreie Rechtschreibung und Grammatik!
8. Frage bei deinem Mannschaftskapitän nach, welche Aufgaben noch zu lösen sind! Wähle eine neue Aufgabe aus und berücksichtige bei ihrer Lösung die Hinweise 1 bis 7!

Zusatz für den Mannschaftskapitän

- Überwache die oben gegebenen Hinweise!
- Vermeide Doppelarbeit!
- Dulde keinen Leerlauf in deiner Mannschaft!
- Lege besonderen Wert auf eine sorgfältige und kritische Kontrolle der Lösungen!

Aufgaben

▲1▲ Auf dem X. Parteitag der SED wurde berichtet bzw. beschlossen: Die industrielle Warenproduktion in der DDR betrug in den Jahren von 1976 bis 1980 insgesamt 1,625 Billionen Mark. 1985 soll diese Produktion 0,471 Billionen Mark größer sein als in den angegebenen Jahren.

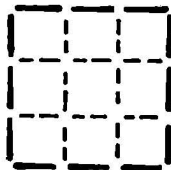
- a) Schreibe die Ziffer der Zahl 1,625 Billionen!
- b) Um wieviel Milliarden Mark soll 1985 die industrielle Warenproduktion 2 Billionen überschreiten?

▲2▲ Wenn man die Zahl 12345679 mit einer einstelligen Zahl multipliziert, erhält man ein Produkt, in dem nur die Grundziffer 1 auftritt.

Wie heißt diese einstellige Zahl?

▲3▲ In dem Bild wird mit 12 Hölzchen eine Fläche umrandet, die einen Inhalt von 9 Flächeneinheiten hat.

Ordne die 12 Hölzchen so an, daß eine Fläche mit dem Inhalt von 5 Flächeneinheiten umrandet wird! Zeichne zwei Beispiele!



▲4▲ Gegeben sind die beiden Ungleichungen

- (1) $2024 \leq x < 2027$
- (2) $250 < y \leq 253$

- a) Gib alle Zahlen x bzw. y an, die die gegebenen Ungleichungen erfüllen!
- b) Berechne 1. die größte Differenz $x - y$, 2. den kleinsten Quotienten $x : y$!

▲5▲ Aus 4 kg Weizenmehl werden 10 kleine Brote gebacken.

- a) Wieviel kleine Brote können aus 40 dt Mehl gebacken werden?

b) Wieviel große Brote, die doppelt so schwer sind wie die kleinen, erhält man aus 4 t Mehl?

▲6▲ Es gibt Zahlenfolgen, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben, so z. B.

20, 40, 60, 80 Differenz 20,

2, 9, 16, 23 Differenz 7.

Vervollständige das nebenstehende Schema so, daß in jeder waagerechten Zeile und in jeder senkrechten Spalte Zahlenfolgen entstehen, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben!

7	13
	..
..	23
25.	

▲7▲ Zeichne ein Rechteck, das 10 cm lang und 4 cm breit ist!

Zerlege das Rechteck in

a) 7 Quadrate, b) 13 Quadrate!

▲8▲ In der Subtraktionsaufgabe ist jedes Zeichen * durch eine Grundziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Gib alle Lösungen an!

$$\begin{array}{r} * * * * 7 \\ - * * * * \\ \hline * \end{array}$$

▲9▲ In der Gleichung $a : b = c d 8$ sind die Zeichen a , b , c und d so durch Grundziffern zu ersetzen, daß richtig gelöste Multiplikationsaufgaben entstehen. Gib alle Möglichkeiten an!

▲10▲ Ines kauft 3 Stück Obstkuchen und 2 Stück Streuselkuchen und bezahlt 1,90 M. Frank bezahlt 2,70 M und erhält dafür 2 Stück Streuselkuchen und 5 Stück Obstkuchen.

Wieviel kostet ein Stück Streuselkuchen, wieviel ein Stück Obstkuchen?

Bei kollektiver Zusammenarbeit



Zum Titelblatt

Der dargestellte Scherenschnitt wurde von *Horst Goehre*, Bad Berka, geschaffen. Wir fanden ihn im Rahmen einer Ausstellung über volkstümliches Schaffen im Freilichtmuseum Schwerin-Mueß, d. Red.



Wer knobelt mit?

Aufgabe 1

Gegeben seien 12 Hölzchen. Jedes Hölzchen sei eine Längeneinheit lang. Umrande mit diesen 12 Hölzchen eine Fläche mit einem Inhalt von a) 9, b) 8, c) 7, d) 6, e) 5, f) 4, g) 3 Flächeneinheiten! Gib für die Fälle a, b, c, d, g je ein Beispiel, für die Fälle e und f mindestens zwei Beispiele an!

Aufgabe 2

Wenn man einen Würfel mit der Kantenlänge von 30 cm in 27 kleine Würfel mit einer Kantenlänge von 10 cm zersägen will, so sind sechs Schnitte notwendig.

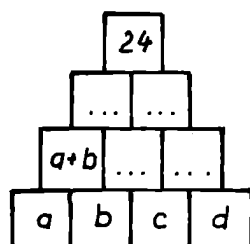
Ingrid behauptet, daß man bei einem Würfel mit der Kantenlänge von 40 cm, den man in 64 Würfel zersägen will, ebenfalls mit sechs Schnitten auskommt, wenn man die zersägten Teile nach jedem Schnitt neu anordnet. Hat Ingrid recht? Wenn ja, wie muß man es anstellen?

Aufgabe 3

Aus 27 kleinen zueinander kongruenten Würfeln, die schwarz oder weiß gefärbt sind, wird ein größerer Würfel zusammengesetzt. Wieviel schwarze bzw. weiße kleine Würfel müssen es sein, wenn die Quadrate der Oberfläche des großen Würfels wie ein Schachbrett gefärbt sein sollen?

Aufgabe 4

Trage in die leeren Felder bzw. für die Variablen natürliche Zahlen in das Schema ein, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind!



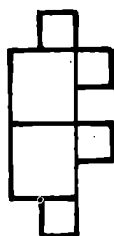
(1) Jedes Feld von der zweiten Schicht an enthält die Summe der Zahlen, die in den beiden unmittelbar darunter stehenden befindlichen Feldern stehen.

(2) a, b, c, d , sind vier verschiedene natürliche Zahlen.

(3) Vertauscht man gleichzeitig a mit b und c mit d so bleiben alle weiteren Eintragungen richtig.

Aufgabe 5

Gegeben sind quadratische Plättchen. Vier dieser Plättchen haben die Seitenlänge 1 cm, die beiden restlichen die Seitenlänge 2 cm. Die sechs Plättchen sollen so zu Figuren zusammengesetzt werden, daß die Seiten aller Plättchen zueinander parallel oder senkrecht verlaufen und aneinanderstoßende Plättchen mindestens eine gemeinsame Ecke haben. Das Beispiel zeigt eine Figur mit einem Umfang von 20 cm.



Welche Umfänge könnten die zusammengesetzten Figuren noch haben? Zeichne für jeden Fall zwei Beispiele!

Aufgabe 6

Bei einem Würfelspiel gilt die folgende Regel: Wenn man eine gerade Zahl würfelt, dann bekommt man so viele Pluspunkte, wie die gewürfelte Augenzahl anzeigt. Würfelt man dagegen eine ungerade Zahl, so gibt es entsprechend viele Minuspunkte. Frank würfelt nun fünfmal hintereinander mit einem Würfel.

Dabei sind zwei Augenzahlen gleich, alle anderen voneinander verschieden. Am Ende haben sich Pluspunkte und Minuspunkte gegeneinander auf.

Welche Augenzahlen hat Frank gewürfelt?

G. Schulze

Unser Buchtip

B. Noack/H. Titze

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR in den Klassen 5 bis 8

184 Seiten, 38 Abb., Pappband
Preis: DDR 6,40 M, Ausland 8,90 M
Bestellangaben: 7076248/002196
Olympiade-Aufg. 5 bis 8

Verlag Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung entgegen.

Gute Grundkenntnisse gefragt

Sieben Geometrieaufgaben auf einen Streich

Wir betrachten Flächen

▲ 1 ▲ Ergänze die folgende Tabelle!

a	5 cm	9 mm			
b	7 cm		16 m		
A		108 mm ²	400 m ²	49 cm ²	81 cm ²

Dabei sind a und b die Seitenlängen und A der Flächeninhalt eines Rechtecks.

▲ 2 ▲ Lege aus a) 24,

b) 11 Einheitsquadraten ein Rechteck!

Wieviel verschiedene Rechtecke lassen sich jeweils aus diesen Einheitsquadraten legen?

▲ 3 ▲ Lege aus 16 gleich langen Stäbchen die Begrenzung eines Rechtecks, ohne dabei ein Stäbchen zu zerbrechen!

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

b) Berechne für jeden dieser Fälle die Anzahl der Quadrate, deren Seitenlänge gleich einer Stäbchenlänge ist und die das Rechteck ausfüllen!

c) In welchem Fall ist diese Anzahl (also der Flächeninhalt) am größten?

▲ 4 ▲ Eine Glasscheibe ist 150 cm lang und 120 cm breit. Wieviel quadratische Glasscheiben lassen sich daraus gewinnen, wenn die Seitenlänge jeder dieser Scheiben 30 cm beträgt?

▲ 5 ▲ Ermittle die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt sich von dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen

a) 16 cm und 4 cm, b) 16 cm und 5 cm möglichst wenig unterscheidet!

▲ 6 ▲ Ein Fußballplatz ist mindestens 90 m, höchstens 120 m lang und mindestens 45 m, höchstens 90 m breit. Wie groß ist mindestens und wie groß ist höchstens die Fläche eines Fußballplatzes?

▲ 7 ▲ a) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist dreimal so groß wie der eines anderen. Beide haben dieselbe Breite.

Was kannst du über die Längen der beiden Rechtecke aussagen?

b) Länge und Breite eines Rechtecks sind jeweils dreimal so groß wie Länge und Breite eines anderen Rechtecks. Was weißt du über die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?

M. Rehm

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 10. Januar 1983



Mathematik

Ma5 ■ 2238 Bernd, ein fleißiger Leser der Schülerzeitschrift *alpha*, sagt zu seinem Freund Fritz: „Denke dir eine dreistellige natürliche Zahl! Multipliziere die Zahl, die der ersten Grundziffer (von links gerechnet) entspricht, mit 2, addiere zu diesem Produkt 3, multipliziere die so erhaltene Summe mit 5, addiere nun die Zahl, die der zweiten Grundziffer entspricht, multipliziere diese Summe schließlich mit 10! Addiere noch die Zahl, die der dritten Grundziffer entspricht! Nenne mir das Endergebnis!“ Nach kurzem Überlegen konnte Bernd dem verblüfften Fritz die von ihm gedachte Zahl nennen. Wie ist das möglich?

Schüler Christian Eisele, Mölkau

Ma5 ■ 2239 Eine Pioniergruppe sammelte insgesamt 600 Flaschen. Die Pioniere dieser Gruppe bildeten drei Brigaden. Jeder Pionier gehörte genau einer dieser Brigaden an. Jede dieser drei Brigaden sammelte die gleiche Anzahl an Flaschen. Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 40 Flaschen mit Ausnahme von zwei Pionieren, von denen jeder nur 20 Flaschen mitbrachte. Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 40 Flaschen. Jeder Pionier der Brigade C sammelte genau 32 Flaschen mit Ausnahme eines Pioniers, der nur 8 Flaschen mitbrachte. Wie viele Pioniere gehören dieser Pioniergruppe an?

Schüler Claus Janke, Ilmenau

Ma5 ■ 2240 In der Divisionsaufgabe

$$* * 8816 : 4 = 1 * 2 * * 4$$

sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Aufgabe erhält!

Schülerin Antje Giehm, Parchim

Ma5 ■ 2241 Eine Mutter sagt zu ihren vier Kindern: „Auf dem Tisch stehen zwei Schalen mit je zehn Äpfeln. Nehmt euch aus der einen Schale eine Anzahl Äpfel heraus und aus der anderen zwei Äpfel weniger, als in der ersten übrig bleiben! Dann teilt die entnommenen Äpfel zu gleichen Teilen unter euch auf! Verteilt schließlich die verbliebenen Äpfel gleichmäßig auf beide Schalen! Morgen dürft ihr euch wieder Äpfel nehmen. Verfährt bei der Aufteilung genauso wie heute! Übermorgen dürft ihr euch die restlichen Äpfel teilen.“ Wie viele Äpfel erhielten die vier Kinder an jedem der drei Tage?

Schülerin Norma Koenig, Eberswalde-Finow

Ma5 ■ 2242 Steffi besitzt ein Fotoalbum, das mehr als 87, aber weniger als 103 Fotos enthält. Der dritte Teil der Fotos umfaßt Steffis Entwicklung vom ersten bis zum zehnten Lebensjahr. Der vierte Teil der Fotos zeigt Bilder vom Schulanfang. Die restlichen Fotos weisen verschiedene Motive auf. Wie viele Fotos weisen solche verschiedenen Motive auf?

Schüler Claus Janke, Ilmenau

Ma5 ■ 2243 Bert, Mario, Peter, Olaf, Rolf und Uwe waren die erfolgreichsten Teilnehmer an einem Schulsportfest. Ermittle, wer von ihnen eine Gold-, Silber- bzw. Bronze-medaille erkämpfte und wer von ihnen den vierten, fünften bzw. sechsten Platz belegte! Von diesen sechs Besten ist uns folgendes bekannt:

- (1) Peter errang nicht die Goldmedaille; Olaf konnte Uwe im sportlichen Wettkampf wieder nicht schlagen.
- (2) Rolf freute sich über eine der drei vergebenen Medaillen.
- (3) Mario und Rolf waren beide besser als Uwe, aber es gelang ihnen nicht, Peter zu schlagen.

Lehrerin R. Bricks, Saalfeld, OS II

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegast haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingegastete Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

30	Thies LuÄher, 2600 Güstrow, Werdersstr 22 KersÄing-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma5 ■ 2244 Zwei Orte A und B sind durch eine 100 km lange Straße miteinander verbunden. Zum gleichen Zeitpunkt fahren zwei Fahrzeuge, das eine von A , das andere von B los und einander entgegen. Diese beiden Fahrzeuge treffen sich, nachdem das aus A abgefahrene Fahrzeug zwei Drittel des Weges zurückgelegt hat, den das aus B abgefahrene Fahrzeug bis dahin zurückgelegt hat. Beide Fahrzeuge fahren mit konstanter Geschwindigkeit, das schnellere mit einer mittleren Geschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- Nach wieviel Minuten Fahrzeit treffen sich beide Fahrzeuge?
- Mit welcher mittleren Geschwindigkeit fährt das langsamere Fahrzeug?

Studentin M. Staskowiak, Damsdorf

Ma6 ■ 2245 Anlässlich eines Appells einer Schule wurden Birgit, Doris und Frank für ihre erfolgreiche Teilnahme an der Kreisolympiade in Mathematik, Russisch bzw. Physik ausgezeichnet. Teilnehmer dieses Appells machten anschließend folgende Aussagen:

- Birgit war weder an der Mathematik- noch an der Physik-Olympiade beteiligt.
- Frank oder Birgit hatten an der Russisch-Olympiade teilgenommen.
- An der Mathematik-Olympiade nahm wieder kein Mädchen unserer Schule teil. Jeder der drei ausgezeichneten Schüler nahm an genau einer der genannten Olympiaden teil. Außerdem war genau eine der drei Aussagen falsch; genau zwei Aussagen waren also wahr. An welcher der genannten Olympiaden nahmen Birgit, Doris bzw. Frank teil?

Lehrerin R. Bricks, Saalfeld

Ma6 ■ 2246 Drei Freunde A , B und C sind gegenwärtig zusammen (in ganzen Zahlen) 100 Jahre alt. Das Lebensalter a von A ist durch 17, das Lebensalter b von B durch 9, das Lebensalter c von C durch 15 teilbar. Wie alt ist jeder dieser drei Freunde gegenwärtig, wenn jeder älter als 25 Jahre ist?

Schülerin Simone Stelter, Silmersdorf

Ma6 ■ 2247 Auf einem Hof sind Gänse, Enten, Puten und Hühner. Insgesamt sind es 16 Tiere. Es sind ebensoviel Gänse wie Enten auf dem Hof. Hühner sind es so viele wie Puten und Enten zusammen, jedoch mehr Enten als Puten. Wie viele Tiere jeder Art sind auf dem Hof?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma6 ■ 2248 In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ habe die Diagonale $\overline{AC}$ die gleiche Länge wie die Seite $\overline{BC}$. Der Winkel $\sphericalangle ADC$ habe die Größe 100° , der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 20° . Welche Größe haben die von der Diagonalen $\overline{AC}$ bei A und C erzeugten Winkel?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma7 ■ 2249 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die jeweils 12mal so groß sind wie ihre Quersumme.

Schülerin C. Münster, Anklam

Ma7 ■ 2250 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 90. Addiert man $\frac{1}{4}$ des ersten und $\frac{3}{4}$ des zweiten Summanden, so erhält man 30. Um welche beiden natürlichen Zahlen handelt es sich?

Schülerin S. Stelter, Silmersdorf

Ma7 ■ 2251 Bei einem Quadrat $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten mit E , F , G , H bezeichnet. Verbindet man diese vier Punkte nacheinander, so entsteht ein Viereck $EFGH$, dessen Flächeninhalt 50 cm^2 beträgt. Welche Seitenlänge hat das Quadrat $ABCD$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma7 ■ 2252 Zerlege ein Quadrat durch das Einzeichnen von Verbindungsstrecken so, daß a) 10, b) 11 und c) 12 gleichschenklige, aber nicht rechtwinklige Dreiecke entstehen, die sich nicht überdecken sollen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ■ 2253 Zwei Schwestern haben zusammen sieben Kinder. Die eine hat doppelt so viele Jungen wie die andere. Beide haben gleich viele Mädchen. Wieviel Kinder hat jede Schwester, und wieviel davon sind Mädchen, wieviel Jungen?

Schüler R. Mayer, Belleben, Kl. 6

Ma8 ■ 2254 In unserem Jahrzehnt (1980 bis 1989) gilt, wenn durch $abcd$ die Jahreszahl dargestellt wird,

$$a + \overline{bc} + d = \overline{ab} + \overline{cd}.$$

Hierbei sollen $\overline{bc}$, $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ zweistellige und a , d einstellige natürliche Zahlen sein. Nach wieviel Jahren (nach 1989) würde diese Bedingung zum ersten Male wieder gelten?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ■ 2255 Es ist zu beweisen, daß der halbe Umfang eines beliebigen Dreiecks stets größer ist als jede seiner Seiten!

Schülerin S. Stelter, Silmersdorf

Ma8 ■ 2256 Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Umkreises eines beliebigen Quadrats doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Inkreises dieses Quadrats!

Offizierschüler R. Pratsch, Dresden

Ma9 ■ 2257 Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

- $y = x + 20$,
- $y^2 + x^2 = 1882$.

Schüler St. Gliwa, Staßfurt, Kl. 10

Ma9 ■ 2258 Mit zwei voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen wurden die folgenden Rechenoperationen ausgeführt:

- Die Zahlen wurden addiert,
- die kleinere Zahl wurde von der größeren subtrahiert,

c) die Zahlen wurden miteinander multipliziert und
d) die größere Zahl wurde durch die kleinere dividiert.

Die erhaltenen Ergebnisse wurden addiert; es ergab sich 243.

Wie heißen die beiden Zahlen?

Schülerin S. Stelter, Silmersdorf

Ma9 ■ 2259 Man ermittle alle Primzahlen p , die sich in der Form $a^4 - b^4 = 5p$ darstellen lassen!

stud. math. A. Fittke, Berlin

Ma9 ■ 2260 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (1 Einheit $\triangleq$ 1 cm) sind drei Geraden durch die Gleichungen

- $y = x + 1$,
- $x + y = 4$,
- $y = 0$.

gegeben. Diese drei Geraden schneiden einander in den Punkten A , B und C . Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ?

Fr.

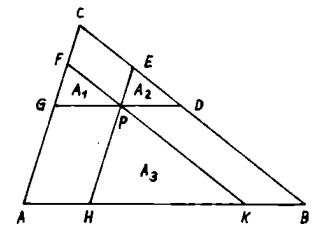
Ma10/12 ■ 2261 In einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ 3 cm lang. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ habe die Größe 35° , wobei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist. Wie lang ist der Umkreisradius?

Schüler F. Hübner, Karl-Marx-Stadt

Ma10/12 ■ 2262 Durch einen beliebigen inneren Punkt P eines Dreiecks ABC wurden die Parallelen zu den Dreiecksseiten gezeichnet. Es seien A der Flächeninhalt des Dreiecks ABC , A_1 , A_2 bzw. A_3 die Flächeninhalte der Dreiecke GPF , PDE bzw. HKP . Es ist nachzuweisen, daß stets

$$\sqrt{A} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} \text{ gilt.}$$

Sch.



Ma10/12 ■ 2263 Ein Würfel soll so in sechs Pyramiden zerlegt werden, daß sich deren Volumina wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 verhalten. Wie muß die Zerlegung erfolgen?

Schülerin A. Meyer, Silberstraße

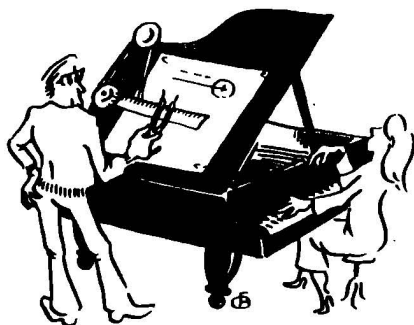
Ma10/12 ■ 2264 Man zeichne ein Kantenmodell der Zerlegung des Würfels in sechs Pyramiden (Aufgabe Ma10/12 ■ 2263) im Grund-, Auf- und Kreuzriss sowie in einem geeigneten Schrägbild!

Fr.

Physik

Ph6 ■ 121 Bei der Buntmetallsammlung erhält Dirk einen quaderförmigen Körper aus Metall. Er möchte gern feststellen, aus welchem Stoff er besteht. Deshalb mißt er die

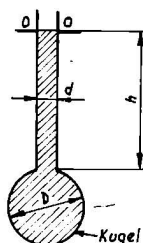
Länge seiner Kanten mit 2,5 cm, 4 cm und 9,5 cm und bestimmt die Masse des Körpers mit 256 g. Aus welchem Metall ist der Körper? Vergleiche mit der Tabelle in deinem Physik-lehrbuch!



Ph7 ■ 122 Von einer 1,50 m hohen Rampe sollen Holzkisten mit einem Gewicht von 25 kp (≈ 250 N) auf einem schrägen Holzbrett nach unten gleiten. Wie groß ist die Länge des Brettes zu wählen, damit die Kisten gerade hinabgleiten? (Die Haftreibung ist nicht zu berücksichtigen.)

Ph8 ■ 123 Die Dichte der Luft beträgt bei 0°C und einem Luftdruck von 760 Torr (0,1013 MPa) $0,00129 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Berechne die Dichte der Luft bei 27°C und 745 Torr (0,0993 MPa)!

Ph9 ■ 124 Ein Quecksilberthermometer habe die skizzierte Gestalt mit den Maßen $D=8,0$ mm (Durchmesser der Kugel), $d=0,078$ mm (Durchmesser der Kapillare). Der Nullpunkt der in $^\circ\text{C}$ geeichten Skale liege bei $h=20$ mm. Der Anzeigebereich gehe bis $+50^\circ\text{C}$. Wie groß ist der Skalenabstand der 50°C -Marke von der Nullmarke, wenn Quecksilber einen räumlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\beta = 18,0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$ hat?



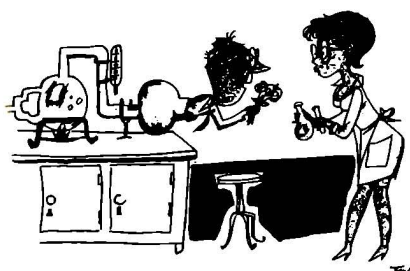
Ph10/12 ■ 125 Ein frei fallender Körper legt während der letzten Sekunde drei Viertel seiner gesamten Fallstrecke zurück. Berechnen Sie, wie lange und aus welcher Höhe der Körper fiel!

Chemie

Ch7 ■ 97 Eine Sauerstoffanlage verbraucht täglich 1560000 m^3 Luft zur Erzeugung von Sauerstoff. Ein Mensch atmet in einer Minute etwa 30 l Luft. Wie lange könnte ein Mensch leben, ehe die Tagesleistung verbraucht ist?

Ch8 ■ 98 Zur Erhöhung der Bodenfruchtbarkeit setzt eine LPG 90 kg Kalksteinmehl, das 90% Kalziumkarbonat enthält, ein. Da noch Vorräte von Kalziumhydroxid im Lager vorhanden sind, will die LPG diese aufbrauchen.

a) Wieviel Kilogramm Kalziumoxid enthält das Kalksteinmehl?
b) Wieviel Kilogramm Kalziumhydroxid müssen eingesetzt werden, um den Boden mit der gleichen Menge Kalziumoxid zu düngen, die im Kalksteinmehl enthalten ist?



Ch9 ■ 99 Ein Liter Leitungswasser wurde chemisch analysiert. Als Bestandteile wurden 192 mg Kalziumhydrogencarbonat und 92 mg Kalziumsulfat ermittelt. Wieviel Gramm Kalziumoxid sind in 5200 ml Leitungswasser enthalten?

Ch10/12 ■ 100 Beim Vermischen von gebranntem Gips ($\text{CaSO}_4 \cdot \frac{1}{2} \text{H}_2\text{O}$) mit Wasser bildet sich bei vollständiger Hydratation das Dihydrat $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Wieviel Prozent des Wassers werden nicht gebunden, wenn als Ausgangsstoffe 2 kg gebrannter Gips und 0,75 l Wasser eingesetzt werden?

Ing. A. Körner,
Leipzig

Ältester erfolgreicher α -Wettbewerbsteilnehmer: Dipl.-Ing Oertel, Zschornowitz, 79 Jahre (Bild links), daneben der Chefred. der α .



Die Vielfachen der 9

Der Naturwissenschaftler *Alexander von Humboldt* (1769 bis 1859) hat mit dem größten Teil der Naturforscher und mit weiteren hervorragenden Geistern seiner Zeit Kontakt gehabt. Neben den persönlichen Begegnungen sind außerordentlich viele briefliche Verbindungen nachweisbar. Humboldt hat fast 50000 Briefe geschrieben. Er korrespondierte auch mit Mathematikern, darunter Dirichlet, Eisenstein, Gauß und Jacobi.

Die Alexander-von-Humboldt-Forschungsstelle der Akademie der Wissenschaften der DDR hat bisher über 16000 Briefe von und an Humboldt erfaßt, darunter die folgende kurze Anfrage an den Direktor der Berliner Sternwarte, den Königlichen Astronomen *J. F. Encke*, die der Gelehrte wahrscheinlich im Sommer 1848 schrieb.

Humboldt wohnte nach seiner großen amerikanischen Forschungsreise (von 1799 bis 1804) und nach über 20 Jahren Aufenthalt in Paris von 1827 an in seiner Geburtsstadt Berlin. Er war dort Kammerherr des preussischen Königs (seit 1840 Friedrich Wilhelm IV.). „Für jede Frage des wißbegierigen Monarchen hatte er aus seiner umfassenden Bildung entweder sogleich eine belehrende Antwort bereit, oder kannte doch die Wege, sie bald herbeizuschaffen“, berichtete der Humboldt-Biograph *A. Dove*.

„Lachen Sie nicht, mein theurer Freund und College, über meine arithmetische Unwissenheit“, schrieb Humboldt an einem Sonntag aus Potsdam an Encke. „Ich soll dem König erklären, warum *nur* in allen Multiplen von 9 die einzelnen Ziffern des Products in der Summe immer 9 geben. $4 \times 9 = 36$. $9 \times 9 = 81$. Und nur bei 9. Da Sie [mit] mir Nachsicht haben, frage ich Sie [...]“ (Zentrales Archiv der AdW der DDR. Nachlaß Encke)

Ein Antwortbrief Enckes auf die Humboldt'sche Frage ist nicht bekannt. Vielleicht hat der Sternwartendirektor sie bei einer Begegnung der Gelehrten in der Akademie mündlich beantwortet. Wie muß die Antwort lauten?

H. Pieper

16 Jahre alpha-Wettbewerb

Eingegangene Lösungen pro Wettbewerbsjahr

1967	5 100		
1968	14 100		
1969	12 400		
1970	25 400		
1971	44 800		
1972	39 500		
1973	44 300		
1974	58 800		
1975	87 400	davon	
1976	97 500	9 400 Ph	6 600 Ch
1977	104 000	5 400 Ph	4 400 Ch
1978	94 600	3 600 Ph	3 600 Ch
1979	94 600	6 700 Ph	3 000 Ch
1980	94 700	4 200 Ph	2 900 Ch
1981	89 400	4 300 Ph	3 600 Ch
1982	95 000	4 400 Ph	3 700 Ch

zus. 1 101 000 38 000 Ph 27 800 Ch

Aufgabengruppe

Wissenschaftlich-organisatorische Leitung:
Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV Leipzig;

Verantwortliche Aufgabenredakteure:

Oberstudienrat Th. Scholl, Berlin (Mathematik, Klasse 5, 6, 7),
Oberlehrer Dr. W. Fregin, Leipzig (Mathematik, Klasse 8 bis 10/12),
Mathematikfachlehrer H. Bögander, Leipzig (Physik, Klasse 6 bis 10/12),
Diplom-Lehrer Christa Reuter, Erfurt (Chemie, Klasse 7 bis 10/12).

Verantwortliche Korrektoren

der eingehenden Lösungen:

Oberstudienrat J. Lehmann, Leipzig (Klassenstufe 5, 6, 7), Diplom-Lehrer Math./Ph. Christine Döhler/Diplom-Physiker Christian Döhler (Klasse 8, 9, 10/12) (alle Leipzig).
Unsere Anerkennung sprechen wir der Redaktionssekretärin Rosemarie Schubert aus, welche die Briefe öffnet, die Lösungen sortiert, die Statistik erarbeitet und die fleißigen Helfer – Schreiber der Antwortkarten – betreut.

Fleißige Helfer

Unser Dank gilt den 7 Erwachsenen und den 11 Schülern der 29. OS Leipzig für das

Schreiben der über 90 000 Karten pro Wettbewerbsjahr, dem Postamt 7027 Leipzig für die gewissenhafte Bearbeitung der Tausende von eingehenden Briefen und Päckchen, dem Hauptpostamt Leipzig für das Abstempeln und Sortieren der Antwortkarten, dem VEB Präwema, Markneukirchen, für die pünktliche Belieferung mit Abzeichen und der Druckerei Gersöne, Leipzig, für die Anfertigung der geschmackvoll gestalteten Urkunden.

Vorbildliche Hilfe

Für den Wettbewerb stellt der Verlag Volk und Wissen, Berlin – er ist der Herausgeber der *alpha* – jährlich rund 28 000 Mark zur Verfügung. Damit ist gewährleistet, daß sich alle interessierten *alpha*-Leser außerordentlich durch das Einsenden von Lösungen bewähren können.



Das sind sie, die 5100 Lösungen zu den vier Heften des Jahrgangs 1967.

Zahlen und Fakten

zum *alpha*-Wettbewerb Heft 6/81

Zum *alpha*-Wettbewerb des Heftes 6/1981 gingen insgesamt 26 332 Lösungen ein. Davon entfielen 105 Lösungen auf folgende Länder: UdSSR, Rumänien, Österreich und die BRD; alle übrigen kamen aus der DDR.

Aufgaben

▲1▲ Nimmt man an, daß jede Lösung aus nur einem A4-Bogen besteht und ein Bogen eine Masse von rd. 4,3 g hat, wieviel Kilogramm an Papier wurden dabei verbraucht?

▲2▲ Jeder Teilnehmer, der eine richtige Lösung eingesandt hatte, bekam eine Antwortkarte mit einer Beurteilung seiner Lösung. Eine solche Karte hat eine Masse von 4,4 g. Welche Masse an Papier wurde für die Antwortkarten verwendet?

▲3▲ Welche Masse an Papier wurde insgesamt verbraucht? (Siehe Aufgabe 1 und 2).

▲4▲ Wie hoch waren die Post- und Schreibgebühren insgesamt, wenn für jede Antwortkarte 0,05 M an Porto und 0,04 M an Schreibgebühren ausgegeben wurden?

▲5▲ Wieviel Stunden waren zum Schreiben dieser Antwortkarten notwendig, wenn ein Schüler für 90 Adressen eine Stunde braucht?

▲6▲ a) Wie lang wäre ein Band, wenn man alle 26 332 Lösungsblätter mit den Schmalseiten bzw. mit den Breitseiten aneinanderlegen würde? Ein Blatt A4 ist 21,0 cm breit und 29,8 cm lang.

b) Welche Fläche würden alle diese Blätter einnehmen?

▲7▲ Eine Antwortkarte hat eine Stärke von 0,36 mm. Wie hoch wäre der „Kartenturm“, wenn man alle Antwortkarten aufeinanderlegen würde?

▲8▲ Die DDR-Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gliederte sich wie folgt: (Heft 6/81)

	Jungen	Mädchen	gesamt
Klasse 5	3151	4064	7215
Klasse 6	2307	3022	5329
Klasse 7	2304	2732	5036
Klasse 8	1084	965	2049
Klasse 9	1418	1142	2560
Klasse 10/12	2481	1557	4038

a) Berechne den Anteil der Jungen und Mädchen für jede Klassenstufe in Prozent, und stelle das Ergebnis in einem Säulendiagramm dar!

b) Wie groß war der prozentuale Anteil der Jungen und Mädchen insgesamt?

Das sind sie, die 26 332 Lösungen zu Heft 6/81. Chefredakteur und Redaktionsassistentin (sie bilden die „Redaktion *alpha*“) übergeben die 36 Bündel (Lösungen zu den 36 Aufgaben dieses Heftes) dem Altstoffhandel.



Sind Mausefallenbeweise nötig?

Teil 2

5. Was sind Mausefallenbeweise?

Nachdem sich das Schopenhauersche Konzept einer anschaulichen Mathematik so verlockend anbietet, wollen wir es einmal genauer betrachten, uns insbesondere den „sich zuziehenden Schlingen“ der traditionellen mathematischen Beweise zuwenden. Sehen wir uns unseren Beweis à la Schopenhauer noch einmal kritisch an. Scheinbar gibt es dort nichts Unanschauliches. (Wir lassen einmal beiseite, weshalb wir auf die Idee des Umklappens kamen, denn vielleicht wäre es im Sinne Schopenhauers auch ohne den „vom Himmel gefallenen Schritt“ zu einem Beweis gekommen.) Aber, woher wissen wir eigentlich, daß der Eckpunkt P auf der Seite QS liegt. Woran erkennen wir die Kongruenz der Dreiecke CPQ und CAB und der anderen Figuren? Obwohl das spezielle Fragen zu unserem Beweis sind, so ist doch klar, daß alle anschaulichen Begründungen ähnliche Fragen aufwerfen.

Kein Zweifel, obwohl ein in der ebenen Geometrie Geübter derartige Sachverhalte schnell als zutreffend ansehen wird, so bedürfen diese Sachverhalte doch einer weiteren Begründung. Und diese ist dann, obwohl sie nicht schwer und kompliziert sein muß, eben nicht mehr so anschaulich und einsichtig. Da muß formaler argumentiert werden, um Geometrie zu der Kunst werden zu lassen, aus falschen Figuren richtige Schlüsse zu ziehen (wie es G. Polya einmal ausdrückte). Versucht einmal zu begründen, warum bei der Spiegelung des Hypotenusenquadrates P auf QS zu liegen kommt!

Schopenhauer bleibt im intuitiven Erfassen mathematischer Zusammenhänge stecken. Solche Zusammenhänge gewissermaßen vor dem geistigen Auge zu sehen, ist wünschenswert und zeigt die schöpferischen Fähigkeiten eines Mathematikers, aber diese Einfälle und Einsichten müssen auf jeden Fall logisch hieb- und stichfest abgesichert werden. Kein Mathematiker hat sich jemals dieser Arbeit entzogen, denn es ist nur zu gut bekannt, wie schnell sich Einfälle als unbrauchbar bei näherer Prüfung erweisen, Einsichten als nicht allgemein gültig und häufig der Wunsch Vater des Gedankens ist. Viele Mathematiker haben berichtet, daß nach langen und inten-

siven Vorarbeiten blitzartig die Lösung erschien. C. F. Gauß gab an, morgens im Bett, noch vor dem Aufstehen, schlagartig erkannt zu haben, wie das reguläre 17-Eck zu konstruieren sei. Eine solche persönliche Erkenntnis kann übrigens anderen nur glaubhaft und nachvollziehbar gemacht werden, wenn sie sich in der Form eines Beweises niederschreiben läßt.

Nachdem uns Schopenhauer angeregt hat, kritisch Beweisverfahren durchzumustern, müssen wir doch zugeben, daß die vermeintliche Schwäche der Griechen, Anschaulichkeit durch formal-logische Schlüsse zu ersetzen, ihre Stärke war. Sie haben doch mehr gesehen als Schopenhauer! (Ganz abgesehen davon, daß der von Schopenhauer kritisierte Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes mehr aussagt als Schopenhauers Beweis, also dementsprechend beanspruchen darf, komplizierter und unanschaulicher zu sein. Schopenhauer kritisierte vermutlich den Beweis, der aus $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ [p und q Projektionen von a und b auf c , also $p + q = c$] folgert: $a^2 + b^2 = pc + qc = (p + q)c = c^2$. Bei Schopenhauer erscheinen die zusätzlichen Informationen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ gar nicht.)

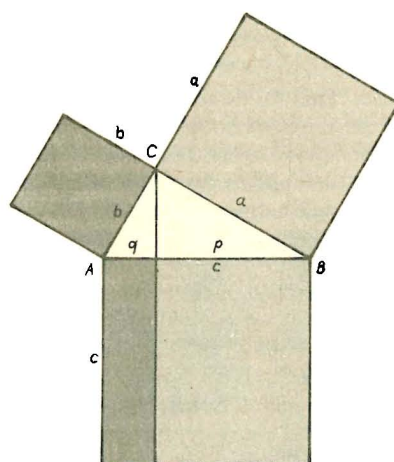


Bild 7
Die weiterreichenden Aussagen Euklids beim Satz des Pythagoras

Auch die Kritik an den indirekten Beweisen müssen wir zurückweisen, denn wie sich in den kritischen Anmerkungen zum Schopenhauerschen Beweis andeutete, brauchen direkte Beweise nicht einsichtiger als indirekte Beweise zu sein; das Ziehen von Linien usw. (also bei uns das Umklappen des Quadrates) wird in beiden Beweisarten häufig erst am Ende des Beweises, nämlich durch den Erfolg, einsichtig werden. Lassen wir schließlich Sherlock Holmes mit einer bemerkenswerten Äußerung zum indirekten Beweis gegenüber seinem wackeren Mitarbeiter Dr. Watson abschließen: Wenn man alles ausgeschlossen hat, so muß das, was übrig bleibt, und wenn es noch so unwahrscheinlich ist, die Wahrheit sein.

Am Ende drängt sich anstelle der Frage, ob Mausefallenbeweise nötig seien, die Frage auf, was überhaupt als Mausefallenbeweis zu bezeichnen sei. Eine Antwort wird zweifelsohne die Feststellung enthalten müssen, daß die Entscheidung darüber, was ein Mausefallenbeweis sei, ziemlich subjektiv ist, d. h. von Erfahrung, Können und Geschmack eines jeden Mathematikers abhängen wird. Gerade subjektive Ausdeutungen vermeidet aber die Mathematik durch ihre logische Methode bei der Widerspiegelung objektiv realer Gesetze: Hier liegt gewiß ein Grund, weshalb künstlerisch begabte Personen häufig der Mathematik gegenüber Ablehnung zeigen: das Aufspüren objektiv vorhandener Gesetze widerspricht scheinbar der schöpferischen Phantasie, mit der es im Kunstwerk offenbar möglich ist, aus dem Nichts eine eigene Welt zu schaffen. Aber ebensowenig wie die „eigenen Welten“ nicht ohne Bezug auf die Realität entworfen werden können, so wenig kommt die Mathematik ohne Phantasie aus. Die unumgängliche Kontrolle der Phantasie, – wie es der Maler F. Goya einmal in seiner Radierung „Die schlafende Vernunft gebietet Ungeheuer“ plastisch ausdrückte – mißfällt Schopenhauer. Logische Kontrolle und Absicherung eines Beweises ist aber für die Mathematik vergleichbar mit dem, was die Naturwissenschaftler mit dem Experiment tun. „Mausefallenbeweise“ sind und bleiben folglich unverzichtbarer Bestandteil der Mathematik.

R. Thiele

Unser Buchtip

R. Thiele

Mathematische Beweise

176 Seiten, zahlreiche Abbildungen

Bestell-Nr. 6659193

Preis 8,60 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

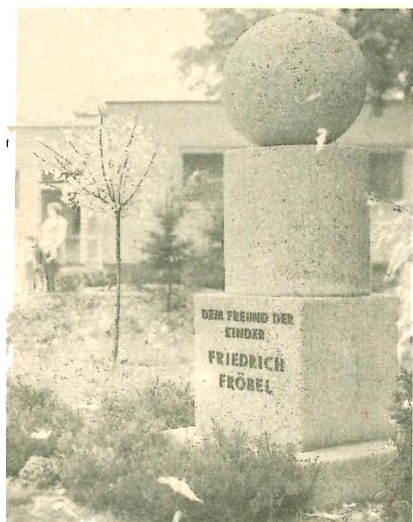
Ein Kulturschatz unserer Heimat

Das Fröbelzimmer in Schweina

Wenn wir an Gedenktagen historisch bedeutsame Persönlichkeiten besonders würdigen, so nicht allein aus Achtung vor ihren Leistungen, die sie für den gesellschaftlichen Fortschritt erbracht haben, sondern vor allem darum, um uns mit ihrem Leben und Wirken eingehender zu beschäftigen, um ihr Anliegen und ihre Ideen tiefer zu verstehen und zu prüfen, ob und wie wir es für gegenwärtige Aufgaben besser und umfassender nutzen können.

So war auch der 200. Geburtstag von Friedrich Fröbel am 21. April 1982 Anlaß, seine pädagogischen Gedanken weiter zu erschließen und sie insbesondere einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Friedrich Fröbel ist bekanntlich als *Begründer des Kindergartens* in die Geschichte eingegangen. Sein Anliegen, eine allseitige und harmonische Menschenbildung durch eine bewußte und planmäßige Vorschulerziehung einzuleiten, ist nicht nur von Interesse für Pädagogen, sondern für alle Eltern, berührt jede Familie, so daß davon ausgehend sich Gelegenheit bot und bietet, Traditionsbewußtsein, aber auch Stolz auf unsere Errungenschaften in der Vorschulerziehung bei vielen Menschen zu wecken und zu fördern. Lenken wir unsere Schritte nach Schweina, von Bad Liebenstein bequem zu erreichen.

Gedenkstein im Fröbel-Kindergarten
Mühlhausen



Fröbel hatte, von vielen als „alter Narr“ verlacht, hier nach der schwersten Enttäuschung seines Lebens Neues schaffen wollen; schwer hatte ihn der Schlag des Verbotes seiner Kindergärten in Preußen getroffen – zu einer Zeit, da Amerika und England sich bereits weit seinen Ideen geöffnet hatten, ja wo sogar „the kindergarten“ in den Wortschatz aufgenommen worden war.

Hatte er im Revolutionsjahr 1848 noch gehofft, sein Lebenswerk durch Schaffung der Fröbel-Schule zu krönen, so war die Zeit – sprich die gesellschaftlichen Umstände – dafür noch nicht reif genug, die Fortschrittsfeinde triumphierten wieder im Jahre 1851, als er – fast siebzigjährig – hierher nach Schweina kam. Ein glücklicher Umstand begünstigte sein Wirken: Herzog Bernhard der II. von Meiningen schloß sich seinen Ideen an und stellte ihm das Schloß Marienthal – bis 1833 Wenigenschweina – für die erste deutsche Kindergärtnerinnenschule zur Verfügung. „Kommt, laßt uns unseren Kindern leben“ – dieses Motto anderen Menschen zu vermitteln, war Fröbel in diesen Räumen nur ein knappes Jahr noch vergönnt.

Am 21. Juni 1852 starb er in einem Zimmer des Schlosses, das jetzt liebevoll als Fröbelgedenkstätte eingerichtet ist (montags bis freitags von 9 bis 16 Uhr geöffnet). Das jetzige Klubhaus des VEB Wälzkörperwerk beherbergt neben Originalzeugnissen, wie den bekannten „Spielgaben“ Würfel, Kugel und Säule, Gastgeschenke aus aller Welt.

Gedenkmünze



Emission: 200. Geburtstag 1982 –
Masse: 12,2 g – Durchmesser: 29 mm –
Legierung: Neusilber-Auflage 60 000 –
Gestalter: Rommel/Dorfstecher

Besonders aufgeschlossen gegenüber Fröbels Methoden sind Japaner, deren „Early Childhood Education Association“ schon manches Zeugnis nationaler traditioneller wie auch moderner Vorschulerziehung beisteuerte. Ein Gedenkstein im Vorgarten zeigt die Grundbestandteile der Spielgaben in einer Form, die auch an anderen Fröbelgedenkstätten zu finden ist (unser Bild).

Wer mehr über Leben und Wirken von Fröbel erfahren will, der greife zu der im Urania-Verlag erschienenen Biographie (Preis: 8,80 M, Bestell-Nr. 653 7268, Autoren: R. Bolt/W. Eichler).

● Etwa 664 400 Kinder im Alter von 3 bis 6 Jahren werden in den 12 000 Kindergärten der DDR betreut.

● In den Jahren 1976 bis 1980 entstanden 91 122 neue Kindergartenplätze, das waren über 12 000 mehr als geplant. Für die Schaffung eines einzigen Kindergartenplatzes gibt der Staat 8 000 bis 10 000 Mark aus.

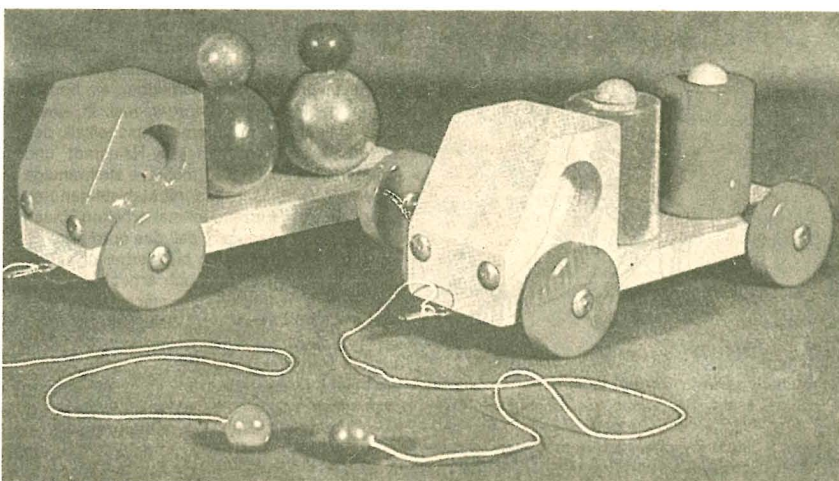
● Allein im Jahre 1980 wurde 1 Milliarde aus dem Staatshaushalt für Kindergärten ausgegeben; Investitionen sind in dieser Summe nicht enthalten.

● 35 Pfennige täglich zahlen die Eltern lediglich als Kostenanteil für das Mittagessen. Der Besuch des Kindergartens ist kostenlos.

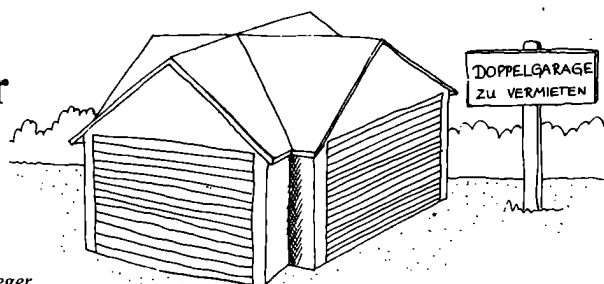
● Über 54 000 Kindergärtnerinnen betreuen und erziehen die Kinder.

● Jedes Jahr verlassen 1 700 Absolventen die 17 pädagogischen Fachschulen der DDR.

Die von Fröbel entwickelte Reihenfolge der Spielzeuge ging von den Entwicklungsstufen des Kindes aus. Beginnen sollte das von den Eltern oder Kindergärtnern geleitete Spiel, als Teil der Erziehung, mit dem Ball, gefolgt von Kugel und Würfel. Daran schlossen sich verschieden geteilte Würfel an, in Baukästen zusammengestellt. Weitere Spiel- bzw. Bauelemente waren Legetäfelchen, -hölzchen, Stäbchen und Buntpapier. – Das hier abgebildete Spielzeug aus sowjetischer Produktion wurde in Anlehnung an Fröbels Spielmaterialien entwickelt.



In freien Stunden • alpha-heiter



Aus Eulenspiegel: Frank Steger

In der AG Mathematik

In der Liste der AGs Mathematik gibt es in der achten Klasse 25% Mädchen. Am 10. Februar wurde Uta krank und bat ihren Bruder Thomas, Schüler der neunten Klasse, für sie die Zusammenkunft der AG zu besuchen; deshalb nahmen an diesem Tage nur noch 20% Mädchen teil.

Wie viele Teilnehmer waren an diesem Tag in der Liste der AG eingetragen?

A. Halameisär, Literat, Moskau

Rechengesetze und Lehrsätze gesucht

a) Welche Rechengesetze behandeln diese Mathematik-
lehrer in ihrem Unterricht?

DR. STEVE T: GITZ, SIBIU

ASTA J. GESSOV, ZEITZ

b) Welche Lehrsätze lehren diese Hochschullehrer?

ACHIM DESSER,
THALE

ULI K. VADERIE,
CALI

Fachlehrer D. Knappe, Jessen

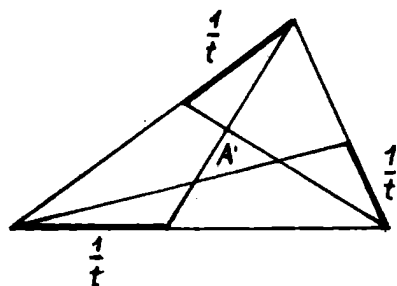
Hirntest: $n=1$; $x=2$; $\frac{A}{A'}=?$

• Berechne n in der folgenden Gleichung ($x \in \mathbb{N}$):

$$n = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$$

• Berechne x in der folgenden Gleichung:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x = 2^x$$



• Gefragt: $\frac{A'}{A}$; Teilverhältnis konstant $\frac{1}{t}$. S. Tunn, Barth

Analyse eines Rechentricks

Zwei einstellige Zahlen werden untereinander an die Tafel geschrieben. Dazu kommt jeweils die Summe der beiden letzten Zahlen, bis 10 Zahlen erreicht sind. Wenn man den Trick kennt, ist man nun in der Lage, mit geringem Rechenaufwand sofort die Summe dieser 10 Zahlen zu nennen.

Man braucht nur die siebente Zahl mit 11 zu multiplizieren. Erhöht wird der Effekt, wenn man bis zur letzten Zahl der Tafel den Rücken kehrt. Zuerst einmal ein Zahlenbeispiel:

3		Nehmen wir die beiden
7		allgemeinen Zahlen a und b ,
10		dann ergibt sich:
17		a
27		b
44		$a + b$
71	$71 \cdot 11 = 781$	$a + 2b$
115		$2a + 3b$
186		$3a + 5b$
+ 301		$5a + 8b$ die 7. Zahl
781		$8a + 13b$
		$13a + 21b$
		$21a + 34b$
		$55a + 88b = 11(5a + 8b)$

Diese Klammer entspricht gerade der 7. Zahl. Der Trick ist also entschleiert! Wer sich schon näher mit Folgen beschäftigt hat, erkennt sicher eine Fibonacci-Folge (siehe Heft 6/81).

AG-Leiter Mathematik Benno-Kunze-Obsieger, Bonn

Holzweg

Mit welcher Manipulierung (z. B. Hölzchen versetzen) kann man in jeder Zeile die angegebene Summe erhalten?

$$\begin{aligned} \vee || - || &= \vee ||| \\ X + ||| &= \vee ||| \\ | \vee + || &= \vee ||| \end{aligned}$$

Füles, Budapest

Füllrätsel

In die Figur sind senkrecht abwechselnd Wörter mit sieben und sechs Buchstaben folgender Bedeutung einzutragen:

[illegible]

1. Begriff aus der Logarithmenrechnung; 2. Begriff aus der Mengenlehre; 3. ein Viereck; 4. ein System von $m \cdot n$ Elementen, die in einem Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnet sind; 5. Teilgebiet der Mathematik; 6. Zeichengerät; 7. Vielgliedriger Ausdruck; 8. Begriff aus der darstellenden Geometrie; 9. Deutscher Mathematiker, auf den der Integralbegriff zurückgeht; 10. Rechenbrett; 11. tschech. Mathematiker, vervollständigte u. a. die Infinitesimalrechnung; 12. Mathematiker des Altertums; 13. deutscher Mathematiker, Begründer der Infinitesimalrechnung.

Bei richtiger Lösung ergeben die Buchstaben der ersten Zeile den Namen des Graphen der Funktion $y = x^2$.

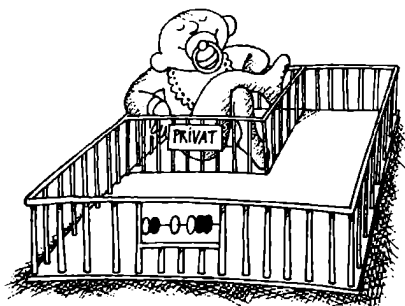
Diplom-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Kombiniere!

Die Zahlen 1 bis 9 sollen in ihrer geordneten Reihenfolge so durch die vier Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ verbunden werden, daß sich als Ergebnis 100 ergibt. Dabei können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefaßt werden.

Wieviel Lösungen findest du?

Aus Matematicko Fisički List, Beograd



Aus Magazin: Hans-Jürgen Starke

Zahlenleiste

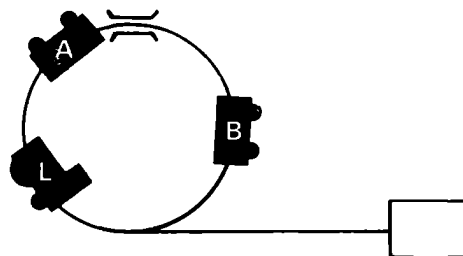
Die vorliegende Zahlenleiste soll in vier deckungsgleiche Teile zerlegt sein, deren Summe jeweils 35 beträgt.

Schülerin Christiane Krause, Berlin (Kl. 8)

2	9	16	7	12	6	4	11
8	15	10	3	13	7	3	14

Lokomotion

Auf den Schienen befinden sich zwei Waggons A und B , sowie die Lokomotive L . Oben ist eine Brücke, und rechts im Bild befindet sich der Bahnhof. Die Lokomotive darf über die Brücke fahren, die Waggons jedoch nicht, da sie zu schwer sind.



Wie kann man die Positionen der beiden Waggon vertauschen und anschließend mit der Lokomotive zum Bahnhof fahren?

Prof. Pierre Berloquin, Paris



Aus Elternhaus und Schule: Lothar Otto

Dialogue

- Ein Lehrer fragt einen seiner Schüler:
„Wieviel ist fünf plus eins?“
Der Schüler schweigt.
„Na schön“, fährt der Lehrer fort, „ich will dir mit
einem Beispiel helfen. Angenommen, ich gebe dir erst
fünf Äpfel und nach einer Weile noch einen. Wieviel
Äpfel hast du dann?“
„Sieben.“
„Wieso das?“
„Weil ich noch einen in der Tasche habe.“

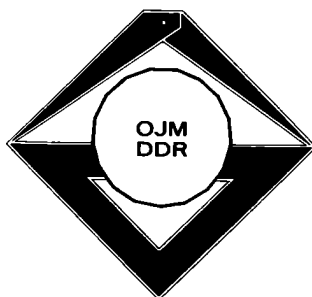
Aus der Zeitschrift Tschajan (Kasan)

- „Als Drucksache braucht man auf eine Karte doch bloß eine Fünf-Pfennig-Marke zu kleben!“ – „Ja.“ – „Was macht man denn nun, wenn man nur eine Postkarte mit einer Zehn-Pfennig-Marke hat?“ – „Man klebt eine Fünf-Pfennig-Marke drüber!“

Lesereinsendung: H. Wiegandt, Borna

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ aus positiven ganzen Zahlen a, b , die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!

Die Aussagen lauten:

- (1) $b \mid (a+1)$,
- (2) $a = 2b + 5$,
- (3) $3 \mid (a+b)$,
- (4) $a + 7b$ ist eine Primzahl.

2. **Definition:** Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand $\overline{XY}$ zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $\overline{XY} \leq d$.

(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M , deren Abstand $\overline{PQ} = d$ beträgt.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob man jede Vierecksfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, daß jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat! Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3A. In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind. Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man eine Funktion F für alle reellen x durch

$$F(x) = f[g(x)]$$

definieren.

Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind. (Bekanntlich heißt eine Funktion ϕ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ so existiert, daß für alle x die Gleichung $\phi(x+p) = \phi(x)$ gilt.)

Jens behauptet:

Ist g eine periodische Funktion (und f peri-

odisch oder nicht), so ist auch stets die – wie oben erklärte – Funktion F periodisch.

Dirk behauptet:

Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets F periodisch.

Christa behauptet:

Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.

Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

3B. Beweisen Sie, daß man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ so verteilen kann, daß für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist! Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

4. Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor. Nach jedem Wurf muß der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.

Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, daß mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG gebildet werden können! Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d. h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

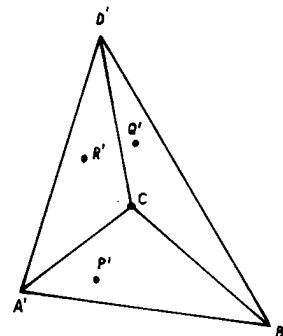
5. Ermitteln Sie alle Mengen $\{a, b, c\}$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, c , die jeweils zusammen mit der Zahl

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ die Gleichung} \\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2s$$

erfüllen!

6. Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD , ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte $A', B', C', D', P', Q', R'$ haben (siehe Bild). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!



Die Aufgaben für Klassenstufen 11/12 veröffentlichen wir im Heft 6/82.

An der OJM nahmen teil: 144 Jungen, 17 Mädchen, 80 Korrektoren, Koordinatoren und Betreuer – Wir sagen Dankeschön an alle die Pionierleiter, FDJ-Sekretäre, AG-Leiter, Fachberater Mathematik und Wissenschaftler, welche den Zehntausenden *Junger Mathematiker* mit Rat und Tat zur Seite stehen.

Preisträger

Einen ersten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Oliver Geupel, EOS Romain Rolland Dresden (1)

In Olympiadeklasse 11/12:

Ralf Horig, I. EOS Dr.-Theodor-Neubauer Cottbus (2); Jochen Lattermann (Kl. 11), Pestalozzischule (EOS) Dresden (3); Bodo Heise, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (4); Ulrich Vollmer (Kl. 11), EOS Heinrich Hertz Berlin (5); Matthias Hübner (Kl. 10), EOS Alexander Humboldt Leipzig (6); Karin Gröger (Kl. 10), EOS Heinrich Hertz Berlin (7); Alexander Schmidt (Kl. 10), EOS Heinrich Hertz Berlin (8)

20 Schüler erhielten einen 2. Preis, 21 Schüler erhielten einen 3. Preis.

Es wurden 25 Anerkennungsurkunden vergeben, und an zwei Schüler wurde eine Urkunde für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe überreicht.



Stellvertretend für alle Bezirksmannschaften stellen wir die seit Jahren erfolgreiche Mannschaft und ihre Betreuer aus Neubrandenburg vor.



1

2

3

4



5

6

7

8



Seit zwei Jahrzehnten vorbildlicher Gastgeber der Olympiaden Junger Mathematiker, DDR-Ausscheid: Die Jugendhochschule Wilhelm Pieck in der Nähe des Bogensees.

Die herrliche Landschaft um den Bogensee bei Berlin-Wandlitz bot vor, zwischen und nach den zwei 4stündigen Klausuren ausgezeichnete Möglichkeiten der Entspannung.



Die Zeichnungen auf dieser Seite stammen von Mathematikfachlehrer Dieter Grupe vom Haus der Jungen Pioniere Tangerhütte, einem der Betreuer der Magdeburger Mannschaft.

Aus dem Rahmenprogramm der OJM

Eröffnung mit anschließendem Kulturprogramm des Erich-Weinert-Ensembles der Nationalen Volksarmee; Forum mit Elke Schilling und Jutta Resch-Treuwerth; Unter vier Augen; Forum mit Vertretern der Gesellschaft für Weltraumforschung und Raumfahrt der DDR: Lösung von Problemen der Weltraumforschung mit Hilfe mathematischer Methoden; Vortrag von Prof. Dr. H. Ahrens, Akademie der Wissenschaften der DDR: Einführung in Probleme der mathematischen Statistik; Vortrag von Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV, Chefredakteur der *alpha*: Logische Spiele (mit Colordias und Ausstellung von 70 Exponaten); Besuch der Hauptstadt der DDR, insbesondere des Freizeitentrums in Berlin-Lichtenberg; Feierlicher Abschluß der OJM im Zentralrat der FDJ.

Olympiade-Kryptogramm

Die Buchstaben in dem Wort OLYMPIADE sind so durch Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

O · YY · YYIA = 0 0 0 0 0 0
L · YY · YYIA = L L L L L L
Y · YY · YYIA = Y Y Y Y Y Y
M · YY · YYIA = M M M M M M
P · YY · YYIA = P P P P P P
I · YY · YYIA = I I I I I I
A · YY · YYIA = A A A A A A
D · YY · YYIA = D D D D D D
E · YY · YYIA = E E E E E E

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden



Путешествие по цифрам.

▲1▲ Начиная с цифры 1 в верхнем левом углу проведите ломаную линию в нижний правый угол с цифрой 9. При этом двигаясь от цифры к цифре можно только либо вправо, либо вниз; сумма цифр, переуркнутых ломаной, должна равняться 100.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Найдите маршруты, содержащие наименьшее и наибольшее количество „поворотов“.

Два квадрата.

▲2▲ Квадрат, изображенный на рисунке слева, обладает удивительным свойством: суммы чисел по вертикалям, горизонталям и диагоналям одинаковы и равны 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

А сможете ли вы разместить цифры от 1 до 9 так, чтобы все эти суммы были различны?

Pat's Pattern

▲3▲ Our pal Pat likes to sit around, ogling the following pattern of numbers. What is the next row? What is the middle number in the 17th row? What is the sum of the numbers in the 21st row?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
31 33 35 37 39 41

Sly Old Fox

▲4▲ A sly old fox ate 100 Valentine candies in five days, each day eating six more than the day before. How many candies did he eat on the fifth day?

▲5▲ Un marchand a mélangé trois qualités de café de la façon suivante: 11 kg à 14 f le kg, 10 kg à 19,05 F le kg et 4 kg à 17 F le kg. A combien revient le kilogramm de mélange?

▲6▲ Un camion transporte 60 cartons contenant des bouteilles d'huile. La masse du chargement est de 1320 kg. Sachant que chaque bouteille d'huile a une masse de 1,4 kg (verre compris) et que la masse de chaque carton vide est de 1 kg, calcule:
a) le nombre de bouteilles d'huile transportées,
b) le nombre de bouteilles par carton.

H. Begander/C. P. Helmholtz/J. Lehmann

Lösungen

Lösungen zu: Chemische Reaktionen mathematisch ausgerechnet

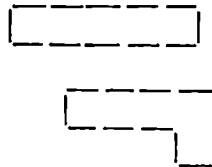
▲1▲ $3\text{CO} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{OH} + 2\text{CO}_2$,
 $6\text{CO} + 3\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 4\text{CO}_2$.
▲2▲ $\text{Te}_2 + 4\text{TeOCl}_2 \rightleftharpoons 2\text{TeO}_2 + 4\text{TeCl}_2$,
 $\text{TeO}_2 + \text{TeCl}_4 \rightleftharpoons 2\text{TeOCl}_2$.

Lösungen zu: 15 Jahre mathematische Mannschaftswettbewerbe im Bezirk Cottbus

▲1▲ a) 1,625 Billionen = 1 626 000 000 000
b) Wegen 1,625 Bill. M + 0,471 Bill. M = 2,096 Bill. M werden die 2 Bill. M um 96 Mrd. M überschritten.

▲2▲ Da nur das Produkt $9 \cdot 9 = 81$ auf 1 endet, kommt nur die einstellige Zahl 9 in Frage. Die Probe $9 \cdot 12345679 = 111111111$ bestätigt dies.

▲3▲ Folgende Lösungen sind möglich:



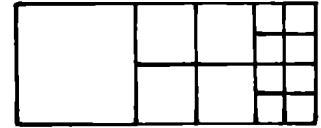
▲4▲ a) $L(x) = 2024, 2025, 2026$
 $L(y) = 251, 252, 253$
b) Größte Differenz $2026 - 251 = 1775$
Kleinsten Quotient $2024 : 253 = 8$

▲5▲ a) 10000 kleine Brote, da $4000000 \text{ g} : 400 \text{ g} = 10000$
b) 5000 große Brote, da $40 \text{ dt} = 4 \text{ t}$ und große Brote doppelt so schwer als kleine Brote sind.

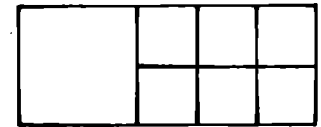
▲6▲ Das untenstehende Schema erfüllt die geforderten Bedingungen:

7	10	13
12	15	18
17	20	23
22	25	28

▲7▲ Zeichnungen in verkleinertem Maßstab
a)



b)



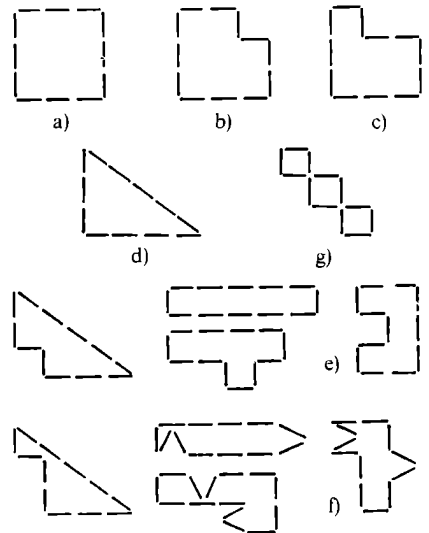
▲8▲
$$\begin{array}{r} 10007 \text{ und } 10007 \\ - 9999 \quad - 9998 \\ \hline 8 \quad 9 \end{array}$$

▲9▲ Wegen $9 \cdot 19 = 171$ muß $c = 1$ sein. Folgende Grundaufgaben enden auf 8: $1 \cdot 8 = 8$; $8 \cdot 1 = 8$; $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8$; $2 \cdot 9 = 9 \cdot 2 = 18$; $3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$; $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4 = 28$; $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$. Drei Fälle ergeben ein dreistelliges Produkt. Somit sind Lösungen $9 \cdot 12 = 108$; $6 \cdot 18 = 108$; $8 \cdot 16 = 128$.

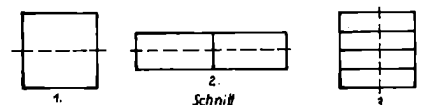
▲10▲ Da man für zwei Stück Obstkuchen 0,80 M (2,70 M - 1,90 M) bezahlen muß, kostet ein Stück Obstkuchen 0,40 M. Ein Stück Streuselkuchen kostet dann 0,35 M. Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Preise.

Lösungen zu: Wer knobelt mit?

▲1▲



▲2▲ Es muß folgendes Prinzip erkannt werden: Die Anzahl der Schnitte verringert sich, wenn man bei jeder neuen Anordnung darauf achtet, daß jeder Teil halbiert wird.



Skizze für die ersten drei Schnitte.

▲ 3 ▲ 1. Fall: Die Würfel an den Ecken sind schwarz gefärbt. Dann benötigt man: 14 schwarz gefärbte Würfel, 12 weiß gefärbte Würfel, 1 Würfel im Innern kann beliebig gefärbt sein.

2. Fall: Die Würfel an den Ecken sind weiß gefärbt. Dann benötigt man analog: 14 weiß, 12 schwarz und einen beliebig gefärbten Würfel.

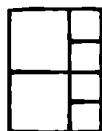
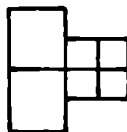
▲ 4 ▲ Es ist die Gleichung zu lösen $a + 3b + 3c + d = 24$. Durch systematisches Probieren erhält man als Lösung $(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 5)$.

Durch geeignetes Vertauschen dieser Zahlen erhält man weitere Lösungen, z. B. $(1, 4, 2, 5)$.

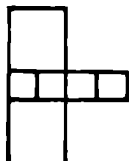
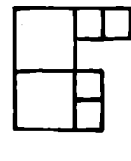
▲ 5 ▲ Es sind Figuren mit 14, 16, 18, 20, 22 cm Umfang möglich.

1. Fall: Umfang 14 cm (Bei Ausschluß von Drehung und Spiegelung gibt es genau eine Lösung.)

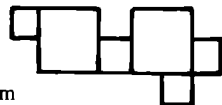
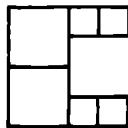
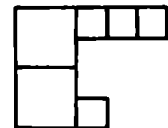
2. Fall: Umfang 16 cm



3. Fall: Umfang 18 cm



4. Fall: Umfang 20 cm



5. Fall: Umfang 22 cm

▲ 6 ▲ Durch systematisches Probieren erhält man folgendes Ergebnis: Frank würfelt 2, 2, 3, 4, 5, denn $2 + 2 + 4 = 3 + 5$.

Lösung zu: Die Vielfachen der 9

Jede natürliche Zahl

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^ka_k$$

ist modulo 9 zu ihrer Quersumme

$$Q(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k \text{ kongruent.}$$

Dies folgt sofort aus $10 \equiv 1 \pmod{9}$.

$$10^2 \equiv 1 \pmod{9}, \dots, 10^k \equiv 1 \pmod{9}.$$

Insbesondere ist eine Zahl n durch 9 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.

Eine zweistellige Zahl $10 \leq n = a_0 + 10a_1 \leq 90$

$(0 \leq a_0 \leq 9, 0 \leq a_1 \leq 9)$ ist also dann und nur dann durch 9 teilbar, wenn $a_0 + a_1$ durch 9 teilbar ist. Wegen $1 < a_0 + a_1 < 18$ ist dies für $Q(n) = a_0 + a_1 = 9$ (und nur dafür) der Fall.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

In der AG Mathematik

Man kann die Voraussetzung, wie in der Aufgabe, in Tabellenform erfassen:

		Mädchen	Jungen
laut Liste	x	$0,25x$	$0,75x$
Teilnehmer			
am 10. Februar	x	$0,25x - 1$	$0,75x - 1$

Laut Voraussetzung ist am 10. Februar der Anteil der Mädchen 20% oder 0,2 von der Gesamtzahl, also

$$0,25x - 1 = 0,2x.$$

Daraus erhält man, daß $x = 20$ ist, d. h. laut Liste waren in der Arbeitsgemeinschaft 20 Schüler, darunter 5 Mädchen, d. h. 20% der Gesamtzahl.

Rechengesetze und Lehrsätze gesucht

Distributivgesetz, Assoziativgesetz; Thales/Archimedes, Euklid/Cavalieri

$$\text{Hirntest: } n = 1; x = 2; \frac{A}{A'} = ?$$

Man zerlegt die dritte Wurzel und die Quadratwurzel aus der Gleichung

$$n = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}} \text{ in}$$

$$n = \frac{\sqrt[3]{1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{1+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}}$$

Dann ist

$$n = \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}},$$

$$n = \frac{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}},$$

$$n = \frac{2-1}{1}, x = 1.$$

Durch Umformen erhält man

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1,$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\right)^x = 1,$$

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 1,$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}\right)^x = 1.$$

Nun ist $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ bzw. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

also $\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ = 1$, und $x = 2$.

Gefragt: $\frac{A'}{A}$

$$f = \frac{t-1}{t^2-t+1}; \frac{A'}{A} = 1-3f$$

für $t = 3$ wird $A' = \frac{1}{7}A$

Holzweg

VII + I = VIII

XI - III = VIII

V + III = VIII

Füllrätsel

1. Numerus; 2. Objekt; 3. Rhombus; 4. Matrix; 5. Algebra; 6. Lineal; 7. Polynom; 8. Aufriß; 9. Riemann; 10. Abakus; 11. Bolzano; 12. Euklid; 13. Leibniz; Normalparabel.

Kombiniere!

Jeweils eine der Lösungsmöglichkeiten:

$$1 + 2 \cdot 34 - 56 + 78 + 9 = 100$$

$$1 \cdot 23 - 4 - 56 : 7 + 89 = 100$$

$$1 + 234 - 56 - 7 - 8 \cdot 9 = 100$$

$$1 \cdot 234 + 5 - 67 - 8 \cdot 9 = 100$$

$$1 + 234 \cdot 5 \cdot 6 : 78 + 9 = 100$$

$$1 + 234 \cdot 5 : 6 - 7 - 89 = 100$$

$$12 + 3 \cdot 45 + 6 \cdot 7 - 89 = 100$$

$$12 + 3 + 4 - 56 : 7 + 89 = 100$$

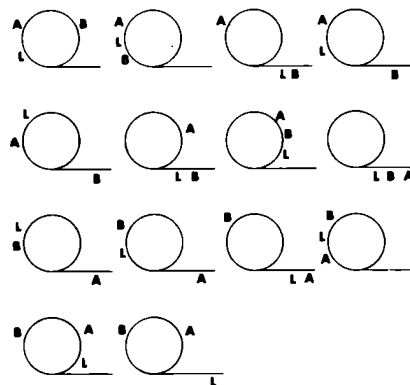
$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$$

$$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$$

Zahlenleiste

2	9	16	7	12	6	4	11
8	15	10	3	13	7	3	14

Lokomotion



Lösungen zu: alpha-Sprachecke

Reise durch die Ziffern

▲ 1 ▲ Beginnt bei der Ziffer 1 in der linken oberen Ecke, und führt eine Zick-Zack-Linie in die rechte untere Ecke mit der Ziffer 9! Dabei kann man sich von Ziffer zu Ziffer nur entweder nach rechts oder nach unten bewegen. Die Summe der Zahlen, die durch die von der Linie durchschnittenen Ziffern dargestellt werden, soll 100 sein.

Findet die Wege, die die kleinste bzw. die größte Anzahl von Richtungsänderungen erfordern!

Lösung:

1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2	2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3	3 3 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4	4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5	5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6	6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7	7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8	8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9	9 9 9 9 9 9 9 9

Der Weg auf der linken Zeichnung enthält insgesamt nur 4 Richtungsänderungen; auf dem zweiten Weg wird die Richtung 11mal geändert.

Zwei Quadrate

▲2▲ Das Quadrat im linken Bild besitzt eine erstaunliche Eigenschaft: Die Summe der Zahlen in jeder Senkrechten, jeder Waagrechten und jeder Diagonalen ist gleich 15. Könnt ihr die Zahlen von 1 bis 9 so verteilen, daß alle diese Summen voneinander verschieden sind?

Lösung:

1	5	3
2	7	6
4	8	9

Es gibt auch andere Lösungen.

Pat's Muster

▲3▲ Unser Freund Pat liebt es, sich mit dem folgenden Zahlenmuster zu beschäftigen. Wie heißt die nächste Reihe? Wie lautet die mittlere Zahl der 17. Reihe?

Wie groß ist die Summe der 21. Reihe?

Lösung: Da es sich um die Folge der ungeraden Zahlen handelt, ergibt sich für die folgende Reihe 43; 45; 47; 49; 51; 53; 55. Die Anzahl m der Glieder jeder Reihe stimmt mit der Nummer der Reihe überein. Demzufolge hat die 17. Reihe auch 17 Glieder, und das letzte Glied dieser Reihe ist das Glied mit der Nummer $n' = \frac{m(m+1)}{2}$ als Summe aller

natürlichen Zahlen von 1 bis n' . Das mittlere Glied der 17. Reihe hat dann die Nummer $n = \frac{m(m+1)}{2} - 8$ mit $m = 17$, also $n = \frac{17 \cdot 18}{2} - 8 = 145$. Für das n -te Glied der Folge der ungeraden Zahlen gilt nun $a_n = a + 2(n-1) = 1 + 2 \cdot 144 = 289$. Das mittlere Glied der 17. Reihe heißt 289.

Für die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis n gilt $s_n = n^2$.

Dann gilt für die

1. Reihe $s_1 = 1^2$,
2. Reihe $s_2 = 3^2 - 2^2$,
3. Reihe $s_3 = 6^2 - 3^2$,
4. Reihe $s_4 = 10^2 - 6^2$,

$$n\text{-te Reihe } s_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2.$$

Für $n = 21$ ergibt sich dann die Summe der 21ten Reihe $s_{21} = 231^2 - 230^2 = 9261$.

Der schlaue Fuchs

▲4▲ Ein schlauer Fuchs aß 100 Zuckerplätzchen in 5 Tagen, jeden Tag 6 mehr als am vorhergehenden. Wieviel Zuckerplätzchen verschlang er am 5. Tag?

Lösung: Wenn er am fünften Tag x Zuckerplätzchen aß, waren es am vierten $x-6$, am dritten $x-12$, am zweiten $x-18$ und am ersten $x-24$. Dann gilt die Gleichung $x + x - 6 + x - 12 + x - 18 + x - 24 = 100$,
 $x = 32$.

Der Fuchs verschlang am 5. Tag 32 Zuckerplätzchen.

▲5▲ Ein Händler hat drei Sorten Kaffee auf folgende Weise gemischt: 11 kg zu 14 F das kg, 10 kg zu 19,05 F das kg und 4 kg zu 17 F das kg. Wieviel kostet ein Kilogramm der Mischung?

Lösung: Der Gesamtpreis der Mischung beträgt $11 \cdot 14 \text{ F} + 10 \cdot 19,05 \text{ F} + 4 \cdot 17 \text{ F} = 412,5 \text{ F}$. Dann kostet 1 kg dieser Mischung $412,5 \text{ F} : (11 + 10 + 4) = 412,5 \text{ F} : 25 = 16,5 \text{ F}$.

▲6▲ Ein Lastwagen transportiert 60 Kartons mit Ölflaschen. Die Masse der Ladung beträgt 1320 kg. Jede Ölflasche hat eine Masse von 1,4 kg (einschließlich Glas), und die Masse jedes leeren Kartons beträgt 1 kg. Berechne

a) die Anzahl der transportierten Ölflaschen, b) die Anzahl der Flaschen in jedem Karton! Lösung: a) Die Anzahl der Ölflaschen sei x , dann gilt die Gleichung

$$1320 = 60 + 1,4x, \\ x = 900.$$

Die Anzahl der transportierten Ölflaschen beträgt 900.

b) $900 : 60 = 15$.

In jedem Karton befinden sich 15 Flaschen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von

Prof. Dr. Müller-Pfeiffer, Heft 4/82

Auf $[A, B]$ werden zum Zeitpunkt $t=0$ jeweils im Abstand von 1 cm die Punkte $P_0 = A, P_1, \dots, P_{100} = B$ markiert. Wenn das Band gedehnt wird, entfernt sich der Punkt P_{n+1} vom Punkt $P_n, n=0, 1, \dots, 99$, mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2} \text{ cm sec}^{-1}$. (Das stellt auch

der Käfer fest, wenn er sich im Punkt P_n aufhält.) Der Käfer, der sich zum Zeitpunkt $t=0$ bei A befindet, wird also den Punkt P_1 erreichen. (Die Geschwindigkeit des Punktes P_1 wird aus der Sicht des Käfers bei der Annäherung an diesen Punkt immer kleiner und wird schließlich Null in dem Moment, in dem der Käfer den Punkt P_1 erreicht.) Aus dem gleichen Grund wird auch der Punkt P_2 erreicht. Wenn der Punkt $P_m, 1 \leq m < 100$, erreicht ist, wird der Punkt P_{n+1} für große n schon weit entfernt sein, aber auch P_{n+1} wird erreicht werden. Damit ist nachgewiesen, daß auch der Punkt $P_{100} = B$ nach einer endlichen Zeit erreicht wird.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Wanderung des Käfers von A nach B sehr lange dauert. Der Punkt P_n sei nach der Zeit von $t_n \text{ sec}$ erreicht. Zu diesem Zeitpunkt ist P_{n+1} um $\left(1 + \frac{t_n}{2}\right) \text{ cm}$ von P_n entfernt. Die Laufzeit des Käfers von P_n nach P_{n+1} ist daher größer als $\left(1 + \frac{t_n}{2}\right) \text{ sec}$. Also gilt

$$t_{n+1} > t_n + \left(1 + \frac{t_n}{2}\right) = 1 + \frac{3}{2} t_n.$$

Diese Abschätzung wird im folgenden wiederholt benutzt.

$$t_{100} > 1 + \frac{3}{2} t_{99} > 1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\right) t_{98} \\ = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 t_{98} > \dots > 1 + \frac{3}{100} \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{99} t_1$$

$$t_1 > 1 + \frac{3}{2} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{99} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{100} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ = 2 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{100} - 1 \right] > 8 \cdot 10^{17} [\text{sec}].$$

Wenn man t_{100} in Jahren ausdrückt, so ergibt eine einfache Umrechnung

$$t_{100} > 2 \cdot 10^{10} [\text{Jahre}].$$

Natürlich kann man t_{100} auch genau angeben. Man muß dazu eine Differentialgleichung lösen und erhält dann

$$t_{100} = 2(e^{50} - 1) \text{ sec}, e = 2, 718 \dots$$

Die obige Abschätzung, die man auch in der Form

$$t_{100} > 2(2,25^{50} - 1)$$

schreiben kann, ist demnach gar nicht so schlecht. Es gilt also sogar

$$t_{100} > 3 \cdot 10^{14} [\text{Jahre}].$$

Um eine gewisse Vorstellung von der Zeitdauer t_{100} zu bekommen, weisen wir darauf hin, daß seit dem Urknall (Entstehung unserer Welt) etwa „nur“ $11 \cdot 10^9$ Jahre verstrichen sind.

Lösungen zu: Sieben Geometrieaufgaben auf einen Streich

Wir betrachten Flächen

▲1▲ (1) 35 cm^2 ; (2) 12 mm ; (3) 25 m ; (4) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm und 49 cm, 7 cm und 7 cm; (5) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm und 81 cm, 3 cm und 27 cm, 9 cm und 9 cm.

▲2▲ a) Es gibt vier verschiedene Rechtecke.

b) Es gibt genau ein solches Rechteck.

▲3▲ a) Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten; die Seitenlängen können 1 cm und 7 cm, 2 cm und 6 cm, 3 cm und 5 cm, 4 cm und 4 cm sein.

b) Die Anzahl der Quadrate, die das jeweilige Rechteck ausfüllen, ist dann 7 bzw. 12 bzw. 15 bzw. 16.

c) Der Flächeninhalt ist am größten, wenn das Rechteck ein Quadrat ist.

▲4▲ 20 Glasscheiben.

▲5▲ Die Seitenlängen des Quadrats sind a) 8 cm, b) 9 cm.

▲6▲ Die Fläche des Fußballplatzes hat eine Größe von mindestens 4050 m^2 und höchstens 10800 m^2 .

▲7▲ a) Die Länge des einen Rechtecks ist dreimal so groß wie die des anderen.

b) Der Flächeninhalt des einen Rechtecks ist neunmal so groß wie der des anderen.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb, Heft 6/81 (Statistik)

▲1▲ $26332 \cdot 4,3 \text{ g} = 113227,6 \text{ g} \approx 113000 \text{ g} = 113 \text{ kg}$

Es wurden 113 kg Papier verbraucht.

▲2▲ $26332 \cdot 4,4 \text{ g} = 115860,8 \text{ g} \approx 116000 \text{ g} = 116 \text{ kg}$

Für die Antwortkarten wurden 116 kg Papier verwendet.

▲3▲ $113 \text{ kg} + 116 \text{ kg} = 229 \text{ kg}$

Insgesamt wurden 229 kg Papier verbraucht.

▲4▲ $26332 \cdot 0,09 \text{ M} = 2369,88 \text{ M}$

Die Post- und Schreibgebühren betrugen insgesamt 2369,88 M.

▲5▲ $26332 : 90 = 292,57 \approx 290$

Zum Schreiben der Antwortkarten waren rd. 290 Stunden notwendig.

▲6▲ a) $26332 \cdot 21,0 \text{ cm} = 552972 \text{ cm} \approx 553000 \text{ cm} = 5530 \text{ m} = 5,53 \text{ km}$

$26332 \cdot 29,8 \text{ cm} = 784693,6 \text{ cm} \approx 785000 \text{ cm} = 7850 \text{ m} = 7,85 \text{ km}$

Das Band wäre 5,53 km bzw. 7,85 km lang.

b) $26332 \cdot 29,8 \text{ cm} \cdot 21,0 \text{ cm} = 16478565 \text{ cm}^2$

$\approx 16500000 \text{ cm}^2 = 1650 \text{ m}^2 = 0,165 \text{ ha}$

Die Blätter würden eine Fläche von 1650 m^2 einnehmen.

▲7▲ $26332 \cdot 0,36 \text{ mm} = 9479,52 \text{ mm}$

$\approx 9500 \text{ mm} = 9,5 \text{ m}$.

Der „Kartenturm“ wäre 9,5 m hoch.

▲8▲ a) Klasse 5

$$3151 : 7215 = x : 100$$

$$x \approx 43,7$$

$$100\% - 43,7\% = 56,3\%$$

Es sind 43,7% Jungen und 56,3% Mädchen.

Klasse 6

Es sind 43,3% Jungen und 56,7% Mädchen.

Klasse 7

Es sind 45,8% Jungen und 54,2% Mädchen.

Klasse 8

Es sind 52,9% Jungen und 47,1% Mädchen.

Klasse 9

Es sind 55,4% Jungen und 44,6% Mädchen.

Klasse 10/12

Es sind 61,4% Jungen und 38,6% Mädchen.

b) Gesamtzahl der Jungen 12745, Gesamtzahl der Mädchen 13482.

$$12745 : 26227 = x : 100$$

$$x \approx 48,6$$

$$100\% - 48,6\% = 51,4\%$$

Der Anteil der Jungen betrug 48,6% und der der Mädchen 51,4%.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/82

Ma5 ■ 2179 Das rechteckige Stück Papier hat einen Flächeninhalt von $90 \cdot 45 \text{ cm}^2 = 4050 \text{ cm}^2$. Aus $4050 \text{ cm}^2 - 3650 \text{ cm}^2 = 400 \text{ cm}^2$ und $400 \text{ cm}^2 : 4 = 100 \text{ cm}^2$ folgt,

daß jedes der vier ausgeschnittenen Quadrate einen Flächeninhalt von 100 cm^2 hat und somit eine Seitenlänge von 10 cm besitzt. Der oben offene Karton hat deshalb ein Volumen von $(90 - 20) \cdot (45 - 20) \cdot 10 \text{ cm}^3 = 17500 \text{ cm}^3$.

Ma5 ■ 2180 Damit der erste Summand möglichst groß wird, muß er $9 \cdot 9$ lauten. Da die für die Sternchen einzusetzenden Ziffern paarweise voneinander verschieden sein sollen, kann der dritte Summand nur 881 lauten. Damit der erste Summand möglichst groß wird, muß er $9 \cdot 7$ lauten. Wegen $7 + 9 + 1 = 17$ lautet der zweite Summand 193. Deshalb lautet der erste Summand 907. Die richtig gelöste Additionsaufgabe lautet deshalb

$$\begin{array}{r} 907 \\ + 193 \\ + 881 \\ \hline 1981 \end{array}$$

Ma5 ■ 2181 Angenommen, in dem Verkaufsregal liegen a, b, c, d Stück Seife der Sorte A, B, C, D; dann gilt $d = 15$ und $b + c = 2 \cdot 15 = 30 = 20 + 10$, also $c = 20$ und $b = 10$, weil es von der Sorte B nur halb so viel sind wie von der Sorte C. Aus $b = 10$ folgt $a = 10 : 2 = 5$. Daraus folgt weiter $a + b + c + d = 5 + 10 + 20 + 15 = 50$. Im Verkaufsregal liegen 50 Stück Seife.

Ma5 ■ 2182 Damit beide Zuckerdosen gleich schwer sind, genügt es, in die kleinere 200 g Zucker, in die größere keinen Zucker zu füllen. Somit ist die größere der beiden leeren Dosen um 200 g schwerer als die kleinere. Da die größere Dose doppelt so schwer ist wie die kleinere, hat die kleinere Dose ein Gewicht von 200 g, die größere von 400 g.

Ma5 ■ 2183 Wegen $7 + 7 + 7 = 21$ und $21 : 3 = 7$ erhält jeder der drei Brüder 7 Fässer.

Wegen $\left(7 + \frac{7}{2}\right) : 3 = \frac{21}{2} : 3 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ erhält jeder

eine Weinmenge, die $3\frac{1}{2}$ Fässer füllt. Nun ist folgende Aufteilung möglich.

	Anzahl der vollen Fässer	halbvollen Fässer	leeren Fässer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

Ma5 ■ 2184 Wir rechnen $1980 - 27 = 1953$. Angenommen, im Jahre 1953 war die Mutter von Jens n Jahre alt; dann wurde sie im Jahre 1980, also nach 27 Jahren, $10 \cdot n$ Jahre alt. Nun gilt $n + 27 = 10n$, $9n = 27$, also $n = 3$. Aus $1953 - 3 = 1950$ folgt, daß Jens' Mutter im Jahre 1950 geboren wurde und im Jahre 1981 somit ein Lebensalter von 31 Jahren erreichte.

Ma6 ■ 2185 In $1\frac{1}{2}$ Stunden hat der PKW

90 km, in $3\frac{1}{2}$ Stunden hat der Radfahrer

42 km zurückgelegt. Zu Beginn der Rückfahrt des PKW ist er somit 48 km vom Radfahrer entfernt. Aus $s = v \cdot t$ und $s_1 + s_2 = s$ folgt nun

$$12t + 60t = 48, 72t = 48, \text{ also } t = \frac{2}{3}.$$

Der PKW trifft 40 min nach Abfahrt von der Gaststätte auf den Radfahrer.

Ma6 ■ 2186 Angenommen, es sind x Schafe, also $(x - 2)$ Ziegen und $(x + 11)$ Pferde; das sind zusammen $(3x + 9)$ Tiere. Nun gilt $30 < 3x + 9 < 36$, $21 < 3x < 27$, $7 < x < 9$, also $x = 8$.

Auf dieser Weide grasen 8 Schafe, 6 Ziegen und 19 Pferde.

Ma6 ■ 2187 Die beiden natürlichen Zahlen seien $2n$ und n mit $n > 0$. Dann gilt $(2n + n)(2n - n) \cdot 2n \cdot n \cdot (2n : n) = 192$,

$$3n \cdot n \cdot 2n^2 \cdot 2 = 192,$$

$$12n^4 = 192,$$

$$n^4 = 16, \text{ also } n = 2.$$

Es handelt sich um die Zahlen 4 und 2.

Ma6 ■ 2188 Es sei n die von Fred gedachte natürliche Zahl; dann gilt $x = [(n + 5) \cdot 2 + 4 + 3] \cdot 5 + 7$ für das von Fred errechnete Ergebnis. Daraus folgt weiter

$$x = (5n + 2) \cdot 20 + 15 + 7,$$

$$x = 100n + 40 + 22,$$

$$x = 100n + 62,$$

$$n = (x - 62) : 100.$$

Vom Ergebnis x subtrahiert Fritz 62 und dividiert die Differenz durch 100. Beispiel für $n = 7$:

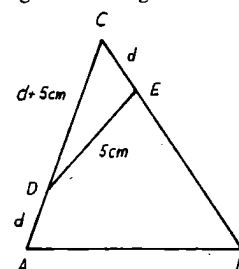
$$x = [(7 + 5) \cdot 2 + 4 + 3] \cdot 5 + 7, x = 762, \text{ also}$$

$$n = (762 - 62) : 100, n = 7.$$

Ma6 ■ 2189 Es sei z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften und q ihre Quersumme; dann gilt $z : q = q + 1$, also $z = q \cdot (q + 1)$, wobei q eine Primzahl ist. Ferner gilt $10 \leq q \cdot (q + 1) \leq 99$. Das Produkt $q \cdot (q + 1)$ könnte somit $3 \cdot 4 = 12$ oder $5 \cdot 6 = 30$ oder $7 \cdot 8 = 56$ lauten.

30 hat die Quersumme 3 und $30 : 3 = 10$ und $10 \neq 4$; 56 hat die Quersumme 11 und $56 : 11$ ist nicht lösbar im Bereich der natürlichen Zahlen. Somit entfallen diese beiden Möglichkeiten. Es existiert genau eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften; es ist die Zahl 12, und es gilt $12 : 3 = 4$.

Ma7 ■ 2190 Es habe $\overline{AD}$ die Länge d ; für die Länge von $\overline{AC}$ gilt dann $d + (d + 5 \text{ cm})$



$= 2d + 5 \text{ cm}$. Ferner gilt für die Länge des Streckenzuges $\overline{ADEC}$: $d + 5 \text{ cm} + d = 2d + 5 \text{ cm}$, was nicht möglich ist. Nach der Dreiecksungleichung gilt $\overline{DE} + \overline{CE} > \overline{CD}$ bzw. $5 \text{ cm} + d > (d + 5 \text{ cm})$, was zum Widerspruch führt. Aus den angegebenen Längen läßt sich kein Dreieck DEC konstruieren.

Der Punkt E wäre ein innerer Punkt von $\overline{CD}$.

Ma7 ■ 2191 a) Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Wegen $2 + 3 + 4 = 9$ und wegen $a \neq 0$ kann $a + b + c$ gleich 9, 18 oder 27 sein. Wegen $a + b = c$, also $a + b + c = 2c$, gilt entweder $2c = 9$, was nicht möglich ist, oder $2c = 18$, also $c = 9$, oder $2c = 27$, was ebenfalls nicht möglich ist. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus ihren letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Die Zahl 94 ist nicht durch 4 teilbar; folglich ist die Zahl z_1 auch nicht durch 4 teilbar.

b) Wegen $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ kann $a + b + c$ gleich 0, 9, 18 oder 27 sein. Wegen $a + b = c$, also $a + b + c = 2c$, gilt entweder $2c = 0$ oder $2c = 18$, also entweder $c = 0$ oder $c = 9$. Nach Lösung a) entfällt $c = 9$. Für $c = 0$ gilt $a = b = 0$. Es existiert genau eine solche Zahl z_2 , für die diese Behauptung nicht gilt; sie lautet 203040.

Ma7 ■ 2192 Angenommen, das Enkelkind sei x Jahre, der Großvater y Jahre alt; dann gilt

$$\left(x - \frac{5}{5}\right) \cdot 5 = y \text{ und } (y + 7^2 - 2 \cdot 7) : 7 = x.$$

Daraus erhalten wir durch Umformen

$$y = 5(x - 1) \text{ und } 7x = y + 35.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$7x = 5(x - 1) + 35,$$

$$7x = 5x - 5 + 35,$$

$$2x = 30,$$

$$x = 15, \text{ also } y = 5 \cdot (15 - 1) = 70.$$

Das Enkelkind ist 15 Jahre, der Großvater 70 Jahre alt.

Ma7 ■ 2193 a) $3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$

b) $7 - 5 = 2$

c) $2 \cdot 5 - 7 = 3$

d) $2 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 4$

Der Betrag von 99 Uto läßt sich wie folgt bezahlen:

$$19 \cdot 5 + 4 = 19 \cdot 5 + (2 \cdot 7 - 2 \cdot 5) = 99.$$

Bei Division durch 5 läßt eine natürliche Zahl entweder den Rest 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4. Deshalb lassen sich alle zu untersuchenden Zahlen in der Form $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 4$ darstellen. Die Reste 1, 2, 3, 4 lassen sich entsprechend den Lösungen a) bis d) darstellen. Folglich läßt sich jede beliebige natürliche Zahl auf diese Weise darstellen.

Beispiel:

$$217 \text{ Uto} = (5 \cdot 43 + 2) \text{ Uto} = (5 \cdot 43 + 7 - 5) \text{ Uto}.$$

Ma8 ■ 2194 Wegen $30^3 = 27000 > 999$ gilt $b = 1$ oder $b = 2$. Wegen $10^1 = 10 < 100$ und $19^1 = 19 < 100$ entfällt $b = 1$. Für $b = 2$ erhalten wir:

$$100a + 20 + c = (20 + c)^2,$$

$$100a = (20 + c)^2 - (20 + c),$$

$$100a = (20 + c) [(20 + c) - 1],$$

$$100a = (19 + c)(20 + c).$$

Wegen $1 \leq a \leq 9$ muß das Produkt $(19 + c)(20 + c)$ ein Vielfaches von 100 sein.

Das trifft nur zu für $c = 5$ und somit für $a = 6$, denn es gilt $600 = 24 \cdot 25$.

$abc = (bc)^b$ wird für $a = 6$, $b = 2$ und $c = 5$ in die wahre Aussage $625 = 25^2$ überführt.

Ma8 ■ 2195 Es seien a und b zwei natürliche Zahlen mit $a > b$. Aus $a > b$ folgt

$$a - b > 0,$$

$$(a - b)^2 > 0,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

$$a^2 + b^2 > 2ab.$$

Ma8 ■ 2196 Die Quadratseite $\overline{AB}$ habe die Länge a . Nach Voraussetzung hat $\overline{EF}$ die

Länge $\frac{1}{3}a$; $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ haben die Länge $\frac{2}{3}a$.

Die Dreiecke ABF und CDE sind kongruent ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle ABF$; $\overline{BF} \cong \overline{CE}$). Daraus folgt $\overline{AF} \cong \overline{DE}$.

Wenn das Dreieck EFG gleichseitig wäre, dann müßten die Seiten $\overline{FG}$ und $\overline{EG}$ die

Länge $\frac{1}{3}a$ haben.

Wegen $\overline{EF} : \overline{AD} = \overline{EG} : \overline{DG}$ müßte $\overline{DE}$ die

Länge $\frac{4}{3}a$ haben. Nun gilt aber im recht-

winkligen Dreieck ECD nach dem Satz des Pythagoras für die Länge x der Strecke $\overline{DE}$

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{13}{9}a^2,$$

d. h. $x \approx 1,2a$.

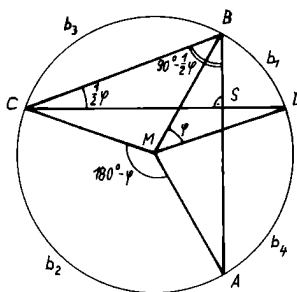
Das steht im Widerspruch zu der Annahme, daß $\overline{DE}$ die Länge $\frac{4}{3}a$ hat; folglich ist das

Dreieck $\triangle EFG$ nicht gleichseitig.

Ma8 ■ 2197 Aus $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$ folgt

$b_1 + b_2 = \frac{1}{2} \cdot u$. Zu dem halben Umfang eines

Kreises gehört ein Zentriwinkel von der Größe 180° . Der Zentriwinkel $\sphericalangle BMD$ habe die Größe ϕ ; dann hat der Zentriwinkel $\sphericalangle AMC$ die Größe $180^\circ - \phi$. Somit hat der



Peripheriewinkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $90^\circ - \frac{1}{2}\phi$

und der Peripheriewinkel $\sphericalangle BCD$ die Größe $\frac{1}{2}\phi$. Im Dreieck BCS hat somit der Winkel

$\sphericalangle BSC$ die Größe 90° , das heißt, die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ stehen aufeinander senkrecht.

Ma9 ■ 2198

Anzahl der Wanderzirkusse	n	15
Standortzirkusse	$4n$	60
Tierzirkusse	$n - 2$	13
Bühnenzirkusgruppen	$4n - 10$	50
Insgesamt	$10n - 12$	138

Nun gilt $130 < 10n - 12 < 140$,

$$142 < 10n < 152,$$

$$14,2 < n < 15,2,$$

$$n = 15.$$

Wolfgang Hintze

Der ungarische Zauberwürfel

etwa 110 Seiten, 171, davon 30 farbige Abbildungen, 4 Tabellen, 142 mm $\times$ 200 mm, Broschur, etwa 10,- M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Dieser Titel erscheint im Herbst 1982.

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung entgegen.

Aus dem Inhalt

Kapitel I: Grundlagen

Vorstellung des Zauberwürfels – Aufbau und Bezeichnung – Zerlegen, Zusammenbau und Pflege des Würfels – Notieren von Zügen – Beispiele für einfache Prozesse – Bezeichnungen von Segmenten – Theoretische Grundlagen: Charakterisierung der möglichen Stellungen des Würfels wie Zyklendarstellungen – mögliche und unmögliche Stellungen – Orientierungsinvariante Untergruppen

Kapitel II: Die Lösung des Grundproblems
Der Hauptsatz – Ein System zum Ordnen des Würfels

Kapitel III: Würfelpraxis

Weltausstellung des „Kubismus“ (schöne Muster); Markierte Mitteln; Spielvorschläge;

Kapitel IV: Theoretische Aspekte des Würfels
Weiteres zur Würfelgruppe wie Minimalzahl von Generatoren – Maximale Ordnung einer Permutation – Das Zentrum der Würfelgruppe – Das Abstandsproblem und der Durchmesser der Würfelgruppe – Ordnungsmaße – Konstruktion von Prozessen – Der Algorithmus von Thistlethwaite – Die Supergruppe w_8 – Untergruppen – Andere „magische“ Körper – Würfel anderer Ordnung wie Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel – Der $4 \times 4 \times 4$ -Würfel – Platonische Körper wie: Das magische Tetraeder – Das magische Dodekaeder – Das Zauberdomino

Anhang: Kleines Prozeßverzeichnis – Lösungen der Aufgaben – Literaturhinweise – Register

Ein „eigener Algorithmus“ zum Ordnen des Zauberwürfels

Im Rahmen des WPA-Unterrichtes an der Sektion Mathematik der Greifswalder Universität fertigten wir eine Arbeit über den Zauberwürfel an. Neben der Erläuterung verschiedener Algorithmen aus Zeitschriften und Büchern des In- und Auslandes und der mathematischen Betrachtung des Würfels erfolgte auch die Beschreibung eines von uns selbst entwickelten Algorithmus, den wir teilweise vorstellen wollen. Es wird nur der Aufbau der mittleren und unteren Ebene behandelt, da der Aufbau der oberen Ebene schon in der *alpha* 1/82 beschrieben wurde.

Bezeichnung der Ebenen:

Beim Blick auf den Würfel werden die einzelnen Ebenen wie folgt bezeichnet:

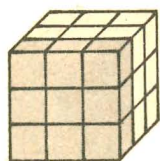


Bild 1
vordere Ebene $\bar{V}$

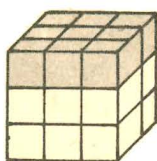


Bild 2
obere Ebene $\bar{O}$

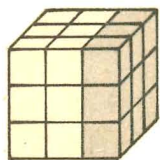


Bild 3
rechte Ebene $\bar{R}$

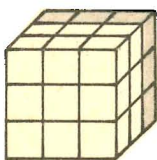


Bild 4
hintere Ebene $\bar{H}$

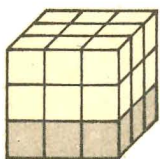


Bild 5
untere Ebene $\bar{U}$

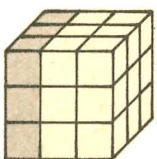


Bild 6
linke Ebene $\bar{L}$

Die Grundwürfeloperationen und ihre Bezeichnung

Voraussetzung: Der Uhrzeigersinn ist dadurch eindeutig bestimmt, daß man immer auf die zu drehende Ebene direkt sieht. Die Drehung von $\bar{V}$ um 90° im Uhrzeigersinn wird mit V bezeichnet. Die Drehung von $\bar{V}$ um 90° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn wird mit V' bezeichnet. Die Wirkung von V wird durch V' wieder aufgehoben. Dies gilt analog auch für die anderen Ebenen.

Unter richtiger Position eines Eck- oder Kantenwürfels versteht man, daß er sich an der richtigen Stelle ohne Beachtung der einzelnen Farbflächen befindet, d. h., er kann noch verdreht sein. Unter richtiger Orientierung versteht man, daß der Eck- oder Kantenwürfel in seiner richtigen Position auch richtig gedreht ist.

Algorithmus

Bei diesem Algorithmus wird zuerst die obere Ebene vollständig aufgebaut. Danach bringt man die anderen vier Eckwürfel ohne Beachtung ihrer Orientierung in die richtige Reihenfolge. Anschließend werden die Kantenwürfel der mittleren Ebene sowie die der unteren so miteinander vertauscht, daß sie an ihre richtigen Positionen gelangen und die richtigen Orientierungen besitzen. Zum Schluß erhalten die Eckwürfel der unteren Ebene ihre richtigen Positionen und Orientierungen.

Eckwürfel

Nachdem die obere Ebene geordnet worden ist, werden die vier Eckwürfel der unteren Ebene zuerst in ihre richtige Reihenfolge ohne Beachtung der Orientierung gebracht. Unter der richtigen Reihenfolge versteht man, daß die Eckwürfel der unteren Ebene durch eine Drehung dieser Ebene an ihre richtigen Positionen gelangen.

Meistens müssen dabei mindestens zwei Eckwürfel gegeneinander ausgetauscht werden. Dazu dreht man den ganzen Würfel so, daß sich die auszutauschenden Eckwürfel vorn unten befinden, und führt die Zugkombination (I) aus.

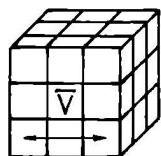


Bild 7
(I) $V'RVR'VUV'UU$

Kantenwürfel

Die Zugkombination (II) bewirkt, daß die Kantenwürfel (vorn-links) und (unten-links) gegeneinander ausgetauscht werden, wobei die linken Flächen der beiden Kantenwürfel links bleiben. Weiterhin rücken die Eckwürfel der unteren Ebene um einen Platz entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn – von unten gesehen – weiter und ändern ihre Orientierung.

Die Zugkombination (III) ist der vorigen ähnlich. Bei dieser werden die Kantenwürfel (vorn-rechts) und (unten-rechts) gegeneinander ausgetauscht, wobei die rechten Flächen der beiden Kantenwürfel rechts bleiben.

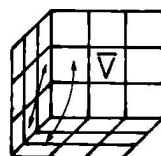


Bild 8
(II) $LUL'U'LUUL'U'LUUL'U'LUUL'$

Weiterhin rücken die Eckwürfel der unteren Ebene um einen Platz im Uhrzeigersinn – von unten gesehen – weiter und ändern ihre Orientierung.

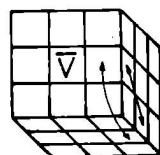


Bild 9
(III) $R'U'RUR'UURUR'UURUR'U'R$

Mit Hilfe dieser beiden Zugkombinationen ist es nun möglich, die Kantenwürfel der mittleren und unteren Ebene an ihre richtigen Positionen mit richtigen Orientierungen zu bringen. Zuerst werden drei Kantenwürfel der mittleren Ebene an ihre richtigen Positionen mit richtigen Orientierungen gebracht. Sollte sich ein Kantenwürfel der mittleren Ebene in dieser mit falscher Orientierung oder an falscher Position befinden, bringt man ihn zuerst mit einer der beiden Zugkombinationen in die untere Ebene und danach an seine richtige Position mit richtiger Orientierung.

Die Stelle des vierten Kantenwürfels benötigt man zum „Rangieren“ der vier Kantenwürfel der unteren Ebene, damit diese durch das „Rangieren“ zwischen der mittleren und unteren Ebene an ihre richtigen Positionen mit richtiger Orientierung gelangen. Bei diesem Vorgang braucht man die Eckwürfel der unteren Ebene nicht zu beachten, da sie untereinander nicht die Reihenfolge ändern.

Eckwürfel

Es ist möglich, daß sich jetzt die Eckwürfel der unteren Ebene noch nicht an ihren richtigen Positionen befinden, sondern jeweils zwei Plätze zu weit sind. Sollte dies der Fall sein, wendet man zweimal die Zugkombination (II) oder zweimal die Zugkombination (III) an. Dadurch rücken die Eckwürfel der unteren Ebene um jeweils zwei Plätze – entgegengesetzt dem bzw. im Uhrzeigersinn – weiter und gelangen so an ihre richtigen Positionen, während die Kantenwürfel ihre Positionen behalten.

Die Eckwürfel können jetzt noch eine falsche Orientierung besitzen, entweder vier, drei oder zwei Eckwürfel. Diese kann man mit der Zugkombination (IV) richtigstellen. Dabei dreht man den Würfel so, daß zwei der zu drehenden Eckwürfel vorn unten sind. Weiterhin muß man beachten, daß bei Anwendung von (IV) die Eckwürfel wie folgt (siehe Bild) gedreht werden:

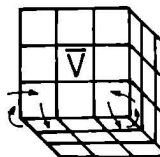
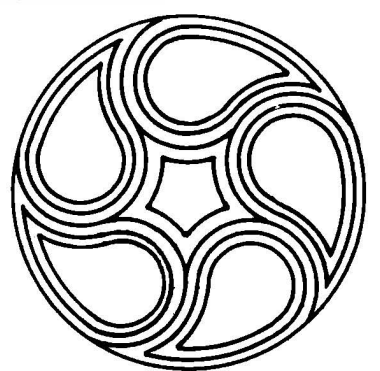
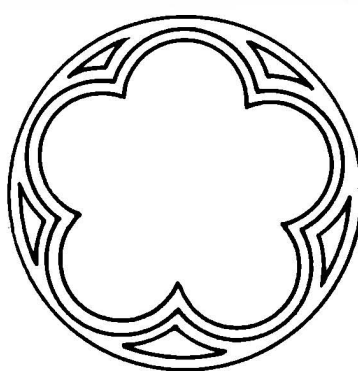
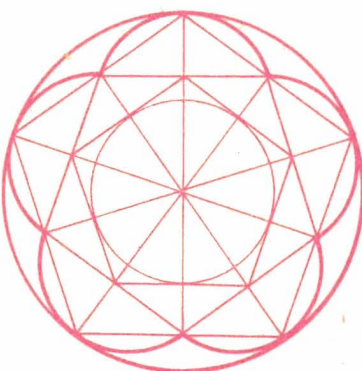
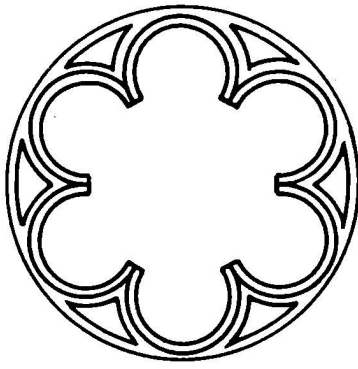
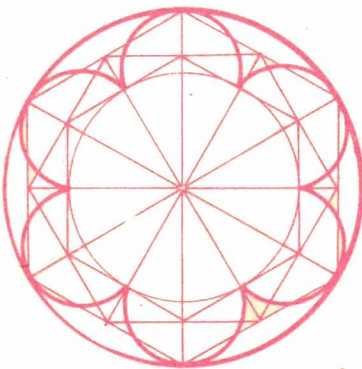
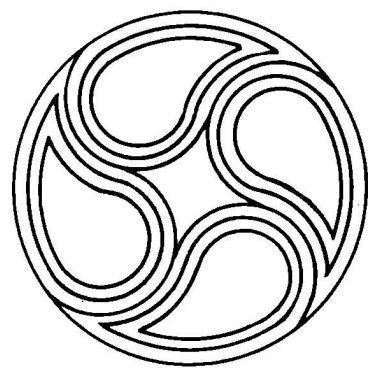
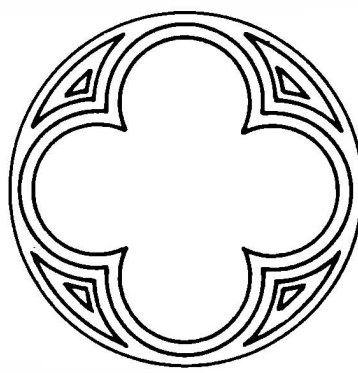
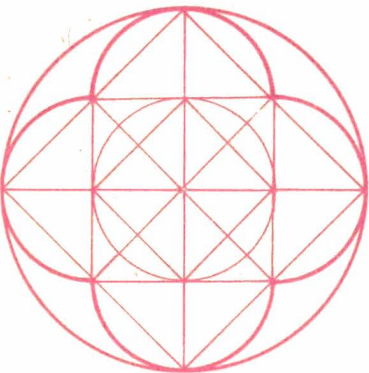
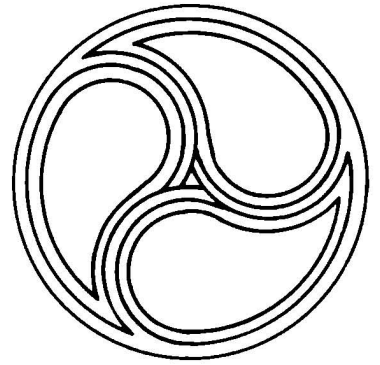
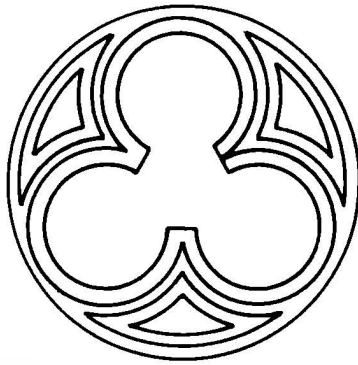
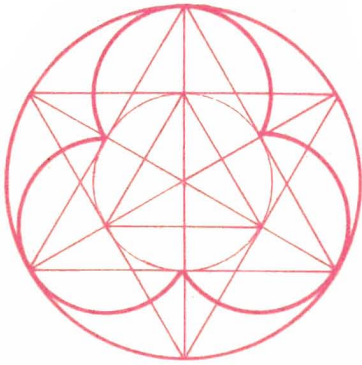


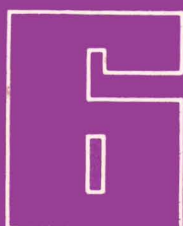
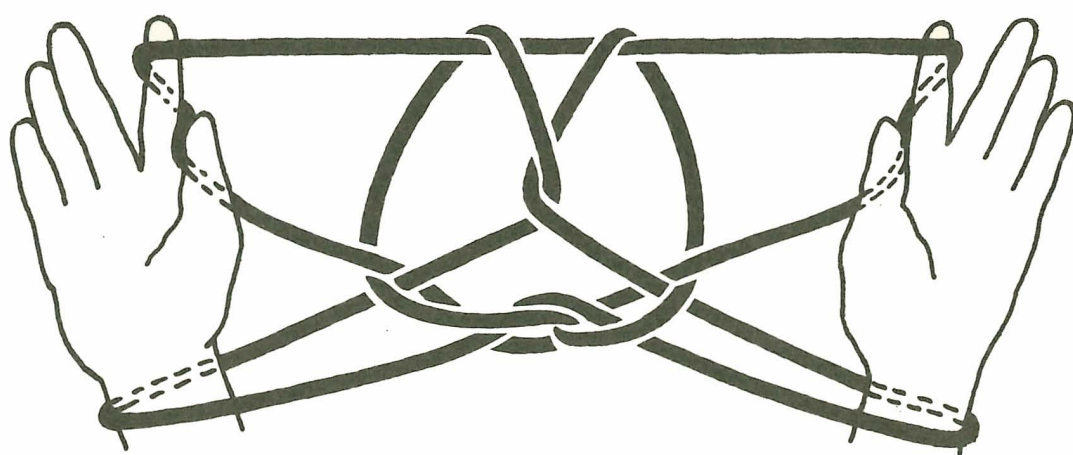
Bild 10
(IV) $VUUUV'U'VU'V'UUV'UUVUV'UUVUU$

Diese Zugkombination muß man meistens öfter anwenden.

A. Schulz

Mit Zirkel und Zeichendreieck





Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (LtG. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: R. Schulz, Rotta (S. 123); J. Lehmann,
Leipzig; IMO-Abzeichen, H. Teske, Leipzig;
dunatours, Visegrád; L. Kemény, Budapest;
Georgi Anasztasov, Sofia (S. 128); Füles,
Budapest (S. 130); Archiv: J. Lehmann (S.
132); Schröder, Karl-Marx-Stadt (S. 135);
H. Tracksdorf (IV. U.-Seite).

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN(EDV) 128 – ISSN 0002-6395

Redaktionsschluss: 24. August 1982

Erscheinungstermin: 18. Dezember 1982

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Die Kreiszahl π – Zum 100. Geburtstag des Beweises der
Transzendenz von π , Teil 1 [9]*
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akad. d. Wissenschaften der DDR
- 123 Junge Mathematiker feierten Jubiläum [5]
Mathematikfachlehrer R. Schulz, OS Rotta
- 124 XXIII. Internationale Mathematikolympiade [10]
Budapest, 7. bis 14. Juli 1982
Exklusivbericht: J. Lehmann, Leipzig
- 126 Wir finden Gesetzmäßigkeiten [8]
Dr. W. Schulz, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 127 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
- 128 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie
- 131 *alpha*-Sprachecke: Russisch, Englisch, Französisch
- 131 Für den Schachfreund: Matt dem König [5]
H. Rüdiger, Grünheide
- 132 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]
Gute Grundkenntnisse gesucht: Sieben Geometrieaufgaben auf
einen Streich · Geistesgymnastik
Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 133 Knoteleien am laufenden Band [4]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- 134 Ernst Abbe – Er wußte, was er der Technik zutrauen konnte [6]
- 134 Ein Gewichtsproblem des *Leonardo Fibonacci* [7]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akad. d. Wissenschaften der DDR
- 135 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
20 Jahre Mathematikzentrum Karl-Marx-Stadt [5]
Mathematikfachlehrer W. Henker, Haus der JP Karl-Marx-Stadt
- 136 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 138 XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [11]
4. Stufe (DDR-Olympiade), Aufgaben Klasse 11/12
- 138 Lösungen [5]
- 143 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Pólya [8]
Professor emeritus, Universität Stanford, USA
- 144 *alpha*-Wettbewerb 1981/82 [5]
Kollektive Beteiligung · Preisträger · Abzeichen in Gold
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- IV. U.-Seite: Geometrie und Architektur [5]

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Kreiszahl π Zum 100. Geburtstag des Beweises der Transzendenz von π

Teil 1

Eine Sitzung in der Berliner Akademie

Am 22. Juni 1882 trug auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften der Mathematiker Karl Weierstraß (1815 bis 1897) vor. Die Klasse hatte ein Schreiben des Ordinarius Ferdinand von Lindemann (1852 bis 1939) aus Freiburg i. B. erhalten, in dem dieser ein mathematisches Resultat mitteilte, durch das ein berühmtes Problem gelöst wurde. Die anwesenden Akademiker, darunter der Mathematiker Leopold Kronecker (1823 bis 1891), der Arzt Rudolf Virchow (1821 bis 1902) und der Physiologe und Physiker Emil du Bois-Reymond (1818 bis 1896), erfuhren durch Weierstraß' Vortrag erstmals von Lindemanns Erkenntnis, die sich auf die zahlentheoretische Natur der Kreiszahl π bezieht.

Der junge Freiburger Professor Lindemann hatte seine Arbeit der Berliner Akademie vorgelegt, ein durchaus nicht unübliches Vorgehen. Durch die Wirksamkeit von Weierstraß, Kronecker und Ernst Eduard Kummer (1810 bis 1893) galt die Berliner Akademie zusammen mit der Universität (der heutigen Humboldt-Universität) als ein Zentrum der Mathematik.

In den Sitzungsberichten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1882, S. 679 bis 682, wurden die von Weierstraß in der Klassensitzung vorgetragenen Resultate von F. Lindemann unter der Überschrift „Über die Ludolph'sche Zahl“ veröffentlicht. Eine ausführliche Abhandlung „Über die Zahl π “ publizierte Lindemann im von Felix Klein (1849 bis 1925) und Adolph Mayer (1839 bis 1908) herausgegebenen 20. Band der seit 1869 im Leipziger Teubner-Verlag erscheinenden Zeitschrift „Mathematische Annalen“.

Die Transzendenz von π

Das Hauptergebnis von Lindemann lautet: „Ist a eine von Null verschiedene algebraische Zahl, so ist e^a immer transzendent.“ Die hierin auftretende Zahl e ist spätestens seit der Mitte des 18. Jahrhunderts insbesondere durch die Forschungen von Leonhard Euler (1707 bis 1783) aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Es ist eine irrationale Zahl, die

sich durch die Summe $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ bis zu jeder gewünschten Genauigkeit (wenn nur n hinreichend groß gewählt wird) berechnen läßt. (Die Schreibweise „ $n!$ “ – sprich: n Fakultät – ist eine Abkürzung für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n .) Die Dezimalbruchdarstellung von e beginnt mit 2,71828183. (Auf die Definition der Potenz e^a kann hier nicht eingegangen werden.)

Was sind algebraische, was sind transzendente Zahlen?

Eine algebraische Zahl ist jede Zahl, die irgendeiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt:

$$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0 = 0, \quad (1)$$

worin $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, $k_0, k_1, \dots, k_n$ rationale Zahlen und $k_n \neq 0$ ist.

Alle rationalen Zahlen sind algebraisch (der Fall $n=1$ in (1)). $\sqrt{2}$ ist algebraisch, weil $\sqrt{2}$ der algebraischen Gleichung $x^2 - 2 = 0$ genügt. (Die Koeffizienten $k_2 = 1, k_1 = 0, k_2 = -2$ sind ganze Zahlen.) Die Goldene-Schnitt-

$$\text{Zahl } \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(vgl. *alpha*, Heft 6/1981, S. 121) ist algebraisch, weil sie der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ genügt.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist algebraisch, weil sie der Gleichung $x^3 - 2 = 0$ genügt.

Zahlen, die nicht algebraisch sind, werden transzendente Zahlen genannt. Das Wort „transzendent“ leitet sich vom lateinischen Verb „transcendere“ (übersteigen, überschreiten) ab.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) erklärte 1686:

„Transzendente sind solche Größen, die durch keinerlei Gleichungen bestimmten Grades erklärt werden, vielmehr über jede algebraische Gleichung hinausgehen.“ Euler sagte, daß sie „die Wirksamkeit algebraischer Methoden überschreiten (transzendieren)“.

Eine transzendente Zahl α genügt keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Wie man auch endlich viele rationale Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_m$ wählt, stets ist $a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 \neq 0$.

Für eine algebraische Zahl β hingegen gibt es gewisse rationale Zahlen $b_0, b_1, \dots, b_k$ (die nicht alle gleich 0 sind), so daß $b_k \beta^k + b_{k-1} \beta^{k-1} + \dots + b_1 \beta + b_0 = 0$ wird,

β genügt der algebraischen Gleichung $b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$ mit rationalen Koeffizienten.

Bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts kannte man noch überhaupt kein Beispiel von transzendenten Zahlen! Erst 1844 entdeckte Joseph Liouville (1809 bis 1882), Professor am Collège de France in Paris, die ersten transzendenten Zahlen. Diese sogenannten Liouvilleschen Zahlen lassen sich auf Grund eines Satzes von Liouville konstruieren, der aussagt, daß die irrationalen algebraischen Zahlen solche sind, die nur dann mit hoher Genauigkeit durch rationale Zahlen angenähert werden können, wenn die Nenner der Näherungsbrüche sehr groß sind. (Eine präzise Formulierung und den Beweis findet man im 7. Kapitel des Buches „Zahlentheorie – Ausgewählte Methoden und Ergebnisse“ von H. Koch und H. Pieper; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976.)

Einen neuen Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen gab Georg Cantor (1845 bis 1918) in Halle am 7. Dezember 1873 in einem Brief an Richard Dedekind (1831 bis 1916) in Braunschweig.

Er konnte überdies zeigen, daß es mehr transzendente als algebraische Zahlen gibt, ähnlich wie es mehr irrationale als rationale Zahlen gibt. (Es gibt jeweils unendlich viele solcher Zahlen. Das „mehr“ kann man trotzdem genau präzisieren. Es sei verwiesen auf das 5. Kapitel des Buches „Die Begriffswelt der Mathematik“ von I. Ruzsa; Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1976.)

Ebenfalls im Jahre 1873 konnte der französische Mathematiker Charles Hermite (1822 bis 1901) die Transzendenz der Zahl e nachweisen.

Die Transzendenz von e folgt natürlich auch sofort aus dem Satz von Lindemann ($a=1$). Aus dem Satz von Lindemann folgt aber auch die Transzendenz der Kreiszahl π .

Hierzu benötigt man eine der merkwürdigsten Gleichungen der Mathematik. Euler formulierte sie in einem Brief vom 10. Dezember 1728 an seinen Lehrer Johann Bernoulli (1667 bis 1748).

Man schreibt sie heute in der Form

$$e^{i\pi} = -1. \quad (2)$$

Hierin gehen ein: die Eulersche Zahl e , die Kreiszahl π , die sogenannte imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ und die Einheit 1. (Auf die Definition der Wurzel $\sqrt{-1}$ und der Potenz $e^{i\pi}$ kann hier nicht eingegangen werden. Es sei verwiesen auf das Buch „Die komplexen Zahlen. Theorie – Praxis – Geschichte“ von H. Pieper; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982.) Die Zahl $i = \sqrt{-1}$ ist übrigens algebraisch, weil sie der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ genügt.

Angenommen, π ist algebraisch. Dann wäre (wie man sich überlegen kann) auch das Produkt πi algebraisch. Daher müßte nach dem Lindemannschen Satz $e^{\pi i}$ transzendent sein. Andererseits ist $e^{\pi i}$ nach (2) aber gleich -1 ,

also rational, und somit algebraisch. $e^{\pi i}$ müßte gleichzeitig transzendent und algebraisch sein, was ein Widerspruch ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch ist. π ist also nicht algebraisch, sondern transzendent: π genügt keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.

Der Beweis des Satzes von Lindemann kann hier nicht dargestellt werden.

Der ursprüngliche Beweis für die Transzendenz von π , also der Beweis des Satzes von Lindemann, war recht kompliziert. Lindemann stützte sich wesentlich auf die Untersuchungen, die Hermite 1873 beim Beweis der Transzendenz von e gemacht hat. Die Beweise der Transzendenz der Zahlen e und π wurden bereits 1882 von Karl Weierstraß und später noch von David Hilbert (1862 bis 1943), Adolf Hurwitz (1859 bis 1919) und Paul Gordan (1837 bis 1912) erheblich vereinfacht. Den Gordanschen Beweis hat Heinrich Weber (1842 bis 1913) noch durchsichtiger gemacht und in sein „Lehrbuch der Algebra“ (2. Auflage 1899) aufgenommen. Einen noch einfacheren, fast schon elementaren Beweis hat Weber dann in der „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik“ (Band 1, 1903) gegeben. (Es sei auch verwiesen auf das Buch „Quadratur des Kreises und Transzendenz von π “ von G. I. Drinfel'd; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.)

Die Zahl π

Mit dem Lindemannschen Beweis wurde erstmals die arithmetische „Natur“ der Zahl π erkannt. Es sei daran erinnert, wie die Zahl π definiert ist.

Es seien zwei Kreise mit den Durchmessern d_1, d_2 gegeben.

Man kann beweisen:

Satz A. Die Umfänge U_1, U_2 zweier beliebiger Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser,

$$U_1 : U_2 = d_1 : d_2.$$

Das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser ist somit für alle Kreise dasselbe:

$\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}$. Diese Konstante wird mit π bezeichnet. Für den Umfang U eines Kreises mit dem Durchmesser d gilt mit dieser Konstanten

$$U = \pi d.$$

Man kann ferner beweisen:

Satz B. Die Flächeninhalte F_1, F_2 zweier beliebiger Kreise verhalten sich wie die Quadrate über den Durchmessern bzw. die Quadrate über den Radien,

$$F_1 : F_2 = d_1^2 : d_2^2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Radius ist somit für alle Kreise dasselbe:

$$\frac{F_1}{r_1^2} = \frac{F_2}{r_2^2}.$$

Diese Konstante werde mit ζ bezeichnet. Für

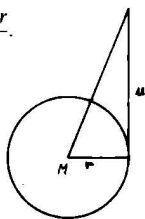
den Flächeninhalt F eines jeden Kreises mit dem Radius r gilt mit dieser Konstanten

$$F = \zeta r^2.$$

Man kann überdies beweisen:

Satz C. Die Fläche F eines Kreises ist gleich der Fläche eines Dreiecks, das den Umfang U des Kreises zur Basis und den Radius r des Kreises zur Höhe hat, also

$$F = \frac{U \cdot r}{2}.$$

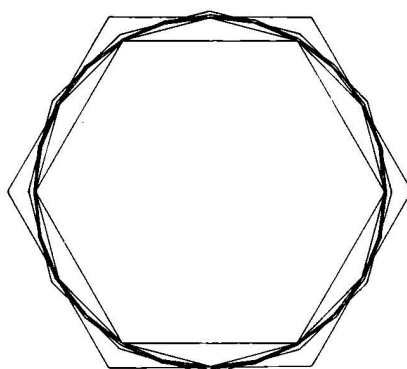


Über Satz C lassen sich die Sätze A und B auseinander herleiten. Aus $F = \zeta r^2 = \frac{r}{2} U$ und $U = \pi d = 2\pi r$ folgt

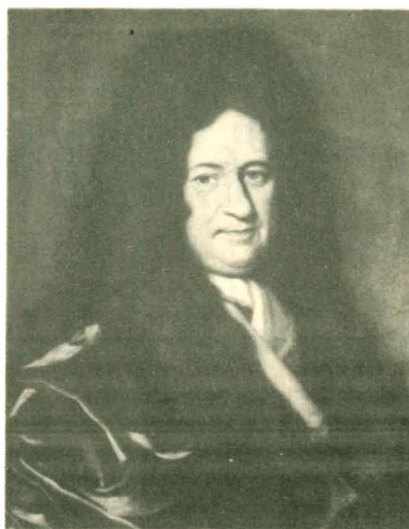
$$\zeta = \pi.$$

Die Sätze A, B, C lassen sich leichter aussprechen, als sie bewiesen werden können, zumal vorher die Begriffe „Kreisumfang“ und „Flächeninhalt eines Kreises“ erklärt werden müssen.

Legt man einer willkürlich gelegten Strecke die Länge 1 zu, so kann jeder Strecke eindeutig eine reelle Zahl (ihre Länge) zugeordnet werden. Hierdurch lassen sich auch die Umfänge geradlinig begrenzter Figuren, wie etwa regelmäßiger Vielecke, erklären. Der Umfang eines Kreises kann nun als der Grenzwert einer Folge von Umfängen regelmäßiger Vielecke mit wachsender Seitenzahl definiert werden.



Es sei dem Kreis etwa ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Die Seitenlänge des Sechsecks ist gleich dem Radius des Kreises. Der Umfang ist also $p_1 = 6r$. Durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl erhält man eine Folge dem Kreis einbeschriebener regelmäßiger Vielecke mit 12, 24, 48, 96, ... Seiten. Die Folge der Umfänge $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots$ nähert sich mit dem Wachsen der Seitenzahl einer bestimmten Grenze. Die Grenze ist größer als der Umfang eines jeden Vielecks der Folge. Ebenso kann man von einem dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen Vieleck, etwa einem regelmäßigen Sechseck, ausgehend durch Verdopplung der Seitenzahl eine Folge dem Kreis umbeschrie-



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716)

Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813)



Christian Huygens (1629 bis 1695)



bener Vielecke erhalten. Die Folge der zugehörigen Umlänge $q_1, q_2, q_3, \dots$ nähert sich mit wachsender Seitenzahl einer bestimmten Grenze. Die Grenze ist kleiner als der Umfang eines jeden dabei erhaltenen Vielecks.

Die Grenzen, denen sich die Umlänge der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke mit wachsender Seitenzahl nähern, stellen dieselbe Strecke dar. Als *Kreisumfang* bezeichnet man diese Grenze, der sich die Umlänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke des Kreises mit wachsender Seitenzahl nähern. Der Satz A ist nun eine Folge davon, daß sich (wie man beweisen kann) die Umlänge zweier ähnlicher Vielecke wie zwei entsprechende Seiten oder Diagonalen verhalten.

Die Konstante 2π ist der Kreisumfang U eines Kreises vom Radius 1.

Es gilt für jedes n

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < U < q_n < \dots < q_3 < q_2 < q_1.$$

Aus der Zahlengeraden ist somit eine Folge von Intervallen $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_n, q_n), \dots$ gegeben, so daß für jedes n das Intervall (p_{n+1}, q_{n+1}) in (p_n, q_n) enthalten ist und die Längen der Intervalle immer kleiner werden. Es gibt genau einen Punkt der Zahlengeraden, nämlich der gesuchte Umfang U , der allen Intervallen dieser Intervallschachtelung angehört. Die reelle Zahl $U = 2\pi$ wird somit durch die beschriebene Intervallschachtelung definiert.

Ausgehend von der Längeneinheit 1 wird nun eine Flächeneinheit durch ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 definiert. Die Flächenmessung geradlinig begrenzter Fläche besteht dann in der Feststellung, wie viele dieser Einheitsquadrate in der betreffenden Fläche vorhanden sind. Durch Unterteilung der Längen- und Flächenmaße lassen sich schließlich auch Flächeninhalte von Rechtecken berechnen, deren Seite rationale, dann aber auch solche (Intervallschachtelung!), deren Seiten irrationale Maße besitzen. Die Berechnung anderer Vielecksflächen erfolgt über das Rechteck. Für krummlinig begrenzte Figuren ist der Flächeninhalt mit Hilfe von Grenzwerten definierbar. Man kann beweisen: Die Flächeninhalte der einem Kreis ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke nähern sich mit wachsender Seitenzahl demselben Grenzwert. Dieser heißt *Flächeninhalt* des Kreises.

Die Konstante $\zeta = \pi$ ist der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1.

Die Definition von π als halber Kreisumfang eines Kreises vom Radius 1 oder als Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 gibt keine Auskunft über die „Natur“ von π als reeller Zahl. Ist π rational oder irrational, algebraisch oder transzendent?

Die Frage nach der Natur der Zahl π ist mit dem Lindemannschen Satz beantwortet: π ist transzendent, also insbesondere irrational.

(Teil 2 folgt.)

H. Pieper

Junge Mathematiker feierten Jubiläum



Schlüssel für die erfolgreiche Entwicklung des Kreisklubs *Junger Mathematiker* Gräfenhainichen ist jahrelange intensive Trainingsarbeit.

Vor kurzem beging der Kreisklub der *Jungen Mathematiker* Gräfenhainichen sein zehnjähriges Bestehen. An der Veranstaltung in den Räumen der Station Junger Naturforscher und Techniker nahmen fünfzig Mitglieder des Kreisklubs teil, darunter auch einige ehemalige, wie Andreas und Matthias Kasperek, Peter Stolze und Elke Witt. Herzlich begrüßt wurde ferner der Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, Oberstudienrat Lehmann, Leipzig, und der mit 78 Jahren wohl älteste aktive *alpha*-Löser, Diplomingenieur Kurt Oertel, Zschornowitz. In seiner Ansprache würdigte der Vertreter der Abteilung Volksbildung die erfolgreiche Entwicklung des Kreisklubs. Im Ergebnis der intensiven jahrelangen Trainingsarbeit sowohl im Klub als auch in den regelmäßig stattfindenden Spezialistenlagern während der Sommerferien konnten bisher nicht weniger als 17 erste und mehrere zweite sowie dritte Plätze bzw. Preise bei Bezirksolympiaden erkämpft werden. Jahrelang belegte der Kreis Gräfenhainichen ebenfalls in der Mannschaftswertung den ersten

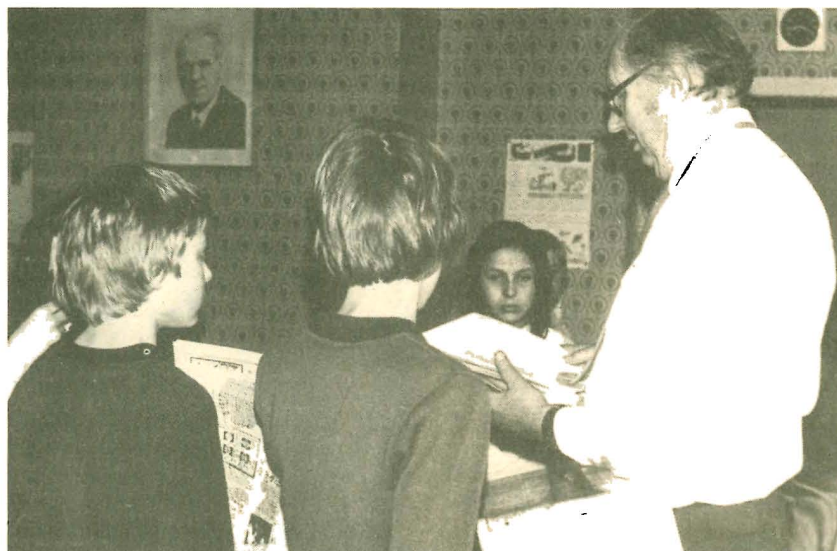
Rang. In diesem Zeitraum qualifizierten sich auch fünf *Junge Mathematiker* für die DDR-Olympiade, wo sie zum Teil ebenfalls sehr gute Ergebnisse erzielten.

Nach diesen Ausführungen hielt Andreas Kasperek, Teilnehmer an der Internationalen Mathematikolympiade 1979 in London, einen interessanten Lichtbildervortrag über seine Reiseeindrücke. Anschließend stellte Chefredakteur Johannes Lehmann in Wort und Bild den Werdegang der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* vor und wertete den *alpha*-Wettbewerb aus, an dem ja auch aus unserem Kreis jährlich etwa 50 bis 60 *Junge Mathematiker* teilnehmen. So ist gerade diese mathematische Schülerzeitschrift in all den Jahren zu einem unentbehrlichen Helfer bei der Entwicklung junger Talente geworden, und das ist wiederum Ansporn zu Überlegungen, wie die Arbeit im Kreisklub weiter verbessert und noch intensiver gestaltet werden kann. Erste Maßnahmen dazu wurden übrigens bereits durch das Kreiskomitee zur Vorbereitung der Mathematikolympiaden in die Wege geleitet.

R. Schulz

Volkskorrespondent der halleschen Tageszeitung „Freiheit“ – Leiter des Kreisklubs *Junger Mathematiker* (seit seiner Gründung)

Junge Mathematiker im Gespräch mit dem Chefredakteur der *alpha*.



XXIII. Internationale Mathematikolympiade

Budapest,
7. Juli bis 14. Juli 1982



Aufgaben

1. Tag 9. Juli 1982
Arbeitszeit: 4 Stunden 30 Minuten

1. Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n definiert ist und nur nicht-negative ganze Werte annimmt.

Es gelte für alle m und n :

a) $f(m+n) - f(m) - f(n)$ nimmt nur die Werte 0 oder 1 an.

b) $f(2)=0$, $f(3)>0$ und $f(9999)=3333$.

Man bestimme $f(1982)$.

(Großbritannien, 7 Punkte)

2. Gegeben sei ein nichtgleichschenkliges Dreieck $A_1A_2A_3$ mit den Seiten a_1, a_2, a_3 (a_i ist die gegenüberliegende Seite zu A_i). Für alle $i=1, 2, 3$ sei M_i der Mittelpunkt der Seite a_i , und T_i sei der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite a_i . Die Spiegelung an der Halbierenden des Innenwinkels des Dreiecks mit dem Scheitel A_i überführe den Punkt T_i in den Punkt S_i .

Man beweise:

Alle drei Geraden M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 gehen durch einen gemeinsamen Punkt.

(Niederlande, 7 Punkte)

3. Man betrachte nur Folgen $\langle x_n \rangle$, $n=0, 1, 2, \dots$ von positiven reellen Zahlen, die die Bedingungen erfüllen:

$x_0 = 1$ und für alle $i \geq 0$ ist $x_{i+1} \leq x_i$.

a) Man beweise, daß für jede solche Folge für ein geeignetes $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999$$

b) Man gebe eine solche Folge an, so daß für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

(Sowjetunion, 7 Punkte)

2. Tag 10. Juli 1982

Arbeitszeit: 4 Stunden 30 Minuten

4. Es sei n eine positive ganze Zahl.

Man beweise:

Falls die Gleichung $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$

eine Lösung (x, y) mit ganzen Zahlen x, y hat, so hat sie mindestens drei derartige Lösungen.

Zeige außerdem, daß die Gleichung für

$n=2891$ keine Lösung (x, y) mit ganzen Zahlen x, y hat!

(Großbritannien, 7 Punkte)

5. Die Diagonalen AC bzw. CE eines regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ werden durch innere Punkte M bzw. N derart geteilt, daß

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda \text{ gilt.}$$

Man bestimme λ , falls B, M und N auf einer Geraden liegen.

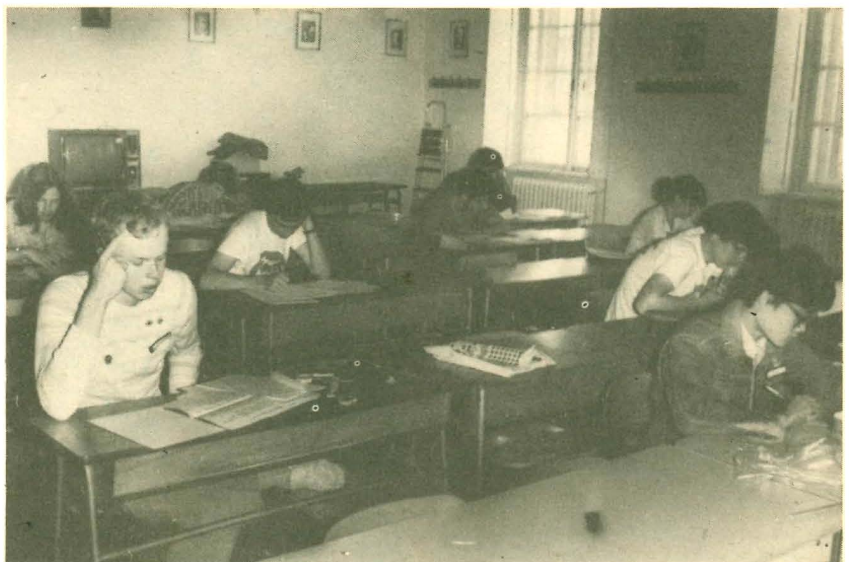
(Niederlande, 7 Punkte)

6. Es sei S ein Quadrat mit der Seitenlänge 100, und es sei L ein in S gelegener Streckenzug, der sich selbst weder schneidet noch berührt und der aus den Strecken $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ mit $A_0 \neq A_n$ gebildet wird. Außerdem gebe es für jeden Punkt P des Randes von S einen Punkt auf L , für den der Abstand von P nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist. Man

zeige, daß es zwei Punkte X und Y auf L gibt, deren Abstand nicht größer als 1 ist und für die der zwischen X und Y gelegene Teil von L nicht kürzer als 198 ist.

(Sozialistische Republik Vietnam, 7 Punkte)

Wettbewerbsatmosphäre



Die Mannschaft aus Tunesien (links oben die Dolmetscherin der Mannschaft)



Alter Bekannter: Lázló Pelikan, einst erfolgreichster ungarischer IMO-Teilnehmer, jetzt Mathematiker, Mitglied der Jury der IMO, hier im Gespräch mit Prof. Dr. Rosenbaum (DDR)



Die erfolgreiche Mannschaft der Bundesrepublik Deutschland



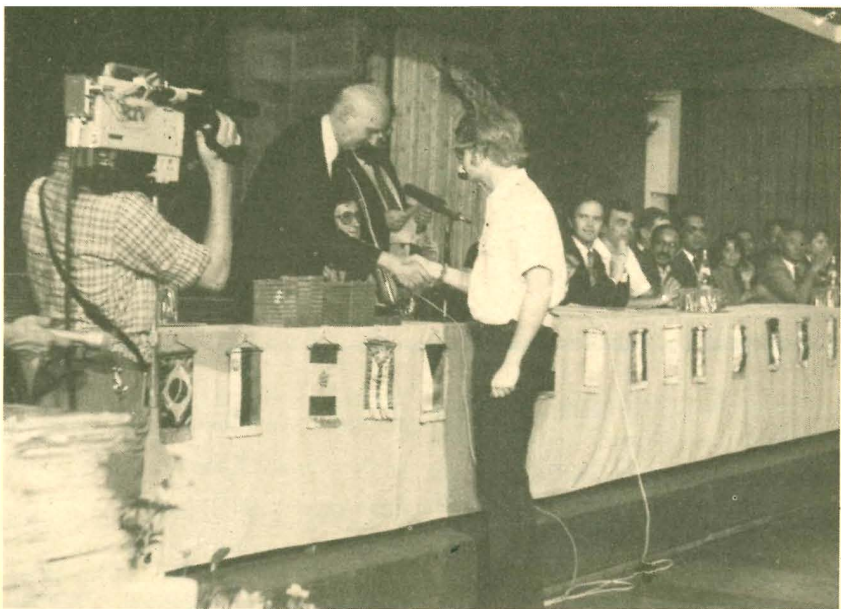
Die erfolgreiche sowjetische Mannschaft und ihre drei Betreuer (Bildmitte)



Wir stellen die erfolgreiche DDR-Mannschaft vor (v.l.n.r.): Bodo Heise (Görlitz), Spezialklasse Mathematik der TH Karl-Marx-Stadt, 1. Preis – 37 Punkte; Bernd Kirchheim (Weimar), BBS „H. Jahn“, Funkwerk Erfurt, 3. Preis – 21 Punkte; Jochen Lattermann, EOS Pestalozzi, Dresden (Kl. 11), 2. Preis – 32 Punkte; Ralf Hortig, 1. EOS „Dr. Th. Neubauer“, Cottbus, 1. Preis – 40 Punkte.

Preisträger

Einen ersten Preis erhielten:
 Bruno Haible, Bundesrepublik Deutschland;
 Grigorij Perelman, Sowjetunion; Le Tu Quoc Thang, Vietnam; Noam Elkies, USA; Ralf Hortig, Deutsche Demokratische Republik; Josef Schicho, Österreich; Jean Louis Bertin, Frankreich; Bodo Heise, Deutsche Demokratische Republik; Michael Stoll, Bundesrepublik Deutschland; Konstantin Matvejev, Sowjetunion.
 Weitere 20 Schüler erhielten einen 2. Preis, 31 Schüler einen dritten Preis, 61 Schüler eine ehrende Anerkennung für gute mathematische Leistungen.



Der feierliche Abschluß der IMO fand in der Universität Budapest statt. Die Festrede hielt der ungarische Volksbildungsminister. *Unser Foto:* Bodo Heise empfängt aus der Hand des Vorsitzenden der Jury, Prof. Dr. Casar (Universität Budapest) seinen 1. Preis.

Ergebnisspiegel

Land	Schüler (Punktzahl)				Summe d. Punkte	Preise		
	1	2	3	4		1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.
Bundesrepublik Deutschland	42	35	31	37	147	2	2	–
Sowjetunion	37	42	30	28	137	2	1	1
Deutsche Demokratische Republik	37	40	27	32	136	2	1	1
USA	40	35	29	32	136	1	2	1
Vietnam	42	30	32	29	133	1	2	1
Ungarn	21	36	33	35	125	–	3	1
ČSSR	29	21	31	34	115	–	2	2
Finnland	16	35	28	34	113	–	2	1
Bulgarien	26	29	26	27	108	–	–	4
Großbritannien	23	23	28	29	103	–	–	4
Rumänien	26	14	26	33	99	–	1	2
Jugoslawien	30	20	18	30	98	–	2	–
Polen	30	23	16	27	96	–	1	2
Niederlande	17	22	34	19	92	–	1	1
Frankreich	38	17	14	20	89	1	–	–
Österreich	11	11	38	22	82	1	–	1
Kanada	14	12	23	29	78	–	–	2
Israel	22	18	17	18	75	–	–	1
Schweden	23	15	11	25	74	–	–	2
Australien	20	23	10	13	66	–	–	1
Brasilien	24	10	19	13	66	–	–	1
Mongolei	21	12	13	10	56	–	–	1
Griechenland	14	19	9	13	55	–	–	–
Belgien	7	2	22	19	50	–	–	1
Kuba	17	7	17	3	44	–	–	–
Kolumbien	3	9	18	4	34	–	–	–
Algerien	11	10	2	–	23	–	–	–
Venezuela	11	10	1	1	23	–	–	–
Tunesien	7	8	1	3	19	–	–	–
Kuweit	2	1	1	0	4	–	–	–

Wir finden Gesetzmäßigkeiten

In der Physik werden häufig Experimente durchgeführt, um Gesetze zu erkennen. Will man z. B. bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung den Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg s und dafür benötigter Zeit t untersuchen, so entstehen bei einem entsprechenden Versuch endlich viele Paare von Meßwerten, die, bezüglich festgelegter Maßeinheiten, in Tabellen wie in Beispiel 1 notiert werden können.

Beispiel 1:

t in sec	5	12	20	30	50
s in cm	20	48	80	120	200

Im Beispiel 1 gehört z. B. zum Meßwert 30 sec für die Zeit der Meßwert 120 cm für den Weg. Allgemein gehört zur Zeit t der zurückgelegte Weg s . Bei der Auswertung der Paare $[t; s]$ geht es darum, einen für alle t geltenden Zusammenhang zwischen t und s zu finden.

Sieht man von der Art der gemessenen Größen und von in der Praxis stets auftretenden Meßfehlern ab, so läßt sich folgendes *mathematisches* Problem formulieren:

Durch eine Wertetabelle sind zwei (endliche) Zahlenmengen gegeben, deren Elemente paarweise einander zugeordnet sind. Um die Zusammengehörigkeit deutlich zu machen, führen wir eine entsprechende Bezeichnung ein. Das dem Element x der ersten Menge entsprechende Element der zweiten Menge nennen wir $m(x)$ (lies: m von x , als Abkürzung für Meßwert von x). Zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen beiden Zahlenmengen ist eine (möglichst einfache) Gleichung zu finden, die von den gegebenen geordneten Paaren $[x; m(x)]$ erfüllt wird. (Bei der physikalischen Interpretation der so erhaltenen Gleichung geht man von der Annahme aus, daß sie innerhalb gewisser Grenzen von *allen möglichen* Paaren von Meßwerten – nicht nur von den in der Tabelle erfaßten – erfüllt wird.)

Beispiel 1 a:

x	5	12	20	30	50
$m(x)$	20	48	80	120	200

Im Beispiel 1a ist nicht nur $\frac{m(30)}{30} = \frac{120}{30} = 4$,

sondern für *alle* in der Tabelle aufgeführten

Paare $[x; m(x)]$ gilt $\frac{m(x)}{x} = 4$.

Daher haben wir mit $m(x) = 4x$ einen für alle Elemente x der ersten Zahlenmenge geltenden Zusammenhang gefunden. Es liegt also Proportionalität vor. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, auf dessen Abszissenachse die x -Werte und auf dessen Ordinatenachse die $m(x)$ -Werte abgetragen werden, liegen alle Punkte mit den Koordinaten $(x; m(x))$ auf ein und derselben Geraden, die durch den Schnittpunkt der Koordinatenachse verläuft.

Beispiel 2:

x	11	17	23
$m(x)$	10,65	11,55	12,45

x	27	32	38
$m(x)$	13,05	13,80	14,70

▲ 1 ▲ Besteht zwischen x und $m(x)$ in Beispiel 2 Proportionalität? Zeichnet man die Punkte mit den Koordinaten $(x; m(x))$ aus Beispiel 2 in ein Koordinatensystem ein, so ergibt sich, daß alle diese Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Die Gerade verläuft aber nicht durch den Schnittpunkt der Koordinatenachse (siehe Bild 1), es liegt also keine Proportionalität vor.

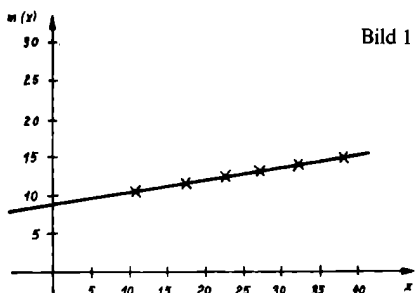


Bild 1

Wir gehen nun zu einem Koordinatensystem über, dessen Achsen sich auf der soeben erhaltenen Geraden schneiden. Das kann beispielsweise dadurch geschehen, daß wir eine

Verschiebung vornehmen, die den Punkt $P(0;0)$ in den Punkt $Q(11;10,65)$ überführt (siehe Bild 2). In dem neuen Koordinatensystem ist für jeden Punkt die Abszisse um 11 und die Ordinate um 10,65 kleiner als in dem alten Koordinatensystem. Somit ergibt sich die folgende Tabelle:

$x - 11$	0	6	12	16
$m(x) - 10,65$	0	0,90	1,80	2,40

$x - 11$	21	27
$m(x) - 10,65$	3,15	4,05

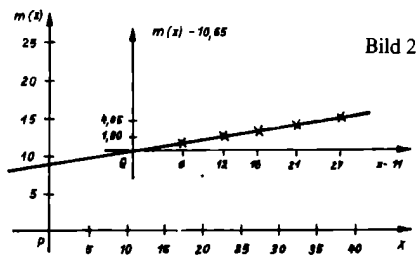


Bild 2

Man erkennt jetzt Proportionalität mit dem Proportionalitätsfaktor 0,15. Es gilt daher

$$\frac{m(x) - 10,65}{x - 11} = 0,15 \text{ für } x \in \{17; 23; 27; 32; 38\},$$

aber nicht für $x = 11$. Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit $(x - 11)$ ergibt $m(x) - 10,65 = 0,15(x - 11)$, also $m(x) - 10,65 = 0,15x - 1,65$, woraus sich $m(x) = 0,15x + 10,65 - 1,65$ bzw. $m(x) = 0,15x + 9$ ergibt.

Durch Einsetzen der Paare $[x; m(x)]$ aus der Tabelle im Beispiel 2 stellt man fest, daß $m(x) = 0,15x + 9$ wirklich den Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ beschreibt (auch für $x = 11$). Wir nennen einen Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ *linear*, wenn es eine von Null verschiedene Zahl a und eine Zahl b gibt, so daß für alle x gilt $m(x) = ax + b$.

▲ 2 ▲ Man überprüfe, ob sich im Beispiel 2 dieselbe Gleichung für den Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ ergibt, wenn man das Koordinatensystem so verschiebt, daß sich die Achsen im Punkt $R(23; 12,45)$ schneiden.

▲ 3 ▲ Man wähle aus der ersten Tabelle von Beispiel 2 irgend zwei voneinander verschiedene Paare $[x_1; m(x_1)]$ und

$$[x_2; m(x_2)] \text{ und bilde } \frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Was kann man feststellen?

Was läßt sich nun allgemein über den Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ sagen, wenn es eine Zahl a gibt, so daß für alle x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$

$$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} = a \text{ gilt?}$$

Da die genannte Gleichung für *alle* Zahlen x_1 und x_2 gelten soll, gilt sie auch für $x_2 = 0$, solange $x_1 \neq 0$ ist. Somit erhalten wir speziell

$$\frac{m(x_1) - m(0)}{x_1 - 0} = a. \text{ Daraus ergibt sich durch}$$

Multiplikation mit x_1
 $m(x_1) - m(0) = ax_1$, d. h. $m(x_1) = ax_1 + m(0)$.
 Falls $a \neq 0$ ist, erhalten wir also einen linearen Zusammenhang mit $b = m(0)$. Für $b = 0$ tritt als Spezialfall Proportionalität ein.
 Bilden wir nun umgekehrt für einen linearen Zusammenhang, der durch die Gleichung $m(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ beschrieben wird, wieder Quotienten von Differenzen, so finden wir.

$$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a.$$

Diese Quotienten sind also unabhängig von der Wahl der Zahlen x_1 und x_2 .

Damit gilt

Satz 1: Ein Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ ist genau dann *linear* (d. h., er läßt sich durch eine Gleichung der Form $m(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ beschreiben), wenn $m(0) = b$ ist und es eine Zahl $a \neq 0$ gibt, so daß für alle Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$ gilt

$$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} = a.$$

▲ 4 ▲ Besteht in der folgenden Tabelle zwischen x und $m(x)$ ein linearer Zusammenhang?

x	2	3,5	5	17	21
$m(x)$	10,5	21	31,5	115,5	143,5

Nun wollen wir quadratische Zusammenhänge untersuchen.

Wir nennen einen Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ *quadratisch*, wenn es eine von Null verschiedene Zahl a und Zahlen b und c gibt, so daß für alle x gilt $m(x) = ax^2 + bx + c$.

Für einen quadratischen Zusammenhang, der durch die Gleichung $m(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ beschrieben wird, bilden wir wieder Quotienten von Differenzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{ax_1^2 + bx_1 + c - ax_2^2 - bx_2 - c}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= a(x_1 + x_2) + b. \end{aligned}$$

Gilt nun umgekehrt für einen Zusammenhang $\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b$ für alle

Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$, so erhalten wir für

$$x_2 = 0 \quad \frac{m(x_1) - m(0)}{x_1 - 0} = ax_1 + b,$$

$$\text{also } m(x_1) - m(0) = ax_1^2 + bx,$$

d. h. $m(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + m(0)$ für alle $x_1 \neq 0$.

Damit gilt **Satz 2:** Ein Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ ist genau dann *quadratisch* (d. h. er läßt sich durch eine Gleichung der Form $m(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ beschreiben), wenn $m(0) = c$ ist und es Zahlen $a \neq 0$ und b gibt, so daß für alle Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$ gilt

$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b$.

$$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b.$$

Beispiel 3: Wir wollen feststellen, welcher Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ durch folgende Tabelle beschrieben wird:

x	0	1	3	-1	-3
$m(x)$	3	6	18	2	6

Dazu bilden wir einige Quotienten von Differenzen:

$$\frac{m(1) - m(0)}{1 - 0} = 3; \quad \frac{m(3) - m(1)}{3 - 1} = 6;$$

$$\frac{m(3) - m(0)}{3 - 0} = 5; \quad \frac{m(-1) - m(1)}{-1 - 1} = 2.$$

Wegen Satz 1 steht fest, daß kein linearer Zusammenhang besteht, denn die Quotienten sind nicht alle gleich. Mit Hilfe von Satz 2 stellen wir fest, ob ein quadratischer Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ vorliegt. Dazu prüfen wir, ob zwischen $x_1 + x_2$ und $\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2}$ ein linearer Zusammenhang besteht. Für die eben gebildeten Quotienten ergibt sich folgende Tabelle:

$x_1 + x_2$	1	4	3	0
$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2}$	3	6	5	2

Bilden wir aus dieser Tabelle einige Quotienten von Differenzen, z. B. $\frac{6-3}{4-1} = \frac{5-3}{3-1}$,

$$\frac{2-3}{0-1} = \frac{5-6}{3-4}, \text{ so ergibt sich immer 1.}$$

Es liegt also die Vermutung nahe, daß gemäß Satz 1 ein linearer Zusammenhang zwischen $x_1 + x_2$ und

$$\frac{m(x_1) - m(x_2)}{x_1 - x_2} \text{ mit } a = 1 \text{ und } b = 2 \text{ besteht.}$$

Wegen $m(0) = 3$ würde sich dann $m(x) = x^2 + 2x + 3$ ergeben. Da diese Gleichung – wie man leicht überprüft – für alle gegebenen Paare $[x; m(x)]$ gilt, haben wir einen quadratischen Zusammenhang gefunden.

▲ 5 ▲ Kann man in folgender Tabelle mit Hilfe von Satz 1 oder Satz 2 einen Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ erkennen?

x	1	2,5	5	4	-3	0
$m(x)$	1	11,5	49	31	17	-1

Unser Verfahren funktioniert auch noch für einige Zusammenhänge, die sich durch Gleichungen der Form $m(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) beschreiben lassen. Untersucht solche Zusammenhänge selbständig! W. Schulz

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 2/1980 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■ 1973 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich dem Vierzigfachen ihrer Quersumme sind.

Im Heft 6/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Eine dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $100a + 10b + c$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$; ihre Quersumme beträgt $a + b + c$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 40(a + b + c), \\ 100a + 10b + c &= 40a + 40b + 40c, \\ 30b &= 60a - 30c - 9c, \\ b &= 2a - c - \frac{3c}{10}. \end{aligned}$$

Nur für $c = 0$, also für $b = 2a$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Es gibt genau vier Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 120, 240, 360, 480.

Wir stellen nun die Lösung von Thomas Schleiff aus Halle vor, der Schüler der Klasse 6 der POS Kröllwitz ist; Thomas löste diese Aufgabe wie folgt:

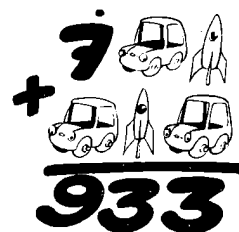
Auf Grund der Aufgabenstellung gilt

$$100a + 10b + c = 40(a + b + c).$$

Beide Seiten der Gleichung sind durch 40, also auch durch 10 teilbar. Wegen $c < 10$ folgt daraus weiter $c = 0$. Somit gilt

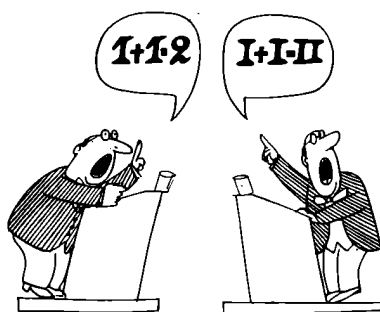
$$\begin{aligned} 100a + 10b &= 40(a + b), \\ 100a + 10b &= 40a + 40b, \\ 60a &= 30b, \text{ also } b = 2a. \end{aligned}$$

Für $a = 1$ gilt $b = 2$, für $a = 2$ gilt $b = 4$, für $a = 3$ gilt $b = 6$, für $a = 4$ gilt $b = 8$. Da $b < 10$ gilt, sind größere Werte für a nicht zulässig. Die gesuchten Zahlen lauten 120, 240, 360 und 480.



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1983



Mathematik

Ma 5 ■ 2266 Eine Familie besteht aus fünf Personen, und zwar dem Vater, der Mutter und den drei Söhnen. Der jüngste Sohn ist 24 Jahre, der zweite Sohn 22 Jahre, der älteste Sohn 20 Jahre jünger als die Mutter. Der Vater hingegen ist sechs Jahre älter als die Mutter. Die Familienmitglieder sind zusammen 80 Jahre alt. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schüler Olaf Karger, Wittenberge

Ma 5 ■ 2267 Von fünf befreundeten Familien mit den Nachnamen Kunz, Schulz, Ludwig, Müller und Richter wissen wir folgendes:

- Jede dieser fünf Familien hat mindestens ein Kind und höchstens vier Kinder.
 - Die Familie Schulz hat mehr Kinder als die Familie Kunz.
 - Die Familie Richter hat die meisten Kinder.
 - Die Familie Müller hat genauso viel Kinder wie die Familie Kunz.
 - Die Familie Kunz hat mehr Kinder als die Familie Ludwig.
 - Diese fünf Familien haben zusammen 12 Kinder.
- Wie viele Kinder gehören zu jeder dieser fünf Familien?

Schüler V. Groh, Dresden

Ma 5 ■ 2268 Karl hat ein Buch, das mehr als 160 Seiten, aber weniger als 170 Seiten umfaßt, in genau drei Tagen durchgelesen. Weil seine Spannung von Seite zu Seite wuchs, schaffte Karl am zweiten Tag dreimal soviel Seiten, am dritten Tag sogar fünfmal soviel Seiten wie am ersten Tag. Wieviel Seiten umfaßt dieses Buch?

Schülerin Ute Richter, Karl-Marx-Stadt

Ma 5 ■ 2269 Großvater, Vater und Sohn sind zusammen 80 Jahre alt. Der Vater ist fünfmal so alt wie der Sohn, der Großvater doppelt so alt wie der Vater. Wie alt ist jede dieser drei Personen?

Schülerin Claudia Pleyer, Eisenach

Ma 5 ■ 2270 Frau Meier wird nach dem Lebensalter ihrer drei Kinder gefragt. Sie antwortet scherzhaft: „Wenn man die (ganzen) Zahlen, die das Alter meiner Kinder angeben, miteinander multipliziert, so erhält man als Ergebnis 24. Wenn man diese Zahlen aber addiert, so erhält man meine Hausnummer, die eine Primzahl ist.“ Wie alt sind die Kinder von Frau Meier?

Wie lautet ihre Hausnummer?

Schülerin Heike Riehle, Gottleuba

Ma 5 ■ 2271 Wie kann man aus einem Brunnen genau 6 Liter Wasser abfüllen, wenn als Meßgefäße nur zwei Eimer vorhanden sind, einer mit einem Fassungsvermögen von 4 Litern, der andere von 9 Litern?

Ma 6 ■ 2272 Katrin fordert ihre Mitschüler auf: „Denkt euch jeder eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl! Schreibt nun alle natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich der gedachten auf! Streicht nun alle geraden Zahlen! Bei jedem von euch bleibt nicht weniger als die Hälfte aller zuvor notierten Zahlen übrig.“ Stimmt Katrins Aussage? Begründe deine Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2273 Welche geordneten Zahlentripel $[a, b, c]$ aus natürlichen Zahlen a, b und c erfüllen zugleich die Gleichung $a \cdot b + 8 = c$ und die Ungleichung $a + b + c < 10$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Wettbewerbsbedingungen

- Am Wettbewerb können sich alle alpha-Leser beteiligen.
- Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

- Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

- Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

- Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

- Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

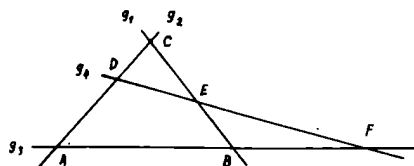
Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingegandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das alpha-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22		Ma 7 ■ 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

Ma 6 ■ 2274 Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 schneiden einander, wie aus dem Bild ersichtlich, in sechs Punkten A, B, C, D, E, F . Bekannt sind folgende Winkelgrößen:



$\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ACB = 35^\circ$, $\angle BFE = 20^\circ$. Es ist die Größe des Winkels $\angle CEF$ zu bestimmen; die Lösung ist zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2275 Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)!$$

Sch.

Ma 6 ■ 2276 Bei einem Handballspiel erzielte Christian weniger Tore als Dieter. Axel und Bruno erzielten zusammen genau so viele Tore, wie Christian und Dieter zusammen Bälle ins gegnerische Tor brachten. Bruno und Dieter erzielten zusammen nicht ganz so viele Tore, wie Axel und Christian zusammen verbuchen konnten. Wer dieser vier Jungen erzielte die wenigsten, wer die meisten Tore?

Sch.

Ma 7 ■ 2277 Klaus, Jens und Gisela sind Geschwister. Vor drei Jahren war Klaus dreimal so alt wie Gisela und Jens doppelt so alt wie Gisela. Wie alt sind die Geschwister gegenwärtig, wenn die Summe aus den Zahlen ihrer Lebensalter 27 beträgt?

Schülerin Karin Graf, Plauen (Kl. 7)

Ma 7 ■ 2278 Zeichne einen spitzen Winkel mit seinem Scheitelpunkt S und den Schenkeln s_1 und s_2 ! Lege im Innern des Winkels zwei Punkte A und B so fest, daß die Gerade AB zu keinem der beiden Schenkel parallel ist und nicht durch S geht!

Konstruiere auf s_1 einen Punkt C und auf s_2 einen Punkt D so, daß der abgeschlossene Streckenzug $ABCD$ ein Parallelogramm ist!

Sch.

Ma 7 ■ 2279 Welche geordneten Paare $[x, y]$ natürlicher Zahlen x und y erfüllen die Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 7$?

Sch.

Ma 7 ■ 2280 Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleich der vierten Potenz ihrer Quersumme sind!

Sch.

Ma 8 ■ 2281 Man denke sich die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form

$$z = 1234567891011121314 \dots 9899100$$

entsteht. Durch welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ist z teilbar, durch welche nicht?

Schüler Thomas Kayser, Eisleben (Kl. 8)

Ma 8 ■ 2282 Es sei z eine dreistellige natürliche Zahl mit drei gleichen Grundziffern. Man beweise,

a) daß der Quotient aus z und ihrer Quersumme immer 37 beträgt und

b) daß die Quersumme von z stets ein Vielfaches von 3 und genau dann ein Vielfaches von 6 ist, wenn z eine gerade Zahl ist.

Schüler Thomas Kayser, Eisleben (Kl. 8)

Ma 8 ■ 2283 Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$; die Größen der Innenwinkel seien mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet.

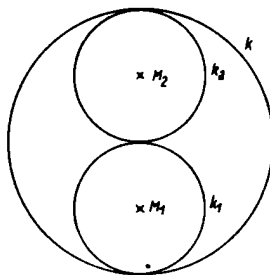
a) Welches spezielle Viereck liegt vor, wenn β doppelt so groß, γ dreimal so groß und δ viermal so groß ist wie α ?

b) Welches spezielle Viereck liegt vor, wenn β doppelt so groß, γ viermal so groß und δ dreimal so groß wie α ist?

OSR K. Lehmann, VLdV, Berlin

Ma 8 ■ 2284 In einen Kreis k sind zwei Kreise k_1, k_2 mit gleichlangen Radien so eingezeichnet, daß sie sich gegenseitig und den größeren Kreis k berühren. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des Kreises k nehmen die Flächeninhalte der Kreise k_1 und k_2 zusammen ein?

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar



Ma 9 ■ 2285 Gibt es reelle Zahlen x , für die gilt $(x+a)^{-1} = x^{-1} + a^{-1}$ mit $a \cdot x \neq 0$ und $x \neq -a$?

Sven Saar, Mühlhausen (Kl. 11)

Ma 9 ■ 2286 Gegeben sei die Gleichung $x^2 - 2x + k = 0$, ($x \in P$). Man ermittle alle reellen Zahlen k , so daß die eine Lösung der Gleichung gleich dem Quadrat der anderen Lösung ist!

Andreas Israel, Karl-Marx-Stadt (Kl. 10)

Ma 9 ■ 2287 Welche geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen a und b erfüllen die Gleichung $a^4 - b^4 = 65$?

Sch.

Ma 9 ■ 2288 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei c die Länge der Basis $\overline{AB}$ und $a = 5$ cm die Länge von $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$.

D sei ein beliebiger Punkt der Basis. Die Abstände des Punktes D von den Schenkeln des Dreiecks seien mit e bzw. f bezeichnet. Es gelte $e + f = 4$ cm.

a) Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen.

b) Es ist zu beweisen, daß $e + f$ für alle Punkte D , die auf $\overline{AB}$ liegen, konstant ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2289 „Mein Bruder ist im Jahre $x \cdot y$ geboren. Im Jahre x^2 wird er x Jahre und im Jahre $(x+1) \cdot y$ wird er y Jahre alt sein. Wie alt war mein Bruder im Jahre $x^2 + y^2 - xy$?“

Das schrieb und fragte

Schüler Ints Intricsons

aus Riga (Sowjetunion), (Kl. 7)

Ma 10/12 ■ 2290 Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c . Die Längen der Diagonalen seiner Seitenflächen seien $d_1 = 5$ cm, $d_2 = \sqrt{34}$ cm, $d_3 = \sqrt{41}$ cm. Man berechne das Volumen dieses Quaders!

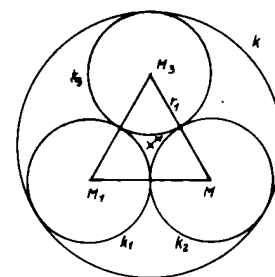
Sven Saar, Mühlhausen (Kl. 11)

Ma 10/12 ■ 2291 Es ist nachzuweisen, daß für jedes Dreieck ABC die Beziehung $9\zeta = h_a + h_b + h_c$ zwischen der Länge des Inkreisradius ζ und den Längen der Höhen h_a, h_b und h_c gilt!

Sch.

Ma 10/12 ■ 2292 In einem Kreis k sind drei gleich große Kreise k_1, k_2, k_3 so eingezeichnet, daß sie sich gegenseitig und den größeren Kreis berühren. Welchen Anteil der Fläche des größeren Kreises nehmen die Flächen der drei eingezeichneten Kreise ein?

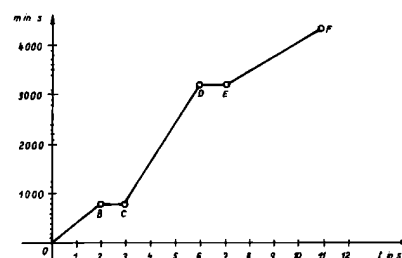
Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar



Physik

Ph 6 ■ 126 Das folgende Weg-Zeit-Diagramm zeigt grafisch die Durchschnittsgeschwindigkeiten eines Omnibusses zwischen einigen Haltestellen. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ zwischen den Strecken $\overline{OB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{OD}$, $\overline{CF}$ und $\overline{OF}$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

indem du die erforderlichen Werte dem Diagramm entnimmst!



Ph 7 ■ 127 Die zulässigen Achslasten für den Škoda sind vorn 515 kp (≈ 5150 N) und hinten 665 kp (≈ 6650 N). Die Entfernung zwischen den beiden Achsen beträgt 2,40 m. Wie groß ist die Entfernung des Punktes von den Achsen, über dem sich der Schwerpunkt befindet?

Ph 8 ■ 128 Eine alte Münze habe eine Masse von 13 Gramm und einen Durchmesser von 31 mm. Berechne ihre Dicke, wenn die Münze aus Aluminiumbronze besteht!
(Aluminiumbronze besteht aus 94% Kupfer und 6% Aluminium.)

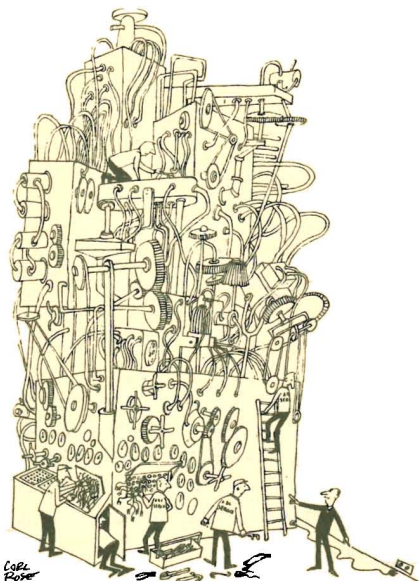
Schüler Olaf Parchmann, Blankenheim

Ph 9 ■ 129 In einem Stahlwerk wird zum Verladen von Stahlblöcken ein Kran mit einem Lasthebemagneten eingesetzt. Dieser Magnet hat eine maximale Haftkraft von $F_{\max} = 60000 \text{ N}$.

Zu wieviel Prozent wird die maximale Haftkraft des Magneten höchstens ausgenutzt, wenn damit ein Stahlblock mit einer Masse von $m = 4000 \text{ kg}$ in einer Zeit von $t = 7,5 \text{ s}$ Sekunden auf eine Höhe von $h = 3,5 \text{ m}$ gehoben wird und die konstante Hubgeschwindigkeit $v_k = 30 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ beträgt?

Beachten Sie: Zum Erreichen der konstanten Hubgeschwindigkeit muß die Last erst auf v_k beschleunigt werden!

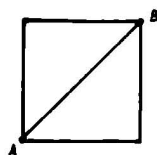
Ing. A. Körner, Leipzig



Ohne Worte

Carl Rose, aus: The New Yorker

Ph 10/12 ■ 130 Ein Draht aus gleicher Stärke und gleichem Material habe einen Widerstand von 1Ω . Er werde zu einem Quadrat mit einer Diagonalen gebogen und an den



Punkten A und B zusammengelötet, wie es das Bild zeigt. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand, der zwischen den Punkten A und B besteht!

Chemie

Ch 7 ■ 101 Zur Herstellung von Portlandzement wird ein Rohmehl, welches folgende Zusammensetzung besitzt, eingesetzt.

- 66,2% Kalziumoxid
- 20,6% Siliziumoxid
- 6,6% Aluminiumoxid
- 3,1% Eisen(III)-oxid

Wieviel Kilogramm von jedem Bestandteil sind in 720 kg des Rohmeihls enthalten?

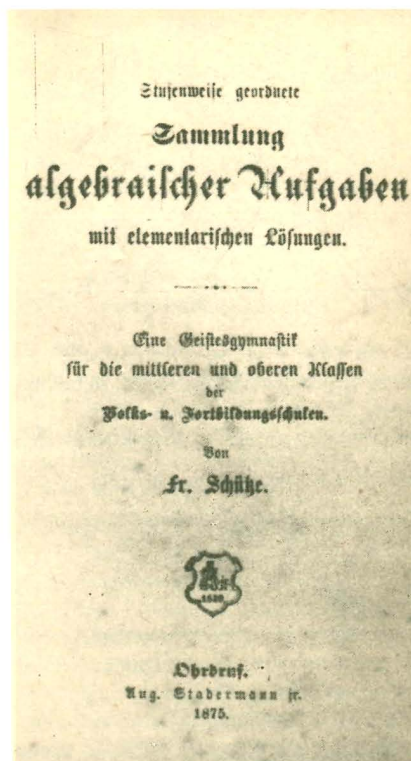
Ch 8 ■ 102 Eine Kalziumhydroxid-Lösung ist gesättigt, wenn sie bei 20°C 1,65 g Kalziumhydroxid je Liter Lösung enthält. (Da die Masse an gelöster Substanz gering ist, soll ein Liter Lösung gleich 1000 g gesetzt werden.)

- a) Wieviel %ig ist die gesättigte Kalziumhydroxid-Lösung?
- b) Wieviel Gramm dieser Lösung müssen zur Reaktion gebracht werden, damit 24 g 2%ige Kalziumchlorid-Lösung entstehen?

Ch 9 ■ 103 Zur Zersetzung von Kalziumkarbonat sind bei 900°C 165,3 kJ/mol und von Magnesiumkarbonat bei 600°C 105 kJ/mol notwendig. Berechnen Sie die Wärmemenge in Kilojoule, die zur Zersetzung von 2 kg Dolomit ($\text{CaCO}_3 \cdot \text{MgCO}_3$) aufgebracht werden muß!

Ch 10/12 ■ 104

Zur Bildung der Kalziumaluminate $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ und $12\text{CaO} \cdot 7\text{Al}_2\text{O}_3$ müssen Kalziumkarbonat und Aluminiumoxid zur Reaktion gebracht werden. Setzt man 419,1 g Kalziumkarbonat und 172,9 g Aluminiumoxid ein, reagieren diese Stoffe vollständig miteinander. Wieviel Kilogramm der Kalziumaluminate werden gebildet?

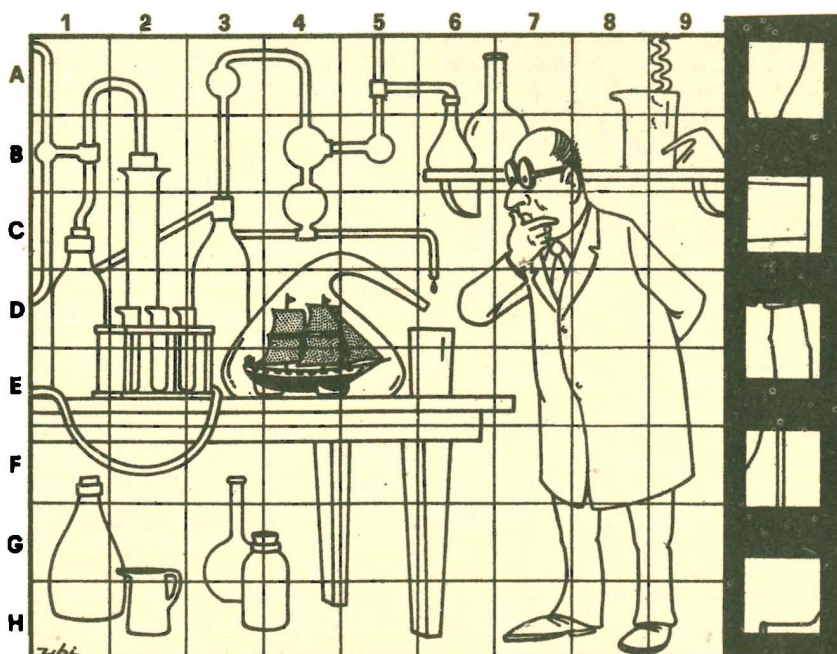


Auf Seite 132 veröffentlichen wir 16 Aufgaben aus diesem unterhaltsamen Rechenbuch aus dem Jahre 1875.

Viel Freude und Erfolg beim Knobeln!

Gut beobachten!

Die auf der rechten Seite des Bildes gezeigten 5 Bilddetails sind irgendwo auf dem großen Bild wiederzufinden, in der gleichen Stellung. Mit Hilfe von Koordinaten kann man ihren Platz genau bestimmen.





Квадрат из фишек

▲1▲ Фишки с номерами от 1 до 9 включительно выложены в ряд в порядке их возрастания. Какое наименьшее количество фишек нужно убрать, чтобы вновь образованное число стало квадратом целого числа?

Какие фишки убираются при этом?



What is It?

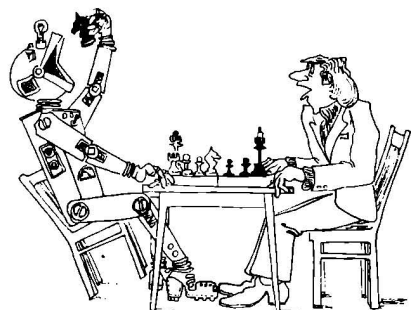
▲2▲ Given an equilateral triangle, make a fold on each midline (line joining mid-points of two sides), bringing all vertices together at one point.

What geometric figure results?

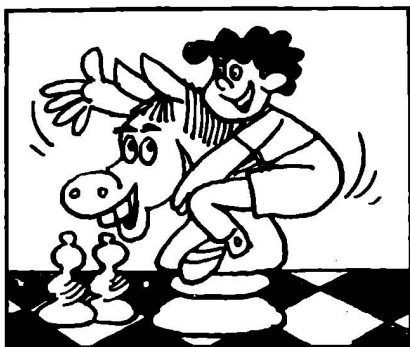
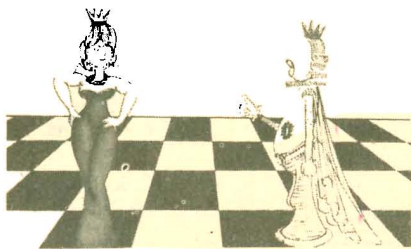
Novelle façade

▲3▲ On veut blanchir la façade d'une école. Cette façade a 18 m de longueur et 12 m de hauteur; on y voit 12 fenêtres et une porte. Les dimensions, en m, de chaque fenêtre sont 2,5 et 1,5; celles de la porte 3 et 2. Calcule l'aire en m² de la surface à blanchir.

H. Begander/Dr. C.-P. Helmholtz/J. Lehmann



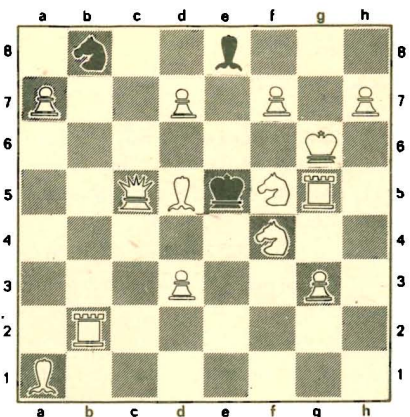
Zeichnung: K. Rybalko, aus: Trud, Moskau



Matt dem König!

Nachdem die Gangart von König, Dame, Springer und Bauer schon erklärt wurden, nun noch die Zugweise der restlichen Figuren des Schachspiels – Turm und Läufer.

Der Turm bewegt sich stets vertikal (Linien) oder horizontal (Reihen). Dame und Türme bezeichnet man auch als Schwerfiguren. Hingegen sind Springer und Läufer auf Grund ihrer schwächeren Wirkungskraft die Leichtfiguren.



Der Läufer zieht nur auf den Diagonalen des Schachbretts, vorwärts und rückwärts. Jede Partei (Weiß und Schwarz) verfügt in der Ausgangsposition über zwei Läufer, der eine bewegt sich nur auf weißen Diagonalen, der andere nur auf schwarzen.

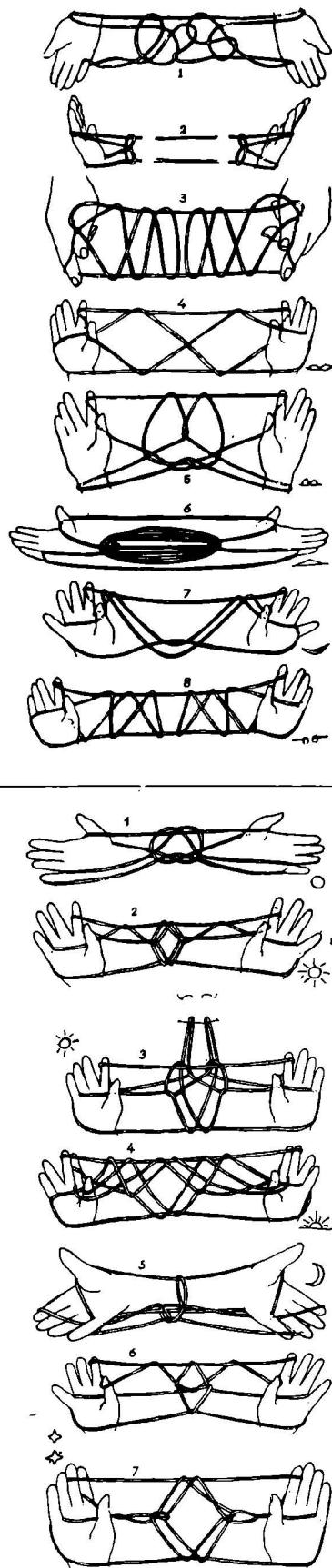
In der abgebildeten Diagrammstellung kann Weiß den schwarzen König in einem Zug mattsetzen. Wie viele Matts sind hierbei u. a. durch Abzugsschach, Damenangriffe, Attacken des Bauern d3 und Verwandlungen der Bauern a7, d7, f7 und h7 in verschiedene Figuren möglich?

Anmerkung: Zieht man eine Figur, die bisher den Wirkungsbereich einer zweiten Figur auf den feindlichen König nichtig machte und ergibt sich daraus ein Schachgebot, so liegt ein Abzugsschach vor!

Ich warne Sie, meine Dame! Wenn Sie sich ungehörig benehmen, werde ich Sie opfern!
aus: Urania

Zum Titelbild

Im Jahre 1902 schrieb W. Roth in North Queensland ein Buch über Fadenspiele. Anbei einige Beispiele.





Gute Grundkenntnisse gesucht

Sieben Geometriaufgaben auf einen Streich

Wir betrachten Körper

▲ 1 ▲ Ergänze die Tabelle!

Quaderlänge (cm)	5			
Quaderbreite (cm)	6	7		
Quaderhöhe (cm)				
Quadvolumen (cm ³)	240	140	100	5

(Die Zahlenwerte der Kantenlängen sollen natürliche Zahlen sein.)

▲ 2 ▲ Wieviel Quader unterschiedlicher Form lassen sich aus a) 36, b) 7, c) 25 Einheitswürfeln zusammensetzen?

▲ 3 ▲ In einer Kiste mit den Kantenlängen 24 cm, 36 cm, 48 cm sollen Päckchen mit den Kantenlängen

a) 4 cm, 12 cm, 16 cm;

b) 5 cm, 7 cm, 12 cm verpackt werden.

Wieviel Päckchen passen höchstens in die Kiste?

▲ 4 ▲ a) Das Volumen einer (quaderförmigen) Schachtel ist dreimal so groß wie das einer anderen Schachtel. Beide haben die gleiche Länge und die gleiche Breite.

Was weißt du über die Höhen der Schachteln?

b) Die Länge einer Schachtel ist doppelt so groß wie die Länge einer anderen Schachtel. Beide haben die gleiche Breite und die gleiche Höhe.

Was weißt du über die Rauminhalte der Schachteln?

c) Länge, Breite und Höhe einer Schachtel sind jeweils doppelt so groß wie Länge, Breite und Höhe einer anderen Schachtel. Was weißt du über die Rauminhalte der beiden Schachteln?

▲ 5 ▲ Ermittle die Kantenlänge eines Würfels, dessen Volumen sich von dem eines Quaders mit den Seitenlängen

a) 2 cm, 4 cm, 8 cm;

b) 2 cm, 2 cm, 7 cm möglichst wenig unterscheidet!

Der Zahlenwert (die Maßzahl) der Kantenlänge soll eine natürliche Zahl sein.

▲ 6 ▲ Bei einem Quader, dessen Volumen 200 cm³ beträgt, haben zwei gegenüberliegende Flächen zusammen einen Flächeninhalt von 100 cm².

Wie groß ist deren Abstand?

▲ 7 ▲ Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen 12 cm und 8 cm wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge

a) 1 cm, b) 2 cm, c) 3 cm, d) 4 cm

herausgeschnitten und der Rest zu einem oben offenen Kästchen gebogen. Ermittle dessen Volumen!

M. Rehm

Geistesgymnastik

Wir stellen unseren *alpha*-Lesern einige Aufgaben vor, die dem Buch *Sammlung algebraischer Aufgaben* von Fr. Schütze aus dem Jahre 1875 entnommen wurden. Das Lösen dieser Aufgaben möge zum Wiederholen und Auffrischen von Grundkenntnissen im Lösen von Gleichungen und Sachaufgaben dienen. (Siehe Bild auf Seite 130 rechts oben.)

Aufgaben · Klasse 5

▲ 1 ▲ Jemand kauft eine Mandel Leinwand, von der das Schock 48 M kostet. Er gab dafür 7,50 M in bar und eine fette Gans.

Welcher Preis wurde für die Gans angerechnet? (1 Mandel sind 15 Stück, 1 Schock sind 4 Mandeln.)

▲ 2 ▲ Wenn man von einer Zahl 30 subtrahiert, so ist die Differenz gleich der Summe aus 28 und 32.

Wie lautet diese Zahl?

▲ 3 ▲ Eine Bäuerin brachte Eier auf den Markt zum Verkauf. Nachdem sie durch Unvorsichtigkeit elf Eier zerbrochen hatte, konnte sie die übrigen Eier noch zum Gesamtpreis von 1,70 M verkaufen.

Wieviel Eier hatte sie anfangs, wenn sie zwei Eier für 10 Pf verkaufte?

▲ 4 ▲ Die Zahl 45 ist so in fünf Summanden zu zerlegen, daß jeder folgende Summand stets um 1 größer ist als der vorhergehende Summand.

Um welche fünf Summanden handelt es sich?

Klasse 6

▲ 1 ▲ Subtrahiert man vom Vierfachen einer Zahl 10, so erhält man das Sechsfache von 11. Um welche Zahl handelt es sich?

▲ 2 ▲ Nenne eine Zahl, deren achter Teil um 42 kleiner ist als die Zahl selbst!

▲ 3 ▲ Karl hatte acht Walnüsse. Würde Karl noch den fünften Teil der Anzahl der Walnüsse, die Heinz hat, erhalten, so würde Karl eine Mandel Walnüsse besitzen.

Wieviel Walnüsse hatte Heinz?

(1 Mandel sind 15 Stück.)

▲ 4 ▲ Addiert man zum Zweifachen einer Zahl 64, so erhält man das Sechsfache dieser Zahl.

Um welche Zahl handelt es sich?

Klasse 7

▲ 1 ▲ Beim Lichten eines Waldes wurden insgesamt 357 Bäume gefällt, und zwar $\frac{1}{3}$ mal

soviel Buchen wie Tannen, $\frac{3}{5}$ mal soviel Eichen wie Buchen, $\frac{2}{3}$ mal soviel Lärchen wie

Eichen, $\frac{1}{4}$ mal soviel Ahorne wie Lärchen.

Wie viele Bäume jeder Art wurden gefällt?

▲ 2 ▲ Jemand verwendete den dritten Teil seines Jahreseinkommens für Ernährung und Miete, den sechsten Teil für Kleidung, den achten Teil für unvorhergesehene Ausgaben. Ihm verblieben danach noch 480 M Ersparnisse. Auf wieviel Mark belief sich das Jahreseinkommen?

▲ 3 ▲ Drei Zahlen, deren Summe 35 beträgt, verhalten sich wie 2 : 3 : 5.

Um welche Zahlen handelt es sich?

▲ 4 ▲ Meister Roth ist gegenwärtig siebenmal so alt wie sein Sohn Karl. Der Altersunterschied zwischen beiden beträgt 36 Jahre. Wie alt ist jeder von ihnen?

Klasse 8

▲ 1 ▲ Für eine mehrklassige Schule wurden zusammen 300 Lesebücher und Fibeln für 180 M gekauft. Ein Lesebuch kostet 0,80 M, eine Fibel 0,50 M. Wie viele Lesebücher bzw. Fibeln wurden gekauft?

▲ 2 ▲ Eine Buchhandlung verkaufte von den vorhandenen Exemplaren eines neu erschienenen Romans am ersten Tag den achten Teil und 10 Stück, am zweiten Tag vom Restbestand die Hälfte und 15 Stück. Es verblieben danach noch 50 Exemplare.

Wieviel Exemplare wurden anfangs zum Verkauf angeboten?

▲ 3 ▲ Jemand hatte sich verpflichtet, ein Darlehen in vier Terminen zu tilgen. Beim ersten Termin wurden der vierte Teil der Schuld und noch 50 M getilgt. Beim zweiten Termin wurden von der Restschuld der fünfte Teil und noch 60 M getilgt. Beim dritten Termin wurden von der nun verbliebenen Restschuld die Hälfte und noch 50 M getilgt. Mit dem vierten Termin wurden durch den Restbetrag von 200 M die Schulden vollständig getilgt.

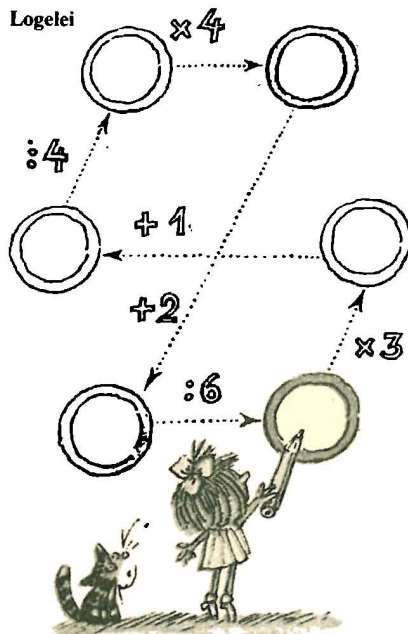
Wie hoch belief sich das Darlehen?

▲ 4 ▲ Ein Fleischer kaufte fünf Kälber mit unterschiedlichem Gewicht für insgesamt 100 M. Der Preis jedes Kalbes richtete sich nach der Rangfolge ihres Gewichtes. Jedes schwerere Tier kostete 2 M mehr als das zunächst leichtere Tier.

Wieviel Mark kostete das leichteste Tier, wenn alle 5 Tiere ein unterschiedliches Gewicht haben?

Knobeleyen am laufenden Band

Logelei



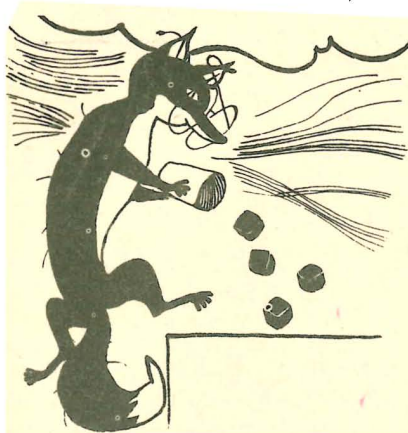
Trage in die Kreise Zahlen so ein, daß die in Pfeilrichtung folgende Zahl aus der vorhergehenden mit Hilfe der Rechenoperation, die neben den Pfeilen steht, erhalten wird.

Quant, Moskau

Würfelei

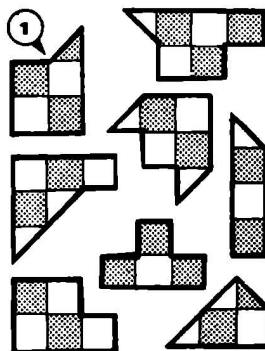
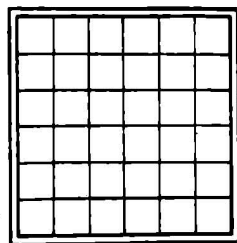
Vier Spielwürfel stehen aufeinander. Die oberste Fläche des obersten Würfels zeigt 3 Augen. Wie groß ist die Summe der Augen aller verdeckten Würfelflächen?

technikus, Berlin



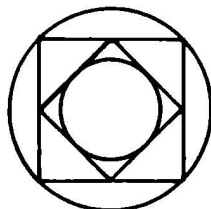
Legespiel

Zeichne die acht Flächen nach, und lege sie auf das Quadrat so, daß sie dessen Fläche vollkommen bedecken! *delta, Warschau*



In einem Zug

Kisdobos, Budapest



Vexierbild

Katrin hat einen Hund bei sich. Wißt ihr, wo er steckt?

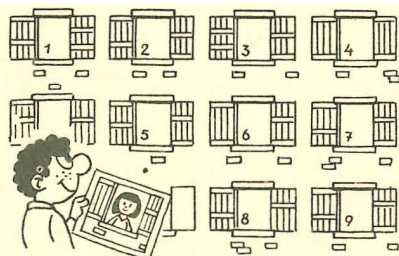
NBI (NUK)



Augen auf!

An welchem Fenster hat Karin bei der Aufnahme gestanden?

Frösi, Berlin

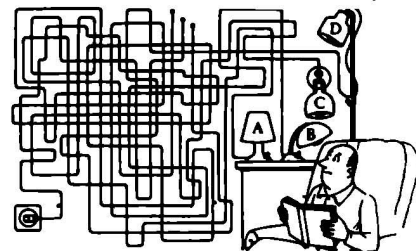


Vier Lampen und nur ein Kontakt

Von den vier Lampen A, B, C und D ist nur eine mit der Steckdose verbunden (siehe Bild). Welche ist es?

Versuche es herauszufinden, ohne die Linien mit dem Bleistift nachzuziehen!

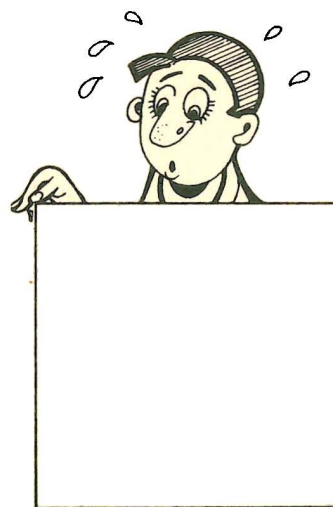
Urania Leipzig · Jena · Berlin



Streckenteilung

Zeichne vier Strecken so ein (von einer Seite des Quadrats zur gegenüberliegenden), daß elf Flächen entstehen!

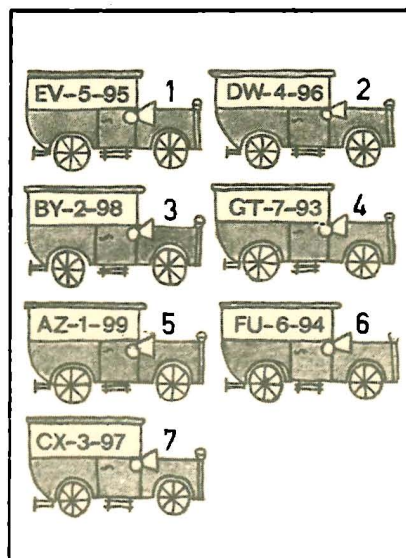
Füles, Budapest



Park-Prüfung

Ordne die Autos nach der logischen Reihenfolge!

Für Dich





Ernst Abbe

Er wußte, was er der Technik zutrauen konnte

„Man muß wissen, welche Mittel die Technik zur Verfügung hat, um das zu erreichen, was die Theorie als möglich erweist, was man der Technik zutrauen kann und was nicht.“ Dieser Anspruch an den Naturwissenschaftler stammt von Ernst Abbe.



Der hervorragende Wissenschaftler, der Begründer des wissenschaftlichen Gerätebaus und Bahnbrecher auf dem Gebiet der Optik war dank seiner gewaltigen Berechnungen in der Lage, rein theoretisch die kompliziertesten optischen Instrumente aller Art zu konstruieren: Fotoobjektive, die mit ihrer großen Lichtstärke und Bildschärfe eine neue Epoche der Fotografie einleiteten, Refraktometer, Reflektometer, Spektrometer, Fotometer, Fokometer und viele andere Meßgeräte. Ohne diese Instrumente und ohne die von Abbe erkannten Gesetze der Strahlenoptik könnte heute keine Klinik, kein chemisches oder technisches Institut, kein Laboratorium der Industrie, kein Bergwerk arbeiten, wären mikroelektronische und Weltraumforschungen undenkbar.

Ernst Abbe war am 23. Januar 1840 als einziger Sohn eines Spinnereiarbeiters geboren worden. Durch größte Sparsamkeit der Eltern konnte er die Realschule besuchen und 1857 mit dem Studium der Mathematik und der Physik in Jena beginnen, bei dem er sich vor allem mit den Erkenntnissen auf dem Gebiet der Optik vertraut machte.

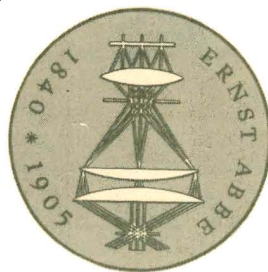
1857 konstruierte er ein kleines Taschen-Trichinenmikroskop mit etwa 50facher Vergrößerung. Der einfache Apparat war die erste seiner vielen Neuschöpfungen auf dem Gebiet der instrumentellen Optik. Als Ernst Abbe 1863 von Studium und Assistententätigkeit an der Sternwarte aus Göttingen nach Jena zurückgekehrt war, begann die Blütezeit seiner wissenschaftlichen Entwicklung. In Zusammenarbeit mit Carl Zeiss widmete er sich mehr als zehn Jahre der Verbesserung von Herstellung und Eigenschaften der Mikroskope.

1876 übernahm der Forscher die Teilhaberschaft an der optischen Werkstatt von Zeiss. Auf der Suche nach geeigneten optischen Gläsern begann Ende der 70er Jahre des vorigen Jahrhunderts seine Zusammenarbeit mit dem jungen Chemiker Dr. Otto Schott. In dem glastechnischen Laboratorium „Schott und Genossen“ wurden Gläser nach Abbes Plänen hergestellt, die eine neue Ära auf dem Gebiet der Optik einleiteten.

Drei Jahre, nachdem auf Abbes Kosten der Bau der Jenaer Sternwarte begann, starb 1889 Carl Zeiss, und Ernst Abbe wurde alleiniger Leiter der Zeiss-Werkstätten. Er erweiterte die Werkstatt zum Zeisswerk.

Die Geschichte der von Abbe 1889 ins Leben gerufenen Carl-Zeiss-Stiftung widerspiegelt die Grenzen kapitalistischer Eigentumsverhältnisse. An der Schwelle des vorigen Jahrhunderts hatte der geniale Erfinder, der Humanist und Besitzer der Zeiss-Werke erkannt, daß sein Unternehmen ohne die Förderung von Wissenschaft und Technik und die Bildung eines Stamms von qualifizierten Facharbeitern keine Zukunft hat. So trat anstelle des Unternehmens das entpersonalisierte Stiftungskapital der Carl-Zeiss-Stiftung. Der private Besitz an Produktionsmitteln blieb dabei nach wie vor erhalten.

Am 14. Januar 1905 starb Ernst Abbe. Sein Name ist mit dem nach dem zweiten Weltkrieg entstandenen Volkseigenen Betrieb Carl Zeiss Jena eng verbunden. Wenn heute Zeiss-Geräte in mehr als 100 Länder exportiert werden und dort geschätzt und geachtet sind, ist das nicht zuletzt auch ein Verdienst Ernst Abbes.



Zum 75. Todestag des Physikers, Mathematikers und Astronomen gab die Staatsbank der DDR eine Gedenkmünze heraus.

Ernst Abbe (1840 bis 1905), Auflage 45000 Stück, 20 Mark • 1980, Legierung: Silber, Durchmesser 33 mm, Masse 20,9 g



Ein Gewichtsproblem des Leonardo Fibonacci

Der allgemeine Stand des mathematischen Wissens und Könnens war im mittelalterlichen Europa bis ins 12. Jahrhundert sehr niedrig. Die Rechenmethoden waren primitiv. Die Kaufleute bedienten sich eines Rechenbrettes, des sogenannten *Abakus*. Die „indische“ Zahlenschreibung, den Gelehrten in den Ländern des Islam seit langem geläufig, war noch unbekannt. In einem 1202 erschienenen Werk „Liber abaci“ (Buch vom Abakus) gab der Italiener Leonardo Fibonacci (der um 1170 wahrscheinlich in Pisa geboren wurde) eine systematische Darstellung des Rechnens mit den 10 indisch-arabischen Ziffern. Dessen Vater lebte einst als Kaufmann in Algier. Dort lernte der Sohn von einem muslimischen Lehrer das neue Verfahren. Er reiste durch den Orient, studierte arabische Werke, lernte die Schriften des Euklid, Archimedes und anderer griechischer Mathematiker kennen. Seine umfangreichen mathematischen Erkenntnisse hat er in mehreren Büchern aufgeschrieben. Sie sind für die Entwicklung der Mathematik sämtlich von großer Bedeutung gewesen. Spätere Gelehrte schöpften aus seinen Werken sowohl Aufgaben als auch Lösungsmethoden.

Die folgende Aufgabe aus dem „Liber abaci“ findet man in ähnlicher Form beispielsweise in einem byzantinischen Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert, ferner bei Nicolas Chuquet (1484), Michael Stifel (1553), Tartaglia (1556), Bachet (1612), van Schooten (1657) und auch bei Leonhard Euler (1748):

Jemand hat 4 Gewichte, mit denen er die ganzen Pfunde seiner Waren von einem Pfund an bis 40 Pfund wiegen will; gefragt ist nach dem Gewicht der einzelnen Gewichtssteine. (Dabei dürfen – wenn erforderlich – beide Waagschalen mit Gewichtssteinen belastet werden.)

H. Pieper



20 Jahre Mathematikzentrum Karl-Marx-Stadt

In unserem Zentrum treffen sich in 15 Arbeitsgemeinschaften der Klassenstufen 4 bis 10 die besten *Jungen Mathematiker* der Stadt. Sie werden betreut von Mitarbeitern und Studenten der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule und von Lehrern. Durch kontinuierliche Arbeit mit den AG-Programmen, die von Studenten als Diplomarbeiten angefertigt wurden, konnten die AG-Mitglieder in den letzten Jahren immer über 40% der Preise zur Bezirksolympiade und mehrere Preise zur DDR-Olympiade erringen. Jens Pönisch erhielt nach seinem 1. Preis als „Frühstarter“ in der Olympiadeklasse 10 der XX. DDR-Olympiade den Auftrag, einen Beitrag für *alpha* zu schreiben.

Erwähnenswert ist noch unsere AG *Frühstarter*, die die erfolgreichsten Schüler der Klasse 5 von März bis Februar des nächsten Schuljahres neben der normalen AG zusätzlich fördert. Diese Schüler starten als Frühstarter zur Kreis- und Bezirksolympiade in der Olympiadeklasse 7. Auch hierzu ist das AG-Programm in der Erprobung.

Das Aktiv des Mathematikzentrums ist ständig bemüht, neue Knebeleien und Spiele für unsere Experimentierstraße anzufertigen. Besonders beliebt ist bei uns der siebenteilige Soma-Würfel, aus dem unsere Besucher zu Pionierfesten schon viele neue Figuren entwickelt haben.

W. Henker

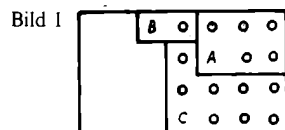
Knack – ein mathematisches Spiel

In einem sowjetischen Buch fand ich das Spiel „Knack“, das ich den *alpha*-Lesern vorstellen möchte. Sein Erfinder ist David Geyl, der schon viele mathematische Spiele entwickelt hat.

Man spielt zu zweit auf Kästchenpapier, auf dem ein Rechteck mit $m \cdot n$ Kästchen abgegrenzt wird. Um das Spiel interessant zu gestalten, sollten m und n verschieden und nicht zu klein sein.

Ein Spieler wählt ein Kästchen A des Spielfeldes und streicht dieses und alle, die in der gleichen Zeile rechts und in der gleichen

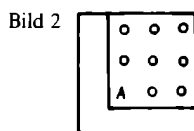
Spalte oberhalb liegen, außerdem die Kästchen, die rechts oben eingeschlossen sind. Die entstandene Figur rechts oben wird nun „herausgeknackt“ und gehört nicht mehr zum Spielfeld. Danach wählen die beiden Spieler abwechselnd weitere Kästchen B , C , ... und knacken die zugehörige Figur heraus (Bild 1, die gestrichenen Kästchen sind durch Punkte markiert).



Es gewinnt der Spieler, der seinen Gegner zwingt, das „vergiftete“ Kästchen in der linken unteren Ecke zu wählen und damit das ganze verbliebene Spielfeld zu „verschlucken“. Interessant ist nun die Frage: Kann der erste Spieler stets so spielen, daß er gewinnt?

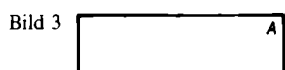
Dazu betrachte man zunächst das Kästchen rechts oben. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder die Wahl dieses Kästchens ist verantwortlich für den Sieg, oder sie bringt dem Gegner die Möglichkeit, den Sieg zu erringen. Angenommen, sie ist für die Niederlage des ersten Spielers verantwortlich, kann der Gegner mit einem optimalen Zug parieren. Diesen Zug hätte aber auch schon der erste Spieler machen können. Das heißt, er kann in jedem Falle mit einem Zug beginnen, der zum Sieg führt. Dieser Beweis zeigt allerdings nicht, wie man spielen muß, um zu gewinnen. Das Interessante an „Knack“ ist, daß noch keine allgemeine optimale Strategie gefunden wurde. Nur für einige Spezialfälle sind Gewinnstrategien bekannt:

1. Man spielt auf einem Quadrat. Der erste Spieler muß ein solches Quadrat herausknacken, daß genau eine Zeile und eine Spalte mit dem „vergifteten“ Kästchen übrigbleiben (Bild 2).



Nun ist der zweite Spieler am Zug, und der erste pariert immer symmetrisch, d. h., er knackt immer ein gleichgroßes Stück von der anderen Seite ab. Am Ende bleibt für den Gegner nur noch das „vergiftete“ Kästchen übrig.

2. Wenn das Spielfeld ein liegendes Rechteck der Form $n \cdot 2$ ($n > 2$) ist, kann der erste Spieler den Sieg erzwingen, wenn er das Kästchen in der rechten oberen Ecke wählt (Bild 3).



Die Form einer solchen Treppe muß er nach jedem Zug des Gegners wieder erreichen. Wie man leicht sieht, ist dies möglich.

Aufgaben

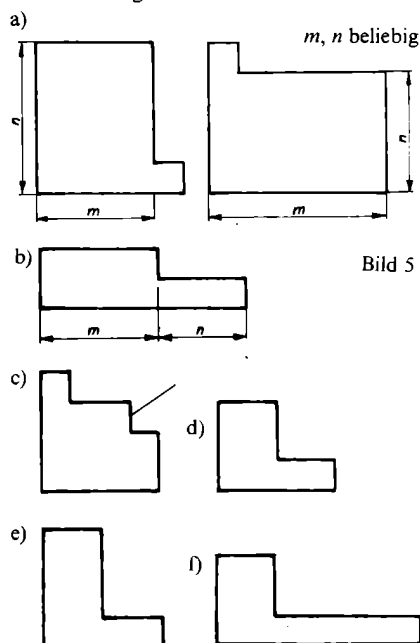
▲ 1 ▲ Wie gewinnt der erste Spieler bei einem stehenden Rechteck der Form $2 \cdot n$ (Bild 4)?

Bild 4



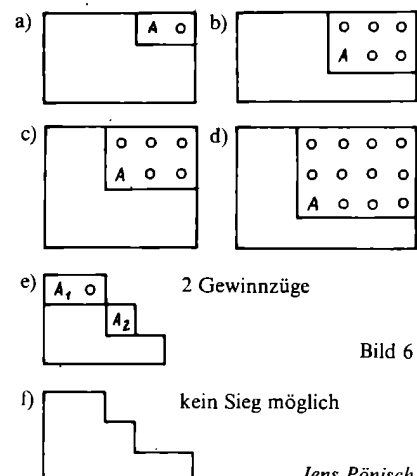
Auch kompliziertere Formen, wie sie häufig beim Spielen entstehen, kann man mit Hilfe der beschriebenen Strategien untersuchen.

▲ 2 ▲ Finde den Gewinnzug (Zug des ersten Spielers, der zum Sieg führt) für die Figuren der Abbildungen 5a bis f!



▲ 3 ▲ Man finde mit Hilfe von Bild 5d den Gewinnzug für ein Rechteck der Form $4 \cdot 3$!

Zum Schluß seien noch die Gewinnzüge für einige ausgewählte Figuren angegeben (Bild 6a bis f).



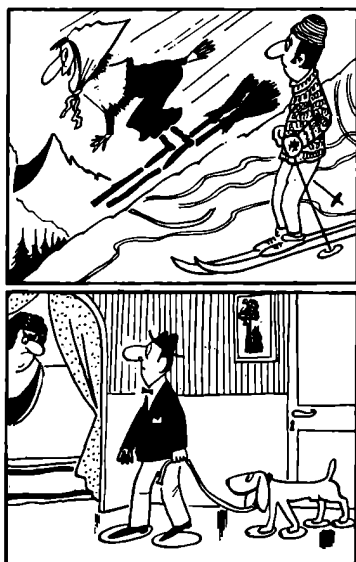
Jens Pönisch

In freien Stunden · alpha-heiter



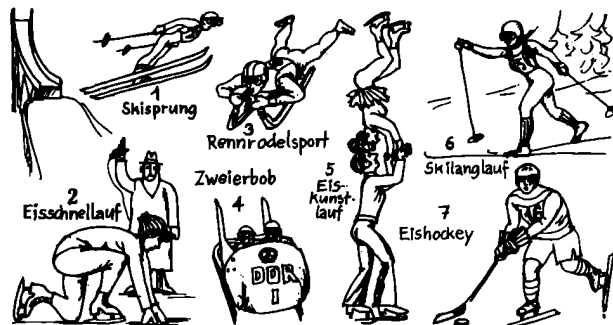
Winterfreuden

Die beiden Bilder scheinen auf den ersten Blick ganz verschieden. Aber es gibt sechs Einzelheiten, die sich auf beiden Bildern finden. Wo? *Aus: Füles, Budapest*



Falsche Ansichten

Jede Sportart enthält einen Fehler oder eine Regelwidrigkeit, eine sogar zwei Fehler.



Vexierbild

Auf dem Bild (aus dem 19. Jahrhundert) sehen wir eine Dame, welche auf ihren Verehrer wartet. Wo hat er sich versteckt?

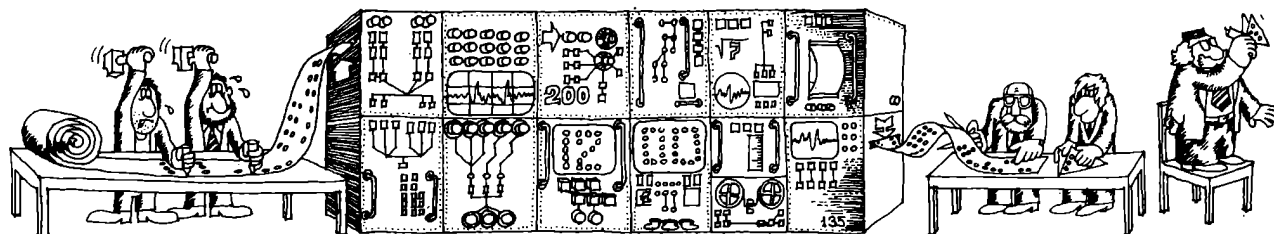


Ellipse

Ein hoffnungsvoller junger Kreis lief Schlittschuh auf dem blanken Eis. Sich rühmend, daß er kerngesund und außerdem – natürlich rund – wollt' er besonders hoch hinaus und führte tolle Sprünge aus. Der ungestüme Übermut bekam ihm aber gar nicht gut. Am Sturz, den er sodann gebaut, hat er sein Leben lang gekaut. Der Mittelpunkt war ihm verrückt, sein Radius in zwei zerstückt. Als Kreis war's nun mit ihm vorbei, er glich jetzt eher einem Ei und hieß Ellipse als Figur, die niemals mehr auf Schlittschuh'n fuhr.

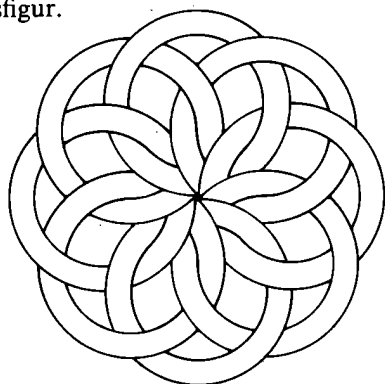
Ehrenfried Winkler, Halle

Georgi Anasztazov, Bulgarien



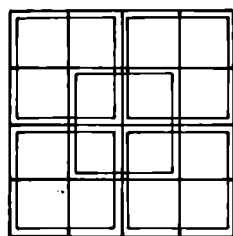
Drunter und drüber

Susann Reichel aus Cottbus sandte uns diese schöne Kreisfigur.



Mathematische Grüße – 1982 –

■ Die Summe von 16 aufeinanderfolgenden Zahlen beträgt 7928. Ordne die Zahlen in das Quadrat dergestalt ein, daß die Summe jeder Waagerechten, jeder Senkrechten, jeder Diagonalen und jedes der inneren Quadrate jeweils 1982 beträgt!



Ing. Klaus-Horst Milde, Dresden

■ Bestimme das Minimum von $|1 + 9^x + 8^y - 2^z|$, wobei x, y und z positive ganze Zahlen sind!

Dr. W. Moldenhauer, Eisenach

● So sahen Sabine Möckel, Zwickau (Kl. 7), Gerd Gruner, Zwickau (Kl. 11), stud. math. A. Fittke, Berlin und Ing. H. Decker, Köln das Jahr 1982:

$$1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2 = (19 - 8 - 2) (1 + 9 + 8 - 2)$$

$$19 + 82 = 1 + 98 + 2$$

$$1^2 + 9^2 - 8^2 - 2^2 = \sqrt{198 - 2}$$

$$1982^{1+9-8-2} = \frac{1+9}{8+2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{(1+98:2)(1 \cdot 9 - 8:2)}{1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2}$$

$$20 = 1 + 9 + 8 + 2 = (1 + 9) \cdot \sqrt{8:2}$$

$$19 = 1 \cdot 9 + 8 + 2 = 1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 2$$

$$18 = (1^9 + 8) \cdot 2 = (-1) + 9 + 8 + 2$$

$$17 = 1^9 + 8 \cdot 2 = 1 \sqrt{(9+8)^2}$$

$$16 = 1 + 9 + 8 - 2 = (1 + \sqrt{9}) \cdot (8:2)$$

$$4 = 1^9 \cdot 8:2 = (1+9) - (8-2)$$

$$3 = (1 \cdot 9 - 8) + 2 = \sqrt{(1+9+8):2}$$

$$2 = 1 - 9 + 8 + 2 = (1-9) + 8 + 2$$

$$1 = 1 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{8:2} = (1+9-8):2$$

$$0 = (1+9) - (8+2) = (1-9+8) \cdot 2$$

Dialoge

■ „Vater, ich habe heute Nacht geträumt, du hättest mir für 5 Lewa Schokolade gekauft!“

„Wenn du artig bist, darfst du zu Neujahr träumen, ich hätte dir ein ganzes Kilo gekauft!“

■ Der Mathematiklehrer schreibt an die Tafel $2:2$. „Was bedeutet das, Gerald?“ Gerald antwortet: „Unentschieden.“

■ Auf dem Heimweg erzählt Horst seinem Freund, daß er von einer 12 Meter hohen Leiter gestürzt sei. Jochen staunt. „Und du hast dich nicht verletzt?“ fragt er.

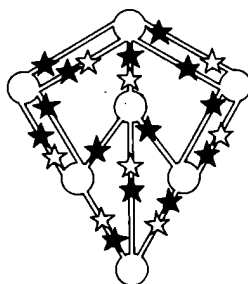
„Nein, ich stand doch auf der ersten Sprosse!“

■ „Fritz, wollen wir uns heute um fünf Uhr treffen?“

„Gern, und wann kommst du?“

Wanderung zwischen Sternen

Wandere auf den Geraden so, daß dabei jeder Stern getroffen wird, ohne den bereits beschrittenen Weg nur einmal gekreuzt zu haben! Start und Ziel sollen jeweils ein weißer Stern sein.



Silvesterscherze

Nicht ganz ernst gemeint: Aus den Silben

bruch – chen – di – fer – fol – ge – gel – grund – ka – kel – kel – kon – läu – lier – mal – mes – on – on – per – pez – re – re – schei – ser – si – spek – spit – stamm – strich – struk – tel – ti – ti – tra – va – ve – vi – wert – win – ze – zir

sollen Wörter der folgenden Bedeutung gebildet werden. Es handelt sich jeweils um Begriffe aus dem Mathematikunterricht, die hier scherzhaft umschrieben sind:

1. Vorschrift für Harken (1);
2. militärische Einheit mathematischen Charakters (2);
3. geknicktes Schneidegerät (3);
4. Preis für den Boden (1);
5. Gestell eines Geräts für Artisten (4);
6. Serie von Werken eines bildenden Künstlers (2);
7. Startlinie zum Wettlauf (6);
8. Blickwinkel eines höflichen Mannes (2);
9. Knick im Hauptteil des Baumes (6);
10. die Besten einer Arbeitsgemeinschaft (5);
11. gerade Linie quer durchs Haar (8).

Entnimmt man jedem Wort den in Klammern angegebenen Buchstaben, so erhält man das Bild einer geschmückten Funktion zweiten Grades.

OSrR K. Lehmann, VLdV, Berlin

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Aufgaben

Olympiadeklassen 11/12

1. Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ ($k=1, 2, \dots, 1982$) genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
- (2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
- (3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

2. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 1, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl. Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A , dann B usw., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.

A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.

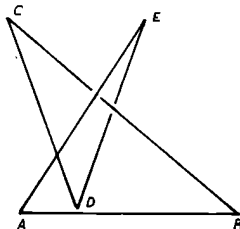
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen besitzt.

Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

3. Man beweise, daß sich aus fünf geraden „Stäben“ kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden läßt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:

- (1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.
- (2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt (siehe Bild): Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen; ein innerer Punkt

der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE , ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE , ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC .



Hinweis: Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d. h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY .

4. Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ gelten. Man setze

$$r = \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:

- a) Ist $r \geq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leq x \leq r$.
 - b) Ist $r \leq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.
5. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90^\circ$.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leq \overline{PC}^2$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

6A. a) Man beweise: Wenn $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $d = \overline{AD}$, $e = \overline{BD}$, $f = \overline{CD}$

(1) die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_0 dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_0 < \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \quad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen läßt: Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so daß für den Oberflächeninhalt A_0

jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungl. $A_0 \leq \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$ (3) gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ .

6B. Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g , die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq 1$ und $g(x) \geq 0$.
- (2) Für alle $x \geq 0$ gilt $(f(x)) - (g(x))^2 = 1$.
- (3) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.
- (4) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt $g(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$.

Lösungen

Lösungen zu:

Wir finden Gesetzmäßigkeiten

$$\blacktriangle 4 \blacktriangle \quad \text{Ja. } m(x) = 7x - 3,5$$

$$\blacktriangle 5 \blacktriangle \quad \text{Ja. } m(x) = 2x^2 - 1$$

Lösungen zu: alpha-Sprachecke

Eine Quadratzahl

$\blacktriangle 1 \blacktriangle$ Spielsteine mit den Nummern 1 bis 9 sind so in eine Reihe gelegt, daß die auf ihnen stehenden Zahlen der Größe nach geordnet sind.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Welche kleinste Anzahl von Steinen muß man wegnehmen, damit die aus den Ziffern auf den zurückbleibenden Steinen gebildete Zahl eine Quadratzahl ist?

Welche Steine werden dabei weggenommen?

Lösung: Man muß die drei Steine mit den Nummern 2, 5 und 7 wegnehmen. Dabei erhält man die Zahl $134689 = 367^2$.

Was ist das?

$\blacktriangle 2 \blacktriangle$ Schneide dir aus Papier ein gleichseitiges Dreieck! Falte es an jeder Linie, die die Mittelpunkte zweier Seiten verbindet! Dann füge alle drei Ecken an einem Punkt zusammen!

Welcher geometrischer Körper ergibt sich daraus?

Lösung: Es entsteht ein regelmäßiges Tetraeder.

Neue Fassade

$\blacktriangle 3 \blacktriangle$ Man will die Fassade einer Schule weißen. Diese Fassade hat eine Länge von 18 m und eine Höhe von 12 m; man sieht weiterhin 12 Fenster und eine Tür. Die Maße jedes Fensters, in m, sind 2,5 und 1,5; diejenigen der Tür 3 und 2. Berechne die Fläche der zu weißenden Fassade in m^2 !

Lösung: Die Fläche der Fassade einschließlich der Fenster beträgt $18 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} = 216 \text{ m}^2$. Die Fläche der Tür ist $3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 6 \text{ m}^2$, die der Fenster $2,5 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 12 = 45 \text{ m}^2$. Dann beträgt die Fläche der zu weißenden Fassade $216 \text{ m}^2 - 45 \text{ m}^2 - 6 \text{ m}^2 = 165 \text{ m}^2$.

Lösung zu: Matt dem König!

Auf 47(!) verschiedene Arten kann Weiß den schwarzen König in einem Zug mattsetzen!

1. Ta2, 1. Tc2, 1. Td2, 1. Te2, 1. Tf2, 1. Tg2, 1. Th2, 1. Tb1, 1. Tb3, 1. Tb4, 1. Tb5, 1. Tb6, 1. Tb7, 1. T:b8, 1. Lh1, 1. Lg2, 1. Lf3, 1. Le4, 1. Lc6, 1. Lb7, 1. La8, 1. La2, 1. Lb3, 1. Lc4, 1. Le6, 1. Sg7, 1. Sh6, 1. Sh4, 1. Se3, 1. Sd4, 1. Sd6, 1. Se7.

Das waren 32 Matts durch Abzugsschachs. Die weiße Dame kann 6 verschiedene Matts herbeiführen: 1. Dc7, 1. Dd6, 1. De7, 1. Dc3, 1. Dd4, 1. De3. Durch Verwandlungen der weißen Bauern ergeben sich 8 weitere Matts: 1. a:b8L, 1. a:b8D, 1. d:e8T, 1. d:e8D, 1. f:e8T, 1. f:e8D, 1. h8L und 1. h8D. Schließlich kann der weiße Bauer d3 mit 1. d4 auch noch den schwarzen König mattsetzen.

Lösung zu: Gut beobachten!

Von oben nach unten:

G-1, F-5, G-8, C-5, A-7.

Lösungen zu: Wir betrachten Körper

▲1▲ (1) 8 cm; (2) es gibt verschiedene Möglichkeiten; 1 cm und 20 cm, 2 cm und 10 cm, 4 cm und 5 cm; (3) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm, 1 cm und 100 cm; 1 cm, 2 cm und 50 cm; 1 cm, 4 cm und 25 cm; 1 cm, 5 cm und 20 cm; 1 cm, 10 cm und 10 cm; 2 cm, 2 cm und 25 cm; 2 cm, 5 cm und 10 cm; 5 cm, 5 cm und 4 cm; (4) 1 cm, 1 cm und 5 cm.

▲2▲ Es gibt a) 8, b) 1, c) 2 (verschiedene) Quader.

▲3▲ a) 54 Päckchen; b) 90 Päckchen. (Dabei muß die jeweils längste Kante der Päckchen parallel zu den Kanten der Länge 24 cm, die jeweils kleinste Kante der Päckchen parallel zu den Kanten der Länge 48 cm sein.)

▲4▲ a) Die Höhe der einen Schachtel ist dreimal so groß wie die der anderen. b) Der Rauminhalt der einen Schachtel ist doppelt so groß wie der der anderen. c) Der Rauminhalt der einen Schachtel ist achtmal so groß wie der der anderen.

▲5▲ Die Würfelkantenlänge beträgt a) 4 cm, b) 5 cm.

▲6▲ Der Abstand beträgt 4 cm.

▲7▲ Das Volumen beträgt a) 60 cm^3 , b) 64 cm^3 , c) 36 cm^3 , d) Es entsteht kein Kästchen; also 0 cm^3 .

Lösungen zu: Geistesgymnastik

Klasse 5

▲1▲ $48 \text{ M} : 4 = 12 \text{ M}$; eine Mandel Leinwand kostet 12 M.

$12,00 \text{ M} - 7,50 \text{ M} = 4,50 \text{ M}$; für die Gans wurden $4,50 \text{ M}$ angerechnet.

▲2▲ Angenommen, x ist die gesuchte Zahl; dann gilt $x - 30 = 28 + 32$, $x - 30 = 60$, $x = 90$. Es handelt sich um die Zahl 90.

▲3▲ $1,70 \text{ M} = 170 \text{ Pf}$; $17 \cdot 10 \text{ Pf} = 170 \text{ Pf}$; $17 \cdot 2 \text{ Eier} = 34 \text{ Eier}$; $34 \text{ Eier} + 11 \text{ Eier} = 45 \text{ Eier}$. Die Bäuerin hatte anfangs 45 Eier.

▲4▲ $45 : 5 = 9$; $9 - 1 = 8$; $9 - 2 = 7$; $9 + 1 = 10$; $9 + 2 = 11$. Die fünf Summanden lauten 7, 8, 9, 10 und 11.

Klasse 6

▲1▲ Es sei x die gesuchte Zahl; dann gilt $4 \cdot x - 10 = 6 \cdot 11$, $4 \cdot x - 10 = 66$, $4 \cdot x = 76$, $x = 19$. Es handelt sich um die Zahl 19.

▲2▲ Es sei x die zu nennende Zahl; dann gilt $x = \frac{1}{8} \cdot x + 42$, $\frac{7}{8} \cdot x = 42$, $x = \frac{42 \cdot 8}{7}$, $x = 48$.

Es handelt sich um die Zahl 48.

▲3▲ $15 - 8 = 7$; Karl fehlen noch 7 Walnüsse von einer Mandel. $7 \cdot 5 = 35$; Heinz hatte 35 Walnüsse.

▲4▲ Es sei n die zu ermittelnde Zahl; dann gilt

$2 \cdot n + 64 = 6 \cdot n$, $4 \cdot n = 64$, $n = 16$.

Es handelt sich um die Zahl 16.

Klasse 7

▲1▲ Angenommen, es wurden x Tannen gefällt, also $\frac{1}{3}x$ Buchen, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x$ Eichen,

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{2}{15}x$ Lärchen, $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15}x = \frac{1}{30}x$ Ahorne.

Nun gilt $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{2}{15}x + \frac{1}{30}x = 357$,

$30x + 10x + 6x + 4x + x = 30 \cdot 357$,

$51x = 30 \cdot 357$, $x = 210$.

Es wurden 210 Tannen, 70 Buchen, 42 Eichen, 28 Lärchen und 7 Ahorne gefällt.

▲2▲ $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

Aus $\frac{3}{8} \cdot x = 480$ folgt $x = 1280$.

Das Jahreseinkommen betrug 1280 M.

▲3▲ Aus $a : b : c = 2 : 3 : 5$ folgt $b = \frac{3}{2} \cdot a$

und $c = \frac{5}{2} \cdot a$. Durch Einsetzen in $a + b + c = 35$ erhalten wir

$a + \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}a = 35$, $5a = 35$, $a = 7$. Daraus folgt

$b = \frac{3}{2} \cdot 7 = 10\frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{2} \cdot 7 = 17\frac{1}{2}$. Es handelt

sich um die Zahlen 7, $10\frac{1}{2}$ und $17\frac{1}{2}$.

▲4▲ Angenommen, Karl ist x Jahre, sein Vater also $7x$ Jahre alt. Nun gilt $7x - x = 36$, $6x = 36$, $x = 6$. Karl ist gegenwärtig 6 Jahre, sein Vater 42 Jahre alt.

Klasse 8

▲1▲ Angenommen, es waren x Lesebücher, also $(300 - x)$ Fibeln; dann gilt $0,8x + 0,5 \cdot (300 - x) = 180$, $0,8x + 150 - 0,5x = 180$, $0,3x = 30$, $x = 100$. Es wurden 100 Lesebücher und 200 Fibeln gekauft.

▲2▲ Angenommen, anfangs waren es n Exemplare. Am ersten Tag wurden $\left(\frac{n}{8} + 10\right)$

Exemplare verkauft. Es verblieb ein Rest von $\left[n - \left(\frac{n}{8} + 10\right)\right] = \left(\frac{7}{8}n - 10\right)$ Exemplaren. Am

zweiten Tag wurden $\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8}n - 10\right) + 15\right]$

$= \left(\frac{7}{16}n + 10\right)$ Exemplare verkauft. Nun gilt $n = \left(\frac{n}{8} + 10\right) + \left(\frac{7}{16}n + 10\right) + 50$, $n = \frac{9}{16}n + 70$,

$\frac{7}{16}n = 70$, also $n = 160$. Anfangs wurden 160 Exemplare des Romans angeboten.

▲3▲ Angenommen, das Darlehen belief sich auf x Mark. Zum ersten Termin wurden $\left(\frac{x}{4} + 50\right)$ M getilgt. Es verblieb eine Restschuld von $\left[x - \left(\frac{x}{4} + 50\right)\right] = \left(\frac{3}{4}x - 50\right)$ M.

Zum zweiten Termin wurden $\left[\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}x - 50\right) + 60\right]$ M $= \left(\frac{3}{20}x + 50\right)$ M getilgt.

Es verblieb eine Restschuld von

$\left[\left(\frac{3}{4}x - 50\right) - \left(\frac{3}{20}x + 50\right)\right] \text{ M} = \left(\frac{3}{5}x - 100\right) \text{ M}$.

Nun gilt

$x = \left(\frac{x}{4} + 50\right) + \left(\frac{3}{20}x + 50\right) + \frac{3}{10}x + 200$,

$x - \frac{1}{4}x - \frac{3}{20}x - \frac{3}{10}x = 300$,

$20x - 5x - 3x - 6x = 6000$, $6x = 6000$, $x = 1000$.

Das Darlehen belief sich auf 1000 M.

▲4▲ Angenommen, das leichteste Kalb kostete n Mark; dann kosteten die vier übrigen Kälber $(n+2)$ M, $(n+4)$ M, $(n+6)$ M, $(n+8)$ M. Nun gilt

$n + (n+2) + (n+4) + (n+6) + (n+8) = 100$,

$5n + 20 = 100$, $5n = 80$, $n = 16$. Das leichteste Kalb kostete 16 M.

Lösungen zu:

Knack – ein mathematisches Spiel

1. Zahl: senkrechte Spalte von links, 2. Zahl: waagerechte Zeile [(vgl. Bild 1: A hat die Koordinaten (5;3)]

▲1▲ (2;n)

▲2▲ a) (1;3) bzw. (3;1)

b) $(m+2;1)$

c) (2;2)

d) Sieg nicht zu erzwingen, aber möglich

e) (1;4)

f) (5;1)

▲3▲ (3;2)

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Winterfreuden

1. Bergrücken links und Kleid der Frau;
2. Besenstiel und Teppichstreifen;
3. Schneespur und Hundeleinestück;
4. Kotelette des Skiläufers und Fliege des Mannes;
5. Umschlag der Skisocke und Türklinke;
6. Skistockteller links und Pantoffel am rechten Hinterfuß des Hundes.

Falsche Ansichten

1. Skisprung – ohne Stöcke; 2. Eisschnellauf – Starthaltung u. Schlittschuhe; 3. Rennrodel-sport – sitzend; 4. Zweierbob – hintereinan-

der sitzend; 5. Eiskunstlauf – keine Artistik; 6. Skilanglauf – ohne Brille und Sturzhelm; 7. Eishockey – Schlittschuhe für Eisschnellauf

Vexierbild

Wenn du das Bild auf den Kopf stellst, siehst du den Verehrer auf der linken Seite.

Mathematische Größe – 1982 –

● Die Zahlen lassen sich über die Formeln der arithmetischen Reihe

$$s = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$a_1 = \frac{s}{n} - \frac{n-1}{2}d$$

ermitteln und lauten:

$$a_1 = 488, \quad a_{16} = 503.$$

Eine mögliche Lösung:

500	490	489	503
495	497	498	492
499	493	494	496
488	502	501	491

● Es sei N^+ die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Es gilt $\min |1 + 9^x + 8^y - 2^z| = 2$

$$x, y, z \in N^+$$

Beweis: Für $x=y=1, z=4$ gilt $1 + 9^x + 8^y - 2^z = 2$.

Da $1 + 9^x + 8^y - 2^z \equiv 1 + 1^x \equiv 2 \pmod{2}$ ist, kommt als mögliches Minimum nur noch 0 in Betracht.

Annahme: $1 + 9^x + 8^y - 2^z = 0$, also $1 + 9^x = 2^z - 8^y \geq 2 > 0$. Damit gilt $z = 3y + a$ mit $a \in N^+$ und somit

$1 + 9^x = 8^y(2^a - 1) \equiv 0(8)$, aber es ist $1 + 9^x \equiv 2(8)$ Widerspruch.

Wanderung zwischen Sternen

Eine mögliche Lösung:



Silvesterscherze

1. Rechenregel; 2. Division; 3. Winkelmesser; 4. Grundwert; 5. Trapezkonstruktion; 6. Malfolge; 7. Läuferstrich; 8. Kavalierperspektive; 9. Stammbruch; 10. Zirkelspitze; 11. Scheitel Ringparabel

Lösung zu: Die historische Mathematikaufgabe:

Ich hab's gefunden! Heft 4/82, III. US.

Ein fester Körper, der vollständig in Wasser getaucht wird, verdrängt vom Wasser so viel, wie sein eigenes Volumen beträgt. Bei gleichem Volumen haben verschiedene Stoffe eine

unterschiedliche Masse. (So hat 1 cm^3 Gold die Masse $19,3 \text{ g}$ und 1 cm^3 Silber $10,5 \text{ g}$.) Bei gleicher Masse werden verschiedene Stoffe somit ein unterschiedliches Volumen haben. (So hat 1 kg Gold ein Volumen von etwa 52 cm^3 und 1 kg Silber ein Volumen von etwa 95 cm^3 .) Fertigt man nun etwa zwei Würfel von genau gleicher Masse wie der Weihkranz, den einen aus reinem Gold, den anderen aus reinem Silber, und taucht die drei Gegenstände jeweils in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß, so wird beim Würfel aus reinem Silber am meisten Wasser überlaufen, beim Würfel aus reinem Gold am wenigsten. Ist der Kranz aus Gold und Silber gemischt, so wird die bei ihm überlaufende Wassermenge geringer sein als beim Silberwürfel, aber immer noch größer sein als beim Goldwürfel.

Die vom Silberwürfel, vom Goldwürfel bzw. vom Weihkranz verdrängte Wassermenge betrage s, g , bzw. $k \text{ cm}^3$. Der Weihkranz habe (wie auch der Silberwürfel und der Goldwürfel) die Masse $a \text{ kg}$, davon seien $b \text{ kg}$ Silber und $c \text{ kg}$ Gold, also

$$(1) \quad b + c = a.$$

Der Silberanteil des Kranzes verdrängt dann $\frac{b}{a} s \text{ cm}^3$ Wasser. (In unseren Bezeichnungen verdrängen ja $a \text{ kg}$ Silber $s \text{ cm}^3$ Wasser. Daher verdrängt 1 kg Silber $\frac{s}{a} \text{ cm}^3$ Wasser und somit verdrängen $b \text{ kg}$ Silber $\frac{b}{a} s \text{ cm}^3$ Wasser.)

Der Goldanteil des Kranzes verdrängt

$\frac{c}{a} g \text{ cm}^3$ Wasser. Der Weihkranz verdrängt somit einerseits $k \text{ cm}^3$, andererseits $\frac{b}{a} s + \frac{c}{a} g \text{ cm}^3$

Wasser, also $\frac{b}{a} s + \frac{c}{a} g = k$, d. h.

$$(2) \quad bs + cg = ak.$$

Aus (1) und (2) folgt $c = a - b, bs + (a - b)g = ak$, also $bs - bg = ak - ag$, d. h.

$$b = \frac{k - g}{s - g} a.$$

Dies ergibt auch $c = a - b = \left(1 - \frac{k - g}{s - g}\right) a = \frac{s - k}{s - g} a$. Damit sind die Anteile b und c an der Gesamtmasse a aus den bekannten Größen s, g, k, a bestimmt, und es ist

$$\frac{c}{b} = \frac{s - k}{k - g}.$$

Lösung zu: Olympiade-Kryptogramm.

Heft 5/82, S. 115

Angenommen, es gäbe eine Lösung des Gleichungssystems, dann muß $YY \cdot YYIA = 111111$ sein. Das folgt aus den Gleichungen (1)...(9) wegen $000000 : 0 = EEEEE : E = 111111$.

Die Zerlegung von 111111 in Primfaktoren ergibt $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Der Faktor YY in $YY \cdot YYIA$ kann deshalb nur $11, 33$

oder 77 sein. Die Faktoren $YY = 11$ und $YY = 77$ scheiden aus, wegen $111111 : 11 = 10101$ bzw. $111111 : 77 = 1443$ und weil $YYIA$ vierstellig ist und die beiden ersten Ziffern gleich sind. Also kann YY nur 33 sein, woraus $YYIA = 3367$ und $Y = 3, I = 6$ und $A = 7$ folgen. Die restlichen Buchstaben O, L, M, P, D, E sind unabhängig von ihrer Reihenfolge durch genau eine der Ziffern $1, 2, 4, 5, 8, 9$ zu ersetzen. Für die Abbildung der Elemente der Menge $M = \{O, L, M, P, D, E\}$ auf die Elemente der Menge $N = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ gibt es insgesamt $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Möglichkeiten. Eine dieser 720 Möglichkeiten ergibt sich aus $O = 1, L = 2, M = 4, P = 5, D = 8, E = 9$.

$$1 \cdot 33 \cdot 3367 = 111111$$

$$2 \cdot 33 \cdot 3367 = 222222$$

$$9 \cdot 33 \cdot 3367 = 999999$$

Lösungen zu: Ungleichungen von Erdős-Mordell, Heft 4/82, S. 76

▲ 1 ▲ Nach Strahlensatz gilt wegen

$$AC \parallel UW \quad \overline{AW} : \overline{WB} = \overline{CU} : \overline{UB}, \text{ wegen}$$

$$UV \parallel AB \quad \overline{VC} : \overline{VA} = \overline{CU} : \overline{UB}, \text{ wegen}$$

$$VW \parallel BC \quad \overline{VC} : \overline{VA} = \overline{WB} : \overline{AW}.$$

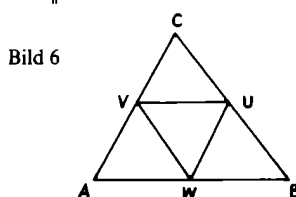


Bild 6

Daraus folgt $\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{WB} : \overline{AW}$ und damit $\overline{AW} = \overline{WB}$, d. h., der Punkt W halbiert die Strecke $\overline{AB}$. Weiter ergibt sich $\overline{CU} = \overline{UB}$ und $\overline{VC} = \overline{VA}$, d. h. auch die Punkte U und V halbieren die entsprechenden Dreiecksseiten, w. z. b. w.

▲ 2 ▲ Nach Substitution der Größen R_A durch R_A , d_c durch d_b sowie d_b durch d_c ergibt sich die Ungleichung $aR_A \geq cd_b + bd_c$ und damit $R_A \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$. Aus Symmetriegründen sind auch die analogen Beziehungen gültig:

$R_B \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ und $R_C \geq \frac{b}{c}d_a + \frac{a}{c}d_b$. Addiert man die letzten drei Ungleichungen und faßt entsprechende Glieder zusammen, dann erhält man $R_A + R_B + R_C \geq d_a \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) + d_b \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + d_c \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)$ und daraus gemäß

Hilfssatz 1 (d. h. $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$) schließlich die Behauptung $R_A + R_B + R_C \geq 2(d_a + d_b + d_c)$.

Wenn das Gleichungszeichen gelten soll, muß $\frac{c}{b} = \frac{b}{c}$, $\frac{c}{a} = \frac{a}{c}$ sowie $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ gelten und damit $a = b = c$, d. h. das Dreieck ist notwendigerweise gleichseitig. Da auch im Hilfssatz 3 Gleichheit bestehen muß, gilt $AM \perp BC$ und $BM \perp AC$, d. h. M ist Mittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

▲3▲ Im Hilfssatz 3 haben wir die Beziehung $aR_A \geq cd_c + bd_b$ nachgewiesen. Aus der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der Größen cd_c und bd_b folgt

$$\sqrt{cd_c bd_b} \leq \frac{1}{2}(cd_c + bd_b) \leq \frac{1}{2}aR_A, \text{ also } aR_A \geq 2\sqrt{cd_c bd_b} \text{ und analog } bR_B \geq 2\sqrt{ac_d d_c} \text{ sowie } cR_C \geq 2\sqrt{ab d_a d_b}.$$

Durch Multiplikation der letzten drei Ungleichungen erhält man schließlich die Behauptung $R_A R_B R_C \geq 8d_a d_b d_c$, w. z. b. w.

▲4▲ Wir betrachten die Behauptung des Hilfssatzes 3 $aR_A \geq bd_b + cd_c$ und die analogen Beziehungen $bR_B \geq ad_a + cd_c$ sowie $cR_C \geq ad_a + bd_b$. Addition der drei Ungleichungen führt unmittelbar zur Behauptung $aR_A + bR_B + cR_C \geq 2(ad_a + bd_b + cd_c)$.

▲5▲ Die Flächensumme der Dreiecke $\triangle AMB$, $\triangle BMC$ sowie $\triangle CMA$ ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so daß gilt $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{2}d_a + \frac{a}{2}d_b + \frac{a}{2}d_c$ (denn es ist

$a = b = c$), damit $d_a + d_b + d_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Setzt man die letzte Beziehung in die Ungleichung von Erdős-Mordell ein, führt dies sofort zur Behauptung $R_A + R_B + R_C \geq a/\sqrt{3}$.

▲6▲ Aus der Flächengleichung $S(\triangle ABC) = S(\triangle AMB) + S(\triangle BMC) + S(\triangle CMA)$ folgt in den Bezeichnungen $2S = ad_a + bd_b + cd_c$. Es gelte o. B. d. A. $a \geq b \geq c$. Daraus folgt $h_a = \min(h_a, h_b, h_c)$ und $h_c = \max(h_a, h_b, h_c)$, da die Produkte ah_a , bh_b und ch_c sämtlich gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und damit untereinander gleich sind. Daraus folgern wir $ad_a + ad_b + ad_c \geq 2S \geq cd_a + cd_b + cd_c$ (wegen $a \geq b \geq c$) und $\min(h_a, h_b, h_c) = h_a = \frac{2S}{a} \leq \frac{2S}{a} \leq d_a + d_b + d_c \leq \frac{2S}{c} = h_c = \max(h_a, h_b, h_c)$, worin bereits die Behauptung steckt, w. z. b. w.

▲7▲ Aus der in Aufgabe ▲6▲ ermittelten Identität $2S = ad_a + bd_b + cd_c$ folgt nach Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der drei Größen ad_a , bd_b und cd_c

$$\frac{2S}{3} = \frac{ad_a + bd_b + cd_c}{3} \geq \sqrt[3]{abcd_a d_b d_c},$$

$$d_a d_b d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}, \text{ q. e. d.}$$

▲8▲ Die Hilfsbeziehung

$$\sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}$$

kann man aus der Beziehung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel der Größen $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ herleiten. Nach dieser Ungleichung und dem in Beweisvariante 3 bewiesenen Resultat $R_A \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ läßt sich schließen:

$$\sqrt{R_A} \geq \sqrt{\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{c}{a}d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}d_c} \right)$$

und in entsprechender Weise auf analoge Abschätzungen der übrigen Größen R_B und R_C . Addiert man wieder die drei Ungleichungen und wendet dann Hilfssatz 1 an, ergibt sich unmittelbar die Behauptung

$$\sqrt{R_A} + \sqrt{R_B} + \sqrt{R_C} \geq \sqrt{2}(\sqrt{\frac{c}{a}d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}d_c} + \sqrt{\frac{a}{c}d_b} + \sqrt{\frac{b}{c}d_c}).$$

▲9▲ Wir schließen zunächst $x^2 + y^2 < x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ für positive x, y . Durch Anwendung der so erhaltenen Beziehung auf das in Beweisvariante 3 erhaltene Resultat

$$R_A \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c \text{ erhält man weiter}$$

$$R_A^2 \geq \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c \right)^2 > \frac{c^2}{a^2}d_b^2 + \frac{b^2}{a^2}d_c^2.$$

Analoge Beziehungen gelten für R_B^2 und R_C^2 ; das übrige verläuft auf die bereits bekannte Weise (Addition der symmetrischen Ungleichungen und Anwendung von Hilfssatz 1).

▲10▲ Wir gehen von den Beziehungen $aR_A \geq bd_b + cd_c$ (2) und $aR_A \geq bd_b + cd_c$ (Hilfssatz 3) aus.

Nach Addition folgt $2aR_A \geq b(d_b + d_c) + c(d_b + d_c) = (b+c)(d_b + d_c)$. Jetzt multipliziert man diese Ungleichung mit den analogen für R_B und R_C und erhält nach Anwendung der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der Dreiecksseitenlängenspaare

$$8abcR_A R_B R_C \geq (a+b)(a+c)(b+c)(d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c)$$

$$\geq 8\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{bc}(d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c),$$

woraus sofort die behauptete Ungleichung folgt

$$R_A R_B R_C \geq (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c), \text{ q. e. d.}$$

▲11▲ Nach der Flächenformel im Dreieck gilt

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \text{ sowie}$$

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

(Betrachtung der drei Teildreiecke, in die das Dreieck $\triangle ABC$ durch den Inkreismittelpunkt zerfällt und Einbeziehung der Tatsache, daß der Inkreisradius zu den Berührungspunkten mit den Dreiecksseiten rechte Winkel bildet). Daraus folgt $\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

und unter Verwendung der Beziehung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel der drei Höhenlängen im Dreieck erhält man weiter

$$\frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c) \geq \frac{3}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} = 3r$$

und damit endlich $h_a + h_b + h_c \geq 9r$. (4)

Da h_a der kürzeste Abstand des Punktes A zur Geraden BC ist, gilt mit Sicherheit $h_a \leq \overline{AM} + \zeta(M, BC)$, wobei mit $\zeta(M, BC)$ der kürzeste Abstand des Punktes M von der Geraden BC bezeichnet wurde. Hieraus ergibt sich dann $d_a + R_A \geq h_a$.

(5) Unter Verwendung der Ungleichung (4) sowie (5) und den analogen Beziehungen für h_b und h_c formen wir die Ungleichung von Erdős-Mordell in geeigneter Weise um:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(R_A + R_B + R_C) &\geq R_A + R_B + R_C + d_a + d_b + d_c \\ &\geq (R_A + d_a) + (R_B + d_b) + (R_C + d_c) \\ &\geq h_a + h_b + h_c, \end{aligned}$$

$$\text{damit nach (4)} \quad R_A + R_B + R_C \geq \frac{2}{3} \cdot 9r = 6r,$$

w. z. b. w.

▲12▲ Das quadratische Mittel der Größen R_A , R_B und R_C ist nicht kleiner als ihr arithmetisches Mittel, so daß gilt

$$\sqrt{\frac{R_A^2 + R_B^2 + R_C^2}{3}} \geq \frac{R_A + R_B + R_C}{3}$$

$$\geq (\text{nach Aufgabe 11}) \geq \frac{6r}{3} \text{ und damit}$$

$$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 \geq 12r^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Lösung zu: Eine Aufgabe

von D. Bernoulli, Heft 4/82, III. US.

$$(1) \quad A_{\triangle ABC} + A_1 = A_{ges}.$$

$$A_{ges} = \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$A_{ges} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{4}c^2 \left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right)$$

$$(2) \quad A_{ges} - A_2 - A_3 = A_{schraff.}$$

$$(2a) \quad A_2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$(2b) \quad A_3 = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$(3) \quad A_{schraff.} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{4}c^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right) - A_2 - A_3$$

$$A_{schraff.} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{4}c^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right) - \frac{1}{4}a^2 \left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right)$$

$$- \frac{1}{4}b^2 \left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right)$$

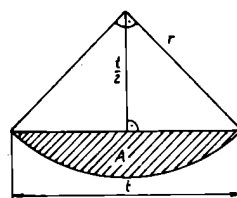
$$A_{schraff.} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right)$$

$$\left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 \right)$$

wegen der Rechtw. des Dreiecks ABC und dem daraus folgenden Satz des Pythagoras ist dieser Ausdruck gleich Null.

$$\text{damit: } A_{schraff.} = \frac{1}{2}a \cdot b = A_{\triangle}$$

allgemein (für Zentriwinkel = 90°):



$$A = \frac{1}{4} \cdot r^2 - A_{\triangle}$$

$$A = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^2$$

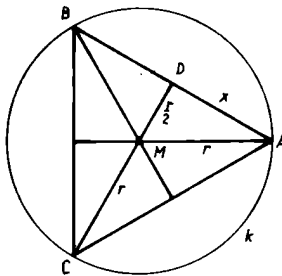
$$r = \sqrt{\frac{2}{4}r^2}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 1/82

Ma9 ■2199 Für den Flächeninhalt des Kreises $k(M; r)$ gilt: $A_k = \pi r^2$. Im rechtwinkligen Dreieck ADM gilt nach dem Satz des Pythagoras: $x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$. (x sei die Länge

von $\overline{DA}$; $\frac{r}{2}$ ist die Länge von DM , da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 schneiden.) Nach Umformung erhalten wir für die Länge von $\overline{AB}$: $2x = r\sqrt{3}$.
 Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ist $A_D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, wobei a die Länge einer Dreiecksseite bezeichnet. In unserem Falle gilt:
 $A_D = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$.
 Für das Verhältnis $A_k : A_D$ ergibt sich $a_k : A_D$
 $= \pi r^2 : \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$ bzw. $A_k : A_D \approx 1 : 0,413$.



Ma 9 ■ 2200

Man zerlegt $1211^{100} - 1211^{98}$ in
 $1211^{98}(1211^2 - 1)$
 $= 1211^{98}(1211 + 1)(1211 - 1)$
 $= 1211^{98} \cdot 1212 \cdot 1210$
 $= 1211^{98} \cdot 101 \cdot 12 \cdot 110 \cdot 11$
 $= 1211^{98} \cdot 12 \cdot 110 \cdot 101 \cdot 11$
 $= 1211^{98} \cdot 12 \cdot 110 \cdot 1111$.

Daraus folgt die Behauptung.

Ma 9 ■ 2201 Man wendet die Potenzgesetze an und erhält

$$7^{2n} - 4^{2n} = (7^2)^n - (4^2)^n = 49^n - 16^n.$$

49^n läßt bei Division durch 33 denselben Rest wie 16^n ; daraus folgt, daß $49^n - 16^n$ bei Division durch 33 den Rest Null läßt. Da alle Schritte äquivalente Umformungen sind, gilt: aus $33 \mid 0$ folgt $33 \mid 7^{2n} - 4^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, q.e.d.

Ma 10/12 ■ 2202 Zweistellige natürliche Zahlen lassen sich in der Form $10a + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq 9$, $0 < a \leq 9$ darstellen.

Nun gilt nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\begin{aligned} 10a + b &= (a + b)b, \\ 10a + b &= ab + b^2, \\ a(10 - b) &= b^2 - b, \\ a &= b \cdot \frac{b-1}{10-b}. \end{aligned}$$

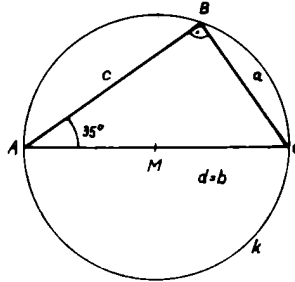
Setzt man nacheinander für b alle möglichen Ziffern ein, so ist nur für $b = 4$ und $b = 5$ $a \in \mathbb{N}$ und $a < 10$. Für $b = 4$ ist $a = 2$; für $b = 5$ ist $a = 4$.

Somit erfüllen nur die Zahlen 24 und 45 die Bedingungen der Aufgabe.

Ma 10/12 ■ 2203 Der Winkel $\angle BFA$ habe die Größe α ; im Dreieck ABF gilt dann $\tan \alpha = \frac{a}{2} = 1,5$ und folglich $\alpha \approx 56,3^\circ$. Wenn $\frac{a}{3} = 1,5$ und folglich $a = 4,5$ und $\alpha \approx 56,3^\circ$.

das Dreieck EFG gleichseitig wäre, müßte dieser Winkel die Größe 60° haben. Damit ist gezeigt, daß das Dreieck EFG nicht gleichseitig ist.

Ma 10/12 ■ 2204 Skizze: (nicht maßgerecht)



Wenn $\overline{AC}$ Durchmesser von k ist, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig (Satz des Thales).

Aus $A_k = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 19,63 \text{ cm}^2$ folgt $d \approx 5 \text{ cm}$. Für

die Länge c von AB gilt $c = \frac{u}{4} = \frac{\pi \cdot d}{4} \approx 3,9 \text{ cm}$

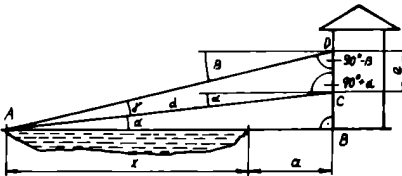
und $\sin 35^\circ = \frac{a}{c}$; $a \approx 2,9 \text{ cm}$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt:

$$A_D \approx \frac{3,9 \cdot 2,9}{2} \text{ cm}^2; A_D \approx 5,7 \text{ cm}^2,$$

das sind etwa 29% der Kreisfläche.

Ma 10/12 ■ 2205 Skizze (nicht maßstäblich)



Es gilt $\alpha + \gamma = \beta$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also $\gamma = \beta - \alpha = 24,6^\circ - 18,4^\circ = 6,2^\circ$.

Nun gilt im Dreieck ACD

$e : \sin \gamma = d : \sin (90^\circ - \beta)$ bzw.

$$d = \frac{e \cdot \sin (90^\circ - \beta)}{\sin \gamma} = \frac{e \cdot \cos \beta}{\sin \gamma} \quad (1)$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt

$$\cos \alpha = \frac{x + d}{d}; x = d \cdot \cos \alpha - a. \quad (2)$$

Wir setzen (1) in (2) ein und erhalten

$$\begin{aligned} x &= \frac{e \cdot \cos \beta}{\sin \gamma} \cdot \cos \alpha - a; \\ x &= \frac{8 \text{ m} \cdot \cos 24,6^\circ \cdot \cos 18,4^\circ}{\sin 6,2^\circ} - 10 \text{ m}; \end{aligned}$$

$$x \approx 54 \text{ m}.$$

Der Fluß ist etwa 54 m breit.

Ph 6 ■ 111 Die Strecken und Kreisbögen scheinen unterschiedliche Längen zu haben. Die Messung beweist, daß die Längen gleich sind. Unsere Sinne können uns sehr leicht täuschen. Deshalb müssen wir immer durch eine Messung genau prüfen.

Ph 7 ■ 112 Auf die Oberfläche des Tauchers wirkt eine Druckkraft von 74 MP ($\approx 726 \text{ kN}$).

Ph 8 ■ 113 Die ersten beiden Widerstände sind 64Ω , der dritte 252Ω .

Ph 9 ■ 114 Es sind 20 Scheiben erforderlich.

Ph 10/12 ■ 115 Die Schwingungsdauer der beiden Pendel steht im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$.

Ch 7 ■ 89 a) Aus 60 kg Kupfer entstehen durch Oxydation 75 kg Kupfer(II)-Oxid;
 b) 15 kg Sauerstoff sind der angegebenen Kupfermenge äquivalent;
 c) bei einer monatlichen Planerfüllung von 104% werden 208 t Kupfer(II)-Oxid produziert.

Ch 8 ■ 90 a) $1,867 \text{ m}^3$ Wasserdampf sind zur Umsetzung von 1 kg Hüttenkoks erforderlich;
 b) es entstehen $3,36 \text{ m}^3$ Wasserglas;
 c) eine moderne Anlage produziert stündlich 19488 m^3 Wasserglas.

Ch 9 ■ 91 Der Verbrauch an Kohlendioxid beträgt $0,242 \text{ m}^3$. Zum Abbinden von $2,4 \text{ kg}$ Kalkmörtel, der zu einem Drittel aus Löschkalk besteht, sind $806,7 \text{ m}^3$ Luft erforderlich.

Ch 10/12 ■ 92 Aus 6 t Anhydrit, welches 20% Verunreinigungen enthält, entstehen $3,46 \text{ t}$ 100%ige Schwefelsäure. Aus 6 t Anhydrit mit 20% Verunreinigungen entstehen bei einer Schwefeldioxydausbeute von 94% 5 t 60%ige Schwefelsäure.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/82

Ma 5 ■ 2208 Aus b) und c) folgt:

Das Mädchen mit dem Nachnamen Mayer gehört der Klasse 5a an. Deshalb gehört Doris der Klasse 6a, Andrea der Klasse 5b an.

Aus a) folgt:

Das Mädchen mit dem Nachnamen Schulz gehört der Klasse 6b an.

Aus d) folgt:

Carola gehört der Klasse 6b an, sie hat den Nachnamen Schulz, da sie nicht zur Klasse 5b gehört. Deshalb gehört Beate zur Klasse 5a und hat den Nachnamen Mayer. Andrea hat den Nachnamen Lehmann, also Doris den Nachnamen Becker.

Vorname	Nachname	Klasse
Beate	Mayer	5a
Andrea	Lehmann	5b
Doris	Becker	6a
Carola	Schulz	6b

Ma 5 ■ 2209 Die Mutter wendete auf alle von Uwe genannten Rechenoperationen die Umkehroperationen an. Sie begann mit der letzten und endete mit der ersten von Uwe genannten Operation. Die Mutter rechnete wie folgt:

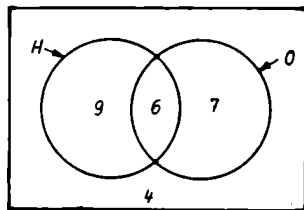
$$4 + 44 = 48; 48 : 4 = 12; 12 - 4 = 8.$$

Uwe hatte auf dem Zeugnis 8 Einsen.

Ma 5 ■ 2210 Wegen $1111 = 11 \cdot 101$ und weil sich die Faktoren 11 und 101 nicht in weitere

Produkte zerlegen lassen, deren Faktoren von 1 verschieden sind, existiert genau eine solche Zahl, sie lautet 11101.

Ma 5 ■ 2211 Wir rechnen $13 - 6 = 7$, $15 - 6 = 9$, $7 + 9 + 6 + 4 = 26$. Dieser Klasse gehören genau 26 Schüler an. Das abgebildete Diagramm veranschaulicht diese Lösung.



H bedeutet: Menge der Schüler, die im Harz waren.

O bedeutet: Menge der Schüler, die an der Ostsee waren.

Ma 5 ■ 2212 Angenommen, Ottos Schwester Inge ist n Jahre alt; dann gilt $(n \cdot 6 + 2) : 4 = 11$, also $6 \cdot n + 2 = 44$, $6 \cdot n = 42$, $n = 7$. Inge ist somit 7 Jahre, Axel 1 Jahr alt.

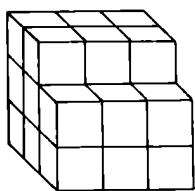
Ma 5 ■ 2213 Für die gesuchten Zahlen n gilt $10 \leq n \leq 99$. Die Zahlen 11, 16, 21, 26, ..., 91, 96 lassen bei Division durch 5 den Rest 1. Von diesen Zahlen lassen aber nur die ungeraden bei Division durch 2 den Rest 1. Von den nunmehr verbleibenden Zahlen 11, 21, 31, ..., 91 sind nur die Zahlen 21, 51 und 81 durch 3 teilbar.

Ma 6 ■ 2214 Angenommen, es müssen noch x Mark eingesammelt werden. Von n Schülern sind noch 2 M, von weiteren n Schülern 6 M, von 4 Schülern noch 3 M, von $(25 - 2n)$ Schülern noch 4 M einzusammeln. Deshalb gilt

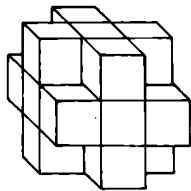
$$\begin{aligned} 2n + 6n + 3 \cdot 4 + 4(25 - 2n) &= x, \\ 8n + 12 + 100 - 8n &= x, \\ x &= 112. \end{aligned}$$

Es müssen insgesamt noch 112 M eingesammelt werden.

Ma 6 ■ 2215 Die Oberfläche des Restkörpers von Ralf wird aus $6 \cdot 9 - 2 = 52$ kleinen Quadraten, die Oberfläche des Restkörpers von Rita wird aus $6 \cdot 9 = 54$ kleinen Quadraten gebildet. Also hat Ralf recht.



Restkörper
von Ralf



Restkörper
von Rita

Ma 6 ■ 2216 Da es sich um gerade natürliche Zahlen handelt, kann die letzte Ziffer nur 0 oder 6 sein. Es existieren genau 12 solcher Zahlen: 300, 306, 330, 336, 360, 366, 600, 606, 630, 636, 660, 666.

Ma 6 ■ 2217 (1) Jede Zahl ist um 3 größer als die vorangehende, also $a = 16$.

(2) Jede Zahl ist doppelt so groß wie die vorangehende, also $b = 4$.

(3) Die zweite Zahl ist um drei größer als die erste, die dritte um vier größer als die zweite, die vierte um fünf größer als die dritte usw., also $c = 13$.

(4) Die zweite Zahl ist um $1 \cdot 2$ größer als die erste, die dritte um $2 \cdot 2$ größer als die zweite, die vierte um $4 \cdot 2$ größer als die dritte, die fünfte um $8 \cdot 2$ größer als die vierte usw., also $d = 4$.

(5) $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, also $e = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

(6) $1, 1 + 3^1 = 4, 4 + 3^2 = 13, 13 + 3^3 = 40, 40 + 3^4 = 121, 121 + 3^5 = 365$, also $f = 4$.

Ma 6 ■ 2218 Peter hat $(11 \cdot a + 3)$ Nüsse bzw. $(13 \cdot b + 11)$ Nüsse, dabei sind a und b natürliche Zahlen. Nun gilt

$$\begin{aligned} 11a + 3 &= 13b + 11, \\ 11a &= 13b + 8, \\ 11a &= 11b + 2b + 8, \\ a &= b + \frac{2(b+4)}{11}. \end{aligned}$$

Ferner gilt $400 < 13b + 11 < 600$, $389 < 13b < 589$, also $30 \leq b \leq 45$. Nur für $b = 40$, also für $a = 48$ wird die Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Peter hat somit $(13 \cdot 40 + 11)$ Nüsse; das sind 531 Nüsse. Probe: $13 \cdot 40 + 11 = 531$.

Ma 7 ■ 2219 Die Gleichung $\overline{aa^2} = \overline{bbcc}$ läßt sich auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} (10a + a)^2 &= 1000b + 100b + 10c + c, \\ (11a)^2 &= 1100b + 11c, \\ 121a^2 &= 11 \cdot (100b + c), \\ 11a^2 &= 100b + c, \\ 11a^2 &= 99b + b + c, \\ a^2 &= 9b + \frac{b+c}{11}. \end{aligned}$$

Wegen $1 \leq b \leq 9$ und $1 \leq c \leq 9$ erhalten wir nur für $b + c = 11$ das Quadrat einer natürlichen Zahl. Daraus folgt weiter $a^2 = 9b + 1$. Nur für $b = 7$ erhält man eine Quadratzahl, nämlich $a^2 = 64$, also $a = 8$ und somit $c = 4$. Es existiert genau eine Lösung; sie lautet $88^2 = 7744$.

Ma 7 ■ 2220 Es seien $m - 1$, m und $m + 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; die Summe dieser Zahlen beträgt $3m$. Nun gilt $(m - 1) \cdot m \cdot (m + 1) = 85 \cdot 3m$, und wegen $m \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} (m - 1) \cdot (m + 1) &= 255, \\ m^2 - 1 &= 255, \\ m^2 &= 256, \\ m &= 16. \end{aligned}$$

Die gesuchten Zahlen lauten somit 15, 16 und 17, und es gilt

$$15 \cdot 16 \cdot 17 = 85 \cdot (15 + 16 + 17), \\ 4080 = 4080.$$

Hinweis: Aus Platzgründen müssen wir auf die restlichen Lösungen Mathematik, Physik und Chemie verzichten, d. Red.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Pólya

Zürich

Können Sie folgende drei Aufgaben lösen? Sehen Sie eine Ähnlichkeit zwischen den Lösungen?

▲ 2265 ▲ a) Wie alt ist der Kapitän, wie viele Kinder hat er, und wie lang ist sein Boot? Gegeben ist das Produkt der drei natürlichen Zahlen. Die Länge des Bootes ist in Metern (mehrere Meter) angegeben, der Kapitän hat Söhne und Töchter, und er ist älter als die Anzahl seiner Kinder, aber noch nicht 100 Jahre alt.

b) Alfred, Bernd und Christian planen ein großes Picknick.

Jeder Junge bezahlt 9 Mark. Jeder kauft belegte Brote, Eis und Brause. Jeder gibt 9 Mark aus, bezahlt aber für jede Ware einen unterschiedlichen Betrag. Kein Junge bezahlt für eine Ware den gleichen Betrag wie ein anderer. Die größte Summe gibt Alfred für Eis aus. Bernd bezahlt zweimal so viel für Brote wie für Eis. Wieviel muß Christian für Brause bezahlen?

c) Die drei Ehepaare Lehmann, Schmidt und Müller kaufen Süßigkeiten für die benachbarten Kinder. Jeder kauft so viele gleiche Süßigkeiten, wie er (oder sie) Pfennig für eine Süßigkeit bezahlen muß. Jede Frau gibt 75 Pfennig mehr aus als ihr Mann. Ann kauft ein Stück mehr als Bernd Lehmann, Betty ein Stück weniger als Johannes Schmidt. Wie lautet Marions Zuname?

Kurzbiografie

Universitätsstudium in Budapest und Wien vor und in Göttingen und Paris nach der Promotion, welche 1912 in Budapest erfolgte. Unterrichtete an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich von 1914 bis 1940, von 1928 an als ordentlicher Professor. Seit 1942 an der Universität Stanford (USA), seit 1953 als Professor emeritus, jedoch noch tätig im Unterricht, insbesondere in der Weiterbildung von Mathematiklehrern. Korrespondierendes Mitglied der Académie des Sciences in Paris, Ehrenmitglied der Londoner und der schweizerischen mathematischen Gesellschaften und des Bureaus de la Société Mathématique de France, Ehrendoktor der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich und der Universität von Alberta (Kanada).

alpha-Wettbewerb 1980/81

Kollektive Beteiligung

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, Haus der Jungen Pioniere, beide Altenburg; W.-Pieck-OS, Altenweddingen; OS Fr. Weineck, Alsleben; W.-Pieck-OS, Anklam; OS Asbach; E.-Thälmann-OS, Bad Bibra; S.-Rädel-OS, Bad Gottlieba; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; OS Bad Wilsnack; M.-Poser-OS, Bad Salzungen; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; OS H. Warnke, Bergwitz; OS A. Becker, Berlingerode; 37. OS, 39. OS, beide Berlin; OS E. Thälmann, Fr.-Mehring-OS, beide Bernburg; Cl.-Zetkin-OS, Bischofferode; Math.-Kreis- zirkel, Bischofswerda; OS Fr. Schiller, Bleicherode; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS L. Herrmann, Blumen- hagen; OS Blumenthal; OS K. Burger, Breden- felde; OS B. Brecht, Brehme; W.-Seelenbinder-OS, OS H. Beimler, beide Breitungen; OS Breitenwor- bis; OS Freundschaft u. Frieden, Brieselang; Dr.- Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bür- gel; TOS Büttelstedt; Th.-Müntzer-OS Choren; Th.-Müntzer-OS, Cochedt; N.-Ostrowski-OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Cottbus; OS Dambeck; M.-Gorki-OS, Dermbach; 4. OS, Dessau; OS Deutschenbora; AG Math., Diesdorf; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingel- stadt; OS K. Bürger, Dobbentin; OS A. Matrossow, Dorndorf; 42. OS, 39. OS Fr. Schulze, 106. OS, alle Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; Geschw.-Scholl- OS, Eisenach; OS Fr. Heckert, OS J. Schehr, beide Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS Geschw. Scholl, Falkensee; Päd. Kreiskabinett, Falkenstein; OS Th. Müntzer, Fambach; B.-Brecht-OS, Floh; Zentrale OS, Fran- kenheim; 19. OS Frankfurt; Lenin-OS, Freiberg; BBS VEB Edelstahlwerk 8. Mai 1945, Freital; OS K. Marx, Freyburg; Math. Zirkel OS Friedens- horst; OS Friedeburg; OS Fr. Reuter, Friedland; OS H. Günther, Fürstenwalde; Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt; Haus d. Pioniere, Gadebusch; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; OS Diesterweg, Geringswalde; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; K.-Kräppler-OS, Gnoien; OS Görzke; OS Goßwitz; Kalinin-OS, Geschwenda; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; E.-Thälmann-OS, Greifswald; OS H. Beimler, Greußen; OS W. I. Lenin, Gröbers; OS W. Seelenbinder, Gröden; III. OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbodun- gen; Lessingschule Großpostwitz; Kreiszirkel Math., Großbröhrsdorf; OS Großschönau; J.-Ga- garin-OS, Grünhain; Haus der Jungen Pioniere, A.-Gaidar-OS, beide Hagenow; M.-Gorki-OS, Hai- nichen; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Halber- stadt; OS f. Körperbehinderte, Halle; W.-Koenen- OS, Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; OS Hans- hagen; OS u. TEOS, Havelberg; OS Haynrode; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heili- gengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; OS Hiddensee; OS Hil- lersleben; OS Horka; OS 21, Hoyerswerda; Goethe- OS, Ilseburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker- OS, Jatznick; E.-Weinert-OS, Jocketa; Fr.-Engels- Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow;

Wl.-Komarow-OS, E.-Thälmann-OS, E.-Schneller- Schule, P.-Tschaikowski-OS, K.-Bobach-OS, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS Kelbra; OS E. Schneller, Kirchberg; Th.-Neu- bauer-Schule, Kieselbach; EOS G. Thiele, Klein- machnow; H.-Matern-OS, Klietz; OS Th. Müntzer, Klettenberg; OS E. Thälmann, Klosterfelde; OS W. Seelenbinder, Könitz; Bachschule, Station Jg. Naturf. u. Techniker, beide Köthen; OS Krossen; OS Küllstedt; OS Latdorf; Schulkombinat Lau- scha-Ernstthal; O.-Engert-OS, O.-Schön-OS, 146. OS, alle Leipzig; OS IV J.-C.-Fuhlrott, E.-Thäl- mann-OS, K.-Liebknecht-OS, EOS K. Marx, alle Leinefelde; M.-Poser-OS, Lengfeld; E.-Thälmann- OS, Leutenberg; OS Liebenwalde; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; OS W. Pieck, Lichte; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; OS J. Schrö- der, Lubmin; OS K. Marx, Stat. Jg. Naturf. u. Tech- niker, beide Lütz; Fr.-L.-Jahn-OS, Lühtheen; Stat. Jg. Techniker, Luckau; Haus d. Jungen Pio- niere Th. Körner, Ludwigslust; Haus d. Jungen Pioniere, Magdeburg; OS Marisfeld; G.-Eisler-OS, Martinroda; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; Geschw.-Scholl-Schule, Meyenburg; OS Mittel- stille; OS Mittelherwigsdorf; E.-Thälmann-OS, Mittweida; OS H. Danz, Möser; OS-Kombinat, Molschleben; Kinderheim Muzig; OS J. Fučík, Naundorf; W.-Bykarski-OS, Neetzow; OS Neun- dorf; Goethe-OS, Neupetershain; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; OS W. Seelenbinder, Neverin; Dr.- Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck- OS, Niederwiesa; OS J. Gagarin, Nordhausen; OS E. Weinert, Oberschöna; OS Ockrilla; Pestalozzi- OS, Oschatz; OS Osternienburg; OS H. Matern, W.-Pieck-OS, beide Osterwieck; O.-Grotewohl- OS, Pappenheim; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Par- chim; OS K. Kollwitz, Peißen; OS III Geschw. Scholl, Perleberg; OS Petersdorf; Dr.-Th.-Neu- bauer-OS, Pfaffschwenda; Spezialistenlager Math. Plauen; Kreis-AG Plauen-Land; A.-Becker-OS, Prenzlau; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritz- walk; E.-Rietschel-OS, Pulsnitz; Makarenko-OS, Plessa; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; Pesta- lozzi-OS, OS H. Matern, beide Radebeul; Dr.-Th.- Neubauer-OS, Raguhn; H.-Zille-Schule, Radeburg; Geschw.-Scholl-OS, Rathenow; J.-Gagarin-OS, OS U. Steinhauer, beide Ribnitz-Damgarten; Spezial- schule Fr. Engels, Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; OS Römhild; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski- OS, Roßdorf; 34. OS M. Reichpietsch, Rostock; W.-Pieck-OS Rotta; OS Rüsen; OS Saal; OS E. Weinert, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Stat. Jg. Nat- urf. u. Techn., beide Sangerhausen; OS Schafstätt; OS Schlagsdorf; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; W.-I.-Lenin-OS, Schkopau; OS Schleiz; OS Schlottwitz; 4. OS, J.-G.-Seume- OS, EOS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; OS Schule d. DSF, Schneidlingen; OS Kuba, Schors- sow; HBOS Schönhausen; OS Fr. Engels, Schwal- lungen; OSS. Kosmodemjanskaja, Schweikershain; M.-May-OS, Sebnitz; OS W. Seelenbinder, Sitzen- dorf; Kreisklub Math., Senftenberg; OS J. R. Be- cher, OS W. Pieck, beide Sondershausen; OS A. Becker, OS K. Marx, K.-Liebknecht-OS, alle Spremberg; K.-Liebknecht-OS, Stadtlengsfeld; II. OS E. Wölk, Stadtroda; OS E. Thälmann, Stein- bach-Hallenberg; OS Straßgräben; Mathe-Klub, O.-Grotewohl-OS, beide Stralsund; 11. OS A. S. Schumanzow, 12. OS Dr. R. Sorge, beide Suhl; OS E. Schneller, Taubenheim; J.-Gagarin-OS, Tei- stungen; K.-Kollwitz-OS, Thale; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; E.-Thälmann- OS, Trebsen; OS W. Pieck, Trusetal; E.-Welk-OS, Goetheschule, A.-Nitz-OS, alle Ueckermünde; H.- Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-Hennecke-OS, Untermaßfeld; E.-Schneller-OS, Urnschhausen; OS G. Seume, Vacha; OS VITTE; alpha-Club, Vitzen- burg; Th.-Müntzer-OS, Walsleben; Goetheschule, Päd. Kreiskabinett, beide Waren; OS L. Fünberg, Wegeleben; Sprachheilschule Weimar; E.-Thäl- mann-OS, Weinböhla; Berditz-OS, Weißenfels; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS O. Grote-

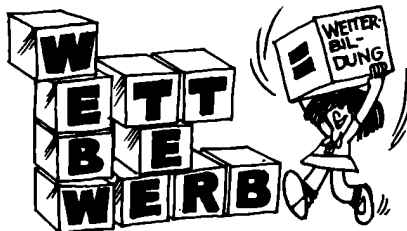
wohl, Westerengeln; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.- Rau-OS, Wildau; Ditteschule Wilkau-Haßlau; OS Wittenförden; E.-Thälmann-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Wittstock; Haus der Jungen Pio- niere, Wismar; OS I. H. Werner, Worbis; Station J. Techn., Wolfen; OS Fr. Gießner, Woffleben; Dr.- Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; OS H. Heine, Wörlitz; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; P.-Lamberg-OS, Zehdenick; Luther- schule, Fr.-Schiller-OS, beide Zella-Mehlis; EOS Zittau; OS Zschornowitz.

Preisträger

Beatrice List, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach (Kl. 2); Stefan Müller, Birk Schulze, Wilko Wohl- auf, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Jens Baumann, Bernsbach; Thomas Gerlach, Buhla; Karsten Kehler, Cottbus; Mario Schubert, Thomas Hübner, Gerald Eichler, alle Dresden; Jörg Simon, Engelsdorf; Susanne Heller, Fambach; Thomas Scheibe, Ferdinandshof; Dorothee und Annemarie Heidrich, Freiberg; Kerstin Thiele, Astrid Gebauer, Sinilga Kleindienst, alle Friedeburg; Ingmar Hell- hoff, Friedersdorf; Sven Rudolph, Großbröhrsdorf; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Andreas Tille, Halle; Judith Krippner, Mathias Schädlich, Mandy Probst, Simone Pötzsch, Heike Reichelt, alle Ham- merbrücke; Clemens Unger, Hasselfelde; Ingo Müller, Hermannsdorf; Maik Otto, Holzthaleben; Claudia Schwartz, Ilmenau; Henrik Hodam, Kal- tenordheim; Jens Weber, Karl-Marx-Stadt; Ralf Laue, Uwe Werner, beide Leipzig; Andreas Hübler, Mittelbach; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Torsten Linß, Nordhausen; Matthias Dalitz, Obhausen; Steffen Scheithauer, Parey; Birgit Seifer, Pinnau; Michael Taeschner, Parchim; Ralf Bauer, Riesa; Anne und Heiner Ruser, Oliver Eidam, alle Rostock; Jeannette Schmücker, Bianca Schweiger, Irena Thiele, Katja Klotzsch, alle Rotta; Knut Marzisch, Rudolstadt; Sabine Schwelgien, Schönhausen; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Jens Gerstenberger, Stadtroda; Olaf Otto, Stolpe; Wolfgang Vogel, Thalheim; Hel- ga Tasch, Timisoara (Rumänien); Jana Rönnicke, Uthausen; Andreas Döring, Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Simone Keil, Julia Arm- brecht, beide Worbis; Christine Thomas, Zittau; Harald Hempel, Zschoppach; Annett Hellwig, Zschornowitz.

Vorbildliche Leistungen

Thomas Heilfort, Bad Gottlieba; Andreas Schnei- der, Badingen; Ute Partsch, Christiane Böttger, beide Bad Salzungen; Silvia Holzmüller, Bergwitz; Ulrich Züllicke, Bergwitz; Jens-Uwe Jaeschke, Ker- stin Kantiem, Beate Müller, Bernd Trappe, alle Ber- lin; André Lorenz, Marco Weißfogel, beide Berns- bach; Karsten Kühne, Blankenfelde; Annerose Schmidt, Bleicherode; Michael Kremmer, Breitun- gen; Kathleen Riemichen, Burgkernitz; Peter Strempel, Karsten Mittag, Rolf Roßius, Martin Leitel, alle Cottbus; Jörg Uhlig, Charis Förster, beide Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Kay Mengel, Lars Kliesche, beide Dahme; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Thomas Kaufhold, Din- gelstädt; Annett Runze, Dölitz; Frank Kunert, Ebersbach; Lutz Küch, Erlau; Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Anke Mittag, Fischbeck; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Ansgar Heise, Kristina Böttger, beide Görlitz; Kathrin Pohle, Görzke;



Katja Friebe, Gossa; Ramona Falke, Susan Meinel, beide Hammerbrücke; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Ulf Graubner, Hermannsdorf; Hagen Reimann, Horka; Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilseburg; Steffi Gebauer, Jena; Carla Umlauf, Hildegard Geisler, Michael Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Jens Voigt, Kleinmachnow; Sylvia Hofmann, Langenlueba-Ndr.; Thomas Rademacher, Lützen; Carsten Behling, Frank Görtsch, beide Magdeburg; Eike Kretschmar, Mittweida; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Stefan Warne, Neuruppin; Antje Flechsig, Obercrinitz; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Ilka Lange, Osterwieck; Michael Struch, Parchim; Ingo Schubert, Plaffroda; Annette Holzmann, Prenzlau; Wolfgang Schneider, Radeberg; Antje Ballmann, Rotta; Ronald Bojarski, Saßnitz; Thomas Habel, Schönwalde; Anja Bohne, Schönhausen; Uta Möbius, Schwerin; Reiner Möwald, Sömmerda; Steffen Lieschke, Stadtroda; Anja Reumerschüssel, Steinbach-Hallenberg; Thomas Heublein, Steinach; Sven Janssen, Tornau; Viola Krause, Uthausen; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Hartmut Boettcher, Weimar; Daniel Schlott, Gereon Begau, Frank Schräpel, alle Worbis; Markus Lehmann, Zittau

Abzeichen in Gold für fünfzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für vierzehnjährige Teilnahme
Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle

Für dreizehnjährige Teilnahme
Ulrich Riedel, Flöha

Für zwölfjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Rainer Seifert, Kamenz; Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Berthold Weitengel, Oelsnitz; Frank Abmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Sondershausen

Für elfjährige Teilnahme
Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Wolfgang Seeber, Gehren; Bengt Nölting, Greifswald; Rolf Kuhn, Leipzig; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornowitz

Für zehnjährige Teilnahme
Andrea Nießen, Andreas Gude, beide Berlin; Frank Regensburg, Werner Jeroch, beide Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Regina Bricks, Eberhard Georgy, beide Erfurt; Wolfram Umlauf, Freital; Claudia Endtricht, Görlitz; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhner, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf und Haiko Müller, beide Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Sylvia Kunze, Weißenfels; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für neunjährige Teilnahme
Dieter und Henri Koch, Arnstadt; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Werner König, Berlingerode; Jens Purand, Cottbus; Angela Jirick, Annett Körner, Peter-Alexander Pöhler, Klaus Schlegel, alle Dresden; Diana Semper, Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt;

Diese Kryptogramme stammen aus der Feder von: Dirigent Jindřich Penčík, Praha; Beatrix Rost, Riesa (Kl. 10); Kathrin Müller, Bad Wilsnack (Kl. 9); Schülerin S. Schwabe, Olbersdorf (Kl. 6); Thomas Rademacher, Lützen (Kl. 8); Andrea Nesau, Berlin (Kl. 8); Ing. H. Decker, Köln; J. Lehmann, Chefredakteur alpha

Silvio Klose, Gera; Mathias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Grünungen; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhlend, Klingenthal; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Martin Wolf, Magdeburg; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Rüdiger Düsing, Osterburg; Antje Langer, Oybin; Jens-Peter und Sigrid Planke, Premnitz; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Torsten Jeschke, Schwarzeide; Bernd Hartwig, Thaldorf; Dietmar Ulbricht, Velten; Christoph Chojetzki, Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Bernd Dübe, Forst

Für achtjährige Teilnahme
Guntram Türke, Auerbach; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Claudia Ziehm, Frank Bendin, beide Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Maik Weide, Callenberg; Andreas Winkler, Cossebaude; Kathrin Magister, Cottbus; Harry Höfer, Dornsdorf; Thomas Schindhelm, Jörn Wittig, Karl-Heinz Jünger, Carolin Engel, Lutz Jeroch, Susanne Müller, alle Dresden; Birgit Bricks, Volker Georgy, Thomas Mittelbach, Dirk-Thomas Orban, Renate Lützkendorf, alle Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Steffi Hauke, Ralf Baumhekel, beide Freital; Gerd

Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Frank Scheffler, Gnoien; Stefan Göckeritz, Gunnar Boll, beide Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Enka Stelzer, Heringsdorf; Volker Reck, Heiligenstadt; Eike Harmel, Hohenferchesar; René Schüppel, Mathias Grundmann, beide Hoyerswerda; Bernd und Horst Fliegner, Jarmen; Thomas Mader, Andreas Hengst, Birgit Hofmann, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Per Witte, Königs Wusterhausen; Heike Rudolf, Leipzig; Tobias Lütke, Meißen; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Thomas Möller, Meiningen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Sigrun Massanek, Neusorzig; Karsten Woike, Neustadt; Torsten Kretschmer, Naumburg; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Birgit Seifert, Peter Seifert, beide Pinnau; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Karsten Schlutter, Potsdam; Claudia Würker, Reichenbach; Hartmut Lipke, Ribnitz; Astrid Wruck, Rostock; Roland Goldenbogen, Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Margit Creutzburg, Thal; Annetkatrin Heuer, Tieckow; Gisbert Thieme, Wallhausen; Stefan Syring, Warin; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Olaf Seidel, Weißwasser; Birgit Schmidt, Worbis; Gudrun Boettcher, Weimar; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Jens Pönisch, Conchita Röske, beide Karl-Marx-Stadt.

MINUS+MINUS+MINUS+MINUS+MINUS+MINUS=HOBBY

1 MATHE+IST+MEINE = LIEBE

**5 MATHE
+MACHT
FREUDE**

9 $BD + BC = CC$
+ : :
 $BC : A = C$
 $CC : C = BB$

7 $X : Y = Y$
- + +
 $Q \cdot V = EN$
 $V + EO = EV$

11 OPA
+ OMA
 $PAAR$

12 $2*** : ** = **$

13 $\frac{*7}{*1*} \frac{***}{0} \sqrt{ALPHA} = HHA$

8 $2*** \cdot 3***$
5***
4
***3

6 $abab$
+ $ba ba$
cccc

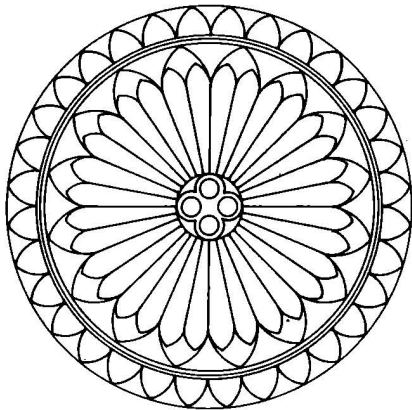
10 $\square \circ + \triangle = \square \blacksquare$
- + -
 $\bigcirc \bullet - \blacktriangle = \bigcirc \triangle$
 $\triangle \triangle + \bullet = \bigcirc \bigcirc$

3 MINUS+MINUS+MINUS+MINUS+MINUS+MINUS=HOBBY

4 IHR+LERNT+GERN=MATHE

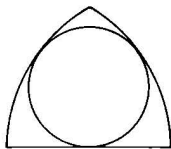
2 PLUS+PLUS+PLUS+PLUS+PLUS+PLUS=MATHE

Geometrie und Architektur

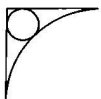


Aufgaben

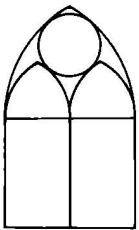
▲1▲ Die Figur zeigt die Skizze eines einfachen Maßwerkes. Gib eine Konstruktionsbeschreibung!



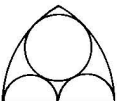
▲2▲ Die Figur zeigt einen einfachen Träger mit Kreisverzierung. Gib eine Konstruktionsbeschreibung!



▲3▲ Die Figur zeigt die Skizze eines gotischen Kirchenfensters. Gib eine Konstruktionsbeschreibung! Wo liegt der Mittelpunkt des kleinen oberen Kreises?



▲4▲ Die Figur zeigt ein Maßwerk, das sich z. B. am Rathaus in Braunschweig befindet (nach Gerlach). Berechne den Radius des Vollkreises, wenn die Kämpferlinie (die Fensterbreite) gegeben ist!



Stadtter in Templin

