

**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059**



1

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Gerti Krabbes, LVZ Leipzig (S. 3);
Bette, DLZ Berlin (S. 6); ADN, Berlin
(S. 6); Jugend u. Techn., Berlin (S. 7); Eigen-
foto (S. 8); W. Moese, Berlin (S. 14); J. Leh-
mann, Leipzig (S. 18); Foto Pólya, Lajos,
Toth, MTI Budapest

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395

Auslieferungstermin: 20. Februar 1983

Redaktionsschluß: 15. Oktober 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Symmetriestrukturen – Geometrie und Algebra [9]*
Dr. H. Kohlase, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 3 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Bruno de Finetti [8]
Universität Rom
- 4 Wissenschaftler und Revolutionär – Karl Marx 1818 bis 1883 [7]
Dipl.-Phil. M. Bernuth, Humboldt-Universität zu Berlin, aus Technikus
- 5 Für den Schachfreund: Figurenzüge über 64 Felder [6]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 6 José Luis Massera – Mathematiker und Kämpfer für Demokratie
und Freiheit [5]
Dipl.-Journalist W. Israel, ADN Berlin
- 7 Die Kreiszahl π – Zum 100. Geburtstag des Beweises der Trans-
zendenz von π [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften
der DDR
- 8 Was ist Rechnungsführung und Statistik? [9]
Prof. Dr. G. Geißler, Sektion Wirtschaftswissenschaften der Karl-Marx-Universität
Leipzig
- 10 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – speziell für Klasse 4 bis 6
Geometrische Plaudereien [4]
Dr. L. Flade/Dr. H. Knopf, beide Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg
- 11 Gute Grundkenntnisse gesucht – auch ein wenig Überlegung [4]
Gemixtes aus französischen Mathematiklehrbüchern, Teil 1
Mathematikfachlehrer U. Hauck, Päd. Hochschule *Wolfgang Ratke*, Köthen
- 12 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
- 15 Mathematische Schülergesellschaft (MSG) an der Universität
Greifswald gegründet [7]
Studienrat H.-J. Kerber, Rat des Bezirks Neubrandenburg, Abt. Volksbildung
Mathematikolympiaden der Horte des Kreises Bad Langensalza [4]
Oberlehrer Rosemarie Herzog, Pionierhaus *W. Eggerath*, Bad Langensalza
- 16 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
- 18 Die magische Pyramide [5]
Dr. H.-D. Gronau, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
- 20 Lösungen [5]
- 24 Historische Aufgabe: Das Lebensalter Diophants [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der AdW der DDR zu Berlin

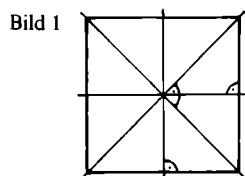
III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb 1981/82 – Abzeichen in Gold

IV. U.-Seite: Mit Zirkel und Zeichendreieck

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

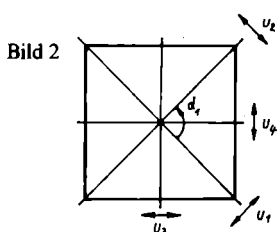
Symmetriestrukturen – Geometrie und Algebra

Wie ihr wißt, hat das Quadrat 4 Symmetrieachsen, nämlich die beiden Diagonalen und die Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte, die wir Mittellinien nennen wollen. Mittellinien, die Symmetrieachsen sind, stimmen natürlich mit den Mittelsenkrechten überein (Bild 1). Diagonalen und Mittellinien schneiden sich bekanntlich in einem Punkt.



Wenn man das Quadrat an seinen Symmetrieachsen spiegelt oder, was dasselbe ist, um diese Achsen umklappt, dann kommt es mit sich selbst zur Deckung. Wir sprechen von einer Deckabbildung. Der Begriff „Abbildung“ weist darauf hin, daß Spiegelung und Umklappung im mathematischen und nicht im physikalischen Sinne zu verstehen sind, d. h. als Zuordnung von Punkten der Ebene. In Klasse 5 und 6 wurde gezeigt, daß es sich bei der Spiegelung sogar um eine eindeutige Abbildung handelt. Seht euch zur Wiederholung Definition D3, Lehrbuch Klasse 6, S. 96 an!

Wir wollen die vier möglichen Deckabbildungen durch Spiegelung künftig stets Umklappung nennen und entsprechend Bild 2 mit u_1 , u_2 , u_3 , u_4 bezeichnen.



Wie man aus Bild 1 und 2 sofort erkennt, kann man das Quadrat nicht nur durch Umklappungen, sondern auch mit Hilfe von Drehungen um den Schnittpunkt der Symmetrieachsen mit sich zur Deckung bringen. Diese Tatsache gibt Anlaß, von Drehsymmetrie (auch Radialsymmetrie genannt) zu sprechen.

Der kleinste Drehwinkel ist 1 Rechter (1 R). Aber auch Drehungen um 2 R, 3 R und 4 R

bewirken Deckabbildungen. Bei einer Drehung um 4 R ist jeder Bildpunkt mit seinem Original identisch, so als hätten wir gar nicht, d. h. um 0 R, gedreht. Es liegt die sogenannte identische Abbildung vor. Wir bezeichnen die vier Drehungen um 1 R, 2 R, 3 R und 4 R bzw. 0 R mit d_1 , d_2 , d_3 , d_0 .

Auch Drehungen sind eindeutige Abbildungen. Bekanntlich faßt man Umklappungen, Drehungen und Verschiebungen (die aber hier nicht interessieren – Grund?) zu den Bewegungen zusammen (Lehrbuch Klasse 6, Definition D4). Bewegungen (und nur diese) sind Kongruenzabbildungen.

Unseren weiteren Betrachtungen legen wir die Menge $\{d_0, d_1, d_2, d_3, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ aller 8 Deckabbildungen des Quadrats zugrunde, die wir mit D_4 bezeichnen.

Zunächst überlegen wir uns, was wir erhalten, wenn wir zwei Deckabbildungen nacheinander ausführen, sie verknüpfen, wie man auch sagt. Als Verknüpfungszeichen verwenden wir $\circ$ (lies etwa „Kringel“).

Um einen vollständigen Überblick zu bekommen, verknüpfen wir alle Elemente der Menge D_4 miteinander und fertigen eine Tabelle an. Bei der Aufstellung der Tabelle verfahren wir wie folgt:

Wir zeichnen ein Quadrat $ABCD$ auf ein Zeichenblatt und schneiden ein dazu kongruentes Quadrat aus starkem Papier oder Pappe aus. Sodann kennzeichnen wir die Ecken der Schablone beidseitig durch Buchstaben entsprechend dem Quadrat auf dem Blatt. Die Verknüpfung der Abbildungen realisieren wir durch sinngemäßes Arbeiten mit unseren Anschauungsmitteln.

Hinweis: Macht euch jede Deckabbildung anschaulich klar! Etwa so (vgl. Bild 2):

d_1 ist eine Drehung um 1 R, u_1 die Umklappung um die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale, u_3 die Umklap-

Bild 3

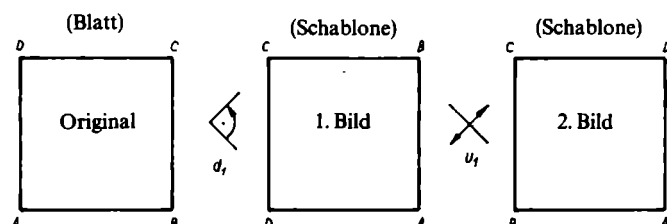
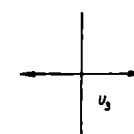


Bild 4



pung um die senkrechte Mittellinie usw. Wir betrachten $d_1 \circ u_1$. Siehe Bild 3!

Das durch Nacheinanderausführung von d_1 und u_1 entstandene 2. Bild kann man aus dem Original auch unmittelbar durch die Umklappung u_3 um die Mittellinie von AB herstellen; somit ist $d_1 \circ u_1 = u_3$. (Bild 4)

Auf dieselbe Weise ermitteln wir auch alle anderen Ergebnisse. Beachtet dabei, daß jedes Element auch mit sich selbst verknüpft wird! Auch muß man auf die Reihenfolge der „Faktoren“ achten; z. B. ist $u_1 \circ d_1 = u_4$, aber $d_1 \circ u_1 = u_3$.

Wir erhalten die folgende Verknüpfungstafel:

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3	u_1	u_2	u_3	u_4
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	u_1	u_2	u_3	u_4
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0	u_3	u_4	u_2	u_1
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1	u_2	u_1	u_4	u_3
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2	u_4	u_3	u_1	u_2
u_1	u_1	u_4	u_2	u_3	d_0	d_2	d_3	d_1
u_2	u_2	u_3	u_1	u_4	d_2	d_0	d_1	d_3
u_3	u_3	u_1	u_4	u_2	d_1	d_3	d_0	d_2
u_4	u_4	u_2	u_3	u_1	d_3	d_1	d_2	d_0

Tabelle 1

Bei der Betrachtung der Tafel stellen wir als erstes fest, daß beim Verknüpfen keine anderen Abbildungen als die der Menge D_4 angehörenden entstehen. Wir sagen, daß die Verknüpfung $\circ$ nicht aus der Menge D_4 herausführt oder daß diese Menge abgeschlossen bezüglich $\circ$ ist. Es gilt noch genauer: Aus je zwei Deckabbildungen entsteht bei der Verknüpfung eine eindeutig bestimmte dritte Abbildung derselben Menge. Eine solche Verknüpfung heißt eine Operation auf der gegebenen Menge. Euch schon bekannte andere Operationen sind z. B. die Addition und die Multiplikation von Zahlen.

Eine Menge mit einer Operation heißt eine Struktur. Strukturen sind Untersuchungsgegenstand der Algebra. In unserem Fall bildet D_4 mit $\circ$ eine Struktur. Wir nennen sie die Symmetriestruktur des Quadrats und bezeichnen sie mit $\mathcal{S}_4$. Auch jedes andere Vieleck besitzt eine Symmetriestruktur. Das Rechnen in diesen Strukturen, d. h. das Umgehen mit der Operation $\circ$, beherrschen wir mit Hilfe der Verknüpfungstafeln. Verknüpfungstafeln von Strukturen heißen Strukturtafeln oder Cayleysche Tafeln nach dem englischen Mathematiker Arthur Cayley (1821 bis 1895).

Aufgabe 1: Man gebe die Symmetriestruktur des gleichseitigen Dreiecks an und stelle ihre Strukturtafel auf.

Die Symmetriestrukturen von geometrischen Figuren spiegeln wesentliche Eigenschaften dieser Figuren wider und sind durch die Figur eindeutig bestimmt. Das Umgekehrte gilt jedoch nicht. Es gibt sogar zu jeder Symmetriestruktur unendlich viele nicht ähnliche Figuren (d. h. Figuren unterschiedlicher Form). Das kann man sich an Hand des Quadrats leicht überlegen. Denkt euch von den Ecken des Quadrats gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten, die alle zueinander kongruent sind, dann entstehen Restfiguren, deren Form von der Größe dieser vier Dreiecke abhängt. Wann haben sie dieselbe Symmetriestruktur wie das Quadrat?

Wir wollen uns nun Tabelle 1 einmal genauer ansehen. Es fällt sicher ins Auge, daß die Verknüpfung zweier Drehungen wie auch zweier Umklappungen stets eine Drehung, aber die Verknüpfung einer Drehung mit einer Umklappung oder umgekehrt stets eine Umklappung ergibt. Man kann sich leicht überlegen, warum das so ist. Bei einer Drehung haben nämlich Original und Bild denselben Umlaufsinn, bei einer Umklappung hingegen verschiedenen Umlaufsinn. Wir sprechen von gleichsinniger und ungleichsinniger Kongruenz. Führt man z. B. zwei Umklappungen nacheinander aus, dann ist das erste Bild ungleichsinnig kongruent zum ersten, damit aber gleichsinnig kongruent zum Original. Entsprechend überlegt man sich die anderen Verknüpfungsfälle.

Wir sehen uns die Menge $\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ aller Drehungen an und verknüpfen die Elemente miteinander. Nach dem eben Festgestellten ergibt sich stets wieder eine Drehung. Wir können nun mit Hilfe von Tabelle 1 sofort die Verknüpfungstafel angeben (Tabelle 2) und erkennen, daß Abgeschlossenheit bezüglich $\circ$ vorliegt, also eine Struktur gebildet wird.

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2

Tabelle 2

Eine Struktur, die in einer anderen enthalten ist, nennt man eine Unterstruktur. Somit ist die Drehstruktur des Quadrats eine Unterstruktur der gesamten Symmetriestruktur $\mathcal{D}_4$, im folgenden kurz Quadratstruktur genannt. Wir wollen nun weitere Unterstrukturen aufsuchen. Dazu prüfen wir an Hand von Tabelle 1 nach, aus welchen Teilmengen die Verknüpfung $\circ$ nicht herausführt. Das ist z. B. der Fall für $\{d_0, d_2, u_1, u_2\}$ und $\{d_0, d_2, u_3, u_4\}$. Wir können diese Feststellung ohne Schwierigkeit nachprüfen, wenn

wir in Tabelle 1 alle Spalten und Zeilen streichen, die jeweils zu den übrigen Elementen gehören.

Es ergibt sich dann

					bzw.				
$\circ$	d_0	d_2	u_1	u_2	$\circ$	d_0	d_2	u_3	u_4
d_0	d_0	d_2	u_1	u_2	d_0	d_0	d_2	u_3	u_4
d_2	d_2	d_0	u_2	u_1	d_2	d_2	d_0	u_4	u_3
u_1	u_1	u_2	d_0	d_2	u_3	u_3	u_4	d_0	d_2
u_2	u_2	u_1	d_2	d_0	u_4	u_4	u_3	d_2	d_0

Tabelle 3

Tabelle 4

Wir suchen nun nach Vierecken, deren Symmetriestrukturen unsere beiden neu gefundenen Unterstrukturen sind. Dazu denken wir an die geometrische Bedeutung der Elemente. Die identische Abbildung d_0 hilft uns hier nicht weiter, wohl aber d_2 , die Drehung um 2 R. Die gesuchten Vierecke kommen nach dieser Drehung (aber nicht schon bei 1 R!) mit sich zur Deckung.

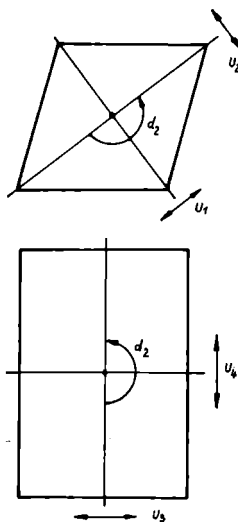
Daher müssen sie von jeder Geraden durch den Drehpunkt in zwei gleichsinnig kongruente Teilfiguren zerlegt werden, insbesondere durch die Diagonalen und Mittellinien. Im Fall der Tabelle 3 ist die gesuchte Figur um die Diagonalen umklappbar, bei Tabelle 4 um die Mittellinien.

Ersteres ist erfüllt für den Rhombus, das zweite für das Rechteck (siehe Bild 3).

(Überzeugt euch davon, daß diese beiden Figuren keine weiteren Deckabbildungen besitzen, sofern sie nicht gleichzeitig auch Quadrate sind!)

Wir haben also mit Tabelle 3 bzw. Tabelle 4 die Rhombus- bzw. die Rechtecksstruktur erfaßt.

Bild 5



Die Tatsache, daß sowohl die Rhombus- als auch die Rechtecksstruktur Unterstrukturen der Quadratstruktur sind, ist übrigens die algebraische Widerspiegelung der Eigenschaft des Quadrats, Rhombus und Rechteck zugleich zu sein.

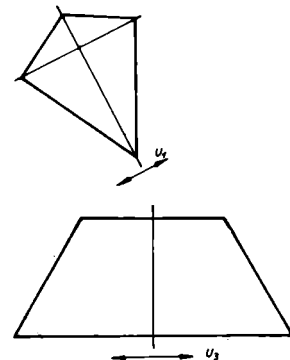
Bemerkung: Beachtet, daß wir ausdrücklich Vierecke suchen wollten (mit Symmetriestrukturen, die durch Tabelle 3 und Tabelle 4 angegeben sind)! Lassen wir offen, um welche

Art von Figur es sich handeln soll, dann haben wir wieder unendlich viele Möglichkeiten.

Aufgabe 2: Man finde andere Figuren mit derselben Symmetriestruktur wie Rhombus und Rechteck. (Hinweis: Berücksichtigt dazu die Bemerkungen nach Aufgabe 1, und seht euch zur Anregung Bild 8 an!)

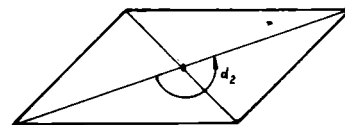
Wir fahren nun fort mit der Suche nach Unterstrukturen von $\mathcal{D}_4$ und erkennen unschwer, daß jede Umklappung u_i ($i=1, 2, 3, 4$) zusammen mit d_0 eine Unterstruktur bildet. Dazu brauchen wir nur zu bedenken, daß stets $u_i \circ u_i = d_0$ gilt. Ist u_1 Umklappung um eine Diagonale (also u_1 oder u_2), dann können wir diese Unterstruktur einem Drachenviereck, sonst (also für u_3 oder u_4) einem gleichschenkligen Trapez zuordnen (Bild 6).

Bild 6



Die Drachenstruktur ist Unterstruktur der Rhombusstruktur (siehe Tabelle 3), d. h., jeder Rhombus ist Drachenviereck. Entsprechendes gilt für Rechteck und gleichschenkliges Trapez. Es ist aber z. B. bei dieser Systematisierung der Rhombus kein Trapez. Vergleicht hierzu die Übersicht „Arten der Vierecke“ im Lehrbuch Klasse 6! Welches Ordnungsprinzip wird dort befolgt?

Bild 7



Auch die beiden Drehungen d_0 und d_2 bilden eine Unterstruktur von $\mathcal{D}_4$. Man sieht das am besten aus einer der Tabellen 3 oder 4. Das zu dieser Symmetriestruktur gehörige Viereck ist das Parallelogramm (wenn es nicht zugleich Rechteck oder Rhombus ist – siehe Bild 7), da es aus gleichsinnig kongruenten Teildreiecken besteht, aber keine Symmetrieachsen hat (Begründung?).

Wir wollen uns nun fragen, ob jede beliebige Unterstruktur von $\mathcal{D}_4$ Symmetriestruktur einer Figur ist. Dazu verschaffen wir uns zunächst einen vollständigen Überblick über alle möglichen Unterstrukturen. Entsprechend unseren Tabellen 2, 3 und 4 stellen wir fest, daß es (wenigstens) 3 Unterstrukturen mit 4 Elementen gibt, nämlich die Drehstruktur, die Rhombus- und die Rechtecksstruktur. Die erste enthält die vier möglichen Drehungen,

die zweite ebenso wie die dritte 2 Drehungen (d_0, d_2) und 2 Umklappungen, wobei die Umklappungen beide entweder um die Diagonalen oder die Mittellinien erfolgen. Eine Umklappung um eine Diagonale u_1 oder u_2 in Verbindung mit einer Umklappung um eine Mittellinie (u_3 oder u_4) kann hierbei nicht auftreten, da (siehe Tabelle 1) etwa $u_3 \circ u_1 = d_1$ schon herausführt.

Kann es noch andere Unterstrukturen mit 4 Elementen geben? Diese müßten dann 1 Drehung (das ist dann notwendigerweise die identische Abbildung d_0) und 3 Umklappungen oder 3 Drehungen und 1 Umklappung enthalten. Wir wählen als Beispiele die Mengen $M_1 = \{d_0, u_1, u_2, u_3\}$ und $M_2 = \{d_0, d_1, d_2, u_1\}$.

Im ersten Fall erkennt man mit Hilfe von Tabelle 1, daß wegen $u_1 \circ u_2 = d_2$ ein weiteres Element entsteht, um das M_1 mindestens erweitert werden müßte, damit Abgeschlossenheit bzgl. $\circ$ vorliegt, wie das bei einer Unterstruktur gefordert wird. Im zweiten Fall wäre etwa $d_1 \circ u_1 = u_3$, und wieder führt die Anwendung der Operation aus der gegebenen Menge M_2 heraus. Durch gleichartige Überlegungen lassen sich auch alle anderen Vierermengen ausscheiden. Damit ist klar: Es gibt nur die drei schon angegebenen Unterstrukturen mit 4 Elementen, nämlich die Drehstruktur, die Rhombus- und die Rechtecksstruktur.

Man kann die obige Überlegung aber noch weiterführen und zeigen, daß keine Unterstrukturen mit mehr als 4 Elementen auftreten. Der Tabelle 1 entnimmt man:

Das Vorkommen von 4 Umklappungen zieht das Auftreten aller 4 Drehungen nach sich. Also könnten höchstens 3 Umklappungen vorkommen. Drei Umklappungen und (mindestens) 2 Drehungen erzwingen aber stets die vierte Umklappung und damit auch alle 4 Drehungen.

Bleibt der Fall von 2 Umklappungen und (mindestens) 3 Drehungen. Mit 3 Drehungen kommt aber stets auch die vierte Drehung vor, und 4 Drehungen und 1 Umklappung liefern bereits alle Elemente der $\mathcal{D}_4$.

Also kann eine von $\mathcal{D}_4$ verschiedene Unterstruktur von $\mathcal{D}_4$ höchstens 4 Elemente enthalten.

Die Unterstrukturen mit 2 Elementen haben wir bereits alle angegeben. Es gibt nämlich außer diesen 5 keine weiteren. Denn sie können mit d_0 nur eine Drehung oder eine Umklappung aufweisen. Die Drehung kann nur d_2 sein, weil mit d_1 auch $d_1 \circ d_1 = d_2$ und $d_2 \circ d_1 = d_3$, also die ganze Drehstruktur vorhanden wäre.

Dasselbe gilt auch für d_3 . Hingegen kommt jede der 4 Umklappungen u_i wegen $u_1 \circ u_i = d_0$ wirklich in Frage.

Es verbleibt noch zu untersuchen, ob Unterstrukturen mit 3 Elementen existieren. Dies können nicht nur Drehungen sein, denn mit

drei von ihnen kommt auch die vierte vor. Also müssen Umklappungen mit vorkommen. Für jede Umklappung u_i gilt aber $u_i \circ u_i = d_0$, d. h., es könnten höchstens 2 Umklappungen sein. Aus 2 Umklappungen u_i, u_j erhält man aber (mindestens) zwei Drehungen $u_i \circ u_i = d_0$ und $u_i \circ u_j \neq d_0$, also auch mehr als 3 Elemente. Im letzten verbleibenden Fall einer Umklappung u_i (und zweier Drehungen d_0, d_j) ist dann aber $u_i \circ d_j$ eine weitere Umklappung ($\neq u_i$).

Unterstrukturen mit 3 Elementen kann es also nicht geben. Somit haben wir durch die Angabe der 5 Unterstrukturen mit 2 und der 3 Unterstrukturen mit 4 Elementen in der Tat alle Unterstrukturen vollständig aufgezählt.

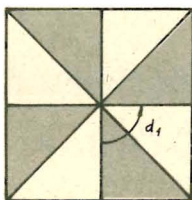
Mit einer Ausnahme, nämlich der Drehstruktur, haben wir auch schon Figuren, und zwar Vierecke, angegeben, deren Symmetriestrukturen diese Unterstrukturen sind.

Gibt es auch ein Viereck, dessen Symmetriestruktur nur aus den 4 Drehungen besteht? Die Antwort lautet: nein.

Zum Beweis dieser Feststellung erinnern wir uns, daß die Drehung d_1 wegen $d_1 \circ d_1 = d_2$, $d_2 \circ d_1 = d_3$ und $d_3 \circ d_1 = d_0$ die ganze Drehstruktur erzeugt. Das hat zur Folge, daß das gesuchte Viereck bei fortlaufender Drehung um jeweils $\frac{1}{4}$ R stets mit sich selbst zur Deckung kommen muß. Dann kann es sich aber offenbar nur um das Quadrat handeln. Dessen Symmetriestruktur $\mathcal{D}_4$ hat aber 8 Elemente, 4 Drehungen und 4 Umklappungen.

Eine Figur, deren Symmetriestruktur gerade die Drehstruktur des Quadrats ist, kann also kein Viereck sein. Eine mögliche Figur ist z. B. die „Windmühle“ Bild 8.

Bild 8

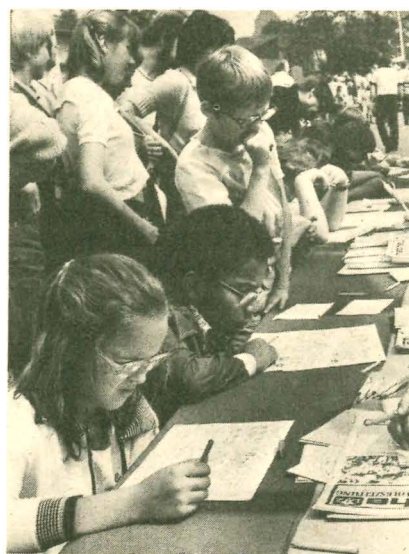
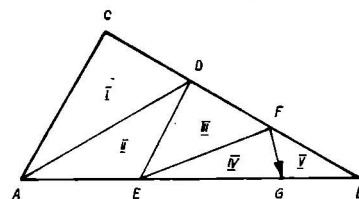


H. Kohlhasse

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Bruno de Finetti

Universität Rom

▲ 2293 ▲ Ein gegebenes Dreieck ABC ist mittels einer Zickzacklinie in fünf Teile mit gleichem Flächeninhalt zu zerlegen.



Mathematik-Olympiade der Horte in Bad Langensalza, siehe S. 15



Wissenschaftler und Revolutionär

Karl Marx • 1818 bis 1883

Über den Sinn des technischen Fortschritts

„In der Mitte des Arbeitszimmers stand ein einfacher kleiner Schreibtisch mit einem hölzernen Lehnstuhl, dem Feuer gegenüber befand sich ein altes Ledersofa... An den Wänden standen Schränke oder Regale, gefüllt mit Büchern und Manuskripten... Auf dem Kamin standen Fotos seiner Frau, der Töchter und der besten Freunde, Friedrich Engels und Wilhelm Wolff.“

Diese Beschreibung finden wir in einer Biographie über Karl Marx, den großen Wissenschaftler und Revolutionär. Am 14. März 1883 jährt sich sein Todestag. Engels sagte einmal über seinen Freund Marx: Er ist „der Mann, der den Sozialismus und damit der ganzen Arbeiterbewegung unserer Tage zuerst eine wissenschaftliche Grundlage gegeben hat“. Sein ganzes Leben widmete Karl Marx dieser wissenschaftlichen Begründung, der Lehre von der Entwicklung der Gesellschaft, die er uns vor allem in seinem größten Werk „Das Kapital“ gab.

Über 1500 Bücher studierte er, lernte mehr als ein Dutzend Sprachen beherrschen, beschäftigte sich mit der Geschichte, Ökonomie, Physik, Chemie und Mathematik. Dennoch wäre es falsch zu sagen, Marx hätte nur in seiner Studierstube gesessen.

Was ihn auszeichnete? Er war Wissenschaftler und Revolutionär in einem! Stets eng verbunden mit dem Kampf der Arbeiterklasse, sah er seine Aufgabe darin, sagt Engels über ihn: „Mitzuwirken... am Sturz der kapitalistischen Gesellschaft, mitzuwirken an der Befreiung des modernen Proletariats, dem er zuerst das Bewußtsein (Wissen) der Bedingungen seiner Emanzipation (Befreiung) gegeben hatte. Das war sein wirklicher Lebenslauf. Der Kampf war sein Element.“

Dieser Kampf wurde gekrönt durch die Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung. So fand Karl Marx heraus, daß das grundlegende Entwicklungsgesetz das der Übereinstimmung von Produktivkräften und Produktionsverhältnissen ist. Wobei wir unter Produktivkräften all jene Kräfte verstehen, mit denen der Mensch die Natur nutzbar macht. Angefangen von den ersten primitiven Werkzeugen der Jäger und

Sammler in der Urgesellschaft können wir erkennen, daß sich die Produktivkräfte rasch entwickelten. Neue Arbeitsinstrumente wurden entwickelt, die es ermöglichten, neue Formen der Bodenbearbeitung zu finden. Heute dagegen arbeiten wir auf unseren Feldern mit modernster Landtechnik.

Der Mensch lebt nicht als Einzelwesen, er ist ein Teil der Gesellschaft. So geht er bestimmte Verhältnisse zu anderen Menschen ein. Marx erkannte, daß die grundlegendsten Verhältnisse die Produktionsverhältnisse sind. Sie widerspiegeln, in wessen Händen sich die Produktionsmittel, z. B. die Maschinen, befinden, wer sie besitzt, wie sie eingesetzt und wie die fertigen Produkte verteilt werden. Daraus folgt, daß die Produktivkräfte und die Produktionsverhältnisse nicht losgelöst voneinander bestehen, sondern in enger Wechselwirkung untereinander stehen. Welche Rolle nun spielt in diesem Zusammenhang die Technik? Und, was hatte Marx mit der Technik im Sinn? Im Europa des 19. Jahrhunderts war das Tempo der gesellschaftlichen Entwicklung in den einzelnen

Staaten sehr unterschiedlich. Den Höchststand in der kapitalistischen Entwicklung hatte England erreicht. Dort arbeitete man bereits an der von dem englischen Weber James Hargreaves erfundenen und nach seiner Tochter Jenny benannten Spinnmaschine sowie an mechanischen Webstühlen. In England wurde 1807 erstmals durch Fulton die Dampfkraft in der Flußschifffahrt nutzbar gemacht und somit ein neues Tor für die Entwicklung des Verkehrswesens aufgestoßen. All diese Entdeckungen und Erfindungen führten zur Entwicklung neuer Produktivkräfte, die nun den endgültigen Übergang von der Manufaktur, dem Handbetrieb zur industriellen Großproduktion möglich und notwendig machten. An die Stelle von einzelnen Werkzeugen traten Maschinen. An die Stelle von Manufakturarbeitern trat das Industrieproletariat. Ihm gegenüber – als Eigentümer an den Produktionsmitteln – stand die Bourgeoisie.

Worin lag die eigentliche Ursache und der Zweck für den Einsatz der modernen Maschinen? In der Erleichterung der schweren körperlichen Arbeit für die Werktätigen etwa? Karl Marx beantwortet uns diese Frage im „Kapital“: „Gleich jeder anderen Entwicklung der Produktivkraft der Arbeit soll sie (die Technik) die Waren bewohlfleieren (verbessern) und den Teil des Arbeitstages, den der Arbeiter für sich selbst braucht, verkürzen, um den anderen Teil seines Arbeitstages, den er dem Kapitalisten umsonst gibt, zu verlängern. Sie (die Technik) ist Mittel zur Produktion von Mehrwert.“

Darin allein also besteht der Zweck der vom Kapitalisten eingesetzten Technik! Eine moderne Maschine ist also unter kapitalistischen Bedingungen nicht nur eine Maschine, sondern ist zugleich Kapital, das heißt, ein Instrument zur Ausbeutung und Unterdrückung. Die Einführung der neuen Technik in die Produktion hatte demzufolge unmittelbare Wirkung auf die Lage der Arbeiter. Wurden früher vorwiegend männliche Arbeitskräfte eingesetzt, ermöglichte der Einsatz der Technik dem Ausbeuter nun, auch körperlich schwächere Menschen in die Produktion einzubeziehen. „Weiber- und Kinderarbeit war daher das erste Wort der kapitalistischen Anwendung der Maschinerie“ – stellte Marx fest. So wurden nun auch Frauen und Kinder zu billigen Arbeitskräften für den Kapitalisten. Eine Folge war die hohe Sterblichkeit unter den Arbeiterkindern. Wer von euch das Buch „Mohr und die Raben von London“ kennt, der weiß, wie hart Frauen, Kinder und Jugendliche arbeiten mußten, welch kärgliches Leben sie führten. Vielleicht wird auch mancher von euch sagen: Das ist über 100 Jahre her, seitdem hat sich so viel verändert. Sicher! Aber, wie sieht es heute, wie sieht es in der gegenwärtigen Entwicklung aus? Welchen Nutzen bringt der Einsatz von Wissenschaft und Technik heute,



Denn der wichtigste Bereich der Ausnutzung von Wissenschaft und Technik im Imperialismus ist heute die Rüstung. Uns ist das Resultat dieses Strebens bekannt: zwei Weltkriege in diesem Jahrhundert, Abwurf der ersten Atombombe über Hiroshima ... und heute, Entwicklung und Einsatzplanung für die Neutronenbombe. Wo wird der Mißbrauch von naturwissenschaftlich-technischen Erkenntnissen deutlicher als an diesen un menschlichen Tatsachen?!



Natürlich ist das Lernen eure erste Pflicht. Ein gutes fachliches Wissen muß man haben, wenn man seinen Mann im Arbeitsleben stehen will. Reicht das allein schon aus? Es gehört noch mehr dazu: zum Beispiel kameradschaftliches, stets verantwortungsvolles Verhalten, gegenseitige Achtung und Hilfe anderen gegenüber – heute bei euch in der Schule, morgen dann im Betrieb oder in einem Forschungsinstitut. Denn ihr werdet ja die zukünftigen Arbeiter, Wissenschaftler und Techniker sein! Überprüft euch einmal; das eigene bewußte Verhalten spielt eine wesentliche Rolle bei der Lösung wissenschaftlich-technischer Probleme.

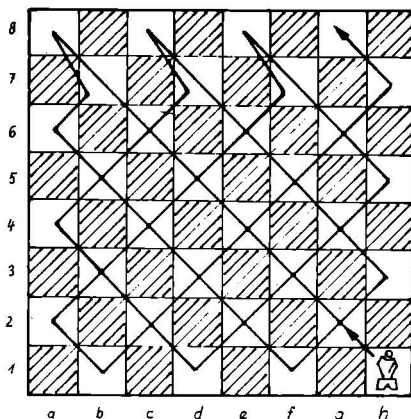
Das Ziehen mit einer Schachfigur auf dem leeren Schachbrett kann natürlich nicht eine spannende Schachpartie oder ein kniffliges Schachproblem ersetzen, aber dennoch schult das Bewegen einer Figur kombinatorisches Denken und schöpferische Phantasie. Es erschließt viele Spielmöglichkeiten auf dem Brett. Brauchen König und Springer jeweils 64 Züge, um über alle Felder des Schachbrettes in Folge zu ziehen, so ist die Anzahl der Züge bei den langschrittigen Figuren Turm und Dame in dieser Hinsicht wesentlich geringer. Der Turm zieht in 16 Zügen über

alle 64 Felder des Schachbrettes (siehe Diagramm 1).

Die Dame, die bekanntlich gerade und diagonal ziehen darf, ist mit nur 14 Zügen noch schneller (siehe Diagramm 2).

Auch die „Schnelligkeit“ des Läufers wollen wir betrachten. Er kann ja nur diagonal ziehen, beliebig weit und auch in jede Richtung, doch darf er nur nicht die Farbe der Felder wechseln – also maximal 32 weiße oder 32 schwarze Felder sind ihm zugänglich. Diagramm 3 zeigt uns, daß der Läufer in 16 Zügen die 32 Felder „durchheilen“ kann.

Diagramm 3



Aufgabe soll es sein, eine 64zügige Marschroute für den König, der nach der Seite, vorwärts, rückwärts oder diagonal jeweils nur ein Feld von seinem Standort aus weiterziehen kann, zu finden! Auf dieser Marschroute, die auf dem Feld a8 beginnt, soll er über alle 64 Felder des Schachbrettes ziehen. Als Bedingung gilt dabei, daß die 28 Randfelder des Brettes in Reihenfolge (Uhrzeigerichtung) beschriftet werden! Der König kann z. B. erst auf das Feld h8 ziehen, wenn er zuvor der Reihenfolge nach, die nicht unmittelbar zu sein braucht, die Felder b8, c8, d8, e8, f8 und g8 schon betreten hatte.

Hängepartie



Wunderkind



José Luis Massera

Mathematiker und Kämpfer
für Demokratie und Freiheit



In dem unweit der uruguayischen Hauptstadt gelegenen Militärgefängnis „Libertad“ gibt es unter den 1300 dort eingekerkerten politischen Gefangenen einen, der auf seiner Gefängniskleidung die Nummer 2117 trägt. Es ist der weltbekannte Mathematiker Luis José Massera. Das in Uruguay herrschende Regime ließ Massera von einem Militärtribunal wegen „Subversion“ zu zwanzig Jahren Haft verurteilen. Bereits sieben Jahre schmachtet der 66jährige Patriot in einer düsteren Zelle. Nach seiner Festnahme wurde er monatelang schwer gefoltert und leidet gegenwärtig an schweren Kreislaufstörungen, die nicht behandelt werden und sein Leben stark gefährden. Massera ist Wissenschaftler und Kämpfer für eine bessere Welt, für eine Welt, in der Frieden herrscht und die Menschen glücklich sind. Massera leistete einen hervorragenden Beitrag in seiner fast 40jährigen Lehrtätigkeit an der Universität Montevideos. Von Bedeutung sind seine Forschungen, insbesondere die der *Theorie der Differentialgleichungen*. Darüber schrieb er ein bei seinen Kollegen in aller Welt hochgeschätztes Buch *Linear Differential Equations and Function Spaces*, das in der UdSSR und den USA verlegt wurde.

Massera wurde nach seiner Inhaftierung mit der Ehrendoktorwürde der Universitäten von Rom, Berlin (DDR), Nizza, Quito (Ecuador) und Puebla (Mexiko) geehrt. Von dem aufrechten Patrioten und Kommunisten sagte der italienische Wissenschaftler Professor Gaetano Fichera: „Massera, einer der größten uruguayischen Wissenschaftler mit hohem internationalen Ansehen, hätte von der Regierung seines Landes alle Ehrungen und Anerkennungen erhalten, wenn er nur seine politischen Prinzipien aufgegeben hätte. Doch darauf ließ er sich nicht ein, er wählte den Weg des Opfers.“

Massera steht seit seiner Jugend im aktiven politischen Leben seines Landes. Hervorragende Stationen seiner politischen Aktivität sind sein leidenschaftliches Wirken als Sekretär der uruguayischen Solidaritätsbewegung „Acción Antinazi“, während des zweiten Weltkrieges, als die Nazis die Sowjetunion überfielen. Er war zugegen, als in Paris die Weltfriedensbewegung gegründet wurde. Im Jahre 1942 trat Massera der Kommunisti-

schen Partei Uruguays bei, wurde dann Mitglied deren Zentralkomitees und schrieb schöpferische Werke, die als bedeutende Beiträge zur Anwendung des Marxismus-Leninismus auf die uruguayischen Gegebenheiten gewertet werden. Viele Jahre vertrat der Wissenschaftler die Werktätigen Montevideos – der Hauptstadt des Landes – im Parlament. Wo konnte Massera anders stehen, als im Juni 1973 reaktionäre Militärs die Macht ergriffen und die demokratischen Erregenschaften zerschlugen, als an der Seite seines Volkes. Als er verhaftet wurde, bekleidete er höchste Funktionen im illegalen Kampf seiner Partei.



Für seine Freiheit aus dem Kerker des uruguayischen Regimes zu kämpfen, sein Leben zu retten, ist Ehrenpflicht der solidarischen Handlung aller fortschrittlichen Menschen.

Willi Israel

Zitiert: Der uruguayische Sänger Daniel Viglietti sagte: „Es gibt ein Schweigen, das einem Mord gleichkommt. Es darf nicht geschehen, daß die Wissenschaftler, die Demokraten schweigen und sich schrittweise daran gewöhnen, daß ein Gelehrter im Kerker stirbt.“

So haben mehr als 100 Teilnehmer der 21. Konferenz für *Physik der Hohen Energien* in Paris sowie eines Kongresses für *Mathematische Analysen*, der in Brasilien stattfand, sich für die Freiheit Masseras ausgesprochen.

Die Kreiszahl π

Zum 100. Geburtstag
des Beweises
der Transzendenz von π

Teil 2

Aus der Geschichte der Kreismessung

Den Satz B (siehe Heft 6/82) hat wohl Hippokrates von Chios, der berühmteste griechische Geometer des 5. Jahrhunderts v. u. Z., zuerst ausgesprochen. Einen Beweis findet man im 12. Kapitel der „Elemente“ des Euklid (4. Jh. v. u. Z.). Er stammt von Eudoxos von Knidos (4. Jh. v. u. Z.).

Die Glanzleistung der Antike hinsichtlich des Kreises ist die Schrift „Kreismessung“ des Archimedes (3. Jh. v. u. Z.).

Archimedes war der erste, der es unternahm, den Umfang des Kreises mit seinem Durchmesser zu vergleichen. Er bewies zunächst den Satz C indirekt, indem er mittels dem Kreis eingeschriebener bzw. umschriebener Vielecke mit hinreichend großer Seitenzahl zeigt, daß die Annahme, der Kreis sei größer bzw. kleiner als das in Rede stehende Dreieck, jedesmal zu einem Widerspruch führt. Archimedes zeigte dann, daß der Flächeninhalt des Kreises sich zum Quadrat seines Durchmessers beinahe wie 11 : 14 verhält. Hierbei stützte er sich bereits auf seinen dritten Satz:

„Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß wie der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundseibenzigstel des Durchmessers“, also

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

Archimedes fand diesen Satz, indem er nacheinander die Seiten und den Umfang des ein- und umschriebenen regelmäßigen Sechsecks, Zwölfecks, 24ecks, 48ecks und des 96ecks bestimmte. Ausgangspunkt war der zu große Umfang $q_1 = 4r/\sqrt{3}$ des um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Sechsecks und der zu kleine Umfang $p_0 = 3r/\sqrt{3}$ des in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks (bzw. der Umfang $p_1 = 6r$ des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Sechsecks). Sowohl die von Archimedes verwendeten Ausgangswerte

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

als auch die schrittweise bis zum 96eck weitergeführten Ergebnisse der Zahlenrechnung erscheinen in der „Kreismessung“ ohne Begründung.

Apollonius von Perge (3. Jh. v. u. Z.) soll das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zum Durchmesser schärfer als Archimedes angegeben haben. Doch ist seine Schrift darüber verlorengegangen.

Ende des 16. Jahrhunderts berechnete François Viète (oder Vieta, 1540 bis 1603) die Seiten eines einem Kreis eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks von $393216 (= 6 \cdot 2^{16})$ Seiten und gab π auf neun Dezimalstellen genau an. Vieta fand auch einen Ausdruck für die Fläche des Kreises durch ein Produkt von einer unendlichen Anzahl Faktoren. Der Kreis mit dem Radius 1 hat den Flächeninhalt

$$(\pi =) \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}}\dots}$$

Ludolph von Ceulen (1539 bis 1610) konnte die oft nach ihm bezeichnete Ludolphsche Zahl π mit bewunderungswürdiger Geduld und Ausdauer bis auf 32 Stellen genau berechnen:

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50...

Die archimedische Methode zur Berechnung der Zahl π wurde 1654 von Christian Huygens (1629 bis 1695) wesentlich verbessert. So erhielt Huygens bei Benutzung eines regelmäßigen Sechzecks einen bis auf neun Dezimalstellen genauen Wert von π , während nach der Archimedischen Methode das 96eck nötig ist, um zwei genaue Dezimalstellen zu erhalten. (Diese gewann Huygens bereits bei Benutzung eines Zwölfecks.)

In der Folgezeit wurden die verschiedensten solchen Darstellungen von π gefunden, die eine unendliche Anzahl von Operationen (unendliche Produkte, unendliche Summen, unendliche Kettenbrüche) enthalten. Führt man jeweils nur eine endliche Anzahl von Operationen aus, so erhält man gute Näherungswerte für π .

Der englische Mathematiker John Wallis (1616 bis 1703) fand 1659 das unendliche Produkt

$$\pi = 2 \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots} \right).$$

Der Universalgelehrte Leibniz gab 1673 die unendliche Reihe

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

an. Dies bedeutet folgendes: Der Flächeninhalt π eines Kreises mit dem Radius 1 wird gefunden, wenn man von dem Quadrat seines Durchmessers ($2^2 = 4$) ein Drittel wegnimmt, sodann ein Fünftel desselben Quadrats wieder hinzufügt, hierauf wieder ein Siebentel wegnimmt, sodann ein Neuntel desselben Quadrats wieder hinzufügt und hierauf nacheinander alle aufeinanderfolgenden ungeraden Teile dieses Quadrats abwechselnd subtrahiert oder addiert. Die Anzahl der Teile, durch deren Addition und Subtraktion der Flächeninhalt zusammen-

gesetzt wird, ist aber unendlich. Nach endlich vielen Schritten erhält man nur Näherungswerte für den gesuchten Flächeninhalt π .

Die bisherigen Erkenntnisse ließen den Gedanken aufkommen, daß Umfang und Durchmesser eines Kreises inkommensurabel sein müßten.

Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) gab 1766 zunächst 27 teilweise sehr große (Näherungs-)Brüche für das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser an, wie $22:7$, $333:106$, $355:113$, $103993:33102$, aber auch $1019514486099146:324521540032945$ (der letzte Quotient gibt die Ludolphsche Zahl bis auf die 25te Dezimalstelle!).

Lambert betonte jedoch, daß man mit der Aufsuchung weiterer solcher Brüche unnötig seine Zeit verliere. Es gibt keinen Bruch, der das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser exakt ausdrückt. Die Zahl π ist irrational. Die Irrationalität auch von π^2 bewies später der französische Mathematiker Andrien-Marie Legendre (1752 bis 1833).

Sowohl Lambert als auch Euler, aber auch Legendre, sprachen bereits die Vermutung aus, daß die Zahl π nicht zu den algebraischen Irrationalitäten gehört, d. h., daß sie nicht Wurzel sein kann einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind.

Auf Grund einer eingehenden Untersuchung der Eigenschaften der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gelang es im Jahre 1873 Hermite, die Transzendenz von e zu beweisen. Im Jahre 1882 bewies dann Lindemann, indem er sich auf die Hermite'schen Untersuchungen stützte und die Eulersche Gleichung $e^{\pi i} + 1 = 0$ benutzte, daß auch π eine transzendente Zahl ist.

H. Pieper

$$83 = (1 + 9) \cdot 8 + 3$$

$0 = 1 - 9 + 8 : 3$	$20 = 1 \cdot 9 + 8 + \dots$
$1 = -1 - 9 + 8 + 3$	$25 = 1 + (9 : 8) : 3$
$2 = -1 \cdot 9 + 8 + 3$	$31 = 1 + \sqrt{9} \cdot 8 + 3!$
$3 = 1 - 9 + 8 + 3$	$40 = (-1 + 9) \cdot (8 - 3)$
$4 = 1 \cdot 9 - 8 + 3$	$50 = (1 + 9) \cdot (8 - 3)$
$5 = 1 + 9 - 8 + 3$	$53 = -1 + (9! : 8!) \cdot 3!$
$6 = (1 + 9 + 8) : 3$	$60 = (-1 + \sqrt{9} + 8) \cdot 3!$
$7 = \sqrt{-1 + 9 + 8} + 3$	$63 = -1 + (-\sqrt{9!} + 8)^{3!}$
$8 = 19 - 8 - 3$	$66 = 198 : 3$
$9 = (19 + 8) : 3$	$70 = 1 + 9 \cdot 8 - 3$
$10 = -1^9 + 8 + 3$	$80 = -1 \cdot \sqrt{9} + 83$
$11 = 1^9 \cdot (8 + 3)$	$82 = -1^9 + 83$
$12 = 1^9 + 8 + 3$	$90 = 19 + 8 + 3$
$13 = -1 + 9 + 8 - 3$	$100 = 1 + 9 \cdot (8 + 3)$
$14 = 19 - 8 + 3$	$101 = 1 \cdot 98 + 3$
$15 = 1 + 9 + 8 - 3$	$102 = 19 + 83$
	$= 1 + 98 + 3$

Autoren sind Schüler (alpha-Leser) einer Mathematik-AG des Bundesgymnasiums XIV, Wien, unter Leitung von Prof. OStR Dr. H. Vohla. (Oben: Auswahl aus der Darstellung der Zahlen von 0 bis 102.)

Was ist Rechnungsführung und Statistik?

Es riecht ein bißchen nach Mathematik, ein bißchen nach Ökonomie, vor allem aber nach viel Zahlen, Tabellen, Grafiken. Viele Leute haben direkt oder indirekt damit zu tun, ohne es zu wissen.

Dazu gehören nämlich der Kassenzettel für einen Einkauf ebenso wie die Berichte der Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik über die Erfüllung des Volkswirtschaftsplanes, die Rechnung für einen Verkauf, der Nachweis des Nutzens für einen Industrieroboter, die Ermittlung der Kosten für Erzeugnisse oder die Berechnung des Nationaleinkommens.

Solche unterschiedlichen ökonomischen Vorgänge haben eines gemeinsam: Sie zeigen, wie sich das gesellschaftliche Eigentum verändert, entwickelt, reproduziert. Genaue, detaillierte Kenntnisse darüber sind für die Planung der sozialistischen Entwicklung sehr wichtig, denn nur was erarbeitet wurde, kann verteilt werden. Schon Karl Marx verwies darauf, daß die „Buchführung ... notwendiger bei gemeinschaftlicher Produktion als bei kapitalistischer Produktion“ ist. Marx meinte hier eine gesellschaftliche Buchführung. In der DDR wird sie als *Rechnungsführung und Statistik* bezeichnet.

Es gibt sie überall dort, wo mit gesellschaftlichem Eigentum gearbeitet wird, also in allen volkseigenen und genossenschaftlichen Betrieben und Einrichtungen sowie in allen Institutionen der Bezirke, Kreise und Gemeinden.

In Rechnungsführung und Statistik kommt es nicht nur auf das Erfassen von Zahlen und Daten an, sondern vor allem auf das Aufdecken der ökonomischen Zusammenhänge und auf die erforderlichen Schlußfolgerungen. Dazu ist ein umfangreiches politisches und ökonomisches Wissen notwendig.

Die vierjährige Hochschulausbildung in der Fachrichtung Rechnungsführung und Statistik umfaßt neben dem wirtschaftswissenschaftlichen Grundstudium besonders Methoden und Verfahren der Erfassung, Verarbeitung und Analyse von ökonomischen Informationen unter den künftigen Bedingungen der elektronischen Datenverarbeitung.

Auch die Ausbildung in Mathematik hat einen beachtlichen Stellenwert. Dabei stehen Grundlagen und Methoden für die Anwen-

dung von mathematisch-statistischen Verfahren in der Ökonomie im Vordergrund: lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme, Matrizenrechnung), Analysis, lineare Optimierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vertiefungen gibt es z. B. hinsichtlich Logarithmus- und Exponentialfunktion, Transportoptimierung, Modellierung ökonomischer Prozesse (z. B. Verflechtungsmodelle für Kosten) und ausgewählte Gebiete der mathematischen Statistik (Regression, Testverfahren).

Darauf bauen die Fächer „Allgemeine Statistik“ (u. a. die statistische Untersuchung von Niveau, Struktur, Entwicklung und Zusammenhängen ökonomischer Erscheinungen) und „Wirtschaftsstatistik“ (enthält z. B. Bevölkerungsstatistik einschl. Arbeitskräftestatistik, Produktionsstatistik, Grundmittel- und Investitionsstatistik) auf, in denen die mathematischen Methoden und ökonomischen Erscheinungen in Zusammenhang mit Rechnungsführung und Statistik gebracht werden.

Aber auch für andere Fächer wie „Leitung“, „Sozialistische Betriebswirtschaft“ und „Sozialistische Volkswirtschaft“ bekommen mathematisch-statistische Methoden zunehmende Bedeutung.

Wen also die Mathematik in ihrer Anwendung interessiert, ohne daß er Mathematik studieren will, findet in Rechnungsführung und Statistik ein weites Feld für interessante Arbeiten.

Dabei hat die Ökonomie selbstverständlich den Vorrang.

Deshalb gehören zu den Ausbildungsgebieten neben den bereits erwähnten die KostenLeistungs-Rechnung in Betrieben und Kombinat, Programmierung, moderne Analysemethoden, Planspiele, Praktika.

Der Absolvent der Fachrichtung ist ein Spezialist für ein umfassendes Informationssystem, eben Rechnungsführung und Statistik. Durch die neuen elektronischen Datenerfassungs- und -verarbeitungsgeräte werden von den Absolventen künftig auch neue Organisationslösungen gefordert.

Da Rechnungsführung und Statistik volkswirtschaftlich einheitlich organisiert ist, können die Absolventen sowohl in der Industrie als auch im Handel, im Verkehrswesen, im

Gesundheitswesen oder in anderen staatlichen Einrichtungen arbeiten. Sie können auch tätig sein in Dienststellen der Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik, in Planungsabteilungen, Organisations- und Rechenzentren der Betriebe und Kombinate sowie in den Räten der Städte, Kreise und Bezirke.

Einsatzschwerpunkte der Absolventen sind: Analyse der ökonomischen Entwicklung in Betrieben und Kombinat, Erarbeitung des Zahlenwerkes und seiner Ordnungsmäßigkeit, Einsatz der elektronischen Rechentechnik.

Ausbildungsstätte: Karl-Marx-Universität Leipzig, Sektion Wirtschaftswissenschaften.

G. Geißler



Kurzbiographie

Prof. Dr. sc. oec. Günther Geißler, geb. 1926 in Dresden

1949 nach Rückkehr aus Kriegsgefangenschaft Abitur

1949 bis 1952 Studium der Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften, speziell Finanzökonomie, an der Universität Leipzig

1954 Promotion

1956 bis 1970 als Dozent, Professor und Institutsdirektor an der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, Fakultät für Ingenieurökonomie bzw. Sektion Wirtschaftswissenschaften

1960 Habilitation an der damaligen Technischen Hochschule Dresden

1970 Umberufung an die Karl-Marx-Universität Leipzig, seit 1972 Leiter der Fachrichtung Rechnungsführung und Statistik an der Sektion Wirtschaftswissenschaften

Autor und Mitautor mehrerer Lehrbücher, Studienanleitungen und vieler Veröffentlichungen im In- und Ausland zu wissenschaftlichen Fragen von Rechnungsführung und Statistik

Beispiel 1

In einem Betrieb wurden in einem Zeitraum zum Zweck der Energieverbrauchsnormung Messungen über die hergestellte Produktion (Ursache = x) und den Produktionsverbrauch an Elektroenergie (Wirkung = y) durchgeführt. Darüber liegen folgende Daten vor:

Monat	produzierte Menge in Tausend Stück	Elektroenergieverbrauch in MW
i	x_i	y_i
1	23,0	16,8
2	24,5	17,6
3	25,0	18,1
4	24,6	17,6
5	26,0	18,0
6	27,0	19,3
7	25,8	19,3
8	24,1	17,3

Aufgaben

▲1▲ Das Zahlenmaterial ist im Koordinatensystem grafisch darzustellen. Welche Erkenntnisse sind daraus zu gewinnen?

▲2▲ Es ist eine Ausgleichsfunktion für die Abhängigkeit des Elektroenergieverbrauchs von der Produktionsmenge zu berechnen.

▲3▲ Es ist die Anpassung der berechneten Funktion an das empirische Zahlenmaterial (Ausgangsmaterial) darzustellen.

▲4▲ Es ist die Elektroenergiemenge zu bestimmen, die durchschnittlich bei einer Produktion von 26,6 Tausend Stück benötigt wird.

Dozent Dr. S. Beiersdorfer

Beispiel 2

Zur Begründung der Kennziffer Grundfondsquote

($= \frac{\text{Warenproduktion}}{\text{eingesetzte Grundmittel}}$) und zur Planung der Warenproduktion in einem Kombinat wurden in einem Zeitraum die Angaben von 10 vergleichbaren Betrieben erfaßt.

Betrieb	Warenproduktion in Tausend M	Grundmittel in Tausend M
i	y_i	x_i
1	4600	2000
2	2300	1600
3	2800	1700
4	3000	1700
5	3900	2300
6	5000	2800
7	1600	700
8	4900	2800
9	5200	2900
10	4700	2500

Aufgaben

▲1▲ Das Zahlenmaterial ist im Koordinatensystem grafisch darzustellen, die Grafik ist auszuwerten.

▲2▲ Für die Abhängigkeit der Warenproduktion von den eingesetzten Grundmitteln ist eine Ausgleichsfunktion zu berechnen.

▲3▲ Es ist die Anpassung der berechneten Funktion an das Ausgangsmaterial darzustellen.

▲4▲ Es ist die Höhe der Warenproduktion zu berechnen, die durchschnittlich bei einem Einsatz von 2600 Tausend M Grundmittel zu erwarten ist. Wie hoch ist in diesem Fall die Grundfondsquote?

Hinweise

1. Die grafische Darstellung bezieht sich auf den I. Quadranten.

2. Die Berechnung der Ausgleichsfunktion erfolgt nach dem Gaußschen Verfahren der kleinsten Summe der Abweichungsquadrate. Es werden zwei Bedingungen gestellt:

- (1) $y_i = f(x_i)$
notwendig, aber nicht hinreichend
- (2) $y_i = -f(x_i)^2 -$
hinreichend

Der entsprechend der Grafik ausgewählte Funktionstyp $f(x)$ wird in die Forderungen eingesetzt. Danach wird die Minimumsforderung (2) nach den gesuchten Parametern ($a, b, c, \dots$) partiell differenziert. Die Ableitungen werden $=0$ gesetzt, umgeformt und ergeben die Normalgleichungen, aus denen die Formeln für die Bestimmung von $a, b, c, \dots$ entwickelt werden.

Zum Beispiel bei $f(x) = a + bx$ folgen aus den partiellen Ableitungen

$\delta a / \delta x$ und $\delta b / \delta x$
schließlich die Normalgleichung:

$$\text{I. } y_i = na + b \cdot x_i$$

$$\text{II. } x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2$$

Dozent Dr. S. Beiersdorfer

► Autor des Beitrags: *Markenmotive zur Statistik* ist Dr. P. Schreiber, Universität Greifswald. Wir empfehlen sein Buch: *Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie*

Preis: 9.80 M

Bestell-Nr. 6659847

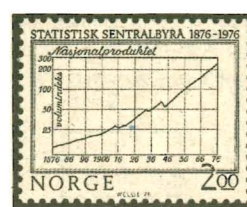
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft
Leipzig



Markenmotive zur Statistik

Die *mathematische Statistik* ist ein Teilgebiet der Mathematik, in dem unter Benutzung von Begriffen und Denkweisen der *Wahrscheinlichkeitstheorie* exakte Aussagen über die Zuverlässigkeit statistischer Ergebnisse gewonnen werden. Ihr voran geht die *beschreibende Statistik*, sie beschäftigt sich mit der Sammlung und Aufbereitung von konkretem statistischen Material. Aufbereitung umfaßt die Berechnung von Kennziffern wie Mittelwert und Streuung, die Berechnung von Gesamtsummen, Sortierung nach Merkmalen usw., aber auch die graphische Darstellung der Ergebnisse, wodurch diese oft erst für einen größeren Nutzerkreis verständlich werden. Derartige graphische Darstellungen (Kurven, Rosetten, Diagramme, sogenannte Bevölkerungsbäume, siehe die abgebildete österreichische Marke) dienen häufig als Motiv für Briefmarken. Sie veranschaulichen ökonomische und soziologische Fakten und Prozesse. Aber auch dem Einsatz der EDV für statistische Zwecke wurden schon Briefmarken gewidmet (siehe niederländische Marke zur Volkszählung 1971).

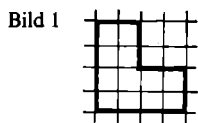
Aus neuen Aufgaben der beschreibenden Statistik erwachsen auch heute noch immer wieder Anregungen für die Mathematik.





Geometrische Plaudereien

▲1▲ Zerlege die in Bild 1 dargestellte Figur in vier zueinander kongruente Teilfiguren!



▲2▲ Zu welchem Würfel gehört das Netz (Bild 2)?

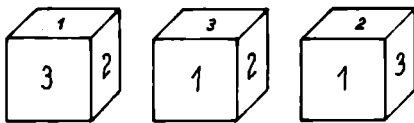
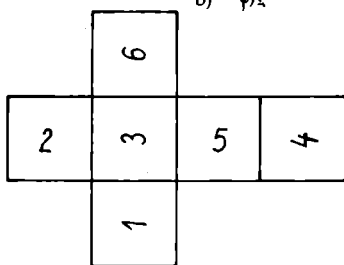
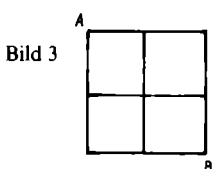


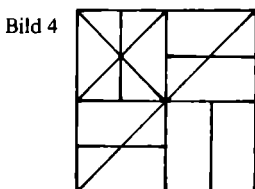
Bild 2



▲3▲ Wieviel verschiedene Wege gibt es, um in Bild 3 von Punkt A zu Punkt B zu gelangen, wenn man nur von links nach rechts und von oben nach unten die vorgezeichneten Bahnen benutzen darf?



▲4▲ Wieviel Quadrate, Rechtecke bzw. Dreiecke erkennst du in Bild 4?



▲5▲ Welche Figuren a) bis c) des Bildes 5 sind in den Figuren 1 bis 3 enthalten?

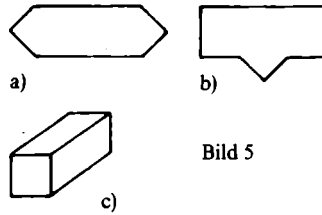
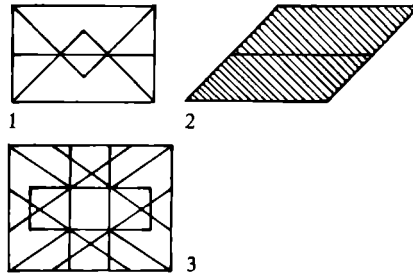
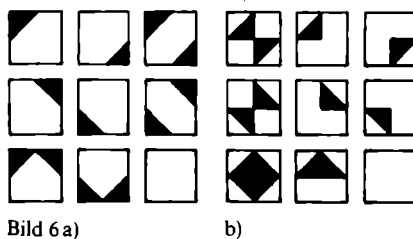


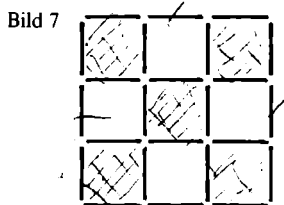
Bild 5



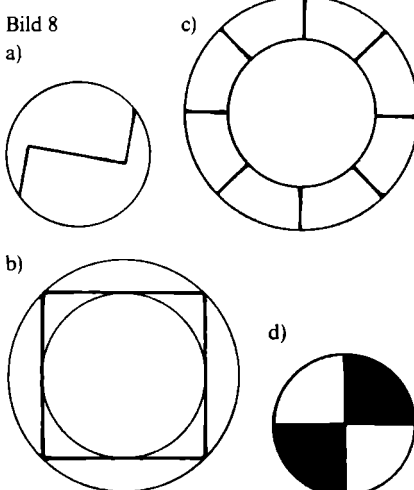
▲6▲ Setze die passenden Zeichen in die leeren Quadrate (Bild 6)!



▲7▲ Lege mit Hölzchen die in Bild 7 dargestellte Figur! Nimm nun vier Hölzchen so weg, daß die restlichen Hölzchen fünf Quadrate ergeben!

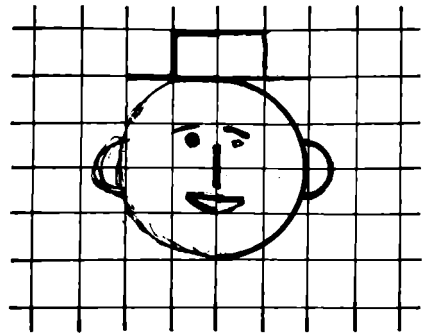


▲8▲ Wieviel Symmetrieachsen hat jede der in Bild 8 gezeichneten Figuren?



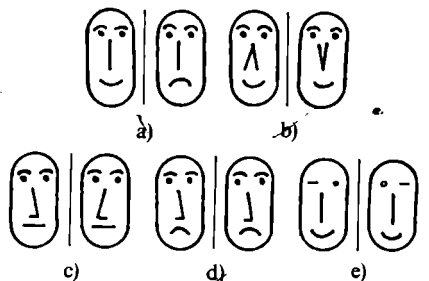
▲9▲ Ergänze Bild 9 so, daß eine symmetrische Figur entsteht!

Bild 9



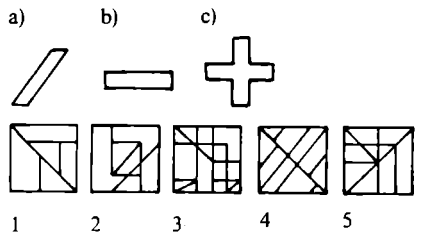
▲10▲ In welchen Beispielen (Bild 10) ist die eine Figur sicher nicht das Spiegelbild der anderen bezüglich der eingezeichneten Geraden?

Bild 10



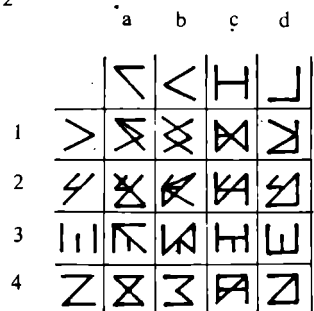
▲11▲ Sind die Formen a, b, c in den Figuren 1 bis 5 enthalten (Bild 11)?

Bild 11



▲12▲ Es wurde immer ein Zeichen aus der obersten waagerechten Reihe und aus der ersten senkrechten Reihe kombiniert. Dabei sind dem Zeichner in Bild 12 sieben Fehler unterlaufen. Finde sie!

Bild 12



Gute Grundkenntnisse gesucht – auch ein wenig Überlegung

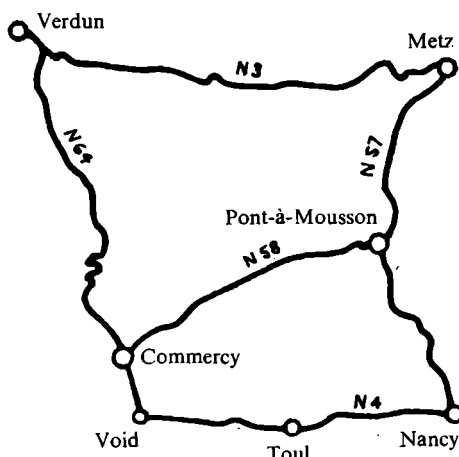
Gemixtes aus französischen Mathematiklehrbüchern
Teil 1 (Klasse 4 bis 6)

Klasse 4

▲ 1 ▲ Claude, Eddy, Philippe, Jacques sind vier Freunde, die in vier verschiedenen Städten wohnen: Paris, Marseille, Lyon, Toulouse. Eddy und Philippe sind aus der Provinz¹⁾ und wohnen nicht am Meer. Philippe besucht oft seinen Freund in Lyon und Claude oft den in Paris Wohnenden.
Finde die Stadt, in der jeder wohnt! (Fertige eine geeignete Tabelle an!)

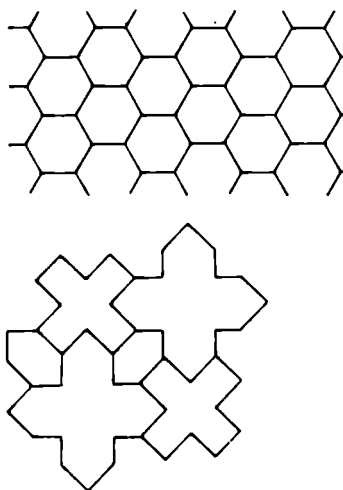
▲ 2 ▲ Anfang des Jahres 1975 fährt ein Reisender von Lyon nach Marseille und zurück. Während der Hinfahrt nimmt er den Expreszug „Mistral“. Er kauft eine Fahrkarte 1. Klasse nach Marseille für 80 Francs. Im Zug muß er einen Zuschlag von 22 Francs bezahlen. Das Abendessen in Marseille kostet 35 Francs, die Übernachtung und das Frühstück kosten zusammen 60 Francs, das Mittagessen 39 Francs. Die Höhe verschiedener anderer Kosten beträgt 16 Francs. Zur Rückfahrt nimmt er einen normalen Personenzug, er fährt wieder 1. Klasse.
Welches sind die Gesamtkosten?

▲ 3 ▲ Bestimme mit Hilfe eines Fadens und einiger Stecknadeln die folgenden Abstände auf der Karte (siehe Bild) bei einem Maßstab von 1:1000000



- von Verdun nach Metz auf der Nationalstraße N3
 - von Metz nach Pont-à-Mousson auf der Nationalstraße N57
 - von Nancy nach Void auf der Nationalstraße N4!
- Wie vielen Kilometern in der Natur entspricht ein Millimeter auf der Karte? Welches sind die wirklichen Abstände?

▲ 4 ▲ Die untenstehende Zeichnung zeigt einen Teil eines Parketts. Nimm ein klein kariertes Blatt Papier, und setze das Muster fort!



Überlege eine weitere Möglichkeit, eine Fläche auszulegen! Unten siehst du z. B. solch eine Möglichkeit mit Hilfe regelmäßiger Sechsecke.

Klasse 5

▲ 1 ▲ Helfen wir dem Inspektor Dupond. Nach einem Verkehrsunfall soll er ein Auto suchen, dessen Kennzeichen eine Zahl, zwei Buchstaben und die Nummer des Départements 75 enthält. Leider stimmen die Aussagen der Zeugen nicht überein.
Als Zahl haben einige 8, andere 6 gesehen. Für den ersten Buchstaben geben einige B an. Andere behaupten, daß es ein R war, und weitere wollen ein P gesehen haben. Für den zweiten Buchstaben haben wiederum einige M, einige N und andere H gesehen.
Wieviel Autos muß Inspektor Dupond ermitteln, um unter ihnen den Unfallverursacher zu suchen? Fertige eine Übersicht an (etwa in Form eines verzweigten Schemas)!

▲ 2 ▲ Ein Kino hat 144 billige Plätze und 96 teure. Eines Samstags gibt es drei Vorstellungen. Bei der ersten sind 18 Sitze leer; bei der zweiten ist der Saal zu zwei Dritteln gefüllt. Bei der dritten ist der Saal zu drei Viertel leer.
Finde die Zahl der Zuschauer für jede Vorstellung und danach die Gesamtzahl der Zuschauer an diesem Tag!

▲ 3 ▲ Jean, Pierre und Dominique machen einen Ausflug mit ihren Mopeds. Zwischen-durch wollen sie eine Essenspause einlegen. Zum Start zeigt Jeans Kilometerzähler 3972 km; zur Pause zeigt Pierres Kilometerzähler 987 km. Bei der Ankunft zeigen die Kilometerzähler: für Jean 4044 km, für Pierre 1030 km und für Dominique 5206 km.
Welches waren die Angaben zum Start und während der Pause? Bediene dich bei der Lösung einer geeigneten Tabelle!

▲ 4 ▲ Francis muß jeden Tag von einem Medikament 5 Tropfen zu Mittag und 5 Tropfen am Abend nehmen. Die Flasche enthält 10 cm^3 des Medikaments. 20 Tropfen nehmen ungefähr einen Rauminhalt von einem Kubikzentimeter ein.
Wieviel Zeit vergeht, bis Francis eine volle Flasche geleert hat?

▲ 5 ▲ Ein rechteckiger Garten ist 34,6 m lang und 22,8 m breit. Durch den Garten verlaufen zwei schmale sich kreuzende Wege. Einer der Wege ist parallel zur Länge und hat als Breite 1,2 m. Der andere Weg ist parallel zur Breite des Gartens und ist 0,6 m breit. Die Wege sollen mit Sand bestreut werden.
Wie groß ist die zu bestreuende Fläche des Gartens?

Klasse 6

▲ 1 ▲ Ein Gastwirt möchte seinen Kunden Wein aus der Bourgogne liefern, für den er bereits Flaschen mit einem Inhalt von 73 cl und von 37,5 cl hat. Er kauft ein Faß des Weines mit 113 l. Den Wein füllt er so in die Flaschen ab, daß er eine gleiche Zahl Flaschen von jeder Art erhält. Dabei bleibt ein Rest von 25 dl. Wieviel Flaschen jeder Sorte hat er gefüllt?

▲ 2 ▲ Eine Badewanne wird durch den Wasserhahn in 10 Minuten gefüllt und in einer Viertelstunde durch den Abfluß geleert. Man öffnet den Hahn und vergißt, den Abfluß zu schließen.
Nach welcher Zeit ist die Wanne voll?

▲ 3 ▲ Gegeben sei ein Parallelogramm ABCD und ein Punkt H auf der Seite AB. Die durch B gehende Parallele zu DH schneidet CD in K.
Beweise zunächst, daß $\overline{BH} = \overline{DK}$. Zeige dann, daß AC, BD und HK den gleichen Mittelpunkt haben!

▲ 4 ▲ Mutti bäckt einen Kuchen für 8 Personen. Sie nimmt $\frac{3}{4} \text{ kg}$ Mehl. Davon kosten 500 g 1,20 Francs. Dazu kommen 6 Eier zu 0,45 Francs das Stück, $\frac{1}{4} \text{ kg}$ Butter zu 17,60 Francs das Kilogramm, 150 g Zucker zu 3 Francs das Kilogramm, 8 cl Rum zu 12,50 Francs der halbe Liter und für 0,25 Francs Backpulver.
Was kostet der Kuchen?

▲ 5 ▲ Gegeben seien ein Quadrat ABCD und die Mittelpunkte H und K der Seiten BC bzw. CD.
Beweise zunächst, daß die Flächen der Dreiecke ABH, AHC, ACK und AKD gleich sind! Berechne danach diese Flächen, wenn die Seitenlänge des Quadrats ABCD 54 mm beträgt!

U. Hauck

¹⁾ „In der Provinz wohnen“ bedeutet „nicht in der Hauptstadt wohnen“.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Aus: normat, Dänemark

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1983



Mathematik

Ma5 ■2294 Arthur, Bernd, Christian und Dirk wohnen in derselben Straße, aber in verschiedenen Häusern mit den Hausnummern 11, 14, 16 und 17. Anlässlich einer Geburtstagsfeier wurden drei Fotos gemacht.

(1) Auf dem ersten Foto waren genau drei dieser Jungen zu sehen, und zwar Bernd, Christian und der Junge aus dem Haus Nr. 17.

(2) Auf dem zweiten Foto waren ebenfalls genau drei Jungen zu sehen, und zwar Arthur und die Jungen aus den Häusern mit den Hausnummern 14 und 16.

(3) Auf dem dritten Foto waren alle vier Jungen zu sehen, und zwar Christian und Dirk und die Jungen aus den Häusern mit den Hausnummern 11 und 14.

Wer von den vier Jungen wohnt jeweils in den Häusern mit den angegebenen Hausnummern? *Schüler Th. Rademacher, Lübben*

Ma5 ■2295 Die Summe aus vier natürlichen Zahlen, von denen jede folgende doppelt so groß ist wie die vorhergehende, beträgt 255. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schülerin Daniela Schulz, Kakerbeck

Ma5 ■2296 Frank geht in die Kaufhalle und kauft dort einige Flaschen Limonade zu 51 Pf je Flasche (einschließlich Flaschenpfand), 9 Flaschen Apfelmarmelade und 3 kg Äpfel. An der Kasse tippt die Kassiererin diese drei Warenposten ein. Die Geldsumme, die Frank bezahlen soll, beträgt 9,10 M. Kann dieser Betrag stimmen, oder hat sich die Kassiererin vertippt? Die Antwort ist zu begründen!

Schüler Jens-Peter Redlich, Wittenberge

Ma5 ■2297 Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl beträgt 12. Multipliziert man diese Zahl mit 2, subtrahiert man vom Produkt 12, so erhält man als Er-

gebnis eine zweistellige natürliche Zahl, die mit den gleichen Grundziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge geschrieben wird. Wie heißt diese Zahl? *Schülerin Annette Polt, Saalfeld*

Ma5 ■2298 Drei Parallelklassen einer Schule wetteifern um gute Ergebnisse bei der Altstoffsammlung. Die Schüler der Klasse 5b sammelten 22 Gläser weniger als die Schüler der Klasse 5a, aber 7 Gläser mehr als die Schüler der Klasse 5c. Die Schüler aller drei Klassen konnten zusammen 645 Gläser dem Altstoffhandel zuführen. Wie viele Gläser sammelten die Schüler jeder dieser drei Klassen? *Schülerin Manuela Herrmann, Cottbus*

Ma5 ■2299 Kerstin ist gegenwärtig zwölf Jahre alt. Ihre Schwester Gerda ist zwei Jahre jünger als Kerstin. Vor drei Jahren war Kerstins Mutter fünfmal so alt wie ihre Schwester Gerda, Kerstins Vater hingegen viermal so alt wie Kerstin. Wie alt sind Kerstins Eltern gegenwärtig?

Schülerin Kerstin Schuhmann, Halle-Neustadt

Ma6 ■2300 Ulf fragte Peter: „Wie viele Bücher besitzt du?“ Darauf antwortete Peter: „Die Hälfte meiner Bücher sind Abenteuerromane. Ein Fünftel meiner Bücher sind Nachschlagewerke. Ein Achtel meiner Bücher sind Tiergeschichten. Die restlichen Bücher gehören zur populärwissenschaftlichen Literatur. Nun kannst du dir wohl denken, wie viele Bücher ich besitze.“ Ulf rechnete und meinte, eine Angabe fehle noch, um die Anzahl der Bücher zu ermitteln. Daraufhin sagte Peter: „Die Anzahl der populärwissenschaftlichen Bücher ist eine Primzahl.“ Wie viele Bücher besitzt Peter, wenn es weniger als 100 sind? *Schülerin Heike Sator, Plau*

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma6 ■ 2301 Setzt man für die Buchstaben des Wortes ERFURT natürliche Zahlen ein, so gilt:

- (1) $R + T - U = 10$,
- (2) $E \cdot R = 28$,
- (3) $F \cdot U = 48$,
- (4) $E + F = 12$.

Welche natürlichen Zahlen erfüllen diese vier Gleichungen? Es ist der Wert der Summe $E + R + F + U + R + T$ zu berechnen.

Schüler Thomas Kraft, Hainichen

Ma6 ■ 2302 Herr A. hatte im Tele-Lotto gewonnen. Sein Nachbar B fragte ihn, welchen Geldbetrag er gewonnen habe. Er antwortete darauf: „Der Gewinn ist kleiner als 3000 M und durch alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 ohne Rest teilbar.“

Welchen Geldbetrag hatte Herr A. im Tele-Lotto gewonnen?

Schüler Thomas Vandahl, Völkershausen

Ma6 ■ 2303 Von vier Mädchen mit den Vornamen Agnes, Babett, Christa und Katja ist uns folgendes bekannt:

- a) Ihre Nachnamen lauten (in anderer Reihenfolge) Jahn, Robert, Meier und Schmidt.
- b) Jedes dieser Mädchen erlernt genau eine der Fremdsprachen Latein, Englisch, Französisch oder Tschechisch.
- c) Das älteste Mädchen, die Schülerin Meier und Christa erlernen nicht die tschechische Sprache.
- d) Das jüngste Mädchen, die Schülerin Meier und Christa lernen nicht Latein.
- e) Katja ist älter als Babett, aber jünger als Christa.
- f) Das Mädchen, das die englische Sprache erlernt, ist mit der Schülerin Schmidt befreundet.
- g) Agnes hat den Nachnamen mit den wenigsten Buchstaben.
- h) Christa erlernt nicht die französische Sprache.

Ermittle die vollständigen Namen dieser Mädchen! Welche Fremdsprache erlernt jedes dieser Mädchen? Ordne die Mädchen nach ihrem Lebensalter; beginne mit dem jüngsten Mädchen!

Schülerin Barbara Schütze, Weißenfels

Ma6 ■ 2304 Primzahlrillinge nennt man drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 mit der Eigenschaft $p_2 = p_1 + 2$ und $p_3 = p_2 + 2$. Es ist nachzuweisen, daß es außer dem Primzahlrilling (3; 5; 7) keinen weiteren gibt.

Schüler Jens-Peter Redlich, Wittenberge

Ma7 ■ 2305 Heinz und Klaus haben von ihrem Taschengeld fleißig gespart. Sie vergleichen ihre Ersparnisse und stellen dabei folgendes fest: Würde Klaus an Heinz 2 M abgeben, so hätten beide gleich viel Ersparnisse. Würde Heinz an Klaus 11 M abgeben, so hätte Klaus dreimal soviel Ersparnisse wie Heinz. Wieviel Mark hat jeder der beiden Jungen gespart?

Schülerin Claudia Schwartz, Ilmenau

Ma7 ■ 2306 Zeichne einen Rhombus $ABCD$, konstruiere die Mittelpunkte E, F, G, H der Rhombuseiten, und zeichne die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte benachbarter Rhombuseiten! Weise nach, daß das Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist! Weise nach, daß der Flächeninhalt A_{Rh} des Rhombus doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt A_R des Rechtecks $EFGH$!

Schülerin Heike Sator, Plau

Ma7 ■ 2307

Löse durch systematisches Probieren!

Wie viele verschiedene Autonummern lassen sich herstellen, wenn alle Buchstaben des Alphabets und alle Ziffern von 0 bis 9 für Autonummern folgenden Typs verwendet werden:

z. B. SX · 23–57?

Es dürfen sich Buchstaben und auch Ziffern wiederholen.

Fr.

Ma7 ■ 2308 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge 13 cm hat und dessen Kathete $\overline{AC}$ um 7 cm länger ist als die Kathete $\overline{BC}$. Die Konstruktion ist zu begründen.

OST R K.-H. Lehmann, VdL V, Berlin

Ma8 ■ 2309 Es sind alle geordneten Tripel $[a, b, c]$ positiver ganzer Zahlen a, b, c mit $a < b < c$ zu ermitteln, die die Ungleichung

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{6} + \frac{c}{7} < 1 \text{ erfüllen.}$$

Sch.

Ma8 ■ 2310

Folgender Satz ist zu beweisen:

Die um 2 verminderte Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

Schüler M. Enig, Crimmitschau, Kl. 9

Ma8 ■ 2311 In einer Familie war die Mutter bei der Geburt ihrer Tochter 36 Jahre alt. Es sind die Geburtsjahre von Mutter und Tochter zu ermitteln, wenn die Tochter z. Z. Schülerin ist und in der Zifferndarstellung der Geburtsjahre die letzten beiden Ziffern vertauscht sind.

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma8 ■ 2312 Die Seitenlänge des abgebildeten Quadrates $ABCD$ betrage 12 cm. Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ wurden die Punkte P und Q so angenommen, daß die Länge der Strecke $\overline{BP}$ gleich der Länge der Strecke $\overline{DQ}$ gleich einem Viertel der Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist. Auf $\overline{PQ}$ ist eine Senkrechte zu errichten, die $\overline{CD}$ in M und $\overline{AD}$ in N schneidet, so daß $\overline{CM} \cong \overline{DN}$ gilt. Zu berechnen ist die Länge der Strecke $\overline{DN}$.

Ma9 ■ 2313 Welche reellen Zahlen erfüllen die Gleichung

$$y^3 - y^2 = y^2 + y?$$

Schüler M. Enig, Crimmitschau, Kl. 9

Ma9 ■ 2314 Vertauscht man in einer zweiziffrigen natürlichen Zahl mit der Quersumme 7 die beiden Ziffern, so ist das Quadrat der neuen Zahl um 51 kleiner als das Quadrat der Hälfte der ursprünglichen Zahl. Welche Zahl ist es?

aus Österreich

Ma9 ■ 2315 Frau K. rechnet mit den Jahreszahlen 1981 und 1982. Sie dividiert 1981 durch das Alter (in vollen Jahren) von Sohn Stefan und 1982 durch das Alter (in vollen Jahren) von Tochter Susi. Beide Quotienten sind ganzzahlig. Diese addiert sie und dividiert die erhaltene Summe durch ihr eigenes Alter (in vollen Jahren). Sie staunt, daß die Aufgabe nicht nur aufgeht, sondern auch noch das Alter der Großmutter (in vollen Jahren) herauskommt. Wie alt sind Großmutter, Mutter und die beiden Kinder?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma9 ■ 2316 Ein Rechteck hat einen Umfang von 26 cm und einen Flächeninhalt von 40 cm^2 . Wie groß sind die Seitenlängen a bzw. b , wenn gilt $a > b$?

Schüler M. Enig, Crimmitschau, Kl. 9

Ma10/12 ■ 2317 Für die Vereinfachung der Darstellung von Informationen wurde das hexadezimale Zahlensystem geschaffen (Basis 16). Es werden die Ziffern 0 bis 9 und für die Ziffern 10 bis 15 die Buchstaben A bis F verwendet. Die folgenden Darstellungen sind ins Dezimalsystem zu übertragen:

- a) $(AF9)_{16}$
- b) $(BAD)_{16}$.

Die Zahlen 10000 und 1000000 des Dezimalsystems sind in das hexadezimale System zu übertragen.

Dipl.-Ing. H. Mietling, Dresden

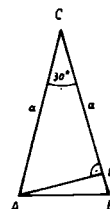
Ma10/12 ■ 2318 Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die durch 30 teilbar sind und einschließlich der Zahlen 1 und n genau 30 Teiler besitzen.

Sch.

Ma10/12 ■ 2319 Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders?

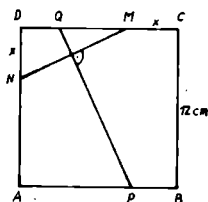
Schüler U. Schwert, Ruthen, Kl. 9

Ma10/12 ■ 2320 Im abgebildeten Dreieck ABC gelte $\overline{AC} = \overline{BC}$, und $\sphericalangle ACB$ habe die Größe 30° . Das Lot von A auf $\overline{BC}$ schneide



$\overline{BC}$ in D . Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC ist in Abhängigkeit von a (Länge der Seite $\overline{AC}$) zu bestimmen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Skizze nicht maßstäblich.

Physik

Ph6 ■131 Frank hatte in seinem Zimmer ein großes Aquarium. Dieses zersprang ihm so, daß alles Wasser auf den Fußboden floß.

Das Zimmer war 2,70 m lang und $\frac{2}{3}$ mal so breit. Die inneren Grundflächenröße des Aquariums waren $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ der Breite des

Zimmers. Wie hoch war der Wasserspiegel im Aquarium, wenn sich das gesamte Wasser gleichmäßig auf dem Fußboden verteilte und eine Höhe von 2 cm erreichte?

Schüler G. Eichler, Dresden, Kl. 9

Ph7 ■132 Die sowjetische Windkraftmaschine TW 8 hat eine maximale Nutzleistung von 4 kW. Sie nutzt 42% der Windenergie aus und treibt eine Wasserpumpe an, die einen Wirkungsgrad von 85% hat.

a) Wieviel Prozent der Windleistung werden insgesamt genutzt?

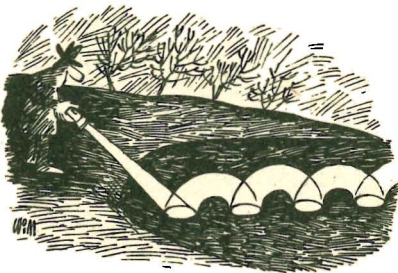
b) Welche Leistung muß der Wind zur Verfügung stellen?

c) Welche Leistung gibt die Wasserpumpe ab, wenn die Anlage mit Höchstleistung arbeitet?

d) Wieviel m^3 Wasser können mit dieser Pumpe im Fall c) in einer Stunde aus 5 m Tiefe gefördert werden?

(1 m^3 Wasser hat ein Gewicht von 1 Mp.)

Ph8 ■133 Um einen stählernen Reifen auf ein Rad aufzuziehen, muß er vorher erwärmt werden. Der Durchmesser des Rades beträgt 75,0 cm und der innere Durchmesser des Reifens 74,6 cm. Um wieviel $^{\circ}C$ muß der Reifen erwärmt werden, damit er auf das Rad paßt? ($\alpha = 0,000013 \frac{1}{K}$)



Ph9 ■134 In einem Haushalt verwendet die Hausfrau ein trichterförmiges Gefäß zum „Abmessen“ von Mehl, Zucker, Zutaten usw. nach Augenmaß. Sie bittet ihre Tochter, die sehr gute schulische Leistungen in Mathematik aufweist, an der Gefäßinnenseite Eichmarken für die halbe Füllung und für eine Füllung von 100 cm^3 anzubringen. Das Gefäß hat einen Durchmesser von $d = 8$ cm und eine Höhe von 16 cm. In welcher Entfernung von der Spitze des Trichters sind die Eichmarken anzubringen?

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Ph10/12 ■135 Ein Lastkraftwagen mit einer Gesamtmasse von 10 Tonnen ist eben noch in der Lage, eine Steigung von 25%

mit einer konstanten Geschwindigkeit v zu befahren. Welche Steigung kann dieser LKW mit gleicher Geschwindigkeit noch befahren, wenn er zusätzlich einen Anhänger von 5 Tonnen Gesamtmasse zu ziehen hat? (Reibungskräfte und Fahrwiderstände sollen unberücksichtigt bleiben.)

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch7 ■105 Während einer Unterrichtsstunde reduzieren sechs Arbeitsgruppen je 0,8 g Kupfer(II)-oxid mit Kohlenstoff.

a) Wieviel Gramm Kupfer werden insgesamt von allen Arbeitsgruppen bei vollständiger Reduktion gebildet?

b) Wieviel Liter Kohlendioxid entweichen dabei aus den Tieglern in das Zimmer?

Ch8 ■106 Ein moderner großer Kalkschachtofen verarbeitet täglich 160 t 98%igen Kalkstein.

a) Wieviel Tonnen Branntkalk liefert der Schachtofen täglich?

b) Wieviel Kubikmeter Kohlendioxid entstehen bei einer Temperatur der Außenluft von 16 $^{\circ}C$ und einem Barometerstand von 765 Torr?

c) Wieviel Tonnen Löschkalk erhält man aus der gegebenen Menge Kalkstein?

Ch9 ■107 Ein Gemisch aus Magnesiumkarbonat und Magnesiumoxid wird zum Glühen gebracht. Dabei verliert es 12% seiner Masse. Wieviel Gramm der beiden Stoffe sind im Gemisch enthalten?

Ch10/12 ■108 Schwefelsäure besitzt große Bedeutung für die Volkswirtschaft.

a) Wieviel Tonnen Pyrit mit einem Gehalt von 82% FeS_2 müssen zur Herstellung von 3 t 90%iger Schwefelsäure abgeröstet werden?

b) Wieviel Tonnen Kiesabbrand mit einem Gehalt von 75% Eisen(III)-oxid entstehen dabei?

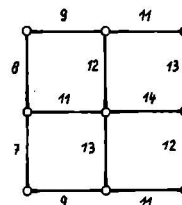
c) In welchem Verhältnis ist die 90%ige Schwefelsäure mit Wasser zu mischen, um eine 15%ige Säure zu erhalten?

d) Wieviel Milliliter der 15%igen Schwefelsäure ($\rho = 1,102 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}$) braucht man zur Herstellung von 70 g kristallisiertem Zinnsulfat ($ZnSO_4 \cdot 7H_2O$)?



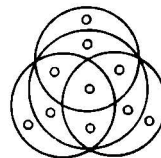
▲1▲ Квадрат цифр.

Впишите в кружочки на рисунке цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр в любых двух соседних кружочках равнялась числу, написанному между этими кружочками.



▲2▲ Магические круги.

Расставьте в красные кружки на рисунке числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в четырех больших кругах были одинаковыми.



Mrs. Puffem's Cigarettes

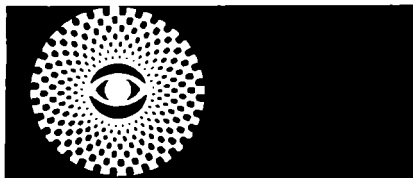
▲3▲ Mrs. Puffem, a heavy smoker for many years, finally decided to stop smoking altogether. "I'll finish the 27 cigarettes I have left," she gasped to herself, "and never smoke another one." It was her practice to smoke exactly two-thirds of each cigarette. It did not take her long to realize that with the aid of some tape she could stick three butts together to make a new cigarette. With the 27 cigarettes on hand, how many cigarettes can she smoke before she gives up?

Get 34

▲4▲ Take these four pieces and rearrange them to make a square so that the sum of each of the four rows and two diagonals is 34.

1	15	5	12	11	6	16	9
8	10	4		14	3		2
							13
							7

▲5▲ Un bassin circulaire est entouré d'une grille placée à 50 cm du bord; la longueur de cette grille est 22 m. Quel est le diamètre du bassin?



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematische Schüler- gesellschaft an der Universität Greifswald

Pünktlich um 14 Uhr saßen am Montag, dem 23. August 1982, die ausgewählten Schüler der Klassenstufe 10 der Bezirke Neubrandenburg und Rostock im Hörsaal der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Diese Schüler wollen einmal einen Beruf ergreifen, der eng mit der Mathematik verbunden ist. Drei Ferienlehrgänge sollen ihnen den Eingang in das Studium erleichtern und gute Voraussetzungen hierzu schaffen. Prof. Dr. Griepentrog, Direktor der Sektion, begrüßte die Gäste und die Schüler sowie den Prorektor der Universität Prof. Dr. Wegner.

Prof. Dr. Wegner sprach über *Sinn und Bedeutung der Mathematischen Schülergesellschaft* (MSG). Die offizielle Gründung der MSG wurde dann durch starken Beifall der Hörschale unterstrichen. Prof. Dr. Terpe, der Vorsitzende der MSG, gab in seinem Vortrag zur Gründungsveranstaltung einen interessanten Überblick über die Entwicklung der Greifswalder Universität und zeigte überzeugend dabei die gesellschaftlichen Zusammenhänge auf.

Die Woche war dann angefüllt mit Vorlesungen und Übungen zum Hauptthema „Einführung in die Gruppentheorie und geometrische Anwendung“ (Dr. Feiste/Dipl.-Math. Kulicke). Diese Veranstaltungen wie auch der Vortrag „Was ist Schaltalgebra?“ (Prof. Dr. Griepentrog) zeigten den Schülern viele mathematisch neue Erkenntnisse und Zusammenhänge auf. Aus dem Freizeitprogramm war sicher die Führung durch die historischen Räume der Universität – Konzilsaal, Aula und Karzer – durch den Archivar, Herrn Herling, der Höhepunkt.

Eine gutbewältigte Klausur über zwei Stunden überzeugte die Schüler, daß sie den Anforderungen der MSG gewachsen sind.

Für den Lehrgang in den Winterferien werden wieder Bewerbungen ausgeschrieben und weitere 25 Schüler (Klassenstufe 9) in die nun bereits bestehende MSG aufgenommen.

H.-J. Kerber

Mathematikolympiaden der Horte des Kreises Bad Langensalza

Der Wettbewerb wird seit etwa 10 Jahren in unserem Kreis durchgeführt. Die Aufgaben werden von erfahrenen Unterstufenlehrern erarbeitet und im Oktober in die Horte gegeben. Dort werden sie in den jeweiligen Gruppen von allen Kindern gelöst. Der beste *Junge Mathematiker* der Gruppe darf dann am Kreisausscheid, der in den Winterferien stattfindet, teilnehmen. Beim Kreisausscheid erhalten die Kinder, getrennt nach Altersstufen, neue Aufgaben mit einem höheren Schwierigkeitsgrad.

Die Auswertung erfolgt gleich im Anschluß. Die Kinder werden in der Zwischenzeit von Mitarbeitern des Pionierhauses betreut. Als Auszeichnung erhalten die drei Erstplatzierten jeder Altersstufe Urkunden und Sachpreise. Des weiteren erhält jeder Teilnehmer ein kleines Erinnerungsgeschenk für die Teilnahme an der Kreisolympiade. Die organisatorische Vorbereitung des Wettbewerbes wird von der Fachberaterin der Horterzieher und einem Mitarbeiter des Pionierhauses übernommen.

Rosemarie Herzog

Aufgaben

Kreisolympiade der Horte 1982

Klasse 4

▲1▲ Wieviel Zentimeter Bindfaden benötigt man für das Verschnüren des abgebildeten Paketes?

Es ist 44 cm lang, 44 cm breit und 12 cm hoch. Für den Knoten benötigt man 20 cm.



▲2▲ Wieviel dreistellige Zahlen lassen sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2 und 3 schreiben, wenn jede Ziffer in jeder Zahl nur einmal vorkommen darf?

▲3▲ Wie groß ist die Summe dieser Zahlen?

$$\begin{array}{r} 673294 \\ + 631852 \\ + 81905 \\ + 21384 \\ \hline \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 839763 \\ - 156382 \\ - 421860 \\ - 261521 \\ \hline \hline \end{array}$$

▲4▲ Rechne um!

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ m } 7 \text{ dm} = & \text{cm;} \\ 6 \text{ km } 7 \text{ cm} = & \text{m;} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 26 \text{ t} = & \text{kg;} \\ 13 \text{ M } 33 \text{ Pf} = & \text{Pf;} \end{array}$$

$$\text{▲5▲ } 25893 \cdot 6; \quad 7386 \cdot 4;$$

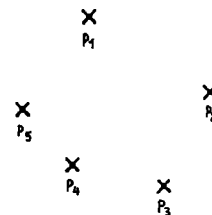
$$\text{▲6▲ } 2709 : 7; \quad 1640 : 5;$$

Probe!

▲7▲	$a-4$	a	$a+4$
		368942	
	536802		
	762438		
			446872

▲8▲ Zeichne alle Geraden ein, die durch mindestens 2 Punkte verlaufen!

Wie viele solcher Geraden gibt es?



Einige Knobelaufgaben aus vergangenen Wettbewerben zur Wiederholung von Grundkenntnissen

▲1▲ Zeichne zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$!
a) Trage $\overline{CD}$ an die Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus an!

b) Trage $\overline{AB}$ an die Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus an!

▲2▲ „Wie alt ist die Eiche?“ fragten die Schüler den Förster.

„Nun überlegt einmal!“ antwortete er.

„Addiert die größte einstellige Zahl, die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl! Von dieser Summe subtrahiert die kleinste vierstellige Zahl! Dann wißt ihr, wie alt die Eiche ist.“

▲3▲ Zeichne einen Punkt S ! Von S aus zeichne nun 5 Strahlen so, daß du zwei parallele Geraden, die alle fünf Strahlen schneiden, einzeichnen kannst!

▲4▲ Eine LPG verkauft 280 kg Gemüse. Die Hälfte davon sind Möhren. 115 kg sind Weißkohl, der Rest Tomaten. Wieviel kg Tomaten sind es?

▲5▲ Wandle um!

$$\begin{array}{ll} 16000 \text{ m} = & \text{km} \\ 370 \text{ cm} = & \text{m} \\ 6000 \text{ kg} = & \text{t} \\ 2 \text{ m} = & \text{dm} \\ 5 \text{ t} = & \text{kg} \\ 51 \text{ kg} = & \text{g} \end{array}$$

▲6▲ Berechne die Differenz aus dem Achtfachen von 1000000 und dem dritten Teil von 6093!

▲7▲ Für welche Zahl y gelten folgende Ungleichungen?

a) $278 + y < 282$

b) $4718 - y > 4711$

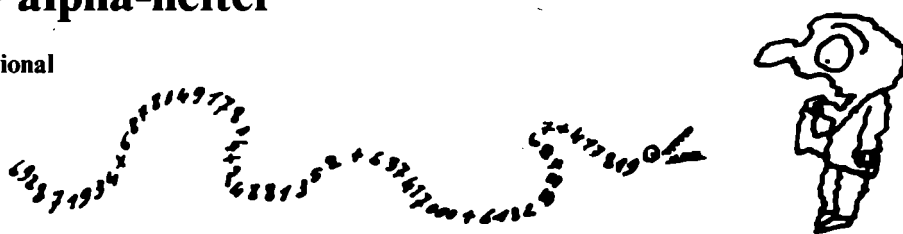
c) $1808 + y < 1813$

▲8▲ Jedes Quadrat ist durch eine Ziffer zu ersetzen!

$$\begin{array}{l} 10 : 2 + \square = 9 \\ + 14 : 2 - \square = 3 \\ + \square - \square - 2 = 7 \\ \hline 36 - 7 - \square = 19 \end{array}$$

In freien Stunden • alpha-heiter

Unterhaltungsmathematik international



Kryptogramm

Ersetzt in den nachstehenden Tabellen (Diagrammen) die Buchstaben durch Ziffern derart, daß die dabei entstehenden Zahlen in allen Zeilen und Spalten (dreiziffrige) Quadratzahlen ganzer Zahlen darstellen!

a)

A	B	B
B	C	B
B	B	A

b)

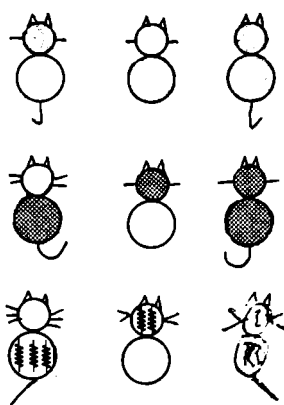
K	L	M
L	N	L
M	L	K

Dr. Jaromir Maláč, Brno, aus: Rholedy, Prag

- daß Mischa Astern oder Mimosen gebracht hat und jünger als Mascha ist;
- daß Kolja jünger als Katja ist und er mehr Jahre zählt als der Strauß Astern;
- daß sich das Alter der vier Mädchen von der Zahl der jeder überreichten Blumen um zwei unterscheidet;
- daß Olga jünger als Juri ist, daß sie keine Rosen, Tulpen oder Astern bekommen hat und daß sie mehr Jahre zählt als der Rosenstrauß Blumen;
- daß Maschas Alter größer ist als die Zahl der Tulpen und der Mimosen.

aus: Nauka i Shisn, Moskau

Welches Muster fehlt?



Keith Austin,
Universität Sheffield
aus: Math. Spectrum,
Sheffield

Psychologisches Praktikum

Fünf Jungen, 16, 17, 18, 19 und 20 Jahre alt, bringen ihren Mädchen – Lisa, Katja, Mascha, Ljuba und Olga – Blumen: Mimosen, Astern, Nelken, Rosen und Tulpen. Juri, Igor, Nikolai, Michail und Sergej schenkten ihren Altersgefährtinnen Blumen und jeder eine andere Anzahl: 16, 17, 18, 19 bzw. 20, wobei aber jeder Strauß aus Blumen nur einer Art besteht. Finde heraus, wer wem wieviel Blumen überreicht und was für welche, wenn wir dir verraten:

- daß Igor mehr Jahre zählt als der Strauß Mimosen;
- daß Lisa älter als Mascha ist, daß sie keine Mimosen, Nelken oder Rosen bekommen hat und daß die Zahl ihrer Lebensjahre kleiner als die der Nelken ist;
- daß Sergej weniger Lebensjahre zählt als der Tulpenstrauß Blumen;

Etwas Sonderbares

Betrachte die zwei Zahlensäulen recht sorgfältig! Wenn man sie addiert, welches Ergebnis ist wohl größer?

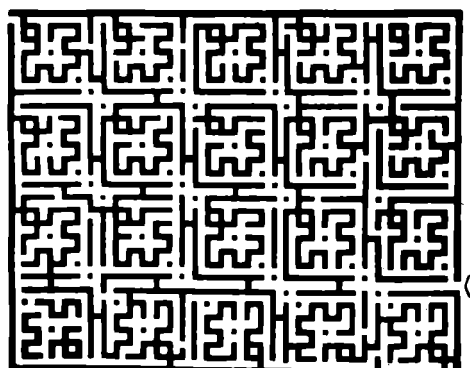
Schätze erst, und rechne dann! Die Antwort ist recht sonderbar.

987654321	123456789
087654321	123456780
007654321	123456700
000654321	123456000
000054321	123450000
000004321	123400000
000000321	123000000
000000021	120000000
+000000001	+100000000

aus: Scholastic Math. Magazine

Labyrinth

aus: Mathematica List, Beograd



Würfelnetze

Es gibt genau 11 wesentlich verschiedene Netze, aus denen man alle überhaupt denkbaren Netze durch Drehung oder Spiegelung gewinnen kann. Bild 1 zeigt den ganzen Würfel, während die restlichen Bilder alle seine verschiedenen Netze darstellen. Auf den Würfel-seiten stehen die Ziffern 1 bis 6 so, wie wir es Bild 1 und 2 entnehmen können.

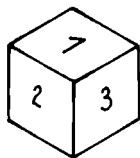


Bild 1

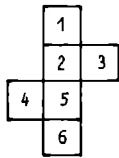


Bild 2

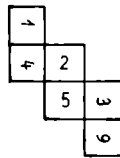


Bild 3

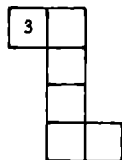
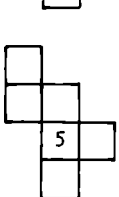
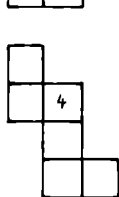
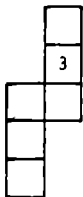
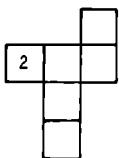
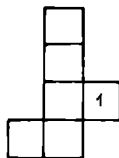
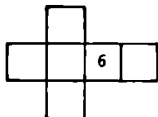
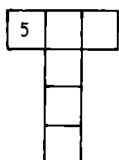
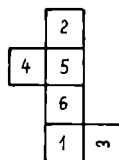


Bild 4



Greifen wir uns jetzt irgendein anderes Netz heraus, dann stehen die Ziffern in anderer Anordnung und auch noch verdreht in den Feldern. Ein Beispiel zeigt uns Bild 3. Eure Aufgabe besteht nun darin, die Ziffern, von denen jeweils eine bereits vorgedruckt ist, so in die Felder der verschiedenen Netze zu schreiben, daß es sich immer um ein Netz unseres beschrifteten Würfels aus Bild 1 handelt.

aus: *Quant*, sowjetische Schülerzeitschrift, Moskau

Sind alle vier Bilder gleich?

Nein! Auf dem 2., 3. und 4. Bild fehlen je vier Details. Welche?

aus: *Füles*, Budapest



Knifflige Frage

Die dezimale Multiplikation

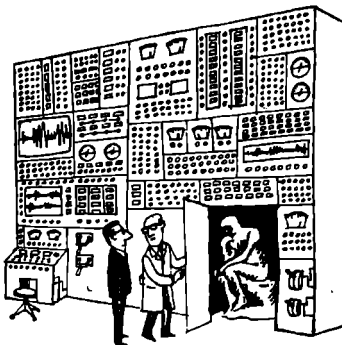
$$\text{MIT} \cdot \text{ZA} = \text{HLEN}$$

soll mit neun verschiedenen Ziffern M, I, T, Z, A, H, L, E, N aus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 durchgeführt werden. Von letzteren muß also eine fortbleiben. Darf das jede sein?

Dr. I. Paasche, aus: *Kosmos*, Stuttgart

Denker

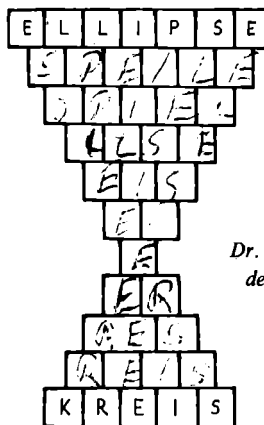
Tibor Kajan, „Apropos“, Budapest



Von der Ellipse zum Kreis

Rätsel-Metamorphose: Die gesuchten Zwischenbegriffe entstehen entweder durch Streichen oder Hinzufügen eines Buchstabens und durch anschließende geeignete Permutation der derart entstandenen Buchstabenmenge. Die Begriffe, die hier nicht in der Reihenfolge der Rätselfigur angegeben sind, haben folgende Bedeutung:

Fluß im Harz / tierisches Produkt / Basis des natürlichen Logarithmus / Getreideart / chem. Element, Ordnungszahl 68 (Formelz.) / unterhaltsame Beschäftigung / Sache, Ding (lat.) / Holzstäbchen (Pl.) / Wasser in festem Zustand.



Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Die magische Pyramide

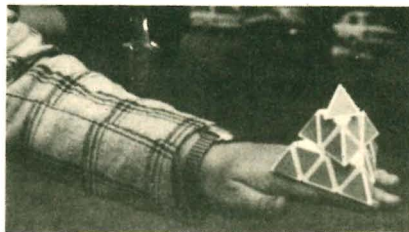


Bild 1

Wer kennt ihn nicht, den ungarischen magischen Würfel, den *Rubik's Cube*? Vor etwa vier Jahren begann sein Siegeszug um die Welt. Nicht nur mathematisch Interessierte sind von ihm fasziniert und kommen nicht mehr von ihm los. Die Schar der Würfel-Bezwinger wächst und wächst, und es ist kein Ende der Begeisterung abzusehen. Schon geht es darum, ihn in minimaler Zeit aus einer verdrehten Stellung zu ordnen. *Rubik's Cube* wurde bereits als die Erfindung des Jahrhunderts auf dem Gebiet der Unterhaltungsmathematik bezeichnet. Das sicher nicht nur, weil er einen solchen Begeisterungssturm hervorgerufen hat, sondern auch weil er der Anfang einer ganzen Welle von logisch-kombinatorischen Spielen war. So gibt es, ähnlich dem *Rubik's Cube*, die magische Pyramide, das magische Domino und das magische Prisma, aber auch andere, nicht weniger interessante Spiele, wie den Turm von Babylon und die Teufelstonne. Viele weitere Spiele werden sicher bald folgen. Sicher kennen bereits viele *alpha*-Leser einige von diesen Spielen. Für alle diese Knebeleien

benötigt man zum Bezwingen, d. h. zum Zurückdrehen in die Ausgangsstellung, einen Algorithmus, d. h. ein Verfahren, nach dem man schrittweise zum Ziel kommt.

Das eigentlich interessanteste, aber auch schwierigste Problem ist, einen solchen Algorithmus zu finden, also sich selbst ein Verfahren zu erarbeiten, mit dem man das Ziel erreichen kann. So besagt die Erfahrung des englischen „Würfelmeisters“ Prof. David Singmaster, daß selbst Mathematiker durchschnittlich etwa zwei Wochen brauchen, um einen solchen Algorithmus zu finden. Damit wird vielleicht deutlich, wie kompliziert der „*Rubik's Cube*“ ist. Für einen „Anfänger“ ist es oft schon nicht ganz einfach, eine Methode zu finden, wie man Drehungen zweckmäßig aufschreibt.

Mit diesem Artikel wollen wir eine Reihe beginnen, in der wir verschiedene dieser Spiele vorstellen werden. Neben einigen allgemeinen Bemerkungen wollen wir jeweils auch einen Algorithmus beschreiben, und zwar wollen wir versuchen klarzumachen, wie man selbst so einen Algorithmus finden kann.

Wir wollen mit der *Magischen Pyramide* beginnen.

Es handelt sich hier um die „kleine Schwester“ des *Rubik's Cube*. Ähnlich zum magischen Würfel können wir die 4 kleinen Spitzen drehen und jeweils entlang der Ebene parallel zur Grundfläche. Also hat man insgesamt 8 verschiedene Drehmöglichkeiten; sogar noch mehr als beim Würfel (6). Trotzdem ist die magische Pyramide wesentlich einfacher als der Würfel, es gibt hier nur rund 75 Millionen verschiedene Möglichkeiten, die Pyramide zu verdrehen, wobei es beim Würfel rund 43 Millionen $\times$ Millionen $\times$ Millionen sind.

Aber auch die Pyramide will erst bezwungen sein!

Überlegen wir uns zunächst, wie wir uns Drehungen aufschreiben wollen. Wir wollen die Pyramide immer so halten, daß wir auf eine Seite schauen und dieses Dreieck „auf einer Seite steht“.

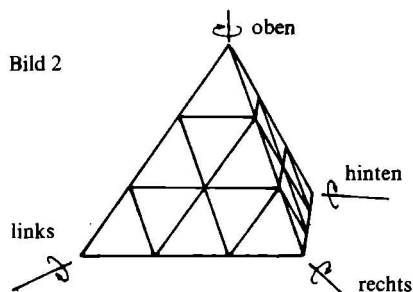


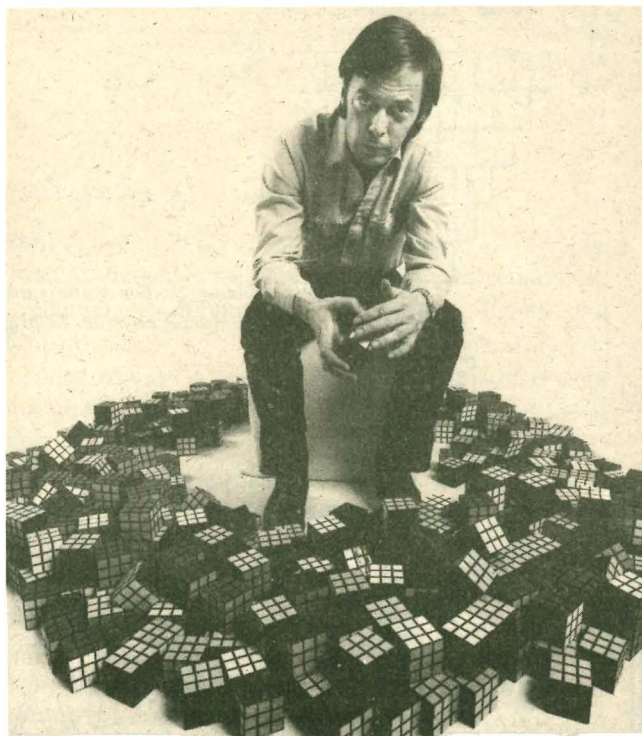
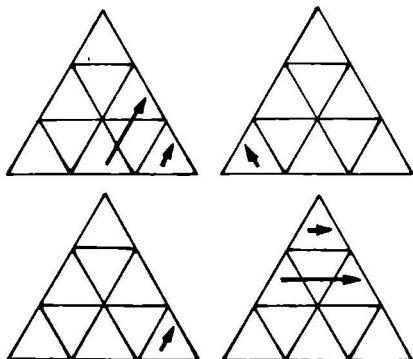
Bild 2

Die Drehachsen bezeichnen wir nun mit rechts, links, oben und hinten. Drehen wir nur die Spitze um die Drehachse rechts um 120° rechts herum (siehe Bild), bezeichnen wir diese Drehung mit r . Drehen wir diese Spitze um 120° nach links um die Drehachse rechts, so schreiben wir r^{-1} (oder, was dasselbe ist, r^2 , d. h. 240° nach rechts). Analog schreiben wir R und R^{-1} , wenn wir die Spitze und gleichzeitig die angrenzende Schicht drehen.

Die Drehungen um die anderen Drehachsen werden in analoger Weise erklärt. Man achte immer auf die Drehrichtung!

Haben wir zum Beispiel die Operation $Rl^{-1}r0^{-1}$, so sind folgende Drehungen (in dieser Reihenfolge) auszuführen:

Bild 3



Ernő Rubik,
der Erfinder
des
Zauberwürfels

Jetzt wollen wir uns die Pyramide etwas genauer ansehen. Wir sehen, daß es 3 Sorten von Steinen gibt.

1. Die 4 Spitzen. Diese kleinen Tetraeder haben 3 farbige Flächen.

2. Die 4 Basissteine. Das sind die Teile, an denen die Spitzen angrenzen. Es sind Teile (Oktaeder), die auch 3 gefärbte Flächen haben.

3. Die 6 Mittelsteine. Sie haben zwei gefärbte Flächen. Bei beliebigen Drehungen bleiben Spitzen und Basissteine auf ihren Plätzen, während die Mittelsteine ihre Plätze austauschen können.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zum Lösungsalgorithmus kommen. Es ist naheliegend, das Ziel in 3 Etappen erreichen zu wollen. Zunächst ordnen wir die Spitzen, dann die Basissteine und zum Schluß die Mittelsteine.

1. Spitzen. Die Spitzen sind völlig harmlos, da sie nur mit den Basissteinen verbunden sind. Wir drehen die Spitzen so, daß die Farben der benachbarten Flächen von Spitzen und Basissteinen übereinstimmen.

Im folgenden drehen wir nur noch Basissteine und Spitzen gemeinsam. Dadurch stimmen die entsprechenden Farben von Basissteinen und Spitzen immer überein, d. h., wir benutzen nur Drehungen, die wir mit großen Buchstaben bezeichnen.

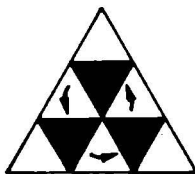
2. Basissteine. Wir überlegen uns jetzt, welche Farbe die Frontfläche haben muß. Das ist nicht beliebig, wie man annehmen könnte, sondern diese Farbe ist eindeutig bestimmt. Die Frontfläche kann natürlich nur die Farbe haben, die an den drei Spitzen, die auch in der Frontfläche liegen, vorkommen. Wir schauen uns die drei Spitzen an und ermitteln die Farbe, die sie gemeinsam haben. Ist es etwa blau, so drehen wir die entsprechenden Basissteine und Spitzen, so daß ihre Flächen, die in der Frontfläche der gesamten Pyramide liegen, sämtlich blau sind. Analog drehen wir den hinteren Basisstein mit Spitze. Auch dieser Schritt war recht einfach, und auf die Mittelsteine sind wir bereits fertig.

3. Mittelsteine. Jetzt beginnt das Schwierigste. Wie drehen wir die Mittelsteine auf ihre Plätze, ohne das Erreichte wieder zu zerstören?

Wir versuchen Operationen zu finden, die aus mehreren Einzeldrehungen zusammengesetzt sind, und zwar so, daß mit R auch R^{-1} oder auch dreimal R auftritt. Dieses muß natürlich für alle Drehachsen gelten. Damit bleibt gewährleistet, daß die Basissteine und Spitzen nach Ausführung dieser Operationen wieder ihre Lage einnehmen. Zum Beispiel interessieren wir uns für Operationen wie $R0^{-1}R^{-1}0$ oder $R0R0R0$ (oder $(R0)^3$ abkürzend geschrieben).

In der Tat ist die erste Operation sehr wichtig. Wir sehen, daß die drei Mittelsteine, die eine Fläche in der Frontfläche der Pyramide haben, ihre Plätze zyklisch vertauschen.

Bild 4

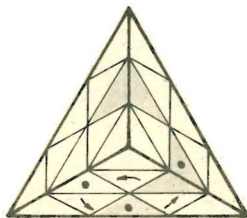


Will man eine (beliebige) Operation umgekehrt ausführen, so muß man die Reihenfolge der einzelnen Drehungen umdrehen und jeweils die Drehrichtung. Die Umkehrung von $R0^{-1}R^{-1}0$ ist $0^{-1}R0R^{-1}$.

Es ist zweckmäßig, auch gleich zu beachten, in welcher Weise die Mittelsteine übergehen. Um das klarzumachen, betrachten wir die Pyramide von oben. Man sieht dann, wohin die einzelnen Flächen der Mittelsteine gedreht werden (man beachte den Punkt!).

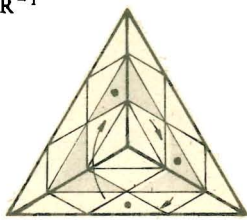
$R0^{-1}R^{-1}0$

Bild 5



Genau genommen reicht diese Operation bereits aus, die gesamte Pyramide wieder in die Ausgangsstellung zurückzudrehen. Will man beispielsweise folgende Vertauschung $0R0^{-1}R^{-1}$

Bild 6

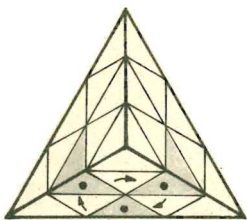


erreichen, so führt man zunächst 0 aus und erhält die Situation wie oben, dann $R0^{-1}R^{-1}0$ und anschließend wieder 0^{-1} . Führt man diese sechs Drehungen hintereinander aus, so merkt man, daß die letzten beiden Drehungen sich gerade wieder aufheben 00^{-1} ; wir haben also nur $0R0^{-1}R^{-1}$ auszuführen.

Wir wollen jetzt noch drei recht gute Operationen anfügen.

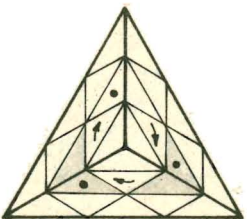
$LR^{-1}L^{-1}R^{-1}0^{-1}R^{-1}0$

Bild 7



$R0^{-1}R^{-1}0^{-1}R0^{-1}R^{-1}$

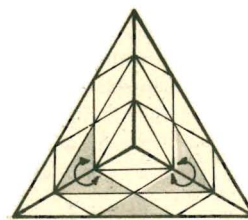
Bild 8



Als letzte Operation wollen wir noch eine angeben, die es uns erlaubt, Mittelsteine auf ihren Plätzen zu drehen.

$LR^{-1}L^{-1}R0^{-1}R0R^{-1}$

Bild 9



Durch systematisches Vorgehen und etwas Übung wird es jetzt sicher nicht sehr schwierig sein, das Ziel zu erreichen. Mit etwas mehr Übung wird es euch bald unter 1 Minute gelingen. Zwei Bemerkungen sind noch wichtig. Euch wird aufgefallen sein, daß wir nur jeweils drei Mittelsteine zyklisch tauschen können und nicht nur zwei und auch nur zwei Mittelsteine auf ihren Plätzen drehen können und nicht nur einen alleine. Das liegt aber nicht an unserem Unvermögen, sondern an der Pyramide. Man kann beweisen, daß es unmöglich ist, nur zwei Mittelsteine zu tauschen oder einen auf seinen Platz zu drehen (gerade Permutationen).

Man kann sich natürlich jetzt auch einen größeren Katalog von Operationen anlegen und bekommt dann für spezielle Situationen günstige Algorithmenschritte. Zum Beispiel liefert die erwähnte Operation $(R0)^3$ einen 5er Zyklus von Mittelsteinen-Vertauschungen. Für interessante neue Operationen, Fragen oder Hinweise ist der Autor stets dankbar.

H.-D. Gronau

Spiel, Aufgabe oder Sport?

Die Meisterschaft erinnerte stark an die Wettkämpfe der Gewichtheber – die Halle, das Podest, hinter welchem eine große Tafel stand, die Teilnehmer, die sich mit ihren Kräften (oder ihren Ideen?) vor ihrem Auftritt vor Richtern und Zuschauern versammelt hatten. Nur anstelle der Gewichte war auf dem Podium ein kleiner Tisch mit einem elektronischen Zeitnehmer aufgestellt, die Tafel zeigte keine Kilogramme an, sondern Sekunden, anstatt des Metallklanges herrschte von Zeit zu Zeit laises Knarren, ja, und die „Sportler“ selbst zeichneten sich nicht durch den kräftigen Körperbau der Schwerathleten aus.

Hier, in Budapest, fand am 5. und 6. Juni 1982 die erste Weltmeisterschaft mit dem Zauberwürfel Rubiks statt. Zu ihr kamen Meister aus 19 Ländern von drei Kontinenten – hauptsächlich Schüler und Mathematikstudenten.

Die Wettkämpfe verliefen folgendermaßen: Der Teilnehmer, der an der Reihe war, nahm vor den Augen der Zuschauer einen Würfel aus dem Köfferchen, studierte ihn 15 Sekunden lang. Dann hatte er, wie ein Turner, noch einige Sekunden lang Zeit, um im Geiste die Kombinationen zu überdenken. Und danach demonstrierte er schon seinen Algorithmus und natürlich seine Fingerfertigkeit. Es wurden drei Serien von Versuchen durchgeführt; ins Ergebnis ging die beste Zeit ein. Auf die Einhaltung der Regeln achtete eine Jury, deren Vorsitzender der Erfinder des Würfels, Professor E. Rubik, selbst war.

Die Resultate, die die „Großmeister des Würfels“ erzielten, waren verblüffend: Sogar die schlechteste Zeit lag nur wenig über 55 Sekunden. (Zum Vergleich sagen wir, daß ein

Untrainierter, der den Würfel kennt und sich der Niederschrift des Algorithmus bedient, ungefähr zwei Stunden benötigt.)

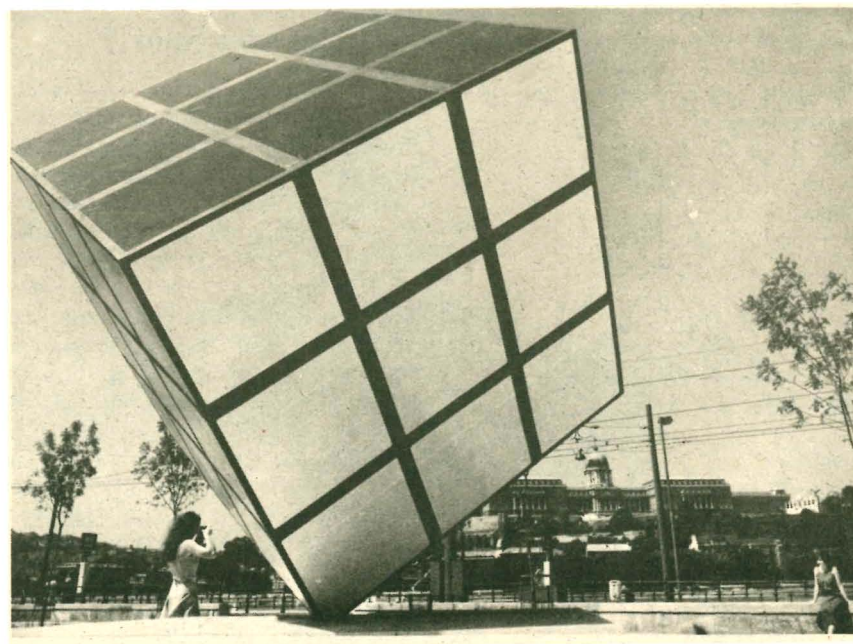
Es ging auch nicht ohne Zwischenfall ab: Der Meister aus Finnland war so in Eile, daß er nacheinander zwei Würfel zerbrach. Den 1. Platz belegte der sechzehnjährige Amerikaner Min Tai. Seine Zeit – 22,95 Sekunden! Was ist nun also der „Zauberwürfel“ – ein Spiel, eine mathematische Aufgabe oder ... eine neue Sportart?

Aus der sowj. math. Schülerzeitschrift „Quant“ (9/82), übersetzt und mitgeteilt von der eifrigen alpha-Leserin Petra Winter, Nünchritz, z. Zt. Studentin an der ABF Halle



Die Landesmeister von 19 Staaten, welche sich zur 1. Weltmeisterschaft einfanden.

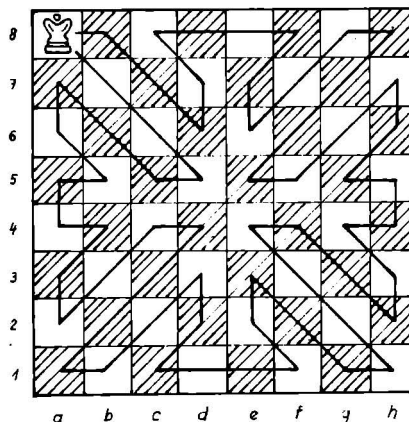
Ein großer Rubik-Würfel lenkt die Aufmerksamkeit der Spaziergänger am Ufer der Donau auf die stattgefundene Weltmeisterschaft.



Lösungen



Lösung zu: Figurenzüge über 64 Felder



Lösungen zu: Unsere Sprachecke

▲ 1 ▲ Zahlenquadrat

Schreibt die Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreise in der Zeichnung, daß die Summe der Zahlen in zwei beliebigen benachbarten Kreisen gleich der zwischen diesen Kreisen stehenden Zahl ist!

Lösung:

2	7	4
6	5	9
1	8	3

Die Knobelei durch Probieren zu lösen, ist ermüdend. Die Lösung ist erstaunlich einfach: Wir ermitteln die Summe der Zahlen, die vier sich nicht überschneidenden Paaren von Kreisen entsprechen, und subtrahieren sie von 45 ($1+2+\dots+9=45$). Das Resultat ist die Zahl, die in den neunten (nicht in einem Paar erfaßten) Kreis einzusetzen ist.

▲ 2 ▲ Magische Kreise

Schreibt die Zahlen von 1 bis 10 so in die kleinen Kreise in der Zeichnung, daß die Summen der Zahlen in den vier großen Kreisen alle gleich sind!

Lösung:

8		
3		
6	4	
7		
1	2	
9	5	10

Es ist auch eine andere Lösung möglich.

Die Zigaretten der Frau Puffem

▲ 3 ▲ Frau Puffem, viele Jahre lang eine starke Raucherin, entschloß sich, das Rauchen endlich aufzugeben. „Ich werde nur noch meine restlichen 27 Zigaretten verbrauchen“, versprach sie sich, „und niemals wieder rauchen.“ Es war ihre Gewohnheit, genau $\frac{2}{3}$ jeder Zigarette zu rauchen, und sie erkannte nun, daß sie mit Hilfe von Zigarettenpapier 3 Stummel zu einer neuen Zigarette zusammenfügen konnte.

Wieviele Zigaretten, einschließlich der 27 vorhandenen, konnte sie noch rauchen, bevor sie damit aufhörte?

$$\text{Lösung: } 27 \cdot \frac{1}{3} = 9; 9 \cdot \frac{1}{3} = 3; 3 \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

$$27 + 9 + 3 + 1 = 40.$$

Frau Puffem konnte noch 40 Zigaretten rauchen.

Ergänze zu 34!

▲ 4 ▲ Übertrage die folgenden 4 Figuren maßstabgerecht auf ein Blatt Zeichenpapier, schneide sie aus, und lege sie so zusammen, daß ein Quadrat entsteht! Die Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonalen soll 34 betragen.
Lösung:

1	11	6	16
8	14	3	9
15	5	12	2
10	4	13	7

▲ 5 ▲ Ein rundes Bassin wird von einem Gitter umgeben, das 50 cm vom Rand entfernt angebracht ist; die Länge dieses Gitters beträgt 22 m. Wie groß ist der Durchmesser des Bassins?

Lösung: Der Radius des äußeren Kreises ist $r = u : 2\pi = 22 \text{ m} : 6,28 \approx 3,5 \text{ m}$. Dann ist der Radius des Bassins $3,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 3 \text{ m}$ und der Durchmesser $3 \text{ m} \cdot 2 = 6 \text{ m}$.

Lösungen zu: Gute Grundkenntnisse gesucht – auch ein wenig Überlegung

Klasse 4

▲ 1 ▲ Zur Erarbeitung der Lösung sei die folgende Tabelle gewählt. Zunächst werden die angegebenen Bedingungen eingetragen. Dann wird ergänzt, und man erhält schließlich:

	Paris	Marseille	Lyon	Toulouse
Claude	nein	ja	nein	nein
Eddy	nein	nein	ja	nein
Philippe	nein	nein	nein	ja
Jacques	ja	nein	nein	nein

Die Auflösung beginnt bei Philippe, geht über Eddy, danach zu Claude, und schließlich endet sie bei Jacques. Marseille ist die einzige der vier Städte, die am Meer liegt.

▲ 2 ▲ Die Gesamtkosten betragen 332 Francs.

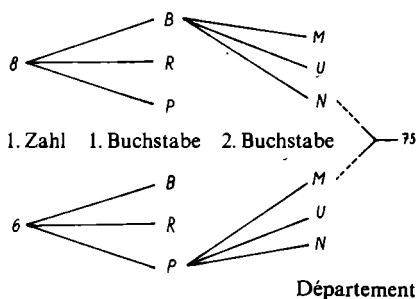
▲ 3 ▲ Für die Abstände auf der Karte wurden gemessen: Verdun–Metz: 63 mm; Metz–Pont-a-Mousson: 27 mm; Nancy–Void: 44 mm. Ein Millimeter auf der Karte entspricht einem Kilometer in der Natur. Damit erhalten wir für die wirklichen Abstände: Verdun–Metz: 63 km; Metz–Pont-a-Mousson: 27 km; Nancy–Void: 44 km.

▲ 4 ▲ ohne Lösungsangabe

Klasse 5

▲ 1 ▲ Überlegen wir uns zunächst eine Möglichkeit, die aus den Zeugenaussagen folgt: 8 R M 75

Um alle Möglichkeiten zu erfassen, entwickeln wir das folgende Schema. Vervollständige es!



Betrachten wir jeweils die Anzahl der verschiedenen Zeichen pro Position, erhalten wir:

2 bzw. 3 bzw. 3 Zeichen. Damit muß Inspektor Dupond $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ verschiedene Autos ermitteln.

▲ 2 ▲ 1. Vorstellung: 222 Zuschauer, 2. Vorstellung: 160 Zuschauer, 3. Vorstellung: 60 Zuschauer, Gesamtzahl: 442 Zuschauer.

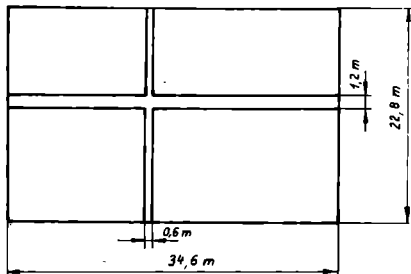
▲ 3 ▲ Man trägt die gegebenen Werte in die Tabelle ein, ergänzt und erhält folgende Resultate:

	Start	Pause	Ziel
Jean	3972	4001	4044
Pierre	958	987	1030
Dominique	5134	5163	5206

Die gegebenen Werte sind unterstrichen.

▲ 4 ▲ Francis muß täglich 10 Tropfen nehmen. Damit verbraucht er ungefähr $\frac{1}{2} \text{ cm}^3$ täglich. Daraus folgt, daß Francis in ungefähr 20 Tagen eine volle Flasche geleert hat.

▲ 5 ▲ Man beachte zuerst, daß die Fläche der Wegkreuzung nicht zweifach in die Rechnung eingeht. Dann ergibt die Rechnung $54,48 \text{ m}^2$. Das Ergebnis wird sinnvoll gerundet, und man gibt $54,5 \text{ m}^2$ zu bestreuer Fläche an.



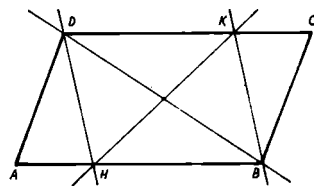
Klasse 6

▲ 1 ▲ Da der Wein so abgefüllt wird, daß die gleiche Zahl Flaschen von jeder Art erhalten wird, betrachtet man zunächst ein Paar Flaschen (d. h. je eine Flasche jeder Art). Ein Paar enthält insgesamt 110,5 cl Wein. Wegen des Restes von 25 dl wurden vom Wirt 110,5 l abgefüllt, das sind genau 100 Paare. Also wurden 100 Flaschen jeder Sorte abgefüllt.

▲ 2 ▲ Angenommen, es ist unter den gegebenen Bedingungen eine Viertelstunde vergangen. Dann wurde die Badewanne in diesen $10 + 5 \text{ Minuten} \cdot \frac{1}{2}$ mal gefüllt und 1 mal geleert. Also ist sie halbvoll. Dann muß sie nach 30 Minuten voll sein.

▲ 3 ▲ Da ABCD ein Parallelogramm ist, gilt: $DC \parallel AB$. Damit gilt auch $DK \parallel HB$. Nach Voraussetzung ist auch $DH \parallel KB$. Also ist auch HBKD ein Parallelogramm.

DB ist Diagonale sowohl im Parallelogramm ABCD als auch im Parallelogramm HBKD. Da sich Diagonalen in jedem Parallelogramm halbieren, haben AC, BD und HK den gleichen Mittelpunkt.



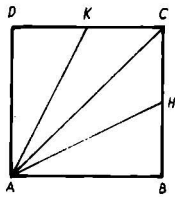
Zutat	Preis
$\frac{3}{4} \text{ kg}$ Mehl	1,80 Francs
6 Eier	2,70 Francs
$\frac{1}{4} \text{ kg}$ Butter	4,40 Francs
150 g Zucker	0,45 Francs
8 cl Rum	2,00 Francs
Backpulver	0,25 Franc

Gesamtkosten 11,60 Francs
Der Kuchen kostet 11,60 Francs.

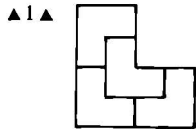
▲ 5 ▲ Weil $\overline{BH} = \overline{HC}$ und $\overline{AB}$ Höhe der Dreiecke ABH und AHC ist, haben in beiden Dreiecken die Grundlinien gleiche Längen und auch die Höhen sind längengleich. Damit sind ABH und AHC flächengleich. Ebenso schließt man für ACK und AKD. Da ABCD ein Quadrat ist, gilt schließlich die Flächengleichheit aller vier Dreiecke.
Flächenberechnung:

$$F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{27 \cdot 54}{2} = 27^2 = 729$$

Die Fläche beträgt 729 mm².

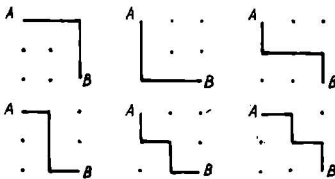


Lösungen zu: Geometrische Plaudereien

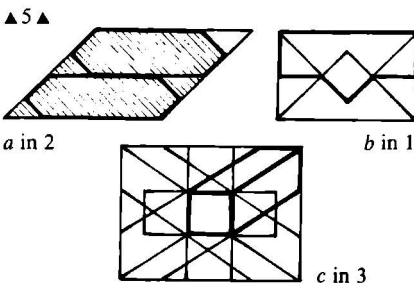


▲ 2 ▲ c)

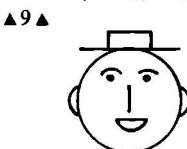
▲ 3 ▲ 6 verschiedene Wege



▲ 4 ▲ 5 Quadrate, 21 Rechtecke
(mit Quadraten), 24 Dreiecke



▲ 8 ▲ a/keine; b/8; c/4; d/2



▲ 10 ▲ a, b, d

▲ 11 ▲ z. T. nämlich: a in 4; b in 3; c kommt nicht vor.

▲ 12 ▲ 1c, 2a, 2b, 3a, 3b, 4b, 4c

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptogramm

Aus Zahlentafeln stellen wir fest:

1. Die Quadratzahlen zu 12 und 21 – also 144 und 441 – haben an der Zehnerstelle die

Ziffer 4; sie entsprechen daher den Zeilen 1 und 3 im Fall a).

2. Nur drei dreiziffrige Zahlen, die Quadratzahlen ganzer Zahlen sind, haben an der Einer- und Hunderterstelle gleiche Ziffern $121 = 11^2$, $484 = 22^2$, $676 = 26^2$.

Die Zahl 121 entspricht aber nicht dem Kryptogramm b). Der Buchstabe L kann nicht die Zahl 1 bedeuten, weil es keine dreiziffrige Quadratzahl (ganzer Zahlen) gibt, deren Zehnerstelle die Ziffer 1 ist.

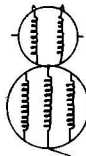
Für die zweite Zeile der Tabelle a) paßt offenbar die Zahl 484. Für die zweite Zeile der Tabelle b) bleibt nur die Zahl $676 = 26^2$, und für die Spalten bleiben die Zahlen $169 = 13^2$ und $961 = 31^2$.

Damit ergeben sich die Lösungen:

a) 144 b) 161
484 676
441 961

(übersetzt von O. Langer, Döbeln)

Welches Muster fehlt?



Psychologisches Praktikum

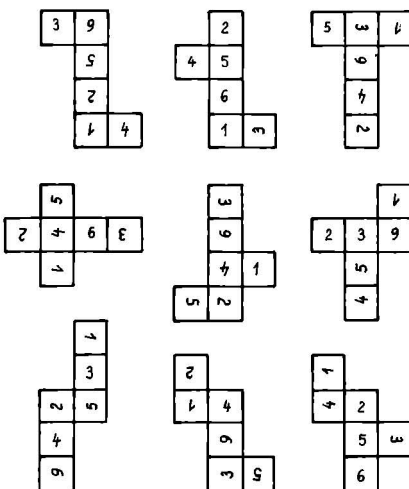
1. Serjosha und Ljuba sind 16. Ljuba bekam 18 Astern. 2. Mischa und Olga sind 17. Olga hat 19 Mimosen geschenkt bekommen. 3. Juri und Mascha sind 18. Mascha erhielt 16 Rosen. 4. Kolja und Lisa sind 19. Lisa wurden 17 Tulpen geschenkt. 5. Igor und Katja sind 20. Katja bekam 20 Nelken.

Etwas Sonderbares

Beide Ergebnisse sind gleich:
1083676269.

Würfelnetze

(übersetzt von Dr. R. Hofmann, Leipzig)



Sind alle vier Bilder gleich?

2. Bild: Tribünenstufe; Schirm der Mütze des Jockeys darunter; Punkt am Hals des Pferdes; Strich unter den Buchstaben der Tafel oben rechts. 3. Bild: Teil der Decke des

Pferdes im Hintergrund; Bauchgurt des Pferdes links; Zügelteil des Pferdes vorn; hinterer Teil des Peitschenstiels des Jockeys vorn. 4. Bild: Die 1. Fahne von links oben; die 6 auf der Satteldecke des linken Pferdes; Hufeisen des Pferdes vorn; Schwanz des Pferdes hinten.

Knifflige Frage

Aus einer Vielzahl von Lösungen bieten wir die folgenden (fehlende Ziffern davor in Klammern):

- (0) $483 \cdot 12 = 5796$ (5) $409 \cdot 18 = 7362$
(1) $092 \cdot 53 = 4876$ (6) $253 \cdot 19 = 4807$
(2) $453 \cdot 19 = 8607$ (7) $326 \cdot 15 = 4890$
(3) $168 \cdot 54 = 9072$ (8) $154 \cdot 63 = 9702$
(4) $392 \cdot 18 = 7056$ (9) $406 \cdot 13 = 5278$

Von der Ellipse zum Kreis

Ellipse, Speile, Spiel, Ilse, Eis, Ei, e, Er, Res, Reis, Kreis.

Lösungen zu: Mathematik macht Freude, Heft 6/82

- 1 $45307 + 213 + 47267 = 92787$
2 $5 \cdot 2697 = 13485$ oder $5 \cdot 9712 = 48560$
3 $5 \cdot 18467 = 92335$
4 $961 + 42183 + 7218 = 50362$ oder $941 + 52183 + 7218 = 60342$
5 $76092 + 76390 = 152482$ oder $79068 + 79360 = 158428$
6 $1212 + 2121 = 3333$
7 $9 : 3 = 3$; $7 \cdot 2 = 14$; $7 + 10 = 17$
8 $281 \cdot 332 = 93292$
9 $10 + 12 = 22$; $12 : 6 = 2$; $22 : 2 = 11$
10 $41 + 7 = 48$; $19 - 2 = 17$; $22 + 9 = 31$
11 $714 + 734 = 1448$ oder $816 + 846 = 1662$
12 $289 : 17 = 17$
13 $\sqrt{50625} = 225$

Lösung zu:

Wägaufgabe des Leonardo Fibonacci, Heft 6/82

Es dürfen beide Wagschalen mit Wägesteinen belastet werden. Dies bedeutet, daß auch Wägestücke subtrahiert werden können. Die Frage ist somit: Welche vier Zahlen a, b, c, d sind so beschaffen, daß jede natürliche Zahl bis 40 teils durch Addition, teils durch Subtraktion wenigstens einer und höchstens vier dieser vier Zahlen erhalten werden kann? Die Zahlen $a=1$, $b=3$, $c=9$, $d=27$ leisten das Verlangte!

In der Tat: Mit den vier Potenzen von 3: 1, 3, 9, 27 kann man alle Zahlen von 1 bis 40 in der gewünschten Form darstellen:

- $1 = 1$
 $2 = 3 - 1$
 $3 = 3$
 $4 = 3 + 1$
 $5 = 9 - 3 - 1$
 $6 = 9 - 3$
 $7 = 9 - 1$
 $8 = 9$
 $9 = 9$
 $10 = 9 + 1$
 $11 = 27 - 9 - 3 - 1$
 $12 = 27 - 9 - 3$
 $13 = 27 - 9 - 1$
 $14 = 27 - 9$
 $15 = 27 - 3 - 1$
 $16 = 27 - 3$
 $17 = 27 - 1$
 $18 = 27$
 $19 = 27 + 1$
 $20 = 27 + 3 - 1$
 $21 = 27 + 3$
 $22 = 27 + 1$
 $23 = 27 + 3 - 1$
 $24 = 27 + 3$
 $25 = 27 + 1$
 $26 = 27$
 $27 = 27$
 $28 = 27 + 1$
 $29 = 27 + 3 - 1$
 $30 = 27 + 3$
 $31 = 27 + 1$
 $32 = 27 + 3 - 1$
 $33 = 27 + 3$
 $34 = 27 + 1$
 $35 = 27 + 3 - 1$
 $36 = 27 + 3$
 $37 = 27 + 1$
 $38 = 27 + 3 - 1$
 $39 = 27 + 3$
 $40 = 27 + 9 + 3 + 1$

Allgemeiner gilt übrigens, daß man mit Hilfe der addierten oder subtrahierten Potenzen der 3:

$1, 3, 9, 27, 81, \dots, 3^n$
alle Zahlen von 1 bis $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$ darstellen kann;

also mit 1, 3, 9, $27=3^3$ alle Zahlen von 1 bis $40=\frac{3^4-1}{2}$,
mit 1, 3, 9, 27, $81=3^4$ alle Zahlen von 1 bis $121=\frac{3^5-1}{2}$,
mit 1, 3, 9, 27, 81, $243=3^5$ alle Zahlen von 1 bis $364=\frac{3^6-1}{2}$ usw.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Pólya, Heft 6/82

▲ 2265 ▲ a) a bezeichne das Alter des Kapitäns, b die Länge seines Bootes und k die Anzahl seiner Kinder. Es gilt: a, b, k sind natürliche Zahlen größer als 1, und es ist $abk = 32118$. Wir zerlegen diese Zahl in Primfaktoren, wobei wir drei Faktoren benötigen. Es gibt folgende Möglichkeiten:
 $32118 = 6 \cdot 53 \cdot 101 = 3 \cdot 101 \cdot 106 = 3 \cdot 53 \cdot 202 = 2 \cdot 101 \cdot 159 = 2 \cdot 53 \cdot 303 = 2 \cdot 3 \cdot 5353$. Es verbleibt genau die Möglichkeit $a=53$, $b=101$, $c=6$.

b)	Brote	Eis	Brause
Bernd	4	2	3
Alfred	2	6	1
Christian	3	1	5

Diesmal wird die Zahl 9 in drei Summanden zerlegt, und es ergeben sich gewisse Möglichkeiten, von denen genau eine Lösung ist.

c) Jeder Mann kauft x Dinge zu x Pf, bezahlt also x^2 Pf. Jede Frau kauft y Dinge zu y Pf, bezahlt also y^2 Pf. Es gilt $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 75$ Pf.

Es ergibt sich:		Frau	Mann
$y-x$	$y+x$	y	x
1	75	38	37
3	25	14	11
5	15	10	5

Hieraus ergeben sich folgende Namen: Ann Lehmann (38), Bernd Lehmann (37), Johannes Schmidt (11), Betty Müller (10), und es verbleibt Marion Schmidt.

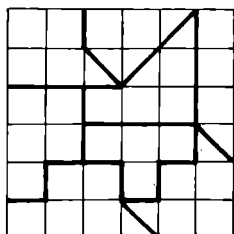
Hier wird also die Zahl 75 in die Differenz zweier Quadrate zerlegt.

Lösung zu: Knobeleien am laufenden Band, Heft 6/82

Logelei: Rechts unten steht die 1.

Würfelei: Bei Würfeln ist die Summe gegenüberliegender Augenzahlen immer 7, also $4+7=3+2=5$.

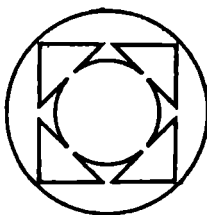
Legespiel:



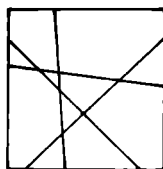
Vexierbild:

Man betrachte das Bild von links. Der Hund ist unter dem Arm. Augen auf! Bild 6

In einem Zug:



Streckenverteilung:



Vier Lampen: Lampe B

Park-Prüfung: AZ-1-99; BY-2-98; CX-3-97; DW-4-96; EV-5-95; FU-6-94; GT-7-93.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/1982:

Ma 5 ■ 2238 Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise mit den Grundziffern a, b und c . Diese Zahl läßt sich auch durch $z = 100a + 10b + c$ darstellen. Nun gilt für das Endergebnis x

$$x = [(a \cdot 2 + 3) \cdot 5 + b] \cdot 10 + c,$$

$$x = (10a + 15 + b) \cdot 10 + c,$$

$$x = 100a + 10b + c + 150,$$

$$x - 150 = z.$$

Bernd braucht vom Endergebnis nur 150 zu subtrahieren, um die von Fritz gedachte dreistellige natürliche Zahl zu erhalten.

Ma 5 ■ 2239 Es sei n die Anzahl der Pioniere der Brigade A; dann gilt $(n-2) \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 200$, also $(n-2) \cdot 40 = 160$, $n-2=4$, $n=6$. Der Brigade A gehören 6 Pioniere an. Der Brigade B gehören $200:40=5$ Pioniere an. Es sei m die Anzahl der Pioniere der Brigade C; dann gilt $(m-1) \cdot 32 + 8 = 200$, also $(m-1) \cdot 32 = 192$, $m-1=6$, also $m=7$. Der Brigade C gehören 7 Pioniere an. Somit gehören 18 Pioniere zu dieser Pioniergruppe.

Ma 5 ■ 2240 Zur Erläuterung des Lösungsweges schreiben wir die Aufgabe wie folgt: $ab8816:4 = 1c2de4$. Daraus folgt $1c2de4 \cdot 4 = ab8816$.

Wegen $4 \cdot 4 = 16$ muß $e=0$ sein, denn nur $4 \cdot 0 = 0$ und $0+1=1$. Wegen $4 \cdot 2 = 8$ und $4 \cdot 7 = 28$ könnte $d=2$ oder $d=7$ gelten. Wegen $4 \cdot 7 = 28$ und $4 \cdot 2 = 8$ und $8+2=10$ und $0+8$ entfällt $d=7$. Also gilt $d=2$. Wegen $4 \cdot 11 = 44$ lautet die richtig gelöste Aufgabe $448816:4 = 112204$.

Ma 5 ■ 2241 Angenommen, am ersten Tag wurden der ersten Schale n Äpfel entnommen; in dieser Schale verblieben dann $(10-n)$ Äpfel. Der zweiten Schale wurden somit $(8-n)$ Äpfel entnommen. Das sind zusammen genau 8 Äpfel. Am ersten Tag erhielt jedes der vier Kinder 2 Äpfel. Jede der beiden Schalen enthielt dann 6 Äpfel.

Angenommen, am zweiten Tag wurden der ersten Schale m Äpfel entnommen; in dieser Schale verblieben dann $(6-m)$ Äpfel. Der zweiten Schale wurden somit $(4-m)$ Äpfel entnommen. Das sind zusammen genau 4 Äpfel. Am zweiten Tag erhielt jedes der vier Kinder 1 Äpfel. Für den dritten Tag ver-

blieben 8 Äpfel. Am dritten Tag erhielt jedes der vier Kinder nochmals 2 Äpfel.

Ma 5 ■ 2242 Für die Anzahl n der Fotos gilt $87 < n < 103$. Nun ist n ein Vielfaches von 3 und von 4, also ein Vielfaches von 12. Daraus folgt $n=96$. Ferner gilt $96-96:3-96:4=96-32-24=40$. Es weisen 40 Fotos verschiedene Motive auf.

Ma 5 ■ 2243 Aus (3) folgt: Peter war besser als Mario, Mario besser als Uwe. Peter war besser als Rolf, Rolf besser als Uwe. Aus (1) folgt: Uwe war besser als Olaf. Aus (3) und (1) folgt deshalb, beginnend mit dem Besten, die Reihenfolge Peter, Mario, Uwe, Olaf oder die Reihenfolge Peter, Rolf, Uwe, Olaf. Da nach (1) Peter nicht die Goldmedaille errang, einer dieser sechs Schüler aber die Goldmedaille erhielt, kann dies nur Bert sein; also war Bert besser als Peter. Da Rolf eine Medaille erhielt, kann dies nur für die Bronzemedaille zutreffen. Deshalb war Rolf besser als Mario. Wir erhalten somit genau eine Reihenfolge; sie lautet: Bert (Goldmedaille), Peter (Silbermedaille), Rolf (Bronzemedaille), Mario (4. Platz), Uwe (5. Platz), Olaf (6. Platz).

Ma 6 ■ 2244 Es sei s_A der Weg, den das in A gestartete Fahrzeug, s_B der Weg, den das in B gestartete Fahrzeug bis zum Zeitpunkt der Begegnung zurückgelegt hat; dann gilt

$$s_A = \frac{2}{3} \cdot s_B \text{ und } s_A + s_B = 100 \text{ km. Durch Einsetzen erhalten wir } \frac{2}{3} \cdot s_B + s_B = 100 \text{ km,}$$

$$\frac{5}{3} \cdot s_B = 100 \text{ km, } s_B = 60 \text{ km, also } s_A = 40 \text{ km.}$$

Für die Zeit, die das schnellere Fahrzeug bis zum Zeitpunkt der Begegnung benötigte, gilt demnach $t_B = \frac{60}{80} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ min}$. Die beiden Fahrzeuge treffen sich nach 45 Minuten.

Das langsamere Fahrzeug hatte eine mittlere Geschwindigkeit von $\frac{40 \cdot 4 \text{ km}}{3 \text{ h}} \approx 53,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

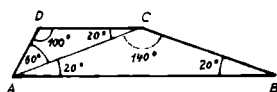
Ma 6 ■ 2245 Angenommen, Aussage (3) ist falsch, und die Aussagen (1) und (2) sind wahr. Aus (1) folgt dann: Birgit nahm an der Russisch-Olympiade teil. Aus (3) folgt: An der Mathematik-Olympiade nahm doch ein Mädchen teil, und zwar Doris. Dann nahm Frank an der Physik-Olympiade teil. Die übrigen Annahmen, daß entweder Aussage (1) oder Aussage (2) falsch sind, führen zu einem Widerspruch, wovon man sich leicht selbst überzeugen kann.

Ma 6 ■ 2246 Es gilt $a > 25$, $b > 25$, $c > 25$, also $a+b+c > 75$, und $a+b+c=100$. Aus $17|a$ und $a > 25$ folgt $a=34$. Für $a=51$ wäre $b+c=49$, was wegen $b+c > 50$ nicht möglich ist. Aus $15|c$ und $c > 25$ folgt $c=30$. Für $c=45$ wäre $a+c=96$, also $b=4$, was wegen $b > 25$ nicht möglich ist. Daraus folgt $b=100-34-30=36$. Die drei Freunde A, B bzw. C sind 34, 36 bzw. 30 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2247 Angenommen, es sind g Gänse, e Enten, p Puten und h Hühner. Dann gilt $g+e+p+h=16$ und $g=e$ und $e+p=h$. Durch Einsetzen erhalten wir $e+e+p+e+p=16$, also $3e+2p=16$. Nun muß e eine gerade natürliche Zahl sein. Für $e=6$ gilt $3 \cdot 6=18$; wegen $18>16$ ist dies nicht möglich.

Es gilt somit $e=2$ oder $e=4$. Wenn $e=2$, so $p=5$, was wegen $e>p$ nicht möglich ist. Auf dem Hof sind folglich 4 Enten, 4 Gänse, 2 Puten und 6 Hühner.

Ma 6 ■ 2248 Aus $\overline{AC}=\overline{BC}$ folgt $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB$. Der Winkel $\sphericalangle CAB$ hat somit die Größe 20° . Der Winkel $\sphericalangle DAB$ hat die Größe $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Somit hat der Winkel $\sphericalangle CAD$ die Größe $80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe $180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ$. Der Winkel $\sphericalangle BCD$ hat die Größe $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. Der Winkel $\sphericalangle ACD$ hat somit die Größe $160^\circ - 140^\circ = 20^\circ$.



Ma 7 ■ 2249 Es sei $z=100a+10b+c$ eine dreistellige natürliche Zahl; dann ist $q=a+b+c$ ihre Quersumme. Ferner gilt $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 100a+10b+c &= 12(a+b+c), \\ 100a+10b+c &= 12a+12b+12c, \\ 2b &= 88a-11c, \\ 2b &= 11(8a-c). \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq b \leq 9$ und wegen $8a-c \geq 0$ kann nur $b=0$ gelten. Daraus folgt weiter $8a-c=0$, also $c=8a$. Wegen $a \neq 0$ und $c \leq 9$ kann nur $a=1$ und $c=9$ gelten. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 108, und es gilt $108=12(1+0+8)$.

Ma 7 ■ 2250 Der eine Summand sei n ; der zweite Summand ist dann $90-n$. Nun gilt

$$\frac{1}{4} \cdot n + \frac{3}{4} \cdot (90-n) = 30,$$

$$\frac{1}{4}n + \frac{270}{4} - \frac{3}{4}n = 30, \quad n=75.$$

Die beiden natürlichen Zahlen lauten 75 und 15; denn es gilt

$$\frac{1}{4} \cdot 75 + \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{75+45}{4} = \frac{120}{4} = 30.$$

Ma 7 ■ 2251 Die vier Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$, $\triangle DHG$ sind untereinander kongruent; sie stimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel überein. Außerdem sind diese Dreiecke gleichschenkelig-rechtwinklig. Die Winkel $\sphericalangle AEH$ und $\sphericalangle BEF$ haben somit die Größe 45° ; folglich hat der Winkel $\sphericalangle HEF$ die Größe 90° . Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$. Das Viereck $EFGH$ ist deshalb ein Quadrat. Nun gilt

$$a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = 50, \quad a^2 - \frac{a^2}{2} = 50, \quad \frac{1}{2}a^2 = 50,$$

also $a^2=100$ und somit $a=10$.

Das Quadrat $ABCD$ hat eine Seitenlänge von 10 cm.



Das Lebensalter Diophants

In der Algebra werden zwei Arten von Gleichungen unterschieden: Eine Gleichung, in der nur eine einzige unbekannte Größe enthalten ist, heißt eine „bestimmte Gleichung“ (z. B. $x^2+px=q$); eine solche, worin zwei oder mehr Variable vorkommen, heißt eine „unbestimmte Gleichung“ (z. B. $x^2+y^2=z^2$). Die Beschäftigung mit den folgenden zwei Problemen führte zur Entwicklung der Algebra als Teilwissenschaft der Mathematik:

1. Die Lösung von (algebraischen) bestimmten Gleichungen in Radikalen (durch allgemeine „Auflösungsformeln“).
2. Die Lösung unbestimmter Gleichungen in rationalen (oder ganzen) Zahlen.

Mit dem zweiten Problem beschäftigte sich der griechische Mathematiker Diophant ausführlich in einem Buch mit dem Titel „Arithmetica“, einer Sammlung von 189 sorgfältig ausgewählten Aufgaben mit Lösungen, die zur Illustration bestimmter wohldurchdachter Methoden dienten. Die „Arithmetica“ diente sowohl den Gelehrten im mittelalterlichen Osten als auch den Mathematikern im 16. und den folgenden Jahrhunderten, wie Bombelli, Vieta, Fermat, Euler, Jacobi, Gauß, Poincaré, als Ausgangspunkt ihrer Studien. Über das Leben Diophants gibt es nur spärliche und unzuverlässige Quellen. Er wird der „Alexandriener“ genannt. Wahrscheinlich lebte er im 3. Jh. u. Z. in Alexandria, einem Zentrum des wissenschaftlichen Denkens in der Antike. Alles was wir von seinem Lebenslauf wissen, ist in dem folgenden Rätselgedicht überliefert. (Als Verfasser gilt Metrodorus, der im 4. oder 6. Jh. u. Z. gelebt haben soll.)

„Hier dies Grabmal deckt Diophantus.

Schaut das Wunder!

Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.

Knabe zu sein gewährte ihm Gott

ein Sechstel des Lebens;

Noch ein Zwölftel dazu,

sproßt' auf der Wange der Bart;

Dazu ein Siebentel noch,

da schloß er das Bündnis der Ehe,

Nach fünf Jahren entsprang

aus der Verbindung ein Sohn.

alpha-Wettbewerb 1981/82

Abzeichen in Gold

Für siebenjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Kirsten Rechner, Baruth; Marc Schewe, Berlin; Henry Fischer, Bitterfeld; Tilman Völzke, Böhlen; Uta Boldt, Burg Stargard; Christine Pompe, Royald Lenk, beide Cottbus; Petra Sarodnik, Dallgow; Gabriele Sprötte, Döbeln; Manuela Schwenke, Dohna; Ralph Gruber, Stefan Edelmann, Birgit Wittwer, Ulf Riechen, alle Dresden; Reinhard Weißnicht, Eberswalde; Thomas Pigrosch, Eisleben; Matthias und Susanne Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Siegfried Obst, Eberswalde; Karsten Meißner, Forst; Matthias Bauer, Genthin; Kerstin Schneider, Goßwitz; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Petra Brandstädter, Güstrow; Roger Fischl, Günter Schlielinsky, beide Halle-Neustadt; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf.

Güstrow; Roger Fischl, Günter Schlielinsky, beide Halle-Neustadt; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Andreas Berner, Karl-Marx-Stadt; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Ralf Häntsch, Köthen; Stefanie Begau, Ute Hansmann, Rainer Nolte, Meike Pfützenreuter, Jörg Drechsel, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Leipzig; Birgit Arndt, Loitz; Matthias Neundorf, Carola Hönn, beide Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Dieter Seifert, Pinnau; Sigurd Assing, Karsten Milek, Axel Schulz, alle Potsdam; Tim Planke, Premnitz; Lutz Hübschmann, Raschau; Uwe Mattutat, Ina und Manfred Hille, alle Riesa; Anette Müller, Ines Dalisda, beide Rostock; Matthias Brandt, Michael Gerth, beide Schmalkalden; Anke Krukenberg, Schönberg; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Klaus Pfeiffer, Taubach; Christine Mohr, Teterow; Joachim Braun, Thalberg; Lars Herrmann, Töplitz; Birgit Schmidt, Weißwasser; Ralph Nemitz, Wittenförden; Uwe Eix, Steffen Klimpel, beide Wolgast; Rolf Heubner, Wolfen; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl Oertel, Zeitz; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Kerstin Hoffmann, Ingrid Soblik, Gabriele Schubert, alle Zittau; Birgit Schenke, Zschornowitz; Uta Escher, Zwickau

Für sechsjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Sven und Jens Fache, Altenburg; Roland Hesse, Bad Blankenburg; Silke Schröder, Bad Kleinen; Margret Detsch, Bad Salzungen; Silke Rechner, Baruth; Uwe Prochno, Berlin; Sabine Mantel, Berlin; Heidrun Sourell, Bernau; Gabriele Kabel, Beyernaumburg; Andreas Jock, Blankenfelde; Marlis Schröder, Thomas Streich, beide Brandenburg; Cornelia Kopte, Callenberg; Roland Damm, Christian Kunze, Karsten Mittag, alle Cottbus; Uwe Schütze, Camin; Ulrich Schuster, Demitz

Wehe das Kind, das vielgeliebte,
die Hälfte der Jahre

Hatt' es des Vaters erreicht,
als es dem Schicksal erlag.

Drauf vier Jahre hindurch durch
der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend auch er kam
an das irdische Ziel.“

(Zitat nach Georg H. F. Nesselmann.)

Wie alt wurde Diophant?

(Die Aufgabe führt auf eine lineare bestimmte Gleichung.) H. Pieper

Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Frank Sardonick, Dallgow; Mario Dette, Astrid Schunck, Ruth Backhaus, alle Dingelstädt; Heiko Richter, Dietlas; Mario Jäpel, Dohna; Karsten Zosel, Grit Kammer, Maja Oelschlägel, Ute Schulze, Titus Ziegler, Catherin Engel, Lutz und Heike Lauter, Brigitte Rotter, Stefan Franze, Tobias Mahlow, Werner und Christine Kirsch, Rainer Schultke, alle Dresden; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wollert, Edderitz; Matthias Eger, Floh; Fred Mettke, Antje Hollstein, beide Frankfurt (Oder); Thomas Heidrich, Freiberg; Sylvia Döring, Gotha; Achmed und Britta Schulz, beide Greifswald; Jörn Wintsche, Grimma; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Anke Misch, beide Halberstadt; Frank Siebert, Matthias Schünemann, Dany Lindenberg, alle Halle; Cordelia Krippner, Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Frank Pampel, Heinrichsort; Axel Herbst, Hohendodeleben; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Kerstin Vinke, Kandelin; Eske Röhrich, Andreas Niepel, Ricarda Damm, alle Karl-Marx-Stadt; Elke Willek, Kriebitzsch; Grit Heyde, Latdorf; Uta Hubrig, Leipzig; Stefan Hähnel, Heiko Schinke, beide Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Gerlach, Lübs; Frank Thieme, Marienberg; Jürgen Welz, Meyenburg; Beate Krause, Menteroda; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Olaf Wender, Mühlhausen; Kerstin Paul, Nordhausen; Petra Köbke, Oranienburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Steffen Gottschlich, Pirna; Manuela Krause, Plauen; Torsten Kühn, Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Frank Berndt, Radeburg; Andreas Korb, Raschau; Gunther Siebenhaar, Roßdorf; Gitta Schöne, Rostock; Ines Gülden, Roitzsch; Jürgen Schmalisch, Rotta; Ronald Bojarski, Saßnitz; André Wiegand, Bernd Winkelmann, Birgit Nöbler, Sibylle Heuer, alle Schmalkalden; Sylke Lüder, Schönborn; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Jens Hoffmann, Sebnitz; Stephan Meyerhöfer, Strassburg; Ralph-Birger Häfner, Steinbach-Hallenberg; Doris Grünler, Thierbach; Silke Raßmann, Annette Stephan, beide Unterbreizbach; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Beate Hentschke, Sylvia Feige, beide Weißwasser; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Jörg Steinbach, Zwickau; Ines Hoffmann, Weißwasser; Gudrun Zirnstein, Pirna; Margit Mollhoff, Piesau;

Für fünfjährige Teilnahme

Arnt Löber, Ahrenshoop; Frank Schönherr, Anklam; Beate Zimmer, Asbach; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckardt, Manuela Winges, Kerstin Messerschmidt, alle Bad Liebenstein; Berit Kleinbauer, Andris Möller, Holger Neye, Udo Bellack, René Damm, Susanne Krüger, Kerstin Kantem, alle Berlin; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Kai Fischer, Bitterfeld; Kerstin Westphal, Borna; Jens Przybilla, Mathias Tauscher, Susanne Kraska, alle Breitenworbis; Heike Köhler, Callenberg; Uta Bolz, Andreas Heinze, Peter Strempele, Karsten Kehler, alle Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ulf Fache, Culitzsch; Holger Schmidt, Demmin; Katrin und Dieter Horn, Dessau; Beate Meinhardt, Thomas Strecker, beide Dingelstädt; Ines Lauter, Pedro Thiele, Martin Bismark, Horst Seidel, Christian Donath, Susann Piry, Heiko Ringel, Astrid Roll, Jens Danzer, Gerald Eichler, alle Dresden; Claudia Pleyer, Eisenach; Uta Heinecke, Eisenberg; Enrico Dietrich, Stefan Nitzsche, beide Elsterwerda; Lars Mönch, Kerstin Heer, Bodo Bricks, alle Erfurt; Mathias Gerlach, Friedeburg; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Christian Röhl, beide Gräfenhainichen; Thomas Wedekind, Grimma; Bianka Potthoff, Gr. Wüstenfelde; Peter Meusel, Guben; Annett Eichner, Halle-N.; Thomas Benusch, Heidrun Schmidt, beide Hoyerswerda; Gabi Missal, Insel; Detlef Ritter, Jena; Andreas Paukert, Karbow; Katrin Richter, Hendrik Pönisch, beide Karl-Marx-Stadt; Silvia Kriesche, Klaus;

Axel Dübler, Klausdorf; Kerstin Vogel, Kmhlen; Edith Löffler, Königshain; Ingolf Raabe, Langen-grassau; Andreas Helbig, Langenleuba-Ndr.; Frank Herzog, Langenwolchendorf; Uta und Sabine Mersowsky, Langewiesen; Matthias Heller, Lauscha; Carmen Schwab, Sabine Hartung, Solveig Woitek, alle Leinefelde; Andreas Eißler, Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Angela Zschörpel, Maltitz; Norbert Fuchs, Meiningen; Ute Krampitz, Mengersgereuth; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Jens Schumacher, Metschow; André Wiegand, Mittelschmalkalden; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Heike Engelhard, Niederschwarzwerfen; Timo Kaiser, Niederschmalkalden; Volker Franke, Petra Hahn, beide Nordhausen; Andy Marr, Oberschöna; Olaf Winkler, Oschatz; Jörg Stark, Plauen; Iris Bernhardt, Podelwitz; Steffen Hoffmann, Potsdam; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Katrin Dorendorf, Riesa; Ralf Heidenreich, Roßleben; Birgit Kroll, Grit Maciejewski, Lutz Andrews, alle Rostock; Jens Richter, Schkölen; Sabine Schüler, Schöna; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Ingo Lohde, Schönefeld; Heiko Schulz, Schwedt; Carola Paetow, Schwerin; Michael Galletzka, Senftenberg; Frank Zöllner, Sondershausen; Birgit Götz, Sonneberg; Peter Lehmann, Kay-Uwe Weber, André Seling, Dagmar Rothämel, alle Steinbach-Hallenberg; Christian Wiegand, Steinhaid; Cordula Gottwald, Stendal; Erhard und Anke Zilinske, Stralsund; Nicole Gößner, Syrau; Ralf Gössinger, Ole Glänzer, beide Unterbreizbach; Dirk Wenzlaff, Vitte; Regina Frindt, Udo und Irene Michallik, alle Waren; Dirk Lehmann, Stefan Thäter, Margret Boettcher, alle Weimar; Barbara Schütze, Weidenfels; Annett Seidel, Agnes Jorczik, beide Wismar; Thomas Peuker, Karsten Busse, beide Wittenberg; Kerstin Jung, Wöbbelin; Claudia Bock, Wolfen; Astrid Keller, Wolgast; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Birgit Erdmann, Heide Hilse, beide Zittau; Romi Riedel, Zollschnitz; Mathias Goltzsche, Zschopau

Für vierjährige Teilnahme

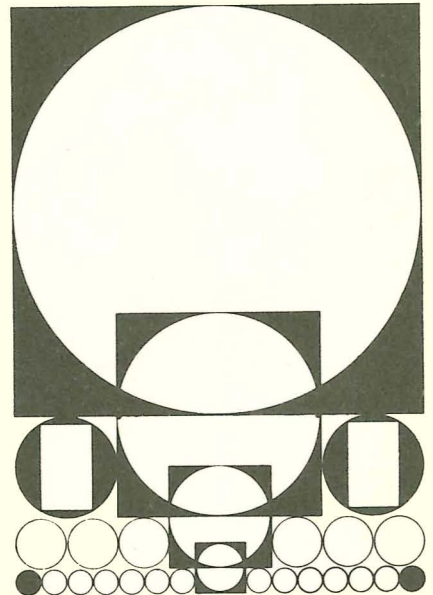
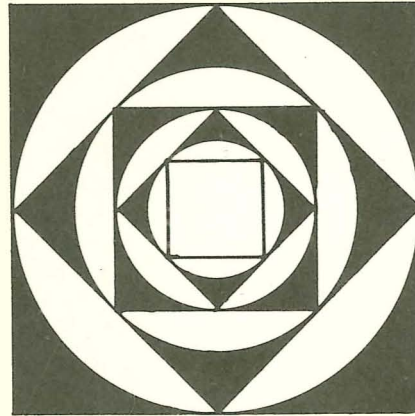
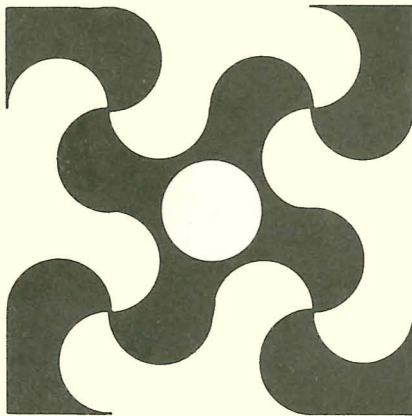
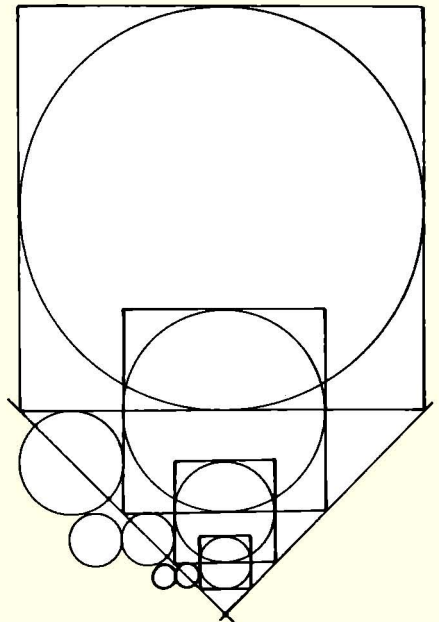
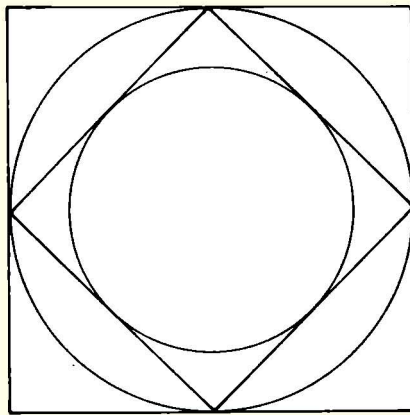
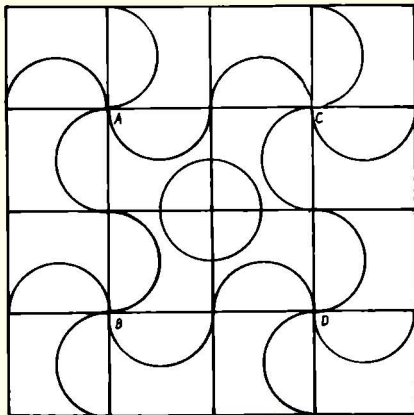
Carsten Karl, Aken; Sylvia Köthig, Apolda; Anka Sommer, Augsdorf; Sönke Maeß, Bad Doberan; Jens Humpisch, Bad Gottleuba; Sibylle Kerner, Bad Salzungen; Jens Prochno, Cornelia Wolf, Thomas Honigmann, Norbert Dorn, Reinhard Wegener, Bernhard Napiontek, Stefan Müller, Beate Müller, Steffen Padelt, alle Berlin; Jörg Leine, Berstedt; Marlies Reschke, Karen Sourell, beide Bernau; Oliver und Heiko Haase, Bestensee; Helge Dürschke, Bitterfeld; Corina Mahnke, Boizenburg; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Clingen; Matthias Winkler, Cossebaude; Sylke Riedel, Coswig; Timo Seidler, Manfred Roßius, Andreas Stenzel, Jens Leberwurst, Anke Richter, Thomas Lundershausen, alle Cottbus; Jörg Uhlig, Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Jörn Fache, Culitzsch; Bert Kühne, Dahme; Ute Fehrmann, Deutschenbora; Heike Förster, Dingelstädt; Kornelia Tolkemit, Dobbertin; Carola Schwerdtner, Dohna; Michael Beetz, Dreetz; René Pratsch, Stefan Mattausch, Silke Riechen, Helmut und Carsten Schreiber, Rolf Dach, Oliver Geupel, Martin Jäger, Iris Wislicenus, Michael Nitsche, Peter Förster, Anett Jünger, Thomas Hübner, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Jana Schwabe, Ulf Arnold, Holger Fey, Monika Glaß, alle Eisenach; Eike Sühnholtz, Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Astrid Abt, Silke Weisheit, Manuela Mäder, Andreas Möller, Uwe Weyh, alle Fambach; Hans Schröder, Finsterwalde; Annette Spangenberg, Frankfurt (Oder); Henry Kost, Freiberg; Henry Mäder, Froburg; Ansgar Heise, Görlitz; Ingolf Thurm, Gößnitz; Andreas Kersten, Gräfenhainichen; Mathias Schleif, Gransee; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Rainer Mielke, Gr. Bademeusel; Babette Maulhardt, Großbodungen; Thorsten Hahnusch, Guben; Katrin Strathaus, Halberstadt;

Guido Vollbeding, Haldensleben; Henning Salz, Halle; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Robert Siegel, Hecklingen; Uta Reck, Heiligenstadt; Falk Hartmann, Hermannsdorf; Rita Soering, Hohenossig; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Peter Hermann, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilseburg; Elke Schumann, Jahnishausen; Jens Katzschmann, Ulrich Scheler, beide Jena; Andreas Israel, Ingolf Knopf, Annegret Schatte, Rüdiger Gränitz, Sebastian Horbach, Carla Umlauf, Hildegard Geisler, alle Karl-Marx-Stadt; Udo Steller, Kleinmachnow; Helge Müller, Königsee; Heiko Witte, Friedhelm Reichert, beide Königs Wusterhausen; Karsten Schmidt, Kolochau; Andreas Blaudzun, Krakow; Gerd Künzelmann, Krina; Uwe Rümmler, Krumhermersdorf; Steffen Heyde, Latdorf; Matthias Poller, Lauter; Anne Weigang, Leinefelde; Bernd Fucks, Thomas Kluge, Matthias Hübner, Petra Gollewsky, Sylvia Richter, Bianka Schulze, Thomas, Klemens und Stephan Rebbelmund, Ralf Laue, alle Leipzig; Michael Seidel, Leuna; Olaf Engelke, Löbau; Stefan Brünner, Löderburg; Ulf Brandes, Lüblow; Rainer Gerlach, Lübs; Susanne Wolf, Frank Wunderling, beide Magdeburg; Wolfgang Hoppe, Marienberg; Lutz Büttner, Martinroda; Simone Brungräber, Marxwalde; Volker Sasse, Mülsen; Tilo Grünberger, Nerschau; Anja Voß, Hans-Dieter Büchler, beide Neustadt; Thomas Engelhardt, Niederschwarzwerfen; Uwe Lippmann, Niederwürschnitz; Frank Schmidchen, Niedererinitz; Torsten Linß, Nordhausen; Frank Jäger, Oberschöna; Steffen Zielinski, Osternienburg; Gerlinde Lehmann, Pahrenz; Tibor Leitz, Aike Hinrichs, beide Parchim; Katja Uhlemann, Prausitz; Hellmut Schenk, Pirna; Henning Schulz, Potsdam; Wieland Handke, Pulsnitz; Annett Schmidt, Klaus-Peter Lindner, Ingolf Pitz, alle Rackwitz; Bettina Beurich, Katrin Prescher, beide Radebeul; Dietrich Zwicker, Rastenberg; Irma Großmann, Rheinsberg; Andreas Didzuns, Ribnitz; Axel Kaminski, Riesa; Susanne Arnrich, Antje Rexhäuser, Susanne Gräulich, alle Roßdorf; Andreas Gahabka, Ruhla; Sabine Wileck, Ruhland; Marian Klima, Saßnitz; Annette Schubert, Schalkau; Jörg Jahnel, Schkölen; Kurt Schulze, Schernberg; Annett Spalteholz, Schladitz; Ronald Kaiser, Schleid; Beate Malsch, Babett Müller, Winfried Ullrich, Torsten Häfner, alle Schmalkalden; Tobias und Maik Schönherr, Schmölln; Olaf Putensen, Uta Möbius, beide Schwerin; Susanne Krieger, Sömmerda; Angelika Heubel, Heidi Böttger, Frank Vollborth, alle Sondershausen; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Bernd Urbanek, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Jan Recknagel, Michael Rommel, Gundi Schütz, Andre Albrecht, Uwe Pfannschmidt, Andrea Wiegandt, Thomas Hoffmann, Peter Luck, Michael Holland-Moritz, Rene Bieber, Christian Usbeck, Constanze Aster, Jacqueline Häfner, Angela Müller, Simone König, Heike Zimmermann, Silke Recknagel, Silvana Menz, Kathrin Möller, Ines Maschke, Sabine König, Kai-Uwe Bartsch, Andreas Gräf, Eckhard Holland-Cunz, Uwe Oehring, Christian Wahl, Roman Wirth, Peggy Holland-Letz, Steffi Kaiser, Andrea Neuber, Beate Nothnagel, Ute Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Helmut Sauerbrei, Suhl; Torsten Roßnick, Stendal; Armin Singer, Teichwolframsdorf; Joachim Krug, Tiefenort; Wolfram Fischer, Torgau; Andrea Bähr, Bert Minske, Dolores Toth, alle Torgelow; Ralf Krüger, Uebigau; Kerstin Schmidt, Bettina Landsiedel, Wiebke Fleischhauer, Christine Becker, Lars Brückner, alle Vacha; Uta Michallik, Waren; Steffen Schröder, Weißwasser, Horst Reißmann, Wesenberg; Ralph Bock, Wolfen; Antje Grosch, Wolfersstedt; Jürgen Jahns, Wilsleben; Cornelia Axt, Andreas Wolter, beide Wolgast; Pier Bierbach, Zeitz; Andrea Schmidt, Zella-Mehlis; Harald Hempel, Zschopach; Maik Dröbler, Marion Nemczak, Kerstin Kowaczek, alle Zschornowitz; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Thomas Bartmuß, Burow

Nachtrag: Für neunjährige Teilnahme: Udo Clemens, Altenburg

Mit Zirkel und Zeichendreieck

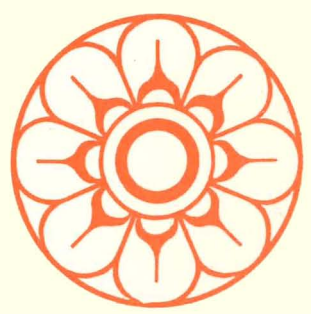
Mach's mal nach!



aus: mathématique contemporaine, magnard Paris

Grasornamente aus Sri Lanka

Entnommen aus: Sri Lanka, Legende, Märchen, historische Überlieferung und Bericht,
Kiepenheuer Verlag Leipzig und Weimar



Mathematische
Schülerzeitschrift

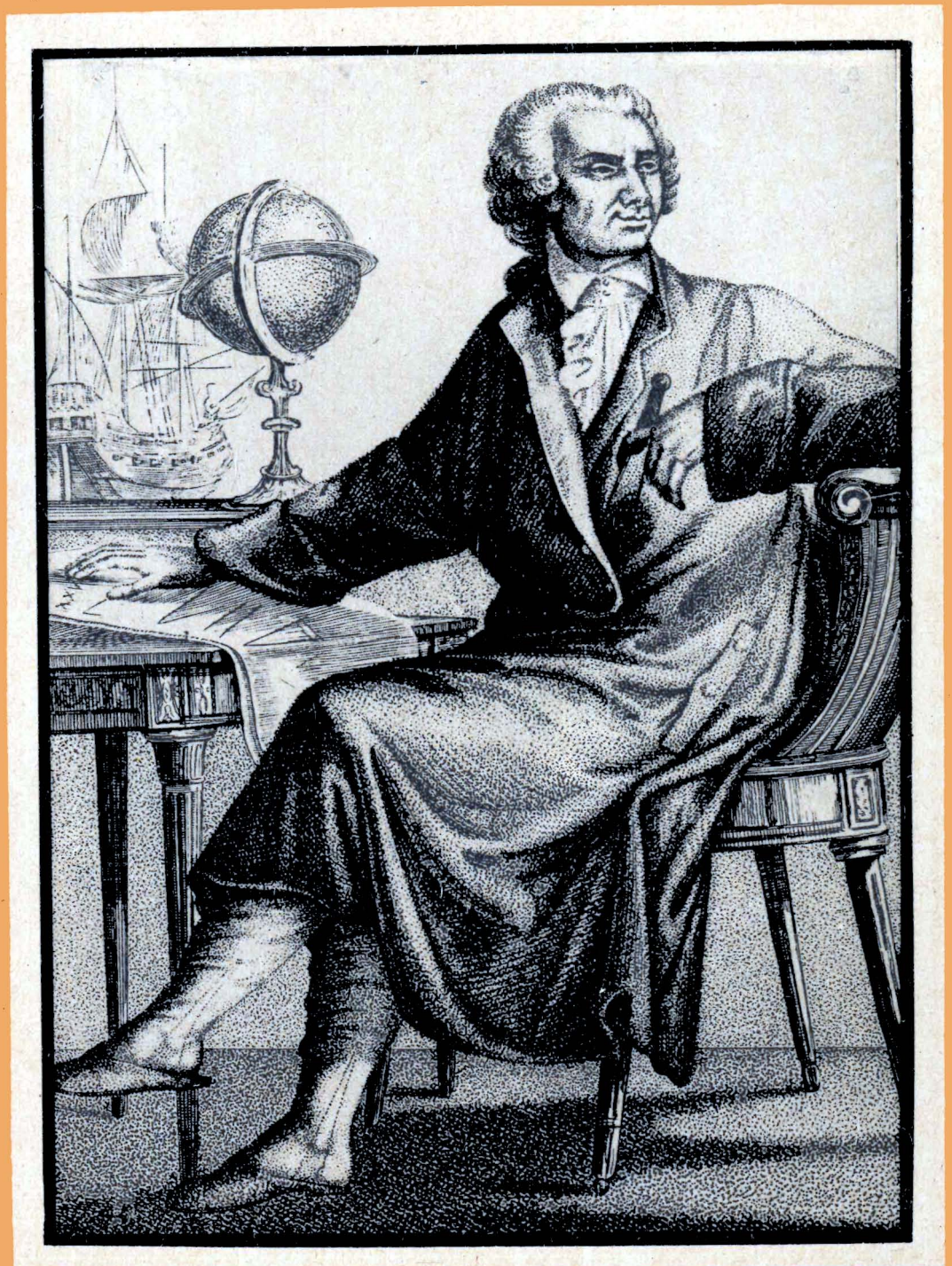
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059

alpha

LEONHARD EULER

1707 BIS 1783

2



Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M., Sonderpreis für die DDR 0,50 M.,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M., Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Wir danken Prof. Dr. K.-R. Biermann,
Berlin, A. Halameisär, Moskau und Dr. R.
Thiele, Leipzig, für die Bereitstellung von z. T.
sehr wertvollen Fotos für diese Sonderaus-
gabe anlässlich des 200. Todestages von L.
Euler. Die z. T. kostbaren Briefmarken stellte
Dr. P. Schreiber, Greifswald, zur Verfügung.

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelbild: W. Fahr nach einer Vorlage von un-
serer sowj. Schwesternzeitschrift *Quant*



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 20. Dezember 1982

Erscheinungstermin: 21. April 1983



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Zum 200. Todestag Leonhard Eulers [7]*
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, Leiter der A.-v.-
Humboldt-Forschungsstelle Berlin
 - 27 Eine wenig bekannte Aufgabe von Prof. Dr. L. Euler (Februar 1748)
[9]
Mitgeteilt von Dr. R. Thiele, leitender Lektor im Hirzelverlag Leipzig
 - 28 Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der
DDR
 - 30 Briefmarken zum Thema Euler [7]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
 - 32 Euler und die Kartographie [8]
Dr. P. Schreiber, Greifswald
 - 34 Ein Maultier und ein Esel von L. Euler [6]
Mitgeteilt von Dr. H. Pieper, Berlin
 - 35 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Eulerwettbewerb in Köthen [5]
Mathematikfachlehrer K. Meier, Päd. Hochschule Wolfgang Ratke, Köthen
 - 36 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (Euler-Sonderwettbewerb) [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie
 - 38 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann/Dr. R. Thiele, beide Leipzig
 - 40 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6
Über den Rösselsprung von Euler [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
 - 41 Die Eulersche Polyederformel und einiges mehr [5]
Dr. R. Schulze, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
 - 43 XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
2. Stufe (Kreisolympiade), Aufgaben Klasse 5 bis 11/12
 - 45 Lösungen [5]
- III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb 1981/82 – Abzeichen in Gold [5]
IV. U.-Seite: Chronologie zum Leben Leonhard Eulers [5]
Zusammenstellung: Dr. R. Thiele, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Zum 200. Todestag Leonhard Eulers



Bild 1
Gedenktafel am Haus Behrenstr. 21/22
in Berlin

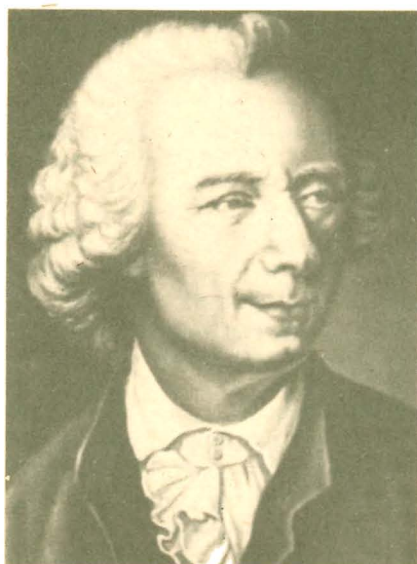


Bild 2
Leonhard Euler (nach einem Stich von
Christian Mechel 1783)

mit einem gemeinsamen Serientitel heraus; die Gedenkfeiern in Berlin und Leningrad erfolgten in gegenseitiger Abstimmung und unter wechselseitiger Beteiligung; zahlreiche Belege, wie gemeinsame Editionen u. a. Veröffentlichungen, zeugen vom Zusammenwirken von Mathematikhistorikern der DDR und der UdSSR bei der Pflege des Eulerschen Erbes. Das Gedenken an Eulers 200. Todestag wird diese engen Beziehungen erneut manifestieren.

Der am 15. 4. 1707 in Basel in der Schweiz geborene Euler erkannte frühzeitig seine Bestimmung: Dem Fortschritt der Mathematik und ihrer Anwendung zu dienen. Ursprünglich dazu ausersehen, den Beruf seines Vaters, das heißt den eines Geistlichen, zu ergreifen, wandte er sich unter dem Eindruck, den die Vorlesungen Johann (I.) Bernoullis auf ihn machten, der Mathematik zu. Da Euler in der Heimat keine ihm gemäße Stellung finden konnte, ein Los, das er mit manchen talentierten Landsleuten teilte, ging er 1727 an die

Petersburger Akademie der Wissenschaften, die, kürzlich gegründet, vielen jungen begabten Gelehrten aus Mittel- und Westeuropa Schaffungsmöglichkeiten bot. In Petersburg wirkte Euler bis 1741 und später von 1766 bis zu seinem Tode im Jahre 1783, also insgesamt über 30 Jahre. In der ersten Petersburger Periode entstanden diejenigen Arbeiten Eulers, die seinen Namen bald in der Welt bekannt und dann berühmt werden ließen. Während seines zweiten Petersburger Aufenthaltes schuf Euler die reifen Alterswerke, die noch fast 80 Jahre lang nach seinem Ableben die Petersburger Akademie-Veröffentlichungen zieren sollten. Zwischen 1741 und 1766 liegt Eulers Tätigkeit an der Berliner Akademie der Wissenschaften, seit 1744 als Direktor der mathematischen Klasse und später zeitweise als amtierender Präsident, wenn ihn auch der Preußenkönig nie als solchen bestätigte. Es waren dies Jahre erfolgreichsten Schaffens; Euler wurde zum mathematischen Lehrmeister Europas.

Am 18. September 1983 jährt sich zum 200. Male der Todestag Leonhard Eulers, des, zeitlich gesehen, wohl größten Mathematikers seit Archimedes, Newton und Leibniz. Sein Name lebt in rund 50 nach ihm benannten Formeln, Gleichungen, Sätzen, Zahlen und anderen mathematischen Bezeichnungen fort. Wenn Alexander von Humboldt vor rund 160 Jahren, fast vier Jahrzehnte nach Eulers Tod, keine bessere Empfehlung für den jungen genialen Mathematiker Dirichlet an Gauß zu geben vermochte als die, daß sich jener „auf den besten Eulerschen Wegen“ bewege, so ist in nicht geringerem Grade auch heute noch der Name Leonhard Euler lebendig. Er ist zu einem aus der Mathematik wie aus der geistigen Kultur überhaupt nicht wegzudenkenden Begriff geworden. Sein Wirken spielt zudem in der Geschichte der Begegnung der deutschen und der russischen Wissenschaft eine herausragende Rolle; mit seinem Namen ist die freundschaftliche Zusammenarbeit von Mathematikern der DDR und der UdSSR verknüpft. Als 1957 seines 250. Geburtstages gedacht wurde, gaben die Akademie der Wissenschaften der DDR und der UdSSR zwei koordinierte Festschriften

Bild 3

Der bekannte sowjetische Mathematiker V. I. Smirnov im Gespräch mit Mitgliedern der DDR-Delegation zu Eulers 250. Geburtstag am 15. 4. 1957 im Turm des Akademiegebäudes in Leningrad, Eulers ehemaliger Wirkungsstätte.

Vordere Reihe von links: Akademiker Smirnov; der Verfasser; Prof. H. Grell, Berlin; Prof. O.-H. Keller, Halle. Hintere Reihe von links: Dr. G. K. Michajlov, Moskau; Direktor V. L. Čenakal, Leningrad



Daß Euler Petersburg verließ, um einem Rufe des Königs Friedrich II. von Preußen nach Berlin zu folgen, hatte seine Ursachen in der unsicheren Lage während der Thronwirren in Rußland und in dem Leiter der Petersburger akademischen Kanzlei. In Berlin fühlte sich Euler zunächst sehr wohl. Des Königs Hoffnung, der Berliner Akademie durch die Mitgliedschaft und Mitarbeit berühmter Gelehrter Glanz und Geltung zu verleihen, die auf ihn selbst zurückstrahlen sollten, wurde von Euler völlig erfüllt. Er widmete seine ganze Kraft der Akademie. Nicht nur auf wissenschaftlichem, sondern auch auf wissenschaftsorganisatorischem und administrativem Gebiete war der auf der Höhe seiner Jahre stehende, im Geist seines Zeitalters der Aufklärung wirkende Euler ohne Unterlaß erfolgreich tätig. Aber im Laufe der Jahre traten eine Reihe von sich mehr und mehr verstärkenden Unzuträglichkeiten ein, die schließlich zu Eulers Rückkehr nach Petersburg führten.

Es würde zu weit gehen, wollten wir an dieser Stelle alle beabsichtigten und unbeabsichtigten Kränkungen und Verstimmungen aufzählen, die Eulers Weggang bewirkten. Begnügen wir uns mit der Feststellung, daß Euler, der in diesen Jahren profilierteste Vertreter einer Wissenschaft, die Friedrich immer fremd geblieben ist, alles andere als ein amüsanter und unterhaltsamer Plauderer war, wie sie der König in Gestalt der Franzosen, die damals an der Berliner Akademie dominierten, schätzte. Euler hat übrigens beinahe ohne Unterbrechung die Verbindung zur Akademie in Petersburg von Berlin aus aufrechterhalten: Er korrespondierte mit M. W. Lomonossow, dem „Vater der russischen Wissenschaft“, junge russische Gelehrte wur-

den in seinem Berliner Heim aufgenommen (Euler beherrschte übrigens die russische Sprache), er veröffentlichte während seiner Berliner Zeit in den Abhandlungen der Petersburger fast die gleiche Anzahl Arbeiten wie in den Schriften der Berliner Akademie. Nach seiner Rückkehr nach Petersburg, wo ihm von der Zarin Katharina II. glänzende materielle Bedingungen geboten wurden, traf Euler ein schreckliches Unglück. War er 1735 bereits auf einem Auge erblindet, so verlor er nun das Augenlicht nahezu völlig. Seine wissenschaftliche Produktivität wurde dadurch nicht beeinträchtigt. Diktierend schuf er weiterhin Arbeit nach Arbeit. Allein durch seine der Pariser Akademie eingereichten Preisschriften gewann Euler im Laufe der Zeit rund 30000 Livres (in heutiger Kaufkraft an die 300000 Mark). Am 18. September 1783 starb er, ohne daß ihn ein längeres Leiden gequält hätte.

Bei Leonhard Eulers Tod lebten noch drei seiner Söhne: Johann Albrecht, der, wenn auch in geringerem Umfange, die mathematische Begabung seines Vaters geerbt hatte, Mitglied der Berliner Akademie und seit 1769 Beständiger Sekretär der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Karl, ein Arzt und Mitglied der Petersburger Akademie, und Christoph, der sich dem Militärdienst gewidmet hatte und den Rang eines russischen Generals erreichte. Noch heute gibt es Nachfahren Eulers in der Sowjetunion, in denen die mathematische Begabung ihres Ahnen fortlebt.

Man rühmte an Euler einen ausgeglichenen und heiteren Charakter. Ausgesprochener Familiensinn, ökonomisches Denken und natürliches Benehmen waren ihm eigen. Wie viele bedeutende Mathematiker war auch Euler ein großer Freund der Musik. Eine riesige Arbeitskraft, ein erstaunliches Gedächtnis, eine phänomenale Konzentrationsfähigkeit und ein beispielloser Ideenreichtum zeichneten Euler aus.

Euler bereicherte die mathematischen Wissenschaften, begründete ganze Disziplinen, stieß in unerforschtes Neuland vor und wirkte durch seine Lehrbücher, in seinen Schülern und Nachfolgern fort. Eulers Größe ist letzten Endes in der entscheidenden Bedeutung der Mathematik für die exakten Naturwissenschaften, für die Technik und die Wirtschaft, für die Nutzbarmachung der Natur für menschliche Zwecke begründet. Erwähnt sei das Ergebnis der Realisierung von Vorschlägen Eulers für den Bau einer Wasserturbine: Ihr Wirkungsgrad bleibt um keine 10% hinter dem einer modernen Turbine zurück. Indem Euler in der Mathematik hervorragende Entdeckungen machte, schuf er Voraussetzungen für den Fortschritt der Menschheit. Er fertigte nicht nur das mathematische Werkzeug, mit dem die großen Naturforscher, Techniker und Mathematiker des vorigen Jahrhunderts operierten, es stän-

dig vervollkommend und erweiternd, an Strenge der Beweisführung die genialen Induktionen Eulers bald übertreffend, seine epische Breite durch konzentrierte Kürze ersetzend, sondern fühlte sich selbst stets zu den Anwendungen der Mathematik hingezogen. Er gab der Praxis Impulse und empfing wieder von ihr Anregungen. Gauß, der wohl hervorragendste deutsche Mathematiker, charakterisierte 1847 diese Wechselwirkung, indem er sagte, Euler habe in der Beschäftigung mit Problemen der reinen Mathematik „eine Erholung von und eine Stärkung zu anderen der unmittelbaren praktischen Anwendung näher liegenden Arbeiten“ gefunden.

Der führende sowjetische Mathematikhistoriker A. P. Juškevič, der bedeutendste Eulerforscher unserer Tage, hat eine Klassifizierung der Arbeiten Eulers vorgenommen, die dies Bild ergibt:

40% der Studien Eulers liegen auf den Gebieten der Algebra, Zahlentheorie und Analysis, 18% sind der Geometrie gewidmet, 28% befassen sich mit Mechanik und Physik, 11% beziehen sich auf astronomische Fragestellungen. Der Rest verteilt sich auf die Ballistik, die Kartographie, das Schiffs- und das Bauwesen, auf Musiktheorie, Theologie und Philosophie. Sogar landwirtschaftlichen Fragen wandte Euler seine Aufmerksamkeit zu. Zahlreiche Gutachten zeugen von Eulers Beschäftigung mit technischen Aufgaben.

Leonhard Euler war ein beispiellos fruchtbarer Gelehrter. In seinem Heimatland werden seit 1911 seine gesamten, französisch, lateinisch und deutsch abgefaßten Werke sowie seine Briefe unter dem Titel „Leonhardi Euleri Opera Omnia“ herausgegeben. Die Ausgabe ist auf rund 85 Bände im Lexikonformat mit etwa 40000 Druckseiten veranschlagt. Die Edition der Werke geht ihrem Ende zu, während die der Briefe noch einige Jahre in Anspruch nehmen wird.

Diese Ausgabe, die die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft durch ihre Eulerkommission für ihren großen Landsmann unter internationaler Beteiligung veranstaltet, ist ein literarisches Denkmal, würdig der Bedeutung des Genies Leonhard Eulers für die mathematischen Wissenschaften, deren Nutzen dieser einst so charakterisierte: „Die gesamte Mathematik befaßt sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Größen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten auffindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch andererseits unsere Kenntnisse. Beides sind Ziele, die gewiß der größten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist.“ K.-R. Biermann

Bild 4

Nach der Einweihung einer Gedenktafel an Eulers Wohnung in Leningrad an seinem 250. Geburtstag (15. 4. 1957): (von rechts) Prof. Euler, UdSSR; Prof. Kurt Schröder, Berlin; Hauptingenieur Euler, UdSSR; der Verfasser



Eine wenig bekannte Aufgabe von Leonhard Euler

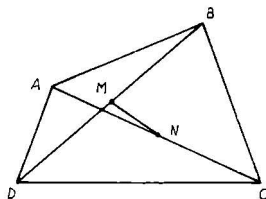
Februar 1748

Euler schrieb im Februar 1748 aus Berlin an seinen Freund Goldbach in Petersburg folgende Zeilen: „Ich bin neulich auf nachfolgendes theorema geometricum (geometrischer Satz) gefallen, welches mir merkwürdig zu sein scheint. Nämlich, gleich wie in einem jeden parallelogrammo (Parallelogramm) die summa quadratorum laterum (Summe der Quadrate der Seiten) der summae quadratorum diagonalium (Summe der Quadrate der Diagonalen) gleich ist, so ist in einem jeden quadrilatero non parallelogrammo (Viereck, das von einem Parallelogramm verschieden ist) die summa quadratorum laterum (Summe der Quadrate der Seiten) größer als die summa quadratorum diagonalium (Summe der Quadrate der Diagonalen), und der excessus (Überschuß) kann also konzinne (genau) angegeben werden:

▲ 2321 ▲ Man bisezire (halbiere) in dem trapezio (Viereck) $ABCD$ die diagonales (Diagonalen) AC und BD in N et (und) M und jungiere (verbinde) die Linie MN , so wird sein

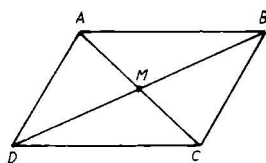
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Bild 1



Euler verallgemeinert mit diesem Satz das für Parallelogramme bekannte Ergebnis. Für Parallelogramme fällt M mit N zusammen, so daß der letzte Summand auf der rechten Seite der Gleichung gleich null ist. Für beliebige Vierecke wird er im allgemeinen größer als null sein.

Bild 2



Für Parallelogramme gilt

$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2$$

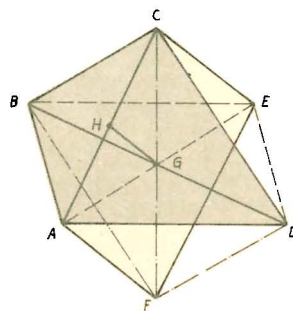
Goldbach fand einen Beweis für die von Euler gestellte Aufgabe, der uns aber nicht erhalten ist. Im Juni 1748 teilte Euler seinen eigenen Beweis Goldbach mit, und dieser Brief Eulers ist erhalten. Die entsprechende Stelle lautet so:

Lösung: „Sit propositum trapezium $ABCD$ cum diagoniis AC, BD ; compleatur primo parallelogrammum $ABED$, cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parall. $ACEF$ cum diag. CF , ductisque BF, DF erit quoque $BCDF$ parall. Jam cum in omni parallelogrammo summa quadr. diag. = summae quadr. laterum ex $\square ACEF$ erit $AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2$, ex $\square BCDE$ erit $BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2$, ergo $2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2$. Porro $\square ABED$ dat $AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, quae aequatio ad priorem addita dat

$$2AC^2 + 2CE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2AD^2 - BD^2$$

$$AC^2 + CE^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Bild 3



At quia AE uti et BD bisecta est in G , bisectur quoque AC in H , et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2 = 4GH^2$ quo substitutio erit

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4GH^2. \text{ Q.E.D.}$$

Nun folgt die Übersetzung des lateinischen Textes. Es war damals üblich, daß Gelehrte untereinander lateinisch korrespondierten. Wie die Aufgabenstellung zeigt, waren selbst deutsch abgefaßte Briefe mit den lateinischen Fachwörtern durchsetzt. „Es sei ein Viereck $ABCD$ mit den Diagonalen AC, BD gegeben; es werde zuerst zum Parallelogramm $ABED$ ergänzt, so daß sich dessen Diagonalen AE, BD in G halbieren. Danach ergänze man CE zum Parallelogramm $ACEF$ mit der Diagonalen CF , nachdem BF, DF ergänzt wurden, ergibt sich das Parallelogramm $BCDF$. Da jetzt in jedem Parallelogramm die Summe der Quadrate der Diagonalen = Summe der Quadrate der Seiten ist, ergibt sich aus

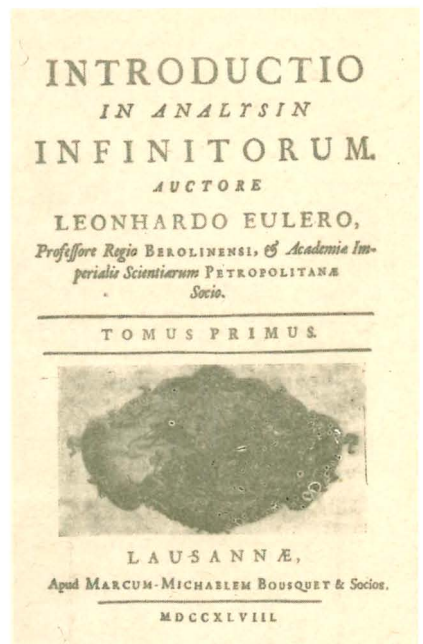
$\square ACEF$
 $AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2$,
 aus $\square BCDF$
 $BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2$,

$$\text{also } 2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2.$$

Danach ergibt $\square ABED$
 $AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$,
 diese Gleichung zur ersten addiert ergibt
 $2AC^2 + 2CE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2AD^2 - BD^2$
 $AC^2 + CE^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$

Aber weil AE sowie auch BD in G halbiert ist, so wurde auch AC in H halbiert, und dabei ist die Strecke GH parallel zu CE sowie halb so groß, so daß $CE^2 = 4GH^2$ ist, was durch Ersetzen zu
 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4GH^2$ wird, w.z.b.w.“
 (Zur Übersetzung ist anzumerken, daß das Wort trapezium im Sinn von allgemeines Viereck benutzt wird, was sich manchmal in dem heutigen Trapezoid für allgemeines Viereck wiederfindet. Diese Begriffsbestimmung geht auf Euklids Elemente zurück.)

Für die alpha-Leser aufbereitet von
 Dr. R. Thiele



Titelseite der „Introductio in analysin infinitorum“ (Einführung in die Analysis des Unendlichen) aus dem Jahre 1748. Euler stellt an die Spitze des Buches den Begriff der Funktion, der ein zentraler Begriff der Analysis ist. Euler schreibt, die Aufgabe der mathematischen Analysis sei die Untersuchung veränderlicher Größen und ihrer Funktionen.

Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung

Eine ungelöste Aufgabe

In einer Zeit, als in den islamischen Ländern bereits ein Niedergang der mathematischen Forschung einsetzte, verfaßte der aus Syrien gebürtige, später in Persien lebende und dort der Sekte der Schiiten angehörende Behā ad-Dīn (1547 bis 1622) eine Abhandlung, die er „Essenz der Rechenkunst“ nannte. Die Rechenkunst wäre eine Wissenschaft, welche die Auffindung unbekannter Zahlen vermöge eigentümlicher Kenntnisse lehre, und ihr Objekt wäre die Zahl. Der Verfasser hatte den Stoff zu seinem Werk aus älteren Büchern gezogen. Seine Schrift ist „gewissermaßen der letzte Blick, den ein Scheidender auf den Glanz früherer Jahre zurückwirft, um davon dem Gedächtnis noch zu erhalten, was sich retten läßt“. (Dies schrieb der Mathematikshistoriker Georg H. F. Nesselmann (1811 bis 1881), der 1843 Behā ad-Dīn's „Essenz der Rechenkunst“ arabisch und in deutscher Übersetzung herausgab. Es sei erwähnt, daß Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) diese Ausgabe 1846 bei seinen umfangreichen Studien zum „Kosmos“ gebrauchte.)

Das kleine Werk erfreute sich in Vorderasien und Indien einer großen Popularität. Bis ins 19. Jahrhundert wurde es dort als Schulbuch über Algebra verwendet.

Am Schluß seiner Abhandlung führt Behā ad-Dīn sieben Aufgaben an, deren Lösung islamischen Gelehrten bis zu jener Zeit nicht gelungen war:

„Es sind den Gelehrten, welche in dieser Disciplin fest sind, Aufgaben begegnet, auf deren Auflösung sie ihr Nachdenken gerichtet, und auf deren Aufsuchung sie ihre Augen gewandt haben; sie haben sich an die Aufhebung ihres Schleiers mit allen Kunstgriffen gemacht, und um die Enthüllung ihres Vorhanges durch jedes Mittel bemüht; aber sie konnten keinen Weg dahin entdecken und fanden zu ihnen keinen Wegweiser und keinen Führer. Diese sind seit alter Zeit als unauflösbar übrig, sich empörend gegen alle Genies bis zu dieser Frist. Die Gelehrten von Fach haben einige von ihnen in ihren Schriften erwähnt, und in ihren Sammlungen einen Theil derselben vorgelegt, um darzuthun, welche abschreckende Schwierigkeiten diese Wissenschaft umfaßt, und um diejenigen, wel-

che absolute Ausführbarkeit in Sachen des Calculs sich anmaßen, zum Schweigen zu bringen, um die Rechner zu warnen, daß sie sich nicht um die Auflösung bemühen, wenn etwas dieser Art ihnen vorgelegt wird, und um die mit glänzenden Fähigkeiten Begabten zu ihrer Auflösung und Enthüllung anzuspornen. Auch ich führe in dieser Abhandlung sieben von ihnen als Muster auf, um den Spuren Jener zu folgen und in ihre Fußstapfen zu treten.“

Das vierte Beispiel lautet:

„Eine Kubikzahl soll in zwei Teile geteilt werden, die auch Kubikzahlen sind.“

Probieren ohne Ende?

Betrachten wir die ersten zwölf Kubikzahlen: 1, 8, 27, 64, 125, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728. Man kann leicht durch Probieren feststellen, daß keine dieser Zahlen die Summe zweier anderer Kubikzahlen ist. Ließe sich beispielsweise 1728 als Summe zweier Kubikzahlen schreiben, so kämen dafür höchstens 729 und 1000 oder 512 und 1331 bzw. 343 und 1331 in Frage, aber deren Summe ist 1729, 1853 bzw. 1674, also größer bzw. kleiner als 1728. Also ist $1728 = 12^3$ wirklich nicht Summe zweier Kubikzahlen. So könnte man die Kubikzahlen weiter untersuchen. Da es aber zu jeder gegebenen Kubikzahl k^3 eine größere $(k+1)^3$ gibt, käme man selbst mit einem Computer nie zu einem Ende, es sei denn, man findet drei Kubikzahlen a^3, b^3, c^3 mit $a^3 + b^3 = c^3$.

Die Vermutung, daß es unmöglich ist, die Gleichung

$$z^3 = x^3 + y^3$$

in natürlichen Zahlen x, y, z zu lösen, ist alt. Den Versuch, diese Vermutung wirklich zu beweisen, sollen schon vor über 1000 Jahren islamische Mathematiker gemacht haben.

Die Fermatsche Vermutung

Im August 1659 formulierte Pierre de Fermat (1601 bis 1665) in einem Brief an seinen Freund Pierre de Carcavy (1600 bis 1684) den Satz, daß die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen unlösbar ist.

Fermat, den man „einen Pionier der neuen Mathematik“ nennt, wurde von den Zeitgenossen als unübertroffener Meister der Zahlentheorie angesehen und gilt als der bedeutendste Zahlentheoretiker vor Leonhard Euler (1707 bis 1783). Seine zahlentheoretischen Kenntnisse sind das Resultat mehrjähriger fortgesetzter Studien der 1621 erschienenen von Claude Gaspar de Bachet de Méziriac (1581 bis 1639) bearbeiteten griechisch-lateinischen Ausgabe der „Arithmetik“ des Diophant von Alexandria (um 250 u. Z.). Seine neuartigen zahlentheoretischen Fragestellungen, Beweismethoden und Einzelergebnisse formulierte Fermat vorwiegend in Briefen, aber auch als Randnoten der in seinem Besitz befindlichen Bücher. Die Anmerkungen zur „Arithmetik“ wurden 1670 in der von Fermats Sohn herausgegebenen Diophantausgabe abgedruckt.

In der um 1637 geschriebenen Randglosse Fermats zur Aufgabe II.8 des Diophant, eine gegebene Quadratzahl in die Summe zweier Quadratzahlen zu zerlegen, wird erstmalig die Behauptung ausgesprochen, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für jede natürliche Zahl $n > 2$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt (Fermatsche Vermutung). Fermat hätte einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt; der Rand wäre nur zu schmal, um ihn darauf aufzuschreiben.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$

Für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n=2$ kannte man schon im Altertum Lösungen (x, y, z) in natürlichen Zahlen x, y, z ; z. B. $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(20, 21, 29)$. Diophant machte in seiner „Arithmetik“ oft von der Lösung $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ Gebrauch. In der Tat, es gilt

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Die Erkenntnis, daß alle Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen, teilerfremden Zahlen x, y, z notwendig von der Form $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ mit natürlichen, teilerfremden Zahlen p, q ($p > q$) sind, soll erstmalig in einer anonymen arabischen Quelle im 10. Jahrhundert erwähnt worden sein.

Für den Beweis dieser Aussage sei verwiesen auf:

A. O. Gelfond: *Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen)*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. *Mathematische Schülerbücherei Band 22*. (§3.)
H. Pieper: *Die komplexen Zahlen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. *Mathematische Schülerbücherei Band 110*. (9. Kapitel.)
Die der quadratischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ so ähnliche kubische Diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ konnte trotz angestrebter Bemühungen zunächst nicht bewältigt werden, bis schließlich Euler in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ (St. Peters-

burg 1770) – gestützt auf Sätze über die Form $x^2 + 3y^2$ aus dem Jahre 1763 – die Unmöglichkeit der Lösung in ganzen Zahlen beweisen konnte. C. F. Gauß (1777 bis 1855) gab später einen anderen Beweis.

Der Fall $n=4$ wurde schon von Fermat bewiesen.

Euler als Zahlentheoretiker

Die meisten der zahlentheoretischen Studien Eulers wurzeln in den Untersuchungen von Fermat und Diophant.

Die erste zahlentheoretische Abhandlung legte der 25jährige Euler 1732 der Petersburger Akademie vor. Hierin widerlegte er die Behauptung Fermats, alle Zahlen der Form $2^{2^k} + 1$ seien Primzahlen. Mit dieser Aussage hatte sich Euler auf Anregung von Christian Goldbach (1690 bis 1764) schon seit 1729 beschäftigt. Goldbach, ein vielseitiger Gelehrter mit großem mathematischem Verständnis und Ideenreichtum, war der erste ständige Sekretär der 1725 gegründeten Petersburger Akademie der Wissenschaften. Euler war 1727 nach Petersburg gekommen. (Er ist 1741 nach Berlin übersiedelt und 1766 nach Petersburg zurückgekehrt.) Das Zusammensein Goldbachs mit Euler dauerte nur wenige Jahre, da Goldbach seinen Wohnsitz nach Moskau verlegte. Der nun einsetzende Briefwechsel, vorzugsweise über mathematische Fragen, wurde für beide Gelehrte von größter Bedeutung. Euler empfing von Goldbach viele Anregungen. Beide stimmten darin überein (wie Goldbach in einem Brief an Euler formulierte), daß „es nicht für undienlich zu halten sei, daß man auch diejenigen propositiones [Sätze] anmerke, welche sehr probabiles [wahrscheinlich] sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration [Beweis] fehlet“

In einer im Jahre 1738 verfaßten Abhandlung bewies Euler die Fermatsche Vermutung für $n=4$. (Es sei auf das oben angegebene Buch von A. O. Gelfond verwiesen.)

Mitte des 19. Jahrhunderts wurde ein 1844 im Nachlaß Eulers aufgefundenenes Manuskript zur Zahlentheorie publiziert. Diese 16 Kapitel über Zahlentheorie stellen höchstwahrscheinlich den Versuch eines Lehrbuches über den Gegenstand dar, das aber unvollendet geblieben ist. Euler hat das Manuskript in den Jahren 1748 bis 1750 verfaßt, also in jenen Jahren, in denen Euler andere große Lehrbücher (zur Analysis) schrieb. Wahrscheinlich hatte Euler die Abfassung eines Lehrbuches über Zahlentheorie als verfrüht erkannt und ließ das Manuskript liegen. Eine zusammenfassende Theorie dieser Disziplin gab es damals überhaupt noch nicht. (Diese hätte erst von ihm geschaffen werden müssen.) Erst mußten in Spezialarbeiten die fehlenden Beweise für zahlreiche zahlentheoretische Vermutungen erbracht werden.

Eulers Arbeiten zur Zahlentheorie umfassen
in der Werkausgabe allein 4 umfangreiche
Bände!

In einem Brief an Goldbach vom 4. August 1753 befindet sich der erste Hinweis, daß es Euler gelungen war, die Fermatsche Vermutung auch für $n = 3$ zu beweisen:

„Bei Fermat findet sich noch ein sehr schönes theorema, dessen Demonstration [Beweis] er sagt, gefunden zu haben. Nämlich bei Anlaß der Diophantäischen Aufgabe, zwei quadrata zu finden, deren Summ ein Quadrat ist, sagt er, daß es unmöglich sei, zwei cubos [Kubikzahlen] zu finden, deren Summ ein Kubus sei, und zwei biquadrata, deren Summ ein biquadratum [$a^4 + b^4 = c^4$], und generaliter [allgemein], daß diese Formel $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sei, wann $n > 2$. Ich habe nun wohl Demonstrationen gefunden, daß $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet. Aber die Demonstrationen für diese zwei casus [Fälle] sind so voneinander unterschieden, daß ich keine Möglichkeit sehe, daraus eine allgemeine Demonstration für $a^n + b^n \neq c^n$ si [wenn] $n > 2$ herzuleiten.“

Im Brief an Goldbach vom 17. Mai 1755 schreibt er noch einmal darüber:

„Ew. Hochwohlgeb. ist der Beweis bekannt, daß $a^4 \pm b^4 \neq p^4$. Neulich bin ich auch mit dem Beweis zustande gekommen, daß $a^3 \pm b^3 \neq p^3$; weiter kann ich aber auch nicht kommen.“

Ein 1759 gefundener Beweis findet sich – allerdings nur im Vorübergehen und unter Verweis auf eine frühere, wahrscheinlich nicht publizierte Mitteilung – in einer 1763 in der Schriftenreihe „*Novi commentarii*“ der Petersburger Akademie gedruckten Abhandlung. Einige Jahre später (1770) bewies Euler den Satz ausführlich am Ende des 2. Teiles seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“.

Die Beweismethode

Es sollen hier nur einige allgemeine Bemerkungen zu der von Euler verwendeten Beweismethode gemacht werden.

Es handelt sich um einen indirekten Beweis. Es wird angenommen, daß es eine Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen $x = a$, $y = b$, $z = c$ gibt, und dann gezeigt, daß man mit dieser Annahme zu einer Aussage kommt, die falsch ist. Dies bedeutet, daß auch die Annahme falsch gewesen sein muß, also die Gleichung in Wahrheit gar nicht in natürlichen Zahlen lösbar ist. Genau das sollte bewiesen werden.

Dieser indirekte Beweis wird mit einer Methode geführt, die Fermat „Methode des unendlichen Abstiegs“ (französisch: la descente infinie) nannte. Die Überlegung ist einfach.

Es sei $A(k)$ eine Aussage für eine natürliche Zahl k . $A(k)$ kann z. B. die folgende Aussage sein: „Die Kubikzahl k^3 läßt sich als Summe zweier Kubikzahlen schreiben.“ Es wird gezeigt, daß aus der Richtigkeit von $A(k)$ für

irgendeine natürliche Zahl k die Richtigkeit von $A(l)$ für eine gewisse kleinere natürliche Zahl l folgt. (Auch eine gewisse Kubikzahl l^3 mit $l < k$ läßt sich als Summe zweier Kubikzahlen darstellen.) Dieser „Abstieg“ von k auf l kann beliebig oft fortgesetzt werden: Aus der Richtigkeit von $A(l)$ folgt die Richtigkeit von $A(m)$ für eine gewisse kleinere natürliche Zahl $m < l$, usw. Das ist aber unmöglich, da es eine kleinste natürliche Zahl gibt. $A(k)$ muß also falsch sein, für alle k . Der Grundgedanke der Methode des unendlichen Abstiegs war schon in der von Jaques Lefèvre (1455 bis 1536) 1496 und 1514 edierten Ausgabe der „Arithmetica“ des um 1260 lebenden Gelehrten Jordanus Nemorarius ausgesprochen. Die Beweismethode ist sogar in der Antike benutzt worden, um zu beweisen, daß bei dem goldenen Schnitt die Maßzahlen der Teilstrecken nicht rationale Zahlen sein können.

Fermat hat die „descente infinie“ wiederentdeckt und mit dieser Methode zahlreiche zahlentheoretische Probleme in Angriff genommen. In Euler fand Fermat den großen Fortsetzer.

Für Eulers Beweis der Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen sei auf das folgende alpha-Heft 3/83 verwiesen, wo er in der Originalform aus seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ wiedergegeben wird.

H. Pieper

Schriftprobe Eulers:

Berechnung von $\sqrt{\pi}$ aus der Kettenbruchentwicklung (undatierte Notiz)

<i>Spizella socialis</i> <i>macula</i> 2 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100			
1	2	3	4
1	0	1	1
2	1	1	1
3	2	2	2
4	3	3	3
5	4	4	4
6	5	5	5
7	6	6	6
8	7	7	7
9	8	8	8
10	9	9	9
11	10	10	10
12	11	11	11
13	12	12	12
14	13	13	13
15	14	14	14
16	15	15	15
17	16	16	16
18	17	17	17
19	18	18	18
20	19	19	19
21	20	20	20
22	21	21	21
23	22	22	22
24	23	23	23
25	24	24	24
26	25	25	25
27	26	26	26
28	27	27	27
29	28	28	28
30	29	29	29
31	30	30	30
32	31	31	31
33	32	32	32
34	33	33	33
35	34	34	34
36	35	35	35
37	36	36	36
38	37	37	37
39	38	38	38
40	39	39	39
41	40	40	40
42	41	41	41
43	42	42	42
44	43	43	43
45	44	44	44
46	45	45	45
47	46	46	46
48	47	47	47
49	48	48	48
50	49	49	49
51	50	50	50
52	51	51	51
53	52	52	52
54	53	53	53
55	54	54	54
56	55	55	55
57	56	56	56
58	57	57	57
59	58	58	58
60	59	59	59
61	60	60	60
62	61	61	61
63	62	62	62
64	63	63	63
65	64	64	64
66	65	65	65
67	66	66	66
68	67	67	67
69	68	68	68
70	69	69	69
71	70	70	70
72	71	71	71
73	72	72	72
74	73	73	73
75	74	74	74
76	75	75	75
77	76	76	76
78	77	77	77
79	78	78	78
80	79	79	79
81	80	80	80
82	81	81	81
83	82	82	82
84	83	83	83
85	84	84	84
86	85	85	85
87	86	86	86
88	87	87	87
89	88	88	88
90	89	89	89
91	90	90	90
92	91	91	91
93	92	92	92
94	93	93	93
95	94	94	94
96	95	95	95
97	96	96	96
98	97	97	97
99	98	98	98
100	99	99	99



Briefmarken zum Thema Euler

Basel, im 4. Jh. von den Römern gegründet, Universitätsstadt seit 1460, war im 15. und 16. Jahrhundert ein bedeutendes Zentrum der Reformation und des Humanismus. Hier wurde *Leonhard Euler* am 15.4.1707 geboren, hier studierte er ab 1720. Am 5.4.1727 verließ er seine Vaterstadt für immer. Die Schweizer Briefmarke (1) aus dem Jahre 1960 zeigt das *Spalentor* in Basel.

Die Schweizer Gedenkmarke (2) zum 250. Geburtstag Eulers ist ebenso wie die aus gleichem Anlaß erschienenen Marken (3) der DDR und (4) der Sowjetunion nach einem Bildnis Eulers von E. Handmann gestaltet, das etwa zwischen 1753 und 1756 entstand. Auf der sowjetischen Marke ist das Porträt übrigens seitenverkehrt wiedergegeben. Links davon sieht man das Gebäude der Kunstkammer in Petersburg, das erste Domizil der Petersburger Akademie. Die rechte Seite symbolisiert Eulers Leistungen in der Astronomie und Kartographie (vgl. hierzu den Artikel auf Seite 32/34). Am linken Rand der Schweizer Marke liest man die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Der in dieser Formel mittels komplexer Zahlen ausgedrückte Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen hat in der Folge nicht wenig zur schließlichen Anerkennung der komplexen Zahlen beigetragen.

In der zehn Werte umfassenden DDR-Serie zum 250. Geburtstag der Berliner Akademie (1700 als Brandenburgische Sozietät der Wissenschaften gegründet, heute Akademie der Wissenschaften der DDR) war der 1-Pf-Wert (5) nach dem von J. d'Arbès gemalten Altersbildnis Eulers gestaltet. Euler wirkte von 1741 bis 1766 an der Berliner Akademie. Zu Jubiläen der Petersburger Akademie, aus der die Akademie der Wissenschaften der UdSSR hervorging und an der Euler von 1727 bis 1741 sowie von 1766 bis zu seinem Tode 1783 insgesamt rund 31 Jahre arbeitete, gab es in der Sowjetunion Gedenkmarken zum 220. Jahrestag der Gründung (1945) und zum 250. Jahrestag (1974). Letztgenannte Marke (6)



1



2



3



4



5



6



7



8



9



10



11



12



13

zeigt wiederum den Turm der Petersburger Kunstkammer sowie Globus und Zirkel als Symbol für die besonders gepflegten Wissenschaften Geographie und Mathematik. Auf der Marke (7) von 1945 sieht man das spätere Leningrader Hauptgebäude der Akademie. (Der Hauptsitz der Akademie wurde jedoch 1934 nach Moskau verlegt.) Außerdem zeigt die Marke ein kleines Porträt von Michail Wassiljewitsch Lomonossow (1711 bis 1765), womit wir bei berühmten Zeitgenossen Eulers angelangt sind, die in mehr oder weniger direkten Beziehungen zu Euler standen.

Lomonossow, auf dessen Initiative 1755 die heute nach ihm benannte Moskauer Universität gegründet wurde, war der erste russische Universalgelehrte von europäischem Rang und das erste russische Mitglied der Petersburger Akademie, der er seit 1745, also gerade während Eulers Berliner Jahren, angehörte. Mit Euler, dessen Kontakte nach Petersburg auch in dieser Zeit sehr intensiv waren, verband ihn jedoch ein freundschaftlicher Briefwechsel. Neben anderen Lomonossow-Marken (u.a. auch in Rumänien 1961) erschien in der Sowjetunion die Marke (8) zum 250. Geburtstag.

Mit Johann Andreas Segner (1704 bis 1777), Mediziner, Physiker, Mathematiker und Astronom an den Universitäten Jena, Göttingen und Halle, begegnet uns auf der ungarischen Marke (9) aus dem Jahre 1974 ein weiterer fleißiger Briefpartner Eulers. Diese Freundschaft währte über 25 Jahre, und Euler wurde durch die Erfindung des Segnerschen Wasserrades zu einigen auch heute noch bemerkenswerten Abhandlungen über Turbinen angeregt. (Das Segnersche Wasserrad, auf dem Nebenfeld der Marke dargestellt, entspricht etwa dem Prinzip heute gebräuchlicher Rasensprenger.)

Die bedeutendsten Mathematiker unter den Zeitgenossen Eulers waren Jean le Rond d'Alembert (1717 bis 1783) in Paris und Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813), Nachfolger Eulers an der Berliner Akademie, jedoch ab 1787 ebenfalls wieder in Paris, die wir auf den französischen Marken (10) und (11) aus dem Jahre 1959 bzw. 1958 sehen. Während jedoch Euler zu Lagrange ein recht gutes Verhältnis hatte, waren sowohl die weltanschaulichen Positionen als auch die Auffassungen von wesentlichen Begriffen der Mathematik, die d'Alembert, einer der Herausgeber der Encyclopédie, vertrat, von denen Eulers allzu verschieden, um – bei aller gegenseitigen Achtung – einen engeren geistigen Kontakt zu ermöglichen.

Aus einer 1913 im zaristischen Rußland erschienenen Serie entnahmen wir Katharina II. (12), die als deutsche Prinzessin mit Peter III. verheiratet, 1762 durch Beseitigung ihres Gatten zur Alleinherrschaft gelangte und diese bis zu ihrem Tode 1796 ausübte. Unter ihrer Regierung fand Euler bei seiner Rückkehr 1766 nach Petersburg wesentlich bessere Ar-

beits- und Lebensbedingungen als während seines durch häufigen Thronwechsel und politische Wirren gekennzeichneten ersten Petersburger Aufenthaltes.

Wir beschließen unsere kleine Briefmarkengalerie mit Voltaire (eigentlich Francois Marie Arouet, 1695 bis 1778), dem berühmten französischen streitbaren Aufklärer, Philosophen und Schriftsteller, der wie kaum ein anderer das geistige Klima des 18. Jh. geprägt hat. (Diese wertvolle Marke stellte Prof. Dr. H. Wußing, Leipzig, freundlicherweise zur Verfügung.) Von 1750 bis 1753 lebte Voltaire am Hofe Friedrichs II., wo er 1753 in den berühmten Akademieskandal um Maupeou, Koenig und das Prinzip der kleinsten Wirkung mit literarischen Mitteln eingriff. Ein paar Tropfen seines ätzenden Spottes fielen dabei verdienstermaßen auch auf Euler, der hier aus religiösen und anderen persönlichen Gründen die falsche Partei ergriffen hatte. Die Voltairemarke (13) erschien 1949.

P. Schreiber

In einer Banknoten-Serie der Schweiz wurde 1979 als letzter auch der 10-Franken-Schein in Umlauf gebracht. Er ist dem Mathematiker und Physiker Leonhard Euler gewidmet.

Das Hauptmotiv der Vorderseite ist ein Bild Eulers. Links daneben erkennt man eine Zeichnung des idealen „Zahl-Profiles“ eines Zahnrades – eine von Eulers Entdeckungen. Den Hintergrund bilden Diagramme (Euler-Diagramme), die Euler zur Darstellung logischer Schlüsse verwendete.

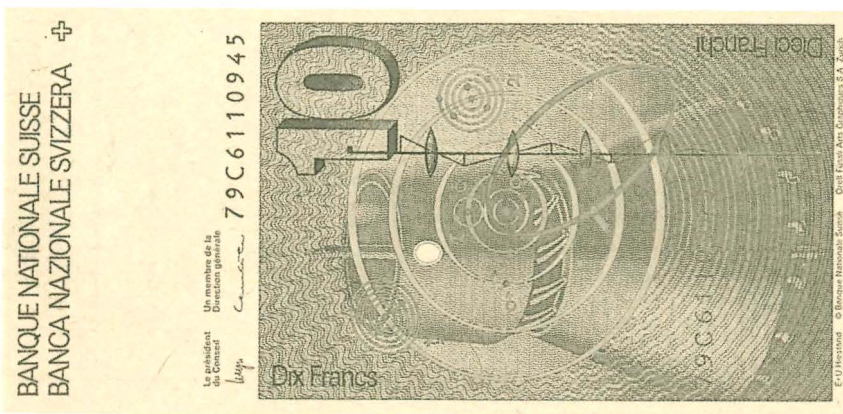
Die drei Motive der Rückseite sollen an Eulers Beiträge zur Hydrodynamik, Optik und Astronomie erinnern.

Im einzelnen handelt es sich

- a) um eine von Euler entworfene Wasserturbine, die allerdings erst lange nach seinem Tode technisch realisiert werden konnte;
- b) um das Schema eines Strahlenganges durch ein System von Linsen;
- c) um eine Darstellung unseres Sonnensystems in Zusammenhang mit Eulers Mondtheorie, die es erlaubte, verbesserte Tafeln der Mondbewegung (wichtig für die Schifffahrt) herzustellen.

Die Tatsache, daß Euler bei der Vergabe der sechs Wertstufen (10 sF bis 1000 sF) mit dem niedrigsten Wert bedacht wurde, mag bewirken, daß der Mathematiker unter den ausgewählten Geistesgrößen die weiteste Verbreitung findet.

Dr. Stark, Aachen



Euler und die Kartographie

Landkarten, vor allem solchen, die größere Teile der Erdoberfläche abbilden, liegen heute selbstverständlich stets mathematisch exakt definierte Abbildungen der als kugelförmig angenommenen Erdoberfläche in die Kartenebene zugrunde. (In speziellen Zusammenhängen wird sogar die geringe Abweichung der Erde von der Kugelgestalt berücksichtigt.) Betrachtet man dagegen alte Landkarten, die sich gerade heute wegen ihres kulturhistorischen und dekorativen Wertes einer rasch wachsenden Beliebtheit erfreuen, so sieht man sofort, daß diese Karten nicht nur die eigentlichen geographischen Sachverhalte recht phantasievoll und ungenau behandeln, sondern daß ihnen häufig keine exakten Gradnetzentwürfe zugrunde liegen. Da Euler in der Entwicklung der geometrischen Aspekte der Kartographie eine gewisse Rolle gespielt hat, wollen wir diese Entwicklung hier in großen Zügen skizzieren und Eulers Leistung in den historischen Zusammenhang einordnen.

Die Kugelgestalt der Erde galt schon im anti-

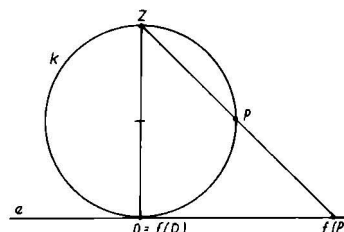
ken Griechenland als gesichert, und der alexandrinische Mathematiker Eratosthenes (~ 276 bis ~ 195 v. u. Z.) hatte durch ein scharfsinniges Experiment sogar den Erdradius annähernd richtig bestimmt. Den Griechen war auch spätestens seit Hipparch (~ 190 bis 125 v. u. Z.) eine interessante, heute als stereographische Projektion bezeichnete Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene bekannt, die die folgenden beiden, den griechischen Mathematikern ebenfalls bekannten Eigenschaften aufweist:

1. Die stereographische Projektion ist kreisverwandt, d. h., alle Kreise der Kugeloberfläche werden in Kreise bzw. in Ausnahmefällen in Geraden der Bildebene überführt, und umgekehrt ist jeder Kreis und jede Gerade der Bildebene Bild eines Kreises der Kugeloberfläche.
2. Die stereographische Projektion ist winkeltreu, d. h., je zwei Kurven (insbesondere Kreise) der Kugeloberfläche schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die entsprechenden Bildkurven in der Bildebene.

(Die Definition der stereographischen Pro-

jektion ist in Bild 1 dargestellt.) Merkwürdigerweise scheinen die Griechen die stereographische Projektion nur für Himmelskarten benutzt zu haben. Klaudios Ptolemaios (~ 85 bis ~ 160 u. Z.), der als Vollender sowohl der antiken Astronomie als auch der antiken Geographie gilt, bewies ihre oben genannten Eigenschaften in der Abhandlung *Planisphaerium*, für seine bis ins späte Mittelalter immer wieder kopierte Weltkarte jedoch verwendete er sie nicht. Vielleicht war er sich der Ungenauigkeit der damals verfügbaren geographischen Informationen zu bewußt. Es würde durchaus dem Geist der Griechen entsprochen haben, eine so reine Sache wie die Mathematik nicht mit der von so vielen Unregelmäßigkeiten und Zufälligkeiten beherrschten irdischen Geographie zu vermengen.

Bild 1



Als Projektionszentrum dient bei der stereographischen Projektion ein beliebiger Punkt Z der abzubildenden Kugeloberfläche K, als Bildebene e die Tangentialebene an K im zu Z diametralen Punkt D der Kugel. Jedem von Z verschiedenen Punkt P von K wird der Schnittpunkt der Geraden PZ mit der Bildebene e als Bildpunkt $f(Z)$ zugeordnet. Nur Z selbst hat keinen Bildpunkt. Genau die Kreise der Kugeloberfläche, die durch Z verlaufen, werden in Geraden von e abgebildet. Warum?

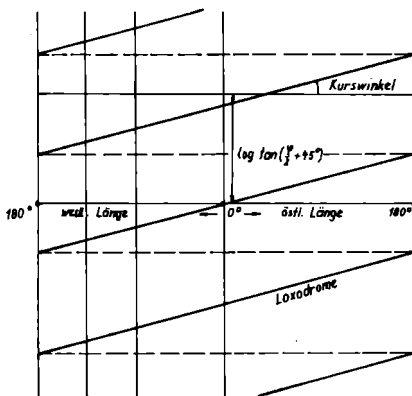
Aus Platzgründen müssen wir die vielen gewichtigen Beiträge der islamischen Gelehrten des 9. bis 15. Jh. zur Geographie, Kartographie und Vermessungskunde hier übergehen, zumal sie (im Gegensatz zu den astronomischen und mathematischen Leistungen der orientalischen Welt) die europäische Entwicklung nicht wesentlich beeinflusst haben. Da während des europäischen Mittelalters sogar die Kugelgestalt der Erde wieder bezweifelt oder gar geleugnet wurde, waren in dieser von der christlichen Kirche bestimmten Zeit irgendwelche Fortschritte in Richtung

Die Berliner Akademie gab Kalender und Landkarten heraus, um durch die damit verbundenen Einnahmen die Finanzlage der Akademie zu verbessern. 1760 erschien ein von Leonhard Euler im Auftrage der Akademie herausgegebener „Geographischer Atlas“ aus 44 Landkarten. Unser Bild zeigt eine Erdhalbkugel mit eingezeichneter Deklination der Magnethnadel. Euler hebt im Begleitext hervor, daß eine ähnliche Karte in keinem anderen Atlas zu finden sei.



mathematischer Behandlung der Kartographie nicht zu erwarten. Das mit den großen geographischen Entdeckungen einsetzende Zeitalter der Hochseeschifffahrt belebte jedoch das Interesse an exakten Positionsbestimmungen und genauen Karten außerordentlich. Man kann sagen, daß die Bedürfnisse der Navigation und der mit der Festigung feudalabsolutistischer Nationalstaaten aufblühenden Landesvermessung vom Beginn des 16. bis zum Ende des 18. Jh. eine der wesentlichsten Triebkräfte für die Entwicklung von Astronomie und Mathematik bildeten.

Ein erster Fortschritt wurde durch die Einführung der Mercator-Projektion für Seekarten erzielt, die dadurch ausgezeichnet ist, daß sie alle loxodromen Kurven der Kugel- (bzw. Erd-)oberfläche in Geraden der Kartenebene überführt. Dabei versteht man unter einer loxodromen Kurve eine solche, die alle Längen- (und damit auch alle Breiten-)kreise unter einem festen konstanten Winkel schneidet, die folglich einem Schiffsweg konstanten Kurses entspricht. Die Mercatorprojektion ist nach dem flämischen Geographen Gerhard Mercator (eigentlich: Kremer, 1512 bis 1594) benannt, der sie 1569 zur Darstellung einer Weltkarte anwandte.



Bilder von Meridianen

Mercator-Entwurf, im Prinzip nach oben und unten unbegrenzt. Jede Loxodrome wird als unendliche Folge paralleler Strecken zwischen den die Karte begrenzenden Bildern des 180°-Meridians abgebildet. Auf der Kugel nähert sie sich beiden Polen in einer unbegrenzten Spirale. Ausnahmen bilden nur die zu den Kurswinkeln 0° (Breitenkreise) und 90° (Meridiane) gehörigen Loxodromen.

Das Prinzip wie auch die Begriffe loxodromer Kurs und orthodromer (d. h. dem kürzesten Weg entsprechender) Kurs sind jedoch schon vorher von dem portugiesischen Mathematiker Pedro Nuñez (1502 bis 1578) eingeführt worden, der übrigens auch die nach ihm als Nonius (latinisierte Form von Nuñez) benannte Ablesevorrichtung erfand. Sowohl Nonius als auch Mercator konnten das sich stetig ändernde Verhältnis der Breitengrade

zu den konstant abgebildeten Längengraden, das den „Mercatoreffekt“ hervorruft, nur näherungsweise empirisch bestimmen. Um es exakt formelmäßig zu beherrschen, muß man eine Differentialgleichung lösen. Diese Aufgabe löste, ebenfalls mit noch nicht durchgebildeten Methoden, 1599 der englische Mathematiker und Kartograph Edward Wright (~ 1558 bis 1615).

Seit der ersten europäischen Gradmessung durch den Franzosen Jean Fernel im Jahre 1525 wurden wiederholt großangelegte Vermessungen zur immer genaueren Bestimmung des Erdradius und schließlich auch des Abplattungsfaktors durchgeführt, an denen namhafte Mathematiker wie W. Snellius (1591 bis 1626), G. D. Cassini (1625 bis 1712), P. de Maupertuis (1698 bis 1759) und A. C. Clairaut (1713 bis 1756) unmittelbar mitwirkten. Die Verbesserung der Methoden zur geographischen Ortsbestimmung, teils durch astronomische Beobachtungen, teils durch Triangulation im Gelände, vor allem aber die genauere Bestimmung der geographischen Länge mittels der Differenz der Ortszeiten durch die von dem britischen Uhrmacher J. Harrison (1693 bis 1776) zu hoher Präzision entwickelten Chronometer, gestatteten nun erstmals die Herstellung wirklich ge-

Bild 2

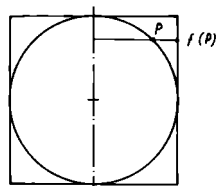
Bild des zur Breite φ gehörigen Breitenkreises

Äquator

nauer, an Gradnetzen orientierter Landkarten.

Eine eigentlich mathematische Behandlung des Problems, Abbildungen der Kugeloberfläche auf eine Ebene so zu bestimmen, daß dabei bestimmte Eigenschaften wie Winkel-

Bild 3



Beispiel einer flächentreuen kartographischen Abbildung:

Lamberts flächentreuer Zylinder-Entwurf. Als Karte dient der Mantel des umschriebenen Zylinders.

treue, Flächentreue o. ä. erfüllt sind, tritt erst in den *Anmerkungen und Zusätzen zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (1772) von J. H. Lambert (1728 bis 1777) auf. Lambert charakterisierte solche Eigenschaften der kartographischen Abbildungen durch Differentialgleichungen, für die er allerdings noch keine allgemein wirksamen Lösungsmethoden angeben konnte. Dafür bereicherte er in dieser kleinen Schrift die Kartographie um eine ganze Palette spezieller Abbildungsverfahren, die bis heute zum eisernen Bestand der praktischen Kartographie gehören. So taucht der Name Lambert in jedem Atlas dort auf, wo die für die einzelnen Karten verwendeten Projektionen genannt werden. Weitere Stationen der nun einsetzenden Entwicklung sind durch die Namen von L. Euler (1707 bis 1783), J.-L. Lagrange (1736 bis 1813) und C. F. Gauß (1777 bis 1855) markiert. Lagrange gab 1779 die allgemeinste Lösung der von Lambert aufgestellten Differentialgleichungen an und verallgemeinerte das Problem auf die winkeltreue Abbildung beliebiger Rotationsflächen in die Ebene. Bei Gauß schließlich schlägt das konkrete Problem der kartographischen Abbildung in eine neue Qualität um: Es werden allgemeine Prinzipien für die Abbildung beliebiger gekrümmter Flächen in die Ebene untersucht, und die innere Geometrie solcher Flächen (d. h. diejenige Geometrie, die auf dem innerhalb der Flächen gemessenen kürzesten Weg zwischen zweien ihrer Punkte beruht) wurde aus der Taufe gehoben. Gauß war aber zu sehr angewandter Mathematiker, um die so gewonnenen tief-
liegenden Erkenntnisse nicht wieder in der höheren Geodäsie anzuwenden, jenem Zweig der Vermessungskunde, dessen Ziel die genaue Vermessung der höchst unregelmäßigen tatsächlichen Gestalt des Erdkörpers ist.

Wenden wir uns nun Euler zu. Seit dem Aufschwung des Russischen Reiches unter Peter I. (1672 bis 1725) gehörte die genaue Erkundung und kartographische Erfassung des riesigen Territoriums zu den besonders geförderten staatlichen Aufgaben, woran jedoch zwei voneinander unabhängige und sich gegenseitig die Zuständigkeit bestreitende Instanzen arbeiteten: der Senat unter Iwan Kirilow (1689 bis 1737), dessen *Atlas des Allrussischen Reiches* schon 1734 erschien (als „Koordinatensystem“ war hier kurioserweise das weitverzweigte System der russischen Wasserläufe benutzt worden) und das Geographische Departement der Petersburger Akademie unter der Leitung des französischen Kartographen J. N. Delisle (oder de l'Isle, 1688 bis 1768), der von 1726 bis 1747 in Petersburg wirkte. 1735 gewann er Euler als Mitarbeiter, der sich zuvor schon an den Vorbereitungen für die große Nordrussische oder Kamtschatka-Expedition (1733 bis 1743) zur Erkundung der russisch-sibirischen Nordküste beteiligt hatte. 1737 verfaßten beide gemeinsam die erste auf wissenschaftlichen

Grundlagen beruhende General-Instruktion für die russischen Geodäten, um den Zulauf zuverlässiger und nach einheitlichen Methoden gewonnener Detailkarten zu sichern. Der Verarbeitung dieser Karten gab Euler selbst die Schuld am Verlust der Sehkraft seines rechten Auges 1738 (nicht 1735, wie auf Grund einer falschen Information durch den Mitarbeiter Eulers, N. Fuß, meist zu lesen ist). In diesen Jahren soll Euler fast täglich viele Stunden im Büro des Geographischen Departements gearbeitet haben. 1740 verfaßte Euler einen *Vorschlag zur Verfertigung einer General-Charte von dem Russischen Reiche*.

In dem 1745 von der Akademie endlich herausgegebenen *Atlas des Russischen Reiches* waren jedoch trotz vieler Verbesserungen gegenüber seinem Vorgänger weder der Vorschlag Eulers noch die Ergebnisse der Kamtschatka-Expedition berücksichtigt worden. Euler selbst wollte ja zu dieser Zeit bereits seit vier Jahren in Berlin.

Erst viel später, nämlich 1777, sind in den Abhandlungen der Petersburger Akademie die drei klassischen Abhandlungen Eulers über Kartenprojektionen gedruckt worden. Die beiden ersten:

*Über die Abbildung einer Kugelfläche in einer Ebene und Über die Darstellung einer Kugel-
fläche auf einer Karte* sind rein mathematischen Inhalts. Euler beweist hier zum ersten Mal die anschaulich einleuchtende Tatsache, daß eine längentreue Abbildung der Kugeloberfläche (oder auch nur eines beliebig kleinen Teils von ihr) in die Ebene nicht möglich ist, auf Grund der vorangestellten Charakterisierung solcher Abbildungen durch Differentialgleichungen. Ebenfalls aus diesen Gleichungen entwickelt er die Spezialfälle der winkeltreuen und der flächentreuen Abbildung und gibt Lösungsmethoden für diese Fälle an. Die dritte Abhandlung beschäftigte sich nachträglich mit der Frage, wie man die frei wählbaren Bestimmungstücke der für die Gesamtkarte des Russischen Reiches gewählten Projektion hätte bestimmen müssen, um die Abweichungen überall so gering wie möglich zu halten. Es ist dies ein interessantes frühes Beispiel einer ganz aus dem üblichen Rahmen fallenden Optimierungsaufgabe.

Eulers Abhandlungen lösten, da in lateinischer Sprache geschrieben und in den Petersburger Akademieabhandlungen schwer zugänglich, keine große historische Wirkung aus. Man kann jedoch annehmen, daß sie Lagrange bekannt waren, der in mehreren Richtungen über Eulers Resultate hinausgelangte. Um 1900 wurden die Abhandlungen über Kartenprojektion von Lambert, Euler, Lagrange und Gauß von A. Wangerin in deutscher Sprache in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften herausgegeben.

P. Schreiber



Ein Maultier und ein Esel

Im Jahre 1770 erschien in St. Petersburg (dem heutigen Leningrad) Leonhard Eulers *Vollständige Anleitung zur Algebra* (in zwei Teilen), ein später in viele Sprachen übersetztes Lehrbuch der Algebra für Anfänger, für Liebhaber, eine „Anleitung zum Genuß der Eigenschaften der Zahlen“. Das Buch zeichnet sich durch eine außerordentliche Klarheit aus. Der erblindete Euler hatte es seinem Diener, einem Schneidergesellen, der nur geringe mathematische Kenntnisse besaß, diktiert. Euler vermochte den Text so einfach vorzutragen, daß sein Diener den teilweise recht schwierigen Stoff verarbeiten und manche Rechnungen selbständig ausführen konnte. Das weit verbreitete Buch ist sogar in *Reclams Universalbibliothek* erschienen. Jeder mathematisch interessierte Schüler sollte gleich jenem Schneidergesellen selbst einmal Probleme daraus unter Eulers Anleitung durchdenken! Im 1. Abschnitt des 2. Teils von Eulers Buch befindet sich unter Nr. 50 die folgende Aufgabe:

Ma 8 ■ 2339 „Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud. (Das damals in Rußland übliche Gewicht Pud beträgt 20 kg.) Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal soviel als du. Darauf antwortete der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal soviel als du. Wieviel Pud hat jeder getragen?“

Eine ähnliche Aufgabe kommt schon in einer Sammlung griechischer Epigramme (4. oder 6. Jh. u. Z.) als sogenanntes *Euklidisches Problem* vor. Beispiele von Aufgaben, in welchen verlangt wird, durch gegenseitiges Abgeben an einander ein gewisses Verhältnis herzustellen, sind im übrigen zahlreich überliefert.

H. Pieper



▲1▲ В 1982 году квадрат возраста матлеба совпал с числом, образованным первыми тремя цифрами его года рождения. В каком году родился Матлеб?

▲2▲ В 1982 году 1 января и 31 декабря были одним и тем же днем недели. А будет ли так в этом году? И вообще, когда 1 января будет тем же днем недели, что и 31 декабря?

▲3▲ Mark, Paul and Boris are married to Anne, Mary and Susan, not necessarily respectively. Each couple has a pet and the pets are a cat, a guineapig and a pony. Use the following information to match up the husbands, wives and pets:

Paul's and Anne's pets were fighting.

Mary's husband's name has four letters.

Susan went round to feed Mark's pet when he was away.

Mark never goes to town.

Boris's pet is either the cat or the pony.

Susan's pet is not the cat.

The cat's male owner took him to the vet in town.

The guineapig hides when Anne visits its house.

Mary's pet sleeps in a shoe box.

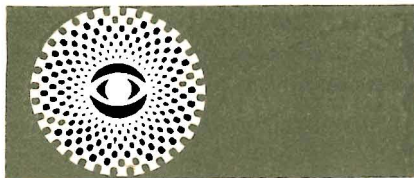
▲4▲ Un journal comporte 36 pages et tire à 600 000 exemplaires par jour. Chaque page est un rectangle dont les dimensions sont 50 cm et 33 cm. Autour de chaque page existe une marge non imprimée de largeur égale à 2 cm.

a) Quelle est l'aire de la surface imprimée?

b) Quelle est l'aire du papier nécessaire au tirage quotidien du journal?

▲5▲ La longueur d'un fil téléphonique qui relie deux localités est égale à 72,8 km. Quand la température s'élève de 1 degré, chaque mètre de ce fil s'allonge de 18 µm. Calculer, en centimètres, l'allongement de ce fil quand la température passe de 12° à 36°.

Zusammenstellung: H. Begander, Dr. C. P. Helmholz, J. Lehmann (alle Leipzig)



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Euler-Wettbewerb in Köthen

An einem Nachmittag im April 1982 war der große Hörsaal unserer Hochschule, in dem sonst künftige Mathematik- und Chemielehrer aufmerksam den Vorlesungen der Hochschullehrer und Wissenschaftler folgen, ganz den *Jungen Mathematikern* aus Stadt und Kreis Köthen vorbehalten. Anlässlich der 275. Wiederkehr des Geburtstages von *Leonhard Euler* gestalteten Studenten des 3. Studienjahres einen besonderen Höhepunkt, den „Euler-Wettbewerb“. 126 Schüler aus den Klassenstufen 5 bis 10 rangen in einer Klausur um Höchstleistungen. In jeder Klassenstufe waren jeweils drei Aufgaben zu lösen, die erste Aufgabe knüpfte an den Schulstoff an, die zweite hatte Beweischarakter, und die dritte war eine historische Aufgabe, die von *Leonhard Euler* stammt. Nach der Klausur wurden die Lösungen sofort von Studenten korrigiert. Während der Korrektur hielten zwei Studentinnen einen interessanten Vortrag über Leben und Werk Eulers. In der anschließenden Siegerehrung konnten die erfolgreichsten *Jungen Mathematiker* stolz die Urkunden mit ihrer Platzierung und kleine Geschenke in Empfang nehmen. Eine Wandzeitung erinnert in unserem Hause an diesen für Studenten und Schüler erlebnisreichen Nachmittag.

Vielleicht wollt ihr an eurer Schule einmal etwas Ähnliches versuchen? Am 18.9.1983 jährt sich zum 200. Male der Todestag von *Leonhard Euler*. Pionierleiter, AG-Leiter und Mathematiklehrer werden euch gewiß dabei helfen.

Hier sind vier Aufgaben aus unserem Euler-Wettbewerb. Sie sind Eulers „Algebra“ entnommen.

▲1▲ Siehe *alpha*-Wettbewerb, Aufgabe Ma 7 ■2336.

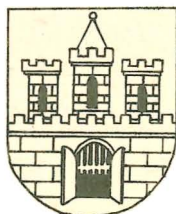
▲2▲ Das Königsberger Brückenproblem: Siehe *alpha*-heiter (S. 38)! Zusatzfrage: Ist das Problem lösbar, wenn Brücke 8 gebaut wird?

▲3▲ Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größte Summand 48mal so groß ist wie der zweite.

▲4▲ Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen aber 21 Taler.

Wieviel Pferde und wieviel Ochsen sind es gewesen? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

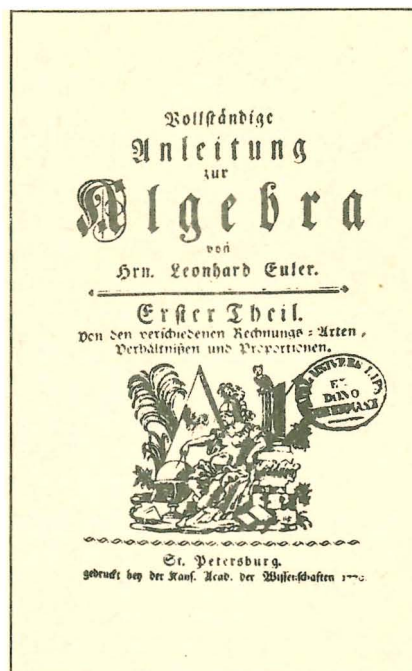
Mathe-AGs in Köthen



Seit 1976 wird an der Pädagogischen Hochschule *Wolfgang Ratke* Köthen eine zielgerichtete außerunterrichtliche Förderung begabter Schüler in Mathematik betrieben. Schrittweise wurden Arbeitsgemeinschaften *Junge Mathematiker* ab Klassenstufe 6 gebildet. Zur Zeit bestehen an unserer Einrichtung je eine Arbeitsgemeinschaft in den Klassenstufen 5 bis 8. Die Teilnehmer dieser Arbeitsgemeinschaften kommen aus Stadt und Kreis Köthen. Sie wurden aus den erfolgreichsten Teilnehmern der Kreisolympiaden ermittelt. Alle 14 Tage kommen die *Jungen Mathematiker* zu den AG-Nachmittagen in die Räume der Hochschule. Hier werden sie von Studenten des 2. und 3. Studienjahres betreut. In den Nachmittagen werden Trainingsaufgaben mit dem Niveau der Kreisolympiaden gelöst und auch Kurse zu ausgewählten Kapiteln der Mathematik durchgeführt. Dabei ist uns die *alpha* eine wertvolle Hilfe. Besondere Höhepunkte gestalten wir zur Halbzeit zwischen den Kreisolympiaden im Frühjahr. Hier finden mathematische Kreiswettbewerbe statt, in denen die *Jungen Mathematiker* ihre Kräfte messen. Foren mit Wissenschaftlern unserer Hochschule und der Besuch der Rechenstation stehen dabei auf dem Programm. Mit den ehemaligen Teilnehmern der Arbeitsgemeinschaften, die inzwischen in den oberen Klassen der POS und EOS sind, haben wir in Korrespondenzkreisen Kontakt. Hier erhalten die interessierten Schüler monatlich Aufgaben zugeschickt. Sie schicken die Lösungen zu uns ein und erhalten die Lösungen korrigiert zurück. Der Rektor der Hochschule hat den FDJ-Studenten die Förderung begabter Schüler als Jugendobjekt übertragen.

Den *alpha*-Lesern überreichen wir drei Aufgaben und wünschen viel Erfolg beim Knobeln!

K. Meier



▲1▲ Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen multiplizieren wir die erste mit der zweiten und die zweite mit der dritten. Beweise, daß dann die Summe der beiden Produkte gleich dem doppelten Quadrat der zweiten Zahl ist!

▲2▲ Zaunmaterial mit einer Länge von 400 m soll verwendet werden, um ein rechteckiges Stück Land einzuzäunen, das an einer Seite an eine lange Mauer grenzt. Dabei soll das Stück Land möglichst groß sein. Bestimme die Lage der beiden Eckpfosten des Zauns, und bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks!

▲3▲ In einem Kaufhaus kann man mit einer Rolltreppe von einer Etage zur anderen fahren. Die Rolltreppe bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Steht ein Kunde auf der sich bewegenden Rolltreppe still, so benötigt er bis zur nächsten Etage genau 30 s. Bei stehender Rolltreppe durchläuft der Kunde die gleiche Strecke in 90 s. In welcher Zeit würde er bei sich bewegender Rolltreppe die gleiche Strecke zurücklegen, wenn er selbst auch in Fahrtrichtung geht?



Junge Mathematiker bei der Klausur am Ende des ersten Lehrgangs der Mathematischen Schülergesellschaft (MSG) der Universität Greifswald (siehe Heft 1/83).

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

L. Euler · Basrelief von M. Pawlow, 1777

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1983



Vor 200 Jahren, am 18. September 1783, starb in St. Petersburg der große Mathematiker *Leonhard Euler*. Dieser aus Basel stammende Gelehrte, ein Schüler Johann Bernoullis, entwickelte sich im Verlaufe seines schaffensreichen Lebens zum bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Ihm verdanken wir die nahezu unglaubliche Anzahl von mehr als 860 Originalabhandlungen und eine große Anzahl pädagogisch hervorragender zusammenfassender Darstellungen von Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungsbereichen.

In Würdigung *Leonhard Eulers* stellen wir unseren *alpha*-Lesern Aufgaben aus dessen Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ vor. Der Originaltext einiger dieser Aufgaben wurde leicht verändert, um sie lesbarer bzw. verständlicher zu machen. Wir wünschen viel Spaß beim Lösen der Aufgaben.

Mathematik

Ma 5 ■ 2322 Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Talern. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Taler mehr erhalten als der zweite, dieser aber 100 Taler mehr als der dritte. Wieviel Taler erhält jeder der drei Söhne?

Ma 5 ■ 2323 Die Zahl 32 ist in zwei Summanden zu zerlegen. Dabei soll die Summe aus dem sechsten Teil des kleineren Summanden und dem fünften Teil des größeren Summanden 6 ergeben.

Ma 5 ■ 2324 Gesucht ist eine Zahl, die folgende Bedingung erfüllt: Multipliziert man diese Zahl mit 5, so ist das Produkt um soviel kleiner als 40, wie diese Zahl selbst kleiner als 12 ist.

Ma 5 ■ 2325 Suche zwei natürliche Zahlen, deren Summe 15 und deren Differenz 7 beträgt!

Ma 5 ■ 2326 Zerlege 7 derart in zwei Summanden, daß der eine um 3 größer ist als der andere!

Ma 5 ■ 2327 Die Zahl 25 ist in zwei Summanden zu zerlegen. Der eine Summand soll ein Vielfaches von 2, der andere ein Vielfaches von 3 sein. Es sind alle Lösungen anzugeben.

Ma 6 ■ 2328 Zerlege 48 so in neun Summanden, daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer ist als der vorhergehende!

Ma 6 ■ 2329 Suche eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn man zu ihr ihre Hälfte addiert, so viel über 60 herauskommt, als die Zahl selbst unter 65 ist!

Ma 6 ■ 2330 Ein Maurer verdient täglich 10 Groschen. Wieviel Taler zu 24 Groschen erhalten 12 Maurer, die 50 Tage lang gearbeitet haben?

Ma 6 ■ 2331 Zerlege 25 so in zwei Summanden, daß der eine 49mal so groß ist wie der andere!

Ma 6 ■ 2332 Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihrem Drittel multipliziert 24 ergibt.

Ma 7 ■ 2333 Es wird die kleinste natürliche Zahl gesucht, die bei Division durch 11 den Rest 3, bei Division durch 19 den Rest 5 läßt.

Ma 7 ■ 2334 Insgesamt 20 Männer und Frauen besuchten ein Gasthaus. Jeder Mann gibt 8 Groschen, jede Frau 7 Groschen aus, und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Taler. Wieviel Männer bzw. wieviel Frauen sind es gewesen? (1 Taler wurde damals mit 24 Groschen berechnet.)

Ma 7 ■ 2335 Ich habe einige Ellen Tuch gekauft und für 5 Ellen 7 Taler bezahlt, davon wieder 7 Ellen für 11 Taler verkauft und dabei 100 Taler gewonnen. Wieviel Ellen Tuch sind es gewesen?

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 ■ 1369
30	150	
	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 7 ■ 2336 Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu 8 Stück abzähle, so bleiben 7 übrig.“ Die zweite sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu 10 Stück abzähle, so bleiben mir auch 7 übrig.“ Wie viele Eier hat jede der beiden Bäuerinnen?

Ma 8 ■ 2337 Jemand hat zwei silberne Becher nebst einem Deckel dazu. Der erste Becher wiegt 12 Lot. Legt man den Deckel darauf, so wiegt er zweimal soviel wie der andere Becher. Legt man aber den Deckel auf den anderen Becher, so wiegt dieser dreimal soviel wie der erste. Wieviel Lot wiegt der zweite Becher, wieviel der Deckel?

Ma 8 ■ 2338 Ein Wechsler hat zweierlei Münzen. Von der ersten Sorte gelten 10 Stück, von der zweiten Sorte 20 Stück einen Taler. Jemand verlangt 17 Münzen für einen Taler. Wieviel Münzen jeder Sorte bekommt er?

Ma 8 ■ 2339 Text siehe: *Historische Aufgabe*, S. 34!

Ma 8 ■ 2340 Ein Vater hinterläßt seinen vier Söhnen eine Erbschaft, die sie wie folgt unter sich aufteilen: Der erste Sohn nimmt 3000 Taler weniger als die Hälfte der Erbschaft. Der zweite nimmt 1000 Taler weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft. Der dritte nimmt $\frac{1}{4}$ der ganzen Erbschaft. Der vierte nimmt 600 Taler und $\frac{1}{5}$ der Erbschaft. Wie groß war die Erbschaft, und wieviel Taler hat jeder Sohn bekommen?

Ma 9 ■ 2341 Eine Bäuerin vertauschte Käse gegen Hühner. Sie gibt je zwei Käse für je drei Hühner. Die Hühner legen Eier; jedes $\frac{1}{3}$ soviel wie es Hühner sind. Mit den Eiern geht sie auf den Markt. Sie gibt je neun Eier für soviel Pfennig, wie ein Huhn Eier gelegt hat. Der Erlös beträgt 72 Pfennig. Wieviel Käse hat die Bäuerin gegen Hühner eingetauscht?

Ma 9 ■ 2342 Jemand kauft eine gewisse Anzahl Tücher, das erste für 2 Taler, das zweite für 4 Taler, das dritte für 6 Taler, immer 2 Taler mehr für das folgende. Er bezahlt für alle Tücher 110 Taler. Wieviel Tücher sind es gewesen?

Ma 9 ■ 2343 Insgesamt 20 Männer und Frauen sind in einem Gasthaus. Die Männer geben zusammen 24 Gulden, die Frauen geben zusammen ebenfalls 24 Gulden aus. Es stellt sich heraus, daß jeder der Männer einen Gulden mehr als jede der Frauen hat zahlen müssen. Wieviel Männer bzw. Frauen waren es?

Ma 9 ■ 2344 Gesucht sind die drei kleinsten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe ihrer Kubikzahlen ergibt eine weitere Kubikzahl.

Ma 10/12 ■ 2345 Jemand kauft ein Pferd für einige Taler. Er verkauft es wieder für 119 Taler und gewinnt daran soviel Prozent, wie das Pferd anfangs gekostet hat. Wie teuer wurde das Pferd eingekauft?

Ma 10/12 ■ 2346 Zwei Personen haben zusammen 29 Rubel Schulden. Nun hat zwar jeder Geld, doch nicht soviel, daß er diese gemeinsamen Schulden allein bezahlen könnte. Darum sagt der erste zum anderen: „Gibst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, so könnte ich die Schulden sogleich allein bezahlen.“ Der andere antwortete:

„Gibst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so kann ich die Schulden allein bezahlen.“ Wieviel Geld hat jeder gehabt?

Ma 10/12 ■ 2347 Drei Personen betreiben miteinander ein Glücksspiel. Im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beiden anderen soviel Geld, wie jeder der zwei anderen Geld bei sich hat.

Im zweiten Spiel verliert der zweite an den ersten und dritten soviel Geld, wie jeder nunmehr hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und zweiten soviel Geld, wie jeder bis dahin hat. Nach Beendigung der drei Spiele hat jeder von ihnen 24 Gulden. Wieviel Gulden hat jeder anfangs gehabt?

Ma 10/12 ■ 2348 Man suche zwei positive reelle Zahlen, deren Summe, deren Produkt und deren Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Physik

In alten Büchern geblättert
Physikaufgaben aus den 20er Jahren

Ph 6 ■ 136 In früheren Jahren zeigten sich in kleinen Städten Schnellläufer, die eine gewisse Strecke abliefen und für diese Leistung bei den Bewohnern Geld sammelten. Eines Tages lief ein solcher Läufer 43,2 km, und zwar $3 \frac{\text{m}}{\text{sek}} \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$. Wie lange brauchte er für diesen Schnelllauf? Wieviel Sprungschritte hatte er machen müssen, wenn er in der Sekunde 3 Sprünge machte?

Ph 7 ■ 137 Wenn auf einem Ozeandampfer die Geschwindigkeit vermehrt werden soll, muß die Leistung der Dampfmaschine erhöht werden. Nun aber wächst erfahrungsgemäß die Leistung proportional der dritten Potenz der Geschwindigkeit. Wie hoch muß die Leistung erhöht werden, wenn die entsprechenden Meßapparate bei 15 Knoten Stunden-geschwindigkeit 2700 PS zeigen und wenn die Geschwindigkeit auf 20 Knoten erhöht werden soll?

Ph 8 ■ 138 Nach Angabe des römischen Baumeisters Vitruv um 100 n. Chr. wog die

Krone des Königs Hiero, in heutigem Gewichtsmaß ausgedrückt, 10 kg (kp) und verlor, in Wasser gewogen 0,625 kg (kp). Aus wieviel Gold und Silber bestand sie, wenn außer diesen Metallen kein anderer Stoff in der Krone war und das Gold im Wasser $\frac{1}{19}$, das

Silber $\frac{1}{10}$ seines Gewichts verliert?

Ph 9 ■ 139 Regnault hat festgestellt, daß sich der Rauminhalt, den 1 cm³ Quecksilber von 0° (°C) nach der Erwärmung auf t° (°C) einnimmt, nach der Formel

$$0,00000003 t^2 + 0,0002 t + 1$$

berechnen lasse. Wie hoch muß die Temperatur werden, um den Rauminhalt auf 1,01 cm³ zu bringen?

Ph 10/12 ■ 140 Wie groß ist der Steigungswinkel einer Schraubenlinie, wenn $h = 15$ mm und $r = 6,2$ mm ist? Wie lang ist die Schraubenbahn bei einer Windung?

Chemie

Ch 7 ■ 109 Die Hochöfen des Hüttenkombinats Magnitogorsk produzieren nach Rekonstruktion am Ende der siebziger Jahre pro Jahr etwa 14,8 Mill. t Roheisen. Der Transport des Roheisens erfolgt in Eisenbahnwaggons mit einem Fassungsvermögen von 20 t und einer Länge von 8 m.

a) Wieviel Tonnen Roteisenstein mit einem Eisen(III)-oxidgehalt von 56% müssen jährlich verarbeitet werden?

b) Wieviel Eisenbahnwaggons sind für den Transport notwendig?

c) Welche Länge ergeben alle Eisenbahnwaggons zusammen?

Ch 8 ■ 110 Zur Herstellung von 100 kg Natriumsulfat mit einem Reinheitsgrad von 97% verwendet man 81,7 kg Natriumchlorid und 74,5 kg Schwefelsäure. Berechne a) mengenmäßig und b) prozentmäßig den Unterschied zwischen den verschiedenen Mengen an Ausgangsstoffen gegenüber den stöchiometrischen Mengen!

Ch 9 ■ 111 Im VEB Stickstoffwerk Piesteritz wird Harnstoff durch Synthese von Ammoniak und Kohlendioxid hergestellt. Wieviel Kubikmeter der beiden Ausgangsstoffe müssen zur Reaktion gebracht werden (Normzustand), damit 150 kg Harnstoff mit einem Reinheitsgrad von 95% entstehen?

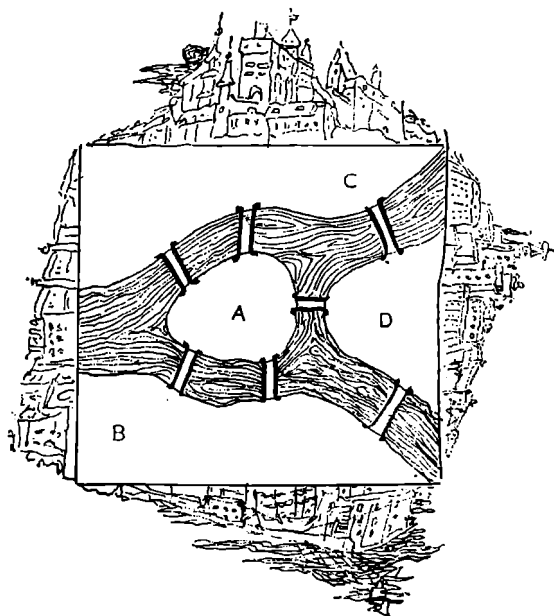
Ch 10/12 ■ 112 Beim starken Erhitzen von 1 kg eines Gemisches aus Kalziumkarbonat und Magnesiumkarbonat bleibt ein Rückstand von 514 g. Wieviel Prozent der beiden Karbonate sind im Gemisch enthalten?

In freien Stunden · alpha-heiter



Das Königsberger Brückenproblem

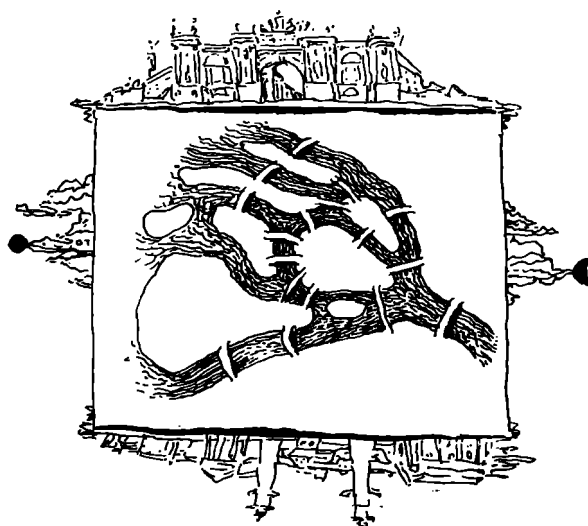
Euler schreibt: „Zu Königsberg in Preußen ist eine Insel A, genannt *Der Kneiphof*, und der Fluß, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie das aus dem Bild ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken *a, b, c, d, e, f* und *g*. Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spaziergang so einrichten könne, daß er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreitet... Hieraus bildete ich mir folgendes höchst allgemeines Problem: Wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung der Arme sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht.“



Titelvignette: Gruppenbild Petersburger Akademiemitglieder der math./phys. Klasse, die feierlich eine Eulerbüste auf ein Postament stellen (Schattenriß, 1784).

Die Leningrader Brücken

Im Mathematiksaal des *Hauses der unterhaltsamen Wissenschaft* finden wir ein interessantes Bild. Die Aufgabe besteht darin, über 17 Brücken, die das abgebildete Territorium der Stadt Leningrad miteinander verbinden, nur einmal zu gehen.



Das Problem der vertauschten Briefe

Euler löste ein von Nikolaus Bernoulli gestelltes Problem unabhängig von diesem, das in einer alltäglichen Interpretation (Auslegung) das Problem der vertauschten Briefe betrifft.

Jemand schreibt n Briefe und auf n Umschläge die zugehörigen Adressen. Auf wie viele Arten kann er die Briefe sämtlich in falsche Umschläge stecken?

Die Lösung lautet:

$$n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Löse das Problem mit $n=4$!

Euler an Goldbach

Euler stellte Goldbach 1751 die folgende Aufgabe:

Auf wie viele Arten läßt sich ein konvexes n -Eck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen?

Zunächst sieht das Problem recht einfach aus, aber mit der Eckenzahl steigt die Schwierigkeit zunehmend an, so daß Euler merkt: „Die Induktion (lat. Hinführung) aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam.“

Die gesuchte Zahl ist

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}$$

Arbeite mit $n=9$!

Streit

Eine merkwürdige Geschichte ereignete sich zur Zeit von Eulers Aufenthalt in Berlin. Euler war mit seinem Nachbarn in Streit darüber geraten, wer einen beide Grundstücke trennenden Graben zuschütten solle. Beide Kontrahenten vertraten ihre Ansicht mit großer Hartnäckigkeit, so daß die Sache gerichtlich entschieden werden mußte, was die erheblichen Kosten von 100 Talern verursachte. Die Kosten für das Zuschütten des Grabens hätten etwa 5 Taler betragen.

Schwieriges Problem

Euler schrieb 1749 an Goldbach, daß neulich in den „Braunschweiger Anzeigen“ die Frage: „Wieviel Kapital von 1000 Rth. in 640 Jahren zu 5 pro cento (Prozent), Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?“

aufgegeben worden sei und der Auftraggeber verlange, die Antwort in einer halben Stunde zu finden. Euler „hat aber dieselbe wohl eine ganze Stunde gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könne.“

Euler gesteht offen, daß die Auflösung des übersichtlichen Gleichungssystems

$$x + y + z = u^2$$

$$xy + xz + yz = v^2$$

$$xyz = w^2$$

in ganzen Zahlen ihn bald zur Verzweiflung brachte, so viel Mühe habe die Lösung gekostet. Es erstaunt daher auch nicht, daß die kleinsten ganzzahligen Lösungen folgende sind:

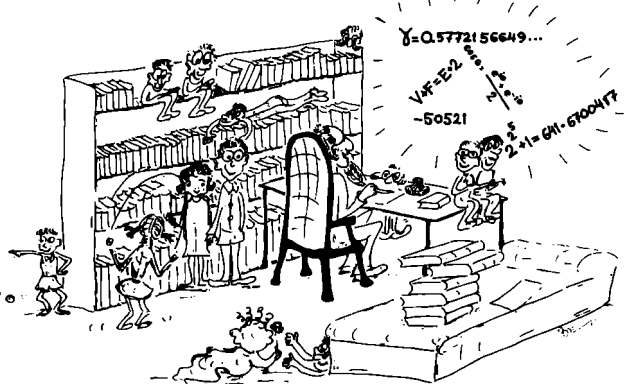
$$x = 1633780814400,$$

$$y = 252782198228,$$

$$z = 3474741058973.$$

Später hat Euler noch weitaus schwierigere dieser Art bewältigt.

Limerick um Euler



Leonhard Euler var produktiv man
sjuhundra skrifter han utgav minsann!
Men han syssla på natten
ej enbart med matten
för tretton ungar skaffade han.

Sinnngemäße Übersetzung:

L. Euler war fleißig, man merke:
Schrieb 700 mathematische Werke;
denn zur Nacht galt sein Fleiß
nicht nur Trank und Speis'.
So hatt' er für 13 die Stärke.

Text: Bengt Klefsjö; Bild: Andrejs Dunkels;
aus: Elemente, Uppsala

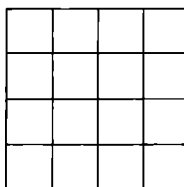
Schweizer Käse

Eulers Schaffenskraft war zeit seines Lebens enorm. Seine Ideen hätten ausgereicht, um mehrere Institute mit Arbeit zu versorgen. So ist es kein Wunder, daß man mit dem Druck seiner Arbeiten einfach nicht nachkam. Noch Jahrzehnte nach seinem Tode konnte man unveröffentlichte Manuskripte Eulers publizieren, was Euler prophezeit hatte. Ein Lehrbuch der höheren Mathematik war von Euler 1763 druckfertig gemacht worden, aber nach mehreren Jahren noch nicht erschienen. Das hatte sich herumgesprochen, bis zu einem in der Schweiz lebenden wohlhabenden Kürschner, der ein begeisterter Amateur-Mathematiker war. Er bat Euler um die Erlaubnis, ihn in Berlin besuchen zu dürfen, um das Manuskript für sich abzu-schreiben. Euler gewährte ihm diese Bitte gern. Als Dank sandte der wieder in die Schweiz zurückgekehrte Kürschner Euler ein Paket Schweizer Käse.

Griechische magische Quadrate

Euler befaßte sich auch mit magischen Quadraten, von denen gegen Ende des 18. Jh. eine neue Art große Beachtung fand, die sogenannten *griechischen Quadrate*. Hierzu eine Aufgabe aus dem Buch *Wunder der Rechenkunst* von J. Ch. Schäfer (Weimar, 1832):

Zauberquadrat von 16 Feldern:



Wie werden die sechszehn Zahlen von 1 bis 16 so in das obige Quadrat vertheilt, daß, wenn man die Zahlen addirt, welche in den vier Veldern in einer und derselben Reihe stehen, die Summe immer 34 beträgt?

Im Jahre 1750 . . .

Wie alt waren im Jahre 1750 Bach, Voltaire, Euler und Lomonossow? Die ersten drei zählten damals zusammen 164 Jahre, während die letzten drei 138 Jahre insgesamt aufwiesen. Bach, Voltaire und Lomonossow waren zusammen 160 Jahre alt; Bach, Euler und Lomonossow hingegen 147 Jahre.



Über den Rösselsprung von Euler

Euler war ein guter Schachspieler. In Berlin, das Euler als sehr schachfreudig kennzeichnete, hat er bei einem Juden das Spiel erlernt, und er sagt: „Ich habe ... es so weit gebracht, daß ich ihm (dem Lehrer) die meisten Partien abgewinne.“

Wie wir einem Brief aus dem Jahre 1751 entnehmen können, bedauerte er die wegen einer Affaire notwendige plötzliche Abreise des Schachmeisters Philidor aus Potsdam, „sonst würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben, mit ihm zu sprechen“. Philidors Bauernführung („Der Bauer ist die Seele des Schachs“) hat die Spielweise im Schach stark beeinflusst. Euler besaß 1751 bereits Philidors 1749 in London erschienenes Buch „Analyse des Schachspiels“.

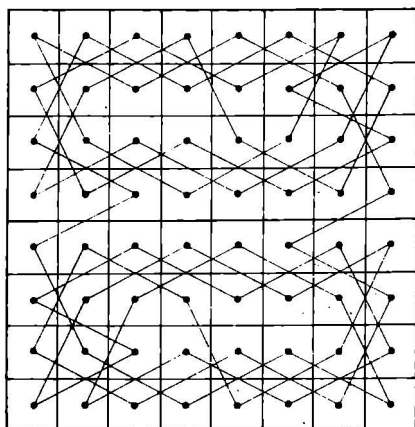
In den Memoires der Berliner Akademie von 1759 findet sich eine 22seitige Abhandlung über den Rösselsprung:

„Eines Tages befand ich mich in einer Gesellschaft, als bei Gelegenheit des Schachspiels jemand die Frage aufwarf, mit einem Springer bei gegebenem Anfangsfeld alle Felder des Schachbretts der Reihe nach, jedes nur einmal zu passieren... Diejenigen, die die Aufgabe für ziemlich leicht hielten, machten mehrere nutzlose Versuche, ohne zum Ziel zu gelangen. Hierauf gab derjenige, der die Frage aufgeworfen hatte, eine Route so an, daß eine vollständige Lösung entstand. Die Menge der Felder ließ indessen nicht zu, die gewählte Route dem Gedächtnis einzuprägen, und erst nach mehreren Versuchen gelang es mir, eine der Aufgabe genügende Route zu finden, sie galt auch nur für ein bestimmtes Anfangsfeld.“

Vermutlich ist die Rösselsprungaufgabe so alt wie das Schachspiel selbst, aber erst Euler gab ihr, wenn auch nicht eine Theorie, so doch ein praktikables Lösungsverfahren. Er geht dabei zunächst aufs Geratewohl voran, bis der Rösselsprung sich nicht weiter ausführen läßt. Dann wird der Rösselsprung in zwei Teile zerlegt sowie auf neue Art miteinander wieder verbunden, so daß alle früheren Felder wieder besetzt sind, aber ein neuer Endpunkt zustande kommt, von dem möglicherweise

eines der freien Felder erreichbar ist. Die geschickten Zerlegungen Eulers in den Beispielen machen es glaubhaft, daß man stets zum Ziel kommen könne, bewiesen wird es nicht. Jean Paul schreibt im Hesperus: „Gegen den Eulerschen Rösselsprung der Ratten zog er nur mit einem Schlagel zu Felde“, woraus zumindest hervorgeht, daß auch Euler den Rösselsprung populär gemacht hatte. Das Bild zeigt einen in sich geschlossenen Rösselsprung Eulers, der zweiteilig genannt wird, da er zuerst auf der einen und dann auf der anderen Hälfte des Bretts ausgeführt wird. Von dieser Art gibt es übrigens 31 054 144 Lösungen, wie die Mathematiker katalogisierend ermittelt haben.

Euler untersuchte auch rechteckige und andersartige Bretter in bezug auf den Rösselsprung. Er zeigte z. B., daß es auf Brettern vom Format 3×5 keine Rösselsprünge gibt, auf dem Format 3×7 sind keine geschlossenen Rösselsprünge möglich.



Zweiteiliger geschlossener Rösselsprung von Euler

Unser Schachexperte, Herr H. Rüdiger, Grünheide, schreibt zum Rösselsprung:

Ein Rösselsprung setzt sich aus mehreren Springerzügen zusammen. Die Anzahl der möglichen geschlossenen (der Rösselsprung führt zum Ausgangspunkt wieder zurück) und offenen Rösselsprünge ist sehr groß, und die Methoden, einen solchen aufzubauen, sind mannigfaltig. Am bekanntesten ist der Rösselsprung als Rätsel, bei dem die auf die Felder eines Schachbretts oder einer beliebigen Figur in der Gangart des Springers verteilten Silben, Wörter oder Buchstaben eines Gedichts oder Sinnspruchs zusammengesetzt sind.

Bild 1 zeigt uns einen offenen Rösselsprung auf dem Schachbrett, der auf dem Feld d8 oder e8 beginnt und dementsprechend auf e8 bzw. d8 endet. In seiner grafischen Darstellung läßt sich mit etwas Phantasie eine Blumenblüte erkennen!

Für die Blume wird eine Vase gesucht! Versuche mittels einem geschlossenen Rössel-

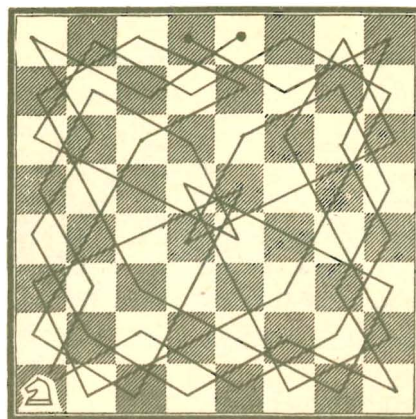


Bild 1

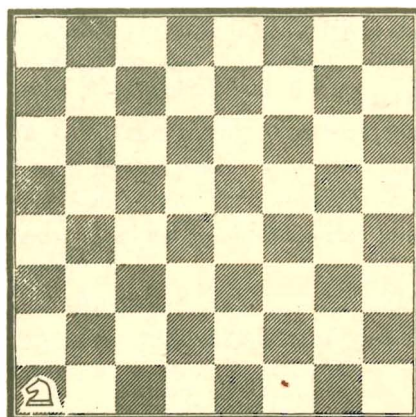


Bild 2

sprung, der auf dem Feld a1 des Schachbretts beginnt und endet, eine phantasievolle Vase darzustellen! Nutze dazu das leere Diagramm (Bild 2)!

Als Hilfe seien einige Punkte des gesuchten Rösselsprungs vorgegeben:

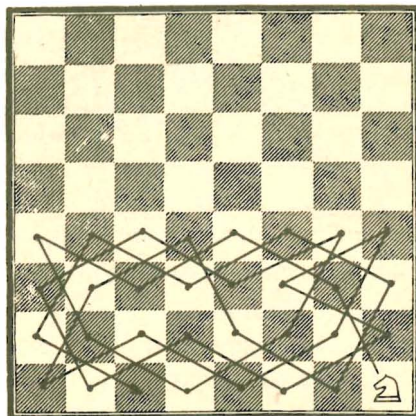
Im 3. Zug wird das Feld b7, im 8. – e7, im 14. – e3, im 22. – f4, im 29. – h1, im 37. – d7, im 45. – f3 und im 52. – h4 berührt.

Anmerkung:

Kein Feld des Brettes darf zweimal durch den Rösselsprung berührt werden!

Bild 3

Ein offener Rösselsprung von Euler auf dem halben Schachbrett.



Die Eulersche Polyederformel und einiges mehr

Es war einmal vor 777 Jahren, da lebten hinter den 7 Bergen, den 7 Flüssen und den 7 Wäldern nicht 7, sondern 5 Einsiedler. Und weil sie so zänkisch waren, liebten sie es nicht, auf ihren Spaziergängen (einander) zu begegnen. Doch eines Tages wurden sie es müde, in ihren Häusern zu sitzen, und sie begannen, sich gegenseitig Besuche abzustatten. So willkommen dies auch war, wollten sie sich trotzdem unterwegs nicht begegnen. Und so stellte sich für sie die Frage:

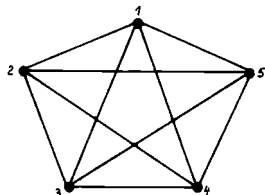
Ist es möglich, daß wir zwischen je zwei unserer Häuser einen Weg anlegen, ohne daß diese Wege sich kreuzen?

Wir wollen uns im folgenden diesem und anderen Problemen zuwenden, die alle durch eine Gemeinsamkeit verbunden sind: Zu ihrer Lösung nutzen wir die

Eulersche Polyederformel

Dazu benötigen wir aber einige Begriffe aus der Graphentheorie: Zeichnen wir auf ein Blatt Papier 5 Punkte, die die Häuser der Einsiedler bezeichnen sollen, und verbinden wir jedes Paar von Punkten durch eine Linie (den Weg), so erhalten wir das Bild 1.

Bild 1

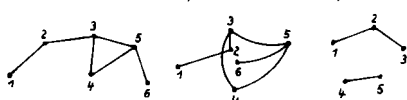


Eine solche Abbildung nennen wir einen **Graph**. Wir erhalten einen Graph, indem wir einige Punkte zeichnen und gewisse Paare von ihnen (nicht notwendig alle) durch Linien verbinden. Die zuerst gezeichneten Punkte nennen wir **Knoten**, die Verbindungslinien heißen **Kanten**. Dabei spielt es keine Rolle, auf welche Weise Knoten und Kanten gezeichnet werden. Wichtig ist nur, welche Knotenpaare verbunden sind. Bild 2 zeigt 3 Graphen. Dabei ist der Graph 2a) der gleiche wie der Graph 2b).

Bild 2a

b)

c)



Wir betrachten nur „zusammenhängende“ Graphen, d. h. solche, die es gestatten, von einem beliebigen Knoten ausgehend entlang der Kanten zu jedem anderen Knoten zu gelangen. Der Graph 2a) ist zusammenhängend, 2c) nicht.

Das Problem der zänkischen Nachbarn besteht also in der Frage, ob man den in Bild 1

dargestellten Graphen auch so zeichnen kann, daß sich keine Kanten schneiden. Einen zusammenhängenden Graphen, für den das möglich ist, nennen wir „**eben**“. Der Graph 2b) ist eben, weil er wie in 2a) gezeichnet werden kann. Ist es aber auch der in Bild 1 dargestellte „Graph der zänkischen Nachbarn“? Das zu überprüfen ist nicht einfach, und wir müssen uns ein starkes Hilfsmittel bereitstellen, das uns die Lösung erleichtert: Sei e die Knotenzahl, k die Zahl der Kanten und $(f-1)$ die Zahl der bei der „ebenen“ Darstellung eingeschlossenen Flächen. (Zählen wir die „äußere“ Fläche mit, so ist f die Flächenzahl.) Zum Beispiel ist in Bild 2a: $e=6, f=2, k=6$.

Für ebene Graphen gilt dann die nach **Leonhard Euler** benannte Formel,

die **Eulersche Polyederformel**: $e+f=k+2$.

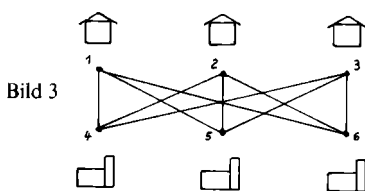
Auf den Beweis wollen wir hier verzichten. Er wird in einem späteren Beitrag geführt. Eine unterhaltsame Version davon kann man in dem Buch der mathem. Schülerbücherei (MSB Nr. 102) finden: E. Hodi: *Mathematisches Mosaik*. Urania-Verlag Leipzig (S. 200/201).

Das Problem der zänkischen Nachbarn

Kommen wir zur Lösung des eingangs geschilderten Problems, d. h. zur Frage, ob der in Bild 1 dargestellte Graph eben ist. Nehmen wir an, das wäre so und wir hätten eine solche Skizze gefunden, in der sich keine Kanten schneiden. Dann wollen wir uns jedes Flächenstück (auch das „äußere“) als ein Land vorstellen und die Kanten als Ländergrenzen. Die Zahl der Grenzen ist $k=10$, die der Länder $f=k+2-e=10+2-5=7$. Jedes Land stellt nun an jeder seiner Grenzen genau einen Posten auf. Die Gesamtzahl der Posten sei p . Weil an jeder Grenze von jeder Seite genau ein Posten steht, ist dann $p=2k=20$. Andererseits hat aber jedes Land mindestens 3 Grenzen, weil es zwischen zwei Häusern der Einsiedler immer genau einen direkten Weg gibt. Folglich ist $p \geq 3f=21$.

Aus dem so erhaltenen Widerspruch können wir schließen, daß die Annahme, der Graph sei eben, falsch ist. Es ist also nicht möglich, die Wege so anzulegen, daß sie sich nicht schneiden.

Ein ähnliches Problem, dessen Lösung jeder selbst finden kann, ist das folgende:



Drei Häuser sollen jeweils direkte Zuleitungen zum Gaswerk, Wasserwerk und zum Kraftwerk erhalten (Bild 3). Die Frage ist, ob das möglich ist, ohne daß irgendwelche Leitungen sich im Bilde kreuzen, ob also der Graph eben ist.

Löst dieses Problem unter Zuhilfenahme ähnlicher Überlegungen wie beim „Problem der zänkischen Nachbarn“!

Weitere Aufgaben

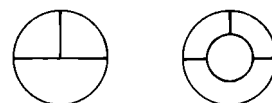
Es gibt viele ähnliche Probleme, die sich mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel lösen lassen. Aus der Beschäftigung mit Problemen der Färbung politischer Landkarten entstand z. B. die Frage:

Kann es eine Landkarte geben, auf der 5 Länder paarweise aneinandergrenzen?

(Gefordert ist dabei eine gemeinsame Grenze von einer Länge größer als Null, um die Frage nicht trivial lösbar zu machen.)

Für 3 bzw. 4 Länder kann man solche Karten leicht angeben (Bild 4), für 5 stößt man auf Schwierigkeiten.

Bild 4



Löst dieses Problem unter Zuhilfenahme der **Eulerschen Polyederformel**! Verwendet dazu folgende Überlegungen: Angenommen, die geforderte Karte ist gezeichnet. Dann kann man in jedem Land die Hauptstadt einzeichnen und jegliche 2 Hauptstädte über die gemeinsame Grenze durch eine Eisenbahnlinie verbinden. Der erhaltene Graph ist eben.

Und noch eine Aufgabe wollen wir stellen:

n Geraden mögen in der Ebene so liegen, daß keine zwei von ihnen parallel sind und keine 3 sich in einem Punkt schneiden. In wieviel Teilflächen zerlegen diese Geraden die Ebene?

Hinweis: Schneidet ausreichend weit „draußen“ mit einem Kreis ab, und studiert den erhaltenen ebenen Graphen! Er hat eine Fläche mehr (nämlich die „äußere“ Fläche) als die zerlegte Ebene.

Regelmäßige Körper

Sicher habt ihr schon bemerkt, daß wir ständig von einer Polyederformel, aber nie von einem Polyeder (Körper, dessen Oberfläche aus Ebenenstücken besteht) sprachen. Das soll sich nun ändern. Wir beschränken uns dabei auf konvexe Polyeder, d. h. solche, bei denen mit 2 Punkten auch stets die Verbindungsstrecke zum Polyeder gehört.

Stellen wir uns vor, ein konvexes Polyeder wäre aus Gummituch hergestellt. Wir schneiden eine Seitenfläche heraus und spannen den Rest auf die Ebene. So erhalten wir einen ebenen Graphen. Das herausgeschnittene Stück geht dabei in die „äußere“ Fläche über, die Ecken in Knoten, die Kanten in Kanten des Graphen usw. Hat das Polyeder e Ecken, f Flächen und k Kanten, so gilt folglich $e+f=k+2$. Diese Formel gilt für jedes konvexe Polyeder.

Wir wollen im folgenden nur die sogenannten **regelmäßigen Körper** (auch **platonische Körper** genannt) betrachten. Das sind konvexe

Polyeder höchster Regelmäßigkeit: Alle Seitenflächen sind paarweise kongruente regelmäßige Vielecke. Ein Beispiel hierfür ist der Würfel mit 6 paarweise kongruenten regelmäßigen Vierecken (Quadraten) als Seitenflächen.

Aber welche regelmäßigen Körper gibt es noch? Wir wollen versuchen, sie alle zu finden.

Dazu betrachten wir eine fixierte Ecke des Körpers. Um diese Ecke „salzbar“ zu machen, können 3, 4 oder 5 gleichseitige Dreiecke, 3 Quadrate oder 3 regelmäßige Fünfecke an der Ecke anliegen. Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

Nehmen wir also zunächst einmal an, daß an jeder Ecke 3 gleichseitige Dreiecke anliegen. Würden wir nun schlußfolgern, daß es dreimal soviel Seitenflächen wie Ecken gibt ($f=3e$), so hätten wir jede Fläche dreimal gezählt (nämlich von jeder ihrer Ecken aus).

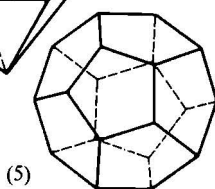
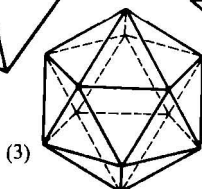
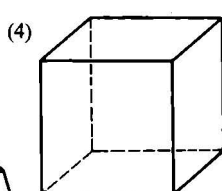
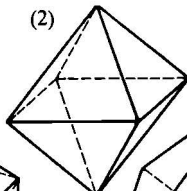
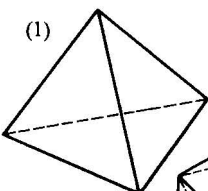
Es ist also $f=\frac{3}{2}e$. Da von jeder Ecke 3 Kanten ausgehen und wir diese nur doppelt zählen, ermitteln wir weiter: $k=\frac{3}{2}e$. Aus $e+f=k+2$ bzw. $e+\frac{3}{2}e=\frac{3}{2}e+2$ ergibt sich $e=4$ und folglich $f=6, k=12$.

Der Körper mit 4 gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen ist das Tetraeder, uns allen vertraut durch die Kondensmilchverpackungen.

Analog können wir nun in den anderen Fällen vorgehen. Bei 4 gleichseitigen Dreiecken pro Ecke ist $f=\frac{4}{3}e, k=\frac{4}{2}e=2e$, und aus der Polyederformel ermitteln wir $e=6, f=8, k=12$ (Oktaeder).

In der Tabelle sind die Ergebnisse für alle regelmäßigen Körper zusammengefaßt:

Seitenflächen	Seitenfl. pro Ecke	$f=$	$k=$	e	f	k	Name
Dreiecke	3	$\frac{3}{2}e$	$\frac{3}{2}e$	4	6	12	Tetraeder (1)
	4	$\frac{4}{3}e$	$\frac{4}{2}e$	6	8	12	Oktaeder (2)
	5	$\frac{5}{3}e$	$\frac{5}{2}e$	12	20	30	Ikosaeder (3)
Vierecke	3	$\frac{3}{4}e$	$\frac{3}{2}e$	8	6	12	Hexaeder (Würfel) (4)
Fünfecke	3	$\frac{3}{5}e$	$\frac{3}{2}e$	20	12	30	Pentagon-dodekaeder (5)



R. Schulze

Leseprobe

R. THIELE

Leonhard Euler

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Band 56

102 Seiten mit 33 Abbildungen

Bestell-Nr. 6660450

Preis: 9,60 M

BSB B. G. Teubner

Verlagsgesellschaft Leipzig

Aus dem Inhalt (Auszug):

Euler und seine Zeit - die Aufklärung - Basel (Herkunft und Kindheit, Lehrjahre, erste Schritte in der Wissenschaft) - Petersburg (Akademie der Wissenschaften in P., auf dem Wege zum Ruhm, erste Meisterwerke) - Berlin (Berufung an die Akademie, Tragweite der Mechanik, eines der schönsten mathematischen Werke: Die Variationsrechnung, bahnbrechende Resultate, Beiträge zur Analysis, Zerwürfnis mit Friedrich II.) - Petersburg (Rückkehr nach P., ein erblindetes Genie, jeder Mensch ist sterblich) - Der Mann und sein Werk - Chronologie

... Die Untersuchungen über die Reste, die Potenzen beim Dividieren lassen, bilden eine wichtige Leistung der Mathematik zur Zeit Eulers. Hier sind bereits die Keime der Gruppentheorie enthalten. Das Zahlenrechnen tritt in den Hintergrund zugunsten strukturellen Denkens, was Mathematiker gern als „Eleganz“ bezeichnen. Euler hat maßgeblich hierzu beigetragen. Wir geben als Leseprobe einen Satz nebst Eulers Kommentar:

„Wenn p Primzahl und a eine nicht durch p teilbare Zahl ist, dann läßt sich kein Term der geometrischen Folge

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ usw.

durch p teilen.

Ich habe mir vorgenommen, die Reste, welche bei der Division der Terme dieser geometrischen Reihe durch p entstehen, aufmerksam zu betrachten. Zunächst sind diese einzelnen Reste, wie sich aus der Natur des Divisionsverfahrens ergibt, kleiner als p ; kein Rest wird aber $=0$ sein, weil kein Term durch p teilbar ist. Wenn im Verlauf der Untersuchungen Reste vorkommen, die größer als p sind, so weiß man aus der Arithmetik, wie man sie zu reduzieren hat. So ist der Rest $p+r$ gleichbedeutend mit dem Rest r , und allgemein führt der Rest $np+r$ zurück auf den Rest r , wenn r größer ist als p , so führt man diesen Rest zurück auf $r-p$ oder $r-2p$ oder $r-3p$ usw., bis man zu einer Zahl kommt, die kleiner als p ist. Daher sollen alle Reste $r \pm np$ als ein und derselbe Rest r angesehen werden. Genau zu reden sind alle Reste positive Zahlen kleiner als p , trotzdem ist es aber bequem, negative Reste zu betrachten; wenn r ein Rest ist kleiner als p , so wird auch $r-p$, was eine negative Zahl ist, Rest sein, so daß also der positive Rest r gleichbedeutend mit dem negativen Rest $r-p$ ist.“



Kurzbiographie

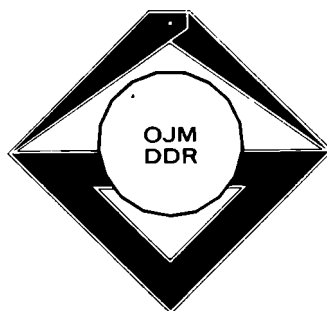
Rüdiger Thiele, geboren 1943 in Polepp (jetzt Polepy, ČSSR). 1957 bis 1961 Besuch der O.-v.-Guericke-OS Magdeburg, Studium der Mathematik mit Zweitfach Physik 1962 bis 1967 an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Promotion 1975 über ein Thema der Variationsrechnung, 1967 bis 1973 Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Universität Halle, Leiter von mathematischen Schülerarbeitsgemeinschaften, langjähriger Vorsitzender des Klubs Junger Mathematiker des Saalkreises, gegenwärtig Verlagslektor im S. Hirzel-Verlag, Leipzig. Neben zahlreichen Beiträgen für die *alpha* veröffentlicht er: *Mathematische Beweise* (MSB-Band), Biographie *Leonhard Euler* und das Spielbuch *Die gefesselte Zeit* (erscheint Ende 1983).

C. F. Gauß über L. Euler

„Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden.“

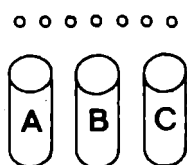
XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade



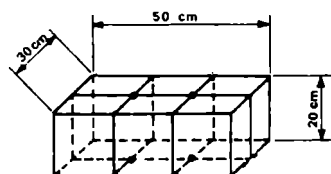
Olympiadeklasse 5

220521 Sieben Kugeln sind so auf drei Becher A , B und C zu verteilen, daß im Becher C nicht weniger Kugeln als im Becher B und im Becher B nicht weniger als im Becher A liegen. Es dürfen auch Becher leer bleiben.



Gib alle verschiedenen Möglichkeiten einer solchen Verteilung an!

220522 Das Bild zeigt ein 50 cm langes, 30 cm breites und 20 cm hohes verschnürtes Paket. Die Schnur wurde möglichst sparsam verwendet, also von Knoten zu Knoten überall nur einfach gelegt. Zum Verknoten wurden noch zusätzlich 10 cm Schnur gebraucht.



Wieviel Zentimeter Schnur wurden daher zum Verschnüren dieses Paketes insgesamt verwendet?

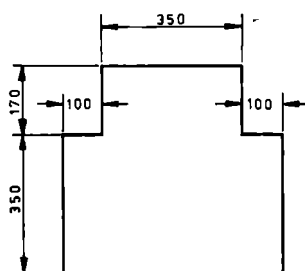
220523 Über die 650 Schüler einer Schule liegen folgende Angaben vor: 500 Schüler sind Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft. 400 Schüler sind Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft. 100 Schüler sind nicht Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft. Aus diesen Angaben soll ermittelt werden, wieviel der 650 Schüler sowohl Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft als auch Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft sind. Erkläre, wie man diese Anzahl finden kann!

220524 Ein Schüler kauft 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, wofür er insgesamt 3,80 M bezahlt.

Wie teuer ist ein derartiges Heft und wie teuer ein derartiger Bleistift, wenn ein Bleistift doppelt soviel kostet wie ein Heft?

Olympiadeklasse 6

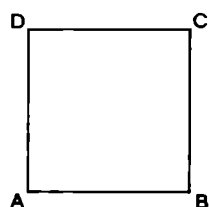
220621 Das Bild zeigt den Grundriß eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben. Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.



Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten! Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, daß sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

Leistung	Lohnkosten pro m ²
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

220622 Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g .



Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A' , C' , D' der Punkte A , C , D bei der Spiegelung an g ! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.

220623 Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird: Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.

Nenne vier derartige Summanden! Überprüfe, daß sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, daß die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

220624 An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

- (1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e ,
- (2) b ist ein Teiler von c ,
- (3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e ,
- (4) d ist ein Teiler von e ,
- (5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b ,
- (6) b ist ein Teiler von d ,
- (7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a ,
- (8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d .

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt! Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

Olympiadeklasse 7

220721 Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.
 - (2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
 - (3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.
- (Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.)

220722 In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

- (1) Es gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.
- (2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAC$ steht senkrecht auf BC .

In dieser Diskussion behauptet Ursel: „Dann muß das Dreieck ABC rechtwinklig sein.“ Vera behauptet: „Nein, dann muß es gleichseitig sein.“ Werner behauptet: „Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein.“

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

220723 Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muß!

220724 Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:
(1) Es gilt $a < b < c$.
(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen 270 cm^3 , und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm .
Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

Olympiadeklasse 8

220821 Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht:

- (1) Anke fährt an die Ostsee.
(2) Christine fährt in den Thüringer Wald, oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.
Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.

Untersuche a) für das Jahr 1981, b) für das Jahr 1982, für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln läßt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form „A oder B“ ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

220822 In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

- | | Ja | Nein |
|---|-----------------------|-----------------------|
| (A) Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen? | ☐ | ☐ |
| (B) Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen? | ☐ | ☐ |
| (C) Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist? | ☐ | ☐ |

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage

(A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(A) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

- a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,
b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,
c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,
d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen. Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

220823 Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ϱ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\varrho = \frac{2F}{u}$.

220824 Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

- (1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm .
(2) Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E , für den $\overline{CE} = 3 \text{ cm}$ gilt.
Beweise, daß die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

Olympiadeklasse 9

220921 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n , die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

- (1) $n - 9$ ist eine Primzahl.
(2) $n^2 - 1$ ist durch 10 teilbar.

220922 Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$

$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$

$$c = a^2 - (x^2 - y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c .

220923 Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:

- (1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B ,
(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C ,
(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D ,
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A ,
(5) es gilt $PR \perp QS$.

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $\overline{PR} < \overline{QS}$, $\overline{PR} = \overline{QS}$, $\overline{PR} > \overline{QS}$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

220924 Das Bild zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

5					
4					
3					
2					
1					
	a	b	c	d	e

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Olympiadeklasse 10

221021 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen!

221022 Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, daß in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:

1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf.

Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.
Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b : „Wenn $a \neq b$ ist, dann muß sogar stets $a > b$ gelten.“ Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

221023 Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:

- (1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
- (2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2 .

Beweisen Sie, daß es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und daß die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Geben Sie diese Seitenlängen an!

221024 Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1 . Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.

Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!

(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

Olympiadeklassen 11/12

221221 Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x(y+z)=5 \quad (1)$$

$$y(x+z)=8 \quad (2)$$

$$z(x+y)=9 \quad (3)$$

erfüllen! -

221222 Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen

$$a \leq 1 \text{ cm} \leq b \leq 2 \text{ cm} \leq c \leq 3 \text{ cm} \quad (1)$$

gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt. Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

221223 Man beweise:

Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt

$$a+b \leq d+v. \quad (1)$$

Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

221224 Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ gegeben. Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt. Zwei Möglichkeiten gelten ge-

nau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.

a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3 , indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, \dots, P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, daß damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfaßt sind!

b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, \dots, A_{n-1}$ berechnen kann!

c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5 !

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklassen 5 bis 10 veröffentlichen wir im Innenteil des Heftes 3/83, d. Red.

„Im Jahre 1783 verloren wir Herrn Leonhard Euler . . .“

Abel Burja (1752 bis 1816) war ein Pfarrer und Mathematiklehrer, der 1785 ein Buch in Berlin mit dem Titel „Observations d'un voyageur . . .“ (Beobachtungen eines Reisenden . . .) erscheinen ließ. Burja hatte 1783 auch Euler in Petersburg besucht und darüber einen Bericht gegeben, der auch Eulers letzte Stunde einschließt:

„Ich sah ihn an seinem vorletzten Lebenstag fröhlich, freundlich, wie immer: er beklagte sich nur über Schwindel. Er sagte auch, wenn er über seine Lage nachdenke, scheine es ihm seit kurzem, daß er fremd in seiner Familie sei und sich selbst nicht kenne.

Am folgenden Tag nach dem Mittagessen unterhielt er sich mit den Herren Lexell und Fuß über verschiedene mathematische, physikalische und astronomische Gegenstände, insbesondere über den neuen Planeten und über Luftballons, über die man damals gerade zu sprechen begann. (Gemeint ist der Planet Uranus, der 1771 entdeckt worden war, sowie die im Juni 1773 erfolgreich gestartete erste Montgolfière.)

Gegen 5 Uhr abends ging er zu seinem Enkel, begann mit ihm zu scherzen, rauchte auf dem Sofa sitzend Tabak. Plötzlich entfiel ihm seine Pfeife. Er rief laut: „Meine Pfeife!“ und bückte sich, um sie aufzuheben, danach stand er auf, ohne die Pfeife, schlug mit seinen Händen an die Stirn und sagte: „Ich sterbe.“ Nach diesen Worten sagte er nichts mehr und befand sich bis 11 Uhr abends im Zustand der Agonie, als er verschied.

Aber am gleichen Tage morgens hatte er seinem Enkel, von dem ich gerade sprach, noch Mathematikunterricht gegeben. Er schloß einige von ihm begonnene Berechnungen über Luftballons ab und schrieb sie auf, wie gewöhnlich, mit Kreide in großen Buchstaben auf zwei Schiefertafeln – denn das war alles, was er bei seinem schwachen Sehvermögen, das er besaß, noch tun konnte.“

Lösungen



Lösungen zu: Für den Sprachfreund

▲1▲ Im Jahre 1982 war das Quadrat der Zahl, die Matlebs Alter angab, gleich der Zahl, die aus den ersten drei Ziffern seines Geburtsjahres gebildet wird. In welchem Jahr wurde Matleb geboren?

Lösung: Die einzige in Frage kommende Quadratzahl ist 196, also war 1982 Matleb 14 Jahre alt; er wurde 1968 geboren.

▲2▲ Im Jahre 1982 fielen der 1. Januar und der 31. Dezember auf genau denselben Wochentag. Ist das in diesem Jahr auch so? Überhaupt: Wann fällt der 1. Januar auf denselben Wochentag wie der 31. Dezember?

Lösung: Außer in Schaltjahren ist das immer so, denn es ist $365 = 7 \cdot 52 + 1$.

▲3▲ Mark, Paul und Boris sind mit Anne, Mary und Susan verheiratet, nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge. Jedes Paar hat ein Lieblingstier, und die Lieblingstiere sind eine Katze, ein Meerschweinchen und ein Pony. Benutze die folgenden Angaben, um die Zusammengehörigkeit von Ehemännern, Ehefrauen und Lieblingstieren festzustellen!

Pauls und Annes Lieblingstiere kämpften miteinander. Der Name von Marys Ehemann hat vier Buchstaben. Susan ging hinüber, um Marks Lieblingstier zu füttern, wenn er fort war. Mark geht niemals in die Stadt. Boris' Lieblingstier ist entweder die Katze oder das Pony. Susans Lieblingstier ist nicht die Katze. Der männliche Besitzer der Katze brachte diese zum Tierarzt in die Stadt. Das Meerschweinchen versteckt sich, wenn Anne zu Besuch kommt. Marys Lieblingstier schläft in einem Schuhkarton.

Lösung: Mark und Mary haben das Meerschweinchen. Paul und Susan haben das Pony. Boris und Anne haben die Katze.

▲4▲ Eine Zeitung umfaßt 36 Seiten und hat eine tägliche Auflage von 600 000 Exemplaren. Jede Seite ist ein Rechteck, dessen Ausmaße 50 cm und 33 cm betragen. Um jede Seite gibt es einen unbedruckten Rand von 2 cm Breite.

a) Wie groß ist die bedruckte Fläche?

b) Wie groß ist die Fläche des Papiers, das für die tägliche Auflage der Zeitung notwendig ist?

Lösung: a) Die bedruckte Fläche beträgt $0,46 \text{ m} \cdot 0,29 \text{ m} \cdot 36 \cdot 600\,000 = 2\,881\,440 \text{ m}^2$.
b) Die benötigte Fläche des Papiers beträgt $0,5 \text{ m} \cdot 0,33 \text{ m} \cdot 36 \cdot 600\,000 = 3\,564\,000 \text{ m}^2$.

▲ 5 ▲ Die Länge eines Telefonkabels, das zwei Orte verbindet, ist gleich 72,8 km. Wenn die Temperatur um 1 Grad steigt, verlängert sich jeder Meter dieses Kabels um 18 μm . Berechne die Ausdehnung dieses Kabels in cm, wenn die Temperatur von 12° auf 36° steigt!

Lösung: Bei 1 K Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung des Kabels $72\,800 \cdot 0,000018 \text{ m} \approx 1,31 \text{ m}$. Bei $36^\circ\text{C} - 12^\circ\text{C} = 24 \text{ K}$ Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung $1,31 \text{ m} \cdot 24 = 31,44 \text{ m} = 3\,144 \text{ cm}$.

Lösungen zu:

Mathe-AGs im Kreis Köthen

▲ 1 ▲ Vor.: a, b, c sind natürliche Zahlen mit $a = b - 1$
 $c = b + 1$

Beh.: $ab + bc = 2b^2$

Bew.: $ab + bc = b(a + c) = b(b - 1 + b + 1)$
 $ab + bc = b \cdot 2b = 2b^2$, w. z. b. w.

▲ 2 ▲ Hat die der Mauer parallele Rechteckseite die Länge a und haben die beiden übrigen Begrenzungen die Länge b , so gilt $a + 2b = 400$ (1)

und für den Flächeninhalt

$$A = a \cdot b. \quad (2)$$

Ersetzt man a in (2) durch (1), so erhält man

$$A = (400 - 2b) \cdot b \quad (3)$$

$$A = -2b^2 + 400b.$$

Das Bild der Funktion $A = f(b)$ ist in einem rechtwinkligen b - A -Koordinatensystem eine nach „unten“ geöffnete Parabel. Sie schneidet die Abszissen- (b -) Achse in

$$b_1 = 0 \text{ und } b_2 = 200; \quad (4)$$

denn für

$$A = 0 \text{ gilt wegen (3)}$$

$$0 = (400 - 2b) \cdot b$$

mit den in (4) angegebenen Lösungen.

Den größten Flächeninhalt gibt die Ordinate A_s des Scheitels der Parabel an. Für die dazugehörige Abszisse b_s gilt wegen der Symmetrieeigenschaften der Parabel

$$b_s = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{200 + 0}{2} = 100.$$

Die Eckpfähle müssen in einem Abstand von 100 m von der Mauer und wegen (1) 200 m voneinander entfernt stehen. Der größtmögliche Flächeninhalt beträgt demnach $20\,000 \text{ m}^2$ wegen

$$A = (400 - 2 \cdot 100) \cdot 100 = 20\,000.$$

▲ 3.1 ▲ Die Geschwindigkeit des Kunden sei v_2 , die der Rolltreppe v_1 . Auf der fahrenden Rolltreppe bewegte sich der Kunde mit der Geschwindigkeit v_3 , für die gilt:

$$v_3 = v_1 + v_2.$$

Der Weg von einer Etage zur anderen sei s . Da alle Bewegungen als gleichförmig angesehen werden, gilt wegen $v = \frac{s}{t}$

$$\frac{s}{t_3} = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$$

$$\frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}, \text{ und man erhält}$$

$$t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$

$$\text{Einsetzen liefert } t_3 = \frac{30 \text{ s} \cdot 90 \text{ s}}{120}$$

$$t_3 = 22,5 \text{ s}.$$

Bei fahrender Rolltreppe benötigt der Kunde 22,5 s.

▲ 3.2. ▲ Zum gleichen Ergebnis kann man aber viel leichter kommen, wenn man eine einfache Überlegung anstellt:

Wir denken uns eine Rolltreppe, die ohne anzuhalten, durch mehrere Etagen führt. In der Zeit von 90 s, die der (laufende) Kunde bis zur ersten Etage benötigt, könnte der (stehende) Kunde auf der (gedachten) Rolltreppe die dritte Etage erreichen, das bedeutet, daß in 90 s zusammen vier Etagen erreicht werden. Für eine Etage benötigt man dann $90 \text{ s} : 4 = 22,5 \text{ s}$.

Lösungen zu:

In freien Stunden • alpha-heiter

Das Königsberger Brückenproblem

Es ist nicht möglich, jede Brücke genau einmal zu überschreiten. (Bei 8 Brücken wäre es möglich.)

Die Leningrader Brücken



Das Problem der vertauschten Briefe

Für $n = 4$ auf 9 Arten.

Euler an Goldbach

Für $n = 9$ ist die gesuchte Anzahl 9.

Griechische magische Quadrate

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

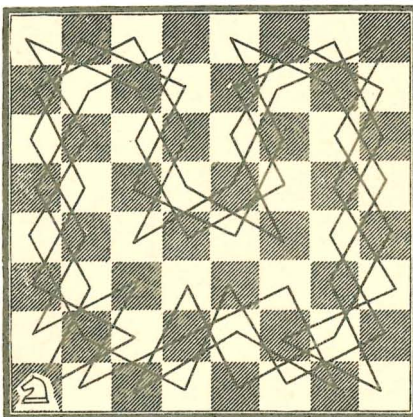
Im Jahre 1750 ...

Jede der vier Personen wird in den vier Altersangaben 164, 138, 160 und 147 genau dreimal berücksichtigt. Damit erscheint in der Summe $164 + 138 + 160 + 147 = 609$ jedes gesuchte Alter genau dreimal. Mithin ist die Zahl 609 das Dreifache der Summe der Alter aller vier gesuchten Personen. Die gesuchten Personen waren 1750 also zusammen 203

Jahre alt. Bach, Voltaire und Euler waren 1750 insgesamt 164 Jahre alt, womit Lomonossow $203 - 164 = 39$ Jahre alt war. Entsprechend folgt für Bach, Euler und Voltaire $203 - 138 = 65$, $203 - 160 = 43$ und $203 - 147 = 56$. Die Lebensdaten der vier Personen lauten übrigens: Bach 1685 bis 1750; Voltaire 1694 bis 1778; Lomonossow 1711 bis 1765; Euler 1707 bis 1783.

Lösung zu:

Der Springer wird zum Rössel



Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe, Heft 1/82

Das Lebensalter Diophants

Die Formulierung der Aufgabe ist nicht eindeutig. Die Angabe über den Tod des Sohnes erlaubt zwei Deutungen. (Im folgenden bezeichne x das unbekannte Lebensalter Diophants.)

1) Er starb, als er die Hälfte des Lebensalters Diophants erreicht hatte, als er also $\frac{x}{2}$ Jahre alt war.

2) Er starb, als er gerade halb so alt wie der Vater war. Da der Vater noch 4 weitere Jahre lebte, war er $x - 4$ Jahre alt, der Sohn somit $\frac{x - 4}{2}$ Jahre alt.

Hieraus ergeben sich die folgenden zwei Lösungen:

1) Das Gedicht führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \text{ oder}$$

(Multiplikation mit 84)

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x,$$

also $9x = 756$, $x = 84$. Auf die Kindheit fielen 14 Jahre, Diophant bekam mit 21 Jahren einen Bart, mit 33 Jahren eine Frau, mit 38 Jahren einen Sohn. Dieser starb mit 42 Jahren (als der Vater 80 war); Diophant starb mit 84 Jahren.

2) Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x - 4}{2} + 4 = x \text{ oder}$$

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x - 168 + 336 = 84x,$$

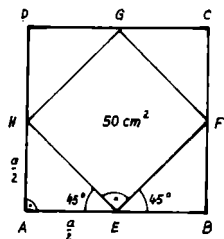
$$\text{also } 9x = 588, x = 65\frac{1}{3}.$$

Auf die Kindheit fielen $10\frac{8}{9}$ Jahre. Nach

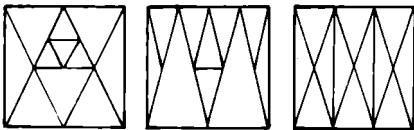
$5\frac{4}{9}$ Jahren (also mit $16\frac{1}{3}$ Jahren) bekam er einen Bart, nach $9\frac{1}{3}$ Jahren (also mit $25\frac{2}{3}$ Jahren) heiratete er, nach 5 Jahren (also mit $30\frac{2}{3}$ Jahren) wurde Diophant Vater eines Sohnes. Dieser starb mit $30\frac{2}{3}$ Jahren, als der Vater $61\frac{1}{3}$ Jahre alt war. Nach 4 Jahren (mit $65\frac{1}{3}$ Jahren) starb Diophant.

Lösungen zu:
alpha-Wettbewerb des Heftes 5/82
(Fortsetzung)

Ma 7 ■ 2251



Ma 7 ■ 2252



Ma 8 ■ 2253 Angenommen, Schwester A hat x Jungen und y Mädchen, dann hat Schwester B auch y Mädchen, aber $2x$ Jungen. Da beide zusammen 7 Kinder haben, gilt $3x + 2y = 7$. Diese Gleichung hat nur für $y = 2$ eine für unser Problem sinnvolle Lösung. Es folgt dann $x = 1$.

Schwester A hat 3 Kinder, und zwar 2 Mädchen und 1 Jungen; Schwester B hat 4 Kinder, und zwar 2 Mädchen und 2 Jungen.

Ma 8 ■ 2254 Es seien a, b, c, d die vier Grundziffern der Jahreszahl. Dann gilt für die Bedingung der Aufgabe

$$a + 10b + c + d = 10a + b + 10c + d,$$

$$9b = 9a + 9c,$$

$$b = a + c.$$

Da nun $c \neq 0$ (wegen der Bedingung, daß $\overline{cd}$ eine zweistellige natürliche Zahl ist) gilt, kann die geforderte Bedingung erst für $b = 3, c = 1, a = 2$ und $d = 0$ wieder erfüllt werden.

Das heißt, nach 321 Jahren, im Jahre 2310, gilt dann zum ersten Mal wieder obige Gleichung.

Ma 8 ■ 2255 Es seien a, b, c die Längen der Seiten eines beliebigen Dreiecks, dann gilt nach der Dreiecksungleichung ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$a < b + c.$$

Nach dem Monotoniegesetz der Addition bezüglich der Kleiner-Relation folgt

$$a + a < a + b + c \text{ bzw.}$$

$$2a < a + b + c,$$

$$a < \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ bzw.}$$

$$a < \frac{1}{2}u, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 8 ■ 2256 Die Länge der Quadratseite sei mit a bezeichnet. Dann ist die Länge des Durchmessers d_1 des Umkreises $d_1 = a \cdot \sqrt{2}$ und die Länge des Durchmessers d_2 des Inkreises $d_2 = a$. Nun gilt für den Flächeninhalt des Umkreises

$$A_U = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (a\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot a^2 \cdot 2.$$

Für den Flächeninhalt des Inkreises gilt

$$A_I = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot a^2.$$

Es folgt sofort die Behauptung.

Ma 9 ■ 2257 Aus (1) folgt $y^2 = (x + 20)^2$. Das setzt man in (2) ein und erhält

$$(x + 20)^2 + x^2 = 1882,$$

$$x^2 + 40x + 400 + x^2 = 1882,$$

$$2x^2 + 40x + 400 = 1882,$$

$$x^2 + 20x - 741 = 0,$$

$$x_{1,2} = -10 \pm \sqrt{841},$$

$$x_{1,2} = -10 \pm 29.$$

Es folgt $x_1 = 19$ und $y_1 = 39$ oder $x_2 = -39$ und $y_2 = -19$.

Es gibt also genau zwei ganzzahlige Lösungen, und die Lösungsmenge ist $L = \{[19; 39], [-39; -19]\}$.

Ma 9 ■ 2258 Die beiden Zahlen seien mit x bzw. y bezeichnet, und es gelte $x > y$. Nach der Aufgabenstellung folgt nun

$$x + y + x - y + xy + \frac{x}{y} = 243,$$

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 243,$$

$$2xy + xy^2 + x = 243y,$$

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y,$$

$$x(y + 1)^2 = 243y,$$

$$x = \frac{243y}{(y + 1)^2}.$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muß $(y + 1)^2$ ein Teiler von $243 = 3^5$ sein, nämlich 3^2 oder 3^4 . Daraus folgt $y = 2$ oder $y = 8$.

Wenn $y = 2$, so ist $x = \frac{243 \cdot 2}{9}$ bzw. $x = 54$;

wenn $y = 8$, so ist $x = \frac{243 \cdot 8}{81}$ bzw. $x = 24$.

Die gesuchten Zahlen sind 24 und 8 oder 54 und 2.

$$24 + 8 + 24 - 8 + 24 \cdot 8 + \frac{24}{8} = 243,$$

$$48 + 192 + 3 = 243,$$

$$243 = 243;$$

$$54 + 2 + 54 - 2 + 54 \cdot 2 + \frac{54}{2} = 243,$$

$$108 + 108 + 27 = 243,$$

$$243 = 243.$$

Ma 9 ■ 2259 Durch Zerlegung erhält man

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 5p.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung gilt dies nur für

$$a - b = 1 \quad (1),$$

$$a + b = 5 \quad (2),$$

$$\text{und } a^2 + b^2 = p \quad (3).$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$a = 3$$

$$\text{und } b = 2.$$

Setzt man das in die Gleichung (3) ein, so erhält man

$$p = 13.$$

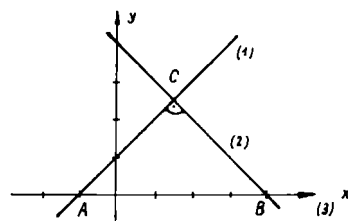
Da 13 tatsächlich Primzahl ist, ist 13 auch die einzige Primzahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Ma 9 ■ 2260 Wegen der Anstiege 1 bzw. -1 sind die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ jeweils 45° ; $\sphericalangle ACB$ hat demzufolge die Größe 90° . Das Dreieck ABC ist also gleichschenkelig-rechtwinklig. Wir bezeichnen die Länge von $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ mit a . Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt dann $A = \frac{a^2}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt weiter:

$$a^2 + a^2 = (5 \text{ cm})^2$$

$$2a^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$\frac{a^2}{2} = 6,25 \text{ cm}^2.$$



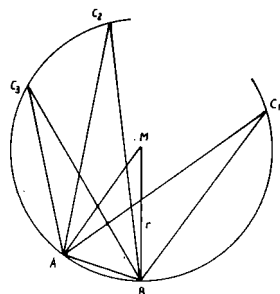
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $6,25 \text{ cm}^2$.

Ma 10/12 ■ 2261 Das Dreieck ABM ist gleichschenkelig ($\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ sind Radien des Umkreises). Nun gilt für die Größe des Winkels $\sphericalangle MAB \cong \sphericalangle MBM$ jeweils $72,5^\circ$.

Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck ABM

$$\frac{r}{\sin 72,5^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 35^\circ} \text{ bzw.}$$

$$r = \frac{\overline{AB} \cdot \sin 72,5^\circ}{\sin 35^\circ} = \frac{3 \cdot \sin 72,5^\circ}{\sin 35^\circ} \text{ cm} \approx 5 \text{ cm.}$$



Der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist fast 5 cm lang. Es gibt beliebig viele Dreiecke $ABC_1, ABC_2, ABC_3, \dots$, die diese Bedingungen erfüllen.

Ma 10/12 ■ 2262 Es seien x , y bzw. z die Längen der Strecken $\overline{GP}$, $\overline{HK}$ bzw. $\overline{PD}$. Wegen $\overline{GP} \cong \overline{AH}$ und $\overline{PD} \cong \overline{KB}$ gilt $x + y + z = c$. Nun verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen. Darum gilt

$$\frac{A_1}{A} = \frac{x^2}{c^2}, \text{ also } x = c \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A}},$$

$$\frac{A_2}{A} = \frac{z^2}{c^2}, \text{ also } z = c \cdot \sqrt{\frac{A_2}{A}},$$

$$\frac{A_3}{A} = \frac{y^2}{c^2}, \text{ also } y = c \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A}}.$$

Daraus folgt weiter

$$c \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A}} + c \cdot \sqrt{\frac{A_2}{A}} + c \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A}} = c, \text{ also}$$

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} = \sqrt{A}.$$

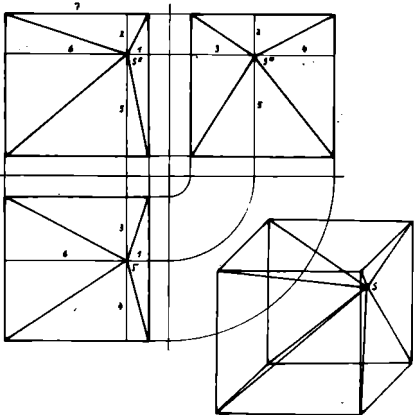
Ma 10/12 ■ 2263 Als Grundflächen der Pyramiden wählen wir die sechs Quadratflächen des Würfels. Damit hat jede Pyramide eine gleich große Grundfläche. Da für das Volumen einer Pyramide $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ gilt, stehen

die Volumina dieser Pyramiden im gleichen Verhältnis zueinander wie die entsprechenden Höhen. Weil die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 6 gleich 21 ist, müssen die einzelnen Pyramidenvolumina gleich dem 1-, 2-, 3-, 4-, 5- bzw. 6fachen des durch 21 dividierten Würfelvolumens sein. Auf jeder Lineardimension entfallen somit $21:3=7$ Einheiten. Das ist dann der Fall, wenn sich die Höhen jeweils gegenüberliegender Pyramiden wie 1:6, 2:5 bzw. 3:4 verhalten.

Die gemeinsame Spitze aller sechs Pyramiden ist daher der Punkt, der von den Quadratflächen des Würfels den Abstand $h_n = n \cdot \frac{a}{7}$

mit $n = 1, 2, \dots, 6$ hat.

Ma 10/12 ■ 2264



Ph 6 ■ 121 Geg.: Die Kanten des Quaders mit $a = 2,5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 9,5 \text{ cm}$, die Masse $m = 256 \text{ g}$
Ges.: die Dichte ρ

Man rechnet mit der Gleichung $\rho = \frac{m}{V}$. Für das Volumen V setzt man $V = a \cdot b \cdot c$, also

$$\rho = \frac{m}{a \cdot b \cdot c}.$$

$$\text{Dann ist } \rho = \frac{256 \text{ g}}{2,5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 9,5 \text{ cm}},$$

$$\rho \approx 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Der quaderförmige Körper besteht aus Aluminium.

Ph 7 ■ 122 Geg.: $h = 1,50 \text{ m}$
 $G = 25 \text{ kp}$
 $\mu = 0,35$

Ges.: l

Nach der Gleichung für die geneigte Ebene gilt $F \cdot l = G \cdot h$ mit $F = \mu \cdot G$,

$$l = \frac{G \cdot h}{\mu \cdot G},$$

$$l = \frac{h}{\mu},$$

$$l = \frac{1,50 \text{ m}}{0,35},$$

$$l = 4,28 \text{ m}.$$

Das Brett muß eine Länge von 4,28 m haben.

Ph 8 ■ 123 Geg.: $p_1 = 760 \text{ Torr}$
 $p_2 = 745 \text{ Torr}$
 $T_1 = 273 \text{ K}$
 $T_2 = 300 \text{ K}$

Ges.: q_2

$$q_1 = 0,00129 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Nach der Zustandsgleichung der Gase gilt

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}.$$

Da $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$ und $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$ ist, gilt

$$\frac{p_1}{T_1 \cdot \rho_1} = \frac{p_2}{T_2 \cdot \rho_2},$$

$$\rho_2 = \frac{p_2 \cdot T_1 \cdot \rho_1}{p_1 \cdot T_2},$$

$$\rho_2 = \frac{745 \text{ Torr} \cdot 273 \text{ K} \cdot 0,00129 \text{ g}}{760 \text{ Torr} \cdot 300 \text{ K} \cdot \text{cm}^3},$$

$$\rho_2 = 0,00115 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Die Dichte der Luft beträgt $0,00115 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Ph 9 ■ 124

Geg.: $D = 8,0 \text{ mm}$, $d = 0,078 \text{ mm}$, $h = 20 \text{ mm}$,
 $\Delta\theta = 50 \text{ K}$, $\beta = 18,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Ges.: l

1. Das Quecksilbervolumen V_0 bei $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 + \frac{d^2 \pi}{4} \cdot h$$

$$V_0 = \frac{\pi}{12} (2D^3 + 3d^2 h) \quad (1)$$

2. Das Quecksilbervolumen V_1 bei $\theta_1 = 50^\circ \text{C}$

$$V_1 = \frac{\pi}{12} (2D^3 + 3d^2 h_1) \quad (2)$$

bzw. $V_1 = V_0 (1 + \beta \cdot \Delta\theta)$ (3)

3. Der Abstand l der 50°C -Marke von der 0°C -Marke

$$l = h_1 - h \quad (4)$$

Mit (1) in (3) folgt

$$V_1 = \frac{\pi}{12} (2D^3 + 3d^2 h) (1 + \beta \cdot \Delta\theta). \quad (5)$$

Mit (2) und (5) folgt

$$(2D^3 + 3d^2 h_1) = (2D^3 + 3d^2 h) (1 + \beta \cdot \Delta\theta)$$

und hieraus

$$h_1 - h = \beta \cdot \Delta\theta \left(\frac{2D^3 + 3d^2 h}{3d^2} \right).$$

Mit (4) folgt weiter

$$l = \beta \cdot \Delta\theta \left(\frac{2D^3}{3d^2} + h \right),$$

$$l = 18,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 50 \text{ K}$$

$$\left(\frac{2 \cdot 8,0^3 \text{ mm}^3}{3 \cdot 0,078^2 \text{ mm}^2} + 20 \text{ mm} \right),$$

$$l = 50,5 \text{ mm}.$$

Der Skalenabstand beträgt 50,5 mm.

Ph 10/12 ■ 125

Geg.: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\frac{3}{4}$ der Fallstrecke in 1 s

Ges.: s, t

Die gesamte Fallstrecke ist nach der Gleichung für den freien Fall

$$s = \frac{g}{2} t^2. \quad (1)$$

Der Körper legt dann ein Viertel des Weges in $(t-1)$ Sekunden zurück, also

$$\frac{s}{4} = \frac{g}{2} (t-1)^2,$$

$$s = 2g(t-1)^2. \quad (2)$$

(1) in (2) eingesetzt, ergibt

$$\frac{g}{2} \cdot t^2 = 2g(t-1)^2.$$

Diese Gleichung ist nach t aufzulösen, also

$$t^2 = 4(t^2 - 2t + 1),$$

$$0 = 3t^2 - 8t + 4 = t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3},$$

$$t_{1,2} = \frac{8}{6} \pm \sqrt{\frac{64}{36} - \frac{48}{36}},$$

$$t_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}.$$

Die zweite Lösung entfällt, deshalb gilt $t = 2$.

$t = 2$ in (1) eingesetzt, ergibt dann schließlich

$$s = \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot 2^2 \text{ s}^2,$$

$$s = 19,6 \text{ m}.$$

Der Körper fällt aus einer Höhe von 19,6 m und fällt insgesamt 2 Sekunden.

Ch 7 ■ 97

1 min $\triangleq$ 30 l Luft

x min $\triangleq$ 1 560 000 000 l Luft

$$x = \frac{1 \text{ min} \cdot 1 560 000 000 \text{ l}}{30 \text{ l}}$$

$$x = 52 000 000 \text{ min}$$

1 Tag $\triangleq$ 1 440 min

$$x \triangleq 52 000 000 \text{ min}$$

$$x = \frac{52 000 000 \text{ min} \cdot 1 \text{ Tag}}{1 440 \text{ min}}$$

$$x = 36 111 \text{ Tage}$$

Ein Mensch könnte etwa 36 111 Tage oder 99 Jahre leben.

Ch 8 ■ 98 a) Das Kalksteinmehl enthält 45,4 kg Kalziumoxid. b) 60,0 kg des Kalziumhydroxides haben den gleichen Kalziumoxidgehalt wie das Kalksteinmehl.

Ch 9 ■ 99 5200 ml Leitungswasser enthalten 0,572 g Kalziumoxid.

Ch 10/12 ■ 100 50,7% des Wassers werden nicht gebunden.

Abzeichen in Gold

Für dreijährige Teilnahme

Doris Leipe, Wolfgang und Ralf Beukert, Urte Clemens, Beatrice List, alle Altenburg; Heike Döbler, Arnstadt; Beate Maaz, Aue; Annegret Schädlich, Auerbach; Geertje Maeß, Hella Gössel, beide Bad Doberan; Solveig van der Velde, Ines Wagner, Regina Suchert, alle Bad Gottleuba; Andrea Müller, Christiane Böttger, beide Bad Salzungen; Olaf Schmidt, Bad Liebenstein; Holm Graefner, Bandedorf; Claudia Görne, Bauda; Simone und Dirk Beier, Bautzen; Ulrich Zülicke, Bergwitz; Ines Tappe, Thorsten Brandt, Robert Rhode, Henry Baetke, Cornelia Graun, Yvonne Selke, Wiebke Metzgen; Matthias Tittel, Jörg Stephan, Aline Jung, Birgit Schulz, Clemens Thielecke, Uwe Semmelmann, Frank Steudel, Fatma Kärsten, Tobias Trommer, Andrea Nesnau, Stefan Rödel, alle Berlin; Thomas Franke, Heiko Prehl, André Lorenz, André Schieck, Jens Richter, alle Bernsbach; Matthias Röder, Karen Berg, Oliver Roy, Heiko und Kerstin Schmidt, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Hendrik Robbel, Bestensee; Martina Sternickel, Bernterode; Holger Wukasch, Bischofswerda; Andrea Hirschfeld, Astrid Reinhardt, beide Bleicherode; Frank-Jürgen Schwerin, Grit Giering, beide Blumberg; Steffi Müller, Bleicherode; Karin Sankat, Kirsten Hoffmann, beide Boizenburg; Petra Hunger, Brand-Erbisdorf; Andreas Böttcher, Breitenworbis; Iris Riedel, Uwe Reum, Klaus Asmus, alle Breitenungen; Peter Sitz, Calau; Kerstin Kuhnert, Christgrün; Iris Freitag, Matthias Jurke, Rolf Robius, alle Cottbus; Michael Enig, Crimmitschau; Sylvi Fache, Culitzsch; Andreas Donaubauer, Dahlen; Michael Ludwig, Yvonne Wagner, Matthias Ludwig, alle Dahme; Britta Böttcher, Damsdorf; Manuela Perlwitz, Dellien; Harald Röhrig, Beate Klöppner, Christiane Nolte, alle Dingelstädt; Silke Zenker, Katrin Horn, Coren Balling, Ines Schulze, alle Dollingen; Kerst Griesbach, Dorfchemnitz; Dieter Schurig, Marko Schröder, Angela Michael, Bernd Miethig, Michael Rühling, Robert Elschner, Yvonne Sachse, Beate Winkler, alle Dresden; Heike Odehnal, Ebersbach; Simone Kruse, Eberswalde; Thomas Haase, Eilenburg; Matthias Voigt, Thomas Robscheit, Birgit Burkhardt, Ralf Burkhardt, Jürgen Rennert, alle Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Astrid Mönch, Martin Synold, beide Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Peter Wenschuh, Falkenstein; Heike Storandt, Daniela Pilgrim, Cornelia Heymel, Silvio Bachmann, Christine Weyrauch, alle Fambach; Michael Scheibe, Ferdinandshof; Olaf Gleim, Finkenbergr; Ute Berthold, Finsterwalde; Jan Simon, Floh; Ines Lehmann, Ute Frank, beide Forst; Ulf Winkler, Frankenberg; Alexander Schackow, Frankfurt (Oder); André Kempe, Jörg Schneider, Dorothee Heidrich, alle Freiberg; Udo und Frank Schulte, Freienbessingen; Wilfried Sitte, Thomas Brahmman, beide Freital; Iris Ebert, Gertitzsch; Holger Graß, Gnoien; Susanne Löffler, Wolfgang Schmidt, beide Görlitz; Uwe Knaust, Gossa; Bernd Müller, Sabine Wahrenberg, beide Gotha; Torsten Galley, Golßen; Rainer Sels, Stefan Kasperek, beide Gräfenhainichen; Sebastian Schmidt, Thomas Bahls, Andreas Funk, Ulf Gehhardt, Volker Pohlers, Kirsten Meincke, Völker Bölter, Karsten Seliger, Ralf Kramer, beide Greiz; Ragna Siol, Maik Thiele, Susann Buchheim, alle Grimma; Silke Maulhardt, Großbodungen; Frank Grützmaker, Gr. Godems; Heiko Fischer, Großweitzschen; Roger und Torsten Franz, Jörg Blau-rock, beide Guben; Katharina Millies, Regine Mallwitz, Jürgen Porath, Andreas Marold, alle Güstrow; Susanne Dimsat, Greußen; Michael Bolz, Hagenow; Elisabeth Thomas, Beate Thomas, Andrea Fiedler, Ute Wolf, alle Halle; Jörg Langwald, Andrea Krüger, Christina Schmerling, Antje Hütting, Beate Kaczmarek, Beatrice Weniger, Beatrix Flemming, alle Halle-Neustadt; Thomas Stiehler,

Hainichen; Ralf Schlenker, Harst; Ilka Hartmann, Hartmannsdorf; Steffi Oligmüller, Haynrode; Matthias Schädlich, Mandy Probst, Simone Pötzsch, Heike Reichelt, alle Hammerbrücke; Detlef Jahn, Hecklingen; Mirko Müller, Hermannsdorf; Jan Simon, Hohleborn; Heidi Konarski, Hohenbucka; Erik Frenzel, Horka; Dörte Conert, Hosena; Silvio Fiedler, Hoyerswerda; Silke Umbreit, Ilmenau; Andrea Klam, Susanne Mahrholz, Kerstin Risch, alle Ilsenburg; Ines Wagenknecht, Ivenack; Steffi Gebauer, Jena; Daniela Schulz, Kakerbeck; Gesine Festag, Kamsdorf; Jana Wetzig, Silke Rendelmann, beide Kahla; Jens Weber, Annette Maier, Ingo Neubert, Michael Tix, Gert Reifarh, Sigurd, Jens und Anke Ullrich, Andreas Richter, Ulrich Weinhold, Grit Lohse, Birgit Lindner, Anett Beutner, Jaqueline Lindner, Udo Weiße, Michael und Jürgen Hoppe, Volker Liebert, alle Karl-Marx-Stadt; Jochen Schlegel, Kaulsdorf; Sabine Kertz, Klietz; Cornelia Bauch, Ute Studzinski, beide Kietz; Katy Penzler, Diana Nibergall, Annette Chlouba, Bianca Roitzsch, Britta Hoyer, Heike Schneider, Lutz Arnold, Sabine Albrecht, Andreas Wenzel, Kai-Uwe August, Annett Urbanczyk, Beate Wohlfarth, Antje Schmidt, Heike Silchmüller, alle Kieselbach; Bernd Radunz, Jens-Uwe Steiniger, beide Kleinmachnow; Frank Adolf, Kl. Schwiesow; Susan Hoffmann, Klingenthal; Torsten Schütze, Klettenberg; Sylva Stein, Köthen; Stefan Heinig, Kohren-Sahlis; Frank Schauer, Kottengrün; Simone und Annette Kauter, Silke Winzek, Kathleen Hentrich, alle Langenweddingen; Ralf Ehrlich, Langewiesen; Frank Helbig, Langenleuba-Ndr.; Agnes Ulrich, Lasan; Camillo Grune, Lauchhammer; Martin Böhm-Schweizer, Lauscha; Christine Stöber, Udo Woitke, beide Leinefelde; Michael Weber, Wolfgang Städter, Frank Elbsässer, Torsten Tok, Frank Heyde, alle Leipzig; Kathleen Peschel, Lichtenberg; Silvia Kühne, Limlingerode; Ulrike Seefeldner, Linz (Österreich); Konsultationsgruppe Math. 5 der Pestalozzi-OS, Löbau; Kerstin Müller, Jens Söll, Stefan Schmidt, Jörg Zimmermann, Frank Schönbach, André Gaertner, Ralf Rogel, Heiko Fröhlich, Jens Grunert, alle Lössau; Peter Gerlach, Lübs; Ute Korell, Lützen; Ulrich Härtel, Uwe Mohrenweiser, Peter Zenicke, Thomas und Geza Pap, Claudia Popien, Carsten Behling, alle Magdeburg; Angelika Schlegel, Mahlsdorf; Bettina Fröhlich, Manschnow; Lutz Päßler, Marienberg; Falk Nicol, Meiningen; Silke Häbold, Christian Kunze, beide Meißen; Uwe Latz, Meyenburg; Eiko Knorre, Micheln; Sören Wolf, Milkau; Klaus Walther, Mittelherwigsdorf; Uwe Pioch, Mittelschmalkalden; Silvia Krech, Mittelstille; Frank-Thorsten Bölter, Michael Weber, beide Mühlhausen; Katrin Bernhardt, Janett Eckart, beide Naundorf; Heike Förster, Naunhof; Andreas Suchanow, Elvira Koröls, beide Neubrandenburg; Undine Henker, Annett Stöber, Kerstin Günther, alle Neukirch; Susanne Lind, Neuhaus; Marco Walther, Neundorf; Ilka Bublit, Andrea Hinzmann, Ruth Fiedler, Ulf Woike, Sabine Füllgraf, alle Neustadt; Kathrin Massanek, Neusorzig; Ines Lojak, Ute Riedelsdorf, Roland Marquardt, alle Neustrelitz; Uwe Glotz, Niesky; Petra Winter, Nünchritz; Torsten Endter, Andre Hoffmann, Anja Horn, Sandra Niedlich, alle Oberschöna; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Nico Kümmling, Oberwiesenthal; Hennig Hetzer, Oettersdorf; Silke Stieber, Olbersdorf; Esther Hädlich, Oranienbaum; Thomas Glöckner, Dirk Jahn, Jaen Hankel, Horst Böhm, Steffen Weber, Annett Schmidt, alle Osternienburg; Claudia Nosek, Packisch; Kay Loitz, Dirk Prieß, Cornelia Brüb, Diana Schlüter, Michael Taeschner, alle Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Thomas Lieberwirth, Perleberg; Heiko Kühn, Susanne Schreckenbach, beide Potsdam; Antje und Thomas Reichel, Pirna; Ingolf Teutsch, Plessa; Dorit Grulke, Andrea Calmon, beide Pritzwalk; Wolfgang Schneider, Radeberg; Katharina und Karl-Martin Eichhorn, Andreas Jöstel, alle Radebeul; Steffen Korb, Raschau; Jana Preuß, Nils Grottrian, Tom Werner, Regina Koch, Carina Dieckelmann, Ines

Oldenburg, Birka Radloff, Jan Werner, Christoph Jahnke, alle Ribnitz; Lutz Marschner, Riesa; Ute Gubick, Beate Walter, beide Röbel; Kerstin Gilden, Roitzsch; Niels Hansen, Jörg Schäfer, Michael Gräber, Rüdiger Lohff, Urte Hendrych, Anne und Heiner Ruser, Oliver Eidam, Ines Andrews, Sonja Brühne, Thomas Nühse, Annette Kersten, Elke Haferkorn, Kjiell Drews, alle Rostock; Antje Forner, Ellen Höse, beide Rotta; Thomas Fröhlich, Rudolstadt; Barbara Thiel, Steffen Klaus, Gesine Schlink, Ronny Jira, Anja Bergner, alle Sangerhausen; Ronny Henschke, Schierke; Astrid Grulke, Schemberg; Knut Pfefferkorn, Schkopau; Steffen Christ, Schmalkalden; Sirko Schönherr, Schmölln; Achim Kröber, Schönbach; Steffen Stanek, Schöneiche; Jens Gläßer, Schönfels; Frank Scharrer, Schöpsdrehe; Kristin Straubel, Toralf Tiedtke, Simone Drewitz, alle Schorssow; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Peter Schumann, Schwarze Pumpe; Joachim Krumnow, Schwedt; Grit Hesse, Anett Hermann, beide Sebnitz; Roland Drendel, Senftenberg; Christiane May, Siebenleben; Ute Hornawsky, Silbach; Klara Töpfer, Jochen Wetzl, beide Sömmerda; Ramona Dörre, Gabriele Hellmund, Bert Liebmann, alle Sondershausen; Godmar Back, Sonneberg; Frank Schnelle, Stendal; Bernhard Mikeska, Springe (BRD); Thomas Kaiser, Stralsund; Wolfram Meyerhöfer, Astrid Milbradt, beide Strasburg; Uli Walther, Stützerbach; Tim Häfner, Andreas König, Beate König, Andrea Kurz, Kati Recknagel, Anja Reumschüssel, Anja Usbeck, Kathrin Wahl, Isabell Wiegandt, Jutta Huhn, Anja Häfner, Kerstin Reumschüssel, Olaf Bahner, Thomas Bahner, Mario Döll, Heiko Reumschüssel, Diana Kirchner, Andrea Reumschüssel, Steffi Recknagel, Mario Recknagel, Uwe Holland-Merten, Andreas König, Karin Reinhardt, alle Steinbach-Hallenberg; Uta Linz, Suhle; Gerald Schumann, Teichwolframsdorf, Fred Völz, Teltow; Holger Wittner, Marita Schulz, beide Teterow; Wolfgang Vogel, Thalheim; Burkhardt Bachmann, Thamsbrück; Cornelia Matthä, Beate Heiß, beide Tiefenort; Silke Rosin, Diana Schulz, beide Töplitz; Lothar Matzker, Torno; André Uhrlaß, Treben; Steffi Heusing, Silke Wings, Silke Jung, Jens Schwarzer, Mario Wings, Heiko Müller, Ralf Koch, Silke Storch, Claudia Peter, alle Trusetal; Christine Otto, Dörte Schmidt, Torsten Menzel, alle Ueckermünde; Jörg Mey, Beate Müller, Dirk Buchmann, Manuela Lorenz, alle Unterbreizbach; Ulrike Dost, Katrin Hürdler, Petra Tiersch, Christine Demny, Marion Herbig, Christine Hermes, Regina Leineweber, Doreen Siebert, Maja Rasch, Antje Wieland, Evelyn Pelzetter, alle Vacha; Kathrin Lindner, Jana Kirmse, Doreen Koch, alle Vitzgenburg; Thomas Vandahl, Völkerhausen; Frank Goth, Waltersdorf; Andreas Heidtmann, Anke Dittmar, Andrea Schmidt, alle Waren; Holger Nobach, Warnemünde; Uwe Pillart, Waschow; Johannes Thäter, Uta Langer, Monika Rössler, Volker Lehmann, alle Weimar; Heike Eggert, Tino Albrecht, Udo Lehmann, Jana Engelmann, Beate Rumpelt, Britta Nowack, Alexander Benz, Isabel Ackermann, alle Weißwasser; Holger Post, Wiebendorf; Lutz Grothe, Andreas Dörin, alle Wiederitzsch; Dorothee Farner, Wildberg; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mario Kuhn, Wintzingerode; Ute Süß, Wippra; Karin Junk, Peter Eggert, Heike Hinz, alle Wismar; Mathias Schwenck, Wittenburg; Jörg Szurlics, Wittenberg; Ronald Reschke, Wittstock; Detlef Schiemann, Wittenburg; Carl Grosch, Wolferstedt; Sigrun Gardebrecht, Sabine Wehrig, Ulf Alpen, alle Wolgast; Maren Zech, Zahna; Adrian Hackenberger, Zedlitz; Antje Schneider, Zeitz; Angelika Weyh, Steffi Remsthaler, Matthias Schmeiß, Ute Barthelmes, alle Zella-Mehlis; Holger Radunz, Zerbst; Karsten Schwanke, Ziesar; Uwe Schulz, Birgit Gawlik, Annegret Elsner, Kerstin Donix, Christine Thomas, alle Zittau; Katrin Neum, Katrin Scheffel, Marco Möbius, alle Zschornowitz; Falk Steinbach, Zwickau; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Steffen Weber, Osternienburg.

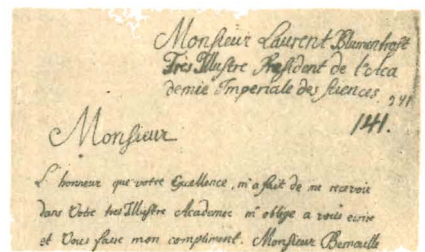
Leonhard Euler – Chronologie

1707 Leonhard Euler in Basel geboren (15. April).
 1708 Umzug der Familie nach Riehen bei Basel.
 1713 Nachdem Euler zunächst bei seinem Vater Unterricht erhalten hatte, besucht er die Lateinschule in Basel.
 1720 Euler immatrikuliert sich an der Universität in Basel (20. Oktober).
 1723 Studium der Theologie, danach der Mathematik bei Johann Bernoulli.
 1724 Euler erhält die Magisterwürde.
 1725 Erste wissenschaftliche Arbeit.
 1726 Die Versuche Eulers scheitern, in Basel eine Professur zu erhalten.
 1727 Abreise aus Basel (5. April) und Ankunft in St. Petersburg (24. Mai).
 1731 Nach anfänglichen Schwierigkeiten, die durch den Tod der Zarin Katharina II. entstanden waren, wird Euler Professor für Physik an der Akademie in Petersburg. Eine bereits 1731 geschriebene Musiktheorie erscheint erst 1739.
 1733 Euler wird als Nachfolger Daniel Bernoullis Professor für Mathematik an der Petersburger Akademie.
 1734 Euler heiratet (17. Januar, nach dem alten Kalenderstil am 27. 12. 1732) Katharina Gsell. Sohn Johann Albrecht geboren.
 1736 Eulers „Mechanik“ erscheint. In ihr wird erstmals die Mechanik mit der neuen Analysis behandelt.
 1738 Euler verliert als Folge einer Infektion das rechte Auge.
 1740 bis 1742 1. Schlesischer Krieg.
 1740 Sohn Karl geboren.
 1741 Euler verläßt Petersburg (19. Juni), da die Machtkämpfe im Zarenreich seine Zukunft unsicher erscheinen lassen. Ankunft in Berlin (25. Juli). Tochter Helene geboren.
 1743 Sohn Christoph geboren.
 1744 bis 1745 2. Schlesischer Krieg.
 1744 Die Bücher über Himmelsmechanik und Variationsrechnung erscheinen.
 1746 Nachdem sich durch die Schlesischen Kriege die Neugründung der Akademie immer wieder verzögert hatte, wird Euler Direktor der mathematischen Klasse der Berliner Akademie.
 1748 „Einführung in die Analysis des Unendlichen“ erscheint.
 1749 Ein von der Petersburger Akademie in Auftrag gegebenes Buch über Schiffbau wird veröffentlicht.
 1750 In einer Arbeit veröffentlicht Euler den Impulsänderungssatz.
 1751 Die erste Mondtheorie wird publiziert.

1753 Wichtige hydrodynamische Arbeiten von Euler verfaßt, u. a. auch über Turbinenbau.
 1755 Die 1748 geschriebene Differentialrechnung erscheint.
 1756 bis 1763 Siebenjähriger Krieg (3. Schlesischer Krieg).
 1758 Euler findet die später nach ihm benannten Kreiselgleichungen.
 1765 Euler veröffentlicht ein weiteres Mechanikbuch.
 1766 Übersiedlung nach Petersburg (1. Juni bis 17. Juli) infolge eines Zerwürfnisses mit Friedrich II. Sehschwäche.
 1768 „Briefe an eine deutsche Prinzessin“ erscheinen. Dieses Buch war einer der größten Buchhandelserfolge des 18. Jahrhunderts und ist bis heute eines der besten populärwissenschaftlichen Bücher. Die 1763 beendete Integralrechnung erscheint.
 1770 „Vollständige Anleitung zur Algebra“ veröffentlicht.
 1771 Staroperation mißlungen, Eulers Wohnhaus abgebrannt.
 1772 Die zweite Mondtheorie wird publiziert.
 1773 Eulers Frau gestorben. N. Fuß kommt aus Basel nach Petersburg, um dem blinden Euler bei seiner wissenschaftlichen Arbeit zu helfen.
 1775 Drehimpulssatz von Euler gefunden. Jetzt lassen sich alle Aufgaben der klassischen Mechanik mathematisch behandeln.
 1776 Wiederverheiratung Eulers mit Salome Gsell.
 1783 Euler gestorben (18. September).
 1911 Der erste Band der „Gesammelten Werke“ Eulers erscheint im Teubner-Verlag. Das monumentale Werk wird in diesem Jahrhundert vollendet werden. Zur Zeit sind 71 Bände erschienen.



Leningrad. Blick über die Neva auf die Wassili-Insel. Am linken Bildrand ist die Kunstkammer zu sehen, der Arbeitsplatz Eulers bei seinem zweiten Petersburger Aufenthalt. Bei beiden Petersburger Aufenthalten befand sich Eulers Wohnung auf der Wassili-Insel.

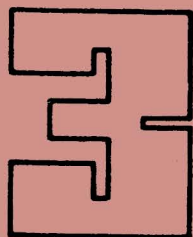
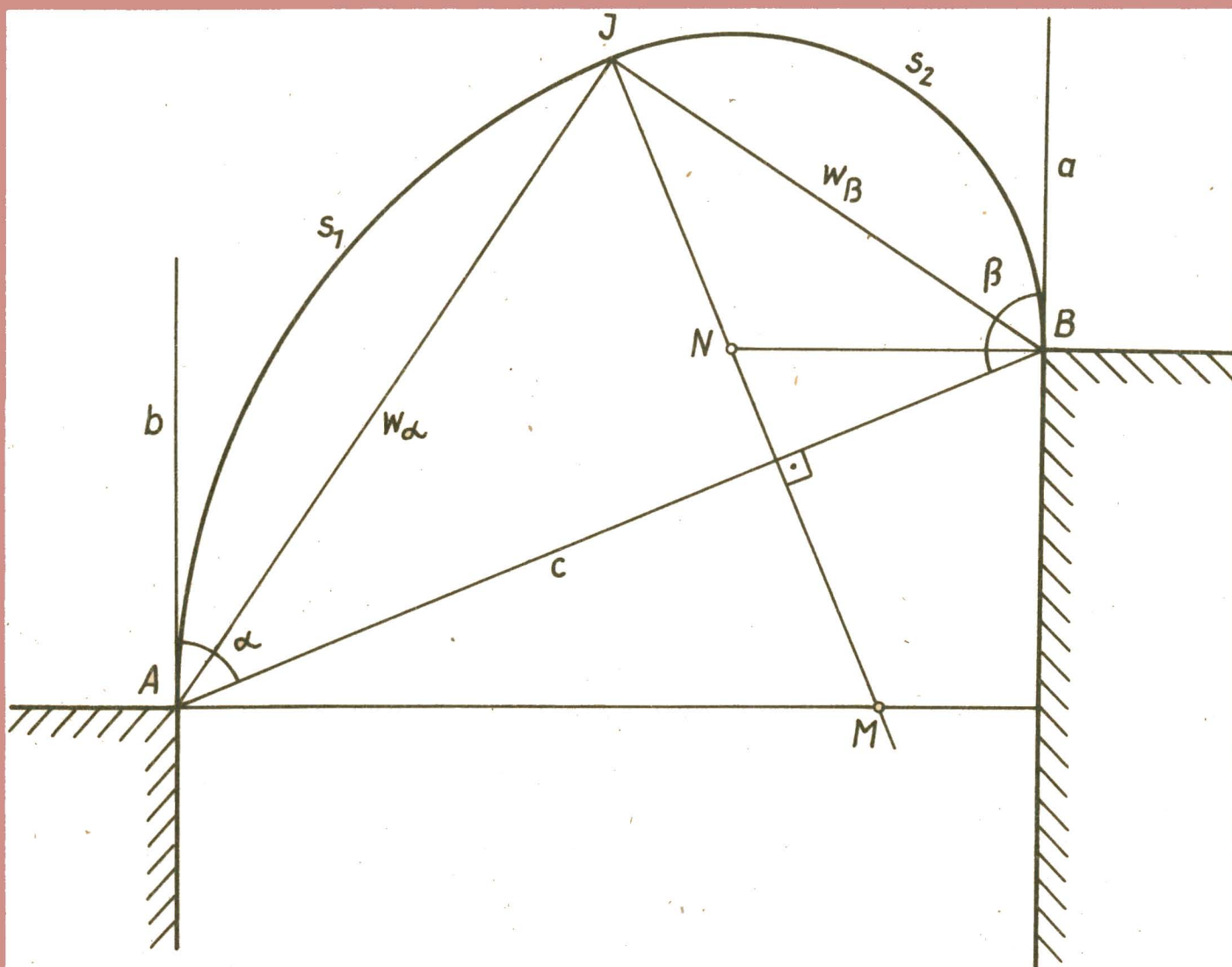


Beginn des Bewerbungsschreibens Eulers an den Präsidenten der Petersburger Akademie aus dem Jahre 1726.

Zusammenstellung: R. Thiele

Basel. Blick auf die mittlere Rheinbrücke aus unseren Tagen. Das erste Haus von links am Ufer ist die alte Universität. Dahinter befindet sich die Taufkirche Eulers. Diese Kirche gibt den wohl sichersten Hinweis auf die Lage des unbekannten Geburtshauses von Euler: es muß in der Nähe der Kirche sein. Weil dort aber fast keine Häuser aus der Zeit vor 1707 vorhanden sind, dürfte Eulers Geburtshaus nicht mehr stehen.





Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritzig); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Nabil El-Solami, Berlin (S. 55); Archiv
R. Thiele, Leipzig (S. 59, S. 64); Briefmarken-
zusammenstellung: P. Schreiber, Greifswald
(IV. U.-Seite).

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vor-
lage von Dr. E. Schröder, TU Dresden

Typographie: H. Tracksdorf



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der
ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 25. Februar 1983

Auslieferungstermin: 20. Juni 1983



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 **Korbbogenkonstruktion [9*]**
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 51 **Mathematik und Schiffbau, Teil 1 [11]**
Prof. Dr. H.-W. Stolle, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität* Rostock
- 53 **Das magische Figuren-Match [5]**
Dr. H.-D. Gronau, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität* Rostock
- 55 **Karl Marx und seine „Mathematischen Manuskripte“ [7]**
Dr. M. Deweiß, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
- 56 **Eulers Beweis für die Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$
in natürlichen Zahlen [9]**
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften
der DDR
- 59 **Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei *Leonhard Euler* [5]**
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, A.-v.-Humboldt-
Forschungsstelle Berlin
- 60 **Das Fünfeckerspiel [5]**
Dr. M. Deweiß, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
- 62 **Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Bericht über eine Schulmeisterschaft [5]**
Oberstudienrat K. Lehmann, Fachberater im SB Berlin-Lichtenberg
- 64 **aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – speziell für Klasse 4/6
Genauigkeit gefragt [4]**
Dr. L. Flade, *Martin-Luther-Universität* Halle/Wittenberg
- 65 **Überraschungen mit einem Würfel [5]**
Prof. Dr. F. Bartenew, Moskau (aus der sowj. Schülerzeitschrift *Quant*)
- 66 **In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 68 **XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade) – Aufgaben [7]
2. Stufe (Kreisolympiade) – Lösungen [5]**
- III. U.-S. **Wirkungskraft der Schachfiguren [5]**
H. Rüdiger, Schichtleiter im VEB Fernsehelektronik Berlin
- IV. U.-S. **Für den Briefmarkenfreund: Das Astrolabium [8]**
Dr. P. Schreiber, *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- IV. U.-S. **Unsere Sprachecke [7]**
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholtz/J. Lehmann (alle Leipzig)
- Seite I, II, VII, VIII: **Lösungen [5]**
- Seite III, IV, V, VI: ***alpha*-Ferienmagazin [4]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Korbbogenkonstruktion

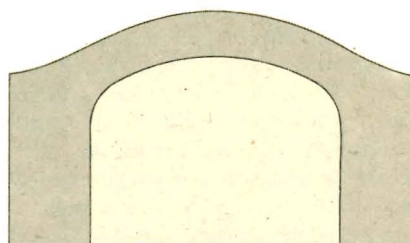


Bild 1

Wer einmal nach unserem Nachbarland in die ČSSR fährt, sieht dort noch manches alte Bauerngehöft mit einem schönen Torbogen als Krönung der Einfahrt. Auch an den Marktplätzen alter Kleinstädte sind Bogengänge der Häuserfronten rund um den Markt recht beeindruckend. Schauen wir uns den Torbogen eines alten Bürgerhauses genauer an, so ist zu bemerken, daß kein einfacher Halbkreisbogen die Einfahrt überwölbt. Vielmehr ist die Bogenlinie in der Mitte weniger stark gekrümmt als an den Seiten. Dabei ist die Symmetrie bezüglich der Mittellinie des Tores gewahrt. Die Bogenlinie geht an den Seiten nicht geknickt, sondern fließend in die Senkrechte über (vgl. Bild 1). Nach flüchtiger Betrachtung kann man den Torbogen für eine Halbellipse halten, deren Hauptachse waagrecht liegt. An der Ellipse nimmt die Krümmung von einem Nebenscheitel ausgehend nach den Hauptscheiteln stetig zu. Im höchsten Punkt des Tores, der damit als Nebenscheitel anzusehen wäre, weist die Krümmung ein Minimum auf. Eine genauere Untersuchung solcher Torbögen zeigt jedoch, daß die Krümmung der Bogenlinie von der Mitte nach den Seiten laufend nicht stetig zunimmt. Die Bogenlinie setzt sich aus drei Kreisabschnitten zusammen. Haben der mittlere Abschnitt den Krümmungsradius r_1 und die beiden äußeren Abschnitte den Krümmungsradius r_2 , so gilt stets

$$r_1 > r_2. \quad (1)$$

Die Krümmungen k_i der Kreisabschnitte stellen die Kehrwerte von r_i dar, also

$$k_i = 1/r_i \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $k_1 < k_2$. (3)

Außer der Forderung $\frac{r_1}{r_2} > 1$ bestehen für das

Verhältnis der Krümmungsradien keine Einschränkungen. Je nach den baustatischen Forderungen, die die Bögen zu erfüllen hatten, wählte man das Verhältnis der Krümmungsradien $q = r_1 : r_2$ mehr oder weniger groß. Für $q > 1$ ergibt sich ein stark abgeflachter Torbogen.

Gibt man sich ein Rechteck vor, dessen Breite mehr als doppelt so groß ist wie die Höhe, so kann man offenbar beliebig viele aus drei Kreisabschnitten zusammengesetzte symmetrische Bogenlinien konstruieren, die die waagerechte Seite als Grundlinie und die senk-

rechte Seite als Höhe besitzen und bei denen außerdem an der Übergangsstelle genau eine Tangente existiert. Wie eine genauere Vermessung zeigt, erfüllen die von den damaligen Baumeistern verwendeten Bogenkonstruktionen noch zusätzlich die folgende Forderung: Die Tangente an die Bogenlinie in der Nahtstelle J der zwei Kreisbögen von unterschiedlicher Krümmung ist parallel zu der Sehne, die den höchsten Punkt (Scheitelpunkt des Tores) mit dem entsprechenden tiefsten Punkt der Bogenlinie verbindet (vgl. Bild 2). Wie man zeigen kann, sind die Kreisabschnitte und damit die gesamte Bogenlinie durch Vorgabe des Rechtecks unter Einbeziehung dieser Forderung eindeutig bestimmt.

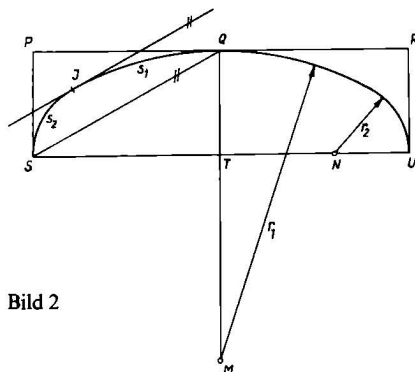
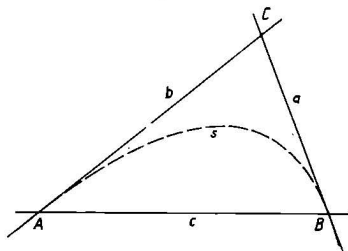


Bild 2

Bild 3



Uns stellt sich die Frage, wie man die Nahtstelle J der Kreisbögen s_1 unterschiedlicher Krümmung mit Zirkel und Lineal konstruktiv finden kann, wenn dabei im Punkt J die geforderte Tangentenrichtung vorliegen soll. Da die beiden Nahtstellen symmetrisch zur Mittellinie QT des Rechtecks liegen, genügt die Betrachtung einer Hälfte der Fläche. Ferner können wir unsere Untersuchungen auf das Dreieck $\triangle SQP$ beschränken, denn die halbe Bogenlinie s besitzt dieses Dreieck als Sekanten-Tangentendreieck. Da der Winkel

$\angle SPQ$ ein rechter Winkel ist, liegt ein spezieller Fall vor. Wir verallgemeinern die Problemstellung in folgender Weise:

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ (vgl. Bild 3). Gesucht ist eine aus zwei Kreisbögen zusammengesetzte Bogenlinie s , die folgende Forderungen erfüllt:

1. Die Bogenlinie s soll A mit B verbinden.
2. Die Bogenlinie s soll – abgesehen von den Randpunkten A und B – nur innere Punkte des Dreiecks ABC besitzen.
3. Die Bogenlinie s soll die Seite a in B und die Seite b in A berühren.
4. Die Bogenlinie s setzt sich aus zwei Kreisabschnitten mit den Krümmungsradien r_1 bzw. r_2 zusammen.
5. In der Verknüpfungsstelle J der beiden Kreisabschnitte s_1 und s_2 ist die Tangente eindeutig bestimmt.
6. Die Tangente in der Verknüpfungsstelle J von s_1 und s_2 soll parallel zur Dreiecksseite c sein.

Bemerkung:

Für das gesuchte Kurvenstück s sind a die Tangente in B , b die Tangente in A und c die Anfangs- und Endpunkte von s verbindende Sekante.

Um zu einer Aussage über die Lage des Punktes J bezüglich des Dreiecks ABC zu gelangen, gehen wir von einer ebenen Figur aus, bei der die geforderten Lagebeziehungen zwischen dem Dreieck und dem aus zwei Kreisbögen zusammengesetzten Kurvenstück s bereits bestehen (vgl. Bild 4). Hierzu zeichnen wir

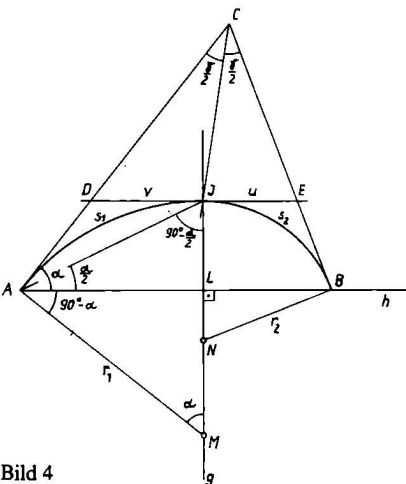


Bild 4

eine Gerade g und legen auf dieser drei Punkte M , N und J fest, wobei zu fordern ist, daß J kein Punkt der Strecke $\overline{MN}$ ist. Mit der Distanz $r_1 = \overline{MJ}$ schlagen wir einen Kreisbogen s_1 um M , mit der Distanz $r_2 = \overline{NJ}$ einen Kreisbogen s_2 um N . Beide Bögen berühren sich nach Konstruktion in J . Weiterhin werde auf g ein Punkt L angenommen, der innerer Punkt für wenigstens eine der Strecken $\overline{MJ}$ oder $\overline{NJ}$ ist. Nun wird in L auf g das Lot h errichtet. Dieses schneidet s_1 in A und s_2 in B . Die Tangenten b an s_1 in A und a an s_2 in B schneiden sich im Punkt C . Für das sich aus s_1 und s_2 zusammensetzende Kurvenstück s sind bezüglich des Dreiecks ABC alle Forderungen erfüllt, die eingangs in unserer Aufgabe gestellt wurden.

Mittels der Vorbetrachtungsfigur (Bild 4) soll nun geklärt werden, wie man den Punkt J konstruktiv finden kann, wenn die Punkte A und B samt ihren Tangenten b bzw. a gegeben sind.

Bemerkung:

Ein Kurvenpunkt P samt der Kurventangente t an s in P heißt Linienelement $P(t)$ von s .

Zunächst schneiden sich die Tangenten a und b im Punkt C .

Aus Bild 4 ist ablesbar:

$$\overline{DA} = \overline{DJ} \text{ und } \overline{EB} = \overline{EJ}. \quad (4)$$

Weiterhin gilt nach Konstruktion die Proportion

$$\overline{CD} : \overline{DA} = \overline{CE} : \overline{EB}. \quad (5)$$

Aus (5) folgt mit (4)

$$\overline{CD} : \overline{DJ} = \overline{CE} : \overline{EJ}. \quad (6)$$

Als bekannt aus der Dreiecksgeometrie werde vorausgesetzt:

Im Dreieck teilt die Halbierungslinie eines Innenwinkels die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Nach diesem Satz und der Proportion (6) ist die Gerade (CJ) Winkelhalbierende im Dreieck DEC . Sie halbiert den Winkel γ . Wie leicht zu erkennen ist, deckt sich die Gerade (CJ) mit den Winkelhalbierenden w_γ des Dreiecks ABC . Mit einfachen Überlegungen läßt sich zeigen, daß auch die anderen Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC durch J gehen. J ist also Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC .

Im folgenden identifizieren wir die Größe eines Winkels mit der Bezeichnung dieses Winkels gemäß Bild 4. Es sei $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Dann folgt

$$\sphericalangle BAM = 90^\circ - \alpha \quad (7)$$

und $\sphericalangle AML = \alpha$. Nach Konstruktion ist das Dreieck AMJ gleichschenkelig. Für die Basiswinkel gilt

$$\sphericalangle JAM = \sphericalangle AJM = 90^\circ - \alpha/2. \quad (8)$$

Mit (7) folgt aus (8)

$$\sphericalangle JAB = \alpha/2. \quad (9)$$

Aus (9) folgt, daß die Verbindungslinie (AJ) den Winkel $\sphericalangle BAC$ halbiert. Es geht also w_α und damit auch w_β durch den Punkt J . Der gesuchte Punkt J ist daher Inkreismittelpunkt des Sekanten-Tangentendreiecks ABC .

Damit ist geklärt, wie man konstruktiv vorgehen hat, wenn zwei Linienelemente $A(b)$ und $B(a)$ des Bogenstückes s vorgegeben sind. Man ergänzt die Linienelemente zum Sekanten-Tangentendreieck ABC . Mittels der Winkelhalbierenden ist der Inkreismittelpunkt J von $\triangle ABC$ zu bestimmen. Aus J fällt man das Lot g auf die Sekante c . In A errichtet man das Lot auf b . Dieses schneidet g in M . In B errichtet man das Lot auf a . Dieses schneidet g in N . Um M schlägt man den Kreisbogen s_1 mit der Strecke $\overline{MA}$ als Radius und um N den Kreisbogen s_2 mit der Strecke $\overline{NB}$ als Radius. Das aus s_1 und s_2 zusammengesetzte Bogenstück s besitzt die geforderten Eigenschaften 1 bis 6.

Auf das Problem des Torbogens zurückkehrend, ist diese Konstruktion analog auf die Dreiecke $\triangle PQS$ und $\triangle QRU$ in Bild 2 zu übertragen.

In der Praxis nennt man ein aus zwei Kreisbögen zusammengesetztes Kurvenstück mit stetiger Tangente einen „Korbbogen“. Die von uns angewandte Konstruktion heißt „Korbbogenkonstruktion“. Für die Übergangsstelle von dem einen Kreisbogen in den anderen hätte man auch einen anderen Tangentenanstieg fordern können. Dann ist das hier vorgeführte einfache Konstruktionsverfahren nicht anwendbar. Es ergäben sich andere Radien für die beiden Kreisbögen, und die Übergangsstelle würde nicht mit dem Inkreismittelpunkt des Sekanten-Tangentendreiecks zusammenfallen.

Die hier abgeleitete Bogenkonstruktion läßt einige erwähnenswerte Varianten zu. Zum Beispiel soll eine Wandöffnung mit unterschiedlichen Ausgangshöhen durch einen von A nach B steigenden Korbbogen überspannt werden. Der Verbindungsgeraden $c = (AB)$ fällt die Rolle der Sekante des gesuchten Korbbogens s zu. In A und B stehen die Tangenten an die gesuchte Kurve lotrecht. Der dritte Punkt C des Dreiecks ABC ist damit der unendlich ferne Punkt der Lotrechten. Die Winkel α und β werden daher von c mit den Lotrechten durch A bzw. B eingeschlossen (siehe Bild 5, Titelbild).

Damit lassen sich auch hier die Winkelhalbierenden w_α und w_β sofort einzeichnen. Sie schneiden sich im Punkt J , der Übergangsstelle von s_1 nach s_2 . Auf dem Lot von J auf c liegen die gesuchten Kreismittelpunkte M und N . Das Lot in A auf b liefert M , das Lot in B auf a liefert N . Der Kreisbogen s_1 um M mit der Distanz $\overline{MA}$ und s_2 um N mit der Distanz $\overline{NB}$ berühren sich in J . Der aus den Bogenstücken s_1 (AJ) und s_2 (JB) zusammengesetzte Korbbogen s erfüllt alle eingangs gestellten Forderungen bezüglich der Ausgangelemente. Bei Stützkonstruktionen für Treppen und Zuschauerarenen gelangen solche steigende Korbbögen mitunter zum Einsatz. In der Sprache des Baupraktikers heißen solche Bogenverbindungen „Pferdeköpfe“.

Die nach unserem Verfahren konstruierten Korbbögen haben noch eine bemerkenswerte differentialgeometrische Eigenschaft. Für die Übergangsstelle von s_1 nach s_2 liegt der Quotient aus den Krümmungsradien $q = r_1 : r_2$ ($r_1 > r_2$ vorausgesetzt) im Vergleich zu allen anderen noch möglichen Lösungen am nächsten bei der Zahl Eins. Für alle anderen Korbbogenkonstruktionen ist das Verhältnis von größerem zu kleinerem Krümmungsradius – also der Quotient q – größer als bei der hier gezeigten Konstruktion. Bei vielen Problemstellungen des Maschinenbaus, in denen mit Korbbögen gearbeitet wird, ist man bestrebt, den Quotienten q möglichst nahe bei Eins und damit die Unstetigkeit bezüglich der Krümmung an der Übergangsstelle J so klein als möglich zu halten. Wegen vieler Vorteile für die Fertigung gelangt die Korbbogenkonstruktion z. B. bei Nockenprofilen im Maschinenbau oder bei Höhenlinien von Staumauern und bei Kanalprofilen im Bauwesen zum Einsatz. Erinnert sei auch an NC-Fräsmaschinen, die nur geradlinige oder kreisförmige Fräserführungen erlauben.

So gelangt die bereits in Bauhütten zur Zeit der Gotik praktizierte und im Barockzeitalter vielfältig verwendete Korbbogenkonstruktion im modernen Bauwesen und im Maschinenbau aus vorwiegend fertigungstechnischen Gründen und ökonomischen Überlegungen zu neuer Aktualität.

Aufgaben

Zur Konstruktion von genormten Eiprofilen für Kanäle geht man von zwei Kreisen k_1 und k_2 mit den Radien r_1 bzw. r_2 aus, wobei $r_1 = 2r_2$ gilt.

Für die Distanz der Mittelpunkte M_i gilt $|M_1M_2| = 3r_2$.

Mittels zweier Kreisbögen sind k_1 und k_2 so miteinander zu verbinden, daß ein bezüglich (M_1M_2) symmetrisches Eiprofil entsteht, welches frei von Knickstellen ist. Die Endpunkte des Durchmessers $\overline{AB}$ von k_1 sollen Ansatzstellen für die verbindenden Kreisbögen sein (siehe Bild 6).

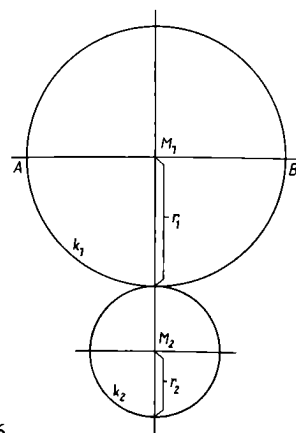


Bild 6

E. Schröder

Mathematik und Schiffbau

Teil 1

1. Einleitende Bemerkungen

Der Schiffbau nimmt in der Industrie der DDR eine bedeutende Stellung ein. Jährlich werden gegenwärtig etwa 25 See- und Küstenschiffe auf unseren Werften hergestellt, außerdem noch viele andere Spezial- und Fischereifahrzeuge. Die meisten Schiffe werden exportiert. Um auf dem Weltmarkt konkurrieren zu können, müssen die Werften einen hohen Entwicklungsstand ihrer Produkte gewährleisten. Eine moderne Technologie des Schiffbaus erfordert eine präzise Ermittlung aller Bedingungen und Wirkungen, die im Prozeß der Nutzung auf das Schiff und alle seine Geräte und Ausrüstungen Einfluß haben.

Zur Gewährleistung dieser Erfordernisse ist in den Konstruktions- und Entwicklungsbüros der Werften ein hoher Einsatz mathematischer und rechentechnischer Hilfsmittel erforderlich.

Schwerpunkte des Einsatzes mathematischer Methoden und Verfahren bilden etwa Probleme der Schiffsfestigkeit und Schiffsschwingungen sowie Fragen, die mit der Umströmung des Schiffes und dem Schiffswiderstand zusammenhängen, um nur einige Gebiete zu nennen.

Will man einen kleinen Eindruck vermitteln, in welchem Umfang mathematische Methoden im Schiffbau verwendet werden, so ist es zweckmäßig, sich auf einen speziellen, etwas engeren Problemkreis dieses breiten Gebietes zu beschränken. Das ist einerseits notwendig, um die erforderliche mathematische Modellierung der technischen Aufgabenstellung hinreichend zu verdeutlichen, und andererseits, um nur solche Aufgaben zu beschreiben, die eine nicht zu hohe mathematische Vorbildung verlangen.

Als ein solches spezielles Gebiet haben wir die Schiffsfestigkeit gewählt und daraus wieder nur einige einfach zu beschreibende Teilgebiete. Als erforderliches mathematisches Rüstzeug werden dabei nur einige einfache Grundlagen der linearen Algebra, der Lehre von den Dreiecken, der Vektoralgebra und der Differential- und Integralrechnung gebraucht, wie sie bis zur 11. Klasse behandelt werden.

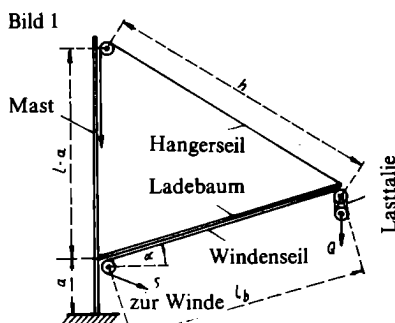
Ein Festigkeitsnachweis ist für alle Bauteile eines Schiffes, die in irgendeiner Weise bela-

stet werden (und das ist die überwiegende Mehrzahl aller Bauteile) erforderlich. Dabei geht es um die Ermittlung der in den Bauteilen wirkenden Kräfte und Biegemomente bzw. um die Bestimmung der unter den Kräfteinwirkungen auftretenden Durchbiegungen. Der Vergleich der errechneten Werte mit experimentell ermittelten Grenzbelastungen, bei deren Überschreiten das Bauteil zerstört bzw. in seiner Funktion stark beeinträchtigt würde, gestattet dann ein Urteil über die Zulässigkeit und Güte der verwendeten Konstruktion.

2. Die Berechnung von Ladegeschirren

Relativ einfache mathematische Beziehungen werden bei der Berechnung von Ladegeschirren benötigt. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um die Anwendung der Partialsumme einer endlichen geometrischen Folge, um Beziehungen in ähnlichen und rechtwinkligen Dreiecken und um einige Grundgleichungen der Vektoralgebra.

Das Ladegeschirr besteht im wesentlichen aus dem Ladebaum, dem Hangerseil, dem Windenseil und der Lasttalje, an der die Last hängt (Bild 1). Bei gegebener Last Q interessieren den Konstrukteur die Größen der Windenzugkraft S im Windenseil, der Kraft B im Ladebaum und der Kraft H im Hangerseil.



oberstes Deck

l Länge des Mastes

a Abstand des Abstützpunktes des Ladebaums vom obersten Deck

h Länge des Hangerseils

b Länge des Ladebaums

α Neigungswinkel des Ladebaums

Um die Windenzugkraft S klein zu halten, ist bei Schwergutladegeschirren der Ladeläufer i. a. mehrfach geschoren, d. h., das Windenseil ist mehrfach um zwei Rollen geschlungen. Eine solche Anordnung wird Talje (Lasttalje) genannt. In den Taljen ergibt sich infolge der Reibung und infolge der Formänderungsarbeit im Seil bei jeder Seilumlenkung um 180° ein Kraftverlust von annähernd 5%. Dadurch reduziert sich bei 1 N (Newton) Windenzugkraft nach einer Umlenkung des Seils um 180° diese Kraft auf 0,95 N beim Hieven (Anheben) der Last, sie erhöht sich dagegen auf 1,05 N beim Fieren (Herablassen) der Last. Der Verlustfaktor beträgt also beim Hieven $\eta = 0,95$ und beim Fieren $\eta = 1,05$. Nach jeder Umlenkung des Seils um 180° ist also die vorherige Seilkraft mit dem Faktor η zu multiplizieren, um die Seilkraft nach Umlaufen der Rolle zu erhalten.

Läuft der holende Part vom oberen Block ab (Bild 2) und werden im Schnitt $a-a$ insgesamt n Seile geschnitten, dann ergibt das Kräftegleichgewicht zwischen den Seilkräften $\eta S, \eta^2 S, \dots, \eta^n S$ und der Last Q :

$$\eta S + \eta^2 S + \dots + \eta^n S = Q. \quad (1)$$

Die linke Seite der Gleichung (1) ist die Partialsumme einer endlichen geometrischen Folge mit dem Quotienten η bestehend aus n Summanden. Nach einer bekannten Formel ergibt sich die links stehende Summe zu

$$\eta S \frac{1 - \eta^n}{1 - \eta},$$

so daß die erforderliche Windenzugkraft S die Größe

$$S = \frac{1 - \eta}{\eta(1 - \eta^n)} Q \text{ hat. (Bild 2)} \quad (2)$$

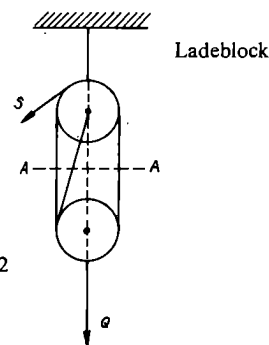


Bild 2

Nachdem S bekannt ist, kann die Berechnung der Kräfte B und H im Ladebaum und im Hangerseil aus Proportionen in ähnlichen Dreiecken gewonnen werden. Zunächst werden die Kraft S im Windenseil und die Last Q an der Lasttalje durch Zeichnen des Kräfteparallelogramms vektoriell addiert (Bild 3). Es ergibt sich

$$\vec{S} + \vec{Q} = \vec{L}. \quad (3)$$

$\vec{L}$ ist die resultierende Kraft im Ladeblock. Diese muß in Richtung des Hangerseils und des Ladebaums zerlegt werden, um die Kräfte $\vec{H}$ und $\vec{B}$ in diesen beiden Teilen des Ladegeschirrs zu gewinnen. Dazu wird durch den

Punkt 6 in Bild 3 eine Parallele zum Hangerseil gezogen. Es entsteht das Kräfte-dreieck mit den Ecken 5, 6 und 2. Aus diesem Dreieck liest man die Vektorgleichung

$$\vec{L} = \vec{H} + \vec{B} \quad (4)$$

ab. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ sind die vektoriellen Komponenten der Kraft $\vec{L}$ am Ladeblock in Richtung des Hangerseils bzw. des Ladebaums. Zwischen den Vektoren und ihren Beträgen bestehen die Beziehungen $|\vec{B}| = B$, $|\vec{H}| = H$ usw.

Man erkennt aus Bild 3, daß das Dreieck mit den Ecken 1, 2, 3 ähnlich ist zum Dreieck mit den Ecken 4, 5, 6. Daher gelten die Proportionen

$$\frac{B-S}{Q} = \frac{l_b}{l-a}, \quad \frac{H}{Q} = \frac{h}{l-a}.$$

Daraus erhält man

$$B = \frac{l_b}{l-a} Q + S \quad (5)$$

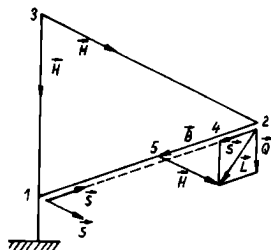
(Kraft im Ladebaum),

$$H = \frac{h}{l-a} Q \quad (6)$$

(Kraft im Hangerseil).

Man kann diese Kräfte bei gegebenen S und Q auch aus der grafischen Konstruktion (Bild 3) durch Abgreifen der entsprechenden Vektorenlängen ermitteln.

Bild 3



Die Kräfte H und B sind für die Bemessung des Hangerseils und des Baumquerschnitts wichtig. Andererseits belasten sie zusammen mit der Windzugkraft S den Mast, so daß ihre Größen auch die erforderlichen Querschnittsabmessungen des Mastes bestimmen. Dazu werden die Horizontal- und Vertikal-komponenten dieser Kräfte am Mast benötigt.

Wie man aus Bild 3 erkennt, wirkt in Richtung des Ladebaums nur die Kraft $B-S$. Aus dem unteren rechtwinkligen Dreieck in Bild 4 ergibt sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen

$$B_h = \frac{l_b}{l-a} Q \cos \alpha \quad (7)$$

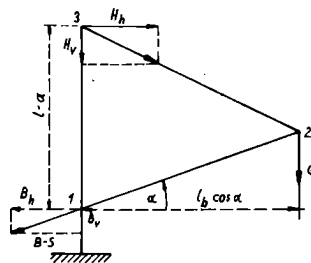
(horizontale Baumkraft am Mast),

$$B_v = \frac{l_b}{l-a} Q \sin \alpha \quad (8)$$

(vertikale Baumkraft am Mast).

Die horizontale Hangerkraft H_h erhält man aus der Überlegung, daß die Summe der Drehmomente (Kraft mal Hebelarm) aller Kräfte um den Punkt 1 (Abstützpunkt des

Bild 4



Baumes am Mast) Null sein muß, d. h., die Drehmomente müssen im Gleichgewicht sein:

$$H_h(l-a) + l_b \cos \alpha = 0.$$

Es folgt

$$H_h = -\frac{l_b}{l-a} Q \cos \alpha. \quad (9)$$

Außerdem muß die Summe der am Mast angreifenden Vertikalkräfte gleich der äußeren Belastung Q sein (Kraftgleichgewicht), d. h.

$$H_v = Q - B_v. \quad (10)$$

Zerlegt man noch die Windzugkraft S in ihre Komponenten, so sind alle Kräfte, die infolge des Ladegeschirrs horizontal und vertikal auf den Mast einwirken, bekannt.

Die Verhältnisse werden komplizierter, wenn mit zwei gekoppelten Ladegeschirren gearbeitet wird. In diesem Fall ist es am zweckmäßigsten, die Kräfte in den Seilen und Bäumen vektoriell zu ermitteln. In diesem Zusammenhang ist auch folgende Fragestellung wichtig: Bei welchen Stellungen gekoppelter Ladegeschirre sind die statischen Kräfte in den Ladebäumen bzw. Hangerseilen am größten? Eine Beantwortung dieser Frage gestattet eine optimale Bemessung der einzelnen Bauteile. Man wird bei diesem Problem auf eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen geführt, die in das mathematische Gebiet der nichtlinearen Optimierung einzuordnen ist. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein.

3. Die Berechnung von Biegeträgern

Ein wichtiges Bauelement im Schiffbau ist der Träger oder Balken. Er besteht aus Stahl und hat je nach dem Verwendungszweck unterschiedliche Abmessungen und Querschnittsprofile (Beispiele für gebräuchliche Profile siehe Bild 5). Solche Träger dienen sowohl zur Aufnahme von Kräften in ihrer Längsrichtung als auch von Kräften senkrecht zur Trägerachse (Querkräfte) und von Biegemomenten. Uns soll hier nur der auf Biegung beanspruchte Träger interessieren.

Bild 5



Die Bestimmung der Biegemomentenverteilungen und der Durchbiegungen solcher Träger kann in einfacher Weise mit den Mitteln der Differential- und Integralrechnung geschehen. Die Grundlage dafür ist die sogenannte Differentialgleichung der Biegelinie,

die eine Beziehung zwischen der 2. Ableitung der Durchbiegung und der auf den Träger einwirkenden Belastung in Gestalt des sogenannten Biegemoments darstellt.

Diese Differentialgleichung resultiert aus der leicht begründbaren Tatsache, daß im Fall kleiner Durchbiegungen die Krümmung der Biegelinie $y(x)$ des Trägers im Punkt x durch ihre 2. Ableitung $y''(x)$ dargestellt werden kann und die Krümmung ihrerseits proportional zum Biegemoment $M(x)$ des Trägers im Punkt x ist, d. h., es gilt

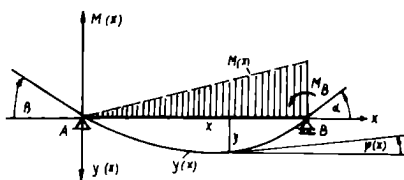
$$EI y''(x) = M(x). \quad (11)$$

Der Proportionalitätsfaktor ist EI . Dabei bedeutet E den Elastizitätsmodul, das ist eine Materialkonstante, die die Elastizität des Materials beschreibt (gemessen in Nm^{-2}). I ist das Flächenträgheitsmoment (gemessen in m^4), eine von der Form des Balkenquerschnitts abhängige Größe. Für Träger konstanten Querschnitts ist I konstant, d. h. nicht von x abhängig. Das Biegemoment $M(x)$ hat die Dimension „Kraft mal Hebelarm“ (gemessen in Nm) und stellt das Drehmoment aller Kräfte dar, die rechts von der Schnittstelle x auf den Träger einwirken, bezüglich des Punktes mit der Abszisse x als Drehpunkt.

Ist z. B. ein Träger der Länge l und konstanten Querschnitts auf zwei Stützen bei A und B frei drehbar gelagert und wird bei B ein Drehmoment der Größe M_B in der angegebenen Drehrichtung aufgebracht (Bild 6), dann nimmt das Biegemoment $M(x)$ vom Wert M_B in B linear auf den Wert Null in A ab, d. h.

$$M(x) = \frac{x}{l} M_B. \quad (12)$$

Bild 6



Mit (12) lautet die Differentialgleichung der Biegelinie (11) in diesem Fall

$$EI y''(x) = \frac{x}{l} M_B. \quad (13)$$

Um die Durchbiegung $y(x)$ zu erhalten, müssen wir diese Gleichung zweimal unbestimmt über x integrieren. Unter Anwendung einfacher Regeln für das unbestimmte Integral ergibt sich zunächst:

Auf der linken Seite:

$$\int EI y''(x) dx = EI \int \frac{d}{dx} y'(x) dx = EI y'(x) + c'.$$

Auf der rechten Seite:

$$\int \frac{x}{l} M_B dx = \frac{M_B}{l} \int x dx = \frac{M_B x^2}{2l} + c''.$$

Nach der unbestimmten Integration tauchen die willkürlichen Integrationskonstanten c' und c'' auf. Faßt man diese beiden Konstan-

ten zu $c'' - c' = C_1$ zusammen, dann ergibt sich

$$EI y'(x) = \frac{M_B x^2}{2l} + C_1. \quad (14)$$

Bei einer nochmaligen Integration folgt in der gleichen Weise

$$EI y(x) = \frac{M_B x^3}{6l} + C_1 x + C_2. \quad (15)$$

Hierbei sind C_1 und C_2 willkürliche Integrationskonstanten.

Diese Konstanten werden durch die beiden Randbedingungen

$$y(0) = 0, y(l) = 0 \quad (16)$$

festgelegt. Die Randbedingungen (16) besagen, daß der Träger an seinen Enden A und B starr gelagert ist und somit die Durchbiegungen dort Null sein müssen.

Aus (15) folgt für $x=0$ die Beziehung $C_2=0$

und für $x=l$ die Gleichung $C_1 = -\frac{M_B l}{6}$. Da-

mit lautet die Durchbiegung

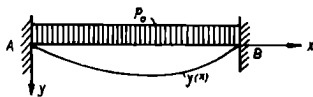
$$y(x) = -\frac{M_B l^2}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (17)$$

Die Biegelinie $y(x)$ des Trägers infolge der Momentenbelastung M_B bei B entsprechend Formel (17) ist ebenfalls in Bild 6 eingezeichnet.

Wir haben mit (17) die Lösung der Differentialgleichung (13) mit den Randbedingungen (16) erhalten. Die Aufgabe, eine Differentialgleichung unter Beachtung gewisser Randbedingungen zu lösen, d. h., diejenige Funktion zu bestimmen, die sowohl der Differentialgleichung als auch den Randbedingungen genügt, heißt Randwertproblem. Solche Randwertprobleme sind auch bei anderen Lagerungsbedingungen an den Trägerenden (Randbedingungen) und anderen Biegemomentenverteilungen (Belastungen) zu lösen. So lautet z. B. die Durchbiegung für einen beiderseits fest eingespannten Träger, der über seine Länge l hin mit einer konstanten Streckenlast $p(x) = p_0 = \text{const.}$ (gemessen in Nm^{-1}) belastet ist (Bild 7):

$$y(x) = -\frac{p_0 l^4}{24EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right). \quad (18)$$

Bild 7



Die zugehörige Biegemomentenverteilung ergibt sich nach (11) zu

$$M(x) = EI y''(x) = -\frac{p_0 l^2}{24} \left(2 - 12\frac{x}{l} + 12\frac{x^2}{l^2}\right) \quad (19)$$

und die Einspannmomente an den Lagerstellen

$$M_A = M(0) = -\frac{p_0 l^2}{12}, \quad M_B = M(l) = -\frac{p_0 l^2}{12}. \quad (20)$$

Wir wollen noch kurz auf die Bedeutung der 1. Ableitung $y'(x)$ von $y(x)$ eingehen. Bekanntlich ist $y'(x)$ der Anstieg der Tangente an die

Kurve $y(x)$ im Punkt x , d. h., wenn $\phi(x)$ der Tangentenwinkel in x ist (Bild 6), so gilt

$$y'(x) = \tan \phi(x) \approx \phi(x). \quad (21)$$

In der letzten Beziehung wurde $\tan \phi(x)$ annähernd durch $\phi(x)$ ersetzt. Das ist bei den von uns angenommenen kleinen Durchbiegungen und damit auch kleinen Tangentenwinkeln möglich, da für kleine Winkel der Wert des Tangens mit dem Winkelwert fast übereinstimmt. Im Rahmen der vorausgesetzten Näherung wird das Zeichen $\approx$ im folgenden durch das Gleichheitszeichen $=$ ersetzt.

Für das Randwertproblem (13), (16) entsprechend Bild 6 ergibt sich unter Beachtung dieser Bemerkungen aus (17) durch Differentiation

$$\phi(x) = y'(x) = -\frac{M_B l}{6EI} \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Uns interessiert insbesondere der Tangentenwinkel am Lager B (Drehwinkel infolge des Drehmoments M_B). Er ergibt sich für $x=l$ zu

$$\phi(l) = \phi_B = \frac{M_B l}{3EI}. \quad \text{Der Quotient von Drehmoment } M_B \text{ und Drehwinkel } \phi_B, \text{ also}$$

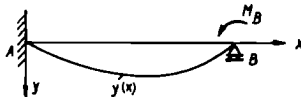
$$c_B = \frac{M_B}{\phi_B} = \frac{3EI}{l} \quad (\text{Lager } A \text{ gelenkig gelagert}) \quad (22)$$

heißt Drehfederkonstante des bei A gelenkig gelagerten Trägers. Sie ist ein Maß für die Steifheit des Trägers am Lager B .

Ähnlich kann man für den bei A fest eingespannten Träger (Bild 8) eine solche Drehfederkonstante errechnen; man erhält

$$c_B = \frac{M_B}{\phi_B} = \frac{4EI}{l} \quad (\text{Lager } A \text{ fest eingespannt}). \quad (23)$$

Bild 8

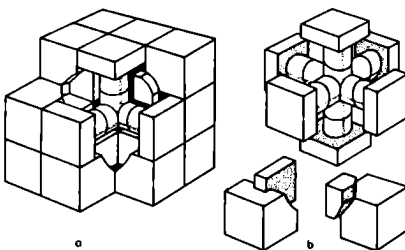


Die Drehfederkonstanten für einen bei A drehelastisch eingespannten Träger liegen zwischen diesen beiden durch (22) und (23) bestimmten Werten. Je stärker die drehelastische Einspannung des Trägers bei A ist, um so steifer ist der Träger am Lager B .

H.-W. Stolle

Der Beitrag wird in Heft 4/83 fortgesetzt.

Blick in das Innere des Rubik-Würfels



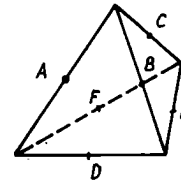
Das magische Figuren-Match

Viele *alpha*-Leser werden sicher mit großer Freude bemerkt haben, daß es inzwischen auch das erste in der DDR produzierte logisch-kombinatorische Spiel gibt. Es handelt sich um ein kleines Tetraeder, das aber nicht parallel zu den Seitenflächen geschnitten ist wie etwa die in *alpha* 1/83 beschriebene magische Pyramide. Auch zur Unterscheidung benutzen wir hier für dieses Spiel die offizielle Bezeichnung *Figuren-Match*.

(Hersteller: VEB Spielwaren-Mechanik Pfaffschwende, Preis 12,- M)

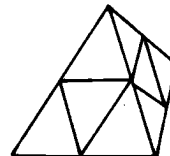
Betrachten wir ein regelmäßiges Tetraeder und bezeichnen die Kantenmittelpunkte mit A, B, C, D, E und F , so beschreiben jeweils die 4 Punkte $ABEF, ACED$ und $BCDF$ eine Ebene. Diese drei Ebenen stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Bild 1



Übrigens sind diese Schnitte gerade Quadrate. Um die Mittelsenkrechten dieser Quadrate als Drehachsen kann man jeweils die beiden Teile des Tetraeders zueinander verdrehen, die durch das entsprechende Quadrat begrenzt werden. Wir haben also 3 Drehachsen und können um jede Drehachse 90° -Drehungen (und Vielfache davon) ausführen. Insgesamt besteht das *Figuren-Match* aus 8 Teilen: 4 Spitzen (3 farbige Seitenflächen) und 4 Mit-

Bild 2



In der Grundstellung sind nun die Seitenflächen des Tetraeders einfarbig (rot, grün, gelb, weiß) gefärbt. (Inzwischen existieren auch Tetraeder mit rot, gelb, weiß und blau.)

Interessant ist nun, daß bei 90° -Drehungen aus dem Tetraeder auch andere Figuren entstehen.

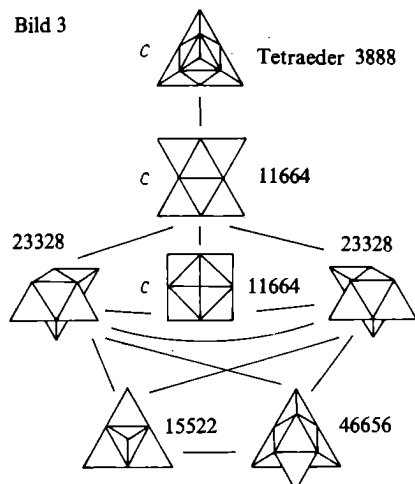
Wir wollen zunächst untersuchen, welche Figuren entstehen und welche durch nur eine

Drehung ineinander überführbar sind. Die Zahlen geben jeweils an, wie viele Möglichkeiten es gibt, die entsprechende Figur durch Drehungen zu färben.

Bemerkenswert ist auch, daß hier alle theoretischen Färbungen (Zusammensetzungen der Figur durch die gegebenen Teile) realisierbar sind. Wir erinnern, daß man bei der magischen Pyramide (α 1/83) z. B. zwei Kantensteine nicht austauschen kann.

Durchweg wollen wir die Tetraeder und Figuren immer als Draufsicht darstellen.

Bild 3



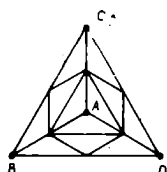
Insgesamt gibt es 136080 Möglichkeiten, das Tetraeder zu verdrehen. Dem Anfänger wird es zuerst sogar etwas Mühe machen, aus einer beliebigen Figur ein Tetraeder zu erreichen. Auch wenn es vergleichsweise hier nur wenig Möglichkeiten gibt, sollte man das Problem nicht unterschätzen. Durch die ungewohnten Schnitte (nicht parallel zu den Seitenflächen) verliert man hier leichter die Übersicht als etwa bei der magischen Pyramide. Dennoch wird es uns mit dem dort beschriebenen Grundprinzip auch hier gelingen, einen Algorithmus zu entwickeln.

Wir wollen uns hier nur überlegen, wie man ein verdrehtes Tetraeder ordnen kann. Hat man eine andere Figur, so kann man ja nach obiger Übersicht mit maximal 3 Drehungen ein Tetraeder erhalten.

Zunächst brauchen wir eine Methode der Beschreibung.

Halten wir z. B. das Teil mit der Kante BC fest und drehen das mit der Kante AD nach rechts, so erreichen wir dieselbe Verdrehung, als wenn wir AD festhalten und BC nach rechts drehen würden.

Bild 4



Nach dieser Überlegung können wir uns auf Drehungen beschränken, bei denen wir die Spitze bei A festhalten und jeweils Teile mit den Kanten BD , DC und BC drehen.

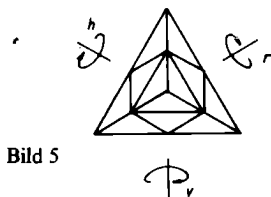


Bild 5

Die Drehungen um 90° bezeichnen wir mit v , r und l , wobei wir darunter immer Drehungen in Uhrzeigerichtung (beim Draufschaun) verstehen wollen. Drehungen um 180° bezeichnen wir mit v^2 , r^2 und l^2 und um 90° links herum mit v^{-1} , r^{-1} und l^{-1} . vr bedeutet dann einfach die Hintereinanderausführung der Drehungen v und r (in dieser Reihenfolge). Auch sei noch erinnert, daß die umgekehrte (inverse) Operation, d. h. die, die genau das Umgekehrte bewirkt, mit z. B. $(vl)^{-1}$ bezeichnet wird und für die gilt $(vl)^{-1} = l^{-1}v^{-1}$, d. h., die Reihenfolge der Operationen und die einzelnen Drehrichtungen sind umzukehren.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir darangehen, einen Algorithmus zum Ordnen des Tetraeders zu beschreiben. Auch hier werden wir schrittweise vorgehen. Zunächst wählen wir eine Spitze aus, die wir als obere Spitze des Tetraeders ständig festhalten werden. Entscheiden wir uns etwa für die Spitze mit den Farben rot, gelb und grün, so halten wir das Tetraeder so, daß diese Spitze oben und seine rote Fläche vorn ist. Dann ist zwangsläufig (zumindestens beim Exemplar des Autors) die hintere rechte Fläche der Spitze gelb und die hintere linke grün gefärbt. Für alle anderen sieben Teile wissen wir nun auch, wo sie in der Grundstellung sein müssen. Zum Beispiel muß unten vorne rechts die Spitze mit den Farben rot, gelb und weiß auftreten. Wir ordnen das Tetraeder in 3 Schritten.

1. Spitzen-Platz

Durch die Drehung v können wir z. B. die beiden Spitzen vorne unten austauschen. Durch nur 2 geeignete Drehungen können wir die 3 unteren Spitzen auf ihre richtigen Plätze bringen. Man beachte, daß die Orientierung der Spitzen noch falsch sein kann.

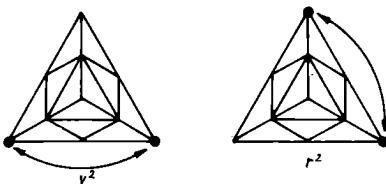


Bild 6

2. Spitzen-Orientierung

Wir drehen die Spitzen auf ihren Plätzen. Dafür geben wir einige Operationen an, die dieses Ziel (bei geeigneter Anwendung) mit

höchstens 6 Drehungen erreicht. Die Buchstaben R und L geben an, wie die Spitzen auf ihren Plätzen gedreht werden. R bedeutet 120° nach rechts, L 120° nach links, wenn man jeweils von oben auf die Spitze schaut, so daß alle 3 Farben sichtbar sind.

Bild 7a

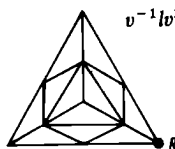


Bild 7b

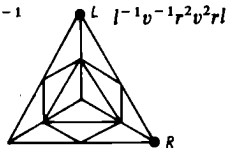


Bild 7c

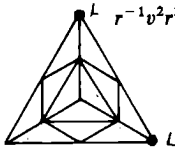


Bild 7d

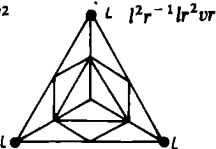
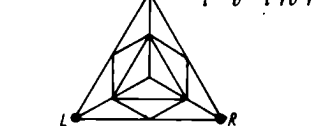


Bild 7e



3. Mitten

Jetzt bringen wir die Mitten auf ihre Plätze, wobei das bisher Erreichte nicht mehr zerstört werden darf. Wir geben einige Operationen an, die dieses Ziel mit höchstens 8 Drehungen erreicht. Eventuell muß man das Tetraeder in der Hand drehen, um eine Situation zu erreichen, die durch eine Operation realisiert wird. Der Punkt außerhalb bezeichne die nicht sichtbare, untere Mitte.

Bild 8a

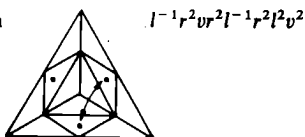


Bild 8b

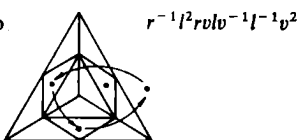


Bild 8c

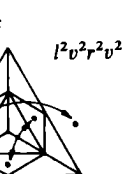
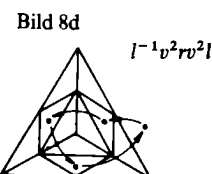


Bild 8d



Damit haben wir das Ziel bereits mit höchstens 16 Drehungen erreicht. Neueste Computer-Untersuchungen des Autors zeigen, daß man bei optimalem Vorgehen stets mit 10 Drehungen auskommt. Sicher werden viele α -Leser andere und auch kürzere Operationen gefunden haben oder finden. Für interessante neue Operationen, Fragen und Hinweise ist der Autor stets dankbar.

H.-D. Gronau

Karl Marx und seine „Mathematischen Manuskripte“

Wir alle kennen Karl Marx als Ökonomen, Philosophen und leidenschaftlichen Streiter für das Glück der Menschen. Weniger bekannt ist, ein wie tiefes Interesse er auch für die Mathematik hatte. Anhand seiner umfangreichen Notizen und Ausarbeitungen (fast 300 Seiten sind als „Mathematische Manuskripte“ 1968 in Moskau veröffentlicht worden) können wir verfolgen, wie mühsam, konsequent und enthusiastisch er sich sein hohes Wissen in dieser Wissenschaft erarbeitete.

Auch auf Gebieten der Mathematik, z. B. in der Differentialrechnung, war er bestrebt, bis zum Wesen vorzudringen. „Es muß also der Witz – das Geheimnis – aufgesucht werden, das in der von uns angewandten Methode liegt“ (S. 464). In der damaligen Darstellungsweise und Begründung war die Differentialrechnung bei weitem nicht so einfach wie heute zu verstehen. Speziell beim *Taylorischen Lehrsatz*¹⁾, durch den der Wert der Funktion an einer bestimmten Stelle näherungsweise mittels höherer Ableitungen an einer benachbarten Stelle beschrieben wird, lesen wir „und es ist hier wie überall wichtig, der Wissenschaft den Schleier des Geheimnisvollen abzureißen“ (S. 192).

Für Marx bedeutete die geistige Auseinandersetzung mit der Differentialrechnung nicht nur ein Eindringen in die damalige Wissenschaft Mathematik, sondern auch einen Rückblick in die Geschichte der Mathematik.

Marx las zahlreiche mathematische Schriften und Lehrbücher. Dabei war es für ihn von großem Nutzen, daß er mehrere Sprachen beherrschte. In seinen Heften führte er seitenlange Rechnungen durch, die er z. T. ausführlich in Worten beschrieb, und auch viele Überlegungen, die ihm dabei durch den Kopf gingen, notierte er – in einer manchmal recht bildhaften Sprache. Beispielsweise schrieb sich Marx einmal auf „sobald h die Höllenfahrt durch 0 passiert hat“ (S. 150), wo wir heute kurz sagen „ h konvergiert gegen 0“ und uns noch kürzer aufschreiben könnten „ $h \rightarrow 0^{(2)}$ “.

Der fundamentale Begriff des Grenzwertes bereitete damals noch Schwierigkeiten. Das übliche recht verschwommene Gerede über „unendlich klein“ gefiel Marx gar nicht, er

mußte sich näher mit der Sache befassen. Das beim Differentiationsprozeß anschaulich auftretende $\frac{0}{0}$ ³⁾ war ein grundlegendes Problem, nämlich noch ein „transzendentes oder symbolisches Unglück“, es „hat aber seine Schrecken bereits verloren, da es nun nur als Ausdruck eines Prozesses erscheint“ (S. 36).

Mit Grenzprozessen hat man es schon im täglichen Leben zu tun. Auch im Altertum beschäftigten Grenzbetrachtungen schon Mathematiker und Philosophen. Man hatte aber immer Schwierigkeiten, mit ihnen so richtig fertigzuwerden.

Newton und Leibniz gelten bekanntlich als die Väter der Differentialrechnung (die aber auch viele Vorväter hatte). Sie schufen, insbesondere auch ausgehend von Problemen der Mechanik und der Geometrie, unabhängig voneinander, einen geeigneten Kalkül, eine „spezifische Rechnungsart, die bereits selbständig auf ihrem eignen Boden operiert“ (S. 56). Dennoch konnte Marx zu Recht noch vom „mystischen Differentialcalculus“ (z. B. S. 164) sprechen. Bis zu der in den heutigen Lehrbüchern üblichen Darstellung war noch ein weiter Weg zurückzulegen. Marx selbst hob die Bedeutung einer für das Denken bequemen Bezeichnungsweise mehrfach hervor. In einem Konспект über Algebra schrieb er bzgl. des Wurzelzeichens „Das Ersetzen dieser Notation durch die von fractional Exponents – großes Verdienst von Descartes – erleichtert alles durch ihre Analogie mit ganzen Exponenten und macht auf sie anwendbar die in den Berechnungen der letzten angewandten Regeln“ (S. 338).

Seine ausführlichen Notizen halfen Marx nicht nur, seine eigenen Gedanken nicht wieder zu vergessen, sondern auch sein Gesprächspartner Engels konnte so den Gedankengängen von Marx gut folgen. 1881 fertigte er für Engels eine Ausarbeitung über den Begriff der abgeleiteten Funktion an (S. 28 bis 45). „Gestern also endlich hab' ich mir die Courage gefaßt, auch ohne Hilfsbücher Deine mathematischen Manuskripte durchzustudieren, und war froh zu sehen, daß ich die Bücher nicht nötig hatte. Ich mache Dir mein Kompliment dazu“ (Brief von Engels an Marx, 18. 8. 1881). Auch En-

gels befaßte sich so ernsthaft mit dem Differentialquotienten, daß er sich selbst im Schlaf nicht davon losreißen konnte: „Die Sache hat mich so erfaßt, daß sie mir nicht nur den ganzen Tag im Kopf herumgeht, sondern ich auch vorige Nacht im Traum einem Kerl meine Hemdsknöpfe zum Differenzieren gab und dieser mir damit durchbrannte“ (ebenda).

Mit Engels verständigte sich Marx nicht nur über Mathematik, sondern auch über viele naturwissenschaftliche Fragen. Die Begründer des wissenschaftlichen Kommunismus hielten das für unbedingt erforderlich für ihre philosophischen und ökonomischen Analysen. Im übrigen war für Marx Mathematik auch einfach eine Quelle der Entspannung. Es wird berichtet, daß er zuweilen Kopfschmerzen durch Nachdenken über mathematische Probleme verdrängte.

M. Deweß

Zum Abschluß eine in seinen Notizen mit Lösungsweg dargelegte unterhaltsame Aufgabe (S. 350).

Aufgabe

▲ 2270 ▲ 30 Personen, darunter Männer, Frauen und Kinder, geben in einer Kneipe 50 sh. (Schilling) aus. Ein Mann gibt jeweils 3 sh., eine Frau 2 sh. und ein Kind 1 sh. aus. Wieviel Männer, Frauen und Kinder waren in der Kneipe?

¹⁾ Er wurde von Taylor (J. Brook) (1685 bis 1731) längst nicht in der heute üblichen Form aufgestellt. Genaue Restglieduntersuchungen spielten erst später eine Rolle. (Siehe z. B. *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, VEB Bibliographisches Institut)

²⁾ Siehe z. B. *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, S. 414ff. oder auch S. 408.

³⁾ Der Pfeil $\rightarrow$ wurde nachweislich 1905 von John Gaston Leathem in diesem Sinne benutzt.

³⁾ Wer z. B. über Descartes, Newton oder Leibniz mehr erfahren möchte, dem seien die „Biographien bedeutender Mathematiker“, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1975, empfohlen.

Aphorismen

Das Zeugnis

Daß Karl Marx trotz allen Arbeitsaufwandes und aller Mühen nicht zu den besten Schülern unter den Abgängern gehörte, bewies sein Zeugnis. Die Mutter betrachtet es mit einigem Mißbehagen. „Und dabei hast du so viel gelesen, armer Bub“, klagte sie.

„Ach was, Mutter, ich will die Welt nicht mit dem Zirkel ausmessen, und für die Gleichungen mit zwei Unbekannten suche ich mir geeignetere Objekte.“

Kurz vor seiner Abiturientenprüfung glich Karl Marx' Klasse einem einzigen Lesesaal. Alle Möbelstücke, Tisch, Stühle und die Lagerstatt waren mit aufgeschlagenen Büchern bedeckt, als hätte er sie alle gleichzeitig gelesen. Die Mutter wußte nicht, wohin sie die Tasse Kaffee stellen sollte. „Karl, mein Junge, überall Bücher, nichts als Bücher. Wird dir nicht manchmal schwindlig von dem ganzen gelehrten Zeug?“ fragte sie bewundernd. „Wenn man ihre Irrtümer und Fehler kennt, verliert man den Respekt vor ihnen“, antwortete Karl seelenruhig.

Blindekuh

Zur Abiturientenfeier im Hause des Geheimrats von Westfalen waren die ausgezeichnetsten Persönlichkeiten der Stadt erschienen. Während sich jedoch die Älteren bei Spiel und Unterhaltung vergnügten, hatte sich die Jugend zum Blindenkuhspiel zurückgezogen. Dabei wurden auch Karl die Augen verbunden. Etwas ungeschickt versuchte er Jennys Hand zu ergreifen, aber sie entglitt ihm immer wieder. Endlich wurde es ihm zu viel. Er riß sich die Binde von den Augen und rief: „Warum soll ich blind nach etwas suchen, was ich besser mit offenen Augen erobern kann.“ Damit ergriff er entschlossen nach Jennys Hand. In dem anschließenden Gespräch gestand Karl dem Mädchen seine kühnen Pläne. „Die Wissenschaft ist ohne Grund und Ende. Und tausend Wege führen zur Wahrheit. Ich will sie alle finden.“ „Das werden Sie“, bestätigte Jenny. „Sie leiden keine Binde vor den Augen wie die meisten Sucher.“

Georg W. Pijet



Karl Marx – seine Töchter nannten ihn nicht „Vater“, sondern „Mohr“, ein Spitzname, den er wegen seines braunen Teints und seines ebenholzschwarzen Haupt- und Barthaars erhalten hatte (nach einer Zeichnung von Nabil El-Solami).

Eulers Beweis für die Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen

Die Fermatsche Vermutung, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ($n > 2$) keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt, wurde für den Fall $n=3$ zuerst von Leonhard Euler bewiesen. (Siehe den Beitrag: „Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung“ in *alpha*, Heft 2/1983, wo auch einige allgemeine Bemerkungen zur Beweismethode stehen.) Sein Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen soll hier in der Originalform aus der 1770 in Petersburg erschienenen *Vollständigen Anleitung zur Algebra* wiedergegeben werden. Der veraltete sprachliche Ausdruck ist nicht modernisiert worden. Als Grundlage dient der Abdruck der „Algebra“ im ersten Band (1911) von Eulers Werkausgabe. In eckigen Klammern werden Anmerkungen hinzugefügt, die das Verstehen des Beweises erleichtern sollen.

Eulers Beweis

Aus: Leonhard Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. (Petersburg 1770.) In: Leonhardi Euleri Opera Omnia (I) 1 (1911).

Lehr-Satz: Es ist nicht möglich zwey Cubos [Kubikzahlen] zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus [eine Kubikzahl] wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wann [wenn] die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müße. Dann wann es unmöglich ist daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3 - y^3 = x^3$, nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz von zwey Cubis. Es ist also genung die Unmöglichkeit bloß von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich [teilerfremd] sind. Dann wann [Denn wenn] sie einen gemeinen [gemeinsamen] Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum deßelben theilen lassen. Wäre z. E. $x = 2a$, und $y = 2b$ so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun x und y keinen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, so sind diese

beyde Zahlen entweder beyde ungerad, oder die eine gerad, und die andere ungerad. Im erstern Falle müßte z gerad seyn; im andern Fall aber müßte z ungerad seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerad und eine gerad. Wir wollen dahero zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wann die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen demnach x und y zwey ungerade [natürliche] Zahlen, so wird so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn. [Es sei etwa $x > y$. Ist $x < y$, so vertausche man x und y . Der Fall $x = y$ ist unmöglich. Da x und y teilerfremd sind, müßte $x = y = 1$ sein, also $z^3 = 2$, was mit natürlicher Zahl z unmöglich ist.] Man setze dahero $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$

[mit natürlichen Zahlen p und q], so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß; dahero aber wird $x^3 + y^3 = [(x+y)(x^2 - xy + y^2)] = 2p(p+q)^2 - (p+q)(p-q) + (p-q)^2 = 2p(p^2 + 3q^2) = 2p(pp + 3qq)$; es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp + 3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(qq + 3pp)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, dahero es genung ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp + 3qq)$ [= Kubikzahl] zu zeigen, weil daraus nothwendig folgt, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp + 3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerad und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine gantze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(pp + 3qq)$. Weil nun von den

Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad ist, so wird $pp + 3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folgt daß sich p durch 4 theilen laßen müße und also $\frac{p}{4}$ eine gantze Zahl sey.

V. Wann [Wenn] nun dieses Product $\frac{p}{4} \cdot (pp + 3qq) \left[\frac{p}{4}(p^2 + 3q^2) \right]$ ein Cubus [eine Kubikzahl] seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$, ein Cubus seyn, so nemlich dieselben keinen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben. Dann wann ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar [teilerfremd] sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wann dieselben aber einen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp + 3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen [gemeinsamen] Theiler, so würden auch diese pp und $pp + 3qq$ eben denselben gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, und also auch ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben; da nun p und q unter sich untheilbar [teilerfremd] sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wann [wenn] sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben dahero zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wann die Factoren p und $pp + 3qq$ $[p^2 + 3q^2]$ keinen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, welches immer geschieht, wann sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt, da dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müßen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$ untheilbar unter sich [teilerfremd], so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns dahero $pp + 3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wann man, wie oben gezeigt worden, setzt $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$. Damit dadurch werde $pp + 3qq = (tt + 3uu)^3$ und also ein Cubus. [Euler benutzt hier den folgenden Hilfssatz. (Erst am Schluß des Beweises soll auf ihn eingegangen werden.)

Satz A: Sind p und q teilerfremde natürliche Zahlen und ist $p^2 + 3q^2 = (p + q\sqrt{-3})(p - q\sqrt{-3})$ eine Kubikzahl, so gilt $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$ mit natürlichen Zahlen t, u .

Aus dem Satz A ergibt sich die angegebene Darstellung von $p^2 + 3q^2$ als Kubikzahl:

$$\begin{aligned} (p + q\sqrt{-3})(p - q\sqrt{-3}) &= p^2 - (q\sqrt{-3})^2 \\ &= p^2 + 3q^2 = (t + u\sqrt{-3})^3 (t - u\sqrt{-3})^3 \\ &= ((t + u\sqrt{-3})(t - u\sqrt{-3}))^3 = (t^2 + 3u^2)^3. \end{aligned}$$

Es gilt also der

Satz B: Ist $p^2 + 3q^2$ eine Kubikzahl, so gibt es natürliche Zahlen t, u so, daß $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$.

Hieraus aber wird

$$p = t^3 - 9tuu = t(tt - 9uu) \text{ und}$$

$$q = 3ttu - 3u^3 = 3u(tt - uu).$$

[In der That, aus

$$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3 \text{ (Satz A), also}$$

$$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})(t^2 + 2tu\sqrt{-3} + 3u^2)$$

$$= (t + u\sqrt{-3})(t^2 + 2tu\sqrt{-3} - 3u^2)$$

$$= t^3 + 3t^2u\sqrt{-3} + 3tu^2(-3) + u^3(-3)\sqrt{-3}$$

$$= (t^3 - 9tu^2) + (3t^2u - 3u^3)\sqrt{-3}$$

folgt durch Vergleich beider Seiten

$$p = t^3 - 9tu^2, q = 3t^2u - 3u^3.$$

(Für das Rechnen mit Zahlen der Form $t + u\sqrt{-3}$ sei auf das folgende Buch verwiesen: H. Pieper, Die komplexen Zahlen. Theorie – Praxis – Geschichte. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. – Mathematische Schülerbücherei Nr. 110.)

Es gilt also der

Satz C: Es seien t, u natürliche Zahlen. Aus

$$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3 \text{ folgt}$$

$$p = t^3 - 9tu^2, q = 3t^2u - 3u^3.$$

Zusammen mit dem Satz A bedeutet dies den

Satz D: Ist $p^2 + 3q^2$ (mit teilerfremden p, q) eine Kubikzahl, so gibt es natürliche Zahlen t, u so, daß $p = t^3 - 9tu^2, q = 3t^2u - 3u^3$.

Weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerad, t aber gerad seyn, weil sonst $tt - uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp + 3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden

$$p = t(tt - 9uu) = t(t + 3u)(t - 3u),$$

so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein

Cubus seyn; dahero diese Formel $2t(t + 3u)(t - 3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist.

[Da t gerade und u ungerade ist, sind $t + 3u$ und $t - 3u$ beide ungerade. Ein gemeinsamer Teiler d von $2t, t + 3u$ und $t - 3u$ wäre auch gemeinsamer Teiler von $t, t + 3u$ und $t - 3u$, also auch gemeinsamer Teiler von $t, 3u = (t + 3u) - t, -3u = (t - 3u) - t$. Es kommt höchstens $d = 3$ in Frage. Aber 3 ist kein Teiler von t ; folglich ist $d = 1$. Ein gemeinsamer Teiler e von $t + 3u$ und $t - 3u$ ist auch Teiler von $2t = t + 3u + t - 3u$, woraus wieder $e = 1$ folgt.]

Also sind diese drey Factoren $2t, t + 3u$ und $t - 3u$ unter sich untheilbar [teilerfremd], und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze dahero $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$ so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus $[2t = h^3]$, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre $[f^3 + g^3 = h^3]$,

welche offenbahr ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3 . Dann nachdem wir gesetzt haben $x = p + q$ und $y = p - q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müßen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u .

IX. Wann es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleineren Zahlen eben dergleichen anzeigenden deren Summ auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewis nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir so gleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p = 3r$ so wird unsere Formel $\left[\frac{p}{4}(p^2 + 3q^2) \right]$

$$\frac{3r}{4} \cdot (9rr + 3qq), \text{ oder } \frac{9}{4} r(3rr + qq),$$

welche beyde Factoren unter sich untheilbar [teilerfremd] sind, weil sich $3rr + qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben so wohl gerad seyn muß als p , deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr + qq$ oder $qq + 3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q = t(tt - 9uu)$ und $r = 3u(tt - uu)$; wo zu merken, daß weil q ungerad war, hier auch t ungerad, u aber eine gerade Zahl seyn müße.

[Hier wird noch einmal der Satz A benutzt. Sind q und r teilerfremde natürliche Zahlen und ist $q^2 + 3r^2 = (q + r\sqrt{-3})(q - r\sqrt{-3})$ eine Kubikzahl, so gilt $q + r\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $q - r\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$ mit natürlichen Zahlen t und u . Hieraus folgt (wie oben)

$$\begin{aligned} q + r\sqrt{-3} &= (t^3 - 9tu^2) + (3t^2u - 3u^3)\sqrt{-3} \\ \text{und daraus durch Vergleich beider Seiten} \\ q &= t^3 - 9tu^2 = t(t^2 - 9u^2), \\ r &= 3t^2u - 3u^3 = 3u(t^2 - u^2). \end{aligned}$$

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt - uu) = 2u(t + u)(t - u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar [teilerfremd] und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wann man aber setzt $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre; dann man darf nur setzen $f^3 - g^3 = h^3$, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also

hätte man zwei Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätigt, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

Der Hilfssatz

Im Teil VII des Beweises wird zunächst festgestellt, daß $p^2 + 3q^2$ eine Kubikzahl (ein Cubus) sein müßte. Dann heißt es weiter, daß $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus gemacht werden soll. Aus früheren Ausführungen Eulers kann man schließen, daß Euler folgendes meint: „Wir wollen p und q suchen, für die $p^2 + 3q^2$ Cubus ist.“ Hier gilt sicher

Satz E: Setzt man $p = t^3 - 9tu^2$, $q = 3t^2u - 3u^3$ mit gewissen natürlichen Zahlen t, u , so wird $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$ ein Cubus.

Um dies einzusehen, brauchen wir die folgende (leicht nachzuprüfende) Identität:

$(t^2 + 3u^2)(v^2 + 3w^2) = (tv - 3uw)^2 + 3(tw - uv)^2$.
(Das Produkt von Zahlen der Form $t^2 + 3u^2$ ist wieder von dieser Form!)

Nun ist $(t^2 + 3u^2)^3 = (t^2 + 3u^2) [(t^2 - 3u^2)^2 + 3(2tu)^2]$; unter Benutzung der angegebenen Identität (mit $v = t^2 - 3u^2$, $w = 2tu$) folgt hieraus tatsächlich

$$(t^2 + 3u^2)^3 = [(t^2 - 3u^2) - 3u(2tu)]^2 + 3[(t^2 - 3u^2) + u(2tu)]^2 = (t^3 - 9tu^2)^2 + 3(3t^2u - 3u^3)^2 = p^2 + 3q^2,$$

was zu zeigen war.

Daß auf die im Satz E gegebene Weise sogar alle teilerfremden p, q erfaßt werden, für die $p^2 + 3q^2$ Cubus ist, besagt der oben angegebene

Satz D: Ist $p^2 + 3q^2$ eine Kubikzahl (mit teilerfremden p, q), so gibt es natürliche Zahlen t, u so, daß $p = t^3 - 9tu^2$, $q = 3t^2u - 3u^3$.

Betrachten wir zusammenfassend die drei wesentlichen hier auftretenden Aussagen (darin seien p und q teilerfremde natürliche Zahlen):

R: Es existieren natürliche Zahlen t, u so, daß $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$.

S: Es existieren natürliche Zahlen t, u so, daß $p = t^3 - 9tu^2$, $q = 3t^2u - 3u^3$.

T: $p^2 + 3q^2$ ist eine Kubikzahl.

Diese drei Aussagen sind äquivalent (jede folgt aus jeder anderen):

Wenn R, so S. (Satz C; bewiesen.)

Wenn S, so T. (Satz E; bewiesen.)

Wenn T, so R. (Satz A; unbewiesen.)

Der Eulersche Ansatz

$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ liefert also alle p, q , für die $p^2 + 3q^2$ eine Kubikzahl ist. Euler wußte sicher, daß er alle p, q erfaßte, ohne dies ausdrücklich zu erwähnen.

Er schrieb nur: „Laßt uns dahero $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubo machen [wir wollen p und q suchen, für die $p^2 + 3q^2$ Cubus ist], welches [vollständig] geschieht, wenn man, wie oben gezeigt worden, setzt $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$.“ (Das Adverb „vollständig“ fehlt bei Euler.)

Der folgende Satz: „Damit dadurch werde $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$ und also ein Cubus“, also Satz B, ist für den weiteren Gedankengang überflüssig.

Unklar bleibt Eulers Hinweis: „wie oben gezeigt worden“.

Vorangegangene Artikel der Algebra, auf die sich dieser Hinweis bezieht, werden nicht genannt und lassen sich (wie G. Bergmann 1965 analysierte) auch nicht finden. An dieser Stelle ist Eulers Algebralehrbuch unvollständig.

Von den vier Sätzen, Satz A (wenn T, so R), Satz C (wenn R, so S), Satz E (wenn S, so T), Satz D (wenn T, so S) sind bisher nur die Sätze C und E bewiesen. Satz A ist unbewiesen. Ist Satz A bewiesen, so auch Satz D. Der Satz D ist der entscheidende Satz in der Eulerschen Beweiskette. Es gibt somit zwei Möglichkeiten:

I. Es wird der Satz D direkt bewiesen (was elementar möglich ist).

II. Es wird der Satz A bewiesen; aus dem Satz A folgt der Satz D.

Euler benutzte offenbar den Satz A, machte also einen „Umweg“ über Summen der Form $t + u\sqrt{-3}$. (Hier wurden erstmals komplexe Zahlen in der Zahlentheorie benutzt!)

Wir bezeichnen mit M die Menge aller Zahlen der Form $t + u\sqrt{-3}$ (t, u ganze Zahlen). In M gelten einige analoge Eigenschaften, wie in der Menge N der natürlichen Zahlen. Die Summe zweier Zahlen aus M ist offenbar wieder eine Zahl aus M .

Das Produkt zweier Zahlen aus M ist wieder eine Zahl aus M :

$$(t + u\sqrt{-3})(v + w\sqrt{-3}) = (tv - 3uw) + (tw + uv)\sqrt{-3}.$$

Eine im Beweis mehrmals benutzte Eigenschaft natürlicher Zahlen ist die folgende:

(K) Das Produkt aus zwei teilerfremden natürlichen Zahlen ist nur dann eine Kubikzahl, wenn jede der beiden Zahlen Kubikzahlen sind.

Die analoge Eigenschaft für Zahlen aus M wäre:

(K') Das Produkt aus zwei „teilerfremden“ Zahlen aus M ist nur dann eine Kubikzahl, wenn jede der beiden Zahlen Kubikzahlen in M sind.

Wäre diese Eigenschaft richtig, so könnte man wie folgt weiter schließen: $p^2 + 3q^2 = (p + q\sqrt{-3})(p - q\sqrt{-3})$ ist nach Voraussetzung eine Kubikzahl in $N \subset M$; besitzen $p + q\sqrt{-3}$ und $p - q\sqrt{-3}$ keinen gemeinsamen „Teiler“ in M , so müssen $p + q\sqrt{-3}$ und $p - q\sqrt{-3}$ Kubikzahlen in M sein:

$$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3, \\ p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3.$$

Vielleicht ist hier das Motiv für Eulers Übergang zu den komplexen Zahlen zu suchen!

Doch ein Analogieschluß ist kein Beweis!

Für den Beweis von (K) benutzt man den Satz, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig (das ist wichtig!) als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.

(Einen Beweis dieses Satzes findet man z. B. in: H. Pieper, Zahlen aus Primzahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Schülerbücherei Nr. 81, 1. Kapitel.)

In der Menge M gilt eine analoge Eigenschaft nicht; die Zerlegung in „unzerlegbare Zahlen“ („Primzahlen“) aus M ist nicht eindeutig!

Beispielsweise gilt $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$, worin (wie man zeigen kann) 2, $1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$ in M unzerlegbare Zahlen („Primzahlen“) sind.

Und doch ist der Satz A richtig. In einer 1763 gedruckten Arbeit bewies Euler Sätze über Zahlen der Form $p^2 + 3q^2$ (mit teilerfremden p, q), aus denen unschwer der Satz A folgt. (Doch darauf kann hier nicht mehr eingegangen werden.)

Es sei noch folgendes bemerkt: Es gibt eine für den Beweis von Satz A geeignete Menge M^* komplexer Zahlen, in der die Zerlegung in „Primzahlen“ aus M^* eindeutig ist. Um diese Zahlen zu erklären, werde die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ betrachtet.

Die Gleichung $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ hat die drei Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = \varrho$, $x_3 = \varrho^2$, wobei $\varrho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ und $\varrho^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

ist. Die Menge M^* bestehe nun aus allen (komplexen) Zahlen der Form $a + b\varrho$ (mit ganzen Zahlen a, b). Diese Zahlen wurden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von C. F. Gauß, C. G. J. Jacobi und G. Eisenstein untersucht. Sie werden meist als Eisensteinsche Zahlen bezeichnet.

Jede Zahl $a + b\varrho$ kann dadurch, daß man für ϱ den Wert einsetzt, auf die Form $\frac{t + u\sqrt{-3}}{2}$

gebracht werden (t, u sind darin gleichzeitig gerade bzw. ungerade ganze Zahlen) und umgekehrt. In der Menge M^* ist (wie man beweisen kann) die Zerlegung in „Primzahlen“ eindeutig.

Die Zahl 4 kann man in M auf zwei verschiedene Arten in „Primzahlen“ zerlegen. In M^*

sind die Zahlen $+1, -1, \varrho = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, -\varrho,$

$-\varrho^2$ Einheiten (sie entsprechen den Zahlen $+1, -1$ bei den ganzen Zahlen). Die Zerlegung in „Primzahlen“ ist in M^* (bis auf Einheiten) eindeutig. Die Zerlegungen $4 = 2 \cdot 2$ und $4 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ sind „dieselben“, da sie sich nur um Einheiten als Faktoren unterscheiden:

$$1 + \sqrt{-3} = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = 2 \cdot \varrho,$$

$$1 - \sqrt{-3} = 2 \cdot \varrho^2.$$

Kennt man die Arithmetik der Eisensteinschen Zahlen, so ist der Satz A leicht zu beweisen.

Aus Eulers Idee der Ausdehnung der Zahlentheorie auf gewisse (nämlich algebraische) komplexe Zahlen hat sich im 19. Jahrhundert eine neue mathematische Disziplin, die algebraische Zahlentheorie, entwickelt.

H. Pieper

Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei Leonhard Euler

Die ältesten überlieferten mathematischen Texte zeigen, daß sehr früh schon neben den von der Praxis der Arbeit, des Bauens, des Lohnes, der Verteilung von Feldern und Nahrungsmitteln, des Handels und des Tausches, des Wiegens und Messens gestellten Problemen sich andere Aufgaben großer Beliebtheit erfreut haben, die wir als mathematische Rätsel oder mathematische Unterhaltungsaufgaben bezeichnen können. Sie sollten, wie ihre Verbreiter gelegentlich ausdrücklich sagten, der *Schärfung des Verstandes* dienen, stellten also eine Art Denksportaufgaben dar. Auch in den dem täglichen Leben entnommenen Aufgaben treten manchmal praxisfremde Bruchteile von Menschen und Tieren oder von Geldstücken auf, aber die Aufgabenstellung selbst ist praxisnahe. Anders bei den Unterhaltungsproblemen – hier entspricht der Einkleidung z. B. bei Verfolgungsaufgaben („Achilles und die Schildkröte“) keine Realität.

Gerade diese Art Aufgaben aber erlaubt es, Schlüsse auf gegenseitige Abhängigkeiten der Aufgabensteller und das *Wandern* der Probleme zu ziehen, während dies bei den von der gesellschaftlichen Praxis, die bei gleichartigen Produktionsverhältnissen gleich oder doch annähernd gleich ist, veranlaßten Problemstellungen selten und nur dann möglich ist, wenn in den Aufgaben gleiche, und zwar nicht zu einfache Zahlenwerte enthalten sind.

Auf welchem Wege sich die dem Training des Geistes dienenden Unterhaltungsaufgaben in der alten Welt verbreitet haben, ob durch Handelskarawanen, durch Reisende, Kriegsgefangene oder Schiffbrüchige, wissen wir im einzelnen nicht. Tatsache ist, daß solche Probleme überall auftauchten und sich erstaunlich lange gehalten haben. Sogar bei *Leonhard Euler* finden wir in seiner zuerst in deutscher Sprache 1770 erschienenen berühmten *Vollständigen Anleitung zur Algebra* (siehe *alpha-Wettbewerb*, Heft 2/83) derartige Beispiele. Jenes Lehrbuch, das in viele Sprachen übersetzt und noch in der Gegenwart neu aufgelegt worden ist, hatte der erblindete *Euler* einem ehemaligen Schneidergesellen ohne wissenschaftliche Vorbildung diktiert, um sich von der Verständlichkeit der Darstellung zu überzeugen. Von *Euler* haben solche

Standardaufgaben ihren Weg in viele Rechenbücher bis an unsere Tage heran gefunden und sind so am Leben geblieben.

Das erste von uns hier gebrachte Beispiel wird in der mathematikhistorischen Literatur nach seiner häufigen Einkleidung das *Problem der 100 Vögel* genannt. Zuerst ist es in China im Anfang des 3. Jahrhunderts nachweisbar, danach bei den Indern (3. Jh.), dann gelangte es über die Araber (um 900) nach Europa und Byzanz. In einem byzantinischen Rechenbuch des 15. Jh. findet es sich in folgender Form:

▲1▲ a) Ein Herr sandte seinen Diener aus, er solle ihm Vögel dreierlei Art, Tauben, Turteltauben und Sperlinge kaufen. Es kostete die Taube 4 Weißmünzen, die Turteltaube 2 und von den Sperlingen kamen auf die Weißmünze drei. Und er gab ihm 100 Weißmünzen, daß er 100 Vögel kaufe, weder mehr noch weniger. Ich will wissen, wieviel er von jeder Art kaufen wird.

Euler bringt die Aufgabe im Abschnitt *Von der unbestimmten Analytik* in dieser Fassung:

▲1▲ b) Jemand kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 100 Taler. Nun kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Taler, eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Taler und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Taler. Wie viele sind es von jeder Gattung?

L. Euler (nach J.-G. Brucker, 1737)



Euler behandelte das Problem im Anschluß an *Bachet de Méziriac* (Lyon 1612), der die Ganzzahligkeit der Lösung verlangt hatte.

Eine weitere alte Aufgabe, die wir vorstellen wollen und die zu einer mit *Der Wächter im Apfelparten* bezeichneten Gruppe gehört, führt *Euler* in seinem Abschnitt *Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung* vor. Wir zitieren zunächst wieder die Fassung in jenem byzantinischen Rechenbuch, weil dort die Aufgabe in der Einkleidung gebracht wird, der sie ihre Einordnungsbezeichnung verdankt.

▲2▲ a) Es war ein Mann mitten in einem Garten, und jener Garten hatte vier Tore, und es bestand die Vorschrift, wenn er aus allen den Toren herausgehen wollte, solle er so viele Silberstücke mitnehmen, daß er dann an jedem Tor die Hälfte abgebe und ein halbes Silberstück mehr – damit er kein Silberstück zerteilen müsse – und daß ihm dann, wenn er aus allen den Toren herausgegangen sei, 1 Silberstück übrigbleibe. Wie viele Silberstücke mußte er mitnehmen?

Bei *Euler* findet sich eine entsprechende Aufgabe als Forderung nach Verteilung einer Erbschaft, und er sagte, sie sei „von einer ganz besonderen Art und verdient beachtet zu werden“:

▲2▲ b) Ein Vater hinterläßt einige Kinder und ein Vermögen, das die Kinder in folgender Art unter sich teilen: Das erste nimmt 100 Taler und dazu den zehnten Teil des Restes. Das zweite nimmt 200 Taler und dazu den zehnten Teil des nunmehr erhaltenen Restes. Das dritte nimmt 300 Taler und dazu den zehnten Teil des verbliebenen Restes. Das vierte nimmt 400 Taler und dazu den zehnten Teil des verbliebenen Restes usw. Hierauf stellt sich heraus, daß das ganze Vermögen gleichmäßig verteilt worden ist. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen war, wie viele Kinder der Vater hinterließ und wieviel jedes bekam.

Ob das Erbschaftsproblem zuerst bei den Arabern oder in Europa bzw. in Byzanz gestellt worden ist, läßt sich nicht sagen. Belegt ist indessen, daß die Aufgabe in der *Apfelparten*-bzw. anderen Einkleidungen zuerst in China (um 250, nach alten Vorlagen), dann in Armenien (um 700) auftrat, danach bei den Indern (um 900) und Arabern (um 1000) gestellt wurde und von den letzteren ihren Weg in die mittelalterlichen Rechenaufgabensammlungen Europas (z. B. *Leonardo Fibonacci von Pisa*, um 1200) und von Byzanz gefunden hat.

Wir haben es also *Euler* zu verdanken, daß die Tradition der Unterhaltungsmathematik mit neuem Leben erfüllt wurde und das unterhaltensame Element des Rätsels mit dem nützlichen Element der Anwendung und Ausbildung mathematischen Wissens verbunden blieb.

K.-R. Biermann

Das Fünfzehnerspiel

In den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts breitete sich in der ganzen Welt ein Geduldsspiel wie eine Seuche aus – etwa so wie heute der *Ungarische Würfel*. Es war das *Fünfzehnerspiel*, in Deutschland damals auch unter dem Namen *Boss Puzzle* bekannt. Ein Zeitgenosse, der Mathematiker H. Schubert, berichtete: „Monatelang bildeten die an dieses Spiel sich anknüpfenden Erörterungen eine stehende Rubrik in Journalen und Zeitungen. Selbst in Straßenbahnwagen konnte man die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen. Unternehmende Wirte luden zu einem Boss-Puzzle-Turnier ein, in welchem ein vom Wirt gestelltes Problem gegen Auszahlung einer hohen Belohnung gelöst werden sollte.“ Schubert erinnerte sich auch, daß in Hamburg „die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlefieber ihrer Angestellten in Verzweiflung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit aufs strengste verbieten mußten.“ Bei S. Günther können wir lesen, „daß um 1880 im Deutschen Reichstagsssaale auf den Bänken an der Wand Abgeordnete aller Richtungen, darunter würdevolle alte Herren, saßen, die den Rednern gar keine Aufmerksamkeit schenkten, aber eifrig *boss puzzle*ten.“

Soll man nun Schlüsse bezüglich der Reden oder mancher Abgeordneten ziehen? In zahlreichen Artikeln wurde das Spiel mathematisch behandelt, vor allem in den Jahren von 1879 bis 1883, wobei besonders Woolsey Johnson und William E. Story sowie H. Schubert zu nennen wären. Wer das Fünfzehnerspiel noch nicht kennen sollte, ist bestimmt neugierig geworden, was für ein Spiel solche Spielleidenschaft hervorgerufen hatte:

Fünfzehn mit den Zahlen von 1 bis 15 versehene Steine $S_1, \dots, S_{15}$ werden willkürlich in ein quadratisches Kästchen hineingelegt, so daß ein Feld F frei bleibt. (Die 16 Felder

Bild 1

F1	F2	F3	F4
F5	F6	F7	F8
F9	F10	F11	F12
F13	F14	F15	F16

dieses Kästchens wollen wir entsprechend Bild 1 durchnummerieren.) Lediglich durch Verschieben (nicht Herausnehmen!) der Steine soll nun versucht werden, die Stellung auf Bild 2, die wir Stellung I nennen wollen, zu erreichen: S_1 auf F_1 , S_2 auf F_2 , ..., S_{15} auf F_{15} , F_{16} bleibt unbesetzt.

Bild 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Im Sonntagsblatt einer New Yorker Zeitung bot Samuel Loyd, der als Erfinder dieses Spiels gilt, einen Preis von 1000 \$ für die Lösung des folgenden Problems an: Die Stellung II (Bild 3), in der gegenüber der Stellung I nur S_{14} und S_{15} vertauscht sind, soll nur durch Verschieben in die Stellung I überführt werden.

Bild 3

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Als der Verleger zögerte, soll sich Loyd ohne weiteres bereit erklärt haben, den Betrag aus seiner eigenen Tasche zu hinterlegen. Tatsächlich gab es auch niemanden, der diesen Preis in Empfang nehmen konnte, „obgleich Tausende von Leuten behaupteten, die gestellte Aufgabe gelöst zu haben. ... Das Geheimnis des Puzzles liegt in der Tatsache, daß sich niemand, der es gelöst hat, nachträglich daran zu erinnern vermag, wie die Lösung zustande gekommen ist. ... Ein bekannter Zeitungsmann aus Baltimore berichtete, daß er mittags sein Büro verließ, um essen zu gehen – und von seinen entsetzten Angestellten lange nach Mitternacht aufgefunden wurde, wie er auf einem Teller kleine Tortenstückchen herumschob.“

Wer Lust hat, kann sich ja aus kleinen Pappquadraten ein Fünfzehnerspiel schnell herstellen und es auch einmal versuchen. Oder man nimmt ein handelsübliches *Schiebefax* und versucht es einmal umgekehrt, nämlich aus der Stellung I die Stellung II zu erhalten. Nach einigem Probieren kommt ihr bestimmt zu dem Schluß, daß hier gilt: Studieren geht über Probieren! Immerhin gibt es mehr als 1 Billion Möglichkeiten ($15! = 1\,307\,674\,368\,000$), die 15 Steine im Kästchen so anzuordnen, daß F_{16} leer ist, und mehr als 20 Billionen ($16! = 20\,922\,789\,888\,000$) Möglichkeiten gibt es, die Steine im Kästchen zu verteilen, wenn es keine Rolle spielt, wo sich das Leerfeld befindet. (Wenn wir annehmen, daß das Verschieben in eine neue Stellung zwei Sekunden dauert, dann müßten wir

mehr als 1 Million Jahre ohne Unterbrechung nur Spielsteine schieben, um alle Stellungen einmal zu erhalten – mal ganz abgesehen davon, daß die Sache noch einen theoretischen Haken hat.)

Versuchen wir es doch einmal mit einem Dreier-Spiel, denn dort haben wir nur $4! = 24$ Möglichkeiten, die drei Steine mit den Nummern 1, 2 und 3 im 2×2 -Kästchen anzuordnen. Probiert doch einmal aus, was für Stellungen ihr aus der in Bild 4 gezeigten Anordnung nur durch Verschieben erhalten könnt. Ihr habt festgestellt, daß es gar nicht 24, sondern nur 12 sind. Die Stellung von Bild 5 habt ihr z. B. nicht erhalten. Fangen wir von dieser Stellung ausgehend an herumzuschieben, so erhalten wir die restlichen 12.

Bild 4

1	2
3	

Bild 5

1	3
2	

Damit haben wir zwar für das 4×4 -Kästchen unseres Fünfzehnerspiels noch nichts bewiesen, aber es kommt die Vermutung auf, daß es dort vielleicht ähnlich ist, daß auch hier die Stellung I nur aus der Hälfte aller Stellungen erreicht werden kann, es also Aufgaben gibt, die unlösbar sind. Loyd konnte sich seiner Sache auch sicher sein, denn das genannte Problem von ihm gehörte zur Menge der unlösbaren Aufgaben. Unglücklicherweise hatte er auch dem Beamten des Patentamtes eine unlösbare Aufgabe unterbreitet. Den Vorschriften gemäß mußte er, um ein Patent auf das von ihm erfundene Spiel erhalten zu können, ein *Arbeitsmodell* vorlegen. Als sich der Beamte nach der Lösbarkeit der ihm gestellten Aufgabe erkundigte, mußte Loyd zugeben, daß dies unmöglich ist. „In diesem Fall“, so lautete die Antwort, „kann von einem Arbeitsmodell nicht die Rede sein, und wenn kein Arbeitsmodell vorliegt, gibt es auch kein Patent.“

Nach dem Spielen im 2×2 -Kästchen könnte man auf die Idee kommen, es einmal mit einem 3×3 -Kästchen zu versuchen. Wegen der $9! = 362\,880$ Anordnungsmöglichkeiten der 8 Steine lassen wir das aber lieber sein und versuchen es besser mit einem 2×3 -Kästchen. In diesem Fall gibt es zwar 720 Möglichkeiten, aber vielleicht nützt uns dessen Studium schon etwas, auch wenn wir nicht alle Möglichkeiten durchprobieren. Wir haben hier also 5 Steine $S_1, \dots, S_5$ und 6 Felder $F_1, \dots, F_6$, die analog zu Bild 1 numeriert seien. Wir wollen die Felder F_1, F_2, F_4, F_5 als „linkes Quadrat“ und die Felder F_2, F_3, F_5 sowie F_6 als „rechtes Quadrat“ bezeichnen. Ausgehend von einer beliebigen Anfangsstellung können wir es immer so einrichten, daß S_4 auf F_1 kommt und F_4 durch irgendeinen anderen Stein besetzt ist.

Lösungen



Lösung zur Aufgabe aus: Korbbogenkonstruktion

Der Mittelpunkt M_0 des verbindenden Kreisbogens s_0 muß nach Forderung der Aufgabe auf dem Durchmesser (AB) liegen, da andernfalls eine Knickstelle in A und entsprechend in B auftreten würde. Ferner muß die Übergangsstelle von s_0 nach k_2 im Schnittpunkt der Verbindungsgeraden (M_0M_2) mit k_2 liegen. Ist r_0 der zu s_0 gehörige Krümmungsradius, dann muß für das rechtwinklige Dreieck $M_0M_1M_2$ nach dem pythagoreischen Lehrsatz die folgende Gleichung erfüllt sein:

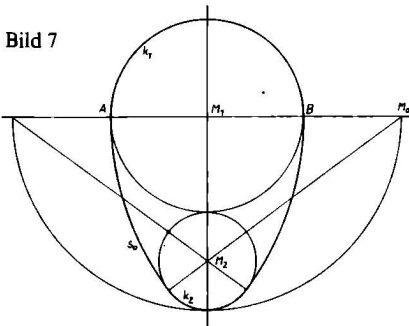
$$(r_0 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_0 - r_1)^2$$

Wegen $r_1 = 2r_2$ folgt als Lösung aus dieser Gleichung für r_0 :

$$r_0 = 3r_1$$

Bild 7 zeigt die konstruktive Auswertung dieses Ergebnisses.

Bild 7



Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Teilbarkeitsregel

a) $xx \cdot 1983 : 101 = xxx3$

Das Ergebnis muß die Einerstelle 3 haben und 4stellig sein. Beginnend mit der letzten Zeile ergibt sich eindeutig folgende Lösung:

$$\begin{array}{r} 371983 : 101 = 3683 \\ 303 \\ \hline 689 \\ 606 \\ \hline 838 \\ 808 \\ \hline 303 \\ 303 \\ \hline 0 \end{array}$$

Die beiden Ziffern heißen 37.

b) $1983x_1x_2 : 101 = 196x_2$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \hline 973 \\ 909 \\ \hline 64x_1 \\ 606 \\ \hline x_30x_2 \\ x_30x_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

x_1 muß 6 sein, da im Rest (Zeile 7) die 0 steht; damit muß $x_3 = 4$ sein und also x_2 ebenfalls 4.

$$198364 : 101 = 1964$$

Die beiden Ziffern heißen 64.

Kannenknobelei

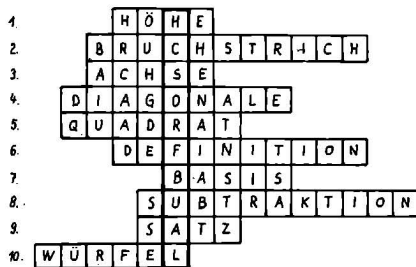
Die 21 Milchkannen werden folgendermaßen verteilt:

LPG 1 = 3 volle, 1 halbvoll, 3 leere Kannen;

LPG 2 = 3 volle, 1 halbvoll, 3 leere Kannen;

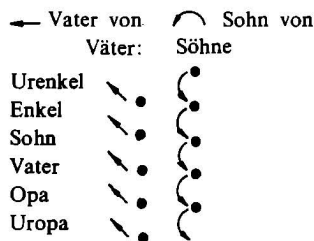
LPG 3 = 1 volle, 5 halbvoll, 1 leere Kanne(n).

Rätselspaß



Lösungswort: Laubfrosch

Auf Pilzsuche



Zahlenpyramide

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 9 = 9 \\ 12 \cdot 9 = 108 \\ 123 \cdot 9 = 1107 \\ 1234 \cdot 9 = 11106 \\ 12345 \cdot 9 = 111105 \\ 123456 \cdot 9 = 1111104 \\ 1234567 \cdot 9 = 11111103 \\ 12345678 \cdot 9 = 111111102 \\ 123456789 \cdot 9 = 1111111101 \end{array}$$

Welcher Beruf? Welches Studenthema?

EDV-Facharbeiter; Instandhaltungsmechaniker – Winkelmessung; Dezimalbrüche

Rundreiseproblem

Route	Länge der Route
12341	58
12431	49
13241	49
13421	49
14231	49
14321	58

Das Optimum liegt bei 49, und dieser Wert wird durch vier Routen realisiert.

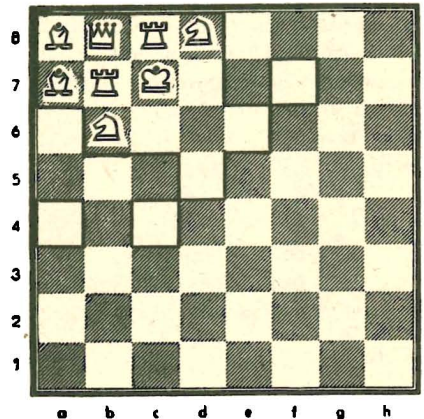
Rätselfigur

1. Senner/Rennes, 2. Essen/Nesse, 3. Gras/Sarg, 4. mod/Dom, 5. Esel/Lese, 6. Nebel/Leben, 7. Tannat/Tannat, 8. TP/Pt, 9. sie/Eis, 10. Ruma/Amur, 11. Neger/Regen, 12. Lies/Seil, 13. Rho/Ohr, 14. Mn/Nm. Kontrollbegriffe: Segment, Pearson.

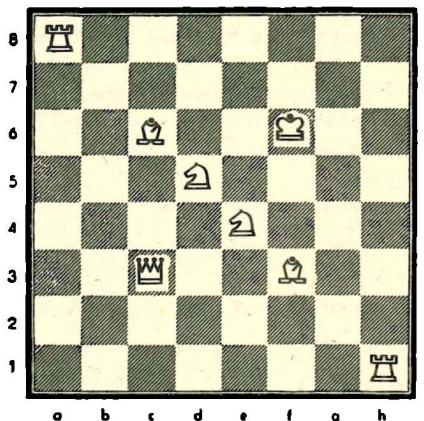
Lösungen zu:

Wirkungskraft der Schachfiguren

a) Noch 16 Felder können die acht Figuren im Minimalfall beherrschen. Eine mögliche Figurenaufstellung zeigt Diagramm 1. Diese Stellung ist natürlich durch Spiegelungen auch in den anderen Brettecken möglich.



b) 64 Felder besitzt das Schachbrett, und alle 64 Felder können von diesen acht Figuren beherrscht werden! Die Figurenaufstellung zeigt Diagramm 2. Auch hier sind Spiegelungen durchführbar. Es mußten für die Lösung die beiden Läufer auf gleichfarbige Felder, was ja erlaubt war, gestellt werden. Die Aufstellung mit Läufern auf unterschiedlicher Feldfarbe läßt nur ein Maximum von 63 Feldern zu. Hier eine Lösungsmöglichkeit: Kf5, Dh2, Ta7, Tb8, Ld4, Le4, Se3, Sf3. Das Feld c1 bleibt unbedroht.



Lösungen zu: Für den Sprachfreund

Zahlenstern

▲ 1 ▲ Schreibt alle Zahlen von 1 bis 10 so in die Kreise auf der sternförmigen Linie, daß

die Summe der Zahlen in zwei beliebigen benachbarten Kreisen weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar ist!

Lösung: Man erhält eine zweite Lösung, wenn die Zahlen 1 und 10 ihre Plätze tauschen.

Kryptarithmetik

▲ 2 ▲ Ein beliebtes Geduldsspiel ist, irgendeinen Namen oder ein bekanntes Sprichwort zu nehmen und damit eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe zu bilden. Es ist oft notwendig, eine zusätzliche Bedingung einzufügen, um eine eindeutige Antwort zu erhalten. Beispiel (s. englischen Text). (Beachte, daß O ein Buchstabe ist!) Jeder Buchstabe bedeutet eine unterschiedliche Ziffer, und SOW ist ein vollständiges Quadrat. Eine maßgebende Voraussetzung ist, daß der linke Endbuchstabe jedes Wortes keine Null ist.

Eine Variation dieser Art von Geduldsspiel ist, eine lange Multiplikation oder Division auszuwählen und die Sternchen durch die richtigen Ziffern zu ersetzen. Beispiel (s. englischen Text).

$$\begin{array}{r} \text{Lösungen: } 461 \quad 64 \cdot 22 \\ 39 \quad \quad 92 \\ 439 \quad \quad 92 \\ 939 \quad \quad 1012 \end{array}$$

▲ 3 ▲ Zum Bau des Eiffelturms wurden ungefähr 885 m^3 Eisen verwendet; die Dichte des Eisens beträgt $7,8 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$. Welche Masse

Eisen wurde für diese Konstruktion benötigt?

Lösung: $m = V \cdot \rho$

$$m = \frac{885 \text{ m}^3 \cdot 7,8 \text{ t}}{\text{m}^3}$$

$$m = 6903 \text{ t}$$

Für den Bau wurden 6903 t Eisen benötigt.

Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe, Heft 2/83

Ein Maultier und ein Esel

Der Maulesel habe x Pud getragen, der Esel aber y Pud. Gibt nun der Maulesel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y+1$, der Maulesel aber behält noch $x-1$; da nun der Esel zweimal soviel hat als der Maulesel, so wird $y+1=2x-2$. Wenn aber der Esel dem Maulesel ein Pud gibt, so bekommt der Maulesel $x+1$, und der Esel behält noch $y-1$. Da nun jene Last dreimal so groß ist als diese, so wird $x+1=3y-3$.

Also sind unsere zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{I. } |y+1=2x-2| \\ \text{II. } |x+1=3y-3| \end{array}$$

Aus der ersten findet man $x = \frac{y+3}{2}$ und aus der anderen $x = 3y-4$, woraus diese neue

Gleichung entsteht: $\frac{y+3}{2} = 3y-4$, welche mit 2 multipliziert gibt $y+3=6y-8$, und y subtrahiert, kommt $5y-8=3$, dazu 8 addiert, so hat man $5y=11$, $y=\frac{11}{5}$ oder $2\frac{1}{5}$ und hieraus $x=2\frac{3}{5}$.

Antwort: Also hat der Maulesel $2\frac{3}{5}$ Pud, der Esel aber $2\frac{1}{5}$ Pud getragen. (Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*) H. Pieper

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/82

Ma 5 ■ 2266 Der jüngste Sohn sei n Jahre alt; folglich ist der zweite Sohn $(n+2)$ Jahre, der älteste Sohn $(n+4)$ Jahre, die Mutter $(n+24)$ Jahre, der Vater $(n+30)$ Jahre alt. Die Familienmitglieder sind somit zusammen $(5n+60)$ Jahre alt.

Nun gilt $5n+60=80$, $5n=20$, also $n=4$. Die Söhne sind 4, 6 und 8 Jahre alt; die Mutter ist 28 Jahre, der Vater 34 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2267 Angenommen, die Familien Kunz, Schulz, Ludwig, Müller und Richter haben (in dieser Reihenfolge) k , s , l , m und r Kinder. Aus b) folgt: $k < s$.

Aus c) folgt: $k < s < r$.

Aus d) folgt: $k=m$, also $k=m < s < r$.

Aus e) folgt: $l < k$, also $l < k=m < s < r$.

Wegen $1 \leq l, k, m, s, r \leq 4$ und $l+k+m+s+r=12$ existiert genau eine Lösung, nämlich $l=1, k=2, m=2, s=3, r=4$. Die Familie Ludwig hat 1 Kind, die Familien Kunz und Müller haben je 2 Kinder, die Familie Schulz 3 Kinder und die Familie Richter 4 Kinder.

Ma 5 ■ 2268 Angenommen, Karl las am ersten Tag n Seiten dieses Buches; dann las er am zweiten Tag $3 \cdot n$ Seiten, am dritten Tag $5 \cdot n$ Seiten. Das Buch umfaßt somit $9 \cdot n$ Seiten. Nun gilt $160 < 9 \cdot n < 170$. Daraus folgt $n=18$. Das Buch umfaßt somit $9 \cdot 18 = 162$ Seiten.

Ma 5 ■ 2269 Angenommen, der Sohn ist n Jahre alt, der Vater also $5 \cdot n$ Jahre und Großvater $10 \cdot n$ Jahre. Zusammen sind sie $16 \cdot n$ Jahre alt. Nun gilt $16 \cdot n = 80$, also $n=5$. Der Sohn ist 5 Jahre, der Vater 25 Jahre, der Großvater 50 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2270 Es seien a , b und c die Lebensalter der Kinder von Frau Meier. Dann gilt $a \cdot b \cdot c = 1 \cdot 1 \cdot 24 = 1 \cdot 2 \cdot 12 = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4$. Nur die Summe $1+4+6=11$ ergibt eine Primzahl. Die Kinder von Frau Meier sind 1 Jahr, 4 Jahre und 6 Jahre alt. Die Hausnummer lautet 11.

Ma 5 ■ 2271 Wir gehen wie folgt vor:

(1) Der 9-l-Eimer wird gefüllt.

(2) Aus dem 9-l-Eimer füllen wir zweimal nacheinander jeweils den 4-l-Eimer, der danach jedes Mal geleert wird.

(3) Die im 9-l-Eimer verbliebene Wassermenge von 1 Liter gießen wir in den 4-l-Eimer.

(4) Wir füllen erneut den 9-l-Eimer, füllen danach den 4-l-Eimer bis zum Rand auf. Es verbleiben im 9-l-Eimer danach 6 Liter Wasser.

Ma 6 ■ 2272 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

a) Angenommen, jemand hat sich eine gerade

Zahl $2n$ gedacht; er hat dann folgendes notiert:

$1, 2, 3, 4, \dots, 2n-1, 2n$.

Da die erste notierte Zahl (1) ungerade, die letzte notierte Zahl aber gerade ist, sind es genau so viele ungerade wie gerade Zahlen.

b) Angenommen, jemand hat sich eine ungerade Zahl $2n+1$ gedacht; er hat dann folgendes notiert:

$1, 2, 3, 4, \dots, 2n, 2n+1$.

Da sowohl die erste als auch die letzte notierte Zahl ungerade ist, existiert genau eine ungerade Zahl mehr, als gerade Zahlen vorhanden sind.

Folglich ist die Anzahl der verbleibenden ungeraden Zahlen niemals kleiner als die Anzahl der gestrichenen Zahlen. Sie ist entweder gleich oder um 1 größer als die halbe Anzahl aller notierten Zahlen.

Ma 6 ■ 2273 Durch Einsetzen erhalten wir aus der gegebenen Ungleichung

$$a+b+a \cdot b+8 < 10,$$

$$a+b+a \cdot b < 2.$$

Folgende geordneten Zahlentripel $[a, b, c]$ erfüllen die gestellten Bedingungen: $[0, 0, 8]$, $[1, 0, 8]$, $[0, 1, 8]$.

Ma 6 ■ 2274 Die Größe des Außenwinkels $\sphericalangle CBF$ des Dreiecks ABC ist gleich der Summe aus den Größen der ihm nicht anliegenden Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACB$; sie beträgt somit $35^\circ + 45^\circ = 80^\circ$. Winkel $\sphericalangle CEF$ ist Außenwinkel des Dreiecks BFE . Seine Größe ist gleich der Summe der Größen der ihm nicht anliegenden Innenwinkel $\sphericalangle EBF$ und $\sphericalangle BFE$, also $80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$.

Ma 6 ■ 2275

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \dots$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \frac{4-1}{4} \cdot \frac{5-1}{5} \cdot \dots \cdot \frac{100-1}{100}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100} = \frac{1}{100}$$

Ma 6 ■ 2276 Die Anzahl der von Axel, Bruno, Christian und Dieter erzielten Tore sei a , b , c und d ; dann gilt

$$c < d, \quad (1)$$

$$a+b=c+d, \quad (2)$$

$$b+d < a+c. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

$$a+2b+d < a+2c+d,$$

$$2b < 2c, \text{ also } b < c. \quad (4)$$

Aus (2) und (4) folgt

$$a+c > c+d, \text{ also } a > d. \quad (5)$$

Aus (1), (4) und (5) folgt schließlich

$$b < c < d < a.$$

Bruno erzielte die wenigsten, Axel die meisten Tore.

Fortsetzung auf Seite VII.

Knobel mit α

Aus der Aufgabenstellung und der Struktur der Gleichungen ergibt sich unmittelbar: $\alpha = 0$. (Da kein Produkt Null ist, kann auch kein Faktor Null sein; α tritt nicht als Faktor auf.) Das Produkt in Gleichung (9) ist somit eine 10stellige Zahl, während die Produkte der Gleichungen (1) bis (8) 11stellige Zahlen sind. Daraus folgt, daß der Faktor T in (9) kleiner sein muß als jeder der übrigen Faktoren K, N, O, B, E, L, M, I. Also gilt $T = 1$. Wegen $T = 1$ folgt aus (1) ... $T \cdot K \cdot K = \dots T$, daß $K = 9$ gilt. Da $K = 9$ in allen Gleichungen als Faktor auftritt, sind sämtliche Zahlen auf den rechten Seiten Vielfache von 9, ihre Quersumme also durch 9 teilbar. Die Quersumme aus den 9 mittleren (jeweils gleichen) Ziffern ist in jedem Falle ein Vielfaches von 9, deshalb muß die aus der ersten und der letzten Ziffer

gebildete Summe 9 betragen. Aus der rechten Seite von (1) folgt $N + T = 9$ und wegen $T = 1$ somit $N = 8$. Aus (1) $8000000001 : (9 \cdot 9) = \text{KNOBELMIT}$ ergibt sich $K = 9 \quad L = 4$
 $N = 8 \quad M = 3$
 $O = 7 \quad I = 2$
 $B = 6 \quad T = 1$
 $E = 5 \quad \alpha = 0$

Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

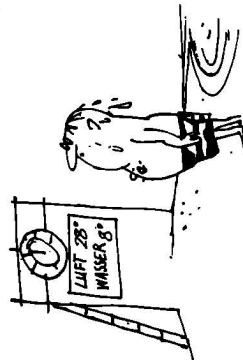
Spring-Turnier

Reihenfolge: B - D - A - C

Kürzester Weg gesucht!

Reihenfolge der Kioske: 1-2-3-5-7-8-9-10-11-12-13-14-17-18-16-15-21-20-31-19-22-15-28-27-26-24-23-29-4-30-6.

16



9

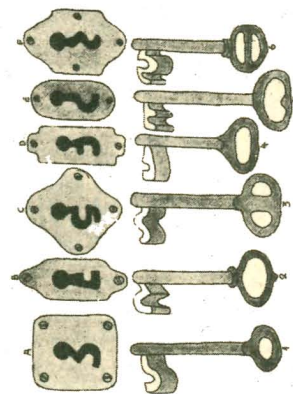
Vexierbild

Der Märchenprinz sucht Dornröschen. Helft ihm!



Schlüsselleien

Ordne zu! Welcher Schlüssel (1 bis 6) gehört zu welchem Schloß?



8

alpha-Ferienmagazin

Sehen - Merken - Kombinieren

1. Haben die Jungen schon öfter gezeltet? 2. Wie steht es mit ihren hauswirtschaftlichen Fertigkeiten? 3. In welcher Richtung fließt der Fluß? 4. Muß die Wäsche lange trocknen? 5. Wird die Sonnenblume noch wachsen? 6. Ist das Lager der Touristen weitab von der Stadt aufgeschlagen? 7. Mit welchem Transportmittel sind die Jungen hierher gekommen? 8. Zu welcher Stadt fliegt das Flugzeug?



1

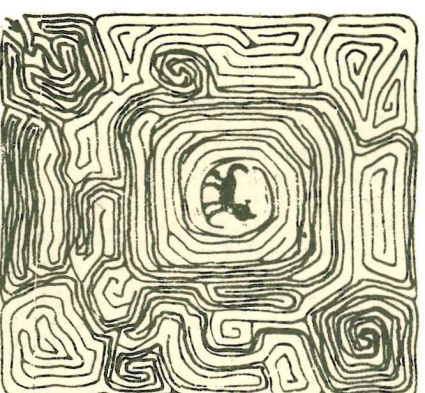
Knobel mit α

Jedem der 10 Buchstaben in der Überschrift ist genau eine der 10 Ziffern 0 bis 9 zuzuordnen, daß die Gleichungen (1) bis (9) zu wahren Aussagen werden.

- (1) KNOBELMIT · K · K = NZZZZZZZZZZ
- (2) KNOBELMIT · N · K = OTTTTTTTTT
- (3) KNOBELMIT · O · K = BIIIIIIIIII
- (4) KNOBELMIT · B · K = EMMMMMMMMML
- (5) KNOBELMIT · E · K = LLLLLLLLLL
- (6) KNOBELMIT · L · K = MEEEEEEEEEB
- (7) KNOBELMIT · M · K = IBBBBBBBBBBO
- (8) KNOBELMIT · I · K = TOOOOOOOOON
- (9) KNOBELMIT · T · K = xNNNNNNNNNNK

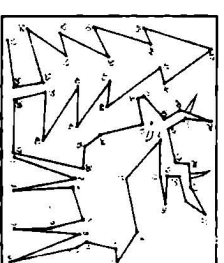
10

Labyrinth



15

Im Wald



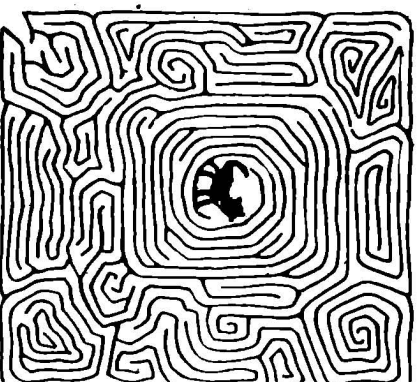
Vexierbild

Dornröschen steht in der linken oberen Ecke des auf die linke Seite gedrehten Bildes.

Schlüsselraten

Es gehören zusammen: A-2; B-4; C-6; D-5; E-1; F-3

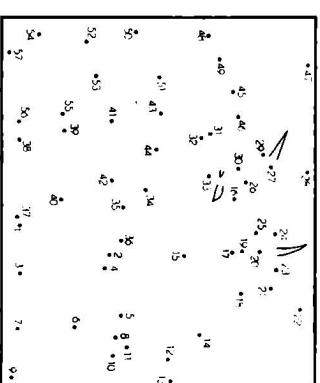
Labyrinth



7

Im Wald

Verbinde die Punkte 1 bis 57! Es entsteht ein nettes Ferienbild.



Knifflige Frage

Wenn man an den Enden der Bänder zieht, wird sich nur bei zwei Ver-schlingungen ein Knoten bilden – die anderen lösen sich glatt auf. Wo er-geben sich Knoten?

Logeleien

- 1 Δ Δ : 1 □ = 1 □
 12 * : * = 24
 A · A = B
 + · —
 C · D = E
 F – G = H

2

Experiment

$$6 + 1 - 3 = 4; \quad 3 + 7 - 7 = 3; \\ 1 + 2 - 1 = 2$$

Teilbares

	6	9	2		
5	2	3	1	2	
4	6	3	1	5	3
8	1	7	5	5	3
	5	6	1	8	1
	4	3	2		

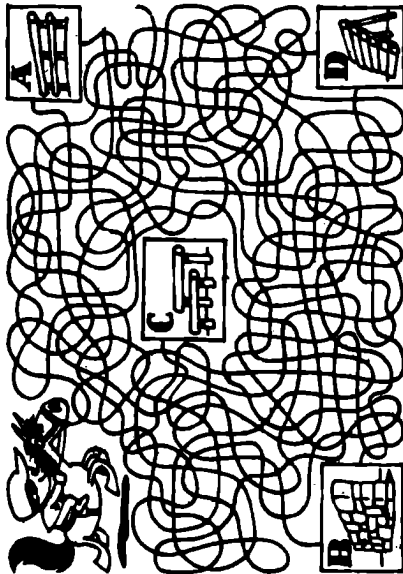
Gut beobachten!

1. Reihe 4. Vase; 2. Reihe 2. Vase;
3. Reihe 3. Vase

14

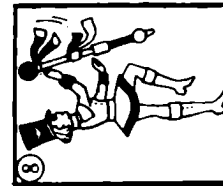
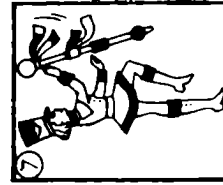
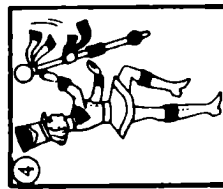
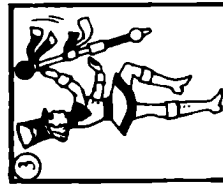
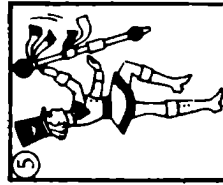
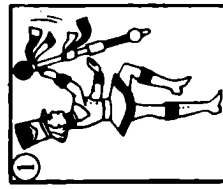
Sprung-Turnier

In welcher Reihenfolge nehmen Reiter und Pferd die Hürden?



11

Tambourmajor

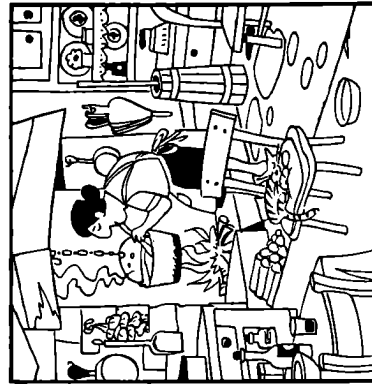


Vergleiche die 8 Bilder!
Was fällt dir dabei auf?

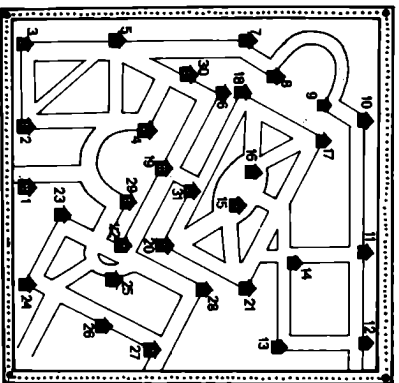
6

Kesselgulasch

Zwischen den beiden Bildern, gezeichnet von einem ungarischen Graphiker, gibt es viele kleine Unterschiede. Welche?



3



Kürzester Weg gesucht!

Wie muß der Fahrer der Leipziger Volkszeitung (LVZ) fahren, um mit kürzestem Weg alle Zeitungskioske zu beliefern?



12

Lösungen zu:

Sehen – Merken – Kombinieren

1. Offensichtlich nicht: Erfahrene Touristen stellen das Zelt nicht in einer Mulde auf. Auch ist die Feuerstelle unsachgemäß angelegt.
2. Mit aller Wahrscheinlichkeit nicht gut: Fisch wird nicht vom Kopf her geschuppt, und Strümpfe mit so langem Faden zu stopfen, ist unzweckmäßig.
3. Von links nach rechts.
4. Nein, denn es weht Wind.
5. Die Sonnenblume ist offensichtlich abgebrochen und in die Erde gesteckt.
6. Am Bildrand ist ein Wegweiser zum nahegelegenen Ort zu sehen.
7. Die Jungen haben aller Wahrscheinlichkeit nach Fahrräder: am Zelt lehnt eine Luftpumpe.
8. Zu keiner. Das ist ein Agrarflugzeug.

13

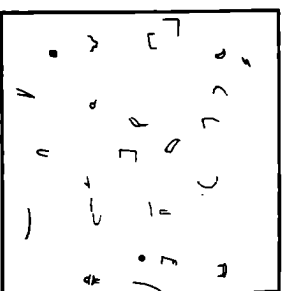
Knifflige Frage

Die Bänder A und D bilden Knoten.

Logeleien

144 : 12 = 12; 120 : 5 = 24;
3 · 3 = 9, 4 · 2 = 8, 7 – 6 = 1.

Kesselgulasch



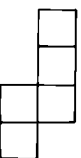
Experiment

In die untenstehende Figur sollst du Ziffern so einsetzen, daß sich waagrecht wie senkrecht richtig gelöste Aufgaben ergeben.

	–		:		= 3
+		+		+	
	+		:		= 4
–		–		–	
	+		–		= 9
= 4		= 3		= 2	

Teilbares

Lege die Vorlage (bestehend aus 5 kleinen Quadraten) sechsmal so auf das große Quadrat, daß jeweils die Summe 20 erscheint!



4

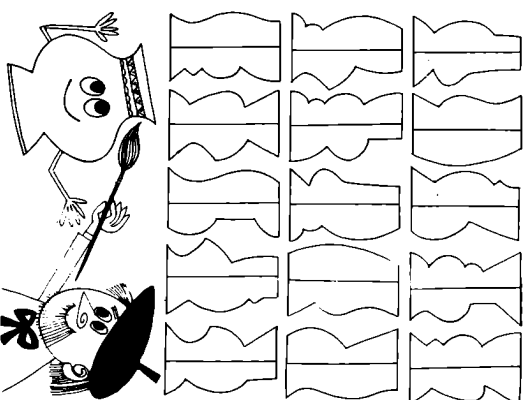
Gut beobachten!

Auf der Zeichnung sind 15 halbierte Vasen zu sehen. Unter ihnen befinden sich 12, von denen man jeweils zwei Teile zu einer vollständigen Vase zusammensetzen kann. Zu drei von ihnen jedoch läßt sich keine „Partnerin“ finden. Welche sind das?

Kryptarithmetik

	9	·		1	=			
6		:	7	=				
		+		=		3		
		–		=				
6			0					

5



Ma 7 ■ 2277 Angenommen, Klaus ist gegenwärtig x , Jens y , also Gisela $(27 - x - y)$ Jahre alt. Vor drei Jahren war Klaus $x - 3$, Jens $y - 3$, Gisela $(24 - x - y)$ Jahre alt. Nun gilt

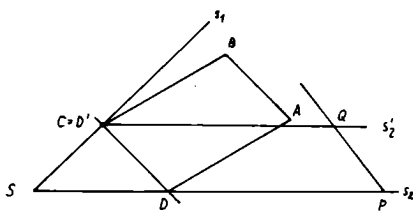
$$\begin{aligned} x - 3 &= 3 \cdot (24 - x - y) \text{ und } y - 3 = 2 \cdot (24 - x - y), \\ x - 3 &= 72 - 3x - 3y \text{ und } y - 3 = 48 - 2x - 2y, \\ 4x + 3y &= 75 \text{ und } 2x + 3y = 51, \\ 3y &= 75 - 4x \text{ und } 3y = 51 - 2x. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Gleichsetzen

$$\begin{aligned} 51 - 2x &= 75 - 4x, \\ 2x &= 24, \text{ also } x = 12 \text{ und somit } 3y = 51 - 2 \cdot 12 = 27, \text{ also } y = 9. \end{aligned}$$

Gegenwärtig ist Klaus 12, Jens 9, Gisela 6 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2278 Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AB} = \overline{CD}$ gilt. (Auf den einfachen Beweis sei hier verzichtet.) Durch Verschiebung $\overline{AB}$ wird C das Bild von D und s_2' das Bild von s_2 . Das heißt, wir konstruieren das Bild des Schenkels s_2 bei der Verschiebung $\overline{AB}$ und erhalten den Punkt $C = D'$. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C schneidet s_2 in D .



$$\overline{AB} = \overline{PQ}; \overline{AB} \parallel \overline{PQ}$$

Ma 7 ■ 2279 Wenn $x = 3$, so $x^2 = 9 > 7$. Deshalb gilt $x < 3$. Für $x = 0$ gilt $y^2 = 7$; es gibt keine natürliche Zahl, deren Quadrat gleich 7 ist.

Für $x = 1$ gilt $1 + y + y^2 = 7$, also $y + y^2 = 6$ bzw. $y(y + 1) = 2 \cdot 3$.

Für $x = 1$ gilt somit $y = 2$.

Für $x = 2$ gilt $4 + 2y + y^2 = 7$, also $2y + y^2 = 3$ bzw. $y(y + 2) = 1 \cdot 3$.

Für $x = 2$ gilt somit $y = 1$.

Die geordneten Paare $[1, 2]$ und $[2, 1]$ sind die einzigen Lösungen dieser Gleichung.

Ma 7 ■ 2280 Wegen $5^4 = 625 < 1000$ und $10^4 = 10000 > 9999$ gilt für die Quersumme $q = a + b + c + d$ dieser Zahlen $6 \leq q \leq 9$. Wir erhalten somit

$$6^4 = 1296 \text{ (entfällt, da } q = 18),$$

$$7^4 = 2401 \text{ mit } q = 7,$$

$$8^4 = 4096 \text{ (entfällt, da } q = 19),$$

$$9^4 = 6561 \text{ (entfällt, da } q = 18).$$

Es existiert genau eine solche Zahl, nämlich $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4 = 7^4$.

Ma 8 ■ 2281 z endet auf 0, also ist z durch 2, 5 und 10 teilbar. z endet auf 00, also ist z durch 4 teilbar. z endet auf 100, also ist z nicht durch 8 teilbar.

Um die Teilbarkeit von z durch 3, 6 bzw. 9 zu ermitteln, benötigt man die Quersumme von z .

Wir schreiben nun die Ziffern der Zahl z in folgendes Schema:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & & \\ 10111213141516171819 & & & & & & & & & & & \\ 20212223242526272829 & & & & & & & & & & & \\ 30 \dots & & & & & & & & & & & \\ 40 \dots & & & & & & & & & & & \end{array}$$

100

Es läßt sich überblicken, daß die Summe $1 + 2 + 3 + \dots + 9$ in der Quersumme von z zwanzigmal vorkommt. Nun ist $20(1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 900$. Die 1 von der 100 ist noch zu addieren, so daß die Quersumme von z gleich 901 beträgt. Daraus folgt, daß z durch keine der Zahlen 3, 6 oder 9 teilbar ist.

Ma 8 ■ 2282 a) Bildet man den Quotienten aus z und ihrer Quersumme, so erhält man $\frac{111a}{3a} = \frac{111}{3} = 37$.

b) Jede dreistellige natürliche Zahl mit drei gleichen Grundziffern läßt sich in der Form $100a + 10a + a = 111a$ darstellen. Ihre Quersumme beträgt also $3a$ und ist demzufolge ein Vielfaches von 3.

Wenn z eine gerade Zahl ist, so ist z ein Vielfaches von 6, da jede durch 3 teilbare gerade Zahl, die größer oder gleich 6 ist, ein Vielfaches von 6 ist.

Ma 8 ■ 2283 Da die Summe der Innenwinkelgrößen in jedem konvexen Viereck 360° beträgt, gilt:

$$a) \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ, \text{ d. h. } \alpha = 36^\circ.$$

$$\text{Es folgt } \beta = 72^\circ, \gamma = 108^\circ \text{ und } \delta = 144^\circ.$$

Da $\alpha + \delta = 180^\circ$ und $\beta + \gamma = 180^\circ$ ist und diese Winkelpaare jeweils entgegengesetzt liegende Winkel sind, gilt $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $ABCD$ ist ein Trapez.

$$b) \alpha = 36^\circ, \beta = 72^\circ, \gamma = 144^\circ \text{ und } \delta = 108^\circ.$$

Da $\alpha + \gamma = 180^\circ$ und $\beta + \delta = 180^\circ$ und α und γ sowie β und δ jeweils in diesem Viereck gegenüberliegende Winkel sind, ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Ma 8 ■ 2284 Bezeichnet man den Flächeninhalt des Kreises k mit A_k und den des Kreises k_1 mit A_{k_1} , so gilt das Verhältnis

$$2A_{k_1} : A_k = x\% : 100\%.$$

Nun gilt die Beziehung $r = 2r_1$, wenn r die Radiuslänge von k und r_1 die von k_1 bezeichnet.

Daraus folgt

$$2\pi r_1^2 : 4\pi r_1^2 = x\% : 100\% \text{ bzw.}$$

$$1 : 2 = x\% : 100\%.$$

Die Flächeninhalte der beiden einbeschriebenen Kreise nehmen zusammen 50% des Flächeninhaltes des Kreises k ein.

Ma 9 ■ 2285 Wir formen die Gleichung

$$(x + a)^{-1} = x^{-1} + a^{-1}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen äquivalent um und erhalten

$$\frac{1}{x + a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a},$$

$$\begin{aligned} \frac{a + x}{xa} &= \frac{1}{x + a}, \\ (x + a)^2 &= ax, \\ x^2 + ax + a^2 &= 0, \\ x_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4a^2}{4}}. \end{aligned}$$

Es kann nur dann reelle Lösungen geben, wenn die Diskriminante nicht negativ ist. Folglich muß gelten:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 4a^2}{4} &\geq 0, \\ -3a^2 &\geq 0, \\ 3a^2 &\leq 0, \\ a^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß nur $a = 0$ möglich sein kann. Das ist aber laut Bedingung der Aufgabe auszuschließen ($\frac{1}{a}$ wäre nicht definiert)! Es gibt keine reelle Zahl x , für die die gegebene Gleichung eine wahre Aussage wird.

Ma 9 ■ 2286 Es seien x_1 und x_2 zwei Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x + k = 0$; dann gilt nach dem Wurzelsatz des Vieta

$$x_1 + x_2 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = k. \quad (2)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $x_1^2 = x_2$.

Es folgt dann nach (2): $x_1^3 = k$.

Setzt man $a^3 = k$, dann ist $a = x_1$ und $a^2 = x_2$.

Dann gilt nach (1): $a^2 + a - 2 = 0$.

Diese Gleichung hat die Lösungen $a_1 = -2$ und $a_2 = 1$. Wegen $a^3 = k$ ergibt sich nun $k_1 = -8$ und $k_2 = 1$.

Probe: Setzt man in die Gleichung $x^2 - 2x + k = 0$ für k die Zahl $k_1 = -8$ ein, so erhält man $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$, und es gilt $(-2)^2 = 4$.

Setzt man für k die Zahl $k_2 = 1$ ein, so erhält man $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$, und es gilt $1^2 = 1$.

1 und -8 sind somit die einzigen reellen Zahlen für k , die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Ma 9 ■ 2287 Aus $a^4 - b^4 = 65$ folgt schrittweise durch äquivalentes Umformen

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 65,$$

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 1 \cdot 5 \cdot 13.$$

Wegen $a - b < a + b < a^2 + b^2$ gilt $a - b = 1$, $a + b = 5$, $a^2 + b^2 = 13$.

Daraus folgt $a = 3$ und $b = 2$.

Es existiert genau ein solches geordnetes Zahlenpaar, nämlich $(3, 2)$.

Ma 9 ■ 2288 a) Es seien A , A_1 , A_2 die Flächeninhalte der Dreiecke ABC , ADC bzw. DBC ; dann gilt:

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A = \frac{a \cdot e}{2} + \frac{a \cdot f}{2},$$

$$A = \frac{a}{2}(e + f),$$

$$A = 10 \text{ cm}^2.$$

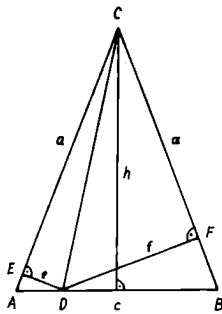
b) Es gilt:

$$a \cdot e + a \cdot f = c \cdot h,$$

$$u(e + f) = c \cdot h,$$

$$e + f = \frac{c \cdot h}{a},$$

d. h. $e + f$ ist konstant.



Ma 10/12 ■2289 Wir betrachten zunächst die Jahreszahl x^2 und suchen nach möglichen Quadratzahlen, deren Wurzeln ein sinnvolles Lebensalter des Bruders ergeben.

Es ist $44^2 = 1936$,

$45^2 = 2025$,

$46^2 = 2116$, ...

Hieraus ergibt sich eigentlich schon die einzige Möglichkeit, nämlich, daß der Bruder im Jahre 2025 ein Lebensalter von 45 Jahren erreicht haben wird.

Dann ist er im Jahre $2025 - 45 = 1980$ geboren, und für das Geburtsjahr 1980 gilt:

$$1980 = x \cdot y$$

$$= 45 \cdot y.$$

Es folgt $y = 44$.

Der Bruder wird im Jahre

$$(x + 1) \cdot y = (45 + 1) \cdot 44$$

$$= 46 \cdot 44$$

$$= 2024 \text{ y Jahre, d. h.}$$

44 Jahre alt sein. Im Jahre

$$x^2 + y^2 - xy = 45^2 + 44^2 - 45 \cdot 44$$

$$= 2025 + 1936 - 1980$$

$$= 1981$$

war der Bruder 1 Jahr alt.

Ma 10/12 ■2290 Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$(1) \quad d_1^2 = a^2 + b^2$$

$$(2) \quad d_2^2 = b^2 + c^2$$

$$(3) \quad d_3^2 = a^2 + c^2$$

Setzt man $a^2 = x$, $b^2 = y$ und $c^2 = z$, so erhält man $d_1^2 = x + y$; $d_2^2 = y + z$ und $d_3^2 = x + z$.

Nun gilt $x + y = 25 \text{ cm}^2$,

$$y + z = 34 \text{ cm}^2,$$

$$x + z = 41 \text{ cm}^2. \text{ Daraus folgt}$$

$$z - x = 9 \text{ cm}^2 \text{ und}$$

$$x + z = 41 \text{ cm}^2 \text{ und schließlich}$$

$$z = 25 \text{ cm}^2 \text{ und damit } c = 5 \text{ cm.}$$

Weiter folgen nun

$$x = 16 \text{ cm}^2 \text{ und damit } a = 4 \text{ cm und}$$

$$y = 9 \text{ cm}^2 \text{ und damit } b = 3 \text{ cm.}$$

Das Volumen dieses Quaders beträgt

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$= 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$$

$$= 60 \text{ cm}^3.$$

Ma 10/12 ■2291 Es sei $a < b < c$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Aus

$$h_a = \frac{2A}{a}, h_b = \frac{2A}{b}, h_c = \frac{2A}{c} \text{ folgt}$$

$$\frac{2A}{a} + \frac{2A}{b} + \frac{2A}{c} = h_a + h_b + h_c,$$

$$2A \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = h_a + h_b + h_c.$$

$$\text{Wegen } \frac{3}{c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{gilt weiter } \frac{6A}{c} \leq h_a + h_b + h_c.$$

$$\text{Wegen } A = q \cdot s = \frac{q(a+b+c)}{2} \text{ gilt}$$

$$\frac{3q(a+b+c)}{c} \leq h_a + h_b + h_c,$$

$$\frac{9q(a+b+c)}{3c} \leq h_a + h_b + h_c.$$

$$\text{Wegen } 3c > a + b + c \text{ gilt}$$

$$\frac{9q \cdot 3c}{3c} \leq h_a + h_b + h_c,$$

$$9q \leq h_a + h_b + h_c, \text{ w. z. b. w.}$$

Für $a = b = c$ gilt das Gleichheitszeichen.

Ma 10/12 ■2292 Bezeichnet man den Flächeninhalt des Kreises k mit A_k und den des Kreises k_1 mit A_{k_1} , so gilt das Verhältnis

$$3A_{k_1} : A_k = x\% : 100\%.$$

Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der einbeschriebenen Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2r_1$, wenn man die Länge des Radius des Kreises k_1 mit r_1 bezeichnet. Der Mittelpunkt M des Kreises k ist Schnittpunkt der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks. Deshalb gilt für die Länge des Radius r :

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{3}r_1 + r_1 \text{ bzw. } r = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1 \right) r_1.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \frac{3A_{k_1}}{A_k} &= \frac{3\pi r_1^2}{\pi r^2} = \frac{9}{7 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{3r_1^2}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1 \right)^2 \cdot r_1^2} = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{49 - 48} \\ &= \frac{3}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1 \right)^2} = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{63 - 36\sqrt{3}} \\ &= 0,646. \end{aligned}$$

Die drei einbeschriebenen Kreise nehmen zusammen etwa 64,6% des Flächeninhalts des größeren Kreises ein.

Ph 6 ■116 Aus dem Weg-Zeit-Diagramm erhält man als gegebene Größen:

$$\text{für } \overline{OB} \quad s_1 = 800 \text{ m, } t_1 = 2 \text{ min,}$$

$$\text{für } \overline{CD} \quad s_2 = 2400 \text{ m, } t_2 = 3 \text{ min,}$$

$$\text{für } \overline{EF} \quad s_3 = 1200 \text{ m, } t_3 = 4 \text{ min,}$$

$$\text{für } \overline{OD} \quad s_4 = 3200 \text{ m, } t_4 = 6 \text{ min,}$$

$$\text{für } \overline{CF} \quad s_5 = 3600 \text{ m, } t_5 = 8 \text{ min,}$$

$$\text{für } \overline{OF} \quad s_6 = 4400 \text{ m, } t_6 = 11 \text{ min.}$$

Gesucht ist die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$. Man erhält sie in allen Fällen nach der Gleichung $\bar{v} = \frac{s}{t}$, also

$$\bar{v}_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{800 \text{ m}}{2 \text{ min}} = \frac{800 \text{ km} \cdot 60}{1000 \cdot 2 \text{ h}} = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\bar{v}_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{2400 \text{ m}}{3 \text{ min}} = \frac{2400 \text{ km} \cdot 60}{1000 \cdot 3 \text{ h}} = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\bar{v}_3 = \frac{s_3}{t_3} = \frac{1200 \text{ m}}{4 \text{ min}} = \frac{1200 \text{ km} \cdot 60}{1000 \cdot 4 \text{ h}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\bar{v}_4 = \frac{s_4}{t_4} = \frac{3200 \text{ m}}{6 \text{ min}} = \frac{3200 \text{ km} \cdot 60}{1000 \cdot 6 \text{ h}} = 32 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\bar{v}_5 = \frac{s_5}{t_5} = \frac{3600 \text{ m}}{8 \text{ min}} = \frac{3600 \text{ km} \cdot 60}{1000 \cdot 8 \text{ h}} = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\bar{v}_6 = \frac{s_6}{t_6} = \frac{4400 \text{ m}}{11 \text{ min}} = \frac{4400 \text{ km} \cdot 60}{1000 \cdot 11 \text{ h}} = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

$$\text{Ph 7 ■117 Geg.: } F_1 = 515 \text{ kp}$$

$$F_2 = 665 \text{ kp}$$

$$e = s_1 + s_2 = 2,40 \text{ m}$$

$$\text{Ges.: } s_1, s_2$$

Nach dem Hebelgesetz ist

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2, \text{ und außerdem}$$

gilt $s_1 = e - s_2$. Dann ist

$$F_1(e - s_2) = F_2 \cdot s_2,$$

$$F_1 e - F_1 s_2 = F_2 \cdot s_2,$$

$$F_1 e = F_2 \cdot s_2 + F_1 s_2,$$

$$F_1 e = s_2(F_1 + F_2),$$

$$s_2 = \frac{F_1 e}{F_1 + F_2},$$

$$s_2 = \frac{515 \text{ kp} \cdot 2,40 \text{ m}}{515 \text{ kp} + 665 \text{ kp}},$$

$$s_2 = 1,05 \text{ m,}$$

und

$$s_1 = e - s_2,$$

$$s_1 = 2,40 \text{ m} - 1,05 \text{ m,}$$

$$s_1 = 1,35 \text{ m.}$$

Die Entfernung von den Achsen beträgt 1,05 m bzw. 1,35 m.

$$\text{Ph 8 ■118 Geg.: } m = 13 \text{ g, } d = 31 \text{ mm,}$$

$$\rho_{Cu} = 8,92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{Al} = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$p_{Cu} = 94\%, p_{Al} = 6\%.$$

Ges.: h

(1) Berechnung von m_{Cu} und m_{Al}

$$m : m_{Cu} = 100 : p_{Cu} \quad m_{Al} = m - m_{Cu}$$

$$m_{Cu} = \frac{m \cdot p_{Cu}}{100}$$

$$m_{Al} = 13 \text{ g} - 12,22 \text{ g}$$

$$m_{Cu} = \frac{13 \text{ g} \cdot 94\%}{100\%}$$

$$m_{Al} = 0,78 \text{ g}$$

$$m_{Cu} = 12,22 \text{ g}$$

(2) Berechnung von V_{Cu} und V_{Al}

$$\rho_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{V_{Cu}} \quad \rho_{Al} = \frac{m_{Al}}{V_{Al}}$$

$$V_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{\rho_{Cu}} = \frac{12,22 \text{ g} \cdot \text{cm}^3}{8,92 \text{ g}}$$

$$V_{Al} = \frac{m_{Al}}{\rho_{Al}} = \frac{0,78 \text{ g} \cdot \text{cm}^3}{2,7 \text{ g}}$$

$$V_{Cu} = 1,37 \text{ cm}^3 \quad V_{Al} = 0,29 \text{ cm}^3$$

(3) Berechnung von V

$$V = V_{Cu} + V_{Al}$$

$$V = 1,37 \text{ cm}^3 + 0,29 \text{ cm}^3$$

$$V = 1,66 \text{ cm}^3$$

(4) Berechnung von h

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h$$

$$h = \frac{4 \cdot V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1,66 \text{ cm}^3}{3,14 \cdot 3,1^2 \text{ cm}^2}$$

$$h = 0,22 \text{ cm}$$

Die Münze ist 2,2 mm dick.

Fall a) Befindet sich S2, S3 oder S5 auf F4, so können wir durch Verschieben innerhalb des „rechten Quadrates“ S1 auf F2 bringen und erhalten damit die Stellung von Bild 6.

Bild 6

4	1	

Fall b) Ist F4 mit S1 besetzt, dann verschieben wir die Steine so, daß S4 auf F4, S1 auf F5 kommt und F1 mit irgendeinem Stein besetzt ist. S1 verschieben wir nun innerhalb des „rechten Quadrates“ auf einen der rechten Randplätze F3 oder F6. Anschließend bringen wir innerhalb des „linken Quadrates“ S4 wieder auf F1 (S1 bleibt dabei auf seinem Platz). Jetzt schieben wir innerhalb des „rechten Quadrates“ S1 auf F2 (Bild 6).

In jedem Falle können wir also S4 auf F1 und zugleich S1 auf F2 bringen. Davon ausgehend können wir also stets S1 und S4 auf ihre richtigen Plätze F1 und F4 bringen. Aus dem Studium des 2×2-Kästchens wissen wir, daß wir mit den restlichen drei Steinen stets entweder die Stellung von Bild 7 oder die Stellung von Bild 8 erreichen können.

Bild 7

1	2	3
4	5	

Bild 8

1	2	5
4	3	

Wir wenden uns wieder dem 4×4-Feld zu. Wir wissen nun, daß wir in einem 2×3-Feld bzw. 3×2-Feld, in dem das Leerfeld enthalten ist, stets die beiden Randplätze auf einer der Schmalseiten nach Wunsch besetzen können. Stellen wir uns jetzt im 4×4-Kästchen jeweils nacheinander 2×3- bzw. 3×2-Kästchen abgeteilt vor, so können wir uns überlegen, daß wir von einer beliebigen Anfangsstellung ausgehend erst F1 und F2, dann F3 und F4, dann F5 und F6, dann F7 und F8, dann F9 und F13, schließlich F10 und F14 als „die beiden Randplätze“ nehmen und so mindestens zu einer der folgenden beiden Stellungen I oder II gelangen können (natürlich muß man vorher immer erst die beiden jeweiligen Steine in den Sechserblock hineintauschen):

Bild 9

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Bild 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
13	14	12	

Durch Verschieben innerhalb des stark umrandeten 2×3-Feldes von Bild 10 könnt ihr nach einigen Zügen zu der Stellung von Bild 11 gelangen. Also gilt folgender Satz:

Bild 11

10	11	12
15	14	

Satz 1: Aus jeder Anfangsstellung läßt sich durch Verschieben stets die Stellung I oder II erzeugen.

Noch ungeklärt ist, ob sich die Stellungen I und II ineinander durch Verschieben überführen lassen.

Bild 12

1	7	5	9
3	12	8	14
2	15	4	10
13	11	6	

Wir stellen uns irgendeine Anfangsstellung vor, z. B. Bild 12, und notieren die Zahlen in der beim Lesen gewohnten Reihenfolge, wobei das Leerfeld dabei nicht berücksichtigt wird.

Im Beispiel: 1, 7, 5, 9, 3, 12, 8, 14, 2, 15, 4, 10, 13, 11, 6. Wir führen nun einen Vergleich mit der natürlichen Reihenfolge der Zahlen von 1 bis 15 durch: Die Zahl 1 steht an richtiger Stelle. Die Zahl 7 steht vor den Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Das sind 5 Verstöße gegen die natürliche Reihenfolge. Solche Verstöße wollen wir Inversionen nennen. Wir haben es hier also mit 5 Inversionen zu tun. Die nächste Zahl, die Zahl 5, steht im Widerspruch zur natürlichen Reihenfolge vor den Zahlen 2, 3 und 4. Also liegen 3 Inversionen vor. Die nun folgende Zahl 9 steht vor den Zahlen 2, 3, 4, 6 und 8, d. h. 5 Inversionen. Insgesamt haben wir $0 + 5 + 3 + 5 + 1 + 6 + 3 + 6 + 0 + 5 + 0 + 1 + 2 + 1 = 38$ Inversionen. Diese Inversionen liefern nun den Schlüssel, um zu entscheiden, ob eine Aufgabe des Fünfzehnerspiels lösbar oder unlösbar ist. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 2: Eine Stellung mit F16 als Leerfeld kann genau dann in die Stellung I überführt werden, wenn die Anzahl aller Inversionen eine gerade Zahl ist.

Diesen Satz 2 werden wir mittels der Sätze 3 und 4 beweisen. Aus Satz 2 folgt dann z. B., daß Stellung I nicht in Stellung II zu überführen ist: Stellung I hat keine Inversionen; Stellung II hat eine Inversion, die 15 steht vor der 14.

Wir wollen durch Satz 3 zunächst einmal die Frage beantworten, wie sich durch das Verschieben eines Steins die Anzahl der Inversionen ändert. Durch waagerechtes Verschieben ändert sich offensichtlich nichts. Schieben wir in Bild 13 den Stein mit der Nr. x senkrecht nach oben, so rückt er in der Reihenfolge drei Plätze vor. Die Nummern der drei übersprungenen Steine (in Bild 13 punktiert) seien a, b, c ($a < b < c$). Es sind folgende vier Fälle möglich:

Bild 13

1. $x > a, b, c$; 2. $x < a, b, c$; 3. $a < b < x < c$; 4. $a < x < b < c$. Stand Sx erst hinter den drei Steinen Sa, Sb, Sc, so steht Sx nach dem Hochziehen vor diesen drei Steinen. Veränderung der Anzahl der Inversionen: 1. 3 neue; 2. 3 weniger; 3. 2 neue (wegen $x > a, b$) und 1 weniger (wegen $x < c$), insgesamt 1 mehr; 4. 2 weniger und 1 mehr, d. h. 1 weniger. Eine entsprechende Überlegung können wir für den Fall durchführen, daß wir einen Stein senkrecht nach unten schieben. Insgesamt erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 3: Durch das waagerechte Verschieben eines Steines ändert sich die Anzahl der Inversionen nicht, durch das senkrechte Verschieben um eine ungerade Zahl.

Führen wir beim Fünfzehnerspiel einen Zug durch, so wandert dabei das Leerfeld um einen Platz in waagerechter oder senkrechter Richtung. Ist das Leerfeld anfangs auf einem bestimmten Platz und nach einer gewissen Anzahl von Zügen wieder an derselben Stelle, so muß jeder Zug in einer bestimmten Richtung durch einen anderen in entgegengesetzter Richtung aufgehoben worden sein, ein Zug nach rechts z. B. durch einen nach links.

Satz 4: Verschieben wir eine Stellung in eine andere mit dem Leerfeld auf demselben Platz, so haben wir dabei eine gerade Anzahl von waagerechten und eine gerade Anzahl von senkrechten Zügen durchgeführt.

Da eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen geradzahlig ist, können wir aus den Sätzen 3 und 4 schließen, daß sich eine Stellung mit dem Leerfeld auf F16 höchstens dann in Stellung I überführen läßt, wenn die Anzahl aller Inversionen gerade ist. Ist umgekehrt die Anzahl der Inversionen irgendeiner Anfangsstellung gerade, so ist dann die Stellung II (mit 1 Inversion) nicht erreichbar. Nach Satz 1 müssen wir also in unserem Beispiel durch Verschieben die Stellung I erreichen können. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir haben somit beim Fünfzehnerspiel 2 Gruppen von Anfangsstellungen mit dem Leerfeld auf F16, die „lösbaren“ und die „unlösbaren“. (Zu welcher Gruppe die Aufgaben der geschäftstüchtigen Wirte gehörten, können wir uns ja denken.) Es bleibt uns noch die Vermutung zu bestätigen, daß diese Gruppen gleich groß sind.

Vertauschen wir bei irgendeiner Stellung S14 und S15 miteinander, so ändern wir die Inversionenanzahl um 1. Einer lösbaren (unlösbaren) Aufgabe können wir also genau eine unlösbare (lösbare) Aufgabe zuordnen, indem wir gerade die Steine 14 und 15 vertauschen. Die der (lösbaren) Stellung auf Bild 12 auf diese Weise zugeordnete (unlösbare) Stellung ist in Bild 14 zu sehen. Wir können uns überlegen, daß dasselbe auch für die Vertauschung zweier beliebiger Steine gilt, und erhalten dann die folgende Entscheidungsregel für die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit einer Aufgabe, die auch in einigen Büchern über unterhaltensame Mathematik angegeben ist.

Bild 14

1	7	5	9
3	12	8	15
2	14	4	10
13	11	6	

Satz 5: Eine beliebige Stellung mit dem Leerfeld auf Platz 16 läßt sich genau dann in die Stellung I verschieben, wenn sich die Stellung I durch eine gerade Anzahl von aufeinanderfolgenden Vertauschungen zweier Steine erhalten läßt.

Im 2×2 -Feld haben wir die Steine zwar in alle möglichen Stellungen geschoben, aber wie sieht es dort mit der Gültigkeit der Sätze 1 bis 5 aus? Genauso könntet ihr einmal im 3×3 -Kästchen untersuchen, welche Sätze dort in welcher Form gelten. Ein richtiger Mathematiker hat oft erst dann Ruhe, wenn er allgemein für ein $n \times n$ -Feld (n beliebige natürliche Zahl) das Problem gelöst hat. Bei Wilhelm Ahrens und auch bei Gerhard Kowalewski könnt ihr euch noch ausführlicher über das Fünfezhnerspiel und gewisse Abwandlungen davon belesen. Sicher lag es nicht nur an der durch die Mathematiker geschaffenen Klarheit, daß die Spielwut allmählich wieder abflaute.

Bild 15

2	3	4		6	7
		5			
				8	
1					9

Wir wollen uns abschließend folgendem Schiebepuzzle, das auch auf Sam Loyd zurückgeht, zuwenden: Wir stellen uns ein wie in Bild 15 mit Rechtecken bzw. Quadraten besetztes 4×5 -Feld vor und wollen versuchen, das Quadrat 1 in die rechte untere Ecke zu schieben, dorthin, wo sich jetzt die Steine 8 und 9 befinden. Probiert es doch einmal!

M. Deweß

Sam Loyd

Sam Loyd (1841 bis 1911) ist sicher als Schachproblemkomponist einigen von euch schon bekannt. Er erfand aber auch unzählige Rätsel und Spiele. Bereits mit 10 Jahren spielte er ausgezeichnet Schach, und im Alter von 14 Jahren wurde im *New York Saturday Courier* erstmals eine Schachaufgabe von ihm veröffentlicht. Das Schachspiel nahm bald sein ganzes Interesse in Anspruch. Mit 16 Jahren wurde er Schach-Redakteur beim *Chess Monthly*. Er bestritt aber auch die Schachspalten einer Reihe anderer Zeitungen und Zeitschriften. Teilweise verbarg er sich unter Pseudonymen wie W. King, A. Knight, W. K. Bishop. Nach 1870 beschäftigte er sich



Bericht über eine Schulmeisterschaft

In diesem Schuljahr wurde an unserer Schule, der 12. Oberschule *Georg Schumann* in Berlin-Lichtenberg, im Rahmen der ersten Stufe der Mathematikolympiade eine *Schulmeisterschaft der Jungen Mathematiker* durchgeführt.

In einer Klausur, wie sie in den höheren Stufen üblich ist, hatten die Teilnehmer in zweieinhalb Stunden drei Aufgaben zu lösen.

Der gesamte Wettbewerb wurde durch die Kinder- und Jugendorganisation geführt. Dazu wurde von der Grundorganisationsleitung eine Arbeitsgruppe gebildet. In Absprache mit den Fachlehrern schlugen die gewählten Leitungen der Klassen ihre Vertreter als Teilnehmer vor. Das waren pro Klasse 4 bis 8 Schüler. Auch einige Teilnehmer aus Klasse 4 nahmen als *Frühstarter* am Wettbewerb teil.

Die Arbeitsgruppe stellte die Meldungen zusammen, lud die Teilnehmer ein, richtete die Klausurräume her, legte die Sitzordnung fest und führte während der Klausur auch die Aufsicht. Zu Beginn des Wettbewerbs begrüßten in den einzelnen Räumen die Direktorin, die Pionierleiterin und der Fachzirkelleiter die Teilnehmer, beglückwünschten sie zu ihrer Delegation und wünschten ihnen viel Erfolg. Ein Fachlehrer der Schule stand bereit, um während der ersten Stunde eventuelle Fragen der Teilnehmer zu den Aufgabentexten zu beantworten.

zunehmend mit mathematischen Denkspielen, Rätseln, Gesellschaftsspielen und originellen Werbegeschenken.

Einige seiner Rätsel und Spiele gingen um die ganze Welt und sind auch heute noch interessant. Nach seinem Tode gab sein Sohn Sam Loyd jr. 1914 die „Cyclopedia of Puzzles“ heraus, eine umfassende Sammlung von Rätseln seines Vaters. Martin Gardner, ein amerikanischer Unterhaltungsmathematik-Experte, hat etliche dieser Rätsel neu herausgegeben.

Alle Teilnehmer arbeiteten mit großem Eifer und in ausgezeichneter Disziplin. Nach Abschluß des Wettbewerbs fanden sich mehrere Gruppen zusammen und diskutierten über die verschiedenen Lösungswege.

Die Arbeiten der Teilnehmer aus den Klassen 5 und 6 wurden von Mitgliedern der Arbeitsgruppe unter Anleitung eines Mathematiklehrers durchgesehen und bewertet. Die Schüler arbeiteten sehr gewissenhaft und erfüllten diese Aufgabe ausgezeichnet. Die Arbeiten der übrigen Klassenstufen wurden von den Fachlehrern korrigiert. Anschließend nahm die Arbeitsgruppe eine Zusammenstellung der Ergebnisse vor. In einer gemeinsamen Beratung mit der stellvertretenden Direktorin für außerunterrichtliche Tätigkeit und dem Fachzirkelleiter wurden die Preisträger festgelegt und gleichzeitig die Mannschaft für die 2. Stufe zusammengestellt. Durch einen Aushang an der Wandzeitung der Schule wurden die Namen der erfolgreichsten Teilnehmer dem Schulkollektiv bekanntgegeben. Anläßlich des Appells zum Jahrestag der Gründung der DDR erhielten diese Schüler Urkunden und Bücher. Zugleich werden die erfolgreichsten Teilnehmer und die Mitglieder der Arbeitsgruppe zu einer Festveranstaltung eingeladen, an der auch die Sieger der Wettbewerbe in anderen Fächern, wie z. B. dem Fest der deutschen Sprache, dem Fest der russischen Sprache usw. teilnehmen.

Diese Form des Wettbewerbs fand bei den Schülern großen Anklang. Sie freuten sich, ihr Wissen und Können auf dem Gebiet der Mathematik unter Beweis stellen und ihre Kräfte messen zu können. Für einige war dieser Wettstreit Anlaß, in eine mathematische Arbeitsgemeinschaft einzutreten. Wenn unsere Schule inzwischen über zahlreiche Schüler verfügt, die Mitglied des *Klubs Junger Mathematiker* Lichtenbergs sind, und wenn von den sieben zur zweiten Stufe delegierten Schülern drei einen Preis dabei errangen, dann zeigt sich auch daran, daß die Mathematik an unserer Schule hohe Wertschätzung genießt. Freilich mußten wir für die Klausur eigene Aufgaben entwickeln, da die zentral veröffentlichten zum Teil nicht für eine Klausur geeignet und überdies auch vorher bereits bekannt sind. Wir stützten uns dabei auf Aufgaben aus früheren Olympiaden und auf solche, die in der *alpha* veröffentlicht wurden. Selbstverständlich konnte jeder Schüler auch Lösungen zu den zentral veröffentlichten Aufgaben beim Fachlehrer abgeben.

In ähnlicher Form und mit den gleichen Aufgaben ist eine Schulmeisterschaft an nahezu allen Schulen unseres Stadtbezirkes und an etwa weiteren 100 Schulen Berlins durchgeführt worden und hat viel Zustimmung gefunden. Wir werden daher auch im kommenden Jahr wieder eine solche Meisterschaft durchführen.

K. Lehmann

Welche Aufgaben die Teilnehmer zu lösen hatten, sei am Beispiel vorgestellt:
Schulmeisterschaft – Mathematik 1982

Klasse 5

1. Uwe hat 235 Briefmarken in seiner Sammlung. Würde er 55 Stück weniger besitzen, so hätte er genau halb so viele Marken, wie Antje zur Zeit besitzt und 70 Marken weniger als Kurt. Wie viele Marken besitzen diese drei Kinder zusammen?

2. Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 so, daß sie

- keinen gemeinsamen Punkt,
- genau einen Schnittpunkt,
- genau vier Schnittpunkte,
- genau fünf Schnittpunkte und
- genau acht Schnittpunkte miteinander haben!

Als Lösung gilt jeweils eine entsprechende Zeichnung. Eine Begründung ist hier nicht erforderlich, doch sind parallele Geraden zu kennzeichnen, z. B. $g_1 \parallel g_2$.

3. Joachim, Frank und Thomas haben erfolgreich an der Spartakiade teilgenommen, einer von ihnen am 100-m-Lauf, einer am Speerwerfen und einer am Tischtennis. Jeder von ihnen erkämpfte eine Medaille, und zwar einer eine Gold-, einer eine Silber- und einer eine Bronzemedaille.

Ferner ist bekannt:

- (1) Der Tischtennisspieler, der mit Joachim befreundet ist, erhielt eine Bronzemedaille.
 - (2) Thomas nahm an keiner der beiden leichtathletischen Disziplinen teil.
 - (3) Joachim nahm nicht am Speerwerfen teil.
 - (4) Im Speerwerfen erreichte keiner dieser drei Jungen eine Goldmedaille.
- Wer beteiligte sich an welcher Sportart? Wer erkämpfte welche Medaille?

Klasse 6

1. Eine Strecke von 154 mm Länge soll in drei Teilstrecken a, b und c zerlegt werden. Dabei soll b doppelt so lang wie a sein, und c soll viermal so lang wie a sein. Gib die Längen von a, b und c an!

2. Um ein Becken mit rechteckiger Grundfläche, das 18 m lang und 12 m breit ist, wird ein 2 m breiter Gang angelegt. Wie groß ist die Fläche des Ganges?

3. Gegeben sind die drei Gleichungen

- (1) $a + b = 10$;
- (2) $c + d + e = 16$;
- (3) $f + g + h = 14$.

Anstelle von a, b, c, d, e, f, g und h sollen Zahlen so eingesetzt werden, daß drei richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen. Dabei sind folgende Bedingungen einzuhalten:

- Es dürfen nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 benutzt werden.
- Jede dieser Zahlen darf höchstens einmal verwendet werden.
- Für verschiedene Buchstaben sind verschiedene Zahlen einzusetzen.

- Da acht Buchstaben zu ersetzen sind, aber neun Zahlen zur Verfügung stehen, wird eine dieser Zahlen nicht benutzt. Welche ist das?
- Gib ein Beispiel dafür an, wie die Zahlen eingesetzt werden können, so daß alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind!

Klasse 7

1. In einer Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Die Klasse hatte mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler.

Ermittle die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

2. Auf den Schenkeln eines spitzen Winkels BAC werden von A aus gleiche Strecken AM und AN abgetragen. Ein beliebiger Punkt D (von A verschieden) der Halbierenden dieses Winkels wird mit M und N verbunden.

- Beweise, daß $\overline{DM} = \overline{DN}$ ist!
- Beweise, daß $\overline{MN}$ von $\overline{AD}$ halbiert wird!

3. In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, und zwar 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest besteht aus schwarzen und weißen Kugeln. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, daß unter ihnen mit Sicherheit 10 Kugeln gleicher Farbe sind.

Wie viele Kugeln muß sie mindestens herausnehmen?

Klasse 8

1. In einer Klassenarbeit erhielten 5 Schüler die Note „Eins“, acht Schüler die Note „Zwei“, 4 Schüler die Note „Vier“. Alle übrigen Schüler erhielten die Note „Drei“. Der Durchschnitt der Arbeit betrug genau 2,5. Wieviel Schüler haben diese Arbeit mitgeschrieben?

2. Gegeben sei ein beliebiges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Seine Diagonalen mögen einander in S schneiden.

Beweise, daß die Dreiecke ASD und BCS einander flächengleich sind!

3. Marianne sagt: „Ich habe mich in meinem Leben erst viermal geirrt.“ Darauf erwidert Uli: „Dann hast du dich jetzt zum fünften Mal geirrt.“

Zeige, daß Ulis Aussage auf jeden Fall falsch ist!

Klasse 9

1. Ermitteln Sie alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen:

- (1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die vier aufeinanderfolgende einstellige natürliche Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden keine Anforderungen gestellt.
- (2) Die Zahl ist durch 45 teilbar.

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC .

Darin seien β und γ die Größen der Innenwinkel ABC bzw. BCA . Auf der Seite $\overline{BC}$ liege ein Punkt D so, daß der Winkel BDA die

Größe $90^\circ + \frac{\gamma - \beta}{2}$ hat.

Beweisen Sie, daß D auf der Halbierenden des Winkels BAC liegt!

3. In HAUS
+ HAUS
STADT

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

(Es sei vorausgesetzt, daß keine der Zahlen mit der Ziffer 0 beginnt.)

Klasse 10

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei bekannt:

$AC = 6$ cm; $BC = 8$ cm; Winkel $BCA = 90^\circ$.

- Berechnen Sie die Länge von $\overline{AB}$!
- Das Lot von C auf AB habe den Fußpunkt D . Berechnen Sie die Länge von $\overline{CD}$!

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

Setzt man vor eine dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so ist die entstehende sechsstellige bzw. siebenstellige Zahl stets durch 3, 23 und 29 teilbar!

3. Gegeben seien n Punkte $A, B, C, D, \dots$ in der Ebene. Sie sollen so miteinander verbunden werden, daß jeder dieser Punkte mit genau drei anderen Punkten direkt (d. h., ohne daß die Verbindungslinie einen weiteren dieser Punkte trifft) verbunden ist.

- Zeigen Sie, daß das für $n = 6$ möglich ist!
- Begründen Sie, daß das für $n = 7$ nicht möglich ist!





Genauigkeit gefragt!

Teil 1: Zur Addition und Subtraktion von Näherungswerten

Klaus bekommt zur Jugendweihe von seinen Eltern einen Taschenrechner. Bei allen möglichen Rechnungen verwendet er ihn nun. Dabei ist Klaus immer wieder erstaunt, wie schnell und genau man mit diesem Hilfsmittel arbeiten kann.

Nach seiner 14tägigen Urlaubsfahrt versuchte er, die von ihm zurückgelegte Fahrstrecke zu ermitteln.

Er war am 1. August von Leipzig mit dem Fahrrad zu seiner Tante nach Halle gefahren. Mit Hilfe seines Kilometerzählers am Fahrrad ermittelte er eine Fahrstrecke von 41,4 km.

Nach einem dreitägigen Aufenthalt in Halle ging es per Anhalter nach Rostock Lütten Klein. Hier verbrachte Klaus 10 erholsame Tage bei seiner Schwester, die ihn am 14. August mit dem Auto nach Halle zurückbrachte. Die Entfernung betrug entsprechend der Anzeige des Kilometerzählers am Auto 384 km. Die Strecke Halle–Leipzig fuhr Klaus wieder mit seinem Fahrrad.

Hier sind nun die Entfernungen für die einzelnen Teilstrecken angegeben:

Leipzig–Halle	41,4 km,
Halle–Rostock	380 km,
Rostock–Halle	384 km,
Halle–Leipzig	41,8 km.

Die Entfernung Halle–Rostock bestimmte Klaus mit Hilfe einer Autokarte.

Nachdem Klaus die Entfernungen mit seinem Taschenrechner addiert hatte, schrieb er in sein Tagebuch „Fahrstrecke Leipzig–Halle–Rostock und zurück 847,2 km“.

Was meinst du zu dieser Angabe?

Ist Klaus – ausgehend von seinen Entfernungsangaben – berechtigt, die Gesamtstrecke in Kilometer auf Zehntel genau anzugeben?

Betrachten wir dazu die einzelnen Angaben: Bei allen Werten handelt es sich um Näherungswerte. Mit Näherungswerten, die durch Messen, Schätzen oder Runden entstanden sein können, wird jeweils ein Intervall angegeben, in dem der genaue Wert liegt.

Mit dem Näherungswert 41,4 km gibt man

an, daß der wahre Wert der Strecke s_1 zwischen 41,35 km und 41,45 km liegt, d. h., hätte man den wahren Wert auf Zehntel gerundet, so hätte man 41,4 km erhalten.

• Gib das Intervall an, das mit dem Näherungswert 41,8 km beschrieben wird!

Da der Kilometerzähler des Autos nicht die Zehntelkilometer angibt, liegt der genaue Wert der Fahrstrecke s_2 (Rostock–Halle) in folgendem Intervall:

$$383,5 \text{ km} \leq s_2 \leq 384,5 \text{ km}.$$

Die getrampte Strecke Halle–Rostock hat Klaus im Nachhinein mit Hilfe eines Lineals und der Autokarte seines Vaters ermittelt. Gehen wir davon aus, daß die Strecke nur auf Zehner genau bestimmt wurde, d. h. die Null der Angabe 380 km nicht mehr *zuverlässig* ist, so liegt der wahre Wert zwischen 375 km und 385 km. Könnte man davon ausgehen, daß man 380 km auf Einer gerundet hätte, wäre die Null eine *zuverlässige* Ziffer, und der wahre Wert läge im Intervall 379,5 km und 380,5 km.

Wie wir sahen, sind die einzelnen Näherungswerte jeweils als Angaben für ein Intervall aufzufassen, in denen der genaue Wert liegt.

Die Gesamtentfernung zu ermitteln, bedeutet wiederum die Angabe eines Intervalls.

Am genauesten erhält man dieses Intervall, indem man die jeweils kleinsten Werte (untere Wertschranken) und die jeweils größten Werte (obere Wertschranken) der einzelnen Intervalle addiert. In unserem Fall müßten wir die untere Wertschranke wie folgt berechnen:

$$41,35 \text{ km} + 375 \text{ km} + 383,5 \text{ km} + 41,75 \text{ km} = 841,6 \text{ km}.$$

Für die obere Wertschranke ergibt sich analog:

$$41,45 \text{ km} + 385 \text{ km} + 384,5 \text{ km} + 41,85 \text{ km} = 852,8 \text{ km}.$$

Wie man sieht, wird mit dem von Klaus ermittelten Wert von 847,2 km ein viel zu kleines Intervall beschrieben, d. h. eine viel zu große Genauigkeit vorgetäuscht, denn mit dem Näherungswert 847,2 km müßte der wahre Wert zwischen 847,15 km und 847,25 km liegen.

Würde man 847,2 km auf 847 km runden, so ist das damit beschriebene Intervall noch immer viel zu klein.

Mit 800 km würde ein zu großes Intervall angegeben, da dieser Näherungswert nur eine zuverlässige Ziffer enthält, nämlich die 8. Will man das Berechnen von Wertschranken umgehen, also von 847,2 km ausgehen, so müßte man dieses Resultat auf 850 km runden. Das mit dieser Zahl angegebene Intervall stimmt zwar auch nicht mit dem durch Wertschranken ermittelten überein, doch kommt es diesem von den in Frage kommenden am nächsten.

Als grobe Faustregel gilt:

(1) Bei der *Addition und Subtraktion* von Näherungswerten ist im Ergebnis höchstens

die Stelle noch zuverlässig, bis zu der *alle* Eingangsdaten zuverlässig sind.

Betrachten wir dazu nochmals die Entfernungsangaben von Klaus. Bei allen Angaben war die Stelle der Zehner mit einer zuverlässigen Ziffer besetzt. Bei den Einern war das (wegen der Entfernungsangabe Halle–Rostock) schon nicht mehr der Fall, d. h., nach (1) ist das Ergebnis auf Vielfache von 10, also auf 850 km zu runden.

Klaus könnte als ermittelte Gesamtstrecke seiner Reise 850 km angeben.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Gib – ausgehend von den Sachverhalten und den vorgegebenen Zahlenwerten – ein Intervall an, in dem der wahre Wert liegt!

- Seitenlänge eines Vierecks: 3,4 cm
- Zuschauerzahl bei einem Fußballspiel: 45000
- Zimmertemperatur (mit einem Zimmthermometer gemessen): 21 °C
- Körpertemperatur (mit einem Fieberthermometer gemessen): 37,0 °C
- Wanderweg: 5,4 km

▲ 2 ▲ Ermittle die Gesamtzuschauerzahl der sechs angegebenen Sportveranstaltungen des Monats Mai auf dem Sportplatz der BSG *Einheit*!

	Zuschauer
1. Mai Volkssportfest	750 auf Vielfache von 10 gerundet
6. Mai Fußballspiel	3000 auf Vielfache von 1000 gerundet
12. Mai Schulsportfest	150 auf Vielfache von 10 gerundet
18. Mai Fußballspiel	1500 auf Vielfache von 1000 gerundet
22. Mai Betriebssportfest	600 auf Vielfache von 100 gerundet
28. Mai Kreismeisterschaft der Leichtathleten	400 auf Vielfache von 100 gerundet.

▲ 3 ▲ Für die Seitenlängen a, b eines Rechtecks wurden folgende Meßergebnisse angegeben: $a = 41 \text{ cm}$, $b = 3,1 \text{ m}$.

Ermittle den Umfang des Rechtecks, und runde sinnvoll!

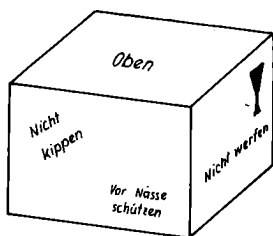
L. Flade



Überraschungen mit einem Würfel

Überall in unserer Umwelt steckt Mathematik. Sogar ein Würfel, wie ihr ihn aus Gesellschaftsspielen oder auch aus einem Kinderbaukasten kennt, birgt einige mathematische Überraschungen. Um die Umwelt zu studieren, darf man sie nicht nur einfach anschauen – man muß sie beobachten. Aber auch das ist zu wenig: Man muß experimentieren.

Für unsere Experimente mit einem Würfel brauchen wir ein Quadratgitter – ein Blatt quadratisch karierten Papiers, bei dem die Seitenlängen der Quadrate mit der Kantenlänge unseres Würfels übereinstimmen. Auf diesem Gitter werden wir den Würfel bewegen.



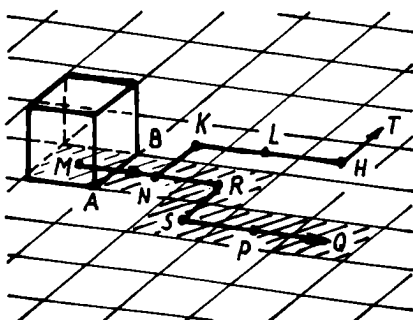
Der Würfel zeichnet sein Netz

Wir legen den Würfel auf das Quadrat mit dem Mittelpunkt M (Bild 1); dann drehen wir den Würfel um 90° um seine Kante AB , die mit einer Seite des Gitters zusammenfällt (d.h., wir kippen ihn um die Kante AB). Der Würfel liegt jetzt mit einer anderen Fläche auf dem Quadrat mit dem Mittelpunkt N . Diesem Kippen kann man die Strecke MN zuordnen.

Wir führen nun fünf aufeinanderfolgende Kippungen aus, die durch den Streckenzug $MNRSPO$ festgelegt sind. Bei dieser Bewegung berührt der Würfel nacheinander sechs Quadrate des Gitters, diese bilden ein Vieleck (schraffierte Fläche in Bild 1). Überprüft durch ein Experiment, daß dabei jede Begrenzungsfläche des Würfels das Netz genau einmal berührt! Das schraffierte Vieleck ist deshalb ein Netz des Würfels.

Es ist leicht einzusehen, daß auch der Streckenzug $MNKLHT$ ein Netz des Würfels festlegt, das jedoch vom ersten verschieden ist.

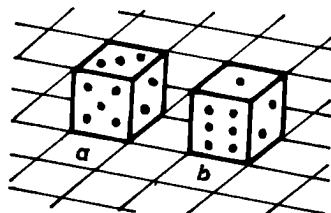
Bild 1



▲1▲ Findet durch fortlaufendes Kippen des Würfels experimentell noch zwei seiner Netze, die von den beiden aus Bild 1 verschieden sind!

▲2▲ Im Bild 2 ist ein und derselbe Spielwürfel in zwei verschiedenen Lagen dargestellt. Welche seiner Begrenzungsflächen trägt die „4“?

Bild 2



▲3▲ Ein Spielwürfel befindet sich in der linken unteren Ecke eines 3×10 -Gitters (3 Spalten aus je 10 quadratischen Feldern) in der in Bild 2a angegebenen Ausgangslage. Kann der Würfel (durch fortlaufendes Kippen) über alle Felder des Gitters laufen, wenn er kein Feld mit der „3“ berühren darf?

Der Würfel färbt die Ebene

Beschäftigen wir uns jetzt mit einem Würfel mit verschiedenfarbigen Begrenzungsflächen. Wir nehmen an, daß jede Fläche des Würfels das Feld des Gitters, das sie gerade berührt, mit der entsprechenden Farbe einfärbt. Auf jedem Quadrat soll sich der Würfel nur einmal aufhalten dürfen.

Nun lösen wir gemeinsam die folgende Aufgabe:

▲4▲ Kann ein Würfel mit verschiedenfarbigen Begrenzungsflächen, der fortlaufend um jeweils eine seiner Kanten gekippt wird, ein 4×4 -Gitter so einfärben, daß es keine benachbarten gleichfarbigen Quadrate gibt?

Das Besondere des aufgeworfenen Problems kann man sich am leichtesten auf experimentellem Wege klarmachen, indem man zunächst kleinere Gitter betrachtet: Beim Überstreichen eines 2×2 -Gitters sind das erste und das letzte Quadrat stets sowohl benachbart als auch gleichfarbig. Es ist also nicht möglich, eine scharfe Kurve des Typs $RNKL$ (Bild 1) durch fortlaufendes Kippen zu beschreiben. Aber ohne solche scharfen Kurven kann man auch kein 3×3 -Gitter und kein 4×4 -Gitter überstreichen. Folglich kann man keine Färbung, wie sie in Aufgabe 4 gefordert wird, erhalten.

▲4a▲ Löst Aufgabe 4 für ein 5×5 -Gitter!

▲5▲ Kann ein Würfel mit verschiedenfarbigen Begrenzungsflächen durch fortlaufendes Kippen alle Felder eines 4×5 -Gitters so überstreichen, daß dieses Gitter mit nur 5 Farben eingefärbt wird?

Wir kippen einen Spielwürfel

In den folgenden Aufgaben geht es wieder um einen Spielwürfel, wie er in Bild 2 dargestellt ist. Wir vereinbaren einige Regeln, nach denen der Würfel zu kippen ist:

(1) Ausgangslage ist jeweils die in Bild 2a angegebene Stellung des Würfels.

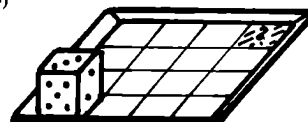
(2) Der Würfel darf nur nach rechts oder nach oben gekippt werden.

(3) Auf jedem Feld des Gitters darf sich der Würfel nur einmal befinden.

Wir beginnen mit folgender Frage:

▲6▲ Der Würfel befindet sich in Ausgangslage im linken unteren Feld eines 4×4 -Gitters. Kann man ihn nach unseren Regeln so in die rechte obere Ecke des Gitters bringen, daß der Würfel dann auf der „3“ liegt? (Bild 3)

Bild 3



Auch jetzt ist es zweckmäßig, zunächst 2×2 - bzw. 3×3 -Gitter zu betrachten. Ein Versuch zeigt, daß der Würfel nur diejenigen Quadrate mit seiner „3“ berührt, die in der 3. Vertikalen oder in der 3. Horizontalen (von unten gezählt) liegen. Demzufolge ist die aufgeworfene Frage negativ zu beantworten.

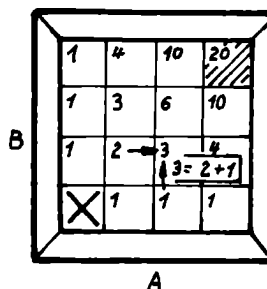
Ein weiteres Problem:

▲7▲ Wir haben wieder wie in Bild 3 ein quadratisches 4×4 -Gitter, in dessen linker unterer Ecke ein Würfel liegt.

Ermittelt für jedes Feld des Gitters, auf wieviel voneinander verschiedene Arten man den Würfel nach unseren Regeln in dieses Feld bringen kann!

Experimentiert mit dem Würfel, bevor ihr die Antwort auf Bild 4 anseht! Habt ihr die Gesetzmäßigkeit erkannt, die in diesem Bild steckt? In jedem Feld ist die eingetragene Zahl gleich der Summe der beiden Zahlen, die in den unmittelbar unter bzw. links von diesem Feld liegenden Feldern stehen.

Bild 4



▲8▲ Ein Spielwürfel befindet sich in Ausgangslage im linken unteren Feld eines 4×4 -Gitters. Auf welche Felder des Gitters kann man den Würfel nach unseren Regeln bringen, so daß er sich dort wieder in Ausgangslage befindet? Beantwortet diese Frage auch für ein 5×5 -Gitter!

F. Bartenew

In freien Stunden • alpha-heiter



aus: Dikobraz, Prag

Die Null auf der Bank

Auf einer Bank im Sonnenschein
saß – wertlos – eine Null allein,
und niemand nahm von ihr Notiz,
nicht ein Passant, nicht die Miliz.

Da kam die Eins des Wegs daher,
zur Bank, die sozusagen leer.
Und setzt' sich ohne weitem Sinn
vor jene Null ganz einfach hin.

Im Augenblick war's eine Zehn,
und eine Frau blieb vor ihr stehn.
Sie hat dann sofort nachgedacht
und eine zweite Null gebracht,

woraus die Hundert nun entstand
und allgemeinen Beifall fand.
Denn wer vorbeikam, dem gefiel
das attraktive Zahlenspiel.

Sechs Nullen waren angehängt
und hatten sich kaum angestrengt.
Die Eins, die sprang zur Seite,
und jene Bank war pleite.

E. Winkler, aus: Eulenspiegel

Teilbarkeitsregel

Welche beiden Ziffern muß man

a) vor die Zahl 1983,

b) hinter die Zahl 1983

setzen, damit die so entstehende fünfstellige Zahl
durch 101 teilbar ist?

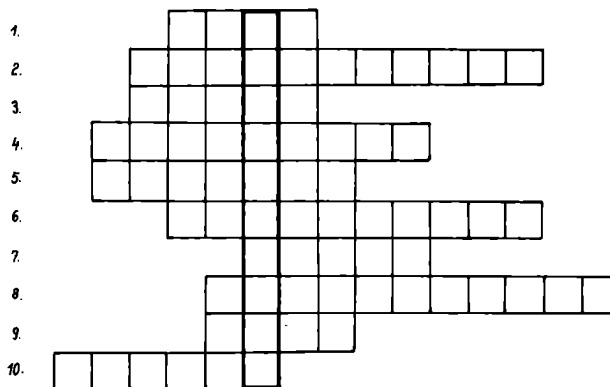
Dr. J. Riehl, EOS Egelu

Kannenknobelei

Aus einer Molkerei werden 7 volle und 7 halbvoll
Kannen Magermilch sowie 7 leere Kannen an drei
LPG (Landw. Produktionsgenossenschaft) zurück-
geliefert. Die Kannen sollen so aufgeteilt werden, daß
jede Genossenschaft die gleiche Menge Magermilch
und die gleiche Anzahl Kannen erhält, ohne daß eine
Umfüllung notwendig ist. Wieviel volle, halbvoll und
leere Kannen muß jede LPG bekommen?

aus: NBI

Rätselspaß



1. Linie im Dreieck; 2. trennt Zähler und Nenner; 3.
ein Drachenviereck hat sie immer; 4. Dreieck hat
keine, Viereck hat zwei, Fünfeck hat fünf ...; 5. Vier-
eck; 6. Festlegung; 7. Seite eines gleichschenkligen
Dreiecks; 8. Rechenoperation; 9. wahre Aussage;
10. Körper

Bezirksklub Junger Mathematiker,
Halle, Klassenstufe 6

Auf Pilzsuche

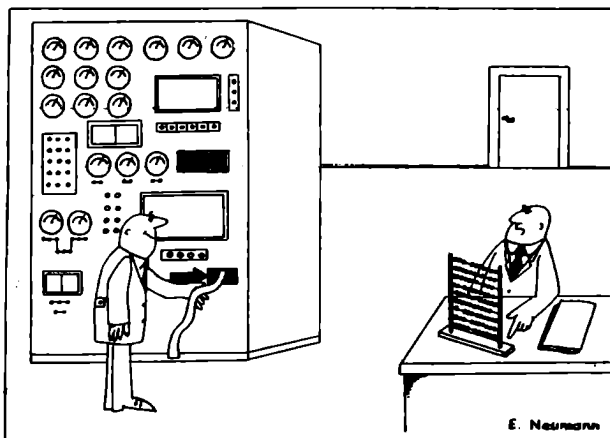
5 Väter und 5 Söhne gingen in den Wald und sammel-
ten Pilze.

Obwohl jeder einen Korb voll gesammelt hatte, stan-
den am Schluß nur 6 Körbe vor der Datsche. Wie
kann das sein?

Schülerin Andrea Leuschke, Aue

„Stimmt!“

E. Neumann, aus NBI



Zahlenpyramide

Die Buchstaben in dem Namen des deutschen Mathematikers J. H. LAMBERT (1728 bis 1777) und der Buchstabe X sind so durch Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß nachfolgende Gleichungen zu wahren Aussagen werden. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{aligned} J \cdot T &= T \\ JH \cdot T &= JXR \\ JHL \cdot T &= JJXE \\ JHLA \cdot T &= JJJXB \\ JHLAM \cdot T &= JJJXM \\ JHLAMB \cdot T &= JJJJXA \\ JHLAMBE \cdot T &= JJJJJXL \\ JHLAMBER \cdot T &= JJJJJJXH \\ JHLAMBERT \cdot T &= JJJJJJJXJ \end{aligned}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Welcher Beruf – Welches Studienthema?

EVA D. FECHTER
BARI

ING. ANITA SCHENK-RUHM
STENDAL

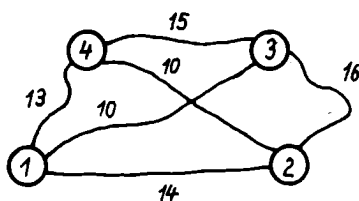
WIM KLUNG
ESSEN

HELI C. BRÜZ
EDAM

Fachlehrer D. Knappe, Jessen

Rundreiseproblem

Gegeben sind 4 Städte, jede ist mit jeder durch eine Straße bekannter Länge verbunden, und ein Wanderer will von der Stadt 1 aus alle Städte auf einer kürzesten Route aufsuchen und wieder zur Stadt 1 zurückkehren. Welches ist die kürzeste Länge des Wanderweges?



Aus der math. Schülerzeitschrift Wurzel, Universität Jena

Neue Begriffe

Boxreportage – Faustskizze

Taucherfahrung – Grundkenntnisse

Wer sendet der Redaktion *alpha* weitere neue mathematikintensive Begriffe?

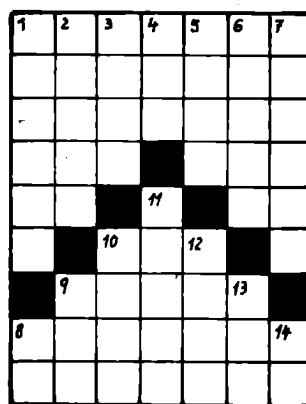
Neues vom Juli

Angesichts der Tatsache, daß vor zwei Wochen noch Juni war und in drei Wochen schon wieder August ist, muß man doch sagen, daß der Juli ganz schön in der Klemme steckt.

Rätselfigur

Rauf und runter: Erster Begriff – von oben nach unten, zweiter Begriff – von unten nach oben:

1. Alpenhirt/Stadt in Frankreich, 2. Stadt im Ruhrgebiet/Fluß im Bezirk Erfurt, 3. Wiesenpflanze/Bestattungsbehältnis, 4. Kurzzeichen für „modulo“/ein Münster, 5. Einhufer/Weinernte, 6. kosmisches Gebilde/Bewegungs- und Existenzform der Materie, 7. gerbsaures Salz/wie v.o.n.u., 8. Hilfspunkt für Vermessungsarbeiten (Abk.)/Metall (chem. Formelz.), 9. Personalpronomen/Wasser in festem Zustand, 10. Stadt in Jugoslawien/Fluß in der Sowjetunion, 11. Ureinwohner Afrikas/Niederschlag, 12. ein Verb (Imperativ)/Schnur, 13. griechischer Buchstabe/Sinnesorgan, 14. eisenähnliches Metall (chem. Formelz.)/Energieeinheit.

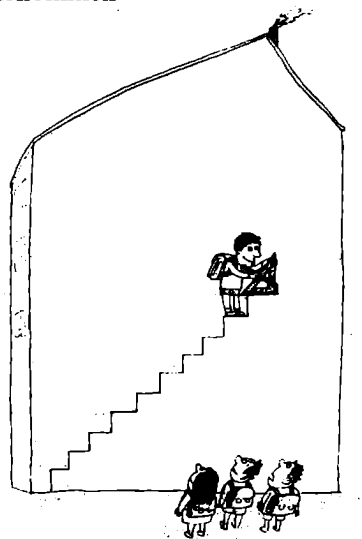


Bei richtiger Auflösung ergeben sich in der ersten Zeile ein Kreis- oder Kugelabschnitt und in der letzten Zeile ein Mathematiker und Statistiker (1857 bis 1936) (siehe schattierte Zeilen!).

Dr. R. Mildner,

Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

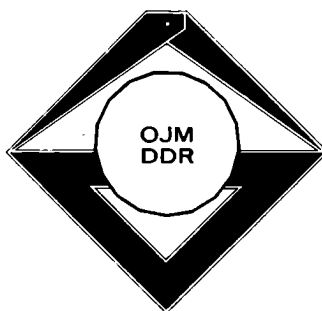
Weiterkommen



Nabil El-Solami, aus Elternhaus und Schule

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)



Aufgaben

Olympiadeklasse 7

220731 Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D ; die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 M zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

- Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?
- Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

220732 Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, daß die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

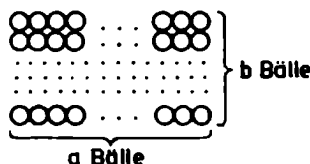
- Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!
- Beweise, daß bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

220733 Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5,0$ cm, $b = 3,5$ cm, $c = 2,5$ cm und $h = 3,0$ cm! Dabei seien a die Länge der Seite AB , b die der Seite BC , c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

220734 Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleich großen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie das Bild zeigt. Die Anzahl a und die Anzahl b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechende Anzahl in der darunterliegenden Schicht. In der untersten Schicht ist

10 die kleinere der beiden Zahlen a, b . In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Zahlen a, b .



Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

220735 Beweise folgenden Satz!

Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

220736 Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt: M ist der Mittelpunkt der Strecke AB ; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB ; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CMD$ sind einander gleich groß.

Zeige, daß durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

Olympiadeklasse 8

220831 Cathrin fragte an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete: „Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl.“

Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?

Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11, sondern 1911.

220832 a) Beweise, daß für $n = 2, 3, 4$ und 5 der folgende Satz gilt: Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.

b) Ermittle unter den Zahlen $n = 2, 3, 4, 5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

220833 Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b = 6$ cm! Dabei sei b die Länge der Seite BC . Die geforderten Eigenschaften sind:

- Es gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.
- Es gilt $\overline{AB} : \overline{DC} = 2 : 1$.
- Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

220834 Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit $250 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B . Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B !

220835 Der Zentriwinkel $\angle ASB$ eines Kreissektors s betrage 60° . In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\widehat{AB}$ von innen berührt.

Wieviele Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k ?

220836 Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S .
- Derjenige Teilbogen von A nach B , der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
- Derjenige Teilbogen von C nach D , der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\angle ASD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

gilt!

Olympiadeklasse 9

220931 Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z , die die Gleichung

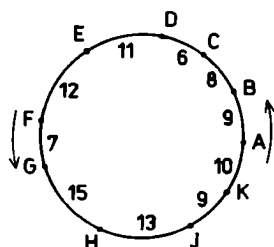
$$z = (a + b)^c$$

erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

220932 Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, daß der Kreis k_2 durch den Punkt M_1

geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1, k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 bzw. P_2 genannt. Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

220933 Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße von 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K . Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich. Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, daß ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglänge zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, daß es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)

Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

220934 Jens behauptet, daß man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Dirk behauptet dagegen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

220935 Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q .

Beweisen Sie, daß für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $\overline{PS}^2 + \overline{QS}^2$ denselben Wert hat!

Ermitteln Sie diesen Wert!

Hinweise: 1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.

2. Streckenlängen, z. B. $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

220936 Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ und $\overline{BC}=a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R . Ermitteln Sie die Länge $\overline{QR}$ in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

Olympiadeklasse 10

221031 Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$ und $x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$ gilt!

221032 Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k . Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, daß M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.

Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!

Wenn für einen Punkt P , der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\sphericalangle APB$ halb so groß ist wie $\sphericalangle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k .

221033 Beweisen Sie, daß $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

221034 Beweisen Sie folgende Aussage!

In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, daß je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

221035 Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

221036 Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.

Beweisen Sie, daß es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt! Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a !

Olympiadeklassen 11/12

221231 Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55, \\ 2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60, \\ 3x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 33x_4 + 43x_5 &= 65, \\ 4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70, \\ 5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75 \end{aligned}$$

zu ermitteln.

221232 Man ermittle für alle diejenigen 30-tupel $(a_1, a_2, \dots, a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i

($i = 1, \dots, 30$), die $\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$ erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

221233A a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:

In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks $F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:

In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks $F \leq q \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

221233B Man beweise:

a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}. \quad (1)$$

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K , die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt.

Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s , wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

221234 Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichne f die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f(x) = \sin \frac{c}{x}$$

definierte Funktion.

Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.

a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c , für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.

b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, daß f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat. Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f .

221235 a) Man beweise: Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y , die nicht beide 0 sind, $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$.

b) Man beweise: Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x, y -Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0; 0)$ zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften: Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$; für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

221236 Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden. Zu jedem Schloß soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloß passen soll. Elf Personen sollen derartiger Schlüssel erhalten, aber nicht jede

Person für jedes Schloß. Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:

- Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloß auch ein passender Schlüssel;

immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloß keinen passenden Schlüssel.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

Leserpost

... Mit meinen Schulklassen habe ich in diesem Jahr (1981/82) geschlossen am Wettbewerb teilgenommen, so daß alle die Minimalforderungen erfüllen. Zwei meiner Schüler der 5. Klasse sind so gefesselt, daß sie ohne Aufforderung sich gegenseitig so antreiben im Lösen der Aufgaben, um meinen eigenen Aufgabenrekord von 32 Aufgaben vor 11 Jahren in einem Jahr zu brechen. Einer hat es geschafft, 64 dieses Jahr selbständig ohne Hilfe der Eltern, nur mit einigen Hinweisen in der Schule, zu lösen...

Mit freundlichen Grüßen,
Ihre ganz jungen Kollegen Hartwig
und Birgit Göpfert geb. Krötenheerdt,
Stadtroda

...Lehrreiche Berichte mit anschließendem Quellenhinweis lese ich aufmerksam und besorge mir die entsprechende Lektüre...

Schüler Steffen Padelt, Berlin-Buch

...Seit 1977 nehme ich am *alpha*-Wettbewerb teil. Zur Zeit bin ich Studentin an der Fachschule für Kindergärtnerinnen in Berlin. Ich bleibe der *alpha* nach wie vor treu...

Petra Köbke, Oranienburg

...Mir imponiert immer wieder das Niveau und die Vielseitigkeit der gestellten Wettbewerbsaufgaben...

Schüler Rolf Kuhn, Leipzig

...Liebe *alpha*! Ich sah Dich zufällig in einem Zeitungskiosk und kaufte Dich aus Neugier. Deinen Wettbewerb machte ich erfolgreich mit... Ich war dann aber schlauer und abonnierte Dich.

Schülerin Daniele Burkhardt,
W.-P.-Stadt Guben

...Ich hatte wieder viel Freude an den gestellten Aufgaben. Da sie sich nicht so einfach in das Schema eines gerade behandelten Stoffgebiets einfügen lassen, waren sie mir eine große Hilfe in Vorbereitung auf das Abitur...

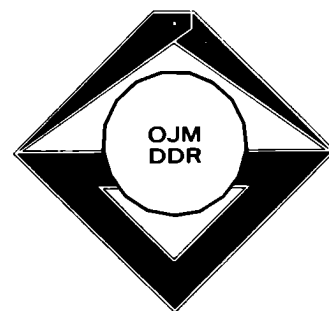
Schülerin Uta Bolz, Cottbus

...Wir haben gern gearbeitet, mit Fleiß, Ausdauer und manchmal heftigen Diskussionen die Lösungen gesucht. Auch im kommenden Jahr sind wir dabei...

AG Mathe, Kl. 6a, OS Staßfurt

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade) Lösungen



Olympiadeklasse 5

220521 Es gibt genau die folgenden Verteilungen der geforderten Art:

A	0	0	0	0	1	1	2
B	0	1	2	3	1	2	3
C	7	6	5	4	5	4	3

220522 Wegen $2 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 10 = 100 + 120 + 120 + 10 = 350$ wurden 350 cm Schnur verwendet.

220523 Wegen $650 - 100 = 550$ sind 550 Schüler Mitglied mindestens je einer Arbeitsgemeinschaft. Wegen $550 - 400 = 150$ sind von diesen 550 Schülern 150 Mitglieder nur in einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

Unter den 500 Mitgliedern von Sport-Arbeitsgemeinschaften sind wegen $500 - 150 = 350$ folglich 350 Schüler auch Mitglied je einer anderen Arbeitsgemeinschaft.

220524 Wegen $2 \cdot 7 + 5 = 19$ kosten die 7 Bleistifte und 5 Hefte ebensoviel wie 19 Hefte. Wegen $380 : 19 = 20$ kostet ein Heft folglich 20 Pf. Wegen $2 \cdot 20 = 40$ kostet also ein Bleistift 40 Pf.

Olympiadeklasse 6

220621 Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:

$$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280 \text{ cm}^2 = 2140 \cdot 280 \text{ cm}^2 = 599200 \text{ cm}^2,$$

das sind 59,92 m², also rund 60 m².

Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund $L_W = 60 \cdot (28 + 26 + 83) \text{ Pf} = 60 \cdot 137 \text{ Pf} = 8220 \text{ Pf}$, das sind 82,20 M.

Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten:

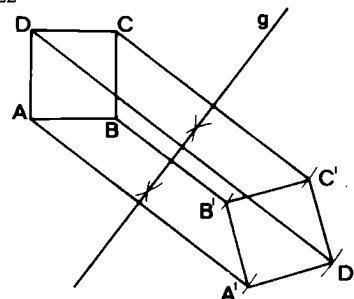
$$A_D = (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350) \text{ cm}^2 = (550 + 170) \cdot 350 \text{ cm}^2 = 720 \cdot 350 \text{ cm}^2 = 252000 \text{ cm}^2,$$

das sind 25,2 m², also rund 25 m².

Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit rund $L_D = 25 \cdot (28 + 26 + 112) \text{ Pf} = 25 \cdot 166 \text{ Pf} = 25 \cdot 166 \text{ Pf} = 4183 \text{ Pf}$, das sind 41,83 M.

Die gesamten Lohnkosten L betragen daher $L = (82,20 + 41,83) \text{ M} = 124,03 \text{ M}$, das sind rund 124 M.

220622



220623 Ein Lösungsweg:

Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie $3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$. Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müßte der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht. Also muß der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, daß auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

220624 Aus (7) folgt $c > a$,
aus (1) folgt $a > e$,
aus (4) folgt $e > d$,
aus (6) folgt $d > b$.

Daher können nur bei der Anordnung $c > a > e > d > b$

die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein.

Sie sind erfüllbar, z. B. durch $b = 1, d = 2, e = 4, a = 8, c = 16$; denn

- 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,
- 1 ist ein Teiler von 16,
- 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,
- 2 ist ein Teiler von 4,
- 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1,
- 1 ist ein Teiler von 2,
- 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8,
- 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

Olympiadeklasse 7

220721 1. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Die aus den letz-

ten drei Ziffern von z gebildete Zahl ist eine der Zahlen
 $5^3 = 125, 6^3 = 216, 7^3 = 343, 8^3 = 512, 9^3 = 729$;
 denn wegen $4^3 < 100$ und $10^3 > 999$ sind dies
 die einzigen dreistelligen Kubikzahlen.

Da z und somit die letzte Ziffer von z gerade
 ist, verbleiben nur die Möglichkeiten 216 und
 512 für die letzten drei Ziffern von z . Also
 endet die aus den ersten drei Ziffern von z ge-
 bildete Zahl auf 2 oder 5. Es gibt aber keine
 Quadratzahl, die auf 2 endet; denn endet eine
 natürliche Zahl a auf

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9,

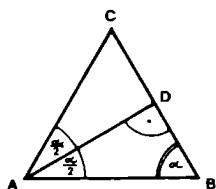
so endet ihre Quadratzahl auf

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 bzw. 1.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit 512 für
 die letzten drei Ziffern von z , und die ersten
 drei Ziffern bilden eine auf 5 endende Qua-
 dratzahl, also eine der Zahlen $5^2, 15^2, 25^2,$
 $35^2, \dots$. Von diesen sind wegen $5^2 < 100$ und
 $35^2 > 999$ nur $15^2 = 225$ und $25^2 = 625$ drei-
 stellig.

Damit ist gezeigt, daß nur 22512 und 62512
 die geforderten Eigenschaften haben können.
 II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie
 sind gerade und fünfstellig, sie enthalten die
 Ziffer 0 nicht, 225 sowie 625 sind Quadrat-
 zahlen, und 512 ist eine Kubikzahl.
 Also sind genau 22512 und 62512 die ge-
 suchten Zahlen.

220722 Ist $\angle BAC = \alpha$, so folgt aus (1), daß
 auch $\angle ABC = \alpha$ (3)



gilt (Basiswinkel im gleichschenkligen Drei-
 eck). Ist ferner D der Schnittpunkt von BC
 mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$, so
 folgt aus (2) und (3), daß

$$\frac{\alpha}{2} + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

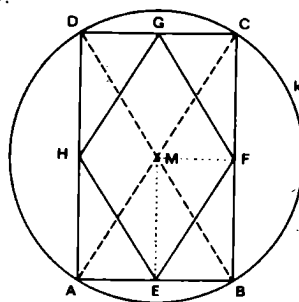
gilt (Winkelsumme im Dreieck ABD). Daher
 ist $\frac{3}{2} \cdot \alpha = 90^\circ$, also $\angle BAC = \alpha = 60^\circ$, nach (3)
 daher auch $\angle ABC = 60^\circ$.

Mithin ist das Dreieck ABC gleichseitig und
 somit nicht rechtwinklig. Folglich ist Veras
 Behauptung wahr, Ursels und Werners Be-
 hauptungen sind falsch.

Andere Beweismöglichkeiten: Aus (2) folgt
 $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$.
 Hiernach und wegen $\overline{AD} = \overline{AD}$ gilt $\triangle ABD$
 $\cong \triangle ACD$ (wsw), also $\overline{AB} = \overline{AC}$. Daher und
 nach (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig.

220723 Der Mittelpunkt von k sei M . Im
 gleichschenkligen Dreieck ABM (mit $\overline{AM}$
 $= \overline{BM} = r$) ist die Seitenhalbierende ME zu-
 gleich Höhe, also gilt $\angle MEB = 90^\circ$. Ent-
 sprechend folgt $\angle MFB = 90^\circ$. Da ferner nach
 Voraussetzung auch $\angle EBF = \angle ABC = 90^\circ$

ist, ist $EBFM$ ein Rechteck. In ihm sind die
 Diagonalen gleich lang, also gilt $\overline{EF} = \overline{MB} = r$.
 Entsprechend ergibt sich $\overline{FG} = r$, $\overline{GH} = r$ und
 $\overline{HE} = r$.



Damit ist die Behauptung $\overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH}$
 $+ \overline{HE} = 4r$ bewiesen.

220724 Natürliche Zahlen a, b, c erfüllen
 genau dann die Forderung (2), wenn für sie
 die Gleichungen

$$abc = 270, \quad (3)$$

$$a + b + c = 20, \quad (4)$$

gelten.

I. Wenn natürliche Zahlen a, b, c die Bedin-
 gungen (1), (3), (4) erfüllen, so folgt:

Nach (3) sind a, b, c von 0 verschieden; hier-
 nach und wegen (1), (4) gilt

$$0 < a < b < c < 20. \quad (5)$$

Die einzigen Teiler von 270 zwischen 0 und
 20 sind

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 und 18. (6)

Die einzigen Möglichkeiten, aus diesen Zah-
 len zwei als a und b mit $a < b$ so auszuwählen,
 daß die – nach (4) erhaltene – Zahl $c = 20 - a$
 $- b$ auch $b < c$ erfüllt, sind in der folgenden
 Tabelle angegeben. Für diejenigen a, b , für die
 auch diese Zahl $c = 20 - a - b$ eine der Zahlen
 (6) ist, wird dann geprüft, ob auch $abc = 270$
 gilt:

a	b	c	abc
1	1	1	1
1	2	1	2
1	3	1	3
1	5	1	5
1	6	1	6
1	9	1	9
1	10	1	10
1	15	1	15
1	18	1	18
2	2	1	4
2	3	1	6
2	5	1	10
2	6	1	12
2	9	1	18
2	10	1	20
2	15	1	30
2	18	1	36
3	3	1	9
3	5	1	15
3	6	1	18
3	9	1	27
3	10	1	30
3	15	1	45
3	18	1	54
5	5	1	25
5	6	1	30
5	9	1	45
5	10	1	50
5	15	1	75
5	18	1	90
6	6	1	36
6	9	1	54
6	10	1	60
6	15	1	90
6	18	1	108
9	9	1	81
9	10	1	90
9	15	1	135
9	18	1	162
10	10	1	100
10	15	1	150
10	18	1	180
15	15	1	225
15	18	1	270
18	18	1	324

Es ergibt sich, daß nur $a = 5, b = 6, c = 9$ die
 Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es
 gilt $5 < 6 < 9, 5 \cdot 6 \cdot 9 = 270, 5 + 6 + 9 = 20$.
 Damit ist gezeigt: Es gibt Zahlen, die die For-
 derungen (1), (2) erfüllen, sie sind durch diese
 Forderungen eindeutig bestimmt und lauten
 $a = 5, b = 6, c = 9$.

Olympiadeklasse 8

220821 Ein Lösungsweg:

a) Für das Jahr 1981 gilt: Da (1) wahr ist, folgt:
 Anke fährt an die Ostsee. (3)

Da (2) falsch ist, folgt: Christine fährt nicht in
 den Thüringer Wald. Daraus und aus (3) er-
 gibt sich:

Christine fährt in die Sächsische
 Schweiz. (4)

Nach (3) und (4) verbleibt nur noch:

Birgit fährt in den Thüringer Wald. (5)

Damit ist bewiesen, daß sich für 1981 die
 Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig
 ermitteln lassen. Sie lauten wie in (3), (4), (5)
 angegeben.

b) Für das Jahr 1982 gilt: Da (1) falsch ist,
 fährt Anke nicht an die Ostsee. Würde sie in
 den Thüringer Wald fahren, so könnte Chri-
 stine nicht dorthin und Anke nicht in die
 Sächsische Schweiz fahren, also wäre (2)
 dann falsch. Damit ist gezeigt:

Anke fährt in die Sächsische
 Schweiz. (6)

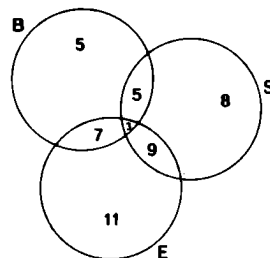
Bereits mit (6) ist erreicht, daß (1) falsch und
 (2) wahr ist. Dies gilt daher bei jeder der bei-
 den nach (6) noch möglichen Verteilungen der
 Reiseziele (Birgit an die Ostsee, Christine in
 den Thüringer Wald oder umgekehrt). Damit
 ist für 1982 bewiesen:

Die Reiseziele von Birgit und Christine lassen
 sich nicht eindeutig ermitteln; das Reiseziel
 von Anke läßt sich dagegen eindeutig ermit-
 teln, es lautet, wie in (6) angegeben.

220822 Die gesuchten Eintragungen kön-
 nen durch folgende Rechenschritte gefunden
 werden:

Anzahl	Gesuchte Antworten	Folgerung aus	Berechnung
1	(A)Ja, (B)Ja, (C)Nein	4,7	$8-3=5$
2	(A)Ja, (B)Nein, (C)Ja	6,7	$10-3=7$
3	(A)Nein, (B)Ja, (C)Ja	5,7	$12-3=9$
4	(A)Ja, (B)Nein, (C)Nein	1,7,8,9	$20-3-5-7=5$
5	(A)Nein, (B)Ja, (C)Nein	2,7,8,10	$25-3-5-9=8$
6	(A)Nein, (B)Nein, (C)Ja	3,7,9,10	$30-3-7-9=11$
7	Keine Ja	7, ..., 11	$50-3-5-7-9-11=12$
8	Genau einmal Ja	11, 12, 13	$5+6+11=24$
9	(B)Ja und (B)Nein	9, 11	$7+5=12$
10	(A)Ja oder (C)Ja	7, ..., 11, 13	$3+5+7+9+11=40$

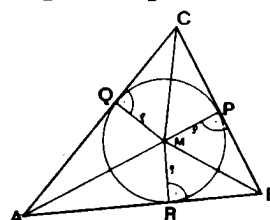
Andere Darstellungen des Lösungsweges, z. B.
 in Textformulierung oder mit einem Mengen-
 diagramm (siehe Bild), sind ebenfalls möglich
 und zulässig.



220823 Es sei ABC ein beliebiges Dreieck.
 Sein Inkreis habe den Mittelpunkt M und
 berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in P, Q
 bzw. R . Dann ist $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = u$ und
 $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR} = r$.

Ferner gilt nach dem Satz über Tangente und
 Berührungsradius $MP \perp BC, MQ \perp CA, MR \perp$
 AB . Die Dreiecke BCM, CAM bzw. ABM
 haben folglich die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{MP}, \frac{1}{2} \overline{CA} \cdot \overline{MQ}, \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{MR}.$$



Andererseits ist die Summe dieser Flächeninhalte gleich F ; daher gilt

$$F = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot q + \frac{1}{2} \overline{CA} \cdot q + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot q = \frac{1}{2} u \cdot q.$$

Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung

$$q = \frac{2F}{u}.$$

220824 Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, so folgt:

Da AE nach (2) Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ ist, gilt

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD. \quad (3)$$

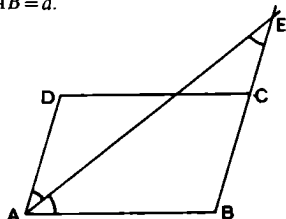
Ferner sind $\sphericalangle EAD$ und $\sphericalangle BEA$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also ist

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle BEA. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BEA,$$

also ist das Dreieck ABE gleichschenkelig mit $\overline{BE} = \overline{AB} = a$.



Aus (2) folgt somit

$$a = \overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = b + 3 \text{ cm, d. h.}$$

$$a - b = 3 \text{ cm.} \quad (5)$$

Wegen der gleichen Länge der Gegenseiten im Parallelogramm ist nach (1) mithin

$$a + b = 18 \text{ cm.} \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt durch Addition $2a = 21 \text{ cm}$, also $a = 10,5 \text{ cm}$ und damit aus (5) $b = (10,5 - 3) \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$. Somit ist bewiesen, daß durch (1), (2) die Seitenlängen a, b eindeutig bestimmt sind. Sie betragen $a = 10,5 \text{ cm}$ $b = 7,5 \text{ cm}$.

Olympiadeklasse 9

220921 I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1), (2) genügt, so folgt: Nach (2) ist die Zahl $(n-1)(n+1)$ durch 10 teilbar, also gerade. Folglich ist (mindestens) eine der Zahlen $n-1, n+1$ gerade. Somit ist n ungerade und daher $n-9$ gerade. Da aber 2 die einzige gerade Primzahl ist, so folgt aus (1), daß $n-9=2$ und daher $n=11$ sein muß. Also kann nur die Zahl $n=11$ den Bedingungen (1), (2) genügen.

II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn für $n=11$ ist $n-9=2$ eine Primzahl, und $n^2-1=120$ ist durch 10 teilbar.

Daher genügt genau die Zahl $n=11$ den Bedingungen (1), (2).

220922 Es gilt

$$a = \frac{(x+y\sqrt{z})^2 + (x+y\sqrt{z})^2}{2} = x^2 + y^2z, \quad (1)$$

$$b = \frac{x^2 + 2xy\sqrt{z} + y^2z - x^2 + 2xy\sqrt{z} - y^2z}{\sqrt{z}} \quad (2)$$

$$= 2xy,$$

$$c = (x^2 + y^2z)^2 - (x^2 - y^2z)^2. \quad (3)$$

Da x, y, z natürliche Zahlen sind, folgt aus (1), (2), (3), daß auch a, b, c natürliche Zahlen sind. Ferner ergibt sich

$$c = 4x^2y^2z = 2xy \cdot 2xyz,$$

$$c = b \cdot 2xyz. \quad (4)$$

Da $2xyz$ ganzzahlig ist, folgt aus (4), daß b ein Teiler von c ist. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

220923 Aus den Voraussetzungen (1) bis (4) folgt:

Die Strecken PR und QS schneiden sich in einem Punkt E . Es gilt

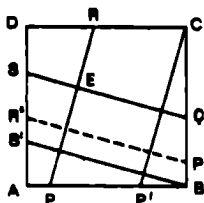
$$\sphericalangle BPR = 180^\circ - \sphericalangle APE \text{ (Nebenwinkel)}$$

$$= \sphericalangle ASQ \text{ (Winkelsumme im Viereck)}$$

$APES$ mit rechtem Winkel bei A und wegen (5) bei E).

Nun gibt es nur die folgenden drei Fälle:

1. Fall: $\sphericalangle BPR = 90^\circ$.



In diesem Fall sind BP und AS Rechtecke. Daher gilt

$$\overline{PR} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{QS}.$$

2. Fall: $\sphericalangle BPR < 90^\circ$.

In diesem Fall schneidet die Parallele durch C zu PR die Strecke PB in einem Punkt P' zwischen P und B , und die Parallele durch B zu QS schneidet die Strecke AS in einem Punkt S' zwischen A und S . Hiernach gilt einerseits

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPR \text{ (Stufenwinkel)}$$

$$= \sphericalangle ASQ = \sphericalangle AS'B \text{ (Stufenwinkel)}$$

sowie $\sphericalangle P'BC = \sphericalangle S'AB = 90^\circ$ und $\overline{BC} = \overline{AB}$, also $\triangle P'BC \cong \triangle S'AB$ (sww) und daher

$$\overline{P'C} = \overline{S'B}. \quad (6)$$

Andererseits sind $PP'CR$ und $SS'BQ$ Parallelogramme, also ist

$$\overline{PR} = \overline{P'C}. \quad (7)$$

$$\text{und } \overline{QS} = \overline{S'B}. \quad (8)$$

Aus (6), (7), (8) folgt $\overline{PR} = \overline{QS}$.

3. Fall: $\sphericalangle BPR > 90^\circ$.

In diesem Fall ist $\sphericalangle APR < 90^\circ$. Daher läßt sich wie im 2. Fall, nur mit vertauschten Bezeichnungen, $\overline{PR} = \overline{QS}$ beweisen.

Somit gilt für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, die Aussage $\overline{PR} = \overline{QS}$.

220924 I. Wenn eine Markierung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:

Es trifft nur einer der beiden folgenden Fälle zu:

Fall 1: Das Feld c3 ist markiert.

Dann kann in Zeile 1 nur eines der Felder b1, d1 markiert sein; denn a1 und e1 liegen jeweils in derselben Diagonale und c1 in derselben Spalte mit c3. Durch Spiegelung, die c3 festläßt, kann gegebenenfalls erreicht werden, daß b1 markiert ist.

Hiernach bleibt in Zeile 5 für eine Markierung nur noch d5; denn a5 und e5 liegen jeweils in derselben Diagonale, c5 in derselben Spalte mit c3, und b5 liegt in derselben Spalte mit b1.

In Zeile 2 kann dann nur eines der Felder a2, e2 markiert sein. Das führt auf die beiden Markierungen in Bild a, b. Sie sind voneinander verschieden (im Sinne der Aufgabenstellung), da in Bild a solche markierten Felder vorkommen, die an einer Ecke benachbart sind, in Bild b dagegen nicht.

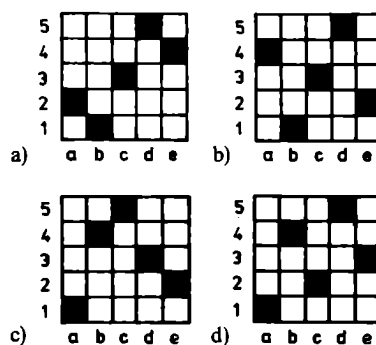
Fall 2: Das Feld c3 ist nicht markiert.

Wäre dann auch keines der Felder a1, a5, e5 markiert, so müßte in jeder der beiden Diagonalen eines der Felder b2, b4, d2, d4 markiert sein, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also ist gegebenenfalls durch eine Spiegelung erreichbar, daß a) markiert ist.

Hiernach kann in der Diagonalen von a5 bis e1 nur eines der Felder b4, d2 markiert sein; gegebenenfalls nach einer Spiegelung, die c3 und a1 festläßt, das Feld b4.

In Zeile 3 kann dann nur eines der Felder d3, e3 markiert sein. Das führt auf die beiden Markierungen in Bild c, d. Wie im Fall 1 beweist man, daß sie voneinander verschieden sind. Sie sind auch beide verschieden von beiden Markierungen des Falles 1; denn das (dort markierte und hier nicht markierte) Feld c3 bleibt bei allen Drehungen und Spiegelungen fest, die das Quadrat in sich überführen.

II. Die Markierungen in den Bildern a bis d erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe. Daher sind mit diesen Bildern alle den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Markierungen angegeben.



Olympiadeklasse 10

221021 I. Wenn ein Paar (x, y) ganzer Zahlen die Gleichung

$$2x^3 + xy - 7 = 0 \text{ erfüllt, so gilt}$$

$$x(2x^2 + y) = 7.$$

Da x und $2x^2 + y$ ganze Zahlen sind und 7 eine Primzahl ist, folgt daraus

$$\text{entweder } x = 1 \text{ und } 2x^2 + y = 7 \quad (1)$$

$$\text{oder } x = 7 \text{ und } 2x^2 + y = 1 \quad (2)$$

$$\text{oder } x = -1 \text{ und } 2x^2 + y = -7 \quad (3)$$

$$\text{oder } x = -7 \text{ und } 2x^2 + y = -1. \quad (4)$$

Aus (1) folgt $y = 5$; aus (2) folgt $y = -97$; aus (3) folgt $y = -9$; aus (4) folgt $y = -99$. Also können höchstens (1; 5), (7; -97), (-1; -9), (-7; -99) Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen sein, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

II. Sie erfüllen diese Gleichung; denn es gilt

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 7 = 2 + 5 - 7 = 0$$

und $2 \cdot 343 + 7 \cdot (-97) - 7 = 686 - 679 - 7 = 0$

und $2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-9) - 7 = -2 + 9 - 7 = 0$

und $2 \cdot (-343) + (-7) \cdot (-99) - 7 = -686 + 693 - 7 = 0$.

Folglich haben genau die genannten Zahlenpaare die geforderten Eigenschaften.

221022 Diejenige Zahl, die in derselben Zeile wie a und in derselben Spalte wie b steht, sei c genannt. Für sie gilt $a \geq c$, da a in der genannten Zeile die größte Zahl ist, und $c \geq b$, da b in der genannten Spalte die kleinste Zahl ist. Daher gilt $a \geq b$, für $a \neq b$ also sogar $a > b$. Axels Behauptung trifft mithin zu.

221023 Ein Dreieck mit den Maßzahlen a, b, c der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen ist nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung genau dann rechtwinklig mit c als Maßzahl der Hypotenusenlänge, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ (3) gilt. Es erfüllt genau dann (1) und (2), wenn darüber hinaus die Gleichungen

$$a + b + c = 132 \quad (4)$$

$$\text{und } a^2 + b^2 + c^2 = 6050 \quad (5)$$

gelten.

I. Wenn (3), (4), (5) erfüllt sind, so folgt:

Nach (3) und (5) gilt $2c^2 = 6050$, $c^2 = 3025$, wegen $c > 0$ also $c = 55$ und damit nach (4) und (3)

$$a + b = 77, \quad (6)$$

$$a^2 + b^2 = 3025. \quad (7)$$

Aus (6) folgt $b = 77 - a$ und damit aus (7)

$$a^2 + (77 - a)^2 = 3025,$$

$$a^2 - 77a + 1452 = 0. \quad (8)$$

Wegen $\frac{77^2}{4} - 1452 = \frac{121}{4} > 0$ folgt aus (8)

$$a = \frac{77 \pm 11}{2},$$

d. h. entweder $a = 44$ und nach (6) dann $b = 33$ oder $a = 33$ und nach (6) dann $b = 44$.

Also können nur die Kathetenlängen 33 cm, 44 cm und die Hypotenusenlänge 55 cm den Forderungen (1), (2) genügen.

II. Sie genügen ihnen; denn mit

$$33^2 + 44^2 = 11^2(9 + 16) = 55^2,$$

$$33 + 44 + 55 = 132,$$

$$33^2 + 44^2 + 55^2 = 11^2(9 + 16 + 25) = 6050$$

sind (3), (4), (5) erfüllt.

Damit ist der geforderte Beweis geführt. Die Seitenlängen betragen 33 cm, 44 cm und 55 cm.

221024 Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a des Sechsecks beträgt $D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; daher ist $F_1 = 6D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

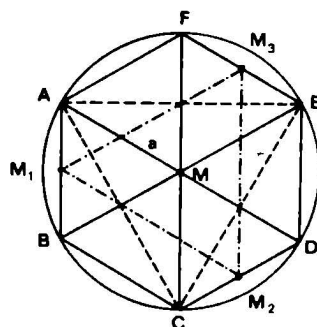
Jede der Seitenlängen des Dreiecks ACE ist gleich der doppelten Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a . Daher ist $s = \overline{AC} = \overline{CE} = \overline{EA} = a\sqrt{3}$ und folglich $F_2 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

Wegen $\angle BAD = 60^\circ$ und $\angle ABC = 2 \cdot 60^\circ$ ist $AD \parallel BC$ (Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen). Also ist M_1M_2 Mittellinie in einem Trapez, dessen parallele Seiten die Längen $2a$ bzw. a haben. Entsprechendes gilt für M_2M_3 und M_3M_1 ; daher ist

$$t = \overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \overline{M_3M_1} = \frac{3}{2}a$$

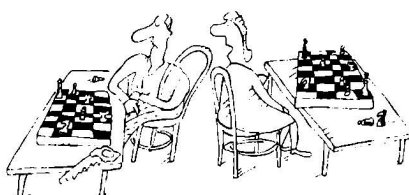
und folglich

$$F_3 = \frac{t^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}.$$

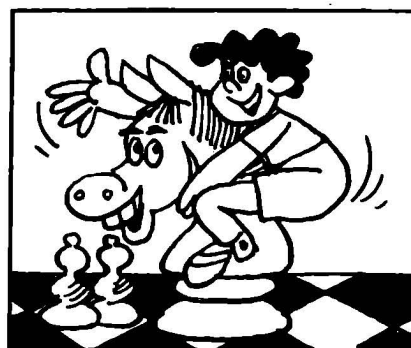
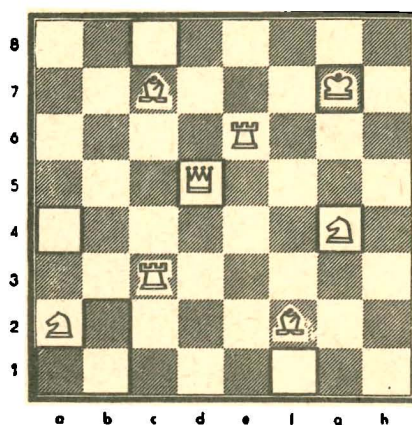


$$\text{Somit gilt } F_1 : F_2 : F_3 = \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{9}{16} = 8 : 4 : 3.$$

Auf die Lösungen zur Olympiadeklasse 11/12 müssen wir aus Platzgründen verzichten.



„Ist doch nur ein Spiel, Kurt.“



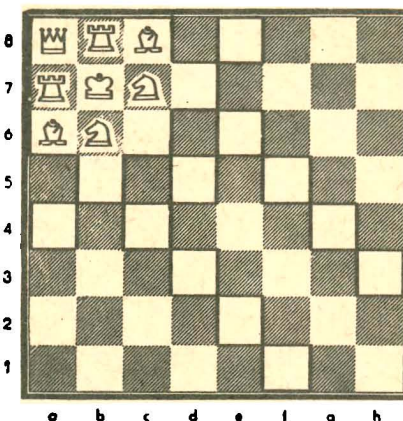
Wirkungskraft der Schachfiguren

Nachdem wir die Gangart der einzelnen Schachfiguren kennengelernt haben, wollen wir uns ihre Wirkungskraft auf dem Schachbrett in minimaler und maximaler Form anschauen bzw. herausfinden. Dazu stellen wir auf dem Brett acht Figuren einer Farbe – König, Dame, 2 Türme, 2 Läufer und 2 Springer – so auf, daß die geringste Anzahl von Feldern von ihnen beherrscht wird.

Machen wir zur Bedingung, daß das Feld, auf dem die Figur steht, von ihr selbst nicht beherrscht wird, doch kann es selbstverständlich von einer beliebigen anderen Figur in Übereinstimmung mit den Schachregeln bedroht werden. Dabei können die Läufer auf Felder gleicher Farbe gestellt werden.

Auf dem Diagramm 1 sind die acht Figuren so angeordnet, daß sich 22 Felder unter „Bedrohung“ befinden. Die betreffenden Felder, ausgenommen c5 und d6, sind durch eine Umrandung gekennzeichnet. Das ist noch lange nicht die untere Grenze!

a) Findet heraus, wie bei anderer Figurenaufstellung weniger Felder von den acht Figuren beherrscht werden können!



Der zweite Teil der Aufgabe verfolgt das entgegengesetzte Ziel. Wir verteilen jetzt die acht Schachfiguren so, daß sie eine maximale Anzahl von Feldern auf dem Schachbrett beherrschen. Die Bedingungen sind die gleichen wie im ersten Teil der Aufgabe.

In der Figurenaufstellung auf dem Diagramm 2 werden 55 Felder des Brettes bedroht. Die nicht bedrohten Felder sind durch eine Umrandung hervorgehoben.

b) Wie kann die Zahl der beherrschten Felder durch eine andere Stellung der Figuren vergrößert werden?

H. Rüdiger



Das Astrolabium

Zu den vielbewunderten mechanischen Kunstwerken in kulturhistorischen Sammlungen und Museen gehören astronomische Uhren (vgl. z. B. die abgebildete Uhr aus dem Besitz des Grünen Gewölbes Dresden auf einer DDR-Marke von 1975). Ihr Zifferblatt ist nichts anderes als ein mechanisch bewegtes Astrolabium. Das Astrolabium (lat.: etwa Sternnehmer) gehört zu den ältesten Hilfsmitteln der Positionsastronomie (auch mathematische Astronomie, sphärische Astronomie; sie beschäftigt sich unter Vernachlässigung der physikalischen Ursachen nur mit den beobachtbaren Bewegungsabläufen am Himmel).

Leider tritt das Wort Astrolabium in mehrfacher Bedeutung auf. Das sphärische Astrolabium ist ein einfaches Modell der gedachten Himmelskugel zur konstruktiven Lösung von Aufgaben der sphärischen Astronomie. Es besteht aus mehreren ineinander drehbaren und meist mit Gradeinteilung versehenen hölzernen oder metallenen Ringen, die eine Art Kugelskelett bilden. Seine Erfindung wird dem griechischen Astronomen Hipparch von Nikaia (~ 190 bis 125 v. u. Z.) zugeschrieben. Hipparch und eine uralte Form des sphärischen Astrolabs sehen wir auf der grie-

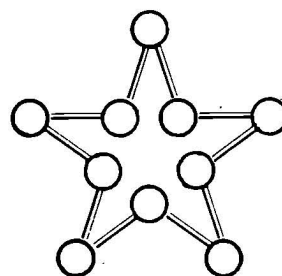
chischen Briefmarke von 1965. In der Renaissance wurde das sphärische Astrolab durch mechanische Getriebe zur Armillarsphäre weiterentwickelt (siehe z. B. die 1687 von Möller gebaute auf der DDR-Marke von 1972), von der sie leider bezeichnungsmäßig heute meist nicht klar unterschieden wird. Die Armillarsphäre ist bereits ein Modell für astronomische Bewegungsabläufe, sozusagen ein primitives Planetarium. Das ebene Astrolabium (Astrolabium planisphaerium) beruht auf der stereographischen Projektion (vgl. hierzu den Artikel Euler und die Kartographie in alpha 2/1983) der Himmelskugel in die Ebene. Es wurde zusammen mit der Herleitung der grundlegenden geometrischen Eigenschaften dieser Abbildung (Kreisverwandtschaft und Winkeltreue) zuerst in einer Abhandlung des spätantiken Astronomen Ptolemaios (um 80 bis um 160 u. Z.) beschrieben. Der bewegliche Kreis dieses scheibenförmigen Gerätes modelliert in Abhängigkeit von der Tages- und Jahreszeit den jeweils sichtbaren Teil der Himmelskugel auf dem Hintergrund des stereographischen Bildes des Fixsternhimmels. Die islamischen Astronomen und Mathematiker des 9. bis 14. Jh. bildeten das ebene Astrolab zu hoher Vollkommenheit aus. In dieser orientalischen Form ist es z. B. auf der abgebildeten syrischen Marke zu sehen. Im Zeitalter der Astrologiegläubigkeit war das Astrolabium sowohl im Orient als auch in Europa ein ähnlich wichtiger und demgemäß in vielen Exemplaren verbreiteter „Gebrauchsgegenstand“ wie heute die gewöhnliche Uhr. Daher sind zahlreiche Stücke in verschiedensten Varianten, mit und ohne mechanischen Antrieb, bis heute erhalten geblieben. Zur Freude an ihrer reizvollen kunsthandwerklichen Gestaltung sollte sich aber wenigstens ein Grundwissen über den ursprünglichen Verwendungszweck und das Funktionsprinzip gesellen.

P. Schreiber



Числа по периметру

▲ 1 ▲ По периметру звезды в кружочки впишите все числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в любых двух соседних кружках не делились ни на 3, ни на 5, ни на 7.



Cryptarithms

▲ 2 ▲ A popular puzzle is to take someone's name or a well-known saying and make it into an addition or subtraction sum. It is often necessary to add an extra condition in order to make the answer unique.

Example

$$\begin{array}{r} \text{HOW} \\ \text{I S} \\ + \text{H I S} \\ \hline \text{S I S} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Note the 'O'} \\ \text{is a letter.)} \end{array}$$

Each letter stands for a different digit and SOW is a perfect square. A standard convention is that the left-hand end letter of each word does not stand for zero.

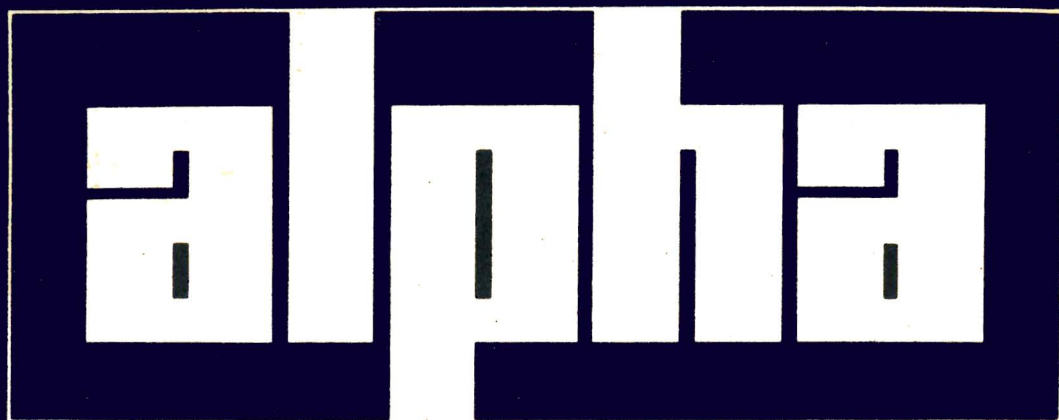
A variation on this type of puzzle is to take a long multiplication or division and rub out most of the numbers but indicate where they were.

Example.

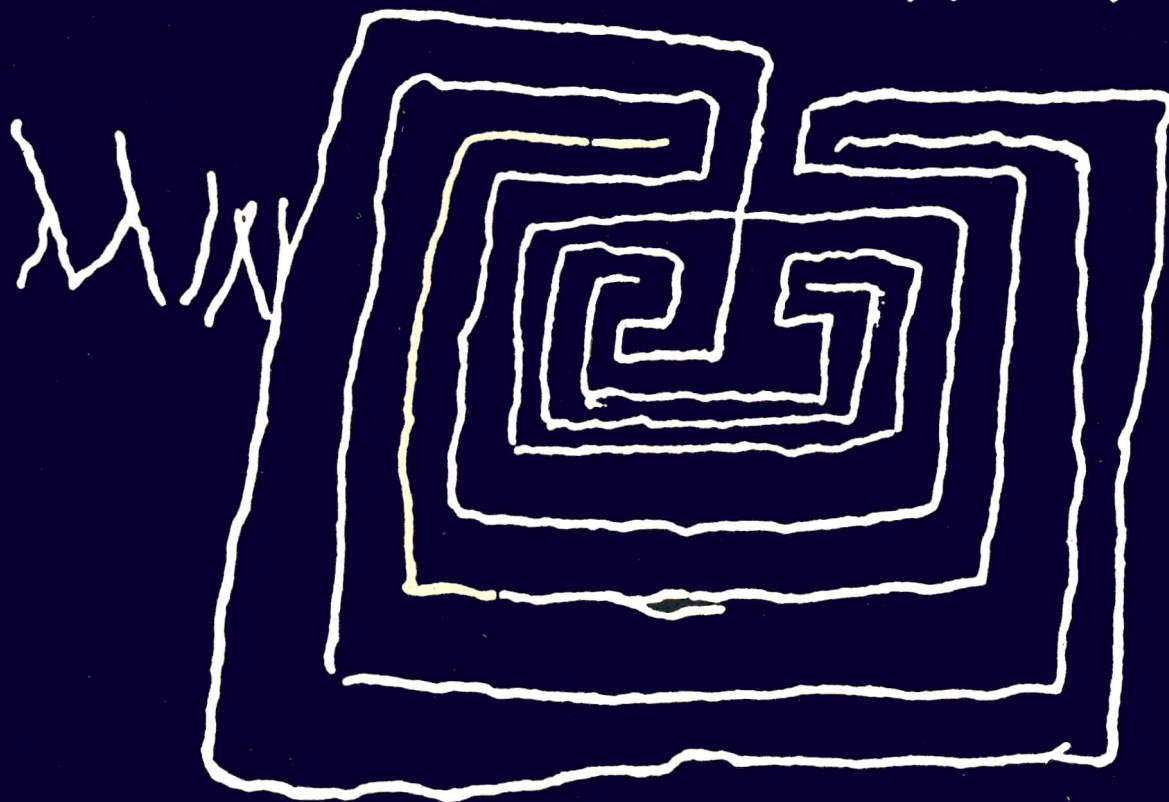
$$\begin{array}{r} ** \cdot 2* \\ \hline ** \\ *2 \\ \hline **** \end{array}$$

▲ 3 ▲ Pour construire la Tour Eiffel, on a utilisé environ 885 m³ de fer; la masse volumique du fer est 7,8 t/m³. Quelle masse de fer a-t-on utilisée pour cette construction?

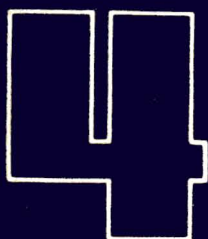




LABYRINTHUS
HABITAT



OTAVUS



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTr J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Altes ägyptisches Amulett, Universität
London (S. 73); J. Lehmann, Leipzig; Archiv
Universität Oslo (S. 76/77); Vignette aus Ta-
gungsbericht der Mathematikertagung (III.
U.-Seite); Foto Spelda, Tabarz (III. U.-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: W. Fahr nach einer Vorlage: Sgraf-
fito in Pompeji (Museo Borbonico)



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der
ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Redaktionsschluß: 23. April 1983

Erscheinungstermin: 20. August 1983



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 73 Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität [9]*
Dr. H. Hemmerling, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- 76 Mathematik und mathematischer Unterricht in Norwegen [8]
Dipl.-Math. Gunnar Gjone, Sektion Mathematik der Universität Oslo/ Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- 78 Der Eulersche Polyedersatz [9]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
- 79 Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. B. Dykin und Prof. Dr. A. Uspenski
Sektion Mathematik der *Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität*
- 80 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Kl. 5/6
Genauigkeit gefragt [5]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle/Wittenberg
- 81 15 Knacknüsse aus: B. Schlotterbeck: *Knacknüsse für Freunde des Rechnens*, Wismar 1880
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- 82 Mathematik und Schiffbau, Teil 2 [11]
Prof. Dr. H.-W. Stolle, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität* Rostock
- 84 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Köpfchen, Köpfchen – Spiele und Knocheleien [5]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- 85 Ein Blick in das „geistige Labor“ von Leibniz
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle Berlin
- 85 Unsere Sprachecke
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann (alle Leipzig)
- 86 In freien Stunden · alpha-heiter
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 88 Für den Briefmarkenfreund: Ludwig Boltzmann [8]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- 88 Schach und Mathematik [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 89 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
- 92 Lösungen [5]
- 96 Teubner-Verlag, Leipzig: Mathematikertagung in Reinhardsbrunn
[8] J. Weiß, Lektor für Mathematik im Teubner-Verlag

III. U.-Seite: Literatur für *Junge Mathematiker* [5]

Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

IV. U.-Seite: Knifflige Aufgaben – Rund um den Kreis [7]

Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität

Teil 1



1. Einleitung (Mythologie, Historie, Problemstellungen)

Die Vorstellung eines Labyrinths findet sich schon sehr früh in der Gedankenwelt der Menschheit. Man verstand hierunter wohl meist einen unterirdischen Komplex von Gewölben und Gängen, so verwirrend miteinander verbunden und sich vielfach verzweigend, daß ein Unkundiger, der dieses Reich betrat oder dorthinein verbannt wurde, sehr bald jede Orientierungsmöglichkeit verlor und nie wieder herausfinden konnte. Daher dienten Labyrinth oft auch als Sinnbilder für Schwieriges oder schwer Überschaubares.

Der griechischen Mythologie zufolge befand sich das erste Labyrinth auf der Insel Kreta und war von dem berühmten Baumeister und Erfinder Daedalus, dem Vater des Ikarus, geschaffen worden (Bild 1). Der römische Dichter Ovid beschreibt das in seinen „Metamorphosen“ (8. Buch) sehr anschaulich:

„Daedalus, rühmlich bekannt durch Geschick in den bildenden Künsten, / Schaffet das Werk. Merkmale verwirrt er und führt in die Irre / Täuschend den Blick durch die Zahl vielfältig gewundener Wege. / So wie der laute Strom des Maeandrus in phrygischen Auen / Treibt sein Spiel ... so machte der Gänge / Wirrwarr Daedalus auch voll Trug, und er fand zu der Schwelle / Selbst kaum wieder den Weg: so ist das Gebäude verhänglich.“

Dieses Labyrinth beherbergte den Minotaurus, ein blutrünstiges Ungeheuer, halb Stier, halb Mensch, dem jährlich je sieben der schönsten Knaben und Mädchen Athens geopfert werden mußten. Dem Königssohn Theseus gelang es endlich, den Minotaurus zu töten. Mit Hilfe eines Fadenknäuels, das ihm seine Geliebte Ariadne mitgegeben und dessen Faden er beim Durchwandern des Labyrinths abgewickelt hatte (Ariadnefaden), erreichte Theseus auch wieder den Ausgang. Ovid umschreibt das so:

„Als dann die schwierige Tür, die vormals keiner gewonnen, War auf der Jungfrau Rat mit gewickeltem Faden gefunden, ...“

Als historisch belegte Form von Labyrinth kann man die Katakomben auffassen, die als Versammlungsort oder auch Kultstätte geheimer Verbindungen dienten. Im Mittelalter, aber auch davor und später, bediente man sich gern geheimer Gänge und versteckter Türen, und manche Burgverliese oder auch Kasematten können mit gutem Recht als Labyrinth bezeichnet werden.

Auf wesentlich harmlosere Weise setzte die Gartenkunst des 17. und 18. Jahrhunderts (Barock) unsere Thematik um (Bild 2).

Die vielfach zu findende deutsche Übersetzung des Wortes „Labyrinth“, nämlich „Irrgarten“, deutet auf die Sitte dieser Zeit hin, in Gärten und Parks labyrinthartige Gänge anzulegen. In die Irre zu gehen mag hier ein

willkommenes Amüsement wohlhabender Müßiggänger gewesen sein.

Offenbar haben die Labyrinth bis heute nichts von ihrem Reiz eingebüßt. So findet man Labyrinth-Aufgaben häufig in Knobel-ecken von Zeitschriften oder in Büchern über Unterhaltungsmathematik, es gibt Geduld-spielchen in Form von Labyrinth, und sogar Labyrinth-Witze oder Karikaturen mit Labyrinth sind nicht selten.

Die erste mathematische Veröffentlichung über Labyrinthprobleme stammt aus dem Jahre 1873 von Christian Wiener (1826 bis 1896, Professor für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe). Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat man sich dann vor allem in Frankreich unserer Thematik angenommen (Trémaux, Tarry). Bei allen diesen Überlegungen ging es um das Absuchproblem für endliche Graphen, worauf wir noch genauer eingehen werden.

Diese klassischen Lösungsvarianten sind von dem amerikanischen Ingenieur und Mathematiker C. E. Shannon (geb. 1916), einem der „Väter“ der Kybernetik, in seinem berühmten kybernetischen Spiel „Maus im Labyrinth“ (um 1951) programmiert worden. Das Labyrinth war hier im wesentlichen ein ebenes Muster; auch dieser Begriff wird noch genauer erläutert werden. Shannon hat damit die Anregung zu den modernen Untersuchungen zur Labyrinthproblematik gegeben, die zur mathematischen Kybernetik gehören und in den letzten zwölf Jahren beträchtlich an Breite und Intensität gewonnen haben.

Diese neueren Untersuchungen haben recht praktische Motivationen und besitzen wichtige Anwendungen in der mathematischen Kybernetik. So ist das Verhalten von Automaten in Labyrinth von bedeutender Aussagekraft für das Studium der Wechselbeziehungen zwischen einem Automaten und seiner Umwelt. Außerdem sind die bei den Labyrinthproblemen entwickelten Lösungsmethoden vielfach umsetzbar in Erkennungsalgorithmen für Graphen- bzw. Mustermem-

Bild 1

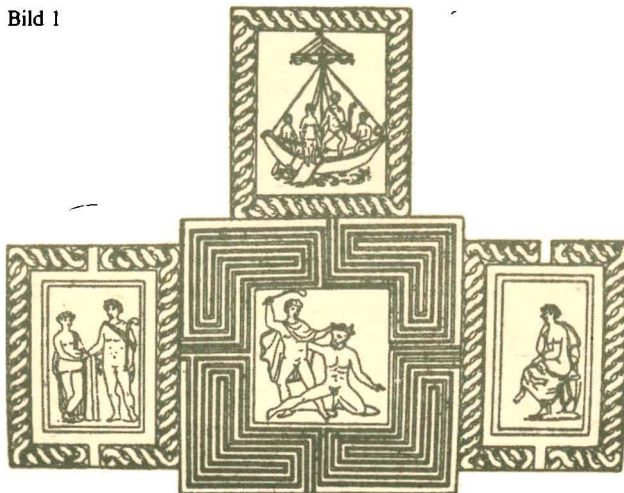
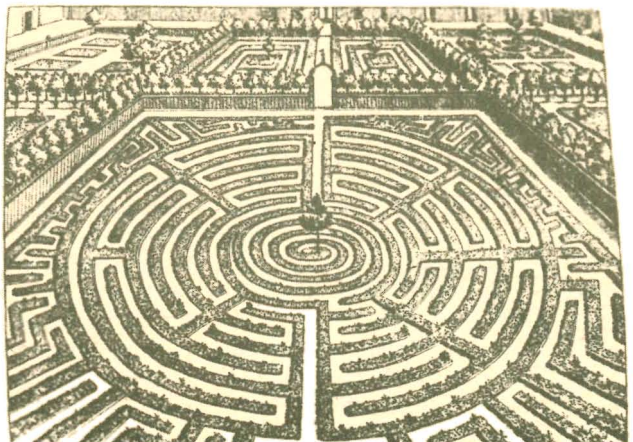


Bild 2



gen und berühren damit die mathematischen Grundlagen der digitalen Bildverarbeitung (hierzu gehört z. B. die automatische Auswertung von Röntgen- oder Mikroskopbildern, Satellitenfotos u. ä.).

Welches sind nun die Aufgaben, die den Mathematiker im Zusammenhang mit Labyrinth beschäftigen? Zwei grundlegende Probleme sollen hier genauer betrachtet werden.

Das erste besteht darin, ausgehend von einem beliebigen Punkt innerhalb eines Labyrinths einen Ausgang aufzusuchen. Diese Aufgabe stellt sich jedem, der (unfreiwillig) in ein Labyrinth geführt und dort sich selbst überlassen wurde. Dabei möge keinerlei Information über den Aufbau des Labyrinths bekannt sein. Der sich darin befindende Mensch sieht jeweils nur ein kleines Stück des Ganges oder des Gewölbes, in dem er sich befindet, sowie die Anfänge der in der Nähe seines Standortes einmündenden Gänge. Da keine andere Information über das Labyrinth vorliegt, muß das Verfahren, nach dem ein Ausgang gesucht wird, so beschaffen sein, daß es für jedes denkbare Labyrinth zum Erfolg führt. Zusammenfassend können wir also formulieren:

Fluchtproblem:

Man gebe ein Verfahren (Programm, Algorithmus) an, nach dem in jedem Labyrinth bei beliebigem Startpunkt schließlich ein Ausgang erreicht wird.

Die Theseus-Legende ist wohl so zu interpretieren, daß der Held dieses Problem umgangen hat, indem er beim Hineingehen in das Labyrinth den Ariadnefaden abwickelte, dessen Anfang am Eingang liegen blieb. Durch Aufwickeln des Fadens konnte Theseus nun jederzeit wieder zum Eingang zurückfinden.

Dabei wird jedoch ein anderes, nämlich unser zweites, Problem übersehen: Wie gelingt es Theseus, den Aufenthaltsort des Minotaurus ausfindig zu machen, und zwar ohne allzu oft in die Irre zu gehen (etwa „im Kreis“ zu laufen), so daß seine Kräfte auch noch zum Besiegen des Ungeheuers ausreichen? Es stellt sich also die Aufgabe des Absuchens eines Labyrinths, die wiederum nur durch ein für alle Labyrinth erfolgreiches Verfahren gelöst werden kann, sofern keine Information über das speziell vorliegende Labyrinth verfügbar ist.

Absuchproblem:

Man gebe ein Verfahren (Programm, Algorithmus) an, nach dem in jedem Labyrinth bei beliebigem Startpunkt jeder Punkt irgendwann einmal betreten wird (d. h., jedes Labyrinth abgesucht wird).

Man überlegt sich recht schnell, daß zwischen den beiden formulierten Problemen enge Zusammenhänge bestehen. So liefert jede Lösung des Absuchproblems eine Lösung des

Fluchtproblems: Ein Verfahren, nach dem das gesamte Labyrinth abgesucht wird, führt irgendwann auch einmal zu einem Ausgang. Andererseits scheint aber das systematische Absuchen des Labyrinths auch notwendig für eine stets erfolgreiche Flucht zu sein: Jeder Gang könnte ja zu dem eventuell einzigen Ausgang führen.

Im weiteren werden wir uns eingehender mit dem Absuchproblem beschäftigen, dessen mathematische Präzisierung etwas leichter erklärbar ist als die des Fluchtproblems.

2. Das Absuchen endlicher Graphen nach Trémaux und Tarry

Für mathematische Untersuchungen ist es natürlich notwendig, auch den Labyrinth-Begriff zu präzisieren. Dafür gibt es zwei grundlegende Möglichkeiten, nämlich den Begriff des (endlichen) Graphen und den des Musters. Der erste soll in diesem Abschnitt bei der Behandlung klassischer Absuchverfahren zugrunde gelegt werden.

Mit Mustern werden wir uns im Abschnitt 3 im Zusammenhang mit moderneren Untersuchungen beschäftigen.

Unter einem endlichen Graphen wollen wir uns hier ein geometrisches Gebilde vorstellen, bestehend aus endlich vielen Knoten (punkten), die durch endlich viele sich nicht schneidende Kurvenstücke, Kanten genannt, miteinander verbunden sein können (siehe Bilder 3 u. 4). Jede Kante beginne und ende mit einem Knotenpunkt, möge sonst aber keinen Knoten enthalten. Die Knoten entsprechen den Plätzen oder Verzweigungspunkten des Labyrinths, die Kanten seinen Gängen.

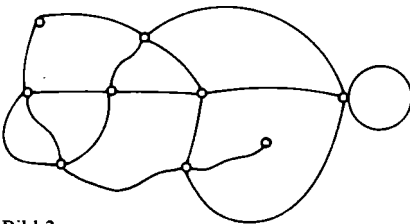


Bild 3

Ein Graph heißt zusammenhängend, falls von jedem Knotenpunkt aus jeder andere dadurch erreichbar ist, daß eine (endliche) Folge von Kanten durchlaufen wird. Das ist eine notwendige Voraussetzung für die Absuchbarkeit des entsprechenden Labyrinths. Beispielsweise kann man in dem Graphen aus Bild 2, der nicht zusammenhängend ist, von dem Knotenpunkt A aus nie den Knoten B erreichen.

Der Graph aus Bild 3 ist zusammenhängend. Er ist außerdem ein ebener Graph. Das bedeutet, daß alle seine Knotenpunkte und Kanten in einer Ebene angeordnet sind; er stellt also ein zweidimensionales Labyrinth dar. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht notwendig für das Funktionieren der beiden folgenden Absuchverfahren.

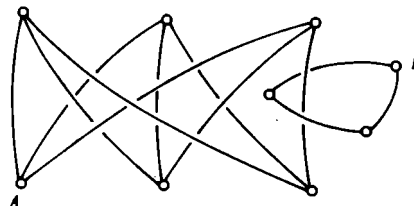


Bild 4

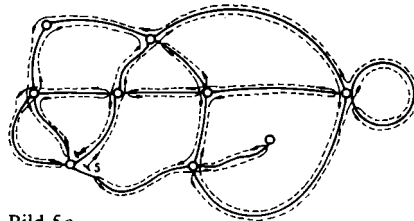


Bild 5a

Schauen wir uns zuerst das Tarrysche Absuchverfahren an, das sich recht leicht beschreiben läßt. Bei diesem Verfahren muß in jedem schon betretenen Knotenpunkt des Graphen die Eintrittskante markiert werden. Das ist diejenige Kante, über die der betreffende Knoten erstmals erreicht wurde. Außerdem muß für jede Kante, die in den gerade erreichten Standort einmündet, erkennbar sein, in welcher Richtung sie schon durchlaufen wurde. Es empfiehlt sich also, beim Durchlaufen einer Kante, ihre beiden Enden mit entsprechenden Markierungen zu versehen.

Der vorgegebene Graph muß nun von Knotenpunkt zu Knotenpunkt nach dem folgenden Programm durchlaufen werden.

Verfahren von Tarry:

1. Verlasse einen Knoten immer über eine Kante, die in dieser Richtung noch nicht durchlaufen wurde, wähle die Eintrittskante aber erst dann, wenn es keine andere Möglichkeit mehr gibt!
2. Gibt es keine einmündende Kante, die in der vom Standort fortführenden Richtung noch nicht durchlaufen wurde, so stoppe (Ende des Absuchens)!

Ein nach diesem Programm in einem Graph zurückgelegter Weg heißt Tarry-Weg. In einem zusammenhängenden endlichen Graphen endet jeder Tarry-Weg nach endlich vielen Schritten durch Eintreten der Stop-Bedingung 2., und zwar auf seinem Startpunkt. Er hat dann jede Kante des Graphen genau zweimal durchlaufen, und zwar einmal in jeder Richtung.

Die Bilder 5 und 6 zeigen einige Beispiele für Tarry-Wege (der Startpunkt ist immer mit S bezeichnet). In Bild 5 haben wir lediglich die Wege gekennzeichnet, in Bild 6 sind auch die Eintrittskanten (durch dicke Pfeile) markiert. Der Leser mache sich mit dem Verfahren vertraut, indem er die angegebenen Wege nachvollziehe (Markierungen der Eintrittskanten und Durchlaufrichtungen selbst setzen!).

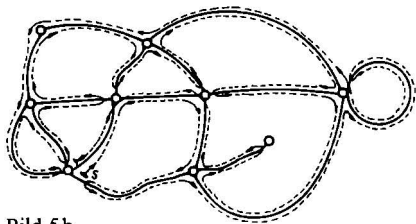


Bild 5b

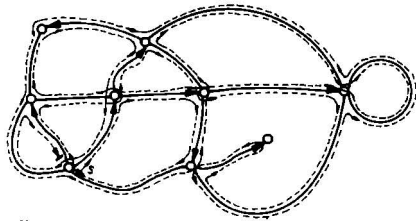


Bild 6

Man erprobe das Programm dann einmal bei Start in einem anderen Knotenpunkt des vorgegebenen Graphen. Schließlich kann man sich selbständig beliebig komplizierte Labyrinth als Graphen aufzeichnen und sie nach dem beschriebenen Verfahren absuchen. Übrigens kann man bei dem Tarryschen Verfahren jederzeit von dem jeweiligen Standort auf direktem Wege (d. h. ohne Schleifen) zum Startpunkt zurückfinden. Dazu hat man nur die Markierungen der Eintrittskanten als Wegweiser (in entgegengesetzter Richtung) zu benutzen.

Wie zeigt man nun, daß das Verfahren von Tarry tatsächlich das Absuchproblem für zusammenhängende endliche Graphen löst? Wir wollen den Beweis der behaupteten Eigenschaften von Tarry-Wegen kurz skizzieren.

Zunächst ist nach dem Programm klar, daß ein Tarry-Weg jede Kante des vorgegebenen Graphen in jeder Richtung höchstens einmal, insgesamt also höchstens zweimal durchläuft. Nun überlegen wir uns, daß die Bedingung 2. nur im Startpunkt erfüllt sein kann. Wird ein vom Startpunkt verschiedener Knoten des Graphen erreicht, so ist er zu diesem Zeitpunkt einmal öfter über eine einmündende Kante betreten worden, als er über eine Kante verlassen wurde (denn vorher wurde er immer durchquert, d. h. betreten und wieder verlassen). Da jede Kante nur einmal in jeder Richtung durchlaufen werden darf, muß es eine in diesen Knoten mündende Kante geben, durch die er bisher noch nicht verlassen wurde. Somit kann die Bedingung 2. nicht erfüllt sein.

Aus dem bisher Gezeigten folgt, daß in einem endlichen Graphen stets nach endlich vielen Schritten die Stop-Bedingung 2. erreicht wird, und zwar auf dem Startpunkt. Es bleibt zu zeigen, daß dann jede Kante auch genau zweimal durchlaufen wurde, wenn der Graph zusammenhängend ist.

Sicher wurden alle in den Startpunkt mündenden Kanten zweimal durchlaufen. Wenn

dort nämlich die Stop-Bedingung erfüllt ist, sind alle diese Kanten in der vom Startpunkt fortführenden Richtung schon durchlaufen, müssen es dann aber auch in der Gegenrichtung sein.

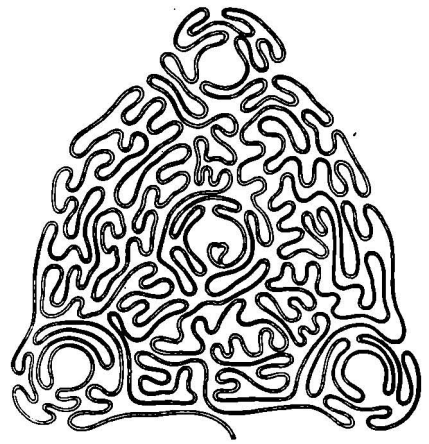
Gäbe es nun andere, nicht zweimal durchlaufene Kanten, so müßte es eine Kante geben, die selbst zweimal durchlaufen wurde, aber in einen Knoten mündet, in den auch eine nicht zweimal durchlaufene Kante einmündet. (Der Leser beweise diese Behauptung selbständig, dabei ist der Zusammenhang des Graphen auszunutzen. Wir liefern diesen Beweisschritt im Anschluß an den Lösungsteil zu den gestellten Aufgaben – Teil 2 dieses Beitrags.) Man betrachtet nun die in dem gegebenen Tarry-Weg zuerst erreichte Kante dieser Art. Sie ist Eintrittskante für einen Knoten, in den auch eine Kante mündet, die nicht zweimal durchlaufen wurde. Alle in diesen Knoten mündenden Kanten müssen aber in der von ihm fortführenden Richtung durchlaufen worden sein, wenn dieser Knoten schließlich über seine Eintrittskante verlassen wird. Hieraus folgt aber wiederum, daß alle einmündenden Kanten auch in der Gegenrichtung, also genau zweimal durchlaufen werden. Dieser Widerspruch vervollständigt unseren Beweis.

Das Verfahren von Trémaux ist etwas spezieller als das Tarrysche und auch umständlicher in der Beschreibung.

Verfahren von Trémaux:

1. Schreite fort, bis ein Knoten erreicht wird, der schon einmal betreten wurde oder nur eine einmündende Kante hat! Kehre dann zum vorgehenden Standort zurück, und handle gemäß 2. weiter!
2. a) Gibt es eine noch nicht durchlaufene Kante, die in den Standort mündet, so durchlaufe eine solche; handle dann weiter gemäß 1!
- b) Sind alle einmündenden Kanten schon durchlaufen worden, manche aber erst einmal, so durchlaufe eine solche und handle dann weiter gemäß 2!
- c) Sind alle in den Standort mündenden Kanten zweimal durchlaufen worden, so stoppe (Ende des Absuchens)!

Für die Anwendung dieses Verfahrens ist es nötig, daß stets bekannt ist, wie oft eine in den jeweiligen Standort mündende Kante schon durchlaufen wurde, und es muß auch stets die unmittelbar vorher durchlaufene Kante bekannt sein. In einem Labyrinth müßte man sich also an beiden Enden eines Ganges notieren, wie oft er schon durchlaufen wurde. Außerdem hätte man sich beim Überqueren eines Platzes zu merken, durch welchen Gang man ihn erreicht hat. Anstelle von Markierungen könnte man auch einen Faden benutzen, der beim Durchwandern des Labyrinths abgewickelt und liegengelassen wird. Die Anzahl der nebeneinanderliegenden



Fäden in einem Gang gibt an, wie oft er schon durchlaufen wurde.

Die in Bild 5 angegebenen Wege können auch als Trémaux-Wege aufgefaßt werden, der Weg in Bild 6 ist kein Trémaux-Weg. Ganz ähnlich wie beim Tarryschen Verfahren kann man zeigen, daß in jedem zusammenhängenden endlichen Graphen ein Trémaux-Weg stets endlich ist, mit seinem Startpunkt endet und jede Kante genau zweimal durchläuft, und zwar einmal in jeder Richtung. Übrigens ist jeder Trémaux-Weg auch ein Tarry-Weg, nicht aber umgekehrt. Es mag manchen schon gestört haben, daß die Anweisungen in den Verfahren nicht eindeutig sind, da es bei Erreichen eines Knotenpunktes meist mehrere einmündende Kanten gibt, die als nächste durchlaufen werden dürfen. Bei ebenen Graphen kann man die Eindeutigkeit leicht dadurch erzwingen, daß man vorschreibt, jeweils die erste erlaubte Kante zu benutzen, auf die man beim Durchmustern aller in den Standort einmündenden Kanten (entgegen dem Uhrzeigersinn und von der zuletzt durchlaufenen Kante aus) trifft. Dieser Forderung genügen der Weg in Bild 5b bezüglich des Trémauxschen Verfahrens und der in Bild 6 bezüglich des Tarryschen. Ist der Graph nicht eben, so kann man sich auf ähnliche Weise helfen, wenn nur für jeden Knoten eine Reihenfolge (zyklische Ordnung) der einmündenden Kanten vorgegeben ist.

(Dieser Beitrag wird in Heft 5/83 fortgesetzt, d. Red.)

A. Hemmerling



Mathematik und mathematischer Unterricht in Norwegen

Das mathematische Erbe

Im Bewußtsein des norwegischen Volkes hat die Mathematik unter allen Naturwissenschaften durch das Wirken des genialen *Niels Henrik Abel* (1802 bis 1829) eine besondere Vorrangstellung errungen. Dies drückt sich in vielfältiger Weise aus. Zum Beispiel wurden schon in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts, als dies international noch keineswegs üblich war, neben Briefmarken zu Ehren der großen norwegischen Dichter Holberg und Ibsen auch schon solche anlässlich des 100. Todestages von Abel herausgegeben. Abel ist auch auf der gegenwärtig gültigen 500-Kronen-Banknote abgebildet. (Andere Banknoten zeigen den Polarforscher Nansen und wiederum Ibsen.) Ein Denkmal Abels steht an repräsentativer Stelle im königlichen Schloßpark in Oslo. Anekdoten und Begebenheiten aus dem Leben Abels sind auch heute noch im norwegischen Volk bekannt und lebendig.

Es gibt jedoch außer Abel noch weitere bedeutende norwegische Mathematiker, von denen zwei weitere sogar ebenfalls durch Briefmarken geehrt wurden: *Cato M. Guldberg* (1836 bis 1902), der gemeinsam mit dem Chemiker P. Waage (1833 bis 1900) das Massen-

wirkungsgesetz der Chemie aufstellte und Ole J. Broch (1818 bis 1889), der einen großen Einfluß auf Norwegens Schulmathematik hatte, sich auch in öffentlichen und politischen Ämtern zum Wohle Norwegens betätigte und schließlich erster Direktor des *Internationalen Büros für Maße und Gewichte* in Paris wurde. Ferner muß unbedingt *Sophus Lie* (1842 bis 1899) erwähnt werden, der zeitweise an der Leipziger Universität wirkte. Die von ihm entwickelte *Theorie der stetigen Transformationsgruppen* hatte tiefgreifenden Einfluß auf die moderne Mathematik. Als international bekannte norwegische Mathematiker seien noch L. Sylow (1832 bis 1918), Th. Skolem (1887 bis 1963) und A. Thuc (1863 bis 1922) genannt. Dieses relativ kleine Häuflein namhafter Mathematiker mag zunächst wenig eindrucksvoll erscheinen. Vielleicht sollte man dazu bemerken, was zumindest in Norwegen stets gesagt wird, wenn es darum geht, Norwegen, z. B. auch in bezug auf den Gewinn olympischer Medaillen, mit anderen Ländern zu vergleichen:

Man muß die betreffenden Zahlen ins Verhältnis zur Einwohnerzahl des jeweiligen Landes setzen. Norwegen hat nur etwa 4 Mill. Einwohner. Daran gemessen wird man finden, daß die Dinge bei uns gar nicht so schlecht stehen.

Mathematischer Schulunterricht in Norwegen

Der obligatorische Schulunterricht erstreckt sich in Norwegen über 9 Jahre und wird für alle Schüler in gleicher Weise nach einheitlichen, von der Regierung festgelegten Lehrplänen erteilt. Für die oberen Klassen erfolgte vor einiger Zeit eine Kürzung der theoretischen Fächer, darunter auch der Mathematik, so daß Norwegen jetzt unter den nordischen Ländern den letzten Platz bezüglich der Mathematik-Wochenstunden einnimmt. Im einzelnen haben wir in den Klassenstufen folgende Wochenstundenzahlen

Klassenstufe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wochenstd.									

Mathematik 3 3 4 4 3 3 4 4 3

Der mathematische Stoff dieser neun Jahre entspricht im wesentlichen dem, was man in den meisten Ländern findet:

Arithmetik, Algebra, Gleichungen, Funktionen, Geometrie, Anwendungen.

In den Klassen 10 bis 12 (Oberstufe, früher als „Gymnasium“ bezeichnet) ist die Situation völlig anders, da die Ausbildung hier in differenzierter Weise erfolgt. Es gibt praktisch-berufsvorbereitende und mehr theoretisch orientierte Richtungen. Die Schüler können in jeder Klassenstufe bis zu 5 Wochenstunden Mathematik wählen und außerdem fakultative Kurse über Informationsverarbeitung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik u. ä. belegen. Insgesamt reichen die Möglichkeiten von einjährigen Mathematikkursen für die Berufsausbildung wie z. B. „Mathematik für Bauberufe“ bis zu Dreijahreskursen in theoretischer Mathematik, welche die Schüler für ein Universitätsstudium der Mathematik bzw. der Natur- und Technikwissenschaften vorbereiten. Die Teilnahme an einem solchen Kurs ist jedoch keine formal geforderte Voraussetzung für ein solches Studium, sondern eine mehr inhaltliche Vorbereitung auf die genannten Studienrichtungen.

Die Lehrpläne werden vom Staat fixiert, hinsichtlich der Lehrbücher ist die Situation jedoch völlig anders als z. B. in der DDR. Jedermann kann Schulbücher schreiben und veröffentlichen, wenn sie vom zuständigen Ministerium als tauglich genehmigt werden und wenn er einen Verlag dafür findet. Im Ergebnis dieser Verfahrensweise gibt es etwa zehn verschiedene Lehrbücherreihen bzw. -systeme für den Mathematikunterricht der allgemeinen Schule, von denen die meisten sich über alle neun Jahre erstrecken, und etwa sieben Lehrbuchsysteme für die Oberstufe. Die Situation wird dadurch noch komplizierter, daß jedes Lehrbuch gleichzeitig in den beiden offiziellen Landessprachen erscheinen muß. (Die Norweger sind ein in mancher Hinsicht sonderbares Volk. So halten sie z. B. trotz vieler Debatten hierüber zäh am Bestand der beiden historisch entstandenen, ähnlichen, aber doch verschiedenen Varianten ihrer Sprache fest.)

Außerunterrichtliche Beschäftigung mit Mathematik

In Norwegen gibt es keine mathematischen Schülerzirkel und keine mathematische Schülerzeitschrift, nur einige sehr wenige private Klubs, die sich mit Computermathematik beschäftigen. Da die Mathematik auch in der 9jährigen Schule nicht allzu viele Stunden beansprucht, kann man ihr, wenn man will, ganz gut aus dem Wege gehen. Umfragen haben jedoch ergeben, daß die Mathematik ein zwar als schwierig eingestuftes, aber bei den Schülern beliebtes Fach ist. Jährlich veranstaltet die Norwegische Mathematische Gesellschaft einen für alle Schüler offenen Wettbewerb. Die Aufgaben werden in einer weit verbreiteten norwegischen Tageszeitung veröffentlicht, außerdem in einigen Schüler-



zeitschriften. Jeder Einsender von Lösungen muß eine Erklärung unterschreiben, daß er diese ohne fremde Hilfe gefunden hat. Davon abgesehen basiert das ganze System auf Vertrauen. 1979 wurde anlässlich des 150. Todestags Abels ein besonderer, für alle Schüler aus skandinavischen Ländern offener Wettbewerb veranstaltet. Das Anliegen der Wettbewerbe besteht darin, das Interesse an der Mathematik zu fördern. Es nehmen jedoch nur wenige Schüler daran teil, meist solche, die später Mathematik studieren wollen. An unseren Universitäten findet man heute zahlreiche frühere Preisträger dieser Wettbewerbe. An den Internationalen Mathematikolympiaden (IMO) nimmt Norwegen nicht teil.

Mathematikstudium

In Norwegen gibt es vier Universitäten (Oslo, Bergen, Trondheim und Tromsø). An allen kann man Mathematik studieren und einen mathematischen Doktorgrad erwerben, außerdem an einigen technischen Hochschulen (z. B. Trondheim). Ein Mathematikstudium mit einem niedrigeren Abschluß ist an den Pädagogischen und Ingenieurhochschulen möglich. An den Universitäten gibt es keine Beschränkung der Studienplätze. Das Studium ist auf eine breite mathematische Allgemeinbildung und die Vertiefung auf einem bestimmten Gebiet gerichtet. Wer nach einem solchen Studium Oberstufenlehrer werden möchte, muß noch eine zusätzliche pädagogische Ausbildung absolvieren. In den letzten Jahren des zweiten Weltkrieges und den ersten Jahren danach gab es in Norwegen ein großes Babyhoch. Diese Welle erreichte in den 60er Jahren die Universitäten und Hochschulen und führte zusammen mit der damals sprunghaft wachsenden Popularität von Mathematik, Naturwissenschaft und Technik (dies war ja die Zeit der ersten Sputniks) zu hohen Studentenzahlen und folglich zu einer starken Vergrößerung der mathematischen Hochschuleinrichtungen. Wenig später füllte diese Welle alle an den Hochschulen in Frage kommenden Arbeitsplätze. Heute besteht ein Problem darin, die ungleichmäßige Altersstruktur der Wissenschaftler abzubauen, junge Leute unterzubringen. Jedenfalls ist die Zahl derjenigen Wissenschaftler, die bis zum Doktorgrad in Mathematik ausgebildet werden, viel größer als das Aufnahmevermögen der Universitäts- und Hochschulforschung. Viele von ihnen suchen sich Arbeitsplätze in der Datenverarbeitungs- und Erdölindustrie, die allerdings auch in zunehmendem Maße Mathematiker beschäftigen. Viele Mathematiker werden Lehrer. Als solcher einen Arbeitsplatz zu finden, ist (außer in den Großstädten) nicht schwer. Während die mathematische Forschung in Norwegen sich in der ersten Hälfte

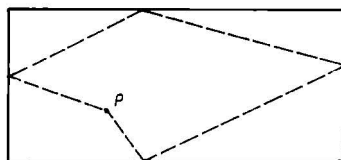
unseres Jahrhunderts stark auf die Zahlentheorie konzentrierte, ist sie gegenwärtig breit gefächert. Dabei wächst jedoch ständig die Bedeutung und der Umfang der angewandten Mathematik, vor allem in Zusammenhang mit der automatischen Informationsverarbeitung und mit der Erdölerkundung und -förderung in der Nordsee.

Aufgaben aus den norwegischen mathematischen Schülerwettbewerben

▲1▲ Zu vier in einer Ebene liegenden Punkten A, B, C, D ist ein Quadrat so zu konstruieren, daß jede Seite des Quadrats einen der vier Punkte enthält.

Man untersuche, unter welchen Bedingungen an A, B, C, D die Aufgabe ein- bzw. mehrdeutig lösbar ist und beschreibe die Konstruktion!

▲2▲ In einem rechteckigen Raum soll eine Person von einem Anfangspunkt P aus auf einem möglichst kurzen Weg der Reihe nach alle vier Wände berühren und dann nach P zurückkehren. Wie ist dieser kürzeste Weg zu konstruieren, und wie lang ist er?

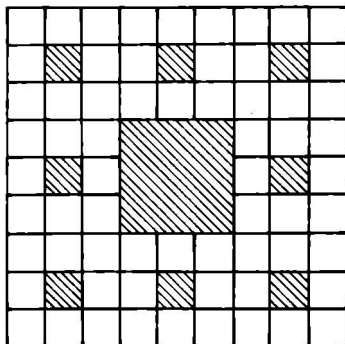


▲3▲ Man zeige: Sind a, b und $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ positive rationale Zahlen, so sind auch $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ rational.

▲4▲ Man beweise für beliebige reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ die Ungleichung

$$x_1 + x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + \dots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \leq \frac{x_n^2(n-1) + 2x_n + (n-1)}{2n}$$

▲5▲ Die Figur F_1 entsteht, indem man ein Quadrat der Seitenlänge 1 durch Schnitte parallel zu den Kanten in 9 kongruente Teilquadrate zerlegt und das mittlere entfernt. Aus F_1 entsteht die Figur F_2 , indem man mit jedem der 8 übriggebliebenen Quadrate so verfährt, wie vorher mit dem Einheitsquadrat.



Entfernt man immer wieder die mittleren Quadrate der zuletzt erhaltenen Teilquadrate, so erhält man eine Folge $F_1, F_2, F_3, \dots$ von ebenen Punktmenge, so daß $F_{n+1} \subseteq F_n$ für jede natürliche Zahl n gilt. Aus wie vielen Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{3^n}$ setzt sich F_n zusammen? Für $n \rightarrow \infty$ bestimme man den Grenzwert der Flächeninhalte der Figuren F_n .

G. Gjone/P. Schreiber



Wappen von Oslo



G. Gjone

Niels-Henrik-Abel-Wettbewerb 1982

Für alle interessierten Leser der mathematischen Schüler- und Studentenzeitschrift *Nordisk Matematisk Tidsskrift* normal werden jährlich sechs anspruchsvolle Mathematikaufgaben veröffentlicht. Die Auswertung übernimmt die Sektion Mathematik der Universität Oslo. Die besten Lösungen werden prämiert. Aus Anlaß unseres Beitrags veröffentlichen wir zwei Aufgaben aus dem Wettbewerb.

▲1▲ Lösen Sie die Gleichung
 $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14.$

▲2▲ Zeigen Sie: $z = n^4 + n^2 + 1$ ist für keine natürliche Zahl n eine Quadratzahl.

Der Eulersche Polyedersatz

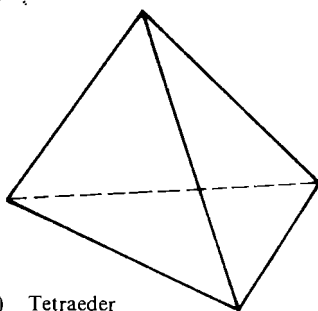
In der Stereometrie versteht man unter einem Körper eine beschränkte dreidimensionale Punktmenge des dreidimensionalen Raumes, die allseitig von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken begrenzt wird, einschließlich dieser begrenzenden Flächenstücke. Enthält ein solcher Körper mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke, so heißt der Körper *konvex*. Im Mathematikunterricht lernt ihr solche konvexe Körper kennen: Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf und Kugel. In Bild 1 sind ebenfalls Körper dargestellt: K_1 bis K_4 sind konvex, K_5 und K_6 sind nicht konvex (warum?).

Körper, die nur durch ebene Flächenstücke begrenzt werden, nennt man *Polyeder* (auch ebenflächige Körper, Ebenflächner oder Vielflächner). Die das Polyeder begrenzenden ebenen Vielecke heißen *Seitenflächen*, die Strecken, in denen je zwei Seitenflächen zusammenstoßen, *Kanten*; deren Endpunkte werden *Ecken* des Körpers genannt. Ist ein Polyeder gleichzeitig ein konvexer Körper, nennt man es ein *konvexes Polyeder* oder auch *Eulersches Polyeder*. Würfel, Quader, Prisma, Pyramide und Pyramidenstumpf sind Eulersche Polyeder (warum?); Zylinder, Kegel, Kegelstumpf und Kugel sind zwar konvexe Körper, aber keine Polyeder (es sind krummflächig begrenzte Körper). Alle in Bild 1 dargestellten Körper sind Polyeder, aber nur K_1 bis K_4 sind Eulersche Polyeder, K_5 und K_6 dagegen nicht (warum?).

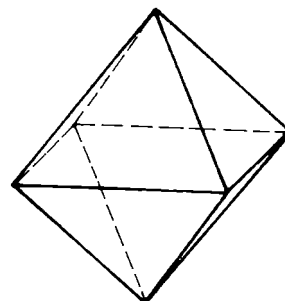
Spezielle Eulersche Polyeder sind solche mit kongruenten regelmäßigen n -Ecksflächen als Seitenflächen, die man *regelmäßige Polyeder* oder auch *Platonische Körper*¹⁾ nennt. Aus dem Satz, daß in einer n -kantigen körperlichen Ecke die Summe der Größen der Kantenwinkel kleiner als 360° ist, folgt, daß es nur 5 Arten regelmäßiger Körper geben kann: Bei Begrenzung des Polyeders durch gleichseitige Dreiecke können nämlich in einer Körperecke, da ihre Kantenwinkel je 60° betragen, nur 3, 4 oder 5 Seitenflächen zusammenstoßen; für 6 Seitenflächen wäre die Summe der Kantenwinkel bereits $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$. Bei Begrenzung des Polyeders durch Quadrate (Kantenwinkel je 90°) können in einer Körperecke nur 3 Seitenflächen zusammentreffen; dies gilt auch bei Begrenzung

durch regelmäßige Fünfecke (Kantenwinkel je 108°). Eine Begrenzung durch regelmäßige Sechsecke (Kantenwinkel je 120°) ist nicht möglich, da bereits $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ ist. Es ergeben sich die 5 Platonischen Körper: *Tetraeder* (Vierflächner), *Oktaeder* (Achtflächner), *Ikosaeder* (Zwanzigflächner), *Hexaeder* (Sechsecksflächner oder Würfel) und *Pentagondodekaeder* (Zwölfflächner) (Bild 1).

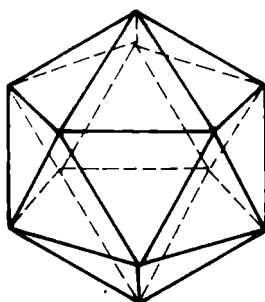
Bild 1
Polyeder



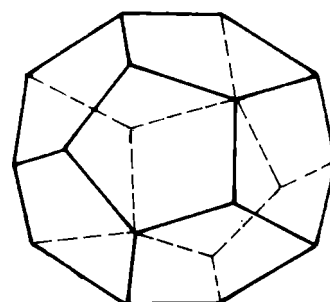
(K_1) Tetraeder



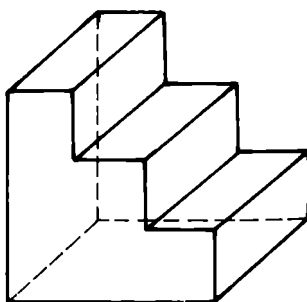
(K_2) Oktaeder



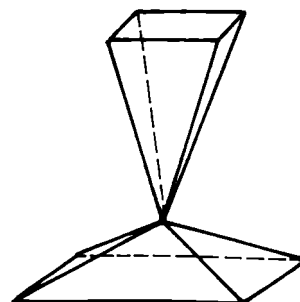
(K_3) Ikosaeder



(K_4) Pentagondodekaeder



(K_5) Treppenkörper



(K_6) 2 quadratische Pyramiden mit gemeinsamer Spitze

Für konvexe Polyeder konnte Leonhard Euler die folgende Aussage beweisen, die vermutlich schon Archimedes (um 287 bis 212 v.u.Z.) und mit Sicherheit der französische Mathematiker René Descartes (1596 bis 1650) kannten:

Eulerscher Polyedersatz: Ist e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt: $e + f - k = 2$.²⁾

Aufgabe 1: Ermittelt die Eckenanzahl e , die Flächenanzahl f und die Kantenanzahl k eines Würfels (Hexaeder), eines Quaders, eines dreiseitigen Prismas, einer quadratischen Pyramide, eines quadratischen Pyramidenstumpfes, sowie der in Bild 1 dargestellten Polyeder und berechnet jeweils $s = e + f - k$! Für welche Körper gilt der Eulersche Polyedersatz?

Die Eulersche Funktion $\phi(n)$

Zunächst einige Begriffe: Sei $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für Zahlen $m, n \in N$ bezeichne (m, n) den größten gemeinsamen Teiler von m und n . Gilt $(m, n) = 1$, so heißen m und n zueinander *teilerfremd*. Man nennt eine Funktion f , deren Definitionsbereich die Menge N der natürlichen Zahlen ist, eine *zahlentheoretische Funktion*. Eine solche heiße *multiplikativ*, falls für Zahlen $m, n \in N$ mit $(m, n) = 1$ stets gilt:

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n).$$

Bei der nach Leonhard Euler benannten Funktion $\phi(n)$, die in der Algebra und Zahlentheorie bedeutungsvoll ist, handelt es sich um eine solche zahlentheoretische Funktion: Die *Eulersche Funktion* ϕ ordnet jeder natürlichen Zahl $n \in N$ eine natürliche Zahl $\phi(n)$ zu, wobei $\phi(n)$ die Anzahl aller zu n teilerfremden natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind, ist.³⁾

Beispiel 1: Wir berechnen $\phi(8)$: Wegen $(1, 8) = 1, (2, 8) = 2, (3, 8) = 1, (4, 8) = 4, (5, 8) = 1, (6, 8) = 2, (7, 8) = 1$ und $(8, 8) = 8$ sind genau die 4 natürlichen Zahlen (die kleiner oder gleich 8 sind) 1, 3, 5 und 7 zu $n=8$ teilerfremd, also ist $\phi(8) = 4$.

Man kann zeigen, daß $\phi(n)$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion ist, d. h. daß gilt:

$$\phi(m \cdot n) = \phi(m) \phi(n), \quad (1)$$

falls $(m, n) = 1$.

Dies ermöglicht eine allgemeine Berechnungsformel für $\phi(n)$, zu der man auf folgende Weise gelangt:

a) Ist $n=p$ eine Primzahl, so sind offenbar alle Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ zu $n=p$ teilerfremd, also ist

$$\phi(p) = p - 1. \quad (2)$$

b) Ist $n=p^k$, p Primzahl und $k \in N$, so kann man durch Abzählen finden:

$$\begin{aligned} \phi(p^k) &= p^k - p^{k-1} \\ &= p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^{k-1} (p-1). \end{aligned} \quad (3)$$

c) Sei nun n eine beliebige natürliche Zahl, welche die (bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige) Primfaktorzerlegung $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ besitze. Mit Hilfe von (1) erhält man, da

$$(p_i^{k_i}, p_j^{k_j}) = 1 \text{ für } i \neq j \text{ gilt:}$$

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) \\ &= \phi(p_1^{k_1}) \phi(p_2^{k_2}) \dots \phi(p_m^{k_m}). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der rechten Seite von (3) folgt schließlich:

$$\phi(n) = p_1^{k_1-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot p_2^{k_2-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \dots \cdot p_m^{k_m-1} \cdot (p_m - 1), \quad (4)$$

oder auch:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_2^{k_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \\ &\quad p_m^{k_m} \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \\ &= (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \end{aligned}$$

so daß gilt:

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right), \quad (5)$$

wobei $p_1, p_2, \dots, p_m$ die verschiedenen Primteiler von n sind.

Beispiel 2: Wir berechnen $\phi(16200)$: Man erhält die Primfaktorzerlegung $16200 = 2^3 3^4 5^2$, d. h. 2, 3 und 5 sind die verschiedenen Primteiler von 16200. Nach (4) erhält man:

$$\begin{aligned} \phi(16200) &= 2^2 (2-1) 3^3 (3-1) 5^1 (5-1) \\ &= 4 \cdot 54 \cdot 20 = 4320. \end{aligned}$$

Nimmt man die äquivalente Formel (5), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \phi(16200) &= 16200 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 4320. \end{aligned}$$

Es gibt also 4320 natürliche Zahlen k , $1 \leq k \leq 16200$, die zu $n=16200$ teilerfremd sind, d. h. für die $(k, 16200) = 1$ gilt.

Abschließend seien die folgenden Beispiele für weitere zahlentheoretische Funktionen genannt:

$d(n)$: die Anzahl aller positiven Teiler von n ,

$\sigma(n)$: die Summe aller positiven Teiler von n ,

$\pi(n)$: die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich n ,

$r(n)$: die Anzahl der ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Gleichung $x^2 + y^2 = n$.

Aufgabe 2:

Berechnet folgende Funktionswerte:

$$\phi(2156), \phi(1800), \phi(841), d(72), \sigma(72), \pi(100) \text{ und } r(25)!$$

Zusatzaufgabe: Ermittelt alle dreistelligen natürlichen Zahlen n , für deren Ziffern a, b und c (a bezeichne die erste, b die zweite und c die dritte Ziffer bezüglich des Dezimalsystems) die Beziehung $a + b - c = 2$ gilt!

R. Mildner

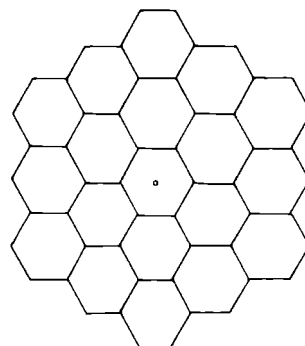
Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. B. Dynkin und Prof. Dr. W. A. Uspenski

Moskauer Staatliche Lomonossow-Universität
Sektion mathematische Schulzirkel

▲ 2271 ▲

a) Vom Mittelfeld dieses Wabenmusters aus soll ein Kamel alle Felder betreten, ohne eines zweimal zu berühren.

b) Man nummeriere alle Felder des sechseckigen Brettes in der Reihenfolge, in der sie in Aufgabe a) vom Kamel betreten wurden. Alle Felder, deren Nummern Vielfache von 3 sind, sind schwarz zu färben; alle Felder, deren Nummern durch 3 dividiert den Rest 1 ergeben, sind zu schraffieren. Welche Art der Färbung ergibt das?



Wer mehr über Mehrfarbenprobleme, über Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung wissen möchte, der greife zu dem 1983 erschienenen Buch

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski

Mathematische Unterhaltungen

272 Seiten, 161 Abbildungen, Preis 13,00 M

Bestell-Nr. 570 734 I

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften, Berlin

Hinweis zum alpha-Wettbewerb

Aus Platzgründen veröffentlichen wir ab Heft 5/83 Preisträger des alpha-Wettbewerbs, Teilnehmer mit vorbildlichen Leistungen und Preisträger, welche vier Jahre und mehr am alpha-Wettbewerb teilnahmen, d. Red.



Genauigkeit gefragt!

Zur Multiplikation und Division von Näherungswerten

Manfred ist der Fußballstatistiker der 7b. Seit drei Jahren führt er genau Buch über alle Oberligaspiele.

So kann er von jedem Spieltag Auskunft darüber geben, welche Mannschaften gegeneinander gespielt haben, wieviel Zuschauer bei jedem Spiel anwesend waren, welcher Spieler die meisten Tore der Saison geschossen hat und vieles mehr.

Für den 25. Spieltag des Jahres 1982 ist seinen Aufzeichnungen u. a. folgendes zu entnehmen;

22. Mai 1982, 25. Spieltag

	Endstand	Zuschauer
1. FC Lok Leipzig – 1. FC Magdeburg	3 : 2	13000
HFC Chemie – BFC Dynamo	2 : 2	8000
FC Karl-Marx-Stadt – Dynamo Dresden	1 : 1	11000
FC Vorwärts Frankfurt – Wismut Aue	3 : 0	6000
Rot-Weiß Erfurt – Sachsenring Zwickau	5 : 2	8000
Buna-Schkopau – Carl Zeiss Jena	0 : 3	5000
Hansa Rostock – Energie Cottbus	2 : 1	8000

Tore insgesamt: 27
Tore je Spiel: 3,8571428
Zuschauer insgesamt: 59000
Zuschauer je Spiel: 8428,5714

Da Manfred jeweils die Gesamtsummen und die entsprechenden Durchschnittswerte für Tore und Zuschauerzahlen mit einem Taschenrechner ermittelt, ist er sehr stolz auf die Genauigkeit seiner Resultate.

Ist dieser Stolz berechtigt?

Betrachten wir zunächst die Anzahl der geschossenen Tore. Die Torangaben sind im Gegensatz zu den Zuschauerzahlen genaue Werte und nicht durch Runden oder Schätzen entstanden. Somit ist die Angabe, daß am 25. Spieltag 27 Tore geschossen wurden, in Ordnung.

Will man die durchschnittlich pro Spiel geschossenen Tore ermitteln, muß man 27 durch 7 dividieren und erhält mit einem Taschenrechner den Wert 3,8571428.

Da es sich im konkreten Fall um die Anzahl von Toren handelt, wäre es eigentlich ver-

nünftig, den ermittelten Wert auf eine natürliche Zahl, in unserem Falle 4, zu runden.

Um gewisse Tendenzen zum Ausdruck zu bringen, wird in Übersichten oft auf Zehntel, d. h. in unserem Fall auf 3,9, gerundet. Weitere Stellen anzugeben ist allerdings unsinnig.

Wie sieht es mit den Angaben über die Zuschauer aus?

Wir gehen davon aus, daß die jeweiligen Zahlenwerte durch Runden auf Vielfache von Tausend entstanden, also Näherungswerte sind. Damit ergibt sich für die Gesamtzuschauerzahl 59000, so wie es Manfred angegeben hat. Dieser Näherungswert hat zwei zuverlässige Ziffern, nämlich 5 und 9. Das heißt, der wahre Wert liegt zwischen 58500 und 59500 Zuschauern. Aus diesen beiden Werten lassen sich die Wertschranken für die durchschnittliche Zuschauerzahl je Spiel ermitteln, indem man 58500 bzw. 59500 durch 7 (die Anzahl der Spiele ist ein genauer Wert) dividiert.

Mit einem Taschenrechner erhält man:

$$58500 : 7 = 8357,1428$$

$$59500 : 7 = 8500.$$

Da es wenig sinnvoll ist, von Zehntel Zuschauern zu sprechen, liegt der wahre Wert für die durchschnittliche Zuschauerzahl zwischen 8357 und 8500.

Will man auf die Berechnung von Wertschranken verzichten und ausgehend von dem Wert 8428,5714 ein vernünftiges Ergebnis angeben, muß man den durch Division ermittelten Wert 8428,5714 auf einen Näherungswert mit zwei zuverlässigen Ziffern runden. Man erhält 8400.

Das mit diesem Wert beschriebene Intervall stimmt zwar nicht ganz mit dem durch Wertschranken ermittelten überein, doch kommt es diesem von den in Frage kommenden (8000; 8430; 8429) am nächsten.

Damit wir nicht immer Wertschranken berechnen müssen, wollen wir uns bei der Division und auch bei der Multiplikation von Näherungswerten nach folgender Faustregel richten:

(2) Im Ergebnis einer Multiplikation oder Division von Näherungswerten können nicht mehr Ziffern zuverlässig sein als in dem Eingangswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern, wobei die linken Nullen in einem Dezimalbruch nicht mit gerechnet werden.

Hier nun noch einige Beispiele:

Multipliziere folgende Näherungswerte!

a) $a = 1,32$; $b = 2,923$

Mit einem Taschenrechner erhält man:

$$3,85836$$

$a \cdot b = 3,86$, denn das Ergebnis kann wegen $a = 1,32$ höchstens drei zuverlässige Ziffern haben.

b) $a = 2,92$; $b = 0,098$

Mit einem Taschenrechner erhält man:

$$0,28616$$

$a \cdot b = 0,29$, denn das Ergebnis kann wegen $b = 0,098$ (linke Nullen werden nicht gerechnet) höchstens zwei zuverlässige Ziffern haben.

Der Quotient der Näherungswerte $a = 17,2$ und $b = 3,9$ soll mit sinnvoller Genauigkeit angegeben werden.

Mit einem Taschenrechner erhält man:

$$4,4102564$$

$a : b = 4,4$, denn der Quotient kann wegen $b = 3,9$ höchstens zwei zuverlässige Ziffern haben.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Gib $\frac{4}{3}$ durch einen Dezimalbruch mit drei zuverlässigen Ziffern an!

▲ 2 ▲ Gib $\frac{10}{7}$ durch einen Dezimalbruch mit zwei zuverlässigen Ziffern an!

▲ 3 ▲ Runde auf zwei zuverlässige Ziffern!

a) 18,6 b) 1,732 c) 1837

▲ 4 ▲ Die Seitenlängen a , b eines Rechtecks werden auf Zentimeter genau gemessen. Man findet die Werte $a = 3$ cm und $b = 9$ cm. Berechne den Flächeninhalt A !

Wie weit muß der rechnerisch gefundene Wert gerundet werden?

L. Flade

15 Knacknüsse

Aus: Knacknüsse für

Freunde des Rechnens, Wismar 1880

Klasse 5

▲ 1 ▲ Vier Schüler Axel, Bernd, Christian und Dieter haben zusammen 13,80 M in ihren Geldbörsen. Christian hat 60 Pf, Dieter 80 Pf weniger in seiner Geldbörse als jeder der beiden Schüler Axel und Bernd. Welchen Geldbetrag hat jeder dieser vier Schüler in seiner Geldbörse?

▲ 2 ▲ Vermehrt ein Schäfer seine Herde um 23 Schafe, dann hat er doppelt so viele Tiere zu betreuen, als wenn er 27 Schafe zum Schlachten abliefern. Wie viele Schafe umfaßt diese Herde?

▲ 3 ▲ Der äußere Umfang eines 8 cm breiten rechteckigen Spiegelrahmens beträgt 280 cm. Welche Länge besitzt der innere Umfang dieses Rahmens?

▲4▲ Das Licht bewegt sich mit einer Schnelligkeit von 300 000 000 m in einer Sekunde. Wie viele Kilometer ist demnach der Polarstern von der Erde entfernt, wenn das Licht desselben 30 Jahre (zu 365 Tagen) gebraucht, um zur Erde zu gelangen?

▲5▲ Im westlichen Mecklenburg beträgt die Höhe der durchschnittlichen jährlichen Regenmenge $52\frac{1}{2}$ cm. Wie viele Hektoliter sind das auf einem Ar?

▲6▲ Von einem Ballen Tuch, der 30 m enthielt, wurden 4 m Tuch mehr verkauft als übrig blieben. Wie viele Meter Tuch verblieben zum weiteren Verkauf?

▲7▲ Vater und Sohn sind zusammen 88 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen, wenn den Unterschied ihres Alters 38 Jahre ausmacht?

▲8▲ Das Alter zweier Kinder, von denen das eine 4 Jahre älter ist als das andere, beträgt zusammen 26 Jahre. Vor wie vielen Jahren war das jüngste Kind halb so alt wie das älteste?

Klasse 6

▲9▲ Zwei Orte A und B liegen 262,5 km voneinander entfernt. Von A geht jemand, der täglich 20 km zurücklegt, nach B. Drei Tage später geht ein anderer, der täglich 25 km zurücklegt, von B nach A. Nach welcher Zeit treffen sich beide Personen? Wie viele Kilometer hat dann jeder von ihnen zurückgelegt?

▲10▲ Eine Gemeinde hat 856 Einwohner, und zwar $1\frac{1}{10}$ mal so viele Frauen wie Männer und $1\frac{1}{3}$ mal so viele Kinder wie Frauen. Wie viele Männer, Frauen bzw. Kinder gehören dieser Gemeinde an?

▲11▲ Von zwei Uhren geht die erste genau; die zweite geht stündlich $1\frac{1}{2}$ Minuten vor. Angenommen, beide Uhren zeigen die Uhrzeit 12 Uhr an. Welche Zeit vergeht, bis beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit anzeigen?

▲12▲ Grundlinie und Höhe eines Dreiecks sind zusammen 96 m lang. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks, wenn die Höhe 16 m länger ist als die Grundseite?

▲13▲ Aus dem Tore einer Stadt ging morgens um 6 Uhr ein Reisender in gleichmäßigem Schritte. Zwei Stunden später fuhr aus demselben Tor ein Postwagen auf derselben Straße. Zu welcher Uhrzeit holte der Postwagen den Reisenden ein, wenn der Postwagen eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 2,7 m, der Reisende von 1,2 m je Sekunde hatte?

▲14▲ Zwei Personen A und B sollen zusammen 120 Bogen abschreiben. A schreibt in 3 Stunden $4\frac{1}{2}$ Bogen ab, B dagegen in

2 Stunden 5 Bogen. Wie viele Bogen hat jede der beiden Personen abzuschreiben, wenn beide zur gleichen Zeit beginnen und zur gleichen Zeit fertig werden sollen?

▲15▲ Aus einer Bibliothek war der 30. Teil aller Bücher verliehen, der 20. Teil befand sich beim Buchbinder, so daß 125 Bücher des Gesamtbestandes fehlten. Wie viele Bücher umfaßte diese Bibliothek?

Lösungen

▲1▲ $13,80 \text{ M} + 0,60 \text{ M} + 0,80 \text{ M} = 15,20 \text{ M}$; $15,20 \text{ M} : 4 = 3,80 \text{ M}$; Axel hat 3,80 M, Bernd 3,80 M, Christian 3,20 M und Dieter 3,00 M in seiner Geldbörse.

▲2▲ Angenommen die Herde umfaßt x Schafe; dann gilt $2 \cdot (x - 27) = x + 23$, $2x - 54 = x + 23$, $x = 77$. Die Herde umfaßt 77 Schafe.

▲3▲ Von jeder der vier Seitenlängen gehen $2 \cdot 8 \text{ cm}$ ab. Insgesamt gehen somit $4 \cdot 16 \text{ cm} = 64 \text{ cm}$ vom äußeren Umfang ab. Der innere Umfang des Rahmens hat eine Länge von $280 \text{ cm} - 64 \text{ cm} = 216 \text{ cm}$.

▲4▲ $1 \text{ h} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s}$; 1 Tag hat $24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$; 1 Jahr hat $365 \cdot 86400 \text{ s} = 31\,536\,000 \text{ s}$.

In 30 Jahren legt das Licht des Polarsterns somit

$30 \cdot 31\,536\,000 \cdot 300\,000\,000 \text{ m}$
 $= 946\,080\,000 \cdot 300\,000 \text{ km}$
 $= 283\,824\,000\,000\,000 \text{ km}$

zurück, bis es zur Erde gelangt. Dies ist zugleich die Entfernung Erde-Polarstern.

▲5▲ 1 Ar ist eine Fläche von 100 m^2 oder von $1\,000\,000 \text{ cm}^2$. Die jährliche Regenmenge bildet einen Quader von 52,5 cm Höhe und $1\,000\,000 \text{ cm}^2$ Grundfläche. Die Regenmenge hat somit einen Rauminhalt von $52,5 \cdot 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 52\,500\,000 \text{ cm}^3$
 $= 52\,500 \text{ Liter} = 525 \text{ Hektoliter}$.

▲6▲ $30 \text{ m} - 4 \text{ m} = 26 \text{ m}$; $26 \text{ m} : 2 = 13 \text{ m}$; $13 \text{ m} + 4 \text{ m} = 17 \text{ m}$, $13 \text{ m} + 17 \text{ m} = 30 \text{ m}$. Es verblieben 13 m Tuch zum weiteren Verkauf.

▲7▲ $88 - 38 = 50$; $50 : 2 = 25$; $25 + 38 = 63$. Der Vater ist 63 Jahre, der Sohn 25 Jahre alt.

▲8▲ $26 - 4 = 22$; $22 : 2 = 11$; $11 + 4 = 15$. Gegenwärtig sind diese Kinder 11 und 15 Jahre alt.

Wir stellen eine Tabelle auf.

	Alter des jüngeren Kindes	Alter des älteren Kindes
Gegenwärtig	11	15
vor 1 Jahr	10	14
vor 2 Jahren	9	13
vor 3 Jahren	8	12
vor 4 Jahren	7	11
vor 5 Jahren	6	10
vor 6 Jahren	5	9

vor 7 Jahren	4	8
vor 8 Jahren	3	7
...		

Vor 7 Jahren war das jüngste Kind halb so alt wie das älteste.

▲9▲ Angenommen, x Tage nach dem Aufbruch der ersten Person in A treffen sich beide; dann gilt $20 \cdot x + 25 \cdot (x - 3) = 262,5$, $20x + 25x - 75 = 262,5$, $45x = 337,5$, $x = 7,5$.

Beide Personen treffen sich nach 7,5 Tagen, gerechnet vom Zeitpunkt des Aufbruchs der ersten Person.

$7,5 \cdot 20 \text{ km} = 150,0 \text{ km}$,

$4,5 \cdot 25 \text{ km} = 112,5 \text{ km}$.

Bis zum Zusammentreffen hat die erste Person 150 km, die andere 112,5 km zurückgelegt.

▲10▲ Angenommen, der Gemeinde gehören x Männer, also $\frac{11}{10} \cdot x$ Frauen und

$\frac{4}{3} \cdot \frac{11}{10} \cdot x = \frac{44}{30} \cdot x$ Kinder an; dann gilt

$x + \frac{11}{10} \cdot x + \frac{44}{30} \cdot x = 856$,

$\frac{30}{30} \cdot x + \frac{33}{30} \cdot x + \frac{44}{30} \cdot x = 856$, $\frac{107}{30} \cdot x = 856$,

$x = 240$.

Dieser Gemeinde gehören 240 Männer,

$\frac{11}{10} \cdot 240 = 264$ Frauen und $\frac{4}{3} \cdot 240 = 320$ Kinder an.

▲11▲ $12 \text{ h} = 12 \cdot 60 \text{ min} = 720 \text{ min}$;

$720 : 1\frac{1}{2} = 480$. Vorwärts gerechnet kommt die

zweite Uhr der ersten in jeder Stunde um $1\frac{1}{2} \text{ min}$ näher. Nach 480 Stunden, also

nach 20 Tagen, zeigen beide Uhren wieder zum selben Zeitpunkt die Uhrzeit 12 Uhr an.

▲12▲ $96 \text{ m} - 16 \text{ m} = 80 \text{ m}$; $80 \text{ m} : 2 = 40 \text{ m}$;

$40 \text{ m} + 16 \text{ m} = 56 \text{ m}$. $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, $A = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot$

56 m^2 , $A = 1120 \text{ m}^2$.

▲13▲ Aus $x \cdot 2,7 = (x + 2) \cdot 1,2$ folgt $2,7x = 1,2x + 2,4$, $1,5x = 2,4$, also $x = \frac{24}{15} = 1\frac{3}{5}$. Der

Postwagen fuhr um 8 Uhr ab. Nach $1\frac{3}{5} \text{ h}$, also nach 1 h 36 min, das heißt um 9³⁶ Uhr holte der Postwagen den Reisenden ein.

▲14▲ In 30 Stunden schafft A $30 \cdot \frac{3}{2}$
 $= 45$ Bogen, B hingegen $30 \cdot \frac{5}{2} = 75$ Bogen.

▲15▲ Angenommen, die Bibliothek umfaßte x Bücher; dann gilt

$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 125$, $\frac{2x}{60} + \frac{3x}{60} = 125$, $\frac{5x}{60} = 125$,

$x = \frac{125 \cdot 60}{5}$, $x = 1500$.

Diese Bibliothek umfaßte 1500 Bücher.

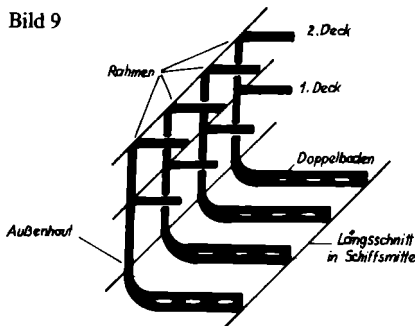
Mathematik und Schiffbau

Teil 2

4. Die Berechnung von Balkentragwerken

Obwohl das Schiff im eigentlichen Sinn kein aus einzelnen Trägern zusammengesetztes Balkentragwerk ist, können viele der im Schiff vorhandenen Teilkonstruktionen als solche Balkentragwerke aufgefaßt und so einer Berechnung zugänglich gemacht werden. Als ein Beispiel seien die Querrahmen eines Schiffes genannt (Bild 9). Jeder einzelne dieser Rahmen wird für sich berechnet. Die gegenseitige Beeinflussung der nebeneinander angeordneten Rahmen, die wegen der von außen aufgeschweißten Beplattung vorhanden ist, wird bei diesem Modell vernachlässigt.

Bild 9

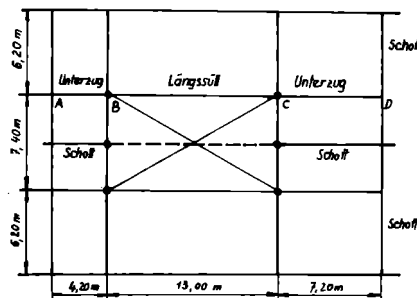


Die einzelnen Träger des Rahmens werden durch die darauf befindliche Nutzlast und den von außen einwirkenden Wasserdruck belastet und verformt. Zur Bestimmung der Beanspruchung der Träger ist die Kenntnis der Momente an den Lagerstellen des Rahmens notwendig. Die Lagerstellen befinden sich dort, wo die einzelnen Träger des Rahmens zusammenlaufen. Wir wollen zeigen, wie man die Berechnung dieser Momente bewerkstelligen kann.

Wir führen unsere Untersuchungen an einem anderen wichtigen Balkentragwerk im Schiff, der Lukenkonstruktion, durch. Die Luke ist eine Öffnung im Schiffdeck, durch die die Ladung in das Schiffinnere hineingebracht werden kann. Ein Beispiel dafür ist im Bild 10 zu sehen. Die schraffiert gezeichnete Decksbeplattung und die darauf befindliche Belastung wird von zwei Längsträgern (bestehend aus je zwei sogenannten Unterzügen und je einem Längssüll) und zwei Querträgern

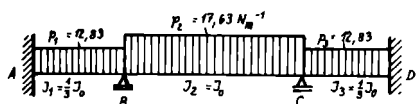
getragen. In den Kreuzungspunkten B, C und B', C' sollen sich Stützen befinden, die ein Absenken dieser Punkte verhindern (i. a. sind solche Stützen nicht vorhanden, dann gestaltet sich jedoch der Berechnungsprozeß etwas schwieriger).

Bild 10



Wenn man sich die Decksbelastung auf den Längsträger verteilt denkt, erhält man als ein besonders einfaches Balkentragwerk den in A, B, C und D gestützten Durchlaufträger, der an den starren Querschotten bei A und D fest eingespannt und in den Punkten B und C starr gelagert ist. Die Belastung und die Trägheitsmomente der Unterzüge und des Längssüls sind Bild 11 zu entnehmen.

Bild 11



Um die richtigen Abmessungen des Längsverbandes nachweisen zu können, sind für den Konstrukteur die Biegemomente an den Stützstellen von Interesse. Zur Berechnung dieser Momente kann man ein Iterationsverfahren verwenden. Man spannt den Träger an den Stützstellen B und C zunächst fest ein (was in Wirklichkeit nicht der Fall ist) und erhält auf diese Weise aus dem von A bis D durchlaufenden Träger drei (mit I, II und III bezeichnete) Einzelträger (Bild 12), die beiderseits fest eingespannt sind. Die Momente an den Stäben in diesem Zustand berechnen sich dann sehr einfach aus den Formeln (20) zu

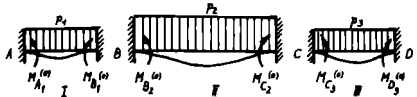
$$M_{A1}^{(0)} = \frac{12,83 \cdot 4,2^2}{12} = 18,86 \text{ Nm} = -M_{B1}^{(0)}$$

$$M_{B2}^{(0)} = \frac{17,63 \cdot 13^2}{12} = 248,29 \text{ Nm} = -M_{C2}^{(0)}$$

$$M_{C3}^{(0)} = \frac{12,83 \cdot 7,2^2}{12} = 65,05 \text{ Nm} = -M_{D3}^{(0)}$$

Hierbei wurde, um die Drehrichtung der Momente deutlich zu machen, das Einspannmoment positiv gewertet, wenn es links herum

Bild 12



dreht, und negativ, wenn es rechts herum dreht. Im Bild 12 wurden die Biegelinien der Träger in diesem Zustand mit eingezeichnet.

Diese Ausgangssituation wird jetzt schrittweise (iterativ) in den wahren Zustand (Bild 11) überführt. Zunächst wird die Einspannung bei B gelöst, wobei die Momentensumme $M_{B1}^{(0)} + M_{B2}^{(0)}$ gemäß den Steifigkeiten der beiden Träger I und II verteilt wird. Für einen eingespannten Träger sind die Steifigkeiten entsprechend (23) maßgebend:

$$c_{B1} = \frac{4EJ_1}{l_1} = \frac{4EJ_0}{3 \cdot 4,2}, \quad c_{B2} = \frac{4EJ_2}{l_2} = \frac{4EJ_0}{13,0},$$

so daß $100 \frac{c_{B1}}{c_{B1} + c_{B2}} \% = 50,8\%$ der Momentensumme mit umgekehrter Drehrichtung

vom Träger I und $100 \frac{c_{B2}}{c_{B1} + c_{B2}} \% = 49,2\%$

vom Träger II aufgenommen werden. Man erhält

$$M_{B1}^{(1)} = -116,55, \quad M_{B2}^{(1)} = -112,88.$$

An den gegenüberliegenden Lagern ergibt sich jeweils die Hälfte dieser Momente als Reaktionsmoment, also

$$M_{A1}^{(1)} = -58,28, \quad M_{C2}^{(1)} = -56,44.$$

Nun wird bei C die Momentensumme

$$M_{C2}^{(0)} + M_{C3}^{(0)} + M_{C2}^{(1)}$$

$$= -248,29 + 65,05 - 56,44 = -239,68$$

gebildet und gemäß den Steifigkeiten der Stäbe II und III verteilt. Hier ist

$$c_{C2} = \frac{4EJ_2}{l_2} = \frac{4EJ_0}{13,0}, \quad c_{C3} = \frac{4EJ_3}{l_3} = \frac{4EJ_0}{3 \cdot 7,8}$$

und damit gehen $100 \frac{c_{C2}}{c_{C2} + c_{C3}} \% = 64,3\%$ der

Momentensumme mit umgekehrtem Dreh-

sinn in den Träger II und $100 \frac{c_{C3}}{c_{C2} + c_{C3}} \% =$

$35,7\%$ in den Träger III. Wir erhalten

$$M_{C2}^{(2)} = +154,11, \quad M_{C3}^{(2)} = +85,57,$$

und an den gegenüberliegenden Lagern jeweils die Hälfte:

$$M_{B2}^{(2)} = +77,06, \quad M_{D3}^{(2)} = +42,79.$$

In dieser Weise wird das Verfahren mit denselben Verteilungskoeffizienten an den Lagern fortgesetzt. Die Momentenanteile werden immer kleiner, das Trägersystem nähert sich immer mehr dem bei B und C nicht eingespannten Zustand, das Verfahren konvergiert. Der vollständige Ausgleich ist in Tabelle 1 angegeben. Wenn wir nur mit zwei Stellen nach dem Komma rechnen, bricht das Verfahren nach 10 Iterationsstufen ab. Die Summe aller Momentenanteile in den einzelnen Spalten ergeben die Momente im Durchlaufträger (Bild 11) an den Stützstellen A, B, C und D (siehe Tabelle 1).

So wie hier bei der Lukenkonstruktion lassen sich auch die Momente in den Querrahmen (Bild 9) bestimmen. Die Belastung besteht hier aus der Deckslast und dem seitlichen Wasserdruck. Schließlich lassen sich auch Trägerroste größeren Ausmaßes auf diese Weise berechnen.

Tabelle 1

<i>A</i>	← 0,508		0,492 →	← 0,643		0,357 →	<i>D</i>
	<i>B</i>			<i>C</i>			
+ 18,86	− 18,86		+ 248,29	− 248,29		+ 65,05	− 65,05
− 58,28	− 116,55	+ 229,43	− 112,88	− 56,44	− 183,24		
		0	+ 77,06	+ 154,11	− 239,68	+ 83,57	+ 42,79
− 19,57	− 39,15	+ 77,06	− 37,91	− 18,96	0		
		0	+ 6,09	+ 12,19	− 18,96	+ 6,77	+ 3,38
− 1,55	− 3,09	+ 6,09	− 3,00	− 1,50	0		
		0	+ 0,48	+ 0,96	− 1,50	+ 0,54	+ 0,27
− 0,12	− 0,24	+ 0,48	− 0,24	− 0,12	0		
		0	+ 0,04	+ 0,08	− 0,12	+ 0,04	+ 0,02
− 0,01	− 0,02	+ 0,04	− 0,02	− 0,01	0		
		0	0	+ 0,01	− 0,01	0	
− 60,67	− 177,91		+ 177,91	− 157,97		+ 157,97	− 18,59

Mathematisch läuft das im Fall der Lukenkonstruktion beschriebene Iterationsverfahren auf die iterative Lösung eines linearen Gleichungssystems hinaus, wobei die Unbekannten die Momente M_A , M_B , M_C , M_D an den Lagerstellen sind. Bei der Berechnung größerer Strukturteile des Schiffes (Rahmen mit vielen Trägern, Trägerroste) sind manchmal 100 und mehr lineare Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten zu lösen. Dann ist der Einsatz von Rechenautomaten und die Heranziehung anderer geeigneter Lösungsverfahren unumgänglich.

5. Die Längsfestigkeit und einige weitere Aufgaben der Schiffsfestigkeit

Nicht nur die Beanspruchung einzelner Bauteile und größerer Teilkonstruktionen des Schiffes ist für den Schiffbauingenieur von Interesse, sondern auch die Festigkeit des Schiffes als Gesamtverband (Längsfestigkeit des Schiffes). Dabei kann das Schiff im einfachsten Modell als ein Balken mit stückweise konstantem Querschnitt und stückweise konstanter Belastung aufgefaßt werden, der an seinen Enden frei ist, d. h. das Biegemoment und die Querkraft sind dort Null.

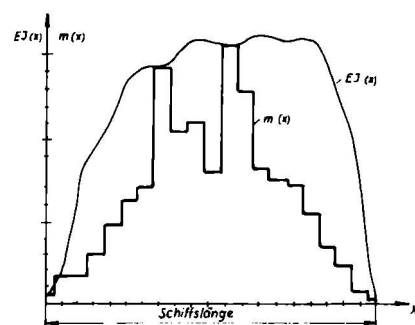
Die Belastung $p(x)$ in Abhängigkeit von der Ortskoordinate x eines solchen Balkens setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

- Gewicht des Schiffes mit Ausrüstung
- Gewicht der Antriebsanlagen (Maschine, Wellenleitung, Schiffsschrauben)
- Gewicht der Ladung
- Gewicht der Vorräte (Brennstoff, Wasser usw.)
- Gewicht des festen und flüssigen Ballasts
- Auftrieb des Schiffskörpers im Wasser (wirkt den anderen Gewichten entgegen).

Bei der Berechnung der Trägheitsmomente $J(x)$ (bzw. der Steifigkeiten $EJ(x)$) in den einzelnen Querschnitten des Schiffes werden alle Längsverbindungen berücksichtigt. Typische Beispiele für die Massenverteilung $m(x)$ pro Längeneinheit, die für die Gewichtsverteilung

ohne Auftrieb maßgebend ist, und die Steifigkeitsverteilung $EJ(x)$ eines Schiffes findet man in Bild 13.

Bild 13



Ist die Belastung $p(x)$ bekannt, dann kann man durch zweimalige numerische Integration der zwischen der Belastung $p(x)$ und dem Biegemoment $M(x)$ gültigen Beziehung $M''(x) = p(x)$ (24) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (Biegemoment und Querkraft an den Schiffsenden Null) zunächst das Biegemoment bestimmen. Anschließend läßt sich dann aus der Differentialgleichung der Biegelinie (11), die hier in der Form

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EJ(x)} \quad (25)$$

geschrieben werden kann, ebenfalls durch zweimalige numerische Integration der Gleichung (25) die Durchbiegung $y(x)$ des Schiffskörpers errechnen.

Um den ungünstigsten Fall hinsichtlich der Beanspruchung des Schiffskörpers herauszufinden, müssen i. a. verschiedene Situationen untersucht werden:

Schiff im Glatwasser, Schiff auf einem Wellenberg, Schiff im Wellental, Schiff bei unterschiedlichen Beladungszuständen (volle Beladung, Ballastfahrt usw.).

Bei diesen Berechnungen werden effektive Verfahren der numerischen Integration benötigt, die sich auf Rechenautomaten realisieren lassen.

Es gibt genauere Modelle für die Beschreibung der Längsfestigkeit des Schiffes, z. B. die Berücksichtigung der Decksaufbauten, wobei sowohl der Schiffsboden als auch jedes einzelne Stockwerk als Balken aufgefaßt wird. Dieses Modell wird durch ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem beschrieben. In einem anderen Modell wird das Schiff durch ein ebenes oder räumliches Balkentragwerk dargestellt. Die erforderlichen Rechnungen hierbei sind allerdings sehr aufwendig. Natürlich gibt es noch eine Vielzahl anderer spezieller Bauteile im Schiff, deren Festigkeit unter bestimmten Belastungen untersucht werden muß. Besonders wichtig ist die Berechnung von Platten, die im Schiff überall vorkommen. Hierzu sind gewisse partielle Differentialgleichungen unter bestimmten Randbedingungen numerisch zu lösen. Dazu eignen sich sogenannte Differenzenverfahren oder auch die Methode der finiten Elemente, auf die wir hier selbstverständlich nicht eingehen können. Aber auch Stabilitätsprobleme, z. B. das Ausknicken von Stäben oder das Ausbeulen von Platten unter gewissen kritischen Lasten, gilt es analytisch und numerisch zu untersuchen.

Mit der Schiffsfestigkeit im Zusammenhang steht das Gebiet der durch die Maschine bzw. den Propeller erzwungenen Schiffsschwingungen und bestimmter Resonanzschwingungen einzelner Teile des Schiffes (z. B. der Decksbeplattung). Die Lösung dieser Probleme erfordert ebenfalls eine Vielzahl analytischer und numerischer Methoden und Verfahren und damit ein reiches Anwendungsfeld der Mathematik.

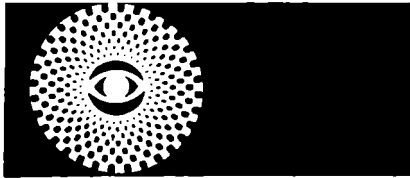
Der Schiffbauingenieur kann die im Schiffbau anstehenden mathematischen Aufgaben und deren numerisch-rechentechnische Lösung weitgehend selbstständig bearbeiten. Dazu erhält er eine gut fundierte mathematische Ausbildung während seines Studiums.

In vielen Fällen kann man aber auf eine interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen Ingenieur, Mathematiker und Informatiker nicht verzichten.

H.-W. Stolle

Alle Suhler Teilnehmer erhielten diese Karte. Entwurf: D. Kiehle, Mathematiklehrer, F.-Köhler-OS Suhl.





ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Köpfchen, Köpfchen – Spiele und Knoeleien

In Spielzeugläden in der Sowjetunion kann man mit etwas Glück sehr preiswert kleine Spiele erstehen, die helfen sollen, das geometrische Vorstellungsvermögen und das logische Denken zu entwickeln. Einige derartige Spiele wollen wir uns hier gemeinsam ansehen. Ihr könnt sie leicht nachbauen und werdet bestimmt viel Freude daran haben.

Beim Spiel Гексатрион (Hexatrimon) sind aus 12 Elementen verschiedene geometrische Figuren zusammenzulegen. Jedes Element besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken (hieraus leitet sich der Name des Spiels ab). Ihr findet die 12 Elemente in Bild 1, übertragt sie auf Zeichenkarton, Sperrholz oder Plastrmaterial (Schreibtischauflage), und schneidet oder sägt jedes Element je einmal aus. Nun könnt ihr versuchen, Figuren zusammenzubauen.

Es gibt dafür sehr viele verschiedene Möglichkeiten. Einige sind in Bild 2 dargestellt. Allerdings muß man sich intensiv damit beschäftigen. Die Lösungen sind nicht ganz einfach zu erhalten.

Auch mir sind viele noch nicht bekannt.

Ebenso wie Hexatrimon ist auch das Spiel Пентамино (Pentamino) für Schüler der Mittel- und Oberstufe sowjetischer Schulen gedacht. Auch bei Pentamino sind aus 12 Elementen geometrische Figuren zusammenzufügen, die einzelnen Elemente bestehen hier aus jeweils 5 Quadraten in unterschiedlichen Anordnungen (Bild 3).

Ich habe 9 Figuren (Bild 4) ausgewählt, die ihr mit Pentamino konstruieren könnt. Eine Unmenge weiterer Figuren könnt ihr euch selbst ausdenken.

Viel Freude beim Entwerfen schöner Figuren und Muster!

W. Schmidt

Bild 1 Hexatrimon

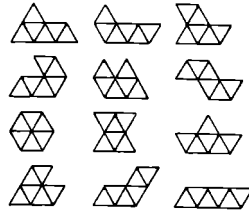


Bild 2

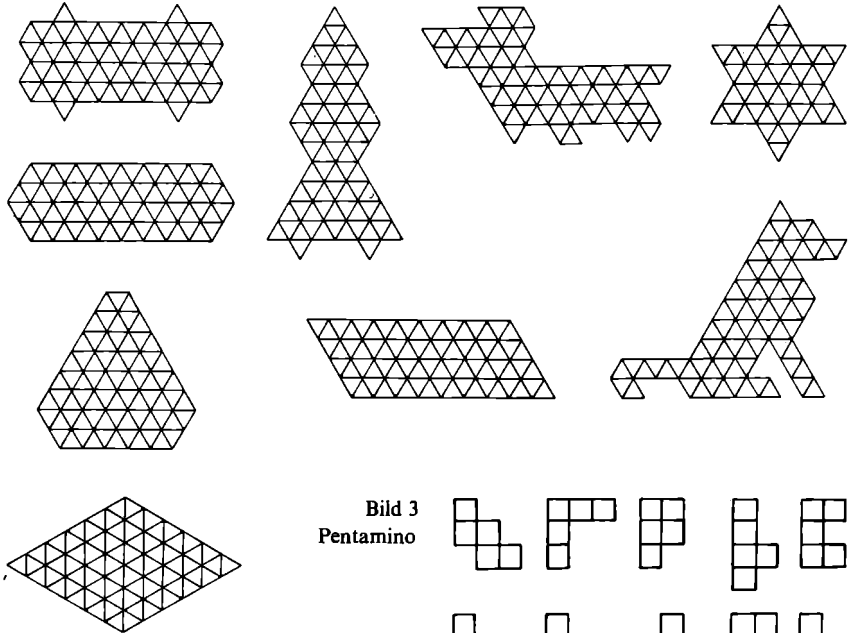


Bild 3
Pentamino

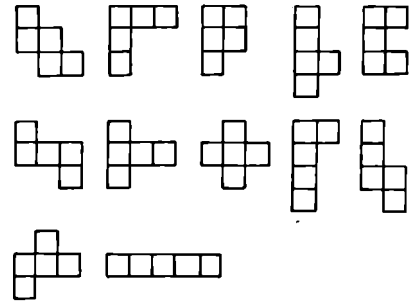
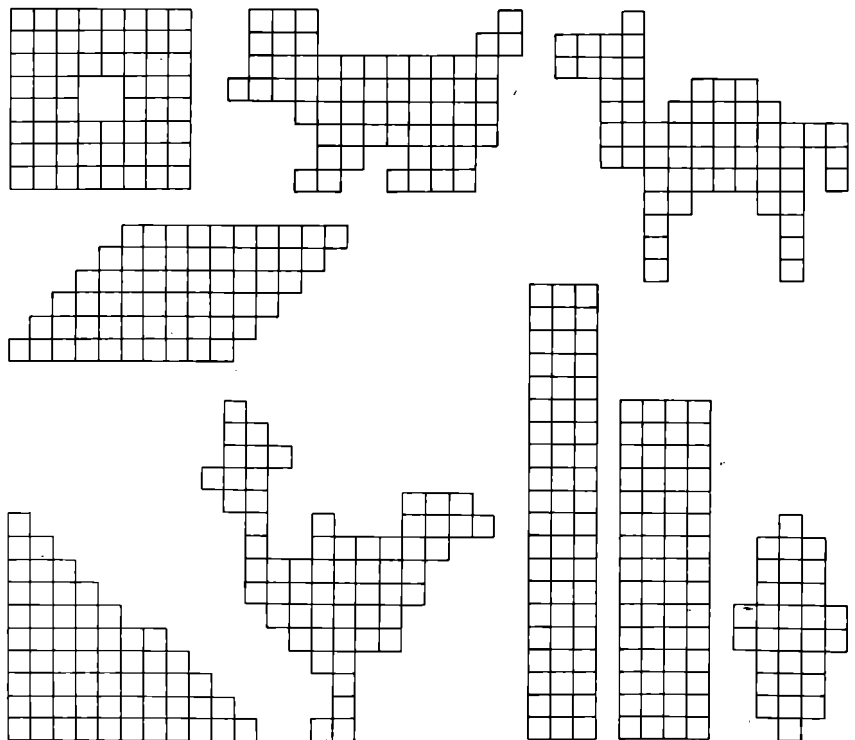


Bild 4





Ein Blick in das „geistige Labor“ von Leibniz

Der Mathematikhistoriker, der mit handschriftlichen Quellen arbeitet, muß wenigstens drei Hindernisse überwinden, bis sich ihm der Zugang zum Inhalt des Textes erschließt. Er muß erstens die Schrift lesen können. Schon dies Entziffern ist oft ein mühevolleres und zeitraubendes Unterfangen. Das zweite Hindernis ist die sprachliche Barriere. Sie kann darin liegen, daß sich der Autor einer Fremdsprache bedient hat und (oder) sich in einer uns heute fremden Rechtschreibung und Zeichensetzung, unter Benutzung ungewohnter, altertümlicher Wendungen ausdrückt. Und schließlich liegt eine weitere Hürde auf dem Weg zum Verständnis in der Verwendung überholter mathematischer Symbole und Begriffe, Zeichen und Fachwörter. Hat der Historiker all diese Hindernisse überwunden, braucht er noch keineswegs am Ziel zu sein, denn oft genug fehlen bei flüchtigen Notizen Hinweise auf den Zusammenhang.

Ein solches Beispiel wollen wir hier als Aufgabe für Knobler vorführen. Die Hindernisse haben wir beseitigt. Wir bringen eine Transkription der in Rede stehenden Tabelle, indem wir die Zahlen zuvor geordnet und ver-

vollständig haben, und zwar unter Weglassung allen überflüssigen Beiwerks. Zur Erleichterung der Lösung geben wir zudem aus dem teils lateinischen, teils französischen Begleittext die Stichworte „Würfel“ und „Kombinationen“ (siehe Bild).

Es handelt sich um eine Tabelle des großen Philosophen und Mathematikers Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) aus dem Jahre 1676.

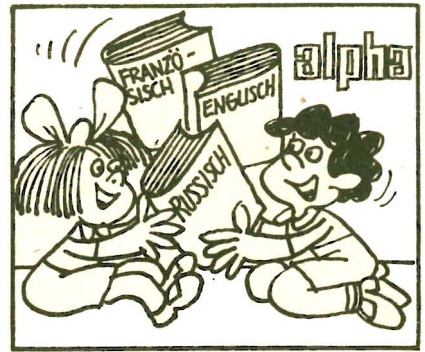


Leibniz hatte eine Vorliebe für Tafeln. Er benutzte sie, um induktiv Gesetze und Regeln zu finden, die dann ihrerseits zur Anlegung weiterer Tabellen zwecks Einsparung künftiger Rechenarbeit gebraucht wurden. Hierbei werden wir an den „Fürsten der Mathematiker“ *Carl Friedrich Gauß* (1777 bis 1855) erinnert, der allerdings die gewissermaßen auf experimentellem Wege gefundenen Gesetze nachträglich streng bewiesen hat.

Wenn wir annehmen, daß einige Leser daran gehen werden, den Sinn der Tabelle zu deuten, so tun wir das, weil Mathematiker von jeher einen Hang zum Entschlüsseln (oder auch zum Verschlüsseln) gehabt haben. *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) und der englische Mathematiker *Charles Babbage* (1792 bis 1871) waren beispielsweise, um nur zwei Namen zu nennen, Meister des Dechiffrierens. Gauß andererseits liebte es, ihm besonders wertvolle Resultate zu verschlüsseln.

K.-R. Biermann

1	6	5	1	1					
2	36	25	11	10	1				
3	216	125	91	75	15	1			
4	1296	625	671	500	150	20	1		
5	7776	3125	4651	3125	1250	250	25	1	
6	46656	15625	31031	18750	9375	2500	375	30	1



▲1▲ Десять цифр

Десять цифр – от 0 до 9 – запишите в клеточки так, чтобы получилось три верных равенства на сложение.

$$\begin{array}{rcl} \square & + & \square = \square\square \\ \square & + & \square = \square \\ \square & + & \square = \square \end{array}$$

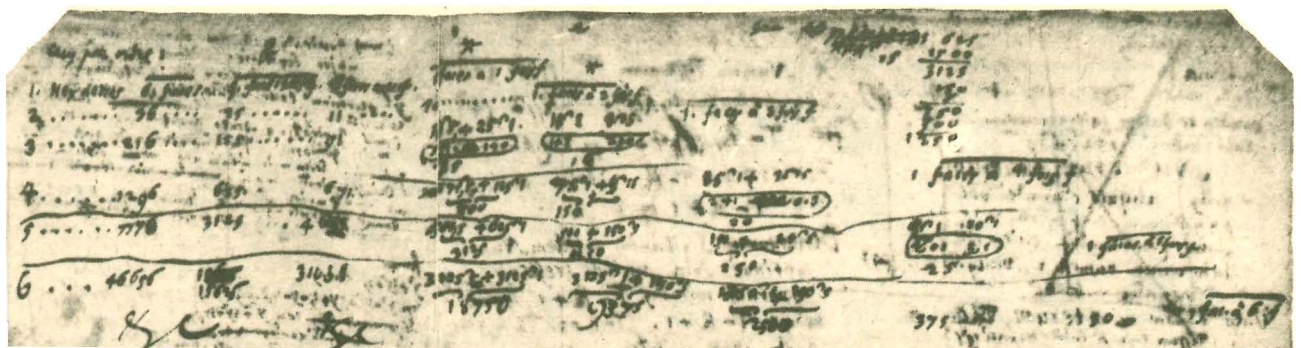
▲2▲ Cryptarithms

A popular puzzle is to take someone's name or a well-known saying and make it into an addition or subtraction sum. It is often necessary to add an extra condition in order to make the answer unique.

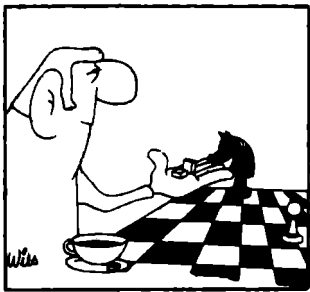
Example. HOW (Note the '0'
I S is a letter.)
+ H I S
S I S

Each letter stands for a different digit and SOW is a perfect square. A standard convention is that the left-hand end letter of each word does not stand for zero.

▲3▲ Une baignoire est remplie par son robinet en 10 minutes et vidée par sa bonde en $\frac{1}{4}$ d'heure. On ouvre le robinet et on oublie de fermer la bonde; au bout de combien de temps la baignoire sera-t-elle pleine?



In freien Stunden · alpha-heiter



Wie alt sind sie?

Ralf, Roland und Rüdiger sind Brüder. Zusammen sind sie $34\frac{1}{2}$ Jahre alt. Ralf ist der Jüngste, Roland ist $2\frac{1}{2}$ Jahre älter als er und Rüdiger $2\frac{1}{2}$ Jahre älter als Roland. Nun findet heraus, wie alt jeder der Brüder ist!

aus: NBI, Berlin

Drachenlabyrinth

Wie findet der kampflustige und mutige Herakles den richtigen Weg vom Kopf bis zum Schwanz der Sirene?

aus: Füles, Budapest



Sinnvolle Begriffe gesucht

Vor die folgenden Bruchstücke von Wörtern ist jeweils das Zahlwort für eine natürliche Zahl so einzusetzen, daß sinnvolle Begriffe entstehen. Sei a die Summe der unter A eingefügten, b die Summe der unter B eingefügten Zahlen, so ergibt $a - b$ das Todesjahr von Carl Friedrich Gauß.

A schönchen, ...tagsfliege,erbahn, ...topfesser,füßler.

B schaft,meter,auge,meilenstiefel,waldstätter See,zack,gestirn,baum,käsehoch,schläfer,groschenoper.

OStR K. Lehmann, VLdV, Berlin

Kryptarithmetik

Jeder Buchstabe entspricht einer Ziffer von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

GAUSS	EULER
+ EULER	+ HERON
6 8 0 0 3	7 1 6 7 7

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Färbung einer Landkarte

Die Skizze zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbungen verschieden sind?

aus: Urania, Berlin

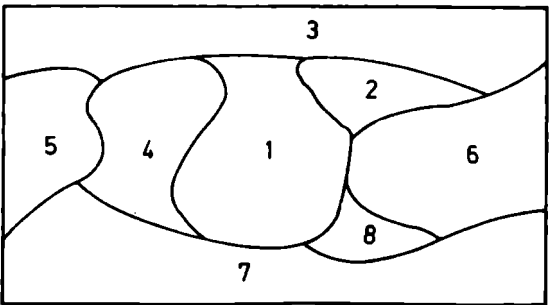
Spiel mit Zahlen

20	*		:		8
:		+		+	
	*		:		15
*		-		:	
	+		-		10
32		4		2	

3, 5, 6, 8, 9, 9, 11, 15

18	*		:		12
+		+		+	
	+		:		3
:		-		-	
	-		+		17
2		12		5	

8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17



Fünf Kongreßteilnehmer im Gespräch

Fünf Teilnehmer eines Kongresses bemerken, daß man durch Umstellen der Buchstaben ihres Vor- und Zunamens mathematische Begriffe erhalten kann, von denen vier zu ein und demselben Stoffkomplex gehören. Nur einer der Teilnehmer tanzt in dieser Hinsicht also etwas aus der Reihe. Um wen handelt es sich?

EVI SINNOR
RITA ONAVI
INA BOMITKON

REMO TAPUTIN
FRANK SEUMIG

Student Mario Richter, Berlin

Unterwegs ins Bad

Einige der Fahrgäste im Bus sind zum Bad unterwegs. Welche sind diese? Man kann sie im Bad wiedererkennen.

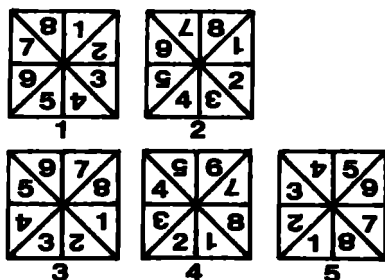
aus: Füles, Budapest



Eins von fünf!

Die nummerierten Bilder folgen einer gewissen Gesetzmäßigkeit. Ein Bild paßt jedoch nicht hinein. Welches?

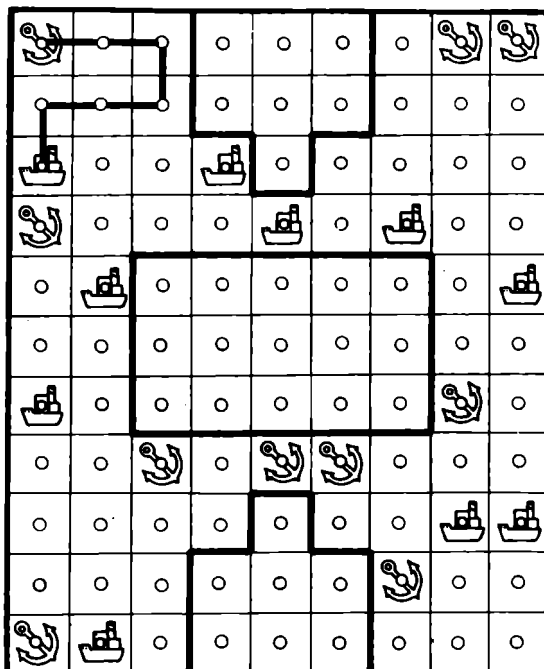
aus: Roháč, Prag



Ein Schiff und ein Anker

Zu jedem Schiff gehört ein Anker, der an einer schweren Kette befestigt ist.

Jede Kette besteht aus 6 Gliedern (sie sind die von Punkt zu Punkt führenden Geradestücke). Als Beispiel wird eine Kettenverbindung im oberen linken Eck gezeigt. Man trage die anderen Ketten so ein, daß die Ketten nur senkrecht oder waagerecht liegen dürfen (nicht diagonal), und sie dürfen sich weder kreuzen



noch berühren. Die eingerahmte „Insel“ bleibt unangetastet.

Zu welchem Schiff gehört welcher Anker?

aus: math pie, London

Vexierbild

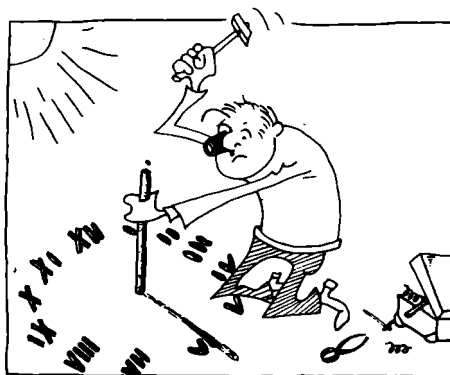
Sokrates trinkt auf das Wohl von Xantippe.

Wo ist sie zu finden?

aus einem griechischen Magazin (1899)



Merkwürdiger Handwerker





Ludwig Boltzmann

Seit der Herausbildung einer wissenschaftlichen Physik durch Galilei, Newton u. a. bis zum Ende des 18. Jh. hatte sich das Interesse der Wissenschaftler auf mechanische Prozesse konzentriert, deren wesentliches Merkmal vom Standpunkt der Energieumwandlung das im Idealfall verlustlose Wechselspiel zwischen kinetischer und potentieller Energie ist, beispielhaft illustriert durch den Pendelvorgang. Der Fortschritt der Physik wäre sogar undenkbar gewesen ohne die anfängliche bewußte Vernachlässigung von Energieverlusten durch Reibung usw. und die dadurch erreichte theoretische Umkehrbarkeit der mechanischen Vorgänge. Die Erfindung der Dampfmaschine und ihre industrielle Nutzung lenkten die Aufmerksamkeit der Naturwissenschaftler zu Beginn des 19. Jh. auf die Nichtumkehrbarkeit aller Prozesse, bei denen in wesentlichem Umfang mechanische Energie in Wärme oder umgekehrt verwandelt wird, und es bildete sich ein, explizit zuerst von Rudolf Clausius (1822 bis 1882) formulierter, anfangs noch verschwommener Begriff von einer als Entropie bezeichneten physikalischen Größe heraus, deren Betrag bei Energieumwandlungen höchstens zunehmen kann und tatsächlich in dem Maße zunimmt, wie „wertvolle“ Energie in weniger wertvolle Energie, nämlich Wärmemenge von geringer Temperatur, verwandelt wird. Clausius schloß aus seinen Überlegungen vorläufig auf einen „Wärmetod“, d. h. einen Endzustand völliger Entwertung aller Energie, dem das Weltall unaufhaltsam zustrebe.



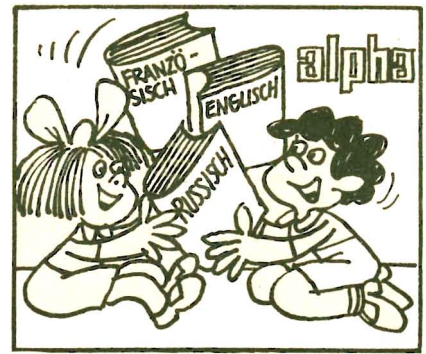
Am Ende der klassischen Periode dieser neuen Ideen steht der österreichische Physiker Ludwig Boltzmann (geb. 20. 4. 1844 in

Wien, gest. 5. 9. 1906 in Duino, einem kleinen Ort bei Gorizia an der heutigen italienisch-jugoslawischen Grenze), der nach Zwischenstationen in Graz, München und Leipzig bis zu seinem Tode in seiner Heimatstadt Wien wirkte und als eigentlicher Begründer der statischen Physik gilt. Boltzmann präziserte die Entropie als Logarithmus einer geeignet definierten Wahrscheinlichkeit des betrachteten physikalischen Zustands und erklärte die Tendenz der Prozesse zur Entropiezunahme somit als Streben nach dem wahrscheinlichsten „Gleichgewichtszustand“ des jeweiligen Systems. Fruchtbar erwies sich dieser Standpunkt vor allem in der Thermodynamik, indem er es gestattete, makroskopisch beobachtete Größen wie Druck, Temperatur und Volumen einer Gasmenge mittels mathematischer Methoden aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik auf die zufällig verteilten, im Detail nicht beobachtbaren mechanischen Bewegungen der einzelnen Gasmoleküle zurückzuführen. Diese Richtung der Physik hat seit Boltzmanns grundlegenden Gedanken einen ungeheuren Aufschwung genommen, wobei freilich Boltzmanns Theorie aus heutiger Sicht nur eine im Normalfall geltende Näherung der tatsächlichen Beziehungen ist.

Anlaßlich des 75. Todestages von Ludwig Boltzmann erschien in Österreich die abgebildete Gedenkmarke. Unter den „10 mathematischen Formeln, die das Gesicht der Erde veränderten“ (Nikaragua 1971) ist ebenfalls eine Marke dem Boltzmannschen Gesetz (besser: Prinzip) $S = k \cdot \ln W$ (S Entropie, k Boltzmannsche Konstante, W thermodynamische Wahrscheinlichkeit) gewidmet, das in dieser Form auf seinem Grabstein eingemeißelt ist, jedoch so explizit mit dem numerisch bestimmten Proportionalitätsfaktor k erst von Max Planck (1858 bis 1947) im Jahre 1906 formuliert wurde.

Über Leben und Werk von L. Boltzmann gibt es ein Buch von E. Broda (Berlin 1957).

P. Schreiber



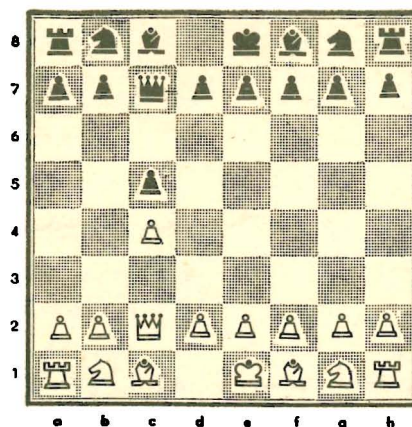
Schach und Mathematik

Die Ähnlichkeit zwischen mathematischer Denkweise und den beim Schachspiel notwendigen Überlegungen ist wahrscheinlich für jeden offensichtlich. Beide erfordern hervorragende logische Fähigkeiten und hohes Kombinationsvermögen.

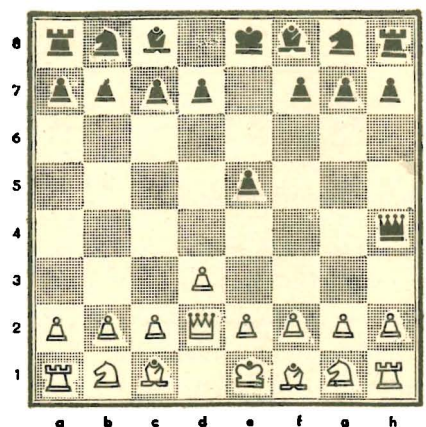
So wird zum Beispiel die Anzahl der beim Schachspiel auftretenden Möglichkeiten dadurch charakterisiert, daß jeder der Spieler zu Beginn der Partie unter 20 Zügen wählen kann, die Anzahl der möglichen Stellungen nach dem ersten Zug beider Spieler also 400 beträgt. Wie man sich überzeugen kann, sind nach dem zweiten Zug von Weiß 5206 Stellungen möglich. Hierbei haben wir beim Zusammenzählen der Fälle nicht berücksichtigt, daß eine Stellung auf mehr als eine Weise entstehen kann. So sehen wir zum Beispiel die Fälle 1. e4 e5 2. Sc3 und 1. Sc3 e5 2. e4 als identisch an. Wenn wir diese als verschiedenen betrachten, bekommen wir etwa das Doppelte von 5206.

Folgende Aufgabe, die von Fritz Hoffmann (Internationaler Schiedsrichter für Schachkompositionen) stammt, gilt es zu lösen!

Wieviele verschiedene Stellungen sind nach zwei Zügen aus der Partieanfangsstellung möglich, wenn dabei beide Spieler die Dame gezogen haben? Siehe dazu die beiden Beispiele!



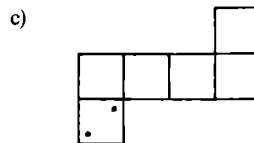
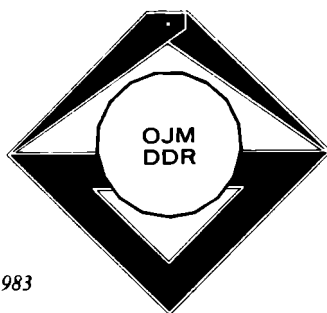
1. d3 e5 2. Dd2 Dh4
Bild 1



1. c4 c5 2. Dc2 Dc7
Bild 2

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR Schulolympiade (1. Stufe)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1983



Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)? Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden.

Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1983 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärksten Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\angle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\angle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B , während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

230511 Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom.

Ferner ist bekannt:

- (1) Der Schüler mit dem 2. Preis ist älter als Bernd.
- (2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.
- (3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.
- (4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom?

Begründe deine Antwort!

230512 Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen eines Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 42 cm. Wie lang sind seine drei Seiten?

230513 Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, daß richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

- (1) $a + b + c = 21$,
- (2) $b \cdot c = 42$,
- (3) $c + d = 70 : b$,
- (4) $e : a = d$,
- (5) $c = 54 : 9$,
- (6) $a + b + c + d + e + f = 60$.

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

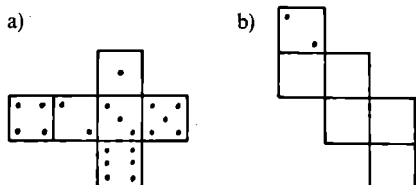
230514 In die leeren Felder des Bildes sind natürliche Zahlen so einzusetzen, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.

3	+		-		= 7
•	/	+	/	•	/
3	•	•	:	3	= 3
-	/	-	/	+	/
7	+	2	-	3	= 6
= 2	/	= 4	/	= 7	/

- a) Gib eine solche Einsetzung an!
- b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

Olympiadeklasse 6

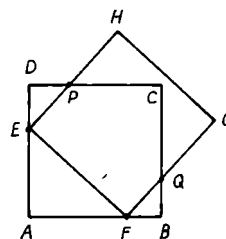
230611 Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.



230612 Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel. Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.

Wieviel Mark kostete ein Buch? Wieviel Mark kostete ein Ball?

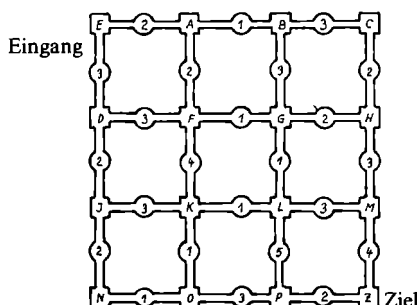
230613 Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben.



Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, daß sie

- a) genau einen Punkt,
 - b) genau zwei Punkte,
 - c) genau drei Punkte,
 - d) genau fünf Punkte,
 - e) genau sechs Punkte,
 - f) genau sieben Punkte,
 - g) genau acht Punkte
- gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

230614 Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen. Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.



a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird! Wieviel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?

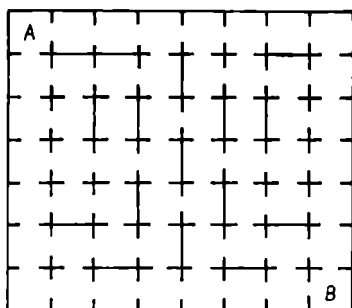
b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!

Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit $A, B, C, D, \dots, P$ bezeichnet, wie es im Bild angegeben ist.

Olympiadeklasse 7

230711 Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede „Tür“ höchstens einmal benutzt werden.

Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

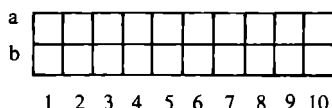


230712 Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von $85 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

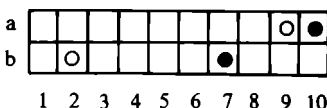
a) Wieviel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?
b) Wieviel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

230713 Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\angle ASB$ habe die Größe 120° . Ermittle die Diagonalenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in Abhängigkeit von der Seitenlänge $\overline{BC}$!

230714 Zwei Spieler A und B spielen auf einem „2 x 10-Brett“ folgendes Spiel: (Bild a)



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein. Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muß, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7 (Bild b) eine mögliche Anfangsstellung.



Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muß (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld; jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechts ziehen. Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, daß dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, daß er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7.

(2) Weiß: a3, b5; Schwarz: a8, b6.

(3) Weiß: a8, b4; Schwarz: a10, b7.

(4) Weiß: a4, b2; Schwarz: a8, b9.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: a2, b4; Schwarz: a7, b9.

(6) Weiß: a6, b2; Schwarz: a8, b5.

(7) Weiß: a5, b3; Schwarz: a8, b6.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

Olympiadeklasse 8

230811 Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g. Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

230812 Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme von n ist 17.

(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d. h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade, die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

230813 Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtszeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.

a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr an einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?

b) Wieviel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?

c) Wieviel Zeit vergeht für einen Wagenzug,

der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

230814 a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm. Gesucht sind drei Punkte P, Q, R , die so auf der Berandung dieses Quadrats liegen, daß die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.

Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, daß sie die geforderte Eigenschaft haben!

b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so daß die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!

c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

Olympiadeklasse 9

230911 Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5 \leq a \leq 10$ und $5 \leq b \leq 10$ gibt es folgende „Fingerregel“: Man streckt an der einen Hand so viel Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b . Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a \cdot b$. Beweisen Sie, daß diese „Fingerregel“ für alle genannten a und b gilt!

230912 Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y , die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.

(2) Es gilt $x + y = 121$.

230913 Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!

b) Beweisen Sie, daß die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird einer Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T'_1, T'_2, T'_3 bezeichnen lassen, daß $T_1 \cong T'_1, T_2 \cong T'_2$ und $T_3 \cong T'_3$ gilt.

230914 Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

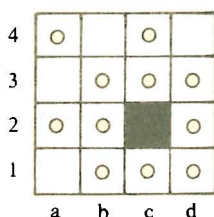
Beweisen Sie, daß es genau eine solche Strecke $\overline{GH}$ gibt und daß ihre Länge $\overline{GH} = s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c !

Olympiadeklasse 10

231011 Anne setzt in den beiden Termen $a^2 - b^2$ und $a - b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus $a^2 - b^2$ beim Einsetzen die Zahl z und aus $a - b$ die Zahl n , so stellt Anne fest, daß sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt. Gilt das immer?

231012 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , für die $x^3 - 9x > 0$ gilt!

231013 Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, daß sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.

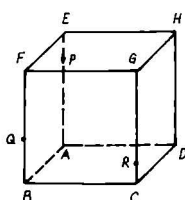


Im Bild ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z. B. die Dame im Bild auf c2.

Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegeln ineinander überführen lassen!

231014 Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Bild) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^\circ$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE , BF und CG mögen Punkte P , Q und R so liegen, daß $\overline{AP} : \overline{PE} = 4 : 1$, $\overline{BQ} : \overline{QF} = 2 : 3$ und $\overline{CR} : \overline{RG} = 1 : 4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P , Q und R geht,

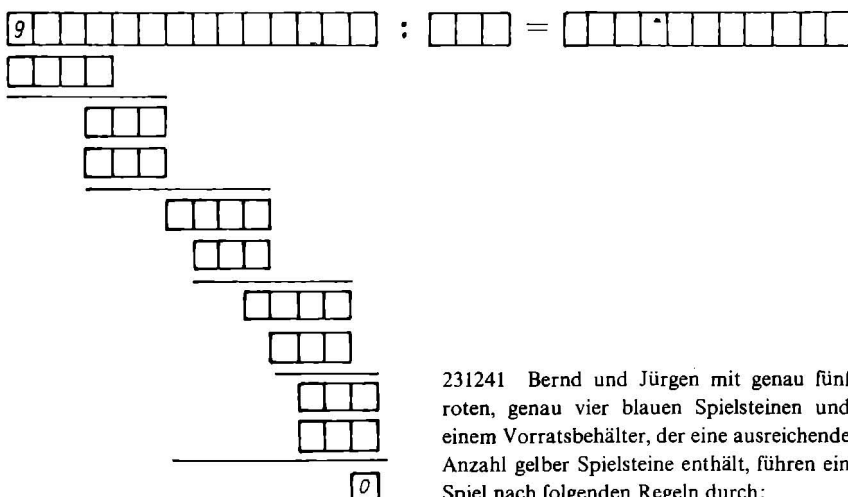


die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P' , Q' , R' der Punkte P , Q , R und dann das Bild S' des Punktes S ! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, daß der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!

Olympiadeklassen 11/12

231211 In dem folgenden Schema (siehe Bild) ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas an erster Stelle die Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, daß es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

231212 Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Null verschiedener reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} = -2 \quad (1)$$

$$y + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$z = 1. \quad (3)$$

231213 Man gebe die Menge aller ebenen, konvexen, nichtentarteten Vierecke $ABCD$ an, für die zwei der vier folgenden Aussagen wahr und zwei der Aussagen falsch sind:

- (1) Das Viereck $ABCD$ besitzt wenigstens ein Paar paralleler Seiten.
- (2) Das Viereck $ABCD$ besitzt vier gleichlange Seiten.
- (3) Ein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ ist ein rechter Winkel.
- (4) Kein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ hat eine Größe von 90° .



Teilnehmer des Klubs *Junger Mathematiker* Karl-Marx-Stadt beim Training

231241 Bernd und Jürgen mit genau fünf roten, genau vier blauen Spielsteinen und einem Vorratsbehälter, der eine ausreichende Anzahl gelber Spielsteine enthält, führen ein Spiel nach folgenden Regeln durch:

Zu Beginn werden die fünf roten, die vier blauen und genau drei gelbe Steine auf den Tisch gelegt. Danach sind die Spieler abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, nimmt drei beliebige Steine vom Tisch, wobei es nur verboten ist, drei rote Steine zu nehmen; dann verfährt er nach folgenden Vorschriften:

- (1) Jeder genommene rote Stein wird wieder auf den Tisch gelegt.
- (2) Für jeden genommenen blauen Stein wird ein gelber Stein aus dem Vorratsbehälter auf den Tisch gelegt; der blaue Stein kommt in den Vorratsbehälter.
- (3) Jeder genommene gelbe Stein kommt in den Vorratsbehälter.

Sind diese Vorschriften befolgt, so hat der betreffende Spieler seinen Zug beendet.

Hat ein Spieler mit seinem Zug erreicht, daß nur noch rote Steine auf dem Tisch liegen (so daß der Gegenspieler keinen Zug mehr anschließen kann), so hat er gewonnen.

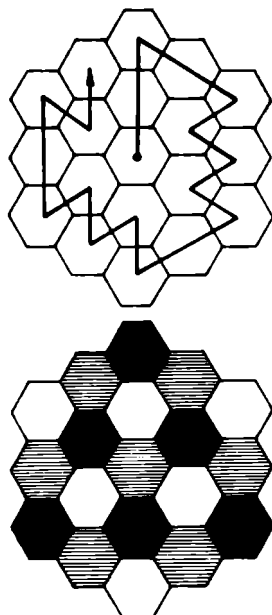
Jürgen macht den ersten Zug.

Geben Sie eine Strategie an, mit der Jürgen den Sieg erzwingen kann!

Lösungen



Lösung zu: Eine Aufgabe von
Prof. Dr. E. B. Dynkin und
Prof. Dr. W. A. Uspenski



Olympiade-Kryptogramm

Die Buchstaben in dem Wort OLYMPIADE sind so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{aligned} O \cdot D + O &= E \\ OL \cdot D + L &= ED \\ OLY \cdot D + Y &= EDA \\ OLYM \cdot D + M &= EDAI \\ OLYMP \cdot D + P &= EDAIP \\ OLYMPI \cdot D + I &= EDAIPM \\ OLYMPIA \cdot D + A &= EDAIPMY \\ OLYMPIAD \cdot D + D &= EDAIPMYL \\ OLYMPIADE \cdot D + E &= EDAIPMYLO \end{aligned}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Lösungen zu:
Für den Sprachfreund

Zehn Ziffern

▲ 1 ▲ Schreibt die zehn Grundziffern (0, 1, ..., 9) so in die Quadrate, daß drei richtig gerechnete Additionsaufgaben entstehen!
Lösung: 4 + 6 = 10; 2 + 7 = 9; 3 + 5 = 8.

▲ 2 ▲ Ein beliebtes Geduldsspiel ist, irgendeinen Namen oder ein bekanntes Sprichwort zu nehmen und damit eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe zu bilden. Es ist oft notwendig, eine zusätzliche Bedingung einzufügen, um eine eindeutige Antwort zu erhalten. Beispiel (s. englischen Text). (Beachte, daß O ein Buchstabe ist!): Jeder Buchstabe bedeutet eine unterschiedliche Ziffer, und SOW ist ein vollständiges Quadrat. Eine maßgebende Voraussetzung ist, daß der linke Endbuchstabe jedes Wortes keine Null ist.

Lösung: 461 + 39 + 439 = 939.

▲ 3 ▲ Eine Badewanne wird durch ihren Wasserhahn in 10 Minuten gefüllt und durch ihren Abfluß in $\frac{1}{4}$ Stunde geleert. Man öffnet den Wasserhahn und vergißt, den Abfluß zu schließen. Nach welcher Zeit ist die Badewanne gefüllt?

Lösung: Die Anzahl der Minuten sei x, dann gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} - \frac{x}{15} &= 1, \\ \frac{5x}{150} &= 1, \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Die Badewanne ist nach 30 Minuten gefüllt.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Wie alt sind sie?

Ralf ist 9, Roland $11\frac{1}{2}$ und Rüdiger 14 Jahre alt.

Drachenzlabyrinth



Spiel mit Zahlen

20	•	8	:	15	8	18	•	8	:	12	12
		+		+				+		+	
5	•	8	:	3	15	10	+	17	:	9	3
		-		:				-		-	
8	+	11	-	9	10	14	-	13	+	18	17
32		4		2		2		12		5	

Sinnvolle Begriffe gesucht

$$a = 1000 + 1 + 8 + 1 + 1000 = 2010$$

$$b = 100 + 11 + 9 + 7 + 4 + 3 + 7 + 1 + 3 + 7 + 3 = 155$$

$$a - b = 2010 - 155 = 1855$$

C. F. Gauß starb im Jahre 1855.

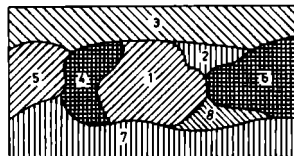
Kryptarithmetik

$$38977 + 29026 = 68003;$$

$$29026 + 42651 = 71677.$$

Färbung einer Landkarte

Wir bezeichnen die vier Farben mit a, b, c, d und färben zuerst das Gebiet 1 (s. Skizze) mit a und 2 mit b. Da 6 ein Nachbar von 1 und 2 ist, erhält dieses Gebiet die Farbe c. Die Länder 4 und 6 haben keine gemeinsame Grenze; wir können für 4 also auch c wählen. Da 5 und 1 getrennt liegen, können wir 5 mit a färben. Das Gebiet 3 ist ein Nachbar von 1, 2, 4, 5, 6; für dieses Gebiet bleibt uns nur die Farbe d. Zum Schluß färben wir 7 noch mit b und 8 mit d und haben so unsere Aufgabe gelöst.



Fünf Kongreßteilnehmer

Frank Seumig paßt nicht zum Quartett der vier Kombinatoriker (Inversion, Permutation, Variation, *Kreisumfang*, Kombination).

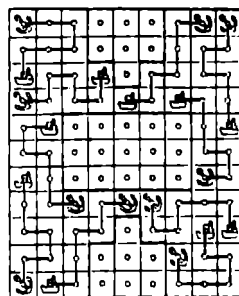
Unterwegs ins Bad

Im Bad sind wiederzufinden:
 B-5, D-7, G-13, H-17, I-20,
 L-11, P-8, T-6, Z-4.

Eins von fünf

Bild 2 gehört nicht in die Reihe.

Ein Schiff und ein Anker



Vexierbild

Man drehe das Bild um 180°. Dann ist Xantippe links oben zu sehen.

Lösung zu: Für den Schachfreund

Weiß erreicht nach 1. c3 oder c4 je drei verschiedene Damestellungen, nach 1. e3 oder e4 je vier, nach 1. d4 zwei und nach 1. d3 eine Damestellung. Das ergibt 17 einfarbige Stellungen. Weiß und Schwarz kombiniert: 17 · 17 = 289 Stellungen. Davon sind zwei illegale Stellungen – so bleibt Schwarz nach 1. c3 oder c4 d5 2. Da4 + Dd6 (?) im Schachgebot – zu subtrahieren. Somit ergibt sich als Lösung, daß 287 verschiedene Stellungen möglich sind.

Lösung zu: Eine unterhaltsame Aufgabe von Karl Marx (Original),

Zahl der Männer sei = p, der Weiber = q; der Kinder = r; so haben wir:

$$1) p + q + r = 30; \quad 2) 3p + 2q + r = 50;$$

daraus p, q und r zu finden in ganzen und positiven Zahlen.

Gleichung 1) gibt

$$r = 30 - p - q; \text{ also}$$

$$p + q < 30; \text{ setzen wir}$$

den Wert von r in 2-te Gleichung, so

$$3p + 2q + 30 - p - q = 50; \text{ also}$$

$$2p + q + 30 = 50; \text{ also}$$

$$q = 20 - 2p, p + q = 20 - p < 30.$$

Aus der Gleichung $q = 20 - 2p$

folgt, daß wenn $p = 10$,

$q = 20 - 2 \cdot 10 = 0$; wird daher größere Zahl als 10 für p genommen, so würde q negativ;

z. B. wenn $p = 11$ wird

$$p + q = 20 - p \text{ zu}$$

$$11 + q = 20 - 11, \text{ oder}$$

$$q = 20 - 22 = -2.$$

Dies ausgeschlossen. Für p können wir also alle Zahlen nehmen, die nicht > 10 . Wir erhalten dann 11 Antworten, erinnernd, daß

$$p + q < 30, \text{ und } q = 20 - 2p$$

[ist daher $p = 0$, so $q = 20$]:

$$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

$$q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0,$$

$$r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

Schließen wir aus

I) $p = 0, q = 20, r = 10$, und

II) $p = 10, q = 0, r = 20$,

d. h. erste und letzte Lösung, wo sub I) $p = 0$ und sub II) $q = 0$, so bleiben 9 Lösungen.

Lösungen zu: Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei Leonhard Euler, Heft 3/83

▲ 1 ▲ a) I. $4x + 2y + \frac{z}{3} = 100$

II. $x + y + z = 100$

$$11x + 5y = 200;$$

für $x = 5$ wird $y = 40 - 11 = 29$ somit $z = 66$

▲ 1 ▲ b) Euler: Es sei die Zahl der Schweine gleich p , die der Ziegen gleich q , die der Schafe gleich r ; dann hat man folgende zwei Gleichungen:

I. $p + q + r = 100,$

II. $\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100.$

Multipliziert man die zweite mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, und dieser Wert gibt in der zweiten für r gesetzt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$

und $q = 60 - \frac{18}{5}p$; also muß $18p$ durch 5

teilbar sein oder 5 als einen Faktor in sich schließen. Setzt man also $p = 5s$, wo wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebig ganze Zahl genommen werden kann, doch so, daß q nicht negativ wird. Daher kann s nicht größer als 3 angenommen werden, und damit haben, wenn auch 0 ausgeschlossen wird, nur folgende drei Auflösungen

Geltung: Wenn $s = 1, 2, 3,$

wird $p = 5, 10, 15$

$q = 42, 24, 6$

$r = 53, 66, 79.$

▲ 2 ▲ a) Bei n Toren sind mitzunehmen $2 \cdot (2^n - 1) + 1$ Silberstücke. Bei 4 Toren also $2 \cdot (2^4 - 1) + 1 = 2^5 - 1 = 31$ Silberstücke.

▲ 2 ▲ b) Euler: Um die Aufgabe leichter auflösen zu können, setzen wir das ganze hinterlassene Vermögen gleich z Taler, und weil alle Kinder gleich viel bekamen, sei der Anteil eines jeden gleich x ; daraus folgt die

Anzahl der Kinder zu $\frac{z}{x}$.

Hieraus wollen wir die Auflösung in folgender Art vornehmen:

Das zu teilende Geld	Ordnung der Kinder	Anteil jedes Kindes	Die Differenzen der Anteile
z	das erste	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-x$	das zweite	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-2x$	das dritte	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-3x$	das vierte	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-4x$	das fünfte	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-5x$	das sechste	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	usw.

In der letzten Spalte sind hier die Differenzen angegeben, die entstehen, wenn man jedes Erbteil von dem folgenden subtrahiert. Weil nun alle Erbteile einander gleich sind, so muß jede dieser Differenzen gleich 0 sein. Da es sich nun so fügt, daß alle Differenzen einander gleich sind, genügt es, daß man eine davon gleich 0 setzt. Daher erhalten wir die Gleichung $100 - \frac{x+100}{10} = 0$. Man multipliziert

mit 10 und erhält $100 - x - 100 = 0$ oder $900 - x = 0$, also $x = 900$. Hieraus erschen wir schon, daß das Erbteil jedes Kindes 900 Taler betragen wird. Nimmt man nun irgendeine von den Gleichungen in der dritten

Spalte, z. B. die erste $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$,

dann findet man daraus sogleich z .

Es folgt nämlich

$$9000 = 1000 + z - 100 \text{ oder } 9000 = 900 + z,$$

also $z = 8100$; damit wird $\frac{z}{x} = 9$.

Antwort: Es waren 9 Kinder; das hinterlassene Vermögen betrug 8100 Taler, von denen jedes Kind 900 Taler erhielt.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb, Heft 6/82 – Fortsetzung

Ph9 ■ 119 Geg.: $m = 4000 \text{ kg}, t = 7,5 \text{ s},$

$$h = 3,5 \text{ m}, v_k = 30 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$F_{\max} = 60 \text{ kN}, g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ges.: Ausnutzung der maximalen Haftkraft η

Nach der Skizze ergibt sich folgende Berechnung:

$$h = h_b + h_k, \quad (1a)$$

$$t = t_b + t_k, \quad (1b)$$

$$h_b = a \cdot \frac{t_b^2}{2} = \frac{v_k \cdot t_b}{2}, \quad (2a)$$

$$h_k = v_k \cdot t_k \text{ und } v_k = a \cdot t_b. \quad (2b) \text{ und } (2c)$$

Mit (2a) und (2b) in (1a) ist

$$h = \frac{v_k \cdot t_b}{2} + v_k \cdot t_k = v_k \left(\frac{t_b}{2} + t_k \right).$$

Mit $t_k = t - t_b$ aus (1b) folgt weiter

$$h = v_k \left(\frac{t_b}{2} + t - t_b \right) = v_k \left(t - \frac{t_b}{2} \right)$$

und hieraus

$$t - \frac{t_b}{2} = \frac{h}{v_k} \text{ und } \frac{t_b}{2} = t - \frac{h}{v_k} \text{ und } t_b = 2t - \frac{2h}{v_k}.$$

$$t_b = 2 \cdot 7,5 \text{ s} - \frac{2 \cdot 3,5 \text{ m}}{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}},$$

$$t_b = 1 \text{ s}.$$

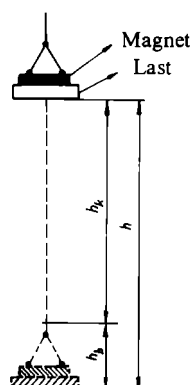
Damit ist die Beschleunigung

$$a = \frac{v_k}{t_b} = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ s}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (\text{Aus } 2c)$$

Die Beschleunigungskraft ist dann

$$F_b = m \cdot a = 4000 \text{ kg} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2000 \text{ N}$$

und die gesamte beim Anheben auftretende Hubkraft



$$F_H = m \cdot g + F_b = 4000 \cdot 9,81 \text{ N} + 2000 \text{ N} = 41240 \text{ N}.$$

Die Ausnutzung der maximalen Haftkraft η beträgt dann

$$\eta = \frac{F_H}{F_{\max}} = \frac{41240 \text{ N}}{60000 \text{ N}} = 0,69 = 69\%.$$

Die Ausnutzung der maximalen Haftkraft erfolgt zu 60%.

Ph 10/12 ■ 120 Geg.: $R = 1 \Omega$

Ges.: R_G zwischen A und B

Bezeichnet man die Länge der Seite des Quadrates mit a , so wird der Draht durch das Biegen in die Teilstücke $l = 4a + a/\sqrt{2}$ zerlegt. Da die Längen im Quadrat im gleichen Verhältnis zu den Teilwiderständen stehen, gilt

$$\begin{aligned} l &= a(4 + \sqrt{2}), \\ 1 &= a(4 + \sqrt{2}), \\ a &= \frac{1}{4 + \sqrt{2}} \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Nach dem Gesetz über den verzweigten Stromkreis ist nun

$$\frac{1}{R_G} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a/\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{a/\sqrt{2}},$$

also $R_G = a(2 - \sqrt{2})$. (2)

(1) in (2) eingesetzt, ergibt

$$R_G = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \Omega = \frac{(2 - \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})}{16 - 2} \Omega,$$

$$R_G = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7} \Omega \approx 0,1 \Omega$$

Der Gesamtwiderstand beträgt rd. 0,1 Ω .

Ch 7 ■ 101

100 g Rohmehl $\triangleq$ 66,2 g Kalziumoxid

$$\begin{aligned} 720 \text{ kg Rohmehl} &\triangleq x \\ x &= \frac{720 \text{ kg} \cdot 66,2 \text{ g}}{100 \text{ g}} \\ x &= 476,6 \text{ kg} \end{aligned}$$

100 g Rohmehl $\triangleq$ 20,6 g Siliziumdioxid

$$\begin{aligned} 720 \text{ kg Rohmehl} &\triangleq x \\ x &= \frac{720 \text{ kg} \cdot 20,6 \text{ g}}{100 \text{ g}} \\ x &= 148,3 \text{ kg} \end{aligned}$$

100 g Rohmehl $\triangleq$ 6,6 g Aluminiumoxid

$$\begin{aligned} 720 \text{ kg Rohmehl} &\triangleq x \\ x &= \frac{720 \text{ kg} \cdot 6,6 \text{ g}}{100 \text{ g}} \\ x &= 47,5 \text{ kg} \end{aligned}$$

100 g Rohmehl $\triangleq$ 3,1 g Eisen(III)-oxid

$$\begin{aligned} 720 \text{ kg Rohmehl} &\triangleq x \\ x &= \frac{720 \text{ kg} \cdot 3,1 \text{ g}}{100 \text{ g}} \\ x &= 22,3 \text{ kg} \end{aligned}$$

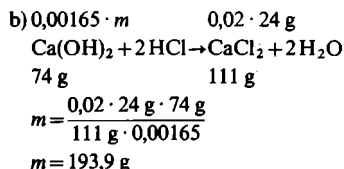
In 720 kg des Rohmehles sind 476,6 kg Kalziumoxid, 148,3 kg Siliziumdioxid, 47,5 kg Aluminiumoxid und 22,3 kg Eisen(III)-oxid enthalten.

Ch 8 ■ 102

a) 1000 g Lösung $\triangleq$ 1,65 g Kalziumhydroxid

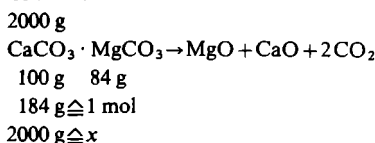
$$\begin{aligned} 100 \text{ g Lösung} &\triangleq x \\ x &= \frac{1,65 \text{ g} \cdot 100 \text{ g}}{1000 \text{ g}} \\ x &= 0,165 \text{ g} \end{aligned}$$

Eine gesättigte Kalziumhydroxid-Lösung ist 0,165%ig.



193,9 g 0,165%ige Kalziumhydroxidlösung müssen mit Salzsäure reagieren, damit 24 g 2%ige Kalziumchlorid-Lösung entstehen.

Ch 9 ■ 103



$$x = \frac{2000 \text{ g} \cdot 1 \text{ mol}}{184 \text{ g}}$$

$$x = 10,9 \text{ mol}$$

10,9 mol sind in 2000 g Dolomit enthalten.

Diese 10,9 mol setzen sich zusammen aus

5,45 mol Kalziumkarbonat und

5,45 mol Magnesiumkarbonat.

Für die Zersetzung von Kalziumkarbonat gilt:

$$\begin{aligned} 5,45 \text{ mol} &\triangleq x \\ 1 \text{ mol} &\triangleq 165,3 \text{ kJ} \\ x &= \frac{5,45 \text{ mol} \cdot 165,3 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} \\ x &= 900,9 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Für die Zersetzung von Magnesiumkarbonat gilt:

$$\begin{aligned} 5,45 \text{ mol} &\triangleq x \\ 1 \text{ mol} &\triangleq 105 \text{ kJ} \\ x &= \frac{5,45 \text{ mol} \cdot 105 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} \\ x &= 572,3 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$900,9 \text{ kJ} + 572,3 \text{ kJ} = 1473,2 \text{ kJ}$$

Zur Zersetzung von 2 kg Dolomit sind 1473,2 kJ erforderlich.

Ch 10/12 ■ 104

$$n_{\text{CaCO}_3} = \frac{m_{\text{CaCO}_3}}{M_{\text{CaCO}_3}} = \frac{419,1 \text{ g}}{100 \text{ g}}$$

$$\approx 4,2 \text{ mol CaCO}_3 \triangleq 4,2 \text{ mol CaO}$$

$$n_{\text{Al}_2\text{O}_3} = \frac{m_{\text{Al}_2\text{O}_3}}{M_{\text{Al}_2\text{O}_3}} = \frac{172,9 \text{ g}}{102 \text{ g}} \approx 1,7 \text{ mol Al}_2\text{O}_3$$

Bei der Reaktion werden a mol $3 \text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ und b mol $12 \text{CaO} \cdot 7 \text{Al}_2\text{O}_3$ gebildet.

Für CaO: $3a + 12b = 4,2$

für Al_2O_3 : $a + 7b = 1,7$

$$3a + 12b = 4,2 \quad a = 1,7 - 7b$$

$$3(1,7 - 7b) + 12b = 4,2$$

$$-9b = -0,9$$

$$b = 0,1$$

$$3a + 12(0,1) = 4,2$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

$$m = a \cdot M$$

$$m = 1 \text{ mol} \cdot 270 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$m = 270 \text{ g}$$

$$m = b \cdot M$$

$$m = 0,1 \text{ mol} \cdot 1386 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$m = 138,6 \text{ g}$$

0,27 kg $3 \text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ und 0,1386 kg $12 \text{CaO} \cdot 7 \text{Al}_2\text{O}_3$ werden gebildet.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 1/83:

Ma 5 ■ 2294 Aus (2) folgt: Arthur wohnt nicht im Haus Nr. 14. Aus (3) folgt: Weder Christian noch Dirk wohnen im Haus Nr. 14. Folglich wohnt Bernd im Haus Nr. 14.

Aus (3) folgt weiter: Weder Bernd noch Christian noch Dirk wohnen im Haus Nr. 11. Deshalb wohnt Arthur im Haus Nr. 11.

Aus (1) folgt: Christian wohnt nicht im Haus Nr. 17. Deshalb wohnt Dirk im Haus Nr. 17 und Christian im Haus Nr. 16.

Ma 5 ■ 2295 Es sei x die kleinste dieser vier Zahlen; dann sind $2 \cdot x$, $4 \cdot x$ und $8 \cdot x$ die übrigen drei Zahlen, und es gilt $x + 2x + 4x + 8x = 255$, $15x = 255$, also $x = 17$. Die vier Zahlen lauten somit 17, 34, 68 und 136.

Ma 5 ■ 2296 Frank hat für die Limonade $n \cdot 51 \text{ Pf} = 3 \cdot 17 \cdot n \text{ Pf}$, für den Apfelmost $9 \cdot x \text{ Pf} = 3 \cdot 3 \cdot x \text{ Pf}$, für die Äpfel $3 \cdot y \text{ Pf}$, insgesamt also $3 \cdot (17n + 3x + y) \text{ Pf}$ zu bezahlen. Dieser Geldbetrag ist durch 3 teilbar. Nun ist der Betrag von 9,10 M = 910 Pf aber nicht durch 3 teilbar. Deshalb muß sich die Kassiererin vertippt haben.

Ma 5 ■ 2297 Die folgenden zweistelligen natürlichen Zahlen haben die Quersumme 12: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93.

Wegen $2 \cdot 57 - 12 = 102$ und $102 > 99$ brauchen wir nur die Zahlen 39 und 48 zu untersuchen. Es gilt $2 \cdot 39 - 12 = 66$ und $2 \cdot 48 - 12 = 84$.

Somit existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 48.

Ma 5 ■ 2298 Angenommen, die Schüler der Klasse 5b sammelten x Gläser; die Schüler der Klasse 5a sammelten dann $(x + 22)$ Gläser, die der Klasse 5c nur $(x - 7)$ Gläser. Das sind zusammen $(3x + 15)$ Gläser. Nun gilt $3x + 15 = 645$, $3x = 630$, $x = 210$. Die Schüler der Klasse 5a sammelten 232, die der Klasse 5b hingegen 210, die der Klasse 5c nur 203 Gläser.

Ma 5 ■ 2299 Kerstins Schwester Gerda ist gegenwärtig $12 - 2 = 10$ Jahre alt. Vor drei Jahren war Kerstin $12 - 3 = 9$ Jahre, ihre Schwester Gerda $10 - 3 = 7$ Jahre alt. Vor drei Jahren war deshalb Kerstins Mutter $5 \cdot 7 = 35$ Jahre, Kerstins Vater $4 \cdot 9 = 36$ Jahre alt. Somit ist Kerstins Mutter gegenwärtig $35 + 3 = 38$ Jahre, ihr Vater $36 + 3 = 39$ Jahre alt.

Ma 6 ■ 2300 Die Anzahl der Bücher, die Peter besitzt, ist durch 2, 5 und 8 teilbar, also durch 40 teilbar. Deshalb könnte Peter 40 oder 80 Bücher besitzen. Nun gilt

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{40 - 20 - 8 - 5}{40} = \frac{7}{40} = \frac{14}{80}$$

Da 14 keine Primzahl ist, entfällt die Anzahl 80. Peter besitzt 40 Bücher; 20 davon sind

Abenteuerromane, 8 sind Nachschlagewerke, 5 sind Tiergeschichten, und 7 sind populärwissenschaftliche Bücher.

Ma 6 ■ 2301 Wegen $F \cdot U = 48$ gilt $F \neq 0$ und $U \neq 0$. Wegen $E + F = 12$ gilt $1 \leq E \leq 11$ und $1 \leq F \leq 11$. Wegen $E \cdot R = 28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$ könnte $E = 1, 2, 4, 7$ sein. Wegen $F \cdot U = 48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$ könnte $F = 1, 2, 3, 4, 6, 8$ sein. Wegen $E + F = 12$ gilt $E = 4$ und $F = 8$, also $U = 48 : 8 = 6$, $R = 28 : 4 = 7$ und $T = 10 - 7 + 6 = 9$. Daraus folgt weiter $E + R + F + U + R + T = 4 + 7 + 8 + 6 + 7 + 9 = 41$.

Ma 6 ■ 2302 Wegen $2 \mid 8$, $3 \mid 9$, $4 \mid 8$ und $6 = 2 \cdot 3$, also $6 \mid 8 \cdot 9$ ist nur die Teilbarkeit durch 7, 8, 9 und 10 von Bedeutung. Das k.g.V. dieser Zahlen lautet $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. Wegen $x < 3000$ und $2x = 5040 > 3000$ hat Herr A. genau 2520 M im Tele-Lotto gewonnen.

Ma 6 ■ 2303 Aus g) folgt: Agnes hat den Nachnamen Jahn.

Aus c) folgt: Christa hat nicht den Nachnamen Meier.

Aus c), d) und h) folgt: Christa erlernt weder die tschechische, noch die französische Sprache, noch Latein. Folglich erlernt Christa die englische Sprache.

Aus f) folgt: Christa hat nicht den Nachnamen Schmidt. Folglich hat sie den Nachnamen Robert.

Aus c) folgt: Das älteste Mädchen hat nicht den Vornamen Christa.

Aus e) folgt: Das älteste Mädchen heißt Agnes. Somit heißt das jüngste Mädchen Babett.

Aus d) folgt: Babett hat nicht den Nachnamen Meier. Folglich hat Katja den Nachnamen Meier und Babett den Nachnamen Robert.

Aus c) folgt: Agnes, Katja und Christa erlernen nicht die tschechische Sprache. Folglich erlernt Babett die tschechische Sprache.

Aus d) folgt: Babett, Katja und Christa lernen nicht Latein.

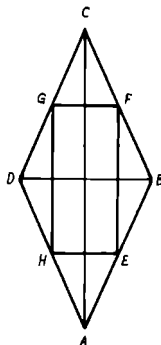
Folglich lernt Agnes Latein. Deshalb erlernt Katja die französische Sprache.

Babett ist jünger als Katja, diese jünger als Christa, diese jünger als Agnes.

Ma 6 ■ 2304 Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p_1, p_1 + 1, p_1 + 2, p_1 + 3, p_1 + 4$ sind $p_1, p_1 + 2 = p_2, p_1 + 4 = p_2 + 2 = p_3$ sämtlich Primzahlen, also nicht durch 3 teilbar. Deshalb muß von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p_1, p_1 + 1, p_2$ die Zahl $p_1 + 1$ durch 3 teilbar sein. Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p_2, p_2 + 1, p_3$ müßte aus dem gleichen Grunde $p_2 + 1$ durch 3 teilbar sein. Das führt zu einem Widerspruch; denn von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p_1 + 1, p_2, p_2 + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Deshalb existiert außer dem gesamten Primzahlrilling (3, 5, 7) kein weiterer.

Ma 7 ■ 2305 Angenommen, Heinz hat x Mark, Klaus y Mark gespart; dann gilt $x + 2 = y - 2$, also $y = x + 4$, und $3 \cdot (x - 11) = y + 11$. Durch Einsetzen erhalten wir $3 \cdot (x - 11) = x + 4 + 11, 3x - 33 = x + 15, 2x = 48$, also $x = 24$ und somit $y = 28$. Heinz hat 24 M, Klaus 28 M gespart.

Ma 7 ■ 2306 Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist parallel zur dritten Dreiecksseite und halb so lang wie diese. Daraus folgt $\overline{GF} \parallel \overline{DB}$ und $\overline{HE} \parallel \overline{DB}$, also $\overline{GF} \parallel \overline{HE}$.



Analog dazu gilt $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. Das Viereck $EFGH$ ist somit ein Parallelogramm. Da die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ Symmetrieachsen des Rhombus sind, ist das Parallelogramm $EFGH$ ein Rechteck. Es seien e bzw. f die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ und a bzw. b die Längen der Rechteckseiten $\overline{EF}$ bzw. $\overline{FG}$; dann gilt $e = 2a$ und $f = 2b$. Aus $A_R = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab$ und $A_V = ab$ folgt $A_R = 2 \cdot A_V$.

Ma 7 ■ 2307 Man beginnt zunächst mit den Buchstaben:

AA	BA	CA ... (26mal)
AB	BB	insgesamt $26 \cdot 26 = 676$ mal
AC	BC	
AD	BD	

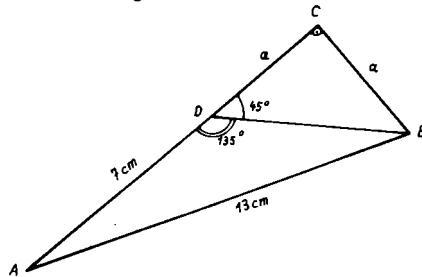
26mal 26mal

Die Zifferndarstellung geht von 00–00 bis 99–99, umfaßt also insgesamt 10000 mögliche Nummern.

Nun läßt sich jede der 676 möglichen Buchstabenzusammenstellungen von AA bis ZZ mit jeder der 10000 Nummern kombinieren, so daß insgesamt $676 \cdot 10000 = 6760000$ verschiedene Autonummern möglich wären.

Ma 7 ■ 2308 Es sei a die Länge der Kathete $\overline{BC}$, also $(a + 7)$ cm die Länge der Kathete $\overline{AC}$. Dann läßt sich die Länge a auf $\overline{AC}$ von C bis D abtragen, wobei D innerer Punkt von $\overline{AC}$ ist. Wegen $\overline{CB} = \overline{CD}$ ist das Dreieck BCD gleichschenkelig. Die Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle CDB$ haben deshalb die Größe 45° . Der Winkel $\sphericalangle ADB$ hat folglich die Größe 135° . Somit läßt sich das Teildreieck ABD aus $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ und $\sphericalangle ADB$ konstruieren. Die Mittel-

senkrechte von $\overline{BD}$ schneidet die über D hinaus verlängerte Strecke $\overline{AD}$ im Punkte C.



Ma 8 ■ 2309 Aus $\frac{a}{5} + \frac{b}{6} + \frac{c}{7} < 1$ folgt $\frac{42a}{210} + \frac{35b}{210} + \frac{30c}{210} < \frac{210}{210}$, also $42a + 35b + 30c < 210$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

a) Es sei $a = 2$, also $35b + 30c < 126$. Wegen $b > a$ muß $b \geq 3$ gelten. Für $b = 3$ gilt $30c < 21$, was nicht möglich ist.

b) Es sei $a = 1$, also $35b + 30c < 168$. Wegen $b > a$ muß $b \geq 2$ gelten. Für $b = 2$ gilt $30c < 98$, also $c = 3$ wegen $c > b$.

Somit existiert genau eine Lösung; sie lautet $[1, 2, 3]$, und es gilt

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} = \frac{42 + 70 + 90}{210} = \frac{202}{210} < 1.$$

Ma 8 ■ 2310 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, dann gilt die Behauptung

$$8 \mid (2n+1)^2 + (2n+3)^2 - 2.$$

Nun ist $(2n+1)^2 + (2n+3)^2 - 2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 - 2 = 8n^2 + 16n + 8 = 8(n^2 + 2n + 1)$.

Es gilt $8 \mid 8(n^2 + 2n + 1)$, folglich gilt auch die Behauptung, w.z. b.w.

Ma 8 ■ 2311 Nach Aufgabenstellung gilt für die Geburtsjahre die Zifferndarstellung 19ab bzw. 19ba.

Weiter gilt $(10a + b) - (10b + a) = 36$, also $a - b = 4$. Man kann nun die folgende Tabelle aufstellen:

Geburtsjahre von		
Mutter	Tochter	Alter der Tochter (1982)
1904	1940	42
1926	1962	20
1937	1973	9
1948	1984	—

Nur die Geburtsjahre 1937 (Mutter) und 1973 (Tochter) erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe.

Ma 8 ■ 2312

Die Gerade PQ schneide die Gerade AD im Punkt R. Nun gilt:

Länge von $\overline{DQ} = 3$ cm und Länge von $\overline{AP} = 9$ cm. Es sei die Länge von $\overline{DR} = y$, also die Länge von $\overline{AR} = y + 12$ cm. Nach dem Strahlensatz erhalten wir

$$y : (y + 12 \text{ cm}) = 3 \text{ cm} : 9 \text{ cm} = 1 : 3,$$

$$3y = y + 12 \text{ cm, also } y = 6 \text{ cm.}$$

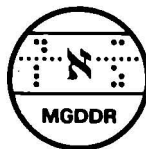
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle DNM$ und $\triangle DQR$ folgt

$$x : (12 \text{ cm} - x) = 3 \text{ cm} : 6 \text{ cm} = 1 : 2,$$

$$2x = 12 \text{ cm} - x, \text{ also } x = 4 \text{ cm.}$$

Die Strecke $\overline{DN}$ ist 4 cm lang.

Teubner-Verlag, Leipzig: Mathematikertagung in Reinhardsbrunn



Enge und vertrauensvolle Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern des In- und Auslandes ist seit vielen Jahren für die Arbeit des Teubner-Verlages, Leipzig, kennzeichnend. Bedeutende Mathematiker zu einer Tagung einzuladen, dort über aktuelle, grundsätzliche Trends ihres Fachgebietes zu beraten und zugleich neue Buchvorhaben zu erörtern, das nahm sich der Verlag im Sommer 1980 allerdings zum ersten Mal vor. Damals begannen die konkreten Vorbereitungen, ein Jahr später wurden die Einladungen verschickt, und im Oktober 1982 war es dann soweit: Der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, veranstaltete die Tagung „Aktuelle Probleme und Entwicklungstendenzen der Mathematik“. Mit der Organisation und Durchführung einer wissenschaftlichen Tagung beschritt der Verlag Neuland, und deshalb war es um so erfreulicher, daß mehr als 60 Mathematiker aus der UdSSR, der ČSSR, aus Polen, Rumänien, Österreich, der BRD, Frankreich, Italien, Finnland, Schweden, Großbritannien, Kanada, Japan, den USA und aus der DDR der Einladung nach Reinhardsbrunn (siehe Bild) folgten.

Neben programmatischen Übersichtsvorträgen wie „Recent Trends in Riemannian Geometry“ von Prof. Dr. M. Berger (Paris) oder „Einheitlichkeit, Wirklichkeitsbezug und Kommunizierbarkeit der Mathematik“ von Prof. Dr. H. Dinges (Frankfurt/Main) wurden in den drei Sektionen Analysis, Algebra/Geometrie und Stochastik auch zahlreiche Spezialvorträge gehalten. So sprachen beispielsweise Prof. Dr. A. Göpfert (Merseburg) „Über einige Entwicklungstrends in der Mathematischen Optimierung“ und Prof. Dr. L. D. Kudrjavzev (Moskau) über „Some Topics of the Imbedding Theory

of Function Spaces and its Applications“. Abgerundet wurde das dreitägige wissenschaftliche Programm durch den Vortrag von Prof. Dr. T. Banchoff (Providence), der Möglichkeiten der Computergrafik anhand selbstgefertigter mathematischer Filme vorführte, sowie durch eine gemeinsame Wanderung zur nahegelegenen Marienglashöhle. Zahlreiche ausländische Teilnehmer nutzten ihren Aufenthalt in der DDR, um im Anschluß an die Tagung Weimar, Dresden, Leipzig oder Berlin zu besuchen.

Bereits im Januar 1983 sind die Reinhardsbrunner Tagungsberichte erschienen, und zwar als 50. Band der „Teubner-Texte zur Mathematik“.

Vor allem derart kurze Veröffentlichungszeiten, günstige Preise auch bei niedrigen Auflagenhöhen und weltweite Verbreitung sind die wesentlichen Vorzüge dieser im Offsetverfahren erscheinenden Buchreihe. Wenn man dabei bedenkt, daß heute selbst Artikel in Fachzeitschriften erst ein bis zwei Jahre nach Fertigstellung des Manuskriptes gedruckt vorliegen, zugleich aber die wissenschaftliche Forschung immer schneller und sprunghafter in neue Bereiche vorstößt, dann wird verständlich, daß neben der traditionellen Buchherstellung auch neue Wege der Vervielfältigung und Verbreitung aktueller Erkenntnisse beschritten werden müssen. Seit 1976 stellt sich die Reihe „Teubner-Texte zur Mathematik“ dieser Aufgabe. Der Autor lie-

fert dem Verlag ein reproduktionsfähiges Schreibmaschinenmanuskript, und nach endgültiger Fertigstellung der Offsetvorlage erfolgt die Veröffentlichung des Buches innerhalb von vier bis fünf Monaten.

Diese Publikationsform hat der Teubner-Verlag, Leipzig, natürlich nicht erst neu erfinden müssen, im Gegenteil: er konnte an eigene, positive Traditionen anknüpfen, denn bereits in den neunziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts veröffentlichte der deutsche Mathematiker Felix Klein (1849–1925) handschriftliche Vorlesungsausarbeitungen im sogenannten Steindruckverfahren. Diese von Klein, dem Begründer des Mathematischen Seminars der Leipziger Universität, im Teubner-Verlag publizierten Autographien waren die eigentlichen Vorläufer unserer „Teubner-Texte zur Mathematik“.

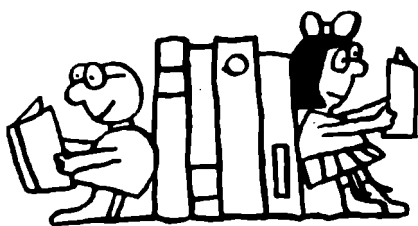
Inzwischen erschienen in dieser Reihe 50 Monographien, Spezialvorlesungen bzw. Tagungsbände, und vor allem die wachsende Zahl interessanter Manuskriptangebote, Lizenzvergaben in die UdSSR, nach Großbritannien, in die USA sowie der Export in mehr als 30 Länder zeigen, daß diese Bücher bereits innerhalb weniger Jahre einen festen Platz im vielschichtigen internationalen Angebot wissenschaftlicher Literatur einnehmen.

Abschließend sei noch ein bemerkenswertes Ergebnis der Tagung in Reinhardsbrunn hervorgehoben: Das bisher aus vier Mathematikern unseres Landes bestehende Herausbergremium der Teubner-Texte wurde erweitert. Mit Mathematikern aus der UdSSR, der ČSSR, aus Italien, Großbritannien, Japan und der BRD wurde vertraglich vereinbart, daß sie ab 1983 dem Verlag als beratende Herausgeber zur Seite stehen und aktiv Einfluß auf die Auswahl und das fachliche Niveau der einzelnen Bücher nehmen.

Auf diesem Wege wird der Teubner-Verlag, Leipzig, seinem Ziel, in noch stärkerem Maße neueste Forschungsergebnisse des In- und Auslandes zu publizieren, näherkommen.

J. Weiß





Autorenkollektiv
unter Leitung von A. Hilbert
**Arbeitsgemeinschaften
in den Klassen 5 bis 8**

268 Seiten mit zahlr. Bildern

Preis 7,65 M

Bestell-Nr. 707 4410
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

J. Lehmann

2 × 2 plus Spaß dabei

(Unterhaltungsmathematik für Klasse
1 bis 5)
80 Seiten, zahlr. farbige Bilder

Preis: 2,60 M

Bestell-Nr. 707 4373
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

B. Noack/H. Titze

**Aufgaben mit Lösungen aus
Olympiaden Junger Mathematiker
der DDR in den Klassen 5 bis 8**

184 Seiten, 38 Abb.

Preis: 6,40 M

Bestell-Nr. 707 624 8/002196
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

J. Ch. Schäfer · Herausgeber: J. Lehmann

Die Wunder der Rechenkunst

Etwa 240 Seiten mit etwa 45 Bildern

Preis: etwa 7,00 M

Bestell-Nr. 707 745 1

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

Autorenkollektiv

Wissensspeicher Formeln und Werte

Mathematik – Physik – Astronomie – Chemie

Etwa 192 Seiten mit etwa 160 Bildern

Preis: etwa 5,80 M

Bestell-Nr. 707 438 1

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

A. Hilbert

Funktionen

Reihe: Wir wiederholen

Etwa 160 Seiten mit 203 Bildern

Preis: 6,80 M

Bestell-Nr. 546 706 9

VEB Fachbuchverlag Leipzig

A. Hilbert

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Reihe: Wir wiederholen

Etwa 112 Seiten mit 45 Bildern

und 5 Tabellen

Preis: 4,80 M

Bestell-Nr. 546 707 7

VEB Fachbuchverlag Leipzig

A. Hilbert

Differential- und Integralrechnung

Etwa 112 Seiten mit 59 Bildern

Preis: 4,80 M

Bestell-Nr. 546 704 2

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Wolfgang Schifferdecker

Der Dreh mit dem Würfel

96 Seiten mit 171 Zeichnungen,
11 Illustrationen und 13 Farbfotos

Preis: 8,00 M

Bestell-Nr. 653 857 8

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Wolfgang Hintze

Der ungarische Zauberwürfel

140 Seiten mit 171 z. T. farbigen Bildern
und 4 Tabellen

Preis: 9,50 M

Bestell-Nr. 571 154 3

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften Berlin

A. A. Belski/L. A. Kaloujnine

Division mit Rest

75 Seiten, 3 Abb.

Preis: 5,00 M

Bestell-Nr. 571 049 5

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

H. Grabowski, R. Fücke, R. Schroeder

Praktische Mathematik

438 Seiten mit 47 Bildern, 5 Tabellen
und 203 Beispielen

Preis: 23,80 M

Bestell-Nr. 545 746 9

VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Lohse/R. Ludwig

Prüfstatistik

Ein programmierter Lehrgang

236 Seiten mit 200 Lehrschritten
und 25 Bildern

Preis: 18,00 M

Bestell-Nr. 546 530 3

VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Sychow/P. Petzold

Mathematische Psychologie

Mathematische Modellierung und Skalierung
in der Psychologie

323 Seiten, zahlr. Bilder

Preis: 32,00 M

Bestell-Nr.

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften Berlin

W. Gilde

Licht und Schatten

Etwa 196 Seiten mit 133 Bildern

Preis: 24,00 M

Bestell-Nr. 546 721 0

VEB Fachbuchverlag Leipzig

W. Lischewski

Unterhaltsames aus der Mechanik

Etwa 120 Seiten mit 60 Bildern

Preis: etwa 5,50 M

Bestell-Nr. 546 788 6

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Neuere Titel der Mathematischen Schülerbücherei (MSB)

- Band 101 Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (1980) (DVW)
- Band 102 Hodi, Endre (Hrsg.) Mathematisches Mosaik. 1. Aufl. 1977, 2. Aufl. (1980) (U)
- Band 103 Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW) (1982)
- Band 104 Kufner, Raum und Entfernung (BGT) (1981)
- Band 105 Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW) (1981)
- Band 106 Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT) (1982)
- Band 107 Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht (BGT) (1983)
- Band 108 Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW) (1982)
- Band 109 Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW) (1984)
- Band 110 Pieper, Komplexe Zahlen (Theorie – Praxis – Geschichte) (DVW) (1983)
- Band 111 Lehmann, 222 Historische Aufgaben aus 444 Jahrzehnten (U) (1984)
- Band 112 Kudrjawzew, Gedanken über die moderne Mathematik (BGT) (1983)
- Band 113 Belkner/Brehmer, Lebesguesche Integrale (DVW) (1984)
- Band 114 Sprengel/Wilhelm, Funktionen und Funktionalgleichungen (DVW) (1983)
- Band 115 Belski/Kaloujnine, Division mit Rest (DVW) (1982)
- Band 116 Quaisser, Bewegungen in der Ebene und im Raum (DVW) (1985)
- Band 117 Höfner/Klein, Wahrscheinlichkeit ganz einfach – Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung (U) (1985)
- Band 118 Péter, Das Spiel mit dem Unendlichen (BGT) (1984)

J. Lehmann/D. Ziegler, Leipzig

Knifflige Fragen – Rund um den Kreis

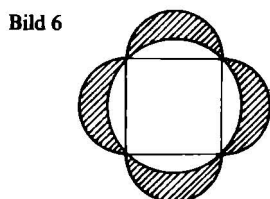
▲1▲ Welche der schraffierten Flächen (Bild 1, 2, 3, 4) in den abgebildeten vier kongruenten Quadraten ist am größten? Die Antwort ist zu begründen.



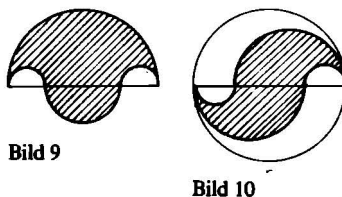
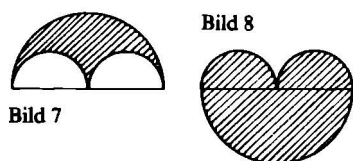
▲2▲ Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Quadrates beträgt die im Quadrat schraffierte, von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche? (Bild 5)



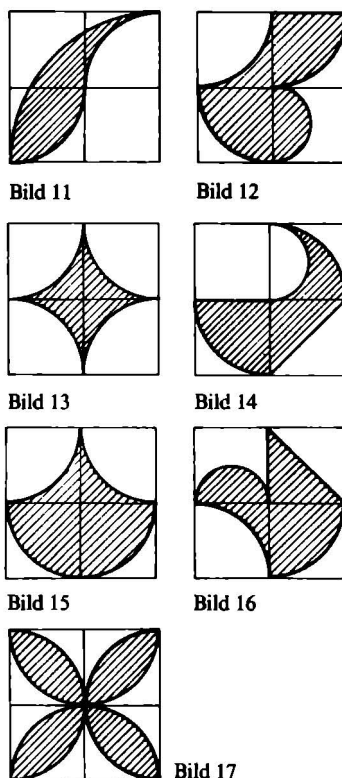
▲3▲ Die Zeichnung (Bild 6) stellt ein Quadrat mit seinem Umkreis dar. Ferner wurde über jeder Quadratseite als Durchmesser nach außen ein Halbkreis konstruiert. Dabei entstanden vier schraffiert dargestellte Kreisbogenzweiecke. Es ist nachzuweisen, daß die Summe der Flächeninhalte der vier Kreisbogenzweiecke gleich dem Flächeninhalt des Quadrates ist.



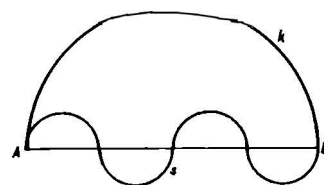
▲4▲ Die vier abgebildeten Figuren (Bild 7, 8, 9, 10) haben sämtlich den gleichen Durchmesser d . Es sind die schraffiert dargestellten Flächeninhalte durch d auszudrücken und der Größe nach zu ordnen.



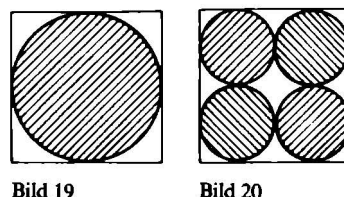
▲5▲ Die sieben abgebildeten großen Quadrate (Bild 11 bis 17) sind jeweils aus vier kongruenten kleineren Quadraten zusammengesetzt. Die schraffierten Flächen sind durch die Seitenlänge a eines kleinen Quadrates auszudrücken.



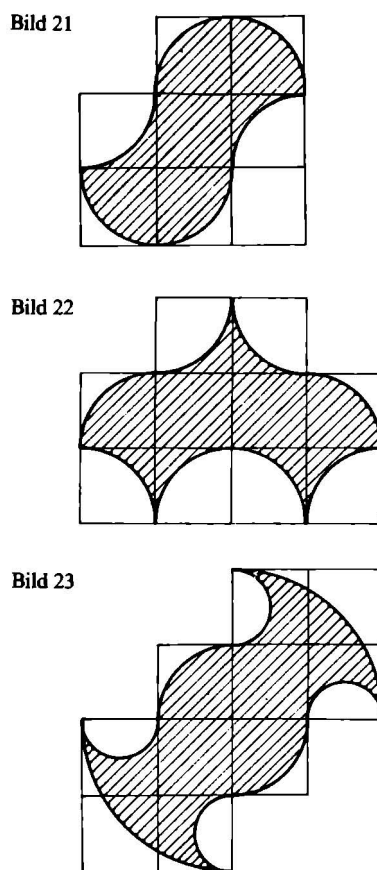
▲6▲ Über den Durchmesser $\overline{AB}$ eines Halbkreises k wurden, abwechselnd nach beiden Seiten, vier kleinere kongruente Halbkreise gezeichnet, die eine Schlangenlinie s bilden. Es ist zu untersuchen, welche der drei Beziehungen $k < s$, $k = s$ oder $k > s$ gilt. (Bild 18)



▲7▲ Das Bild zeigt zwei kongruente Quadrate. Dem linken Quadrat (Bild 19) wurde der Inkreis, dem rechten Quadrat (Bild 20) wurden vier kongruente Kreise eingeschrieben. Es sind die schraffierten Flächeninhalte beider Figuren zu vergleichen.



▲8▲ Jedes der kleinen Quadrate der drei abgebildeten Figuren (Bild 21, 22, 23) hat die Seitenlänge $a = 1$ cm. Es ist der Flächeninhalt jeder der drei schraffierten Flächen zu berechnen.

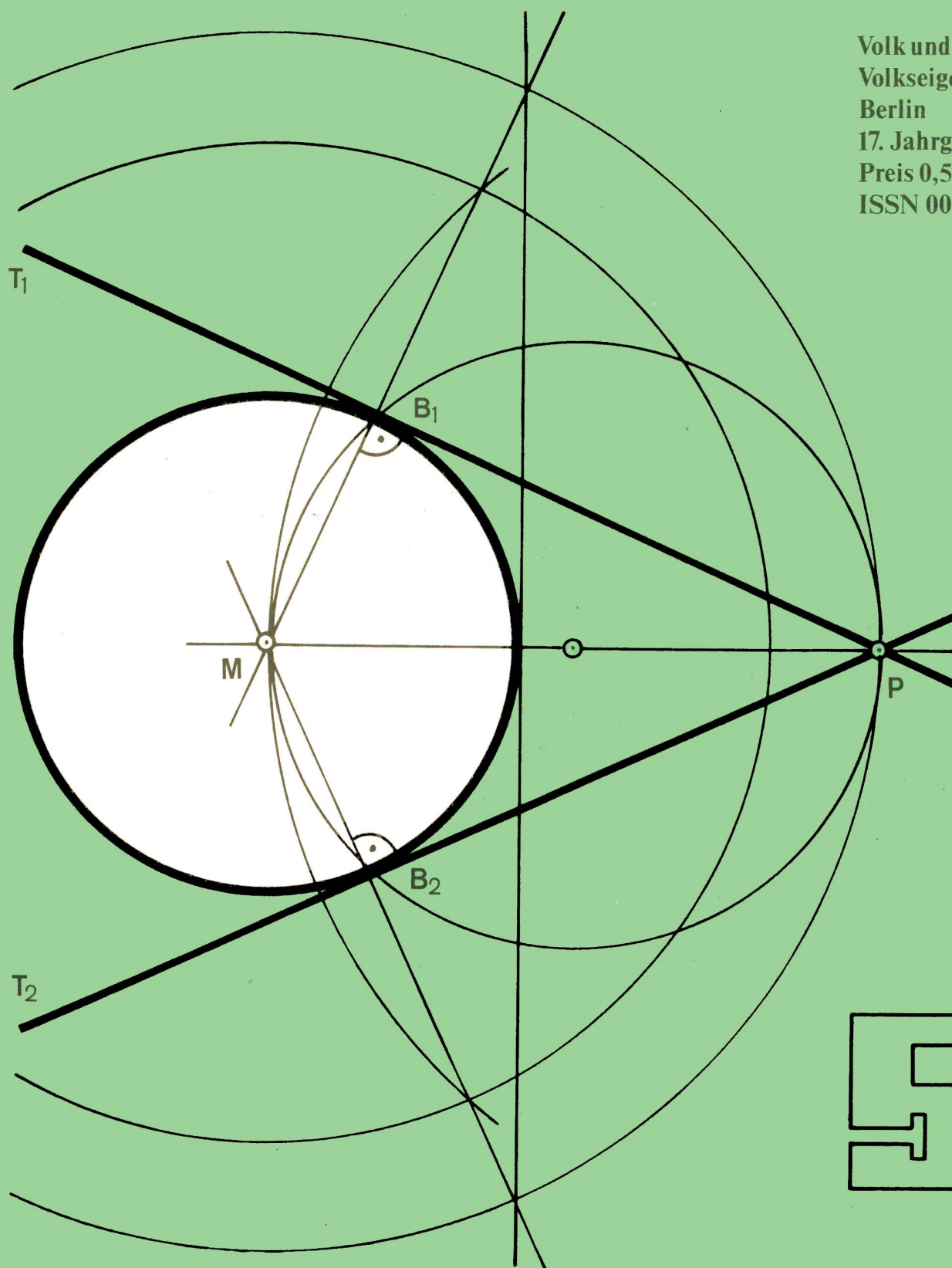


J. Lehmann/Th. Scholl

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395



5

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Foto A. Hemmerling, Eigenfoto (S.
102); Illusionismen, aus dem gleichnamigen
Buch, Verlag Corin, Bern (S. 103); Ulrich
Dröse, Greifswald (S. 110); W. Henker, Karl-
Marx-Stadt (S. 115); Briefmarken: J. Leh-
mann, Leipzig (S. 116).

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, nach einer Idee von Ing.
M. Wilde, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der
ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Redaktionsschluß: 27. Juni 1983

Erscheinungstermin: 20. Oktober 1983



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 97 Über die Konstruktion von Vielecken, wenn die Seitenmittelpunkte gegeben sind [8]*
Dipl.-Math. W. Jagusch, Zirkelleiterin f. Mathem., Station Jg. Techn. u. Naturf., Jena
- 100 Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität [9]
Dr. A. Hemmerling, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald
- 103 Eine Aufgabe – drei Lösungsvarianten · Gedanken zum Titelblatt [8]
Dipl.-Ing. M. Wilde, Leipzig
- 104 Interessante Koordinaten [4]
Dr. L. Flade, Halle/J. Lehmann, Leipzig
- 105 Für den Schachfreund [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 105 Ein Beweis von Leonhard Euler [9]
Dr. R. Thiele, leitender Lektor im Hirzelverlag Leipzig
- 106 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 109 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Wir verbreiten Begeisterung für unsere Wissenschaft [5]
Dr. J. Nietzsche, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
Aus dem Kreisklub Junger Mathematiker Berlin-Köpenick berichtet
Mathematikfachlehrer M. Krause, Vorsitzender d. Kreisklubs Mathematik, Rat des
Stadtbezirks Berlin-Köpenick
- 110 Prof. Dr. Franz von Krbek zu seinem 85. Geburtstag [7]
Prof. Dr. E. Griepentrog/Dr. J. Buhrow, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Uni-
versität Greifswald
- 110 *Leseprobe*: Geometrische Plaudereien [7]
Prof. Dr. F. v. Krbek
- 112 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 114 XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
4. Stufe DDR-Olympiade, Aufgaben · Bericht · Preisträger
- 116 Für den Briefmarkenfreund: Polnische Mathematiker [8]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald
- 116 Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. I. Ignatjew [5]
Lomonossow-Universität Moskau
- III. U.-Seite: Lösungen [5]
Eine kleine Lektion in Tagram [5]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald
- IV. U.-Seite: Heiterer Denksport [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über die Konstruktion von Vielecken, wenn die Seitenmittelpunkte gegeben sind

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, wann n gegebene Punkte $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ die Seitenmitten eines Vielecks $P_1P_2\dots P_n$ sein können, ob dieses Vieleck eindeutig bestimmt ist und wie man es konstruieren kann. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß das Vieleck konvex ist. Auch überschlagene und entartete Vielecke sind zugelassen. So dürfen zum Beispiel Eckpunkte zusammenfallen oder Seiten ganz bzw. teilweise aufeinanderliegen. Für $n=4$ soll uns noch kurz die Frage beschäftigen, wann das entstehende Viereck konvex ist.

I. $n=3$

Gegeben: Q_1, Q_2, Q_3 . Wir setzen voraus, daß diese drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

Gesucht: P_1, P_2, P_3 so, daß Q_1 der Mittelpunkt von P_1P_2 , Q_2 der Mittelpunkt von P_2P_3 und Q_3 derjenige von P_3P_1 ist.

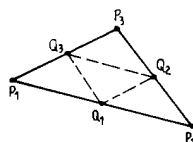
Lösungsweg:

a) Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ so ein gesuchtes Dreieck, und Q_1, Q_2, Q_3 seien die Mittelpunkte seiner Seiten.

Aus dem Strahlensatz folgt:

Die Seiten des Dreiecks $\triangle Q_1Q_2Q_3$ sind parallel zu den Seiten des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ und halb so lang wie diese.

Bild 1



b) Ist das Dreieck $\triangle Q_1Q_2Q_3$ gegeben, so zeichnet man durch jeden Eckpunkt die Parallele zur gegenüberliegenden Seite. Diese Geraden schneiden sich in den Punkten P_1, P_2, P_3 . Diese Schnittpunkte existieren immer und sind eindeutig bestimmt. Zu einem Dreieck $\triangle Q_1Q_2Q_3$ gibt es also stets genau ein Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, so daß die Q_i die Seitenmittelpunkte sind.

Wir wollen die Konstruktion der P_i noch auf eine andere Weise, nämlich mit Hilfe von Abbildungen, beschreiben, weil uns diese Methode für $n>3$ gute Dienste leisten wird. Dabei verwenden wir für die 180° -Drehung um einen Punkt A die Bezeichnung „Punktspiegelung an A “ und schreiben dafür S_A .

Wir wenden auf Q_3 die Verschiebung $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ an und erhalten als Bild den Punkt P_1 . Bei der Punktspiegelung an Q_1 gehe P_1 in den Punkt P_2 über. P_3 sei das Bild von P_2 bei der Punktspiegelung an Q_2 .

$$S_{Q_1}(P_1)=P_2; S_{Q_2}(P_2)=P_3.$$

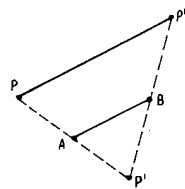
Es ist nur noch zu zeigen, daß Q_3 der Mittelpunkt von P_1P_3 ist. P_3 haben wir aus P_1 durch das Hintereinanderausführen der beiden Punktspiegelungen an Q_1 und Q_2 gewonnen. Wir schreiben dafür

$$S_{Q_1}S_{Q_2}(P_1)=P_3. \quad (*)$$

Wir wollen untersuchen, was für eine Abbildung durch das Nacheinanderausführen zweier Punktspiegelungen entsteht.

P sei ein beliebiger Punkt, P' sein Bildpunkt bei der Punktspiegelung an einem Punkt A , P'' das Bild von P' bei der Punktspiegelung an einem Punkt B . Wie aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung folgt, gilt $PP'' \parallel AB$; $PP''=2 \cdot AB$.

Bild 2



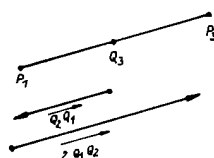
P'' kann man also aus P auch durch Verschieben in Richtung AB um die doppelte Länge von AB gewinnen. Wir schreiben für diesen Verschiebungsvektor $2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Damit ist gezeigt:

Hilfssatz: Das Nacheinanderausführen von zwei Punktspiegelungen an A und B kann man ersetzen durch eine Verschiebung mit dem Verschiebungsvektor $2\overrightarrow{AB}$.

Aus (*) folgt, daß P_3 das Bild von P_1 bei der Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ist. Da P_1 als Bild von Q_3 bei der Verschiebung $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ entstanden war, liegen P_1, Q_3, P_3 auf einer Geraden, und Q_3 ist der Mittelpunkt von P_1P_3 .

$\triangle P_1P_2P_3$ ist also ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. Es ist eindeutig bestimmt.

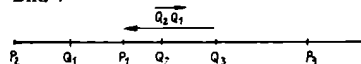
Bild 3



Wir können nun auch die Voraussetzung, daß die Q_i ($i=1, 2, 3$) ein Dreieck bilden, fallen lassen.

Liegen die Punkte Q_i auf einer Geraden, so erhält man durch die Verschiebung von Q_3 um $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ und die nachfolgenden Spiegelungen an Q_1, Q_2 die Punkte P_i auf derselben Geraden. Das Dreieck ist entartet.

Bild 4



II. $n=4$

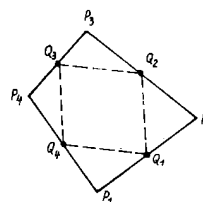
a) $P_1P_2P_3P_4$ sei so ein gesuchtes Viereck. Wir betrachten die Lage seiner Seitenmittelpunkte Q_i ($i=1, \dots, 4$).

Behauptung: Die Q_i bilden ein Parallelogramm.

Beweis: Wendet man auf P_1 nacheinander die Punktspiegelungen an Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 an, so kommt man zum Ausgangspunkt P_1 zurück.

$$S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}(P_1)=P_1.$$

Bild 5



Nach dem Hilfssatz ist $S_{Q_1}S_{Q_2}$ gleich der Verschiebung $2 \cdot \overrightarrow{Q_1Q_2}$, $S_{Q_3}S_{Q_4}$ ist gleich der Verschiebung $2 \cdot \overrightarrow{Q_3Q_4}$. Das Hintereinanderausführen zweier Verschiebungen führt aber nur dann zum selben Punkt zurück, wenn die beiden Verschiebungsvektoren gleich lang und entgegengesetzt gerichtet sind. Also gilt

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = -\overrightarrow{Q_3Q_4}; \quad \overrightarrow{Q_1Q_2} \parallel \overrightarrow{Q_3Q_4}.$$

Ein Viereck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, ist aber ein Parallelogramm.

Vier Punkte Q_i können demnach höchstens dann die Seitenmitten eines Vierecks sein, wenn sie ein Parallelogramm bilden.

b) Wir denken uns nun ein Parallelogramm $Q_1Q_2Q_3Q_4$ gegeben und wollen ein Viereck $P_1P_2P_3P_4$ so konstruieren, daß die Q_i die Mittelpunkte seiner Seiten sind.

Behauptung: Man kann einen Eckpunkt des Vierecks frei wählen. Die anderen erhält man dann durch hintereinander ausgeführte Punktspiegelungen an den Q_i .

Beweis: Wir wählen P_1 frei. Die nacheinander ausgeführten Punktspiegelungen an Q_2, Q_3 und Q_4 ergeben die Punkte P_2, P_3 und P_4 .

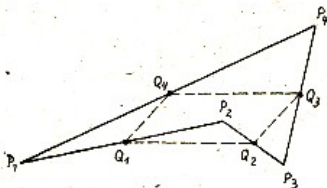
$$S_{Q_1}(P_1)=P_2,$$

$$S_{Q_2}(P_2)=P_3, S_{Q_3}(P_3)=P_4.$$

Können wir zeigen, daß $S_{Q_4}(P_4)=P_1$ oder, was dasselbe ist, $S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}(P_1)=P_1$ gilt, so ist unsere Behauptung bewiesen. $S_{Q_1}S_{Q_2}$ können wir ersetzen durch die Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $S_{Q_3}S_{Q_4}$ durch die Verschiebung $2\overrightarrow{Q_3Q_4}$.

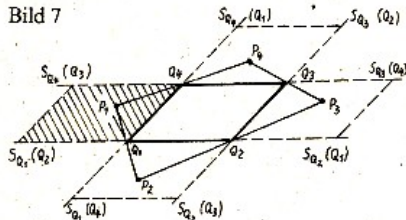
Da die beiden Verschiebungspfeile nach Voraussetzung gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet sind, kommen wir durch das Hintereinanderausführen dieser Verschiebungen zum Ausgangspunkt P_1 zurück. Die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bilden also ein Viereck, dessen Seitenmitten die Punkte Q_i sind.

Bild 6



Man kann sich leicht überlegen, daß das Viereck genau dann konvex ist, wenn man P_1 aus dem Inneren des an $\overline{Q_1Q_4}$ angrenzenden, zu $Q_1 \dots Q_4$ kongruenten Parallelogramms (in Bild 7 schraffiert) wählt.

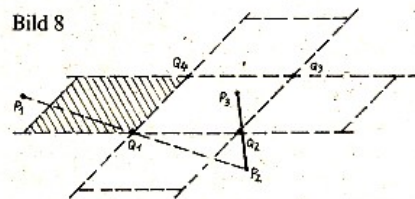
Bild 7



Genau dann liegen nämlich alle Bilder der P_i bei den Spiegelungen an den Q_i innerhalb der an $Q_1Q_2Q_3Q_4$ anliegenden kongruenten Parallelogramme. Dies ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ konvex ist. Andernfalls gibt es nämlich einen Bildpunkt P_k ($k \in \{1, \dots, 4\}$), der innerhalb desjenigen Winkelraumes mit dem Scheitel Q_k liegt, in dem nicht noch so ein kongruentes Parallelogramm eingezeichnet ist. (Das möge der Leser nachprüfen durch Wahl von P_1 aus allen möglichen Bereichen.) Bei anschließender Spiegelung an Q_k erhält man P_{k+1} , und die Strecke P_kP_{k+1} ($P_5 = P_1$) schneidet das Parallelogramm der Seitenmitten. Das ist bei einem konvexen Viereck nicht der Fall.

Beispiel:

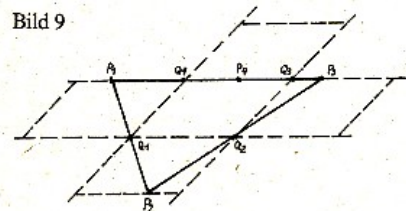
Bild 8



Wählt man P_1 auf einer der Geraden Q_iQ_{i+1} ($Q_5 = Q_1$), so entartet das Viereck.

Beispiel:

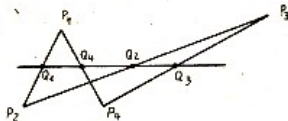
Bild 9



Das Parallelogramm der Q_i darf auch entartet sein zu einem Parallelogramm der Höhe Null. Es entstehen überschlagene Vierecke. (Nicht immer ist bei überschlagenen Vierecken das Parallelogramm der Seitenmitten entartet.)

Beispiel:

Bild 10



Zu vier Punkten Q_i in Parallelogrammlage ($Q_1Q_2 = Q_4Q_3$) gibt es also stets unendlich viele Vierecke, deren Seitenmitten die Q_i sind.

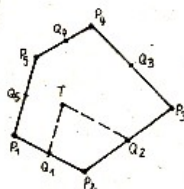
III. $n = 5$

a) $P_1P_2P_3P_4P_5$ sei ein Fünfeck mit den Seitenmittelpunkten Q_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Beim Hintereinanderausführen der Punktspiegelungen an $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ geht der Punkt P_1 in sich über, d. h. es gilt

$$S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}S_{Q_5}(P_1) = P_1.$$

Bild 11



$S_{Q_1}S_{Q_2}$ können wir ersetzen durch die Verschiebung $2\overline{Q_1Q_2}$ (vgl. Hilfssatz), $S_{Q_3}S_{Q_4}$ durch die Verschiebung $2\overline{Q_3Q_4}$. Das Bild von Q_2 bei der Verschiebung $2\overline{Q_3Q_4}$ sei T . Dann kann man die beiden Verschiebungen $2\overline{Q_1Q_2}, 2\overline{Q_3Q_4}$ ersetzen durch die eine Verschiebung $2\overline{Q_1TP_1}$ ist also ein Punkt, der bei der Verschiebung $2 \cdot \overline{Q_1T}$ und anschließender Punktspiegelung an Q_5 fest bleibt. So ein Punkt heißt „Fixpunkt“. Um die Fixpunkte dieser Abbildung zu bestimmen, wollen wir uns zunächst überlegen, durch welche Abbildung man eine Verschiebung mit anschließender Punktspiegelung ersetzen kann.

Der Verschiebungspfeil sei $\overline{AB}$, der Fixpunkt der anschließenden Punktspiegelung sei S . P sei ein beliebiger Punkt der Ebene, dessen Bild wir bestimmen wollen.

Bei der Verschiebung $\overline{AB}$ gehe P in P' über, das Bild von P' bei der Punktspiegelung an S sei P'' . Wir zeichnen die Verbindungsstrecke $\overline{PP''}$ und durch S die Parallele zu $\overline{PP'}$. Der entstehende Schnittpunkt sei R . Aus dem Strahlensatz folgt:

$$\overline{SR} = \frac{1}{2}\overline{P'P} = \frac{1}{2}\overline{BA}.$$

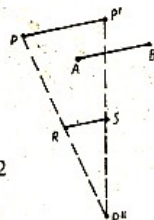


Bild 12

Der Punkt R ist also – unabhängig von der Wahl des Punktes P – gleich dem Bild von S bei der Verschiebung $\frac{1}{2}\overline{BA}$. Da wiederum aus dem Strahlensatz folgt, daß $\overline{PR} = \overline{RP''}$ gilt, erhält man P'' als Bild von P bei der Punktspiegelung an R . Damit ist gezeigt, daß man die Verschiebung $\overline{AB}$ mit anschließender Punktspiegelung an S ersetzen kann durch die Punktspiegelung an dem Bildpunkt R von S bei der Verschiebung $\frac{1}{2}\overline{BA}$. Diese Abbildung besitzt genau den Fixpunkt R .

Für unsere Aufgabenstellung bedeutet dies, daß man die Verschiebung $2\overline{Q_1T}$ mit anschließender Punktspiegelung an Q_5 ersetzen kann durch die Punktspiegelung an dem Bildpunkt von Q_5 bei der Verschiebung $\overline{TQ_1}$. Dieser Bildpunkt ist der einzige Fixpunkt der Abbildung und ist also gleich dem Punkt P_1 .

b) Es seien die Seitenmitten Q_i ($i = 1, \dots, 5$) gegeben. Für das Fünfeck $P_1P_2 \dots P_5$ ergibt sich folgende Konstruktion: Man bestimmt durch Aneinanderfügen der Verschiebungspfeile $\overline{Q_1Q_2}$ und $\overline{Q_3Q_4}$ den Verschiebungspfeil $\overline{Q_1T}$. In umgekehrter Richtung ($\overline{TQ_1}$) trägt man diesen Pfeil an Q_5 an und erhält den Punkt P_1 . Durch Punktspiegelungen der P_i an den Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) erhält man nacheinander die Eckpunkte P_{i+1} des Fünfecks.

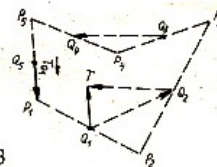


Bild 13

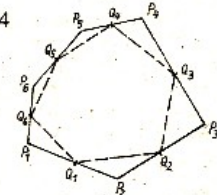
Da der Punkt P_1 als Fixpunkt einer Punktspiegelung immer existiert und eindeutig bestimmt ist, gibt es zu fünf Punkten Q_i ($i = 1, \dots, 5$) stets genau ein Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$, für das die Q_i die Mittelpunkte der Seiten sind.

IV. $n = 6$

$P_1P_2 \dots P_6$ sei ein Sechseck mit den Seitenmitten Q_i ($i = 1, \dots, 6$). Wendet man auf P_1 die nacheinander ausgeführten Punktspiegelungen an $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ an, so erhält man als Bild wieder den Punkt P_1 ,

$$S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}S_{Q_5}S_{Q_6}(P_1) = P_1.$$

Bild 14



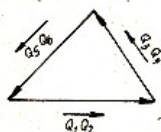
Da die Abbildung $S_{Q_i}S_{Q_{i+1}}$ gleich der Verschiebung $2 \cdot \overline{Q_iQ_{i+1}}$ ist, muß also das Hintereinanderausführen der drei Verschiebungen $2\overline{Q_1Q_2}, 2\overline{Q_3Q_4}, 2\overline{Q_5Q_6}$ zum Ausgangspunkt P_1 zurückführen. Da eine Verschiebung, die

nicht gleich der identischen Abbildung (d. h. jeder Punkt wird sich selbst zugeordnet) ist, keinen Fixpunkt besitzt, muß die Zusammensetzung der drei Verschiebungen gleich der identischen Abbildung sein. Für die drei Verschiebungspfeile bedeutet dies, daß sie aneinandergesetzt ein Dreieck bilden. Das ist genau dann der Fall, wenn die Pfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}$, $\overrightarrow{Q_5Q_6}$ ein Dreieck ergeben.

Die Punkte Q_i müssen also so angeordnet sein, daß die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}$, $\overrightarrow{Q_5Q_6}$ bei Zusammensetzung ein Dreieck bilden. (Automatisch bilden dann auch die drei anderen Pfeile $\overrightarrow{Q_2Q_3}$, $\overrightarrow{Q_4Q_5}$, $\overrightarrow{Q_6Q_1}$ ein Dreieck.)

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so kann man den Punkt P_1 frei wählen und erhält die anderen Punkte P_{i+1} wieder durch Punktspiegelungen an den Q_i . In diesem Fall gibt es also unendlich viele Sechsecke mit der geforderten Eigenschaft.

Bild 15



V. Die gleichen Überlegungen wie für $n=4$ und $n=6$ gelten immer, wenn die Anzahl n der Punkte Q_i ($i=1, \dots, n$) gerade ist; die entsprechenden Überlegungen wie für $n=3$ bzw. $n=5$ führen bei ungeradem n zum Ziel. Ist P_1 ein Eckpunkt des gesuchten Vielecks, so muß nämlich immer gelten, daß das Nacheinanderanwenden der Punktspiegelungen an $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ auf P_1 zu dem Punkt P_1 zurückführt. P_1 ist also ein Fixpunkt dieser zusammengesetzten Abbildung.

$$S_{Q_1} S_{Q_2} \dots S_{Q_n}(P_1) = P_1.$$

Im Falle n gerade kann man diese n Spiegelungen durch $\frac{n}{2}$ Verschiebungen ersetzen, die zusammen die identische Abbildung ergeben müssen. Dadurch erhält man eine Bedingung für die Q_i . Den Punkt P_1 darf man dann frei wählen. Im Falle n ungerade werden die n Punktspiegelungen ersetzt durch $\frac{n-1}{2}$ Verschiebungen ($\overrightarrow{2Q_1Q_2}, \overrightarrow{2Q_3Q_4}, \dots, \overrightarrow{2Q_{n-2}Q_{n-1}}$) und die anschließende Punktspiegelung S_{Q_n} . Als resultierende Abbildung ergibt sich eine Punktspiegelung. Den Fixpunkt dieser Abbildung kann man bestimmen, indem man den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ durch Aneinanderfügen der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}, \overrightarrow{Q_3Q_4}, \dots, \overrightarrow{Q_{n-2}Q_{n-1}}$ konstruiert und diesen in umgekehrter Richtung an Q_n anheftet.

Das Bild von Q_n bei der Verschiebung $\overrightarrow{2Q_1Q_2}$ ist der Fixpunkt P_1 und damit ein Eckpunkt des Vielecks. Aus P_1 gewinnt man in jedem Falle die anderen Eckpunkte P_{i+1} durch Spiegelung an den Q_i .

Wir fassen zusammen:

Ist n gerade ($n > 2$), so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines n -Ecks $P_1P_2 \dots P_n$ mit der ge-

forderten Eigenschaft, daß die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}, \overrightarrow{Q_3Q_4}, \dots, \overrightarrow{Q_{n-1}Q_n}$ ein geschlossenes $\frac{n}{2}$ -Eck bilden müssen. Ist dies der Fall, so gibt es unendlich viele solcher n -Ecke $P_1 \dots P_n$. Ein Eckpunkt ist frei wählbar. Die anderen ergeben sich durch Punktspiegelungen.

Ist n ungerade ($n > 1$), gibt es immer genau ein n -Eck $P_1P_2 \dots P_n$, so daß die Punkte Q_i ($i=1, \dots, n$) die Seitenmittelpunkte sind. P_1 ist bestimmt als Fixpunkt einer Punktspiegelung, die anderen Eckpunkte erhält man wieder durch Punktspiegelungen an den Seitenmittelpunkten.

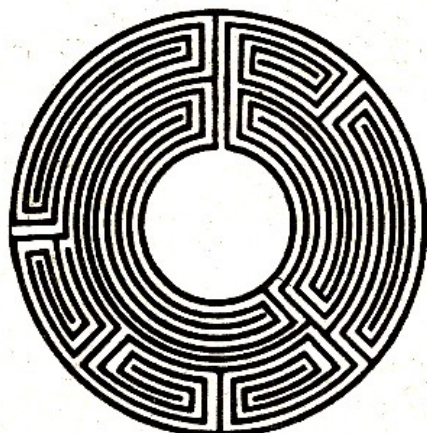
Waltraud Jagusch

Wie stand es bei Karl Marx mit Fremdsprachen?

Marx handelte nach dem Wahlspruch: „Eine fremde Sprache ist eine Waffe im Kampf des Lebens.“ Am Trierer Gymnasium erwarb er sich außerordentliche Kenntnisse des Lateinischen und Altgriechischen und lernte Französisch. Im Londoner Exil eignete er sich die englische Sprache an, die er bald neben Deutsch und Französisch fließend beherrschte. Zum Zeitpunkt seiner Übersiedlung nach London konnte er auch bereits Italienisch lesen. Wenige Jahre später eignete er sich Spanisch an, das er auch mit guter Syntax sprach. Im Alter von 50 Jahren entschloß sich Marx, Russisch zu lernen, da es ihm für die Arbeit am „Kapital“ unumgänglich erschien, die ökonomische Entwicklung Rußlands in den Originalquellen zu studieren. Er beherrschte diese Sprache bereits nach sechs Monaten soweit, daß er Puschkin, Gogol und Saltykow-Schtschedrin im Original lesen konnte.

Als Führer der Internationale vermochte er nahezu alle europäischen Sprachen zu verstehen, so u. a. auch Rumänisch und Bulgarisch. Seinen Freunden und Schülern riet er, beim Erlernen einer Sprache vor allem viel zu lesen. Der praktische Gebrauch sei dann leicht erlernt.

F. G.

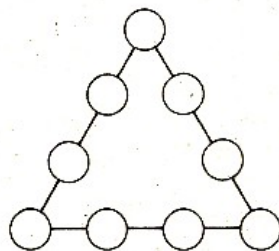


Irrgarten aus dem Jahre 1664 (G. A. Boeckler)



▲ 1 ▲ Волшебный треугольник.

Расставьте в кружочки треугольника цифры от 1 до 9 так, чтобы на каждой стороне суммы цифр были одинаковы. При этом добейтесь такого расположения цифр, чтобы и суммы квадратов цифр на каждой стороне были равны между собой.



▲ 2 ▲ Mark, Paul and Boris are married to Anne, Mary and Susan, not necessarily respectively. Each couple has a pet and the pets are a cat, a guineapig and a pony. Use the following information to match up the husbands, wives and pets:

- Paul's and Anne's pets were fighting.
- Mary's husband's name has four letters.
- Susan went round to feed Mark's pet when he was away.
- Mark never goes to town.
- Boris's pet is either the cat or the pony.
- Susan's pet is not the cat.
- The cat's male owner took him to the vet in town.
- The guineapig hides when Anne visits its house.
- Mary's pet sleeps in a shoe box.

▲ 3 ▲ Trois lignes d'autobus ont pour point de départ la gare Montparnasse à Paris. Les autobus de la première ligne sont de retour au bout de 1 h 36 min et restent 4 min à l'arrêt. Les autobus de la deuxième ligne sont de retour au bout de 1 h 48 min et restent 12 min à l'arrêt; ceux de la troisième ligne sont de retour au bout de 2 h 10 min et restent 20 min à l'arrêt. Trois autobus, un pour chaque ligne, partent ensemble de la gare Montparnasse à 8 h.

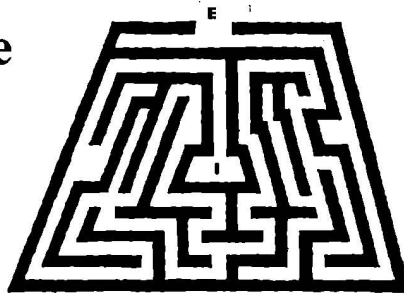
- a) A quelle heure ces trois autobus repartiront-ils ensemble pour la première fois de la gare Montparnasse?
- b) Combien de trajets chaque autobus aura-t-il alors accomplis?

Labyrinth-Probleme

eine alte Thematik
mit großer Aktualität

Teil 2

Bild 1



Aufgaben

(Hinweis: Man benutze Transparentpapier, das man auf die vorgegebenen Bilder der Labyrinth legt.)

▲1▲ Die Anweisungen des Tarryschen bzw. des Trémauxschen Verfahrens sollen in dem zuletzt erläuterten Sinne eindeutig verstanden werden. Man konstruiere den entsprechenden Tarry- bzw. Trémaux-Weg bei Start im Punkt I bis zum Erreichen des Ausgangs E

a) für das Labyrinth im Garten von Hampton Court (Bild 1),

b) für den Irrgarten von Altjeßnitz (Bild 2, siehe auch alpha 2/82).

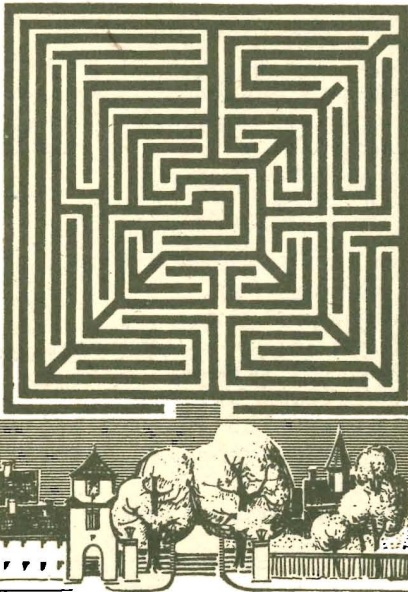


Bild 2

▲2▲ Die Außentür E des Labyrinths im Garten von Hampton Court sei geschlossen. Im Punkt I werde eine Maus ausgesetzt, die das Labyrinth

a) nach dem Verfahren von Tarry,

b) nach dem Trémauxschen Verfahren

(jeweils wie bei Aufgabe 1 in eindeutiger Weise) absucht.

An welcher Stelle des Labyrinths hätte man ein Stück Speck abzulegen, damit die Maus es möglichst spät findet?

c) Würde die Maus dann den Speck auch bei offener Außentür finden?

▲3▲ Wenn man den Bauplan eines Labyrinths vollständig kennt, so kann man sich einen guten Überblick über alle möglichen Wege zwischen zwei Punkten (etwa einem Startpunkt im Inneren des Labyrinths und einem Ausgang) verschaffen. Hierzu beschreibt man den zwischen ihnen bestehenden Zusammenhang durch einen Graphen. Als Knotenpunkt nimmt man die beiden vorgegebenen Punkte sowie alle von diesen aus erreichbaren Verzweigungspunkte des Labyrinths. Jedem Verbindungsgang zwischen diesen Punkten im Labyrinth entspricht eine Kante des Graphen. „Sackgassen“ oder „Schleifen“ werden gleich fortgelassen. Eine günstigere Anordnung der Knotenpunkte und Kanten und das Fortlassen weiterer offensichtlich unwesentlicher Details des Graphen erhöht die Übersichtlichkeit. Man konstruiere solche Graphen

a) für das Labyrinth im Garten von Hampton Court (Bild 1),

b) für das Labyrinth von Bild 3,

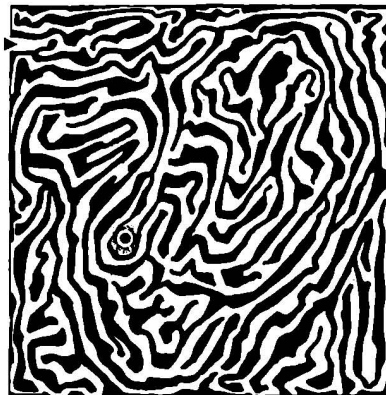


Bild 3

c) für den Irrgarten von Altjeßnitz (Bild 2).

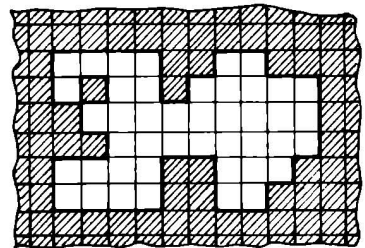
Mit ihrer Hilfe berechne man, auf wie vielen Wanderwegen man vom Inneren (Punkt I) des jeweiligen Labyrinths zum Ausgang gelangen kann, wenn bei keiner Wanderung ein Platz des Labyrinths mehrfach betreten werden darf.

3. Das Absuchen von Mustern

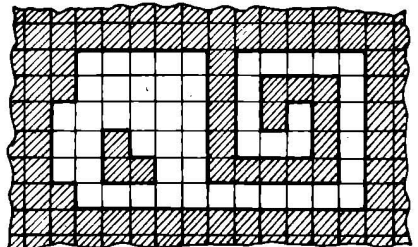
Es sollen nun neuere Untersuchungen zur Labyrinth-Problematik behandelt werden. Dabei wollen wir uns der besseren An-

schaulichkeit wegen auf die Betrachtung zweidimensionaler Labyrinth beschränken. Alle Plätze und Gänge eines solchen Labyrinths müssen also in einer Ebene liegen. Außerdem ist nun mit der zweiten Präzisierungsmöglichkeit für den Labyrinth-Begriff zu arbeiten; das sind die (zweidimensionalen) Muster.

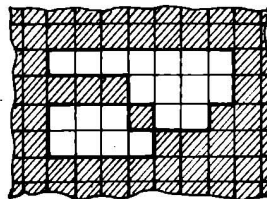
Unter einem Muster verstehen wir eine zusammenhängende endliche Zellenmenge der schachbrettartig zerlegten Ebene. Der Zusammenhang bedeutet hierbei, daß je zwei beliebige Zellen des Musters stets durch einen Weg miteinander verbunden sind, der nur Zellen des Musters durchläuft und bei dem nur Schritte in den vier Himmelsrichtungen (Norden: ↑, Westen: ←, Süden: ↓, Osten: →) erlaubt sind. Die Bilder 4a und b zeigen zwei einfache Muster (die Mengen der nicht schraffierten Zellen), während die Zellenmenge in Bild 4c nicht zusammenhängend ist.



a



b



c

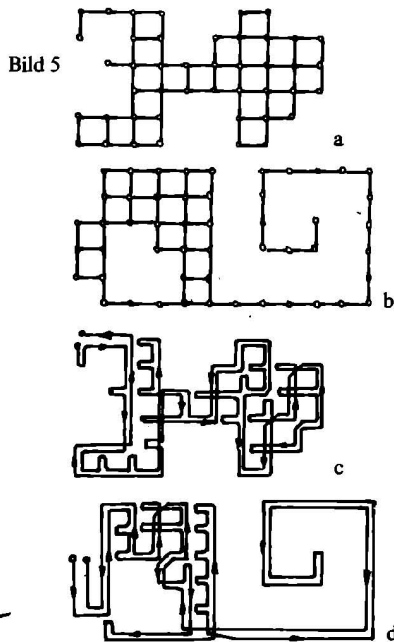
Bild 4

Jedem Muster kann man in natürlicher Weise einen ebenen zusammenhängenden endlichen Graphen zuordnen, indem man die Mittelpunkte der Zellen des Musters als Knotenpunkte nimmt und die Knoten zweier benachbarter Zellen des Musters überall durch eine Kante verbindet. Die Kanten entsprechen also den zwischen zwei Zellen des Musters liegenden Wänden, die man sich durchlässig (etwa mit Türen versehen) vorzustellen hat.

Die Bilder 5a und b zeigen die in dieser Weise aus den Mustern des Bildes 4 erhaltenen Graphen.

Vereinfachend gesagt, kann man Muster als spezielle endliche Graphen auffassen. Daher sind alle Lösungen des Absuchproblems für

endliche Graphen unmittelbar auf Muster übertragbar. Die für die Verfahren von Trémaux und Tarry nötigen Markierungen der Wände innerhalb eines Musters können dabei durch geeignete Beschriftungen der Zellen vorgenommen werden. Der Leser möge sich das an Beispielen verdeutlichen.



Die Bilder 5 c und d zeigen die in den Mustern des Bildes 4 erhaltenen Tarry-Wege, wobei wir bei mehreren erlaubten Bewegungsmöglichkeiten immer die erste in der Reihenfolge $\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow$ gewählt haben.

Interessant ist nun, daß man eine recht umfassende Klasse von Mustern schon in sehr einfacher Weise absuchen kann, ohne irgendeine Markierung vorzunehmen. Das entsprechende Programm, das wir jetzt betrachten wollen, wurde 1971 von dem westdeutschen Mathematiker C. Döpp veröffentlicht.

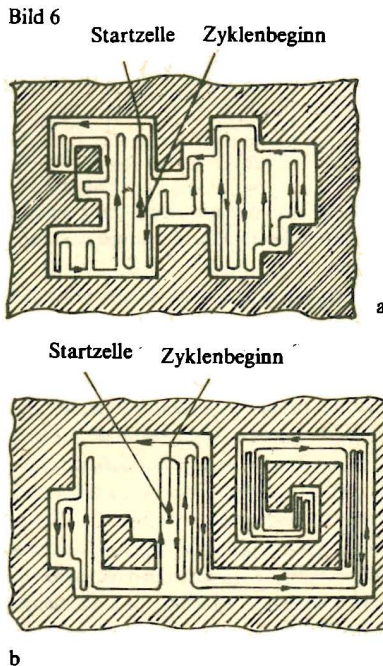
Verfahren von Döpp:

1. Gehe von der Startzelle aus nach Norden, bis der Rand des Musters erreicht ist! Handle weiter nach 2.!
2. Verfolge den Rand des Musters, so daß dieser dabei fechter Hand liegt! Immer wenn eine Zelle erreicht ist, deren südliche Nachbarzelle nicht zum Muster gehört, so handle gemäß 3.!
3. Gehe nach Norden, soweit das möglich ist, und kehre dann nach Süden zurück bis zu der Zelle, deren südlicher Nachbar nicht zum Muster gehört! Handle weiter nach 2.!

Um dieses Verfahren zu realisieren, muß von jeder Zelle des Musters aus zu sehen sein, welche ihrer vier Nachbarzellen noch zum Muster gehören. Damit ist das Verfolgen des Randes gemäß 2. und der immer wieder dazwischen durchzuführende Gang nach Norden und zurück gemäß 3. ausführbar. Allerdings gibt es bei diesem Verfahren keine Stop-

Bedingung, es bricht nie ab. Bei Anwendungen ist dieser Mangel jedoch oft nicht wesentlich. Sucht man das Muster (Labyrinth) etwa nach einem gewissen Merkmal ab (Minotaurus oder Ausgang), so kann das Verfahren ja bei Auffinden einer Zelle mit diesem Merkmal gewissermaßen künstlich gestoppt werden.

Das Bild 6 zeigt Beispiele von Wegen, die nach dem Döpp'schen Verfahren erhalten wurden. Sie führen alle sehr schnell zu einem Zyklus, der unendlich oft wiederholt wird.



Das Bild 6 b zeigt, daß nicht alle Muster auf diese Weise abgesucht werden können. Man kann sich aber überlegen, daß das Verfahren für alle einfach zusammenhängenden Muster erfolgreich ist.

Als einfach zusammenhängend bezeichnet man die Muster ohne Löcher bzw. ohne Binnenseen, wenn man sich einmal die Zellen des Musters als Landteile und die nicht zum Muster gehörenden Zellen als Wasser (Meer bzw. Seen) vorstellt. Dabei sind aber nur solche Gewässer als Binnenseen zu betrachten, die nicht mit dem das Muster umgebenden Ozean durch eine Wasserstraße verbunden sind. Wasserstraßen können hierbei auch „über Eck“ verlaufen, d.h. Wasser-Zellen mit gemeinsamem Eckpunkt gelten als benachbart. In diesem Sinne ist das Muster in Bild 4 a einfach zusammenhängend, das in Bild 4 b aber nicht.

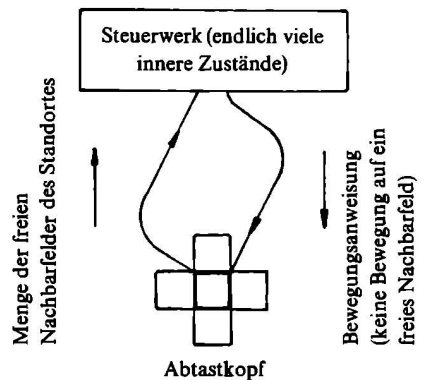
4. Endliche Automaten in Mustern

Es ist bisher in unseren Überlegungen noch ziemlich offengelassen worden, durch wen die angegebenen Absuchverfahren zu realisieren sind, d.h., wer die Labyrinth absuchen soll. Der Leser mag sich Theseus in dieser Rolle vorgestellt haben oder einen beliebigen in ein Labyrinth geratenen Menschen. Beim Aus-

probieren der Verfahren ist das Absuchen eines Graphen oder Musters natürlich mit dem Bleistift auf dem Papier durchzuführen. Die modernen Labyrinth-Untersuchungen im Rahmen der mathematischen Kybernetik betreffen die Frage, inwieweit Graphen oder Muster durch Automaten der verschiedensten Typen abgesucht werden können. Wir werden im folgenden bei der Erläuterung dieser Problematik vorwiegend Muster als Labyrinth zugrunde legen.

Den einfachsten zum Absuchen von Mustern geeigneten Typ von Automaten stellen die endlichen Automaten dar. In Bild 7 ist ein solcher endlicher Automat skizziert.

Bild 7



Er besteht aus einem in dem Muster beweglichen Abtastkopf, der mit einem Steuerwerk verbunden ist. Dieses System arbeitet schrittweise. Zu jedem Zeitpunkt steht der Abtastkopf auf einer Zelle des vorgegebenen Musters, und er informiert das Steuerwerk darüber, welche der Nachbarzellen des Standortes noch zum Muster gehören. In Abhängigkeit von dieser Information über das Muster und in Abhängigkeit von dem inneren Zustand des Steuerwerks erfolgt nun eine Anweisung über die durchzuführende Bewegung des Abtastkopfes. Es wird entweder angewiesen, daß er auf seinem Standort verharrt oder daß er sich um eine Zelle in Richtung Norden, Westen, Süden bzw. Osten in dem Muster weiterbewegt. Gleichzeitig kann sich auch der Zustand des Steuerwerks ändern, was ebenfalls durch die vom Abtastkopf gegebene Information über das Muster und durch den (alten) Zustand des Steuerwerks eindeutig festgelegt ist. Nach Ausführung der Bewegung des Abtastkopfes und der Zustandsänderung ist ein Arbeitsschritt des Automaten realisiert, und das Ganze beginnt von vorn. Wesentlich ist noch, daß das Steuerwerk nur endlich viele mögliche innere Zustände haben darf, daher die Bezeichnung „endlicher Automat“.

Uns interessiert hier nicht die technische Realisierung eines solchen Systems. Mathematisch ist ein endlicher Automat eindeutig festgelegt durch die Angabe der endlichen Menge aller möglichen inneren Zustände, die

z	↑, z	←, y	↑, z	↑, z	↑, z	0, y	↑, z	↑, z
y	←, y	←, y	0, y	←, y	←, y	0, y	0, y	←, y

z	←, y	←, y	↑, z	0, y	↑, z	←, y	0, y	0, y
y	←, y	←, y	0, y	0, y	0, y	←, y	0, y	0, y

Bild 8

Festlegung eines solchen Zustandes als Anfangszustand (hiermit startet der Automat stets) und durch seine Überführungstabelle. Letztere gibt an, mit welcher Zustandsänderung und Bewegungsanweisung das Steuerwerk in den einzelnen Zuständen auf die im Labyrinth (in der Nachbarschaft des Abtastkopfes) vorliegende Situation reagiert.

Als Beispiel betrachten wir den endlichen Automaten mit der Zustandsmenge $Z = \{z, y\}$, dem Anfangszustand z und der in Bild 8 angegebenen Überführungstabelle. Dabei geben die Pfeile $\uparrow$, $\leftarrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$ die Bewegungsanweisungen in die entsprechenden Richtungen an, 0 bedeutet Verharren auf dem Standort.

Der damit vollständig beschriebene endliche Automat geht stets von seinem Startpunkt aus (im Zustand z) nach Norden, solange das möglich ist. Gehört die nördliche Nachbarzelle seines Standortes nicht mehr zum Muster, so nimmt er den Zustand y an und geht nun nach Westen, solange das möglich ist. Erreicht er dabei eine Zelle, deren westlicher Nachbar nicht zum Muster gehört, so verändert er seinen Zustand y und Standort nicht mehr, d. h., er stoppt. Bild 9 zeigt zwei mögliche Wege des Automaten in einem Muster.

Durch einen solchen endlichen Automaten kann man das Döppsche Absuchverfahren realisieren. Allerdings benötigt man hierfür mehr als zwei innere Zustände des Steuer-

werks, und es ist schon nicht ganz einfach, eine entsprechende Überführungstabelle aufzustellen.

Jedenfalls ist es auf diese Weise prinzipiell möglich, einen endlichen Automaten zu konstruieren, der alle einfach zusammenhängenden Muster absucht. Es stellt sich sofort die Frage, ob es einen endlichen Automaten gibt, der jedes Muster absucht, wenn er auf einer beliebigen Zelle startet. Schon Döpp vermutete 1971, daß die Antwort „nein“ lautet, konnte das aber nicht beweisen. Der Beweis dieser Behauptung wurde 1975 von L. Budach (Professor an der Humboldt-Universität zu Berlin und ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften der DDR) erbracht. Er zeigte, daß sich zu jedem endlichen Automaten ein Muster konstruieren läßt, in dem es eine Zelle gibt, so daß der Automat bei Start auf dieser Zelle das Muster nicht vollständig absucht. Das Absuchproblem für Muster ist also nicht durch einen endlichen Automaten (d. h. einen Automaten mit endlichem Gedächtnis, der keine Hilfsmarkierungen in den Mustern setzen darf) lösbar. Das ist das bisher tiefiegendste und am schwierigsten zu beweisende Resultat zur Labyrinth-Problematik.

Die entsprechende Frage für endliche Graphen ist übrigens wesentlich leichter zu beantworten. Dazu ist der Begriff des endlichen Automaten zunächst natürlich etwas abzu-

wandeln; der Abtastkopf hat sich dann ja in einem Graphen zu bewegen. Schon 1971 zeigte H. Müller (Professor an der Universität Erlangen-Nürnberg), daß es keinen solchen endlichen Automaten gibt, der jeden ebenen zusammenhängenden endlichen Graphen absucht.

(Fortsetzung im nächsten Heft)

Der Autor: A. Hemmerling



- geboren 1948 in Grambow bei Schwerin
- Besuch der OS und EOS in Lübz, Bezirk Schwerin;
- Teilnahme an Kreis- und Bezirks-mathematikolympiaden;
- während des EOS-Besuchs auch Fach-arbeiterausbildung als Landmaschinen- und Traktorenschlosser
- 1966 bis 1973 Mathematikstudium an der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald; 1970 bis 1973 Forschungsstudent in der Fachrichtung Mathematische Kybernetik und Rechentechnik
- 1974 Promotion A (Dr. rer. nat.)
- 1980 Erteilung der *Facultas docendi* (Lehrbefähigung an Hochschulen) für das Fachgebiet Mathematische Kybernetik
- 1981 Promotion B (Dr. sc. nat.)
- arbeitet als wissenschaftlicher Ober-assistent an der Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- Forschungsgebiet: Automaten- und Algorithmentheorie, insbesondere Fragen des Leistungsvermögens spezieller Automaten; bisher etwa 20 wissenschaftliche Arbeiten
- verheiratet, Vater von zwei Kindern (Tochter und Sohn).

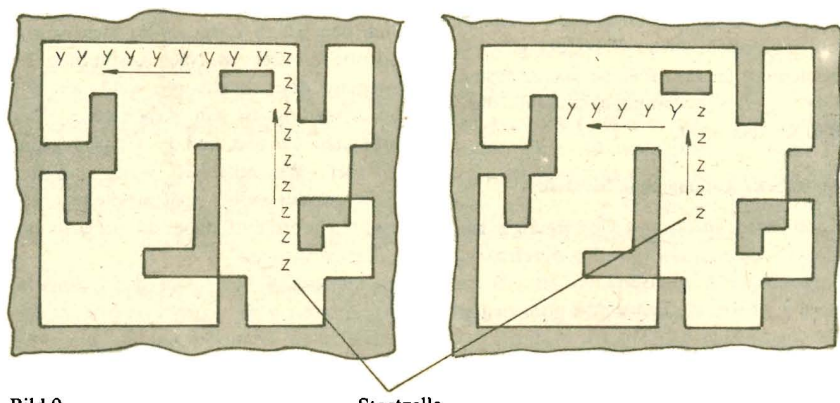
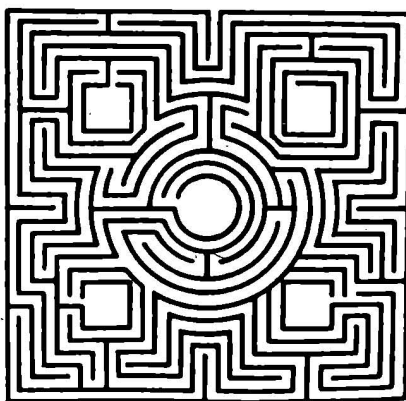


Bild 9

Startzelle



Eine Aufgabe – drei Lösungsvarianten

Gedanken zum Titelblatt

Die Aufgabe, von einem Punkt P außerhalb eines Kreises k die Tangenten t_1 und t_2 an diesen Kreis zu legen, ist geometrisch auf verschiedene Weise lösbar.

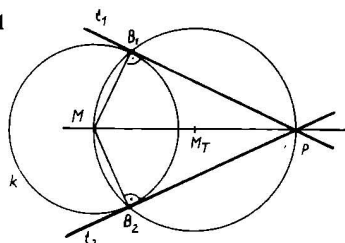
Auf der Titelseite ist eine Kombination aus drei verschiedenen Varianten zur Lösung dieser Aufgabe dargestellt.

Variante 1

Die hier als Variante 1 bezeichnete Lösung ist bereits seit dem 16. Jahrhundert bekannt und auch im Lehrbuch der Mathematik, Klasse 7, beschrieben.

Konstruktion:

Bild 1



Man verbindet P und M , halbiert die Strecke $\overline{PM}$ und findet so den Punkt M_T , um den man einen Kreis mit $r = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM}$ schlägt. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die gesuchten Berührungspunkte B_1 und B_2 der Tangenten t_1 und t_2 .

Beweis: Der Satz des Thales besagt, daß alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises rechte Winkel sind. Die Winkel $\angle MB_1P$ und $\angle MB_2P$ sind Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{PM}$, d.h., sie betragen 90° . Deshalb sind B_1 und B_2 die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2 .

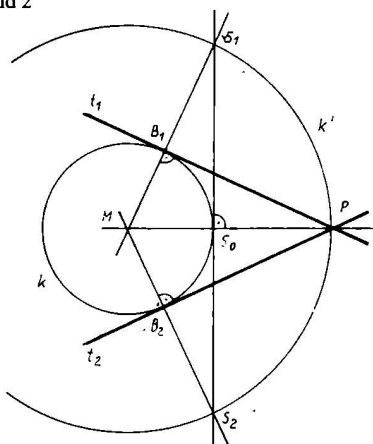
Variante 2

Diese Variante beinhaltet eine Lösung, die etwa 2000 Jahre älter ist als die Lösung nach Variante 1.

Konstruktion:

Man zeichnet die Strecke $\overline{MP}$ und errichtet im Schnittpunkt S_0 dieser Strecke mit dem Kreis k die Senkrechte auf $\overline{MP}$. Danach schlägt man um M einen Kreis k' mit dem Radius $\overline{MP}$. Er schneidet die Senkrechte auf $\overline{MP}$ in den Punkten S_1 und S_2 . Wenn man S_1 und S_2 mit M verbindet, erhält man die Schnittpunkte B_1 und B_2 mit dem Kreis k .

Bild 2



Das sind die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2 .

Beweis: Die Dreiecke $\triangle MS_0S_1$ und $\triangle MS_0S_2$ sind kongruent, da sie in zwei Seiten ($\overline{MS_0} = \overline{MS_0}$ und $\overline{MS_1} = \overline{MS_2}$) und dem Winkel, der der größeren von ihnen gegenüberliegt, übereinstimmen ($\angle MS_0S_1 = \angle MS_0S_2 = 90^\circ$). Daraus folgt $\angle S_0MS_1 = \angle S_0MS_2$.

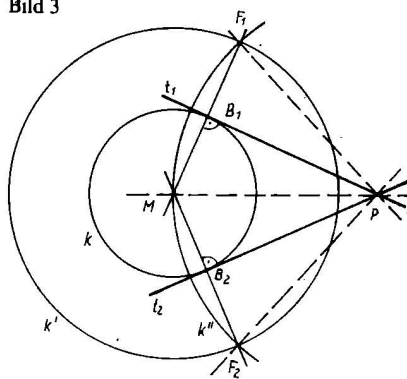
Wegen $\overline{MB_1} = \overline{MB_2}$, $\overline{MP} = \overline{MP}$ und $\angle PMB_1 = \angle PMB_2$ gilt $\triangle MPB_1 \cong \triangle MPB_2$. Wegen $\overline{MS_0} = \overline{MB_1} = \overline{MB_2}$ und $\overline{MP} = \overline{MS_1} = \overline{MS_2}$ sind alle vier Dreiecke $\triangle MS_0S_1$, $\triangle MS_0S_2$, $\triangle MPB_1$, $\triangle MPB_2$ einander kongruent. Deshalb haben auch die Winkel $\angle MB_1P$ und $\angle MB_2P$ die Größe 90° . Somit sind B_1 und B_2 die gesuchten Berührungspunkte der von P an den Kreis k gelegten Tangenten t_1 und t_2 .

Variante 3

Variante 3 ist eine Lösung, die erst im 19. Jahrhundert gefunden wurde.

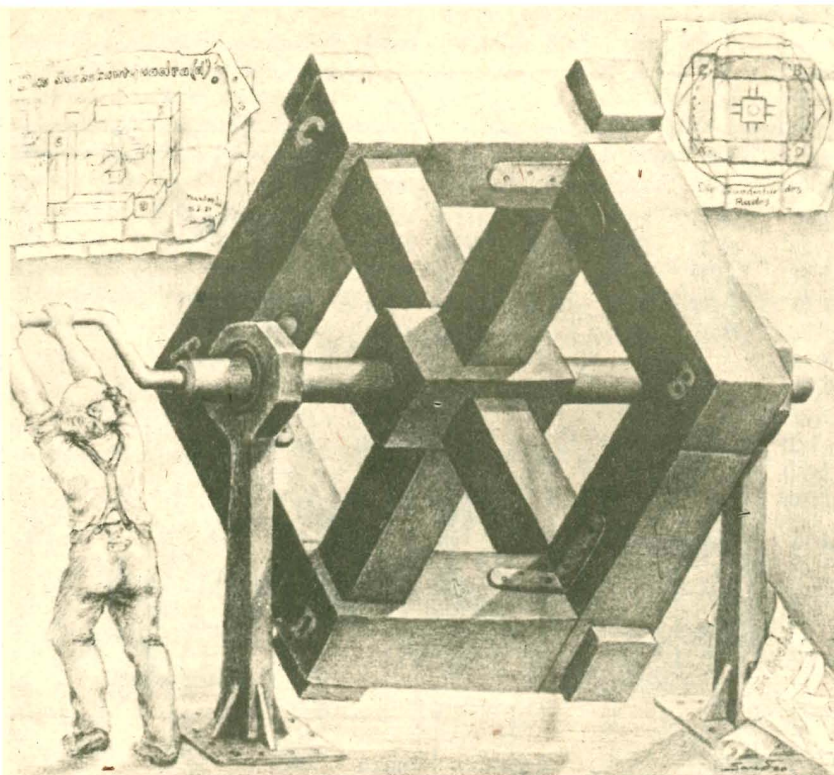
Konstruktion:

Bild 3



Man zeichnet zu dem gegebenen Kreis k einen konzentrischen Kreis k' mit dem Radius $R = 2r$ und einen Kreis k'' um P mit dem Radius $\overline{PM}$. Die Schnittpunkte F_1 und F_2 der Kreise k' und k'' verbindet man mit M und erhält so die Punkte B_1 und B_2 auf dem in der Aufgabenstellung gegebenen Kreis k . Das sind die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2 .

Beweis: Die Strecken $\overline{MF_1}$ und $\overline{MF_2}$ sind Sehnen des Kreises k' , deren Länge $2r$ beträgt. Nach Konstruktion gilt $\overline{MB_1} = \overline{B_1F_1} = \overline{MB_2} = \overline{B_2F_2} = r$. Wegen $\overline{PM} = \overline{PF_1} = \overline{PF_2}$ sind die Dreiecke $\triangle MPF_1$ und $\triangle MPF_2$ gleichschenkelig. Die Strecke $\overline{PB_1}$ bzw. $\overline{PB_2}$ ist somit Seitenhalbierende der Basis $\overline{MF_1}$ bzw. $\overline{MF_2}$. Folglich sind die Strecken $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ auch Höhen, d.h., die Winkel $\angle MB_1P$ und $\angle MB_2P$ haben die Größe 90° . Deshalb sind B_1 und B_2 die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2 . M. Wilde



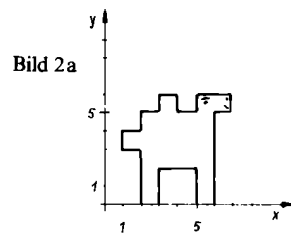
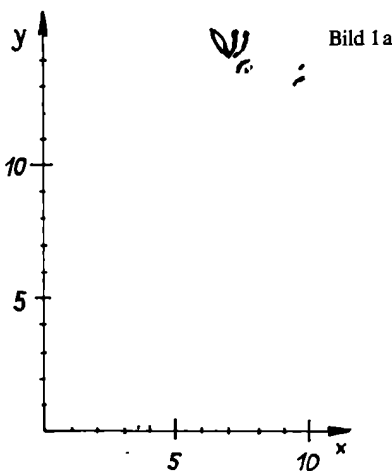


Interessante Koordinaten

▲ 1 ▲ Stelle folgende Zahlenpaare in dem Koordinatensystem Bild 1a (bzw. Bild 1b) dar!

Verbinde jeweils die Punkte im Koordinatensystem, deren Zahlenpaare untereinander stehen!

- a)
- | | | | |
|----------|---------|--------|--------|
| (8; 0) | (7; 14) | (1; 4) | (3; 0) |
| (8; 13) | (7; 5) | (1; 2) | (3; 2) |
| (10; 13) | (0; 5) | (2; 2) | (7; 2) |
| (10; 14) | (0; 4) | (2; 0) | (7; 0) |



b) Vervollständige!

- | | | | | |
|--------|--------|---------|--------|-------|
| (6; 3) | (;) | (6; 6) | (8; 6) | (;) |
| (2; 3) | (;) | (10; 6) | (8;) | (;) |
| (;) | (;) | | √(;) | |
| (;) | (;) | | √(;) | |
| (;) | (; 3) | | | |
| (;) | (6; 3) | | | |

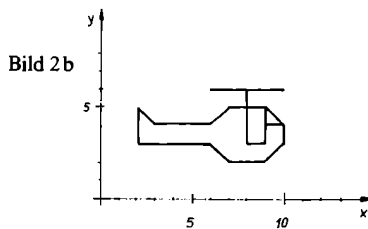
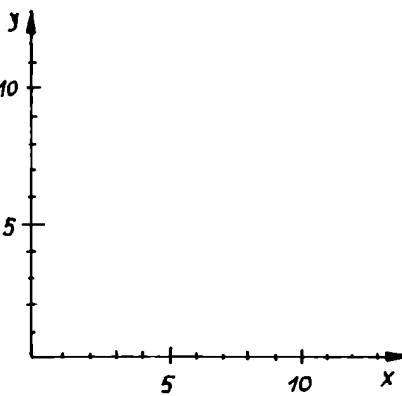


Bild 1a



- b)
- | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|---------|
| (2; 0) | (3; 1) | (5; 1) | (8; 0) | (11; 1) |
| (2; 2) | (3; 2) | (5; 2) | (8; 2) | (11; 2) |
| (3; 3) | (4; 2) | (6; 2) | (9; 2) | (12; 2) |
| (7; 3) | (4; 1) | (6; 1) | (9; 0) | (12; 1) |
| (7; 7) | (3; 1) | (5; 1) | | (11; 1) |
| (8; 10) | | | | |
| (9; 7) | | | | |
| (9; 3) | | | | |
| (13; 3) | | | | |
| (14; 2) | | | | |
| (14; 0) | | | | |

▲ 2 ▲ a) Vervollständige!

- | | | |
|--------|--------|--------|
| (2; 0) | (;) | (3; 0) |
| (2; 3) | (;) | (;) |
| (;) | (;) | (;) |
| (;) | (;) | (;) |
| (;) | (;) | |
| (;) | (;) | |
| (;) | (;) | |
| (;) | (;) | |
| (;) | (;) | |
| (;) | (6; 0) | |

▲ 3 ▲ Vervollständige!

- | | | |
|---------|--------|---------|
| (5; 0) | (;) | (;) |
| (1; 5) | (;) | (;) |
| (;) | (8; 5) | (10; 7) |
| (2; 6) | (8; 4) | (10; 2) |
| (2; 5) | (7; 4) | (5; 2) |
| (;) | (;) | |
| (5; 8) | (9; 6) | |
| (11; 8) | (9; 3) | |

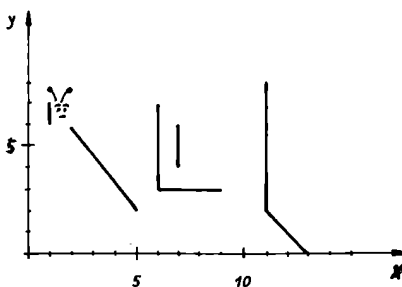
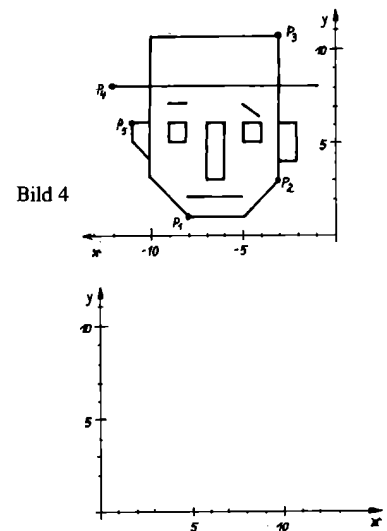


Bild 3

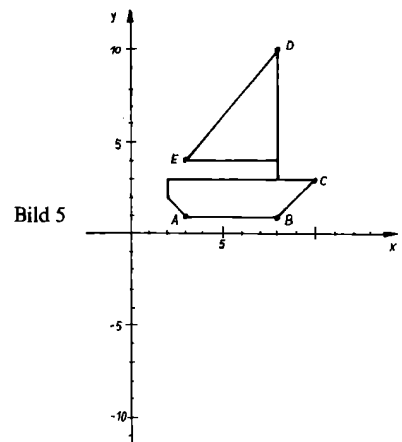
▲ 4 ▲ Spiegle an der y-Achse!

Gib die Koordinaten der Punkte P_1' , P_2' , P_3' , P_4' und P_5' an!



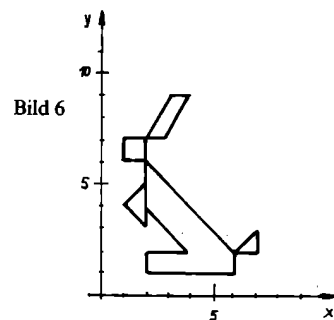
▲ 5 ▲ Spiegle an der y-Achse!

Gib die Koordinaten der Punkte A' , B' , C' , D' , E' an!



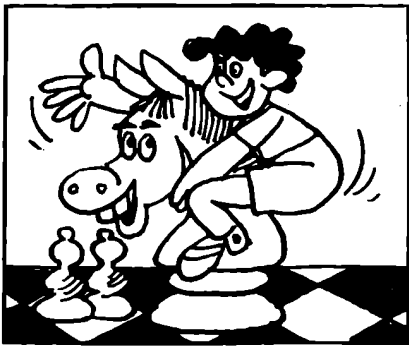
▲ 6 ▲ a) Gib die kleinsten Werte für a , b so an, daß für alle y -Werte der Figur (vgl. Bild 6) gilt $a \leq y \leq b$!

b) Gib die kleinsten Werte für c , d an, so daß für alle y -Werte der Figur (vgl. Bild 6) gilt $c \leq x \leq d$!



L. Flade/J. Lehmann

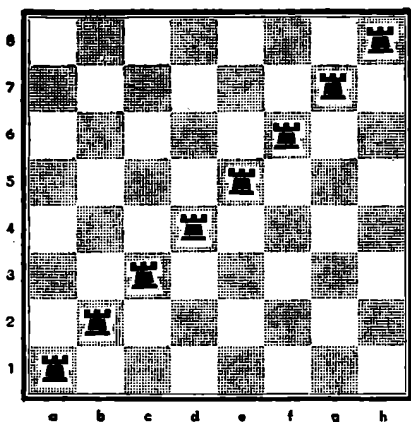
(nach Unterlagen aus dem ungarischen Unterhaltungsbuch Vigyazat! Csak gyerekeknek, Eva Gall)



Ein Beweis von Leonhard Euler

Der Turm ist im Schachspiel eine mächtige Kampfeinheit. Er ist stärker als Läufer oder Springer. Sein Wert entspricht etwa fünf Bauern. Der Turm ist eine weitreichende und wendige Figur. Dabei zeichnet er sich durch eine interessante Besonderheit aus: Die Anzahl der Felder, die er auf dem leeren Schachbrett beherrscht, hängt nicht von seinem Standort ab. Ob der Turm in der Ecke oder in einem der Mittelfelder des Brettes steht, immer sind es vierzehn Felder.

Wie kann man auf dem leeren Schachbrett Türme so aufstellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können, das heißt, daß je zwei Türme in verschiedenen Reihen und verschiedenen Linien stehen? Es ist einleuchtend, daß man acht Türme auf diese Weise auf dem Schachbrett postieren kann (beispielsweise so, daß man die Türme auf irgendeine Diagonale des Brettes setzt – siehe Diagramm), mehr jedoch als acht nicht.



Schachspielereien

Hans Betcke, aus: DLZ 22/83

„Damen-Indisch“



Euler bewies 1741 eine Aufgabe, die ihm sein Freund Goldbach gestellt hatte. Hier ist zunächst Eulers Antwort auf Goldbachs Brief mit dem gestellten Problem:

„Ew. (Euer) Hochedelgeb. theorema, daß $(3m+2)n^2+3$ kein Quadrat sein könne, ist sehr artig, und ich kann die Richtigkeit desselben auf folgende Art dartun:

Entweder ist n durch 3 divisibel (teilbar) oder nicht, im ersten Fall ist n^2 divisibel durch 9, und bekommt die Expression $(3m+2)n^2+3$ eine solche Form $9p+3$, welche kein Quadrat sein kann, wie bekannt. Im anderen Fall, wann n nicht durch 3 divisibel ist, so ist n^2 eine solche Zahl $3p+1$, und $(3m+2)n^2+3$ bekommt diese Form $9mp+3m+6p+5$, das ist $3q+2$, von welcher Form gleichfalls bekannt ist, daß eine solche niemals ein Quadrat sein kann.“

Wir erläutern den Beweis, wozu wir $(3m+2)n^2+3$ gleich N setzen (m, n natürliche Zahlen). Euler unterscheidet zwei Fälle:

Wir fragen, auf wieviel verschiedene Weisen man acht Türme so auf dem leeren Schachbrett anordnen kann, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können? Dabei ist zu bemerken, daß wir die Anordnungen der Türme auf a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7, h8 (unser Beispiel) und auf a8, b7, c6, d5, e4, f3, g2, h1, das heißt, solche Anordnungen, die sich auseinander durch Drehung des Brettes beziehungsweise durch Spiegelung gewinnen lassen, als verschieden ansehen.

H. Rüdiger

„Spanische Eröffnung“



a) 3 teilt n ,

b) 3 teilt n nicht.

Eine einfache Folgerung aus der Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren ist folgende Aussage: Wenn Q eine Quadratzahl ist, dann enthält Q alle Primteiler in gerader Potenz.

Im ersten Fall hat, da sich n^2 durch 9 teilen lassen muß, N die Form $N=9p+3$ mit gewissem p (p natürliche Zahl). Da 3 natürlich 9 teilt, folgt hieraus, daß 3 auch ein Teiler von N ist. Wenn wir aber annehmen, daß N eine Quadratzahl ist, dann muß neben 3 auch $3^2=9$ ein Teiler von N sein. Weil weiterhin 9 offensichtlich in $9p$ aufgeht, muß 9 auch die Differenz $N-9p$ teilen. Diese ist aber gleich 3, also nicht durch 9 teilbar. Mithin muß unsere Annahme falsch sein, N könne eine Quadratzahl sein.

Im zweiten Fall hat n die Form $3r+1$ oder $3r+2$ ($r=0, 1, 2, \dots$). Damit ist n^2 von der Gestalt $9r^2+6r+1$ oder $9r^2+12r+4$ bzw. $3(3r^2+2r)+1$ oder $3(3r^2+4r+1)+1$ ist, also für beide Möglichkeiten mit einem gewissen p von der Art $3p+1$. Damit ergibt sich für N die Form $3q+2$ mit einer bestimmten natürlichen Zahl q . Um zu zeigen, daß $N=3q+2$ keine Quadratzahl sein kann, untersuchen wir zunächst allgemein, welche Reste eine Quadratzahl beim Teilen durch 3 lassen kann. Jede natürliche Zahl z kann mit einer gewissen Zahl r in der Form $z=3r+s$ dargestellt werden, wobei für s die Zahlen 0, 1 und 2 in Frage kommen. Damit ergibt sich

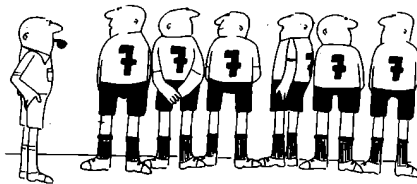
$z^2=9r^2+6rs+s^2=3(3r^2+2rs)+s^2$ mit s^2 gleich 0, 1 oder 4. Der Ausdruck $3(3r^2+2rs)$ ist durch 3 teilbar, so daß sich das Verhalten des Restes aus dem Charakter von s^2 bestimmt. Die Reste, die s^2 beim Teilen durch 3 läßt, sind 0 und 1, wie man leicht nachprüft. Mithin kann eine Quadratzahl beim Teilen durch 3 nur den Rest 0 (teilbar) oder 1 lassen. Eine Quadratzahl der Form $N=3q+2$ würde aber beim Teilen durch 3 als Rest 2 liefern, was nicht möglich ist. Also kann auch im zweiten Fall N keine Quadratzahl sein. Mithin ist es ausgeschlossen, daß N Quadratzahl sein kann.

Mitgeteilt von Dr. R. Thiele,
S. Hirzel-Verlag, Leipzig

„Zugzwang“



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1984

„Das ist unsere Glückszahl!“

Mathematik

Ma 5 ■ 2350 Ein Obstgarten, der die Form eines Rechtecks hat, ist halb so breit wie lang. Er wird von einem 210 m langen Zaun umgeben. Welchen Flächeninhalt besitzt dieser Obstgarten?

Schülerin Janett Stynka, Rostock

Ma 5 ■ 2351 Zu einer Schulklasse gehören genau 36 Schüler, die zusammen 703 Buntstifte besitzen. Ernst hat zwei Buntstifte mehr als Christine. Dieter hat einen Buntstift weniger als Bernd, Frank elf weniger als Dieter, Bernd zwei weniger als Anja, Christine fünf mehr als Bernd. Anja besitzt genau 19 Buntstifte. Wie viele Buntstifte besitzt jeder der nicht genannten Schüler, wenn alle diese Schüler gleich viele Buntstifte haben?

Schülerin Ina Stöckigt, Weißenschirmbach

Ma 5 ■ 2352 Von Berlin-Treptow aus machen Fahrgastschiffe der *Weißten Flotte* Seerundfahrten mit Ausflüglern und Touristen. An einer solchen Fahrt nahmen insgesamt 120 Fahrgäste teil, und zwar viermal soviel Kinder wie Frauen. Die Anzahl der mitfahrenden Frauen und Kinder war insgesamt siebenmal so groß wie die der Männer. Wieviel Kinder, Frauen bzw. Männer nahmen an dieser Seerundfahrt teil?

Sch.

Ma 5 ■ 2353 In dem Schema

$$\begin{array}{r} 1* \cdot 3*2 \\ \hline 3* \\ 3*2* \\ \hline *2*5 \\ \hline ****3* \end{array}$$

sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Sch.

Ma 5 ■ 2354 Von zwei leeren Gefäßen weiß man: Das größere dieser beiden Gefäße ist doppelt so schwer wie das kleinere. Füllt man in das kleinere Gefäß 400 g Zucker und in das größere 200 g, so ist das gefüllte kleinere Gefäß um 50 g schwerer als das gefüllte größere Gefäß. Wie schwer sind die beiden leeren Gefäße?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2355 Zeichne ein Quadrat! Lege auf jeder Quadratseite den Mittelpunkt fest! Verbinde diese vier Mittelpunkte zu einem zweiten Quadrat! Du zählst nun vier Dreiecke und zwei Quadrate. Lege auf jeder Seite dieses zweiten Quadrates wieder die Mittelpunkte fest, verbinde auch diese Punkte zu einem dritten Quadrat!

a) Wieviel Dreiecke hast du bis jetzt erhalten?

b) Jemand bildet auf diese Weise immer wieder neue Quadrate.

Zum Schluß zählt er genau 176 Dreiecke. Wieviel Quadrate zählt er?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2356 Ina, nach dem Lebensalter ihrer drei Geschwister befragt, antwortet: „Multipliziert man die Zahlen, die das Lebensalter meiner drei Geschwister angeben, miteinander, so erhält man 24. Addiert man diese drei Zahlen, so erhält man eine Primzahl.“ Wie alt sind Inas Geschwister (in ganzen Zahlen)?

Schülerin Yvonne Lucke, Halle-Neustadt

Ma 6 ■ 2357 In einem Saal, in dem ein Kongreß abgehalten werden sollte, waren mehr als 90, aber weniger als 100 Stühle aufgestellt. Es erschienen aber mehr Kongreßteilnehmer als Stühle vorhanden waren. Die Anzahl der Stühle wurde deshalb verdoppelt. Nun blieb der zwölfte Teil der Anzahl der vorhandenen Stühle unbesetzt. Wie viele Teilnehmer waren zum Kongreß angereist?

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 2358 Eine Klasse schrieb im Fach Mathematik eine Leistungskontrolle. Genau eine Aufgabe wurde von dem achten Teil, genau zwei Aufgaben von dem dritten Teil, genau vier Aufgaben von dem sechsten Teil der Anzahl der teilnehmenden Schüler nicht gelöst. Wieviel Schüler lösten genau eine Aufgabe richtig, wenn nur ein Schüler der Klasse die Arbeit fehlerlos abgab und der Klasse weniger als 30 Schüler angehören?

Schülerin Barbara Schütze, Weißenfels

Ma 6 ■ 2359 Otto geht für seine Mutter einkaufen. Den fünften Teil des von der Mutter erhaltenen Geldes gibt er für Fleischwaren aus. Für den zehnten Teil des erhaltenen Geldes kauft er Obst. Für Backwaren gibt Otto doppelt soviel Geld aus wie für Fleischwaren. Für Blumen gibt er genausoviel Geld aus wie für Obst. Vom erhaltenen Gelde hatte Otto danach noch 10 M übrig. Wieviel Mark hatte Otto von seiner Mutter zum Einkaufen erhalten?

Schülerin Anja Rosenbusch, Meiningen

Ma 6 ■ 2360 Welche natürliche Zahl läßt bei Division durch 11 den Rest 1, durch 12 den Rest 2, durch 13 den Rest 3 und durch 14 den Rest 4?

Schüler Thomas Kuschel, Prenzlau

Ma 7 ■ 2361 Welche natürlichen Zahlen a, b, c mit $0 < a < b < c$ erfüllen folgende Bedingungen?

- (1) Die zweite dieser drei Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden anderen Zahlen.
- (2) Die fünffache Summe aus diesen drei Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen Zahlen.

Sch.

Ma 7 ■ 2362 Gegeben sind die Punkte A, B, C und D , die alle auf ein und derselben Geraden g liegen. Außerdem gilt:

Die Länge der Strecke AB beträgt 3 cm, die der Strecke AC 4 cm, und die Strecke AD ist 6 cm lang. Die Punkte B und C liegen zwischen den Punkten A und D .

Es sind alle Punkte P_i ($P_1, P_2, P_3, \dots$) zu konstruieren, die sämtlich folgenden Bedingungen genügen:

- (1) Die Punkte P_i sind gleich weit von A und C oder von B und D entfernt.
- (2) Die Punkte P_i haben von C einen Abstand von 3 cm.

Fr.

Ma 7 ■ 2363 Ein Rechteck habe die Seitenlängen a und b . Der Flächeninhalt eines Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat, ist durch die Längen a und b auszudrücken!

Sch.

Ma 7 ■ 2364 Addiert man zu einer dreistelligen natürlichen Zahl, deren erste und letzte Ziffer übereinstimmen, ihre Quersumme, so erhält man als Ergebnis 500. Um welche Zahl handelt es sich?

Sch.

Ma 8 ■ 2365 Es ist zu beweisen, daß der Term $n^2(5+n^2)$ für jede natürliche Zahl n eine gerade Zahl ist.

Daniel Küpper, Wirtzfeld, Belgien

Ma 8 ■ 2366 Es sind alle geordneten Paare $(a; b)$ rationaler Zahlen a und b mit folgenden Bedingungen zu ermitteln:

- a) Die Summe der Quadrate der Zahlen a und b ergibt 176,5.
- b) Die Differenz der Quadrate der Zahlen a und b ergibt 136.

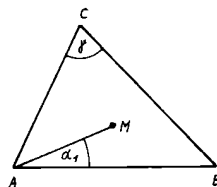
Gerald Wunsch, Berlin

Ma 8 ■ 2367 Wie viele verschiedene sechsstellige natürliche Zahlen kann man mit den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7, 9 bilden? (Es muß in jeder Zahl jede der sechs Ziffern genau einmal vorkommen!) Wie viele dieser Zahlen sind durch 3, wie viele durch 9 teilbar? Das Ergebnis ist zu beweisen.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■ 2368 In dem abgebildeten Dreieck ABC wurde der Eckpunkt A mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten verbunden. Es ist die Gültigkeit der Beziehung $\alpha_1 = 90^\circ - \gamma$ zu beweisen.

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg



Ma 9 ■ 2369 Die Zahl 315 soll in die Differenz zweier Quadratzahlen zerlegt werden. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.

Schüler Jörg Uhlig, Crimmitschau

Ma 9 ■ 2370 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 ist in eine Summe von zwei Primzahlen p_5, p_6 zerlegbar, die beide in jeder achtstelligen Zahl der Form $\overline{abcdabcd}$ (dekadische Darstellung) ohne Rest aufgehen. Es sind die Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_6$ zu ermitteln.

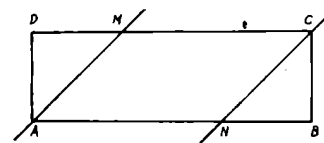
Gerald Wunsch, Berlin

Ma 9 ■ 2371 Zur Jugendweihe erwartet Ilka 24 Gäste. Beim Eintreffen begrüßen sie sich untereinander und auch Ilka mit einem Händedruck. Unter den Gästen sind drei Ehepaare ohne Kinder, eine vier- und eine fünfköpfige Familie, die sich natürlich bei der Ankunft nicht jeweils untereinander begrüßen. Wieviel Händedrucke sind gegeben worden, nachdem alle Gäste eingetroffen waren?

Schülerin Claudia Paschwitz, Räckelwitz

Ma 9 ■ 2372 In dem abgebildeten Rechteck $ABCD$ halbiert die Gerade durch A den Winkel $\angle DAB$. Die Gerade durch C ist parallel zur Geraden durch A . Wie lang und wie breit ist das Rechteck $ABCD$, wenn die Strecke AM 2,5 cm lang ist und der Abstand beider Geraden 3 cm beträgt?

Skizze, nicht maßstäblich!



Mathematiklehrer K. Gorki, Zittau

Ma 10/12 ■ 2373 In welchem Zahlensystem stellt die Gleichung

$$42 + 242 = 16^2$$

eine wahre Aussage dar?

Schüler B. Leifheit, Heiligenstadt

Ma 10/12 ■ 2374 Die Zahl 115 ist derart in positive Summanden zu zerlegen, daß jeder folgende Summand um 6 größer ist als der vorhergehende.

Sch.

Ma 10/12 ■ 2375 Gegeben seien eine Kugel K und ein Würfel W mit gleich großen Volumina.

- (1) Es ist zu zeigen, daß das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider räumlicher Figuren unabhängig von der Radiuslänge der Kugel und der Kantenlänge des Würfels ist.
- (2) Es ist die Maßzahl x für dieses Verhältnis zu berechnen, wenn $A_K : A_W = 1 : x$ gilt.

Klaus Behnke, Schwerin

Ma 10/12 ■ 2376 Zwei einander berührenden Kugeln von 8 cm bzw. 10 cm Durchmesser soll ein gerader Kreiskegel umschrieben werden. Es sind die Länge des Grundkreisradius und die Länge der Höhe dieses Kegels zu ermitteln.

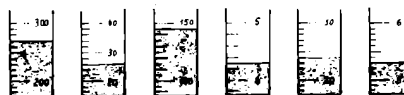
Schüler J. Uhlig, Crimmitschau

Physik

Ph 6 ■ 141 In den folgenden Abbildungen siehst du die Skalen verschiedener Meßzylinder (Angaben in ml).

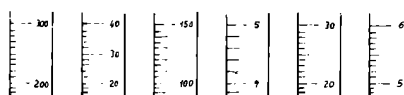
a)

Lies die angegebenen Flüssigkeitsstände ab!



b)

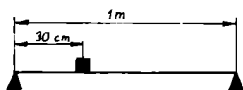
Trage die Flüssigkeitsstände in entsprechende Skalen ein!



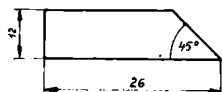
Ph 7 ■ 142 Ein 1 m langer Balken (Gewichtskraft 20 N) liegt auf 2 Schneiden (siehe Bild). Nun wird ein Massestück (Gewichtskraft 30 N) 30 cm von der linken Schneide entfernt

auf den Balken gestellt. Berechne die Belastungen auf jede der beiden Schneiden!

Henry Mittel, Schleusingen



Ph 8 ■ 143 Ein Maschinenbaubetrieb benötigt für den Bahnversand Holzkeile, um die auf offenen Güterwagen verladene Erzeugnisse gegen Verrutschen zu sichern. Die Keile haben die skizzierte Seitenansicht und quadratischen Querschnitt.



Maße in cm

Wieviel Kubikmeter Holz für Keile braucht der Betrieb mindestens pro Jahr, wenn im Jahr 5000 Erzeugnisse veranschlagt und pro Erzeugnis vier Keile benötigt werden?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ■ 144 Ein Junge wirft von einem Turm einen Stein senkrecht in die Höhe. Der Turm ist 15 m hoch. Die Abwurfgeschwindigkeit beträgt 10 m/s. In welcher Zeit erreicht der Stein die Erdoberfläche?

Verena Wegner, Hoyerswerda

Ph 10/12 ■ 145 Ein Blitz entlädt sich schätzungsweise mit einer Stromstärke von 20000 Ampère. Die dabei umgesetzte Energie wird mit 5000 kWh und die Elektrizitätsmenge mit 20 Coulomb berechnet. Es ist die auftretende Spannung und die Dauer des Blitzes gefragt.

Olaf Parchmann, Blankenheim

Chemie

Ch 7 ■ 113 In einem Chemiebetrieb sollen täglich 1500 kg Schwefel produziert werden. Als Rohstoff wird Schwefelkies, der pro Kilogramm 360 g Schwefel enthält, eingesetzt. Wieviel Tonnen Schwefelkies müssen dem Betrieb

- täglich,
 - monatlich (1 Monat = 30 Tage)
- zur Verfügung stehen?

Ch 8 ■ 114 Für die Bestimmung des Eisengehaltes einer Legierung wurden folgende Arbeitsschritte durchgeführt:

- 0,732 g der Legierung wurden gelöst und das Eisen als Hydroxid gefällt.
- Nach dem Glühen ergab der Niederschlag 0,23 g Eisen(III)oxid.

Berechne: a) die Menge Eisen in der Einwaage in Gramm, b) den Prozentgehalt an Eisen in der Legierung!

Ch 9 ■ 115 Zur Herstellung von 212,3 kg Phosphor verwendet man 0,98 t sekundäres Kalziumphosphat $[\text{Ca}_2(\text{HPO}_4)_2]$.

Wieviel Prozent Verunreinigungen enthält das Kalziumphosphat? (Sekundäres Kalziumphosphat zerfällt in folgende Oxide: Kalziumoxid, Phosphorpentoxid, Wasserstoffoxid.)

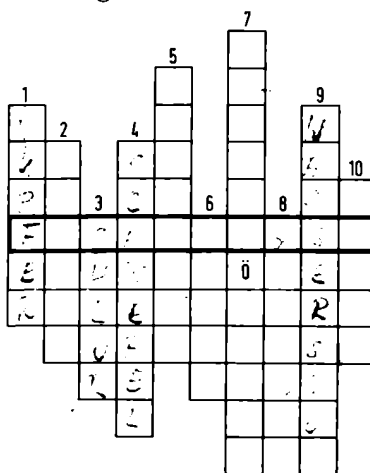
Ch 10/12 ■ 116 Die Analyse eines Stadtgases ergab folgende Werte:

- 45% Wasserstoff
- 30% Methan
- 4,5% Äthylen
- 4% Kohlenmonoxid
- 2,5% Kohlendioxid
- 14% Stickstoff

Berechne

- die zur Verbrennung von 1 m^3 Gas erforderliche Luftmenge (als Abrechnungsbasis dient Luft mit 21% Sauerstoff),
- die prozentuale Zusammensetzung der Rauchgase bei 120°C !

Löse folgendes Rätsel!

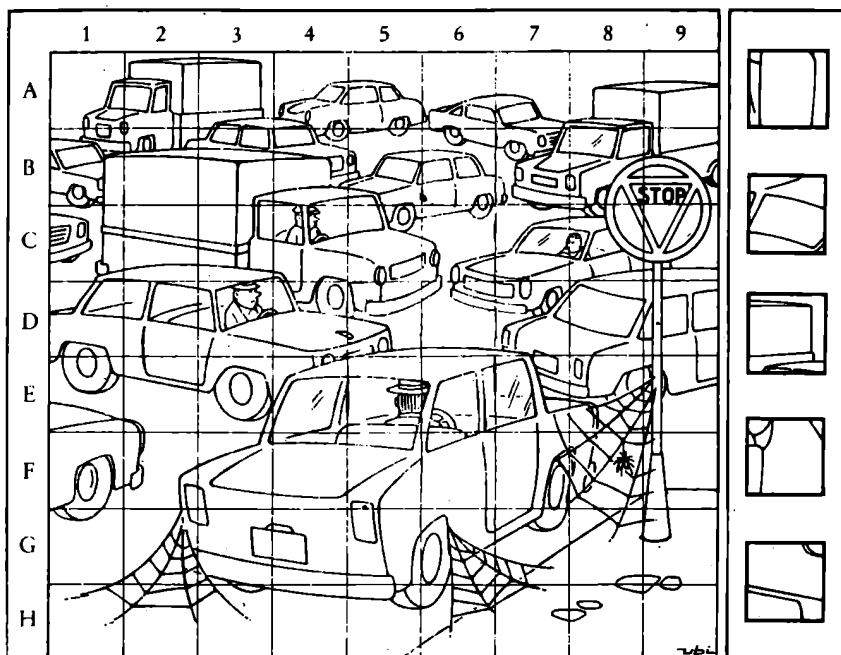


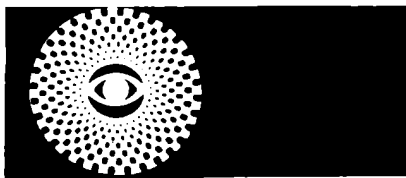
Bei richtiger Lösung des Rätsels ergibt sich im umrandeten Feld der Name einer Funktion im Chemieunterricht.

- Name eines Metalls mit dem Symbol Cu
- Name eines Geräts zum Entnehmen eines Feststoffes
- Name eines Gases mit dem Symbol Cl
- Name eines gelben Nichtmetalls
- Gerät zur Trennung einer Aufschlämme
- Name eines Metalls, welches im Weltmaßstab die größte Verwendung findet
- Gerät zur Brandbekämpfung
- Wie wird in der chemischen Zeichensprache das Kurzzeichen für eine chemische Verbindung genannt?
- Name eines Gases, das durch die Spanprobe nachgewiesen werden kann
- Wichtiger Rohstoff unserer chemischen Industrie, der aus der Sowjetunion importiert wird und zu einem großen Teil in Schwedert verarbeitet wird. H. Rochlitzer, aus: Chemie in der Schule 11/81

Stau auf der Straße

Die auf der rechten Seite des Bildes gezeigten fünf Bilddetails sind auf dem großen Bild wiederzufinden, in der gleichen Stellung. Mit Hilfe der Koordinaten kannst du ihren genauen Platz bestimmen.





ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Wir verbreiten Begeisterung für unsere Wissenschaft

Gespräch mit

Dozent Dr. sc. nat. Josef Nietzsche

Vorsitzender der Mathematischen

Schülergesellschaft der

Humboldt-Universität zu Berlin (MSG)

Frage: Sie sind maßgeblich daran beteiligt, mathematische Talente systematisch und zielgerichtet zu fördern.

Wie geschieht das?

Josef Nietzsche: Die Talentförderung mathematischer Begabungen erfolgt hauptsächlich im außerunterrichtlichen Bereich, auf dem Hintergrund eines differenzierten Förderungssystems in allen Bezirken der DDR. Sie geht von den Schularbeitsgemeinschaften für Mathematik aus, denen Kreisklubs Junger Mathematiker folgen. Die höchste Form dieser Förderung geschieht in Schülergesellschaften, Schülerakademien und Bezirksklubs Junger Mathematiker.

In Berlin wird die höchste Form der Förderung durch die Mathematische Schülergesellschaft bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität garantiert. In diesen Schülergesellschaften usw. erhalten 12 bis 15 Schüler – zusammengefaßt in Zirkeln – in der Regel wöchentlich einen zweistündigen Unterricht nach einheitlichem Lehrplan. Bei uns beginnt die Ausbildung im 6. Schuljahr und endet mit der 12. Klasse. Die Delegation der Schüler erfolgt durch die Abteilung Volksbildung.

Neben diesen Zirkeln wurden von unserer Sektion Spezialfördermaßnahmen realisiert. Zum ersten werden Schüler in Zirkeln von sechs bis acht Teilnehmern gezielt zur erfolgreichen Teilnahme an den Olympiadewettstreiten Junger Mathematiker befähigt. Weiterhin gibt es Zirkel mit einer speziellen mathematischen Problematik (z. B. Zahlentheorie, Analysis) gleicher Stärke, und schließlich fördern wir Schüler durch Einzelpatenschaften, die Hochschullehrer für zwei bis drei Schüler über mehrere Jahre übernehmen. Dabei arbeiten sich Schüler in ein Spezialgebiet ein, z. B. die Differentialgeometrie mit

der Anwendung auf einige Fragen der Relativitätstheorie.

Mit all diesen Aktivitäten hilft unsere Sektion, qualifizierten Nachwuchs für alle Facharbeiterberufe technischer Richtung zu gewinnen: für die gezielte Ausbildung von Lehrern, auch solche für Hochschulen und den Akademiebereich sowie für alle Unteroffiziers- und Offiziersberufe in unseren bewaffneten Organen zur Stärkung unseres Staates und Erhöhung seiner Verteidigungsbereitschaft.

Frage: Wie dringend benötigen wir zur Forcierung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts in unserer Volkswirtschaft mathematische Talente?

Josef Nietzsche: Ohne Polemik kann gesagt werden, daß die Mathematisierung aller Wissenschaften ein objektiver Vorgang unseres Zeitalters ist. Somit ist die Anwendung mathematischer Methoden, speziell in allen wissenschaftlich-technischen Einrichtungen, dringend gefordert. Das heißt, in diesen Bereichen werden besonders selbständig und kreativ arbeitende Mathematiker dringend benötigt. Ein Beispiel: In der Elektronik und im Roboterbau geht es um den Entwurf und die Fertigung außerordentlich komplexer technischer Gebilde, deren Arbeitsweise in irgendeinem näher zu bestimmenden Sinne optimal sein soll. Hier ist ohne gezielte mathematische Untersuchungen, Testrechnungen, Entwurfsplanungen und ähnliches kaum eine erfolgreiche Verwirklichung der Zielstellung möglich: Allerdings verlangt die Bearbeitung solcher Fragestellungen vom Mathematiker ein besonders breites und vielseitiges Wissen und den Willen, sich auch teilweise – und wenn nötig sogar umfangreich – in ein nichtmathematisches Gebiet einzuarbeiten, um qualifizierte und effektive Lösungen anzuordnen zu können. Darüber hinaus verlangt all das von einem Mathematiker solide Kenntnis auf dem Gebiet der Rechentechnik, da es sich immer um konstruktive Fragestellungen handelt, die ohne Verwendung solcher technischen Hilfsmittel wie EDV-Anlagen nicht mehr zu lösen sind. Daß Rechentechnik Schülern großen Spaß bereiten kann und sie hier bereits selbst kleine Probleme lösen können, zeigen die in unserer Sektion jährlich durchgeführten und überlegten Programmierkurse für ESER-Anlagen für Klassenstufe sieben bis acht.

Aus: DLZ, Berlin

Aus dem Kreisklub Junger Mathematiker Berlin-Köpenick berichtet

Der Kreisklub Junger Mathematiker des Stadtbezirks Berlin-Köpenick feiert in diesem Jahr sein 10jähriges Bestehen. Einmal

wöchentlich treffen sich für zwei Stunden zur Zeit 124 Schüler der Klassenstufen 5 bis 9 in acht verschiedenen Zirkeln. Es werden Olympiadaufgaben gelöst und mathematische Probleme nach einem Rahmenprogramm behandelt.

Auf Grund der guten Unterstützung durch das Institut für Nachrichtentechnik als Trägerbetrieb für unseren Klub konnte in den Winterferien das 10. Spezialistenlager, diesmal in Görlitz, durchgeführt werden. Die Klausur am letzten Tag bewies, daß alle Schüler die in den Vormittagsstunden behandelten Stoffgebiete gut durchdacht hatten.

5. Klasse: Gleichungslehre

6. Klasse: Einführung in die Graphentheorie

7. Klasse: Lösung diophantischer Gleichungen

8./9. Klasse: „Kramersche Regel“

Neben zahlreicher sportlicher Betätigung bildeten Denkspiele jeder Art einen Höhepunkt der Freizeitbeschäftigung. Traditionsgemäß wurden wieder Skat-, Schach- und Tischtennisturniere durchgeführt. Stadtbesichtigungen, Theaterbesuche und eine Tagesfahrt gehören schon seit Jahren zum festen Programm unseres Lagers. Den 60 Teilnehmern hat es wieder so gut gefallen, daß es auch im nächsten Jahr genügend Bewerber geben wird.

Weitere Höhepunkte in unserem Klubleben bilden eine Tagesfahrt am Ende des Schuljahres, eine Klausur als Bewährungssituation für die Zirkelteilnehmer im Juni und jeweils eine Auszeichnungsveranstaltung mit Vorträgen o. ä. im Dezember und am letzten Zirkelnachmittag im Schuljahr.

Diese gemeinsamen Veranstaltungen fördern das Kollektiv des Kreisklubs, so daß es uns auch in diesem Jahr gelungen ist, ehemalige Mitglieder als Zirkelleiter für das Spezialistenlager zu gewinnen.

M. Krause

Aufgabe

Von den Schülern einer Klasse gehören genau 12 der AG Fotoamateure, genau 14 Schüler der AG Mathematik und genau 15 Schüler der AG Musikfreunde an. Genau ein Schüler ist in allen drei Arbeitsgemeinschaften tätig. Genau 4 Schüler gehören sowohl der AG Fotoamateure als auch der AG Mathematik an. Genau 3 Schüler gehören sowohl der AG Fotoamateure als auch der AG Musikfreunde an. Genau 5 Schüler gehören sowohl der AG Musikfreunde als auch der AG Mathematik an. Wie viele Schüler gehören zu dieser Klasse, wenn jeder Schüler wenigstens eine dieser Arbeitsgemeinschaften besucht? (Lösung siehe Seite 118)

Prof. Dr. Franz von Krbek zu seinem 85. Geburtstag



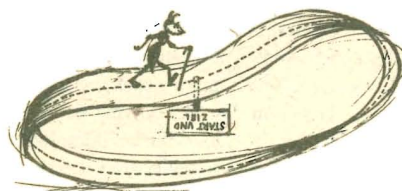
- 1945 Habilitation, Dozent
- 1946 Dozent nach der Wiedereröffnung der Universität
- 1948 Professor mit Lehrauftrag
- 1953 Professor mit Lehrstuhl
- 1963 Emeritierung
- 1967 letzte Vorlesung

Leseprobe aus dem Buch
von Franz von Krbek

Geometrische Plaudereien

Flächen ohne zweite Seite

Vom bekannten Leipziger Mathematiker Möbius wurde vor etwa einem Jahrhundert folgende Anekdote erzählt: Frau Professor hatte eine „unzuverlässige“ Magd, die lauter Unfug trieb. Das „unnütze“ Ding sollte diesmal runde Strumpfbänder nähen. Und was tat sie? Das eine Band hat sie halb umgedreht, ehe sie die Enden zusammennähte! Frau Professor wurde recht ärgerlich und nahm sich vor, mit ihrem Mann zu sprechen, ob sie diese unverbesserliche „Person“ doch nicht lieber entlassen sollte. Um daran erinnert zu werden, legte sie das mißratene Strumpfband auf den Tisch. Als dann ihr hochgelehrter Mann endlich nach Hause kam und das corpus delicti in die Hand bekam, erwachte in ihm beim ungewohnten Anblick plötzlich der Forscher. Er wendete das Band hin und her und entdeckte auf diese Weise die erste Fläche, die nur eine Seite besitzt. Nach einer anderen Version soll das Mißgeschick der Frau Professor selber zugestoßen sein. So hätte es sich zwar zutragen können, aber in Wirklichkeit verlief die Sache ganz anders. Möbius, ein Schüler von Gauß, verdankt seine paradoxe Entdeckung keineswegs dem Zufall, sondern systematischer Beschäftigung mit Flächen. Und das 68jährige! Man denkt sich Flächen aus Dreiecken zusammengefügt. Es kommt darauf an, wie sich die Dreiecke zusammenfügen. Man entdeckte erstaunliche Möglichkeiten, an die früher niemand gedacht hätte. Der vorhin erdichtete Fall gehört dazu. Wir möchten ihn jedoch nicht von der hohen Warte des Möbius aus betrachten, sondern mehr anschaulich, und knüpfen daher an die Fehlleistung der gescholtenen Magd an.



Einem langen Papierstreifen erteile man eine halbe Drehung, ehe die Enden zusammengeklebt werden. Setzt man unsere Freundin Ameise irgendwo darauf, nur nicht auf den Rand, und verpflichtet sie loszuwandern, aber so, daß sie ihre Entfernung von der Beran-

Prof. Dr. Franz von Krbek gehört seit über 40 Jahren zum Lehrkörper der Universität Greifswald und hat seit dem Tage der Wiedereröffnung unserer Universität nach der Befreiung vom Faschismus am 15. Februar 1946 seine ganze Kraft für den Wiederaufbau der mathematischen Lehre und Forschung in selbstloser Weise eingesetzt. In Ungarn geboren, studierte er in Budapest Mathematik und Physik. Als Student im 1. Semester war er Sieger der dort schon damals stattfindenden Mathematikolympiaden auf nationaler Ebene. Nach dem Doktorexamen mit *summa cum laude* 1921 ging er mit einem Forschungsstipendium für mehrere Jahre nach Göttingen und Paris und lernte dort bedeutende Mathematiker persönlich kennen. Dann arbeitete er als Wissenschaftler und Publizist in mehreren Städten, u. a. auch in Berlin. 1942 kam er nach der völligen Zerstörung seiner Wohnung in Berlin durch den Luftkrieg als akademischer Lehrer nach Greifswald an die Universität.

Internationales Ansehen hat er sich vor allem als Verfasser mathematischer und physikalischer Bücher erworben. Seine erste Monographie von 1936 „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ ist von Max

Planck empfohlen worden. In hoher Auflage erschien 1941 seine *Erlebte Physik*, sie wurde in mehrere Sprachen übersetzt. In Greifswald schrieb er eine umfassende Mathematikgeschichte mit dem Titel *Eingefangenes Unendlich* und ein drittes physikalisches Buch *Grundzüge der Mechanik, Lehren von Newton, Einstein und Schrödinger*; auch hier erschienen mehrere Auflagen. Einen breiten Leserkreis haben sich seine populärwissenschaftlichen Bücher mathematischen Inhalts im Teubner-Verlag erworben mit den Titeln: *Geometrische Plaudereien, Über Zahlen und Überzahlen* und *Formen und Formeln*. Sie sind alle in mehreren Auflagen erschienen und von dem bekannten amerikanischen Mathematiker *Edwin Hewitt* ins Englische übertragen worden. Sowjetische Rezensionen heben vor allem den hohen mathematischen Sachgehalt dieser Bücher hervor.

Am 12. März dieses Jahres beging Professor von Krbek als einer der Senioren unter den Mathematikern der DDR seinen 85. Geburtstag, dazu unseren herzlichsten Glückwunsch! Nach wie vor verfolgt er mit Interesse die Entwicklung der Mathematik und hat Spaß an mathematischen Knebeln, z. B. stellte er umfassende Überlegungen zu Eulers Königsberger Brückenproblem an (siehe *alpha* 2/83).

Abschließend wollen wir die *Berliner Brückenaufgabe* für die Leser stellen: Die 3 Gebiete: Ufer A zum Alex, Insel B und Ufer C zum Brandenburger Tor sind durch 11 Brücken verbunden. Kann man nun von A, B oder C aus zum Brandenburger Tor gehen, ohne eine Brücke auszulassen oder mehrmals zu benutzen? Wie muß der Beweis erfolgen? (Vgl. ND vom 24. 12. 82.)

J. Buhrow/E. Griepentrog

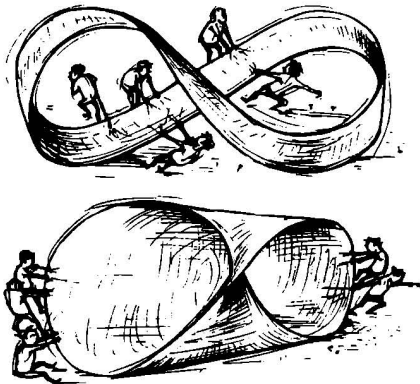
Biographisches

Geboren am 12. März 1898 in Komárom, Ungarn

- 1916 Studium der Mathematik und Physik in Budapest
- 1921 Doktorexamen mit *summa cum laude* in Budapest
- 1929 wissenschaftliche Tätigkeit in Berlin, Bonn und anderen Städten
- 1942 (am 25. August) Lehrauftrag in Greifswald, Universität

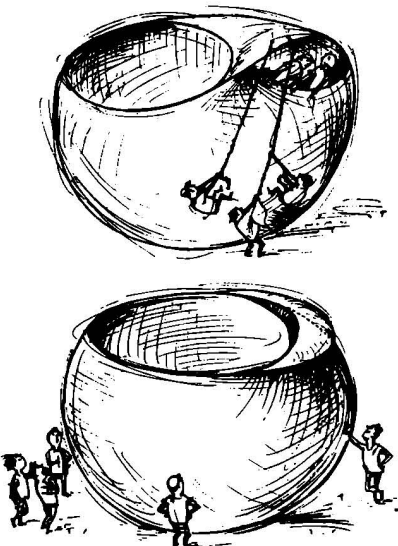


derung immer wahr, dann wird sie und wir mit ihr, eine Überraschung erleben. Wenn die Ameise auf diese Weise einen Weg von der ursprünglichen Länge des Papierstreifens zurückgelegt hat, befindet sie sich ihrem Ausgangsort gegenüber als Antipode! Erst wenn sie noch einmal soweit wandert, gelangt sie an ihren Ausgangsort zurück, eine Folge davon, daß der Papierstreifen eine Halbdrehung erhielt, ehe die Enden zusammengeklebt wurden. Die Fläche besitzt zwar örtlich zwei Seiten, aber man kann von der einen zur anderen Seite gelangen, ohne die Berandung zu passieren. Das ist damit gemeint, daß diese Fläche nur eine Seite hat.

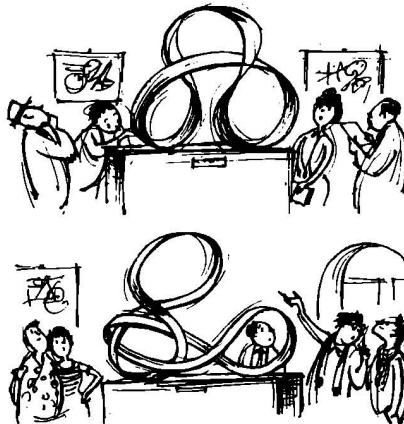


Aber auch die beiden Ränder des Bandes bereiten eine Überraschung. Sie bilden zusammen eine einzige geschlossene Linie! Stellt man das Band an Stelle von Papier aus sehr dehnbarem Gummi her, dann läßt es sich so verzerren, daß aus der Berandung ein Kreis wird. Das Band selbst bildet dann eine Tasche, die nur eine Seite besitzt, weil sich so etwas durch Verzerren nicht ändert. Eine solche Tasche sei der Beachtung von Zauberkünstlern empfohlen.

Schneidet man das Band von Möbius der Länge nach auf, dann zerfällt es nicht etwa in zwei Ringe, wie man es erwarten würde, sondern bleibt ein einziger Streifen, der allerdings zwei Seiten besitzt. Den Rand bilden diesmal

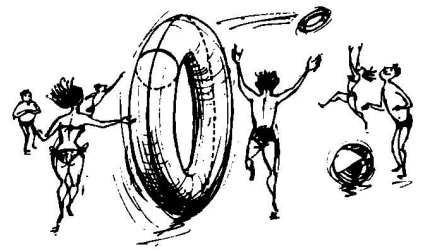


zwei geschlossene Linien, die miteinander verschlungen sind. Erneutes Zerschneiden ergibt zwei ineinander verschlungene Ringe. Führt man das alles an einem Modell zum erstenmal durch, dann wird man immer wieder überrascht; ein Zeichen, daß unsere Anschauung versagt, weil sie an derlei Gebilden nicht geschult wurde.

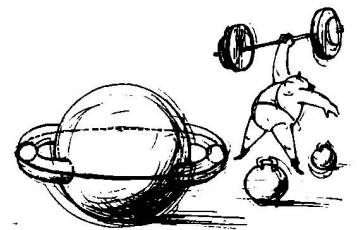


Vor die Frage gestellt, ob es möglich sei, auf einer Fläche einen Kreis so zu zeichnen, daß zwei Punkte der Fläche, die nicht auf dem Kreis liegen, stets Enden einer Linie bilden können, die den Kreis nicht trifft, würde man, sich auf eine voreilige Anschauung verlassend, die Frage zunächst wohl verneinen. Man würde unwillkürlich daran denken, daß man aus dem Kreisinneren nicht hinaus kann, ohne den Kreis zu passieren. Es gibt jedoch Flächen mit Kreisen, bei denen man nicht von einem Kreisinneren auf der Fläche reden kann. Solch eine Fläche, den Torus, kennt jeder, der mit einem Gummiring jemals Fangen gespielt hat. Denkt man sich den Kreis

durch einen senkrechten Schnitt erzeugt, so leuchtet es ein, daß unsere vorhin gestellte Frage zu bejahen ist.



Auch noch einen zweiten Kreis senkrecht zum ersten könnte man auf dem Torus anbringen, ohne den Zusammenhang, um den es geht, zu zerstören, aber keinen weiteren Kreis. Daher müssen wir fragen, ob es überhaupt Flächen gibt, auf denen man drei oder gar gleich n Kreise ziehen kann, ohne den Zusammenhang zu zerstören. Die Frage läßt sich sofort bejahen. Man hat nur Henkel an einer Kugel anzubringen. Wird an jedem Henkel ein Kreis ähnlich wie vorhin auf dem Torus und zwischen diesen senkrecht dazu ein weiterer Kreis markiert, der die beiden ersten Kreise verbindet, so bleibt der Zusammenhang gewahrt: Noch immer kann man zwei Punkte durch eine Linie verbinden, die auf der Fläche verläuft und die Kreise nicht trifft.



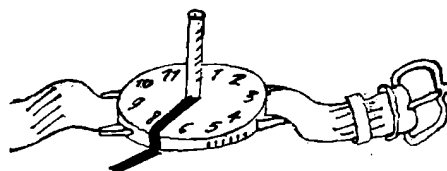
Festkolloquium für Prof. Dr. Franz von Krbek anlässlich seines 85. Geburtstages an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Unser Foto: Festansprache des Rektors, Prof. Dr. Birnbaum. Im Vordergrund links vorn der Jubilar.



In freien Stunden • alpha-heiter

Messeneuheit

...in der Uhrenindustrie



Wer hat weißes Haar?

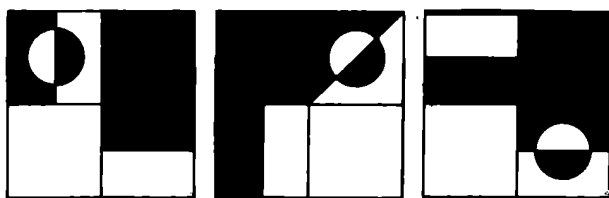
Frau Braun, Frau Schwarz und Frau Weiß haben braunes, schwarzes und weißes Haar, aber keine von ihnen hat eine Haarfarbe, die ihrem Namen entspricht.

Wenn Frau Weiß kein schwarzes Haar hat, welche Farbe hat dann das Haar von Frau Schwarz?

Math. pie. London

Logisch

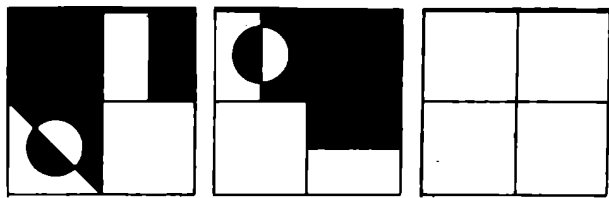
Welche Figur gehört folgerichtig in das 6. Fach?



1

2

3



4

5

6

Humor aus Finnland



Zeichnung von Schülerin Minna Vuoristo, Turku,
aus: Functio. Helsinki

Dialogue

● „Kannst du mir sagen, wie viele Leute bei uns im Büro arbeiten?“

– „Ich schätze, so an die 60 Prozent!“

● „Wie geht es übrigens dem Patienten, der sich für ein Genie hält?“ – „Ach, es geht ihm schon besser. Er hält sich jetzt für ein Talent.“

● **Lehrerin:** „Furchtbar, wieder alles falsch gerechnet! Hast du denn keine Schwester oder einen Bruder, der dir ein bißchen helfen könnte?“ – „Nein, aber Mutti hat mir gesagt, nächste Woche kriegen wir einen.“

● Aus Gabrowo: Bai kam nach Sofia und stieg mit einem großen Bündel in die Straßenbahn ein.

„Drei Stotinki für die Fahrkarte und sechs Stotinki für das Bündel“, sagte der Schaffner. Da öffnete Bai Georgi das Bündel und sagte: „Pentscho komm heraus! Als Bündel kostest du mehr!“

Bruchlandung

Uwe setzt seine Mitschüler in Erstaunen, wie „elegant“ er den Bruch $\frac{26}{65}$ „kürzt“.

Er sagt: „Streich bei diesem Bruch einfach die beiden Ziffern 6 weg, und ihr habt schon das Ergebnis, also

$$\frac{26}{65} = \frac{\cancel{26}}{\cancel{65}} = \frac{2}{5}.$$

Die Mitschüler merken, daß Uwe einen Scherz mit ihnen gemacht hat. Seine Methode klappt offenbar nur für *diesen* genannten Bruch. Oder nicht?

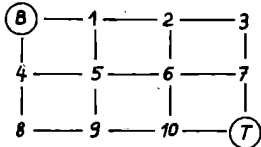
Eure Aufgabe ist es nun herauszufinden, ob es noch andere Paare von zweistelligen Zahlen mit *insgesamt* 3 verschiedenen Ziffern gibt, bei denen dieses „Kürzen“ mittels eines Schrägstriches möglich ist!

Es soll dabei nicht geraten werden, sondern es ist ein möglichst einfaches Rechenschema zu entwickeln, das gestattet, in kurzer Zeit die Existenz oder Nichtexistenz der betreffenden Zahlenpaare festzustellen.

Dr. W. Lorenz, Leipzig

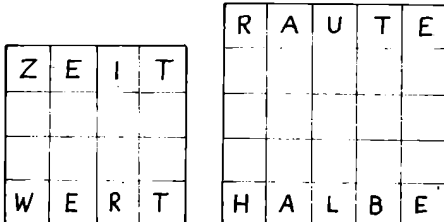
Theaterbesuch

Auf wieviel verschiedenen Wegen kann man vom Bahnhof B zum Theater T gelangen (z. B. B-1-2-3-7-T)?



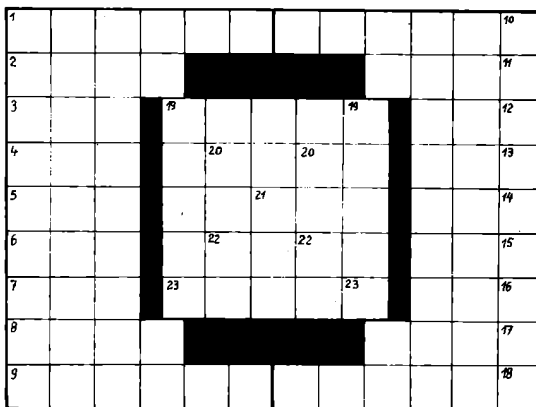
Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

Wortspiele



Fachlehrer Dr. Knappe, Jessen

Symmetrische Begriffe gesucht



Die gesuchten symmetrischen Begriffe (von vorn und von hinten gelesen ergibt sich derselbe Begriff) sind in die nummerierten Zeilen einzutragen – unabhängig davon, an welcher Stelle der Zeile diese Nummer steht:

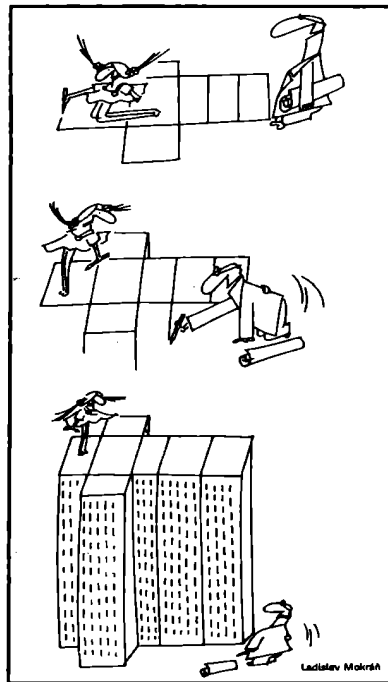
1. gerbsaures Salz, 2. Unterarmknochen, 3. Aktion,
4. Nebenfluß der Maas, 5. Sittichpapagei, 6. Lebensbund, 7. demokratische Frauenorganisation der DDR (Abk.), 8. landwirtschaftliches Gerät, 9. führender Austromarxist (1870 bis 1950), 10. Helfender in der Not, 11. eine der Meeresgezeiten, 12. von 1867 bis 1918 bestehende österreichisch-ungarische Doppelmonarchie (gebräuchl. Kurzbez.), 13. Nachtraubvogel, 14. selten, 15. Notruf auf See, 16. Zufluß zum Balchaschsee, 17. Vorname eines deutschen Chemikers und Physikers (1879 bis 1968), 18. hersagen, aufzählen, 19. sich drehender Teil von Elektromaschinen, 20. eingliedriger math. Ausdruck, 21. Funkortung und

Entfernungsmessung (engl. Abk.), 22. Ring zum Aufreihen des Stagesegels, 23. schwedischer Ingenieur (1845 bis 1913), Erfinder einer speziellen Dampfturbine.

Bei richtiger Auflösung ergeben sich in den beiden Randspalten „ein Eulersches Polyeder“ (1 bis 9) und „eine typische mathematische Verfahrensweise“ (10 bis 18) sowie in der Haupt- und Nebendiagonale der Mittelfigur „ein Wintersportgerät, dessen Benutzung viel Freude bereiten kann“ (19 bis 23).

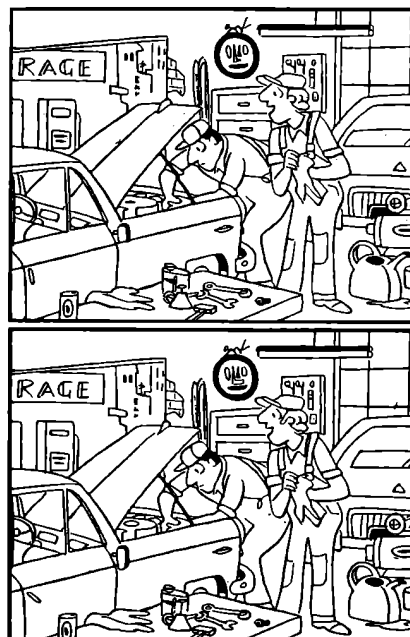
Ohne Worte

Ladislav Mokrň, Dikobraz, Prag



Autoreparatur

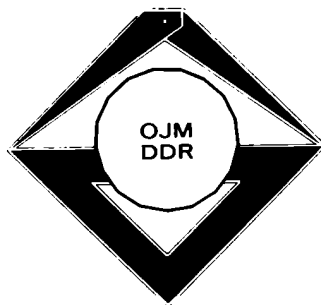
Zwanzig kleine Unterschiede sind zu finden.



Füles,
Budapest

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Olympiadeklasse 10

221041 Beweisen Sie folgende Aussage!

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, für die $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ gilt.

221042 In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.

Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z rational.

Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z irrational.

Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist! Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

221043A a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, daß die Gleichung $a^x = b \cdot \cos x$ (1)

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).

Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an, und beweisen Sie, daß es die genannte Eigenschaft besitzt!

b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d. i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g+1$ gilt!

c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, daß für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?

Hinweise:

1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalen genau $\pi = 3,1416$ verwendet werden.

2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch grafisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

221043B Fünf Kugeln $K_1, \dots, K_5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, daß jede Kugel genau zwei andere berührt und daß ihre Mittelpunkte $M_1, \dots, M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden. Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1, \dots, K_5$.

Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch $M_1, \dots, M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

221044 Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB , D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

221045 Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

221046 Beweisen Sie, daß sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu druchdringen unterbringen lassen!

Olympiadeklassen 11/12

221241 a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0, b$ und c so gibt, daß die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (1)$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1, f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.

Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0, b, c$ mit der Eigenschaft, daß die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1, f(x_2) = 1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

221242 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a , zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = a, \quad (2)$$

$$x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 = a^2, \quad (3)$$

$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 = a^3. \quad (4)$$

221243 Man untersuche, ob es nichtnegative

a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 ,

b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4

mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ und $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$ gibt, so daß die Summe $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

+ x_4^2 einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s .

221244 Man beweise, daß das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$$

für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

221245 Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Bei einem „ungestörten technischen Prozeß“ sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (1)$$

die Maßzahl einer von $a_1, a_2, \dots, a_n$ abhängigen Größe. Bei einem „gestörten technischen Prozeß“ betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{-1 + \varepsilon_1} + \frac{a_2}{1 + \varepsilon_2} + \dots + \frac{a_n}{1 + \varepsilon_n} \quad (2)$$

Dabei seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geq 1$ derart gibt, daß für alle $\mu = 1, 2, \dots, n$ die Ungleichung

$$|\varepsilon_\mu| \leq 10^{-m} \quad (3)$$

gilt. Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{10^{-m} - 1} (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)$$

folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

221246A Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinander stehen. Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC , und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P .

a) Man beweise, daß dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets

$$s \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P .

221246B Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, daß sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende:

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$. Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, \dots, n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=1}^n x(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-k+1) \cdot f(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot p^k. \quad (1)$$

Hinweis: Für $k=1$ ist die Gleichung (1) sinn-

gemäß als $\sum_{x=1}^n x \cdot f(x) = n \cdot p$ aufzufassen.

Die diesjährige DDR-Olympiade fand vom 27. bis 30. März 1983 an der Pädagogischen Hochschule Dr. Theodor Neubauer in Erfurt statt. Wieder waren aus allen Bezirken Mädchen und Jungen gut vorbereitet angereist. An zwei Tagen mußten jeweils in einer vier- einhalbstündigen Klausur drei Aufgaben gelöst werden. Bis in die Abendstunden wurden die Lösungen von 70 Korrektoren und 14 Koordinatoren bewertet.

In der Olympiadeklasse 10 starteten 73 Schüler, darunter 5 Schüler der Klassenstufe 8 und 28 Schüler der Klassenstufe 9 (sogenannte Frühstarter). Die Jury konnte zwei 1. Preise, neun 2. Preise und elf 3. Preise vergeben. Besonders erwähnen wir hier den 2. Preis für Jörg Wensch (Halle) und den 3. Preis für Jörg Jähnel (Gera), die beide Schüler der Klassenstufe 8 sind.

In den Olympiadeklassen 11 und 12 starteten 53 bzw. 52 Schüler, darunter 2 Schüler der Klassenstufe 10, Georg Hein und Udo Bellack (beide Berlin), die mit einem 1. bzw. 2. Preis geehrt werden konnten. Insgesamt wurden hier sieben 1. Preise, zwölf 2. Preise und fünfzehn 3. Preise vergeben.

Zum Rahmenprogramm gehörten ein Besuch der Nationalen Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald, Führungen durch das historisch interessante Stadtzentrum von Erfurt und ein Theaterbesuch.

W. Henker



Einen ersten Preis erhielten:

- 1 Klaus Mohnke, EOS Georg Schumann, Calau (Bez. Cottbus) (Olympiadeklasse 12)
- 2 Bernd Schmutzler, Spezialklasse Math. der TH Karl-Marx-Stadt (Olympiadeklasse 12)
- 3 Uwe Birkemeyer, EOS Heinrich Hertz, Berlin (Olympiadeklasse 12)
- 4 Bernd Kirchheim, ABF Walter Ulbricht, Halle (Olympiadeklasse 12)
- 5 Karin Gröger, EOS Heinrich Hertz, Berlin (Olympiadeklasse 11)
- 6 Alexander Schmidt, EOS Heinrich Hertz, Berlin (Olympiadeklasse 11)
- 7 Georg Hein, EOS Heinrich Hertz, Schüler der Klasse 10 (Olympiadeklasse 11)
- 8 Tilo Schaarschmidt, Goethe-Oberschule Bad Lauchstädt (Bez. Halle) (Olympiadeklasse 10)
- 9 Uwe Müller, EOS J. W. v. Goethe, Brandenburg (Bez. Potsdam) (Olympiadeklasse 10)

Seit vielen Jahren erfolgreich:
Die Delegation des Bezirkes
Karl-Marx-Stadt – hier beim Interview
für die Aktuelle Kamera.





Polnische Mathematiker

Im historisch sehr kurzen Zeitraum von der Jahrhundertwende bis zur faschistischen Besetzung 1939 entwickelte sich eine polnische Mathematikerschule von Weltgeltung, die besonders auf den damals jungen Gebieten der mathematischen Logik, Mengenlehre, Topologie, Theorie der reellen Funktionen und Funktionalanalysis die führende Position übernahm. Äußerer Ausdruck dessen war die Gründung der polnischen Zeitschrift „Fundamenta mathematicae“ durch Z. Janiszewski, W. Sierpiński und St. Mazurkiewicz im Jahre 1920, die auf die oben genannten Disziplinen spezialisiert und damit eine der ersten mathematischen Spezialzeitschriften der Welt war. (Heute spielen die im 19. Jh. entstandenen, der gesamten Mathematik offenen Zeitschriften kaum noch eine Rolle, während andererseits die Spezialisierung der zahlreichen Fachzeitschriften auf immer engere Gebiete zunimmt.) Während der faschistischen Besetzung erlitt die polnische Mathematikerschaft schwerste Verluste. Der erste Band der „Fundamenta mathematicae“, der nach der Befreiung wieder erscheinen konnte, nennt mehr als 15 namhafte ständige Mitarbeiter allein dieser Zeitschrift als unmittelbare physische Opfer der Nazibarbarei. Zu berücksichtigen ist aber auch der Verlust durch die Emigration zahlreicher bedeutender Wissenschaftler in die USA. Trotzdem nahm die polnische Mathematik sehr bald wieder einen geachteten Platz in der Welt ein. 1972 unterzeichneten Vertreter der Akademien der Wissenschaften Bulgariens, der DDR, Polens, Rumäniens, der UdSSR, Ungarns und der ČSSR ein Abkommen über die Gründung des „Internationalen Mathematischen Zentrums Stefan Banach“ (kurz Banach-Zentrum) in Warschau, das in den nun

10 Jahren seines Bestehens zu einem Mekka von Mathematikern aus aller Welt (keineswegs nur aus den sozialistischen Staaten) geworden ist. Im Sommer 1983 war Warschau (als zweite sozialistische Hauptstadt nach Moskau) Gastgeber des Internationalen Mathematikerkongresses, der in der Regel in vierjährigem Abstand stattfindet, auch dies ein Zeichen hoher internationaler Anerkennung für die polnischen Mathematiker. Im Vorfeld dieser Ereignisse bzw. Jubiläen gab die polnische Post Ende 1982 vier Sonderpostwertzeichen zum Gedenken an Pioniere der polnischen Mathematikertradition heraus, die nicht nur durch Ausgabelanlaß und Motiv, sondern auch durch die digitalgraphische Gestaltung interessant für Mathematiker und Informatiker sind. Die vier so Geehrten sind (in der Reihenfolge der Wertstufen):

Stanislaw Zaremba (1863 bis 22.11.1942, studierte in Odessa, Petersburg und Paris, Prof. an der Universität Krakow, Arbeitsgebiete Analysis, mathematische Logik, theoretische Mechanik),

Wacław Sierpiński (14.3.1882 bis 21.10.1969, geb. in Warschau, Studium und ab 1918 Prof. an der dortigen Universität, 1952 bis 1957 Vizepräsident der Polnischen Akademie der Wissenschaften, Arbeitsgebiete Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionentheorie und Topologie, zahlreiche, auch populärwissenschaftliche Bücher),

Zygmunt Janiszewski (12.7.1888 bis 3.1.1920, geb. in Warschau, studierte in Lwow, Zürich, Göttingen, Graz, Paris, 1918 Prof. an der Universität Warschau, Arbeitsgebiete Topologie und mathematische Logik),

Stefan Banach (30.3.1892 bis 31.8.1945, geb. in Krakow oder Umgebung, wurde nach autodidaktisch begonnenen Studien von H. Steinhaus „entdeckt“ und studierte dann in Lwow, ab 1922 dort Prof., einer der Begründer der Funktionalanalysis, gründete 1929 gemeinsam mit seinem Lehrer Steinhaus die Spezialzeitschrift „Studia Mathematica“ für diese Disziplin. Der früh versorbene Banach gilt heute als eines der bedeutendsten mathematischen Talente unseres Jahrhunderts, dessen Ideen und Ergebnisse richtungsweisend für die moderne Analysis gewesen sind).

P. Schreiber

Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. I. Ignatjew

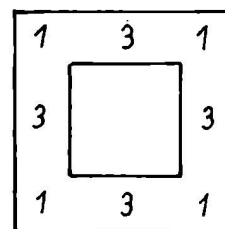
Lomonossow-Universität Moskau

Aus dem soeben im Urania-Verlag erschienenen Buch

„Mathematische Spielereien“

(Bestell-Nr. 653 728 4, Preis 9,80 M) entnehmen wir die folgende Aufgabe:

▲ 2377 ▲ An den Wänden einer Bastion mit quadratischem Grundriß sollten 16 Wachtposten aufgestellt werden. Der Kommandant verteilte sie so, daß an jeder Seite fünf Wachtposten standen (siehe Bild).



Der Oberst jedoch war mit dieser Verteilung der Wachtposten unzufrieden und befahl, die Soldaten so aufzustellen, daß auf jede Seite sechs Mann kämen. Der General aber geriet in Zorn über den Obersten und seine Anordnung und verteilte die Soldaten so, daß sich nun je sieben Mann an jeder Seite befanden. Wie waren die Soldaten in den beiden letztgenannten Fällen verteilt?



Lösungen

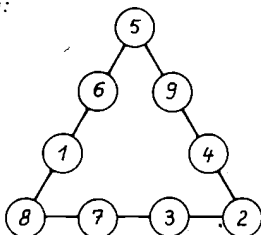


Lösungen zu: Unsere Sprachecke

Zauberdreieck

▲ 1 ▲ Schreibt die Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreise auf dem Dreieck, daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite dieselbe Summe haben! Verteilt die Zahlen dabei so, daß auch die Summen der Quadrate der Zahlen auf jeder Seite untereinander gleich sind!

Lösung:



▲ 2 ▲ Mark, Paul und Boris sind mit Anne, Mary und Susan verheiratet, nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge. Jedes Paar hat ein Lieblingstier, und die Lieblingstiere sind eine Katze, ein Meerschweinchen und ein Pony. Benutze die folgenden Angaben, um die Zusammengehörigkeit von Ehemännern, Ehefrauen und Lieblingstieren festzustellen! Pauls und Annes Lieblingstiere kämpften miteinander.

Der Name von Marys Ehemann hat vier Buchstaben.

Susan ging hinüber, um Marks Lieblingstier zu füttern, wenn er fort war.

Mark geht niemals in die Stadt.

Boris' Lieblingstier ist entweder die Katze oder das Pony.

Susans Lieblingstier ist nicht die Katze.

Der männliche Besitzer der Katze brachte diese zum Tierarzt in die Stadt.

Das Meerschweinchen versteckt sich, wenn Anne zu Besuch kommt.

Marys Lieblingstier schläft in einem Schuhkarton.

Lösung: Mark und Mary haben das Meerschweinchen. Paul und Susan haben das Pony. Boris und Anne haben die Katze.

▲ 3 ▲ Drei Autobuslinien haben als Abfahrtsplatz den Bahnhof Montparnasse in Paris. Die Autobusse der ersten Linie sind nach 1 h 36 min zurück und haben 4 min Pause.

Die Autobusse der zweiten Linie sind nach 1 h 48 min zurück und haben 12 min Pause;

die der dritten Linie sind nach 2 h 10 min zurück und haben 20 Minuten Pause. Drei Autobusse, einer auf jeder Linie, fahren gemeinsam um 8 h am Bahnhof Montparnasse ab.

a) Wann fahren die drei Autobusse das erste Mal wieder gemeinsam vom Bahnhof Montparnasse ab?

b) Wieviel Fahrten hat dann jeder Autobus durchgeführt?

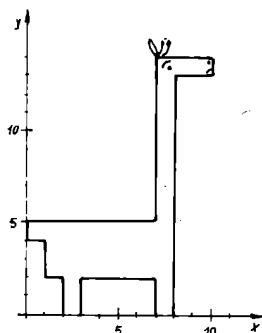
Lösung: a) Der erste Bus braucht bis zur nächsten Abfahrt vom Bahnhof Montparnasse $96 + 4 = 100$ min, der zweite $108 + 12 = 120$ min und der dritte $130 + 20 = 150$ min. Die nächste gemeinsame Abfahrt ergibt sich dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von 100, 120 und 150, also nach 600 min. Die Autobusse fahren um $\frac{1}{8}$ Uhr wieder gemeinsam vom Bahnhof ab.

b) Dann hat der erste Bus $600 : 100 = 6$ Fahrten, der zweite Bus $600 : 120 = 5$ Fahrten und der dritte Bus $600 : 150 = 4$ Fahrten durchgeführt.

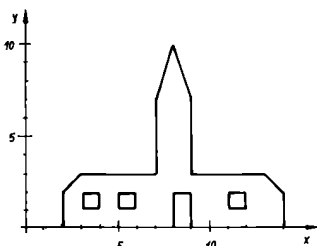
Lösungen zu: Koordinaten

▲ 1 ▲

a)



b)



▲ 2 ▲

a)

- | | | |
|--------|--------|--------|
| (2; 0) | (4; 6) | (3; 0) |
| (2; 3) | (4; 5) | (3; 2) |
| (1; 3) | (5; 5) | (5; 2) |
| (1; 4) | (5; 6) | (5; 0) |
| (2; 4) | (7; 6) | |
| (2; 5) | (7; 5) | |
| (3; 5) | (6; 5) | |
| (3; 6) | (6; 0) | |

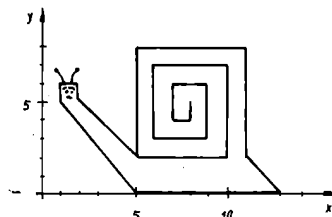
b)

- | | | | | |
|--------|---------|---------|--------|---------|
| (6; 3) | (9; 5) | (6; 6) | (8; 6) | (9; 4) |
| (2; 3) | (10; 4) | (10; 6) | (8; 3) | (10; 4) |
| (2; 5) | (10; 3) | | (9; 3) | |
| (3; 4) | (9; 2) | | (9; 5) | |
| (6; 4) | (7; 2) | | | |
| (7; 5) | (6; 3) | | | |

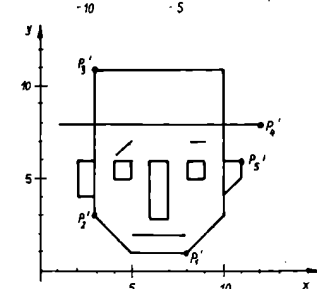
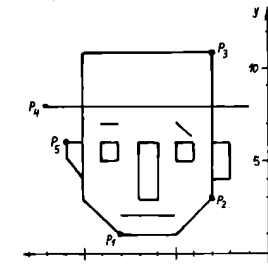
▲ 3 ▲

- | | | | |
|--------|--------|---------|--------|
| (5; 0) | (8; 5) | (5; 8) | (6; 3) |
| (1; 5) | (8; 4) | (11; 8) | (6; 7) |

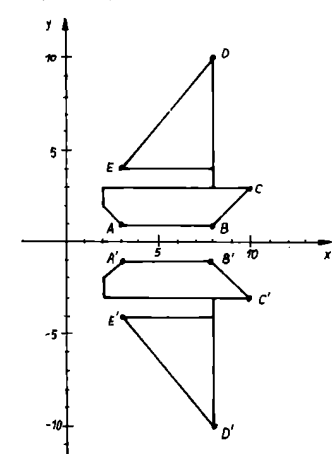
- | | | | |
|--------|--------|---------|---------|
| (1; 6) | (7; 4) | (11; 2) | (10; 7) |
| (2; 6) | (7; 6) | (13; 0) | (10; 2) |
| (2; 5) | (9; 6) | | (5; 2) |
| (5; 2) | (9; 3) | | |



- ▲ 4 ▲ $P_1'(8; 1)$ $P_4'(12; 8)$
 $P_2'(3; 3)$ $P_5'(11; 6)$
 $P_3'(3; 11)$



- ▲ 5 ▲ $A'(3; -1)$ $D'(8; -10)$
 $B'(8; -1)$ $E'(3; -4)$
 $C'(10; -3)$



- ▲ 6 ▲ $1 \leq x \leq 7$ $1 \leq y \leq 9$

Lösung zu: Schach und Mathematik

Es gibt 40320 Möglichkeiten, die acht Türme auf dem leeren Schachbrett so anzuordnen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können.

Auf die überraschend große Zahl kommt man wie folgt. Wenn wir acht Türme so auf dem

Schachbrett stellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können, so wird in jeder Reihe ein und nur ein Turm stehen. Den ersten Turm können wir an jede Stelle der ersten Reihe (also an insgesamt 8 Stellen) setzen. Den zweiten Turm stellen wir in die zweite Reihe, wobei wir darauf achten, daß er nicht in dieselbe Linie wie der erste Turm gerät. Wir können ihn also auf 7 verschiedene Stellen setzen, unabhängig davon, wo wir den ersten hingestellt haben. Ebenso erkennt man, daß man den dritten Turm auf sechserlei Weise in die dritte Reihe stellen kann. Durch Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich, daß man die acht Türme auf $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ Arten anordnen kann.

Lösung zur Aufgabe S. 109

$$4 + 4 + 6 + 3 + 4 + 5 + 1 = 27$$

Fotoamateure (12)

Junge Mathematiker (14) Musikfreunde (15)

Zu der Klasse gehören 27 Schüler.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Wer hat weißes Haar?

Da Frau Weiß kein schwarzes Haar hat und auch kein weißes Haar haben kann, muß sie braunes Haar haben. Demzufolge müssen Frau Schwarz weißes Haar und Frau Braun schwarzes Haar haben.

Logisch



Bruchlandung

Bezeichnet man die in einem derartigen Bruch vorkommenden Ziffern mit x, y und z, so gilt:

$$\frac{10x + y}{10y + z} = \frac{x}{z}$$

$$10xz + yz = 10xy + xz$$

$$9xz + yz = 10xy$$

$$z = \frac{10xy}{9x + y}$$

Dieser Bruch muß gekürzt eine ganze Zahl ergeben, x und y können alle Zahlen von 1 bis 9 annehmen. Der Aufbau der Tabelle ist denkbar einfach.

In den Spalten folgen im Zähler die Vielfachen der Zahlen 10(..., 20, 30, 40 bis 90), 20 (20, ..., 60, 80, 100 bis 180), 30 bis 90.

Im Nenner folgen die Zahlen 11, 12, 13 usw. bis 89. Leicht festzustellen ist, daß nur die Brüche

$\frac{60}{15} = 4$, $\frac{90}{18} = 5$, $\frac{120}{24} = 5$, $\frac{360}{45} = 8$ gekürzt eine ganze Zahl (=z) ergeben. An den Zahlenleisten x und y ist abzulesen:

x=1, y=6 bzw. x=1, y=9 bzw. x=2, y=6 bzw. x=4, y=9. Demnach können also die

Brüche $\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$ nach der „Methode“

von Uwe mittels Schrägstrich gekürzt werden.

Auch die Brüche $\frac{64}{16}$, $\frac{95}{19}$, $\frac{65}{26}$, $\frac{98}{49}$ sind mittels

Schrägstrich kürzbar, nur läuft dieser von links oben nach rechts unten.

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		20	30	40	50	60	70	80	90
2	20		60	80	100	120	140	160	180
3	30	60		120	150	180	210	240	270
4	40	80	120		200	240	280	320	360
5	50	100	150	200		300	350	400	450
6	60	120	180	240	300		420	480	540
7	70	140	210	280	350	420		560	630
8	80	160	240	320	400	480	560		720
9	90	180	270	360	450	540	630	720	

Theaterbesuch

Man kann auf 10 Wegen vom Bahnhof B zum Theater T gelangen:

1. B-1-2-3-7-T, 2. B-1-2-6-10-T,
3. B-1-2-6-7-T, 4. B-1-5-9-10-T,
5. B-1-5-6-10-T, 6. B-1-5-6-7-T,
7. B-4-5-9-10-T, 8. B-4-5-6-10-T,
9. B-4-5-6-7-T, 10. B-4-8-9-10-T.

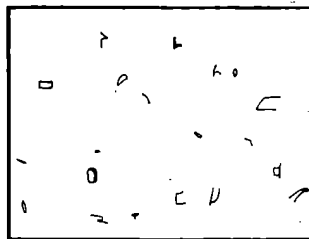
Wortspiele

Zeit – Zelt – Welt – Wert; Raute – Laute – Laube – Haube – Halbe

Symmetrische Begriffe gesucht

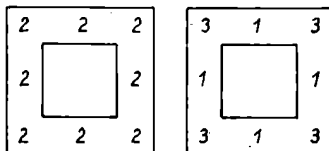
1. Tannat, 2. Elle, 3. Tat, 4. Rur, 5. Ara,
6. Ehe, 7. DFD, 8. Egge, 9. Renner, 10. Retter, 11. Ebbe, 12. k.u.k., 13. Uhu, 14. rar,
15. SOS, 16. Ili, 17. Otto, 18. nennen, 19. Rotor, 20. Monom, 21. Radar, 22. Legel, 23. Laval. Kontrollbegriffe: (1 bis 9): Tetraeder, (10 bis 18): Rekursion, (19 bis 23): Rodel.

Autoreparatur



Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. I. Ignatjew

▲ 2349 ▲



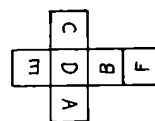
Lösungen zu: Heiterer Denksport

Heimatkunde

Die kürzeste Route: Berlin–Rostock–Dresden–Cottbus–Frankfurt (O.)–Berlin oder umgekehrt.

Würfeleien

Auf der Grundfläche der drei unteren Würfel befindet sich der Buchstabe E.



Zahlenquadrat

$$2 + 16 - 12 = 6$$

$$+ - - +$$

$$3 + 15 - 11 = 7$$

$$- + + -$$

$$1 + 13 - 9 = 5$$

$$= = = =$$

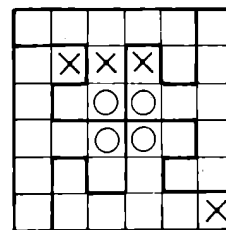
$$4 + 14 - 10 = 8$$

Kombiniere!

Teil Nr. 4 gehört in die linke obere Ecke des Irrgartens. Das vollständige Labyrinth sieht so aus:

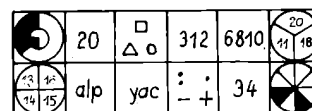


Von gleicher Form



Mit scharfem Blick

1. außen: Drehung 120°; innen: Drehung 90°;
2. $n(n-1)$, $n=1, 2, \dots, i$; 3. Permutationen von $\square \triangle \square$; 4. Permutationen von 1, 2, 3;
5. Zahlen aus $n, n+2, n+4, n=1, 2, 3, \dots$;
6. u.l.: $2n-1$; u.r.: $3n, n=1, 2, 3, \dots \sum = n^2$, $n=2, 3, \dots$; 7. $p, p+1, p+2, p+3, p$ Primzahlen, $p=2, 3, 5, 7, 11, 13$, Eintrag um 90° gedreht; 8. alphaalphaalpha..., 3 Buchstaben; 9. Alphabet, 1 Buchstabe ausgelassen;
10. +, : wechseln; -, · bleiben $2 \times$, dann Wechsel; 11. $n^2 - 2, n=2, 3, 4, \dots$; 12. oben: Drehung 45°, unten: Drehung 135°



Irrgarten



Lösungen zu Heft 3/83

Lösung zu: Ein Blick in das „geistige Labor“ von Leibniz

Es geht Leibniz um die Bestimmung der Anzahl von Variationen mit Wiederholung, die ein bestimmtes Element, das wir mit n_f bezeichnen, enthalten.

Spalte I: Anzahl der Würfel r mit je $n=6$ Elementen $n_0, \dots, n_f$

Spalte II: n' = Anzahl der Variationen m.W. aus n Elementen zur r ten Klasse

Spalte III: In $(n-1)^r$ Variationen ist das Element n_f nicht enthalten.

Spalte IV: In $n' - (n-1)^r$ Variationen tritt das Element n_f auf.

Spalte V bis X: Die Anzahl der Variationen, in denen das Element n_f p -mal auftritt (in Spalte V ist $p=1$, ..., in Spalte X ist $p=6$), ist $\binom{p}{p} \cdot (n-1)^{r-p}$.

Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe

Das „Erraten“ einer natürlichen Zahl

Die durchzuführenden Divisionen mit Rest sind $x = a q_1 + r_1$

$$x = (a+1) q_2 + r_2$$

(worin $q_1 = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{x}{a}$, $0 \leq r_1 < a$, $q_2 = \left\lfloor \frac{x}{a+1} \right\rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{x}{a+1}$, $0 \leq r_2 < a+1$; vgl. H. Pieper,

Zahlen aus Primzahlen, Berlin 1974, S. 25).

Multipliziert man die erste Gleichung mit $a+1$, die zweite Gleichung mit a^2 und addiert beide Gleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (a+1)x + a^2x &= (a^2 + a + 1)x = a(a+1)x + x \\ &= (a+1)aq_1 + a^2(a+1)q_2 + (a+1)r_1 + a^2r_2 \\ &= a(a+1)[q_1 + aq_2] + s \text{ und somit} \\ s - x &= a(a+1)x + a(a+1)[q_1 + aq_2], \text{ also} \\ s - x &= a(a+1)[x - q_1 - aq_2]. \end{aligned}$$

Hierin ist $x - q_1 - aq_2$ eine natürliche Zahl.

($x - q_1 - aq_2$ ist eine ganze Zahl.

Wäre $x - q_1 - aq_2 \leq 0$, so wäre auch $a(a+1)(x - q_1 - aq_2) \leq 0$, also

$a(a+1)x \leq aq_1(a+1) + (a+1)q_2a^2 = (x - r_1)(a+1) + (x - r_2)a^2$, woraus $a(a+1)x \leq a(a+1)x - s$, d. h. $s \leq 0$ folgt, obwohl s positiv ist.

Also muß $x - q_1 - aq_2 > 0$ sein.)

Somit ist $a(a+1)$ ein Teiler von $s - x$. Hieraus folgt $s - x = a(a+1)q$ mit einer natürlichen Zahl q , d. h. $s = a(a+1)q + x$ (worin $0 < x < a(a+1)$ nach Wahl von x).

x ist in der Tat der Rest bei der Division $\frac{s}{a(a+1)}$.

Lösungen zu:

Knifflige Aufgaben mit Kreisen

▲ 1 ▲ Es sei a die Länge einer Quadratseite. Für die schraffierten Flächen gilt dann im Quadrat

$$(\text{Bild 1}) \quad A_1 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 \cdot \pi = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\text{Bild 2}) \quad A_2 = a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\text{Bild 3}) \quad A_3 = a^2 - \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\text{Bild 4}) \quad A_4 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 \cdot \pi = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Die vier schraffierten Flächen haben den gleichen Flächeninhalt; es gibt keine mit dem größten Flächeninhalt.

▲ 2 ▲ Die beiden Kreisbögen erzeugen im Quadrat drei Flächen. Für eine der nicht schraffierten Flächen gilt

$$A_x = a^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot a^2 = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Für den schraffierten Flächeninhalt gilt somit

$$a^2 - 2a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Daraus folgt weiter

$$a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) : a^2 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Die schraffierte Fläche macht rund 57% vom Flächeninhalt des Quadrates aus (Bild 4).

▲ 3 ▲ Es sei A_x die Summe der Flächeninhalte der vier Kreisbogenzweiecke; dann gilt

$$\begin{aligned} A_x &= a^2 + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= a^2 + \pi \cdot \frac{a^2}{2} - \pi \cdot \frac{a^2}{2} = a^2. \quad (\text{Bild 5}). \end{aligned}$$

▲ 4 ▲ Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 6) gilt

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot d^2 - \frac{1}{4}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}\pi d^2 - \frac{1}{16}\pi d^2 = \frac{1}{16}\pi d^2. \end{aligned}$$

Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 7) gilt

$$\begin{aligned} F_7 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot d^2 + \frac{1}{4}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}\pi d^2 + \frac{1}{16}\pi d^2 = \frac{3}{16}\pi d^2. \end{aligned}$$

Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 8) gilt

$$\begin{aligned} F_8 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi d^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}\pi d^2 + \frac{1}{32}\pi d^2 - \frac{1}{64}\pi d^2 = \frac{9}{64}\pi d^2. \end{aligned}$$

Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 9) gilt

$$\begin{aligned} F_9 &= \frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{3d}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}\pi d^2 - \frac{1}{64}\pi d^2 \\ &= \frac{8}{64}\pi d^2 = \frac{1}{8}\pi d^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt $F_1 < F_4 < F_3 < F_2$.

▲ 5 ▲

$$F_{10} = (2a)^2 - \frac{1}{4}\pi(2a)^2 - a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2$$

$$- \left(a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2\right) = a^2 \cdot (4 - \pi),$$

$$F_{11} = a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\pi\right),$$

$$F_{12} = (2a)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2 \cdot (4 - \pi),$$

$$F_{13} = 4 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2a^2 \cdot (\pi - 2),$$

$$F_{14} = a \cdot 2a = 2a^2,$$

$$\begin{aligned} F_{15} &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\pi a^2 \\ &\quad + \left(a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2\right) = \frac{1}{8}a^2 \cdot (12 + \pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{16} &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{8}a^2 \cdot (3\pi + 4). \end{aligned}$$

▲ 6 ▲ Aus $k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi \cdot r$ und

$$s = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{4} = \pi \cdot r \text{ folgt } k = s. \quad (\text{Bild 17})$$

▲ 7 ▲ Aus $F_{18} = \frac{1}{4}\pi d^2$ und

$$F_{19} = 4 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 \text{ folgt } F_1 = F_2.$$

(Bild 18 und 19)

▲ 8 ▲

$$\begin{aligned} F_{20} &= 3a \cdot a + \frac{1}{2}\pi a^2 = 3a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{a^2}{2} \cdot (6 + \pi) \\ &= \frac{1}{2}(6 + \pi) \text{ cm}^2 \approx 4,57 \text{ cm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{21} &= 4a \cdot a + (4a^2 - \pi a^2) = 8a^2 - \pi a^2 \\ &= a^2(8 - \pi) = (8 - \pi) \text{ cm}^2 \approx 4,86 \text{ cm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{22} &= 2 \cdot \left[\frac{1}{4}\pi(2a)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi a^2 = 2\pi \text{ cm}^2 \approx 6,28 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Lösungen zu: Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb, Heft 1/83

Ma 9 ■ 2313 Man erkennt sofort, daß 0 eine Lösung ist. Es sei nun $y \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} y(y^2 - y) &= y(y+1), \\ y^2 - y &= y + 1, \\ y^2 - 2y - 1 &= 0, \\ y_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nur die drei reellen Zahlen $1 - \sqrt{2}$; 0 und $1 + \sqrt{2}$ erfüllen die gegebene Gleichung. Probe!

Ma 9 ■ 2314

$$q = a + b = 7, \text{ also } b = 7 - a.$$

$$z_1 = 10a + b = 10a + 7 - a = 9a + 7;$$

$$z_2 = 10b + a = 10(7 - a) + a = 70 - 9a.$$

$$z_2^2 = 51 = \frac{1}{4}z_1^2, \quad (70 - 9a)^2 + 51 = \frac{1}{4}(9a + 7)^2,$$

$$a^2 - \frac{574}{27}a + \frac{2195}{27} = 0.$$

$a_1 = 5$; a_2 entfällt, da gebrochene Zahl. Die Zahl lautet 52. Es gilt $25^2 + 51 = 26^2$.

Ma 9 ■ 2315 Es gilt $1981 = 7 \cdot 283$ und $1982 = 2 \cdot 991$.

Da das Primzahlzerlegungen sind, gibt es für das Alter von Stefan bzw. Susi jeweils nur eine Möglichkeit:

Stefan ist 7 Jahre, Susi 2 Jahre alt.

Nun gilt

$$283 + 991 = 1274 \text{ und}$$

$$1274 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13.$$

Daraus folgt:

Die Mutter ist $2 \cdot 13 = 26$ Jahre alt; die Großmutter ist $7 \cdot 7 = 49$ Jahre alt. ($1274 : 26 = 49$)

Ma 9 ■ 2316 Nach Aufgabenstellung gilt
 $u = 2(a+b) = 26 \text{ cm}$ (1)
 und $A = a \cdot b = 40 \text{ cm}^2$. (2)
 Aus (1) folgt $a = 13 \text{ cm} - b$. Das setzt man in
 (2) ein und erhält

$(13 \text{ cm} - b)b = 40 \text{ cm}^2$ bzw.
 $b^2 - 13b \text{ cm} + 40 \text{ cm}^2 = 0$. Es folgt $b_1 = 8 \text{ cm}$
 und $b_2 = 5 \text{ cm}$. Die Längen der Rechteck-
 seiten betragen $a = 8 \text{ cm}$ und $b = 5 \text{ cm}$.

Ma 10/12 ■ 2317 (AF9)₁₆ = 2809;
 (BAD)₁₆ = 2989; 10000 = (2710)₁₆;
 1000000 = (F4240)₁₆.

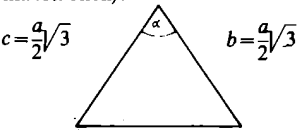
Heft 1/83:

Ma 10/12 ■ 2318 Es sei $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ die Zerlegung von n in Potenzen von
 Primfaktoren. Für die Anzahl t der Teiler
 von n gilt dann $t = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1)$.
 Nun hat n die Primfaktoren 2, 3 und 5, da
 $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, und zwar nur diese drei, weil
 $t = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ gilt.

Wegen $n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}$ gibt es nun die fol-
 genden Möglichkeiten:

k_1	k_2	k_3	n
4	2	1	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$
4	1	2	$2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 1200$
2	4	1	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 1620$
2	1	4	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^4 = 7500$
1	4	2	$2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 4050$
1	2	4	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = 11250$

Ma 10/12 ■ 2319 Die Kantenlänge des Te-
 traeders sei a . Dann beträgt die Länge der
 Höhe einer Seitenfläche nach dem Satz des
 Pythagoras $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Zwei verschiedene vom
 Mittelpunkt einer Kante ausgehende Höhen
 bilden den gesuchten Winkel. Die Größe die-
 ses Winkels berechnen wir mit Hilfe des
 Cosinussatzes im dargestellten Dreieck (nicht
 maßstäblich)!



Es gilt $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

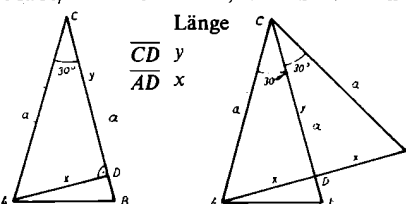
und wegen $b = c$ gilt $\cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}$,

$\cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{2b^2}$, und wegen $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ gilt

$\cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{3a^2/4}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Es folgt $\alpha \approx 70,52^\circ$.

Zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetra-
 eders schneiden sich unter einem Winkel von
 etwa $70,52^\circ$.

Ma 10/12 ■ 2320 Skizze, nicht maßstäblich!



Aus $\sin 30^\circ = \frac{x}{a}$ folgt $x = \frac{a}{2}$.

Aus $\cos 30^\circ = \frac{y}{a}$ folgt $y = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Nun gilt

$A_{ADC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$, d. h.

$A_{ADC} = \frac{a^2}{8} \cdot \sqrt{3}$.

$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \sin 60^\circ$, $A_{ADC} \approx 0,216 a^2$.

Ph 6 ■ 131

Geg.:

Zimmerlänge $a = 2,70 \text{ m}$

Zimmerbreite $b = \frac{2}{3} \cdot 2,70 \text{ m} = 1,80 \text{ m}$

Höhe des Wasserstandes im Zimmer

$c = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$

Aquariumlänge $x = \frac{1}{3} \cdot 1,80 \text{ m} = 0,60 \text{ m}$

Aquariumbreite $y = \frac{1}{6} \cdot 1,80 \text{ m} = 0,30 \text{ m}$

Ges.: Die Höhe des Wasserstandes im Aqua-
 rium z .

Das Volumen V des Wassers im Aquarium
 beträgt $V = x \cdot y \cdot z$

bzw. $z = \frac{V}{x \cdot y}$. (1)

Nun ist V aber gleich dem Volumen des
 Wassers im Zimmer. Also gilt auch

$V = a \cdot b \cdot c$. (2)

Setzt man (2) in (1) ein, erhält man

$z = \frac{a \cdot b \cdot c}{x \cdot y}$,

$z = \frac{2,70 \text{ m} \cdot 1,80 \text{ m} \cdot 0,02 \text{ m}}{0,60 \text{ m} \cdot 0,30 \text{ m}}$,

$z = 0,54 \text{ m}$.

Der Wasserstand im Aquarium betrug 54 cm.

Ph 7 ■ 132 Geg.:

Nutzleistung der Windkraftmaschine $P_1 =$
 4 kW , Wirkungsgrad der Windkraftmaschine
 $\eta_1 = 42\%$, Wirkungsgrad der Wasserpumpe
 $\eta_2 = 85\%$

Pumphöhe $h = 5 \text{ m}$

Zeit $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$

Ges.: Gesamter Wirkungsgrad η

Zugeführte Windleistung P_{zu}

Gesamte Leistung P_{ges}

Gewicht des Wassers G

a) Der gesamte Wirkungsgrad η der Anlage
 ergibt sich aus

$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$,

$\eta = 0,42 \cdot 0,85 = 0,357$.

Es werden insgesamt 35,7% der Windlei-
 stung ausgenutzt.

b) Die Windkraftmaschine hat einen Wir-
 kungsgrad von $\eta_1 = \frac{P_1}{P_{zu}}$,

also $P_{zu} = \frac{P_1}{\eta_1} = \frac{4 \text{ kW}}{0,42} = 9,524 \text{ kW} \approx 9,5 \text{ kW}$.

Der Wind muß eine Leistung von 9,5 kW zur
 Verfügung stellen.

c) Bei Höchstleistung der Anlage gilt

$\eta = \frac{P_{ges}}{P_{zu}}$, also $P_{ges} = \eta \cdot P_{zu}$, $P_{ges} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot P_1}{\eta_1}$,

$P_{ges} = \eta_2 \cdot P_1 = 0,85 \cdot 4 \text{ kW} = 3,4 \text{ kW}$.

Die Wasserpumpe gibt bei Höchstleistung der
 Anlage eine Leistung von 3,4 kW ab.

d) Es steht eine Leistung von

$3,4 \text{ kW} = 3,4 \cdot 102 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 346,8 \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$

zur Verfügung. Nun gilt

$P_{ges} = \frac{W}{t}$ und mit $W = G \cdot h$

$P_{ges} = \frac{G \cdot h}{t}$. Dann ist

$G = \frac{P_{ges} \cdot t}{h}$,

$G = \frac{346,8 \text{ kpm} \cdot 3600 \text{ s}}{5 \text{ m} \cdot \text{s}}$,

$G = 249696 \text{ kp}$,

$G \approx 250000 \text{ kp} = 250 \text{ Mp} \approx 250 \text{ m}^3$.

Mit dieser Anlage können in einer Stunde
 250 m^3 Wasser aus 5 m Tiefe gepumpt wer-
 den.

Ph 8 ■ 133 Geg.: $d_1 = 75,0 \text{ cm}$ Ges.: $\Delta \vartheta$
 $d_0 = 74,6 \text{ cm}$

$\alpha = 0,000013 \frac{1}{\text{K}}$

Für die Längenänderung eines festen Kör-
 pers gilt die Gleichung

$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$, also $\Delta \vartheta = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha}$.

Nun ist der Umfang des Reifens $l_0 = \pi \cdot d_0$,
 der des Rades $l_1 = \pi \cdot d_1$, und es ergibt sich
 ein Längenunterschied von

$\Delta l = l_1 - l_0$,

$\Delta l = \pi d_1 - \pi d_0$,

$\Delta l = \pi(d_1 - d_0)$.

Damit erhält man für

$\Delta \vartheta = \frac{\pi(d_1 - d_0)}{\pi d_0 \cdot \alpha}$,

$\Delta \vartheta = \frac{d_1 - d_0}{d_0 \cdot \alpha}$,

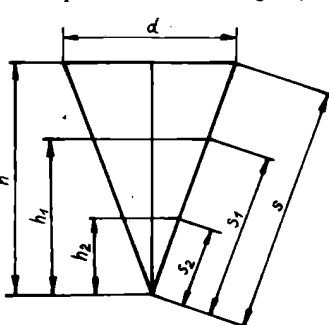
$\Delta \vartheta = \frac{(75,0 - 74,6) \text{ cm} \cdot \text{K}}{74,6 \text{ cm} \cdot 0,000013}$,

$\Delta \vartheta \approx 412 \text{ K} \approx 412^\circ \text{C}$.

Der Reifen muß um 412°C erwärmt werden.

Ph 9 ■ 134 Geg.: $d = 8 \text{ cm}$ Ges.: s_1 und s_2
 $h = 16 \text{ cm}$

Es handelt sich stereometrisch um einen auf
 der Spitze stehenden Kegel (s. Bild) mit



$V = \frac{1}{12} \pi d^2 h$. Weiterhin gilt, da $h = 16 \text{ cm}$ und

$d = 8 \text{ cm}$ ist, $h:d = 2:1$ bzw. $d = \frac{h}{2}$, und damit

ist $V = \frac{1}{48} \pi h^3$ bzw. $h = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot V}{\pi}}$.

(Fortsetzung Heft 6/83)

Eine kleine Lektion in Tangram

Tangram ist ein Spiel, das schon vor 2000 Jahren in China bekannt gewesen sein soll. Tangram besteht aus 7 Elementen, die 5 größeren Elemente kann man sich aus 2 bzw. 4 der kleinen Elemente, also aus gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt denken. Bild 1 zeigt, wie ihr ein Quadrat zerlegen müßt, um die Teile des Tangram-Spieles zu erhalten. Aus der Fülle möglicher Figuren habe ich 7 ausgewählt, an denen ihr euch probieren könnt (Bild 2). Ihr seid nun besser für Hexatrim und Pentamino gerüstet und solltet euch diese Spiele noch einmal vornehmen (siehe *alpha*, Heft 4/83).

Wer Freude daran findet, schöne Figuren und Muster zu entwerfen, sollte sich die „runde“ Variante des Tangrams ansehen (ND, 8./9. 5. 1982). Die Konstruktionsvorschrift entnehmt ihr dem Bild 3. Ein mögliches Muster ist in Bild 4 dargestellt.

Denkbar sind nun ähnliche Spiele mit anderen Elementen. Das Bild 5 gibt die Zerlegung eines Quadrates in 14 Elemente an, von denen jedes aus vier gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken besteht, allerdings sind die 8 schraffierten Dreiecke (6 Flächen) überflüssig. In diesem Spiel tragen die Elemente folgende Bezeichnungen (siehe Bild der Wissenschaft, 8, 1979): Quadrat (1), Obelisk (2), Bumerang (3), Tempel (4), Pfeil (5), Rechteck (6), Bahnhof (7), Haken (8), Trapez (9), Schlange (10), Breitparallelogramm (11), Unterstand (12), Schmalparallelogramm (13), Dreieck (14). Legt aus diesen Elementen Figuren! Dabei ist es erlaubt (wie bei den vorher beschriebenen Spielen auch), die Elemente umzudrehen, also ihre Rückseite nach oben zu legen.

Das Trapez (Bild 6) ist aus 9 Elementen zusammengesetzt. Parallelogramm, Quadrat und Rechteck (Bild 7) bestehen aus jeweils 4 Elementen. Findet weitere Figuren!

Zum Schluß soll ein Spiel ganz anderer Art beschrieben werden: СМЕКАЛКА (was frei übersetzt „Köpfchen“ bedeutet). Übertragt dazu das in Bild 8 dargestellte Quadrat im Maßstab 1 : 2 auf Pappe, es ist die Grundfläche des Spieles. Schneidet dann aus einem gleich großen Quadrat von dicker Pappe oder Sperrholz die in dem Bild nicht getönte Fläche aus, und klebt die Restflächen entsprechend der Skizze auf die Grundfläche! Fertig

euch nun 16 runde Spielsteine von der Größe eines Pfennigs an! Je 4 dieser Steine werden rot, gelb, blau bzw. grün angemalt. Setzt je 4 Steine nebeneinander in die Ecken der Spielfläche, z. B. so, daß die 4 Steine einer Farbe in je einer Ecke liegen! Erzeugt nun neue Anordnungen, indem ihr in jedem Zug nur einen Spielstein bewegt! Man kann sich etwa die Aufgabe stellen, die Steine so zu verschieben, daß in jeder Ecke je ein Stein von jeder Farbe liegt. Ihr könnt euch natürlich allgemein als Problem stellen, aus einer vorgegebenen Anordnung der 16 Steine irgendeine gewünschte Anordnung herzustellen, indem ihr erlaubte Züge (Schieben von jeweils einem Spielstein) ausführt. Ihr werdet bald merken, daß es gar nicht sehr schwer ist, eine Lösung zu erhalten. Aber welcher Spieler benötigt dazu die kleinste Anzahl von Zügen? Viel Spaß beim Spielen und Knobeln!

W. Schmidt

Bild 1

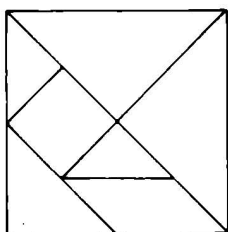


Bild 2

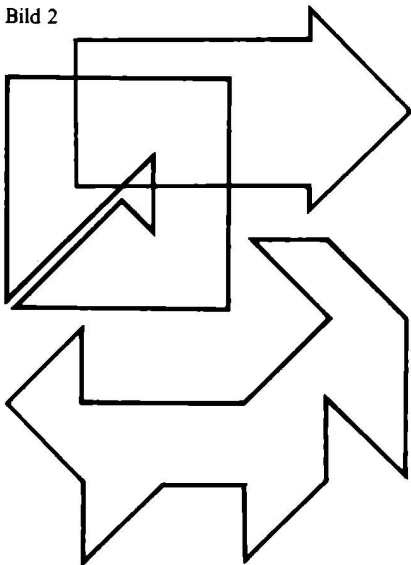


Bild 3

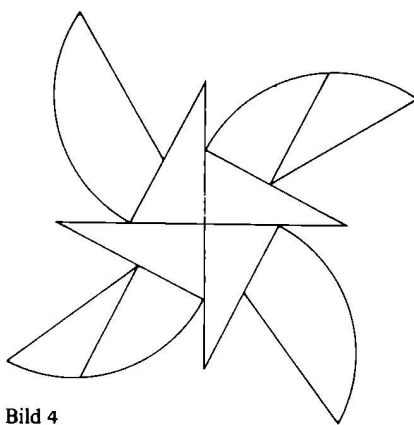
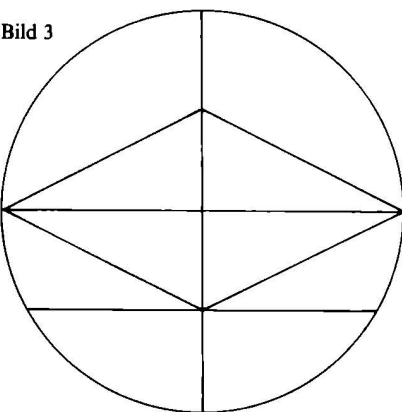


Bild 4

Bild 5

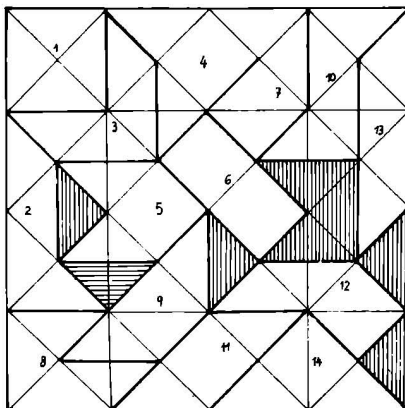


Bild 6

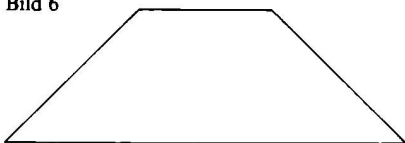


Bild 7

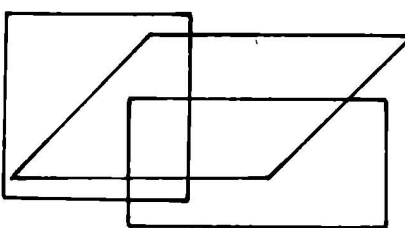
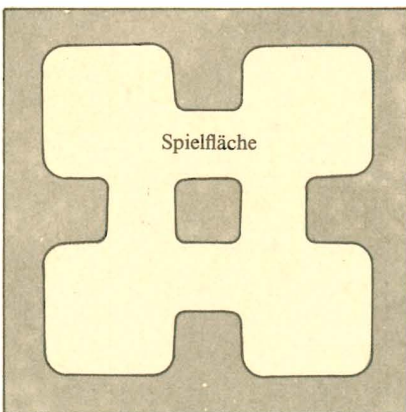


Bild 8

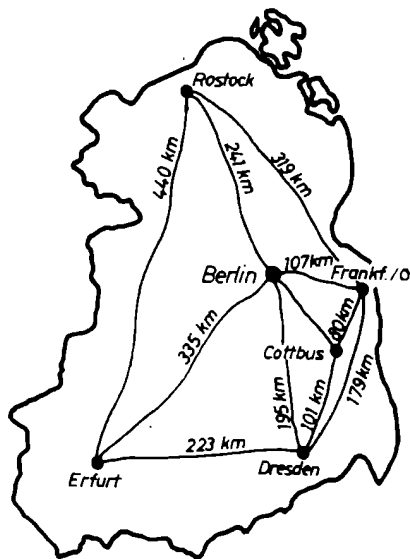


Heiterer Denksport

Heimatkunde

Von Berlin aus soll eine Rundreise durch die 5 angegebenen Städte gemacht werden. Welches ist die kürzeste Reiseroute?

Aus: Technikus, Berlin

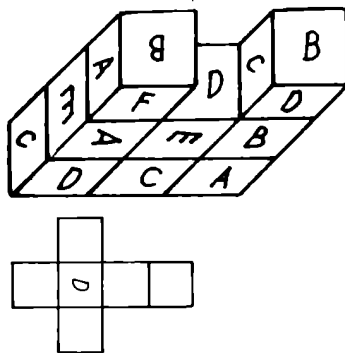


Würfeleien

Alle acht Würfel in der abgebildeten Figur sind gleich.

Finde heraus, wie die Buchstaben auf dem daneben abgebildeten Netz anzuordnen sind und – zweitens – welche drei Buchstaben sich auf den Grundflächen der drei unteren Würfel befinden!

Quant, Moskau



Zahlenquadrat

Setzt die natürlichen Zahlen von 1 bis 16 richtig in die Leerfelder ein!

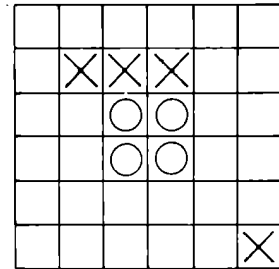
Dr. R. Mildner, Sekt. Math. der Karl-Marx-Universität Leipzig

2	+		-		=	6
+		-		-		+
	+		-		-	
-		+		+		-
	+		-		-	
=		=		=		=
4	+		-		=	8

Von gleicher Form

Dieses 6x6-Quadrat soll in vier Teile von gleicher Form und Größe in der Weise zerschnitten werden, daß sich in jedem dieser Teile ein Kreuz und ein Kreis befindet.

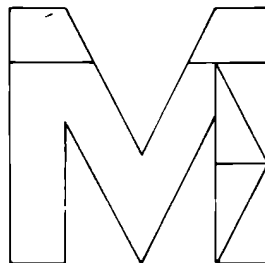
LVZ, Leipzig



Gut kombinieren

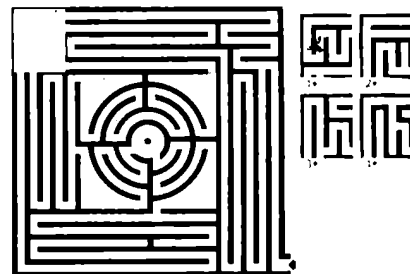
Übertrage dieses M auf Transparent, zerschneide es in seine sieben Teile und versuche, es möglichst schnell wieder zusammenzusetzen!

Mathem. pie, London



Kombiniere!

delta, Warschau



Irrgarten

Janos sucht gemeinsam mit seinem Hund den Weg zur Datsche. Hilf ihm dabei!

Füles, Budapest



Mit scharfem Blick

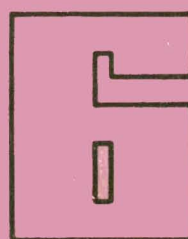
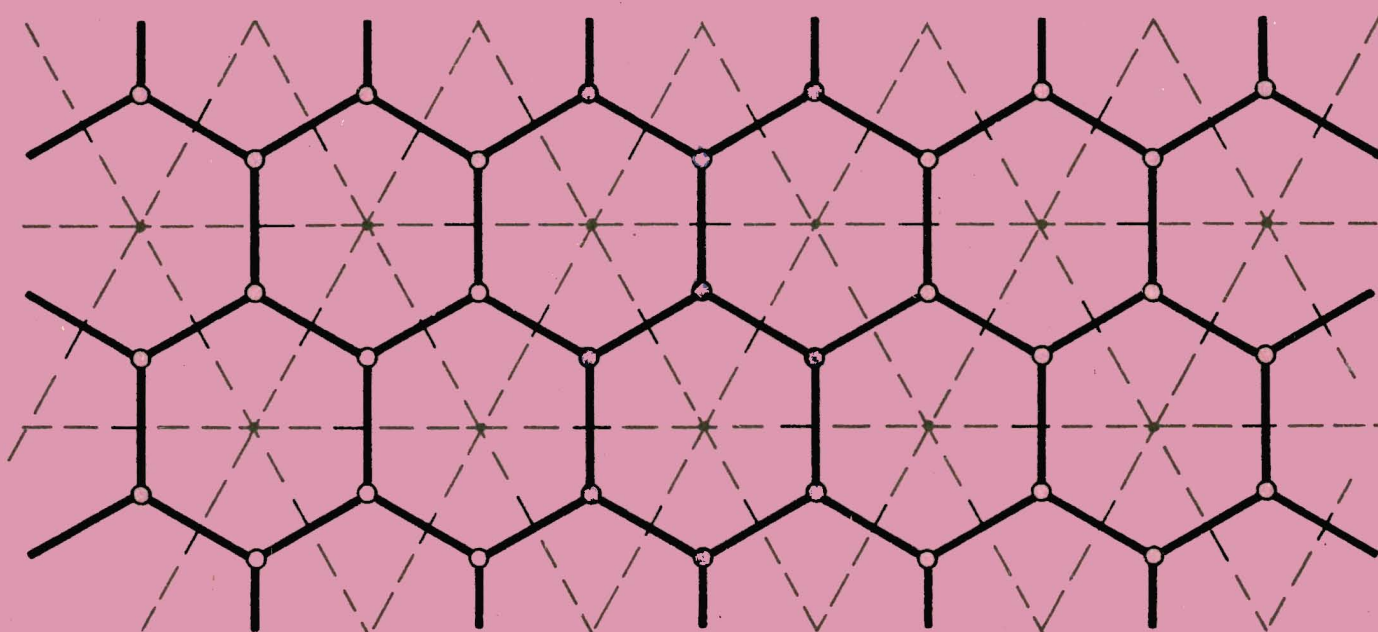
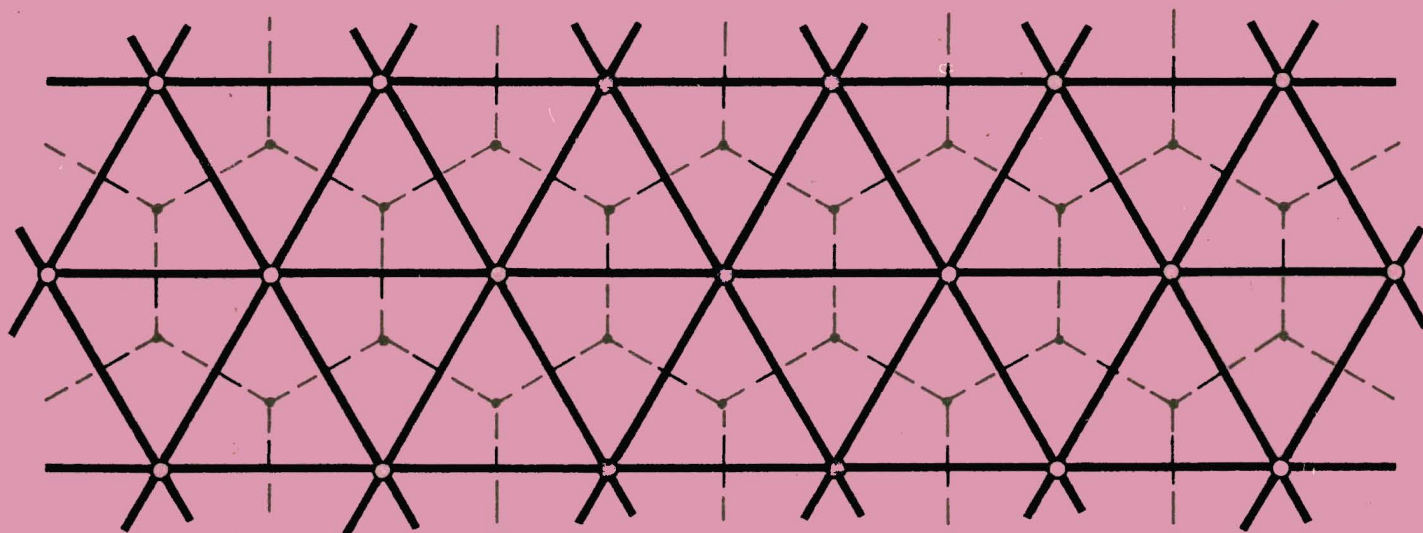
Bei genauer Betrachtung der einzelnen Zeilen werdet ihr gewisse Gesetzmäßigkeiten in der Aufeinanderfolge erkennen. Füllt dementsprechend die Leerfelder aus!

Dr. R. Mildner, Leipzig

1	0	2	6	12		20
2	0	2	6	12		20
3	0	2	6	12		20
4	123	132	213	231		321
5	135	246	357	468	579	
6	0	2	6	12		20
7	1	3	5	7	9	11
8	alp	haa	lph	aal	pha	
9	ace	gik	maq	suw		egi
10	+	-	+	-	+	-
11	2	7	14	23		47
12	0	2	6	12		20

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 125, 132); Vi-
gnette aus der finnischen math. Schülerzeit-
schrift *Functio* (S. 126); J. Weiß, Leipzig
(S. 128); ADN-Zentralbild, Berlin (S. 137)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vor-
lage von Dr. R. Klette, Universität Jena



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit
AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 23. August 1983

Auslieferungstermin: 15. Dezember 1983



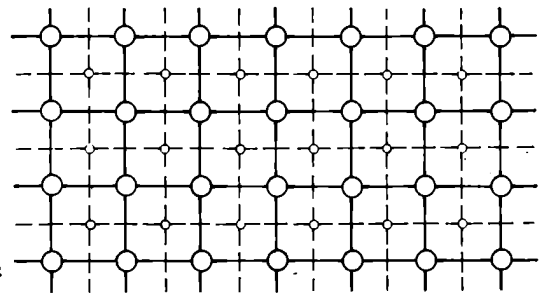
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Polygonzüge im Raster [8]*
Dr. R. Klette, Sektion Mathematik der *Friedrich-Schiller-Universität* Jena
- 124 15 Aufgaben aus: Neun Bücher Arithmetischer Technik (aus einem
chinesischen Rechenbuch) [7]
Zusammenstellung: H. Begander/J. Lehmann, Leipzig
- 125 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Huzihiro Araki [10]
Sektion Mathematik der Universität Kyoto, Japan
- 126 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 128 V. Internationaler Mathematiker-Kongreß in Warschau [8]
J. Weiß, Lektor für Mathematik im Teubner-Verlag Leipzig
- 129 Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität,
Teil 3 [9]
Dr. A. Hemmerling, Sektion Mathematik der *E.-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- 130 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – speziell für Klasse 5/6
Aus der Geschichte der Längenmaße [5]
Mathematikfachlehrer U. Sonnemann, EOS Grabow, Fachberater Mathematik
- 131 Unsere historische Aufgabe: Die Erbschaft [8]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der
DDR
- 132 Der Turm von Babylon [5]
Dr. H.-D. Gronau, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität* Rostock
- 134 Schriftliche Abschlußprüfung [9]
Mathematik, Schuljahr 1982/83, Oberschule, Klasse 10
- 135 Euler und seine Zeit [7]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle
- 136 Leonhard Euler in Berlin [8]
Dipl.-Math. Annette Vogt, Institut für Theorie, Geschichte und Organisation der
Wissenschaft der Akademie der Wissenschaften der DDR
- 137 Euler-Ehrung der Akademie der Wissenschaften der DDR [7]
J. Lehmann, Leipzig
- 138 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 140 Lösungen [5]
- 144 *alpha*-Wettbewerb 1982/83 [5]
Kollektive Beteiligung
- III. U.-Seite: Schach dem König (*alpha*-Wettbewerb)
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- IV. U.-Seite: Kreuzzahlrätsel – Elementare Funktionen [9]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Polygonzüge im Raster



Auf dem Titelblatt dieses Heftes und im Titel dieses Beitrags sind drei verschiedene Gitter der Ebene dargestellt, welche durch jeweils einen Typ eines regelmäßigen Vielecks charakterisiert sind: das orthogonale Gitter durch das Rechteck (griechisch: Orthogon), das triagonale Gitter durch das Dreieck (griechisch: Triagon) und das hexagonale Gitter durch das Sechseck (griechisch: Hexagon). In der Titelbildzeichnung sind in den drei Gittern zu jedem Gitterpunkt die zugehörigen Flächen (Einzugsgebiete) gestrichelt dargestellt, womit insbesondere die wechselseitige Beziehung (Dualität) zwischen dem triagonalen und dem hexagonalen Raster angedeutet sei. Diese drei Gitter sind für zahlreiche Arbeitsgebiete in der Technik und Wissenschaft von Bedeutung, wie zum Beispiel als prinzipielle Anordnungsschemata beim Entwurf von mikroelektronischen Bausteinen, als Bildraster bei der Erstellung von Zeichnungen mittels Computern oder als Bildraster bei der automatischen Verarbeitung von Bildern in Computersystemen, welche mit einem speziellen Eingabegerät zur Übernahme von Bildern in den Speicher eines Computers ausgestattet sind.

Wir wollen uns in diesem Artikel der Frage zuwenden, wie Polygonzüge in diesen Gittern darzustellen und entsprechend mathematisch zu behandeln sind. Solche Polygonzüge können im konkreten Anwendungsfall gewisse Umrisse (Konturen) von Figuren (Objekten) sein, deren Abbildung im jeweiligen Gitter auszuwerten ist, indem zum Beispiel der Flächeninhalt, der Umfang oder andere Merkmale dieser Polygonzüge bestimmt werden. Vor der Behandlung der genannten Fragestellung soll jedoch zunächst bewiesen werden, daß neben den auf dem Titelbild dargestellten Gittern keine weiteren existieren, die durch je einen Typ eines regelmäßigen Vielecks charakterisiert sind.

Regelmäßige Gitter

Es seien n und m natürliche Zahlen. Ein n -Eck ist ein Vieleck mit n Ecken. Ein *regelmäßiges Gitter* besteht aus aneinandergefügt regelmäßigen n -Ecken, wobei jeweils m solcher n -Ecke in einem Gitterpunkt zusammenstoßen. Ein solches Gitter wollen

wir mit dem Symbol $\langle n, m \rangle$ bezeichnen. Im regelmäßigen n -Eck ist ein Innenwinkel gleich $\left(1 - \frac{2}{n}\right) 180^\circ$. In jedem Gitterpunkt des Gitters $\langle n, m \rangle$ treffen m derartige Innenwinkel aufeinander und ergeben zusammen 360° . Folglich gilt

$$360 = m \left(1 - \frac{2}{n}\right) 180.$$

Durch elementare Umformungen dieser Gleichung erhalten wir zunächst

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2},$$

woraus $nm = 2n + 2m$ folgt. Folglich ist $nm - 2n - 2m + 4 = 4$ bzw. $(n-2)(m-2) = 4$. Für diese letzte Gleichung untersuchen wir nun, welche positiven und ganzzahligen Werte für n und m möglich sind. Als Ergebnis erhalten wir, daß neben $\langle 6, 3 \rangle$, $\langle 3, 6 \rangle$ und $\langle 4, 4 \rangle$ keine weiteren Lösungen für n und m , d.h. keine weiteren regelmäßigen Gitter existieren.

Raster

Bei den technischen Anwendungen regelmäßiger Gitter spricht man im allgemeinen von *Rasterungen der Ebene*. Wir wollen unter einem *Raster* ein regelmäßiges Gitter verstehen, dessen charakterisierendes n -Eck den Flächeninhalt 1 besitzt und welches den Punkt $(0, 0)$ der reellen Ebene als Gitterpunkt besitzt. Für die Punkte der reellen Ebene setzen wir dabei kartesische Koordinaten voraus. Für das orthogonale Raster erhalten wir, daß genau alle Punkte der reellen Ebene mit ganzzahligen Koordinaten die Gitterpunkte dieses Rasters sind. Die Dreiecke des triagonalen Rasters besitzen Seiten der Länge

$$\sqrt{\frac{4}{3}},$$

die Sechsecke des hexagonalen Rasters besitzen Seiten der Länge

$$\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Der Leser möge sich die Begründungen für diese konkreten Längenangaben überlegen.

Einfache Polygon im Raster

Ein *einfaches Polygon* (einfaches Vieleck) ist durch die Folge der Eckpunkte im Sinne eines einmaligen Umlaufes des Polygons eindeutig

bestimmt. Bei einfachen Polygonen in einem der drei Raster soll im weiteren vorausgesetzt werden, daß die Eckpunkte ausschließlich Gitterpunkte sind. Das folgende Polygon im orthogonalen Raster (Bild 1) ist zum Beispiel

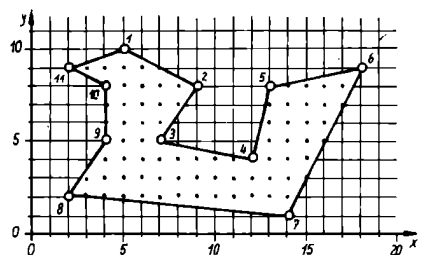


Bild 1

durch die Eckpunktfolge $(5, 10), (9, 8), (7, 5), (12, 4), (13, 8), (18, 9), (14, 1), (2, 2), (4, 5), (4, 8), (2, 9)$ eindeutig charakterisiert. Für ein einfaches Polygon mit der Eckpunktfolge $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ (in unserem Beispiel ist $n = 11$), wobei $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), p_3 = (x_3, y_3), \dots, p_n = (x_n, y_n)$, ist der Flächeninhalt dieses einfachen Polygons durch den Absolutbetrag der Summe

$$(*) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1})$$

gegeben, wobei $y_0 = y_n$ und $y_{n+1} = y_1$ gelte. Für das obige Beispiel eines einfachen Polygons im Orthogonalraster ist dieser allgemeinen Gesetzmäßigkeit zufolge der Flächeninhalt gleich

$$\frac{1}{2} [5 + 45 + 28 - 36 - 65 + 126 + 98 - 8 - 24 - 16 - 4] = 74,5.$$

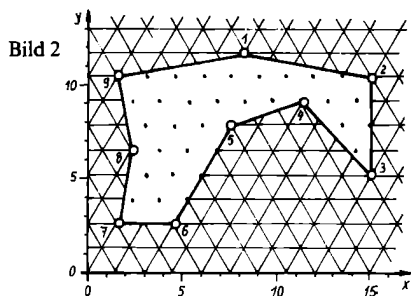
Die Flächenformel von Pick

Der Flächeninhalt eines einfachen Polygons im orthogonalen Raster ist bereits mit der

Summe $\frac{1}{2}R + I - 1$ gegeben, wobei R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons und I die Anzahl der Gitterpunkte im Innern des Polygons ist. Dieser mathematische Sachverhalt wurde bereits 1899 durch *G. Pick* erkannt und bewiesen. Für das obige Beispiel eines Polygons im orthogonalen Raster ist $R = 17$ und $I = 67$, mithin gilt

$\frac{1}{2}R + I - 1 = 74,5$, welches mit unserem zuvor erhaltenen Resultat übereinstimmt.

Im Falle des *triagonalen* Rasters ist der Flächeninhalt eines Polygons in diesem Raster mit der Summe $R + 2I - 2$ gegeben. Wir betrachten als Beispiel das Polygon in Bild 2.



Hier ist $R = 14$ und $I = 27$ und mithin $R + 2I - 2 = 66$. Der Flächeninhalt dieses Polygons ist natürlich auch gemäß (*) zu bestimmen. Die Dreiecke des *triagonalen* Rasters besitzen die Seitenlänge $a = \sqrt{\frac{4}{3}}$ und die Höhe $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Das angegebene Polygon ist somit durch die Eckpunktfolge $\left(\frac{11}{2}a, 9h\right)$, $(10a, 8h)$, $(10a, 4h)$, $\left(\frac{15}{2}a, 7h\right)$, $(5a, 6h)$, $(3a, 2h)$, $(a, 2h)$, $\left(\frac{3}{2}a, 5h\right)$, $(a, 8h)$ eindeutig bestimmt. Nach (*) ist der Flächeninhalt dieses Polygons somit gleich $\frac{ah}{2}[0 + 50 + 10 - 15 + 25 + 12 - 3 - 9 - 4] = 66$. Für den Fall des *hexagonalen* Rasters ist der Flächeninhalt eines Polygons in diesem Raster mit der Summe $\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}$ gegeben.

Digitalisierung von Polygonen im Raster

Bei der Eingabe von Bildern in einen Computer wird eine *Digitalisierung* (Umformung in Zahlenwerte) vorgenommen. Als Beispiel einer solchen näherungsweise Darstellung von Polygonen in einem der drei Raster wollen wir folgende *Vorschrift für eine Digitalisierung* betrachten: In einem der drei Raster sei ein einfaches Polygon anhand einer Eckpunktfolge $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ gegeben. Der Rand des Polygons besteht aus den Strecken $\overline{p_1p_2}, \overline{p_2p_3}, \dots, \overline{p_np_1}$. Für jede dieser Strecken betrachten wir die Schnittpunkte mit den Gitterlinien des Rasters. Jedem dieser Schnittpunkte wird der am nächsten liegende Gitterpunkt als *Digitalisierungspunkt* zugeordnet, falls der Schnittpunkt die Gitterlinie zwischen zwei Gitterpunkten genau halbiert, so entscheiden wir uns für jenen mit der kleineren x - oder y -Koordinate. Die während eines Umlaufes um das gegebene Polygon derart entstehenden Digitalisierungspunkte werden in der entsprechenden Reihenfolge durch Strecken verbunden, das entstehende Polygon stellt eine *digitale Näherung* des ursprüngli-

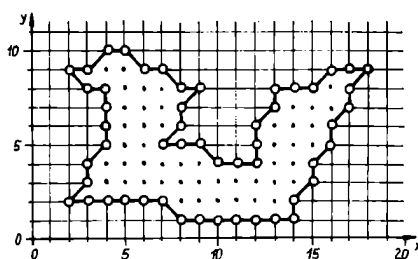


Bild 3

chen Polygons dar. So ist zum Beispiel das Polygon (Bild 3) die derart zu erhaltende digitale Näherung des oben angegebenen einfachen Polygons im orthogonalen Raster. Für diese digitale Näherung ist $R = 52$ und $I = 48$, der Flächeninhalt des erhaltenen Polygons ist somit gleich $\frac{1}{2}R + I - 1 = 73$. Die mittels der angegebenen Digitalisierungsvorschrift aus einfachen Polygonen im Raster bzw. aus Streckenzügen im Raster zu erhaltenden digitalen Näherungen wollen wir *digitale Objekte* bzw. *digitale Polygonzüge* nennen.

Nachbarschaft von Gitterpunkten

Jedem Gitterpunkt p der drei Raster ordnen wir eine *Nachbarschaft* zu, welche aus genau jenen Gitterpunkten besteht, die bei der eben beschriebenen Digitalisierungsvorschrift mit dem Punkt p unmittelbar verbunden werden können. Im orthogonalen Raster besitzt jeder Punkt $p = (i, j)$, wobei i und j ganze Zahlen sind, genau die folgenden acht Nachbarpunkte: $(i-1, j)$, $(i-1, j-1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j+1)$. Diese Nachbarschaft von Punkten p im orthogonalen Raster können wir durch die Zeichnung (Bild 4) darstellen. Die Nachbarschaft von Punkten p im *triagonalen* Raster ist entsprechend durch die Zeichnung (Bild 5) zu veranschaulichen. Für Punkte p im *hexagonalen* Raster sind zwei verschiedene Nachbarschaften möglich, abhängig von der Lage von p

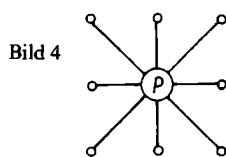


Bild 4

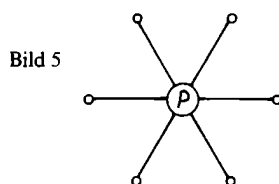


Bild 5

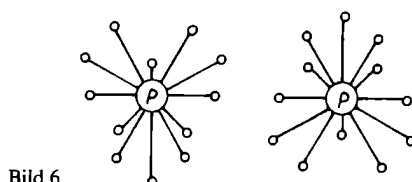


Bild 6

im Raster, welche durch die Zeichnungen (Bild 6) zu charakterisieren sind. Für den Leser sei an dieser Stelle eine Aufgabe eingefügt:

Aufgabe

Für einen Gitterpunkt p sei $N_1(p)$ die Menge aller Nachbarpunkte von p , $N_2(p)$ die Menge aller Nachbarpunkte aller Punkte aus $N_1(p)$, $N_3(p)$ die Menge aller Nachbarpunkte aller Punkte aus $N_2(p)$ usw. Es ist die Anzahl von Punkten in $N_i(p)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ für das orthogonale, *triagonale* und *hexagonale* Gitter zu bestimmen.

Eine Darstellungsmöglichkeit für digitale Polygonzüge

Im weiteren werden wir unsere Betrachtungen auf den Fall des orthogonalen Rasters beschränken. In diesem Raster besitzt jeder Gitterpunkt p genau acht Nachbarn, die bei einem digitalen Polygonzug mit dem Punkt p unmittelbar verbunden sein können. Zur Darstellung (Codierung) solcher Polygonzüge im orthogonalen Raster wird mit dem folgenden *Richtungstern* (Bild 7) ein Vorschlag symbol-

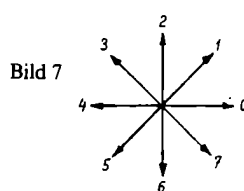


Bild 7



Bild 8

lisiert, wie jeder Schritt von einem Punkt p zu einem seiner acht Nachbarn durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 eindeutig zu charakterisieren (zu codieren) ist. Der folgende digitale Polygonzug (Bild 8) entspricht zum Beispiel gemäß der durch den Pfeil dargestellten Orientierung der Richtungszahlenfolge (Codefolge) 100100767012. Für eine exakte Positionierung des Polygonzuges im Raster wäre zusätzlich zu dieser Codefolge die Angabe der Koordinaten des Startpunktes erforderlich.

Offenbar entspricht eine *Drehung* (im Gegenuhrrsinn) um $n \cdot 45^\circ$ eines digitalen Polygonzuges des orthogonalen Rasters genau der Addition von n modulo 8 zu allen Codezahlen dieses Polygonzuges. Der obige digitale Polygonzug wird bei einer Drehung um 45° zum Beispiel in den Polygonzug (Bild 9) überführt.

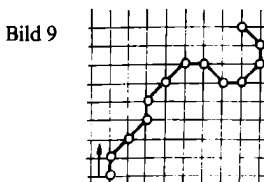
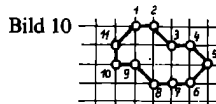
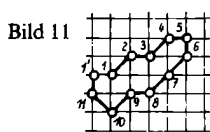


Bild 9

Dieses Resultat der Drehung um 45° entspricht der Codefolge 211211070123. Bei Drehungen um $n \cdot 45^\circ$ ist bei ungeraden $n \geq 1$ zu beachten, daß als Resultat dieser Drehungen *Verzerrungen* oder Lücken in vormals geschlossenen Polygonzügen möglich sind. So ist zum Beispiel die Länge des obigen Polygonzuges vor der Drehung um 45° gleich $7 + 5\sqrt{2}$ und nach der Drehung gleich $5 + 7\sqrt{2}$. (Der Leser kann sich an dieser Stelle überlegen, wie die Länge eines digitalen Polygonzuges unmittelbar anhand der Codefolge bestimmt werden kann.) Betrachten wir als weiteres Beispiel einer Drehung den geschlossenen digitalen Polygonzug (das digitale Objekt) in Bild 10.



Dieses digitale Objekt ist gemäß der angegebenen Numerierung der Randpunkte durch die Codefolge 07075443421 darzustellen. Bei einer Drehung um 45° erhalten wir die Codefolge 10106554532. Diese Codefolge stellt den digitalen Polygonzug (Bild 11) dar.



Der ursprünglich geschlossene Polygonzug ist bei dieser Drehung *aufgerissen*, es entsteht ein neuer Punkt 1'.

Operationen über Codefolgen

Die Drehung von digitalen Polygonzügen um Vielfache von 45° wurde soeben als erstes wichtiges Beispiel einer Operation über Codefolgen betrachtet. *Vergrößerungsoperationen* auf das m -fache sind ebenfalls für Codefolgen leicht zu beschreiben:

Falls in der Codefolge $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ mit $n \geq 1$ und $0 \leq c_i \leq 7$ für $i = 1, 2, 3, \dots, n$, eines digitalen Polygonzuges jede Codezahl c_i durch m Codezahlen c_i ersetzt wird, wobei m vorgegeben sei, so entsteht eine Codefolge eines Polygonzuges, der aus $m \cdot n$ Strecken besteht und als m -fache *Vergrößerung* des ursprünglichen Polygonzuges zu betrachten ist. Zum Beispiel ist 777666555000 die dreifache Vergrößerung des Polygonzuges 7650.

Falls ein digitaler Polygonzug in *umgekehrter Richtung* zu durchlaufen ist, d. h. anstelle von $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ ist der Polygonzug in der Reihenfolge $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0$ zu betrachten, so ist die Codefolge für diesen inversen Polygonzug aus der Codefolge $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ für den ursprünglichen Polygonzug $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ wie folgt zu berechnen:

Zunächst wird zu allen c_i mit $c_i \leq 3$ die Zahl 4 addiert, bei allen c_i mit $c_i \geq 4$ wird die Zahl 4 subtrahiert. Die entstehende Codefolge wird dann in ihrer Reihenfolge umgekehrt. Zum

Beispiel sei der kleinste *digitale Kreis* durch die Codefolge 07654321 festgelegt; die inverse Codefolge ist 56701234.

Den *Flächeninhalt* eines digitalen Objektes können wir nach der Flächenformel von Pick bestimmen, wir können auch die Summe (*) verwenden. Diese Summe (*) kann für den Fall digitaler Objekte in eine unmittelbar angepaßte Form überführt werden: Es sei ein digitales Objekt $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ gegeben, welches durch die Codefolge $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ dargestellt werde, wobei $0 \leq c_i \leq 7$ für $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Jede Codezahl c_i entspricht einem gewissen *Richtungsvektor* (a_i, b_i) , zum Beispiel ist $(a_i, b_i) = (+1, 0)$ für $c_i = 0$:

c_i	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i	+1	+1	0	-1	-1	-1	0	+1
b_i	0	+1	+1	+1	0	-1	-1	-1

Der Flächeninhalt des gegebenen digitalen Objektes ist nun gleich dem Absolutbetrag der Summe

$$(**) \quad \sum_{i=1}^n a_i \left(y_{i-1} + \frac{b_i}{2} \right),$$

wobei $y_0 = 0$ und $y_i = y_{i-1} + b_i$ gelte. Als Beispiel betrachten wir das oben zuletzt angegebene digitale Objekt 07075443421. Die Werte der a_i, b_i, y_i seien in folgender Tabelle zusammengestellt:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	-	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	0	+1
b_i	-	0	-1	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1
y_i	0	0	-1	-1	-2	-3	-3	-3	-2	-2	-1	-1

Der Formel (**) entsprechend erhalten wir somit die Summe

$$0 - \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 3 + 3 + \frac{5}{2} + 2 + 0 - \frac{1}{2} = 9,5.$$

Zur Kontrolle verwenden wir die Flächenformel von Pick. Es ist $R = 11$ und $I = 5$, mithin $\frac{1}{2}R + I - 1 = 9,5$. Die Herleitung der

Formel (**) aus (*) sei dem Leser als Aufgabe empfohlen. Dabei ist zu beachten, daß bei geschlossenen digitalen Polygonzügen (digitalen Objekten) für die Summen der a_i bzw. b_i bestimmte Gesetzmäßigkeiten erfüllt sind. Was ist zum Beispiel über die Summe $\sum_{i=1}^n a_i$ auszusagen?

Schlußbemerkungen

Die betrachtete Codierung für digitale Polygonzüge im orthogonalen Raster könnte dem Leser eine Anregung sein, entsprechende Darstellungen für digitale Polygonzüge im triagonalen oder hexagonalen Raster anzugeben und zu untersuchen. Für praktische Anwendungen besitzen diese beiden Raster jedoch einige Nachteile (z. B. geringere Übersichtlichkeit bei der Behandlung von Objekten in diesen Rastern gegenüber dem orthogonalen Raster), so daß diese Raster im konkreten Anwendungsfall nicht so häufig wie das orthogonale Raster anzutreffen sind.

R. Klette

九章算術

CHIU CHANG SUAN SHU

NEUN BÜCHER ARITHMETISCHER TECHNIK

Aufgaben aus einem chinesischen Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Han-Zeit (202 v. u. Z. bis 9 u. Z.)

Allgemeine Hinweise: Es werden nur die Regeln für die Lösung der Aufgaben angeführt, die unmittelbar zum Berechnen notwendig sind.

Da keine Einheitlichkeit im Rechnen mit den Maßeinheiten besteht, werden alle Lösungen nur mit den Maßzahlen durchgeführt. Zum besseren Verständnis ist nur in einigen Fällen die Umrechnung der Maßeinheiten angegeben.

Weiterhin besteht auch keine Einheitlichkeit in der Bezeichnung der Masse. Es werden dafür auch die Begriffe „Gewicht“ und „Menge“ gebraucht. Auch mit dem Fragewort „wieviel“ ist u. U. die Masse gemeint. Ebenso wird für die Menge 1 sowohl die Ziffer „1“ als auch der unbestimmte Artikel „ein“ gebraucht.

Folgende Maßeinheiten werden in den Aufgaben verwendet:

Längenmaße: 1 Rolle = 4 Klafter = 40 Fuß = 400 Zoll;

1 Klafter = 10 Fuß = 100 Zoll; 1 Fuß = 10 Zoll.

Flächenmaße: 1 Mou = 240 Pu (240 Quadratschritt).

Hohlmaße: 1 Tou = 10 Shêng.

Gewichtsmaße (Massemaße): 1 Pfund = 16 Unzen; 1 Hu entspricht der Masse von 2,7 Kubikfuß Hirse.

Das Ausmessen von rechteckigen Feldern

▲1▲ Jetzt hat man ein Feld; es ist $18\frac{5}{7}$ Schritt breit und $23\frac{6}{11}$ Schritt lang. Die Frage ist: Wie groß ist das Feld? (Buch I, Aufg. 24)

Die Antwort sagt: 1 Mou $200\frac{7}{11}$ Pu.

Die Regel lautet: Jeden Nenner des Bruches multipliziere mit seinem Ganzen; den Zähler des Bruches addiere dazu! Multipliziere beides miteinander; es ist der Dividend! Die Nenner der Brüche werden miteinander multipliziert; es ist der Divisor. Teile den Dividenten durch den Divisor!

Allgemeine Feldermessung

▲2▲ Jetzt hat man ein bogenförmiges Feld (Kreissegment). Die Sehne ist $78\frac{1}{2}$ Schritt, der Pfeil (Bogenhöhe) $13\frac{7}{9}$ Schritt. Die Frage ist: Wie groß ist das Feld (Buch I, Aufg. 36)

Die Antwort sagt: 2 Mou $155\frac{56}{81}$ Pu.

Die Regel lautet: Mit der Sehne multipliziere den Pfeil, den Pfeil wiederum mit sich selbst! Addiere es, und dividiere durch 2!

Regelung des Tausches von Feldfrüchten

▲3▲ Jetzt hat man 7 Tou 8 Shêng Hirse; gewünscht werden schwarze Bohnen. Frage: Wieviel erhält man? (Buch II, Aufg. 16)

Die Antwort sagt: Es sind 9 Tou $8\frac{7}{25}$ Shêng schwarze Bohnen.

Die Regel lautet: Nimm die Hirse; zum Aufsuchen der schwarzen Bohnen multipliziere es mit 63, und dividiere durch 50!

Zur Regelung des Tausches von Feldfrüchten gab es eine Liste mit Maßzahlen. Diese bestimmten die Volumeneinheiten, die man für 50 Einheiten (Grund-)Hirse bekam, z. B.:

(Grund-)Hirse	50,
geschälte Hirse	30,
grobe Grütze	54,
Hirse geschält und gekocht	75,
schwarze Bohnen	63.

Bestimmung des Einzelpreises

▲4▲ Jetzt hat man ausgegeben 720 Geldstücke zum Kauf von 1 Rolle 2 Klafter 1 Fuß Seidenstoff. Man wünscht es für ein Klafter zu berechnen. Frage: Wieviel kostet ein Klafter? (Buch II, Aufg. 35)

Auf weitere Antworten und Regeln verzichten wir aus Platzgründen. Lösungen zu allen 15 hier gestellten Aufgaben veröffentlichen wir in Heft 1/84.

Proportionale Verteilung

▲5▲ Jetzt hat man folgenden Fall: Ein Tafu, ein Pukeng, ein Tsanyao, ein Shangtsao und ein Kungshi – zusammen 5 Männer – (diese 5 Beamtenklassen sind eingestuft mit einem Wert von 5, 4, 3, 2 und 1) erlegten auf der Jagd gemeinsam 5 Hirsche. Man wünscht, daß man es rangmäßig verteilt. Frage: Wieviel erhält jeder? (Buch III, Aufg. 1)

Verteilung nach reziproken Anteilen

▲6▲ Jetzt hat man folgenden Fall: A hat bei sich 3 Shêng Hirse, B hat bei sich 3 Shêng geschälte Hirse, C hat bei sich 3 Shêng gekochte geschälte Hirse. Man wünscht, daß man es zusammenlegen und neu verteilen soll. Frage: Wieviel erhält jeder? (Buch III, Aufg. 9)

Kleinere und größere Breite

▲7▲ Jetzt hat man ein Feld mit einer Breite von 1, einem halben und $\frac{1}{3}$ Schritt. Gewünscht wird ein Feld von 1 Mou. Frage: Wie groß ist seine Länge? (Buch IV, Aufg. 2)

Kreisberechnung

▲8▲ Jetzt hat man eine Kreisfläche von $1518\frac{3}{4}$ Pou. Die Frage ist: Wie groß ist der Kreisumfang? (Buch IV, Aufg. 17)

Beurteilung der Arbeitsleistung

▲9▲ Jetzt hat man einen Damm. Die untere Breite ist 2 Klafter, die obere Breite 8 Fuß, die Höhe 4 Fuß, die Länge 12 Klafter 7 Fuß. Frage: Wie groß ist das Volumen? (Buch V, Aufg. 4)

Die Antwort sagt: 7112 Kubikfuß.

Bei einer Beschäftigung im Winter ist die Arbeitsleistung eines Mannes 444 Kubikfuß. Frage: Wie groß ist der benötigte Arbeits-trupp?

Die Antwort sagt: $16\frac{2}{111}$ Mann.

Kornhaufen

▲10▲ Jetzt hat man Hirse gespeichert auf ebener Erde. Unten ist der Umfang 12 Klafter; die Höhe ist 2 Klafter. Frage: Wie groß ist das Volumen, und wieviel Hirse ist es? (Buch V, Aufg. 23)

Gerechte Steuereinschätzung

▲11▲ Jetzt liegt die gerechte Abgabe einer Getreidesteuer vor. Der Bezirk A mit 10000 Höfen geht einen Weg von 8 Tagen, Bezirk B mit 9500 Höfen geht einen Weg von 10 Tagen, Bezirk C mit 12350 Höfen geht einen Weg von 13 Tagen, und Bezirk D mit 12200 Höfen geht einen Weg von 20 Tagen, damit jeder den Ort der Ablieferung erreicht. Alle 4 Bezirke geben als schuldige Abgabe 250000 Hu. Es sind 10000 Fuhren nötig. Gewünscht wird, daß man den Weg in Meilen – ob fern oder nah – und die Zahl der Höfe – ob viel oder wenig – nimmt und es dementsprechend ab-liefert. Frage: Wieviel ist beides, die Menge des Getreides und die Zahl der Fuhren?

Aus dem täglichen Leben

▲12▲ Jetzt hat man einen Teich; 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $\frac{1}{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in $2\frac{1}{2}$ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen 1 Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig. Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich? (Buch VI, Aufg. 26)

Überschuß und Fehlbetrag

▲13▲ Jetzt hat man gemeinsam ein Rind gekauft. Geben 7 Familien zusammen je 190 aus, dann ist der Fehlbetrag 330; geben 9 Familien zusammen je 270 aus, dann ist der Überschuß 30. Frage: Wieviel ist jedes, die Zahl der Familien und der Preis des Rindes? (Buch VII, Aufg. 4)

▲14▲ Jetzt hat man den folgenden Fall: Eine Binse wächst am 1. Tag um eine Länge von 3 Fuß; ein Riedgras wächst am 1. Tag um eine Länge von 1 Fuß. Die Binse wächst täglich die Hälfte ihres Zuwachses vom Tag zuvor, das Riedgras wuchs täglich das Doppelte seines Zuwachses vom Tag zuvor. Frage: In wieviel Tagen sind sie gleich lang, und wie groß ist die gleiche Länge? (Buch VII, Aufg. 11)

Rechteckige Tabelle

▲15▲ Jetzt hat man 5 Sperlinge und 6 Schwalben. Zusammen wog man sie. Das Gewicht aller Sperlinge war schwer, das aller Schwalben leicht. Es wurden 1 Sperling und 1 Schwalbe vertauscht, und nachdem die Waage in Ruhe war, war das Gewicht gerade gleich. Das Gesamtgewicht der Schwalben und Sperlinge war 1 Pfund. Frage: Wie groß war das Gewicht von je 1 Stück der Schwalben und der Sperlinge? (Buch VIII, Aufg. 9)

Das rechtwinklige Dreieck

▲16▲ Jetzt hat man folgenden Fall: Der Durchmesser eines Brunnens ist 5 Fuß; seine Tiefe kennt man nicht. Auf dem oberen Rand des Brunnens steht eine Stange von 5 Fuß. Der Blick von der Spitze der Stange nach dem Rand des Wassers reicht in den Durchmesser um 4 Zoll hinein. Frage: Wie groß ist die Tiefe des Brunnens? (Buch IX, Aufg. 24)

Die Antwort sagt: 5 Klafter 7 Fuß 5 Zoll.

H. Begander/J. Lehmann

(Lösungen siehe Heft 1/84, d. Red.)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Huzihiro Araki

Research Institute
for Mathematical Sciences,
Universität Kyoto, Japan

▲2378▲ Bei der üblichen Berechnung von Zahlen erfüllt das Produkt das folgende Assoziativgesetz:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Wenn man dieses für 3 Zahlen aufgestellte Gesetz auf n Zahlen anwendet, ergeben sich ähnliche Assoziativgesetze. Zum Beispiel gilt für $n=4$

$$\begin{aligned} a \cdot [b \cdot (c \cdot d)] &= a \cdot [(b \cdot c) \cdot d] \\ &= [a \cdot (b \cdot c)] \cdot d \\ &= [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d \\ &= (a \cdot b) \cdot (c \cdot d). \end{aligned}$$

Die fünf Teile dieser Gleichung entsprechen allen unterschiedlichen Möglichkeiten, um das Produkt von 5 Zahlen zu ermitteln, ohne die Reihenfolge zu verändern, und das Assoziativgesetz sagt, daß alle Teile gleich sind. Nun die Aufgabe:

Auf wieviel verschiedene Arten können wir das Produkt von n Zahlen ($n \geq 2$) unter Berücksichtigung der festgelegten Reihenfolge der Zahlen (Buchstaben) bilden? (Obige Beispiele zeigen, daß es 2 für $n=3$ und 5 für $n=4$ sind.)



Philatelistischer Mathematikunterricht

Es ist möglich, mit Hilfe der japanischen Wertzeichen dem Empfänger von Briefen mathematische Aufgaben zu stellen. Unser Foto: Multipliziere die Wertstufen waagrecht, senkrecht und diagonal. Was stellst du fest?



Herr Ing. B. Lepach, Philatelist aus Leipzig, stellte uns diese philatelistische Spielerei zur Verfügung. Sie inspirierte uns, den *alpha*-Lesern eine Aufgabe zu stellen:

Ordne die 16 japanischen Marken zu einem magischen Quadrat so, daß die Summen der Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen jeweils 18 beträgt! Mehr noch: Auch die Zahlen in den (innerhalb des 16-Felder-Quadrates bestehenden) neun 4-Felder-Quadraten sollen addiert, jeweils die Summe 18 ergeben.



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1984

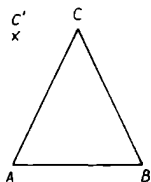


Mathematik

Ma 5 ■ 2379 Eine dreistellige natürliche Zahl z hat in der dekadischen Schreibweise die Form $z = \overline{abc}$, wobei a, b, c Grundziffern sind. Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen z zu ermitteln, für die folgendes gilt:
a) b ist der Nachfolger von a ;
b) c ist die Summe aus a und b .

Schüler Peter Brill, Schwerin

Ma 5 ■ 2380 Die Zeichnung stellt ein Dreieck ABC und einen Punkt C' dar. Es soll das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei einer Drehung um den Punkt O konstruiert werden, wobei die Strecke $\overline{OC}$ die Länge 6 cm hat. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!



Ma 5 ■ 2381 Günter ist Gast auf der Geburtstagsfeier seines Urgroßvaters. In vorgerückter Stunde sagt der Jubilar zu seinem Urenkel: „Von meiner Geburt an bis heute sind rund 48 Millionen Minuten vergangen.“ Welches Lebensalter hat der Urgroßvater von Günter erreicht?

Schülerin Rosa Flint, Stapel

Ma 5 ■ 2382 In dem Schema

VATER
+ MUTTER
ELTERN

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Es ist wenigstens eine Lösung anzugeben.

Sch.

Ma 5 ■ 2383 In $*5 \cdot * = 3*5$ sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.

Schüler Steffen Scheithauer, Parey

Ma 5 ■ 2384 Eine Mutter fragte ihre Tochter: „Wie viele Quartiere wird deine Klasse zum Pioniertreffen bereitstellen?“ Darauf antwortet die Tochter: „Subtrahierst du von der Anzahl der erworbenen Quartiere 4, multiplizierst dann die Differenz mit 3, so erhältst du die doppelte Anzahl der von meiner Klasse bisher erworbenen Quartiere.“ Die Mutter fand schnell die Lösung. Wie viele Quartiere hatte diese Klasse bereits erworben?

Schülerin Veronika Groh, Dresden

Ma 6 ■ 2385 Es ist nachzuweisen, daß jede im dekadischen Positionssystem dargestellte vierstellige natürliche Zahl, deren erste und dritte Grundziffer und deren zweite und vierte Grundziffer übereinstimmen, weder eine Quadratzahl noch eine Primzahl sein kann!

Sch.

Ma 6 ■ 2386 Die Schüler einer 6. Klasse trugen ein Tischtennisturnier aus. Jeder Teilnehmer hatte mit jedem anderen genau zwei Spiele zu bestreiten. Insgesamt wurden an 22 Tagen jeweils 6 Spiele ausgetragen. Wie viele Schüler nahmen an diesem Tischtennisturnier teil?

Schülerin Beatrice List, Altenberg

Ma 6 ■ 2387 Unter $n!$ (lies n -Fakultät) versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. So gilt z. B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ bzw. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Es ist das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

unter Nutzung der Fakultätsschreibweise zu vereinfachen.

Sch.

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	2
	Lösung:	

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingegandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 2388 In den nachfolgenden sechs Aufgaben wurden die ersten fünf Zahlen nach einem Bildungsgesetz aufgestellt. Wie lautet jeweils die sechste Zahl? (Eine Begründung ist nicht erforderlich.)

- (1) 10, 19, 28, 37, 46, a;
- (2) 6, 8, 11, 15, 20, b;
- (3) 5, 12, 21, 32, 45, c;
- (4) 4, 10, 19, 31, 46, d;
- (5) 3, 5, 9, 17, 33, e;
- (6) 2, 3, 7, 16, 32, f.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2389 Wie kann man 50 Liter Flüssigkeit restlos in 6-Liter- und 7-Liter-Gefäße abfüllen, wenn diese Gefäße voll gefüllt werden sollen und ausreichend Gefäße vorhanden sind? Sch.

Ma 7 ■ 2390 Eine Klassenarbeit im Fach Mathematik fiel folgendermaßen aus: Einige Schüler erhielten die Note 1, 7 Schüler die Note 2, drei Schüler die Note 3, ein Schüler die Note 4, kein Schüler die Note 5. Der Durchschnitt für alle Noten lag bei 2,0. Wie viele Schüler erhielten die Note 1?

Schülerin Katrin Schiller, Götzke

Ma 7 ■ 2391 Eine Familie besteht aus sieben Personen, dem Vater, der Mutter und den Kindern Wolfgang, Helmut, Roswitha, Jürgen und Andreas. Die Mutter ist 3 Jahre jünger als der Vater. Roswitha ist 5 Jahre älter als Jürgen. Der Vater ist doppelt so alt wie Wolfgang. Die Mutter ist dreimal so alt wie Jürgen. Helmut ist 2 Jahre jünger als Wolfgang, aber doppelt so alt wie Andreas. Wie alt ist jedes einzelne Familienmitglied (in ganzen Zahlen), wenn alle zusammen 232 Jahre alt sind?

Schüler Andreas Franke, Tambach-Dietharz

Ma 7 ■ 2392 Von den vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, wurde das Produkt $2 \cdot 5$ aus der ersten und vierten und das Produkt $3 \cdot 4$ aus der zweiten und dritten Zahl gebildet. Bei einem Vergleich der Produkte erhalten wir $2 \cdot 5 < 3 \cdot 4$, denn $10 < 12$. Es ist zu untersuchen, ob diese Beziehung für vier beliebige, aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt.

Schülerin Gerke Lange, Halle

Ma 7 ■ 2393 Ein Handelsschiff ging auf große Fahrt. Als es 180 Seemeilen vom Heimat-hafen entfernt war, flog ihm ein Wasserflugzeug mit Post nach. In welcher Entfernung vom Heimathafen holte das Flugzeug das Handelsschiff ein, wenn die Geschwindigkeit des Flugzeugs zehnmal so groß war wie die des Schiffes?

Schüler Alexander Doll, Aitentreptow

Ma 8 ■ 2394 Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 56mal so groß wie die Summe dieser Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schülerin Sabine Schubert, Machern

Ma 8 ■ 2395 In dem Schema

$$\begin{array}{c} \text{FUNF} \\ + \text{FUNF} \\ \hline \text{ZEHN} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Es sind alle Lösungen anzugeben. Sch.

Ma 8 ■ 2396 Es wird behauptet, daß niemals der Rest 3 bleiben kann, wenn man die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■ 2397 Gegeben sei ein Rechteck ABCD. Die vier Winkelhalbierenden der Innenwinkel schneiden einander in den Punkten E, F, G, H. Wie lang ist $\overline{AB}$ für den Fall, daß $\overline{GE} \cong \overline{BC}$ gilt?

Mathematikfachlehrer Kurt Georgi, Zittau

Ma 9 ■ 2398 Es ist zu beweisen, daß jedes Produkt aus fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 120 teilbar ist.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 2399 Gegeben sei eine beliebige vierstellige natürliche Zahl n, die im dekadischen Positionssystem dargestellt ist. Die Zahl n' erhält man, wenn man die Grundziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Es ist zu beweisen, daß $n + n'$ stets durch 11 teilbar ist.

Jens Grundmann,

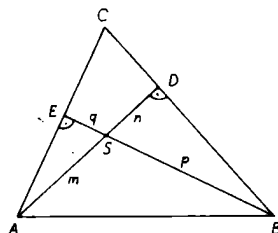
Limbach-Oberfrohna (z. Z. NVA)

Ma 9 ■ 2400 Es sind alle Lösungen der Gleichung

$$10^x + 10^{-x} = 100; \quad x \in P$$

zu ermitteln. Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ma 9 ■ 2401 Dem abgebildeten Dreieck ABC wurden die Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ eingezeichnet, die sich im Punkte S schneiden. Es seien m, n, p, q die Längen der durch den Punkt S erzeugten Höhenabschnitte $\overline{AS}$, $\overline{DS}$, $\overline{BS}$, $\overline{ES}$. Es ist nachzuweisen, daß das Rechteck aus den Höhenabschnitten p und q flächengleich ist dem Rechteck aus den Höhenabschnitten m und n! Sch.



Ma 10/12 ■ 2402 Es ist die Basis x desjenigen Zahlensystems zu ermitteln, in dem die Gleichung $(111)_x \cdot (222)_x = (30142)_x$; $x > 4$ und $x \in N$ eine wahre Aussage darstellt.

Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ma 10/12 ■ 2403 Es ist zu beweisen, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c und $a \neq b$ gilt

$$\frac{a^{2c} + b^{2c}}{2} > a^c b^c!$$

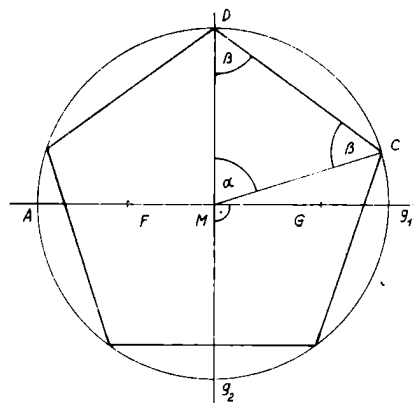
Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ma 10/12 ■ 2404 Einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 13$ cm, $b = 15$ cm und $c = 14$ cm ist ein innerer Punkt P eingezeichnet, der von $\overline{BC}$ den Abstand 3 cm und von $\overline{AB}$ den Abstand 5 cm hat. Welchen Abstand hat der Punkt P von der Seite $\overline{AC}$? Sch.

Ma 10/12 ■ 2405 Das Bild zeigt die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks, dessen Umkreisradius gegeben ist.

F ist der Mittelpunkt von $\overline{AM}$. Um F wurde ein Kreis mit einem Radius der Länge $\overline{FD}$ gezeichnet, der g_1 in G schneidet. Die Länge von $\overline{GD}$ ist die Länge der Seite des regelmäßigen Fünfecks. Diese Konstruktion ist zu beweisen.

Bauzeichnerlehrling Cornelia Zinke, Leipzig



Physik

Ph 6 ■ 146 In der folgenden Tabelle sind die Durchschnittsgeschwindigkeiten, die Haltezeiten und die Streckenabschnitte für einen Teil einer Straßenbahnlinie angegeben. Die Anfahr- und Bremszeiten bleiben unberücksichtigt.

Streckenabschnitt	Durchschnittsgeschwindigkeit	
1.	24 km/h	
2.	20 km/h	
3.	40 km/h	
4.	45 km/h	
5.	30 km/h	
Streckenabschnitt	Streckenlänge	Haltezeit
1.	200 m	10 s
2.	150 m	15 s
3.	400 m	20 s
4.	300 m	15 s
5.	150 m	—

Fertige ein Weg-Zeit-Diagramm an!

Ph 7 ■ 147 Frau M. hat eingekauft. Ihre Tasche hat ein Gewicht von 10 kp. Sie wohnt im 5. Stockwerk ($h=24$ m). Um dort hinaufzugelangen, benötigt sie 6 min. Frau H. hat ebenfalls eingekauft. Ihre Tasche hat ein Gewicht von 12 kp. Sie wohnt im Gegensatz zu Frau M. im 6. Stockwerk ($h=28$ m). Sie benötigt 7 min, um dort hinzukommen. Wer von den beiden Frauen hat die größere Leistung erbracht?

Diana Ammann, Weißenborn-Lüderode

Ph 8 ■ 148 Ein Ölbad hat eine Masse von 250 kg und eine Temperatur von 20°C . In ihm werden 30 Maschinenteile mit einer Masse von je 6 kg behandelt. Diese Maschinenteile haben eine Temperatur von 220°C . Berechnen Sie

(1) die theoretische Öltemperatur (ohne Wärmeverluste), wenn alle Maschinenteile gleichzeitig behandelt und vollständig in das Bad eingetaucht werden;

(2) die theoretische an das Ölbad abgegebene Wärmemenge!

Die spezifischen Wärmekapazitäten betragen: $c_{\text{Öl}} = 2,219 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$c_{\text{MT}} = 0,502 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Ing. K.-H. Milde, Dresden

Ph 9 ■ 149 Auf ein zylinderförmiges Stahlgeschloß, d. h. nur auf einer seiner Grundflächen, wirkt 1,25 ms lang ein konstanter Druck von 130 MPa. Der Durchmesser d des Geschosses beträgt 7 mm, seine Höhe 2,6 cm. Die Dichte ρ beträgt $7,8 \text{ g/cm}^3$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v !

Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ph 10/12 ■ 150 Das natürliche Antimon hat eine relative Atommasse von 121,75. Es besteht aus den Isotopen $^{121}_{51}\text{Sb}$ und $^{123}_{51}\text{Sb}$ mit den relativen Atommassen 120,9 und 122,9. Berechnen Sie den prozentualen Anteil jedes dieser Isotope im natürlichen Antimon!

Chemie

Ch 7 ■ 117 15,2 g Blei werden oxydiert. Dabei entstehen

- Blei(II)-oxid
- Blei(IV)-oxid
- Blei(II,IV)-oxid.

Berechne die Massezunahme bei allen drei chemischen Reaktionen!

Ch 8 ■ 118 a) Berechne die Masse Schwefeltrioxid in 35 g 40%iger Schwefelsäure!

b) Berechne den Prozentgehalt der Schwefelsäure an Wasserstoff, Schwefel und Sauerstoff!

Ch 9 ■ 119 Im VEB Düngemittelkombinat Piesteritz wird Kalkstickstoff (CaCN_2) aus Kalziumkarbid und Stickstoff hergestellt.

Als Nebenprodukt entsteht Kohlenstoff.

a) Berechnen Sie das Volumen Luft in Kubikmeter, welches theoretisch für die Umsetzung von 1,5 t Kalziumkarbid mit einem Gehalt

alpha in Warschau

Buchausstellung zum Internationalen Mathematikerkongreß

Wenn sich mehr als 2200 Wissenschaftler aus 64 Staaten treffen, dann spielt neben dem fachlichen Gedankenaustausch auch die Information über neue Bücher und Zeitschriften ihres Fachgebietes eine wichtige Rolle. Zum Internationalen Mathematikerkongreß, der vom 16. bis 24. August 1983 in Warschau stattfand, nutzten Verlage aus aller Welt die Gelegenheit, bewährte Standardwerke, vor allem aber ihre Neuerscheinungen den Teilnehmern vorzustellen.

Sowohl die wissenschaftlichen Vorträge und Seminare als auch die Buchausstellung fanden im repräsentativen Kulturpalast an der Marszalkowska statt. Hier wurden in 19 Sektionen Hauptvorträge, Kurzvorträge und Seminare gehalten.



Sonderstempel aus Anlaß des IMC (Außerdem wurde eine Briefmarkenserie herausgegeben, welche wir in alpha 1/84 vorstellen.)

von 87,3% CaC_2 benötigt wird, wenn die Lufttemperatur 21°C und der Druck 763 Torr betragen. (Als Abrechnungsbasis dient Luft mit 78% Stickstoff!)

b) Wieviel Tonnen Kalkstickstoff lassen sich aus der gegebenen Masse Kalziumkarbid herstellen?

Ch 10/12 ■ 120 6,8 g Natrium und 210 g Wasser werden zur Reaktion gebracht.

Berechnen Sie den Prozentgehalt der entstandenen Natriumhydroxid-Lösung!

In der vierten Etage des Kulturpalastes stellten 39 Aussteller mehr als 3000 Bücher aus, wobei es am Gemeinschaftsstand der DDR-Verlage erwartungsgemäß besonders viele Nachfragen nach aktuellen Monographien und Hochschullehrbüchern gab. Dabei zeigte sich erneut, daß vor allem die beiden Reihen: *Teubner-Texte zur Mathematik* und *Mathematische Lehrbücher und Monographien* im internationalen Vergleich Anerkennung finden.

Daß dieser von *Buchexport* Leipzig gestaltete Stand durch fachliches Niveau der ausgestellten Werke sowie durch Themenvielfalt zahlreiche Interessenten anzog, dazu trugen nicht zuletzt auch Schulbücher und populärwissenschaftliche Bücher bei, die *alpha*-Lesern inzwischen gut bekannt sind: *W. Hintze*, Der ungarische Zauberwürfel; *J. Lehmann*, Kurzweil durch Mathe; oder *E. Schröder*, Mathematik im Reich der Töne, um nur einige dieser Titel zu nennen. Komplettiert wurde unser Angebot durch Fachzeitschriften. Kongreßteilnehmer aus vielen europäischen Ländern kennen die *alpha* und äußerten sich sehr anerkennend über deren Inhalt sowie über die ideenreiche Gestaltung dieser seit 1967 regelmäßig erscheinenden Schülerzeitschrift. Zahlreiche Mathematiker, insbesondere aus Asien, Afrika und Amerika, informierten sich in Warschau erstmals über das Literaturangebot der DDR, und so war es nicht verwunderlich, daß mehrere hundert Werbeexemplare der *alpha* sehr schnell verteilt waren. Übrigens fand am Gemeinschaftsstand der polnischen Verlage die Schülerzeitschrift *delta* ebenfalls viele Interessenten.

Neben dem wissenschaftlichen Programm hatten die polnischen Gastgeber auch ein umfangreiches kulturelles Angebot vorbereitet, beispielsweise Stadtführungen, Ausflüge und Konzerte. So trafen sich am Sonntagvormittag viele Kongreßteilnehmer am Chopin-Denkmal beim Konzert der japanischen Pianistin R. Tsuruta. Zum Gelingen dieses Internationalen Mathematikerkongresses und der Buchausstellung trugen die Veranstalter in entscheidendem Maße bei. Sehr gute Organisation und langfristige Vorbereitung ermöglichten konzentrierte wissenschaftliche Arbeit und anregenden Gedankenaustausch. Die umfangreiche Bücherschau diente dabei in erster Linie der Information über Neuerscheinungen, darüber hinaus konnten aber auch zukünftige Kooperationsvorhaben verschiedener Verlage angebahnt werden, kündigten Mathematiker aus mehreren Ländern an, demnächst ihre neuesten Forschungsergebnisse in der DDR zu veröffentlichen.

Das große Interesse an der *alpha* und die Zusagen vieler Mathematiker, in den nächsten Jahren selbst Beiträge für diese populäre Schülerzeitschrift zu schreiben, sind weitere erfreuliche Ergebnisse der Warschauer Buchausstellung.

J. Weiß

Labyrinth-Probleme

eine alte Thematik mit großer Aktualität

Teil 3

5. Abschließende Bemerkungen

Es gibt keinen endlichen Automaten, der das Absuchverfahren von Trémaux oder das von Tarry auf Mustern realisiert. Das ist auch ohne den Satz von Budach klar, denn endliche Automaten können ja keine Markierungen in den Mustern vornehmen, und die Speicherkapazität ihres Steuerwerks ist beschränkt. Ein Automatentyp, der über die Möglichkeiten verfügt, um die klassischen Absuchverfahren realisieren zu können, ist der des beschränkten Turing-Automaten (benannt nach dem englischen Mathematiker A. M. Turing, 1912 bis 1954). Der Aufbau und die Arbeitsweise sind ähnlich wie beim endlichen Automaten, nur ist der im Muster bewegliche Kopf nun ein Lese- und Schreibkopf. Das bedeutet, daß er die Zellen mit Markierungen versehen kann und auch in der Lage ist, diese wieder zu erkennen, d. h. zu lesen. Das Steuerwerk darf wiederum nur endlich vieler Zustände fähig sein, und mittels einer Überführungstabelle ist eindeutig festgelegt, wie der Automat in einem gewissen inneren Zustand auf die vorgefundene Beschriftung seines Standortes und der Nachbarzellen zu reagieren hat, d. h., welche neue Beschriftung er seiner Zelle zu geben hat und welche Bewegung und Zustandsänderung dann erfolgen muß.

Automaten dieses Typs sind in der Lage, die Verfahren von Trémaux und Tarry nachzubilden, können also alle Muster absuchen. Das kann man aber auch schon mit einem etwas spezielleren Automatentyp erreichen: Die US-amerikanischen Mathematiker M. Blum und D. Kozen zeigten 1978, daß es einen Kiesel-Automaten gibt, der alle Muster absucht, wobei er stets nur zwei Steinchen benutzt.

Unter einem Kiesel-Automaten versteht man einen endlichen Automaten mit der zusätzlichen Fähigkeit, Zellen eines Musters dadurch zu markieren, daß er „Steinchen“ (Kiesel) darauf ablegt. Natürlich soll er die schon auf der betrachteten Zelle liegenden Kiesel auch sehen können. Außerdem soll möglich sein, abgelegte Kiesel später wieder aufzunehmen und eventuell an einer anderen Stelle des Musters erneut abzulegen.

Die Benutzung von Kieselsteinen zur Wegmarkie-

rung ist jedem Kind aus dem Märchen „Hänsel und Gretel“ geläufig. Hänsel markiert den zurückgelegten Weg durch Kieselsteine, um später wieder aus dem Wald zum Hause der Eltern zurückzufinden. Das ist nichts anderes als die alte Idee des Ariadnefadens. Schwieriger wird es aber, wenn man versucht, mit einer beschränkten Anzahl von Kieselsteinen auszukommen.

Unter Verwendung nur eines Kieselsteins können alle einfach zusammenhängenden Muster so abgesucht werden, daß das Verfahren stets stoppt. Der entsprechende Kiesel-Automat arbeitet zunächst nach dem Verfahren von Döpp, markiert aber die Randzelle des Musters, bei der er mit dem Abfahren des Randes beginnt (Zyklusbeginn), mit seinem Kiesel. Trifft er nun beim Abfahren des Randes zum zweiten Mal auf diese Stelle, so ist das Muster einmal umfahren, und der Automat kann stoppen.

Sofort stellt sich die Frage, ob alle Muster schon mit nur einem Steinchen absuchbar sind. Die Antwort lautet „nein“, wie F. Hoffmann, ein Mitarbeiter von Prof. Budach, 1981 durch Weiterentwicklung der Budachschen Beweismethode zeigen konnte.

Bei der Erläuterung des Döppschen Verfahrens ist schon angeklungen, daß besonders die Löcher (Binnenseen) in den Mustern das Absuchen erschweren. H. Müller zeigte 1979, daß man zu jedem endlichen Automaten sogar ein Muster mit nur zwei Löchern konstruieren kann, das der Automat nicht absucht. Es ist noch unbekannt, ob es stets ein solches Muster mit nur einem Loch gibt.

Obwohl wir nur einige Beispiele aus der Fülle von Resultaten und noch ungelösten Problemen behandelt haben, müssen wir unsere Wanderung durch die (Theorie der) Labyrinth nun abbrechen.

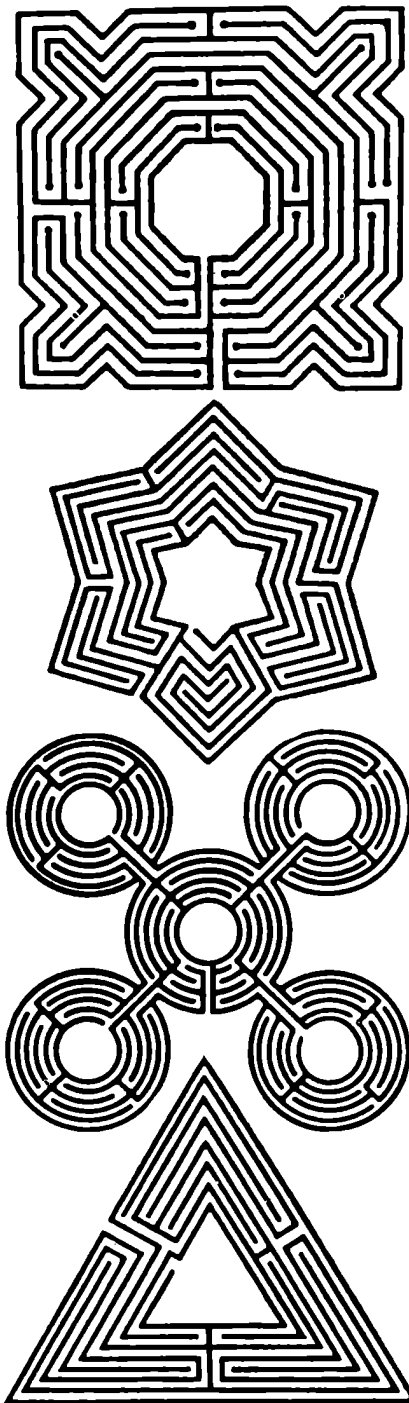
Ausgehend von Legenden, die früheste Epochen der Menschheit berühren, gelangten wir zu Problemstellungen der abstrakten Automatentheorie. Nicht der Reiz des Geheimnisvollen, Sagenumwobenen ist der Hauptgrund für das zunehmende wissenschaftliche Interesse an unserer Thematik, sondern ihre Bedeutung für das mathematische Verständnis der automatischen Informationsverarbeitung. Innerhalb der DDR hat sich besonders die von Prof. Budach geleitete Forschungsgruppe

den Labyrinth-Problemen verschrieben, aber auch die von Prof. Asser geleitete Greifswalder Forschungsgruppe beschäftigt sich damit. Und trotz des Interesses und der fleißigen Arbeit vieler Mathematiker kann so manche Frage heute noch nicht beantwortet werden.

A. Hemmerling

Für sehr nützliche Diskussionen zu Inhalt und Form des Labyrinth-Beitrages möchte der Autor seinen Greifswalder Kollegen Dr. P. Schreiber und Dr. W. Schleinitz sowie dem Chefredakteur der *alpha* herzlich danken.

Irrgärten aus dem 16. Jahrhundert





Aus der Geschichte der Längenmaße

In der Mitte des 19. Jahrhunderts, also vor über 100 Jahren, wurden in verschiedenen deutschen Einzelstaaten noch unterschiedliche Längenmaße verwendet. Das zeigt folgende Übersicht, in der diese Maße in heutige Einheiten umgerechnet wurden:

	1 Zoll	1 Fuß	1 Elle	1 Rute	1 Meile
Baden	3,0 cm	30 cm	60 cm	3,00 m	8,88 km
Bayern	2,4 cm	29 cm	83 cm	2,92 m	7,42 km
Preußen	2,6 cm	31 cm	67 cm	3,77 m	7,50 km
Sachsen	2,4 cm	28 cm	57 cm	4,30 m	9,06 km
Württemberg	2,9 cm	29 cm	61 cm	2,85 m	7,45 km

Aufgaben

- ▲ 1 ▲ Zeichne je einen Nagel mit der Länge von 3 Zoll, der
- a) in Baden,
 - b) in Preußen,
 - c) in Sachsen angefertigt wurde!
- ▲ 2 ▲ Welches Seil war am längsten?
- a) Ein Seil mit der Länge von 25 Ellen aus Bayern oder
 - b) ein Seil mit der Länge von 30 Ellen aus Preußen oder
 - c) ein Seil mit der Länge von 35 Ellen aus Sachsen.
- ▲ 3 ▲ Mit welcher Länge wurde ein Balken von 12 Fuß von Zimmerleuten
- a) in Baden,
 - b) in Bayern,
 - c) in Preußen,
 - d) in Sachsen angefertigt, gemessen in unseren heutigen Längeneinheiten?
- ▲ 4 ▲ Auf einem Ballen wurde Stoff mit einer Länge von 49,80 m aufgewickelt. Welche Länge würde man messen
- a) mit einer Elle aus Baden,
 - b) mit einer Elle aus Bayern?
- ▲ 5 ▲ Welche Länge hat ein Seil von 20 Ellen nach unseren heutigen Längenmaßen
- a) mindestens,
 - b) höchstens,
- wenn es bei einem Händler aus Baden, Bayern oder Preußen gekauft wurde?

▲ 6 ▲ Wieviel Quadratmeter Flächeninhalt hatte ein rechteckiges Feld der Länge 50 Ruten und der Breite 20 Ruten

- a) in Baden,
- b) in Sachsen?

▲ 7 ▲ Auf einem Wegweiser in Potsdam stand: bis Meissen 30 Meilen. Auf dem entgegengesetzten Wegweiser in Meissen stand jedoch: bis Potsdam 25 Meilen.

Wie kamen diese unterschiedlichen Entfernungsangaben zustande? Beachte, Potsdam gehörte zu Preußen, Meissen dagegen zu Sachsen! Rechne die angegebenen Entfernungen in Kilometer um!

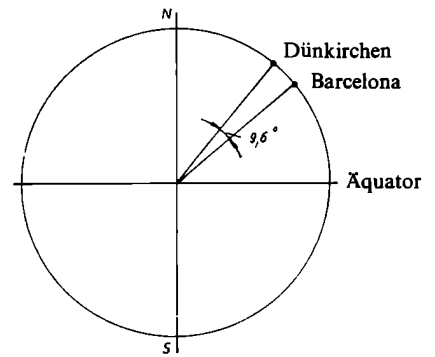
Die Angaben in dieser Tabelle sind gerundet. Es bestanden zum Teil erhebliche regionale Unterschiede. Die Tabelle wurde dem folgenden Buch entnommen: Erna Padelt, *Menschen messen Zeit und Raum*, VEB Verlag Technik, Berlin 1971, S. 72.

▲ 8 ▲ Überlege, welche Probleme die unterschiedlichen Längenmaße mit sich brachten! Warum forderte das Bürgertum einheitliche Maße?

Die Aufgaben zeigen deutlich, daß die unterschiedlichen Längenmaße unnötige Schwierigkeiten für Handel und Verkehr mit sich brachten. In den verschiedenen Ländern Europas wurde deshalb im 19. Jahrhundert wiederholt gefordert, einheitliche Längenmaße einzuführen. Die erforderlichen Voraussetzungen dazu wurden in Frankreich nach der Französischen Revolution geschaffen. Auf Vorschlag einer Kommission von Wissenschaftlern wählte man den vierzigmillionsten Teil des Erdumfanges als Längeneinheit und nannte diese Länge ein „Meter“. Eine genaue Bestimmung des Erdumfanges war hierfür notwendig. Die erforderlichen Vermessungsarbeiten erfolgten zwischen Dünkirchen an der französischen Nordküste und Barcelona an der spanischen Nordostküste. Das sind zwei Orte, die auf dem gleichen Längengrad liegen. Die Differenz der geographischen Breite der beiden Orte beträgt ungefähr $9,6^\circ$. Für ihre Entfernung ergaben die Vermessungsarbeiten rund 547 279 Toise, in der damals in Frankreich üblichen Maßeinheit.

Für den Erdumfang u_E ergab sich hieraus

$$u_E = \frac{547\,279 \text{ Toise} \cdot 360^\circ}{9,6^\circ} = 20\,522\,962 \text{ Toise.}$$



Der vierzigmillionste Teil hiervon, also ein Meter, ist 0,513074 Toise. Umgekehrt beträgt 1 Toise ungefähr 1,95 m. Damit war es möglich, die Länge von einem Meter als Maßstab anzugeben. Im Juni 1799 waren die Arbeiten beendet. Dem französischen Staatsarchiv wurde eine Verkörperung des Meters in Form eines Metallstabes übergeben, auf dem durch zwei Striche die Länge des Meters festgelegt war. Man nennt diesen Stab das *Urmeter*.

Das neue Maßsystem auf der Grundlage des Meters setzte sich in vielen Ländern jedoch nur langsam durch. Nach der Gründung des Deutschen Reiches wurde das metrische System erst ab 1. Januar 1872 für den ganzen Staat verbindlich. Nach dem 1. Januar 1876 durften in Deutschland keine alten Maße mehr im Handel und im Verkehr benutzt werden.

Aufgaben

▲ 9 ▲ Aus dem Mathematikunterricht sind folgende Umrechnungen der Längenmaße bekannt:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm.}$$

Auf welche Schwierigkeiten stößt man, wenn man in ähnlicher Weise Meilen in Ruten, Ruten in Ellen, Ellen in Fuß und Fuß in Zoll umrechnen will? Worin liegen die Vorteile des Maßsystems auf der Grundlage des Meters?

▲ 10 ▲ Der Umfang der Erde wurde ursprünglich mit 40 000 000 m festgelegt.

- a) Rechne um in Kilometer!
- b) Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung vom Pol bis zum Äquator?
- c) Die Entfernung vom Pol zum Äquator entspricht der geographischen Breite von 90° . Welche Entfernung, gemessen auf einem Längengrad, gehört ungefähr zur Änderung der geographischen Breite um 1° ?
- d) Wieviel Kilometer beträgt ungefähr die zu $9,6^\circ$ gehörende Entfernung der Orte Dünkirchen und Barcelona?
- e) In der Seefahrt nutzt man als weitere Unterteilung eines Winkels von 1° als nächstkleinere Einheit eine Sekunde und verwendet das Zeichen $1'$. Ein Winkel der Größe $1'$ hat den

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 6/1981 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■ 2158 Ermittle alle zweistelligen Primzahlen mit der Quersumme 7, die zu geraden natürlichen Zahlen werden, wenn man ihre Ziffern vertauscht.

sechzigsten Teil der Größe des Winkels von 1° . Es gilt also $1^\circ = 60'$.

Welche Entfernung, gemessen auf einem Längengrad, gehört zur Änderung der geographischen Breite um $1'$?

Vergleiche diesen Wert mit der in der Seefahrt verwendeten Längeneinheit von einer Seemeile, $1 \text{ sm} = 1,852 \text{ km}$!

Nachdem bessere und genauere Verfahren zur Bestimmung des Erdumfangs entwickelt wurden, stellte man fest, daß das Urmeter nicht genau der vierzigmillionste Teil des Erdumfangs war. Da sich außerdem auch die Länge des als Urmeter verwendeten Metallstabs durch Temperaturschwankungen und Alterung geringfügig ändern kann, war man weiterhin auf der Suche nach einem zuverlässigen Naturmaß als Grundmaß unseres Maßsystems. Als solches verwendet man seit 1960 die Wellenlänge des orangefarbenen Lichtes des Edelgases Krypton 86 und legte fest:

„Das Meter ist gleich $1650763,73$ Vakuumwellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus $2p_{10}$ und $5d_5$ des Atoms Krypton 86 entspricht.“

Durch diese Festlegung gelang es, das Meter wesentlich genauer zu bestimmen als durch ein körperliches Urmeter.

Abschließend empfehlen wir folgendes Buch zur Geschichte der Längenmaße, das für Schüler geschrieben wurde, sehr interessant ist und in jeder Bibliothek ausgeliehen werden kann.

Erna Padel: Mit dem Meßrad um die Welt, Kinderbuchverlag, Berlin 1975, Regenbogenreihe.

U. Sonnemann

In Heft 3/82 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z = 10a + b$ mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$. Da wir durch Vertauschen der Ziffern a und b eine gerade natürliche Zahl erhalten, muß a gerade sein. Wegen $q = a + b = 7$ muß $a < 8$ gelten. Für $a = 2$ gilt $b = 5$; die Zahl 25 ist aber keine Primzahl. Für $a = 4$ gilt $b = 3$, also $z = 43$. Für $a = 6$ gilt $b = 1$, also $z = 61$. Die gesuchten Primzahlen lauten 43 und 61.

Wir stellen nun die Lösung von Ulrike Ziemendorf aus Mühlhausen vor, die Schülerin der Klasse 6a der Karl-Liebknecht-Oberschule ist:

Da die Quersumme 7 eine ungerade Zahl ist, muß beim Zerlegen der Zahl 7 in zwei Summanden der eine Summand eine gerade, der andere Summand eine ungerade Zahl sein. Da wir nach dem Vertauschen der Grundziffern eine gerade Zahl erhalten sollen, muß die erste Grundziffer einer geraden, die zweite Grundziffer einer ungeraden Zahl entsprechen. Deshalb sind nur die Zahlen 61, 43, 25 möglich. Von diesen drei Zahlen sind nur die Zahlen 43 und 61 Primzahlen.

Wir stellen nun die Lösung von Katrin Neumann aus Klosterfelde vor, die Schülerin der Klasse 6 der Ernst-Thälmann-Oberschule ist: Da alle zweistelligen Primzahlen ungerade Zahlen sind und deren Quersumme jeweils 7 betragen soll, muß die letzte Grundziffer 1 oder 3 oder 5 sein. Wegen $a + b = 7$ gilt deshalb 61 oder 43 oder 25. Die Zahl 25 stellt keine Lösung dar; denn 25 ist keine Primzahl. Es existieren zwei Lösungen, nämlich 43 und 61. Die Zahlen 34 und 16 sind gerade Zahlen.

Wir stellen nun die Lösung von Matthias Winkler aus Cossebaude vor, der Schüler der Klasse 6a der Hans-Grundig-Oberschule ist: An der ersten Stelle der zweistelligen Primzahlen muß die Ziffer 2, 4, 6 oder 8 stehen; denn sonst würden wir beim Vertauschen der beiden Grundziffern keine gerade Zahl erhalten. Die gesuchten Zahlen können nicht größer als 70 sein, sonst wäre ihre Quersumme größer als 7. Deshalb sind nur die Primzahlen 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67 zu untersuchen. Nur die Zahlen 43 und 61 haben die Quersumme 7. Dies sind die gesuchten Zahlen.

Wir stellen nun die Lösung von Heike Deumeland aus Langenweddingen vor, die Schülerin der Klasse 6 der Juri-Gagarin-Oberschule ist: Die zweistelligen Zahlen, deren Quersumme 7 beträgt, lauten 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70. Die Zahlen 16, 34, 52, 70 sind durch 2 teilbar, also keine Primzahlen. Die Zahl 25 ist durch 5 teilbar, also auch keine Primzahl. Die Zahlen 43 und 61 sind Lösungen.

J. Lehmann/Th. Scholl



Die Erbschaft

Leonhard Euler hat in seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (1770) zahlreiche Aufgaben aufgenommen, die sich schon in alten Rechenbüchern befanden. Meist handelt es sich um andere Zahlenwerte. Euler hat stets den ausführlichen Lösungsweg beschrieben, während in den Rechenbüchern oft nur Lösungsrezepte angegeben wurden. Im 1. Abschnitt des 2. Teils von Eulers „Algebra“ befindet sich unter Nr. 42 die folgende Aufgabe:

„Ein Vater hinterläßt einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder in folgender Art unter sich teilen. Das erste nimmt 100 Taler und dazu noch den 10. Teil des übrigen. Das zweite nimmt 200 Taler und dazu den 10. Teil des übrigen. Das dritte nimmt 300 Taler und dazu den 10. Teil des übrigen. Das vierte nimmt 400 Taler und dazu den 10. Teil des übrigen. Hierauf stellt sich heraus, daß das ganze Vermögen unter den Kindern gleich verteilt worden ist. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wieviel Kinder der Vater hinterlassen und wieviel jedes bekommen?“

Im Rechenbuch des byzantinischen Mönches Maximos Planudes (13. Jh.) lautet die Aufgabe: „Ein sterbender Vater rief seine Söhne, ließ auch zugleich die Geldschachtel mitbringen und verteilte das Geld mit folgenden Worten: Ich will meinen Söhnen gleichmäßig mein Geld zuteilen; der erste soll ein Geldstück und $\frac{1}{7}$ des Restes erhalten, der zweite 2 und $\frac{1}{7}$ des Restes, der dritte 3 und $\frac{1}{7}$ des Restes.

Mitten in diesen Worten starb der Vater und war weder mit den Söhnen noch mit dem Gelde zu Ende gekommen. Ich will nun wissen, wie viele Söhne es waren und wieviel Geld?“

Ähnliche Aufgaben behandelten auch Leonardo Fibonacci (13. Jh.), Nicolas Chuquet (15. Jh.), Michael Stifel (16. Jh.) und andere.

H. Pieper

Der Turm von Babylon

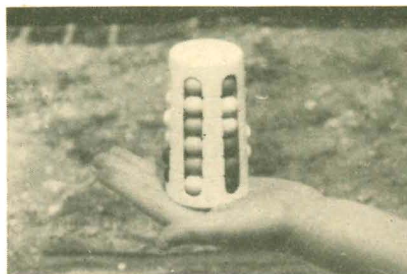


Bild 1

Mit dem *Turm von Babylon* stellen wir ein weiteres logisch-kombinatorisches Spiel vor, das, wie der Zauberwürfel, aus Ungarn stammt. In einem Zylinder sind 36 farbige Kugeln in 6 Säulen zu je 6 Kugeln angeordnet (siehe Bild 1). In der Ausgangsposition sind die Kugeln innerhalb der Säulen von der gleichen Farbe, doch von unterschiedlicher Intensität, z. B. besteht eine Säule aus roten Kugeln; unten kräftig rot, nach oben heller werdend und oben rosa. Man kann nun jede der 6 Scheiben drehen und ferner eine Kugel zum Verschwinden bringen (eine auf einem von 2 markierten Plätzen der unteren Schicht befindliche Kugel kann in den Turm gedrückt und dort durch Schieben einer anderen Kugel auf den nun freien Platz festgehalten werden). Unter Ausnutzung dieses freien Platzes, den man durch Drehen von Scheiben und Schieben von Kugeln innerhalb der Säule, die den freien Platz gerade hat, auf jeden beliebigen Platz bringen kann, kann der Turm umgeordnet werden. Zum Schluß wird die versteckte Kugel wieder hervorgeholt. Man kann das Verschwinden mit verschiedenen Kugeln wiederholen. Auf diese Weise wird der Turm zu einem bunten „Durcheinander“. Die Aufgabe ist nun, den Turm wieder zu restaurieren, d. h., ihn wieder in die ursprüngliche Situation zu versetzen.

Die 36 Kugeln lassen theoretisch $36!$ Anordnungen zu. Es ist bemerkenswert, daß man hier tatsächlich alle Anordnungen nur durch zulässige Operationen (wie beschrieben) erreichen kann; im Gegensatz zu *Rubiks Cube* und der *magischen Pyramide*, siehe z. B. *alpha* 1/83.

Sehen wir Anordnungen als gleich an, wenn sie durch Drehung des gesamten Turmes entstehen, so gibt es

$$35! = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 1,033 \cdot 10^{40}$$

Möglichkeiten.

Die Anzahl ist also wesentlich größer als beim *Rubiks Cube* ($\approx 4,3 \cdot 10^{19}$). Um diese Riesenzahl begreifbar zu machen, ist folgender Vergleich vielleicht nützlich. Würde man für jede Anordnung einen Turm haben, so würde man damit eine Kugel füllen können, die einen Radius hat, der zehnmal größer ist als die Entfernung Erde–Sonne.

Trotzdem ist es viel leichter, den *Turm von Babylon* zu bezwingen als etwa *Rubiks Cube*!

Wie wir sehen werden, ist es hier recht einfach möglich, 3 beliebige (benachbarte) Kugeln zu tauschen, wobei alle anderen Kugeln unverändert bleiben. Solche Operationen sind bei den anderen magischen Spielen in der Regel recht kompliziert und schwer aufzufinden.

Es gibt auch vereinfachte Versionen des Turmes von Babylon, z. B. das *Varikon* mit 5 Säulen (Bild 2). Hierbei befinden sich in jeder Säule 5 gleichgefärbte Kugeln (keine Intensitätsunterschiede).

Übrigens sind diese Spiele (Turm von Babylon, Varikon, usw.) gewisse Verallgemeinerungen des bekannten Fünfehner-Spiels. Wir wollen jetzt auf das Ordnen des Turmes von Babylon eingehen. Wir werden 4 Operationen beschreiben, die bereits völlig ausreichen, um den Turm zu ordnen. Natürlich kann man sich weitere Operationen überlegen, die sogar ein schnelleres Erreichen des Zieles erlauben. Wer aber schon etwas mit dem Turm zu tun gehabt hat, der wird sicher bemerkt haben, daß man bereits durch intuitive Züge, also ohne einen vorgegebenen Algorithmus, recht weit kommen kann. Etwas schwierig wird es dann in der Regel nur für die letzte Scheibe oder für die letzten 6 Kugeln.

Die 6 Scheiben werden wir von oben nach unten mit *A, B, C, D, E* und *F* bezeichnen. Drehen wir die Scheibe *X* und alle darunter liegenden Scheiben um 60° nach rechts, so bezeichnen wir diese Operation auch mit *X*. Analog bedeutet X^2 eine Drehung um 120° nach rechts, ... und $X^5 = X^{-1}$ eine Drehung der beschriebenen Scheiben um 60° nach links. Alle Scheiben oberhalb von *X* bleiben in ihrer Ausgangsstellung.

Verschiebungen innerhalb der Säulen sind natürlich nur mit dem freien Feld möglich. Wird der Turm hingestellt oder senkrecht gehalten, so wandert der freie Platz automatisch in die Scheibe *A*. Wir werden deshalb die Operationen immer in dieser Stellung beginnen und beenden.

$\bar{X}$ bedeute, daß das freie Feld in die Scheibe *X* wandert, d. h., die Kugel dieser Säule in der Scheibe *X* und alle darüberliegenden Kugeln werden jeweils um eine Scheibe nach oben geschoben. Schließlich bedeute ein $\bar{\bar{}}$, daß das freie Feld wieder in die Schicht *A* wandern soll. Das wird einfach dadurch erreicht, daß

der Turm senkrecht gehalten wird und keine Kugeln dieser Säule berührt werden.

Um darzustellen, was Operationen bewirken, denken wir uns den Turm hinten „aufgeschnitten“ und „nach vorne geklappt“.

Zum Beispiel bewirkt

$$\bar{D}\bar{D};$$

folgendes, wenn der freie Platz in der vorderen linken Säule (und natürlich in der Schicht *A*) war (Bild 2):

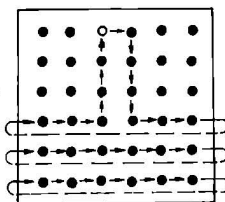


Bild 2

Eine wichtige Operation ist (Bild 3)

$$O_1(D, C) = \bar{D}\bar{D}; \bar{C}\bar{C}^{-1}; C\bar{D}^{-1};$$

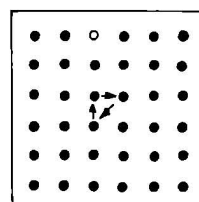


Bild 3

Analog definieren wir $O_1(C, B)$, $O_1(E, D)$ und $O_1(F, E)$.

Ähnlich finden wir die Operation (Bild 4)

$$O_2 = \bar{B}\bar{B}; B^{-1};$$

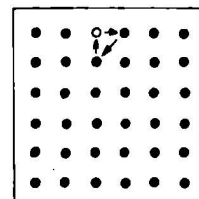


Bild 4

Mittels O_1 und O_2 können wir jede Kugel von jedem Platz zu jedem anderen bringen. Zweckmäßigerweise beginnen wir mit der Scheibe *F*, dann *E* usw. Eventuell muß zwischenzeitlich auch die verschwundene Kugel gewechselt werden. Mit etwas Übung wird es keine Probleme machen, die Scheiben *C* bis *F* zu ordnen.

Wenden wir uns nun den Schichten *A* und *B* zu.

Ausgehend von O_2 betrachten wir die Operation (Bild 5)

$$O_2(n) = \bar{B}\bar{B}^n; B^{-n} \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5);$$

Hiermit gelingt es auch, die Scheibe *B* zu ordnen. Ist eine Kugel *K* aus der Schicht *A* an einen Platz *P* in der Schicht *B* zu trans-

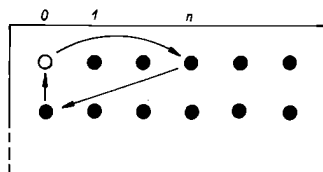


Bild 5

portieren, so dreht man die Scheibe A (nur diese!) so, daß das freie Feld über P steht und wendet dann $O_2(n)$ mit geeignetem n an!

Ist eine Kugel K aus der Schicht B an einen Platz P aus der Schicht B zu transportieren, so dreht man die Scheibe A so, daß das freie Feld über K steht, wendet (z. B.) O_2 an und hat die vorher diskutierte Situation. Man beachte, daß alle anderen Kugeln der Schichten B bis F unverändert bleiben!

Schließlich ordnen wir noch die Schicht A . Wir halten den Turm jetzt vor einer Operation immer so, daß das freie Feld links oben (in unserem Schema) ist.

Wir wollen eine Kugel K , die sich in der m -ten Säule rechts vom freien Feld befindet, um n Säulen nach rechts transportieren.

Dazu ist folgende Operation geeignet (Bild 6).

$$O_3(m, n) = (\overline{BB}^m; B^{-m})(\overline{BB}^n; B^{-n})$$

$$(B^{m+n}\overline{BB}^{-m-n}); (B^{-m}\overline{BB}^m);$$

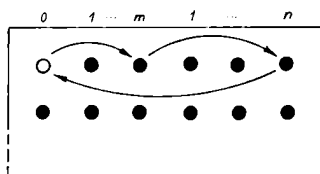


Bild 6

Man bringt nun die Kugeln von rechts in der Schicht A in Ordnung. (Man beachte, daß nach jeder Operation der Turm in der Hand gedreht werden muß, um das freie Feld wieder links zu haben! Richtig platzierte Kugeln bleiben natürlich richtig.)

Mittels O_3 lassen sich in der Schicht A alle Kugeln und das freie Feld auf ihre Plätze bringen, es sei denn, es bleibt eine einfache Paarvertauschung Kugel-freies Feld übrig. Dann nehme man (Bild 7)

$$O_4 = ((\overline{BB}^{-2}; B^2)(\overline{BB}; B^{-1})(B^{-1}\overline{BB});$$

$$(B^2\overline{BB}^{-2});)^2 B;$$

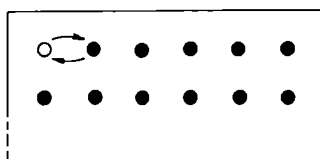


Bild 7

Es gibt Fälle, in denen eine einmalige Anwendung nicht direkt zum Ziel führt. Will man z. B. (Bild 8)

erreichen, so kann man $O_3(1, 1) \cdot O_3(1, 4)$ oder auch O_4^2 wählen.

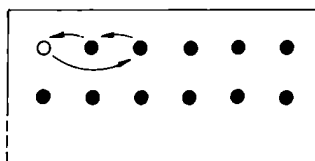


Bild 8

Durch Anwendung von $\overline{F}$ erscheint die versteckte Kugel wieder, und wir sind fertig.

Wir hatten hier nicht das Ziel, alle Fälle möglichst kurz zu bewältigen, sondern wollten Anregungen zur Beschäftigung mit dem Turm von Babylon geben und eine mögliche Lösungsvariante vorstellen. Auch kann man sich

andere Aufgaben stellen. So kann man die Kugeln derart ordnen, daß die Kugeln einer Schicht die gleiche Farbe haben, oder man gibt sich irgendwelche farbige Muster vor.

H.-D. Gronau

Dauerkalender für die Jahre 1801 bis 2000

Jahre								Monate											
1801–1900				1901–2000				J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
01	29	57	85		25	53	81	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
02	30	58	86		26	54	82	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
03	31	59	87		27	55	83	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
04	32	60	88		28	56	84	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
05	33	61	89	01	29	57	85	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
06	34	62	90	02	30	58	86	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
07	35	63	91	03	31	59	87	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
08	36	64	92	04	32	60	88	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
09	37	65	93	05	33	61	89	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
10	38	66	94	06	34	62	90	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
11	39	67	95	07	35	63	91	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
12	40	68	96	08	36	64	92	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
13	41	69	97	09	37	65	93	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
14	42	70	98	10	38	66	94	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
15	43	71	99	11	39	67	95	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
16	44	72		12	40	68	96	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
17	45	73		13	41	69	97	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
18	46	74		14	42	70	98	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
19	47	75		15	43	71	99	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
20	48	76		16	44	72	00	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
21	49	77	00	17	45	73		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
22	50	78		18	46	74		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
23	51	79		19	47	75		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
24	52	80		20	48	76		4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
25	53	81		21	49	77		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
26	54	82		22	50	78		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
27	55	83		23	51	79		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
28	56	84		24	52	80		2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

Wochentage

S	1	8	15	22	29	36
M	2	9	16	23	30	37
D	3	10	17	24	31	
M	4	11	18	25	32	
D	5	12	19	26	33	
F	6	13	20	27	34	
S	7	14	21	28	35	

Beispiel: Auf welchen Wochentag fiel der 7. Oktober 1949?

Lösung: Man gehe von der Jahrestafel aus und suche für das Jahr 1949 in der Monatstafel unter Oktober die zugehörige Monatskennzahl (6); zuzüglich der Zahl des gesuchten Wochentages (7) ergibt sich die Schlüsselzahl (6 + 7 = 13), für die man in der Wochentagstafel den Freitag als den gesuchten Wochentag findet.

Schriftliche Abschlußprüfung

Mathematik, Schuljahr 1982/83
Oberschule, Klasse 10

Pflichtaufgaben

1. a) Im Jahre 1980 wurden in der DDR 98,8 Mrd. kWh Elektroenergie erzeugt. 1985 sollen 13,0% mehr Elektroenergie erzeugt werden als 1980.

– Berechnen Sie diese Steigerung!

(Angabe in Milliarden Kilowattstunden!)

– Wieviel Elektroenergie soll 1985 insgesamt erzeugt werden?

b) 1980 wurden von den insgesamt erzeugten 98,8 Mrd. kWh Elektroenergie 77,2 Mrd. kWh aus Rohbraunkohle gewonnen.

– Wieviel Prozent der Elektroenergie wurden aus Rohbraunkohle erzeugt?

– Stellen Sie diesen Anteil in einem Kreisdiagramm dar! (Schraffieren Sie den entsprechenden Sektor!)

2. Gegeben ist die Ungleichung

$$15 - 3x > 5(x - 1)$$

($x \in P$).

a) Lösen Sie diese Ungleichung!

(Probe wird nicht verlangt.)

b) Geben Sie von den Zahlen

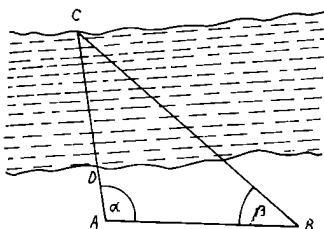
$$-4; 2,5; \frac{27}{10}; 0,05$$

diejenigen an, die diese Ungleichung erfüllen!

c) Die Ungleichung hat die Lösungsmenge L , die Menge der natürlichen Zahlen sei N . Geben Sie alle Elemente des Durchschnitts der Mengen L und N an!

3. Eine Pionierkompanie der NVA erhielt den Befehl, über einen Fluß einen Übergang vom Punkt D zum Punkt C zu schaffen (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



Durch Messung wurden ermittelt:

$$\overline{AB} = c = 85 \text{ m} \quad \angle ABC = \beta = 28^\circ$$

$$\angle CAB = \alpha = 106^\circ \quad \overline{AD} = d = 12 \text{ m}$$

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab! Tragen Sie den Punkt D ein, und ermitteln Sie die Länge des

Flußüberganges $\overline{DC}$ mit Hilfe der Konstruktion!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\angle BCA = \gamma$!

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC} = b$!

Berechnen Sie die Länge des Flußüberganges $\overline{DC}$!

4. Durch die Gleichung

$$y = x^2 - 5x + \frac{9}{4} \quad (x \in P)$$

ist eine Funktion gegeben.

a) Vervollständigen Sie die zu dieser Funktion gehörende Wertetabelle

x	0	5
y		

b) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

c) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!

d) Zeichnen Sie diese Parabel mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 5$!

5. Vermindert man das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl um 1, so ist diese Differenz stets durch 4 teilbar.

a) Wählen Sie eine ungerade Zahl, und zeigen Sie, daß die Aussage für diese Zahl gültig ist!

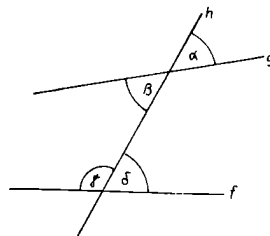
b) Geben Sie unter Verwendung der Variablen n ($n \in N$) eine allgemeine Darstellung einer ungeraden natürlichen Zahl an!

c) Beweisen Sie, daß obenstehende Aussage für jede ungerade natürliche Zahl gültig ist!

6. a) Berechnen Sie $\sqrt{1,44 \cdot 10^4}$!

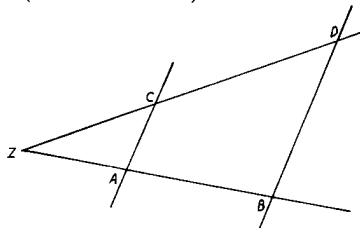
b) Ermitteln Sie $\sin 118^\circ$ und $\cos 118^\circ$!

c) – Welche der Winkel α , β , γ und δ (siehe Skizze) bilden ein Paar von Wechselwinkeln?



– Geben Sie eine Bedingung dafür an, daß Wechselwinkel kongruent zueinander sind!

Skizze (nicht maßstäblich)



Gegeben sind:

$$\overline{ZA} = 3 \text{ cm}$$

$$\overline{ZB} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{ZC} = 5 \text{ cm}$$

d) Berechnen Sie die Länge von $\overline{ZD}$!

Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. Eine Feldbaubrigade erntete mit 6 Kartoffelvollerntemaschinen gleichen Typs in 40 Stunden ein 48 ha großes Feld ab.

a) Insgesamt wurden dabei 9600 dt Kartoffeln geerntet. Berechnen Sie den Ertrag pro Hektar!

b) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von einer Maschine in einer Stunde abgeerntet wurde!

c) Welche Zeit hätte man beim Einsatz von 8 solcher Maschinen gebraucht?

d) In welcher Gesamtzeit hätte dieses Feld abgeerntet werden können, wenn man nach einem 15stündigen Einsatz dieser 8 Maschinen noch 2 solcher Maschinen zusätzlich eingesetzt hätte?

7.2. Ein gerader Kreiszylinder mit der Höhe h und dem Durchmesser d stehe auf seiner Grundfläche. Auf seiner Deckfläche sei eine Halbkugel mit dem gleichen Durchmesser aufgesetzt.

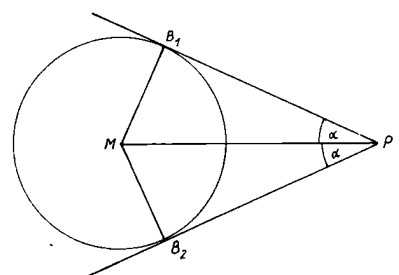
a) Zeichnen Sie den Aufriß eines solchen zusammengesetzten Körpers für $d = h = 4,4 \text{ cm}$!

b) Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers für $d = h = 4,4 \text{ cm}$!

c) Bei einem anderen so zusammengesetzten Körper soll das Volumen des Zylinders genau so groß wie das der Halbkugel sein. Berechnen Sie die Höhe dieses Zylinders für $d = 4,4 \text{ cm}$!

7.3. Von einem Punkt P , der außerhalb eines Kreises um den Punkt M liegt, sind die Tangenten an diesen Kreis gezeichnet. Sie berühren den Kreis in den Punkten B_1 bzw. B_2 (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



$$\overline{MB_1} = \overline{MB_2} = r = 4,0 \text{ cm}$$

$$\angle B_2PB_1 = 2\alpha = 50^\circ$$

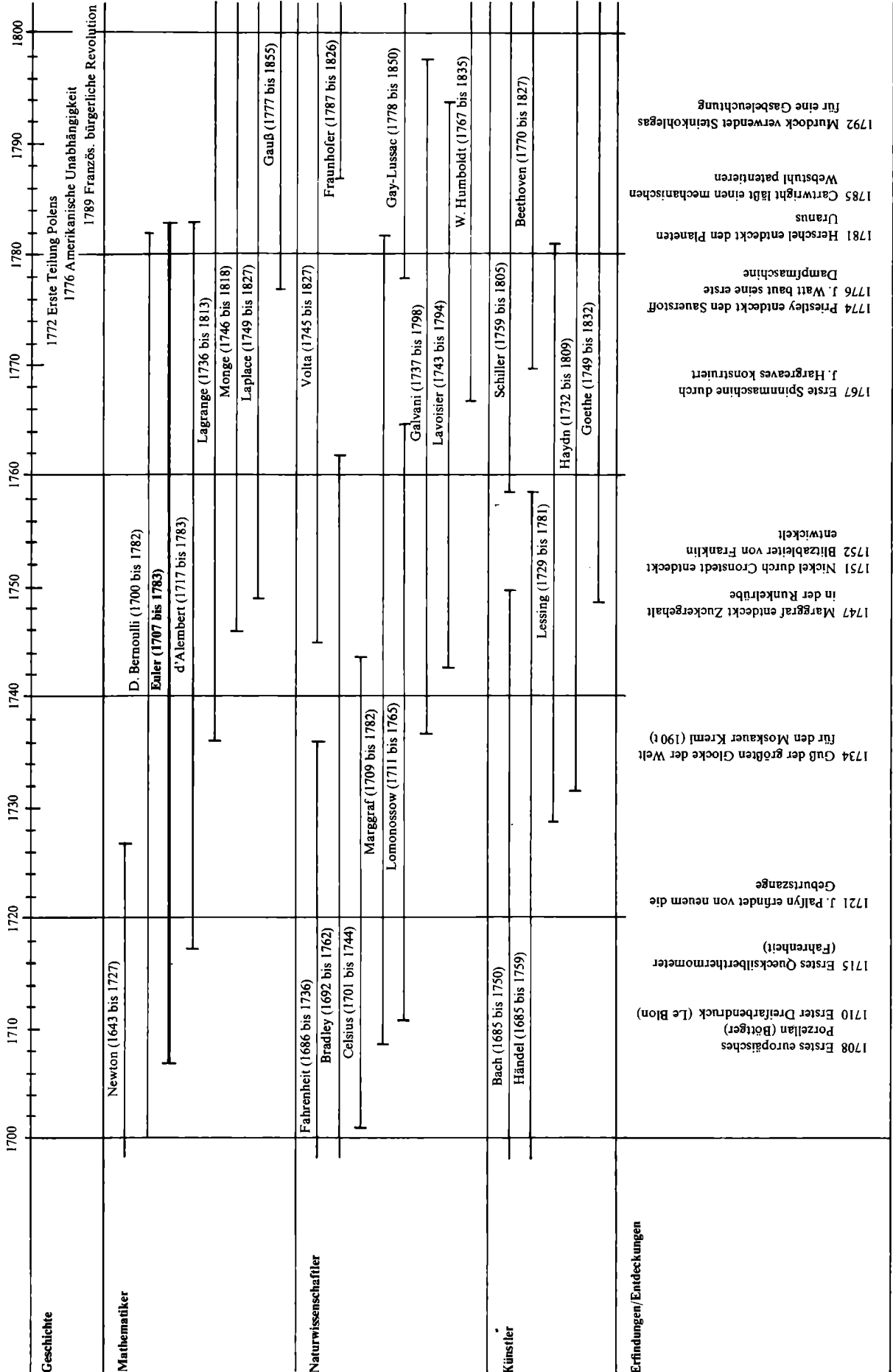
a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PM} = e$!

b) Berechnen Sie die Länge des Tangentenabschnitts $\overline{PB_1} = t$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks PB_1MB_2 !

d) Die Verlängerung von $\overline{PM}$ über M hinaus schneide den Kreis im Punkt Q . Berechnen Sie die Größe des Winkels $\angle B_1QB_2$!

Euler und seine Zeit



Leonhard Euler in Berlin

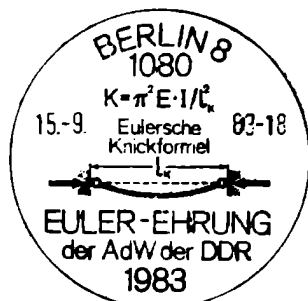
Mit dem 200. Todestag von Leonhard Euler gedenken wir des wohl produktivsten Mathematikers des 18. Jahrhunderts. Als Mitglied der Akademien in Petersburg und Berlin spielte er eine hervorragende Rolle für die Wertschätzung, die diesen Akademien entgegengebracht wurde, und für die Entwicklung beider zu den führenden Zentren mathematischer Forschungen.

Die wissenschaftliche Forschung wurde im 18. Jahrhundert im wesentlichen an den Akademien der fortgeschrittenen europäischen Staaten betrieben, vor allem in Paris, London, Berlin und Petersburg. Die Wissenschaftler an den Akademien besaßen im allgemeinen keine Lehrverpflichtungen, wurden aber zu Gutachten über wirtschaftliche, technische und andere Fragen herangezogen. Die absolutistischen Herrscher betrachteten sich dabei gern als Förderer der Wissenschaften, indem sie führende Naturwissenschaftler und Mathematiker an ihre Höfe einluden. Die Repräsentanz führender Gelehrter galt als Zeichen wirtschaftlicher Stärke.

Im Leben Eulers lassen sich drei Schaffensperioden bestimmen:

von 1727 bis 1741 in Petersburg, von 1741 bis 1766 in Berlin und von 1766 bis 1783 wiederum in Petersburg.

Euler weilte also insgesamt 25 Jahre in Berlin.



Euler folgte einer Berufung des preußischen Königs Friedrich II. (1712 bis 1786) an die Berliner Akademie, die der König nach seiner Thronbesteigung 1740 reorganisieren wollte. Dabei waren für Euler zwei Überlegungen maßgebend. Nach dem Tode der russischen Zarin Anna (1693 bis 1740) hatten sich 1740 die innenpolitischen Zustände Rußlands so verschlechtert, daß es ungewiß war, ob die guten Arbeitsbedingungen an der Petersbur-

ger Akademie erhalten werden konnten. Zum anderen wollte der preußische König die Berliner Akademie zu einem Zentrum wissenschaftlichen Forschens sowohl in Preußen als auch in Europa umgestalten. Er hatte den Ehrgeiz, die bedeutendsten Gelehrten Europas um sich zu versammeln.

Euler interessierte besonders die künftige Organisation der Berliner Akademie, und er nahm den Ruf nach Berlin an. In einem Brief an G. F. Müller (1705 bis 1783) vom 10. 4. 1742 schilderte er seine Lage bei Ankunft in Berlin:

„Was meinen und der Meinigen Zustand allhier betrifft, so leben wir der Kriegsunruhen ungeachtet in vollkommener Ruhe. Die Hohe Intention Ihro Königl. Majestät, Kraft deren ich hierher berufen worden, ging dahin, aus der bisherigen Societät eine wohl eingerichtete Academie der Wissenschaften zu etabliren, bisher aber ist die Vollziehung dieses Desseins durch die noch weit ausstehenden Kriegstrouben gehemmt worden: jedoch haben Ihro Majestät beschlossen, auf künftigen Winter diese Sach vorzunehmen.“

Am 6. 9. 1742 nahm Euler an der ersten Sitzung der mathematischen Klasse der Berliner Akademie teil und legte allein sieben mathematische Arbeiten vor.

Aber die Hoffnungen Eulers, an der Reorganisation der Berliner Akademie tatkräftig teilnehmen zu können, erfüllten sich nicht. Friedrich II. war mit der Führung des 1. Schlesischen Krieges (1740 bis 1742) beschäftigt und wollte außerdem, daß der französische Wissenschaftler Pierre-Louis M. Maupertius (1698 bis 1759) Präsident der reformierten Akademie wurde. Das Verhältnis zwischen Euler und dem König war so eigentlich seit Eulers Ankunft in Berlin getrübt, und es sollte letztlich der Grund dafür sein, daß Euler 1766 enttäuscht nach Petersburg zurückging.

Euler war in Berlin von 1744 bis 1766 Direktor der mathematischen Klasse der Akademie; damit besaß er eine wichtige Funktion, die es ihm ermöglichte, sein Ziel, das wissenschaftliche Niveau der Berliner Akademie zu erhöhen, realisieren zu können. Von 1741 bis 1766 war er außerdem Direktor der akademischen Sternwarte.

Euler oblag so de facto jahrzehntelang die wissenschaftliche Leitung der Akademie, wobei er ein ungeheures Arbeitspensum absolvierte. Er legte etwa alle 14 Tage in den Akademiesitzungen eine Vorlage, eine wissenschaftliche Nachricht oder gar einen Vortrag vor. In der mathematischen Klasse sprach er pro Monat ein- bis zweimal, darunter waren Vorträge, Beiträge und Vorlagen. In den Vorlagen behandelte er sowohl wissenschaftliche als auch praktische Probleme. Daneben lieferte er Gutachten zu technischen Fragen, z. B. zu Maschinen, zur Konstruktion von Pumpen u. a. Er übersetzte und bearbeitete sogar ein englisches Buch zur

Artillerie, das jahrelang als Handbuch zur Artillerie-Ausbildung in Preußen verwendet wurde.

Auf Befehl Friedrichs II., dem die mathematischen Arbeiten Eulers fremd waren, erhielt er auch praktische Aufgaben, so z. B. Berechnungen zur Einrichtung sogenannter Witwen- und Waisenkassen, Gutachten zu technischen Erfindungen, Lotterien und Glücksspielen.

Von seinen mathematischen Arbeiten, die in der Berliner Zeit entstanden, sei nur sein berühmtes Werk „Einführung in die Differentialrechnung“ (latein.) erwähnt, das 1755 erschien und fast ein ganzes Jahrhundert das Lehrbuch der Differentialrechnung war.

Obwohl Euler nach dem Tode von Maupertius im Jahre 1759 faktisch die gesamte Tätigkeit der Akademie leitete, verschlechterte sich sein Verhältnis zu Friedrich II., dem als König die Akademie unterstand, immer mehr. Als gar der König auf der Suche nach einem neuen Präsidenten Euler einfach überging, dachte dieser an seinen Weggang. Er schrieb an G. F. Müller am 19. 3. 1763: „Der Prinz Dolgorucki sagt mir heut, dass wir hier gewiß den Mr. d'Alembert zum Praes. bekommen werden, geschieht dieses, so halte ich sogleich um meine Demission an.“

In Rußland regierte seit 1762 inzwischen die Zarin Katharina II. (1729 bis 1796), die ihren russischen Gesandten in Berlin beauftragte, mit Euler wegen seiner ehrenvollen Rückkehr an die Petersburger Akademie zu verhandeln. 1763 beauftragte sie die Petersburger Akademie, Euler als „Professor ordinaire“ (ordentlichen Professor/Ehrentitel) zu berufen und ihm das Amt des Direktors der mathematischen Klasse sowie des Konferenzsekretärs zu übertragen. Eulers Beziehungen zur Petersburger Akademie hatte er während seines Berliner Aufenthalts nie abreißen lassen, so daß er wohlwollend das Petersburger Angebot prüfte.

Die Finanzreform von 1765, die mit ihren Untersuchungen für Euler als faktischen ökonomischen Verwalter der Akademie – auch dieses Amt übte er jahrelang nebenbei aus, ohne Dank zu erhalten – ein Mißtrauensvotum darstellte, beschleunigte seinen Fortgang aus Berlin.

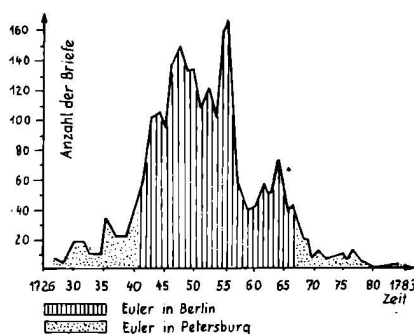
So traf am 28. Juli 1766 der fast sechzigjährige Euler mit seiner 18köpfigen Familie wiederum in Petersburg ein, wurde mit allen Ehren empfangen und arbeitete – trotz vollständiger Erblindung im Jahre seiner Rückkehr – noch weitere 17 Jahre mit bewundernswerter Energie. Wenn sich Eulers Berliner Aufenthalt auch für ihn nicht günstig und eher enttäuschend gestaltete, so wurde doch das Ansehen der Berliner Akademie durch seine erfolgreiche Tätigkeit maßgeblich gefördert. Seine festen Beziehungen zur Petersburger Akademie in jenen Jahren begründeten eine Tradition des engen Zusammenwirkens beider wissenschaftlicher Einrichtungen. Eulers um-

fangreicher Briefwechsel mit russischen Gelehrten aus dieser Berliner Zeit gibt hierüber ausführlich Auskunft. Darüber hinaus verdeutlicht er das gewaltige Wirken Eulers auf vielen Wissenschaftsgebieten, daneben zur Förderung junger russischer Wissenschaftler und zur Leitung der Berliner Akademie.

Annette Vogt

Über Eulers Briefwechsel

Neben den wissenschaftlichen Arbeiten haben stets auch Briefe, Notizhefte, Tagebücher usw. von Wissenschaftlern große Aufmerksamkeit gefunden, da sie stets interessante persönliche Einblicke in die Lebens- und Arbeitsweise gewähren. Leonhard Euler hat mit fast 300 Briefpartnern vermutlich zwischen 4500 und 5000 Briefe gewechselt. Ein Drittel der Briefe scheint verlorengegangen zu sein.



Natürlich findet sich manches Merkwürdige in diesem umfangreichen Briefwechsel. 1748 fragt zum Beispiel ein Professor aus Tübingen allen Ernstes bei Euler, der damals in Berlin lebte, an, ob es wahr sei, daß in Berlin ein Künstler Menschen in Tiere verwandeln könne. Euler wiederum schrieb 1765 von Berlin nach Petersburg an einen dortigen Gelehrten: „Daß die Zahnschmerzen durch die magnetische Kraft gestillt werden können, wird nun von allen Orten her einstimmig bestätigt, und ich habe dieser Tagen selbst eine Probe davon gemacht. Der H. Dr. Leclerc sagte mir, daß er sich schon längst dieses Mittels in Rußland bedient habe, welches gewiß angemerkt zu werden verdiente; damit die erste Erfindung nicht, wie bisher so oft geschehen, in Vergessenheit gerathe.“ In Rußland verfuhr man, wie die St. Petersburg Zeitung aus dem gleichen Jahr schrieb, bei der Behandlung von Zahnschmerzen mit Magneten so: „Man halte das Gesicht nach Norden und halte dabei den Nordpol des Magneten auf den schmerzenden Zahn, dann spüle man den Mund mit kaltem Wasser aus. Wenn die Behandlung nicht sofort Erfolg zeige, dann sei sie zu wiederholen.“ In Mode waren magnetische Heilmethoden durch die Lehre des österreichischen Arztes Mesmer gekommen, der sich mit dem tierischen Magnetismus ausgiebig beschäftigt hatte – wir würden seine Lehren heute als vorwissenschaftliche Hypnose bezeichnen.

Festlicher Auftakt zu den Ehrungen für Leonhard Euler

Wissenschaftliche Konferenz erörtert Werk des Gelehrten

Den Auftakt zu den Ehrungen in der DDR für den bedeutenden Mathematiker Leonhard Euler aus Anlaß seines 200. Todestages am 18. September bildete am 15.9. ein Festakt im Haus der Ministerien in Berlin.

In seiner Eröffnungsrede begrüßte der Präsident der Akademie der Wissenschaften der DDR, Prof. Dr. Werner Scheler, im Namen des Euler-Komitees der Akademie Gäste aus der DDR, aus weiteren 13 Ländern und Westberlin.

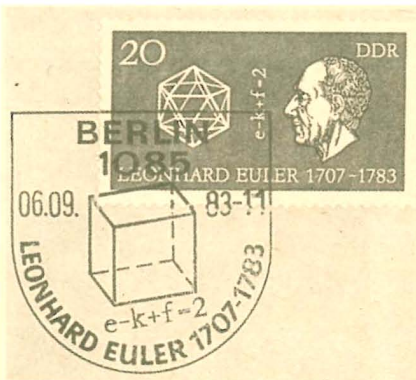
Als Schirmherr der Euler-Ehrungen in der DDR würdigte Dr. Herbert Weiß, Stellvertreter des Vorsitzenden des Ministerrates und Minister für Wissenschaft und Technik, den überragenden Gelehrten und sein Werk in einem Festvortrag.

Euler sei als Stern erster Größe am Firmament der Naturwissenschaften und als einer der größten Mathematiker zu bewerten, sagte er. Mit seiner Würdigung werde die große Bedeutung der Mathematik im Leben der sozialistischen Gesellschaft und der Rang dieser Wissenschaft für die Meisterung der aktuellen Aufgaben unterstrichen. Der gebürtige Schweizer Leonhard Euler hatte an den Akademien in Petersburg und Berlin gewirkt und als einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten ein Lebenswerk von 800 veröffentlichten Arbeiten hinterlassen.

Festrede von Dr. H. Weiß



Eulers historisches Verdienst, betonte Dr. Weiz, bestehe in der Schaffung des fundamentalen mathematischen Apparates für die Lösung der unterschiedlichsten Probleme in Physik, Astronomie und Technik. Er habe das Rüstzeug hinterlassen, auf dem die technische Entwicklung der folgenden Jahrzehnte aufbaute und das bis in die Gegenwart unverzichtbares Gut jeder Ingenieur Tätigkeit ist. Moderne Technologien wie Mikroelektronik, Robotertechnik oder automatisierte Informationsverarbeitung kämen nicht ohne einen ausgeklügelten mathematischen Apparat aus. Insofern hätten Mathematik und Rechen-technik für die weitere Beschleunigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts und damit für die Verwirklichung der ökonomischen Strategie der DDR einen besonderen Stellenwert.



Sondermarke und Sonderstempel zum 200. Todestag Eulers

Anschließend sprach Prof. Dr. Adolf Juschekewitsch (Moskau) über Leben und Werk des Mathematikers. Prof. Dr. Rolf Klötzler, Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der DDR, befaßte sich in einem Vortrag mit Eulers Verdiensten um die Variationsrechnung.

Am gleichen und am darauffolgenden Tag wurde dann eine wissenschaftliche Konferenz eröffnet, auf der namhafte Wissenschaftler des In- und Auslandes fachspezifische und allgemeinhistorische Aspekte des Wirkens von Leonhard Euler erörterten.

In freien Stunden • alpha-heiter



Im Kerzenschimmer

Von einem Leuchter mit 7 linear angeordneten Kerzen (*a* bis *g*) sollen am Montag eine, am Dienstag zwei usw., also am Sonntag alle sieben eine täglich gleichbleibende Zeit leuchten, so daß am Ende der Woche alle Kerzen gleichzeitig herunterbrennen.

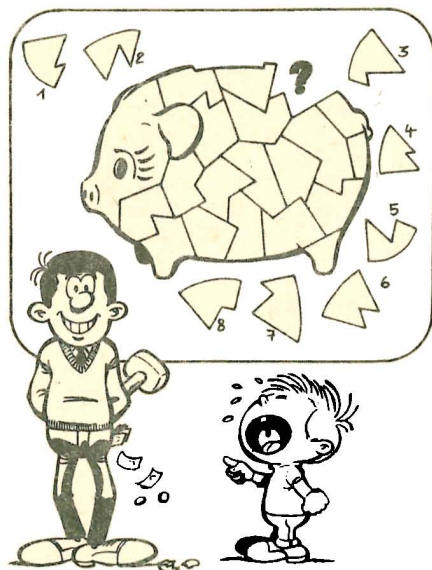
Fragen:

1. Welche der Kerzen *a* bis *g* müssen an den einzelnen Tagen entzündet werden, damit sie an jedem Tag ein symmetrisches Bild ergeben und zwischen je zwei brennenden Kerzen höchstens eine nicht entzündete steht?
2. Wievielmals wird im Laufe der Woche jede Kerze entzündet?
3. Nach welcher Zeit bei einer Brenndauer von 8 Stunden sind die Kerzen täglich zu löschen, damit sie für alle sieben Tage der Woche ausreichen?

Dr. Christian Lange, IfL Leipzig

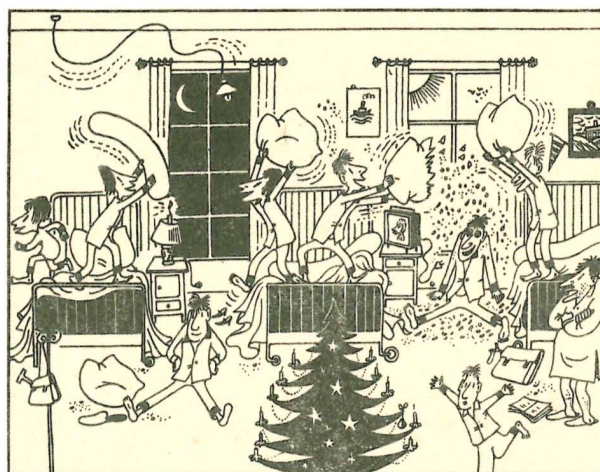
Suche!

Welches der Stücke 1 bis 8 fehlt im traditionellen Silvesterglücksschwein?



Lustige Kissenschlacht

Welche 16 Fehler fallen aus dem lustigen ungarischen Bild auf?



Kryptarithmetik

In dem Schema
FLOCKE
+ FLOCKE

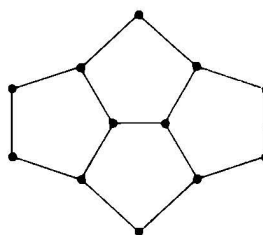
SCHNEE

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Ziffern gleiche Buchstaben, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Claus Janke, Ilmenau

Magische Figur

An Stelle der Sterne sind die Zahlen 1 bis 12 so einzusetzen, daß die Summe auf dem Umfang jedes Fünfecks stets gleich ist.



Dirigent J. Pěňčík, Prag

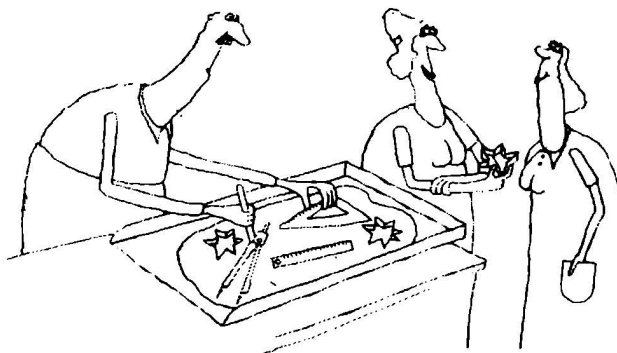
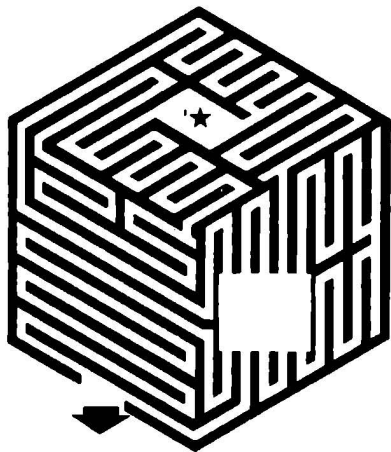
Silvesterfeier

Wo sind die 20 kleinen Unterschiede zwischen den beiden Bildern versteckt?



Originelles Weihnachtspaket

Welches der vier Teilstücke (1 bis 4) ist einzusetzen, wenn man vom Stern zum Ausgangspfeil gelangen will?



„Mit den Förmchen wird es immer zu ungenau!“

Gewichtiges

Abgenommen habe ich ja nichts, aber seit ich die Kalorien zähle, kann ich viel besser rechnen.



Lothar Otto, aus Magazin 7/83

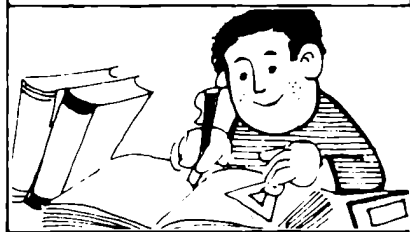
Zwei gleiche Hüte gesucht

Jens und Jan suchen zwei gleiche Hüte für die Silvesterfeier. Wer von euch findet sie am schnellsten?

Für Dich, Berlin



Lösungen



Lösungen zu: Philatelistischer Mathematikunterricht

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Lösungen zu: alpha-heiter

Im Kerzenschimmer

Frage 1:

Montag	d
Dienstag	c e
Mittwoch	b d f
Donnerstag	a c e g
Freitag	ab d f g
Sonntag	abc efg
Sonntag	abcdefg

Frage 2:

rechnerisch $(1+2+3+4+5+6+7):7=4$
oder graphisch aus Lösung 1 ersichtlich: 4mal

Frage 3:

Wenn jede Kerze maximal 8 Stunden brennt und diese Zeit in vier gleiche Etappen unterteilt wird, nach jeweils 2 Stunden.

Suche!

Es fehlt Stück Nr. 2

Lustige Kissenschlacht

Die Lösung sei dem Leser (aus Platzgründen) selbst überlassen wie: Der Vater hat 6 Finger an der rechten Hand. Der Haken des Bildes mit Schiff liegt nicht in der Mitte usw.

Kryptarithmetik

„E“ muß immer 0 sein. K kann nur 5 sein (als erste Gedankenschritte). Drei Lösungen:

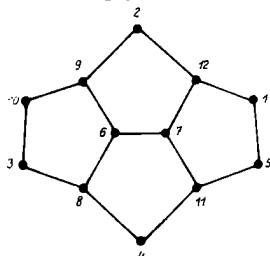
$$416\ 350 + 416\ 350 = 832\ 700;$$

$$218\ 350 + 218\ 350 = 436\ 700;$$

$$219\ 350 + 219\ 350 = 438\ 700$$

Magische Figur

Die Summe beträgt jeweils 36.



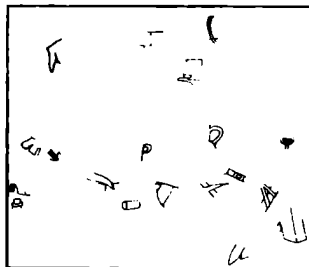
Originelles Weihnachtspaket

Es ist das Teilstück 4

Zwei gleiche Hüte gesucht

Die Kappe in der rechten unteren Ecke (über dem Zylinder) ist zweimal vorhanden.

Silvesterfeier



Lösungen zur Sprachecke:

1. Beim Scheibenschießen traf ein Sportler einige Male die 10, ebensooft erzielte er 8 Punkte, und einige Male traf er die 5. Insgesamt errang er 99 Punkte. Wie oft schoß der Sportler?

Lösung: Er erzielte xmal 18 Punkte (10 und 8), und ymal 5 Punkte: $18x + 5y = 99$. Wegen dieser Gleichung gilt $1 \leq x \leq 5$. $99 - 18x$ ist nur für $x=3$ durch 5 teilbar, dann ist $y=9$. $9+3+3=15$. Der Sportler schoß 15mal.

2. Von den berühmten Diamanten wurde der Diamant Orlov in Indien im 17. Jahrhundert gefunden. Er wird gegenwärtig im Kreml aufbewahrt. Ungeschliffen betrug seine Masse 300 Karat; einmal geschliffen betrug sie 189,6 Karat. (1 Karat = 0,20 g)

Berechne die Masse dieses Diamanten vor und nach dem Schliff in Gramm!

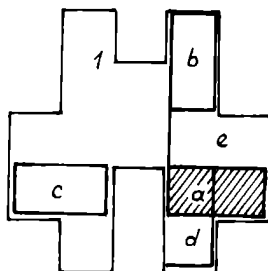
Lösung: $300 \cdot 0,20 \text{ g} = 60 \text{ g}$;

$$189,6 \cdot 0,20 \text{ g} = 37,92 \text{ g}$$

Die Masse des Diamanten betrug 60 g vor und 37,92 g nach dem Schliff.

3. Schiebe die drei Rechtecke, ohne sie zu drehen, so, daß sie die rechte Seite der Figur bedecken!

Lösung: Die Riegel heißen 1 (oberer Riegel)
2 (Querriegel)
3 (unterer Riegel)



Lösungsweg:

- 2 um 6 nach vorn und um 1 nach unten
- 1 um 1 nach unten, um 4 nach vorn, um 1 nach oben
- 3 um 3 nach oben
- 2 um 1 nach oben, um 4 zurück, um 1 nach unten
- 1 um 3 nach unten
- 3 um 1 nach unten, um 4 nach vorn, um 1 nach oben
- 2 um 1 nach oben, um 6 nach vorn

Lösungen zu: Kreuzzahlrätsel

Waagrecht: 3) 13; 4) 11; 6) 12; 8) 14; 9) 1111; 10) 10; 11) 13; 13) 52; 15) 15; 16) 30; 17) 41; 18) 1615; 19) 12; 21) 15; 22) 100; 23) 764; 25) 17; 26) 40; 27) 128; 29) 09; 30) 17; 32) 25; 33) 10; 34) 10; 35) 16; 37) 1251; 40) 6000; 41) 81; 43) 90; 44) 91; 46) 12; 47) 11; 49) 10; 50) 24; 53) 74; 54) 45; 56) 40; 58) 90; 59) 83; 61) 32; 62) 18; 63) 60.

Senkrecht: 1) 13; 2) 11; 3) 121; 5) 144; 7) 210; 8) 111; 12) 385; 14) 2301; 15) 1245; 20) 21; 21) 10; 23) 77; 24) 44; 27) 19500; 28) 8110; 29) 02; 31) 70; 34) 181; 36) 6450; 37) 16; 38) 2048; 39) 10; 42) 100; 43) 999; 45) 10; 46) 111112; 48) 10; 51) 54; 52) 14; 53) 7104; 55) 5100; 57) 01; 58) 99; 60) 362880; 61) 31.

Lösungswort (Lebensdaten von Leonhard Euler): 15. 4. 1707 bis 18. 9. 1783.

Lösungen zu:

Der Eulersche Polyedersatz, Heft 4/83

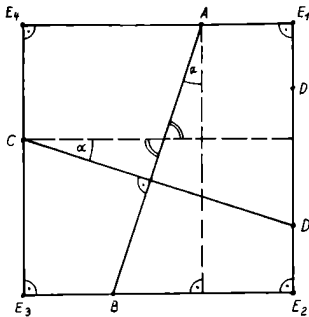
Aufgabe 1: Der Eulersche Polyedersatz gilt für jedes konvexe Polyeder: Würfel (Hexaeder), Quader, quadratischer Pyramidenstumpf (jeweils $s=8+6-12=2$), dreiseitiges Prisma ($s=6+5-9=2$), quadratische Pyramide ($s=5+5-8=2$), Tetraeder ($s=4+4-6=2$), Oktaeder ($s=6+8-12=2$), Pentagondodekaeder ($s=20+12-30=2$) und Ikosaeder ($s=12+20-30=2$), m.a. W., die Konvexität des Polyeders ist eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von $e+f-k=2$. Körper K_5 ist nicht konvex, also der Eulersche Polyedersatz nicht anwendbar, trotzdem gilt $s=16+10-24=2$. Das zeigt, daß der Eulersche Polyedersatz nicht umkehrbar ist, m.a. W., die Konvexität des Polyeders ist keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von $e+f-k=2$. Für das ebenfalls nicht-konvexe Polyeder K_6 gilt $s=9+10-16=3$. Das zeigt, daß man im Satz die Voraussetzung der Konvexität nicht weglassen kann, ohne die Gültigkeit von $e+f-k=2$ zu stören.

Aufgabe 2: $\phi(2156) = \phi(2^2 \cdot 7^2 \cdot 11) = 2 \cdot 42 \cdot 10 = 840$, $\phi(1800) = \phi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = 4 \cdot 6 \cdot 20 = 480$,
 $\phi(841) = \phi(29^2) = 29 \cdot 28 = 812$, $d(72) = 12$
(Teiler von 72 sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72), $\sigma(72) = 195$, $\pi(100) = 25$, $r(25) = 12$ (die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ hat die 12 ganzzahligen Lösungspaare (3, 4), (4, 3), (-3, 4), (4, -3), (-3, -4), (-4, -3), (3, -4), (-4, 3) sowie (5, 0), (0, 5), (-5, 0) und (0, -5), verdeutlicht euch dies geometrisch am Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 5^2$).

Lösungen zu den Aufgaben aus den norwegischen Schülerwettbewerben, Heft 4/83

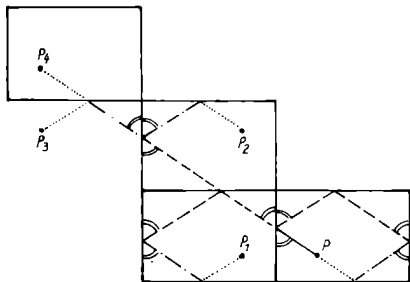
▲ 1 ▲ Es seien A, B, C, D Punkte auf den Seiten eines Quadrats mit den Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 und der Seitenlänge e (s. Bild). Für den Schnittpunkt D' des von C auf AB gefällten Lotes mit der gegenüberliegenden Quadrat-

seite E_1E_2 gilt $CD' \cong AB \left(= \frac{e}{\cos \alpha} \right)$. Zur Lösung der Aufgabe bei gegebenen A, B, C, D konstruiere man daher D' aus A, B, C wie oben.



Falls $D' \neq D$ ist die Richtung der Quadratseite E_1E_2 eindeutig bestimmt als Verbindungsgerade g von D und D' , und E_1, E_2 ergeben sich als Fußpunkte der von A bzw. B auf g gefällten Lote, danach E_3, E_4 als Fußpunkte der von C auf die Geraden BE_2 bzw. AE_1 gefällten Lote. Ist $D = D'$, so kann man g willkürlich durch D wählen und die Eckpunkte wie oben konstruieren. In diesem Fall gibt es also unendlich viele Lösungen. Damit die Aufgabe überhaupt lösbar ist, müssen C und D' auf verschiedenen Seiten von AB liegen und die Lotfußpunkte E_1, E_2 auf derselben Seite wie D' .

▲ 2 ▲ Man denke sich einen Weg der geforderten Art statt an den Wänden reflektiert jeweils hinter der betreffenden Wand in einem spiegelbildlichen Zimmer fortgesetzt (s. Bild). Die kürzeste Verbindung von P nach P_4 ist offenbar die geradlinige. Sie entspricht im ursprünglichen Raum einem Parallelogramm.



▲ 3 ▲ Wegen $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ist mit a, b und $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ auch $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ rational, also auch

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})] \text{ und } \sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}.$$

▲ 4 ▲ Die Ungleichung

$$x_k(x_{k+1} - x_k) = \frac{kx_{k+1}^2 + 2x_{k+1} + k}{2(k+1)} - \frac{(k-1)x_k^2 + 2x_k + (k-1)}{2k} \quad (*)$$

ist eine äquivalente Umformung von $0 \leq [kx_{k+1} - (k+1)x_k + 1]^2$. Addiert man die Ungleichungen (*) für $k=1, 2, \dots, n-1$ und bringt den Summanden $-x_1$ auf die linke Seite, so erhält man die behauptete Ungleichung.

▲ 5 ▲ F_n besteht aus 8^n Quadraten, von denen jedes den Inhalt $\frac{1}{9^n}$ hat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9} \right)^n = 0.$$

Lösungen zu:

Niels-Henrik-Abel-Wettbewerb 1982, Heft 4/83

▲ 1 ▲ Wir setzen $a = (2 + \sqrt{3})^x$. Es gilt $a > 0$ und

$$(2 - \sqrt{3})^x = \frac{(2 - \sqrt{3})^x (2 + \sqrt{3})^x}{(2 + \sqrt{3})^x} = \frac{(4 - 3)^x}{(2 + \sqrt{3})^x} = \frac{1}{a}.$$

Damit gilt $a + \frac{1}{a} = 14$, $a^2 - 14a + 1 = 0$, $a_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48} = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

Weiter ist $a_1 = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ und

$$a_2 = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2.$$

Hieraus ergibt sich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Die Probe bestätigt, daß $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ auch tatsächlich Lösungen sind.

▲ 2 ▲ Es gilt $(n^2)^2 < z < (n^2 + 1)^2$, d. h., z liegt zwischen den Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, ist also nicht selbst Quadratzahl.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Heft 1/83 (Fortsetzung)

Ph 9 ■ 134 Da für $V_1 = \frac{V}{2}$ und $V_2 = 100 \text{ cm}^3$ das gleiche Verhältnis $h : d = 2 : 1$ gilt, ist entsprechend $V_1 = \frac{1}{48} \pi h_1^3$ und $V_2 = \frac{100}{48} \pi h_2^3$ bzw.

$$h_1 = 3 \sqrt[3]{\frac{48 \cdot V}{2 \cdot \pi}} \text{ und } h_2 = 3 \sqrt[3]{\frac{4800}{\pi}}.$$

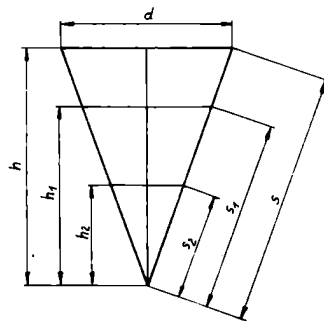
Damit ergibt sich für

$$h_1 : h_2 = 3 \sqrt[3]{\frac{48 \cdot V}{2 \cdot \pi}} : 3 \sqrt[3]{\frac{48 \cdot V}{\pi}},$$

$$h_1 = h_2 \cdot \sqrt[3]{0,5}.$$

Entsprechend ist

$$h_2 = 3 \sqrt[3]{\frac{4800 \text{ cm}^3}{\pi}}.$$



Mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras gilt

$$s^2 = h^2 + \frac{h^2}{16} \text{ bzw. } s = \frac{h}{4} \sqrt{17}.$$

Nach dem Strahlensatz ist nun

$$s_1 : s = h_1 : h; s_1 = \frac{h_1 \cdot s}{h} \text{ bzw.}$$

$$s_2 : s = h_2 : h; s_2 = \frac{h_2 \cdot s}{h}.$$

Setzt man (1) bzw. (2) ein, ergibt sich

$$s_1 = \frac{h \sqrt[3]{0,5} \cdot h \cdot \sqrt{17}}{h \cdot 4} = \frac{h \cdot \sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt{17}}{4},$$

$$s_1 = \frac{16 \text{ cm} \cdot \sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt{17}}{4} \approx 13,1 \text{ cm bzw.}$$

$$s_2 = \frac{h_2 \cdot s}{h}$$

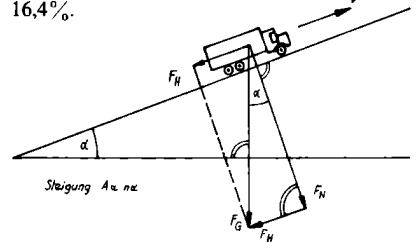
$$s_2 = 3 \sqrt[3]{\frac{4800 \text{ cm}^3}{\pi}} \cdot \frac{h \cdot 17}{4 \cdot h},$$

$$s_2 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{4800 \text{ cm}^3}{\pi}} \cdot \sqrt{17} \approx 11,8 \text{ cm.}$$

Die Eichmarken sind in einer Entfernung von 13,1 cm bzw. 11,8 cm von der Spitze des Trichters anzubringen.

Antwortsätze zu weiteren Aufgaben:

Ph 10/12 ■ 135 Die Steigung beträgt 16,4%.



Ch 7 ■ 105 Es werden insgesamt 3,84 g Kupfer gebildet.

Ch 8 ■ 106 a) Der Schachtofen liefert täglich 87,8 t Braunkohl.

b) Unter den gegebenen Bedingungen entstehen 36938 m³ Kohlendioxid.

c) Aus 160 t 98%igem Kalkstein erhält man 116 t Löschkalk.

Ch 9 ■ 107 Das Gemisch besteht aus 23 g Magnesiumkarbonat und 77 g Magnesiumoxid.

Ch 10/12 ■ 108 a) Zur Produktion von 3 t 90%iger Säure sind 2 t Pyrit mit einem Gehalt von 82% FeS₂ abzurufen.

(2) b) Bei der Produktion von 3 t 90%iger Schwefelsäure aus Pyrit, welches 82% FeS₂ enthält, entstehen 1,5 t Kiesabbrand mit 75% Eisen-(III)-oxid.

c) Das Mischverhältnis von Säure zu Wasser beträgt 1 : 5.

d) Zur Herstellung von 70 g kristallisiertem Zinnsulfat werden 144,6mal 15%ige Schwefelsäure benötigt.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb,

Heft 2/83 (Eulersonderwettbewerb)

Ma 5 ■ 2322 Da der zweite Sohn 100 Taler mehr erhält als der dritte, und da der älteste Sohn 200 Taler mehr erhält als der zweite, erhält der älteste 300 Taler mehr als der dritte. Nun gilt $1600 - 100 - 300 = 1200$ und $1200 : 3 = 400$. Die Söhne erhalten, mit dem jüngsten Sohn beginnend, 400 Taler, 500 Taler und 700 Taler.

Ma 5 ■ 2323 Für den kleineren Summanden a gilt $0 \leq a \leq 15$, für den größeren Summanden b gilt $16 \leq b \leq 32$. Da a Vielfaches von 6 und b Vielfaches von 5 ist, gilt $a=0$ oder $a=6$ oder $a=12$ und $b=20$ oder $b=25$ oder

Ma 10/12 ■ 2347 Angenommen, die Spieler A, B, C hatten anfangs a, b, c Gulden. Nach dem ersten Spiel hat A dann $(a-b-c)$ Gulden, B hat $2b$ Gulden, C hat $2c$ Gulden. Nach dem zweiten Spiel hat A dann $2(a-b-c)$ Gulden, B hat $2b-(a-b-c)-2c$, also $(3b-a-c)$ Gulden, C hat $4c$ Gulden. Nach dem dritten Spiel hat A $4(a-b-c)$ Gulden, B hat $2(3b-a-c)$ Gulden, C hat $4c-2(a-b-c)-2(3b-a-c)$, also $(7c-b-a)$ Gulden. Nun gilt $4(a-b-c)=24$ und $2(3b-a-c)=24$ und $7c-b-a=24$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $a=39, b=21, c=12$. Anfangs hatte A 39 Gulden, B 21 Gulden und C 12 Gulden.

Ma 10/12 ■ 2348 Es seien x und y zwei positive reelle Zahlen, die den Bedingungen genügen; dann gilt $x+y=x \cdot y$ und $x-y=x^2-y^2$. Aus der ersten Gleichung folgt $y=\frac{x}{x-1}$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir

$\frac{x^2}{x-1}=x^2-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$. Daraus folgt $x_1=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ und $x_2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. Daraus folgt weiter $y_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $y_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Die zweite Lösung entfällt, da y_2 negativ ist. Die gesuchten Zahlen lauten $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) &= 2+\sqrt{5}, \\ \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) &= 2+\sqrt{5}, \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Ph 6 ■ 136 Geg.:

Geschwindigkeit $v=3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Weg $s=43,2 \text{ km}=43200 \text{ m}$

Ges.: Laufzeit t und Anzahl n der Sprungschritte

Nach der Gleichung $s=v \cdot t$ ist

$$t=\frac{s}{v},$$

$$t=\frac{43200 \text{ m} \cdot \text{s}}{3 \text{ m}},$$

$$t=14400 \text{ s}=240 \text{ min}=4 \text{ h}.$$

Die Anzahl der Sprungschritte ergibt sich aus $n=14400 \cdot 3=43200$.

Der Schnellläufer brauchte 4 Stunden und machte 43200 Sprungschritte.

Ph 7 ■ 137 Geg.: $P_1=2700 \text{ PS}$ Ges.: P_2
 $v_1=15 \text{ Knoten}$
 $v_2=20 \text{ Knoten}$

Es gilt die Proportion

$$\begin{aligned}P_1 : P_2 &= v_1^3 : v_2^3, \\ P_2 &= \frac{P_1 \cdot v_2^3}{v_1^3}, \\ P_2 &= \frac{2700 \cdot 20^3}{15^3}, \\ P_2 &= 6400.\end{aligned}$$

Die Leistung muß auf 6400 PS erhöht werden.

Ph 8 ■ 138 Geg.:

Gewicht der Krone $G=10 \text{ kp}$

Auftriebskraft der Krone $F_A=0,625 \text{ kp}$

Auftriebskraft des Goldes $F_G=\frac{1}{19} G_1$

Auftriebskraft des Silbers $F_S=\frac{1}{10} G_2$

Ges.: Gewicht des Goldes G_1 und des Silbers G_2

Da $G_1+G_2=G$, ist $G_2=G-G_1$, und damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{19} G_1 + \frac{1}{10} (G-G_1) &= F_A, \\ \frac{G_1}{19} + \frac{(10-G_1)}{10} &= 0,625, \\ G_1 &\approx 7,9.\end{aligned}$$

Dann ist $G_2=10 \text{ kp}-7,9 \text{ kp}=2,1 \text{ kp}$.

Die Krone bestand aus 7,9 kp Gold und 2,1 kp Silber.

Ph 9 ■ 139 Geg.: Formel in der Aufgabe
 Ges.: t

Man verwendet am besten abgetrennte Zehnerpotenzen. Dann heißt die Gleichung

$$\begin{aligned}3 \cdot 10^{-8} \cdot t_2 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot t + 1 &= 1,01, \\ 3 \cdot 10^{-8} \cdot t^2 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot t - 10^2 &= 0\end{aligned}$$

$$t^2 + \frac{2}{3} \cdot 10^4 \cdot t - \frac{1}{3} \cdot 10^6 = 0$$

$$t_{1,2} = -\frac{1}{3} \cdot 10^4 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 10^8 + \frac{3 \cdot 10^6}{3 \cdot 3}}$$

$$t_{1,2} = -\frac{10^4}{3} \pm \frac{10^4}{3} \sqrt{1+3 \cdot 10^{-2}}$$

$$t_1 = \frac{10^4}{3} (\sqrt{1,03}-1) \approx 50$$

t_2 entfällt

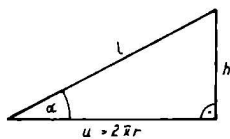
Die Temperatur muß auf ungefähr 50°C erhöht werden.

Ph 10/12 ■ 140 Geg.: $r=6,2 \text{ mm}$
 $h=15 \text{ mm}$

Ges.: Anstiegswinkel α

Länge der Schraubenbahn l

Wickelt man eine Windung dieser Schraubenlinie ab, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und $u=2\pi r$; die Hypotenuse ist die Länge l einer Schraubenbahn (siehe Bild).



Dann ist $\tan \alpha = \frac{h}{2\pi r}$,

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{15 \text{ mm}}{2 \cdot 3,14 \cdot 6,2 \text{ mm}} \\ \tan \alpha &= 0,3852, \\ \alpha &\approx 21,1^\circ.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}l^2 &= h^2 + (2\pi r)^2, \\ l &= \sqrt{h^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}, \\ l &= \sqrt{15^2 + 4 \cdot 3,14^2 \cdot 6,2^2 \text{ mm}}, \\ l &\approx 41,7 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Der Steigungswinkel einer Schraubenlinie beträgt $21,1^\circ$, und die Länge einer Schraubenbahn ist ungefähr 41,7 mm.

Ch 7 ■ 109 $m=0,56$ $14,8 \cdot 10^6 \text{ t}$
 a) $\text{Fe}_2\text{O}_3 + 3 \text{CO} \rightarrow 2 \text{Fe} + 3 \text{CO}_2$
 160 g 112 g

$$\begin{aligned}\frac{m \cdot 0,56}{160 \text{ g}} &= \frac{14,8 \cdot 10^6 \text{ t}}{112 \text{ g}} \\ m &= \frac{14,8 \cdot 10^6 \text{ t} \cdot 160 \text{ g}}{112 \text{ g} \cdot 0,56} \\ m &= 37,8 \cdot 10^6 \text{ t}\end{aligned}$$

$37,8 \cdot 10^6 \text{ t}$ Roteisenstein müssen jährlich verarbeitet werden.

$$\text{b) } \frac{37,8 \cdot 10^6 \text{ t}}{20 \text{ t}} = 1890000$$

Für den Transport werden 1890000 Eisenbahnwaggons benötigt.

$$\text{c) } 1890000 \cdot 8 \text{ m} = 15120000 \text{ m} = 15120 \text{ km}$$

Die Länge der Eisenbahnwaggons zusammen beträgt etwa 15120 km.

Ch 8 ■ 110 m_1 m_2 97 kg
 a) $2 \text{NaCl} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Na}_2\text{SO}_4 + 2 \text{HCl}$

$$\begin{aligned}\frac{117 \text{ g}}{142 \text{ g}} \cdot \frac{97 \text{ kg}}{142 \text{ g}} &= \frac{98 \text{ g}}{142 \text{ g}} \cdot \frac{142 \text{ g}}{142 \text{ g}} \\ m_1 &= 79,9 \text{ kg} & m_2 &= 66,9 \text{ kg} \\ 81,7 \text{ kg NaCl} & & 74,5 \text{ kg H}_2\text{SO}_4 \\ -79,9 \text{ kg NaCl} & & -66,9 \text{ kg H}_2\text{SO}_4 \\ 1,8 \text{ kg NaCl} & & 7,6 \text{ kg H}_2\text{SO}_4\end{aligned}$$

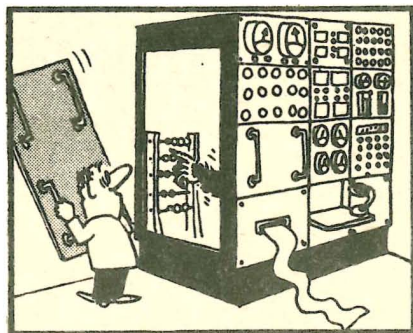
Es werden 1,8 kg Natriumchlorid und 7,6 kg Schwefelsäure im Überschuß eingesetzt.

$$\begin{aligned}\text{b) } 81,7 \text{ kg} &\geq 100\% \\ 1,8 \text{ kg} &\geq x \\ x &= \frac{1,8 \text{ kg} \cdot 100\%}{81,7 \text{ kg}} \\ x &= 2,2\% \\ 74,5 \text{ kg} &\geq 100\% \\ 7,6 \text{ kg} &\geq x \\ x &= \frac{7,6 \text{ kg} \cdot 100\%}{74,5} \\ x &= 10,2\%\end{aligned}$$

2,2% Natriumchlorid und 10,2% Schwefelsäure werden praktisch mehr verwendet.

Ch 9 ■ 111 Zur Bildung der gewünschten Menge Harnstoff werden $106,4 \text{ m}^3$ Ammoniak und $53,2 \text{ m}^3$ Kohlendioxid benötigt.

Ch 10/12 ■ 112 Im Gemisch sind 42,5% Kaliumkarbonat und 57,5% Magnesiumkarbonat enthalten.



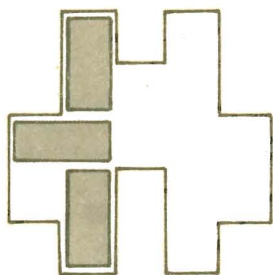


1. При стрельбе по мишени спортсмен несколько раз попал в десятку, столько же раз выбил по 8 очков и несколько раз попал в пятерку. Всего он набрал 99 очков. Сколько выстрелов сделал спортсмен?



2. Parmi les diamants célèbres, le diamant Orloff fut trouvé aux Indes au XVII^e siècle. Il est actuellement conservé au Kremlin. Non taillé, sa masse était 300 carats; une fois taillé, sa masse est 189,6ct. Calculez en grammes la masse de ce diamant avant et après la taille.

3. Slide the three blocks, without turning them, so that they occupy the right hand side of the region.

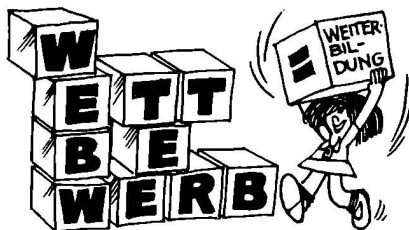


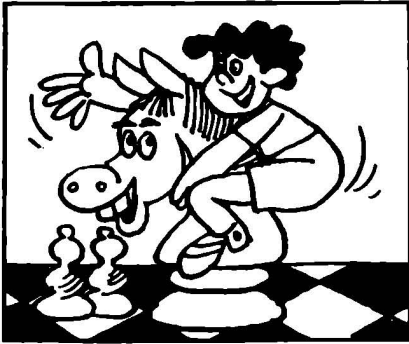
alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1982/83

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, Haus der Jungen Pioniere, beide Altenburg; W.-Pieck-Schule, Anklam; OS German Titow, Arenshausen; OS Fr. Weineck, Alsleben; OS Asbach; E.-Thälmann-OS, Bad Bibra; Lessingschule, Bad Doberan; OS S. Radel, Bad Gottleuba; R.-Schwartz-OS, Bad Liebenstein; O.-Grotewohl-OS, M.-Poser-OS, A.-Saefkow-OS, alle Bad Salzungen; OS Bad Wilsnack; R.-Siewert-OS, Bad Suderode; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; 13. OS M. A. Nexö, 39. OS, beide Berlin; 26. OS, Berlin-Marzahn; 8. OS E. Thälmann, Bernburg; A.-Bebel-OS, Beucha; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; Math. Kreisrirkel, Bischofswerda; OS Fr. Schiller, Bleicherode; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS L. Herrmann, Blumenhagen; OS Blumenthal; OS Boddin; OS W. Komarov, Boxberg; K.-Bürger-OS, Bredenfelde; Dinter-OS, Borna; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; OS B. Brecht, Brehme; OS Breitenworbis; W.-Seelenbinder-OS, Breitung; OS Freundschaft und Frieden, Brieselang; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; TOS Büttelstedt; H.-Beimler-OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Cottbus; H.-Wiedner-OS, Dahlen; OS Dambeck; M.-Gorki-Schule, Dermbach; OS Deutschenbora; OS Diesdorf; OS K. Kollwitz; OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast, 106. OS, beide Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; OS H. Grundig, Ellrich; OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; H.-Joachim-OS, Espenhain; Th.-Müntzer-OS, Fambach; OS Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; Zentrale OS, Frankenheim; Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder); K.-Marx-OS, Freyburg; BBS ESW, AG Naturw., Freital; OS Friedeburg; OS V. H. Günther, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; OS Geschwenda; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; OS Gielow; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Kreisklub Math. Gräfenhainichen; Kreisklub Math., E.-Thälmann-OS, beide Greifswald; W.-Husemann-OS, Goldberg; 7. OS Görlitz; OS H. Beimler, Greußen; OS W. Seelenbinder, Gröden; III. OS Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; A.-Becker-OS, Großenstein; OS Grob-odungen; Lessingschule, Großpostwitz; Pestalozzischule, Großschönau; Fr.-Schmenkel-OS, Großtreben; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Guben; OS Th. Müntzer, Gumpelstadt; M.-Gorki-OS, Hainichen; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Marx-Engels-Schule, beide Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, Halle; W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; EOS Havelberg; Zentrale OS, Hasental; OS Haynrode; OS W. Pieck, Heiligenstadt; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; M.-Gorki-OS, Hillersleben; E.-Weinert-OS, Hohenmölsen; OS Horka; Goethe-OS, Ilseburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; Fr.-Engels-OS, Kalttenordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; Cl.-Zetkin-OS, Kaulsdorf; H.-Menzel-OS, E.-Schneller-OS, Wl.-Komarov-OS, E.-Thälmann-OS, P.-Tschakowski-OS, Pionierhaus J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; OS Kelbra; OS Kirchworbis; OS Th. Neubauer, Kieselbach; EOS Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Kletitz; OS E. Thälmann, Klosterfelde; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS I. Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; OS Lauscha; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Station Jg. Naturf. u. Techniker, OS J. C. Fuhlrott, E.-Thälmann-OS, EOS K. Marx, K.-Liebknecht-OS,

Dr.-S.-Allende-OS, alle Leinefelde; 146. OS O. Schön, Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, beide Leipzig; OS W. Pieck, Lichte; OS J. Schröder, Lubmin; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Ludwigslust; Station Jg. Naturf. u. Techniker Lütz; Fr.-L.-Jahn-OS, Lüttheen; OS W. Wallstab, Löderburg; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; Haus d. Jungen Pioniere, Magdeburg; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; II. OS Mieste; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS H. Danz, Möser; OS Kombinat Molschleben; Kinderheim Munzig; OS W. Bykowski, Neetzow; OS Neu Gülze; OS O. Grotewohl, Neukloster; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Fr.-Schiller-OS, Neustadt; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Niederorschel; OS E. Weinert, Oberschönau; OS Ockrilla; W.-Seelenbinder-OS, Oechschen; Fr.-Weineck-OS, Oranienbaum; Pestalozzi-OS, Oschatz; OS Osternienburg; H.-Matern-OS, W.-Pieck-OS, beide Osterwieck; Station Jg. Naturf. u. Techniker, EOS, beide Parchim; Geschw.-Scholl-OS, Perleberg; Zentrale OS, Petersdorf; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; M.-Zimmering-OS, Pirna; Makarenko-OS, Plessa; A.-Becker-OS, Prenzlau; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; Kreisklub Math., Quedlinburg; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; H.-Zille-OS, Radeburg; Geschw.-Scholl-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; OS U. Steinhauer, J.-Gagarin-OS, OS Fr. Engels, alle Ribnitz-Damgarten; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Haus d. Jungen Pioniere, 72. OS, 34. OS M. Reichpietsch, alle Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; OS Rottleberode; OS Th. Müntzer, Rüssen; OS Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; OS Sanitz; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Schlottwitz; 4. OS, J.-G.-Seume-OS, beide Schmalkalden; OS DSF, Schneidlingen; H.-Beimler-OS, Schönausen; EWOS, Schollene; POS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; M.-May-OS, Sebnitz; OS Siedenbollentin; OS Sohland; OS J. R. Becher, OS W. Pieck, OS Glückauf, alle Sondershausen; OS A. Becker, OS K. Marx, beide Spremberg; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; Dr.-S.-Allende-OS, Stralsund; OS Sünna; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; 12. OS Dr. R. Sorge, 11. OS A. S. Schumawzow, OS Fr. Köhler, alle Suhla; H.-Zille-OS, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; OS K. Niederkirchner, Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; A.-Nitz-OS, Ehm-Welk-OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-Hennecke-OS, Untermaßfeld; OS J. G. Seume, Vacha; A.-Becker-OS, Vogelsang; OS Vitte; alpha-Club, Vitzsburg; Th.-Müntzer-OS, Walsleben; Goetheschule, Waren; OS L. Füllberg, Wegeleben; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; OS Weißenborn-Lüderode; NOS I, Weisenfels; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.-Rau-OS, Wildau; E.-Thälmann-OS, Fr.-Engels-OS, beide Wittstock; Th.-Neubauer-OS, Wohlmirstedt; H.-Beimler-OS, Wolfen; Zentralschule, Wolkenburg; OS II, Worbis; OS Wernshausen; OS Wülknitz; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; P.-Lamberg-OS, Zehdenick; Luther-OS, Zella-Mehlis; OS A. C. Sandino, Zöblitz; Goethe-OS, Zossen; Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, EOS, beide Zittau; OS Zschornowitz.





Schach dem König

Aufgepaßt und mitgemacht! Gesucht werden die besten Schachspieler unter den *alpha*-Lesern!

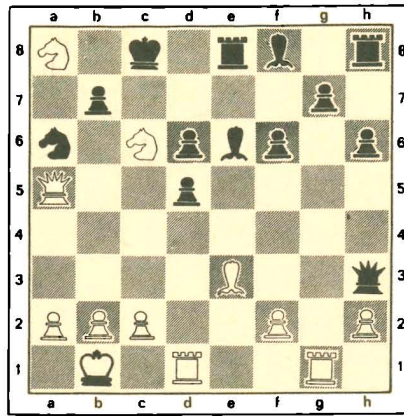
Dazu sind acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit zu lösen. Die jeweilige Punktzahl ist bei den Aufgaben mit angegeben. In allen acht Aufgaben beginnt *Weiß* und setzt trotz bester Gegenwehr von *Schwarz* in der geforderten Zügezahl matt.

Alle Teilnehmer, die die volle Punktzahl erreichen, erhalten eine Urkunde. Außerdem winkt dreien von ihnen ein Buchpreis. Unter allen anderen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden ebenfalls drei Bücher verlost. Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser.

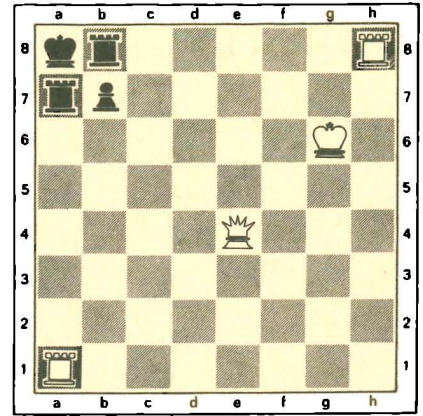
Die Einsendungen der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) sind bitte bis zum 1. März 1984 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

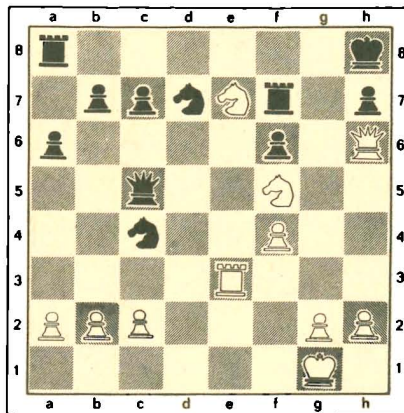
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1984 veröffentlicht.



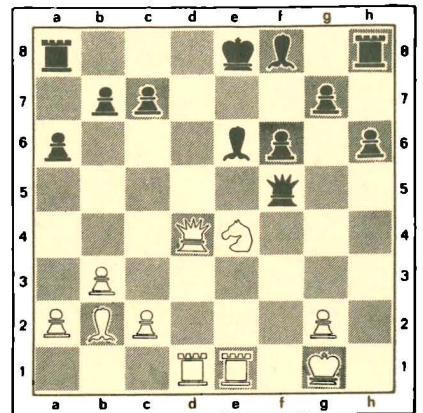
Nr. 2 Matt in zwei Zügen (2 Punkte)



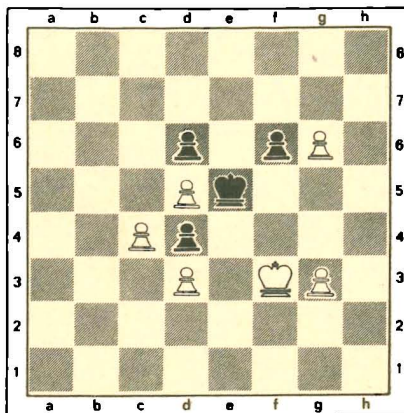
Nr. 6 Matt in zwei Zügen (4 Punkte)



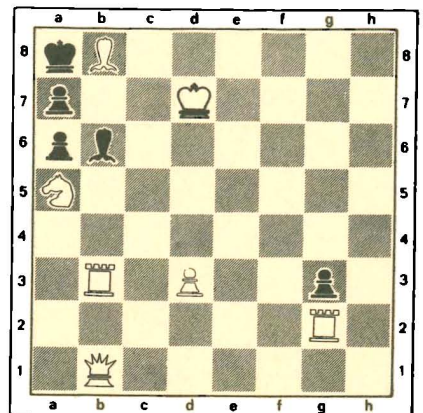
Nr. 3 Matt in drei Zügen (3 Punkte)



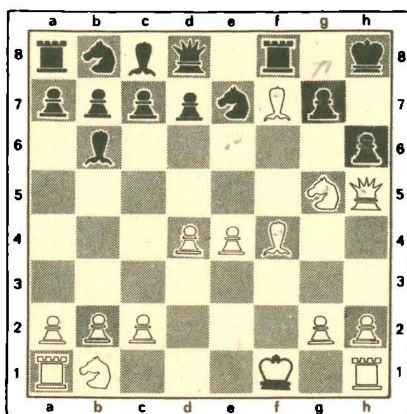
Nr. 7 Matt in fünf Zügen (5 Punkte)



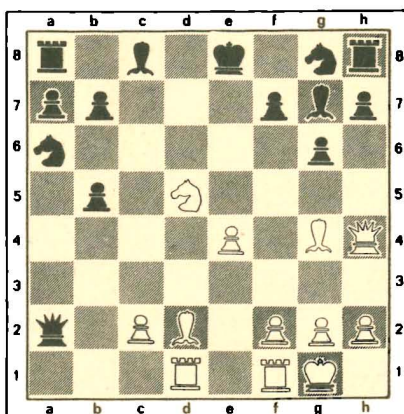
Nr. 4 Matt in drei Zügen (3 Punkte)



Nr. 8 Matt in zwei Zügen (6 Punkte)



Nr. 1 Matt in zwei Zügen (2 Punkte)



Nr. 5 Matt in vier Zügen (4 Punkte)

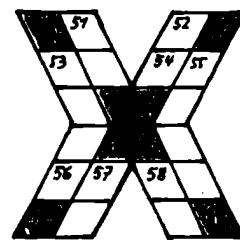
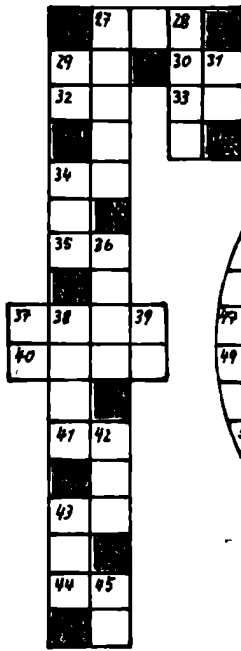
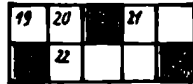
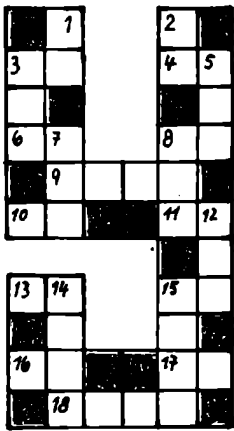


„Bauernmatt“
Betche, aus DLZ 24/82

$$y = mx + n, y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^a \leftrightarrow y = \sqrt[a]{x}$$

Kreuzzahlrätsel: Elementare Funktionen



$$y = a^x \leftrightarrow y = \log_a x$$

$$y = \sin x \leftrightarrow y = \arcsin x$$

$$y = \cos x \leftrightarrow y = \arccos x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Figur „y“ – ab Klasse 7, Figur „f“ – ab Klasse 9, Figur „(x)“ – ab Klasse 11.

Abkürzungen: a. = an, Abs. = Abszisse(n), Abl. = Ableitung, An. = Anstieg, D. = Differenz, d. = der (die, das, des, den), du. = durch, e. = ein (eine, einer, eines), eg.w. = eingeschlossen wird, F. = Funktion(en), Fl. = Flächeninhalt, Fls. = Flächenstück(es), Ger. = Gerade(n), ges. = gesucht(e), Gl. = Gleichung(en), Gls. = Gleichungssystem(s), Gr. = Größe, i.g.R. = in geordneter Reihenfolge, L. = Lösung(en), LE = Längeneinheit, m. = mit, max. = maximal(e), Nst. = Nullstelle(n), O. = Ordinate, Pr. = Produkt, Pu. = Punkt(e), Pz. = Primzahl, S. = Summe, Sp. = Schnittpunkt(es), St. = Stelle, u. = und, v. = von (vom), Vol. = Volumen, W. = Wert, w. = wobei.

Waagrecht: 3) W.d.F. $y = 3,5x - 2,75$ a.d.St. $x_0 = 4,5$; 4) Nst.d.F. $y = 0,5x - 5,5$; 6) O.d.Sp.d.Ger. $5x + y - 12 = 0$ m.d. y-Achse; 8) An.d.Ger. $28x - 2y + 3 = 0$; 9) Abs.d.Sp.d.Ger. $\frac{2}{11}x - 10y = 0$ u. $x - y - 1109 = 0$; 10) positive L.d.Gl. $1,4|x| + 1 = |x| + 5$; 11) L.d.Gl. $\frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{6}(x+23)$; 13) Vermindert man d. Vierfache d.ges. Zahl um 8, u. dividiert man d. Ergebnis du. 20, so erhält man d. Basiszahl d. Dezimalsystems; 15) Abs.d.Sp.d.Ger., die du.d. Pu. $P_1(-5, -\frac{4}{3})$ u. $P_2(3, -\frac{4}{3})$ verläuft, m.d. x-Achse; 16) L.d.Gl. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 19$; 17) L.d.Gl. $\frac{x-5}{x+4} = \frac{x+3}{x+14}$; 18) Dividiert man d.ges. Zahl du. 19, u. subtrahiert man v. Ergebnis 17, so erhält man 68; 19) e.Nst.d.F. $y = x^2 - 11x - 12$; 21) S.d. Koordinaten d. Scheitelpunktes d. Parabel $y = x^2 - 14x + 57$; 22) W.d.F. $y = 10^x$ a.d.St. x_0 , für die $\ln e^{x_0} = 2$ gilt; 23) D.v.Pr. u. S.d.Nst.d.F. $y = x^3 - 28x^2 + 259x - 792$; 25) S.d.Nst.d.F. $y = x^2 - 17x + 72$; 26) W.d.Ger. $a = \sin \frac{\pi}{2} + \ln e^3 + \left[\log_{0,5} \left(\frac{1}{64} \right) \right]^2$; 27) W.d.Ger. $c = \frac{a}{b}$, w. $a = 2^{2^2 \cdot 2^{2^2 \cdot 2^2}}$ u. b. d. größte Zweierpotenz, die kleiner als 10^7 ist, sind; 29) Lösungspaar (x, y) d.Gls. $2e^x + \log_3 y = 4$, $5e^x + 6 \log_3 y = 17$; 30) L.d.Gl. $2e^{x-17} = \lg 100$; 32) L.d.Gl. $3^{\log_3(100\sqrt{5})} = 1$; 33) ganzzahlige L.d.Gl. $\frac{1}{2}(\lg x)^2 = 2 - \frac{3}{2} \lg x$; 34) Nst.d.F. $y = \sqrt{x^2 + 21} - x - 1$; 35) L.d.Gl. $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$; 37) W.d.Ger. $d = abc$, w. a. d. kleinste ungerade Pz., b. positive L.d.Gl. $\sqrt{x^2 + 7} - 4 = 0$ u. c. $y = f(12)$, w. $y = f(x) = x^2 - 5$ ist, sind; 40) Vol. (in cm^3) e. Quaders m.d. Kanten $a = a_1$ cm, $b = b_1$ cm u.

$c = c_1$ cm, w. a_1 L.v. (33w), b_1 L.v. (16w) u. c_1 L.d.Gl. $e^{0,5x-10} = 1$ sind; 41) W.d.Ger. $a = \left[9 \sum_{n=0}^{\infty} \sin(110^\circ + n \cdot 20^\circ) \right]^2$; 43) In e. Dreieck m.d. Winkeln α, β u. γ best. d. Beziehung $\sin \gamma = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, ges. ist d.Gr.v. γ (in $^\circ$); 44) Fl. (in cm^2) e. Rechtecks m.d. Seiten $a = a_1$ cm u. $b = b_1$ cm, w. $a_1 = e^{\ln 7} \left(\sin \frac{3\pi}{2} \right)^2$ u. b_1 e.Pz.m. $10 < b_1 < 30$ ist, deren Quersumme 4 beträgt; 46) W.d.Ger. $g = \lim_{x \rightarrow 0} \left(11 + 3x^2 + \frac{\tan x}{x} \right)$; 47) An.d.F. $y = 3x^3 + 6x^2 - 10x + 1$ a.d.St. $x_0 = 1$; 49) W.d.l.Abl.d.F. $y = 3x - \frac{x+3}{x^2}$ a.d.St. $x_0 = -1$; 50) An.d.F. $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ a.d.St. $x_0 = \frac{1}{9}$; 53) W.d.2.Abl.d.F. $y = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)$ a.d.St. $x_0 = 12$; 54) Anstiegswinkel (in $^\circ$) d. Graphen d.F. $y = \sin x \cdot \cos x$ a.d.St. $x_0 = 0$; 56) Pr.d.Abs. d. relativen Extrempunkte d.F. $y = x^3 - 21x^2 + 120x + 1$; 58) W.d.F. $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a.d.St. $x_0 = 4$, w. gilt: $f(0) = 2$, $f(1) = 6$, $f(2) = 18$ u. $f'(3) = 35$; 59) W.d. quadratischen F. $y = f(x)$ a.d.St. $x_0 = 5$, für d. gilt: $f(0) = -2$, $f'(1) = 2$ u. $f''(2) = 10$; 61) Mit 16 m Maschendraht soll e. rechteckiges Tiergehege max.Fl. eingezäunt werden, u. zwar so, daß e. Seite an e. Mauer grenzt, ges. ist d.max.Fl. (in m^2) dieses Geheges; 62) Einem geraden Kreiskegel ($r = 4,5$ cm; $h = 9$ cm) soll e. gerader Kreiszylinder m.max.Vol. einbeschrieben werden, ges. ist d.max. Längsschnitt d. Zylinders; 63) Aus 3 gleich breiten Brettern soll e. Dachrinne trapezförmigen Querschnitts hergestellt werden, ges. ist d. Neigungswinkel (in $^\circ$) d. Seitenflächen, damit d. trapezförmige Querschnittsfläche d. Rinne max. wird.

Senkrecht: 1) Peter ist 10 Jahre, sein Vater 33 Jahre alt. Nach wieviel Jahren ist Peters Vater doppelt so alt wie Peter?; 2) Vermindert man 31 um d.ges. Zahl, u. dividiert man d.D. du. 20, so erhält man 1; 3) An.d.Ger., die du.d. Pu. $P_1(0, 0)$ u. $P_2\left(\frac{1}{11}, 11\right)$ verläuft; 5) Abs.d.Sp.e.d.d. Pu. $P(0, 12)$ verlaufenden Ger., die parallel zu d.Ger. $x + 12y = 0$ verläuft, m.d. x-Achse; 7) Weg (in m), den ein m. e. Geschwindigkeit v. 126 km/h geradlinig, gleichförmig bewegter Körper in 6 s zurücklegt; 8) Masse (in g) e. Betonstückes (Dichte $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, Vol. $V = 37 \text{ cm}^3$); 12) L.d.Gl. $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} + \frac{x}{11} = 167$; 14) L.d.Gl. $\frac{6903}{x} - 1$

$= \frac{2301}{x} + 1$; 15) L.d.Gl. $\frac{x}{83} + 68 = \frac{x}{15}$; 20) Pr.d.Nst. d.F. $y = x^2 - 10x + 21$; 21) W.d.F. $y = 1,5x^2 - 15x + 10$ a.d.St. $x_0 = 10$; 23) W.d.F. $y = ax^2 - bx - c$ a.d.St. $x_0 = 7$, wenn a u. b L.d.Gls. $x^2 - 4x + 4 = 0$ sind, u. c d. größte einstellige Pz. ist; 24) e.Nst.d.F. $y = ax^2 + bx + 44$, wenn a u. b L.d.Gls. $a - b = 46$, $46a + b = 1$ sind; 27) Höhe e. Turmes (auf volle Meter gerundet, Angabe aber in cm), wenn e.v. oben herabfallender Stein 6,3 s bis zum Aufschlag benötigt ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$); 28) ges. ist c, so daß d. Graph d.F. $y = x^4 - 189x - c$ du.d. Pu. $P(10, 0)$ verläuft; 29) ganzzahlige L. (i.g.R.) d.Gl. $2(n^3 + n) = 5n^2$; 31) ges. ist c, so daß d. Graph d.F. $y = \lg \left(c \cdot \frac{1-2x}{7-3x} \right)$ du.d. Pu. $P(0, 1)$ verläuft; 34) W.d.Ger. $d = x^2 + y^2$, w. (x, y) L.d.Gls. $3x - 2y = 7$, $x + 2y = 29$ ist; 36) W.d.F. $y = 3^x - 111$ a.d.St. $x_0 = 8$; 37) W.d.Ger. $a = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$; 38) W.d.F. $y = 2^x$ a.d. St. x_0 , wobei x_0 d. kleinste zweistell. Pz. ist; 39) e.L.d.Gl. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1$; 42) ganzzahlige L.d.Gl. $|1 + \lg x| = 3$; 43) L.d.Gl. $|x + 900| = 2x - 99$; 45) L.d.Gl. $2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} = 512$; 46) W.d. Integrals $I = \int_0^4 (42x^6 + 18x^3 + 8x^3 + 2) dx$; 48) W.d.Ger. $a = \frac{\tan(\arccos 0,1)}{\sin(\arccos 0,1)}$; 51) Fl. (in LE^2) d.Fl., das v.d. Kurven $y = x^4 - 10x^2 + 9x - 4$ u. $x = -2$ eg.w.; 52) Fl. (in LE^2) d.Fl., das v.d. Kurve $y = \sin x$ u.d. x-Achse ($0 \leq x \leq 7\pi$) eg.w.; 53) Fl. (in LE^2) d. endl. Fls., das v.d. Parabel $y = \frac{37}{768}x^2$ u.d. Ger. $y = 111$ eg.w.; 55) d. Parabelstück $y = x^2 + 2$, $-5 \leq x \leq 5$, rotiere um d. x-Achse, ges. ist d.Vol. (in LE^3 , auf ganze Einheiten gerundet) d. entstehenden Rotationskörpers; 57) Abs. (i.g.R.) d. Wendepunkte d.F. $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x + 1$; 58) Fl. (in LE^2) d.Fl., das v.d.Ger. $y = \frac{9}{11}x + 4,5$, $y = 0$, $x = 0$ u. $x = 11$ eg.w.; 60) W.d. 9. Abl. d.F. $y = x^9 + x^6 + x^3 + 1$; 61) Fl. (in LE^2) d.Fl., das v.d. Kurve $y = 2^{\ln 2} u.d.Ger. y = 0$, $x = 0$ u. $x = 5$ eg.w.

Bei richtiger Auflösung ergeben die Ziffern in den Kästchen mit zweistelliger Primzahlnummer (bei geordneter Reihenfolge der Kästchennummern und sinnvoller Pünktierung) die Lebensdaten des genialen Schweizer Mathematikers Leonhard Euler.

Dr. Roland Mildner,
Sektion Mathematik der KMU Leipzig