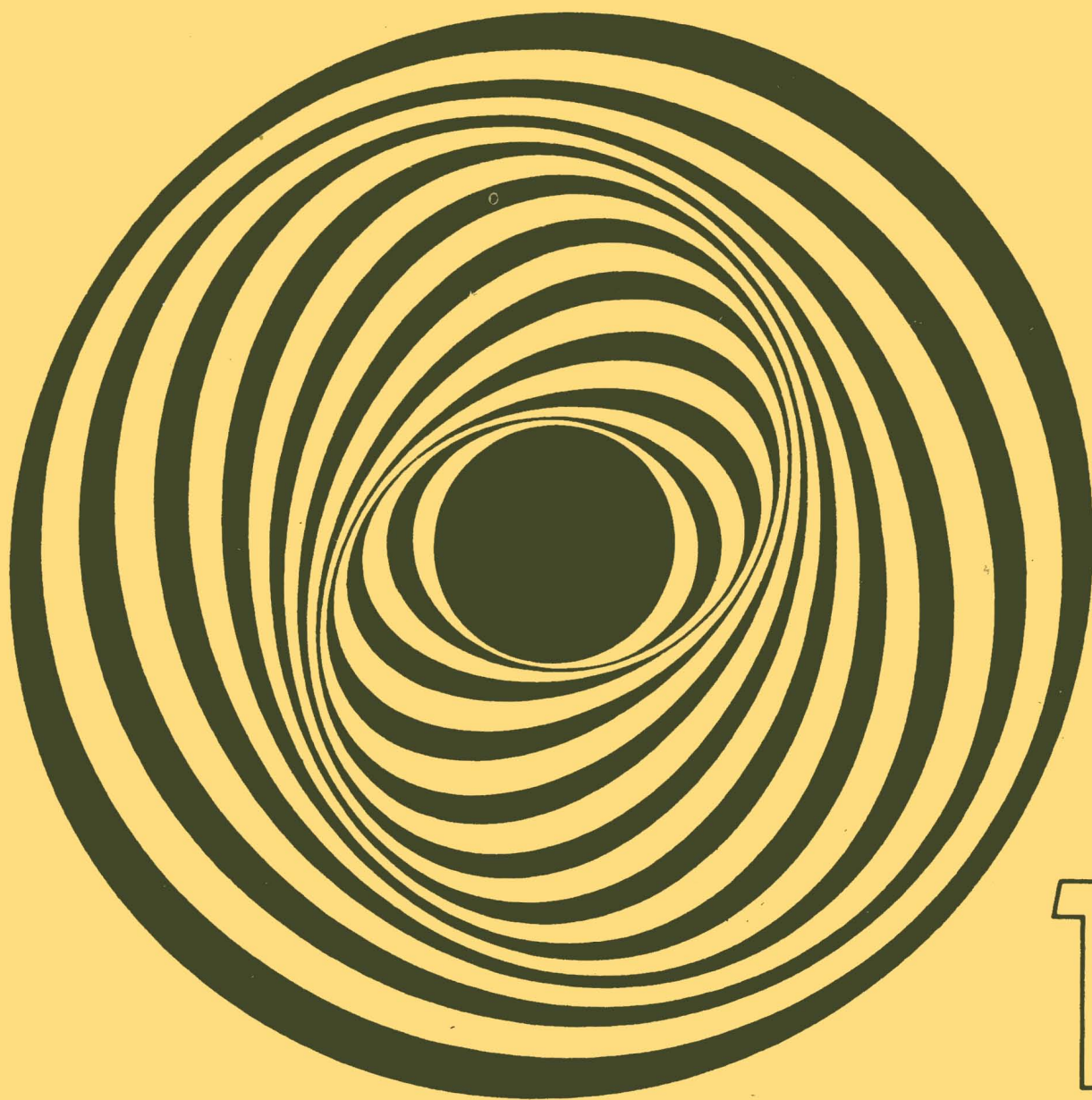
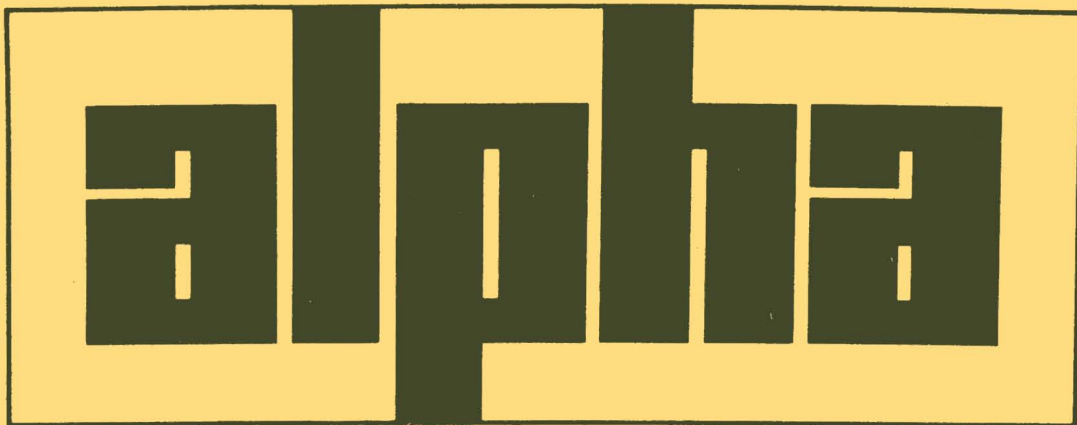


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**



1

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gro-nitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Ker-ber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leip-zig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Do-zent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Bildstelle der TH Merseburg (S. 2);
aus der Bildmappe: Adam Ries, VEB Bild
und Heimat, Reichenbach i. V. (S. 3, 4);
Lothar Otto, Leipzig (S. 6); Dikobraz, Prag
(S. 8); Eigenfoto AG Querfurt (S. 13); Hoch-
schulbildstelle der Universität Leipzig (III.
U.-Seite)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der
ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128-ISSN 00—2-6395
Redaktionsschluß: 27. Oktober 1983
Auslieferungstermin: 20. Februar 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Wir rechnen mit Intervallen [8]*
Prof. Dr. D. Oelschlegel, Sektion Mathematik der TH *Carl Schorlemmer* Halle-Merseburg
- 2 Eine Aufgabe von Prof. Dr. D. Oelschlägel und Forschungsstudent W. Wiebigke [9]
Sektion Mathematik der TH *Carl Schorlemmer* Leuna-Merseburg
- 3 Adam Ries (1492 bis 1559) [6]
Zum 425. Todestag des Rechenmeisters
Leseprobe aus: *Biographien bedeutender Mathematiker*
- 6 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 9 *alpha*-Wettbewerb 1982/83 [4]
Preisträger · Vorbildliche Leistungen · Abzeichen in Gold
- 10 Zwei Aufgaben und sieben Lösungen – Wer mehr weiß und Phantasie hat, kommt rascher zum Ziel Teil 1 [7]
Prof. Dr. W. Jungk, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Wolfgang Ratke*, Köthen
- 11 XXIV. Internationale Mathematikolympiade [11]
Aufgaben · Punktespiegel
- 12 Teilbarkeitsregeln Teil 1 [6]
Mathematikfachlehrer StR J. Portner (†), Pritzwalk
- 13 Begeisterte Schachfreunde [8]
Mitgeteilt von H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 14 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 16 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel:
Fräulein Steinmann macht uns neugierig Teil 1 [5]
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 17 Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel [5]
Dr. W. Hintze, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 19 Lösungen [5]
- III. U.-Seite: Auf den Spuren von Mathematikern [7]
J. Lehmann, Leipzig/Dr. H. Pieper, Berlin
- IV. U. Seite: Mathematik-Mosaik [5]
Ausschnitt aus einer Kiewer Wandzeitung

Titelblatt: W. Fahr, Berlin nach einer Vorlage aus der math. Schülerzeitschrift „Pythagoras“, Niederlande

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wir rechnen mit Intervallen

Bekanntlich wird der Bereich der reellen Zahlen von den rationalen und den irrationalen Zahlen gebildet. Bei der Darstellung durch Dezimalbrüche erhält man bei den rationalen Zahlen endliche oder unendliche periodische Dezimalbrüche, bei den irrationalen Zahlen unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche. Da wir nur mit Zahlen mit endlicher Stellenzahl rechnen können, muß beim praktischen Rechnen fast immer gerundet werden.

Das gilt auch beim Rechnen auf einem Rechenautomaten, auch wenn dort andere Zahlensysteme benutzt werden. Verwenden wir eine gerundete reelle Zahl, die uns als Ergebnis einer Rechnung mitgeteilt wurde oder die wir einer Zahlentafel entnehmen, so kennen wir deren exakten Wert nicht. Haben wir z. B. die durch Rundung aus einer Zahl z entstandenen Zahl $x = 0,2834$, so können wir aus der Kenntnis der Rundungsregeln schließen, daß z vor der Rundung zwischen $0,28335$ und $0,28345$ lag. Wir wissen also nur, daß der exakte Wert von x in einem bestimmten Intervall liegt und schreiben dafür $x \in [0,28335; 0,28345]$.

Bei der Anwendung der Mathematik auf praktische Aufgabenstellungen, z. B. aus der Technik oder den Naturwissenschaften, gehen Größen (Eingangsdaten, Parameter) in die Rechnung ein, die gemessen wurden. Da kaum ein Meßgerät völlig exakte Werte liefert, sind diese Größen mit Meßfehlern behaftet. Von ihren exakten Werten weiß man wiederum nur, daß sie in bestimmten Intervallen liegen. Lesen wir als Ergebnis einer Temperaturmessung $T = 58,0 \pm 0,5^\circ\text{C}$, so heißt das, daß für den exakten (in $^\circ\text{C}$ gemessenen) Wert T die Beziehung $T \in [57,5; 58,5]$ gilt.

Fehlerbetrachtungen zu praktischen mathematischen Berechnungen sind in unserer Volkswirtschaft außerordentlich wichtig; wir wollen schließlich alle, daß z. B. eine berechnete Brücke auch wirklich ihren Belastungen standhält. Da wir in der Praxis mit gerundeten Zahlen und gemessenen Größen arbeiten müssen, von denen wir nur Genauigkeitsintervalle kennen, kamen vor etwa 20 Jahren Mathematiker auf die Idee, anstatt mit Näherungswerten gleich mit diesen Intervallen zu rechnen. Es entstand die Intervallarithmetik, die sich heute zu einer immer größer werdenden Disziplin, der Inter-

vallmathematik, ausgeweitet hat. Die Intervallmathematik liefert bei vielen Problemen Fehlerschranken für die Lösung auf effektivere Weise als traditionelle Methoden. Es gibt aber auch Problemstellungen, bei denen der Einsatz der Intervallmathematik zu aufwendig und damit nicht effektiv ist. In der Intervallmathematik werden nur abgeschlossene und beschränkte (endliche) Intervalle

$$X = [x_1, x_2]: \\ = \{x \in R \mid x_1, x_2 \in R, x_1 \leq x \leq x_2\}$$

betrachtet; hierbei sei R die Menge der reellen Zahlen, x_1 heißt untere und x_2 obere Intervallgrenze. Die beiden Intervallgrenzen werden im allgemeinen durch ein Komma getrennt. Sind es Dezimalbrüche, trennt man sie zur Vermeidung von Mißverständnissen durch ein Semikolon. (Im folgenden sprechen wir nur noch kurz von Intervallen.) Die vier Grundoperationen (Rechenoperationen, Verknüpfungen) Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden für zwei Ausgangsintervalle

$$A = [a_1, a_2] \text{ und } B = [b_1, b_2] \text{ durch} \\ A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\}$$

definiert. Dabei bezeichnet das Symbol $*$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, : \}$, eine der vier Grundoperationen. Im Falle der Division muß $0 \notin B$ vorausgesetzt werden. Die obige Definition bedeutet, daß die durch eine Grundoperation entstehende Verknüpfungsmenge die und nur die Zahlen enthält, die durch Verknüpfung von zwei Zahlen aus den Ausgangsintervallen entstehen können. Es läßt sich nun beweisen, daß bei jeder Grundoperation die Verknüpfungsmenge wieder ein Intervall ist, die Grundoperationen führen also aus der Menge $I(R)$ der abgeschlossenen und beschränkten Intervalle nicht heraus. Durch diese interessante Eigenschaft ist erst der Aufbau einer Intervallarithmetik möglich. Auf der Grundlage dieser Eigenschaft lassen sich dann unter Benutzung der Intervallgrenzen die Grundoperationen wie folgt angeben:

$$1. \text{ Addition: } A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$\text{Beispiel: } [-2,5] + [1,3] = [-1,8]$$

$$2. \text{ Subtraktion: } A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$\text{Beispiele: } [-2,5] - [1,3] = [-5,4]$$

$$[2,3] - [2,3] = [-1,1]$$

3. Multiplikation:

$$A \cdot B = [\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2), \\ \max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)],$$

$\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)$ ist die kleinste, $\max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)$ entsprechend die größte der in der Klammer stehenden Zahlen.

Beispiele:

$$[-2,5] \cdot [1,3] = [\min(-2, -6, 5, 15), \\ \max(-2, -6, 5, 15)] \\ = [-6, 15]$$

$$4. \text{ Division: } A : B = A \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right],$$

$0 \notin B$ (das Intervall B darf nicht die Null enthalten)

$$\text{Beispiel: } [-2,5] : [1,3]$$

$$= [-2,5] \cdot \left[\frac{1}{3}, 1 \right] = [-2,5].$$

Diese Darstellungen der Grundoperationen lassen sich durch Monotoniebetrachtungen leicht beweisen. Zum Beispiel folgt im Falle der Addition aus

$$a \in A, \text{ d. h. } a_1 \leq a \leq a_2, \text{ und}$$

$$b \in B, \text{ d. h. } b_1 \leq b \leq b_2,$$

$$\text{sofort } a_1 + b_1 \leq a + b \leq a_2 + b_2$$

und damit

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

Intervalle, bei denen obere und untere Grenze zusammenfallen, nennt man Punktintervalle. Diese identifiziert man in der Intervallmathematik mit der durch die Grenzen gegebenen reellen Zahl:

$$[x, x] = x,$$

umgekehrt werden in arithmetischen Termen, die Zahlen und Intervalle enthalten, die reellen Zahlen x durch die entsprechenden Punktintervalle $[x, x]$ ersetzt. Danach werden die intervallarithmetischen Grundoperationen in der eben angegebenen Weise ausgeführt. Muß man beim Rechnen mit Intervallen runden, so wird die untere Grenze stets abgerundet und die obere Grenze stets aufgerundet. Auf diese Weise ist gesichert, daß man alle durch Rundung entstehenden Fehler in dem resultierenden Intervall erfaßt.

Wir wollen uns noch einige Eigenschaften der Grundoperationen ansehen. Die Addition und die Multiplikation sind kommutativ und assoziativ, d. h., es gilt

$$\left. \begin{aligned} A + B &= B + A \\ A \cdot B &= B \cdot A \end{aligned} \right\} \text{ Kommutativität,}$$

$$\left. \begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \end{aligned} \right\} \text{ Assoziativität.}$$

Wir zeigen als Beispiel die Kommutativität der Addition:

$$A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2],$$

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$= [b_1 + a_1, b_2 + a_2] = B + A.$$

Weiterhin gilt:

$$A + [0, 0] = [a_1, a_2] + [0, 0]$$

$$= [a_1, a_2] = A$$

$$A \cdot [1, 1] = [a_1, a_2] \cdot [1, 1]$$

$$= [\min(a_1, a_2), \max(a_1, a_2)]$$

$$= [a_1, a_2] = A,$$

man sagt deshalb, daß Addition bzw. Multiplikation die „neutralen Elemente“ $[0,0]$ bzw. $[1,1]$ besitzen. Es gibt im allgemeinen kein Intervall $B=[b_1, b_2]$ mit der Eigenschaft $A-B=[0,0]$, das sieht man leicht so:
 $A-B=[a_1-b_2, a_2-b_1]=[0,0]$,
 hieraus folgt $a_1-b_2=0$, $a_2-b_1=0$ oder $b_1=a_2$, $b_2=a_1$.

Nach Ersetzen von b_1 und b_2 erhält man $B=[a_2, a_1]$, dies ist aber wegen $a_1 \leq a_2$ nur im Falle $a_1=a_2$, d.h. nur im Falle eines Punkintervalls A , ein Intervall, denn die untere Grenze darf ja nicht größer als die obere sein. Man sagt hierzu: Mit Ausnahme der Punkintervalle besitzen die Intervalle bezüglich der Addition keine Inversen. Mit Ausnahme der Punkintervalle besitzen die Intervalle auch bezüglich der Multiplikation keine Inversen. Es gibt nämlich im allgemeinen kein Intervall B mit der Eigenschaft $A:B=[1,1]$. Prüfen wir nun noch, ob das distributive Gesetz der Addition

$$a(b+c)=ab+ac$$

bei Intervallen gilt. Wir nehmen z.B. $A=[-1,2]$, $B=[2,4]$ und $C=[-2,-1]$ und berechnen

$$A(B+C)=[-1,2] \cdot ([2,4]+[-2,-1])$$

$$=[-1,2] \cdot [0,3]=[-3,6]$$

$$AB+AC=[-1,2] \cdot [2,4]+[-1,2] \cdot [-2,-1]$$

$$=[-2,-1]$$

$$=[-4,8]+[-4,2]=[-8,10].$$

Wir stellen für dieses Beispiel fest, daß die Beziehungen

$$A(B+C) \neq AB+AC$$

$$\text{und } A(B+C) \subset AB+AC$$

(das linke Intervall ist Teilmenge des rechten) gelten. Das distributive Gesetz der Addition ist also nicht gültig, man kann aber beweisen, daß allgemein

$$A(B+C) \subseteq AB+AC$$

gilt. Diese Beziehung heißt Subdistributivgesetz. Weiterhin gilt für die Grundoperationen eine für die Intervallmathematik wichtige Eigenschaft, die sogenannte Teilmengeneigenschaft:

Aus $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ folgt für $\ast \in \{+, -, \cdot, : \}$

$$A \ast B \subseteq C \ast D.$$

Auf ihren Beweis müssen wir verzichten.

Nun wollen wir eine angewandte Aufgabe aus der Physik lösen.

Zwischen dem Krümmungsradius r , dem Durchmesser s und der maximalen Dicke d einer plankonvexen, sphärischen Linse besteht die Beziehung

$$r = \frac{s^2}{8d} + \frac{1}{2}d.$$

(Der Krümmungsradius r ist der Radius der Kugel, von der die Linse durch einen ebenen Schnitt abgetrennt wurde.) Es wurden $s=126 \pm 1$ mm und $d=3,9 \pm 0,1$ mm gemessen, d.h., es ist $s \in S=[125, 127]$ und $d \in D=[3,8; 4,0]$. Es soll bestimmt werden, wie sich die Fehler von s und d auf r auswirken, dazu bestimmen wir das Intervall

$$R = \frac{s^2}{8d} + \frac{1}{2}d.$$

Auf Grund der Teilmengeneigenschaft gilt

$$\left\{ \frac{s^2}{8d} + \frac{1}{2}d \mid s \in S, d \in D \right\} \subseteq \frac{S^2}{8D} + \frac{1}{2}D = R.$$

Das Intervall R ist also Obermenge der Menge aller Krümmungsradien für $s \in S$ und $d \in D$. Es gilt

$$S^2 = S \cdot S = [125, 127] \cdot [125, 127]$$

$$=[15625, 16129],$$

$$8D = [8,8] \cdot D = [8,8] \cdot [3,8; 4,0]$$

$$=[30,4; 32,0],$$

$$\frac{1}{2}D = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cdot D = [1,9; 2,0],$$

$$S^2 : 8D = [15625, 16129] \cdot \left[\frac{1}{32,0}, \frac{1}{30,4} \right]$$

$$=[488,2; 530,6],$$

also ist

$$R = [488,2; 530,6] + [1,9; 2,0]$$

$$=[490,1; 532,6].$$

Wenn die Größen s und d mit den oben angegebenen Fehlern gemessen werden, weiß man vom Krümmungsradius r , daß er zwischen 490,1 mm und 532,6 mm liegt.

An der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Carl Schorlemmer Leuna-Merseburg arbeitet unter meiner Leitung eine Forschungsgruppe, die sich mit Intervallmathematik und ihren praktischen Anwendungen beschäftigt. Dabei beziehen wir unsere Mathematikstudenten bereits in den unteren Studienjahren entsprechend ihren Möglichkeiten in die Forschungsarbeit mit ein. Von unseren Studenten wurden schon wertvolle Ergebnisse erzielt. Auf der III. Zentralen Studentenkonzferenz im September 1981 in Leipzig stellten die Studenten J. Schulze und V. Wiebigke die Ergebnisse ihrer Jahresarbeit über Rechnerprogramme zur intervall-mathematischen Behandlung von Gleichungssystemen in einem interessanten Vortrag vor, der prämiert wurde. Herr Wiebigke führt heute als Forschungsstudent seine Untersuchungen zur Intervallmathematik an unserer Sektion weiter.

D. Oelschlägel



Eine Aufgabe von Prof. Dr. D. Oelschlägel

und Forschungsstudent V. Wiebigke

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Leuna-Merseburg

▲ 2406 ▲ a) Beweisen Sie, daß die Addition bei Intervallen assoziativ ist.

b) Wie genau können wir die Tiefe des Wasserspiegels eines Brunnens bestimmen, wenn ein fallengelassener Stein nach unserer Messung nach $5 \pm 0,1$ s auf den Wasserspiegel aufschlägt und von der Erdbeschleunigung $g(\text{m/s}^2)$ die Beziehung $g \in [9,80; 9,81]$ bekannt ist?

c) Unter dem Durchmesser $d(A)$ eines Intervalles $A=[a_1, a_2]$ versteht man die nicht-negative reelle Zahl

$$d(A) := a_2 - a_1.$$

Zeigen Sie, daß die Gleichungen

$$d(A+B) = d(A) + d(B)$$

und $d(A-B) = d(A) + d(B)$ gelten.

Interessierte Leser können die Lösungen ein-senden an

Prof. Dr. Oelschlägel

TH „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg

Sektion Mathematik

4200 Merseburg

Otto-Nuschke-Straße

Kurzbiographie

Am 18.11.1935 wurde ich in Dresden geboren. Nach Besuch der Grundschule und der Erweiterten Oberschule legte ich 1953 das Abitur ab und begann im selben Jahr an der Martin-Luther-Universität Halle mit dem Studium der Mathematik. In der Diplomarbeit behandelte ich ein spezielles Thema aus der Darstellungstheorie von Gruppen und legte 1959 das Diplom ab. Von 1959 bis 1961 war ich in einer Schiffbauinstitution als Mathematiker tätig. Seit 1961 arbeite ich an der Technischen Hochschule Carl Schorlemmer Leuna-Merseburg. 1966 promovierte ich mit einer Arbeit zur konvexen Optimierung zum Dr. rer. nat., 1969 wurde ich zum Hochschuldozenten berufen, 1970 habilitierte ich mich mit einer Arbeit zur parameterabhängigen konvexen Optimierung, 1971 wurde ich zum ordentlichen Professor für Numerische Mathematik berufen. 1971/72 absolvierte ich ein Zusatzstudium an der Leningrader Staatlichen Universität. Gegenwärtig bin ich Leiter des Wissenschaftsbereiches Numerische Mathematik, Mathematische Kybernetik und Re-chentechnik und Leiter der Forschungsgruppe Numerische Behandlung dynamischer Systeme der Sektion Mathematik. D. Oelschlägel

Adam Ries (1492 bis 1559)

Zum 425. Todestag des Rechenmeisters

Adam Ries

Im Jahr der Entdeckung Amerikas durch C. Columbus wurde Adam Ries in Staffelstein am Main in eine Zeit hineingeboren, die von bedeutenden ökonomischen und politischen Ereignissen gezeichnet war.

Noch vor Ende des 15. Jahrhunderts entdeckte Vasco da Gama den Seeweg nach Indien. Die Reformation reifte heran und fand 1517 mit dem Anschlag der 95 Thesen an die Tür der Schloßkirche zu Wittenberg durch Martin Luther ihre endgültige Auslösung. Territoriale Bauernaufstände trotzten dem Feudaladel wenigstens geringe Verbesserungen ab und führten schließlich zum Bauernkrieg von 1524/25, den F. Engels neben der Reformation als ersten Akt der bürgerlichen Revolution in Europa bezeichnete. Diese bewegte Zeit brachte für eine Reihe von Städten eine rasche Entwicklung mit sich, so auch für Erfurt und Annaberg, die beide im Leben von A. Ries die bedeutendste Rolle spielten. Der vorübergehende Aufschwung Erfurts fußte vor allem auf den sich festigenden neuen erweiterten Handelsbeziehungen. Annaberg hatte 1496 das Stadtrecht als Zentrum des sächsischen Silberbergbaus erhalten und gehörte kurze Zeit später schon zu den bedeutendsten Städten Deutschlands. So ist es kein Wunder, daß diese Städte vor allem auf junge Menschen anziehend wirkten, die hier Betätigungs- und Entwicklungsmöglichkeiten suchten.

Der Vater von Adam Ries besaß eine Mühle, einen Weinberg und einige Hausgrundstücke, so daß die zehnköpfige Familie in bescheidenem Wohlstand leben konnte. Er war das zweite Mal verheiratet, seine erste Frau war um 1545 gestorben. Adam und weitere vier Kinder stammten aus zweiter Ehe.

Bereits als 17-jähriger verließ Adam Ries sein Elternhaus, das erste Mal für längere Zeit. Sein Vater war zu diesem Zeitpunkt bereits seit etwa drei Jahren verstorben. Am Ende dieser Wanderjahre, während der Adam Ries 1515 auch die Stadt Annaberg kennengelernt hatte, wurde er im Jahre 1518 in Erfurt sesshaft. Dort bezeichnete er sich 1522 im Zusammenhang mit der Veröffentlichung des Rechenbuches „Rechnung auff der linihen und federn“ erstmalig als Rechenmeister. Ob vorher ein Aufenthalt in Frankfurt (Main) erfolgte, wo Adam Ries auf dem Römer für

die Messebesucher mathematische Aufgaben gelöst haben soll, ist ungewiß. In Erfurt gründete Ries eine Rechenschule und veröffentlichte bereits 1518 sein erstes Buch „Rechnung auff der linihen“ und 1522 die bereits erwähnte „Rechnung auff der linihen und federn“; beide erfuhren eine Reihe von Nachauflagen. Durch G. Stortz, den späteren Rektor der 1392 eröffneten Universität Erfurt, kam Ries mit Humanisten und mit den Lehren Martin Luthers in Berührung. In der großen Bücherei in Stortzens „Engelsburg“ standen Ries viele mathematische Schriften zur Verfügung, zu deren Studium ihm seine ausgezeichneten Kenntnisse der lateinischen Sprache sehr zugute kamen.

Stortz war es vor allem, der Ries zum Schreiben von Rechenbüchern angeregt hat. Beide Männer blieben auch weiterhin freundschaftlich verbunden, als Ries 1523 nach Annaberg umsiedelte, dort 1525 heiratete und den Bürgereid leistete. Gerade in diesem Jahr nach der Niederschlagung des Bauernkrieges verschärfte sich überall, so auch in Annaberg, die Verfolgung der „Lutheraner“ immer mehr, ohne jedoch das Vordringen der neuen Lehre aufhalten zu können, mit der Ries sympathisierte, ohne sich öffentlich für sie zu

Adam-Ries-Haus in Annaberg-Buchholz



bekennen. Über Repressalien, denen er dadurch ausgesetzt war, ist jedoch nichts bekannt. Vielleicht wäre der Verlust für die Bergwerksherren zu groß gewesen, wenn man Ries, wie viele andere, eingekerkert oder der Stadt verwiesen hätte. In Annaberg versah Ries ab 1525 das Amt des Rezeßschreibers. Dieser Bergwerksberuf wäre aus heutiger Sicht vielleicht vergleichbar mit dem eines Buchhalters im Bergbau. Der Rezeßschreiber prüfte die Bergrechnungen und hatte die geförderte Erzmenge und deren Ausbeute zu erfassen und in das „Rezeßbuch“ einzutragen. Außerdem erwartete der Eigentümer vierteljährlich eine Aufstellung – den Rezeß – über Soll und Ist seines Bergwerksbesitzes, den der Rezeßschreiber liefern mußte.

Aus dieser Zeit stammen Zehnt- und Münzrechnungen sowie Rezeßschreiben aus Riesens Feder. Auch für die Stadtverwaltung von Annaberg war Ries tätig, indem er Berechnungen von Nachlässen und Steuern durchführte. Für die Stadt Zwickau erarbeitete er einige Brot- bzw. Beckenordnungen. Bereits in Erfurt hatte Ries die Arbeiten an der „Coß“ begonnen, die er 1524 in Annaberg vollendete. Gedruckt wurde dieses Buch nicht.

In Riesens „Coß“ sind neben vielen praktischen Aufgaben auch eine große Anzahl mit formalem Charakter enthalten. Dabei übernahm er Beispiele aus den Büchern anderer Cossisten, nicht ohne sie einer kritischen Überarbeitung zu unterziehen und sie vor allem in einfacher Sprache wiederzugeben. Wie in allen seinen Büchern bezeichnete auch hier Ries die Proben als zur vollständigen Lösung eines Problems gehörig. Der Inhalt der „Coß“, also die Aufstellung mathematischer Probleme aus der Praxis und die Lösung algebraischer Gleichungen mittels Algorithmus, das heißt, durch systematische Anwendung der vier Grundrechenoperationen, wurde von Ries teils in unterrichtender, weiterführender Form, teils in Form von Wiederholungen und Übungen, immer aber so verständlich dargeboten, „... damit der arme gemeyne Mann nicht übersetzt (betrogen) werde“.

Bis in Riesens Zeit wurde hauptsächlich mit oder besser auf dem Brett gerechnet. Dazu benötigte man Rechensteine oder Rechenpfennige, die je nach dem Geldbeutel des Besitzers oft recht kunstvoll ausgeführt waren. Die Umschrift auf einem dieser Pfennige „Zwiespalt großes Gut verzehrt – Einigkeit das Wenige mehrt“ soll von Adam Ries stammen. Wirkliche Bretter oder in den Tisch geritzte oder darauf gezeichnete Schemata oder ein entsprechend bemaltes Tischtuch dienten dabei als „Rechenbretter“. Ein solches „Brett“ ist zu verstehen als ein Schema für gebündelte Zahlen in Form von Linien. Die Einer, Zehner, Hunderter usw. wurden mit Rechensteinen auf ihnen dargestellt, die Fünfer, Fünzfziger, Fünfhunderter

usw. zwischen den Linien (in den sogenannten Spatien).

Während das Addieren und Subtrahieren auf dem Rechenbrett noch relativ übersichtlich auszuführen ist, gehören zur Ausführung von Multiplikation und Division gewisse Fertigkeiten, die unter anderem darin bestehen, daß eine mehrstellige Zahl dekadisch aufgespalten wird und die dadurch erhaltenen Teilsummanden einzeln „umgewandelt“ werden. Die so erhaltenen „Ergebnisse“ wurden dann wieder in „deutsche Zahlen“ (gemeint sind die römischen Zahlzeichen) übertragen.

Seit dem 12. Jahrhundert waren allmählich auch die indischen Ziffern über Arabien nach Europa vorgedrungen und begannen sich im 14./15. Jahrhundert durchzusetzen. Ries widmete sich in seinem 1522 erschienenen zweiten Buch „Rechenung auff der linihen und federn auff allerley handtierung“ sowohl dem Rechnen mit dem Rechenbrett als auch dem schriftlichen Rechnen. Dieses Buch erlebte bis gegen 1650, also noch fast 100 Jahre nach Riesens Tod, über 60 Auflagen. Der Grund ist unter anderem darin zu suchen, daß dieses Buch in deutscher Sprache geschrieben und somit breitesten Kreisen zugänglich und vorzüglich didaktisch aufgebaut war. Mit seiner Hilfe konnte der Leser wirklich Rechenfertigkeiten erwerben, indem er die ausführlichen Anleitungen gründlich studierte und die erhaltenen Exempel nachvollzog beziehungsweise Aufgaben löste. Und gerade in bezug auf die praktische Anwendung der Mathematik bestand ein großes Bedürfnis, dem das in den Hochschulen gelehrt *Quadrivium* in keiner Weise entsprach.

Erwähnenswert ist noch das 1533 erschienene „Gerechent Büchlein auff den Schöffel, Eimer und Pfundgewicht“ als erstes bekanntes Tabellenbuch für die Praxis, das nicht nur mehrere Auflagen, sondern auch viele Nachfolger durch andere Autoren erfuhr. Dabei

darf nicht vergessen werden, daß Ries nicht nur Bücher schrieb, sondern auch eine Rechenschule betrieb und vor allem aber für Bergbau und Verwaltung als Rechenmeister tätig war.

Riesens guter Ruf drang bereits zu Lebzeiten weit über Annaberg hinaus. Abgesehen davon, daß er auch für Marienberg in den Jahren von 1529 bis 1537 den Rezeß führte und in Freiberg mehrmals der Rechnungslegung der Bergwerke beiwohnen durfte, wurde er 1539 zum „Churfürstlich Sächsischen Hofarithmeticus“ ernannt. Ries konnte sich mit seiner zehnköpfigen Familie ein Leben frei von materiellen Sorgen leisten. Außerdem erwarb er zwei Häuser und gehörte somit zu den wohlhabenden Bürgern Annabergs. Etwa um 1545 starb seine erste Frau. Einige Jahre danach heiratete er ein zweites Mal. Diese Ehe währte fast noch zehn Jahre. Am 30. März 1559 starb A. Ries im Alter von 67 Jahren. Die unmittelbare Nachfolge übernahm sein Sohn Abraham.

Der Verlauf des Lebens von Adam Ries zeigt uns, daß er weder das schriftliche Rechnen noch das Einmaleins „erfunden“ hat, wie häufig angenommen wird. Sein großes einmaliges Verdienst besteht darin, die damals hochgeschätzte, aber als noch sehr schwierig empfundene Rechenkunst so „aufbereitet“ zu haben, daß sie von jedermann verstanden und angewendet werden konnte. Dabei verzichtete er nicht auf wissenschaftliche Strenge. Er erkannte die Bedürfnisse seiner Zeit, die für ihn darin bestanden, den breiten Massen Bildung zu vermitteln, um ihre Urteilsfähigkeit zu heben, und befriedigte diese in mathematischer Hinsicht optimal. Die Redewendung „macht nach Adam Ries...“, nunmehr schon über 400 Jahre gebräuchlich, ehrt den ersten Mathematiklehrer des Volkes zu Recht, auch wenn die Ergebnisse von Rechenoperationen nach ihm die gleichen blie-

ben wie vor seinem Wirken und Ries selbst keine eigenen Beiträge zur Fortentwicklung der mathematischen Wissenschaften geleistet hat.

W. Arnold

Vorliegenden Beitrag übernehmen wir – gekürzt – aus dem für Schüler (ab Klasse 7/8) geeigneten Buch:

Autorenkollektiv

Biographien bedeutender Mathematiker

535 Seiten, zahlreiche Abb.,

Preis DDR 22,- M

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Berlin 1983



Neuerprobe nach Adam Ries

7869

8796

16665

„Mach ein creutz zum ersten, also $\times$ “

Nimm die prob von der oberenn Zal, als von 7869

setz die in ein veld des creutz, also $3 \times$

Nun nimm die proba von der andern Zal, das ist von 8796 ist auch 3;

setz vff das ander veldt neben vber,

also 3×3 .

Addir nun zusammen $3 + 3$ wirt 6,

setz obenn wie hi 3×6 .

So du nun die prob von beyden Zalnn oben gesatz genumen und zusammen addirt hast, so Nime alsdann prob auch von dem, das so auß dem addiri komen ist, das ost von der vnterstenn Zal vnder der linihen akss 16665. Nim hinweg 9, so oft du magst, pleibn 6 übrig, die setz vnden in das ledige feltt. Ist

gleich souil sam oben stett, also $3 \times 6 \times 3$. So

weniger oder mer komen wer, so hattest du im nicht recht gethan.“

Annaberg im 16. Jh. zur Zeit des Wirkens von A. Ries



Alt-Annaberg
im 16. Jahrhundert

Aufgaben aus einem Lehrbuch von Adam Ries (um 1524)

▲1▲ Item 3 gesellen haben gewonnen ein anzahl geldes, der erste nimet $\frac{1}{7}$, der ander $\frac{1}{4}$ und der dritte nimet das vbrig das ist 17 fl. Nun frage, wiuil des geldes ist das sie gewonnen habn.

▲2▲ Item eyner spricht zu dem andern gib mir 1 pfennig, so hab ich souil sam Dir pleibet, spricht der ander zum erstenn gib mir 1 pfennig, so hab ich zwey mal souil sam dir pleibet. Nun wolt ich gern wissen, wiuil eyenn etzlicher gehabt hab.

▲3▲ Item drey kauffen 1 pferdt vmb 12 fl. keyner vermugens allein Zubezalen. A spricht zu B und C, leye mir itzlicher $\frac{1}{2}$ seyenes geldes, so wil ich das pferdt bezalen. Spricht b zu c vnd a gebt mir $\frac{1}{3}$ so wil ich das pferdt vergnugen. Nachdem spricht x zum b vns a gebt mir beyde $\frac{1}{4}$, so wil ich das pferdt kauffen. Nun frage ich, wiuil itzlicher in sunderheit gehabt hab.

▲4▲ Aufgabe mit Lösung (Facit); Kalmus ist eine Heilpflanze

Kalmus.

Item ein Sack mit Kalmus wiegt 48. lb. 16 loth/ Tara 2. lb. vnd 16 loth/ kost ein lb. 13. 8. ein halben.

Facit 31. f. 4. 8. 4. hlt vnd ein halben. Das Tara nimb herab/ mach forn vnd hin den loth/ brichs mittlen/ vnd gehe herfür/ stehet:
64 27 1480

▲5▲

Adam Riesen. Bihetauff.



Item einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Bihes kauffen / nemlich 1 Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Heisen/ kost ein Ochse 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Heiß ein ort von einem fl. wie viel sel er jeglicher haben für die 100. fl. 2 Nachs nach den vorigen/ mach eines jeglicher kosten zu örtern/ deßgleichen die 100. fl. vnd setz als dann also:

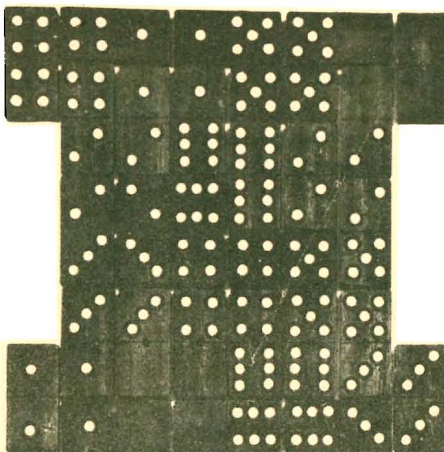
16	15
6	5
100	400
2	1
1	

Australischer Mathematikkalender 1984

herausgegeben von der Mathematischen Vereinigung der Mathematiklehrer Australiens – Autoren: R. Robin, S. Murray · Wir zeigen die Monatsblätter Januar und Juli.

Sun.	Mon.	Tues.	Wed.	Thurs.	Fri.	Sat.
1 1^{984}	2 $-1-9+8+4$	3 $(1+9+8)\div 4$	4 $(1\times 9-8)\times 4$	5 $(-1+9)\div 8+4$	6 $1+9-8+4$	7 $1\times 9-8\div 4$
8 $1+9-8\div 4$	9 $\sqrt{1\times 9}+8-\sqrt{4}$	10 $1+\sqrt{9}+8-\sqrt{4}$	11 $1\times 9+8\div 4$	12 $1\times \sqrt{9}\times 8\div \sqrt{4}$	13 $-1+9+8\times 4$	14 $1+9+8-4$
15 $19-8+4$	16 $1^9\times 8\times \sqrt{4}$	17 $19-8\div 4$	18 $1\times 9\times 8\div 4$	19 $1\times 9+8+\sqrt{4}$	20 $-1+9+8+4$	21 $1\times 9+8+4$
22 $1\times \sqrt{9}\times 8-\sqrt{4}$	23 $19+8-4$	24 $(1\times 9-8)\times 4!$	25 $1\times (9-8)+4!$	26 $-(1\times \sqrt{9})!+8\times 4$	27 $1-(\sqrt{9})!+8\times 4$	28 $-1-\sqrt{9}+8\times 4$
29 $-1\times \sqrt{9}+8\times 4$	30 $1-\sqrt{9}+8\times 4$	31 $19+8+4$				

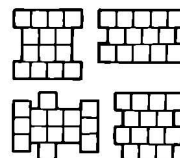
QUADRILLES



A doubly symmetric quadrille.

During the nineteenth century a French mathematician, Edouard Lucas, gave the name Quadrille to a domino figure consisting of blocks of four half-tiles each carrying the same number of pips. e.g. in the quadrille here the upper left block of four half-tiles all have four (4) pips on them, while the bottom left block have all ones (1) on them.

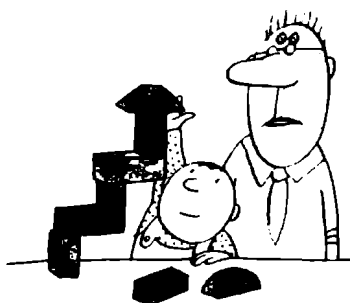
Using all the dominoes in a double-6 set try to make the following patterns. Remember, each square on these patterns represents a block of four half tiles each with the same number of pips.



Sun.	Mon.	Tues.	Wed.	Thurs.	Fri.	Sat.
1 $-e^{-i\pi}$	2 $\frac{y}{x}$ Turning point is (?,?)	3 $87 = x \bmod 7$ $x = ?$	4 $\frac{a}{b}$ Gradient?	5 $\sqrt{1445} = 17\sqrt{m}$ $m = ?$	6 $3\int_0^2 x \, dx$	7 $\frac{a+b}{c}$ $x = ?$
8 $\frac{t}{t} = ?$	9 $\frac{1}{3^2}$	10 $(3-7i)(3+7i)$	11 $\frac{(x^3)^p}{x^{-p}} = x^p$ $p = ?$	12 A cube has ? edges	13 H.C.F. of 78 and 91	14 $\frac{63 \times 36}{162}$
15 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	16 10000 _{ten}	17 If $x = -7$, $3-2x = ?$	18 $4(3x+2)-2(6x-5)$	19 $\frac{19!}{18!}$	20 6C_3	21 x intercept of $2x-45y-42=0$
22 Mean of 12, 17, 26, 33.	23 $\angle R = 10x^\circ$ $x = ?$	24 Volume?	25 cm in $\frac{1}{4}$ m	26 $\theta = ?$	27 $x = ?$	28 $n = ?$
29 $\frac{a}{b} = \frac{(1,4,5)}{(4,5,4)}$ $a \cdot b = ?$	30 $\angle = ?$	31 H.C.F. of 217 and 372.				

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1984



Mathematik

Ma 5 ■ 2407 Für drei Sportler, die sich an einem 30-km-Skilanglauf beteiligten, wurden folgende Zeiten gestoppt: Sportler A benötigte 1 h 27 min 34 s; Sportler B benötigte 5284 s; Sportler C hingegen 87 min 3 s. Ordne die Laufzeiten dieser drei Sportler!
Beginne mit der besten Laufzeit!

Schülerin Gabriele Schweinitz,
Zella-Mehlis

Ma 5 ■ 2408 Petra kauft auf dem Postamt für 3,25 M Briefmarken zu 20 Pf und 35 Pf das Stück, und zwar mehr 20-Pf-Marken als 35-Pf-Marken. Wie viele Briefmarken jeder Sorte hat Petra gekauft?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg

Ma 5 ■ 2409 Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl beträgt 5. Multipliziert man diese Zahl mit 3, subtrahiert man vom Produkt 1, so erhält man eine zweistellige natürliche Zahl mit den gleichen, aber vertauschten Grundziffern.

Schülerin Sandra Fabian, Liederstädt

Ma 5 ■ 2410 Wolfgang und Stefan haben zusammen 9 Bleistifte, 21 Faserstifte und 10 Buntstifte. Stefan hat doppelt so viele Bleistifte wie Wolfgang und drei Faserstifte mehr als Wolfgang. Wolfgang hat viermal so viel Buntstifte wie Stefan. Wie viele Blei-, Faser- bzw. Buntstifte hat jeder der beiden Jungen?

Schülerin Sabine Schüler, Schöna

Ma 5 ■ 2411 Klaus kauft in einem Fachgeschäft für Anglerbedarf Posen zu 75 Pf, zu 1,00 M, zu 60 Pf und zu 32 Pf das Stück, und zwar von jeder Sorte mindestens eine Pose. Insgesamt gibt er dafür 3,91 M aus. Wie viele Posen jeder Sorte kauft Klaus ein?

Schüler Thomas Rademacher, Lübben

Ma 5 ■ 2412 Ein Güterzug wurde aus 67 Waggons mit insgesamt 236 Achsen zusammengestellt, und zwar aus sieben sechssachsigen Waggons und noch aus zwei- und vierachsigen Waggons. Wie viele zwei- und vierachsige Waggons gehören zu diesem Güterzug?

Schüler Frank Berger, Saalfeld

Ma 6 ■ 2413 Wenn man hinter die Ziffer für eine einstellige natürliche Zahl noch die Grundziffer 6 schreibt, so ist die dargestellte Zahl um 9 kleiner als diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Grundziffer 6 vor diese Zahl setzt. Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Thomas Rademacher, Lübben

Ma 6 ■ 2414 Von drei Herren, die in den Städten Berlin, Cottbus und Leipzig wohnen, die die Familiennamen Meyer, Müller und Kaiser haben, und die die Berufe Lehrer, Ingenieur und Schriftsteller ausüben, ist folgendes bekannt:

- (1) Der Ingenieur und Herr Meyer kennen sich bereits aus ihrer gemeinsamen Schulzeit.
- (2) Herr Kaiser besuchte kürzlich Herrn Müller in Berlin.
- (3) Der Lehrer wohnt in Leipzig.
- (4) Herr Kaiser und der Lehrer haben sich im letzten Urlaub kennengelernt.
- (5) Der Ingenieur ist mit Herrn Kaiser befreundet.
- (6) Der Schriftsteller fährt aus beruflichen Gründen öfter nach Leipzig.

Ordne den Familiennamen dieser drei Herren den jeweiligen Beruf und den Wohnort zu! Welche der sechs Angaben ist nicht erforderlich?

Schülerin Andrea Gipp, Bad Muskau

Ma 6 ■ 2415 Ein Schüler schreibt versehentlich 5,30 h statt 5 h 30 min. Wieviel Minuten Differenz entstehen durch diesen Schreibfehler?

Schülerin Janett Stynka, Rostock

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7. Klasse geeignet).
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11, 12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 ■ 1369
30	150	
	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 2416 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$?
Schüler Thomas Häusler, Hoyerswerda

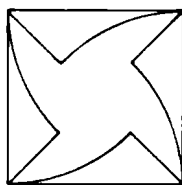
Ma 6 ■ 2417 Heinz, Peter, Manfred und Klaus verbrachten einen Teil ihrer Ferien in der Pionierrepublik „Wilhelm Pieck“ am Werbellinsee. Alle vier Schüler kommen aus verschiedenen Städten, und zwar aus Dresden, Magdeburg, Leipzig und Rostock. Aus den folgenden Angaben ist zu ermitteln, in welcher Stadt jeder der vier Jungen wohnt!

- Peter ist jünger als der Junge aus Magdeburg, aber älter als Heinz.
- Heinz und der Junge aus Rostock spielen gern Fußball.
- Klaus und die Jungen aus Dresden und Magdeburg legten vor kurzem die Prüfung der Schwimmstufe III ab.
- Der Junge aus Rostock und Klaus beteiligen sich regelmäßig am α -Wettbewerb.

Schüler Björn Pietsch, Radeburg

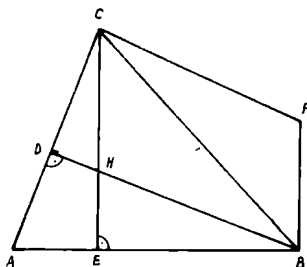
Ma 7 ■ 2418 Um jeden der vier Eckpunkte eines Quadrates wurde, wie aus dem Bild ersichtlich, jeweils ein Kreisbogen gezeichnet, der in einem Eckpunkt beginnt und auf der Diagonalen endet, die den Kreisbogen im Innern des Quadrates schneidet. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Quadrates beträgt der Flächeninhalt der dem Quadrat auf diese Weise einbeschriebenen Figur?

Schüler Lutz Küch, Erlau



Ma 7 ■ 2419 Das Bild stellt ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ dar, die sich im Punkte H schneiden. Die Parallele zu $\overline{CH}$ durch B schneidet die Parallele zu $\overline{BH}$ durch C im Punkte F . Es ist zu beweisen, daß der Punkt F auf dem Umkreis k des Dreiecks ABC liegt.

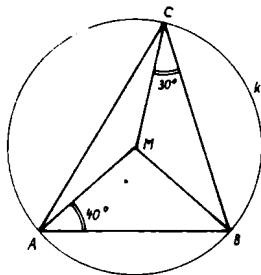
Sch.



Ma 7 ■ 2420 Der Mittelpunkt M des Umkreises k des abgebildeten Dreiecks ABC wurde mit den Eckpunkten A , B und C verbunden. Der Winkel $\sphericalangle BAM$ hat die Größe 40° , der Winkel $\sphericalangle BCM$ die Größe 30° . Es

sind die Größen α , β und γ der Innenwinkel des Dreiecks ABC zu bestimmen.

Sch.



Ma 7 ■ 2421 Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren oder ineinander umzufüllen. Es ist nachzuweisen, daß es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 10 unter ausschließlicher Verwendung dieser drei Gefäße abzumessen.

Ma 8 ■ 2422 Multipliziert man eine zweistellige Zahl mit 11, so erhält man stets eine dreistellige Zahl.

Multipliziert man z. B. 24 mit 11, so kann man die 2 als erste Ziffer und die 4 als letzte Ziffer des Produktes sofort aufschreiben ($24 \cdot 11 = 264$). Die Quersumme von 24, also $2 + 4 = 6$ ist als mittlere Ziffer aufzuschreiben, also $24 \cdot 11 = 264$. Kann man dieses Verfahren immer anwenden?

Schüler Jens Pönisch, Karl-Marx-Stadt

Ma 8 ■ 2423 Wie kann man 1000 Markstücke auf 10 Beutel so verteilen, daß man jeden beliebigen ganzzahligen Geldbetrag von 1 Mark bis 1000 Mark durch entsprechende Beutel auszahlen kann?

Schüler Klaus Liesenberg, Ilsenburg

Ma 8 ■ 2424 In einem Trapez $ABCD$ ist $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AB}$ viermal so lang wie $\overline{CD}$. Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt 120 cm^2 ; die Diagonale $\overline{AC}$ ist 10 cm lang. Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ACD ? Es ist der Flächeninhalt dieser beiden Dreiecke zu berechnen. Welchen Abstand haben die Punkte B und D von der Diagonalen $\overline{AC}$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2425 Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC . Es ist ein Rechteck $DEFG$ unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren, das die folgenden Eigenschaften hat:

- Eine Rechteckseite ist so lang wie die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC .
- Der Umfang des Rechtecks ist gleich dem Umfang des Dreiecks. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2426 Schreiben Sie Ihren Geburtsmonat als Zahl auf, z. B. für Januar 1, Februar 2 usw.! Verdoppeln Sie diese Zahl!

Addieren Sie 40! Multiplizieren Sie die entstandene Summe mit 50! Subtrahieren Sie 16! Subtrahieren Sie die Jahreszahl Ihres Geburtsjahres! Wenn Sie richtig gerechnet haben, dann geben die letzten beiden Ziffern in der vorgegebenen Reihenfolge eine zweistellige Zahl an, die Ihrem Alter an Ihrem Geburtstag im Jahre 1984 entspricht. Wenn Sie diese Ziffern streichen, dann bleibt eine ein- oder zweistellige Zahl stehen. Sie gibt Ihren Geburtsmonat an. Es ist zu beweisen, daß dieses Ergebnis stets zutrifft (falls das Alter unter 100 Jahren liegt).

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2427 Die Terme e , ab , cee usw. in den drei Gleichungen stehen für ein-, zwei- bzw. dreistellige natürliche Zahlen in dekadischer Schreibweise. Für die Buchstaben sind Grundziffern einzusetzen, so daß alle drei Gleichungen zugleich erfüllt werden, d. h. wahre Aussagen ergeben.

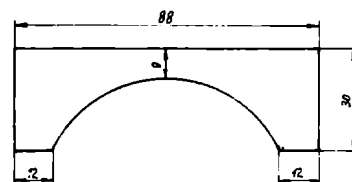
Für gleiche Buchstaben sind gleiche Grundziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern einzusetzen. Die erste Ziffer (von links) jeder mehrstelligen Zahl, aber auch jede einstellige Zahl muß verschieden von Null sein.

- $ab \cdot cd = efa$
- $cg \cdot ae = efa$
- $\sqrt[3]{e \cdot efa} = \sqrt{cee}$

Schüler Frank Pampel, Schneeberg

Ma 9 ■ 2428 Holger möchte für seinen kleinen Bruder Steffen Bauklötzchen aus Holz nach einem Vorbild aussägen. Das Brückenteil bereitet ihm Schwierigkeiten. Es ist der Radius des Bogens zu berechnen.

Schüler Stefan Franze, Dresden



Ma 9 ■ 2429 Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks (gemessen in cm), dessen Flächeninhalt 84 cm^2 beträgt, sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Welche Seitenlängen besitzt dieses Dreieck?

Sch.

Ma 10/12 ■ 2430 Eine dreistellige Zahl, deren Grundziffern in der vorgegebenen Reihenfolge aufeinanderfolgende kleiner werdende natürliche Zahlen sind, ist um 21 kleiner als das Dreifache des Quadrates ihrer Quersumme. Es ist die dreistellige Zahl zu bestimmen.

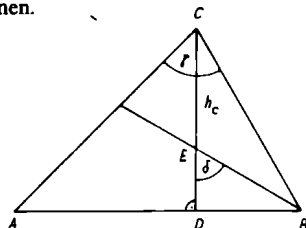
Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 10/12 ■ 2431 Für einen inneren Punkt P eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 10 \text{ cm}$ gelte $\overline{PA} : \overline{PB} : \overline{PC} = 1 : 2 : 3$. Es sind

die Längen der Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ zu berechnen. Sch.

Ma 10/12 ■ 2432 In dem abgebildeten Dreieck ABC seien bekannt:

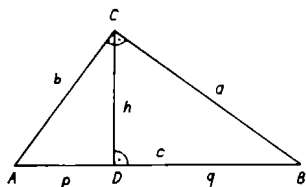
$\gamma = 60^\circ$, der Winkel $\angle DEB$ (er wird von der Winkelhalbierenden des Winkels β und der Höhe h_c gebildet), seine Größe ist $\delta = 60^\circ$ und die Länge des Inkreisradius $r_1 = 2$ cm. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen.



Skizze (nicht maßstäblich)

Offizierschüler Rene Pratsch, Dresden

Ma 10/12 ■ 2433 In dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC hat die Kathete $\overline{AC}$ die gleiche Länge wie der Hypotenusenabschnitt $\overline{DB}$. Es sind die Größen der Innenwinkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ zu berechnen.

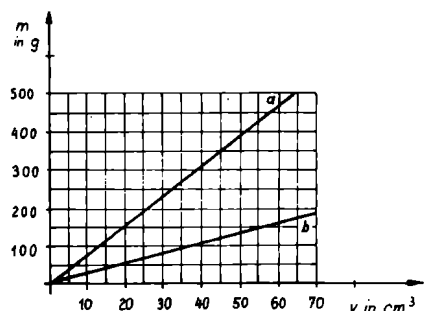


Skizze (nicht maßstäblich)

Schüler Frank Pampel, Schneeberg

Physik

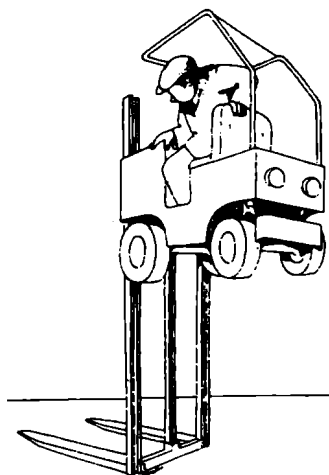
Ph 6 ■ 151 In der grafischen Darstellung ist die Dichte zweier Stoffe a und b eingezeichnet. Berechne jeweils die Dichte! Um welche Stoffe handelt es sich?



Ph 7 ■ 152 In einem Wohnblock befördert der Aufzug die Kabine in 8 Sekunden auf eine Höhe von 15 m. Die gesamte Gewichtskraft der Kabine beträgt 650 kp. Berechne die Leistung des Elektromotors in kW, wenn der Wirkungsgrad 85% beträgt!

Ph 8 ■ 153 Nach welcher Zeit vollbringen gleichzeitig 4 Vierzig-Watt-Glühlampen, 3 Sechzig-Watt-Glühlampen und 2 Einhundert-Watt-Glühlampen eine Arbeit von 1 Kilowattstunde?

Schüler Olaf Parchmann, Blankenheim



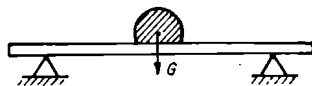
Ph 9 ■ 154 Bekanntlich wird ein senkrecht nach unten auslaufender Wasserstrahl zunehmend dünner. Ein Wasserstrahl trete aus dem Ausfluß nach unten senkrecht aus, wobei am Ausfluß die Geschwindigkeit von 0,5 m/s vorliegt. Der Anfangsdurchmesser betrage 1 cm. Welche Dicke hat der Strahl, nachdem er 5 cm zurückgelegt hat?

Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ph 10/12 ■ 155 Eine Maschine hat eine Masse von 1500 kg. Ihr Gewicht bewirkt eine Durchbiegung des Fundaments um 15 mm. (Im Bild ist dieser Sachverhalt sehr vereinfacht dargestellt.)

Berechnen Sie die Frequenz, mit der Maschine und Fundament schwingen, wenn die Masse des Fundaments vernachlässigt wird! Anmerkung: Die Frequenz eines Feder-Masse-Schwingers ist $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ mit der Feder-

konstanten $k = \frac{F}{s}$.



Chemie

Ch 7 ■ 121 Ein Kupfer(II)-oxid, welches 4% Verunreinigungen enthält, soll mit Kohlenstoff zu Kupfer reduziert werden. Bei der Reaktion entsteht außerdem noch Kohlenmonoxid.

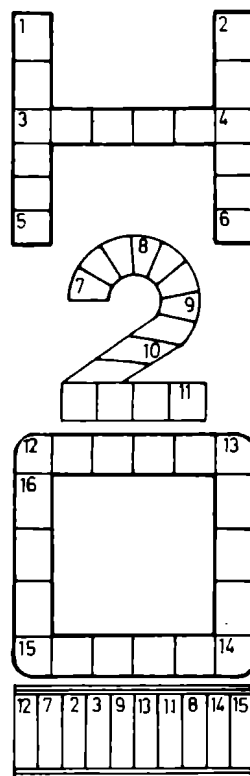
- Wieviel Kilogramm Kupfer kann man aus 2,1 t Kupfer(II)-oxid gewinnen?
- Wieviel Kilogramm Kohlenmonoxid entstehen, wenn bei der Reaktion ein Gasverlust von 1,2% auftritt?

Ch 8 ■ 122 35 g Kupfer(II)-sulfat werden getrocknet. Dabei verliert es 12,6 g seiner Masse. Wieviel Wassermoleküle sind an der Kristallisation beteiligt?

Ch 9 ■ 123 22,8 g Salzsäure werden mit 310 ml Wasser verdünnt. 14 ml dieser Lösung werden mit Silbernitrat-Lösung versetzt. Die Analyse ergibt 0,41 g Silberchlorid. Wievielprozentig ist die Salzsäure-Lösung?

Ch 10/12 ■ 124 Aus 2,3 g Blei(II)-nitrat soll alles Blei als Blei(II)-sulfid gefällt werden. Der dazu benötigte Schwefelwasserstoff wird aus Eisen(II)-sulfid und 15%iger Salzsäure hergestellt. Es soll gerade soviel Schwefelwasserstoff hergestellt werden, daß er ausreicht, um alles Blei als Blei(II)-sulfid zu fällen. Wieviel Gramm Eisen(II)-sulfid und Salzsäure müssen zur Reaktion gebracht werden?

H₂O-Rätsel



a a a b c c c d d e e e e e e e e e g g
h h h h i i i l m n n n p q r r s s t u u
w x

1-5 Teil des Bades, 2-6 Wasserkurort, 3-4 winterliche Naturscheinung, 7-8 lateinisch: Wasser, 8-9 Wasserpflanze, 9-10 Aggregatzustand des Wassers, 10-11 Regenschutz, 12-13 kleiner Teich, 13-14 Naturscheinung, 14-15 Meeresgott, 15-16 Sejungfrau

Das Hauptlösungswort – eine Gestalt aus der Oper „Rusalka“ von Antonin Dvořák – ergibt sich, wenn man die entsprechenden Buchstaben in die untere Leiste überträgt.

(aus NBI)

alpha-Wettbewerb 1982/83

Preisträger

Beatrice und Matthias List, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Ute Partsch, Bad Salzungen; Silvia Holzmüller, Jana Freude, beide Bergwitz; Steffen Padelt, Bernd Trappe, R.-Birk Schulze, Wilko Wohlauf, Matthias Röder, alle Berlin; Jens Baumann, Angela Herrmann, beide Bernsbach; Alice Kraneis, Bernburg; Karsten Kühne, Blankenfelde; Christina Werner, Bötzwitz; Thomas Gerlach, Buhla; Ingrid Voigt, Böhlen; Birgit Reißner, Cottbus; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Holger Fröbe, Wolfgang Tenor, beide Dessau; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Mario Schubert, Sylvia Penz, beide Dresden; Stefan Heitzsche, Elsterwerda; Jörg Simon, Engelsdorf; Sabine Scholz, Susanne Reinhardt, Antje Röder, alle Fambach; Thomas Scheibe, Ferdinands-hof; Holger Heinisch, Forst; Dorothee und Annemarie Heidrich, Freiberg; Astrid Gebauer, Friedeburg; Josef Petersdorfer, Gföhl (Österreich); Ansgar Heise, Görlitz; Michael Hanke, Gräfenhainichen; Ulf Gebhardt, Ursula Märker, beide Greifswald; Sven Rudolph, Großbröhrsdorf; Holger Merkel, Andreas Tille, beide Halle; Matthias Schädlich, Heike Reichelt, beide Hammerbrücke; Ingo Müller, Ulf Graubner, beide Hermannsdorf; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Hagen Reimann, Horka; Claudia Schwartz, Ilmenau; Günter Doppler, Imbach (Österreich); Frank Marth, Kaltenordheim; Peter Wendt, Ulf Nienländer, beide Karl-Marx-Stadt; Jacqueline Eichhorn-Sens, Manuela Braun, Torsten Pamminer, Thomas Schindhelm, Jana Zitzmann, Conny Weschenfelder, alle Lauscha; Ralf Laue, Leipzig; Marco Köchel, Lössau; Giselher Schütze, Frank Görisch, beide Magdeburg; Andreas Hübler, Mittelbach; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Jens Sbresny, Oberschöna; Matthias Dalitz, Obhausen; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Sirko Brix, Torsten Lüth, beide Parchim; Felix Kraenz, Picher; Michael Taeschner, Parchim; Jana Schumann, Ribnitz; René Bretschneider, Riesa; Grit Maciejewski, Barbara Menzel, Karen Meyer, Annett Kistner, Daniela Wulff, alle Rostock; Remo Karius, Katja Klotzsch, Jeannette Schmücker, Beatrice Rückert, alle Rotta; Sabine Schweglien, Schönhagen; Ronald Bojarski, Saßnitz; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Lars Hantschmann, Seiffenndorf; Reiner Möwald, Sömmerda; Rosa Flint, Stapel; Thomas Heublein, Steinach; Frank Holland, Steinbach-Hallenberg; Jens Burmann, Sumte; Sven Janssen, Tornau; Jana Rönnicke, Uthausen; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Hartmut Boettcher, Weimar; Andreas Döring, Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Peter Eggert, Wismar; Frank Schrapel, Kirsti Linke, beide Worbis; Markus Lehmann, Zittau; Sabine Möckel, Zwickau.

Vorbildliche Leistungen

Marion Zinke, Aschersleben; Andreas Schneider, Badingen; Michael Henning, Mario Winter, beide Bad Salzungen; Robert Krüger, Berlin; Annerose Schmidt, Bleicherode; Martin Leit, Cottbus; Annett Runze, Dölitz; Anke Mehner, Ramona Kaiser, beide Dörfel; Thomas Hübler, Bernd Miethig, beide Dresden; Thomas Mautsch, Duben; Matthias Schreiber, Elsterwerda; Diana Wingeß, Mathias Römhild, beide Fambach; Daniela Reinstein, Fockendorf; Andreas Beneder, Gföhl (Österreich); Christoph Kothe, Birgit Sommer, beide Görlitz; Michaela Große, Gohrau; Falk Hunger, Großbrückerswalde; Ralf Kühnel, Kristin Stöbe, beide Guben; Birgit Seifert, Hagenow; Heike

Reichelt, Hammerbrücke; Mathias Hascher, Heinrichsort; Stefan Peters, Hessen; Dirk Luttenberg, Holungen; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Claudia Docter, Ilsenburg; Jana Hodam, Henrik Hodam, Kaltendorheim; Carla Umlauf, Falk Martin, beide Karl-Marx-Stadt; Manuela Braun, Thomas Schindhelm, Conny Kroder, alle Lauscha; Liane Radow, Leipzig; Steffen Mensel, Leubsdorf; Sylvia Hofmann, Langenleuba-N.; Imke Stelter, Liessow; Ina Büttner, Udo Wagner, Jörg Pretzsch, alle Lössau; Sven Pfeffer, Magdeburg; Jens Brettfeld, Mühlhausen; Dirk Plischke, Susanne Kander, beide Neuhaus; Arnd Kritznier, Neustadt; Antje Flechsig, Obercrinitz; Uwe Anke, Pappendorf; Mathias Struch, Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Ines Schmidt, Reuth; Kerstin Krämer, Ribnitz; Martin Wolff, Doris Bräcker, Ute Möller, Anne Ruser, Karin Stüpmann, alle Rostock; Irena Thiele, Jens Krüger, beide Rotta; Knut Marzisch, Rudolstadt; Astrid Rogowski, Veit Sturm, beide Schwerin; Gabriele Götz, Seega; Axel Bichler, Ilka Fiebrig, Jörg Büchner, alle Sondershausen; Heike Kowalek, Yvonne Rennecke, beide Stendal; Sabina Kaiser, Tornau; Daniela Scholich, Ueckermünde; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Heinrich-Rau-Oberschule, Wildau; Julia Armbricht, Christiane Lehmer, beide Worbis; Diana Michler, Zschortau; Carsten Hinz, Greifswald; Jan Biebrach, Garz; Stefan Barth, Mieste.

Abzeichen in Gold

Für sechzehnjährige Teilnahme

Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für fünfzehnjährige Teilnahme

Bernd Hanke, Großschweidnitz;
Guido Bloßfeld, Halle

Für vierzehnjährige Teilnahme

Ulrich Riedel, Flöha

Für dreizehnjährige Teilnahme

Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Rainer Seifert, Hagenow; Norbert Littig, Kleinröhrsdorf; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Abmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Weimar; Ursula Märker, Greifswald

Für zwölfjährige Teilnahme

Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fitke, Berlin; Wolfgang Seeber, Gehren; Bengt Nölting, Greifswald; Rolf Kuhn, Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornowitz

Für elfjährige Teilnahme

Andrea Nießen, Andreas Gude, beide Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauf, Freital; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittelweida; Wilfried Röhner, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Torsten Löwe, Schleiz; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Sylvia Kunze, Weißenfels; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für zehnjährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; Henri und Dieter Koch, Arnstadt; Hans-Jürgen Knopf, Bad Frankenhausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Jens Purand, Cottbus; Angela Jirick, Annett Körner, beide Dresden; Dana Semper, Eisleben; Bernd Dübe, Forst; Sylvio Klose, Gera; Matthias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Grünungen; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Bärbel Wintzler, Lobenstein; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Rüdiger Düsing, Osterburg; Sigrid Planke, Premnitz; Ronald Brachholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Bernd Hartwig, Thaldorf; Dietmar Ulbricht, Vel-

ten; Frank Erdmann, Zeitz; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf

Für neunjährige Teilnahme

Guntram Türke, Auerbach; Maik Weide, Callenberg; Andreas Winkler, Cossebaude; Claudia Ziehm, Berlin; Harry Höfer, Dorndorf; Ingolf Körner, Carolin Engel, Karl-Heinz Jünger, Thomas Schindhelm, Jörn Wittig, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Volker Georgy, Thomas Mittelbach, alle Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Ralf Baunhekel, Freital; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Gunnar Boll, Stefan Göckeritz, beide Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Gisbert Thieme, Halle; Volker Reck, Heiligenstadt; Eike Harmel, Hohenferchesar; René Schüppel, Mathias Grundmann, beide Hoyerswerda; Jens Pönsch, Thomas Mader, Andreas Hengst, Conchita Röske, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Per Witte, Königs Wusterhausen; Heiko Rudolf, Leipzig; Thomas Eller, Meiningen; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Karsten Schlutter, Potsdam; Claudia Trochold, Reichenbach; Klaus-Detlef Gehrke, Rostock; Roland Goldenbogen, Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhl; Hans und Margit Creutzburg, Thal; Heidrun Tiedt, Teterow; Stefan Syring, Warin; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Birgit Schmidt, Worbis; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Eva-Maria Heubner, Wolfen

Für achtjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Kirsten Rechner, Baruth; Marc Schewe, Berlin; Tilman Völzke, Böhlen; Stefanie Begau, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Royald Lenk, Christine Pompe, beide Cottbus; Petra Sarodnick, Dallgow; Guido Mehne, Dömen; Manuela Schwenke, Dohna; Ralph Gruber, Ulf Riechen, Stefan Edelmann, Jörg Hempelt, alle Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Karsten Meißner, Forst; Matthias Bauer, Genthin; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle; Roger Fischl, Halle-Neustadt; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf; Axel Schüller, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Ralf Häntsch, Köthen; Rainer Nolte, Leinefelde; Lutz Hübschmann, Löbnitz; Carola Hönn, Matthias Neundorf, beide Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Hans-Dieter Büchler, Neustadt; Sigurd Assing, Karsten Milek, beide Potsdam; Tim Planke, Premnitz; Uwe Matutiat, Manfred und Ina Hille, alle Riesa; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Ralf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Birgit Schmidt, Weißwasser; Karl Oertel, Zeitz; Kerstin Hoffmann, Zittau; Birgit Schenke, Zschornowitz; Uta Escher, Zwickau; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Kerstin Schneider, Großwitz; Ingrid Soblik, Zittau

Für siebenjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Jens Fache, Altenburg; Silke Schröder, Bad Kleinen; Silke Rechner, Baruth; Sabine Mantel, Berlin; Andreas Jock, Blankenfelde; Marij Schröder, Brandenburg; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Christian Kunze, beide Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Mario Jäpel, Dohna; Rainer Schüttke, Titus Ziegler, Stefan Franze, Catherin Engel, Lutz Lauter, Heike Lauter, alle Dresden; Uwe Wollert, Edderitz; Antje Hollstein, Frankfurt (Oder); Thomas Heidrich, Freiberg; Sylvia Döring, Gotha; Achmed und Britta Schulz, Greifswald; Jörn Wintsche, Grimma

(Fortsetzung in Heft 2/84)

Zwei Aufgaben und sieben Lösungen –

Wer mehr weiß und Phantasie hat,
kommt rascher zum Ziel

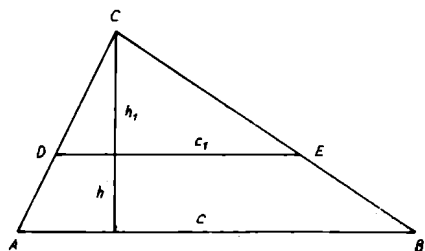
Teil 1

Rainer, Torsten und Uwe lösen gerne knifflige Mathematikaufgaben. Ihre Temperamente sind aber sehr unterschiedlich, und das zeigt sich auch beim Aufgabenlösen. Rainer rechnet gerne, und er überlegt nicht lange, ehe er damit beginnt. Daher kommt er oft erst nach manchem Umweg zum Ziel. Uwe dagegen denkt lange nach, ehe er mit seiner Arbeit beginnt. Er versucht, sich an alles zu erinnern, was mit der Aufgabe in Verbindung stehen könnte. Und auch Torsten versucht zuerst, die Aufgabe gut zu durchdenken, ehe er einen Lösungsversuch macht.

Wir wollen sehen, wie sich die drei Freunde bei der Lösung folgender beider Aufgaben verhalten.

▲ 1 ▲ Ein Dreieck soll durch eine Parallele zu einer seiner Seiten in zwei Figuren mit gleichem Inhalt zerlegt werden.

Zunächst entwerfen sie gemeinsam eine Skizze (Bild 1) und führen Bezeichnungen für Eckpunkte, Seiten und Höhen ein. Sie erkennen, daß das gegebene Dreieck ABC durch die Parallele DE in ein Trapez $ABED$ und ein Dreieck DEC zerlegt wird. Die Länge der Grundseite bzw. die der Höhe im Dreieck ABC seien c bzw. h , die Länge der Grundseite bzw. die der Höhe im Dreieck DEC c_1 bzw. h_1 .



Sie vereinbaren, daß die Aufgabe dann als gelöst gilt, wenn h_1 bestimmt wurde, d. h. ausgedrückt wurde durch h und evtl. durch c . Dann kann die Höhe des Trapezes als Differenz $h - h_1$ ermittelt werden, man könnte dann auch angeben, in welchem Verhältnis die Höhe h von DE geteilt wird –, kurz, man könnte dann die geforderte Parallele zeichnen.

Und nun setzt jeder für sich die weitere Lösung fort.

Rainer überlegt nicht lange und schreibt zunächst einmal Flächeninhaltsformeln auf:

$$A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$A_{\square} = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

In der Aufgabe war verlangt, daß die beiden Teilfiguren inhaltsgleich sein sollen. Er erhält so die Gleichung

$$A_{1\Delta} = A_{\square}$$

Nun verwendet er die vereinbarten Variablen:

$$\frac{c_1 \cdot h_1}{2} = \frac{c + c_1}{2} (h - h_1)$$

und erhält

$$h_1 = \frac{c + c_1}{c + 2c_1} h. \quad (1)$$

Hiermit kann nun Rainer nicht viel anfangen, denn auch c_1 ist nicht bekannt.

Er überlegt, ob es nicht eine zweite Gleichung gibt, in der h_1 und c_1 vorkommen. Diese findet er, indem er berücksichtigt, daß beide Teilfiguren zusammen den gleichen Flächeninhalt haben wie das große Dreieck.

Also $A_{1\Delta} + A_{\square} = A_{\Delta}$
oder

$$\frac{c_1 h_1}{2} + \frac{c + c_1}{2} (h - h_1) = \frac{c \cdot h}{2}.$$

Und hieraus

$$c_1 = \frac{c \cdot h_1}{h}. \quad (2)$$

Rainer rechnet nun unbeirrt weiter und setzt die Gleichung (2) in die Gleichung (1) ein.

$$h_1 = \frac{c + \frac{c \cdot h_1}{h}}{c + 2 \cdot \frac{c \cdot h_1}{h}} \cdot h.$$

Um h_1 zu erhalten, muß er wiederum auflösen, und er erhält schließlich

$$h_1 = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Rainer wundert sich, daß Torsten und Uwe längst das gleiche Ergebnis gefunden haben. Bei seinen umfangreichen Rechnungen hatte er sich zudem auch noch verrechnet.

Torsten führt die Lösung mit folgender Überlegung weiter: Jede der beiden Figuren, Trapez und Dreieck, sollen gleichen Inhalt haben. Dann beträgt der Inhalt jeder von ihnen die Hälfte des Inhaltes vom großen Dreieck.

$$A_{1\Delta} = \frac{1}{2} A_{\Delta} \text{ d. h. } \frac{c_1 \cdot h_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h}{2} \quad (1)$$

$$A_{\square} = \frac{1}{2} A_{\Delta} \text{ d. h. } \frac{c + c_1}{2} (h - h_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h}{2} \quad (2)$$

Er entschließt sich nun, mit dem kleinen Dreieck weiterzuarbeiten, weil in seiner Flächeninhaltsformel weniger Variable auftreten und weil die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEC$ sich besser miteinander vergleichen lassen als etwa Dreieck und Trapez. Dieser Vergleich der beiden Dreiecke führt Torsten zu der Erkenntnis, daß nach Konstruktion diese beiden Dreiecke ähnlich sind, und in ähnlichen Dreiecken haben entsprechende Strecken das gleiche Verhältnis. Daran erinnert sich Torsten aus dem Geometrieunterricht der 8. Klasse.

Es gilt insbesondere

$$\frac{c_1}{c} = \frac{h_1}{h}. \quad (3)$$

Aus der Gleichung (1) ermittelt er damit schließlich

$$\frac{c \cdot h_1^2}{h} = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$h_1^2 = \frac{1}{2} h^2$$

$$h_1 = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Uwe aber überlegt vor der Rechnung lange. Er erkennt dabei:

Es soll eine Parallele zu einer Dreiecksseite gezeichnet werden; dann ist das entstehende Dreieck dem gegebenen Dreieck ähnlich. Die Aufgabe enthält eine Aussage zum Flächeninhalt. Von Flächeninhalten ähnlicher Figuren weiß er aus dem Geometrieunterricht der 8. Klasse, daß sie sich wie die Quadrate entsprechender Strecken in den Figuren verhalten. D. h.

$$\frac{A_{1\Delta}}{A_{\Delta}} = \frac{h_1^2}{h^2}.$$

Die beiden Teilfiguren sollen gleichen Flächeninhalt haben, also ist der Inhalt des kleinen Dreiecks halb so groß wie der Inhalt des gegebenen Dreiecks. Das Verhältnis der Flächeninhalte ist 1:2. Er erhält somit sehr rasch

$$\frac{h_1^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

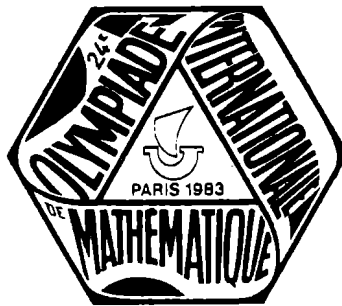
$$h_1 = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Im nächsten Heft (Teil 2) wollen wir sehen, wie sich unsere drei Freunde beim Lösen einer weiteren Aufgabe verhalten.

W. Jungk

XXIV. Internationale Mathematikolympiade

6. bis 12. Juli 1983, Paris



Aufgaben

1. Tag

1. Man bestimme alle Funktionen f , die die Menge der positiven reellen Zahlen in sich abbilden und die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) $f(xf(y)) = yf(x)$ für alle positiven reellen Zahlen x, y und
- (2) $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

Großbritannien (7 Punkte)

2. In der Ebene seien zwei nicht kongruente Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten O_1 bzw. O_2 gegeben, und A sei einer der beiden verschiedenen Schnittpunkte von k_1 und k_2 . Eine der beiden gemeinsamen Tangenten an k_1 und k_2 berührt k_1 in P_1 und k_2 in P_2 , und die andere Tangente berührt k_1 in Q_1 und k_2 in Q_2 . Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte von P_1Q_1 bzw. P_2Q_2 .

Beweise: $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$!

UdSSR (7 P.)

3. Es seien a, b, c paarweise teilerfremde positive ganze Zahlen. Zeige, daß

$$2abc - ab - bc - ca$$

die größte ganze Zahl ist, die nicht in der Form $xbc + yca + zab$

mit nicht negativen ganzen Zahlen x, y, z darstellbar ist!

BRD (7 P.)

2. Tag

4. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Die Menge E bestehe aus allen Punkten der Strecken AB, BC und CA (A, B und C eingeschlossen). Gibt es zu jeder Zerlegung von E in zwei disjunkte Teilmengen ein rechtwinkliges Dreieck, dessen drei Eckpunkte in derselben Teilmenge liegen? Begründe die Antwort!

Belgien (7 P.)

5. Gibt es 1983 verschiedene positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 10^5 , unter denen keine drei die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Folge sind?

Begründe die Antwort!

VR Polen (7 P.)

6. Es seien a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks.

Zeige:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0!$$

Wann gilt Gleichheit?

USA (7 P.)

Die DDR wurde durch folgende Mannschaft vertreten:

Lattermann, Jochen (Kl. 12), EOS Pestalozzi Dresden, 3. Preis; Mohnke, Klaus (Kl. 12), EOS Georg Schumann Calau, Bez. Cottbus, 3. Preis; Schmutzler, Bernd (Kl. 12), Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik, Spezialklasse, Spezialpreis, 3. Preis; Schüler, Axel (Kl. 12), EOS Georg Thiele Kleinmachnow, Bez. Potsdam, 3. Preis; Wenzel, Jörg (Kl. 11), EOS Fritz Heckert Zeulenroda, Bez. Gera, ohne Preis; Witt, Ingo (Kl. 11), EOS Heinrich Hertz Berlin, 3. Preis.

Aus dem Rahmenprogramm: Stadtrundfahrt durch Paris, Besuch des Eiffelturms, Besuch der Oper, Exkursion nach Versailles, Konzert

Inoffizielle Länderwertung

1. BRD	212
2. USA	171
3. Ungarn	170
4. Sowjetunion	169
5. Rumänien	161
6. Vietnam	148
7. Niederlande	143
8. ČSSR	142
9. Bulgarien	137
10. Frankreich	123
11. Großbritannien	121
12. DDR	117
13. Finnland	103
14. Kanada	102
15. Polen	101
16. Israel	97
17. Griechenland	96
18. Jugoslawien	89
19. Australien	86
20. Brasilien	77
21. Schweden	47
22. Österreich	45
23. Spanien	37
24. Kuba	36
25. Marokko	32
26. Belgien	31
27. Tunesien	26
28. Kolumbien	21
29. Luxemburg	13
30. Algerien	6
31. Kuwait	4
32. Italien	2

in der Kirche Saint Severin, Siegerehrung im großen Amphitheater der Sorbonne.

B. Schmutzler erhielt für die besonders elegante Lösung dieser Aufgabe von der Jury in Paris als einziger IMO-Teilnehmer eine Anerkennung.

Da a, b und c Seitenlängen eines Dreiecks sind, gelten die Dreiecksungleichungen

$$a+b-c > 0, b+c-a > 0, a+c-b > 0.$$

Wegen $(a-c)^2 \geq 0$ gilt damit

$$(a+b-c)(a-b+c)(a-c)^2 \geq 0$$

$$(1) \quad a^4 - c^4 + 2a^2bc + 2ab^2c - 4abc^2 + 2ac^3 + 2bc^3 - 2a^3c - 2b^2c^2 - a^2b^2 \geq 0.$$

Analog erhält man durch zyklisches Vertauschen der Variablen a, b und c aus

$$(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2 \geq 0$$

$$\text{und } (c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2 \geq 0$$

die Ungleichungen

$$(2) \quad b^4 - a^4 + 2b^2ca + 2bc^2a - 4bca^2 + 2ba^3 + 2ca^3 - 2b^3a - c^2a^2 - b^2c^2 \geq 0$$

$$(3) \quad c^4 - b^4 + 2c^2ab + 2ca^2b - 4cab^2 + 2cb^3 + 2ab^3 - 2c^3b - a^2b^2 - c^2a^2 \geq 0.$$

Durch Aufsummieren von (1), (2) und (3) ergibt sich

$$2a^3b + 2b^3c + 2ac^3 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 \geq 0$$

$$2a^2b(a-b) + 2b^2c(b-c) + 2ac^2(c-a) \geq 0 \quad / : 2$$

$$(4) \quad a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + a^2c(c-a) \geq 0$$

w. z. b. w.

Da Ungleichheit in einer von (1), (2) und (3) schon die Ungleichheit in (4) bewirkt, muß bei Gleichheit in (4) auch in (1), (2) und (3) Gleichheit gelten, d. h., es muß jeweils einer der drei Faktoren Null betragen. Wegen der strengen Ungleichheit in den Dreiecksungleichungen muß also gelten

$$(a-c)^2 = (b-a)^2 = (c-b)^2 = 0 \text{ und}$$

$$\text{damit } a = b = c (> 0).$$

Umgekehrt gilt offensichtlich für alle a, b und c mit $a=b=c$ in (4) Gleichheit.

Die beiden Klausuren à 4,5 Stunden

(6. 7. und 7. 7.) fanden in dem weltberühmten *Lyceé Louis le Grand* statt. (Es wurde 1563 gegründet, feiert also in diesem Jahr sein 400-jähriges Bestehen. Bedeutende Schüler dieser Schule: Molière, Voltaire, Robespierre, La Fayette, Delacroix, Hugo, Malesherbes, René Clair, Chirac, Becquerel, Evariste Galois, Binet.)



Teilbarkeitsregeln

Teil 1

Allgemein bekannt sind die Regeln für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10. Schon weniger verbreitet ist eine Regel für die Teilbarkeit durch 11 (Prüfen der alternierenden Quersumme, der sogenannten Querdifferenz). Auffällig ist, daß im Unterricht keine Regel für die Teilbarkeit durch 7 gelehrt wird. Daraus wird zuweilen der falsche Schluß gezogen, für die 7 gäbe es keine Teilbarkeitsregel. Es läßt sich jedoch für jede beliebige natürliche Zahl eine Teilbarkeitsregel herleiten. Dabei kann man sich auf Teiler beschränken, die auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden, da alle anderen Teiler zumindest durch 2 oder 5 teilbar sind; nach Division durch die entsprechenden Potenzen von 2 und 5 können sie auf Teiler zurückgeführt werden, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden. Denn die Untersuchung einer natürlichen Zahl z auf ihre Teilbarkeit durch $t \in \mathbb{N}$ ist gleichbedeutend mit der Prüfung der Teilbarkeit von z durch alle Primzahlpotenzen, die in der Primzahlzerlegung von t auftreten.

Will man also prüfen, ob eine Zahl $z \in \mathbb{N}$ beispielsweise durch $t = 65 = 5 \cdot 13$ teilbar ist, so prüft man zunächst ihre Teilbarkeit durch 5 nach der bekannten Regel; danach muß dann die Teilbarkeit durch 13 untersucht werden. Wir betrachten, daß dieser Schluß nur für zueinander teilerfremde Faktoren gilt; an der Teilbarkeit von z durch 4 und 6 folgt nicht die Teilbarkeit von t durch $4 \cdot 6 = 24$.

Im folgenden wollen wir Teilbarkeitsregeln für auf 1, 3, 7 und 9 endende Teiler $t \in \mathbb{N}$ herleiten und erläutern, wie die Teilbarkeit geprüft werden kann. Es handelt sich um ein Verfahren mit sogenannten Hilfszahlen. Allerdings sind diese Regeln für größere Teiler unhandlich, so daß es oft einfacher ist, die Teilbarkeit direkt durch Division zu prüfen. Dennoch bringt dieses Verfahren Vorteile. Wir wollen das zunächst an der Teilbarkeitsregel für die 7 erläutern. Sie lautet: Eine Zahl $z = 10A + E$ mit $A \in \mathbb{N}$ und $E \in \mathbb{N}$ und $0 \leq E \leq 9$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn es auch die Differenz $D = A - 2E$ ist. -2 ist in diesem Fall die sogenannte Hilfszahl F . Mit der Differenz D läßt sich die gleiche Untersuchung wiederholen und so fort.

Beispiel: Wir prüfen, ob 2471 durch 7 teilbar ist. Es ist $A = 247$ und $E = 1$, die Hilfszahl ist $F = -2$. (Wie sie hergeleitet wird, zeigen wir

weiter unten.) Zu prüfen ist also $D_1 = 247 - 2 \cdot 1 = 245$. Für $D_1 = 245$ wird $A' = 24$ und $E' = 5$; zu prüfen wäre nun $D_2 = 24 - 2 \cdot 5 = 14$. Da 14 offensichtlich durch 7 teilbar ist, ist es auch 2471.

Für das Prüfverfahren mit Hilfszahlen empfiehlt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 \quad 7 \quad 1 \\ -2 & (-2) \cdot 1 = -2 \\ \hline 2 & 4 \quad 5 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} F \cdot E \\ \\ \\ \text{ist durch 7 teilbar,} \\ \text{also auch 2471.} \end{array}$$

In der Tat ist $2471 : 7 = 353$.

Gegenbeispiel: Ist $z = 558$ durch $t = 7$ teilbar?

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \quad 8 \\ -1 & 6 \\ \hline 3 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} (-2) \cdot 8 = -16 \\ \text{ist nicht durch 7 teilbar,} \\ \text{demnach auch nicht 558,} \end{array}$$

was leicht nachzuprüfen ist.

Ein weiteres Beispiel:

Ist $z = 235683$ durch 7 teilbar?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \\ -6 & (-2) \cdot 3 = -6 \\ \hline 2 & 3 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \\ -4 & (-2) \cdot 2 = -4 \\ \hline 2 & 3 \quad 5 \quad 2 \\ -4 & (-2) \cdot 2 = -4 \\ \hline 2 & 3 \quad 1 \\ -2 & (-2) \cdot 1 = -2 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

ist durch 7 teilbar, also auch $z = 235683$.

Wir verallgemeinern das im Beispiel Gezeigte und formulieren den

Satz 1: Eine natürliche Zahl $z = 10A + E$ mit $A \in \mathbb{N}$; $E \in \mathbb{N}$; $0 \leq E \leq 9$ ist genau dann durch $t \in \mathbb{N}$ mit $t = 10a + e$ ($a \in \mathbb{N}$); ($e \in \mathbb{N}$) ($0 \leq e \leq 9$) teilbar, wenn t auch $D = A + F \cdot E$ teilt, wobei $F \in \mathbb{G}$ die sogenannte Hilfszahl ist.

Für den Beweis dieses Satzes wollen wir Satz 2 benutzen, den wir zuvor beweisen.

Satz 2: Zu vorgegebenem Teiler $t = 10a + e$ ($a \in \mathbb{N}$) mit der Endziffer $e = 1$ bzw. 3 bzw. 7 bzw. 9 läßt sich stets mindestens eine ganze Zahl F so angeben, daß $10F - 1$ durch t teilbar ist, d. h. daß gilt $(10F - 1) = (10a + e)s$ mit $s \in \mathbb{G}$. (1)

Beweis: Wir müssen also die Bestimmbarkeit von $F \in \mathbb{G}$ aus (1) für alle t zeigen, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden.

a) Fall 1: Ist $e = 1$, also $t = 10a + 1$. Wählt man nun $s = -1$ und setzt in (1) ein, so kann F in Abhängigkeit von a bestimmt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 10F - 1 &= (10a + 1)(-1) \\ 10F - 1 &= -10a - 1 \\ F &= -a. \end{aligned}$$

Wir wollen dieses F - bezogen auf die Endziffer 1 des Teilers $F(1) = -a$ nennen.

b) Fall 2: Ist $e = 3$, also $t = 10a + 3$, so kommt man z. B. für $s = 3$ zum Ziel, denn wir erhalten aus (1)

$$\begin{aligned} 10F - 1 &= (10a + 3) \cdot 3 \\ 10F - 1 &= 30a + 9 \end{aligned}$$

und schließlich nach F aufgelöst

$$F = 3a + 1; \text{ also } F(3) = 3a + 1.$$

c) Fall 3: Ist $e = 7$, also $t = 10a + 7$, so setzen wir $s = -3$ und erhalten aus (1)

$$10F - 1 = (10a + 7)(-3),$$

es folgt

$$F(7) = -3a - 2 = -(3a + 2).$$

d) Fall 4: Ist schließlich $e = 9$, also $t = 10a + 9$, so wählt man $s = 1$ und erhält aus (1)

$$10F - 1 = (10a + 9) \cdot 1,$$

es folgt

$$F(9) = a + 1.$$

Damit ist gezeigt, daß es für jedes t , das auf die genannten Zahlen (1, 3, 7, 9) endet, ein solches $F \in \mathbb{G}$ gibt. Hätten wir für $t = 10a + 1$ in (1) für $s = 9$ gesetzt, hätten wir $F = 9a + 1$ erhalten; also wohl ein anderes F , aber immerhin ein $F \in \mathbb{G}$. Daraus können wir später den Schluß ziehen, daß es für jeden Teiler t unendlich viele (meist jedoch unhandliche) Teilbarkeitsregeln gibt.

Wir beweisen jetzt den Satz 1. Wir haben zu zeigen:

Wenn $t = 10a + e$ die natürliche Zahl $z = 10A + E$ teilt, so teilt t auch $D = A + F \cdot E$; und umgekehrt, wenn t die Zahl D teilt, so teilt t auch z .

a) Es gelte zunächst: t teilt z , also $10A + E = tr$ mit $r \in \mathbb{G}$. Nach Multiplikation mit $F \in \mathbb{G}$ erhält man

$$\begin{array}{l|l} 10AF + EF = trF & + A - 10AF \\ A + E'F = trF - 10AF + A & \\ A + EF = trF - A(10F - 1) & \end{array}$$

Nach Satz 1 kann nun für jedes $t = 10a + e$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $e \in \{1, 3, 7, 9\}$ ein $F \in \mathbb{G}$ so bestimmt werden, daß $10F - 1$ durch t teilbar ist, daß also gilt $10F - 1 = ts$ mit $s \in \mathbb{G}$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} A + EF &= trF - Ats \\ A + EF &= t(rF - As). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Gleichung durch t teilbar ist, muß auch $A + EF = D$ durch t teilbar sein; also t teilt $D = A + E \cdot F$.

b) Umgekehrt gelte t teilt D , also $A + EF = tq$ mit $q \in \mathbb{G}$.

Nach Multiplikation mit 10 erhält man

$$\begin{array}{l|l} 10A + 10EF = 10tq & + E - 10EF \\ 10A + E = 10tq - 10EF + E & \\ 10A + E = 10tq - E(10F - 1) & \end{array}$$

wieder gilt $10F - 1 = ts$ ($s \in \mathbb{G}$),

und wir erhalten

$$10A + E = 10tq - Ets = t(10q - Es);$$

also ist $10A + E = z$ durch t teilbar, w. z. b. w.

Damit ist gezeigt, daß es für die Teiler $t = 10a + e$ ($a \in \mathbb{N}$) $e \in \{1, 3, 7, 9\}$ genügt, statt der Teilbarkeit von $z = 10A + E$ die Teilbarkeit von $D = A + FE$ zu untersuchen.

Satz 1 entnehmen wir, daß es für jedes t , das auf 1, 3, 7 oder 9 endet, stets mindestens eine Hilfszahl $F \in \mathbb{G}$ gibt. Wir wählen jeweils die betragsmäßig kleinste. Beim Beweis des Satzes 2 haben wir diese F für jede Endziffer e

bereits ermittelt. Wir wollen die Hilfszahlen mit $F(e)$ bezeichnen und entnehmen

$$F(1) = -a$$

$$F(3) = 3a + 1$$

$$F(7) = -3a - 2 = -(3a + 2)$$

$$F(9) = a + 1,$$

wobei a die natürliche Zahl aus $t = 10a + e$ ist.

Zusammenfassung: Um zu prüfen, ob eine Zahl $z = 10A + E$ durch $t = 10a + e$ teilbar ist, genügt es, das jeweilige $D(e) = A + E \cdot F(e)$ auf Teilbarkeit durch t zu untersuchen.

Für die verschiedenen Endziffern von t erhalten wir:

$$D(1) = A - Ea$$

$$D(3) = A + E(3a + 1)$$

$$D(7) = A - E(3a + 2)$$

$$D(9) = A + E(a + 1). \quad J. Portner (\dagger)$$

(Der Beitrag wird in Heft 2/84 fortgesetzt.)

Eine Aufgabe aus *J. P. Grusons enthielte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik, Berlin 1800*:

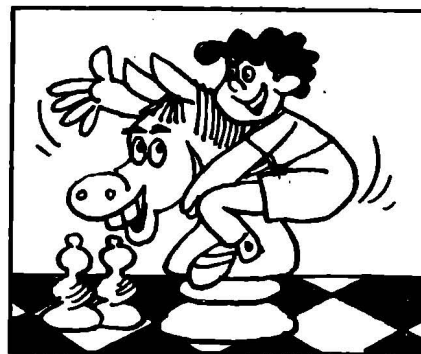
„Es hat jemand seine Börse verloren, er weiß nicht genau wie viel Geld eigentlich darin gewesen, nur das weiß er, daß wenn er zwei und zwei oder drei und drei, oder fünf und fünf und Stück zusammenzählte, daß ihm immer eine übrig blieb, zählte er aber sieben und sieben, so blieb ihm nichts.“



▲1▲ На доске написано несколько нулевых чисел, каждое из которых равно полусумме остальных. Сколько чисел написано?

▲2▲ There are seven girls and each day some of them go for a walk. The same group of girls may not go for a walk on more than one day. For how many days can the girls go for a walk?

▲3▲ Le réservoir d'essence de la voiture de papa a une capacité de 32 l. Cette voiture consomme 8 litres d'essence aux 100 kilomètres. Papa a fait le plein de son réservoir avant de partir et nous avons fait un voyage de 400 km. Combien reste-t-il d'essence dans le réservoir, sachant que papa en a ajouté 14 l en cours de route?



Begeisterte Schachfreunde

Das Schachspiel ist seiner Bedeutung nach eine äußerst interessante Erscheinung im kulturellen Leben der Menschheit. Einige Äußerungen kompetenter Persönlichkeiten sollen dies unterstreichen. So nannte *Jean-Jacques Rousseau* das Schach eine feine Kunst, einen wundervollen Kampf. . . . „Das Schachspiel ist ein Probestein des Gehirns“, sagte *Johann Wolfgang von Goethe*. – *Wladimir Iljitsch Lenin* bezeichnete Schach als Gymnastik des Geistes. – Der sowjetische Ex-Schachweltmeister *Boris Spasski* bekannte einmal: „Mich begeistert am Schach das Unbekannte, der unerschöpfliche Reichtum an Möglichkeiten, der schöpferische Prozeß, der die Schachkunst begleitet. Es ist schwierig, im Schach irgend etwas Bestimmtes hervorzuheben, weil Schach gleichzeitig Vielfalt bedeutet.“ In unserem heutigen Problem ist auch von einem begeisterten Schachfreund die Rede.

Aufgabe

Ein Moskauer Friseur und leidenschaftlicher Schachfreund befestigte an seinem Geschäft folgendes Schild:

„Ermäßigte Preise für Schachspieler! Rasieren für Spieler der Leistungsklasse 2 kostet 38 Kopeken, für Spieler der Leistungsklasse 1 34 Kopeken, für Meisteranwärter 26 Kopeken! Für Schachmeister unentgeltlich!“

Am ersten Tag kamen 20 Kunden, die Schachspieler waren, bei einer Einnahme von nur 146 Kopeken.

Wie viele Schachspieler jeder Spielstärke wurden rasiert?

Mitgeteilt von H. Rüdiger, Grünheide

Eine harte Nuß

Ermittle alle Paare (x, y) ganzer Zahlen x und y , welche der Gleichung

$$2\sqrt{x} + \sqrt{2y} = \sqrt{32}$$

genügen!

Hinweis: Sicher werdet ihr die Paare $(0, 16)$ und $(8, 0)$ schnell als Lösungen erkennen. Entscheidend aber ist, daß ihr alle Lösungspaare findet und die Vollständigkeit der Lösungsmenge auch nachweist.

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

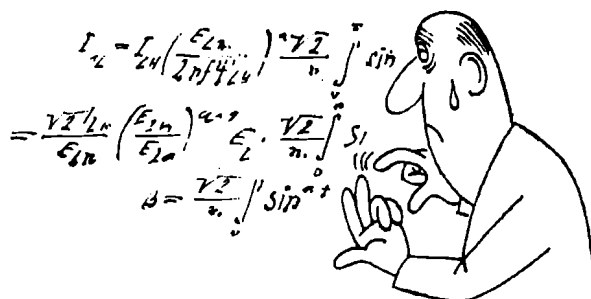
Wo die Mathematik auch in der Freizeit viel Freude macht:

Bei der Gründung des *alpha*-Clubs der OS Vitzsburg vor drei Jahren waren es nur wenige Jungen und Mädchen. Heute besuchen den *alpha*-Club etwa 30 Schüler, die aus allen sechs Ortsteilen des Einzugsbe-

reichs der Schule kommen. Sie gehen in die 5. bis 8. Klasse, treffen sich in ihren Altersstufen wöchentlich. Der Club nimmt eifrig am *alpha*-Wettbewerb teil (223 Lösungen wurden 1982/83 eingesandt). Drei Schüler erwarben in diesem Jahr das *alpha*-Abzeichen in Gold. Initiator und Leiter des Clubs: Mathematikfachlehrer K. Bauer.



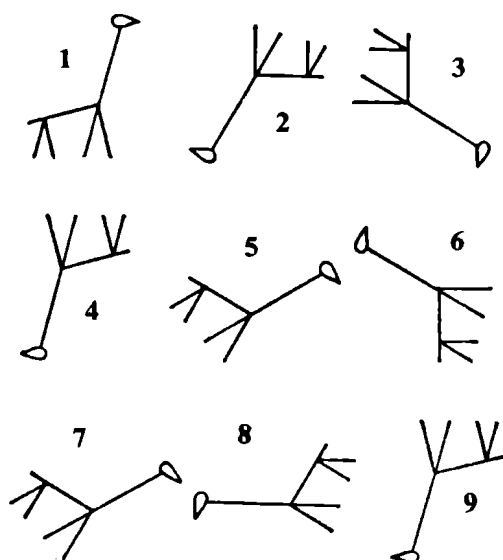
In freien Stunden · alpha-heiter



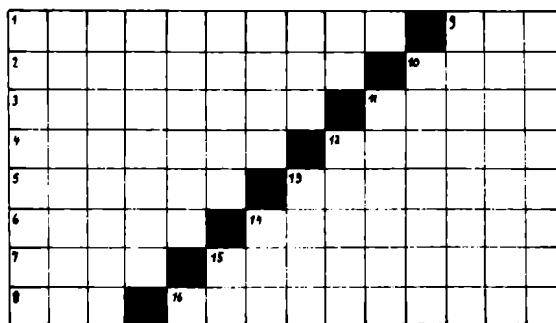
Augentraining

Unter den von 1 bis 9 bezeichneten Figuren gibt es eine, die nach den Regeln der Logik nicht hineingeht. Welche ist das?

Aus: Füles, Budapest



Begriffsumschreibungen: 1. konvexer Körper, 2. mit Mehrfarbenproblemen zusammenhängender Begriff, 3. Grundbegriff der Analysis, 4. bei Dreiecken auftretender Kreis, 5. zahlentheoretischer Begriff, 6. Bestandteil eines Polynoms, 7. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829), 8. mathematisches Grenzwertsymbol, 9. Kurzzeichen für „modulo“, 10. deutscher Rechenmeister (um 1492 bis 1559), 11. Polyeder-
teil, 12. Teil eines Bruches, 13. Zerlegung geometrischer Objekte, 14. schwedischer Mathematiker (1866 bis 1927), 15. Mitbegründer der algorithmischen Sprachen, 16. Teil der Kreisperipherie.



Dr. R. Mildner, KMU Leipzig

Kryptarithmetik

Setze für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern ein!

LEONHARD
— 12325551
EULER

RIND
PFERD
+ ZIEGE
TIERE

Schüler Andreas Suchanow,
Neubrandenburg

Schülerin Claudia Möller,
Rudolstadt

Permutationsrätsel

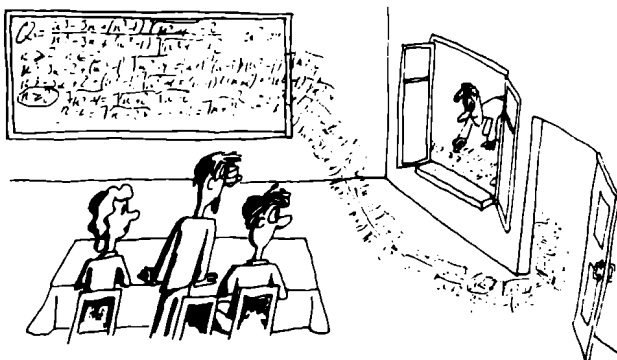
Gesucht sind 16 mathematische Begriffe, die waagrecht in die Rätselfigur einzutragen sind. Ihr findet sie, indem ihr die folgenden Begriffe permutiert (ihr könnt ja zunächst einmal versuchen, ohne Zuhilfenahme der unten angegebenen Begriffsumschreibungen sinnvolle mathematische Begriffe durch Permutation zu finden!):

1. Keksriegel, 2. Tanklader, 3. Leitgarn, 4. Eiskran,
5. Leiter, 6. Ledig, 7. Elba, 8. Ilm, 9. Dom, 10. Reis,
11. Katen, 12. Rennen, 13. Leitung, 14. Helmdorf,
15. Steingold, 16. Korb siegen.

Testament aus Island

Ein Mann hätte in seinem Testament bestimmt, daß seine Frau die Hälfte, seine Kinder $\frac{1}{3}$ und sein Bruder $\frac{1}{12}$ seines Vermögens erben sollten. Den Rest von 1200 Kronen stiftete er einem Altenheim. Wieviel Geld hatte er besessen?

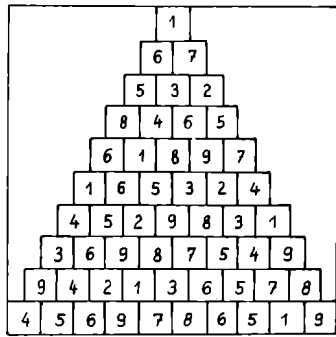
Aus einem isländischen Lehrbuch (Kl. 6)



Zahlenpyramide

Man schreite von der Zahl 1 (an der Spitze der Pyramide) so abwärts, daß man immer eines der beiden Quadrate in der darunterliegenden Reihe betritt, welches das Quadrat berührt, in dem man verweilt.

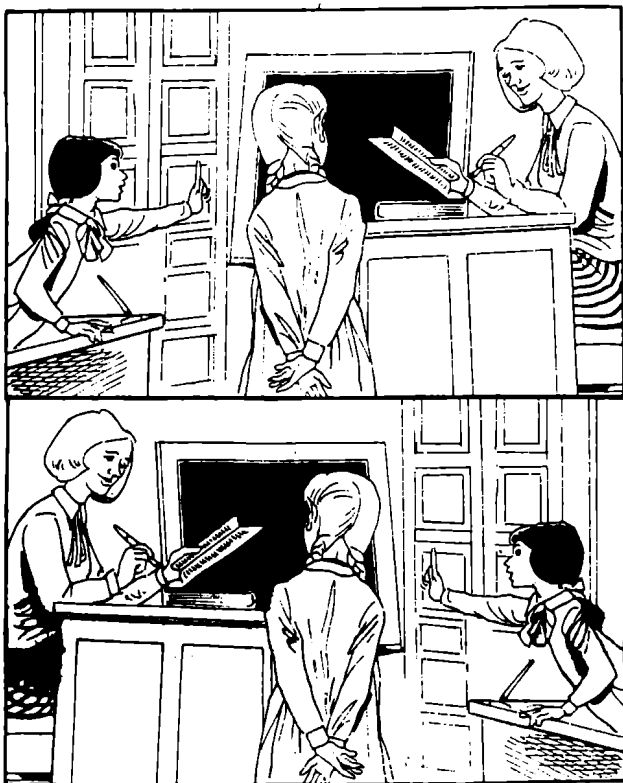
Die Summe der Zahlen der dabei betretenen Quadrate soll möglichst groß werden.



Aus: Urania, Berlin/Leipzig

Aufmerksame Schülerin

Beide Bilder – Original und Spiegelbild – weichen in einem wesentlichen Detail voneinander ab. Wo?



Mit Schere und Köpfchen

Schneide ein 2-mal-5-Rechteck so in 3 Teile, daß diese zu einem Quadrat wieder zusammengesetzt werden können!

Aus „The Mathematics Calendar“, 83 Carleton University, Ottawa/Kanada

Eine hungrige Ziege

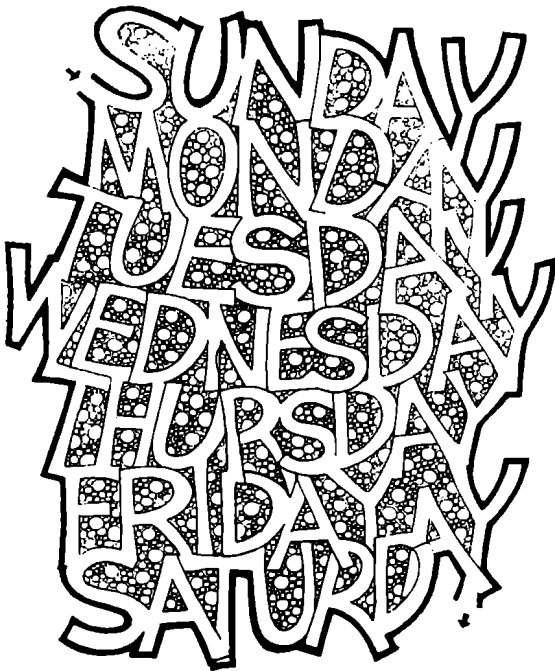
Ein schwieriges Problem: Am Rand einer kreisförmigen Wiese ist an einem Pflock eine Ziege angebunden. Wie lang muß der Strick sein, damit sie die Hälfte der Wiesenfläche abfressen kann? (Die Länge zwischen Halsband und Maul der Ziege bleibt unberücksichtigt.) (Lösung siehe Heft 2/84.)

Aus einer australischen Zeitschrift

Irrgarten

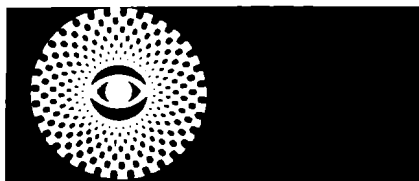
Suche den Weg durch die in englischer Sprache gezeichneten Wochentage von links oben nach rechts unten!

Aus: Füles, Budapest



„Der Trick mit dem Spickzettel auf dem Pullover ist Klasse!“

Aus: Wochenpost, Berlin, Theo Immisch



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 1: Fräulein Steinmann
macht uns neugierig

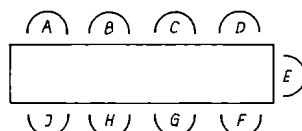
Sie ist schon Klasse, unser Fräulein Steinmann, die Leiterin unseres Mathematikzirkels. Sie knackt nicht nur spielend die härtesten Olympiadenüsse, sondern sie denkt sich auch selbst viele lustige Knobelaufgaben für uns aus. In der vergangenen Woche hat sie uns bewiesen, daß es keine *allergrößte* Primzahl gibt; d. h., es muß unendlich viele solcher Zahlen geben, obwohl Primzahlen immer dünner gesät sind, je weiter wir die Folge der natürlichen Zahlen ablaufen. Und wir neun Zirkelteilnehmer haben alles verstanden, obwohl Fräulein Steinmann noch gar keine richtige Lehrerin ist, sondern eine Studentin im fünften Semester (jedes „Studentenschuljahr“ besteht aus zwei Semestern, da kann man sich ausrechnen, daß Fräulein Steinmann noch allerhand lernen muß – dabei kann sie schon fast alles).

An unserem letzten Zirkelnachmittag stellte uns Fräulein Steinmann eine ganze Menge Fragen, weil sie uns – wie so oft – neugierig machen wollte. Sie fragte uns, ob wir gern im *Lotto* gewinnen würden. Wenn man alle Möglichkeiten, einen Tipschein auszufüllen, nutzen würde, so wäre doch sicher ein *Fünfer* dabei, dazu kämen noch *Vierer* und *Dreier*. Ob sich das Geschäft lohnt?

Wir wollten natürlich gern Bescheid wissen, doch Fräulein Steinmann stellte bereits die nächste Frage: „Wieso kommt man eigentlich beim Morsealphabet mit zwei Zeichen aus, obwohl es doch so viele Wörter – noch dazu in verschiedenartigen Sprachen – gibt?“ Das hätten wir auch gern gewußt, doch Fräulein Steinmann warf bereits das nächste Problem auf, sie meinte: „Wenn ich euch neun nicht so gut kennen würde, hätte ich große Schwierigkeiten, denn ihr setzt euch an jedem Zirkelnachmittag in einer anderen Anordnung an unseren großen Tisch. Wir haben 20 Zirkelnachmittage im Jahr. Ob ihr wohl alle Sitzordnungen durchprobiert hättet, bis ihr in der 10. Klasse seid?“

Diese schien uns eine leichte Frage zu sein, und wir wollten schon mit dem Vertauschen unserer Plätze beginnen, doch Fräulein Steinmann meinte, die Unruhe würde zu groß, und wenn wir nicht systematisch vorgehen, würden wir das Problem nie lösen.

Also blieben wir sitzen und gingen systematisch vor:



Angenommen, wir wären nur zwei Zirkelteilnehmer, nämlich A und B, dann gäbe es nur die beiden Anordnungen AB und BA.

„Jetzt seid ihr drei“, meinte Fräulein Steinmann. Es dauerte etwas länger, doch dann hatten wir die sechs Möglichkeiten gefunden. Dabei ist es gleichgültig, ob die drei Kinder an einem Tisch oder auf einer langen Bank sitzen. Die Anordnungen lauten:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Bei vier Zirkelteilnehmern wurde es schon schwieriger. Es gab ein reiches Angebot an Lösungen. Kerstin hatte 18 Möglichkeiten gefunden, Corinna 17, Gunter 20 und Oliver sogar 23.

„Ihr müßt systematisch vorgehen“, wiederholte Fräulein Steinmann. In diesem Moment hatte Gunter eine Idee:

„Von den vier Schülern A, B, C und D kann jeder so oft auf Platz 1 sitzen, wie die anderen drei ihre Plätze vertauschen können. Wir wissen aber schon, daß es für drei Personen 6 Möglichkeiten der Anordnung gibt. Also gibt es für vier Schüler $4 \cdot 6 = 24$ Anordnungsmöglichkeiten.“

Und Oliver ergänzte: „Und dabei tritt keine Anordnung mehr als einmal auf und keine wird vergessen.“

Fräulein Steinmann lächelte: „Ihr habt das Problem so gut wie gelöst.“

So ganz sicher waren wir uns noch nicht, doch daß es bei 5 Schülern genau $5 \cdot 24 = 120$ Sitzanordnungen geben muß, leuchtete uns schnell ein, denn jeder der fünf Schüler blieb so oft auf dem ersten Platz sitzen, wie die anderen vier ihre Plätze tauschen konnten, und das waren ja 24 Möglichkeiten. Und bei neun Schülern? Das war eine kühne Frage!

Uta überlegte: „Jeder der neun Schüler kann so oft an erster Stelle stehen, wie die anderen ihre Plätze vertauschen können, also neun mal ...“ Jetzt merkten wir, daß uns ein Zwischenergebnis fehlte.

„Schrittweise vorgehen“, machte uns Fräulein Steinmann Mut.

Wir begannen von vorn. Dabei half uns Fräulein Steinmann, indem sie sagte: „Richtig Mathematik treiben kann man erst dann, wenn man eine zweckmäßige Symbolik gefunden hat. Nennt einmal die Anzahl der Anordnungen von zwei Elementen P_2 , die von drei Elementen P_3 und so fort, und schreibt auf, was ihr schon wißt!“

Wir schrieben: $P_2 = 2$, $P_3 = 3 \cdot P_2 = 6$,

$P_4 = 4 \cdot P_3 = 24$, $P_5 = 5 \cdot P_4 = 120$.

Nun konnte es weitergehen: $P_6 = 6 \cdot P_5 = 620$,

$P_7 = 7 \cdot P_6 = 4340$, $P_8 = 8 \cdot P_7 = 34720$,

$P_9 = 9 \cdot P_8 = 312480$.

„Geschafft“, jubelten wir.

Und da wir uns schnell überlegen konnten, daß wir unser Fräulein Steinmann höchstens noch 100mal sehen würden, konnte sie sicher nicht alle unsere Sitzordnungen bewundern.

Unsere Zirkelleiterin freute sich über unseren Eifer, sagte jedoch, daß nun „die Mathematik erst richtig losginge“. Sie ging an die Tafel und schrieb: $P_n =$

Wir wußten sofort, daß nun die Anzahl der möglichen Sitzordnungen von n Schülern, also einer *beliebigen* Anzahl von Schülern, gesucht war.

Frank ergänzte: $P_n = n \cdot P_{n-1}$

Doch bei der Begründung mußten wir ihm helfen: Von den n Personen kann *jede* so oft an erster Stelle sitzen, wie die anderen ihre Anordnung verändern können, und das ist gerade P_{n-1} mal der Fall.

Wir waren stolz, eine Formel gefunden zu haben, doch Fräulein Steinmann schmunzelte: „Und wieviel voneinander verschiedene Anordnungen kann man in einer Schulklasse mit 25 Schülern finden?“

Wir schrieben es auf: $P_{25} = 25 \cdot P_{24}$.

Doch damit waren wir am Ende unseres Lateins.

Natürlich können wir uns schrittweise „Zwischenergebnisse“ verschaffen, doch dieses ständige Zurückgreifen scheint uns eine sehr umständliche Methode zu sein.

Oliver fiel beim Betrachten des Tafelbildes auf, daß man die Anordnungszahlen ja auch noch anders schreiben könne:

$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2$

$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$

$P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$P_6 = 6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Fräulein Steinmann lobte den pffiffigen Oliver, und da wußten wir, daß er eine gute Idee gehabt hatte.

Eigentlich war uns allen klar, daß es so weitergehen müsse, und Fräulein Steinmann bestätigte unsere Vermutung.

$P_7 = 7 \cdot P_6 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$P_8 = 8 \cdot P_7 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Dann wurde es schwierig: $P_n = n \cdot P_{n-1} = ?$

$P_9 = 9 \cdot P_8 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Das erste Problem bestand darin, die entdeckte Gesetzmäßigkeit zu *formulieren*. Fräulein Steinmann erklärte uns, daß man durch die Schreibweise $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2$ unmißverständlich ausdrücken würde, daß das Produkt aller natürlichen Zahlen von 2 bis n gebildet werden soll.

Das zweite Problem war ernsterer Natur. Woher wußten wir eigentlich, daß unsere für die (ersten acht) natürlichen Zahlen von 2 bis 9 gefundene Gesetzmäßigkeit für jede beliebige natürliche Zahl gilt, also z. B. auch für

eine Million? Kerstin und Utta meinten, dies sei doch ganz klar, das Bilden der Gleichungen für $P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, \dots$ ließe sich ja auf die gleiche Weise fortsetzen. Es gäbe auch keinen Grund, daß dies einmal nicht möglich wäre. Ganz wohl war uns bei der Sache aber doch nicht. Wieder griff Fräulein Steinmann helfend ein:

Man darf niemals aus der Untersuchung von nur *einigen Beispielen* auf eine *allgemeine Gesetzmäßigkeit* schließen. In unserem Falle allerdings ist

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2$$

tatsächlich für alle natürlichen Zahlen eine wahre Aussage. Nur bewiesen hätten wir dies eben noch nicht.

Nun baten wir Fräulein Steinmann, uns doch den Beweis zu verraten, doch sie lächelte nur und vertröstete uns auf später. Doch ich bin mir ganz sicher, sie würde den Beweis schon schaffen, nur wir sind wahrscheinlich noch ein bißchen zu klein. „Wenn in all unseren Gleichungen noch der Faktor 1 stünde, würden sie noch schöner aussehen“, meinte Frank. Wir bestätigten dies. Unser Fräulein Steinmann hatte uns schon oft gezeigt, daß Mathematik und Schönheit durchaus miteinander vereinbar sind.

„Für den Ausdruck $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ schreibt man kurz $n!$ und sagt dazu n Fakultät“, also können wir auch $P_n = n!$ angeben“, erklärte uns Fräulein Steinmann und forderte uns auf, solche Fakultäten zu berechnen:

$$4! = 24, \quad 9! = 312480,$$

$$15! = 1307674368000$$

Nun durften wir noch etwas aufschreiben, was man lernen kann, aber nicht zu verstehen braucht, z. B., daß jede solche Anordnung „Permutation“ heißt.

Also gibt es $n!$ Permutationen von n Elementen.

Fräulein Steinmann meinte, das Lotto-Problem und das Morse-Problem würden wir erst in den nächsten Zirkelnachmittagen lösen können, doch sie wolle uns noch eine Aufgabe zum Knobeln geben:

Bei der Friedensfahrt haben sich sieben Fahrer vom Feld abgesetzt und sind nicht mehr einzuholen. Unter ihnen befinden sich zwei Fahrer aus der DDR. Wieviel voneinander verschiedene Möglichkeiten des Einlaufs auf den ersten sieben Plätzen gibt es? Bei wieviel dieser Einläufe steht mindestens ein, höchstens ein bzw. genau ein Fahrer aus der DDR auf dem Siegertreppchen für die ersten drei? Auf dem Heimweg diskutierten wir noch lange über Permutationen und Fakultäten, und alle freuten sich schon ein bißchen auf den nächsten Zirkel, die einen auf die Lösung des Lotto-Problems, die anderen auf die Lösung des Morse-Problems und die meisten auf Fräulein Steinmann.

P. Göthner

Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel

„Der gewöhnliche Zauberwürfel mit seinen drei Segmenten längs jeder Kante ist die natürlichste Form dieser Sorte von Puzzles, da jedem Bestandteil des Würfels, d. h. den Ecken, Kanten und Flächen, jeweils ein Segment entspricht.“ So *Ernö Rubik* bei seinem Besuch in Berlin im Juni 1983. Dieser „Natürlichkeit“ ist gewiß auch ein Anteil am weltweiten Erfolg des Zauberwürfels zuzuschreiben. Dennoch: es war der – mechanisch allerdings schwieriger zu realisierende – kleinere Bruder des Zauberwürfels, der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel (kurz: der 2^3 ; vgl. Bild 1), an dem Rubik die Idee seines Puzzles zuerst durchdacht hatte. Diesem wollen wir im vorliegenden Beitrag unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Der 2^3 ist offensichtlich ein Spezialfall des 3^3 ; er besitzt nur 8 Eckensegmente (kurz: Ecken); Kanten und Mitten fehlen. Beklebt bei euerm Zauberwürfel alle Teilflächen der Kanten und Mitten mit Leukoplastquadraten, und ihr habt einen 2^3 ! Wer den Zauberwürfel ordnen kann (und das werden die meisten Leser sein), müßte also auch sofort mit dem 2^3 zu recht kommen.

Warum also ein ganzer Artikel über einen Spezialfall von bereits allseits Bekanntem? Erstens brauchen wir – gerade weil der 2^3 so einfach zu lösen ist – nicht viel Zeit zur Darstellung eines Algorithmus, sondern können einige mehr theoretische Probleme ansprechen, so z. B. den sogenannten *Orientierungssatz* beweisen. Zweitens wollen wir zeigen, daß alle drei in der DDR hergestellten Puzzles, das Tetraeder (vgl. *alpha* 3/83), das Oktaeder und der Stern, Spezialfälle des 2^3 sind.

Ein Algorithmus

Zunächst brauchen wir einige Bezeichnungen. Wir denken uns den Würfel ab jetzt stets so gehalten, daß seine Flächen vorn, hinten, oben, unten, rechts und links liegen. Diese Lagebezeichnung ersetzt die Farben. Die Züge notieren wir (dem internationalen Gebrauch folgend) folgendermaßen: für eine Drehung der rechten Fläche um 90° im Uhrzeigersinn (bei Blickrichtung auf die Fläche) schreiben wir R . R' bedeutet Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn, R^2 eine 180° -

Drehung. Analoges gilt für die Drehung der anderen Flächen, wobei jeweils der große Anfangsbuchstabe der Lage der Fläche verwendet wird (Bild 1).

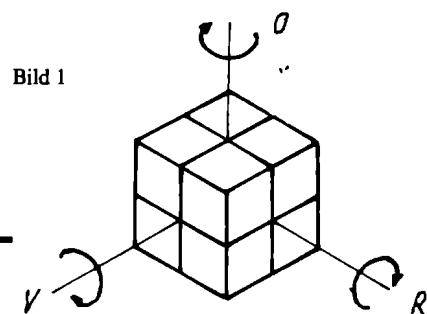


Bild 1

Eine Folge von Zügen, auch Prozeß genannt, wird von links nach rechts abgearbeitet. RO' bedeutet also, erst R , dann O' ausführen. Die Umkehrung einer Zugfolge ergibt sich durch Ausführen der entgegengesetzten Drehungen in umgekehrter Reihenfolge.

Also z. B. $(RO')' = OR'$.

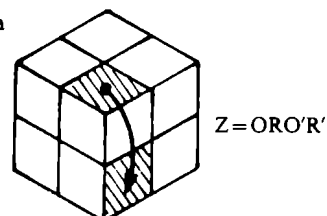
Da es beim 2^3 keine Mittensegmente zur Festlegung der Farbe einer Fläche gibt, können wir eine beliebige Ecke, etwa die hinten links unten liegende, als bereits geordnet ansehen. Sie bestimmt dann zusammen mit den anderen Eckensegmenten eindeutig die herzustellen Färbung.

Bequem ist etagenweises Sortieren:

1. Die untere Etage

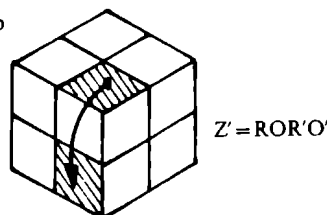
Die restlichen drei Ecken (eine ist ja bereits per definitionem geordnet) werden mit den in Bild 2 angegebenen Varianten des Prozesses $Z = ORO'R'$ einsortiert. Die Potenzschreibweise Z^3 bei Bild 2c bedeutet dreifache Anwendung von Z .

Bild 2a



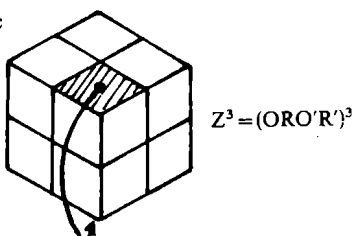
$Z = ORO'R'$

Bild 2b



$Z' = ROR'O'$

Bild 2c



$Z^3 = (ORO'R')^3$

2. Die obere Etage

a) Positionierung: Zunächst bringen wir alle vier Ecken an ihre Plätze. Der Platz einer Ecke ist eindeutig durch ihre beiden nicht in die obere Fläche gehörigen Farbaufkleber bestimmt. Es kommt hierbei noch nicht auf die sogenannte Orientierung der Ecken an, d. h. darauf, daß die Lage der Teilflächen bereits richtig ist.

Bild 3a

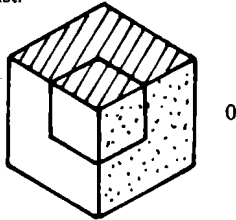


Bild 3b

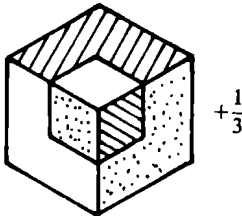


Bild 3c

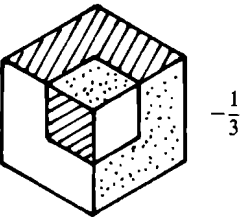
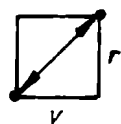
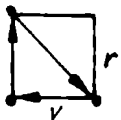


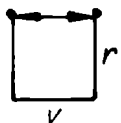
Bild 3 zeigt die drei möglichen Orientierungen einer sich am richtigen Platz (vorn oben rechts) befindlichen Ecke. Nützliche Prozesse zur Positionierung sind folgende (die Piktogramme zeigen schematisch die obere Etage in Draufsicht; hinter den Prozessen in Klammern die Zahl der Züge). (Bild 4)



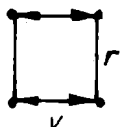
$$= \text{OVROR}'\text{O}'\text{V}' \quad (7)$$



$$= \text{V}'\text{OVR}'\text{VRV}'\text{O}' \quad (8)$$



$$= \text{O}^2\text{VR}'\text{V}'\text{RV}'\text{O}'\text{V} \quad (8)$$



$$= \text{R}'\text{O}'\text{R}'\text{VRORVRO}'\text{R}'\text{V}$$

b) Orientierung: Die nun am richtigen Platz befindlichen Ecken werden mit Hilfe der folgenden Prozesse orientiert ($\pm$ in den Piktogrammen bedeuten Drehung um $\pm \frac{1}{3}$ entsprechend Bild 3).

Dieser Algorithmus ist noch weitgehend verbesserungsfähig. Rechnungen auf modernen Großcomputern (darunter der z. Z. schnellste Rechner CRAY-1) haben ergeben, daß sich jede Stellung des 2^3 mit maximal 11 Zügen ordnen läßt (1 Zug = Drehung einer Fläche um $\pm 90^\circ$ oder 180°). Definieren wir als Abstand zweier Stellungen voneinander die Minimalzahl von Zügen, die von einer Stellung zur anderen führt. Die Tabelle zeigt die mit Computern bestimmte Anzahl der Stellungen N mit einem gegebenen Abstand n vom Grundzustand und den Prozentsatz an der Gesamtzahl N_0 von Stellungen.

Tabelle

Zahl der Stellungen mit gegebenem Abstand vom Grundzustand

n	N	N/N ₀ (%)
0	1	-
1	9	-
2	54	-
3	321	0,01
4	1847	0,05
5	9992	0,27
6	50 136	1,36
7	227 536	6,19
8	870 072	23,68
9	1 887 748	51,38
10	623 800	16,98
11	2 644	0,07

$$N_0 = 3674 160$$

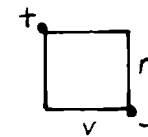
Ein Beispiel für eine der 2644 Stellungen mit Abstand 11 ist $\text{VOVOVR}^2\text{VR}'\text{VR}^2\text{O}^2$.

Der Orientierungssatz

Sicher habt ihr bereits bemerkt, daß nicht jeder beliebige denkbare Orientierungszustand durch reguläre Züge erreichbar ist. Beispielsweise ist es unmöglich, nur genau eine Ecke um $\frac{1}{3}$ zu verdrehen. Definieren wir als Gesamtdrehung die Summe der Drehungen aller 8 Ecken $\left(0, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, so klärt der

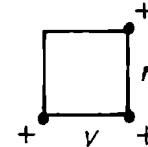
folgende Satz die Lage: ein Orientierungszustand ist genau dann aus dem Grundzustand erreichbar, wenn seine Gesamtdrehung ganzzahlig ist. Zuerst zeigen wir, daß jede aus dem Grundzustand erreichbare Stellung eine ganzzahlige Gesamtdrehung hat. Dazu verallgemeinern wir den Begriff der Orientierung einer Ecke auf den Fall, daß diese sich nicht an ihrem Heimatplatz befindet, in folgender Weise: Wir denken uns die obere und die untere Fläche des Würfels schwarz, die anderen Flächen weiß eingefärbt. Die gleiche Färbung denken wir uns fest im Raum angeordnet. Für jede Ecke läßt sich nun an ihrem jeweiligen Platz eine Orientierung zuordnen, indem die Lage ihrer schwarzen Teilfläche mit der im Raum festen schwarzen

Fläche des Würfels verglichen wird. D. h., für die in der oberen Etage befindlichen Ecken ist die obere Fläche des Würfels Vergleichsfläche, für die Ecken der unteren Etage die untere Würfelfläche. Für die vorn oben rechts befindliche Ecke ist dieser Vergleich in Bild 3 gezeigt. (Vergleichsfläche gestrichelt)

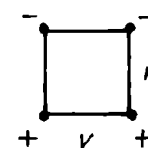


(Bild 5)

$$= (\text{VL}'\text{U}'\text{LV}'\text{O}')^2 \quad (12)$$



$$= \text{O}^2\text{R}'\text{O}'\text{ROR}'\text{OR} \quad (8)$$



$$= \text{V}(\text{ROR}'\text{O}')^2\text{V}' \quad (10)$$

Was passiert nun mit der Gesamtdrehung, wenn wir die einzelnen Züge auf den Grundzustand anwenden? O und U ändern offensichtlich keine Orientierung, da alle schwarzen Teilflächen der Ecken oben oder unten bleiben. Das gleiche gilt für die 180° -Drehungen R^2 , L^2 , V^2 und H^2 . Stellvertretend für eine der vier verbleibenden 90° -Drehungen stellen wir die Wirkung des Zuges R fest (Bild 6).

Bild 6a

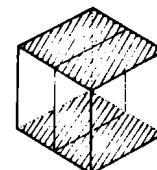
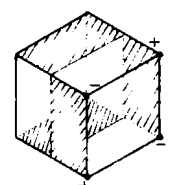


Bild 6b



Betrachten wir z. B. die in Bild 6b (also nach Ausführen von R) vorn oben rechts liegende Ecke. Ihre schwarze Teilfläche liegt vorn. Sie ist laut Definition links herum, also um $-\frac{1}{3}$ gedreht. Eine analoge Betrachtung liefert für die anderen Ecken der rechten Fläche die in Bild 6b durch $\pm$ angegebenen Drehungen: zwei Ecken sind links herum gedreht, zwei andere rechts herum. Wir halten fest, daß sich die Gesamtdrehung nicht geändert hat. Das gleiche gilt auch für die Züge L, V und H. Jede aus dem Grundzustand mit einem Zug erreichbare Stellung hat also die gleiche Gesamtdrehung wie dieser, nämlich Null. Durch Induktionsschluß nach der Zahl der Züge folgt das gleiche für jede erreichbare Stellung. Bedenken wir noch, daß die Gesamtdrehung nur bis auf ganzzahlige Summanden eindeutig definiert ist, da wir uns ja eine beliebige Anzahl unsichtbarer vollständiger Drehungen einzelner Ecken $\left(\text{um } \frac{3}{3}\right)$ zur Gesamt-

dreher hinzuaddiert denken können, so haben wir den ersten Teil des Satzes bewiesen. Der Beweis der Umkehrung, daß also jeder Zustand mit ganzzahliger Gesamtdrehung erreichbar ist, läßt sich mit Hilfe der angegebenen Prozesse leicht führen und sei euch als Übungsaufgabe gelassen. Der Orientierungssatz läßt sich noch etwas anders formulieren: Es lassen sich 7 Ecken stets willkürlich orientieren, die Orientierung der 8. Ecke ist dann eindeutig bestimmt.

Zahl der Stellungen

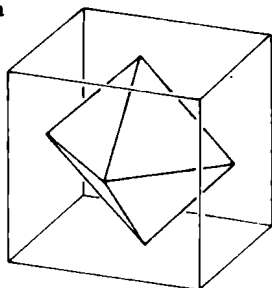
Denken wir uns eine Ecke als bereits geordnet (dies können wir stets durch Drehen des Würfels als Ganzes erreichen), so können wir die verbleibenden 7 Ecken noch auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$ Arten miteinander vertauschen. Für jede dieser Positionierungen lassen sich noch die Orientierungen von 6 Ecken frei verändern (Orientierungssatz!), was einen Faktor 3^6 liefert. Insgesamt gibt es also $N_0 = 7! \cdot 3^6 = 3674160$ Stellungen.

Verwandte des 2^3

Nun wollen wir uns den interessanten Verwandtschaftsbeziehungen zwischen dem 2^3 -Würfel und den 3 neuen DDR-Puzzles zuwenden. Wir gehen vom 2^3 aus und „deduzieren“ die anderen Puzzles.

Bild 7a zeigt eine unter dem Namen Dualität bekannte Verwandtschaft zwischen Würfel und Oktaeder. Jedem Flächenmittelpunkt des Würfels entspricht hierbei eine Ecke des Oktaeders und umgekehrt. Die Kanten beider Körper entsprechen einander. Nun kommt der Trick: Wir übertragen die Schnittebenen des 2^3 -Zauberwürfels auf das Oktaeder, welches damit auch *magische* Eigenschaften erhält. Wie sollen wir das neue Puzzle färben? Jede der 8 Flächen mit einer Farbe zu belegen, ist uninteressant. Im Herstellerbetrieb, in Pfaffschwende, hat man sich entschlossen, die Färbung des 2^3 -Würfels direkt auf das Oktaeder zu übertragen und in die Ecken jeder Fläche einen kleinen runden Farbtupfer zu kleben. Das – strukturell mit dem 2^3 -Würfel vollkommen identische – Puzzle wurde als Schlüsselanhänger ausgebildet (Preis: 12,50 M) und hat leider für Handhabung unbequem kleine Abmessungen (Kantenlänge 3,3 cm).

Bild 7a



Das nächste Puzzle entsteht aus dem Oktaeder, wenn wir, wie in Bild 7b gezeigt, auf vier der acht Flächen kleine tetraederförmige Hütchen aufsetzen: es ist das bereits in *alpha* 3/83 vorgestellte Tetraeder, wenn jede der vier Flächen mit einer Farbe belegt wird. Übrigens ist das Tetraeder-Puzzle so wie in Bild 7b gezeigt in einer würfelförmigen Schachtel verpackt.

Bild 7b

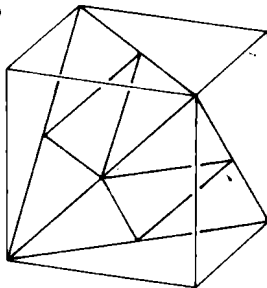
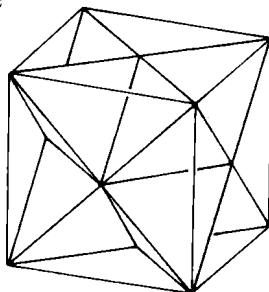


Bild 7c



Nichts ist naheliegender, als auch noch die restlichen vier Flächen mit Hütchen zu versehen. Dann entsteht der in Bild 7c gezeigte Stern (Preis: 15,- M). Er ist mit vier Farben in folgender Weise belegt. Jede der vier Spitzen des Tetraeders (d. h. die im vorigen Schritt aufgesetzten vier Hütchen) trägt eine Farbe. Jeweils die gleiche Farbe erhalten auch die drei direkt benachbarten Teilflächen. Die Färbungsvorschrift läßt sich noch etwas anders formulieren: gegeben sei ein wie üblich mit vier Farben belegtes Tetraeder. Wir *zaubern* daraus gedanklich einen Stern, indem wir die vier Flächenstücke (Dreiecke) zu Hütchen *herausziehen*, wobei ihre Färbung beibehalten wird.

Hieraus wird auch sofort klar, daß Stern und Tetraeder strukturell identisch sind. Beide haben 136080 Stellungen. Das Tetraeder ist sicher das interessantere Puzzle, da es erstens – im Gegensatz zum Stern – seine Form ändert und zweitens seine Drehebene sehr geschickt *verbirgt*.

Faszinierend finde ich, daß trotz der Einsicht der prinzipiellen Identität zum reinen Eckenproblem des sattsam bekannten Zauberwürfels sowohl der 2^3 als auch die drei DDR-Puzzles bei der praktischen Lösung ihre eigenen Schwierigkeiten und Reize entwickeln.

W. Hintze

Lösungen



Lösungen zu: Adam Ries

▲ 1 ▲ Gesamtmenge = m also:

$$\frac{1}{7}m + \frac{1}{4}m + 17 = m = \frac{11}{28}m + 17$$

$$\frac{17}{28}m = 17$$

also $m = 28$ fl.

▲ 2 ▲ Die Beträge seien a und b !

also:

$$a + 1 = b - 1 \quad \text{folgt } a = b - 2 \quad (1)$$

$$b + 1 = 2(a - 1) \quad \text{folgt } b = 2a - 3 \quad (2)$$

mit (2) in (1):

$$a = 2a - 3 - 2 = 2a - 5; \text{ folgt } a = 5 \text{ Pf, } b = 7 \text{ Pf.}$$

▲ 3 ▲ Die einzelnen Geldbeträge seien:

a, b, c also:

$$a + \frac{1}{2}(b + c) = 12 \text{ fl.}; 2a + b + c = 24$$

$$b + \frac{1}{3}(a + c) = 12 \text{ fl.}; 3b + a + c = 36$$

$$c + \frac{1}{4}(a + b) = 12 \text{ fl.}; 4c + a + b = 48$$

$$a + b + 4c = 48 \quad a + 3b + c = 36$$

$$a + 3b + c = 36 \text{ (subtrah.) } 2a + b + c = 24$$

$$-2b + 3c = 12 \quad \text{folgt:}$$

$$10b + 2c = 96 \quad 2a + 6b + 2c = 72$$

$$-10b + 15c = 60 \quad 2a + b + c = 24$$

$$-17c = 156 \quad 5b + c = 48$$

$$c = \frac{156}{17} \text{ fl. entspr.: } a = \frac{60}{17} \text{ fl.}$$

$$b = \frac{132}{17} \text{ fl.}$$

Lösung zu:

Begeisterte Schachfreunde

15 Schachmeister, 3 Meisteranwärter und 2 Schachspieler der Leistungsklasse 1 ließen sich rasieren. (Verständlich, daß der schachbegeisterte Friseur das Schild anderntags wieder entfernte. 15 Schachmeister – das konnte natürlich nur einem Moskauer Friseur passieren!)

Lösungen zu: Mathematik-Mosaik

▲ 1 ▲ a) Die Summe ist stets 10, also gehört an Stelle des Fragezeichens eine 1, denn $7 + 2 + 1 = 10$.

$$b) (2 + 8) : 5 = 2 \quad c) 2 \cdot 9 \cdot 10 : 10 = 18$$

▲ 2 ▲ a) Außer Nr. 4 haben alle Figuren eine Symmetrieachse.

b) Nr. 4 gehört nicht hinein.

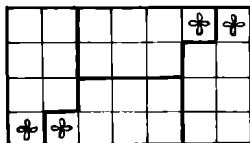
c) Nr. 4 gehört nicht hinein.

▲3▲ Zwei Radien geben wir, die anderen ergeben sich dann entsprechend;
 $6+2+7+6=21$; $7+6+6+2=21$ usw.

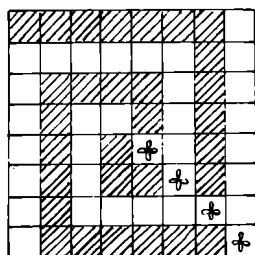
▲4▲ $2+6-3+4-5+8=12$;
 $9+8+1-3-5+2=12$;
 $8-6-1+7+9-5=12$;
 $3-2-1+4+5+3=12$;
 $7+9+8-4-3-5=12$.

▲5▲

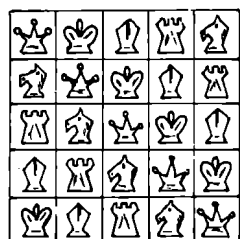
a)



b)



▲6▲



▲7▲ Figur 3 muß an Stelle des Fragezeichens stehen.

▲8▲ 6 Katzen bilden das Gleichgewicht mit dem Knaben.

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ An der Tafel stehen einige von Null verschiedene Zahlen, wobei jede von ihnen gleich der halben Summe der übrigen ist. Wieviel Zahlen wurden angeschrieben?

Lösung: Die Zahlen an der Tafel seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $n \geq 3$.
 Es gilt dann

$$2a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$2a_2 = a_1 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \text{ und somit}$$

$$2(a_1 + \dots + a_n) = (n-1)(a_1 + \dots + a_n) \text{ bzw.}$$

$$(n-3)(a_1 + \dots + a_n) = 0.$$

Daraus folgt $n=3$ oder $a_1 + \dots + a_n = 0$.
 Für $n > 3$ erhalten wir aus der Bedingung $a_1 + \dots + a_n = 0$ und dem System (*) $a_1 = \dots = a_n = 0$, was der Aufgabenstellung widerspricht. Für $n=3$ hat das System (*) eine Lösung, in der die 0 nicht auftritt (z. B. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$).

▲2▲ Es sind sieben Mädchen, und jeden Tag gehen einige von ihnen spazieren. Die gleiche Gruppe Mädchen darf nicht an mehr als an einem Tage spazierengehen. An wieviel Tagen können die Mädchen spazierengehen?

Lösung: $(\frac{1}{1}) + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{7}) = 127 = 2^7 - 1$
 Die Mädchen können an 127 Tagen spazierengehen.

▲3▲ Der Benzintank in Vaters Wagen hat ein Fassungsvermögen von 32,5 l. Dieser Wagen verbraucht 8 l Benzin auf 100 km. Vater hat seinen Tank vor der Abfahrt voll gefüllt, und wir haben eine Fahrt von 400 km unternommen. Wieviel Benzin verbleibt im Tank, wenn man weiß, daß Vater während der Reise 14 l nachgefüllt hat?

Lösung: Auf der Fahrt wurden $\frac{400 \text{ km} \cdot 8 \text{ l}}{100 \text{ km}} = 32 \text{ l}$ Benzin verbraucht. Im Benzintank sind dann noch $32,5 \text{ l} - 32 \text{ l} + 14 \text{ l} = 14,5 \text{ l}$.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Augentraining

Figur 8 ist Spiegelbild der anderen.

Kryptarithmetik

$$12345678 - 12315551 = 20127.$$

$$8395 + 21685 + 43606 = 73686.$$

Permutationsrätsel

1. Kreiskegel, 2. Landkarte, 3. Integral, 4. Ankreis, 5. Teiler, 6. Glied, 7. Abel, 8. lim, 9. mod, 10. Ries, 11. Kante, 12. Nenner, 13. Teilung, 14. Fredholm, 15. Goldstine, 16. Kreisbogen.
 Rätselfigur (versteckte Begriffe)

Testament

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 1 - \frac{6}{12} - \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$= 1200 \text{ Kronen.}$$

Sein Vermögen betrug also $12 \cdot 1200 \text{ Kronen}$

$$= 14400 \text{ Kronen.}$$

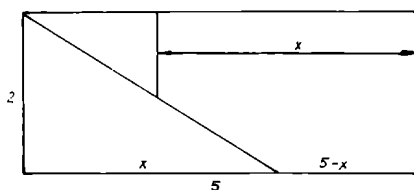
Zahlenpyramide

$$1 + 7 + 3 + 6 + 8 + 5 + 9 + 7 + 6 + 8 = 60.$$

Aufmerksame Schülerin

Der Rock der Lehrerin ist auf dem oberen Bild gestreift, unten kariert.

Mit Schere und Köpfchen



Hungrige Ziege Lösung siehe Heft 2/84.

Irrgarten



Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe – In einem Wirtshause

▲1▲ Bezeichnet m die Anzahl der Männer, f die Anzahl der Frauen, so gilt $m+f=21$ und $5m+3f=81$. Multipliziert man die erste Gleichung mit 3 und subtrahiert danach beide Gleichungen voneinander, so folgt $2m=18$. Somit ist $m=9$, woraus sich $f=12$ ergibt.

▲2▲ (Lösung aus Eulers Vollständiger Anleitung zur Algebra)

Es sei die Zahl der Männer $=p$, der Frauen $=q$, und der Kinder $=r$, so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$\text{I. } p + q + r = 30,$$

$$\text{II. } 3p + 2q + r = 50,$$

aus welchen die drei Buchstaben p, q und r in ganzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p+q$ kleiner sein als 30. Dieser Wert in der zweiten für r geschrieben, gibt $2p+q+30=50$, also $q=20-2p$ und $p+q=20-p$, welches offenbar kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entstehen:

Zahl der Männer

$$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;$$

Zahl der Frauen

$$q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0.$$

Zahl der Kinder

$$r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

Läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 Auflösungen übrig.

Lösungen zu: Labyrinth-Probleme

Heft 5/83

▲1▲ Bild 7: Tarry- und Trémaux-Weg für das Labyrinth im Garten von Hampton Court (Abbruch bei Erreichen des Ausgangs)

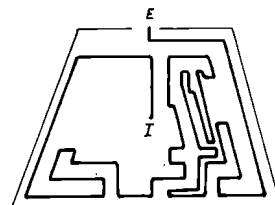
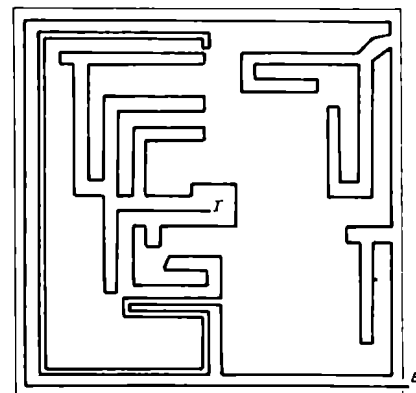
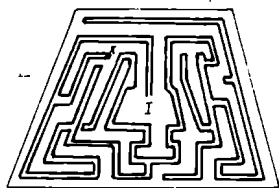


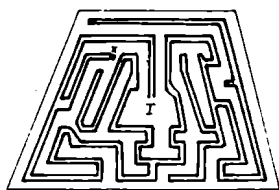
Bild 8: Tarry- und Trémaux-Weg im Irrgarten von Altjeßnitz (Abbruch bei Erreichen des Ausgangs)



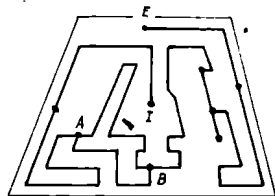
▲2▲ Bild 7: a) Tarry-Weg im Labyrinth des Gartens von Hampton Court bei geschlossenem Ausgang. Der Punkt x wird zuletzt erreicht; hier ist also der Speck abzulegen.



b) Trémaux-Weg im selben Labyrinth; er unterscheidet sich vom Tarry-Weg, der Speck ist aber an der gleichen Stelle abzulegen.
c) Bei offener Außentür würde die Maus das Labyrinth verlassen, ohne den Speck gefunden zu haben.



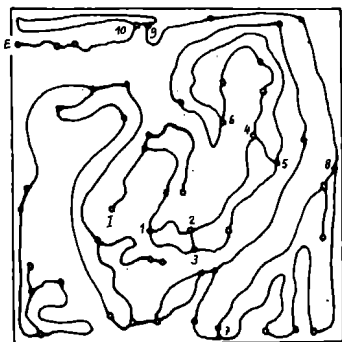
▲3▲ a) Labyrinth im Garten von Hampton Court – Darstellung des Zusammenhangs zwischen I und E.



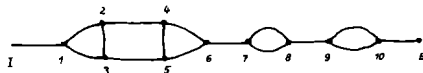
Vereinfacht – Es gibt genau 2 Wandererrouten von I nach E der verlangten Art.



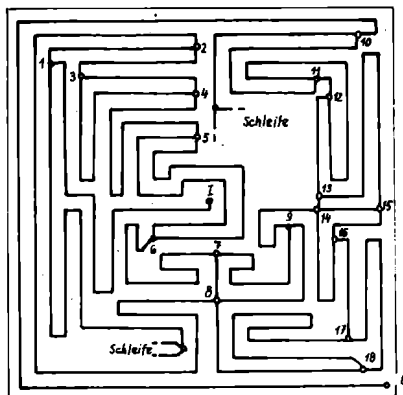
b) Labyrinth von Bild 3 – Darstellung des Zusammenhangs zwischen I und E.



Vereinfacht – Es gibt genau $8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Wandererrouten der verlangten Art von I nach E.



c) Irrgarten von Altjeßnitz – Darstellung des Zusammenhangs zwischen I und E.



Vereinfacht – Anzahl der Wandererrouten der verlangten Art:

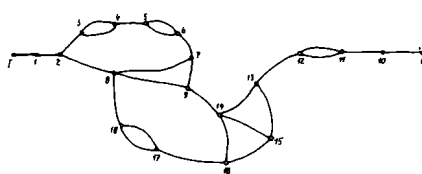
– von I bis zur Kante 9–14: $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 = 10$. Anzahl der möglichen Fortsetzungen bis E: $3 \cdot 2 = 6$.

– Von I bis zur Kante 17–16: $(2 \cdot 2 \cdot 2 + 1) = 18$

Anzahl der möglichen Fortsetzungen bis E: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Gesamtzahl der Wandererrouten der verlangten Art von I nach E:

$$10 \cdot 6 + 18 \cdot 8 = 60 + 144 = 204.$$



Offener Schritt im Beweis von Seite 73/75, Heft 4/83:

Es sei K_0 eine Kante, die nicht zweimal durchlaufen wurde. Da der vorgegebene Graph zusammenhängend ist, kann man vom einem Knotenpunkt aus, in den diese Kante mündet, den Startpunkt erreichen, indem man eine endliche Folge $K_1, K_2, \dots, K_n$ von Kanten durchläuft.

In der Kantenfolge $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ betrachten wir nun die letzte Kante K_i , die von unserem Tarry-Weg nicht zweimal durchlaufen wurde. Da K_n in den Startpunkt mündet, ist $i < n$. Die Kante K_{i+1} wurde von dem Tarry-Weg zweimal durchlaufen, die in den gleichen Knotenpunkt mündende Kante K_i aber nicht.

Lösungen zu:

Aus der Geschichte der Längenmaße
Heft 6/83

- ▲1▲ a) Baden: 3 Zoll = 9,0 cm
b) Preußen: 3 Zoll = 7,8 cm
c) Sachsen: 3 Zoll = 7,2 cm

▲2▲

- a) Bayern: 25 Ellen = 2075 cm = 20,75 m
b) Preußen: 30 Ellen = 2010 cm = 20,10 m
c) Sachsen: 35 Ellen = 1995 cm = 19,95 m

▲3▲

- a) Baden: 12 Fuß = 360 cm = 3,60 m
b) Bayern: 12 Fuß = 348 cm = 3,48 m
c) Preußen: 12 Fuß = 372 cm = 3,72 m
d) Sachsen: 12 Fuß = 336 cm = 3,36 m

- ▲4▲ a) Baden: 49,80 m = 83 Ellen
b) Bayern: 49,80 m = 60 Ellen

▲5▲

- a) 20 Ellen mindestens 1200 cm = 12,00 m
b) 20 Ellen höchstens 1660 cm = 16,60 m

- ▲6▲ a) Baden: $A = 9000 \text{ m}^2$
b) Sachsen: $A = 18490 \text{ m}^2$

- ▲7▲ Preußen: 30 Meilen = 225 km
Sachsen: 25 Meilen = 226,5 km

▲10▲

- a) 40000 km; b) 10000 km;
c) 111 km; d) 1070 km; e) 1,85 km.

Lösungen zu: Aufgaben aus
einem alten chinesischen Lehrbuch
Heft 6/83

$$\text{▲1▲ } \frac{(7 \cdot 18 + 5) \cdot (11 \cdot 23 + 6)}{7 \cdot 11} = 440 \frac{7}{11}$$

$$440 \frac{7}{11} \text{ Pu} = 1 \text{ Mou } 200 \frac{7}{11} \text{ Pu}$$

Heute berechnet man die Fläche mit Hilfe der Gleichung $A = ab$.

$$\text{▲2▲ } \frac{78 \frac{1}{2} \cdot 13 \frac{7}{9} + 13 \frac{7}{9} \cdot 13 \frac{7}{9}}{2} = 635 \frac{56}{81}$$

$$635 \frac{56}{81} \text{ Pu} = 2 \text{ Mou } 155 \frac{56}{81} \text{ Pu}$$

Hier ist die Fläche des Kreissegments durch die eines Trapezes nur angenähert bestimmt. Eigentlich gilt die angegebene Näherungsgleichung $A = \frac{sp + p^2}{2}$ nur für den Halbkreis.

Die exakte Berechnung erfolgt heute mit Hilfe der Gleichung

$$A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s(r-h)}{2} \text{ mit } r = \frac{h^2 + s^2}{2h}$$

oder

$$A = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi \phi}{180^\circ} - \sin \phi \right).$$

$$\text{▲3▲ } \frac{78 \cdot 63}{50} = \frac{4914}{50} = 98 \frac{7}{25}$$

$$98 \frac{7}{25} \text{ Shêng} = 9 \text{ Tou } 8 \frac{7}{25} \text{ Shêng}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe einer Proportion, also z. B. $50 : 63 = 7,8 : x$.

$$\text{▲4▲ } \frac{10 \cdot 720}{61} = 118 \frac{2}{61}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe einer Proportion, also z. B. $61 : 10 = 720 : x$.

$$\text{▲5▲ } 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

$$\frac{5 \cdot 5}{15} = 1 \frac{2}{3}; \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{15} = 1 \frac{1}{3}; \frac{3 \cdot 5}{15} = 1; \frac{2 \cdot 5}{15} = \frac{2}{3}; \frac{1 \cdot 5}{15} = \frac{1}{3}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der fortlaufenden Proportion, z. B.

$$5 : 4 : 3 : 2 : 1 = a : b : c : d : e, \\ 15 : 5 = 5 : a, \\ 15 : 5 = 4 : b \text{ usw.}$$

$$\text{▲6▲ } \frac{1}{50} + \frac{1}{30} + \frac{1}{75} = \frac{1}{15}$$

$$9 \cdot \frac{1}{50} = \frac{9}{50}; 9 \cdot \frac{1}{30} = \frac{9}{30}; 9 \cdot \frac{1}{75} = \frac{9}{75}$$

$$\frac{9}{50} : \frac{1}{15} = 2 \frac{7}{10}; \frac{9}{30} : \frac{1}{15} = 4 \frac{5}{10}; \frac{9}{75} : \frac{1}{15} = 1 \frac{8}{10}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der fortlaufenden Proportion, z. B.

$$\frac{1}{50} : \frac{1}{30} : \frac{1}{75} = a : b : c,$$

$$\frac{1}{15} : 9 = \frac{1}{50} : a,$$

$$\frac{1}{15} : 9 = \frac{1}{30} : b \text{ usw.}$$

$$\blacktriangle 7 \blacktriangle \frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3}$$

$$6 + 3 + 2 = 11$$

$$\frac{240 \cdot 6}{11} = 130 \frac{10}{11}$$

Heute berechnet man die Breite des rechteckigen Feldes aus der Gleichung $A = ab$.

$$\blacktriangle 8 \blacktriangle \sqrt{1518 \frac{3}{4}} : 12 = 135$$

Die numerische Lösung beim Ziehen der Quadratwurzel, wie sie damals durchgeführt wurde, ist sehr umfangreich. Wir haben darauf verzichtet, weil sie den Umfang dieses Artikels wesentlich überschreiten würde. Sie ähnelt unserem heutigen numerischen Lösungsverfahren.

Heute berechnet man den Kreisumfang genauer aus der Gleichung $A = \frac{u^2}{4\pi}$.

$$\blacktriangle 9 \blacktriangle \frac{8+20}{2} \cdot 4 \cdot 127 = 7112$$

$$7112 : 444 = 16 \frac{2}{111}$$

Heute berechnet man das Volumen des Dammes ähnlich nach der Gleichung für ein trapezförmiges Prisma,

$$\text{also } V = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot l.$$

$$\blacktriangle 10 \blacktriangle \frac{12^2 \cdot 2}{36} = 8000;$$

$$8000 : 2 \frac{7}{10} = 2962 \frac{26}{27}$$

Heute berechnet man das Volumen nach der Gleichung

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \text{ mit } r = \frac{u}{2\pi}, \text{ also } V = \frac{u^2 \cdot h}{12\pi}.$$

$$\blacktriangle 11 \blacktriangle A: \frac{10000}{8} = 1250 \text{ bzw. } 125$$

$$B: \frac{9500}{10} = 950 \text{ bzw. } 95$$

$$C: \frac{12350}{13} = 950 \text{ bzw. } 95$$

$$D: \frac{12200}{20} = 610 \text{ bzw. } 61;$$

$1250 + 950 + 950 + 610 = 3760$ bzw. 376 Fuhren:

$$A: \frac{10000 \cdot 125}{376} \approx 3324$$

$$B: \frac{10000 \cdot 95}{376} \approx 2527$$

$$C: \frac{10000 \cdot 95}{376} \approx 2527$$

$$D: \frac{10000 \cdot 61}{376} \approx 1622$$

Menge (Masse) des Getreides

$$A: 3324 \cdot 25 = 83100; B: 2527 \cdot 25 = 63175;$$

$$C: 2527 \cdot 25 = 63175; D: 1622 \cdot 25 = 40550.$$

Heute berechnet man die Zahl der Fuhren mit der fortlaufenden Proportion, z. B.

$$1250 : 950 : 950 : 610 = a : b : c : d,$$

$$3760 : 10000 = 1250 : a,$$

$$3760 : 10000 = 950 : b \text{ usw.}$$

$$\blacktriangle 12 \blacktriangle 3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{74}{15}$$

$$1 : \frac{74}{15} = \frac{15}{74}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{1} + \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 1,$$

wenn x die Zahl der Tage ist, in denen alle Kanäle gleichzeitig den Teich füllen würden.

$$\blacktriangle 13 \blacktriangle \frac{190}{7} \times \frac{270}{9}$$

$$\frac{190}{7} \cdot 30 + \frac{270}{9} \cdot 330$$

$$\frac{51300 + 623700}{63} = \frac{675000}{63}$$

$$\frac{270}{9} - \frac{190}{7} = \frac{180}{63}$$

$$\frac{675000}{63} : \frac{180}{63} = 3750 \text{ (Preis)}$$

$$360 : \frac{180}{63} = 126 \text{ (Familien)}$$

Heute könnte man folgendermaßen rechnen: Wenn jede Familie den Beitrag a_1 beisteuert, ergibt sich ein Überschuß von f_1 (absolut).

Wenn jede Familie den Beitrag a_2 beisteuert, ergibt sich ein Fehlbetrag von f_2 (absolut).

Der richtige Beitrag a ist nun

$$af_1 + af_2 = f_1a_2 + f_2a_1,$$

$$\text{also } a = \frac{f_1a_2 + f_2a_1}{f_1 + f_2}.$$

Ist x die Zahl der Familien, dann ist

$$a_1 \cdot x - f_1 = a_2x + f_2,$$

$$\text{also } x = \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}.$$

Der Preis y ist dann $y = a \cdot x$,

$$\text{also } y = \frac{f_1a_2 + f_2a_1}{a_1 - a_2}.$$

$$\blacktriangle 14 \blacktriangle \frac{2}{1\frac{1}{2}} \times \frac{3}{1\frac{3}{4}}$$

$$\left(2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = 2 \frac{6}{13} \approx 2,4615.$$

Die Binse wächst am 1. Tag 30 Zoll, am

2. Tag 15 Zoll und am 3. Tag $7\frac{1}{2}$ Zoll, also

$$\frac{7\frac{1}{2} \cdot 6}{13} = 3 \frac{6}{13}.$$

Die gesamte Länge beträgt dann

$$30 + 15 + 3 \frac{6}{13} = 48 \frac{6}{13}.$$

Der Ansatz gilt aber nur für lineare Probleme. Hier liegt also eine Näherungslösung vor, da für den letzten Tag linear interpoliert wurde.

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe geometrischer Reihen.

$$a_1 = a, \frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1}; s_2 = a_2 \frac{q_2^n - 1}{q_2 - 1}$$

$$\text{mit } a_1 = 3, a_2 = 1, q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = 2.$$

Da $s_1 = s_2$ gilt, ergibt sich für

$$n = \frac{\log 6}{\log 2} \approx 2,59.$$

$\blacktriangle 15 \blacktriangle$ Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 5x + 6y = 16 \\ 4x + y = 5y + x \end{cases}$$

wird zu

$$\begin{cases} 5x + 6y = 16 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{und daraus die Matrix } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{sie wird zu } \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -38 & 6 \\ -48 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{So ist } y = \frac{48}{38} = 1 \frac{5}{19}; x + 5 \cdot 1 \frac{5}{19} = 8$$

$$x = 1 \frac{13}{19}$$

Heute löst man dieses Gleichungssystem durch Elimination.

Lösung zu:

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Araki

Heft 6/83

$$\text{Antwort: } \frac{2(2n-3)!}{n!(n-2)!}$$

Beweis: Es sei $f(n)$ die gesamte Anzahl von verschiedenen Möglichkeiten, um das Produkt von n Zahlen zu bilden. Zuerst leiten wir eine rekursive Relation für $f(n)$ her. Man setze $f(1) = 1$ und betrachte $f(n)$ für $n \geq 2$. Es sei $g(n, m)$ die gesamte Anzahl von verschiedenen Arten, um das Produkt von n Zahlen zu bilden, wobei die letzte Produktrechnung zwischen einem Produkt der ersten m Zahlen und einem Produkt der letzten $n-m$ Zahlen gebildet wird. Dann ist

$$f(n) = \sum_{m=1}^{n-1} g(n, m),$$

$$g(n, m) = f(m)f(n-m).$$

Diese rekursive Gleichung hat nur eine Lösung für $n \geq 2$ unter der oben erwähnten Bedingung $f(1) = 1$, weil $f(n)$, $n \geq 2$, durch $f(s)$, $1 \leq s \leq n-1$ bestimmt ist.

Wir stellen jetzt eine Lösung dieser Gleichung vor, die die gewünschte Antwort wegen der Eindeutigkeit der Lösung gibt.

$$\text{Es sei } F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).$$

Diese Funktion hat die Entwicklung der

$$\text{Potenzreihe } F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \text{ für } |x| < \frac{1}{4}.$$

Da $F(x)$ der Gleichung

$$F(x) = F(x)^2 + x$$

genügt, erfüllen die Koeffizienten F_n für $n \geq 2$

$$F_n = \sum_{m=1}^{n-1} F_m F_{n-m}$$

Weiterhin ist $F_1 = 1$. Daher ist $f(n) = F_n$ eine Lösung der rekursiven Aufgabe.

Der Koeffizient F_n für $n \geq 2$ kann durch die Binomialreihe erhalten werden:

$$\begin{aligned} F_n &= -\frac{1}{2}(-1)^n 4^n \left| \frac{1}{2} \right| \\ &= (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \dots - \frac{2n-3}{n!} \\ &= 2^{n-1} (2n-3) (2n-5) \dots \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2 \cdot (2n-3)!}{n! (n-2)!} \end{aligned}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/83

Ma 5 ■ 2350 Angenommen, der Obstgarten sei x Meter breit, also $2 \cdot x$ Meter lang. Für den halben Umfang gilt dann $x + 2 \cdot x = 210 : 2$, $3 \cdot x = 105$, $x = 35$. Der Flächeninhalt des Obstgartens beträgt somit $A = x \cdot 2 \cdot x = 35 \text{ m} \cdot 70 \text{ m} = 2450 \text{ m}^2$.

Ma 5 ■ 2351 Da Anja 19 Buntstifte besitzt, hat Bernd $19 - 2 = 17$ Buntstifte, Christine $17 + 5 = 22$, Dieter $17 - 1 = 16$, Frank $16 - 11 = 5$, Ernst $22 + 2 = 24$ Buntstifte. Diese 6 Schüler besitzen zusammen $19 + 17 + 22 + 16 + 5 + 24 = 103$ Buntstifte. Die übrigen 30 Schüler besitzen dann zusammen $703 - 103 = 600$ Buntstifte. Jeder von ihnen hat $600 : 30 = 20$ Buntstifte.

Ma 5 ■ 2352 Angenommen, an der Seerundfahrt nahmen x Männer, also $7 \cdot x$ Frauen und Kinder teil; dann gilt $x + 7x = 120$, $8x = 120$, $x = 15$. An der Seerundfahrt nahmen 15 Männer, also 105 Frauen und Kinder teil. Angenommen, es waren y Frauen, also $4 \cdot y$ Kinder; dann gilt $y + 4y = 105$, $5y = 105$, $y = 21$. Es nahmen an der Seerundfahrt noch 21 Frauen und 84 Kinder teil.

Ma 5 ■ 2353 Aus $*1 \cdot 3 = *2 \cdot 5$ folgt für den ersten Faktor $*15$; aus $*15 \cdot 2 = *3 \cdot *$ folgt für das Produkt $*30$; somit lautet das zweite Teilprodukt $3 \cdot 20$.

Aus $*15 \cdot * = 3 \cdot 20$ folgt $*15 \cdot 8 = 3 \cdot 20$, da nur $8 \cdot 15 = 120$ auf 20 endet. Wegen $8 \cdot 4 = 32$ und $8 \cdot 5 = 40$ kann $*15$ nur 415 und somit $3 \cdot 20$ nur 3320 sein. Die vollständige Lösung lautet deshalb

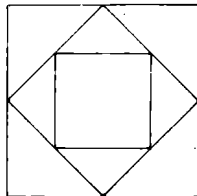
$$\begin{array}{r} 415 \cdot 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2354 Das kleinere Gefäß ist auch dann um 50 g schwerer als das größere, wenn man in das kleinere Gefäß nur 200 g Zucker, in das größere keinen Zucker füllt. Aus

$200 \text{ g} - 50 \text{ g} = 150 \text{ g}$ folgt, daß das kleinere Gefäß leer 150 g, das größere leer 300 g wiegt.

Ma 5 ■ 2355 a) Zeichnet man 3 Quadrate, so erhält man $4 \cdot (3 - 1) = 8$ Dreiecke.

b) Zeichnet man n Quadrate, so erhält man $4 \cdot (n - 1)$ Dreiecke. Nun gilt $4 \cdot (n - 1) = 176$, also $n - 1 = 44$ und somit $n = 45$. Es sind also 45 Quadrate gezeichnet worden.



Ma 6 ■ 2356 Es sind sechs Möglichkeiten zu untersuchen:

$$1 \cdot 2 \cdot 12 = 24 \text{ und } 1 + 2 + 12 = 15$$

(keine Primzahl),

$$1 \cdot 3 \cdot 8 = 24 \text{ und } 1 + 3 + 8 = 12$$

(keine Primzahl),

$$1 \cdot 4 \cdot 6 = 24 \text{ und } 1 + 4 + 6 = 11$$

(Primzahl),

$$2 \cdot 2 \cdot 6 = 24 \text{ und } 2 + 2 + 6 = 10$$

(keine Primzahl),

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ und } 2 + 3 + 4 = 9$$

(keine Primzahl).

Da nur die Summe 11 Primzahl ist, sind Inas Geschwister 1, 4 und 6 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2357 Es sei n die Anzahl der Stühle, die unbesetzt blieben; dann ist $12 \cdot n$ gleich der Anzahl aller vorhandenen Stühle. Nun gilt $2 \cdot 90 < 12 \cdot n < 2 \cdot 100$, $180 < 12 \cdot n < 200$, $15 < n < 16 \frac{2}{3}$, also $n = 16$. Es waren $12 \cdot n$,

also $12 \cdot 16 = 192$ Stühle vorhanden. Deshalb

waren $\frac{11}{12} \cdot 192 = 176$ Teilnehmer zum Kongreß angereist.

Ma 6 ■ 2358 24 ist die kleinste von Null verschiedene Zahl, die die 3, 6 und 8 als Teiler hat. Die nächstgrößere ist 48. Nach der Aufgabenstellung waren 24 Schüler an der Leistungskontrolle beteiligt.

Aus $\frac{1}{8} \cdot 24 = 3$, $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ und $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$ folgt, daß 15 Schüler genau eine, genau zwei oder genau vier Aufgaben nicht gelöst haben. Genau ein Schüler gab die Arbeit fehlerlos ab; also haben genau acht Schüler jeweils genau eine Aufgabe richtig gelöst.

Ma 6 ■ 2359 Wir rechnen

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5};$$

angenommen, Otto hat von seiner Mutter x Mark zum Einkaufen erhalten; dann gilt $\frac{1}{5}x = 10$, also $x = 50$. Otto hat von seiner Mutter 50 M zum Einkaufen erhalten.

Ma 6 ■ 2360 Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 11, 12, 13 und 14 lautet

12012. Wegen $11 - 1 = 12 - 2 = 13 - 3 = 14 - 4 = 10$ ist $12012 - 10 = 12002$ die gesuchte Zahl.

Es gilt

$$11 \cdot 1091 + 1 = 12002,$$

$$12 \cdot 1000 + 2 = 12002,$$

$$13 \cdot 923 + 3 = 12002,$$

$$14 \cdot 857 + 4 = 12002.$$

Ma 7 ■ 2361 Aus $b = \frac{1}{2}(a + c)$ und $5(a + b + c)$

$= abc$ folgt durch Einsetzen

$$5 \cdot \left[a + \frac{1}{2}(a + c) + c \right] = \frac{1}{2} \cdot ac(a + c),$$

$$10 \left(\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}c \right) = ac(a + c),$$

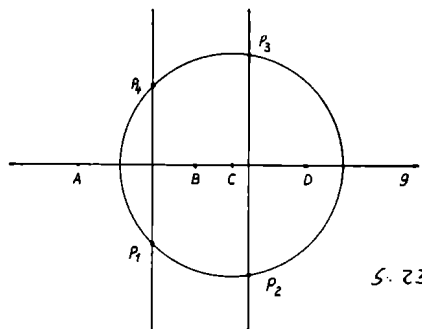
$$15a + 15c = ac(a + c),$$

$$15(a + c) = ac(a + c),$$

$$ac = 15.$$

Wegen $ac = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ und wegen $a < c$ gilt $a = 1$ und $c = 15$ und somit $b = 8$ oder $a = 3$ und $c = 5$ und somit $b = 4$. Es existieren genau zwei Lösungen; sie lauten $a_1 = 1$, $b_1 = 8$, $c_1 = 15$ und $a_2 = 3$, $b_2 = 4$, $c_2 = 5$.

Ma 7 ■ 2362 Man zeichnet zunächst die Gerade g mit den Punkten A, B, C, D . Die Punkte P_i liegen auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AC}$ oder auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{BD}$. Da die Punkte P_i von C einen Abstand von 3 cm haben müssen, liegen sie außerdem auf dem Kreis um C mit der Radiuslänge 3 cm. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 dieses Kreises mit der Mittelsenkrechten zu $\overline{AC}$ oder $\overline{BD}$ erfüllen die geforderten Bedingungen.



Ma 7 ■ 2363 Das Quadrat habe die Seitenlänge c ; dann gilt $4c = 2 \cdot (a + b)$,

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ und somit } A_Q = c^2 = \frac{1}{4} \cdot (a+b)^2.$$

Ma 7 ■ 2364 Die zu ermittelnde dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $(100a + 10b + a) = 101a + 10b$. Ihre Quersumme lautet $2a + b$.

Nun gilt

$$101a + 10b + 2a + b = 500,$$

$$103a + 11b = 500,$$

$$103a = 515 - 11b,$$

$$a = 5 - \frac{11b}{103}.$$

Nur $b = 8$ und somit $a = 4$ erfüllt unter den einschränkenden Bedingungen diese Gleichung. Die gesuchte Zahl lautet 484, und es gilt $484 + 16 = 500$.

Ma 8 ■ 2365 1) Angenommen, n ist eine gerade Zahl. Dann ist n^2 gerade und damit auch $n^2(5+n^2)$.

2) Angenommen, n ist eine ungerade Zahl, dann ist auch n^2 ungerade. $5+n^2$ ist dann eine gerade Zahl und somit auch $n^2(5+n^2)$, w.z.b.w.

Ma 8 ■ 2366 Nach Aufgabenstellung gilt

$$(1) \quad a^2 + b^2 = 176,5$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = 136.$$

Durch Umformung erhalten wir

$$(2') \quad a^2 = 136 + b^2. \text{ Das setzen wir in (1) ein und erhalten}$$

$$(1') \quad 136 + 2b^2 = 176,5;$$

$$b^2 = 20,25.$$

Daraus folgt $a^2 = 156,25$ und weiter

$$a_{1,2} = \pm 12,5 \text{ und } b_{1,2} = \pm 4,5.$$

Die folgenden geordneten Zahlenpaare erfüllen die geforderten Bedingungen:

$$1. (12,5; 4,5) \quad 2. (12,5; -4,5)$$

$$3. (-12,5; 4,5) \quad 4. (-12,5; -4,5).$$

Ma 8 ■ 2367 Es lassen sich 720 verschiedene sechsstellige natürliche Zahlen unter den genannten Bedingungen bilden.

Mit zwei Ziffern kann man 2 verschiedene zweistellige Zahlen bilden, z. B. 13 und 31. Nimmt man eine dritte Ziffer hinzu, so lassen sich 6 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, z. B. 134, 314, 143, 341, 413, 431. Hat man vier verschiedene Ziffern und will damit vierstellige Zahlen bilden, so kann man sich denken, daß die vierte Ziffer bei den dreistelligen Zahlen jeweils an der 1., 2., 3. oder 4. Stelle stehen kann. Somit ergeben sich $4 \cdot 6 = 24$ vierstellige Zahlen. Auf ähnliche Weise gelangt man zu $5 \cdot 24 = 120$ fünfstelligen und zu $6 \cdot 120 = 720$ sechsstelligen Zahlen. Keine einzige der 720 Zahlen ist durch 3 und auch keine ist durch 9 teilbar. Wir brauchen nur die Quersumme $1+3+4+5+7+9=29$ zu betrachten, die ja bei jeder der Zahlen die gleiche ist. 29 ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar, folglich kann auch keine der so gebildeten Zahlen diese Bedingungen erfüllen.

$$\text{Ma 8} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$$

Die Dreiecke ABM , BCM und CAM sind gleichschenkelig, weil AM , BM und CM Radien des Umkreises sind. Folglich gilt

$$\alpha_1 = \beta_2; \beta_1 = \gamma_2 \text{ und } \gamma_1 = \alpha_2.$$

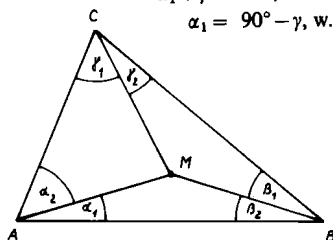
Weiter gilt nach dem Satz über die Innenwinkelgrößen im Dreieck

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma = 180^\circ.$$

$$\text{Daraus folgt } 2\alpha_1 + 2\gamma = 180^\circ;$$

$$\alpha_1 + \gamma = 90^\circ;$$

$$\alpha_1 = 90^\circ - \gamma, \text{ w.z.b.w.}$$



Ma 9 ■ 2369 Nach Aufgabenstellung soll gelten

$$315 = a^2 - b^2 \text{ bzw. } 315 = (a+b)(a-b).$$

Wir setzen (1) $a+b=p$ und

$$(2) \quad a-b=q.$$

Dadurch erhalten wir

$$(1') \quad a = \frac{p+q}{2},$$

$$(2') \quad b = \frac{p-q}{2} \text{ und}$$

$$(3) \quad 315 = pq.$$

Wir stellen nun in einer Tabelle alle Möglichkeiten der Zerlegung von 315 in ein Produkt aus zwei Faktoren zusammen und können dann mit Hilfe der Gleichungen (1') und (2') die den Variablen a und b und damit auch a^2 und b^2 zuzuordnenden Zahlen berechnen. Wie die Tabelle zeigt, gibt es insgesamt sechs Möglichkeiten, die Zahl 315 in die Differenz zweier Quadratzahlen zu zerlegen:

p	q	a	b	a^2	b^2
315	1	158	157	24964	24649
105	3	54	51	2916	2601
63	5	34	29	1156	841
45	7	26	19	676	361
35	9	22	13	484	169
21	15	18	3	324	9

Ma 9 ■ 2370 Jede achtstellige Zahl der angegebenen Darstellungsform läßt sich in die Summe $10000 \cdot \overline{abcd} + \overline{abcd}$ zerlegen und damit in der Form $10001 \cdot \overline{abcd}$ darstellen.

Die Primfaktorenzerlegung der Zahl 10001 lautet $73 \cdot 137$. Diese beiden Zahlen gehen in jeder achtstelligen Zahl $\overline{abcdabcd}$ auf; sie entsprechen den Primzahlen p_5 und p_6 unserer Aufgabenstellung.

$$\text{Es gilt dann weiter } p_5 + p_6 = 73 + 137 = 210.$$

Nach Aufgabenstellung müßte dann 210 das Produkt von vier aufeinanderfolgenden Primzahlen sein, d. h., es gilt:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 210$$

$$\text{und somit } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

Die gesuchten Primzahlen sind:

$$p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7; p_5 = 73; p_6 = 137.$$

Ma 9 ■ 2371 Mit Ilka sind es 25 Personen.

Wenn jeder jedem die Hand gibt (nur sich selbst nicht), dann sind es zunächst $25 \cdot 24$ Händedrucke. Wenn die Person A der Person B die Hand gibt, dann ist das der gleiche Händedruck wie der, wenn Person B der Person A die Hand gibt. Nun sind es also $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ Händedrucke. Da sich die gemeinsam ankommenden Familien nicht untereinander begrüßen, ist folgendes abzuziehen:

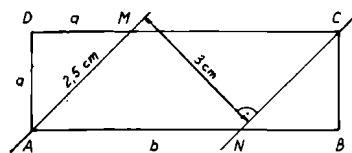
$$\text{Für die fünfköpfige Familie } \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ Händedrucke, für die vierköpfige Familie } \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Händedrucke und für jedes der drei Ehepaare genau einen, also zusammen 3 Händedrucke.

Insgesamt sind also 281 Händedrucke gegeben worden.

Ma 9 ■ 2372 Skizze nicht maßstäblich!

(a bzw. b sind Symbole für Länge bzw. Breite des Rechtecks $ABCD$!)



Die beiden Geraden zerlegen das Rechteck $ABCD$ in die zwei gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke AMD und NBC und in das Parallelogramm $ANCM$.

Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt $A_{ABCD} = 2 \cdot A_{AMD} + A_{ANCM}$,

$$A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2,5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm},$$

$$A_{ABCD} = a^2 + 7,5 \text{ cm}^2.$$

Im rechtwinkligen Dreieck AMD gilt nach dem Satz des Pythagoras $2a^2 = 2,5^2 \text{ cm}^2$; $a^2 = 3,125 \text{ cm}^2$; $a \approx 1,8 \text{ cm}$.

Nun ist

$$A_{ABCD} = 3,125 \text{ cm}^2 + 7,5 \text{ cm}^2;$$

$$A_{ABCD} = 10,625 \text{ cm}^2$$

$$\text{und damit } b \approx \frac{10,625 \text{ cm}^2}{1,8 \text{ cm}}; b \approx 6 \text{ cm}.$$

Das Rechteck $ABCD$ ist etwa 6 cm lang und 1,8 cm breit. (Streckensymbole sind hier als Längensymbole aufzufassen!)

Ma 10/12 ■ 2373 Wir stellen alle Zahlen der Gleichung in einem m -adischen Positionssystem dar und lösen die Gleichung nach m auf:

$$4m + 2 + 2m^2 + 4m + 2 = (m+6)^2,$$

$$2m^2 + 8m + 4 = m^2 + 12m + 36,$$

$$m^2 - 4m - 32 = 0,$$

$$m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+32}$$

$$m_1 = 8,$$

$$m_2 = -4.$$

Da die Basis eines Positionssystems nicht negativ ist, entfällt m_2 . Damit stellt die gegebene Gleichung nur im Achtersystem eine wahre Aussage dar.

$$\text{Probe: } 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1$$

$$= (1 \cdot 8 + 6 \cdot 1)^2,$$

$$32 + 2 + 128 + 32 + 2 = 14^2,$$

$$196 = 196.$$

Die Gleichung ist nun wie folgt darstellbar:

$$(42)_8 + (242)_8 = (16)_8^2.$$

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Leipziger Volkszeitung.

Auf den Spuren von Mathematikern



Leibniz-Denkmal in Leipzig

Die Leipziger Stadtsilhouette wird durch das weithin sichtbare 140 m hohe Universitäts-Hochhaus mitgeprägt. In der Nähe dieser Höhendominante des Stadtzentrums, direkt vor dem sich anschließenden neuen Hörsaalgebäude der Karl-Marx-Universität, befindet sich ein Denkmal für Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716), „Leipzigs größten Sohn“. Das Standbild wurde „erfunden und modelliert von E. J. Hähnel in Dresden 1881 bis 83“, „in Erz gegossen von Ch. Lenz in Nürnberg 1883“, errichtet 1883 (vor 100 Jahren), neu aufgestellt 1978.

Leibniz, der fast das gesamte Wissen seiner Zeit beherrschte, gilt als „der letzte Universalgelehrte“: Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker, Jurist, Geschichts- und Sprachforscher, politischer Schriftsteller. Am 1. 7. 1646 in Leipzig geboren, besuchte er in den Jahren 1753 bis 1761 die Nikolai-Schule, die älteste Leipziger Stadtschule. Mit 15 Jahren bezog er die Universität seiner Vaterstadt, um Philosophie und Jurisprudenz zu studieren. 1666 verließ er Leipzig. Im Jahre 1700 bewirkte er übrigens in Berlin die Gründung der Akademie der Wissenschaften.

Leibniz hat sich lebenslang aus innerem Antrieb mit mathematischen Gedankengängen befaßt. Zu ernsthafter Vertiefung in die Mathematik und zur Begegnung mit führenden Mathematikern seiner Zeit kam es während seines Aufenthalts in Paris (1672 bis 1676). Im Spätherbst 1675 erhielt Leibniz bei seiner Beschäftigung mit infinitesimalen Fragen seine Form der Differential- und Integralrechnung (Calculus). (Unabhängig von Leibniz begründete auch Newton die Infinitesimalrechnung.)

Leibniz konstruierte die erste mechanische Rechenmaschine mit Staffelwalzen.

So wie in Leipzig wird es auch in anderen Orten unserer Republik ein Denkmal oder eine Gedenktafel, einen Grabstein, einen Namen für eine Straße oder einen Platz, einen Namen für eine Schule, ein Institut oder einen Hörsaal, vielleicht auch ein Bild in einem Museum geben, das an einen Mathematiker vergangener Zeiten erinnert.

Gibt es nicht in Annaberg-Buchholz eine Büste, die einen berühmten Rechenmeister zeigt? Führt nicht eine Straße in Potsdam zum Telegrafenberg, die nach einem bedeutenden Physiker (der auch Mathematiker war) bezeichnet ist? Ist auf einem Friedhof in Berlin-Köpenick nicht das Grabmal für einen 1807 in Köpenick bei Berlin verstorbenen Mathematiker und Astronomen aus einer berühmten aus Basel stammenden Mathematiker-Familie zu finden?

Mitarbeiter gesucht

Liebe *Junge Mathematiker!*

Gibt es nicht auch in Eurem Heimatgebiet solche oder andere „Spuren“ von Mathematikern? (Bedenkt dabei bitte: Auch Physiker und Astronomen sind oft in Lehre und Forschung auf dem Gebiet der Mathematik tätig gewesen!)

Schreibt uns bitte darüber!

Unsere Adresse:

Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*

Kennwort: Auf den Spuren von

Mathematikern

7027 Leipzig, Postfach 14

J. Lehmann/H. Pieper

In einem Wirtshause

Die Rechenbücher des deutschen Rechenmeisters Adam Ries wurden lange Zeit hindurch dem Rechenunterricht vieler Schulen zugrunde gelegt. Sie waren nicht in der damals üblichen lateinischen Fachsprache, sondern in deutscher Sprache und überdies allgemeinverständlich geschrieben. Ries stellte darin viele elementare Aufgaben und gab Regeln zu deren Lösung an. In „Adam Risen Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Handthierung“ befinden sich zwei sogenannte „Zechenaufgaben“. Mehrere Gruppen von Personen geben in einem Wirtshause insgesamt eine bestimmte Summe von Geld aus, wobei jede Person einer Gruppe jeweils die gleiche Summe, jedoch Personen unterschiedlicher Gruppen verschiedene Summen für ihre Zeche zu zahlen haben. Gefragt wird nach der Anzahl der Personen jeder Gruppe.

Die erste Aufgabe lautet: „Item 21 Personen, Männer und Frauen, haben vertroncken 81 d. Ein Mann sol geben 5 d und eine Frau 3 d. Nun frag ich wie viel jeglicher in sonderheit gewesen seind.“

Die zweite Aufgabe hat auch Leonhard Euler (mit anderen Zahlen als Ries) wie folgt gestellt:

„30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, geben in einem Wirtshause 50 Taler aus, und zwar zahlt ein Mann 3 Taler, eine Frau 2 Taler und ein Kind 1 Taler. Wieviel Männer, Frauen und Kinder sind es gewesen?“

Die Zechenaufgaben gehen auf schon im 5. Jahrhundert in China in anderer Einkleidung formulierte Probleme zurück, die über die Inder und die Mathematiker der arabischen Kalifate später nach Europa gelangten. Euler hat sie in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* (vgl. *alpha*, Heft 1/1983), 2. Teil, 2. Abschnitt, 2. Kapitel, übersichtlich behandelt.

H. Pieper

Unser Buchtip

WuBing, Hans

Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik

Studienbücherei, Math. f. Lehrer, Bd. 13

365 S., 72 Abb., 1 Tab. Preis: 17,80 M

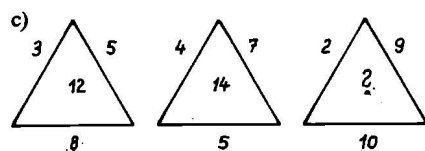
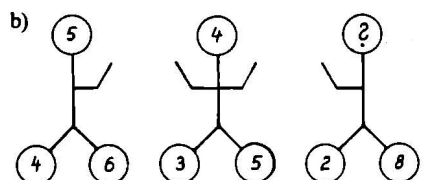
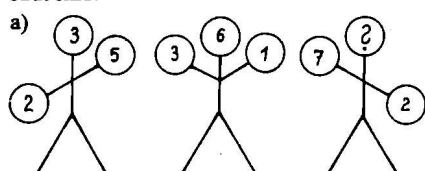
Bestell-Nr. 570 608 2

VEB Deutscher Verlag d. Wissensch. Berlin

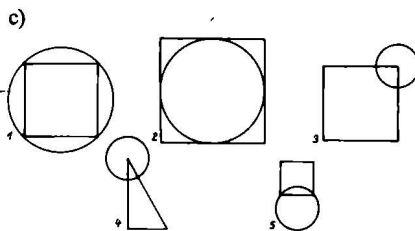
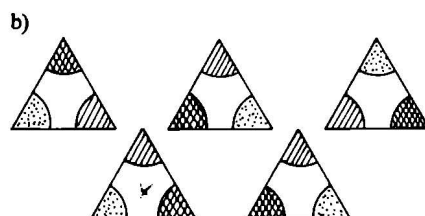
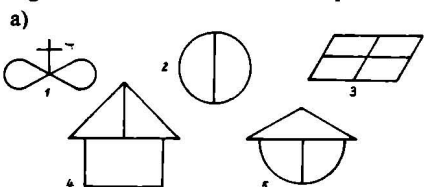
Mathematik-Mosaik

Unser sowjetischer Auslandskorrespondent sandte uns aus Kiew eine mathematische Wandzeitung, Format A0. Sie enthält – beidseitig mehrfarbig bedruckt, 55 unterhaltsame Knobeleyen. Sie wurde in hoher Auflage für Oberschulen gedruckt, insbesondere für die außerschulische Tätigkeit. Für unsere *alpha*-Leser haben wir eine Palette interessanter Probleme zusammengestellt.

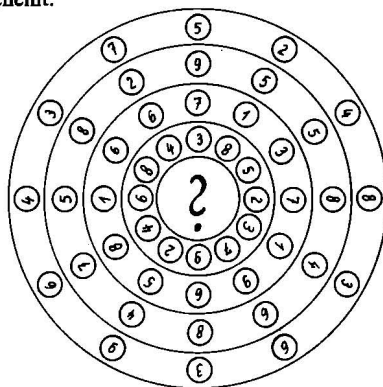
▲1▲ Es ist eine Gesetzmäßigkeit zu finden, nach der die nachfolgenden Figuren aufgebaut sind.



▲2▲ Es ist diejenige Figur zu finden, die logischerweise nicht in das Schema paßt.



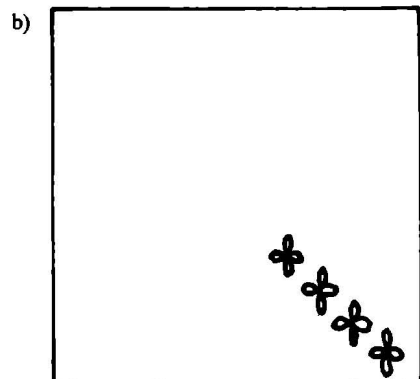
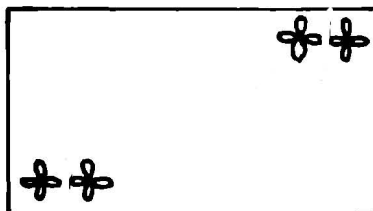
▲3▲ Es sind die Ringe solange zu drehen, bis in allen Radien die gleiche Summe erscheint.



▲4▲ Ersetze die Sternchen (*) durch +-Zeichen oder —Zeichen, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

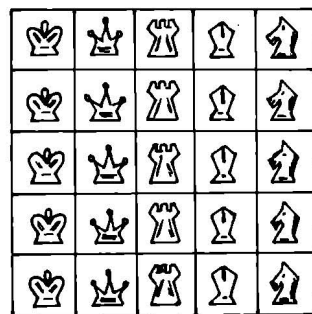
$$\begin{aligned} 2 * 6 * 3 * 4 * 5 * 8 &= 12 \\ 9 * 8 * 1 * 3 * 5 * 2 &= 12 \\ 8 * 6 * 1 * 7 * 9 * 5 &= 12 \\ 3 * 2 * 1 * 4 * 5 * 3 &= 12 \\ 7 * 9 * 8 * 4 * 3 * 5 &= 12 \end{aligned}$$

▲5▲ Jede der beiden Figuren ist in vier kongruente (deckungsgleiche) Teile zu zerlegen. In jedem der Teile muß sich eine Blume befinden.

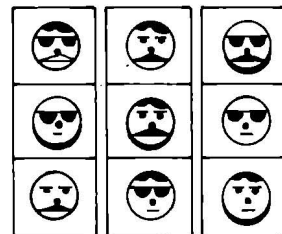
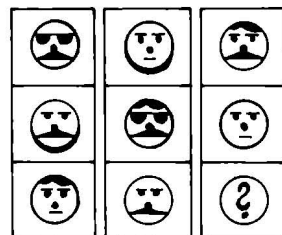


▲6▲ Euler stellte fest, daß es in einem 6×6 -Quadrat nicht möglich ist, die Figuren – in unserem Falle Schachfiguren – so aufzustellen, daß sich in jeder Waagerechten und jeder Senkrechten nur jeweils eine Figur befindet.

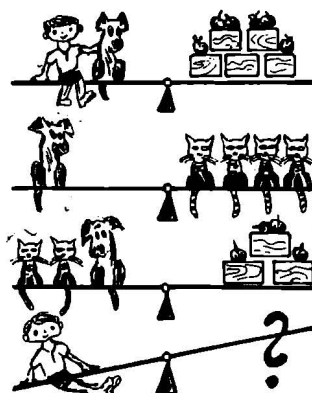
In einem 5×5 -Quadrat (ebenso in einem 3×3 - und 4×4 -Quadrat) ist das möglich. Finde die Lösung!



▲7▲ Welche der Figuren 1 bis 9 gehört logischerweise an Stelle des Fragezeichens?

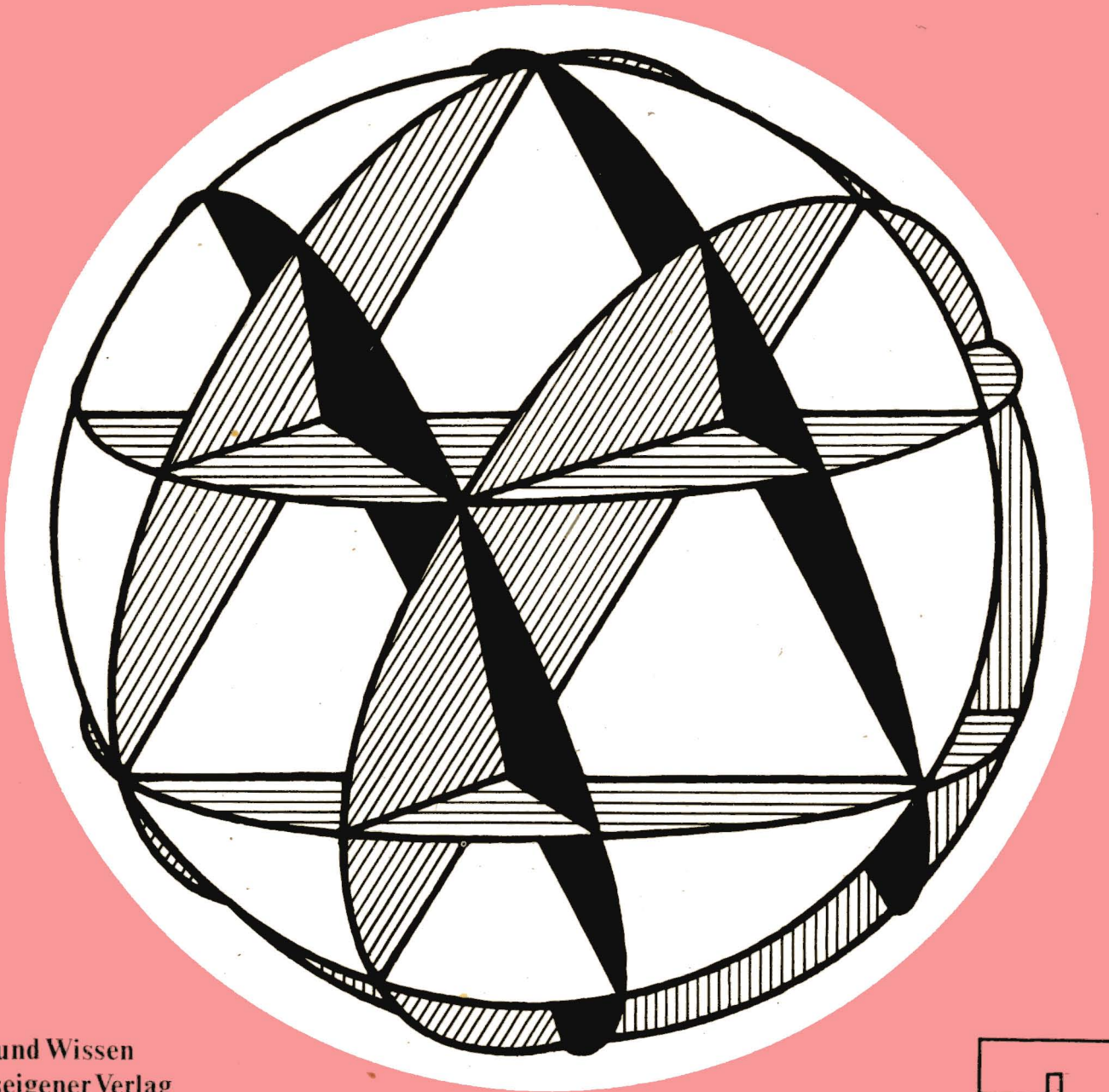


▲8▲ Wie viele Katzen müssen logischerweise an Stelle des Fragezeichens sitzen, damit sie das Gleichgewicht mit dem Knaben herstellen?



Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto, W. Ledermann, Brighton
(S. 26); Graphik: Grüntner, Berlin (S. 28);
Penčík, Praha (S. 31); L. Otto, Leipzig (S. 38);
Lipinski, Warschau (S. 39)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vor-
lage aus der mathematischen Schülerzeit-
schrift *Lapok*, Budapest



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der
ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128

Redaktionsschluß: 23. Dezember 1983

Auslieferungstermin: 22. April 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Algebra – aller Anfang ist leicht [9]*
Dr. P. Göthner/NPT H. Kästner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
 - 26 Eine Aufgabe, zur Verfügung gestellt von Prof. Dr. em. Walter Ledermann, Brighton, Essex [10]
 - 27 Im Straßenverkehr beobachtet – Der Doppler-Effekt [9]
stud. math. M. Weicker, Technische Hochschule *Karl Schorlemmer*, Halle/Merseburg
 - 28 Wie funktioniert das Verkehrsradar? [8]
W. Ausborn, aus: *technikus* 6/82, Berlin
 - 29 *alpha*-Wettbewerb 1982/83 · Abzeichen in Gold [5]
 - 30 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Geometrie hilft der Arithmetik [5]
Dr. E. Quaisser/Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam
 - 31 mathematicus – Aufgaben zur Wiederholung von Grundkenntnissen Teil 1 [5]
Kollektiv der Fachberater Mathematik des Kreises Löbau
 - 32 Teilbarkeitsregeln Teil 2 [6]
Mathematikfachlehrer StR J. Portner (†), Pritzwalk
 - 34 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel · Elementare Kombinatorik Teil 2
 - 35 Unsere Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann, alle Leipzig
 - 36 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
 - 39 Zwei Aufgaben und sieben Lösungen –
Wer mehr weiß und Phantasie hat, kommt rasch zum Ziel Teil 2 [8]
Prof. Dr. W. Jungk, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Wolfgang Ratke*, Köthen
 - 40 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
 - 42 XXIII. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Aufgaben der Kreisolympiade
 - 44 Historische Aufgabe: Der Bruch $355 : 113$ und die Zahl π [8]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR
 - 45 Lösungen [5]
- IV. U.-Seite: Ungarischer Bilderbogen – Unterhaltsame Aufgaben aus „Füles“, Budapest [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Algebra – aller Anfang ist leicht

In der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) ist als Band 107 erschienen: Kästner/Göthner, *Algebra – aller Anfang ist leicht* (Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1983, Bestell-Nr. 666 138 1, Preis: 8,40 M.).

Mathematische Schülerbücherei



KÄSTNER/GÖTHNER

Algebra – aller Anfang ist leicht

+	r	g	w	b
r	r+r	r+g	r+w	r+b
g	g+r	g+g	g+w	g+b
w	w+r	w+g	w+w	w+b
b	b+r	b+g	b+w	b+b

Dieses Büchlein verfolgt das Ziel, den Leser in die Gedankenwelt der *algebraischen Strukturen* und die *strukturelle Denkweise* einzuführen. Viele elementare Fragestellungen und einfache, aus dem Mathematikunterricht geläufige Beispiele decken interessante Analogien und überraschende Zusammenhänge zwischen scheinbar weit auseinanderliegenden Gebieten auf und zeigen die Fruchtbarkeit strukturellen Denkens z. B. beim Ordnen und Systematisieren mathematischer Inhalte. Das Bändchen beginnt mit einem einführenden Kapitel über *Mengen*, dem sich solche über *Relationen*, *Operationen* und *algebraische Strukturen* anschließen. Daß algebraische Hilfsmittel auch einen verhältnismäßig raschen Zugang zu speziellen mathematischen Gebieten gestatten, wird am Beispiel der Matrizen und der Restklassen ganzer Zahlen deutlich: das Rechnen mit diesen

mathematischen Objekten lernt der Leser *nebenher*.

Eine relativ breite, verständliche und lockere Darstellung sowie eine Vielzahl elementarer Beispiele sollen helfen, daß tatsächlich *aller Anfang leicht* ist und das Büchlein bereits von Lesern ab Klassenstufe 9 vollständig verstanden werden kann.

Wir bringen eine Leseprobe aus dem Kapitel 2 *Relationen*; einige dem Leser möglicherweise unbekannte Begriffe und Zeichen sind im Buch an früherer Stelle eingeführt und erläutert.

Leseprobe:

Max und Moritz sind Brüder

2.2. Eigenschaften von Relationen: Dieses Kapitel behandelt Eigenschaften von Relationen, wie z. B. Reflexivität, Symmetrie, Transitivität; es wird gefragt, ob einige dieser Eigenschaften andere nach sich ziehen.

Die Tatsache, daß Max Bruder von Moritz ist, haben wir durch „Max und Moritz sind Brüder“ ausgedrückt. In dieser Formulierung steckt aber bereits eine weitere Information über die Relation „ist Bruder von“. Das erkennt man am besten beim Versuch, von der Aussage „4 ist Teiler von 256“ überzugehen zur Formulierung „4 und 256 sind Teiler“. Letztere kann, je nachdem, welches Verhältnis man zur deutschen Sprache hat, unsinnig oder falsch sein. Der Versuch der Umformulierung muß offenbar deshalb mißglücken, weil es in diesem Beispiel auf die Reihenfolge der Elemente 4 und 256 ankommt, wohingegen im ersten Beispiel die Reihenfolge keine Rolle spielt: Wenn Max Bruder von Moritz ist, so ist Moritz auch Bruder von Max. Relationen mit dieser Eigenschaft heißen *symmetrisch*. Dabei wird die Menge M stillschweigend als nichtleer vorausgesetzt.

Definition 2.3: Eine Relation R in M heißt *symmetrisch* genau dann, wenn für alle $x, y \in M$ für die xRy gilt, auch yRx ist; anders ausgedrückt: mit xRy gilt stets auch yRx .

Beispiele: (1) Die Relation „ist parallel zu“ in der Menge der Geraden einer Ebene ist symmetrisch, denn wenn $g \parallel h$, so auch $h \parallel g$. Also können wir auch sagen, daß die beiden Geraden g und h *zueinander parallel* sind.

(2) Die Relation „läßt bei Division durch 3 denselben Rest“ in der Menge G der ganzen Zahlen ist symmetrisch, denn $a \equiv b \pmod{3}$ bedeutet $a = b + 3g$, g ganz, woraus sofort $b = a + 3(-g)$, also $b \equiv a \pmod{3}$ folgt, denn mit g ist auch $(-g)$ ganz.

(3) Die Relation „ist verliebt in“, betrachtet auf einer genügend großen Menge von Menschen, ist ersichtlich nicht symmetrisch, da xRy nicht stets yRx nach sich zieht; gerade dies ist die Ursache von Liebeskummer.

(4) Die in einer Menge von Aussagen definierte Relation „aus ... folgt“, sprachlich anders formuliert durch „wenn ... so“, die wir im

folgenden stets *Implikation* nennen wollen, ist nicht symmetrisch, was man bereits durch Angabe eines Gegenbeispiels erkennt: Die Aussage „ $ABCD$ ist Quadrat $\rightarrow$ die Diagonalen von $ABCD$ halbieren einander“ ist richtig. Falsch hingegen ist die Umkehrung „Die Diagonalen von $ABCD$ halbieren einander $\rightarrow ABCD$ ist Quadrat“, denn auch im Rechteck halbieren sich die Diagonalen.

Dieses Beispiel lenkt unsere Aufmerksamkeit noch einmal auf jene Stelle in der Definition der Symmetrie, in der es heißt, daß mit xRy stets auch yRx gelten soll. Ist diese Forderung auch nur einmal verletzt, so ist R nicht symmetrisch. Diese Bemerkung ist im Zusammenhang mit der Implikation wichtig, da wir natürlich auch genügend viele Beispiele für zwei bezüglich der Implikation vertauschbare Aussagen hätten finden können, etwa „Die ganze Zahl g ist durch 3 teilbar $\rightarrow$ die Quersumme von g ist durch 3 teilbar“, wovon auch die Umkehrung richtig ist. In diesen Fällen schreibt man statt „ $\rightarrow$ “ den Doppelpfeil „ $\leftrightarrow$ “, den man „ist logisch äquivalent“ oder „genau dann, wenn“, oder „dann und nur dann“ liest. Die logische *Äquivalenz* ist daher eine symmetrische Relation, und wir können – auf obiges Beispiel zurückkommend – sagen: „Die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 ist äquivalent zur Teilbarkeit ihrer Quersumme durch 3.“ Offenbar ist es für die Handhabung eines mathematischen Satzes sehr wichtig zu wissen, ob er die logische Struktur einer Implikation oder einer Äquivalenz hat.

(5) Während sich die Implikation als eine *nicht symmetrische* Relation erwies, d. h., als eine solche, bei der es sowohl Paare (x, y) gibt, für die mit xRy auch yRx gilt, als auch solche, für die wohl xRy , nicht aber yRx erfüllt ist, liefert „ist kleiner als“ ein Beispiel für eine sogenannte *asymmetrische* Relation, bei der nie gleichzeitig xRy und yRx erfüllt sind. Geht man von der Relation „ $<$ “ über zur Relation „ $\leq$ “, so gibt es Elementepaare (x, y) , für die sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ gilt, nämlich genau jene Paare mit $x = y$. Eine Relation R mit der Eigenschaft, daß aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt, heißt *antisymmetrisch*, wofür die Relation „ist Teiler von“ in der Menge N der natürlichen Zahlen ein weiteres Beispiel liefert.

In unseren einführenden Beispielen (Abschnitt 2.1.) kam auch die Formulierung „Abraham Gotthelf, Erich und Herbert haben denselben Familiennamen“ vor, die – das wissen wir nun schon – nur korrekt sein kann, wenn die Relation „hat denselben Familiennamen wie“ symmetrisch ist. Dies ist in der Tat der Fall. Aber da hier mehr als zwei Elementen ein gemeinsames Merkmal zugesprochen wird, spielt noch eine weitere Eigenschaft der Relation eine Rolle. Betrachten wir die ebenfalls symmetrische Relation „ist höchstens 100 km entfernt von“. Obwohl nun die Aussagen „Gotha ist höchstens 100 km entfernt von Erfurt“ und „Erfurt ist höchstens

100 km entfernt von Merseburg“ beide richtig sind, kann man nicht sagen „Erfurt, Götha und Merseburg sind höchstens 100 km voneinander entfernt“, denn die Entfernung Götha – Merseburg ist größer als 100 km. Die hier betrachtete Relation R hat nicht die „Übertragbarkeitseigenschaft“, auch *Transitivität* genannt: Wenn xRy und yRz , so auch xRz .

Definition 2.4: Eine Relation R in M heißt *transitiv* genau dann, wenn für alle $x, y, z \in M$, für die xRy und yRz gilt, auch xRz ist; anders ausgedrückt: xRy und yRz haben stets xRz zur Folge.

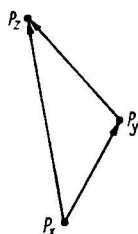
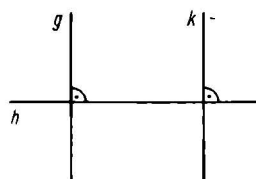
Beispiele: (1) Die Relation „ist kleiner als“ in G ist transitiv, denn aus $x < y$ und $y < z$ folgt sofort $x < z$. Dies ist mithin ein Beispiel für eine asymmetrische, aber transitive Relation.

(2) Die Relation „ist Teiler von“ in N ist transitiv. Gilt nämlich $a | b$ und $b | c$, so gibt es laut Definition der Teilbarkeits-Relation natürliche Zahlen s und t mit $b = sa$ und $c = tb$, woraus $c = t(sa) = (ts)a$ folgt. Da ts als Produkt natürlicher Zahlen selbst natürlich ist, entnimmt man daraus $a | c$. Diese Relation liefert also ein Beispiel für eine antisymmetrische und transitive Relation.

(3) Ein wichtiges Beispiel für eine nicht symmetrische, aber transitive Relation ist die Implikation. Auf der Transitivität dieser Relation beruht ja wesentlich das mathematische Schließen.

(4) Die symmetrische Relation „läßt bei Division durch 3 denselben Rest“ ist auch transitiv: Aus $a \equiv b \pmod{3}$ und $b \equiv c \pmod{3}$, d. h. $a = b + 3g$ und $b = c + 3h$, g, h ganz, folgt $a = (c + 3h) + 3g = c + 3(h + g)$, also $a \equiv c \pmod{3}$, da mit g und h auch $h + g$ eine ganze Zahl ist.

(5) Die Relation „ist senkrecht zu“ in der Menge der Geraden einer Ebene ist symmetrisch, wie man sofort erkennt, aber nicht transitiv (siehe Bild).



(6) Beispiele für Relationen, die weder symmetrisch noch transitiv sind, findet man etwa in der Relation „ist erste Ableitung von“ in der Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen oder in der Relation „ist Onkel von“, ganz zu schweigen von der Relation „ist verliebt in“.

Eine Aufgabe, zur Verfügung gestellt von Prof. Dr. em. Walter Ledermann

Universität Sussex, Brighton,
England

Kein Königsweg nach Cambridge

Es gibt in Großbritannien etwa vierzig Universitäten, an denen man Mathematik studieren kann. Um überhaupt an einer Universität aufgenommen zu werden, muß man die Abschlußprüfung in der Schule mit einer genügend guten Note bestehen. Diese Prüfung wird in zwei Stufen abgehalten. Mit 16 Jahren legen die Schüler eine Prüfung in sechs oder mehr Fächern ab, unter denen sich immer Englisch und meistens auch Mathematik befindet. Dieses Examen heißt „gewöhnliche“ Stufe (ordinary level – O-level).

Viele Schüler verlassen danach die Schule, um einen Beruf zu erlernen. Wer aber zur Universität gehen will, muß die „höhere“ Stufe (advanced level – A-level) in mindestens drei Fächern erreichen. Diese Schüler werden in die „sechste Klasse“ (sixth form) versetzt, wo sie zwei Jahre bleiben. Der Unterricht ist fast ausschließlich auf die drei ausgewählten Fächer konzentriert; zum Beispiel ist es möglich, 15 Stunden Mathematik in jeder Woche zu haben. Alle Prüfungen bestehen aus mehreren dreistündigen Klausuren. Die Prüfungsfragen aus der Differential- und Integralrechnung, Algebra, Geometrie und theoretische Mechanik werden nicht von der Schule gestellt, sondern von einer unabhängigen Prüfungskommission.

Die Leistungen im A-level-Examen werden mit einer der Noten A, B, C, D, E, F versehen: A heißt hervorragend, und F heißt durchgefallen. Diese Bewertung ist von großer Wichtigkeit, da die Aufnahme an einer Universität davon abhängt. Zum Beispiel kann die Universität die Bedingung stellen, daß der Kandidat mindestens ein B und zwei C's erhalten hat. Es ist den Universitäten nicht gestattet, weitere schriftliche Prüfungen vorzunehmen – mit Ausnahme von Oxford und Cambridge; diese spielen eine besondere Rolle, teils aus historischen Gründen, teils wegen des besonders hohen Niveaus, das dort aufrechtgehalten wird.

Ich gebe nun eine Beispielaufgabe aus einer solchen Aufnahmeprüfung (Cambridge 1973,

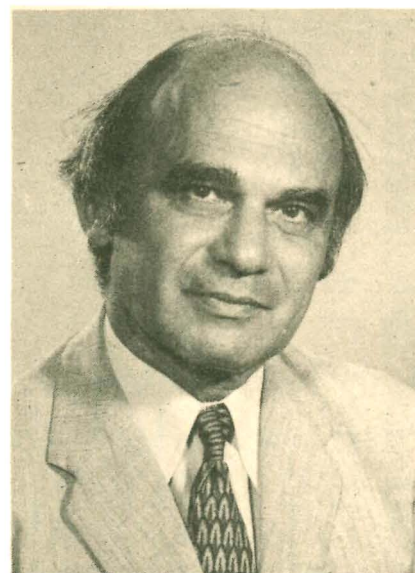
I, 2A). Ich danke der Universität Cambridge für die Erlaubnis, diese Aufgabe hier mitzuteilen.

Aufgabe

▲2434▲ (i) Man beweise, daß 24 die größte Zahl ist, welche durch das Produkt aller Zahlen teilbar ist, die kleiner als ihre Quadratwurzel sind.

(ii) Man zeige, daß in jeder Teilmenge von $n + 1$ Zahlen aus der Menge $1, 2, \dots, 2n$ es immer mindestens ein Paar von Zahlen gibt, derart, daß ein Mitglied des Paares durch das andere teilbar ist.

Lebenslauf



Walter Ledermann wurde 1911 als Sohn eines jüdischen Arztes in Berlin geboren. Dort besuchte er das *Leibniz-Gymnasium* und studierte Mathematik und Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin. Auf Grund der Verfolgungen durch die Nazis wanderte er 1934 nach Großbritannien aus, wo er seitdem lebt. Er hat an den Universitäten St. Andrews (Schottland), Manchester und Sussex (Brighton) gelehrt und ist 1978 zum *Emeritus Professor* ernannt worden.

Seine mathematischen Arbeiten liegen vornehmlich auf dem Gebiete der Algebra. Er hat unter anderem Bücher über Gruppentheorie und Gruppencharaktere veröffentlicht.

Prof. Ledermann hat starkes Interesse an allen Formen von mathematischem Unterricht und in diesem Zusammenhang zahlreiche Lehrbücher herausgegeben. Er ist Chefredakteur des *Handbook of Applicable Mathematics*. Seit seiner Pensionierung unterrichtet er an einer Schule, wo er dazu beiträgt, Kandidaten für die Aufnahme in Oxford oder Cambridge vorzubereiten.

Im Straßenverkehr beobachtet – Der Doppler-Effekt

Jeder, der am Straßenrand steht und den Verkehr beobachtet, kann folgendes Phänomen bemerken:

Kommt ein Auto auf ihn zugefahren, so klingt der Motor höher, als wenn sich das Fahrzeug von ihm entfernt. Der Motor strahlt aber die gleichen Geräusche wie vorher ab. Wie kann man das erklären? Die Lösung gibt uns ein physikalisches Gesetz, der **Doppler-Effekt**:

Bewegt sich die Quelle einer Wellenerregung relativ zum Beobachter, so ändert sich die von diesem beobachtete Frequenz.

Der Prager Mathematiker **Christian Doppler** (1803 bis 1853) beschäftigte sich mit diesem Problem und legte damit den Grundstein für die heutigen Anwendungen. Besonders in der Astro- und Kernphysik sind viele Beobachtungen und Messungen nur durch Ausnutzung dieses Naturgesetzes möglich.

Wir wollen aber bei dem Spezialfall der Schallwellen bleiben. Ehe wir zum konkreten Beispiel kommen, müssen wir uns noch mit einem anderen physikalischen Gesetz vertraut machen, der Grundgleichung der Wellenlehre. Sie stellt den Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , der Frequenz f und der Wellenlänge λ der Welle dar:

$$c = f \cdot \lambda \quad (1)$$

Nehmen wir eine Lufttemperatur von 20°C an, so beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Damit läßt sich aus der Wellenlänge λ die Frequenz f und umgekehrt aus f die Wellenlänge λ berechnen.

Da die Frequenz f die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit angibt, gilt für die Zeit T einer Schwingung

$$T = \frac{1}{f} \quad (2)$$

und Gleichung (1) läßt sich auch schreiben als

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ bzw. } \lambda = c \cdot T \quad (3)$$

Nun brauchen wir nur noch zu wissen, daß hohe Töne größere Frequenzen besitzen als tiefe, und können unser Beispiel qualitativ beschreiben. Zunächst berechnen wir die Frequenz f_1 , die unser Beobachter empfängt, wenn sich das Fahrzeug auf ihn zubewegt:

Ist das Auto im Punkt P_1 , so drücke unser Fahrer T_0 Zeiteinheiten lang auf die Hupe,

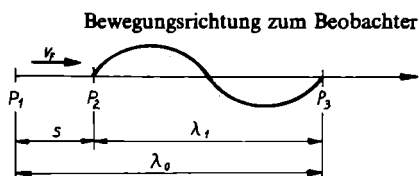


Bild 1

d. h., es wird ein Ton der Frequenz f_0 abgestrahlt (Bild 1).

Nach der Zeit T_0 hat der Anfangspunkt der Schallwelle wegen Gleichung (3) die Strecke $P_1P_3 = \lambda_0 = c \cdot T_0$ zurückgelegt. Das Auto hat in dieser Zeit den Weg $P_1P_2 = s = v_F \cdot T_0$ zurückgelegt (v_F sei die Geschwindigkeit des Fahrzeugs) und strahlt in P_2 den letzten Punkt der Welle der ersten Periode ab. Anfangs- und Endpunkt haben also den Abstand P_2P_3 , der die neue Wellenlänge λ_1 der beobachteten Welle ist. Aus Bild 1 wird deutlich, daß gilt

$$\begin{aligned} P_2P_3 &= \lambda_1 = \lambda_0 - s, \text{ also} \\ \lambda_1 &= c \cdot T_0 - v_F \cdot T_0 \\ \lambda_1 &= (c - v_F) T_0 \\ \lambda_1 &= \frac{c - v_F}{f_0} \end{aligned}$$

Für die beobachtete Frequenz f_1 folgt wegen Gleichung (1)

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{c - v_F} = \frac{c}{c - v_F} f_0 \quad (4)$$

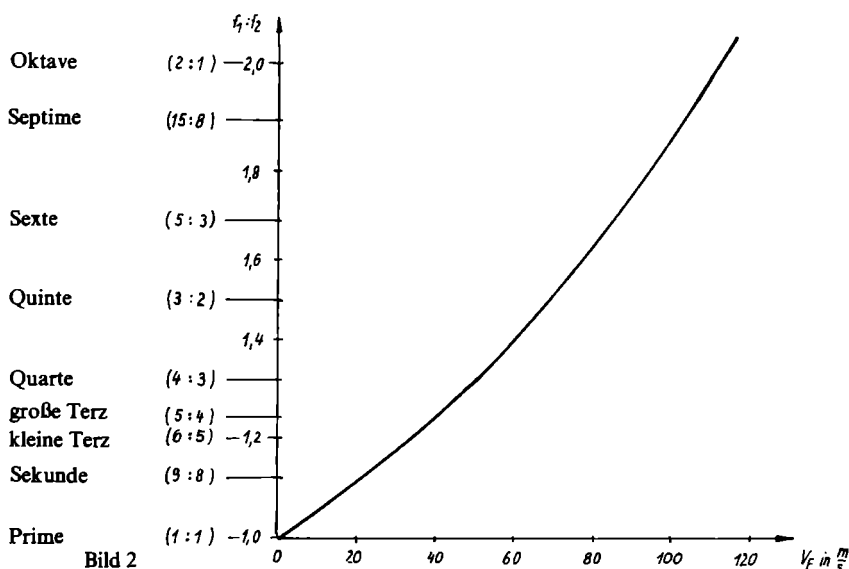


Bild 2

Entfernt sich das Fahrzeug vom Beobachter, so müssen wir die Geschwindigkeit v_F als negativ betrachten. (Das Vorzeichen hängt also von der Richtung ab!)

Die Welle wird jetzt nicht „kürzer“, sondern „länger“.

Fassen wir zusammen: Kommt ein die Frequenz f_0 abstrahlendes Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v_F auf uns zu, so hören wir die

Frequenz $f_1 = \frac{c}{c - |v_F|} f_0$, entfernt es sich von uns, so hören wir die Frequenz $f_2 = \frac{c}{c + |v_F|} f_0$ (c Schallgeschwindigkeit).

Fährt das Fahrzeug an uns vorbei, so beobachten wir das Verhältnis

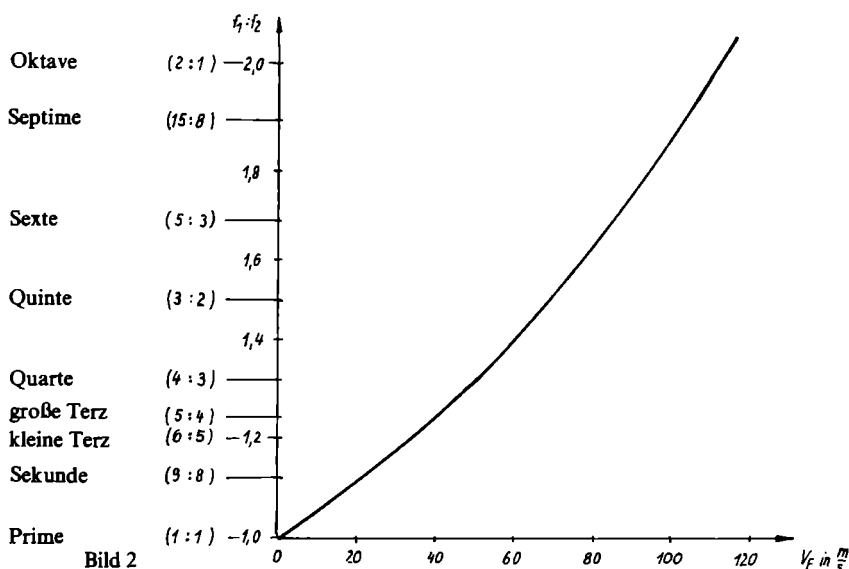
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{c}{c - |v_F|} f_0 : \frac{c}{c + |v_F|} f_0 = \frac{c + |v_F|}{c - |v_F|} \quad (5)$$

Bemerkenswert ist, daß dieses Verhältnis von der abgestrahlten Frequenz f_0 unabhängig ist und nur von der Geschwindigkeit v_F des Fahrzeugs abhängt. In der Musik werden Tonhöhenunterschiede als Intervalle bezeichnet. Jedem Intervall ist ein festes Frequenzverhältnis zugeordnet. Bild 2 veranschaulicht die Gleichung (5):

Natürlich registrieren wir den Doppler-Effekt auch bei Bewegung des Beobachters und ruhender Schallquelle. Entfernt sich unser Beobachter von der ruhenden Schallquelle, so können wir nicht mehr mit der allgemeinen Ausbreitungsgeschwindigkeit c rechnen, sondern müssen die Relativgeschwindigkeit zwischen Schallquelle und Beobachter benutzen. Diese beträgt $c - v_B$, wenn v_B die Geschwindigkeit des Beobachters ist. Der Beobachter „läuft der Welle voraus“, sie „erreicht ihn langsamer“. Es gilt also nach (1)

$$c - v_B = f \cdot \lambda \rightarrow f = \frac{c - v_B}{\lambda} \quad (6)$$

Bewegt sich der Beobachter auf die Schallquelle zu, so müssen wir v_B als negativ betrachten, die Relativgeschwindigkeit wird größer ($c + |v_B|$).



Bewegen sich Beobachter und Schallquelle, so ist in Gleichung (6) statt λ die oben berechnete Wellenlänge λ_1 einzusetzen:

$$\lambda_1 = \frac{c - V_F}{f_0} \rightarrow f_1 = \frac{c - V_B}{c - V_F} f_0 \quad (7)$$

Mit (7) erhalten wir die allgemeine Gleichung zur Beschreibung des Doppler-Effektes für Schallwellen.

Darauf aufbauend lassen sich viele interessante Varianten diskutieren. Es kommt stets auf die richtige Verknüpfung der mathematischen und physikalischen Gesetze an. Zur Anregung sei hier noch ein Beispiel angedeutet: Im eingangs betrachteten Phänomen haben wir nichts über die Änderung der Tonhöhe in unmittelbarer Nähe des Beobachters gesagt. Dabei bewegt sich das Fahrzeug ja weder direkt auf den Beobachter zu, noch entfernt es sich gerade von ihm, denn der Beobachter hat von der Fahrbahn den Abstand l .

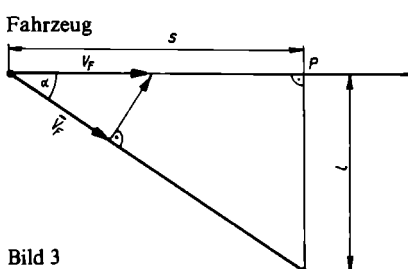


Bild 3

Beobachter

Uns interessiert also der Teil $\overline{V}_F$ der Geschwindigkeit V_F , der in Richtung des Beobachters wirkt. Die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Größe und läßt sich darum in zueinander senkrechte Komponenten zerlegen (Bild 3 illustriert dies, sofern man den Sachverhalt als ebenes Problem ansieht). Hat das Fahrzeug vom Begegnungspunkt P den Abstand s und sieht der Fahrer den Beobachter unter dem Winkel α , so gilt

$$\overline{V}_F = V_F \cdot \cos \alpha,$$

$$\overline{V}_F = V_F \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \text{ mit } \tan \alpha = \frac{l}{s},$$

$$\overline{V}_F = V_F \cdot \frac{|s|}{\sqrt{s^2 + l^2}}.$$

Nach Gleichung (4) folgt also

$$f_1 = \frac{c}{c - V_F} f_0 = \frac{c}{c - \frac{|s| \cdot V_F}{\sqrt{s^2 + l^2}}} f_0$$

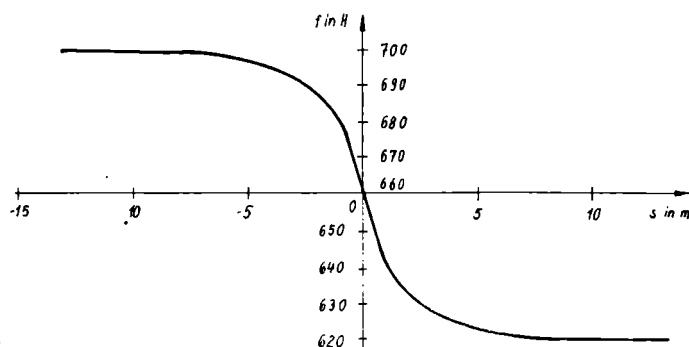


Bild 4

$$f_1 = \frac{c \sqrt{s^2 + l^2}}{c \sqrt{s^2 + l^2} - |s| V_F} f_0 \quad (8)$$

Für festes l , f_0 und V_F ist f_1 eine Funktion von s , deren Verlauf Bild 4 am Beispiel $l = 2 \text{ m}$, $f_0 = 660 \text{ Hz}$ und

$V_F = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ verdeutlicht.

Wie schon erwähnt, lassen sich viele weiterführende Varianten diskutieren, z. B.

- können verschiedene Bewegungsgeraden oder gar gekrümmte Bewegungsbahnen für Beobachter und Fahrzeug untersucht werden;
- es können Brücken zugelassen werden, die die dritte Dimension ins Betrachtungsfeld bringen;
- es können beschleunigte Bewegungen untersucht werden;
- es kann der Wind beachtet werden, der die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls richtungsabhängig macht.

Vielleicht versucht ihr es einmal?

Die Grundgesetze der Mathematik und Physik reichen zu diesen Untersuchungen völlig aus; im Zweifelsfall hilft sicher euer Physiklehrer.

M. Weicker

Wie funktioniert das Verkehrsradar?

Alle Kraftfahrer kennen es, viele fürchten es, aber nur wenige kennen seine Wirkungsweise. Einige sprechen von der „Radarfalle“. Mit welchem Recht von „Falle“, wenn viele Verkehrsunfälle auf überhöhte Geschwindigkeit zurückzuführen sind?

Das Radarprinzip nutzt die von Gegenständen reflektierte Energie (die Echos) einer vom Radargerät ausgesendeten Funkwelle hoher Frequenz aus. Die Funkwelle kann impulsförmig (Impulsradar) oder dauernd (Dauerstrichradar) ausgesendet werden. Die Sendeanenne wirkt auch als Empfangsantenne.

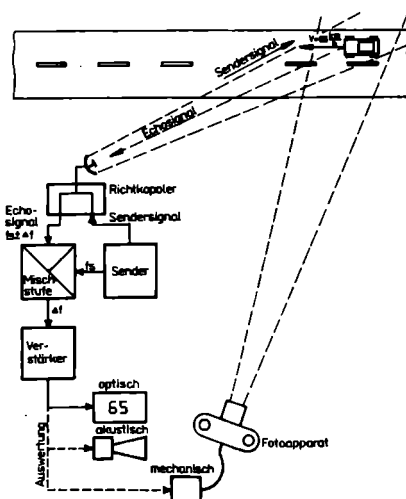
Das Verkehrsradar ist ein Dauerstrichradar. Eine Welle mit der Frequenz $f \approx 10 \text{ GHz} = 10^{10} \text{ Hz}$ wird durch eine Antenne scharf gebündelt und abgestrahlt. Die Frequenz der

reflektierten Welle ist wegen des Doppler-Effektes verändert. Bewegt sich ein Beobachter auf eine Schallquelle zu, schneidet er pro Zeiteinheit mehr Schallwellen, als wenn er sich nicht bewegt. Das gilt auch für einen ruhenden Beobachter und eine bewegte Schallquelle. Ein fahrendes Auto verändert also die Frequenz des reflektierten Signals, und diese Änderung ist der Geschwindigkeit proportional. Das ist die Wirkung des Doppler-Effektes. Nach diesem Prinzip arbeitende Radargeräte werden als Doppler-Radar bezeichnet.

Die reflektierte Welle wird im Radargerät mit einem Teil der ausgesendeten Wellen überlagert. Dabei entsteht eine Differenzfrequenz, die nur von der Geschwindigkeit des Fahrzeuges abhängt. Sie liegt bei einigen 100 Hz, wird mit einem NF-Verstärker verstärkt und optisch angezeigt oder akustisch ausgewertet. Das Erfassen eines Fahrzeuges dauert nur den Bruchteil einer Sekunde. Bei einer digitalen Anzeige und einer Zähldauer von 0,1 s wird die Geschwindigkeit mit einer Genauigkeit von $\pm \frac{1 \text{ km}}{h}$ angezeigt. Eine An-

zeige erfolgt nur dann, wenn eine einstellbare Geschwindigkeitsgrenze überschritten ist. Der angezeigte Wert wird automatisch oder von Hand gelöscht. Moderne Ausführungen lösen bei Geschwindigkeitsüberschreitung einen Fotoapparat aus, der den Sachverhalt fixiert. Für die Messung ist es unwesentlich, ob sich das Fahrzeug auf das Radargerät zu oder von ihm weg bewegt. Neben der bekannten Geschwindigkeitsmessung können mit einem Verkehrsradargerät auch Zählungen der passierenden Fahrzeuge oder die Steuerung von Ampeln in Abhängigkeit von der Verkehrsdichte durchgeführt werden.

W. Ausborn



alpha-Wettbewerb 1982/83 Abzeichen in Gold

Fortsetzung und Schluß siehe S. 44

Für siebenjährige Teilnahme

Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Anke Kusch, beide Halberstadt; Frank Siebert, Dany Lindenberg, beide Halle; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Andreas Niepel, Ricarda Damm, beide Karl-Marx-Stadt; Elke Willek, Kriebitzsch; Stefan Hähnel, Heiko Schinke, beide Leuna; Ruth Backhaus, Leinefelde; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Kerstin Paul, Nordhausen; Sabine Oestreich, Oschersleben; Margit Möllhoff, Piesau; Gudrun Zirnstein, Pirna; Carmen Henze, Pratau; Frank Berndt, Radeburg; Andreas Korb, Raschau; Ines Gülden, Roitzsch; Gitta Schöne, Rostock; Jürgen Schmalisch, Rotta; Ronald Bojarski, Saßnitz; Birgit Nöbber, Schmalkalden; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Frank Pampel, Schneeberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Kurt Schulze, Schemberg; Stephan Meyerhöfer, Strassburg; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Doris Grünler, Thierbach; Ines Hoffmann, Weißwasser; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Jörg Steinbach, Zwickau; Thomas Streich, Brandenburg; Iljana Planke, Premnitz; Roland Hesse, Bad Blankenburg

Für sechsjährige Teilnahme

Frank Schönherr, Anklam; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckhardt, Manuela Winges, beide Bad Liebenstein; Holger Neye, Susanne Krüger, Kerstin Kantiem, Andris Möller, Berit Kleinbauer, alle Berlin; Beate Weber, Bernburg; Peter Röbber, Bischofswerda; Thomas Peuker, Callenberg; Andreas Heinze, Uta Bolz, beide Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Wolfgang Tenor, Dessau; Christian Donath, Pedro Thiele, Susann Piry, Gerald Eichler, Ines Lauter, Kerstin Urban, Heiko Ringel, alle Dresden; Kerstin Westphal, Borna; Claudia Pleyer, Eisenach; Una Heinicke, Eisenberg; Enrico Dietrich, Stefan Nitzsche, beide Elsterwerda; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Mathias Gerlach, Friedeberg; Carmen Meikies, Gadebusch; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Christian Röhl, beide Gräfenhainichen; Thomas Wedekind, Grimma; Annett Eichner, Halle-Neustadt; Thomas Benusch, Heidrun Schmidt, beide Hoyerswerda; Gabi Missal, Insel; Andreas Paukert, Karbow; Katrin Richter, Hendrik Pönisch, beide Karl-Marx-Stadt; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Edith Löffler, Königshain; Andreas Helbig, Langenleuba-Ndr.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Sabine Mersowsky, Uta Mersowsky, beide Langewiesen; Andreas Eifler, Ralf Laue, beide Leipzig; Solveig Woitek, Leinefelde; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübbethen; Angela Zschörper, Maltitz; Norbert Fuchs, Meiningen; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Sven Saar, Mühlhausen; Jörg Fiebig, Mülsen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Petra Hahn, Nordhausen; Michael Galetzka, Pirna; Jörg Stark, Plauen; Steffen Hoffmann, Potsdam; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Katrin Dorendorf, Riesa;

Ralf Heidenreich, Roßleben; Grit Maciejewski, Rostock; Silke Gubick, Röbel; Jens Richter, Schkölen; Ingo Lohde, Schönefeld; Carola Paetow, Schwerin; Frank Zöllner, Sondershausen; Andreas Prpic, Birgit Götz, beide Sonneberg; Kai-Uwe Weber, Steinbach-Hallenberg; Cordula Gottwald, Stendal; Erhard und Anka Zilinske, Stralsund; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Dirk Wenzlaff, Vitte; Udo und Irene Michallik, Waren; Margret Boettcher, Stephan Thäter, beide Weimar; Barbara Schütze, Weißenfels; Dirk Lehmann, Weimar; Annett Seidel, Wismar; Agnes Jorick, Wismar; Claudie Bock, Wolfen; Kerstin Barthelmes, Erika Schreiber, beide Zella-Mehlis; Heide Hilse, Zittau; Mathias Goltzsche, Zschopau

Für fünfjährige Teilnahme

Carsten Karl, Aken; Anka Sommer, Augsdorf; Jens Prochno, Reinhard Wegener, Christiane Mayer, Thomas Honigmann, Cornelia Wolf, Bernhard Napiontek, Norbert Dorn, Steffen Padelt, Steffen Meißner, Beate und Stefan Müller, alle Berlin; Jörg Leine, Berlestedt; Helge Dürschke, Bitterfeld; Klaus Asmus, Breitenungen; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Thomas Bartmuß, Burow; Ramona Blank, Clingen; Christian Sitz, Calau; Matthias Winkler, Cossebaude; Sylke Riedel, Coswig; Manfred Roßius, Andreas Stenzel, Tino Seidler, Jens Leberwurst, Iris Dähn, Daniela Syrbe, Thomas Lundershausen, alle Cottbus; Jörg Uhlig, Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Jörn Fache, Culitzsch; Jens Fuchs, Bert Kühne, beide Dahme; Heike Förster, Christian Nolte, Beate Klöppner, Andrea Wetter, alle Dingelstädt; Carola Schwerdtner, Dohna; Stefan Mattausch, Michael Nitsche, René Pratsch, Oliver Geupel, Silke Riechen, Helmut und Carsten Schreiber, Annegret Wustmann, Thomas Hübner, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Bert Minske, Eberswalde; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Heike Norgner, Falkenstein; Astrid Abt, Manuela Mäder, beide Fambach; Hans Schröer, Finsterwalde; Henry Mäder, Frohburg; Annett Helbig, Frankfurt (Oder); Ansgar Heise, Görlitz; Ingolf Thurm, Gößnitz; Andreas Kersten, Gräfenhainichen; Mathias Schleif, Gräfenhainichen; Karsten Sonnemann, Grabow; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Henning Salz, Halle; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Robert Siegel, Hecklingen; Uta Reck, Heiligenstadt; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Kai Schröder, Holzengel; Peter Hermann, Hoyerswerda; Elke Schumann, Jahnishausen; Mathias Katzschmann, Jena; Kai-Uwe Scherer, Jessen; Claudia Docter, Ilsenburg; Andreas Israel, Ingolf Knopf, Rüdiger Gränitz, Annegret Schatte, Hildgard Geisler, Sebastian Horbach, Carla Umlauf, alle Karl-Marx-Stadt; Helge Müller, Königsee; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Karsten Schmidt, Kolochau; Gert Künzelmann, Krina; Steffen Heyde, Latdorf; Bianka Schulze, Bernd Fucke, Petra Gollewsky, Stephan und Klemens Rebbelmund, Matthias Hübner, alle Leipzig; Michael Seidel, Leuna; Glen Stachowski, Löbau; Ulf Brandes, Lüblow; Ekkehard Ludwig, Lüthmannsdorf; Stefan Brünner, Löderburg; Susanne Wolf, Magdeburg; Wolfram Hoppe, Marienberg; Simone Brungräber, Marxwalde; Tilo Grüneberger, Nerchau; Anja Voß, Neustadt; Jutta Reißmann, Niesky; Torsten Linß, Nordhausen; Frank Jäger, Oberschönewitz; Gerlinde Lehmann, Pahrenz; Tibor Leitz, Parchim; Hellmut Schenk, Pirna; Henning Schulz, Potsdam; Katja Uhlemann, Prausitz; Klaus-Peter Lindner, Ingolf Pitz, beide Rackwitz; Jens Papperitz, Radebeul; Irma Goßmann, Rheinsberg; Andrea Puls, Röbel; Annette Schubert, Schalkau; Ronald Kaiser, Schleid; Beate Malsch, Babett Müller, Winfried Ullrich, alle Schmalkalden; Sven Hader, Schlotheim; Maik Schönherr, Schmölln; Sylke Lüder, Edgar Lüder, beide Schönborn; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Heidi Böttger, Sondershausen; Susanne Krieger, Sömmerda; Bernd Urbanek, Spremberg; Mike Selig,

Stauchitz; Peter Luck, Michael Holland-Moritz, René Bieber, Christian Usbeck, Beate Nothnagel, Heike Zimmermann, Sabine König, Angela Müller, Jacqueline Häfner, alle Steinbach-Hallenberg; Helmut Sauerbrei, Suhl; Armin Singer, Teichwolframsdorf; Silvia Reinwarth, Teltow; Wolfram Fischer, Torgau; Lars Brückner, Vacha; Uta Michallik, Waren; Jan Herrmann, Wechselburg; Horst Rißmann, Wesenberg; Klaus Michel, Wismar; Ralph Bock, Wolfen; Volker Richter, Wutha; Andrea Schmidt, Zella-Mehlis; Maik Dröbber, Marion Nemczak, Kerstin Kowaczek, alle Zschornowitz; Michael Creutzburg, Thal; Sönke Maeß, Bad Döberan

Für vierjährige Teilnahme

Ralf und Wolfgang Beukert, Beatrice List, alle Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Jens Humpisch, Bad Gottleuba; Ulli Züllicke, Bergwitz; Clemens Thielecke, Matthias Tittel, Marko Pohl, Ines Tappe, Thorsten Brandt, Karen Böhme, Yvonne Selke, Jörg Stephan, R.-Birk Schulze, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Martina Sternickel, Bernterode; Frank-Jürgen Schwerin, Grit Giering, beide Blumberg; Karin Sankat, Kirsten Hoffmann, beide Boizenburg; Andreas Böttcher, Breitenworbis; Peter Sitz, Calau; Michael Enig, Crimmitschau; Sylvi Fache, Culitzsch; Andreas Donaubauer, Dahlen; Matthias und Michael Ludwig, Dahme; Markus und Sebastian Vockrodt, Dingelstädt; Kerst Griesbach, Dorfchemnitz; Britta Schumacher, Angela Michael, Yvonne Sachse, Bernd Miethig, alle Dresden; Mario Thiel, Eilsleben; Matthias Voigt, Eisenach; Jörg Simon, Engelsdorf; Astrid Mönch, Erfurt; Peter Wenschuh, Ulrich Wenschuh, beide Falkenstein; Cornelia Heymel, Daniela Pilgrim, beide Fambach; Mathias Eger, Floh; Ute Frank, Forst; Ulf Winkler, Frankenberg; Olaf Krause, Frankfurt (Oder); Dorothee Heidrich, Freiberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Thomas Brahmman, Freital; Iris Ebert, Gertitzsch; Raik Langlotz, Grabko; Volker Pohlers, Andreas Funk, Ulf Gebhardt, alle Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Ragna Siol, Maika Thiele, beide Grimma; Kathrin Henker, Grotzsch; Diana Schulz, Grube; Holger Porath, Güstrow; Regine Mallwitz, Güstrow; Bernd Heindold, Andrea Fieder, Beate Thomas, alle Halle; Beate Kaczmarek, Antje Hüttig, Jörg Langwald, Christina Schmerling, alle Halle-Neustadt; Heike Reichelt, Mandy Probst, Matthias Schädlich, Simone Pötzsch, alle Hammerbrücke; Ilka Hartmann, Hartmannsdorf; Mirko Müller, Hermannsdorf; Heidi Konarski, Hohenbucko; Silvio Fiedler, Hoyerswerda; Silke Umbreit, Ilmenau; Ines Wagenknecht, Ivenack; Silke Rendelmann, Kahla; Annette Maier, Michael Tix, Ingo Neubert, Jens Weber, Jürgen und Michael Hoppe, Volker Liebert, Gert Reifarth, Ulrich Weinhold, Grit Lohse, Birgit Lindner, Jacqueline Lindner, alle Karl-Marx-Stadt; Henrik Hodam, Kalttenordheim; Lutz Arnold, Kay-Uwe August, Sabine Albrecht, Heike Schneider, Annett Urbanczyk, alle Kieselbach; Ute Studzinski, Kietz; Torsten Schütze, Klettenberg; Susan Hoffmann, Klingenthal; Sylva Stein, Köthen; Annette und Simone Kauert, Silke Winzek, alle Langenweddingen; Martin Böhm-Schweizer, Lauscha; Karola Funke, Antje Willenberg, Bernadette Solf, Grit Hartung, Udo Woitek, alle Leinefelde; Uwe Werner, Leipzig; Jens Söll, Jörg Zimmermann, Frank Schönbach, André Gartner, Kerstin Müller, Heiko Fröhlich, Ralf Rogel, Jens Grunert, alle Lössau; Peter Gerlach, Lübs; Ulrich Härtel, Carsten Behling, beide Magdeburg; Angelika Schlegel, Mahlsdorf; Uwe Latz, Meyenburg; Frank-Thorsten Bölter, Mühlhausen; Michael Weber, Mühlhausen; Elvira Koröls, Andreas Suchanow, beide Neubrandenburg; Susanne Lind, Neuhäus; Mario Walther, Neundorf; Undine Henker, Neukirch; Kathrin Massanek, Neusoritz; Kerstin Lettau, Ulf Woike, beide Neustadt; Roland Marquardt, Neustrelitz; Antje Flechsig, Obercrinitz;



Geometrie hilft der Arithmetik

In diesem kleinen Beitrag möchten wir unmittelbar an Kenntnisse aus dem Unterricht anschließen. Geometrische Sichten wie in den folgenden Flächen- oder Volumenbetrachtungen können der Arithmetik helfen.

1. Vom „Klammer“-Rechnen

Wir erinnern zunächst an die Formel, die du zur Berechnung des Flächeninhalts A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b (in der 5. Klasse) kennengelernt hast; sie lautet: $A = a \cdot b$. Bei gleicher Längeneinheit (z. B. 1 cm) und dazugehöriger Flächeneinheit (1 cm^2) ist der Zahlenwert des Flächeninhalts eines Rechtecks gleich dem Produkt der Zahlenwerte der Seitenlängen. Auf diese Weise können wir das Produkt zweier positiver Zahlen durch eine rechteckige Fläche darstellen.

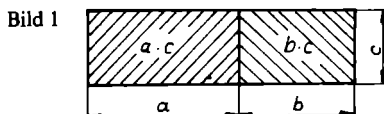
Kann man auf diese Weise Rechenregeln über Produkte von positiven Zahlen erkennen?

Wir beginnen mit dem Produkt $(a+b) \cdot c$. Dazu können wir uns ein Rechteck mit den Seitenlängen $(a+b)$ und c angeben (siehe Bild 1). Sein Flächeninhalt ist offenbar gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Teilrechtecke mit den Seitenlängen a und c bzw. b und c . Also gilt die Formel

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

die du unter der Bezeichnung *Distributivgesetz* kennst.

Nun kannst du bei den folgenden Aufgaben entsprechend vorgehen.



▲1▲ Forme $(a+b) \cdot (c+d)$ für positive Zahlen a, b, c, d in eine Summe um!

▲2▲ Es seien a, b, c positive Zahlen und $a > b$. Forme $(a-b) \cdot c$ um!

Wir formen nun $(a-b) \cdot (c-d)$ um, wobei a, b, c, d positive Zahlen und $a > b$ und $c > d$ sei. In einem Rechteck mit den Seitenlängen a und c läßt sich leicht ein Rechteck mit den Längen $a-b$ und $c-d$ angeben, siehe Bild 2.

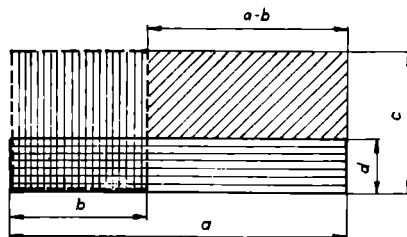


Bild 2

Um diese Rechtecksfläche aus der mit den Seitenlängen a und c zu erhalten, schneiden wir die Rechtecksflächen mit den Seitenlängen a und d und mit den Seitenlängen b und c (siehe Bild 2) ab. Dabei wird aber die Rechtecksfläche mit den Seitenlängen b und d zweimal erfaßt. Zur Korrektur ist dieser Flächeninhalt am Ende noch zu addieren. Damit erhalten wir folgende Formel:

$$(a-b) \cdot (c-d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d.$$

▲3▲ Betrachte

a) $(a+b)^2$ als Spezialfall der 1. Aufgabe,

b) $(a-b)^2$ als Spezialfall der gerade abgeschlossenen Überlegungen und

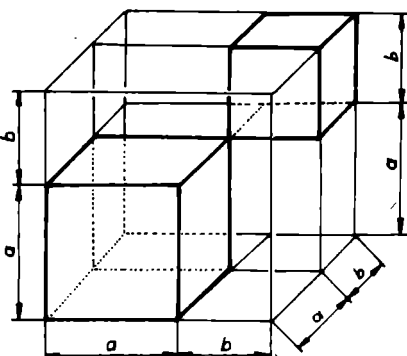
c) $(a+b) \cdot (a-b)$!

Die Formeln, die sich in der 3. Aufgabe ergeben, nennt man *binomische Formeln*. Du lernst sie eigentlich erst in der 9. Klasse kennen, dann aber als gültige Formeln für alle Zahlen.

Wer über ein gutes Raumvorstellungsvermögen verfügt, kann jetzt solche Überlegungen auch mit Hilfe von Volumenberechnungen anstellen. Wir betrachten als einfaches Beispiel einen Würfel und seine dem Bild 3 angegebenen Zerlegungen. Indem man sich das Volumen des gesamten Würfels aus den Volumina der einzelnen acht Quader (davon zwei Würfel) zusammengesetzt denkt, kann man daraus ablesen:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3.$$

Bild 3



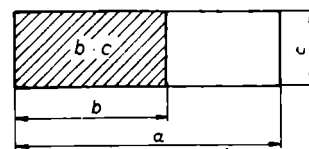
2. Rechnen mit Größenvergleichen

Wir betrachten positive Zahlen a, b und c und untersuchen die Frage: Welcher Vergleich von $a \cdot c$ und $b \cdot c$ ergibt sich aus $a > b$?

Das läßt sich wieder geometrisch wie oben leicht beantworten. Anhand des Bildes 4 ist sofort zu sehen:

Aus $a > b$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$.

Bild 4



▲4▲ Man vergleiche $a \cdot c$ und $b \cdot d$, wenn $a < b$ und $c < d$ ist!

▲5▲ Kann ein Vergleich von $a \cdot c$ und $b \cdot d$ angegeben werden, wenn $a < c$ und $b < d$ gilt?

3. Wie viele sammelten?

Eine Schülergruppe geht Kastaniensammeln. Dazu stehen ihr zwei Behälter für den Transport zur Verfügung, von denen einer doppelt so viel faßt wie der andere. In der ersten halben Stunde schüttet die ganze Gruppe die Kastanien nur in den großen Behälter. In der nächsten halben Stunde füllt eine Hälfte der Gruppe den großen Behälter, die andere Hälfte sammelt in den kleinen Behälter. Bis auf ein Kind müssen die übrigen der Gruppe dann nach Hause. Dieses Kind füllt schließlich in der nächsten Stunde den kleinen Behälter. Wie viele Kinder sammelten? Wir wollen noch voraussetzen, daß alle Schüler mit dem gleichen Fleiß sammeln, also in der gleichen Zeit die gleiche Menge. Wer von euch mit Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen gearbeitet hat, wird wohl gleich zu dieser Möglichkeit greifen. Doch es geht einfacher und übersichtlicher, wenn man die Aufgabenstellung geometrisch sieht.

Wir stellen uns die Behälter als Quader mit gleicher Grundfläche vor. Der große Behälter muß dann doppelt so hoch sein wie der kleine (Bild 5). Da zum Füllen des großen Behälters zunächst die ganze Gruppe eine halbe Stunde und eine weitere halbe Stunde die Hälfte der Gruppe gebraucht hat, sammelt die Hälfte der Gruppe in einer halben Stunde $\frac{1}{3}$ des Fassungsvermögens des großen Behälters. Für das letzte Kind bleiben zum Füllen des kleinen Behälters demnach noch $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right)$

$-\frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ des Fassungsvermögens des großen Behälters übrig. Dafür benötigte es eine Stunde. Zwei Schüler hätten also in einer

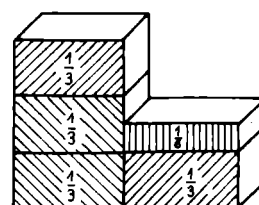


Bild 5

Stunde $\frac{1}{3}$ des großen Behälters gefüllt. Die gesamte Gruppe hatte aber in einer Stunde $\frac{4}{3}$ des Volumens des großen Behälters gesammelt (siehe nochmals Bild 5), also bestand die ganze Gruppe aus 8 Schülern.

▲6▲ Im August wurde der ursprüngliche Preis für Tomaten um ein Zehntel gesenkt. Der sich dadurch ergebende neue Preis sollte im September so erhöht werden, daß man wieder den ursprünglichen Preis erreicht. Um welchen Teil muß der Preis dann erhöht werden?

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

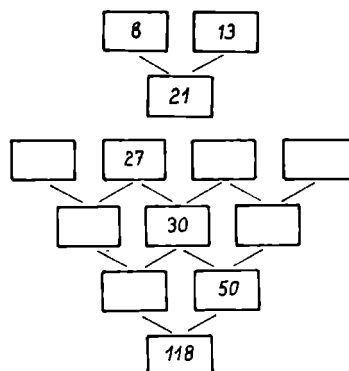
mathematicus

Aufgaben zur Wiederholung von Grundkenntnissen

Teil 1

Klasse 5

▲1▲ Ergänze die freien Felder, wenn paarweise zu addieren ist (siehe Muster)!



▲2▲ Berechne das arithmetische Mittel!

- a) $\frac{1}{2}$ h; $\frac{1}{4}$ h; 20 min; 1500 s
 b) $\frac{5}{4}$ ha; 20000 m³; $\frac{3}{2}$ ha; $\frac{7}{4}$ ha;
 15000 m²

▲3▲

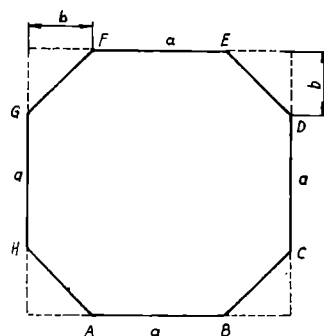
x	$x + \frac{1}{10}$	$x - \frac{3}{10}$
$\frac{7}{10}$		
$\frac{11}{10}$		
	1	
		0

▲4▲ Ergänze!

a - b = 1	a	$\frac{9}{8}$	1,5			$1\frac{1}{4}$
	b			$\frac{1}{10}$	0	

▲5▲ Welchen Flächeninhalt hat das Achteck ABCDEFGH, wenn a=6 cm und b=1 cm betragen?

(Skizze, nicht maßstäblich!)



▲6▲ Ergänze die Tabelle!

a	b	a+b	$\frac{1}{2}a$	$\frac{3}{4}b$
20 cm	1 m			
0,4 t	6 dt			
$\frac{1}{2}h$		30 min		
	6 m ²		500 dm ²	
	1500 cm ³			0,75 dm ³

▲7▲ Gleiche Symbole bedeuten gleiche Zahlen. Ergänze!

$$\frac{1}{2} \text{ von } \square = \square$$

$$\frac{1}{3} \text{ von } \square = \triangle$$

$$\frac{1}{4} \text{ von } \triangle = 1$$

▲8▲ Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit a=4 cm. Spiegle dieses Quadrat zunächst an A'B' und danach an B'C'!

▲9▲ Zeichne die folgenden Winkel mit Winkelmesser:

$$\alpha = 40^\circ; \beta = 50^\circ; \gamma = 60^\circ$$

Zeichne mit Zirkel und Lineal:

$$\alpha + \beta + \gamma; \alpha + \beta - \gamma; 2 \cdot \alpha - \gamma; \gamma - \beta + \alpha!$$

▲10▲ Löse die Gleichungen!

$$\text{a) } \frac{3}{4} \text{ km} + 200 \text{ m} + x = 1 \text{ km}$$

$$\text{b) } 3x + \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\text{c) } \left(\frac{4}{10}x - x\right) \cdot 5 = \frac{5}{10}$$

$$\text{d) } 0,2 \text{ h} + x + 1,5 \text{ h} = 150 \text{ min}$$

▲11▲ Peter braucht mit dem Fahrrad für seinen Schulweg 25 min.

Seine Schwester ist mit ihrem Moped 2,5mal so schnell wie Peter.

▲12▲ Ein PKW schafft die Strecke von 1 km in durchschnittlich 50 s. Ergänze die folgende Tabelle unter dieser Voraussetzung!

Strecke:	1 km				360 km
Zeit:	50 s	300 s	20 min	1 h	

▲13▲ Quader: a=35 mm; b=2 cm; c= $\frac{2}{5}$ dm. Berechne den Rauminhalt und den

Oberflächeninhalt! Zeichne das Körpernetz!

▲14▲ In einem Rechteck von 30 cm Umfang ist eine Seite fünfmal so lang wie die andere. Berechne den Flächeninhalt!

▲15▲ In der Klasse 5a beteiligten sich 5 Schüler mehr an der Schulolympiade Mathematik als in der 5b. In der 5c waren es drei mehr als in der 5a. Insgesamt lösten 43 Schüler die Aufgaben der 1. Stufe. Wie war die Beteiligung in den einzelnen Klassen?

Diese Aufgaben entnahmen wir einem Heft des Kreises Löbau, zusammengestellt von den Fachberatern für Mathematik des Kreises. Teil 2 – speziell für Klasse 6/7 folgt in Heft 3/84.



V. Renčín, Praha

Teilbarkeitsregeln

Teil 2

An einigen Beispielen sei nun dargelegt, wie mit diesem Verfahren die Teilbarkeit durch t untersucht werden kann.

1. Es sei $z = 18879$; dann ist

$A = 1887$ und $E = 9$ und $t = 7$;

dann ist $a = 0$, $e = 7$ und $F(7) = -2$

$$\begin{array}{r} 1887 \mid 9 \\ -18 \\ \hline \end{array} \quad F(7) \cdot E$$

$$D_1 = \begin{array}{r} 186 \mid 9 \\ -18 \\ \hline \end{array} \quad (-2) \cdot 9 = -18$$

$$D_2 = \begin{array}{r} 16 \mid 8 \\ -16 \\ \hline \end{array} \quad (-2) \cdot 8 = -16$$

$D_3 = 0$ ist durch 7 teilbar;
also auch 18879.

2. Ist $z = 1358$ durch $t = 13$ teilbar?

Es ist $A = 135$; $E = 8$; $a = 1$; $e = 3$

und $F(3) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$. Es wird

$$\begin{array}{r} 135 \mid 8 \\ +32 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \mid 7 \\ +28 \\ \hline \end{array}$$

44 ist nicht durch 13 teilbar,
demnach auch nicht 1358.

3. Ist $z = 174454$ durch $t = 23$ teilbar?

Es wird $a = 2$; $e = 3$

und damit $F(3) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$$\begin{array}{r} 17475 \mid 4 \\ +28 \\ \hline \end{array} \quad 4 \cdot 7 = 28$$

$$\begin{array}{r} 1750 \mid 3 \\ +21 \\ \hline \end{array} \quad 3 \cdot 7 = 21$$

$$\begin{array}{r} 177 \mid 1 \\ +7 \\ \hline \end{array} \quad 1 \cdot 7 = 7$$

$$\begin{array}{r} 18 \mid 4 \\ +28 \\ \hline \end{array} \quad 4 \cdot 7 = 28$$

$$46$$

ist durch 23 teilbar; also auch $z = 174754$.

4. Ist $z = 75208$ durch $t = 119$ teilbar?

Es ist $a = 11$; $e = 9$; demnach $F(9) = 11 + 1 = 12$

$$\begin{array}{r} 7520 \mid 8 \\ +96 \\ \hline \end{array} \quad 12 \cdot 8 = 96$$

$$\begin{array}{r} 761 \mid 6 \\ +72 \\ \hline \end{array} \quad 12 \cdot 6 = 72$$

$$\begin{array}{r} 83 \mid 3 \\ +36 \\ \hline \end{array} \quad 12 \cdot 3 = 36$$

$$119$$

ist durch 119 teilbar; also auch 75208.

Es ist $75208 : 119 = 632$.

5. Ist $z = 425006$ durch $t = 71$ teilbar?

Es wird $F(1) = -7$

$$\begin{array}{r} 42500 \mid 6 \\ -42 \\ \hline \end{array} \quad (-7) \cdot 6 = -42$$

$$\begin{array}{r} 4245 \mid 8 \\ -56 \\ \hline \end{array} \quad (-7) \cdot 8 = -56$$

$$\begin{array}{r} 418 \mid 9 \\ -63 \\ \hline \end{array} \quad (-7) \cdot 9 = -63$$

$$\begin{array}{r} 35 \mid 5 \\ -35 \\ \hline \end{array} \quad (-7) \cdot 5 = -35$$

$$0$$

ist durch 71 teilbar; also auch 425006. Es ist
 $425006 : 71 = 5986$.

6. Teilt $t = 211$ $z = 4191515$?

Es ist $a = 21$; und $z = 1$; also $F(1) = -21$

$$\begin{array}{r} 419151 \mid 5 \\ -105 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41904 \mid 6 \\ -126 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4177 \mid 8 \\ -168 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \mid 9 \\ -189 \\ \hline \end{array}$$

211 ist durch 211 teilbar,
damit auch 4191515.

Wir geben eine Zusammenstellung der Hilfszahlen $F(e)$ für einige Teiler; die unterstrichenen Teiler sind Primzahlen.

t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$
<u>3</u>	+1	21	-2	39	+4	57	-17	<u>73</u>	+22	91	-9				
<u>7</u>	-2	<u>23</u>	+7	<u>41</u>	-4	<u>59</u>	+6	77	-23	93	+28				
9	+1	27	-8	<u>43</u>	+13	<u>61</u>	-6	<u>79</u>	-8	<u>97</u>	-29				
<u>11</u>	-1	<u>29</u>	+3	<u>47</u>	-14	63	+19	81	-8	99	+10				
<u>13</u>	+4	<u>31</u>	-3	49	+5	<u>67</u>	-20	<u>83</u>	+25	<u>101</u>	-10				
<u>17</u>	-5	33	+10	51	-5	<u>69</u>	+7	87	-26	<u>103</u>	+31				
<u>19</u>	+2	<u>37</u>	-11	<u>53</u>	+16	<u>71</u>	-7	<u>89</u>	+9	<u>107</u>	-32				

Dieser Aufstellung entnehmen wir, daß durch die Hilfszahl $F(9) = +1$ für $t = 9$ die Quersumme von z gebildet wird. Ebenso erkennt man, daß $F(1) = -1$ für $t = 11$ gleichbedeutend mit der Untersuchung der alternierenden Quersumme ist.

Für alle t , zu denen ein einstelliges $F(e)$ gehört, ist unsere Regel ganz gut handhabbar. Will man jedoch die Teilbarkeit durch $t = 93$ prüfen, erweist sich das Arbeiten mit der Hilfszahl 28 ungünstig. Da 93 jedoch das Produkt der Primzahlen 3 und 31 ist, können wir zunächst mit der Quersummenregel die Teilbarkeit durch 3 prüfen (auch hier ist $F(e) = 1$) und dann mit der Hilfszahl $F(1) = -3$ die Teilbarkeit durch 31 untersuchen. Ähnlich verfährt man bei den Teilern $t = 33$

$= 3 \cdot 11$ (Quersumme und Hilfszahl $F(1) = -1$), $t = 77 = 7 \cdot 11$ (Hilfszahl $F = -2$ und $F = -1$), $t = 63 = 3^2 \cdot 7$ (Quersumme und Hilfszahl $F = -2$).

Beispiel: Ist $z = 525833$ durch
 $t = 77 = 7 \cdot 11$ teilbar?

Prüfen
der Teilbarkeit
durch 7;

$F(7) = -2$

$$\begin{array}{r} 52583 \mid 3 \\ -6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5257 \mid 7 \\ -14 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 524 \mid 3 \\ -6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \mid 8 \\ -16 \\ \hline \end{array}$$

$$35 \text{ ist durch } 7$$

teilbar.

Prüfen
der Teilbarkeit
durch 11

Hilfszahl $F(1) = -1$

$$\begin{array}{r} 52583 \mid 3 \\ -3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5258 \mid 0 \\ -0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 525 \mid 8 \\ -8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \mid 7 \\ -7 \\ \hline \end{array}$$

$$44 \text{ ist durch } 11$$

teilbar.

Da z durch jeden Primfaktor von $t = 77$ teilbar ist, ist z auch durch 77 teilbar.

Gelegentlich kommt man zu günstigeren Hilfszahlen, wenn man von z statt einer Stelle 2 oder 3 Stellen abteilt, z also schreibt $z = 100A + K$ mit $0 \leq K \leq 99$ bzw. $z = 1000A + R$ mit $0 \leq R \leq 999$. Am bekanntesten ist die 1001-Regel: Man teilt von z die letzten 3 Stellen ab und subtrahiert diese dreistellige Zahl von der Rumpfzahl. Dann teilt 1001 die Zahl z genau dann, wenn 1001 diese Differenz teilt. Anders ausgedrückt:

1001 Teiler von $z = 1000A + R \leftrightarrow 1001$
Teiler von $A - R$, d. h. die Hilfszahl ist $F = 1$.

Beweis: $1001 \mid z \Rightarrow$

$$1000A + R = 1001 \cdot r \mid \cdot F$$

$$1000A + RF = 1001 \cdot r \cdot F \mid + A - 1000AF$$

$$A + RF = 1001rF - A(1000F - 1)$$

Die Hilfszahl F ist also so zu wählen, daß $1001/1000F - 1$, dies ist offensichtlich für $F = -1$ zu erreichen.

Beispiel:

Ist 45734689 durch 1001 teilbar?

$$\begin{array}{r} 45734 \mid 689 \\ -689 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \mid 045 \\ -045 \\ \hline \end{array}$$

0 ist durch 1001 teilbar,
also auch 45734689.

Da $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ist, hat man damit zugleich die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13 geprüft. Für $t=37$ ergibt sich als Hilfszahl $F = +10$, wenn man von z zwei Stellen abstreicht.

Beispiel: Ist 232693 durch $t=37$ teilbar?

$$\begin{array}{r} \text{Es ist } f=10 \\ 2326 \overline{) 93} \\ +930 \\ \hline 32 \overline{) 56} \\ 560 \end{array}$$

592 ist gleich $37 \cdot 16$,
also ist z durch 37 teilbar.

Für $t=167$ ergibt sich die Hilfszahl $F = -5$, wenn man von z zwei Stellen abstreicht. Versuche das nach obigem Vorbild zu beweisen!

Beispiel: Ist $z = 1318562$ durch $t=167$ teilbar?

$$\begin{array}{r} 131856 \overline{) 2} \\ -260 \\ \hline 1315 \overline{) 96} \\ -480 \\ \hline 8 \overline{) 35} \\ -175 \end{array}$$

-167 ist durch 167 teilbar,
mithin auch z .

Es ist $1318562 : 167 = 78956$.

Abschließend nennen wir einige Hilfszahlen F für Teiler t , wenn von z zwei Stellen abgeteilt werden. Es sei also

$z = 100A + K$ mit $A \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathbb{N}$

$0 \leq K \leq 99$. Dann ist

t	37	43	67	101	157	167	367
F	+10	-3	-2	-1	+11	-5	-11

Wenn wir von $z = 1000A + R$ mit $A \in \mathbb{N}$ und $R \in \mathbb{N}$ $0 \leq R \leq 999$ die letzten drei Stellen abtrennen, ergibt sich für $t=37$ die Hilfszahl $F = +1$.

Beispiel: Ist $z = 195721231$

durch $t=37$ teilbar?

Wir kombinieren hier die verschiedenen Möglichkeiten, die Teilbarkeit durch 37 zu prüfen. Hilfszahl für 3 abzuteilende Stellen: $f = +1$

Hilfszahl für 1 abzuteilende Stelle: $F = -11$

$$\begin{array}{r} 195721 \overline{) 231} \\ +231 \end{array}$$

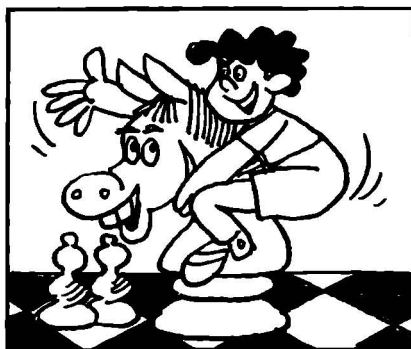
$$\begin{array}{r} 195 \overline{) 952} \\ +952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 114 \overline{) 7} \quad \text{nun nur 1 Stelle abteilen;} \\ -77 \quad \text{Hilfszahl } F = -11 \end{array}$$

37 ist durch 37 teilbar,
also auch z .

Man überzeugt sich leicht, daß dieses Verfahren schneller zum Ziel führt als die Division durch 37.

J. Portner (†)

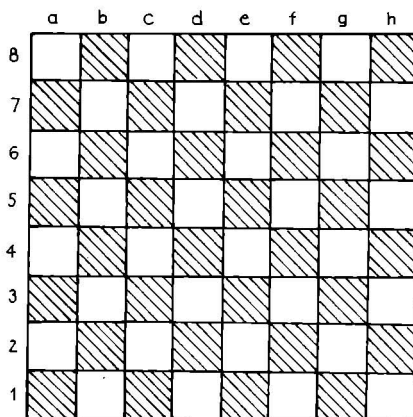


Acht und fünf

a) Stelle dir einmal auf dem leeren Schachbrett acht Damen so auf, daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können!

b) Und wie müßte man acht Damen so postieren, daß dabei ein Maximum von Feldern nicht von den Damen angegriffen ist?

c) Gelingt es dir, fünf Damen so aufzustellen, daß von ihnen alle Felder des Brettes kontrolliert werden?



Schach-Preisaufgabe

Für die Schachchecke einer Zeitung wurden drei Preisaufgaben vorbereitet. Es wurden Abbildungen über die Stellung der Schachfiguren angegeben, bei denen in zwei, drei bzw. vier Zügen matt zu setzen ist. Aber die Namen der Autoren wurden getrennt von den Abbildungen vorgegeben, und man fragte den verantwortlichen Redakteur nach der Zuordnung.

Der Redakteur erinnerte sich aber auch nicht, wer welche Aufgabe geschickt hatte. Etwas wußte er jedoch:

(1) In einer sehr schönen Miniatur (d. h. einer Schachaufgabe, bei der höchstens noch 7 Figuren auf dem Brett stehen), welche der 15jährige Schüler Bernd Müller zuschickte, stand der weiße König auf demselben Feld wie in der Aufgabe von Gisela Neumann.

(2) Die Aufgabe von Viktor Schmidt, wo noch die schwarze Rochade möglich ist (d. h., der schwarze König sowie der Turm stehen noch auf den Anfangsfeldern), enthält genau

die Hälfte von der Anzahl der Figuren wie Dreizüger.

(3) Die Ehefrau vom Autor des Vierzügers ist die Schwester von Gisela Neumann.

Der verantwortliche Redakteur baute eine Tabelle auf:

Namen	Dreizüger	Zweizüger	Vierzüger
-------	-----------	-----------	-----------

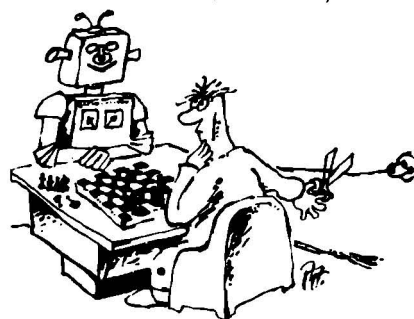
B. Müller

G. Neumann

V. Schmidt

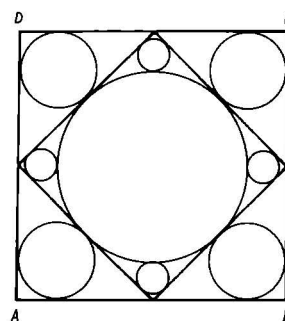
Und unter Berücksichtigung der obengenannten Bedingungen stellte er in die entsprechenden Kästchen Einsen, in die anderen – Nullen. Kannst du helfen, diese Einsen und Nullen in die Tabelle richtig einzusetzen?

A. Halameisär, Moskau

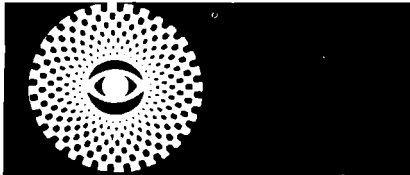


Eine harte Nuß

Das abgebildete Quadrat $ABCD$ habe die Seitenlänge a . Berechne die Summe der Flächeninhalte aller in diesem Quadrat enthaltenen Kreise!



Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 2

Ein Lokomotivführer ist in Nöten

Fräulein Steinmann, die Leiterin unseres Mathematikzirkels, hatte uns eine Aufgabe von einer Friedensfahrtetappe gestellt; sicher wußte sie, daß wir Jungen im vergangenen Jahr mit dem Rad in dem schönen Städtchen L waren, um den Friedensfahrern einen begeisterten Empfang zu bereiten. Wieviel voneinander verschiedene Möglichkeiten des Zieleinlaufs es bei einer siebenköpfigen Spitzengruppe gibt, hatten wir schon auf dem Heimweg ausgerechnet: Bei 7 Elementen gibt es 7! Permutationen. (Vgl. *alpha* Heft 1, Seite 16.) Wir rechneten sogar „im Kopf“: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Eine solch große Zahl hatte von uns niemand vermutet.

Doch die zweite Aufgabe bereitete uns allershand Kopfzerbrechen, und ohne die Hilfe unserer klugen Zirkelleiterin hätten wir die Lösung sicher nicht gefunden:

Bei wieviel der möglichen Einläufe steht mindestens ein, höchstens ein bzw. genau ein Fahrer aus der DDR auf dem Siegereck für die ersten drei, wenn unter den 7 Fahrern aus der Spitzengruppe zwei aus der DDR waren?

Mit den Formulierungen „genau ein“ (einer und keiner mehr und auch keiner weniger), „höchstens einer“ (keiner oder genau einer) bzw. „mindestens einer“ (genau einer oder mehr als einer) hatte uns Fräulein Steinmann schon oft zur Aufmerksamkeit gezwungen. Wir stellten zunächst fest, daß es genau die 6 Möglichkeiten des Einlaufs dafür gibt, daß beide DDR-Fahrer – wir nennen sie L und P – auf dem Siegerpodest stehen.

1. L L P P – –
2. P – L – L P
3. – P – L P L

Zu jeder dieser Plazierungen gehören 5! Einlaufmöglichkeiten, die sämtlich voneinander verschieden sind. Also kommen in $6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Fällen genau zwei DDR-Fahrer unter die ersten drei.

Wir untersuchten nun den Fall, daß mindestens 1 DDR-Fahrer unter den ersten drei ist.

Zu jeder der 6 Möglichkeiten in den Spalten der Platzierungstabelle von L bzw. P gibt es 6! Möglichkeiten für den Einlauf der restlichen sechs Fahrer.

1. L – – P – –
2. – L – – P –
3. – – L – – P

Dabei treten jeweils auch die Fälle auf, in denen der zweite DDR-Fahrer auf einen der ersten drei Plätze einkommt.

Schon glaubten wir, den Fall berechnet zu haben, für den *mindestens* ein DDR-Fahrer unter den ersten drei ist; doch zu unserem Glück merkte Gunter, daß dabei $6 \cdot 5!$ Fälle doppelt gezählt werden, denn der Fall, daß z. B. L erster und P zweiter wird, kann in der ersten und in der fünften Spalte der Tabelle auftreten. Also gibt es $6 \cdot 6! - 6 \cdot 5! = 4320 - 720 = 3600$ Einlaufmöglichkeiten, in denen *mindestens* ein DDR-Fahrer unter den ersten drei ist.

„Nun ist alles einfach“, jubelte Ralph nach kurzem Nachdenken, zeichnete eine Skizze an die Tafel und meinte, daß man mit den Zahlen 5040, 3600 und 720 schnell die restlichen beiden Teilaufgaben lösen kann. (Ob der Leser dies auch schafft?)

Alle Einlaufmöglichkeiten		
kein DDR-Fahrer „vorn“	genau ein DDR-Fahrer „vorn“	genau zwei DDR-Fahrer „vorn“
höchstens ein DDR-Fahrer „vorn“		
mindestens ein DDR-Fahrer „vorn“		

Unser Fräulein Steinmann freute sich sehr über die gute Idee, und sprach dem pfliffigen Ralph ein dickes Lob aus. Dann begann sie langsam eine kleine Geschichte zu erzählen: „Es war einmal ein ...“ „Rumpelstilzchen“, platzte Holger dazwischen. Wir murrtten, doch Fräulein Steinmann lächelte nur und fuhr unbeirrt fort: „... ein Lokomotivführer.“ Damit hatten wir nicht gerechnet.

„Der Lokomotivführer hatte einen eigenartigen Traum. Er sollte auf einem Rangierbahnhof einen D-Zug mit einer festgelegten Wagenfolge zusammenstellen. Auf Gleisen standen 5 Wagen 2. Klasse, 2 Wagen 1. Klasse, 2 Liegewagen, 1 Speisewagen und 1 Gepäckwagen. Er rangierte und rangierte, der Schweiß stand ihm auf der Stirn, hundert Wagenfolgen hatte er schon zusammengestellt, doch die richtige war noch immer nicht darunter. Plötzlich rasselte der rote Speisewagen mit großem Getöse über Schienen und Weichen, und der verzweifelte Lokführer wollte schon hinterherlaufen, da merkte er, daß sein großer Messingwecker klingelte und ihn zum Dienst rief. Später – auf dem Außenbahnsteig – sah er seinen wohlgeordneten D-Zug bereitstehen, und er lachte.“

Und damit schwieg Fräulein Steinmann.

„Und weiter?“ fragte die ungeduldige Kerstin. Unser Fräulein Steinmann zuckte nur die Achseln, und da wußten wir, daß sie uns wieder einmal eine Aufgabe wohlverpackt überreicht hatte. „Hundert verschiedene Wagenanordnungen gibt es gar nicht“, meinte Corinna, die schon öfter mit einem D-Zug gefahren war. „Es gibt 11! Möglichkeiten, das sind mehr als 1000“, widersprach Utta. Doch Oliver teilte auch diese Meinung nicht, da ja eine Umordnung *gleicher* Wagen an der Wagenfolge nichts ändern würde.

Fräulein Steinmann schrieb eine Wagenfolge an:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.
W₂ W₂ W₂ W₂ W₂ W₁ W₁ L L S G
Natürlich gibt es 11! Möglichkeiten, die Wagenfolge umzuordnen, doch das Vertauschen etwa des 2. mit dem 3. Wagen „bewirkt nichts“, es entsteht keine andersartige Wagenfolge. Die 5! Möglichkeiten, die Wagen 2. Klasse miteinander zu vertauschen (und die anderen dabei festzulassen) fallen deshalb zu einer Permutation zusammen. Wir stellten fest:

5 Wagen 2. Klasse: 5! Permutationen fallen zusammen, 2 Wagen 1. Klasse: 2! Permutationen fallen zu einer zusammen, 2 Liegewagen: 2! Permutationen fallen zu einer zusammen.

„Wir müssen also die Anzahl der möglichen Permutationen von 11 Wagen durch die Anzahl derjenigen Permutationen teilen, die keine Veränderung hervorrufen“, schlug der kleine Oliver vor, der nun ganz besessen war, das Problem bis zu Ende zu lösen, Fräulein Steinmann gab ihm *grünes Licht*, und Oliver schrieb an die Tafel:

Wir rechneten gemeinsam aus, daß es 83160 voneinander verschiedene Anordnungen dieser 11 Wagen gibt. Dabei war Ralph am schnellsten fertig, weil er den an der Tafel stehenden Bruch durch $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$ ersetzt hatte. Wir sahen sofort ein, daß er sich durch geschicktes Kürzen eine Menge Arbeit erspart hatte.

Da hätte der arme Lokführer möglicherweise noch lange rangieren müssen!

„Fädelt euch eine Perlenkette!“ sagte Fräulein Steinmann und holte eine Schnur, eine rote, eine schwarze und drei weiße Perlen aus ihrer Tasche. Wir wußten natürlich wieder, daß wir nicht fädeln, sondern überlegen sollten. Wir sahen uns Olivers Tafelbild an und dachten darüber nach, auf welche Weise wir die Anzahl der voneinander verschiedenen Auffädelungsmöglichkeiten der Perlen be-

rechnen könnten, nur die gewissenhafte Utta fing sofort an zu schreiben. Sie malte alle Möglichkeiten auf, konnte sich jedoch nicht für eine schönste Kette entscheiden, obwohl sie nur 20 Möglichkeiten gefunden hatte.

w r s s s s w r s s s s w s r
w s r s s s w s r s s s w r
w s s r s s w s s r s s r w
w s s s r s r w s s s r s w

r w s s s s s r s w s
r s w s s s r s s w
r s s w s s s r w s
r s s s w s s w r s

Jens bestätigte dieses Ergebnis und erklärte: „5 Perlen werden vertauscht, davon sind drei Perlen mit der gleichen Farbe, bei denen eine Vertauschung der Reihenfolge zu keiner neuen Kette führt. Also gibt es $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten.“

Fräulein Steinmann hatte wieder Grund, uns zu loben.

„Nun wollen wir die gefundene Gesetzmäßigkeit beschreiben“, sagte sie. Keiner von uns hatte eine vernünftige Idee, doch Fräulein Steinmann meinte, es sei gar nicht so schwer: „Wir haben n Elemente, davon stimmen – denkt an unseren D-Zug – z. B. a , b bzw. c Elemente überein. Die Anzahl dieser Permutationen mit Wiederholung wollen wir mit $P_n^{a,b,c}$ bezeichnen.“

Nun schafften wir es: $P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$.

Wir stellten noch fest, daß $a + b + c \leq n$ gelten müsse, denn es können ja nicht mehr Elemente mehrfach auftreten als überhaupt vorhanden sind.

Fräulein Steinmann begründete uns noch einmal die Richtigkeit der gefundenen Formel: „Angenommen, die n gegebenen Elemente sind voneinander verschieden, dann gibt es $n!$ verschiedene Permutationen. Nun machen wir a Elemente gleich, dann unterscheiden sich alle diejenigen Permutationen nicht mehr voneinander, die durch Vertauschen übereinstimmender Elemente auseinander hervorgehen, unabhängig davon, an welcher Stelle diese Elemente auftreten. Damit fallen stets $a!$ Permutationen zu einer zusammen, also haben wir die Gesamtzahl der Permutationen durch $a!$ zu dividieren. Nun kann man weitere b Elemente als nicht unterscheidbar betrachten, dann...“

„Alles klar!“ meinte Jens, und wir anderen nickten zustimmend mit den Köpfen.

„Dann werdet ihr sicher auch die Nüsse bis zum nächsten Zirkel knacken können, die ich euch heute mitgebracht habe“, sagte Fräulein Steinmann und stellte uns noch einige Aufgaben zu Permutationen, einige ohne und einige mit Wiederholung:

1. Wieviel Wörter kann Kerstin aus den Buchstaben ihres Namens bilden, wenn kein Buchstabe mehrfach benutzt werden darf und

auch alle sinnlosen Wörter zugelassen werden?

2. Wieviel fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden, wenn

- jede Ziffer genau einmal,
- jede Ziffer höchstens zweimal,
- jede Ziffer höchstens dreimal auftreten darf?

3. Man bilde alle Permutationen der Ziffern 1, 2, ..., 6!

Wie oft steht dabei die Ziffer 4 an erster Stelle?

Wie oft steht dabei die Ziffer 1 an sechster Stelle?

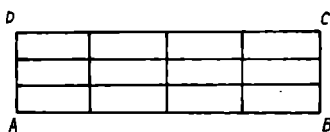
Wie oft steht dabei die Ziffer 2 an letzter oder vorletzter Stelle?

Wie oft stehen dabei die Ziffern 1 und 2 nebeneinander?

4. Sechs Kinder wollen in einem Ferienlager Radrennen austragen. Es stehen drei Räder ohne Gangschaltung, 1 Rad mit Dreigangschaltung, ein Rad mit Fünfgangschaltung und ein Rad mit Zehngangschaltung zur Verfügung. Wie oft muß das Rennen durchgeführt werden, wenn alle Möglichkeiten der Verteilung der Fahrräder ausprobiert werden sollen?

5. In wieviel Permutationen der Elemente $a a a a b b b$ kommen die drei Elemente b b b nicht nebeneinander vor?

6. Auf wieviel voneinander verschiedenen Wegen kann man vom Eckpunkt A des Rechteckes $ABCD$ zum gegenüberliegenden Eckpunkt C gelangen, wenn man wahlweise auf Strecken waagrecht bzw. senkrecht zur Seite AB des Rechteckes fortschreiten darf? Dabei soll die Länge des zurückgelegten Weges gleich der Länge zweier benachbarten Seiten des Rechteckes sein.



Während wir unsere Sachen einpackten, diskutierten wir bereits über die gestellten Aufgaben. Vor allem die letzte schien uns eine harte Nuß zu sein.

Nur Holger, der bald einen großen Gewinn machen wollte, murrte:

„Und wo bleibt die Lösung des Lotto-Problems?“

„Später“, sagte Fräulein Steinmann nur und lachte.

(Fortsetzung folgt.)

P. Göthner

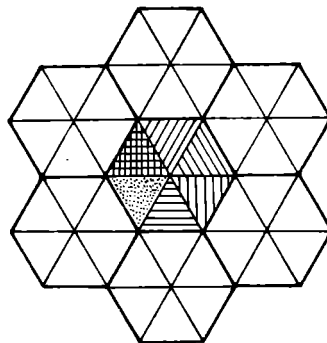
Der Lehrer schreibt eine chemische Formel an die Tafel und fragt eine Schülerin: „Was ist das für eine Formel?“

Sie sagt: „Hm, sie liegt mir auf der Zunge.“

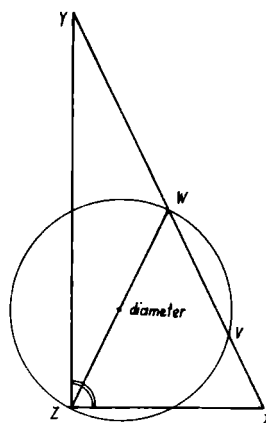
Der Lehrer: „Dann spucke sie sofort aus, es ist Salzsäure!“



▲1▲ Из семи правильных шестиугольников один раскрашен шестью красками (см. рисунок). Раскрасьте остальные шестиугольники теми же красками так, чтобы в „цветке“, изображенном на рисунке, все треугольные участки, граничащие по сторонам шестиугольников, были окрашены одинаково.



▲2▲ In right $\triangle XYZ$ shown below, W is the midpoint of $\overline{XY}$, and the circle with $\overline{ZW}$ intersects $\overline{WX}$ at V . Calculate the length of $\overline{XZ}$ if $\overline{XY} = 50$ and $\overline{WV} = 7$.



▲3▲ On veut blanchir la façade d'une école. Cette façade a 18 m de longueur et 12 m de hauteur; on y voit 12 fenêtres et une porte. Les dimensions, en m, de chaque fenêtre sont 2,5 et 1,5; celles de la porte 3 et 2. Calcule l'aire en m^2 de la surface à blanchir.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1984



Mathematik

Ma 5 ■ 2435 Setzt man zwischen die dritte und vierte Grundziffer (von links) der Zahl 1983 eine zweistellige natürliche Zahl, so entsteht eine sechsstellige Zahl z_1 . Setzt man diese zweistellige Zahl zwischen die zweite und dritte Grundziffer der Zahl 1983, so entsteht eine weitere sechsstellige Zahl z_2 . Die Differenz aus z_1 und z_2 soll 360 ergeben. Wie lautet die einzufügende zweistellige Zahl?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2436 Frank hat fünf Stäbe von je 5 dm und zwei Stäbe von je 3 dm Länge. Er will damit Strecken von 18, 19, 20, 21 bzw. 22 dm Länge abmessen. Wie macht er das, wenn er nur diese Stäbe und keine weiteren Hilfsmittel verwendet?

Schreibe die Lösung wie folgt: $17 \text{ dm} = 4 \cdot 5 \text{ dm} - 1 \cdot 3 \text{ dm}$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2437 Maik soll eine einstellige natürliche Zahl erraten. Regina und Klaus machen jeder über diese Zahl zwei Aussagen, von denen eine wahr, die andere falsch ist.

Regina:

- (1) Die Zahl ist nicht kleiner als 5.
- (2) Sie ist nicht durch 4 teilbar.

Klaus:

- (1) Die Zahl ist größer als 8.
- (2) Sie ist Nachfolger von 7.

Wie heißt die zu erratende Zahl? Begründe deine Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2438 Gib alle dreistelligen natürlichen Zahlen an, die folgende Eigenschaften haben:

- (1) Die Zahlen bestehen nicht aus drei gleichen Grundziffern.
- (2) Sie haben vor- und rückwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge.

- (3) Sie lassen sich (ohne Rest) durch 2 dividieren.
- (4) Sie enthalten keine Grundziffer 4.

Ein Beispiel wäre die Zahl 656.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2439 Die Herren Schneider, Meier, Krause und Müller spielen Karten. Ihre Vornamen sind (in anderer Reihenfolge) Jürgen, Uwe, Mario und Roger. Mario spielt aus; Herr Müller sticht; Herr Krause wirft ab; Roger muß bedienen. Zum Schluß des Kartenspiels ist Mario der Erste, Herr Schneider Zweiter, Jürgen Dritter und Herr Krause Vierter. Wie heißen die Kartenspieler mit Vor- und Zunamen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2440 Jemand kauft 30 Flaschen „Berliner Pilsner“, die Flasche zu 1,58 M einschließlich 30 Pf Pfand. Nachdem sämtliche Flaschen dieses Bieres ausgetrunken waren, bringt der Kunde die leeren Flaschen zurück in die Kaufhalle und erwirbt allein vom Pfandgeld erneut weitere Flaschen „Berliner Pilsner“. Das wird solange wiederholt, bis das Pfandgeld für den Kauf von genau einer Flasche Bier nicht mehr ausreicht. Wie viele Flaschen „Berliner Pilsner“ hat dieser Kunde auf diese Weise insgesamt erworben?

Sch.

Ma 6 ■ 2441 Während eines Monats konnten Klaus, Steffen, Frank und Dirk zusammen 194 leere Flaschen an den Altstoffhandel abliefern. Steffen hatte dreimal soviel Flaschen wie Dirk, Klaus hatte soviel Flaschen wie Steffen und Dirk zusammen, Frank 22 Flaschen weniger als Klaus gesammelt. Wieviel Flaschen hat jeder der vier Jungen gesammelt?

Schüler Klaus Liesenburg, Ilsenburg

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingegandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

| | | |
|----|--|--------------|
| | Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22
Kersting-OS, Klasse 7 | Ma 7
1369 |
| 30 | 150 | 30 |
| | Prädikat: | 9 |
| | Lösung: | |

Ma 6 ■ 2442 Gerd ist zweimal so alt wie sein Bruder Frank. Gerts Mutter ist 25 Jahre älter als Frank und dreimal so alt wie Gerd. Wie alt (in ganzen Jahren) sind die beiden Brüder und ihre Mutter?

Schüler Andreas Peukert, Helmershausen

Ma 6 ■ 2443 Als Herrn L. von seinen Schülern zum Geburtstag gratuliert wird, beantwortet er die Frage nach seinem Lebensalter (in ganzen Zahlen) wie folgt:

- (1) Die Zahl, die mein Lebensalter angibt, ist größer als 45.
- (2) Addiert man die Anzahl der Zehner und die Anzahl der Einer dieser Zahl, so ist die Summe eine einstellige natürliche Zahl.
- (3) Die Einerstelle stellt eine gerade natürliche Zahl dar.
- (4) An der Zehnerstelle steht keine gerade natürliche Zahl.
- (5) Diese vier von mir gemachten Angaben sind alle falsch.

Welches Lebensalter hat Herr L. zu diesem Zeitpunkt erreicht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2444 Rita, Sven und Toni rechnen um die Wette das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ aus. Rita erhält als Ergebnis 6227020890, Sven 6227028000 und Toni 6227029800. Begründe, ohne jeweils das ganze Produkt auszurechnen, daß alle Ergebnisse falsch sind!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2445 Ein Weinbauer vererbt seinen drei Söhnen 70 leere, 7 volle und 7 halbvollere Weinfässer. Jeder sollte gleich viel Wein und gleich viel Fässer erhalten. Weise nach, daß genau zwei Söhne die gleiche Aufteilung erhielten, also gleich viel volle, halbvollere und leere Fässer! StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2446 Klaus wird von seinem Freund gefragt, wie viele Wohnungen sich in dem Haus befinden, in dem er mit seinen Eltern wohnt. Darauf antwortet Klaus: „Rechne es dir selber aus! Es sind mindestens 20, aber höchstens 70 Wohnungen. Es sind 2-, 3- bzw. 4-Zimmer-Wohnungen. Es sind doppelt so viele 2-Zimmer- wie 3-Zimmer-Wohnungen. Jede zwölfte Wohnung ist eine 4-Zimmer-Wohnung.“ Wie viele 2-, 3- bzw. 4-Zimmer-Wohnungen hat das Wohnhaus, in dem Klaus wohnt? Andrea Putz, Lichtenstein

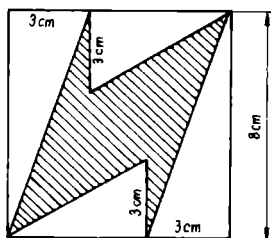
Ma 7 ■ 2447 Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von $a = 3 \text{ cm}$! Verlängere alle Quadratseiten um 2 cm , und zwar $\overline{AB}$ über B hinaus bis E , $\overline{BC}$ über C hinaus bis F , $\overline{CD}$ über D hinaus bis G und $\overline{DA}$ über A hinaus bis H ! Verbinde die Punkte E, F, G und H zu einem konvexen Viereck $EFGH$!

- a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$?
- b) Weise nach, daß dieses Viereck ebenfalls ein Quadrat ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2448 Von einem Quadrat wurden, wie aus dem Bild ersichtlich, rechtwinklige Dreiecke abgeschnitten. Welchen Flächeninhalt hat das übrig gebliebene Flächenstück, das schraffiert dargestellt wurde?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ■ 2449 Frau B kaufte in einem Backwarengeschäft 2 Brötchen mehr, Frau A 7 Brötchen mehr als Frau C. Frau A kaufte 1 Stück Bienenstich weniger, Frau C 2 Stück Bienenstich mehr als Frau B. Frau C kaufte 1 Stück Butterkuchen mehr, Frau B 3 Stück Butterkuchen mehr als Frau A. Von diesen drei Frauen wurden zusammen 32 Stück Backwaren gekauft, von jeder Sorte wenigstens ein Stück. Wieviel Stück Backwaren jeder Sorte kaufte jede dieser drei Frauen, wenn die Anzahl der von Frau A gekauften Butterkuchen kleiner, die Anzahl der von Frau C gekauften Brötchen größer ist als die Anzahl der von Frau B gekauften Stück Bienenstich? Sch.

Ma 8 ■ 2450 Wenn man eine beliebige durch 3, aber nicht durch 2 teilbare natürliche Zahl um 9 vermindert oder vermehrt, so erhält man stets eine durch 6 teilbare natürliche Zahl. Diese Behauptung ist zu beweisen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2451 Es ist zu beweisen, daß die Summe aus sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 7 teilbar ist.

Schüler Olaf Karger, Wittenberge

Ma 8 ■ 2452 Welchen prozentualen Anteil hat ein Würfel am Volumen einer Kugel, die der Würfel mit allen seinen Eckpunkten berührt? Schüler B. Fischer, Nünchritz

Ma 8 ■ 2453 Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ und $c = 7 \text{ cm}$! Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, das flächengleich dem Dreieck ABC ist! Die Konstruktion ist zu begründen. Sch.

Ma 9 ■ 2454 Es sind alle natürlichen Zahlen x zu ermitteln, für die $\sqrt{x} = 2\sqrt[3]{x}$ eine wahre Aussage wird.

Schüler Peter Hermann, Hoyerswerda

Ma 9 ■ 2455 Bernd soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und einer Million bestimmen. Dora, Ernst und Frank machen dazu jeder genau eine wahre und genau eine falsche Aussage.

Dora:

- (1) Sie hat weniger als drei Stellen.

- (2) In ihrer Primzahlenzerlegung sind genau zwei verschiedene Primzahlen.

Ernst:

- (1) Sie ist nicht durch 9 teilbar.
- (2) Sie ist nicht durch 27 teilbar.

Frank:

- (1) Sie lautet 91809.
 - (2) Sie ist durch 101 teilbar.
- Wie lautet die Zahl?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2456 Herr A. hebt von seinem Sparkonto 500,- M ab. Er erhält genau 16 Banknoten ausgehändigt, und zwar 10-Mark-Scheine, 20-Mark-Scheine und 50-Mark-Scheine. Wie viele Geldscheine jeder der drei Sorten erhielt Herr A ausgezahlt, wenn es mehr 20-M-Scheine als 10-M-Scheine, aber weniger als 50-M-Scheine waren? Sch.

Ma 9 ■ 2457 Gegeben sei ein Kreis $k(M;r)$. In diesen Kreis sei ein Durchmesser $d = 2r$ eingezeichnet. Parallel zu diesem Durchmesser sei eine Sehne der Länge $s = r$ gezeichnet. Es ist der Abstand dieser Sehne vom Durchmesser des Kreises $k(M;r)$ zu berechnen.

Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 2458 Welche reellen Zahlen a und b erfüllen die Ungleichung

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \frac{a+1}{4} + b + 1?$$

Student Andreas Stenzel, Cottbus

Ma 10/12 ■ 2459 Der Ausdruck $n!$ (lies: n Fakultät) ist wie folgt definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n.$$

Es ist auf rationelle Weise zu ermitteln, auf welche Ziffer die Summe $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 100!$ endet!

Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 2460 Die Maßzahl des Umfangs eines rechtwinkligen Dreiecks (gemessen in ganzen cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhalts (gemessen in ganzen cm^2).

- a) Existieren rechtwinklige Dreiecke mit dieser Eigenschaft?
- b) Welche Längen besitzen die Seiten dieser rechtwinkligen Dreiecke? Sch.

Ma 10/12 ■ 2461 Es ist zu zeigen, daß für alle Dreiecke ABC gilt:

$$\sin \gamma = \frac{q \cdot u}{a \cdot b}.$$

Dabei sind a und b die Längen der Seiten, die den Winkel der Größe γ einschließen, u der Umfang des Dreiecks ABC und q die Länge des Inkreisradius.

Schüler Bernd Neuß,
Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

Physik

Ph 6 ■ 156 Der Fixstern, der unserem Sonnensystem im Weltall am nächsten ist, ist der Stern „Proxima Centauri“ im Sternbild Zentaur am südlichen Sternenhimmel. Seine Ent-

fernung beträgt rd. 40,2 Billionen Kilometer. Welche Zeit braucht das Licht, um diese Entfernung zurückzulegen? Gib das Ergebnis auch in Jahren, Tagen und Stunden an!

Ph 7 ■ 157 Durch eine Rohrleitung von 40 mm lichter Weite strömen in einer Stunde 4,53 m³ Wasser. Berechne die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers! Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit, wenn man das Rohr auf die halbe lichte Weite verengt?

Ph 8 ■ 158 Nach einem Brand in einer Lagerhalle wurde bei der Spurensicherung durch die Genossen der Feuerwehr folgendes festgestellt:

Ein Stahlträger mit einer Länge von 15 m hatte durch die Wärmeeinwirkung eine Längenausdehnung um 45 mm erfahren. Welche Maximaltemperatur hatte der Träger während des Brandes angenommen, wenn ansonsten die Umgebungstemperatur konstant 12°C beträgt? (Linearer Ausdehnungskoeffizient: $\alpha = 0,000012 \text{ grd}$)

Ing. K.-H. Milde, Dresden

Ph 9 ■ 159 In einem Salzbergwerk soll eine elektrische Pumpe mit dem Wirkungsgrad η Salzsole mit der Dichte ρ aus einer Tiefe s an die Erdoberfläche heben. Dabei soll die Salzsole in einer Menge n (in C/min) gefördert werden.

a) Es ist eine Formel für die Leistung P aufzustellen, mit der die Pumpe betrieben werden muß.

b) Es ist die Leistung P für folgende Werte zu berechnen:

$\eta = 0,8$; $\rho = 1,15 \text{ g/cm}^3$; $s = 50 \text{ m}$; $n = 360 \text{ C/min}$.

c) Wie stark muß der Stromkreis abgesichert sein, wenn diese Pumpe an Normalspannung ($U = 220 \text{ V}$) angeschlossen ist?

J. Weber, Karl-Marx-Stadt

Ph 10/12 ■ 160 Eine Lore rollt auf einer schiefen Ebene mit der Höhe von 2 m abwärts. Berechnen Sie den Anstiegswinkel, wenn die Lore am Ende eine Geschwindigkeit von 18 km/h erreicht hat! Die Rollreibungszahl beträgt 0,05.

Chemie

In alten Schulbüchern geblättert

Ch 7 ■ 125 Aus: *Rechenbuch für niedere und besondere Landschulen* von A. H. Rieß, Magdeburg und Dessau 1801

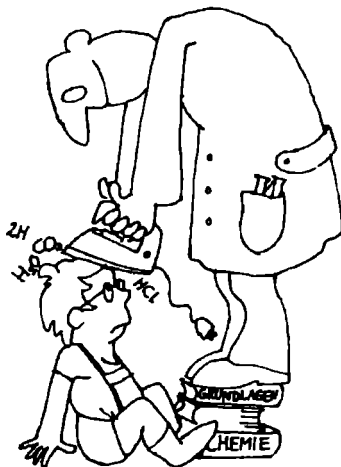
Eine gewisse Arznei wird aus mehreren Sachen bereitet, von der ersten kommen 12 Lothe, von der zweiten 13 Loth, von der dritten 8 Loth, von der vierten 7 Loth; wieviel von jeder Ingredienz (Zutat) wird zu 10 Pfund erfordert? (1 Pfund = 32 Loth)

Ch 8 ■ 126 Aus: *Sammlung arithmetischer Aufgaben*. Zum Gebrauch in Regimentsschulen. Fr. Richter und O. Bucher, I. Lieutenants im K.S. Artillerie-Corps. Dresden 1858.

Um Hufsalbe zu bereiten schmelze man 4 Loth gelbes Wachs

1 Pfund reinen Rindstalg

unter $1\frac{1}{4}$ Pfund Baumöl, bei gelindem Feuer, in einem Kessel und setze, nachdem derselbe vom Feuer wieder entfernt worden ist, 4 Loth gemeinen Terpentin hinzu. Das Ganze rühre man bis zum völligen Erstarren. Wieviel wird von jedem der genannten Bestandteile nothwendig sein, um 17 Pfund Hufsalbe zu gewinnen, wenn auf $1\frac{1}{2}$ Prozent Verlust bei der Bereitung zu rechnen ist? (1 Pfund = 32 Loth)



Ch 9 ■ 127 Aus: Johann Philipp Grösens *Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik*, Berlin 1800

Ein Weinhändler hat nicht mehr als 2 Sorten Wein, wovon er die eine Sorte zu 10, die andere zu 5 Gr. (Groschen) die Bouteille verkauft. Man verlangt von ihm die Bouteille zu 8 Gr. Wie viele Bouteillen werden von jeder Sorte dazu gefordert, um eine neue hervorzu- bringen, welche zu 8 Gr. verkauft werden kann?

Ch 10/12 ■ 128 Aus: *Auflösung algebraischer Gleichungen des ersten und zweiten Grades* von Adam Burg, Wien 1827

Um eine gute schwarze Tinte zu bereiten, nimmt Jemand auf 2 Quart Regenwasser, folgende Zuthaten: geraspелtes Blauholz, grob gepulverte Galläpfel, grünen Eisenvitriol, arabisches Gummi und Gewürznelken. Die Mengen sind dem Gewichte nach aus folgenden Angaben zu bestimmen: das Gewicht des Eisenvitriols um jenes des Gummi vermehrt, ist gleich dem Gewichte der Galläpfel; das Gewicht der Galläpfel um 1 Unze vermehrt, ist dem vierfachen Gewicht des Blauholzes gleich; der achte Theil des Gewichtes der Galläpfel ist noch drei mal so groß, als jenes der Gewürznelken; endlich ist der sechzehnte Theil des Gewichtes des Gummis, dem Gewichte der Gewürznelken gleich, und alles zusammen.

José Luis Massera aus dem Kerker freigekämpft

Montevideo, 2. März 1984 (ADN)

Der bekannte uruguayische Mathematiker und Kommunist José Luis Massera ist nach mehr als achtjähriger Haft freigekämpft worden. Das uruguayische Militärregime hatte den aufrechten Demokraten und Antifaschisten im Oktober 1975 während einer Razzia gegen die fortschrittliche Bewegung in Montevideo verhaftet und zu einer Gefängnisstrafe von 20 Jahren verurteilt. Für seine Freilassung hatten sich Wissenschaftler aus allen Ländern eingesetzt, u. a. mehr als 50 Nobelpreisträger. Neun Universitäten, darunter die Humboldt-Universität zu Berlin, verliehen Massera ihre Ehrendoktorwürde.

Brüderliche Grüße und Glückwünsche hat das Solidaritätskomitee der DDR dem nach achtjähriger Haft freigekämpften Mathematiker und Kommunisten übermittelt. Das Komitee versichert, alle Kraft für die Freiheit aller etwa 1000 noch eingekerkerten uruguayischen Patrioten einzusetzen.

**amnistía,
democracia
y libertad
para URUGUAY**



Zwei Aufgaben und sieben Lösungen

Wer mehr weiß und Phantasie hat, kommt rasch zum Ziel

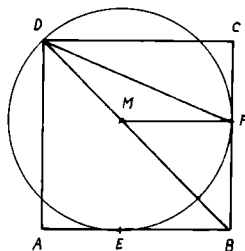
Teil 2

▲2▲ Gegeben ist ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, daß er zwei Nachbarseiten des Quadrates berührt und durch einen Eckpunkt des Quadrates geht.

Sie entwerfen eine Skizze (Bild 2) und überlegen zunächst wieder gemeinsam. Alle Quadratseiten sind gleichberechtigt; es wird vereinbart, daß BC in F und AB in E berührt werden sollen, und D soll gemeinsamer Punkt von Kreis und Quadrat sein.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn der Mittelpunkt M des Kreises ermittelt ist. Eine Bestimmungslinie für M erkennen die drei bald: Da BC und AB Tangenten des Kreises sein sollen, muß sein Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ liegen, also auf der Diagonalen BD .

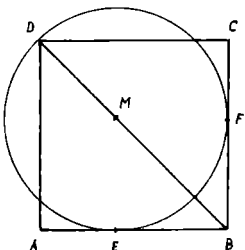
Bild 2



Wie aber findet jeder von ihnen eine zweite Bestimmungslinie für M ?

Rainer konzentriert sich auf die Teilfigur BCD : Er überlegt: F und D sind Kreispunkte, sie sind also von M gleich weit entfernt. Die Punkte D, M, F bilden demnach ein gleichschenkeliges Dreieck. Das zeichnet er ein (Bild 3).

Bild 3



Von diesem Dreieck müßte man wissen, wie groß die Basiswinkel sind. Dann könnte man diesen Winkel an BD in D antragen. Der freie Schenkel schneidet BD in F und die Senkrechte zu BC in F (der Berührungsradius) schneidet BD in M .

Rainer rechnet gerne, und so rechnet er die Größe des Winkels $\angle BDF$ aus, indem er den Winkelsummensatz auf das Dreieck $\triangle FCD$ anwendet.

Er berücksichtigt dabei,

daß $\angle FDC = 45^\circ - \angle BDF$ und

$\angle CFD = 90^\circ - \angle DFM = 90^\circ - \angle BDF$ ist.

$\angle FDC + 90^\circ + \angle CFD = 180^\circ$

$45^\circ - \angle BDF + 90^\circ + 90^\circ - \angle BDF = 180^\circ$

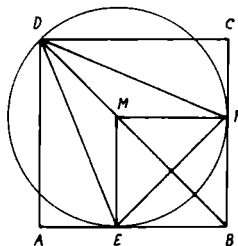
$2 \angle BDF = 45^\circ$

$\angle BDF = 22,5^\circ$

Beim Kontrollieren der Lösung erkennt er, daß er umständlich gearbeitet hat. Die Größe des Außenwinkels $\angle FMB$ des gleichschenkeligen Dreiecks DMF beträgt 45° , denn $MF \parallel DC$. Der Außenwinkel ist aber so groß wie die Summe der beiden Basiswinkel. Es ist also $\angle BDF = \angle MFD = 22,5^\circ$.

Torsten ergänzt die Skizze durch die Sehne FE , und er zeichnet auch die beiden Berührungsradien ME und MF ein (Bild 4).

Bild 4



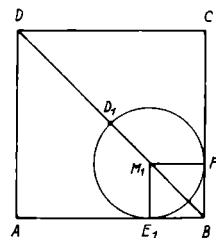
Er betrachtet die Gesamtfigur und wendet seine Kenntnisse der Sätze von den Winkeln am Kreis an. EM und FM stehen senkrecht aufeinander, da ja auch die Tangenten senkrecht aufeinanderstehen. $\angle EMF$ ist Zentriwinkel zu EF . Seine Größe beträgt 90° . Jeder Peripheriewinkel, auch der mit dem Scheitel D , ist also 45° groß. Diesen Winkel zeichnet Torsten ein. Die Diagonale BD halbiert diesen Winkel, und Torsten kann nun, ausgehend von BD und der Kenntnis des Winkels $\angle BDF$, den Punkt F und dann M konstruieren.

Uwe liebt die Ähnlichkeitslehre und geometrische Abbildungen. Er erinnert sich, daß man bei der Konstruktion von Figuren, die bestimmte Bedingungen erfüllen sollen, zunächst eine Figur konstruiert, die einige der Bedingungen erfüllt und der geforderten Figur ähnlich ist. Durch eine zentrische

Streckung kann er diese dann so verändern, daß weitere durch die Aufgabe gestellte Bedingungen erfüllt werden.

Er zeichnet um M_1 zunächst einen Kreis, der die Quadratseiten zwar in E_1 und F_1 berührt,

Bild 5



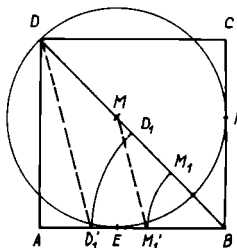
die Diagonale aber nicht in D , sondern in D_1 schneidet (Bild 5).

Mit B als Streckzentrum führt er dann eine

zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{BD}{BD_1}$

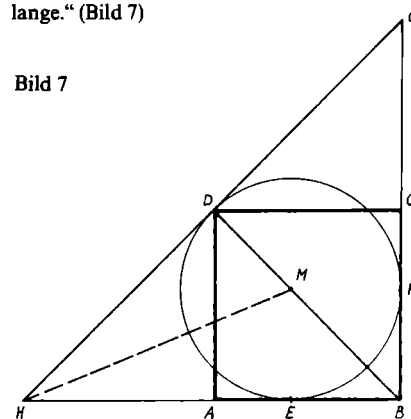
aus. Dadurch werden D_1 auf D und M_1 auf M abgebildet. Wie Uwe das macht, zeigt Bild 6.

Bild 6



Die Freunde vergleichen noch ihre Lösungswege, da kommt Gabi, das Mathe-As der Klasse, dazu. „Ihr Jungens habt zu wenig Phantasie“, sagt sie. „Ergänzt eure Skizze einmal zu einem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck! Dann seht ihr, daß der zu konstruierende Kreis der Inkreis ist. Und wie wir den zu konstruieren haben, das wissen wir schon lange.“ (Bild 7)

Bild 7



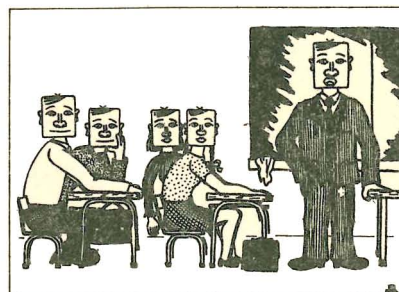
Sprach's und ließ die drei verblüfften Freunde zurück.

W. Jungk

In freien Stunden • alpha-heiter

„Ich erziehe die Kinder nach meinem Vorbild.“

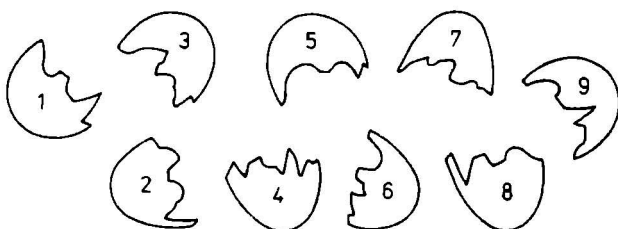
Karikatur: Jürgen Frick



Frohe Ostern

Aus den abgebildeten Bruchstücken von Eierschalen sind jene zusammenzusuchen, die eine vollständige Eierschale ergeben.

NBI, Berlin



Es ist 12 durch 23

Jeder von euch kennt die Antwort auf die Frage nach der Uhrzeit, wenn der Befragte eine Digitaluhr hat: „Es ist 12 durch 23, ausrechnen mußt du es selbst!“

Es erhebt sich nun die Frage für mathematisch interessierte Menschen, wie oft kommt bei dieser *Division* ein ganzzahliges Ergebnis zustande? Es soll eine Digitaluhr zugrunde gelegt werden, die einen 24-Stunden-Rhythmus hat. Ein Beispiel:

Bei 18 Uhr und 6 Minuten – 18 : 06 – ergibt sich die Lösung 3! Also, wievielmals ist das Resultat ganzzahlig?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

alpha auf Kurs 80

Wievielmals kann man das Wort ALPHA in seiner unmittelbaren Buchstabenfolge lesen? Das heißt, jeweils von Buchstabe zu Buchstabe sei ein Schritt nach rechts bzw. nach unten erlaubt.

ALPHALPHA
LPHALPHAL
PHALPHALP
HALPHALPH
ALPHALPHA

Beachte: Der letzte Buchstabe des Wortes ALPHA ist in den meisten Fällen gleichzeitig Anfangsbuchstabe von neuen Wörtern. Zur Erleichterung ist eine Lösung fett ausgedruckt.

R. Schütz, W.-Pieck-OS Rotta
Leiter des Kreisklubs Jg. Math. Gräfenhainichen

Spielereien um das Jahr 1984

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 9 - 8 - \sqrt{4} = -1 - \sqrt{9} + 8 - 4 \\ 7 &= 19 - 8 - 4 = 1 \cdot 9 - 8 : 4 \\ 16 &= (1 + 9 - 8)^4 = 1 + 9 + 8 - \sqrt{4} \\ 23 &= 19 + 8 - 4 = 19 + \sqrt{8 \cdot \sqrt{4}} \\ 34 &= -1 + \sqrt{9} + 8 \cdot 4 = 1 + 9! : 8! + 4! \\ 84 &= 1^9 \cdot 84 = (1 + 9) \cdot 8 + 4 \\ 110 &= [-1 + (\sqrt{9})!]! - 8 - \sqrt{4} \\ 130 &= 1 + 9 + (1d\ 8 + \sqrt{4})! \end{aligned}$$

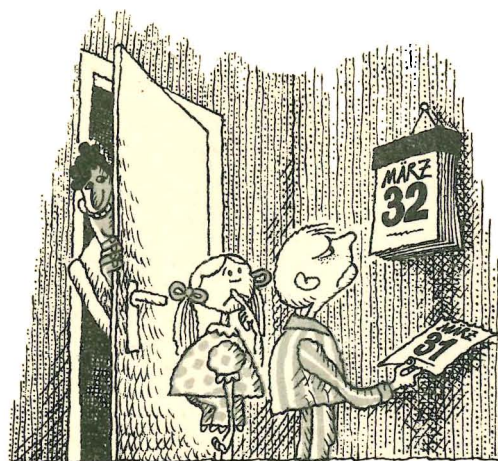
Mit Freude und Eifer – bei einigen Zahlen auch mit langer Überlegung – stellten die Teilnehmer des Leistungszirkels Kl. 5/6 des Kreisklubs *Junger Mathematiker* Zeit für die Zahlen 0...130 unter alleiniger Anwendung der Ziffern 1, 9, 8, 4 in dieser Reihenfolge und aller möglichen Rechenzeichen Aufgaben zusammen.

AG-Leiter OL D. Franke

■ a) Ein Elternpaar hat zwei junge Kinder, die eine verschiedene Anzahl von Jahren zählen. Das Produkt aus den Zahlen, die das ganzzahlige Alter von Vater, Mutter und den beiden Kindern angeben, ergibt 1984. Wie alt sind Vater, Mutter und die beiden Kinder, wenn noch bekannt ist, daß der Vater älter als die Mutter ist?

b) Teile die Zahl 1984 so in fünf Summanden, daß jeder folgende doppelt so groß ist wie der vorhergehende!

Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)



Hans-Jürgen Starke, Elternhaus und Schule

$$\begin{aligned}
 1984 &= (123 - 4 + 5)(6 - 7 + 8 + 9 + 0) \\
 &= [5 \cdot 6 \cdot (-7 + 8) \cdot 9 \cdot (10 + 1) \cdot 2] : 3 + 4 \\
 &= 0 - 1 + (2 + 34) \cdot 56 - 7 - 8 \sqrt{9}
 \end{aligned}$$

Student T. Merten, Stralsund, z. Z. Berlin

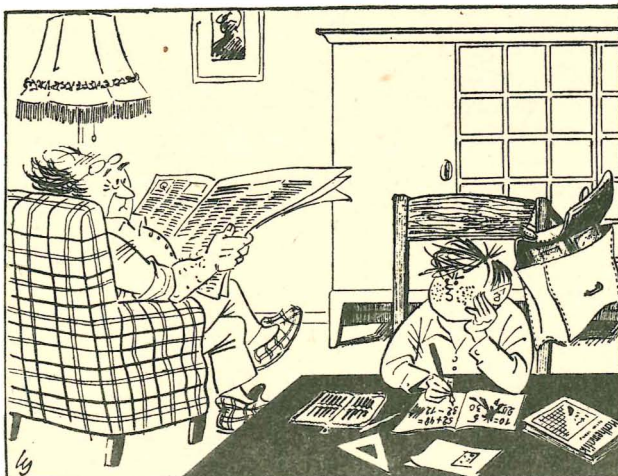
Der Kreis und die Geraden

Ein Kreis lag friedlich auf der Wiese und wünscht, daß ihn in Ruhe ließe die Nachbarschaft und die Bekannten, die Vettern, Basen, Anverwandten. Doch schon nach wenigen Minuten, da hörte er ein Auto tuten. Drei Grazien waren ausgestiegen und sahen diesen Kreis dort liegen. Die erste reichte ihm die Hände und stellt sich vor als die Tangente, indem sie ihn nur zart berührte, so daß er kaum ein Fünkchen spürte. Danach durchschnitt ihn die Sekante, die hoffnungslos für ihn entbrannte. Die kleine Sehne trat als Dritte heran mit einer großen Bitte: Sie wollte sich eng an ihn schmiegen; im Endpunkt auf dem Kreise liegen. Der Kreis, der Ruhe haben wollte, zunächst darüber etwas grollte. Doch schließlich willigte er ein, den Grazien immer Freund zu sein. Und mit der Zeit fand er Gefallen an den Tangent – Se – Kanten allen.

F. Winkler, aus: Sächsisches Tageblatt
eingesandt v. S. Franze, Dresden

„Ich werde mir's merken, du brauchst ja auch wieder einen, der Reifen wechseln oder den Vergaser ausbauen kann, aber dann habe ich keine Zeit!“

Jorgal, aus: Sächsische Zeitung



Alter der Familienmitglieder gesucht

In einer vierköpfigen Familie zeigen die Lebensjahre jedes Mitglieds die gleiche Quersumme. Das Gesamtalter aller ergibt zugleich die kleinste dreistellige Zahl mit dieser Quersumme. Das Alter der Mutter ist sowohl durch das des Sohnes als auch durch das der Tochter teilbar. Das Lebensalter des Vaters läßt sich ebenfalls durch das des Sohnes, nicht aber durch das der Tochter teilen. Mutter und Sohn haben zusammen das Alter des Vaters, Mutter und Tochter sind zusammen genauso alt wie Vater und Sohn. Wie alt sind die einzelnen Familienmitglieder?

Dr. Ch. Lange, Sektion Musik am IfL Leipzig

Dreierlei, Viererlei

- Zum Dreifachen einer Zahl die Zahl 3 addiert, ergibt das gleiche wie von der dritten Potenz von 3 das Dreifache der Zahl subtrahiert. Bestimme die Zahl!
- Zum vierten Teil einer Zahl die 4 addiert, ergibt das gleiche wie vom Vierfachen der Zahl die Zahl 4 subtrahiert. Bestimme die Zahl!

Dr. W. Lorenz, Leipzig

alpha-Logik

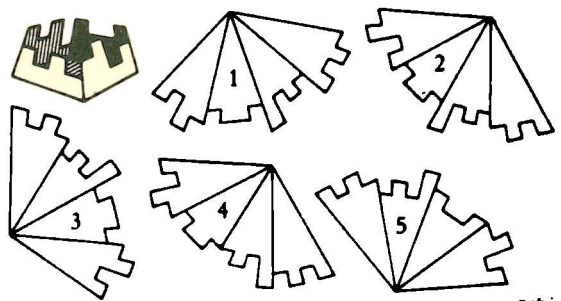
Ermittle alle positiven ganzen Zahlen α , L, O, G, I, K, die die Ungleichung (1) und die Gleichungen (2) bis (6) gleichzeitig erfüllen!

- $\alpha < L < O < G < I < K$
- $\frac{\alpha}{L} = \left(\alpha - \frac{\alpha}{L} \right)$
- $\frac{\alpha}{O} = \left(\alpha - \frac{\alpha}{L} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{O} \right)$
- $\frac{\alpha}{G} = \left(\alpha - \frac{\alpha}{L} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{O} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{G} \right)$
- $\frac{\alpha}{I} = \left(\alpha - \frac{\alpha}{L} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{O} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{G} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{I} \right)$
- $\frac{\alpha}{K} = \left(\alpha - \frac{\alpha}{L} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{O} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{G} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{I} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{K} \right)$

Übung

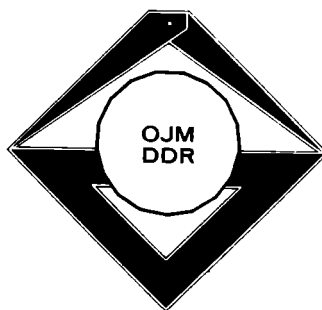
Welche Figur muß gefaltet und dann aufgesetzt werden?

Troll, Berlin



XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade



Olympiadeklasse 5

230521 Die Zahlen von 1 bis 10 sollen als Ergebnisse von Rechenaufgaben auftreten, bei denen außer den Zeichen für die vier Grundrechenoperationen und Klammern jeweils nur die Ziffer 3 auftreten soll, und zwar genau 5mal. Für zwei Aufgaben wurden Beispiele angegeben.

Gib für die Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 je eine derartige Aufgabe an!

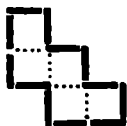
Beispiele:

$$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3 = (3 + 3 - 3) : 3;$$

$$7 = (33 - 3) : 3 - 3 = 3 \cdot 3 + 3 : 3 - 3.$$

230522 Mit 12 gleich langen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden.

Das Bild zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt. (Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.)



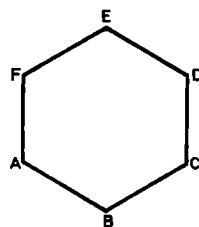
Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von a) 6 Flächeneinheiten, b) 7 Flächeneinheiten, c) 8 Flächeneinheiten, d) 9 Flächeneinheiten!

230523 Die drei Pioniere Hans, Karl und Peter fahren mit dem Rad von Leipzig nach Halle. Hans fuhr dabei in je 10 Minuten 2 Kilometer, Karl benötigte für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegte und Halle nach genau 100 Minuten erreichte.

Wieviel Minuten nach Peter trafen Hans und Karl in Halle ein, wenn alle drei Pioniere zur gleichen Zeit in Leipzig abfahren?

230524 In dem Bild ist ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ und ein Punkt S' gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AD , BE und CF des Sechsecks sei S . Wir betrachten diejenige Verschiebung, bei der S den Bildpunkt S' hat.

Konstruiere den Verschiebungsvektor $\overrightarrow{SS'}$, und das Bild $A'B'C'D'E'F'$ des Sechsecks $ABCDEF$ bei dieser Verschiebung!



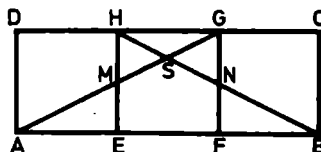
S'
x

Olympiadeklasse 6

230621 Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden. Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch faßt.

- Berechne, wieviel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
- Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

230622 Die abgebildete Figur $ABCD$ stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleich großen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M , die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N . Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle

- den Flächeninhalt des Dreiecks SGH ,
 - den Flächeninhalt des Dreiecks ABS ,
 - den Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$!
- (Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz

verwenden, daß jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleichgroße Dreiecke zerlegt wird.)

230623 Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge). Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgendes ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.

(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.

Zeige, daß sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln läßt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten! Gib diese zusammengehörenden Namen an!

230624 Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, daß es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.

Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, daß es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.

Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, daß es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.

- Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, daß alle drei Aussagen wahr sind!
- Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

Olympiadeklasse 7

230721 Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.

Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während des gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

230722 Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M . Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F .

Beweise, daß dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

230723 Blaue, gelbe und rote Würfel sollen

in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.

Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt! Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an, und weise nach, daß es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

230724 Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ und $\angle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

Olympiadeklasse 8

230821 Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z , die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z , die an der Tausenderstelle steht.

230822 Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, daß die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können. Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

230823 Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Drei Punkte A , B und C auf k seien so gelegen, daß der Punkt M im Innern des Dreiecks ABC liegt.

Ferner sei $\angle CAM = 20^\circ$ und $\angle AMB = 120^\circ$. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle CBM$!

230824 Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB , BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D , E und F bezeichnet.

Beweise, daß der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

Olympiadeklasse 9

230921 Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x , für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

230922 Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt:

(1) Es gilt $AB \parallel DC$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{DC}$.

(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110° .

(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ bzw. $\angle ABC$.

Zeigen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese Größen!

230923 In dem Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, daß jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.

Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

$$\begin{array}{r} \boxed{} \boxed{} \\ + \boxed{} \boxed{} \\ \hline \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \end{array}$$

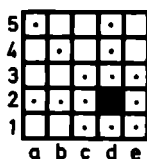
230924 Beweisen Sie!

Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt[p]{p}$ keine rationale Zahl.

Olympiadeklasse 10

231021 Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, daß sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann. Im Bild ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z. B. die Dame auf d2).

Auf einem Quadrat aus 5×5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.



Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen

der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

231022 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $[g;r]$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r , die die Gleichung

$$\frac{3}{3r^2+1} = g \text{ erfüllen!}$$

231023 Unten ist das Bild

$A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei schräger Parallelprojektion gegeben. Ferner sind die Bilder P' , Q' und R' dreier Punkte P , Q bzw. R gegeben, wobei

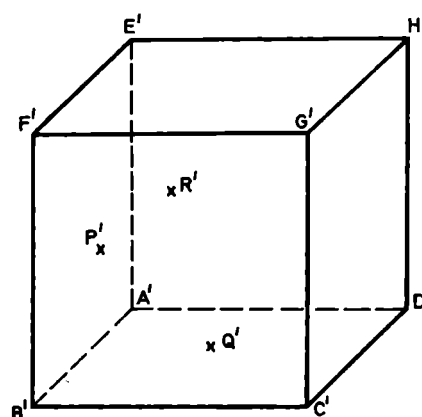
P auf der Seitenfläche $ABFE$,

Q auf der Seitenfläche $BCGF$,

R auf der Seitenfläche $DAEH$

liegt.

Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P , Q und R ! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!



231024 Beweisen Sie, daß es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung

$$x^x = 27 \text{ erfüllt!}$$

Olympiadeklassen 11/12

231221 Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n -te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Man ermittle

a) von jeder arithmetischen Folge (a_n) , für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,

b) von jeder geometrischen Folge (a_n) , für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,

die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, \dots, a_5$.

231222 Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC , der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA' , BB' , CC' . Auf diesen seien drei Punkte X , Y , Z gelegen, X zwischen A und A' , Y zwischen B und B' , Z zwischen C und C' .

Man beweise, daß der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen

$$V_K = \frac{1}{3} F(x+y+z)$$

hat, wobei $x = \overline{AX}$, $y = \overline{BY}$, $z = \overline{CZ}$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

231223 Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:

$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$. Man beweise, daß dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2), \quad (1)$$

$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2). \quad (2)$$

231224 Man ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.

alpha-Wettbewerb 1982/83

Abzeichen in Gold

Michael Herrmann, Oberlichtenau; Torsten Endter, Oberschönau; Esther Hädicke, Oranienbaum; Kay Leitz, Michael Taeschner, beide Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Thomas Lieberwirth, Perleberg; Antje und Thomas Reichel, Pirna; Coren Balling, Plessa; Dorit Grulke, Pritzwalk; Andreas Jöstel, Karl-Martin Eichhorn, Katharina Eichhorn, Bettina Beurich, alle Radebeul; Wolfgang Schneider, Radeburg; Steffen Korb, Raschau; Nils Grotian, Christoph Jahnke, beide Ribnitz; Lutz Marschner, Riesa; Beate Walter, Röbel; Kerstin Gülden, Roitzsch; Holger Nobach, Michael Gräber, Anne Ruser, Heiner Ruser, Elke Haferkorn, alle Rostock; Astrid Grulke, Schernberg; Ronny Henschke, Schierke; Roy Rühl, Schladitz; Kristin Straubel, Schorssow; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Kerstin Klement, Schwerin; Achim Kröber, Schönbach; Roland Drendel, Senftenberg; Ute Hornawsky, Silbach; Christiane May, Siebenlehn; Jochen Wetzol, Clara Töpfer, beide Sömmerda; Ramona Dörre, Bernd Liebmann, beide Sondershausen; Thomas Kaiser, Stralsund; Wolfram Meyerhöfer, Strasburg; Andrea Kurz, Anja Reumerschüssel, Antje Recknagel, Christina Schmidt, Anja Häfner, Beate Neubert, Kerstin Reumerschüssel, Katja Huhn, Peter Motz, Achim Gratz, Uwe Pfannschmidt, André Albrecht, Mario Recknagel, Uwe Holland-Merten, Katrin Möller, Ines Maschke, Constanze Aster, Silvana Menz, Silke Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Uta Linz, Suhl; Gerlad Schumann, Teichwolframsdorf; Holger Wittner, Teterow; Lothar Matzker, Torno; Mario Wings, Trusetal; Ulricke Dost, Petra Tiersch, Antje Wieland, Maja Rasch, alle Vacha; Thomas Vandahl, Völkershausen; Andrea Schmidt, Waren; Uwe Pillat, Waschow; Monika Rössler, Volker Lehmann, Johannes Thäter, alle Weimar; Heike Eggert, Udo Lehmann, Alexander Benz, Beate Rumpelt, alle Weißwasser; Holger Post, Wiebendorf; Andreas Döring, Lutz Grothe, beide Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mario Kuhn, Wintzingerode; Karin Junk, Peter Eggert, beide Wismar; Cornelia Hahn, Ester Holznagel, beide Wolgast; Maren Zech, Zahna; Adrian Hackenberger, Zedlitz; Antje Schneider, Zeitz; Steffi Ramsthaler, Angelika Weyh, Ute Barthelmes, alle Zella-Mehlis; Holger Radünz, Zerbst; Uwe Schulz, Birgit Gawlik, beide Zittau; Kathrin Scheffel, Kathrin Neum, beide Zschornowitz; Michael Rühling, Dresden; Geertje Maeß, Bad Doberan; Jörg und Gerd Heber, Erfurt



Der Bruch $\frac{355}{113}$ und die Zahl π

Umfang und Durchmesser eines Kreises sind inkommensurabel. Wären sie kommensurabel, so gäbe es eine Strecke der Länge e so, daß die Längen U bzw. d von Kreisumfang und Kreisdurchmesser ganzzahlige Vielfache von e wären, etwa $U = m e$, $d = n e$. Dann wäre das für alle Kreise konstante Verhältnis von Umfang und Durchmesser (seit Euler kurz mit π bezeichnet) ein Bruch:

$$\pi = \frac{U}{d} = \frac{m e}{n e} = \frac{m}{n}.$$

Johann Heinrich Lambert bewies aber 1767, daß π nicht als gebrochene Zahl darstellbar ist (π ist wie $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl). Man kann π durch einen Bruch nur näherungsweise angeben. Der griechische Geometer Archimedes von Syrakus fand im 3. Jh. v.u.Z., daß, wenn der Durchmesser eines Kreises in 7 gleiche Teile geteilt wird, 21 solcher Teile eine kleinere, 22 aber eine größere Länge ergeben als der (etwa abgewinkelte) Kreisumfang: $\frac{21}{7} < \pi < \frac{22}{7}$.

Im fünften Jahrhundert benutzte der chinesische Astronom Zu Ch'ong-Zhi den Bruch $\frac{355}{113}$

als einen sehr genäherten Ausdruck des Verhältnisses von Länge des Umfangs zur Länge des Durchmessers. Erst über ein Jahrtausend später wurde dieser Bruch in Europa erneut gefunden. Auf welche Weise der chinesische Astronom und Mitte des 16. Jahrhunderts

Peter Metius diesen Bruch $\frac{355}{113}$, dessen Dezimalbruchentwicklung erst in der achten Ziffer von der Dezimalbruchentwicklung von $\pi = 3,141592653589793...$

abweicht, ermittelt haben, ist nicht bekannt. Spätestens seit Eulers Zeit weiß man, daß $\frac{355}{113}$ einer der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von π ist.

(Die ersten solchen Näherungsbrüche sind:

$$3 \frac{22}{7}, 333 \frac{355}{106}, 103993 \frac{104348}{33102}, 208341 \frac{33215}{66317}.)$$

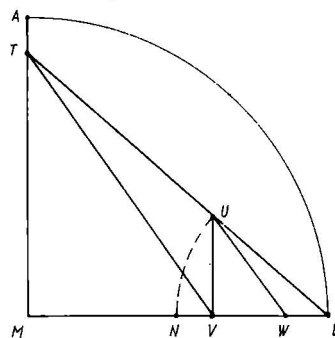
Es läßt sich unschwer dadurch mit Lineal und Zirkel eine Strecke konstruieren, die näherungsweise die Länge π hat, indem man zu-

nächst eine Strecke der Länge $\frac{16}{113}$ konstruiert und dann zu dieser Strecke die Strecke der Länge 3 addiert:

$$\frac{16}{113} + 3 = \frac{355}{113}.$$

Die Konstruktion der Strecke der Länge $\frac{16}{113}$ kann so erfolgen:

Man betrachtet einen Viertelkreis und darin senkrecht aufeinanderstehende Radien MA und MB der Länge 1 (Bild).



Durch fortgesetztes Halbieren teile man den Radius AM in 8 gleiche Abschnitte (der Länge $\frac{1}{8}$) und wähle auf AM den Punkt T so,

$$\text{daß } \overline{TM} = \frac{7}{8}.$$

Man verbinde T mit B . Der Punkt N halbiere den Radius MB . Schlägt man um B einen Kreis mit dem Radius $\overline{BN} = \frac{1}{2}$, so erhält man auf TB den Schnittpunkt U so, daß $\overline{UB} = \frac{1}{2}$. Man wähle V auf

MB so, daß UV parallel zu AM . Man verbinde T mit V und wähle endlich W auf MB so, daß UW parallel zu TV ist. Dann gilt $\overline{WB} = \frac{16}{113}$. Warum?

H. Pieper



Suhl, 16. November 1983

Die Fachkommission Mathematik in Suhl-Stadt übergab jedem Teilnehmer an der Kreisolympiade eine Postkarte als Erinnerungsgeschenk; Entwurf: Mathematikfachlehrer D. Kiehle, F.-Köhler-OS, Suhl.

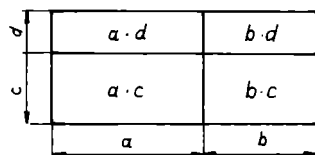
Lösungen



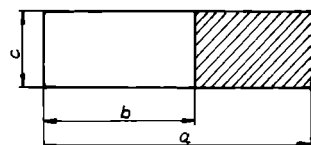
Lösungen zu:

Geometrie hilft der Arithmetik

▲ 1 ▲ $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$



▲ 2 ▲ $(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$



▲ 3 ▲ a) $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

c) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

▲ 4 ▲ Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a \cdot c < b \cdot d$.

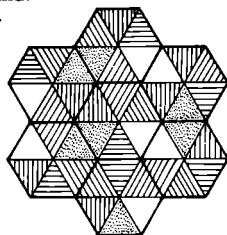
▲ 5 ▲ Nein. Es gibt Zahlentripel für $a \cdot c < b \cdot d$, $a \cdot c = b \cdot d$ und $a \cdot c > b \cdot d$. (Finde selbst solche Beispiele!)

▲ 6 ▲ Erhöhung um ein Neuntel! (Benutze zur Begründung ein in 10 gleich große Rechtecke unterteiltes Rechteck!)

Lösungen zu: Sprachecke

▲ 1 ▲ Von 7 regelmäßigen Sechsecken ist eines mit 6 Farben gefärbt (siehe Bild). Färbt die übrigen Sechsecke mit denselben Farben so, daß in der „Blume“, die im Bild dargestellt ist, alle dreieckigen Teilflächen, die an einer Sechseckseite aneinanderstoßen, gleichfarbig sind.

Lösung:



▲ 2 ▲ In dem rechtwinkligen Dreieck XYZ ist W der Mittelpunkt von $\overline{XY}$, und der Kreis mit $\overline{ZW}$ als Durchmesser schneidet $\overline{WX}$ in V. Berechne die Länge von $\overline{XZ}$, wenn $\overline{XY} = 50$ und $\overline{WV} = 7$!

Lösung: In dem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende, die zur Hypotenuse gezeichnet wird, gleich der Hälfte der Hypotenuse. Folglich ist $\overline{ZW} = 25$, und nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck ZVW, daß

$$\overline{VZ} = \sqrt{\overline{ZW}^2 - \overline{WV}^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Deshalb ist im rechtwinkligen Dreieck ZVX dann

$$\overline{XZ} = \sqrt{\overline{XV}^2 + \overline{VZ}^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30.$$

▲ 3 ▲ Man will die Fassade einer Schule weißen. Diese Fassade hat eine Länge von 18 m und eine Höhe von 12 m; man sieht weiterhin 12 Fenster und eine Tür. Die Ausmaße jedes Fensters, in m, sind 2,5 und 1,5; diejenigen der Tür 3 und 2. Berechne die Fläche der zu weißenden Fassade in m^2 !

Lösung: Die Fläche der Fassade einschließlich der Fenster beträgt $18 m \cdot 12 m = 216 m^2$. Die Fläche der Tür ist $3 m \cdot 2 m = 6 m^2$, die der Fenster $2,5 m \cdot 1,5 m \cdot 12 m = 45 m^2$. Dann beträgt die Fläche der zu weißenden Fassade $216 m^2 - 45 m^2 - 6 m^2 = 165 m^2$.

Lösung zu: Acht und fünf

a) Diese harte Nuß hat eine interessante Geschichte. Vor mehr als hundert Jahren hat der russische Mathematiker und Schachmeister Karl Jatiker bewiesen, daß es 92 solcher Stellungen gibt. Zweiundneunzig! Und selbst eine zu finden ist nicht einfach! Hier nun zwei Beispiele:

Acht Damen sind entweder auf die Felder a3, b5, c2, e1, f7, g4 und h6 oder auf a6, b4, c7, d1, e8, f2, g5 und h3 zu stellen.

b) Die größte Zahl der Felder, die von acht Damen nicht attackiert werden kann, ist elf. Die dafür erforderliche Damenstellung ist folgende:

b1, b2, f2, g1, g3, g7, h2, h7.

c) Fünf Damen auf a2, c4, d5, e6, g8 kontrollieren alle Felder des Brettes. Diese Aufgabe hat mehr als tausend Lösungen.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Frohe Ostern

1-8

Es ist 12 durch 23

Es gibt 135 derartige Lösungen. Oft werden die 59 Fälle nicht berücksichtigt, die von 00:01 bis 00:59 möglich sind.

alpha auf Kurs 80

Es gibt 80 Möglichkeiten. Um diese Anzahl zu ermitteln, kann die Aufgabe in drei Teilaufgaben zerlegt werden: Teilaufgabe 1 (links) enthält $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ Möglichkeiten, um das Wort *alpha* auf dem geforderten Wege zu bilden. (Die kleinen Ziffern neben den Buchstaben dienen zur Erleichterung des Auszählens. Man mache sich mit den zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten eingehend bekannt. P^4 bedeutet z. B., daß von A

aus vier Wege zu diesem Buchstaben führen.) In Teilaufgabe 2 (Mitte) lassen sich $1 + 5 + 11 + 15 + 16 = 48$ Möglichkeiten und in Teilaufgabe 3 noch einmal 16 Möglichkeiten ermitteln. Zusammen also 80.

$$\begin{aligned} &A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \\ &L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \\ &P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \\ &H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \\ &A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \bullet A^1 L^1 P^1 H^1 A^1 \end{aligned}$$

Spielereien um das Jahr 1984

a) $1984 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31 = 1 \cdot 2 \cdot 32 \cdot 31$
Der Vater ist 32 Jahre, die Mutter 31 Jahre alt, die beiden Kinder zählen 1 und 2 Jahre.

b) $x + 2x + 4x + 8x + 16x = 1984$

$$31x = 1984$$

$$x = 64$$

$$64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 1984$$

Alter der Familienmitglieder

gesucht

Sohn 9, Tochter 18, Mutter 36, Vater 45 Jahre; Gesamtalter: 108.

Dreierlei, Viererlei

a) $3x + 3 = 3^3 - 3x$

$$6x = 27 - 3$$

$$x = 4$$

b) $\frac{x}{4} + 4 = 4x - 4$

$$8 = \frac{15}{4}x$$

$$x = \frac{32}{15}$$

alpha-Logik

Durch äquivalente Umformung der Gleichung (2) ergibt sich $2 \cdot \alpha = L \cdot \alpha$, also $L = 2$.

Aus $L = 2$, der Ungleichung (1) und dem vorgegebenen Variablengrundbereich folgt unmittelbar $\alpha = 1$.

Nach Einsetzen von $\alpha = 1$, $L = 2$ in Gleichung (3) und äquivalenter Umformung ergibt sich $O = 3$.

Dieses Verfahren schrittweise auf die Gleichungen (4) bis (6) angewendet, liefert $G = 4$, $I = 5$, $K = 6$.

Diese Zahlen erfüllen alle gestellten Bedingungen, was die Probe beweist:

$$(2) \quad \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(5) \quad \frac{1}{5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$(6) \quad \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Übung

Figur 3 entspricht den Bedingungen.

Ungarischer Bilderbogen

▲6▲



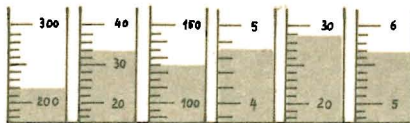
▲9▲ Der Körper Nr.2 gehört zum abgebildeten Netz.

Hef 5/83, Fortsetzung

Ma 10/12 ■ 2376 Skizze nicht maßstäblich!
Die Berührungsradien stehen senkrecht auf
der Mantellinie und sind zueinander parallel.
Wir wenden den Strahlensatz an und erhalten

The diagram shows a horizontal line labeled S' on the left. Two circles are positioned above this line. The first circle has center M_1 and radius r_1 . The second circle has center M_2 and radius r_2 . The distance between the centers M_1 and M_2 is labeled h . A triangular boundary is shown, with its vertex on the right. The top boundary of the triangle is a curve passing through points C and D . The angle at the vertex is labeled γ . The vertical distance from the horizontal line S' to the top boundary at the vertex is labeled r_k .

b)



A diagram of a horizontal beam supported by two triangular supports at its ends. A vertical force F_L acts upwards at the left support, and a vertical force F_T acts upwards at the right support. A weight G_2 acts downwards from a point on the beam, and a weight G_1 acts downwards from a point further to the right.

Ph 8 ■ 143 Geg.: Vierseitiges Prisma mit einem Trapez als Grundfläche.

$$\text{b) } 4.17 \text{ t} \cdot 30 = 125.1 \text{ t}$$

Dem Betrieb müssen täglich 4,17 t und monatlich 125,1 t Schwefelkies zur Verfügung gestellt werden.

Ch 8 ■ 114

a) $160 \text{ g Fe}_2\text{O}_3 \triangleq 112 \text{ g Fe}$

$0,23 \text{ g Fe}_2\text{O}_3 \triangleq m$

$$m = \frac{0,23 \text{ g} \cdot 112 \text{ g}}{160 \text{ g}}$$

$$m = 0,16 \text{ g}$$

Die Einwaage enthält 0,16 g Eisen.

b) $0,732 \text{ g Legierung} \triangleq 0,16 \text{ g Eisen}$

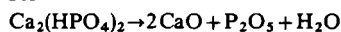
$100 \text{ g Legierung} \triangleq m$

$$m = \frac{100 \text{ g} \cdot 0,16 \text{ g}}{0,732 \text{ g}}$$

$$m = 21,9 \text{ g}$$

Die Legierung enthält 21,9% Eisen.

Ch 9 ■ 115



$$m \rightarrow 212,3 \text{ kg}$$



$$272 \text{ g} \quad 62 \text{ g}$$

$$m = \frac{272 \text{ g} \cdot 212,3 \text{ kg}}{62 \text{ g}}$$

$$m = 931,4 \text{ kg}$$

$$980 \text{ kg Ca}_2(\text{HPO}_4)_2 (x\% \text{ig}) -$$

$$931,4 \text{ kg Ca}_2(\text{HPO}_4)_2 (100\% \text{ig})$$

$$100 \text{ kg Ca}_2(\text{HPO}_4)_2 (x\% \text{ig}) -$$

$$x \text{ kg Ca}_2(\text{HPO}_4)_2 (100\% \text{ig})$$

$$x = \frac{100 \text{ kg} \cdot 931,4 \text{ kg}}{980 \text{ kg}}$$

$$x = 95 \text{ kg}$$

Das Kalziumphosphat besitzt einen Reinheitsgrad von 95%, also enthält es 5% Verunreinigungen.

Ch 10/12 ■ 116

a) 1 m^3 Gas enthält $0,45 \text{ m}^3$ Wasserstoff

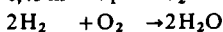
$0,3 \text{ m}^3$ Methan

$0,045 \text{ m}^3$ Äthylen

$0,04 \text{ m}^3$ Kohlenmonoxid

Kohlendioxid und Stickstoff kommen für die Verbrennung nicht in Frage.

$$0,45 \text{ m}^3 \quad V_1 \quad V_2$$



$$44,8 \text{ l} \quad 22,4 \text{ l} \quad 44,8 \text{ l}$$

$$V_1 = \frac{0,45 \text{ m}^3 \cdot 22,4 \text{ l}}{44,8 \text{ l}}$$

$$V_1 = 0,225 \text{ m}^3 \text{ O}_2$$

$$V_2 = \frac{0,45 \text{ m}^3 \cdot 44,8 \text{ l}}{44,8 \text{ l}}$$

$$V_2 = 0,45 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$$

$$0,3 \text{ m}^3 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3$$



$$22,4 \text{ l} \quad 44,8 \text{ l} \quad 22,4 \text{ l} \quad 44,8 \text{ l}$$

$$V_1 = \frac{0,3 \text{ m}^3 \cdot 44,8 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$V_1 = 0,6 \text{ m}^3 \text{ O}_2$$

$$V_2 = \frac{0,3 \text{ m}^3 \cdot 22,4 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$V_2 = 0,3 \text{ m}^3 \text{ CO}_2$$

$$V_3 = \frac{0,3 \text{ m}^3 \cdot 44,8 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$V_3 = 0,6 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$$

$$0,045 \text{ m}^3 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3$$



$$22,4 \text{ l} \quad 67,2 \text{ l} \quad 44,8 \text{ l} \quad 44,8 \text{ l}$$

$$V_1 = \frac{0,045 \text{ m}^3 \cdot 67,2 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$V_1 = 0,135 \text{ m}^3 \text{ O}_2$$

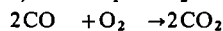
$$V_2 = \frac{0,045 \text{ m}^3 \cdot 44,8 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$V_2 = 0,09 \text{ m}^3 \text{ CO}_2$$

$$V_3 = \frac{0,045 \text{ m}^3 \cdot 44,8 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$V_3 = 0,09 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$$

$$0,04 \text{ m}^3 \quad V_1 \quad V_2$$



$$44,8 \text{ l} \quad 22,4 \text{ l} \quad 44,8 \text{ l}$$

$$V_1 = \frac{0,04 \text{ m}^3 \cdot 22,4 \text{ l}}{44,8 \text{ l}}$$

$$V_1 = 0,02 \text{ m}^3 \text{ O}_2$$

$$V_2 = \frac{0,04 \text{ m}^3 \cdot 44,8 \text{ l}}{44,8 \text{ l}}$$

$$V_2 = 0,04 \text{ m}^3 \text{ CO}_2$$

Der Gesamtverbrauch an Sauerstoff beträgt:

$$0,225 \text{ m}^3 + 0,6 \text{ m}^3 + 0,135 \text{ m}^3 + 0,02 \text{ m}^3$$

$$= 0,98 \text{ m}^3$$

$$\frac{0,98 \text{ m}^3 \cdot 100\%}{21\%} = 4,67 \text{ m}^3 \text{ Luft}$$

Zur Verbrennung von 1 m^3 Stadtgas benötigt man $4,67 \text{ m}^3$ Luft.

b) Die Rauchgase bestehen aus Stickstoff, Kohlendioxid und Wasser.

$$0,14 \text{ m}^3 + 4,67 \text{ m}^3 - 0,98 \text{ m}^3 = 3,83 \text{ m}^3 \text{ N}_2$$

$$0,025 \text{ m}^3 + 0,3 \text{ m}^3 + 0,09 \text{ m}^3 + 0,04 \text{ m}^3$$

$$= 0,455 \text{ m}^3 \text{ CO}_2$$

$$0,45 \text{ m}^3 + 0,6 \text{ m}^3 + 0,09 \text{ m}^3 = 1,14 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$$

Das Gesamtvolumen der Rauchgase beträgt:

$$3,830 \text{ m}^3 \text{ N}_2 + 0,455 \text{ m}^3 \text{ CO}_2 + 1,140 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$$

$$= 5,425 \text{ m}^3$$

$$5,425 \text{ m}^3 \triangleq 100\%$$

$$3,83 \text{ m}^3 \triangleq x$$

$$x = \frac{3,83 \text{ m}^3 \cdot 100\%}{5,425 \text{ m}^3}$$

$$x = 70,6\% \text{ N}_2$$

$$x = \frac{0,455 \text{ m}^3 \cdot 100\%}{5,425 \text{ m}^3}$$

$$x = 8,4\% \text{ CO}_2$$

$$x = \frac{1,14 \text{ m}^3 \cdot 100\%}{5,425 \text{ m}^3}$$

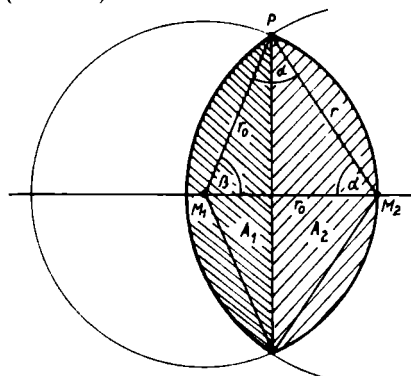
$$x = 21\% \text{ H}_2\text{O}$$

Die Rauchgase bestehen aus 70,6% Stickstoff, 8,4% Kohlendioxid und 21% Wasser.

Lösung zu: Eine hungrige Ziege

Heft 1/84

Alle Winkel werden im Bogenmaß gemessen. Im $\triangle M_1 M_2 P$ gilt $M_1 M_2 = r_0$ und $\beta = \pi - 2\alpha$ (siehe Bild).



Dann ist $\cos \beta = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ und

$$r^2 = r_0^2 + r_0^2 - 2r_0^2 \cos \beta,$$

$$r^2 = 2r_0^2 (1 - \cos \beta),$$

$$r^2 = 2r_0^2 (1 + \cos 2\alpha). \quad (1)$$

Weiterhin besteht die gesamte schraffierte Fläche A aus den beiden Kreissegmenten A_1 und A_2 , also

$$A = A_1 + A_2. \quad (2)$$

Nun ist

$$A = \frac{\pi \cdot r_0^2}{2},$$

$$A_1 = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{r^2}{2} (2\alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha),$$

$$A_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \quad (3)$$

und

$$A_2 = \frac{r_0^2}{2} (2\beta - \sin 2\beta) = \frac{r_0^2}{2} [2(\pi - 2\alpha) - \sin 2(\pi - 2\alpha)],$$

$$A_2 = r_0^2 [\pi - 2\alpha - \sin(\pi - 2\alpha) \cdot \cos(\pi - 2\alpha)],$$

$$A_2 = r_0^2 [\pi - 2\alpha - (\sin \pi \cos 2\alpha - \cos \pi \sin 2\alpha)$$

$$(\cos \pi \cos 2\alpha + \sin \pi \sin 2\alpha)],$$

$$A_2 = r_0^2 (\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha). \quad (4)$$

Setzt man (1), (3) und (4) in (2) ein, ergibt sich

$$A = A_1 + A_2,$$

$$\frac{\pi r_0^2}{2} = 2r_0^2 (1 + \cos 2\alpha) (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$+ r_0^2 (\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha)$$

$$0 = 2\alpha + 2\alpha \cos 2\alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

$$- 2 \cdot \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha$$

$$+ \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha,$$

$$0 = \frac{\pi}{2} + 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha.$$

Ersetzt man $2\alpha = x$, erhält man die goniometrische Gleichung

$$0 = x \cdot \cos x - \sin x + \frac{\pi}{2}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die Abszisse des Schnittpunktes der beiden Graphen von

$$g = f(x) = \sin x + \frac{\pi}{2},$$

$$h = f(x) = x \cdot \cos x.$$

Als Näherungswert findet man durch Zeichnung $x \approx 1,9$.

Bestimmt man mit der Regula falsi x' für den Fall $x_1 < x' < x_2$ mit $x_1 = 1,89$ und $x_2 = 1,91$ in der Funktion

$$y = f(x) = x \cdot \cos x - \sin x + \frac{\pi}{2},$$

erhält man zunächst

$$y_1 = f(x_1) = 1,89 \cdot \cos 1,89 - \sin 1,89 + 1,5708$$

$$= 0,02794,$$

$$y_2 = f(x_2) = 1,91 \cdot \cos 1,91 - \sin 1,91 + 1,5708$$

$$= -0,00690,$$

und

$$x' = \frac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{y_1 - y_2}$$

$$= \frac{0,02794 \cdot 1,91 + 0,006902 \cdot 1,89}{0,03484} = 1,906. \quad (5)$$

Schließlich setzt man (5) in (1) ein und erhält

$$r^2 = 2r_0^2 (1 + \cos 2\alpha),$$

$$r^2 = 2r_0^2 (1 + \cos x'),$$

$$r^2 = 2r_0^2 (1 + \cos 1,906),$$

$$r^2 = 1,342 \cdot r_0^2, \\ r = 1,1585 r_0.$$

Der Strick muß also rd. 1,16mal so lang sein wie der Radius der kreisförmigen Wiese.

Berichtigung zum Beitrag:

Labyrinth-Probleme

In Heft 2/83, S. 101, muß es in Bild 7, rechts, heißen: Bewegungsanweisung (auf ein zum Muster gehörendes Nachbarfeld).

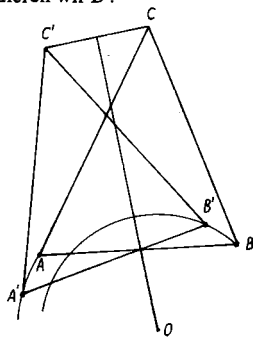
Lösungen zu: alpha-Wettbewerb, Heft 6/83

Ma 5 ■ 2379 Wegen $1 \leq a \leq 9$ entfällt $a=0$. Da b Nachfolger von a ist, gilt $b=a+1$. Wegen $0 \leq c \leq 9$ entfällt $a \geq 5$; denn bereits für $a=5$, also $b=6$ gilt $c=11$, also $c>9$, was nicht möglich ist. Wir stellen eine Tabelle auf.

| a | b | c |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 7 |
| 4 | 5 | 9 |

Es existieren genau vier solche Zahlen; sie lauten 123, 235, 347 und 459.

Ma 5 ■ 2380 Wegen $\overline{OC} = \overline{OC'}$ ist das Dreieck OCC' gleichschenkelig. Die Mittelsenkrechte zur Basis CC' geht durch den Punkt O . Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Wir zeichnen die Mittelsenkrechte zu CC' , zeichnen um C einen Kreis mit dem Radius $r=6$ cm, der die Mittelsenkrechte in O schneidet. Der Schnittpunkt der Kreise um O mit dem Radius $\overline{OA}$ und um C' mit dem Radius $\overline{CA}$ liefert den Bildpunkt A' . Analog dazu konstruieren wir B' .



Ma 5 ■ 2381 48 000 000 Minuten sind 800 000 Stunden; 800 000 Stunden sind rund 33 333 Tage; 33 333 Tage sind rund 91 Jahre. Günters Urgroßvater feierte seinen 91. Geburtstag.

Ma 5 ■ 2382 $90\,374 + 623\,374 = 713\,748$.

Ma 5 ■ 2383 Wegen $95 \cdot 3 = 285 < 300$ muß der zweite Faktor größer als 3 sein. Da sowohl der erste Faktor als auch das Produkt auf die Grundziffer 5 enden, kann der zweite Faktor nur 5, 7 oder 9 sein. Durch Abschätzen erhalten wir folgende fünf Lösungen: $65 \cdot 5 = 325$, $75 \cdot 5 = 375$, $45 \cdot 7 = 315$, $55 \cdot 7 = 385$, $35 \cdot 9 = 315$.

Ma 5 ■ 2384 Angenommen, diese Klasse hatte x Quartiere geworben;

$$\text{dann gilt } (x-4) \cdot 3 = 2 \cdot x, \\ 3x - 12 = 2x, \text{ also } x = 12.$$

Diese Klasse hatte 12 Quartiere geworben.

Ma 6 ■ 2385 Es sei $z = \overline{abab}$ eine solche im dekadischen Positionssystem dargestellte vierstellige natürliche Zahl mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$.

$$\text{Dann gilt } z = 1000a + 100b + 10a + b, \\ z = 1010a + 101b, z = 101 \cdot (10a + b).$$

Wegen $10 \leq 10a + b \leq 99$, also $10 + b \neq 101$, kann z nicht Quadratzahl sein. Da z durch 101 teilbar ist, kann z auch nicht Primzahl sein.

Ma 6 ■ 2386 Insgesamt wurden $6 \cdot 22 = 132$ Spiele ausgetragen. Angenommen, es beteiligten sich n Schüler an diesem Tischtennisturnier; dann muß jeder dieser n Spieler gegen $(n-1)$ Spieler antreten. Nun gilt $n \cdot (n-1) = 132 = 12 \cdot 11$, also $n=12$.

An diesem Tischtennisturnier nahmen 12 Schüler teil.

Ma 6 ■ 2387

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{99}{100}\right) \\ = \frac{(2-1) \cdot (3-2) \cdot (4-3) \cdot \dots \cdot (100-99)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100} \\ = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100} = \frac{1}{100!}.$$

- Ma 6 ■ 2388 (1) $a = 46 + 9 = 55$
 (2) $b = 20 + 6 = 26$
 (3) $c = 45 + 15 = 60$
 (4) $d = 46 + 18 = 64$
 (5) $e = 33 + 32 = 65$
 (6) $f = 32 \div 25 = 57$

Ma 6 ■ 2389 Angenommen, es wurden x 6-Liter- und y 7-Liter-Gefäße verwendet; dann gilt $6 \cdot x + 7 \cdot y = 50$, $7 \cdot y = 50 - 6 \cdot x$. Wir belegen x nacheinander mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und berechnen stets die Differenz $50 - 6 \cdot x$. Dabei stellen wir fest, daß die so erhaltene Differenz nur für $x=6$ durch 7 teilbar ist, also $y=2$ gilt. Zum Abfüllen von 50 Liter Flüssigkeit sind sechs 6-Liter- und zwei 7-Liter-Flaschen erforderlich.

Ma 7 ■ 2390 Angenommen, x Schüler erhielten die Note 1; dann gilt $\frac{x \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{x + 7 + 3 + 1} = 2$,

$$\frac{x+27}{x+11} = 2, 2 \cdot (x+11) = x+27, x=5.$$

Fünf Schüler erhielten die Note 1.

Ma 7 ■ 2391 Angenommen, Andreas ist n Jahre alt; dann ist Helmut $2 \cdot n$ und Wolfgang $(2 \cdot n + 2)$ Jahre alt. Somit ist der Vater $2 \cdot (2n+2) = (4n+4)$ und die Mutter $(4n+1)$ Jahre alt. Dann ist Jürgen $(4n+1) : 3 = \frac{4}{3}n + \frac{1}{3}$ und Roswitha $\left(\frac{4}{3}n + 5\frac{1}{3}\right)$ Jahre alt. Zusammen sind alle $\left(13\frac{8}{3}n + 12\frac{2}{3}\right)$ Jahre alt, und es

$$\text{gilt } 13\frac{8}{3}n + 12\frac{2}{3} = 232,$$

$$\frac{47}{3}n = \frac{658}{3}, n = \frac{658}{47}, n = 14.$$

Der Vater ist 60, die Mutter 57, Wolfgang 30, Helmut 28, Roswitha 24, Jürgen 19 und Andreas 14 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2392 Es seien $n, n+1, n+2, n+3$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \neq 0$; dann gilt

$$\begin{aligned} n \cdot (n+3) &< (n+1) \cdot (n+2), \\ n^2 + 3n &< n^2 + 3n + 2, \\ 0 &< 2. \end{aligned}$$

Für jede Belegung von n wird diese Ungleichung erfüllt, d. h., sie ist allgemeingültig. Deshalb gilt diese Beziehung für vier beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Ma 7 ■ 2393 Es sei v_1 die Geschwindigkeit des Schiffes, also $10 \cdot v_1$ die des Flugzeuges und s_1 der vor dem Start des Flugzeuges zurückgelegte Weg des Schiffes, also $(s_1 + 180)$ der Weg des Flugzeuges bis zum Einholen des Schiffes.

Wegen $t = \frac{s}{v}$ gilt dann

$$\begin{aligned} s_1 : v_1 &= (s_1 + 180) : 10v_1, \\ 10s_1 v_1 &= v_1 (s_1 + 180) \text{ und wegen } v_1 \neq 0 \\ \text{somit} \end{aligned}$$

$$10s_1 = s_1 + 180, \text{ also } s_1 = 20 \text{ und somit} \\ s_2 = 20 + 180 = 200.$$

Das Flugzeug holte das Handelsschiff in einer Entfernung von 200 Seemeilen vom Heimathafen ein.

Ma 8 ■ 2394 Bezeichnen wir drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $(n-1)$, n , $(n+1)$, so gilt nach der Aufgabenstellung $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 56 \cdot [(n-1) + n + (n+1)]$; $n \geq 2$. Die äquivalente Umformung dieser Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} n \cdot (n^2 - 1) &= 56 \cdot 3n, \\ n^2 - 1 &= 168, \\ n^2 &= 169, \\ n &= 13. \end{aligned}$$

Es handelt sich um die Zahlen 12, 13 und 14. Probe: $12 \cdot 13 \cdot 14 = 56(12 + 13 + 14)$

$$2184 = 2184.$$

Ma 8 ■ 2395 Wegen $F + F = Z$ gilt $F=1, 2, 3$ oder 4. Wenn $F=1$, so $N=2$, also $H=4$ und $Z=3$ und $\ddot{U} + \ddot{U} = 10 + E$, also $\ddot{U} \geq 5$. Für $\ddot{U}=5$ gilt $E=0$.

$$\begin{aligned} \text{1. Lösung: } &1521 \\ &+ 1521 \\ &\hline &3042 \end{aligned}$$

Für $\ddot{U}=6$ wäre $E=2$, was wegen $N=2$ nicht möglich ist. Für $\ddot{U}=7$ wäre $E=4$, was wegen $H=4$ nicht möglich ist. Für $\ddot{U}=8$ gilt $E=6$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

$$\begin{aligned} \text{2. Lösung: } &1821 \\ &+ 1821 \\ &\hline &3642 \end{aligned}$$

Für $\ddot{U}=9$ gilt $E=8$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

$$\begin{aligned} \text{3. Lösung: } &1921 \\ &+ 1921 \\ &\hline &3842 \end{aligned}$$

Wenn $F=2$, so $N=4$ und $H=8$ und $Z=5$. Wegen $Z=5$ entfällt $\bar{U}=5$. Für $\bar{U}=6$ wäre $E=2$, was wegen $F=2$ nicht möglich ist. Für $\bar{U}=7$ wäre $E=4$, was wegen $N=4$ nicht möglich ist.

Wegen $H=8$ entfällt $\bar{U}=8$.

Für $\bar{U}=9$ wäre $E=8$, was wegen $H=8$ nicht möglich ist. Wenn $F=3$, so $N=6$ und $H=2$ und $Z=7$, also $1+\bar{U}+\bar{U}=10+E$. Für $\bar{U}=5$ gilt $E=1$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

4. Lösung: 3563
+ 3563

7126

Wegen $N=6$ entfällt $\bar{U}=6$. Wegen $Z=7$ entfällt $\bar{U}=7$. Für $\bar{U}=8$ wäre $E=7$, was wegen $Z=7$ nicht möglich ist. Für $\bar{U}=9$ wäre $E=9$, was wegen $\bar{U}=E$ nicht möglich ist. Wenn $F=4$, so $N=8$ und $H=6$ und $Z=9$ und $1+\bar{U}+\bar{U}=10+E$. Für $\bar{U}=5$ gilt $E=1$ und wir erhalten eine weitere Lösung.

5. Lösung: 4584
+ 4584
9168

Wegen $H=6$ entfällt $\bar{U}=6$.

Für $\bar{U}=7$ gilt $E=5$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

6. Lösung: 4784
+ 4784
9568

Wegen $N=8$ entfällt $\bar{U}=8$. Wegen $Z=9$ entfällt $\bar{U}=9$.

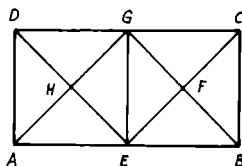
Ma 8 ■ 2396 Bezeichnet man zwei beliebige natürliche Zahlen mit a bzw. b , so ist das Verhalten der Quadratzahlsumme $s=a^2+b^2$ bei der Division durch 4 zu untersuchen.

1. Fall: a und b sind beide gerade Zahlen, etwa $a=2m$, $b=2n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Es ist dann $s=4m^2+4n^2$, $s=4(m^2+n^2)$. Die Division durch 4 geht auf.

2. Fall: a sei eine gerade und b eine ungerade Zahl, etwa $a=2m$, $b=2n+1$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Es ist dann $s=4m^2+4n^2+4n+1$, $s=4(m^2+n^2+n)+1$. Bei der Division von s durch 4 bleibt Rest 1.

3. Fall: a und b sind beide ungerade Zahlen, etwa $a=2m+1$, $b=2n+1$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Es ist dann $s=(2m+1)^2+(2n+1)^2$, $s=4m^2+4m+1+4n^2+4n+1$, $s=4(m^2+m+n^2+n)+2$. Bei der Division von s durch 4 bleibt Rest 2. Weitere Fälle können nicht auftreten.

Ma 8 ■ 2397 Wenn nach Voraussetzung $\overline{GE} \cong \overline{BC}$ ist, dann muß G auf $\overline{CD}$ und E muß auf $\overline{AB}$ liegen. Dann sind $\triangle AEGD$ und $\triangle EBCG$



kongruente Quadrate. In einem solchen Falle gilt $\overline{AB} \cong 2 \cdot \overline{BC}$.
 $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie $\overline{BC}$.

Ma 9 ■ 2398 In jeder Folge von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen kommen vor:

- (1) stets genau ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 5,
- (2) mindestens ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 3,
- (3) mindestens ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 4 und
- (4) mindestens ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 2, das nicht auch noch ganzzahliges Vielfaches der Zahl 4 ist.

Somit sind in jedem derartigen Produkt die Faktoren 2, 3, 4 und 5 enthalten.

Da nun $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 9 ■ 2399 Die Zahlen n und n' lassen sich wie folgt darstellen:

$n = 1000a + 100b + 10c + d$,
 $n' = 1000d + 100c + 10b + a$, wobei
 $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ und $1 \leq d \leq 9$ gilt. Daraus folgt weiter

$n + n' = 1001a + 110b + 110c + 1001d$ bzw.

$n + n' = 11(91a + 10b + 10c + 91d)$.

Wie man sieht, ist $n + n'$ durch 11 teilbar, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 2400 $10^x + 10^{-x} = 100 \mid \cdot 10^x$
 $10^{2x} + 1 = 10^{x+2}$
 $10^{2x} - 10^{x+2} + 1 = 0$.

Wir setzen $10^x = y$ und erhalten
 $y^2 - 100y + 1 = 0$.

Nun lösen wir diese quadratische Gleichung nach y auf:

$y_{1,2} = 50 \pm \sqrt{2499}$; $y_{1,2} = 50 \pm 7\sqrt{51}$. Nun ist $x_1 = \lg y_1$ und $x_2 = \lg y_2$, und es gilt weiter

$x_1 = \lg(50 + 7\sqrt{51})$; $x_1 \approx \lg 100$; $x_1 \approx 2$.

$x_2 = \lg(50 - 7\sqrt{51})$; $x_2 \approx \lg 0,01$; $x_2 \approx -2$.

Probe: $10^2 + 10^{-2} = 100 + 0,01 \approx 100$ und

$10^{-2} + 10^2 = 0,01 + 100 \approx 100$.

Die Lösungen der Gleichungen sind 2 und -2 (Näherungswerte!).

Ma 9 ■ 2401 Da die Winkel $\angle AEB$ und $\angle ADB$ beide die Größe 90° besitzen, geht der Halbkreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser nach dem Satz des Thales durch die Punkte E und D . Wir verbinden E mit D . Das Viereck $ABDE$ ist somit ein Sehnenviereck. Nach dem Sehnensatz gilt deshalb $\overline{BS} \cdot \overline{ES} = \overline{AS} \cdot \overline{DS}$ bzw. $p \cdot q = m \cdot n$.

Ma 10/12 ■ 2402 Wir nehmen an, daß es ein derartiges Zahlensystem gibt. Dann gilt

$(x^2 + x + 1)(2x^2 + 2x + 2) = 3x^4 + x^2 + 4x + 2$.

Durch Umformen erhalten wir

$2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2 = 3x^4 + x^2 + 4x + 2$;

$0 = x^4 - 4x^3 - 5x^2$ und wegen $x \neq 0$

$0 = x^2 - 4x - 5$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen -1 und 5. Wegen $x \in \mathbb{N}$ ist 5 die einzige Lösung für unsere Aufgabe. Die Basis des Zahlensystems ist 5.

Probe: $31 \cdot 62 = 1922$.

Ma 10/12 ■ 2403 Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq b$ gilt

$(a^c - b^c)^2 > 0$.

Wir formen um und erhalten

$$a^{2c} - 2a^c b^c + b^{2c} > 0,$$

$$a^{2c} + b^{2c} > 2a^c b^c \mid : 2,$$

$$\frac{a^{2c} + b^{2c}}{2} > a^c b^c, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 10/12 ■ 2404 Der Abstand des Punktes P von den Seiten $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AB}$ habe die Länge x, y bzw. z . Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$A = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}cz$$

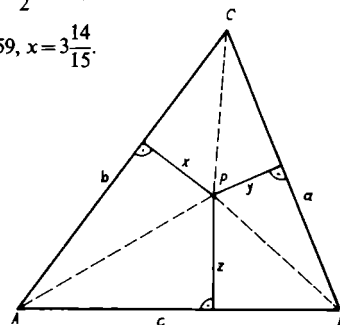
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ mit } 2s = a + b + c.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 5 = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7},$$

$$\frac{15}{2} \cdot x + \frac{109}{2} = 84, 15x + 109 = 168,$$

$$15x = 59, x = 3\frac{14}{15}.$$



Der Abstand des Punktes P von der Seite $\overline{AC}$ beträgt rund 4 cm.

Ma 10/12 ■ 2405 Im rechtwinkligen Dreieck FMD gilt

$$\overline{FD} = \sqrt{\overline{FM}^2 + \overline{DM}^2}; \overline{FD} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2};$$

$\overline{FD} = 1,118r$. Weiter gilt

$$\overline{MG} = \overline{FG} - \overline{FM}; \overline{MG} = 1,118r - 0,5r;$$

$$\overline{MG} = 0,618r.$$

Im rechtwinkligen Dreieck MGD gilt

$$\overline{DG} = \sqrt{\overline{MG}^2 + \overline{MD}^2}; \overline{DG} = \sqrt{(0,618r)^2 + r^2};$$

$$\overline{DG} = 1,175r.$$

Wenn nun $\overline{DG}$ tatsächlich Fünfeckseite ist, dann gilt

$$\alpha = 360^\circ : 5; \alpha = 72^\circ \text{ und } \beta = (180^\circ - 72^\circ) : 2;$$

$$\beta = 54^\circ.$$

Nach dem Sinussatz gilt dann weiter

$$\overline{DC} : \overline{MD} = \sin 72^\circ : \sin 54^\circ;$$

$$\overline{DC} = \frac{\overline{MD} \cdot \sin 72^\circ}{\sin 54^\circ}; \overline{DC} = \frac{r \cdot 0,9511}{0,8090};$$

$$\overline{DC} = 1,175r, \text{ w. z. b. w.}$$

Ph 6 ■ 146 Fahrzeiten: $t_1 = 30$ s, $t_2 = 27$ s,
 $t_3 = 36$ s, $t_4 = 24$ s, $t_5 = 18$ s.

Ph 7 ■ 147 Frau M. hat eine Leistung von $0,667 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$ und Frau H. $0,8 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$ vollbracht.

Ph 8 ■ 148 Die theoretische Öltemperatur beträgt etwa 48°C und die abgegebene Wärmemenge etwa 15540 kJ.

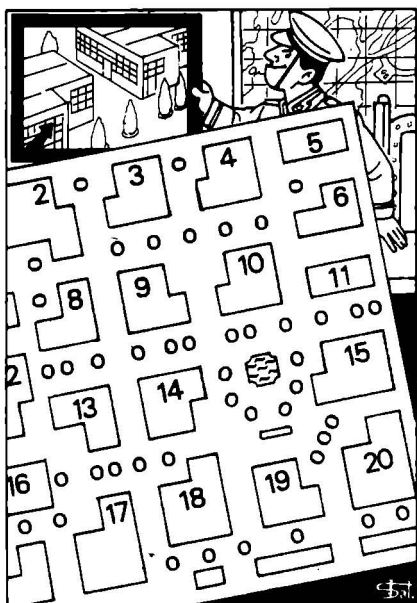
Ph 9 ■ 149 Die Geschwindigkeit des Geschosses beträgt rund 800 m/s.

Ph 10/12 ■ 150 Das Isotop $^{121}_{51}\text{Sb}$ ist zu $57,5\%$ und das Isotop $^{123}_{51}\text{Sb}$ zu $42,5\%$ vorhanden.

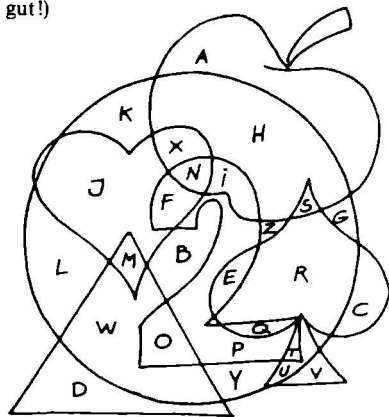
Ungarischer Bilderbogen

Unterhaltsame Aufgaben aus „Füles“, Budapest

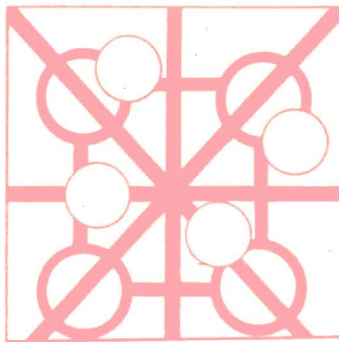
▲1▲ In dem mit einem Pfeil versehenen Gebäude (oben links) sind Diebe am Werk. Die Polizei erscheint sofort am Tatort. In welches der auf der Karte gezeichneten Häuser muß sie gehen?



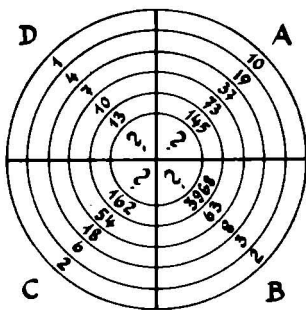
▲2▲ Sieh auf die Uhr, und miß die Zeit! Finde möglichst schnell den Buchstaben, der in dem Apfel, dem Herzen, der Ziffer 2 und in dem Kreis zu finden ist, der aber nicht in dem Dreieck und der Pik-Figur zu sehen ist! (Ergebnisse unter zwei Minuten sind sehr gut!)



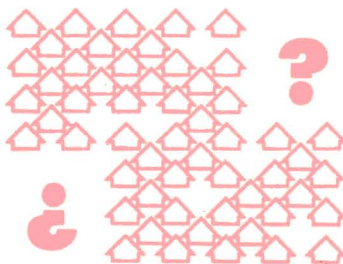
▲3▲ Vier der fünf Kreise passen in die vier Aussparungen der Figur. Welche bleibt übrig?



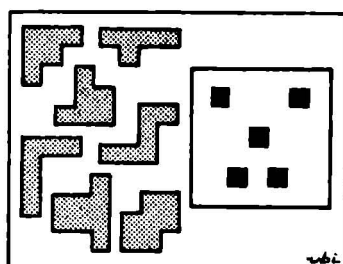
▲4▲ Welche Zahlen gehören logischerweise an Stelle der Fragezeichen?



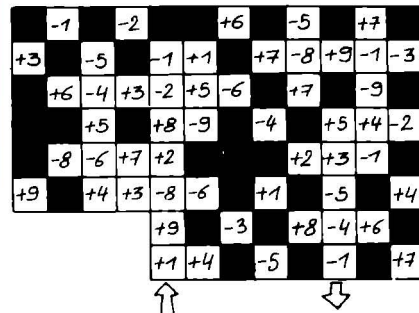
▲5▲ Mit wieviel kleinen Pfeilen muß man die Figur vervollständigen, um ein Rechteck zu erhalten?



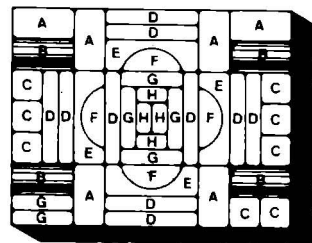
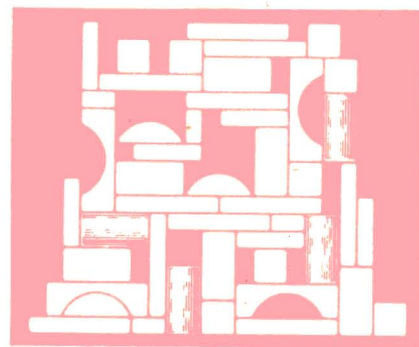
▲6▲ Die grauen Teilchen sind so in das Bild umzusetzen, daß die gesamte weiße Fläche bedeckt ist.



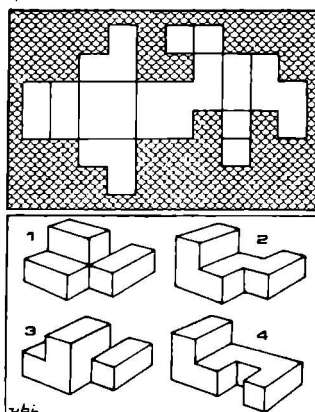
▲7▲ Das Labyrinth ist durch das Feld (+1) zu betreten und durch das Feld (-1) zu verlassen. Man darf von einem Feld aus jedes Nachbarfeld betreten, auch die Felder in Diagonalrichtung. Es ist ein Weg zu finden, bei dem man bei Ausführung der Addition bzw. Subtraktion als Ergebnis 0 erhält.



▲8▲ Die merkwürdige Burg wurde aus den Elementen des unten abgebildeten Baukastens errichtet. Mit einer Ausnahme wurden alle Elemente dabei verwendet. Welches bleibt übrig?

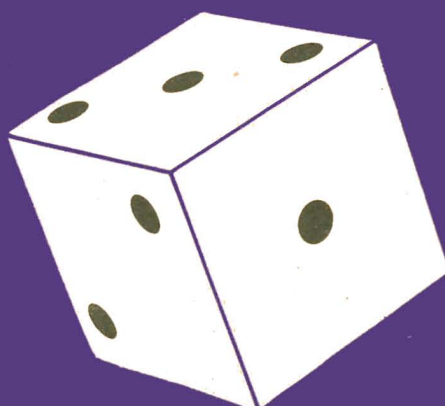
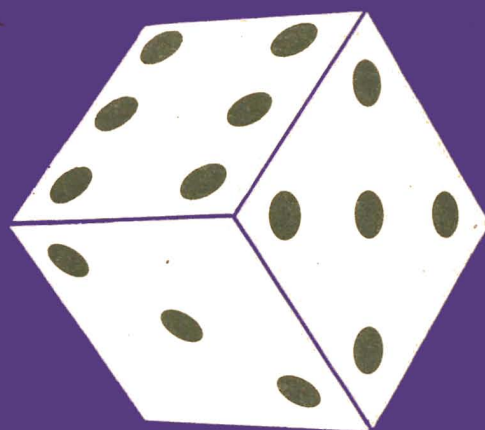
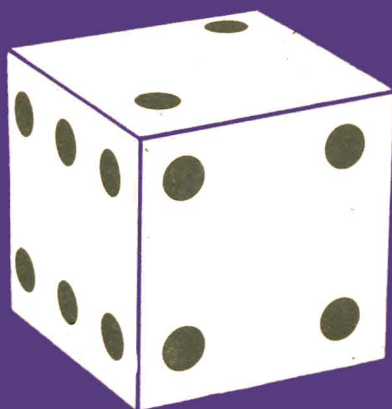
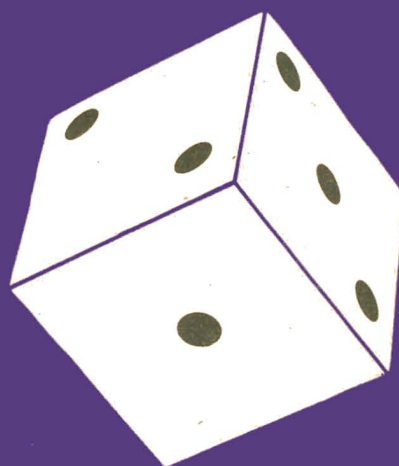
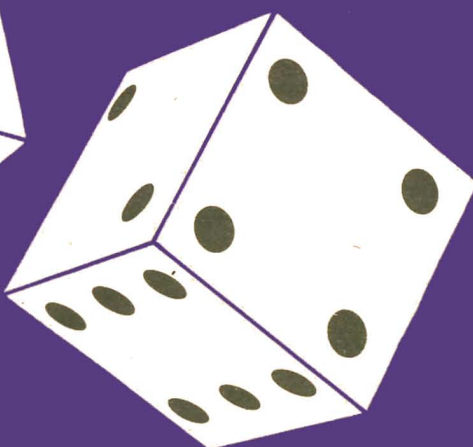
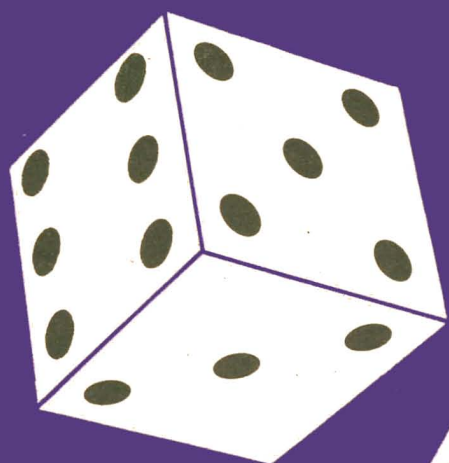


▲9▲ Zu welchem der vier Körper gehört das abgebildete Netz?



Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritzt); Dr. sc. rer. nat. E. Quaiser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Postscheckkonto: Berlin 132 626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Zentralbild Berlin (S. 51); U. Bause, Berlin (S. 51); aus: Füles, Budapest; E. Stagninus, Berlin (S. 56); H. Parschau, Berlin (S. 59); H. Bartnig, Berlin (S. 65); J. Lehmann (Leipzig) (S. 66/68); aus: Quant, Moskau (S. 68); aus: Functio, math. Schülerzeitschrift, Helsinki (S. 71)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von: *The Australian Mathematics Teacher* 3/83



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,
III/18/97

AN (EDV) 128

Redaktionsschluss: 1. März 1984

Erscheinungstermin: 25. Juni 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Der Satz des Jahrhunderts – Die Fermatsche Vermutung und der Satz von Mordell-Faltings [10]¹⁾
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR
 - 51 Fakten und Zahlen zum Schuljahr 1983/84 [5]
aus: *Elternhaus und Schule*, Berlin
 - 52 Raten und Knobeln [5]
Auswahl von Aufgaben aus *Leipziger Volkszeitung*
 - 53 Ferien mit der bunten Welt der Mathematik – Ergebnisse jahrelanger intensiver sowie jüngster Forschungsarbeit dargelegt [7]
stud. math. Jens Awe, Karl-Marx-Universität Leipzig
 - 54 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]
Aufgaben der Bezirksolympiade
 - 56 Mathematik und Schach [7]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
 - 57 Allerlei Gestrecktes [6]
Prof. Dr. W. Walsch, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle
 - 58 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel, Teil 3
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
 - 60 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6
mathematicus
Wir festigen unsere Grundkenntnisse, Teil 2 [6]
Aufgabenmaterial aus dem Kreis Löbau
 - 60 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Miguel de Guzmán [8]
Mathematische Fakultät der Universität Madrid
 - 61 alpha-Ferienmagazin [4]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
 - 65 alpha – aktuell [5]
 - 66 Illebens Skizzen – Auf den Spuren eines alten unterhaltsamen Rechenbuches [5]
J. Lehmann, Leipzig
 - 68 alpha-Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholtz/J. Lehmann
 - 69 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade
 - 71 Lösungen [5]
 - 71 Anders Celsius und die lappländische Gradmessung [7]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
 - 72 Die Mathematik im Spiegel der Philatelie [7]
V. Großmann/Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
- IV. U.-Seite: Wir falten lustige Figuren [5]
aus: *Werken und Formen*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Satz des Jahrhunderts

Die Fermatsche Vermutung und der Satz von Mordell-Faltings

In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts formulierte *Pierre de Fermat* auf dem Rand einer Seite einer Buchausgabe der „Arithmetik“ des Diophant die Vermutung, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für jede natürliche Zahl $n > 2$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt.

Ist m irgendein Teiler des Exponenten n und die *Fermatsche Vermutung* für den Exponenten m bewiesen, so gilt sie auch für n . (Ist nämlich $n = mf$, so ist

$$x^n + y^n = z^n$$

in der Form

$$(x^f)^m + (y^f)^m = (z^f)^m$$

aufschreibbar.)

Da jede natürliche Zahl $n \geq 3$ durch 4 oder durch eine ungerade Primzahl teilbar ist, genügt es, die *Fermatsche Vermutung* für die Exponenten $n = 4$ und $n = p$ (ungerade Primzahl) zu beweisen. Die Aussage für den Exponenten $n = 4$ ist der *Satz von der Nichtexistenz von rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten ganzzahlige Quadrate sind*. (Er wurde zuerst von Fermat bewiesen.)

Man kann sich somit auf die Untersuchung der Gleichung

$$x^p + y^p = z^p \quad (1)$$

beschränken. (Hier sei der Exponent p eine ungerade Primzahl.) Drei von Null verschiedene ganze Zahlen a, b, c , die der Gleichung (1) mit $x = a, y = b, z = c$ genügen, heißen *Fermatsches Zahlentripel* (zum Exponenten p).

Haben zwei Zahlen eines Fermatschen Tripels einen gemeinsamen Teiler t , so teilt t wegen $a^p + b^p = c^p$ auch die dritte Zahl. Wenn es überhaupt Fermatsche Zahlentripel gibt, so genügt es, solche zu suchen, bei denen die Zahlen a, b, c paarweise teilerfremd sind. (Gibt es solche Zahlentripel nicht, dann gibt es überhaupt keine Fermatschen Tripel.) Dann ist auch ta, tb, tc (mit einer ganzen Zahl t) ein Fermatsches Tripel. Zum Nachweis, daß es für einen speziellen Primzahlexponenten p keine Fermatschen Zahlentripel gibt, genügt es, die folgenden zwei Aussagen zu beweisen. a) Erster Fall der Fermatschen Vermutung: Es gibt keine Fermatschen Zahlentripel (a, b, c), so daß die Zahlen a, b, c nicht durch p teilbar sind.

b) Zweiter Fall der Fermatschen Vermutung: Es gibt keine Fermatschen Zahlentripel, so daß eine (und dann nur eine) der Zahlen a, b, c durch p teilbar ist.

Für die kleinste ungerade Primzahl $p = 3$ hat *Euler* die Unlösbarkeit von (1) in gan-

zen Zahlen bewiesen. (Siehe die Artikel: „Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung“ in *alpha* Heft 2/82, „Eulers Beweis für die Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen“ in *alpha* Heft 3/83.)

Der französische Mathematiker *Legendre* hat Eulers Beweis in sein 1798 erschiene- nes Zahlentheorie-Lehrbuch aufgenommen. *Legendre* bewies 1823 die Unlösbarkeit von (1) in ganzen Zahlen für $p = 5$. Daß $x^{14} + y^{14} = z^{14}$ nicht in ganzen Zahlen lösbar ist, zeigte 1832 *Dirichlet*. Die Unmöglichkeit von (1) für $p = 7$ fand dann 1839 *Lamé*. Von *Kummer* wurde um 1850 schließlich das sehr weittragende Ergebnis gefunden, daß die Fermatsche Vermutung für alle sog. *regulären Primzahlen* als Exponenten richtig ist, daß somit die Gleichung (1) für alle ungeraden Primzahlen $p < 100$ keine ganzzahligen Lösungen hat. Er bekam für seinen Lösungsbeitrag eine an sich für die vollständige Erledigung des Fermatschen Problems 1849 von der Pariser Akademie gestiftete Goldmedaille.

1883 setzte auch die Belgische Akademie der Wissenschaften einen Preis für die Lösung aus. Der Privatgelehrte *Wolfskehl* (1856 bis 1906) stellte der *Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* aus seinem Privatvermögen 100000 Mark als Preis für die vollständige Lösung des Problems zur Verfügung (1908 veröffentlicht).

Bis 1908 konnte durch *Dickson* der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle ungeraden Primexponenten $p < 7000$ erledigt werden. Ein hervorragendes Ergebnis erzielte 1909 *Wieferich*. (Er erhielt 100 Mark vom Wolfskehl-Preis.) Er zeigte,

Prof. L. J. Mordell (Foto v. Faltings S. 59)



daß der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen p mit

$$2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

richtig ist. (Mittels Rechenautomaten konnte bis 1971 nachgewiesen werden, daß es unter den ungeraden Primzahlen $p < 3 \cdot 10^9$ nur zwei Zahlen (1093 und 3571) gibt, die der Kongruenz $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ genügen.)

Frobenius und *Mirimanoff* bewiesen später, daß der erste Fall der Fermatschen Vermutung auch für alle Primzahlen p mit

$$3^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

richtig ist. (Hierzu gehören auch die Primzahlen 1093 und 3571.) Jetzt schien es wahrscheinlich, daß die Zahlen 2 und 3 durch andere Primzahlen $q (\neq p)$ ersetzt werden können. Tatsächlich konnte man die Richtigkeit des ersten Falles der Fermatschen Vermutung für alle p mit

$$q^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

beweisen, wobei $q (\neq p)$ eine Primzahl ist, für die $q \leq 43$ gilt (*Vandiver, Frobenius, Polaczek, Morishima, Rosser*).

Mittels Rechenautomaten konnte bereits 1941 (vermöge dieser Bedingungen) nachgewiesen werden, daß der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen, die kleiner als 253 747 889 sind, richtig ist. 1948 erkannte *N. G. Gunderson* die Richtigkeit sogar für Primzahlexponenten $< 57 \cdot 10^9$. Es sind aber auch größere Primzahlen bekannt, für die der erste Fall der Fermatschen Vermutung richtig ist, z. B. für $p = 2^{86243} - 1$; diese Zahl scheint gegenwärtig die größte bekannte Primzahl überhaupt zu sein.

Im Jahre 1954 gab *Vandiver* ein Kriterium für die Richtigkeit des zweiten Falles der Fermatschen Vermutung an. Mittels Rechenautomaten konnte nun nachgewiesen werden, daß der zweite Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen, die kleiner als 5500 sind, richtig ist. Ebenfalls mittels Computer konnte 1976 *Samuel S. Wagstaff* die Richtigkeit (beider Fälle) der Fermatschen Vermutung für Primzahlexponenten $p < 125000$ zeigen.

Die Fermatsche Vermutung konnte bisher nicht vollständig bewiesen werden. Man weiß noch nicht einmal, ob sie für unendlich viele Primzahlexponenten richtig ist. Die Vermutung gehört immer noch zu den bekanntesten ungelösten Problemen der Mathematik.

L. Kronecker schrieb in seinen „Vorlesungen über Zahlentheorie“ über die Fermatsche Vermutung, daß sich mit diesem Satz die Mathematiker vielleicht mehr beschäftigt haben als mit irgendeinem anderen, und daß wohl keiner, abgesehen etwa von der Quadratur des Kreises, zu so vielen falschen und irrtümlichen Deduktionen Veranlassung gegeben hat. Es finden sich immer wieder Mathematiker, aber auch Laien, die versuchen, die Vermutung zu beweisen. Es gibt jedoch auch Mathematiker, die sich fragen, ob es überhaupt ein „vernünftiges“ Problem ist. Lohnt es sich überhaupt, daran zu arbeiten?

Einmal erscheint es recht aussichtslos, die Lösung zu finden. Zum anderen kann man, selbst wenn ein Beweis gelungen

ist, immer wieder neue Gleichungen betrachten, beispielsweise $x^p + 2y^p = z^p$, $x^p + 1001y^p = z^p$, ..., und nach ganzzahligen Lösungen fragen. In der Tat, welchen Sinn hätte es, gerade das Fermatsche Problem zu lösen?

Ein offenbar vernünftigeres Problem ergibt sich so: Man kann für die Fermatsche Gleichung auch

$$\left(\frac{x}{z}\right)^p + \left(\frac{y}{z}\right)^p = 1$$

schreiben. Man fragt dann nach Lösungen der Gleichung

$$t^p + u^p = 1 \quad (2)$$

in rationalen Zahlen t, u .

Betrachtet man nun allgemeiner ein Polynom $f(t, u)$ in zwei Unbestimmten [z. B. $f_1(t, u) = t^p + u^p - 1$, $f_2(t, u) = u^2 - t^3 - t^2$], so definiert die Gleichung $f(t, u) = 0$ eine Kurve in der Ebene. Man kann fragen, ob es auf der Kurve Punkte mit rationalen Koordinaten (kurz: rationale Punkte) oder sogar mit ganzzahligen Koordinaten gibt. Die Antwort ist auch hier nicht leicht.

Es gibt eine Invariante, die man gewissen (algebraischen, glatten) Kurven zuordnen kann; sie wird als ihr Geschlecht bezeichnet.

Geraden und Kegelschnitte (Parabeln, Ellipsen, Hyperbeln) haben das Geschlecht 0. Auf Kurven vom Geschlecht 0 kann es keine, endlich viele oder unendlich viele rationale Punkte geben.

Als Beispiel sei der Kreis

$$t^2 + u^2 = 1 \quad (3)$$

mit dem Radius 1 betrachtet [sein Mittelpunkt ist der Koordinatenursprung $(t, u) = (0, 0)$]. Man kann beweisen: Alle rationalen Punkte auf diesem Kreis werden gegeben durch

$$\left(\frac{g^2 - h^2}{g^2 + h^2}, \frac{2gh}{g^2 + h^2}\right)$$

oder

$$\left(\frac{2gh}{g^2 + h^2}, \frac{g^2 - h^2}{g^2 + h^2}\right),$$

worin g und h beliebige ganze Zahlen sind. Es handelt sich also um unendlich viele rationale Punkte.

Hieraus ergeben sich unschwer auch die ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (4)$$

Alle teilerfremden Lösungstriple von (4) werden gegeben durch

$$(g^2 - h^2, 2gh, g^2 + h^2)$$

oder

$$(2gh, g^2 - h^2, g^2 + h^2),$$

sofern g und h teilerfremde ganze Zahlen sind, von denen die eine gerade, die andere ungerade zu wählen ist. Ein beliebiges Lösungstriple von (4) hat die Form (ta, tb, tc) , worin (a, b, c) ein teilerfremdes Lösungstriple von (4) und t eine beliebige ganze Zahl ist.

Kurven vom Geschlecht 1 heißen elliptische Kurven. Gleichungen der Form

$$u^2 - t^3 - at^2 - bt - c = 0$$

(mit rationalen Koeffizienten a, b, c derart, daß die Gleichung $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ drei verschiedene Nullstellen besitzt) definieren solche Kurven.

Als Beispiele seien die durch die Gleichungen $u^2 = t^3 + k$ (5)

definierten Kurven angegeben, worin $k \neq 0$ eine beliebige ganze (in jeder solchen Gleichung festgewählte) Zahl bezeichnet.

Die Kurve (mit $k = 1$)

$$u^2 = t^3 + 1$$

hat nur drei rationale Punkte (t, u) , nämlich $(-1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(2, \pm 3)$ (L. Euler).

Die Gleichung (mit $k = -1$)

$$u^2 = t^3 - 1$$

hat weder in ganzen noch in rationalen Zahlen t, u ($\neq 0$) Lösungen.

Der englische Zahlentheoretiker *L. J. Mordell* (1888 bis 1972) bewies 1922, daß für jede ganze Zahl $k \neq 0$ die Gleichung (5) höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt. So hat die Gleichung (5) beispielsweise für $k = -3, -5, 7, 11, 13$ überhaupt keine ganzzahligen Lösungen. Sie besitzt für $k = -2$ die beiden ganzzahligen Lösungen $t = 3, u = \pm 5$ (was schon Fermat ausgesprochen hat; bewiesen hat es *T. Pépin* 1875).

Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 2$$

hat keine anderen ganzzahligen Lösungen, außer $t = -1, u = -1$ (*A. Brauer*, 1926).

Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 17$$

besitzt genau 16 ganzzahlige Lösungen:

$(t, u) = (-2, \pm 3), (-1, \pm 4), (2, \pm 5), (4, \pm 9), (8, \pm 23), (43, \pm 282), (52, \pm 375), (5234, \pm 378661)$ (*T. Nagell*, 1930). Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 11$$

hat zwar keine ganzzahligen Lösungen, jedoch gibt es rationalzahlige Lösungen, z. B.

$$\left(\frac{19}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^3 + 11.$$

Die Identität

$$\left(\frac{27t^6 - 36u^2t^3 + 8u^4}{8u^3}\right)^2 - \left(\frac{9t^4 - 8u^2t}{4u^2}\right)^3 = u^2 - t^3 = k$$

zeigt: Jede Lösung der Gleichung $u^2 = t^3 + k$ in rationalen Zahlen $u \neq 0, t \neq 0$ liefert eine weitere Lösung. Falls die Kurve $u^2 = t^3 + k$ für $k \neq 1, -3, 2^4$ einen rationalen Punkt besitzt, so hat sie sogar unendlich viele rationale Punkte (*R. Fueter*, 1930).

Auf Kurven vom Geschlecht 1 brauchen keine rationalen Punkte zu liegen. Hat man jedoch einen rationalen Punkt auf einer elliptischen Kurve, so kann man die Tangente an diesem Punkt zeichnen und zeigen, daß der Schnittpunkt der Tangente mit der Kurve wieder ein rationaler Punkt ist. Es gibt Fälle, in denen man so unendlich viele rationale Punkte findet.

C. L. Siegel (1896 bis 1981) bewies 1929, daß auf Kurven vom Geschlecht ≥ 1 nur endlich viele Punkte liegen, deren Koordinaten beide ganzzahlig sind.

L. J. Mordell, der „König der diophantischen Gleichungen“, sprach im Jahre 1922 die Vermutung aus, daß auf einer Kurve mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, sogar höchstens endlich viele rationale Punkte liegen. Viele Mathematiker, darunter in der Welt führende Gelehrte, versuch-

ten seitdem, diese *Mordellsche Vermutung* zu bestätigen. Im Frühjahr 1983 gelang es dem jungen Mathematiker *Gerd Faltings* (geb. 1955), die Vermutung Mordells zu beweisen. Er ist ein Schüler von Professor *Nastold* in Münster, promovierte 1978, studierte dann ein Jahr an der Harvard University, habilitierte sich 1981 und wurde mit 27 Jahren Mathematikprofessor in Wuppertal. Sein Arbeitsgebiet ist die Algebraische Geometrie, jenes Teilgebiet der Mathematik, das aus der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen und der mehrdimensionalen Geometrie entstanden ist.

Die Arbeiten der *Moskauer Schule der Algebraischen Geometrie* (*I. R. Schafarewitsch, A. N. Parschin, S. Arakelov, J. G. Zarchin*) bilden das Fundament für Faltings Beweis der Mordellschen Vermutung. Sie lieferten die entscheidenden Ideen und Methoden. Ohne die Abhandlungen von Parschin (von 1968), Arakelov (von 1971 und 1974), sowie Zarchin (von 1974) wäre dieser Beweis nicht möglich gewesen. Eine weitere wichtige Idee scheint Faltings auch dem französischen Mathematiker *P. Deligne* zu verdanken. 60 Jahre hat der von Mordell ausgesprochene Satz (ein bekannter Mathematiker nannte ihn kürzlich den „Satz des Jahrhunderts“) allen Beweisen getrotzt. Nun konnte G. Faltings den Beweis auf Grund der in den letzten Jahrzehnten in der Algebraischen Geometrie entwickelten Methoden erbringen.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Warschau im August 1983 hat *P. Deligne* einen Sondervortrag über Faltings' Ergebnisse gehalten. Auf der Tagung „Arithmetik auf Mannigfaltigkeiten“ im Oktober 1983 in Greifswald hat Parschin darüber vorgetragen.

Beispiele für Kurven mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, sind die „Fermatschen Kurven“

$$t^p - u^p - 1 = 0 \quad (6)$$

für $p > 3$.

Da nach dem Satz von Mordell-Faltings auf einer Kurve mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, höchstens endlich viele rationale Punkte liegen, sind für die Gleichung (6) höchstens endlich viele rationale Lösungen möglich. Dies bedeutet, daß die Gleichung (1) höchstens endlich viele teilerfremde ganzzahlige Lösungen besitzen kann. Dieses direkt zu beweisen, war den Zahlentheoretikern bis heute nicht gelungen. Wir haben hier ein neues Beispiel für eine (vom Mathematiker *G. Pólya* beschriebene) paradoxe Erfahrung beim Lösen mathematischer Probleme. Der Beweis der stärkeren Aussage (hier: der Satz von Mordell-Faltings) erweist sich (zwar als schwer, jedoch) als leichter als der Beweis der schwächeren Aussage (hier: die Aussage für den Sonderfall der Fermatschen Kurven).

Man kann hoffen, nun auch einmal beweisen zu können, daß (1) überhaupt keine teilerfremden ganzzahligen Lösungen besitzt (Fermatsche Vermutung).

H. Pieper

Fakten und Zahlen zum Schuljahr 1983/84



8 Milliarden Mark stellt unser Staat jährlich für das Volksbildungswesen zur Verfügung, das sind 4 Prozent des Nationaleinkommens. Der Grundmittelwert einer zweizügigen Oberschule beträgt 4,7 Millionen Mark. Zur Bewirtschaftung und Unterhaltung einer Schule werden jährlich 170000 Mark benötigt. Im Sommer 1983 wurden für die örtliche Feriengestaltung 60 Millionen Mark und jährlich werden für die Schülerbeförderung 140 Millionen Mark staatliche Mittel aufgewendet.

Schüler

Mit Beginn dieses Schuljahres betrug die Zahl der Schüler in der DDR 2,1 Millionen, davon sind 202000 Schulanfänger.

Schulen

Gegenwärtig gibt es 5865 allgemeinbildende polytechnische Oberschulen, und zwar 5156 zehnklassige Oberschulen, 220 erweiterte Oberschulen, 489 Sonderschulen.

Pädagogen

An den Schulen sind 171400 Lehrer und Erzieher tätig. Am 1. September 1983 nahmen 10200 Absolventen von Pädagogischen Hochschulen, Universitäten, Instituten für Lehrerbildung und Pädagogischen Schulen ihre Tätigkeit in Einrichtungen der Volksbildung auf: 4400 Diplom-Lehrer, 3350 Lehrer für untere Klassen und Pionierleiter, 2450 Kindergärtnerinnen.

Schulhort

In der DDR bestehen 5418 Schulhorte mit 25332 Hortgruppen, in denen 33500 Erzieher rund 563500 Kinder der Klassen 1 bis 4 betreuen.

Das sind mehr als 80 Prozent aller Schüler der Klassen 1 bis 4.

In den einzelnen Klassenstufen zeigt sich folgendes Bild der Teilnahme:

1. Klasse – 90,2 Prozent
2. Klasse – 87,9 Prozent
3. Klasse – 81,8 Prozent
4. Klasse – 64,3 Prozent.

Es können alle Kinder der genannten Klassen, deren Eltern es wünschen, einen Schulhort besuchen. Zur planmäßigen Sicherung der inhaltlichen Arbeit wurden von 1972 bis 1980 insgesamt mehr als 200 Millionen Mark aus dem Staatshaushalt bereitgestellt. Dadurch konnten die Ausstattungen und das Mobiliar der Horte wesentlich verbessert werden. Neben Mö-

beln wurden von diesem Geld anteilmäßig Gebrauchsgegenstände, wie Eßgeschirr, Eßbestecke, Gardinen, Handtücher, Tischdecken, Schlafdecken u. a., angeschafft. Gleichzeitig wurde mehr Spielzeug und Beschäftigungsmaterial bereitgestellt.

Zur Ergänzung des Vorhandenen stehen jedem Hort je angemeldetem Kind jährlich folgende Mittel zur Verfügung:

- für Spielzeug und Beschäftigungsmaterial 15,- M
- für Haushaltsgegenstände 6,- M
- zur Entwicklung des geistig-kulturellen Lebens 2,- M
- für Getränke 4,- M
- für die wohnliche Ausgestaltung 2,- M

Schulbücher

Vom volkseigenen Verlag Volk und Wissen wurden für das Schuljahr 1983/84 498 verschiedene Lehrbücher für Schüler der Ober- und Sonderschulen der DDR mit einer Gesamtzahl von mehr als 25 Millionen Exemplaren herausgegeben. Die Verkaufspreise für die obligatorischen Schulbücher betragen:

| Klassen | Anzahl der Bücher | Gesamtpreis |
|-----------|-------------------|-------------|
| 1 bis 3 | 23 | 27,30 M |
| 4 bis 6 | 29 | 61,75 M |
| 7 bis 10 | 60 | 113,30 M |
| | 112 Bücher | 202,35 M |
| 11 und 12 | 17 Bücher | 61,60 M |

(Diese Angaben berücksichtigen nicht die Bücher für Sonderschulen und bestimmte Unterrichtsmaterialien.)

12 Millionen Bücher sind Freixemplare, die der Staat mit 19,5 Millionen Mark finanziert.

44 Schulbücher sind Neuerscheinungen.

Kindergarten

Seit dem Beginn dieses Schuljahres gibt es über 12560 Kindergärten. In ihnen werden 957000 Kinder von 54400 Erzieherinnen und weiteren 26700 pädagogischen Kräften betreut.

Damit wurde die Aufgabenstellung des X. Parteitages der SED erfüllt, für alle Kinder, deren Eltern es wünschen, einen Kindergartenplatz zur Verfügung zu stellen.

Außerunterrichtliche Tätigkeit

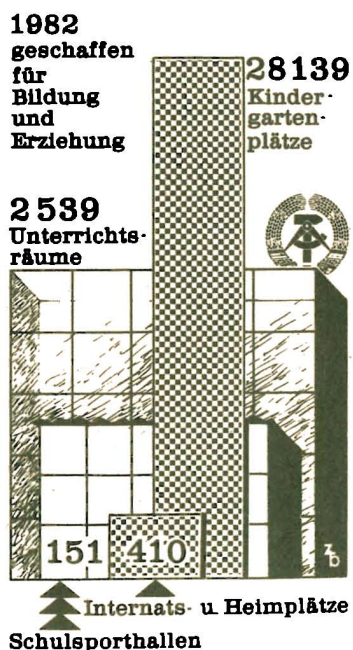
Im Schuljahr 1982/83 haben mehr als 1,4 Millionen Schüler der Klassen 1 bis 10 an etwa 110000 Arbeitsgemeinschaften (ohne Rahmenprogramm) teilgenommen.

60000 Schüler waren in 5000 Arbeitsgemeinschaften auf gesellschaftswissenschaftlichem Gebiet tätig:

250000 Kinder und Jugendliche knobelten, forschten und experimentierten in 22000 naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgemeinschaften; 577000 Schüler betätigten sich kulturell und künstlerisch in 38000 Arbeitsgemeinschaften.

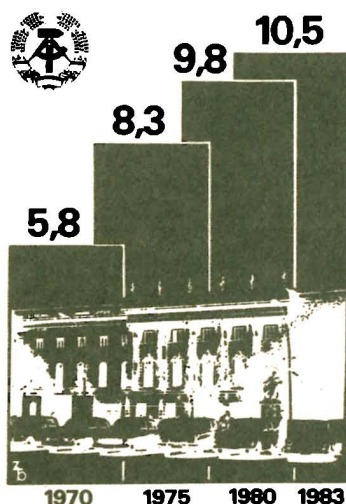
Für die Freizeitbetätigung der Kinder und Jugendlichen gibt es in der DDR 418 außerschulische Einrichtungen (davon 142 Pionierhäuser und 192 Stationen junger Naturforscher und Techniker), in denen rund 2530 Pädagogen mitarbeiten.

Volksbildung



Ausgaben des Staatshaushaltes für das Bildungswesen

in Milliarden Mark



Raten und Knobeln

Auswahl von Aufgaben aus Wochenendbeilagen der Leipziger Volkszeitung (1983/84)

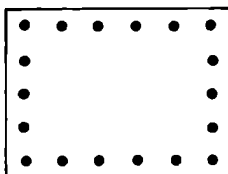
Faktoren gesucht

Das Produkt aus einer ein- und einer zweistelligen natürlichen Zahl bestehe nur aus Ziffern „7“. Ermittelt die Faktoren des Produkts!

$$P = a \cdot b$$

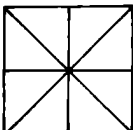
Gerechte Teilung

Zerlegt das abgebildete Rechteck durch drei Geraden derart in sechs Teilstücke, daß sich in jedem Teil genau drei Punkte befinden! Versucht, mindestens vier verschiedene Möglichkeiten einer solchen Zerlegung zu finden!



Richtig gezählt

Wie viele Dreiecke und wie viele konvexe Vierecke sind in der abgebildeten Figur enthalten?



Zwei besondere Zahlen

In den abgebildeten Wortgleichungen ist jeder der Buchstaben durch eine der Ziffern von 0 bis 9 derart zu ersetzen, daß sich richtig gelöste Multiplikationsaufgaben ergeben. Gleiche Buchstaben sind dabei durch die gleiche Ziffer und unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{array}{l} \text{E G A L} \cdot \text{L} = \text{L A G E} \\ \text{M E T A} \cdot \text{K} = \text{A T E M} \end{array}$$

Hölzchenspiele mit Hokuspokus

Aus 4 mach Sieben, aus 3 mach Neun!
Das muß' des Sportlers Herz erfreuen.
Und nun nimm 21 her!
Du wirst es sehn, es macht sich:
Es werden Neunzehnhundertdreiundachtzig.
Sodann betrachte 102 und subtrahiere 80!
Nimmst du sie her, so werden es erneut
Neunzehnhundertdreiundachtzig!

Richtiger Weg

Findet einen Weg von A nach B derart, daß die Summe der dabei überquerten Zahlen 50 beträgt! Dabei darf eine Zahl höchstens einmal überquert werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 7 | 3 |
| | | | |
| 1 | 5 | 2 | 6 |
| | | | |
| 3 | 2 | 5 | 4 |
| | | | |
| 1 | 6 | 7 | 8 |

Hölzchenspiel

In der Figur sind a) neun Hölzchen und b) zehn Hölzchen so umzulegen, daß sich ein Quadrat mit neun gleich großen Teilquadraten ergibt.



Ein Hausfest mit Tombola

Bei einem Hausfest führen die 20 in einem fünfstöckigen Haus wohnenden Familien eine Tombola durch. Jede Familie zieht aus dem Losbehälter, der 20 Zettel mit den Nummern von 1 bis 20 enthält, ein Los und gewinnt dementsprechend. Hinterher stellt man fest, daß die Losnummern in folgender eigenartiger Weise gezogen worden waren:

1. Auf jeder Etage ergab sich die gleiche Summe der gezogenen Losnummern.
 2. Eine auf einer Etage weiter rechts wohnende Familie hatte stets eine höhere Losnummer als ihre linke Nachbarfamilie (von vorn gesehen).
- Die von den im Haus links wohnenden Familien gezogenen Nummern sind bereits eingetragen. Ermittelt die (noch fehlenden) Losnummern, die von den einzelnen Familien gezogen worden sind, und tragt diese in die Hausfigur ein!

| | | |
|---|--|--|
| 1 | | |
| 3 | | |
| 5 | | |
| 7 | | |
| 9 | | |

Kurz überlegen – schnell antworten

Versucht, die folgenden Fragen in möglichst kurzer Zeit richtig zu beantworten:

1. Können 5 Schüler je eine Zensur derart erhalten, daß das Produkt dieser 5 Zensuren 11 beträgt?
2. Wie groß ist der Unterschied zwischen 0,999 und 0,1000?
3. Welchen Wert hat der Ausdruck $5(5 + 5)(5 \cdot 5 - 5)$?
4. Ein Patient bekommt 5 Tabletten. Jede Viertelstunde muß er eine nehmen. Wie lange reichen die Tabletten?
5. Kann man aus zwei Einsen und einem Zeichen eine Zahl bilden, die gleich $\frac{11}{10}$ ist?

Zerlegung gesucht

Zerlegt das abgebildete Rechteck so in 4 Quadrate und 2 Rechtecke, daß sich in jedem dieser 6 Vierecke die gleiche Zahlen-summe ergibt!

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 23 | 1 | 24 | 2 | 7 | 18 |
| 3 | 22 | 13 | 14 | 17 | 8 |
| 21 | 4 | 11 | 12 | 5 | 6 |
| 15 | 10 | 16 | 9 | 20 | 19 |

Eine Bootsfahrt, die ist lustig...

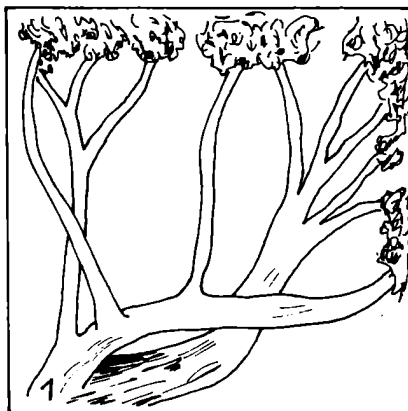
Eine Familie verbringt ihren Urlaub in einer wasserreichen Gegend. Zum „Urlaubsgepäck“ gehört auch ein Boot. An einem Tage möchte sich die Familie mit ihrem Boot auf der Fahrt vom Dorf A zum Dorf B die dazwischenliegende Flußver-zweigung anschauen.

Welche Fahrtroute muß die Familie wählen, damit sie jeden Arm der Flußver-zweigung nur genau einmal zu durchfahren braucht (wobei die Fahrtroute sich jedoch kreuzen darf)?



Eine alte Linde

Das Bild zeigt eine alte Linde, welche durch ihren eigenartigen Wuchs die Kinder geradezu zum Klettern verleitet. Welche und wie viele verschiedene direkte Klettertouren (die teilstreckenweise zusammenfallen können) zu den Wipfeln des Baumes kann sich ein gewandtes Kind – ausgehend vom Punkt „1“ – aussuchen? Vorausgesetzt wird natürlich, daß die Äste das Gewicht des Kindes verkraften.



Magisches Quadrat

Setzt in die leeren Felder des Quadrats reelle Zahlen derart ein, daß sich in den Zeilen und Spalten Gleichungen ergeben! Wie viele verschiedene solcher Eintragungen sind möglich?

| | | | | | | |
|----|---|----|---|---|---|----|
| 5 | — | 2 | + | | = | |
| — | | + | | — | | + |
| | + | 15 | — | 2 | = | |
| + | | — | | + | | — |
| | — | | — | 4 | = | 4 |
| = | | = | | = | | = |
| 17 | + | | — | | = | 20 |

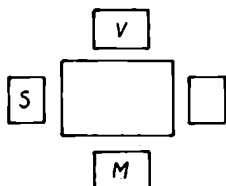
Dreiecks-Zerlegung

Zerlegt das abgebildete gleichseitige Dreieck durch 10 Geraden in 20 Dreiecke, und zwar in 12 gleichseitige und 8 rechtwinklige Dreiecke, die jeweils untereinander kongruent sind!



Wie man sich setzt...

Eine dreiköpfige Familie (Vater, Mutter und Sohn) kommt in eine Gaststätte und möchte an einem freien Tisch mit 4 Stühlen Platz nehmen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Familie, sich in unterschiedlicher Anordnung an den Tisch zu setzen?



Zahl gesucht

Jens dividiert die beiden Zahlen 49 und 65 durch dieselbe natürliche Zahl n . Im ersten Fall erhält er den Rest 4 und im zweiten Fall den Rest 2. Durch welche Zahl n hat er dividiert?

Autor: Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Ferien mit der bunten Welt der Mathematik

Spezialistenlager in Grünheide für Junge Mathematiker

Schon seit Jahren haben die besten *Jungen Mathematiker* aus der Mathematischen Schülergesellschaft des Bezirkes Leipzig in den Ferien ein besonderes Reiseziel: das Zentrale Pionierlager *W. Majakowski* im vogtländischen Grünheide, in dem für sie ein Spezialistenlager organisiert wird. Im vergangenen Jahr sorgten neben erfahrenen Mitarbeitern auch Studenten der Studienrichtung Mathematik/Physik aus dem zweiten Studienjahr der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität dafür, daß sich die Schüler aktiv von den Anstrengungen des lernreichen Schuljahres erholen konnten. Diese Arbeit gehört zu ihrem

FDJ-Jugendobjekt *Studenten arbeiten mit Schülern*. Als Gruppenleiter waren Lehrerstudenten des ersten Studienjahres eingesetzt, die im Spezialistenlager ihr Ferienpraktikum absolvierten.

Die Mathematische Schülergesellschaft gibt es seit 1974. Mitglied kann jeder Schüler werden, der überdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik und gute in allen anderen Fächern nachweisen kann, außerdem aktiv in der Pionierorganisation bzw. der FDJ mitarbeitet. Wer Mitglied der Gesellschaft werden will, muß zunächst eine Kandidatenzeit durchlaufen. Die Arbeit in den einzelnen Zirkeln ist so organisiert, daß sich die Schüler alle 14 Tage zu ihren Veranstaltungen treffen und sich unter Anleitung von Mitarbeitern der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität und hervorragenden Studenten mit mathematischen Problemen auseinandersetzen, die über das gewöhnliche Unterrichtsniveau hinausgehen.

Ein besonderer Höhepunkt ist eben das alljährliche Spezialistenlager. Täglich treffen sich die Schüler zweieinhalb Stunden in ihren Zirkeln. Die meisten werden von Leitern betreut, die selbst aus den Reihen der Mathematischen Schülergesellschaft hervorgegangen sind. Ergänzt und bereichert wird die Zirkelarbeit durch zahlreiche von Wissenschaftlern gehaltenen Vorträge über die Welt der Mathematik. Den Abschluß bildet die Mathematikolympiade, bei der die *Jungen Mathematiker* unter Beweis stellen, daß sie sich im Spezialistenlager gründlich mit ihrem *Schokoladenfach* beschäftigt haben.

Als Gäste eines Zentralen Pionierlagers stehen die *Jungen Mathematiker* natürlich nicht abseits vom offiziellen Lagerprogramm. Im vergangenen Jahr beteiligten sich die Pioniere und FDJ-Mitglieder unter anderem an der Ferienexpedition *Meine Heimat DDR*.

Alle Schüler kamen gut erholt und mit vertieften mathematischen Kenntnissen nach Hause; das ist Lob für die Verantwortlichen und Ansporn. Denn das nächste Spezialistenlager kommt bestimmt. ...

Jens Awe

Ergebnisse jahrelanger intensiver sowie jüngster Forschungsarbeit dargelegt

Mathematikstudenten aus der ganzen DDR haben schöpferische Potenzen eindrucksvoll nachgewiesen

Vom 4. bis 6. 10. 1983 fand an der Karl-Marx-Universität Leipzig die IV. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonzferenz Mathematik statt. Die Teilnehmer, etwa 200 Studenten und 35 Hochschullehrer, kamen aus 18 Einrichtungen unserer Republik. Veranstalter waren der Wissenschaftliche Beirat für Mathematik, der Zentralrat der FDJ und die Mathematische Gesellschaft der DDR.

Mehr als 100 Mathematikstudenten, Studenten der Fachrichtung Diplomlehrer für Mathematik sowie Forschungsstudenten bewarben sich um die Möglichkeit, während der Konferenztage die Ergebnisse ihrer oft monate- und jahrelangen intensiven Forschungsarbeit darzulegen. Das Spektrum des Angebots reichte dabei von Praktikums-, Jahres- und Diplomarbeiten bis hin zu Dissertationen. 56 der eingereichten Arbeiten wurden von einer Jury, die aus Wissenschaftlern mathematischer Sektionen bestand, ausgewählt, und die Verfasser erhielten am zweiten Konferenztag die Möglichkeit, in einem halbstündigen Vortrag die Grundgedanken ihrer Arbeit darzulegen. Zu diesem Zweck wurden sieben Arbeitskreise gebildet.

Daß die intensive wissenschaftliche Tätigkeit der Studenten gesellschaftlich eine hohe Anerkennung findet, zeigt die Tatsache, daß während der Abschlusveranstaltung eine ganze Reihe von Auszeichnungen vorgenommen werden konnte. So erhielt z. B. Dietmar Cieslik von der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald für seine Dissertation, in der er sich mit Anordnungsproblemen bei elektronischen Schaltungen auseinandersetzt, eine Reise in die Sowjetunion. Der großen Bedeutung seiner Diplomarbeit für die Werkstoffprüfung entsprechend, ehrte die Jury Clemens Schlechte von der Sektion Mathematik der TU Dresden mit einer Geldprämie. Erwähnenswert ist, daß diese Arbeit bis zum Patent entwickelt wurde. Die bisher aufgeführten Beispiele sind natürlich längst nicht alle erwähnenswerten Arbeiten.

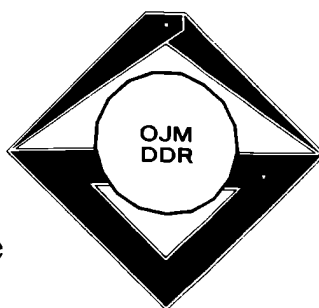
Selbstverständlich wurde auch für die Freizeitgestaltung der Konferenzteilnehmer gesorgt. Den Abschluß des ersten Tages bildeten zahlreiche Diskussionsrunden im Leipziger FDJ-, Jugend- und Studentenzentrum, der *Moritzbastei*. Dabei hatten die Studenten ausreichend Gelegenheit zur Anknüpfung persönlicher Kontakte, wobei natürlich auch ein reger mathematischer Gedankenaustausch stattfand. Am Abend des 5. Oktobers traf man sich zu verschiedenen Foren, in denen Themen wie „Beigabtenförderung im Studium“ oder „Trends in der Anwendung der Mathematik“ im Mittelpunkt standen.

Die Vorbereitung dieser Studentenkonzferenz lag weitestgehend in den Händen der Studenten selbst. Besonders zu erwähnen ist dabei, daß auch Studenten von Mathematiksektionen anderer Universitäten Mitglieder des Vorbereitungskomitees waren. Insgesamt kann festgestellt werden, daß die IV. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonzferenz Mathematik die in sie gesetzten Erwartungen vollständig erfüllt hat. Alle Teilnehmer nahmen zahlreiche Anregungen und Hinweise mit nach Hause, die für eine noch effektivere wissenschaftliche Arbeit im neuen Studienjahr genutzt werden können. Auch im Jahr 1984, dem 35. Jahr des Bestehens unserer Republik, wollen die Studenten ein gewachsenes Leistungsvermögen unter Beweis stellen.

Jens Awe, Lehrerstudent Mathematik/Physik, 3. Studienjahr

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (4./5. 2. 84)



Olympiadeklasse 7

230731 Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

- (1) Anja: „Ich bin 5 Jahre jünger als Elke.“
- (2) Birgit: „Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit.“
- (3) Carmen: „Ich bin 14 Jahre alt.“
- (4) Dorit: „Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen.“
- (5) Elke: „Birgit und Carmen sind beide jünger als ich.“

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

230732 Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ die Größen 2α , 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

230733 Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4,5$ cm und $s_c = 5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB , h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB . Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her! Beweise, daß ein Dreieck ABC , wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

230734 Von einer Zahl wird folgendes gefordert:

Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis
ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis
ein Viertel bildet
und von diesem Viertel nochmals 1
subtrahiert,
so erhält man 1.
Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, daß jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und daß jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

230735 Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest: Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.

Beweise, daß man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

230736 Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt: Der Innenwinkel $\angle ABC$ ist größer als 90° .

Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot \overline{BD} = \overline{AB} = \overline{BC}$.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

Olympiadeklasse 8

230831 Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflubahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, daß aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

230832 Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a . Der Mittelpunkt der Seite AD sei E . Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a !

230833 Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\rho = 2$ cm und $\gamma = 80^\circ$! Dabei sei b die Länge der Seite AC , ρ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC , und γ sei die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

230834 Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

230835 a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat. Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K ? Wieviel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q ?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat. Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k ? Wieviel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q ? Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3,1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

230836 Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB ; die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB ; es gilt $AB \parallel CD$;

die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E , für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt. Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

Olympiadeklasse 9

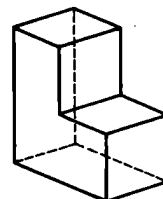
230931 Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- (1) x, y und z sind Primzahlen.
- (2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
- (3) Es gilt $x < y$.
- (4) Es gilt $x + y = z$.

230932 Im Bild ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.

Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!



230933 In dem untenstehenden Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, daß jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Beweisen Sie, daß es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, daß

bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline \square \square \square \end{array}$$

230934 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , für die

$$-5 \leq \frac{4x-3}{2x+1} < 6 \text{ gilt!}$$

230935 In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB , über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C , und sie schneide die Seite BC in B_1 . Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B , über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0 , der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1 . Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1 !

230936 Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.

X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.

Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Welcher der drei Schüler hat recht?

Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3 , ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1, D_2, D_3 gibt, für die $D_1 \cong D_1', D_2 \cong D_2', D_3 \cong D_3'$ gilt.

Olympiadeklasse 10

231031 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (g, r) aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r , für die

$$\frac{r}{r^2 - 6r + 10} = g \text{ gilt!}$$

231032 Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, daß $\angle BAC = \angle CBD = 45^\circ$ und $\frac{1}{4} \overline{ABD} = \frac{1}{3} \overline{BAC}$ gilt.

Beweisen Sie, daß dann $\overline{AD} = \frac{1}{3} \overline{AC}$ gilt!

231033 Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, daß jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, daß in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form $a, a+d, a+2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, daß (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

231034 Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein.

Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1983 + 23 \cdot x^2 = 5 \cdot y^2. \quad (1)$$

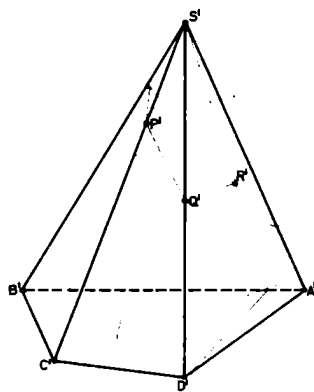
Gibt es ganze Zahlen x und y , für die diese Gleichung (1) gilt?

231035 Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD , einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.

Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, daß für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt; Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

231036 Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCD$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P , das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R . Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCD$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert!



Olympiadeklasse 11/12

231231 In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB . Eine Gerade durch M verlaufe so, daß sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und daß dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DC}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

231232 Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c , und die Länge seiner Raumdiagonale sei d .

Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3}. \quad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Von den folgenden Aufgaben 231233A und 231233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

231233A Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

a) von positiven rationalen Zahlen a_n ,

b) von positiven ganzen Zahlen a_n ,

mit den folgenden Eigenschaften (1),

(2) gibt:

(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.

(2) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right);$$

d. h. a_n ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1} .

Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so ist das zu beweisen.

231233B Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel: 20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so daß die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne daß B weiß, um welche Karten es sich handelt.

B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten „Zug“ nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten). Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.

Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück. Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.

Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie: Er nimmt

im 1. Zug die Karten 1, 2 und,

falls dies noch nicht die beiden

richtigen Karten sind,

im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie,

in entsprechender Weise fortgesetzt, ...

falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

231234 Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen mit

$0 \leq x < 2\pi$
 und $0 \leq y < 2\pi$,
 die das Gleichungssystem
 $3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y$ (1)
 $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$ (2)
 erfüllen.

231235 Man ermittle alle Paare (a, b) von Primzahlen a und b , für die
 $3a^2 + a = b^2 + b$ gilt.

231236 Es sei $\angle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180^\circ$. Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedesmal, wenn er auf einen Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, \dots$ bezeichnet (so weit solche Punkte existieren). Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0^\circ < \varphi_0 < 180^\circ$).

Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen, ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots$ gibt, ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, \dots$ einen Punkt P_k derart gibt, daß $\overline{SP_k} \leq \overline{SP_i}$ für alle $i = 1, 2, 3, \dots$ gilt und durch wie viele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, daß der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $\overline{SP_{m-1}} = \overline{SP_m}$ durchläuft, so daß also das Wegstück $P_0 \dots P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m \dots P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle P_0SQ$. Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfaßt:

I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α :

(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, daß Punkte $P_0, P_1, \dots, P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$ erreicht.

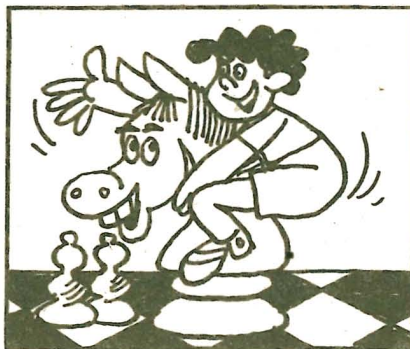
(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geq 1$ so, daß $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geq 2$ ist) für $k = 1, \dots, m-1$ die Ungleichung $\overline{SP_k} < \overline{SP_{k-1}}$ erfüllen, daß dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $\overline{SP_m} \geq \overline{SP_{m-1}}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, \dots, n$ sogar $\overline{SP_k} > \overline{SP_{k-1}}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α , zu denen es
 (C) genau einen, (D) genau zwei, (E) genau n Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, daß für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $\overline{SP_m} = \overline{SP_{m-1}}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

Zitiert

Der erlebte Widerspruch wirkt so stark, daß man nicht anders kann, als sich zu engagieren.

Hans Hiebsch



Es gibt eine Vielzahl von Elementen im königlichen Spiel, die mathematisch Interessantes zu bieten haben. Allgemein bekannt ist dabei die Anekdote von der Entstehung des Schachspiels.

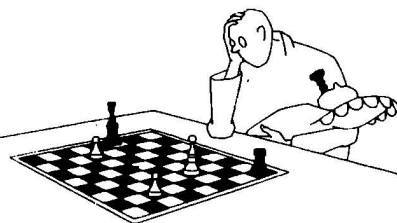
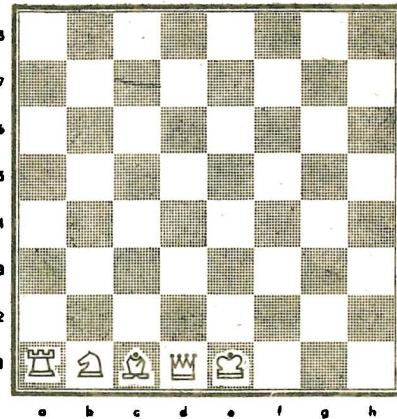
Ein morgenländischer Weiser, von seinem König mit der Erfindung eines Zeitvertreibs beauftragt, erfand das Schachspiel. Um eine Belohnung gefragt, bat er um ein Weizenkorn für das erste der 64 Felder, alsdann aber für jedes weitere um die verdoppelte Anzahl Körner vom vorigen Feld. Der König ließ die kleine, scherzhafte Arbeit lachend beginnen, aber bald waren seine Kornkammern leer und er zornig, denn so viele Weizenkörner konnten niemals herbeigeschafft werden. Die genaue Anzahl lautet:

18446744073709551615 oder, mathematisch gefaßt, die geometrische Reihe $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.

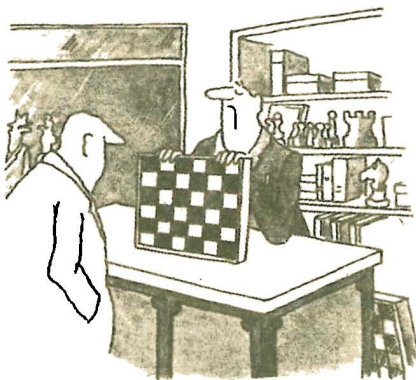
In unserer heutigen Aufgabe wollen wir uns mit Kombinatorik beschäftigen. Man stelle auf die Felder a1 bis e1 folgende fünf weiße Figuren – König, Dame, Turm, Läufer und Springer. Aber keine Figur darf, wie in dem angegebenen Diagramm, dabei auf dem Feld stehen, auf welches sie in der Partieanfangsstellung gehört! Zwei mögliche Beispiele seien genannt:

Sa1, Tb1, Dc1, Kd1, Le1 und Ka1, Lb1, Sc1, Td1, De1. Wie viele verschiedene Anordnungen dieser Art sind möglich?

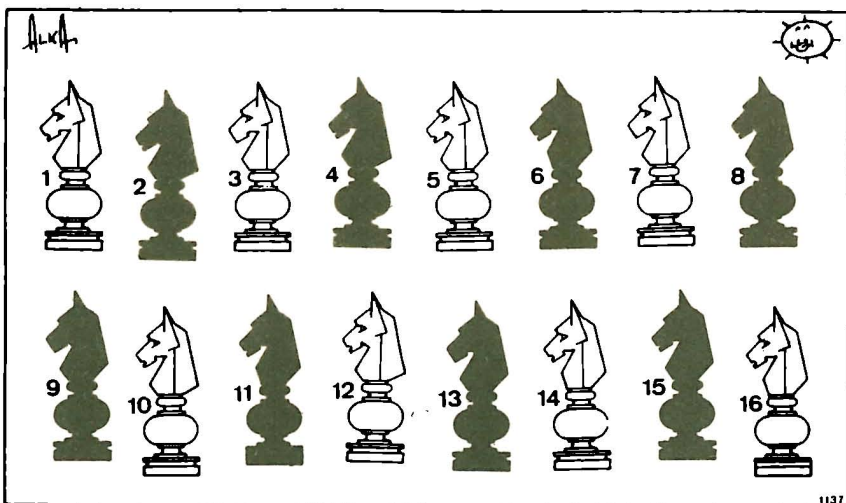
H. Rüdiger



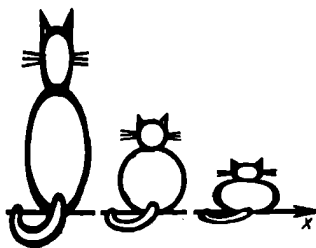
„Wenn Sie dafür nicht soviel anlegen wollen, habe ich hier noch ein besonders preisgünstiges Sonderangebot.“



Ordne die acht Originalfiguren jeweils ihren Schattenbildern zu!



Allerlei Gestrecktes



Wir kennen aus dem Mathematikunterricht die *zentrische Streckung*. Wenn ein Streckungszentrum Z und ein Streckungsfaktor $k \neq 0$ vorgegeben sind, dann wird durch die damit festgelegte zentrische Streckung jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt zugeordnet.

Dabei kann man feststellen:

- (1) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
- (2) Parallele Geraden haben parallele Bilder.
- (3) Das Bild einer Strecke ist k -mal so lang wie die Strecke selbst.
- (4) Das Bild eines Winkels ist so groß wie der Winkel selbst.

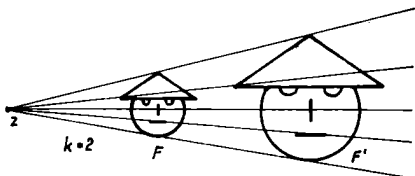


Bild 1

Im Bild 1 ist eine Figur F und ihr Bild F' bei der zentrischen Streckung (Z ; $k = 2$) dargestellt.

Nun wollen wir einmal untersuchen, welche Bilder der Figur F bei anderen Arten von Streckungen zugeordnet werden.

1. Als erstes betrachten wir *Streckungen in nur einer Richtung*. Sie können festgelegt werden, indem man eine bestimmte Gerade g vorgibt und einen Streckungsfaktor $k > 0$. Das Bild eines Punktes P , der nicht auf g liegt, wird dann wie folgt konstruiert:
 - a) Man zeichnet durch P eine Senkrechte zu g . Sie werde mit h bezeichnet, ihr Schnittpunkt mit g sei Q .
 - b) Auf h trägt man von Q aus in Richtung P das k -fache der Strecke QP ab und erhält so als Endpunkt das Bild P' von P . Die Punkte von g werden auf sich selbst abgebildet.

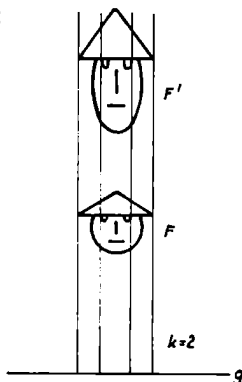
Im Bild 2 ist die Figur F und ihr Bild F' bei einer Streckung in nur einer Richtung dargestellt (Streckung von g aus mit dem Faktor $k = 2$).

Welche Eigenschaften hat diese Streckung?

Wir können aus dem Bild erkennen:

- (1) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
- (2) Parallele Geraden haben parallele Bilder.

Bild 2



- (3) Das Bild einer Strecke ist so lang wie die Strecke selbst oder länger, aber höchstens k -mal so lang.
- (4) Das Bild eines Winkels hat im allgemeinen nicht die Größe des Winkels selbst.

(Auf Beweise wollen wir verzichten.)

(Auf Beweise wollen wir verzichten.)

2. Wir untersuchen jetzt, was man durch *Nacheinanderausführung zweier Streckungen in zueinander senkrechten Richtungen* (mit gleichem Streckungsfaktor k) erhält.

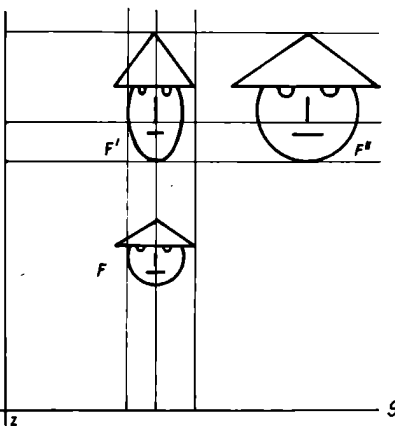


Bild 3

Im Bild 3 ist die Figur F zunächst von g aus und danach von h aus mit dem Faktor $k = 2$ gestreckt.

Was stellen wir fest?

Das Bild läßt erkennen, daß die Nacheinanderausführung der beiden Streckungen zu demselben Resultat führt wie eine *zentrische Streckung*, bei der als Streckungszentrum

trum der Schnittpunkt von g und h und als Streckungsfaktor ebenfalls $k = 2$ gewählt wird.

3. Als letztes betrachten wir eine *zentrische Streckung mit veränderlichem Streckungsfaktor*. Dabei legen wir fest, daß zu jedem Punkt P als Streckungsfaktor der Zahlenwert der Streckenlänge von ZP gehört. Der Faktor k hängt also davon ab, wie weit P vom Streckungszentrum entfernt ist. Wenn P drei Längeneinheiten von Z entfernt liegt, dann ist der Streckungsfaktor für P gleich 3, beträgt die Entfernung eine halbe Längeneinheit, dann ist er $\frac{1}{2}$, usw. Die

Konstruktion des Bildpunktes erfolgt ansonsten wie bei der üblichen zentrischen Streckung.

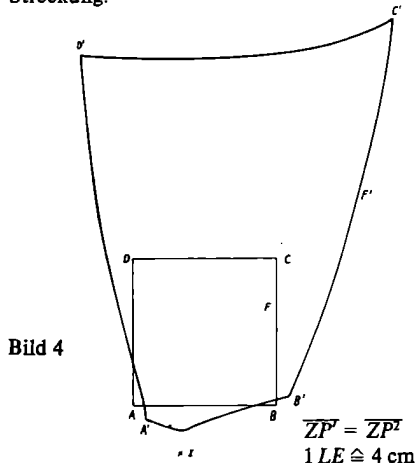
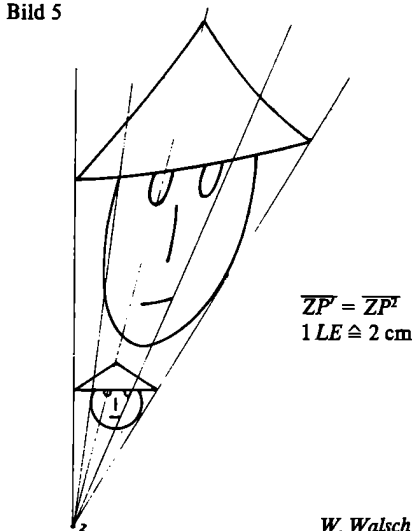


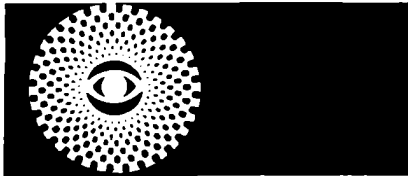
Bild 4

Wir wählen zunächst einmal ein Quadrat als Originalfigur und konstruieren die Bildfigur. Das Bild 4 zeigt das Ergebnis. Wie man erkennt, ist das Bild einer Strecke (bzw. einer Geraden) im allgemeinen *keine* Strecke (bzw. Gerade) mehr, die ursprüngliche Figur wird ungleichmäßig verzerrt. Wendet man eine derartige Streckung auf die Figur F aus den Bildern 1 bis 3 an, so kann das Ergebnis wie in Bild 5 aussehen. (Die Form der Bildfigur hängt dabei sehr von der Lage des Streckungszentrums Z in bezug auf F ab.)

Bild 5



W. Walsch



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 3: Holgers große Enttäuschung

Fräulein Steinmann, unsere Zirkelleiterin, hat einen Vater, und dieser Vater besitzt einen Garten. Es ist ein wunderschöner parkähnlicher Garten, von dem man einen herrlichen Blick über das Tal des Flusses hat, welcher im Osten unser kleines Städtchen G tangiert. Wir kannten den Garten sehr genau, denn Fräulein Steinmann hatte die Mädchen und Jungen ihres Zirkels schon zweimal dorthin eingeladen; wir mußten sogar, wie Eis und Kuchen in diesem Garten schmecken.

Alle fanden sich pünktlich zum Zirkelnachmittag ein, am pünktlichsten war Holger; er trabte durch das Gartentor, gerade als die Rathausuhr zur vollen Stunde schlug.

Ob er denn noch schnell seinen Tip im Zahlenlotto abgegeben hätte, fragte ihn Fräulein Steinmann schmunzelnd, und da wußten wir, daß heute das Lotto-Problem gelöst werden sollte.

Wir saßen an einem großen runden Gartentisch unter dem Nußbaum und diskutierten. Zunächst wurden wir uns darüber einig, daß das Tippen von 5 Zahlen aus einer Menge von 90 Zahlen kein *Anordnungsproblem* war. Unsere Kenntnisse über Permutationen und die Formel $P_n = n!$, mit welcher wir die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen berechnen konnten (vgl. *alpha* Heft 2/84, S. 34), nützten uns also wenig.

„Heute hat Holger sicher die richtigen fünf Zahlen ausgewählt“, meinte Fräulein Steinmann und lächelte, doch Holger, der schon lange auf die Lösung des Lotto-Problems wartete, runzelte die Stirn und blinzelte mißtrauisch in die Sonne. Doch uns interessierte Holgers heutiger Tipschein nicht, das Jagdfeber hatte uns wieder einmal gepackt: „Ausgewählt“, das war eine Spur. Doch sehr „heiß“ war sie noch nicht. Wir dachten nach.

Es vergingen fünf Minuten, doch keiner hatte eine Idee.

Wieder half Fräulein Steinmann: „Wir spielen einmal 1 aus 90.“

Kein Problem: Es gibt 90 Möglichkeiten, genau eine Zahl aus 90 Zahlen auszuwählen.

$C_{90}^1 = 90$ schrieb Fräulein Steinmann an die kleine Tafel, welche sie dem Nußbaum um den Hals gehangen hatte, und sagte: „Es gibt 90 Möglichkeiten, von 90 Elementen genau ein Element auszuwählen. Jede solche Auswahl heißt eine *Kombination*.“ Dann schrieb sie C_{90}^{90} an die Tafel.

Frank, der die wenigsten Schwierigkeiten hatte, eine neue Symbolik zu verstehen, sagte: „Eins! – Es gibt genau eine Möglichkeit, aus einer Menge von 90 Elementen genau 90 Elemente auszuwählen.“

Das verstanden wir auch, nur die gewissenhafte Utta wollte diese 90 Elemente aufschreiben.

Doch Fräulein Steinmann ließ uns zunächst einmal üben:

$C_{16}^{16} = 1$, denn es gibt genau eine Möglichkeit, von 16 Elementen genau 16 auszuwählen.

$C_{25}^1 = 25$, denn es gibt genau 25 Möglichkeiten, von 25 Elementen genau eines auszuwählen.

$C_{25}^{24} = 25$, es gibt genau 25 Möglichkeiten, aus 25 Elementen genau 24 auszuwählen, denn dies ist gleichbedeutend damit, von den 25 Elementen genau jenes eine auszuwählen, welches man dann wegläßt. Also gilt $C_{25}^{24} = C_{25}^{25-1}$, und mit derselben Überlegung kann man offenbar sofort $C_n^k = C_n^{n-k}$ gewinnen, denn jeder Auswahl von k Elementen aus einer Gesamtheit von n Elementen entspricht als „Restmenge“ eine Auswahl von $(n - k)$ Elementen aus diesen n Elementen, und auf diese Weise erhält man auch alle Möglichkeiten.

$C_k^k = 1$, denn es gibt genau eine Möglichkeit, von k Elementen genau k auszuwählen.

$C_r^1 = r$, denn es gibt genau r Möglichkeiten, aus r Elementen genau eines auszuwählen. Damit wußten wir zwar schon allerhand, doch wie man zweckmäßig beim Lotto einen Tipschein ausfüllen könnte, wußten wir noch immer nicht. Fräulein Steinmann indes verstand es vortrefflich, uns Schritt für Schritt der Lösung des Problems näherzubringen, sie schlug vor, einmal „2 aus 5“ zu spielen.

Nun war Utta in ihrem Element; in kurzer Zeit hatte sie alle Auswahlmöglichkeiten von 2 Elementen aus der Menge der fünf Buchstaben a, b, c, d und e aufgeschrieben:

a b a d b c b e c e
a c a e b d c d d e

Fräulein Steinmann bestätigte, daß Utta keine Kombination vergessen hatte, und lobte sie, da sie sogar „lexikographisch“ vorgegangen wäre. Erst stutzten wir, doch dann verstanden wir den Sinn dieser Bezeichnungsweise: Utta hatte die 10 Kombinationen in der gleichen Reihenfolge aufgeschrieben, in der diese „Wörter aus zwei Buchstaben“ in einem Lexikon stehen würden.

Jens durfte an die Tafel schreiben:

$$C_5^2 = 10.$$

Oliver, der lieber kombinierte als probierte, meinte: „Jeder der 5 Buchstaben kann mit jedem der vier übrigen zu einer Auswahl von 2 Elementen zusammengefaßt werden. Wählt man zum Beispiel d aus, so kann dieses Element mit a, b, c und e kombi-

niert werden. Deshalb müßte es $5 \cdot 4 = 20$ solcher Kombinationen geben.“

Das leuchtete uns zunächst ein, doch Utta hatte nur 10 Kombinationen gefunden. Nun war guter Rat teuer.

Wieder ließ uns Fräulein Steinmann grübeln. Man hörte nichts als ein leichtes Säuseln des Windes und ein leises Knistern der Gedanken. Schließlich unterbrach Gunter, der bald auf Uttas Kombinationen, bald auf Olivers nachdenkliches Gesicht geschaut hatte, unsere Überlegungen: „Man zählt ja alles doppelt.“ Und – von Fräulein Steinmann aufgefordert – erläuterte er: „Zum Beispiel erhält man die Kombination a d sowohl, wenn man a auswählt und d als eines der restlichen Elemente auffaßt, als auch, wenn man d auswählt und a als eines der übrigen Elemente dazunimmt.“ Oliver nickte zustimmend: „Wir haben also 20 noch durch 2 zu teilen.“ Nun stimmten unsere Überlegungen mit Uttas Auswahl überein. Wir spürten sogar, daß wir damit die Lösung eines allgemeineren Problems gefunden hatten, denn Fräulein Steinmann gab uns den Impuls, nun „2 aus n “ zu spielen.

Frank argumentierte: „Zunächst wähle ich eine beliebige Zahl aus der Menge der n Zahlen aus. Dafür gibt es n Möglichkeiten. Jedes dieser ausgewählten Elemente kann mit einem der $n - 1$ übrigen Elemente zu einer Kombination von 2 Elementen zusammengefaßt werden. Bei $n \cdot (n - 1)$ Auswahlmöglichkeiten ist jede doppelt gezählt.

Also gibt es $C_n^2 = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ Kombinationen.“

Fräulein Steinmann freute sich sehr über diese gute Begründung, lobte Frank und sagte, wir sollten gut aufpassen, nun käme das schwierigste Problem.

Natürlich paßten wir gut auf, doch eine Formel für die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von k Elementen aus einer Menge von n Elementen zu finden, trauten wir uns doch nicht zu.

Corinna meinte, es müsse $k \leq n$ sein. Das war zwar nicht falsch, denn man kann nicht mehr Elemente auswählen, als man zur Verfügung hat, doch weiter half uns diese Erkenntnis auch nicht. Doch nun zeigte sich wieder einmal, daß Fräulein Steinmann nicht nur kluge Fragen stellen konnte, sondern daß sie auch hervorragend verstand, uns schwierige Zusammenhänge zu erklären.

„Von den n Elementen 1; 2; 3; 4; ...; n sollen k Elemente ausgewählt werden. Wir beginnen zunächst damit, ein Element auszuwählen. Wir wissen schon, daß es $C_n^1 = n$ solcher Kombinationen gibt. Jede dieser Auswahlmöglichkeiten nennt man eine Kombination 1. Klasse, weil genau ein Element ausgewählt wird.

Zu jeder dieser Kombinationen wollen wir nun ein zweites Element hinzufügen; dies ist $(n - 1)$ -mal möglich, wobei jede Kombination doppelt gezählt wird. Also gibt es $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ Kombinationen zweiter Klasse

von n Elementen. Bis hierher hatten uns Franks Überlegungen bereits geführt.

Nun fügen wir zu jeder dieser Kombinationen ein drittes Element aus der Menge der jeweils übrigen $n - 2$ Elementen hinzu.

Also erhalten wir $\frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot (n - 2)$ Kom-

binationen, wobei wir jede *dreifach* gezählt haben, denn es kann z. B. die Kombination der Zahlen 1; 2; 3 auf folgende Weise entstanden sein:

Dem Paar 1; 2 wird 3 als drittes Element hinzugefügt, oder dem Paar 1; 3 wird 2 als drittes Element hinzugefügt, oder dem Paar 2; 3 wird 1 als drittes Element hinzugefügt.

Also gilt $C_n^3 = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)}{2 \cdot 3}$.

„Wenn man im Nenner noch den Faktor 1 hinzufügt, sieht die Formel noch schöner aus“, sagte Jens, und er durfte

$C_n^3 = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ an die Tafel

schreiben.

„Nun geht es eigentlich auf die gleiche Art weiter“, meinte Gunter, der das Prinzip, wie man von einer Auswahl von $k - 1$ Elementen zu einer solchen aus k Elementen kommt, bereits erfaßt hatte. Fräulein Steinmann bestätigte dies und fuhr fort:

„Nehmen wir einmal an, wir hätten – in der angegebenen Weise fortfahrend – herausbekommen, daß es

$C_n^{k-1} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot [n - (k - 2)] / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k - 1)$ (*)

Möglichkeiten gibt, aus unserer Menge von n Elementen genau $k - 1$ Elemente auszuwählen. Aus *jeder* solchen Kombination $(k - 1)$ -ter Klasse kann man eine Auswahl von k Elementen erhalten, indem man eines der $n - (k - 1)$ noch nicht benutzten Elemente hinzufügt. Nun wird zunächst allerdings wieder jede solche Kombination k -ter Klasse k -fach gezählt, denn zum Beispiel in der Kombination 1; 2; 3; ...; k kann jedes Element das zu den übrigen $k - 1$ Elementen „hinzugefügt“ sein.

Also ist $C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n - (k - 1)}{k}$, und be-

rücksichtigt man die oben genannte Beziehung (*), so erhält man

$C_n^k = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (k - 1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$

Da stand sie nun an der Tafel, die Formel, welche das Lotto-Problem lösen sollte. Wir starrten sie mißtrauisch an und schwiegen. Auch die Sonne schien nun nicht mehr ganz so hell zu scheinen wie vorher.

Fräulein Steinmann machte uns Mut: „Wer die Erarbeitung der Formel

$C_n^2 = \frac{n \cdot (n - 1)}{1 \cdot 2}$ verstanden hat, dem fallen

sicher auch die weiterführenden Überlegungen nicht schwer.“

Wir ahnten, daß sie recht hatte. Doch wir schwiegen weiter, und Fräulein Steinmann schwieg instinktiv mit. Das war das beste, was sie tun konnte, denn erst zaghaft, doch bald immer drängender trugen wir unsere Gedanken vor:

Daß man für $n = 5$ und $k = 2$ die schon be-

kännte Formel $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ erhält! Daß die

Punkte ... in der Formel nichts anderes als „usw.“ bedeuten! Daß man sich die Formel gut merken könne, da im Zähler und im Nenner gleich viel Faktoren, nämlich k stehen! Daß man sie noch vereinfachen kann, wenn man im Nenner für das Produkt den Ausdruck $k!$ schreibt! Daß wir die Formel nun doch einmal anwenden wollten!

Diesen letzten Gedanken griff Fräulein Steinmann auf und meinte:

„Nun rechnet einmal aus, wieviel voneinander verschiedene Tipscheine es beim Spiel „5 aus 90“ gibt.“

Die Formel $C_{90}^5 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

war schnell hingeschrieben. Nur gut, daß Oliver seinen Taschenrechner bei sich hatte: $C_{90}^5 = 43949268$.

Nun diskutierten wir Holgers Gewinnchancen. Alle Tipscheine auszufüllen, lohnt sich sicher nicht, man müßte ja fast 22 Millionen Mark als Einsatz bezahlen.

Holger war enttäuscht. Er hatte gehofft, als „Mathematiker“ einen kleinen Vorteil gegenüber allen anderen Lotto-Freunden zu haben. „Hier spielt der Zufall die entscheidende Rolle“, tröstete ihn Fräulein Steinmann und versprach, uns später noch mehr über die „Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines bestimmten Ereignisses“ zu erzählen. Immerhin sahen wir aber schon ein, daß alle Kombinationen der 5 Zahlen gleichberechtigt waren, daß also die Zahlen 1 2 3 4 und 5 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewinnen wie jede andere Kombination von 5 Zahlen.

Fräulein Steinmann gab uns einen Zettel, auf dem einige Probleme standen, und bat uns, bis zum nächsten Zirkel darüber nachzudenken:

12 Kinder veranstalten in einem Ferienlager ein Schachturnier. Jeder spielte gegen jeden, und jede Partie dauerte im Durchschnitt 40 Minuten. Wie lange dauerte das Turnier?

8 Gruppenleiter des Ferienlagers beteiligten sich abends an einem Skattturnier. Dabei sollen alle möglichen Zusammensetzungen von jeweils drei Spielern drei Spiele austragen. Wie oft mußten die Karten gemischt werden?

Gruppenleiter Heinz fragt, wieviel voneinander verschiedene „Spiele“ er bei 32 Karten überhaupt bekommen kann, wenn er 10 Karten erhält und die Verteilung der restlichen Karten unberücksichtigt bleibt.

Fünf Kinder möchten Fotos von sich haben. Neben den Einzelbildern und dem Gruppenfoto mit allen fünf Kindern möchte jeder auch alle Bilder mit je zwei verschiedenen Kindern, alle mit je drei verschiedenen Kindern und alle mit je vier verschiedenen Kindern haben. Wieviel Abzüge muß der Fotozirkel anfertigen?

Nach Abschluß des Ferienlagers verab-schiedeten sich die 14 Kinder einer Gruppe voneinander, und jeder gab jedem

die Hand. Wie oft wurden die Hände geschüttelt?

Ersetze die im folgenden „Zahlendreieck“ auftretenden Symbole durch die entsprechenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & C_1^1 & \\ & & 1 & C_2^1 & C_2^2 & & \\ & 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\ 1 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & \\ & & & & & & \end{array}$$

Hast du dieses Zahlendreieck schon in einem anderen Zusammenhang kennengelernt? (vgl. auch *alpha* Heft 4/82, Bendukidse, Das Pascalsche Dreieck)

Nutzt man eine bekannte Eigenschaft dieses Zahlendreiecks aus, kann man es – etwa mit der nächsten Zeile – fortsetzen, ohne die Werte für C_k^i über unsere Formel zu berechnen. Welche Beziehung über Kombinationen läßt sich daraus schlußfolgern?

Etwas schwieriger ist die Frage nach der Summe aller in einer Zeile, etwa der n -ten Zeile des Zahlendreiecks stehenden Zahlen:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n =$$

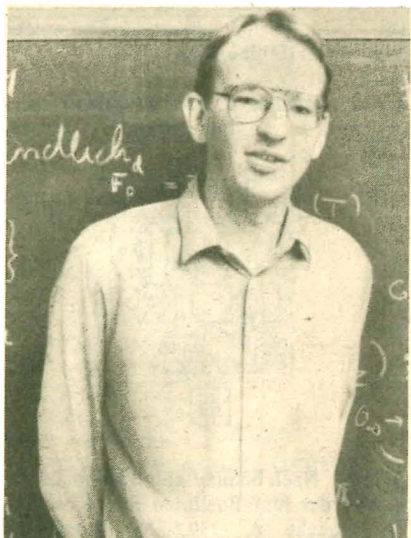
Schon wollten wir uns an die Probleme heranwagen, da kam Fräulein Steinmann, die uns unbemerkt verlassen hatte, mit einem großen Teller Kuchen und einem Krug Apfelsaft an unseren Tisch unter dem Nußbaum, worauf wir einmütig beschlossen, das Lösen der Aufgaben auf einen späteren Zeitpunkt zu vertagen. P. Göthner

Zahlreiche *alpha*-Leser, unter ihnen auch Fräulein Steinmann, haben in Klaus-Peters Bericht im Heft 1/83 auf den Seiten 16 und 17 einen Rechenfehler entdeckt. Es muß richtig heißen:

$$P_6 = 6 \cdot P_5 = 720; P_7 = 7 \cdot P_6 = 5040;$$

$$P_8 = 8 \cdot P_7 = 40320; P_9 = 9 \cdot P_8 = 362880.$$

Prof. Dr. Gerd Faltings, siehe unseren Beitrag Seite 49/50.





mathematicus

Aufgaben zur Wiederholung von Grundkenntnissen, Teil 2

▲ 16 ▲ Ergänze! Gleiche Symbole bedeuten stets gleiche Zahlen.

$$\frac{3}{4} \text{ von } 80 = \square$$

$$\frac{1}{5} \text{ von } \square = \bigcirc$$

$$\frac{5}{6} \text{ von } \bigcirc = \triangle$$

$$\frac{4}{5} \text{ von } \triangle = \triangleright$$

$$\frac{1}{4} \text{ von } \triangleright = 2.$$

▲ 17 ▲ Rechne!

| | | | | | | | | | |
|----|---------------|---------------|---------------|------|---|------|--|--|---|
| 1. | $\frac{4}{5}$ | | | | | | | | |
| 2. | | | $\frac{3}{4}$ | | | | | | |
| 3. | | $\frac{3}{4}$ | | -0,2 | 0 | :0,1 | | | |
| 4. | | | | | | | | | 8 |

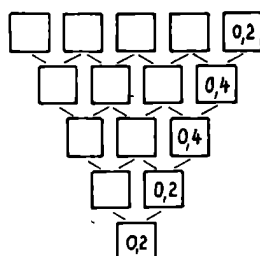
▲ 18 ▲ Ergänze die Tabelle, wenn gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot a - b = 0$$

| | | | | | |
|---|-----|---------------|---|---------------|---|
| a | 0,8 | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{5}$ | 1 |
| b | | | 0 | | |

▲ 19 ▲ Das arithmetische Mittel der Zahlen 13, 15, 18 und a heißt 17. Für welche natürlichen Zahlen steht a?

▲ 20 ▲ Ergänze die freien Felder, wenn paarweise zu multiplizieren ist!



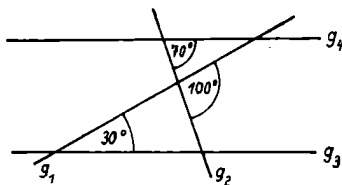
▲ 21 ▲ Nach Schichtschluß rechneten die Fahrer der fünf Buslinien ihre Einnahme ab. Strecke A: 337,55 M, Strecke B:

407,05 M, Strecke C: 278,90 M, Strecke D: 501,10 M und Strecke E: 377,- M.

- Wie hoch war die Gesamteinnahme?
- Welcher Betrag fehlt an 2000,- M?
- Welche Summe wurde durchschnittlich auf jeder Strecke eingenommen?

▲ 22 ▲ Die Schüler einer 6. Klasse legten bei einer Wanderung insgesamt 54 km zurück. Am ersten Tag schafften sie ein Drittel der Gesamtstrecke. Von der verbleibenden Strecke bewältigten sie am zweiten Tag vier Neuntel. Wieviel Kilometer wanderten die Kinder jeden Tag? Verwende eine Tabelle!

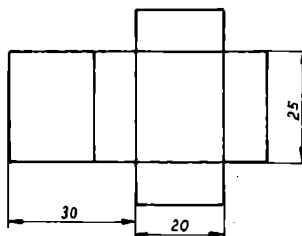
▲ 23 ▲ Beweise, daß g_3 parallel zu g_4 verläuft!



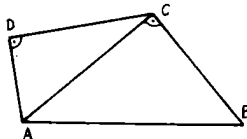
▲ 24 ▲ Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD, wenn gilt:

- $\overline{AB} = 4,0 \text{ cm}$
- $\overline{BC} = 8,0 \text{ cm}$
- $\angle ABC = 45^\circ$

▲ 25 ▲ Welches Volumen hat der Quader, dessen Netz abgebildet ist?



▲ 26 ▲ Konstruiere ein Quadrat ABCD mit der Diagonalenlänge $d = 6,0 \text{ cm}$! Spiegle dieses Quadrat an einer Geraden, die mit dem Quadrat nur den Punkt B gemeinsam hat!



▲ 27 ▲ Addiere zeilen- und spaltenweise!

| | |
|---------------|----------------|
| $\frac{1}{2}$ | 0,3 |
| 0,2 | $\frac{1}{10}$ |

Multipliziere zeilen- und spaltenweise!

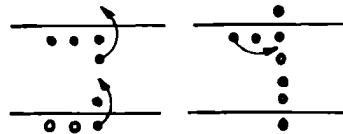
| | |
|-----|-----|
| 0,4 | 1,2 |
| 2,5 | 0,8 |

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Miguel de Guzmán

Mathematische Fakultät der Universität Madrid

▲ 2453 ▲ Wir betrachten ein Schachbrett, das sich nach allen Seiten beliebig weit erstreckt und durch eine Gerade in eine obere und eine untere Hälfte geteilt wird. In die Felder werden Spielsteine gesetzt, die wie beim Steckhalma gezogen werden:

Ein Stein kann einen direkt benachbarten Stein in waagerechter oder senkrechter Richtung (nicht diagonal) überspringen, wobei der übersprungene Stein vom Brett genommen wird.



Wir stellen jetzt eine Anzahl von Steinen im unteren Teil des Brettes auf und versuchen, durch eine Reihe von Sprüngen so weit wie möglich in den oberen Teil zu gelangen. Das Bild zeigt, daß man mit vier Steinen bis in die zweite Reihe des oberen Teils kommt.

Wieviel Steine sind erforderlich – und wie müssen sie plazierte werden –, um die dritte, vierte bzw. fünfte Reihe zu erreichen? Kann man überhaupt beliebig weit nach oben kommen? Man versuche zunächst, die Aufgabe experimentell zu lösen.

Dividiere zeilen- und spaltenweise!

| | |
|---------------|-----|
| $\frac{5}{6}$ | 2 |
| $\frac{3}{4}$ | 1,2 |

▲ 28 ▲ Für die gebrochenen Zahlen a, b und c gilt

- $3 \cdot a = 2$
- $a \cdot b = 0,66$
- $b + c = 1$

Ermittle a, b und c!

▲ 29 ▲ Löse die Ungleichung!

$$2^x = x > 5 \quad 3(x+1) < 11$$

$$3^x - x > 25 \quad x: 0,5 < 1$$

Diese Aufgaben entnahmen wir einem Heft des Kreises Löbau, zusammengestellt von den Fachberatern Mathematik des Kreises.

Die lustigen Logeleien und Vignetten stammen aus der Feder von: H. Teske, Leipzig; Fun in Math., Ontario; M. Richter, Berlin; Fülcs, Budapest; Mathe-LVZ, Leipzig; J. Lehmann, Leipzig; Yvonne Heistermann, Bernburg; T. Merten, Stralsund; P. Matusko, Praha; B. Henninger, Berlin; H. Schrade, Berlin; Troll, Berlin; L. Otto, Leipzig; Dr. R. Mildner, Leipzig; H. Büttner, Berlin; W. Aschmanow, Moskau; W. Schubert, Berlin; Idee: J. Lehmann, Leipzig



1 = (1+9-8) : √4

9 = -1√9 + 8+4

8 = (1+9-8) · 4

4 = 1-9+8+4

5



1

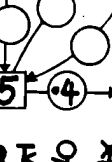
$$\begin{array}{r} EVE \\ + EVE \\ \hline ADAM \end{array}$$

3

2



4



6 BAUM+LAUB+MAUS+MOOS=WALD

1984 = (123-4+5) · (6-7+8+9+0)

Lösungen



S. 1: Das Alter des Lagerleiters ist 44 Jahre.

$$\begin{array}{r} 656 \\ + 656 \\ \hline 1312 \end{array} \quad \begin{array}{r} 757 \\ + 757 \\ \hline 1514 \end{array} \quad \begin{array}{r} 858 \\ + 858 \\ \hline 1716 \end{array}$$

Nr. 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

$$\begin{array}{r} 581273 \\ + 59774 \\ \hline 641047 \end{array}$$

S. 2: Blumengebinde Nr. 2 ist das gesuchte Spiegelbild.

S. 3: Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

S. 4: Die Abb. b und d zeigen die richtigen Ansichten.

S. 5: Die Profile 6 und 15 sind gleich.

S. 6: $35 + 10 + 7 = 52$; $75 - 25 + 0 = 50$;
 $(12 + 1) \cdot (0 : 19) = 0$; $(1 \cdot 0) \cdot 1 = 0$; $42 : 42 = 1$;
 $(25 - 15) \cdot 2 = 20$; $(8 - 6) : 2 = 1$; $56 - 17 + 1 = 40$.

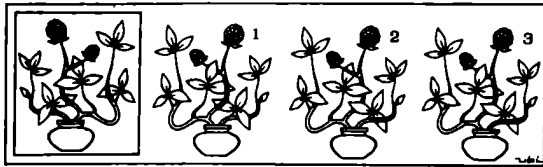
S. 7: 3 und 4 werden glatt, 1 und 2 verknoten sich.

S. 8: $20 \cdot 4 : 8 = 10$; $16 + 18 - 10 = 24$;
 $12 + 6 + 14 = 32$. $9 + 11 - 8 = 12$; $2 \cdot 3 + 4 = 10$;
 $(7 + 7) \cdot 2 = 28$.

S. 9: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Leine wie gefordert aufzuspannen. Drei davon wären:



**Welche Unterschiede fallen dir ins Auge?
Mindestens 22 Veränderungen sind zu finden.**



Welches der drei Blumengebinde ist dem Spiegelbild (links) zuzuordnen?



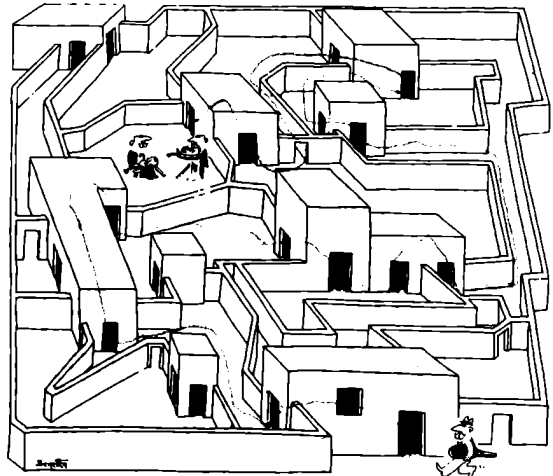
„Laß liegen! Das ist nicht mehr bei uns!“

2

- a) 1 - 2 - 5 - 1 - 4 - 5 - 8 - 7 - 8 - 11 - 7 - 10 - 11 - 12 - 8 - 9 - 5 - 6 - 2 - 3 - 6 - 9 - 12;
 b) 1 - 2 - 3 - 6 - 2 - 5 - 1 - 4 - 5 - 6 - 9 - 5 - 8 - 4 - 7 - 8 - 9 - 12 - 8 - 11 - 7 - 10 - 11 - 12;
 c) 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 12 - 11 - 10 - 7 - 4 - 1 - 5 - 4 - 8 - 7 - 11 - 8 - 5 - 2 - 6 - 5 - 9 - 8 - 12.

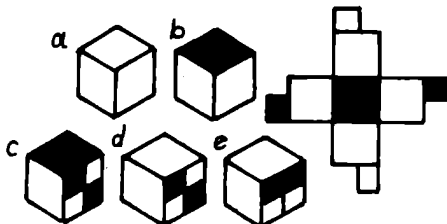
S. 10: Die Dame mit dem spitzen Hütchen ist die Gesuchte.

S. 11: Es sind 32 Dreiecke und 10 Quadrate.



Wie kommt der Musiker zu seinen beiden wartenden Kollegen vom Trio *Harmonie*?

15



Das Bild zeigt unter a bis e von fünf Würfeln je ein Schrägbild.
 Das Bild rechts zeigt ein Netz, aus dem ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seiten mit den gefärbten Flächen nach außen kommen sollen.



4

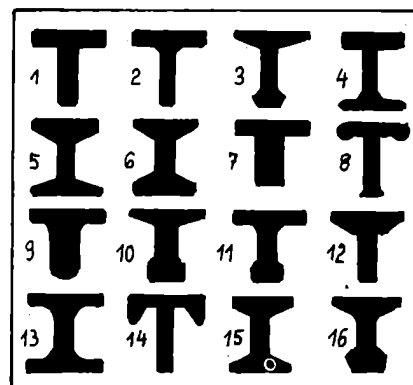
- „Wie geht dein neues Auto?“ – „Es geht nicht, es fährt.“ – „Na gut, wie fährt es?“ – „Es geht!“
- „Herr Ober, was ist das – Reh- oder Hirschbraten?“
- „Können Sie denn das nicht unterscheiden, mein Herr?“ – „Nein.“
- „Dann kann es Ihnen doch egal sein!“
- Olaf kommt verärgert nach Hause.
- „Was ist denn, mein Sohn?“ fragt die Mutter.
- „Alles Schwindel in der Schule“, sagt Olaf.
- „An der Klassentür steht groß 1. Klasse, und drinnen ist nicht ein Stuhl gepolstert...“
- Kurerfolg: „Klappt es denn mit dem Abnehmen, seitdem Du die Kalorien zählst?“ – „Mit dem Abnehmen nicht, aber mit dem Rechnen geht's besser!“
- „Hast Du Brüder?“
- „Ja, einen.“
- „Komisch“, sagte Helmut, „Deine Schwester sagte mir neulich, sie hätte zwei!“

13

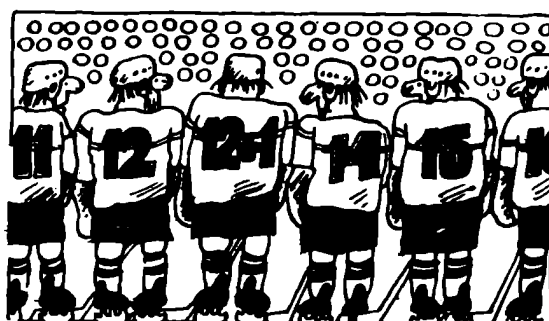
- Müller war zu schnell mit dem Wagen gefahren und verunglückt. „Wären Sie fünf Minuten später eingeliefert worden, wär's zu spät gewesen, Herr Müller“, bemerkte der visitierende Arzt einige Tage später. „Himmel, Himmel“, flüsterte Müller erbleichend, „da hab ich aber Glück gehabt, daß ich so schnell gefahren bin.“
- Auf Reisen. „Haben wir uns nicht schon einmal in Budapest getroffen?“ – „Nein, ich bin noch nie in Budapest gewesen.“ – „Ich auch nicht, da werden das wohl zwei ganz andere gewesen sein.“
- Hut ab vor der neuen Technik – so schnell wie ein Computer kann heute keiner mehr einen Fehler machen.



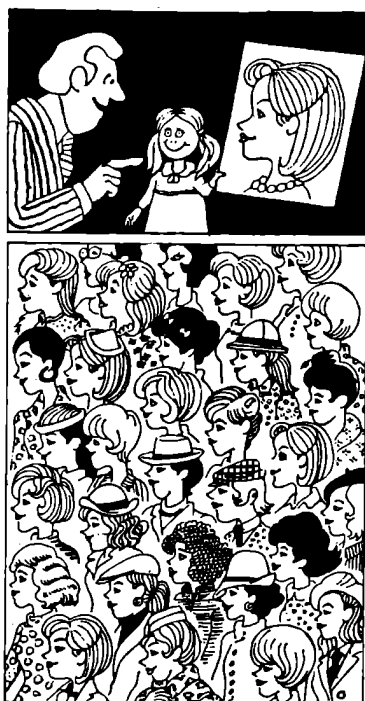
12



Welche zwei Profile sind genau gleich?

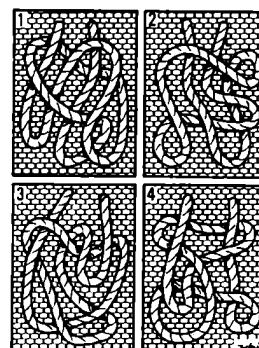


5

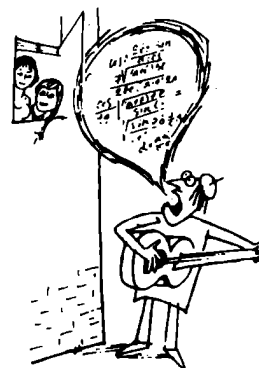


Suchbild: Findest du die auf dem Bild abgebildete Dame im Strom der Passanten wieder?

10



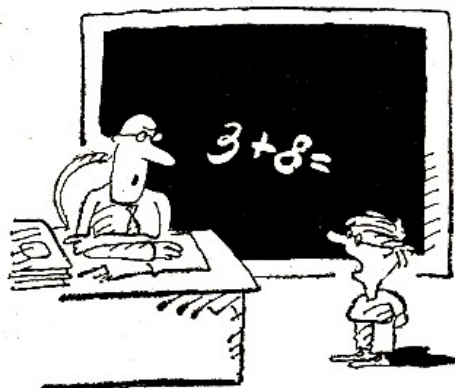
Zwei der verschlungenen Seile werden glatt, zwei verknoten sich, wenn man an den beiden Enden zieht. Welche?



7

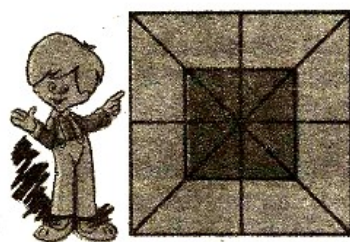
$$\begin{array}{ll}
 35 \square 10 \square 7 = 52 & 42 \square 42 = 1 \\
 75 \square 25 \square 0 = 50 & (25 \square 15) \square 2 = 20 \\
 (12 \square 1) \square (0 \square 19) = 0 & (8 \square 6) \square 2 = 1 \\
 (1 \square 0) \square 1 = 0 & 56 \square 17 \square 1 = 40
 \end{array}$$

Setze für $\square$ jeweils ein Rechenzeichen so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

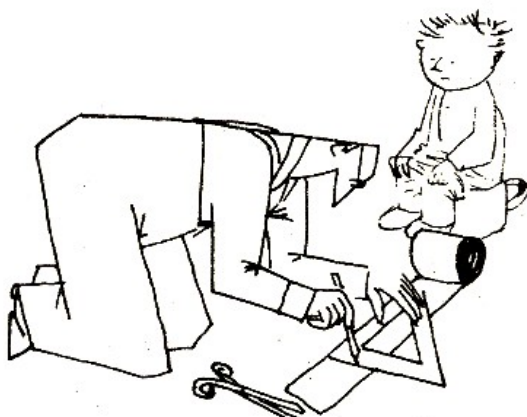


„Wenn Sie mir versprechen, daß ich mal so etwas wie eine I(ntelligenz)-Rente bekomme, schreibe ich die richtige Lösung hin!“

6



Wieviel Dreiecke und wieviel Quadrate findest du auf dem Bild?



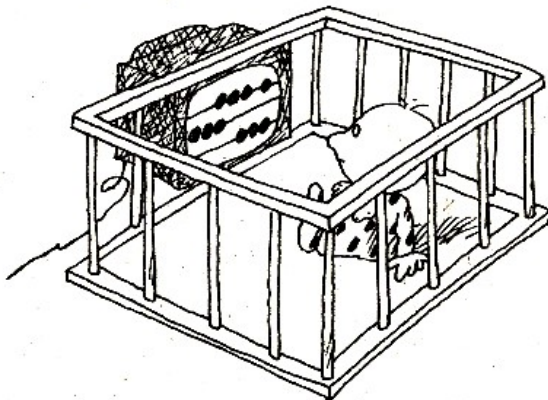
11

| | | | | | |
|----|----|---|---|---|-----|
| 20 | . | . | : | . | =10 |
| + | . | . | . | + | |
| . | + | . | - | . | =24 |
| : | . | : | . | - | |
| . | + | . | + | . | =32 |
| 3 | 12 | . | . | 4 | |

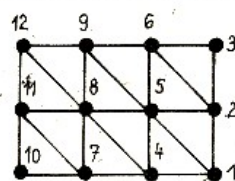
4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|----|
| 9 | + | . | - | . | = | . |
| . | . | - | . | + | . | + |
| . | . | . | + | 4 | = | . |
| + | . | + | . | - | . | + |
| . | + | 7 | . | . | = | . |
| = | . | . | . | . | . | . |
| 25 | + | . | + | . | = | 50 |

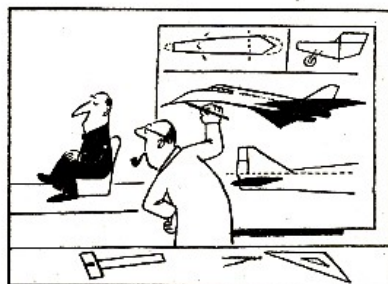
In die Felder sind Zahlen so einzusetzen, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen. (Es ist in der vorgegebenen Reihenfolge zu rechnen.)



8



Frau Mildner hat große Wäsche, und sie möchte ihre Wäscheleine zwischen den 12 Pfählen in der abgebildeten Weise ziehen. Wie könnte sie ihre Leine – ausgehend vom Pfahl 1 und endend am Pfahl 12 – so ziehen, daß die Leine zwischen zwei beliebigen Pfählen niemals doppelt oder mehrfach, sondern jeweils nur einfach gespannt ist? Finde mindestens drei verschiedene Möglichkeiten, die Leine in der geforderten Weise aufzuspannen!



9

alpha aktuell

Laura Nickel und Curt Noll, von der Universität von Kalifornien in Hayward gefunden worden. Die bislang höchste der nach dem griechischen Mathematiker Euklid unendlichen Reihe der nur durch eins und sich selbst teilbaren Primzahlen umfaßt 6553 Ziffern.

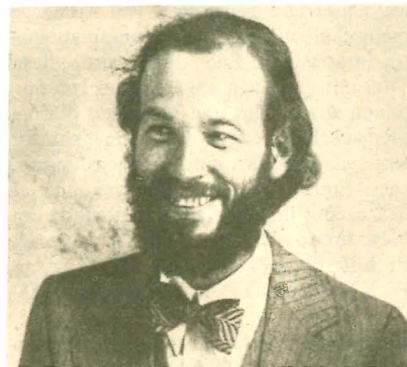
Die beiden jungen amerikanischen Mathematiker hatten zur Lösung ihrer schwierigen Aufgabe, die jetzt Aufnahme in das Guinness-Verzeichnis der Rekorde finden dürfte, allein fünf Computerprogramme entwickelt. Laura Nickel und Curt Noll haben bereits angekündigt, sie würden ein neues Programm zur Steigerung des Primzahlenrekordes erstellen.

Wie entstehen die Ziffern der Personenkennzahl?

Die ersten sechs Ziffern setzen sich aus dem Geburtsdatum des Personalausweisinhabers zusammen. Die siebente Stelle gilt für das Geschlecht (für die Geburtsjahre 1900 bis 1999 männlich = 4, weiblich = 5). Die Ziffer 8 bis 11 ist eine Unterscheidungszahl, die gewährleistet, daß die Personenkennzahlen täglich in ausreichender Anzahl vergeben werden können, ohne daß eine Wiederholung erfolgt. Die Ziffer 12 stellt eine Prüfziffer dar, die es jederzeit ermöglicht, die Richtigkeit der Personenkennzahl zu überprüfen. Jede Personenkennzahl gibt es nur einmal.

Höchste Primzahl

Zwei hoch 21 701 minus 1, die höchste bislang bekannte Primzahl, ist von zwei 18jährigen amerikanischen Studenten,



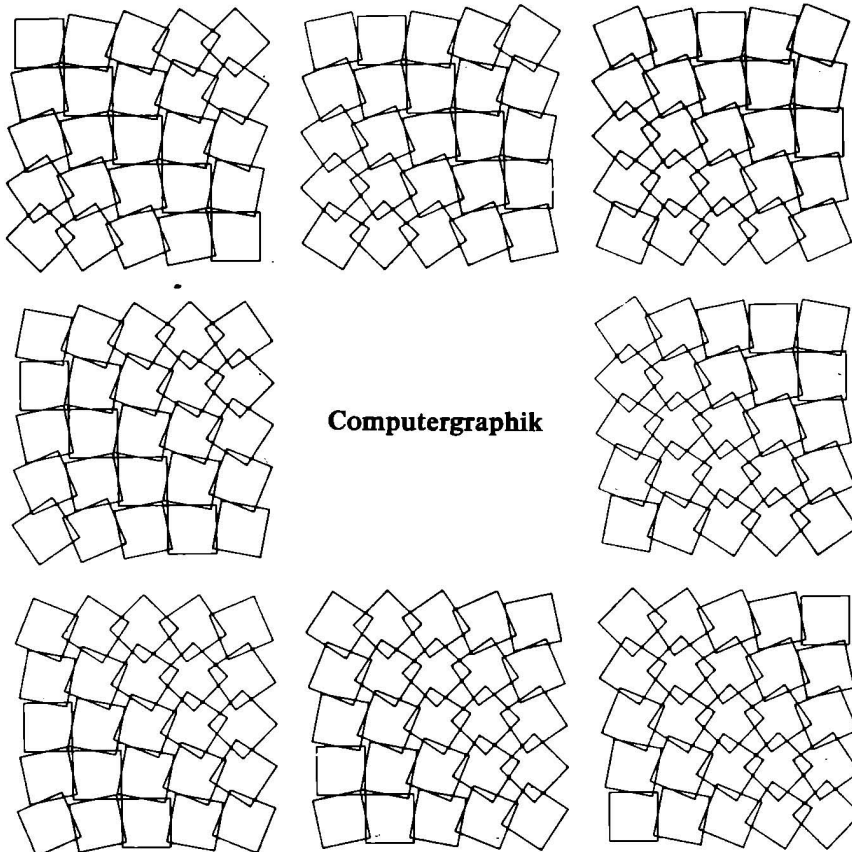
Der franz. Math.-Prof. P. Deligne hielt auf dem Mathematikerkongreß in Warschau (1983) einen Sondervortrag über Faltings' Forschungsergebnisse (s. S. 49/50).



Augen auf, Mathematik ist überall! In Burg Stargard (Bez. Neubrandenburg) entdeckte unser Redaktionsmitglied, Dr. P. Schreiber (Universität Greifswald) dieses Wirtshausbild in Form eines Sternpolyeders.

AdW verlieh Namen Leonhard Euler

Berlin, 6. 11. 83. Der Name Leonhard Euler wurde der mathematischen Schülergesellschaft bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin auf einem Festakt in Berlin verliehen. Damit würdigt die Akademie der Wissenschaften der DDR das nunmehr 13jährige Wirken dieser Gesellschaft, die sich die außerunterrichtliche mathematische Tätigkeit zur Aufgabe gemacht hat.



Computergraphik

Eine harte Nuß

▲ 2454 ▲ Bei einem Schiffsunglück wurden fünf Matrosen auf eine einsame Insel verschlagen und warteten dort auf Rettung. Um eine Beschäftigung zu haben, sammelten sie Nüsse. Nachdem die Matrosen einen großen Berg von Nüssen zusammengetragen hatten – es waren etwa 30000 Nüsse – beschlossen sie, keine Nüsse mehr zu sammeln und die vorhandenen Nüsse am Tage ihrer Rettung gerecht zu verteilen. In der folgenden Nacht erwachte einer der Matrosen – die anderen schliefen fest –, und er nahm sich entgegen dieser Absprache ein Fünftel; bei der Teilung blieb eine Nuß übrig, die weggeworfen wurde. In der folgenden Nacht erwachte ein anderer Matrose, nahm sich ebenfalls ein Fünftel; auch dabei war eine Nuß übrig und wurde weggeworfen. Analog ging es in der 3., 4. und 5. Nacht zu. Danach erfolgte die Rettung, und die fünf Matrosen teilten die nun noch vorhandenen Nüsse gerecht auf. Auch dabei blieb eine Nuß übrig, die weggeworfen wurde. Wie viele Nüsse waren am Anfang vorhanden?

Dr. rer. nat. Dr. paed. Gert Maibaum,
Technische Universität Dresden

Illebener Skizzen

Auf den Spuren eines alten
unterhaltsamen Rechenbuches



Joh. Christ. Schäfer:

Die Wunder der Rechenkunst

Eine Zusammenstellung
der rätselhaftesten, unglaublichsten
und belustigendsten arithmetischen
Kunstaufgaben

192 Seiten, 60 Abb., Pappband
Bestell-Nr.: 707 745 1 · Preis: 8,80 M

Die Wunder der Rechenkunst.

Eine Zusammenstellung der rätselhaftesten, un-
glaublichsten und belustigendsten arithmetischen
Kunstaufgaben.

Zur

Beförderung der geselligen Unterhaltung und des ju-
gendlichen Nachdenkens.

Von

Joh. Christ. Schäfer.

Neu, verbesserte und vermehrte Auflage.

Seimar, 1857.

Druck und Verlag von Bernh. Friedr. Voigt.

Dieser Titel ist ein Nachdruck der 8. Auf-
lage des 1857 erschienenen Buches *Die
Wunder der Rechenkunst*. Es enthält 153
Aufgaben aus den verschiedensten Gebie-
ten der Unterhaltungsmathematik, insbe-
sondere der Arithmetik. Die Aufgaben re-
gen zu logischem Denken an, wecken und
entwickeln die Fähigkeiten zum Kombi-
nieren und geben Möglichkeiten zum Fe-
stigen der Grundkenntnisse im Fach Ma-
thematik. Alle Aufgaben enthalten Antwor-
ten (Lösungen), die original wiedergegeben
werden. In einem Anhang sind Erläuterun-
gen enthalten, die – soweit erforderlich –
deutlich machen, welche sachlichen Be-

züge zwischen bestimmten Einheiten, Be-
griffen, Fakten usw. von heute zu damals
bestehen. Interessentenkreis: Lehrer, Schü-
ler, Leiter und Teilnehmer von Arbeitsge-
meinschaften, an Unterhaltungsmathema-
tik Interessierte. Ende 1983 wurde dieser
Titel mit den oben angegebenen Informa-
tionen ausgeliefert und bereichert die ma-
thematische Literatur, die zu einer sinnvol-
len, interessanten und abwechslungsrei-
chen Freizeitgestaltung für jung und alt
beitragen will, aber auch zahlreiche Im-
pulse für den Unterricht gibt. Kurz gesagt:
Er hilft der „Pflicht“ wie der „Kür“ im
Fach Mathematik gleichermaßen in vielfäl-
tiger Weise.

Herausgeber dieses historischen Rechen-
buches ist der Chefredakteur der *alpha*. Er
lädt seine Leser zu einer Plauderei über
dessen Entstehung ein.

Lieber Leser!

Am 13. Dezember 1945 wurde ich vom Rat
der Messestadt Leipzig als *Neulehrer* einge-
stellt. Lehrpläne gab's damals nicht. Die er-
sten Lehrbücher, welche wir 1946 in die
Hand bekamen, steckten noch in den An-
fangsgründen unserer demokratischen Ent-
wicklung.

Fünf Aufgaben habe ich aus unserem da-
maligen Rechenbuch herausgegriffen, Her-
ausgeber: Verlag Volk und Wissen, Verlagsge-
sellschaft m.b.H. Berlin/Leipzig:

▲ 1 ▲ In einem Wintermonat brennen in
einem Dorfwirtshaus am Abend und in der
Nacht 8 Lampen, und zwar $7\frac{1}{4}$ Std. lang.

Eine Lampe verbraucht pro Stunde 7 ccm
Petroleum. Wieviel Petroleum haben im
Monat alle zusammen verbraucht, und wie-
viel kostete das Petroleum? (1 l kostet
29 Pf.)

▲ 2 ▲ 8 Mann mähen am ersten Tag 5 ha
Sommergetreide; wieviel ha bringen in der-
selben Zeit 20 Mann fertig?

▲ 3 ▲ Eine Handschuhfabrik verpackt in
einer Kiste Handschuhe von der 1. Sorte
 $5\frac{1}{2}$ Dtzd., von der 2. Sorte $7\frac{3}{4}$ Dtzd., von
der 3. Sorte $9\frac{5}{6}$ Dtzd. Wieviel Dtzd. und
Stück sind das im ganzen?

▲ 4 ▲ Ein Kaufmann hat für 1754 M Wa-
ren verkauft und davon den 6. Teil ver-
dient. Wie groß war sein Verdienst?

▲ 5 ▲ Ein Mann raucht an einem Tag
4 Zigarren. Wieviel sind das

a) in einer Woche, b) in einem Jahr, c) in
30 Jahren?

Auf der Suche nach geeigneterem zusätzli-
chem Aufgabenmaterial halfen mir meine
Schüler, ihre Eltern, unser damaliger Pa-
tenbetrieb (Garten- und Landschaftsgestal-
tung Leipzig SO). In einem Antiquariat er-
warb ich zudem einen Stoß alter Rechen-
bücher aus der Zeit vor 1933. Unter
anderem kaufte ich den oben genannten
Titel zu einem sehr hohen Preis, nämlich
für mein Neulehrermonatsgehalt von
190 Mark. (Das konnte ich, da ich zu glei-
cher Zeit von der damaligen *Sowjetischen
Militäradministration* eine Prämie in Höhe
von 250 Mark erhielt.) Die Aufgaben aus
diesem Unterhaltungsbuch fanden bei den
Schülern großen Anklang. So wurde das
vergilbte Werk aus dem Jahre 1857 neben
den anderen Büchern ein treuer Begleiter
im Unterricht, in mancher Vertretungs-
stunde und ab 1957 – damals gründete ich
den *alpha*-Club an der 29. Grundschule in
Leipzig – auch für eine aktive außerunter-
richtliche Arbeit. Als ich dann Chefredak-
teur der *alpha* war, gestaltete ich im
Heft 3/80 eine 4. Umschlagseite mit
13 Perlen aus den *Wundern der Rechenkunst*.
Die zahlreichen anerkennenden Zuschrif-
ten veranlaßten das Redaktionskollegium,
in noch stärkerem Maße historische Bei-
träge in die *alpha* einzubauen. Meinem
Verlagsdirektor schlug ich vor, das unter-
haltsame Buch in seiner Gesamtheit her-
auszugeben und fand Zustimmung. Zu-
nächst wurden zwei Varianten disku-
tiert:

Variante 1: Die Veröffentlichung des Bu-
ches als Faksimile – Druck mit angefügten
Lösungen aus heutiger Sicht. Sie wurde
verworfen, weil einerseits eine Reihe von
Aufgaben nicht interessant waren und an-
dererseits das Schriftbild für viele Men-
schen unserer Zeit schwer lesbar wäre.

Variante 2: Von den 194 vorliegenden Auf-
gaben wurden 153 als geeignet befunden
und zur Veröffentlichung vorgesehen. Den
Satz übernahm die Druckerei *Neues
Deutschland*. Sie besitzt die um die Jahr-
hundertwende gebräuchliche sog. *Digi-
Fraktur* und *Bodoni-Antiqua*. Zu 92 Aufga-
ben wurden Lösungen aus heutiger Sicht
als Anhang hinzugefügt. In geduldiger
Kleinarbeit entstand dann das Buch mit
einem Umfang von 192 Seiten.

Natürlich war ich als Herausgeber interes-
siert, mehr über den Autor zu erfahren, als
in dem Vorwort der mir vorliegenden
8. Auflage zu lesen war. Zweimal zwei Tage
weilte ich in der Gemeinde Illeben, wenige
Kilometer von Bad Langensalza entfernt.
Dank sei denen gesagt, die mir in dieser
Gemeinde halfen, Näheres über

J. Ch. Schäfer und seine Zeit zusammenzu-
tragen:

Ende des 18. Jahrhunderts lebte der Guts-
verwalter Sebastian Andreas Schäfer, gebo-
ren am 29. 12. 1763 daselbst, als Schult-
heiß in Hohenbergen, einem kleinen Dorf

in der Nähe von Mühlhausen. Seine beiden Söhne, August Sebastian (geb. 1801) und Johannes Christoph (geb. 1802) gingen ihrem Vater in Hof und Feld tüchtig zur Hand. Der Vater erwarb sich durch fleißiges Selbststudium veterinärmedizinischer Literatur gute Kenntnisse in der Tierpflege. Manchem Quacksalber wurde eine Lehre erteilt, indem er seine Gemeindeglieder bei der Pflege der gesunden, besonders aber der kranken Tiere beriet und praktische Hilfe gab. Als seine Söhne ins „heiratsfähige“ Alter kamen, schrieben sie das von ihrem Vater geschaffene 300seitige *Doktorbuch* ab als Anleitung für die eigene Tierpflege, als sog. *Haus- und Hilfsbuch*.

Die mathematische Bildung im Rahmen der damaligen dörflichen Einklassenschule war nach Meinung des Vaters nicht ausreichend, um im Leben gut seinen Mann zu stehen. Kurz entschlossen schrieb er seinen beiden Söhnen ein spezielles Rechenbuch, das ihnen – neben dem Unterricht bei dem überlasteten Dorfschulmeister – gute Grundkenntnisse in Arithmetik und Geometrie vermittelte.

Aus einer Eintragung in der Illeburger Chronik erfahren wir, daß der ältere der beiden Brüder, August Sebastian, eine wohlhabende Bauerntochter in Illeben heiratete. J. Ch. Schäfer und seine Eltern zogen gemeinsam mit den Neuvermählten auf den 50 ha großen Bauernhof, den die Braut als *Aussteuer* von ihren Eltern in Illeben erhalten hatte. Bereits nach zweijähriger Ehe starb der Bruder. J. Ch. Schäfer übernahm den Hof und heiratete ein Jahr später die Frau seines Bruders. Im Dorfreger wird der junge Bauer als „angesehener Einwohner und Einspänner“ geführt. Da er sehr rege war, sei es auf dem Hofe, als Jägermeister oder als tierärztlicher Berater, wurde er mit 34 Jahren zu einem der vier Gemeindevertreter (Ortsmann) ernannt, um den neugewählten Bürgermeister (bis dahin gab es keinen) bei seiner Amtstätigkeit zu unterstützen. Mit Hilfe des für die Gemeinde zuständigen Tierarztes schrieb er – unter Verwendung der Unterlagen seines Vaters – sein erstes Buch:

Homöopathische Tierheilkunde – Ein ganz eigenthümlich eingerichtetes und schnell Rath gebendes Hilfsbuch für jeden Viehbesitzer.

Im Familienkreis und zu Volksfesten gab er aus seiner in Form einer Aufgabensammlung (z. T. mit seinem Bruder) zusammengestellten Heft unterhaltsame mathematische Probleme zum besten und regte seine Umgebung zum Knobeln an. Seine Zuhörer bedrängten ihn, diese lose Zusammenstellung zu einem Buch zusammenzufassen. Ein Weimarer Verlag brachte 1831 die erste Auflage heraus. Das Buch wurde so beliebt, daß bis 1857 acht Auflagen entstanden, stets neu bearbeitet, auf Grund zahlreicher Hinweise der Leser erweitert. Folgt in den ersten Auflagen den Aufgaben sofort die Lösungen, so wurde später beides getrennt. An einem Beispiel wollen wir Aufgabe und Lösung original wiedergeben:

63. Ein eigener Fall

Jemand hatte in einem Stall Ein Heerdchen Schafe, ein eigener Fall fand, wie Du sehn wirst, statt dabei. – Nimm er davon die Hälfte und drei Und wenn er den Rest sich 8fach dachte Oder zu ihnen noch 7 brachte, So bekommt er stets dieselbe Zahl, Wieviel Schafe hat er wohl im Stall?

Antwort: 8 Stück

Auflösung: Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der 8fache Rest so groß, als der einfache Rest und 7; wird von den beiden Theilen einmal der einfache Rest hinweggenommen, so ergibt sich, daß der 7fache Rest soviel als 7 beträgt. Stellt man sich nun die Aufgabe und sagt: der 7fache Rest beträgt 7, wie viel beträgt der einfache Rest, so ergibt sich 1 zum Facit. Es wurde nun erst die Hälfte und 3 vom Heerdchen hinweggenommen, worauf die gefundene 1 als Rest bleibt, und so folgt, daß die Zahl sämtlicher Schafe 1 und 3 = 4 und diese doppelt genommen, solche 8 sein muß. Die Lösung aus heutiger Sicht ist im Anhang zu diesem Titel zu finden.

Sie lautet:

Angenommen, im Stall befanden sich x Schafe; dann gilt

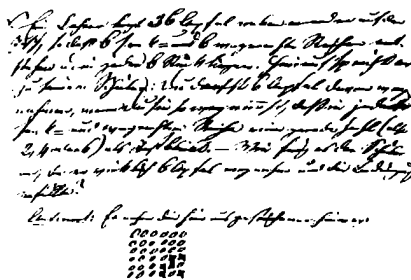
$$\left[x - \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \right] \cdot 8 = x - \left(\frac{x}{2} + 3 \right) + 7,$$

$$\left(\frac{x}{2} - 3 \right) \cdot 8 = \frac{x}{2} - 3 + 7,$$

$$4x - 24 = \frac{x}{2} + 4,$$

$$\frac{7x}{2} = 28, \text{ also } x = 8.$$

Im Stall befanden sich 8 Schafe.



Das Bild zeigt eine Aufgabe aus dem Tagebuch J. Ch. Schäfers. Wir finden sie wieder, stark bearbeitet, in seinem Buch als Nr. 144.

144 Künstliche Begegnung.

Ein Vater legte 36 Nüsse in ein Quadrat nachliegender Gestalt auf den Tisch und sagte zu seinem Sohne: „Nimmst Du 6 Stück so wegnehmen, daß in jeder wag- und senkrechten Reihe eine gerade Anzahl Nüsse liegen bleiben, so sollen Dir die 6 Nüsse geschenkt sein.“ Der Sohn nahm hierauf auch wirklich auf die ausbedungene Weise 6 Stück davon: welche waren es wohl?

Lage der Nüsse? $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

Das Buch ist ganz im Stile der zeitgenössischen Rechenmeister geschrieben. Beim Studium der Aufgaben konnte ich feststellen, daß der Autor bei den Mathematikern des Altertums einige Anleihen aufgenommen hat. Eines hat er erreicht: Im Familien- und Freundeskreis und bei seinen Lesern hat er Interesse für mathematische Probleme geweckt und zu „geistesbeschäftigender und geselliger Unterhaltung“ angeregt.

In handschriftlichen Unterlagen, die sich im Besitz der Nachfahren J. Ch. Schäfers befinden, fand ich neben 68 Anekdoten und einigen Rechenaufgaben aus dem bauerlichen Alltagsleben (insbes. Landvermessung und Forstwirtschaft) auch eine Reihe unterhaltsamer Aufgaben, bisher unveröffentlicht. An einigen möge sich der *alpha*-Leser bewähren:

▲ 6 ▲ Robert bot einst sein Obst drei Leuten feil, Ein günstiges Geschick wurde ihm dabei zu theil.

Sie kauften der Früchte ganze Zahl. Such, Leser, diese jetzt einmal.

A. nimmt des ganzen Vorraths Hälfte hin und achte, und geht davon mit frohem Sinn.

B. kaufte nach A. die Hälfte und zwei und holt dazu als dann noch drei.

C., der den Vorrath noch zahlreich findet, Nimmt auch die Hälfte und verbindet Zwölf Stück damit, bezahlt auch sie Und Robert war frei von aller Müh,

Die Zahl besteht aus mehr als zehn mal zehn.

Doch still, Du wirst sie selbst gefunden sehn.

Berechne Du nun auch den Geldbestand, den Robert, das Stück einen Dreier fand!

▲ 7 ▲ Ein Mann brachte eines Tages Nüsse mit nach Hause, die er unter seine Frau und 5 Kinder folgendermaßen verteilte. Die Mutter erhielt 20 Nüsse mehr als jedes Kind und 20 Nüsse weniger als die Kinder zusammen. Wieviel Nüsse sind verteilt worden, und wieviel hat die Mutter erhalten?

▲ 8 ▲ Man soll 32 Nüsse so in 2 Teile teilen, daß, wenn man den größeren Teil durch 5 und den kleineren durch 6 dividiert, beide Quotienten zusammen 6 ausmachen.

▲ 9 ▲ Ein Goldschmied sagte von einer silbernen Schale, wenn sie möge noch einmal so viel, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ soviel wiegen als sie wiegt und noch 12 Lot dazu, so möge sie ebenso viel über 100 Lot, als sie jetzt darunter wiegt, wiegen. Wie schwer war die Schale?

▲ 10 ▲ Wie lassen sich 5 aufeinanderfolgende Zahlen, die ein anderer denkt, erraten?

▲ 11 ▲ Wie können die 9 Einerzahlen mit oder ohne Null so untereinandergestellt werden, daß sie (jede nur einmal zu schreiben) zusammen die Summe 100 ergeben?

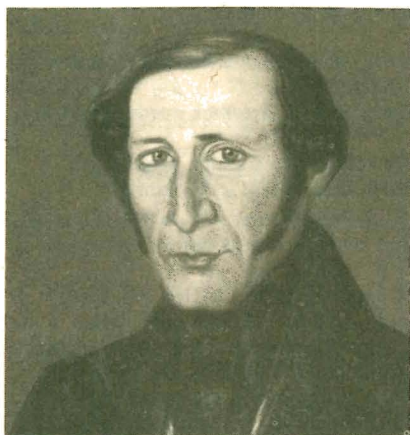
Und zum Abschluß eine Aufgabe original aus der 1. Auflage:

▲ 12 ▲

29. Der Apfelverkäufer.

Karl versuchte einst als Obstbändler sein Heil,
Und bot seine Äpfel in drei Häusern feil;
Er hatte dabei das unverhoffte Glück,
Daß er nicht einen Apfel brachte zurück,
Und schnell verkaufte der Früchte ganze Bahl.
Euch' Leser mir dieselbe jetzt einmal,
Berechne auch dabei und gib es an,
Wie viele Stücke wohl kaufte jeder Mann.

Vom ganzen Vorrath nimmt ein Viertheil erst heraus
Und fünfzehn noch der Mann im ersten Haus.
Im zweiten ist das Glück ihm wieder günstig,
Man kaufte da vom Rest ein Dritttheil und noch zwanzig.
Mit den Uebrigem geht er sodann in's dritte Haus
Und bietet sie dafelbst zum Verkaufe aus;
Der Mann, der den Vorrath noch zu groß findet,
Nimmt erst die Hälfte. — Doch damit verbindet
Er noch dreißig Stücke. — Carl freute sich sehr,
Denn sein Korb war nun geworden ganz leer.



J. Ch. Schäfer im Alter von 46 Jahren

Illeben gestern:

Der Illeberer Chronik ist zu entnehmen, daß das in flache Hügel eingebettete Bauerndorf bereits seit dem Jahre 1120 besteht und viele unruhige Zeiten, nicht ohne großen Schaden, durchgemacht hat. Zur Zeit des J. Ch. Schäfer litt die Gemeinde an großer Armut. Der leicht leh-mige Ackerboden war nicht sehr ergiebig. Heftige Gewitter, oft von großen Regengüssen begleitet, vernichteten mehrfach die Ernte. Der kleine, durchs Dorf plät-

Blick auf den Bauernhof des J. Ch. Schäfer



schernde Herzbach wurde dann zum rei-Benden Fluß und richtete großen Schaden an einem erheblichen Teil der 100 Anwesen an. Durch fahrlässigen Umgang mit Feuer brachen große Brände aus. Trockenheit und Mäusefraß taten ihr übriges. Bettler und im Dorf streunende Knaben aus nah und fern wiesen auf die große Not dieser Zeit hin. Allein im Jahre 1854 verließen 20 Personen ihr Hab und Gut. Sie wanderten nach Amerika aus. Um das Elend zu mildern, wurden Notleidende in den freistehenden Anwesen untergebracht, aus der Gemeindekasse mit Geldmitteln unterstützt. Kurzum: Es gab große soziale Unterschiede in der Gemeinde. J. Ch. Schäfer gehörte zu den Wohlhabenden und konnte es sich leisten, literarisch tätig zu sein. Er starb, mitten herausgerissen aus einem schaffensreichen Leben, am 22. 11. 1854 im Alter von 52 Jahren, 1 Monat und 30 Tagen an einem Herzversagen.

Illeben heute:

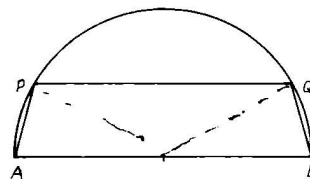
Die Gemeinde, etwa 4 km von Bad Langensalza entfernt, zählt 320 Einwohner. Entsprechend ihrer landwirtschaftlichen Struktur sind 60% davon LPG-Mitglieder. (Die anderen arbeiten in Bad Langensalza.) Hauptproduktionszweig in der Genossenschaft ist der Zuckerrübenanbau. Der Zusammenschluß mehrerer landwirtschaftlicher Produktionsgenossenschaften ermöglichte auch den Aufbau einer Rinder- und Schweinemast sowie einer modernen Milchviehanlage. Ein Nachfahre von J. Ch. Schäfer ist einer der beiden Melkmeister der LPG.

Am Ort besteht eine Oberschule, in der Schüler der 4. bis 8. Klasse unterrichtet werden. Sie kommen aus den drei Orten des Gemeindeverbandes. Im sozialistischen Wettbewerb „Schöner unsere Städte und Gemeinden – Mach mit!“ sind die Bürger sehr bemüht, durch Werterhaltungsmaßnahmen und Pflege der Grünanlagen das Ortsbild zu verschönern. Für mich, den Herausgeber, war es nicht nur eine Freude, den Inhalt der *Wunder der Rechenkunst* für die zahlreichen interessierten Leser aufzubereiten, sondern es machte ebensoviel Spaß, den historischen Gegebenheiten nachzuspüren.

J. Lehmann



▲ 1 ▲ In the trapezoid inscribed in the semicircle shown below, $AB = 4$ and $AP = BQ = 1$. Find the length of PQ .



▲ 2 ▲ Prove that there are no positive integers x and y for which $\sqrt{1978} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

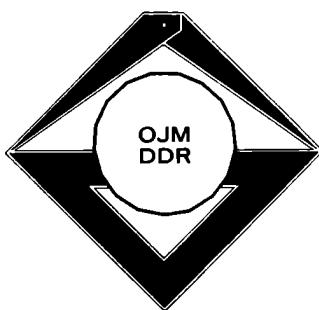
▲ 3 ▲ La longueur d'un fil téléphonique qui relie deux localités est égale à 72,8 km. Quand la température s'élève de 1 degré, chaque mètre de ce fil s'allonge de 18 μm . Calculer, en centimètres, l'allongement de ce fil quand la température passe de 12° à 36°.

▲ 4 ▲ Девочка подошла к переходу через улицу в тот момент, когда загорелся желтый свет, и заглядела на работу светофора. По своим часам она заметила, что красный свет горит в полтора раза меньше времени, чем зеленый, а желтый – в четыре раза меньше, чем красный. После того, как в восемнадцатый раз горел желтый свет, зажегся зеленый, и девочка, простояв 17 минут, стала переходить улицу. Сколько времени горит желтый свет?



XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Kreisolympiade, Teil 1

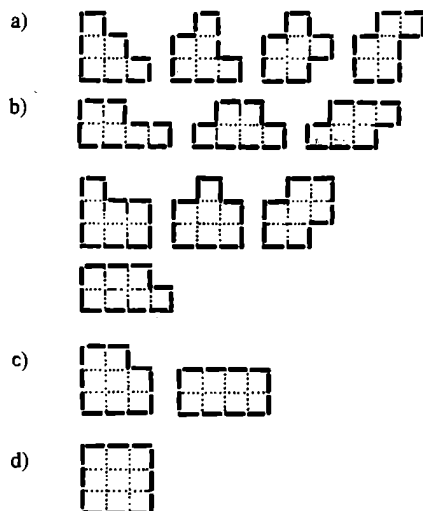


Olympiadeklasse 5

230521 Lösungen sind z. B.:

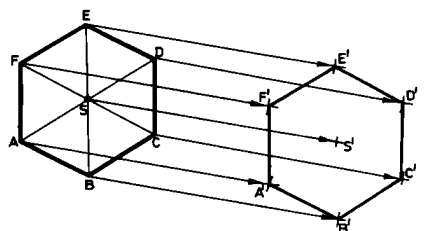
$$\begin{aligned} 2 &= 3 - 33 : 33 &= 3 + 3 - 3 - 3 : 3 \\ 3 &= 3 + 3 + 3 - 3 - 3 &= 3 + 33 - 33 \\ 4 &= 3 + 33 : 33 &= 3 + 3 : 3 + 3 - 3 \\ 5 &= 3 + 3 : 3 + 3 : 3 &= 3 \cdot 3 - 3 : 3 - 3 \\ 6 &= (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 - 3 \\ 8 &= 3 + 3 + 3 - 3 : 3 &= (33 - 3 \cdot 3) : 3 \\ 9 &= 3 + 3 + 3 + 3 - 3 &= (33 + 3) : 3 - 3 \\ 10 &= 3 + 3 + 3 + 3 : 3 &= 33 : 3 - 3 : 3 \end{aligned}$$

230522 Einige mögliche Lösungen zeigt das Bild:



230523 Wenn Peter in 10 Minuten 3 km zurücklegt, dann legt er in 100 Minuten zehnmal soviel zurück, also 30 km. Wenn Hans für 2 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 30 km fünfzehnmal soviel, also 150 Minuten. Wenn Karl für 2,5 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 5 km 20 Minuten, also für 30 km 120 Minuten. Wegen $150 - 100 = 50$ kam Hans mithin 50 Minuten später als Peter in Halle an. Wegen $120 - 100 = 20$ kam Karl 20 Minuten später als Peter in Halle an.

230524

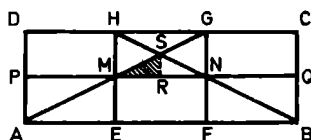


Olympiadeklasse 6

230621 a) Wegen $2200 \cdot 25 : 4 = 13750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7200$, $800 \cdot 12 : 1 = 9600$ und $13750 + 7200 + 9600 = 30550$ sollen insgesamt 30550 Liter Milch ausgeliefert werden.

b) Wegen $30550 : 9000 = 3$ Rest 3550 waren für den Abtransport der 30550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

230622 Wegen $48 : 3 = 16$ beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten. Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q. Dem Bild ist dann zu entnehmen:



Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist MNGH ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat EFGH. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten. Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck MNGH in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.

b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks EFNM sowie des Dreiecks MNS. Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck EFNM, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks ASHD ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks PMHD und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt der Flächeninhalt des Vierecks ASHD 14 Flächeneinheiten.

230623 Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt:

(3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.

Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

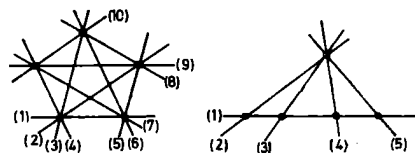
(4) Giebler hat den Vornamen Christian.

Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

(5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.

Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin: Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

230624 a) Folgende Beispiele zeigen, daß alle drei Aussagen wahr sind:

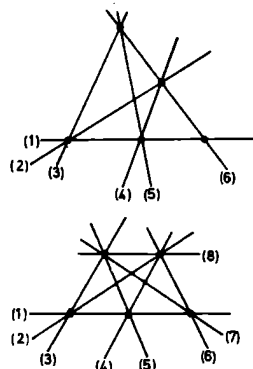


10 Verbindungsgeraden

5 Verbindungsgeraden

1 Verbindungsgerade

b) Folgende beiden Beispiele zeigen, daß die fünf Punkte auch so liegen können, daß es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:



Olympiadeklasse 7

230721 Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof (wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$) genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.

Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3}$ (oder $\frac{8}{12}$) des Gesamtweges.

Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$

des Gesamtweges genau 16 Minuten. Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

230722 Es gilt:

(1) $\overline{AM} = \overline{MC}$;

denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.

(2) $\angle FMC = \angle AME = 90^\circ$;

denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.

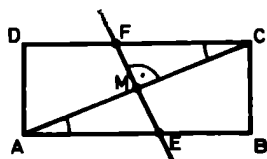
(3) $AB \parallel CD$;

da ABCD laut Voraussetzung ein Rechteck ist.

(4) $\angle MAE = \angle MCF$;

da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.

Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, daß die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind, w. z. b. w.



230723 I. Bezeichne man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, daß es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

b, g, b, r, g, r, b;

b, g, r, b, r, g, b;

b, g, r, g, b, r, b;

II. Ist $w_1, w_2, w_3, \dots, w_8, \dots$ eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen

$(w_1, w_2); (w_2, w_3); \dots (w_7, w_8)$

vor. Zu den drei verschiedenen Farben b, g, r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen

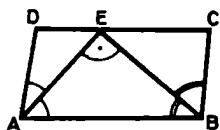
$(b, g); (b, r); (g, b);$

$(g, r); (r, b); (r, g).$

Daraus folgt, daß bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müßte, was der gestellten Bedingung widerspricht.

Aus I und II folgt, daß 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

230724 Das Dreieck ABE und das Parallelogramm ABCD stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein. Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.



Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\angle EAB$ und $\angle ABE$ gleich 90° , das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels. Folglich beträgt der Flächen-

inhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17,5$ mithin $17,5 \text{ cm}^2$ und der des Parallelogramms ABCD daher 35 cm^2 .

Olympiadeklasse 8

230821 Für die ersten beiden Stellen von z kommen wegen (1) nur die Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81 in Frage. Von diesen entfallen wegen (3) die Zahlen 25 und 49, da es keine zweistelligen Quadratzahlen mit der Anfangsziffer 5 bzw. 9 gibt. Geht man von den verbliebenen Zahlen 16, 36, 64 bzw. 81 aus, dann können bei z an der dritten Stelle wegen (3) nur die Ziffern 4, 4, 9 bzw. 6 und an der vierten Stelle wegen (2) nur die Ziffern 6, 6, 4 bzw. 1 stehen. Folglich können nur die vier Zahlen 1646, 3646, 6494 und 8161 alle geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften, da (für die ersten beiden Ziffern sowie ebenfalls für die erste und vierte Ziffer) 16, 36, 64, 81 und (für die zweite und dritte Ziffer) 64, 64, 49 und 16 sämtlich Quadratzahlen sind.

230822 Bezeichnet man die Anzahl der Brigaden mit x, so sind in jeder Brigade $(x+2)$ Schüler, und der Klasse gehören $x(x+2)$ Schüler an.

Hätte man eine Brigade weniger gebildet, wären es $(x-1)$ Brigaden mit je $(x+4)$ Schülern gewesen. Daraus ergibt sich die Schülerzahl zu $(x-1)(x+4)$.

Folglich gilt

$$x(x+2) = (x-1)(x+4)$$

$$x^2 + 2x = x^2 + 3x - 4,$$

$$x = 4.$$

Es wurden mithin 4 Brigaden zu je 6 Schülern gebildet. Daher befinden sich insgesamt 24 Schüler in dieser Klasse.

230823 Nach dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel gilt:

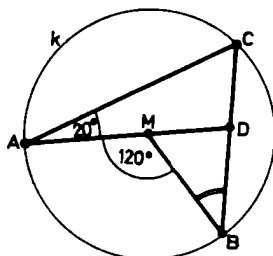
$$\angle BCA = 120^\circ : 2 = 60^\circ.$$

D sei der Schnittpunkt der Geraden durch A und M mit der Sehne BC. Dann gilt auf Grund des Außenwinkelsatzes für das Dreieck ADC:

$$\angle ADB = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ. \quad (1)$$

Ferner ist $\angle BMD$ Nebenwinkel zu $\angle AMB$, und somit gilt:

$$\angle BMD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \quad (2)$$



Aus (1) und (2) folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreieck DMB:

$$\angle DBM (= \angle CBM) = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ.$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel $\angle CBM = 40^\circ$.

230824 Wegen $\angle BCE = \angle ACF = 45^\circ$ und $\angle ACB = 90^\circ$ ist $\angle ECF = 180^\circ$, also liegt C auf EF. Wegen

$\angle BAC = \angle CAF = 45^\circ$, also $\angle BAF = 90^\circ$ und da in den Quadraten über AC und BC die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\angle AFC = \angle CEB = 90^\circ$ gilt, ist ABEF ein Rechteck, somit gilt $AB \parallel EF$ und $AB = EF$.

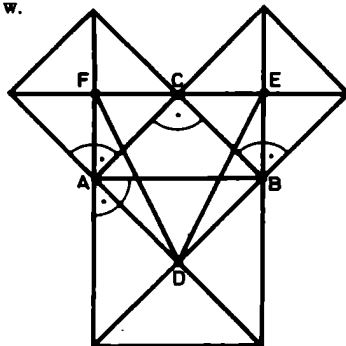
Das Viereck AD BC ist ein Quadrat, da es sich aus den beiden kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken ABC und ABD zusammensetzt. Es ist den Quadraten über AC bzw. BC kongruent. Sein

Flächeninhalt ist $A_Q = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD}$; denn je

eine Hälfte von CD ist in den Dreiecken ABC bzw. ABD die zu AB gehörende Höhe. Die Diagonale CD des Quadrats AD BC steht auf AB und folglich auch auf FE senkrecht. Daher hat das Dreieck DEF den

Flächeninhalt $\frac{1}{2} \overline{FE} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = A_Q$,

w. z. b. w.



Oder:

Nach Voraussetzung gilt:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r. \quad (1)$$

Daraus folgt, daß das Dreieck AMC gleichschenkelig ist, $\angle MAC$ und $\angle ACM$ sind Basiswinkel dieses Dreiecks. Aus dem Satz über Basiswinkel und aus der Voraussetzung folgt:

$$\angle MAC = \angle ACM = 20^\circ.$$

Nach dem Innenwinkelsatz erhält man

$$\angle CMA = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ. \quad (2)$$

Aus (2) und der Voraussetzung folgt

$$\angle BMC = 360^\circ - 120^\circ - 140^\circ = 100^\circ. \quad (3)$$

Aus (1) folgt weiter, daß das Dreieck MBC gleichschenkelig ist.

Für die Größe des Basiswinkels $\angle CBM$ gilt demnach wegen (3)

$$\angle CBM = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(Fortsetzung in Heft 4/1984)

Zitiert

Sein und Wirken sind zwei untereinander so eng verbundene Begriffe, daß wir sie häufig mit einerlei Wort bezeichnen.

B. Bolzano

Talent haben manche, aber wenn's zur Sache kommt, zählt nur, ob man was draus macht.

Eva Strittmatter

Lösungen



Lösungen zur Sprachecke

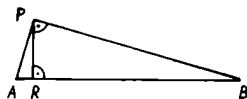
▲ 1 ▲ In einem Trapez, das einem Halbkreis wie im Bild eingeschrieben ist, beträgt $\overline{AB} = 4$ und $\overline{AP} = \overline{BQ} = 1$. Bestimme die Länge von $\overline{PQ}$!

Lösung: PR steht senkrecht auf AB , dann ist $\triangle ARP \sim \triangle APB$. Deshalb ist $\overline{AR} : \overline{AP}$

$$= \overline{AP} : \overline{AB} \text{ und } \overline{AR} = \frac{1}{4}. \text{ Demzufolge ist}$$

durch die Symmetrie der Dreiecke

$$\overline{PQ} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AR} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$



▲ 2 ▲ Beweise, daß es keine positiven ganzen Zahlen x und y gibt, für die gilt $\sqrt{1978} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$!

Lösung: Wenn es solche positiven ganzen Zahlen x und y gäbe, dann wäre $\sqrt{x} = \sqrt{1978} - \sqrt{y}$ oder $x = 1978 - 2\sqrt{1978y} + y$. Demzufolge muß $1978y$ ein vollkommenes Quadrat sein. Da jedoch in der Primzahlzerlegung von $1978 = 2^1 \cdot 23^1 \cdot 43^1$ jeder der Primfaktoren mit dem Exponenten 1 erscheint, muß y ein Vielfaches von $2 \cdot 23 \cdot 43$ sein, d. h., $y \geq 1978$. Das ist aber unmöglich.

▲ 3 ▲ Die Länge eines Telefonkabels, das zwei Orte verbindet, ist gleich 72,8 km. Wenn die Temperatur um 1 Grad steigt, verlängert sich jeder Meter dieses Kabels um $18 \mu\text{m}$. Berechne die Ausdehnung dieses Kabels in cm, wenn die Temperatur von 12° auf 36° steigt!

Lösung: Bei 1 K Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung des Kabels $72800 \cdot 0,000018 \text{ m} \approx 1,31 \text{ m}$. Bei $36^\circ\text{C} - 12^\circ\text{C} = 24 \text{ K}$ Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung $1,31 \text{ m} \cdot 24 = 31,44 \text{ m} = 3144 \text{ cm}$.

▲ 4 ▲ Ein Mädchen kam in dem Moment zur Straßenkreuzung, als das gelbe Licht aufleuchtete, und es wurde (beim Warten) von der Arbeit der Verkehrsampel fasziniert. Mit Hilfe seiner Uhr bemerkt es, daß das rote Licht eine anderthalb mal kürzere Zeit brennt als das grüne und das gelbe 4mal kürzer als das rote. Dann, als zum 18. Mal das gelbe Licht brannte und in Grün überging, ging das Mädchen, das 17 Minuten gestanden hatte, über die Straße. Wie lange brannte jeweils das gelbe Licht?



Anders Celsius und die lappländische Gradmessung

Der Name des schwedischen Astronomen und Mathematikers Anders Celsius (1701 bis 1744) ist heute hauptsächlich noch durch die 1742 von ihm vorgeschlagene Temperaturskala bekannt. (Bei ihm lag allerdings der Schmelzpunkt des Eises bei 100° und der Siedepunkt des Wassers bei 0° . Erst sein Amtsnachfolger M. Strömer kehrte 1750 die Skala um.) Celsius, der 1730 Professor für Astronomie an der Universität in Uppsala und 1741/42 zusätzlich Direktor der dort durch seine Initiative eingerichteten ersten schwedischen Sternwarte wurde, ist seinen Zeitgenossen vor allem als Teilnehmer des lappländischen Teils der beiden spektakulären Gradmessungsexpeditionen bekannt geworden, durch die 1736/37 die Abplattung der Erde nachgewiesen und damit gleichzeitig im Streit zwischen den Anhängern von Descartes und Newton die Entscheidung zugunsten der Newtonschen Gravitationstheorie gegen die Descartessche Wirbeltheorie gefällt wurde. (Aus der Gravitationstheorie folgt theoretisch die Erdabplattung, aus der Wirbeltheorie hingegen die Form eines verlängerten Rotationsellipsoids, ähnlich einem Ei.) Eine der beiden Expeditionen, die von der französischen Akademie ausgesandt wurden, vermaß die Länge eines Meridiangrades im heutigen Peru in Äquaturnähe. Ihr gehörten u. a. die namhaften Wissenschaftler Ch.-M. de Lacondamine und P. Bouguer an. Eine heute sehr seltene, aus 8 Briefmarken bestehende Briefmarkenserie Ekuadors würdigte 1936 den 200. Jahrestag dieses Ereignisses. Der anderen Expedition, die zur gleichen Zeit die Länge des Meridiangrades zwischen Torneå (heute Tornio) an der Nordküste des Bottnischen Meerbusens und dem Dorf Pello vermaß, gehörten außer dem landeskundigen Celsius u. a. der Mathematiker A. C. Clairaut und als Expeditionsleiter P. de Maupertuis an, dem der Ruhm dieser

Lösung: In der Zeit vom 1. bis zum 18. Mal „Gelb“ gab die Ampel 9mal „Rot“ und 8mal „Grün“.

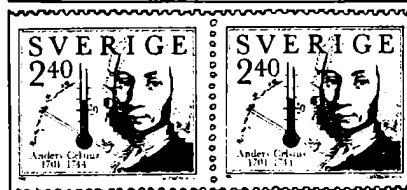
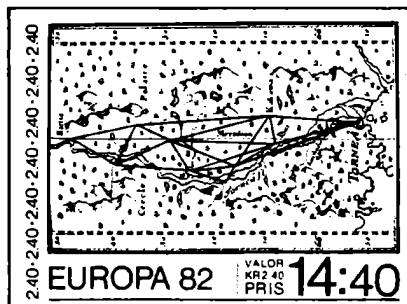
Wenn das gelbe Licht x Sekunden brennt, so gilt $18 \cdot x + 9 \cdot 4x + 8 \cdot 6x = 1020$, also $x = 10$.

Das gelbe Licht brennt 10 Sekunden.

Expedition zur Berufung als Präsident der Berliner Akademie durch Friedrich II. verhalf.

Das Hauptverdienst gehört jedoch nach heutiger Einschätzung Celsius, der nicht nur die gesamte Vorbereitung und Organisation der Expedition in den Händen hatte, sondern sie auch durch ein eigenes Programm von Messungen des Erdmagnetismus bereicherte und sich mit theoretischen Arbeiten an der folgenden Auseinandersetzung mit den Anhängern der Descartesschen Physik beteiligte. Diese wollten ihre Theorie u. a. durch Zweifel an der Genauigkeit der durchgeführten Messungen retten. Wie die abgebildete Karte zeigt, wurde die Vermessung durch Triangulation durchgeführt. Dabei werden, ausgehend von einer sehr genau gemessenen Basisstrecke, im folgenden nur noch Winkel im vorher festgelegten Dreiecksnetz gemessen und die Entfernungen durch trigonometrische Rechnung bestimmt. Wie groß der Aufwand der praktischen Realisierung eines solchen Projektes in kaum besiedeltem, unwegsamem Gelände unter widrigen klimatischen Bedingungen ist, zeigt die Bereitstellung einer ganzen Schwadron schwedischer Soldaten für die Gradmessung. Eine Gradmessung durch Triangulation war erstmals 1617 von dem niederländischen Mathematiker Snellius durchgeführt worden. Heute können geodätische Messungen von Satelliten aus mittels Laser erfolgen, die eine Genauigkeit im Zentimeterbereich liefern.

P. Schreiber



Mathematik und Philatelie

Rund vier Jahre nach dem Erscheinen des Büchleins *Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie* von P. Schreiber (vgl. alpha 1981, Heft 3) veröffentlichten wir einen ersten Nachtrag mathematisch interessanter Briefmarken zur in diesem Buch enthaltenen Liste. Die weiterhin zahlreich erschienenen bzw. bekanntgewordenen Marken, die Kunstwerke von Dürer oder Leonardo da Vinci reproduzieren, werden im folgenden nicht mit angegeben.

| Land | Jahr | Li.-Nr. | Motiv – Ausgabeanlaß | (Stand August 1983) | | |
|-------------|-----------|-----------|--|---|--|--|
| DDR | 1981 | 2394 | Richard Dedekind (vgl. <i>alpha</i> 6/1981) | | | |
| | 1983 | 2566 | robotron Mikrorechner (Frühjahrsmesse) | | | |
| | | 2582–87 | Sand- u. Sonnenuhren aus dem Math.-Phys. Salon Dresden | | | |
| | | 2609 | Programmierte Effektivität durch Mikroelektronik (Herbstmesse) | | | |
| Andorra | | 2611 | L. Euler (200. Todestag) | | | |
| | 1980 | 306 | Napoleon (vgl. <i>alpha</i> 4/1981) | | | |
| | 1980 | 2988 | EDV-Anlage ESTEL | | | |
| | 1981 | 3025 | 25 Jahre Dubna | | | |
| BRD | | 3028 | Lochstreifen | | | |
| | | 3066 | 100 Jahre Staatl. Verwaltung für Statistik (Lochstreifen) | | | |
| | 1979 | 907–09 | Einstein; Otto Hahn; Max v. Laue – Physiker | | | |
| | 1980 | 938 | Leibniz | | | |
| Frankreich | 1981 | 976 | Europ. Patentamt München (math. Symbole) | | | |
| | | 978–81 | Histor. Instrumente (Borda-Kreis, Spiegelteleskop, Binokularmikroskop, Quadrant) | | | |
| | 1982 | 1043 | 400 Jahre Gregorianischer Kalender | | | |
| | 1944 | 630 | Claude Chappe (1763 bis 1805), Erfinder des opt. Telegrafen | | | |
| | 1949 | 874 | Voltaire (wirkungsreiche Randfigur in d. Gesch. d. Math., vgl. <i>alpha</i> 2/1983) | | | |
| | | 876 | G. Buffon (1707 bis 1788), sein „Nadelproblem“, Beginn d. geometr. Wahrscheinlichkeitstheorie | | | |
| | 1951 | 915 | Napoleon | | | |
| | 1958 | 1185 | J. Leverrier (1813 bis 1877), fand rechn. 1846 den später von Galle beobachteten Planeten Neptun | | | |
| | | 1195 | Jean Cavaillès (1903 bis 1944), Mathematiker, Angehör. d. franz. Widerstandsbewegung | | | |
| | 1963 | 1423 | Tiefseetauchboot „Archimede“ | | | |
| | 1969 | 1681 | Napoleon (200. Geburtstag) | | | |
| | 1981 | 2248 | integrierter Schaltkreis | | | |
| Griechenl. | | 2258 | Mikroprozessoren (Elektronikmesse) | | | |
| | 1980 | 1461–62 | Aristarch von Samos (vgl. <i>alpha</i> 1/1982) | | | |
| | 1983 | 1566 | Archimedes | | | |
| | Großbrit. | 1979 | 853 | Alice im Wunderland (der Verfasser Lewis Carroll [eigentl. C. L. Dodgson], Prof. f. Mathem. | | |
| Italien | 1982 | 980–81 | Informationstechnik (u. a. Computer u. Bildschirmgerät) | | | |
| | 1956 | 1080–81 | Weltkugel in Anaglyphen(Raumbild-)darstellung | | | |
| | 1972 | 1487 | Leon Battista Alberti (1404 bis 1472) | | | |
| | 1979 | 1749 | Einstein | | | |
| Jugoslawien | | 1759 | Francesco Severi (1879 bis 1961), Mathematiker. Spezialgebiet: algebraische Geometrie | | | |
| | 1982 | 1905 | automatische Postsortierung | | | |
| | 1983 | 0000 | Galilei, Archimedes | | | |
| | 1979 | 1911 | Milutin Milanković (1879 bis 1958), Mathematiker, Astronom u. Geophysiker | | | |
| Monaco | 1979 | 1400 | Einstein | | | |
| Niederlande | 1978 | 1130 | rechnendes Mädchen an Schultafel | | | |
| Norwegen | 1983 | 902 | Abel-Denkmal in Oslo | | | |
| Österreich | 1979 | 1607 | 150 Jahre Statist. Zentralamt (Bevölkerungsbaum, vgl. <i>alpha</i> 1/1983) | | | |
| | | 1628 | August Musger (1868 bis 1929), Prof. für angewandte Mathematik | | | |
| | 1981 | 1677 | L. Boltzmann (vgl. <i>alpha</i> 4/1982) | | | |
| | | 1680 | 10. Internat. Mathematikerkongreß Innsbruck (Escherwürfel, vgl. <i>alpha</i> 4/1982) | | | |
| Polen | 1982 | 1720 | 10 Jahre Internat. Institut f. angewandte Systemanalyse / Geodätentag | | | |
| | 1979 | 2685 | Satellit <i>Mikolaj Kopernik</i> | | | |
| | 1982 | 2861–64 | St. Zaremba, W. Sierpiński, Z. Janiszewski, St. Banach (vgl. <i>alpha</i> 5/1983) | | | |
| | Portugal | 1981 | 1567–68 | Volkszählung, Lochkartenmotiv | | |
| Rumänien | 1981 | 3852 | XV. Internat. Kongreß f. Wissenschaftsgeschichte in Bukarest | | | |
| San Marino | 1982 | 1309–11 | Archimedes, Copernicus, Newton | | | |
| | | 1317–18 | Hippokrates, Galilei | | | |
| | 1983 | 1330–31 | Volta, Torricelli | | | |
| | | 1333 | Pythagoras | | | |
| Schweden | 1981 | 1178 | Einstein | | | |
| | 1982 | 1191 | A. Celsius (vgl. <i>alpha</i> 6/1983) | | | |
| | | 1185–87 | perspektivisch widerspruchsvolle Figuren (vgl. <i>alpha</i> 4/1982) | | | |
| | | 1217–21 | symbol. Darst. math.-phys. Theorien von Bohr, Schrödinger, de Broglie, Dirac u. Heisenberg | | | |
| Schweiz | 1980 | 1176 | astronomische Uhr (etwa 1530) | | | |
| | | 1197 | XVI. Internat. Kongreß der Vermessungsingenieure (Theodolit, Meßlatte) | | | |
| | 1983 | 1283 | Globusuhr von Bürgi | | | |
| | ČSSR | 1957 | 1031–34 | 250 Jahre Polytechn. Schule Prag, insbes. F. J. Gerstner (1756 bis 1832), R. Skuherský (1828 bis 1863) – Mathematiker | | |
| | 1977 | 2401 | Alice im Wunderland (Illustration) / Burundi 1977 382 Alice i. W. | | | |
| | 1980 | 2591 | Volkszählung | | | |
| | 1981 | 2612/2616 | J. Hronec/B. Bolzano (vgl. <i>alpha</i> 5/1981) | | | |
| | 1982 | 2691 | 30 Jahre Akad. d. Wissensch. d. ČSSR | | | |
| Türkei | 1980 | 2435–36 | Avicenna (Ibn Sina, 1000. Geburtstag). | | | |
| | 1981 | 2478–79 | 5. Europ. Physikerkongreß | | | |
| | 1983 | | Ulug Beg (1394 bis 1449), bedeut. mittelasiat. Astronom u. Mathematiker | | | |
| | Ungarn | 1966 | 2228 | 10 Jahre Dubna | | |
| | 1980 | 3449 | Kepler (mit Nebenfeld) | | | |
| | 1982 | 3553/3555 | Ziolkowski/Weltmeisterschaft im Rubik-Würfel-Drehen | | | |

| Land | Jahr | Li.-Nr. | Motiv – Ausgabeanlaß |
|------------------|------|-----------------|---|
| UdSSR | 1979 | 4923 | 60 Jahre Nachrichtentruppen d. Streitkräfte d. UdSSR (Lochstreifen) |
| | 1980 | 5013 | Avicenna |
| | | 5048–49 | Forschungsschiff <i>O. Ju. Schmidt</i> , Forschungsschiff <i>M. Keldysch</i> |
| | 1981 | 5068 | M. W. Keldysch (vgl. <i>alpha</i> 2/1982) |
| | | 5125 | XXVI. Parteitag – Lochstreifen |
| | | 5151 | M. A. Lawrentjew (1900 bis 1980), Mathematiker |
| | 1983 | | al-Choresni (~780 bis ~850), islam. Mathematiker |
| Vatikan | 1982 | 846–48 | 400 Jahre Gregorianischer Kalender |
| Westberlin | 1981 | 639–42 | histor. Instrumente (Theodolit, Äquatorial, Mikroskop, Sextant) |
| Ägypten | 1980 | | Dr. Ali Mousharafa (1898 bis 1950), erster namhafter ägypt. Mathematiker d. Neuzeit |
| Äquat.-Guin. | 1978 | Bl. 284 | Ziolkowski u. Koroljow |
| Australien | 1974 | 578 | wiss. Ausbildung – Ausgleichskurve durch Meßdaten |
| Benin | 1980 | 669–70 | Kepler, Copernicus (50 Jahre Pluto-Entdeck.) |
| | | 723–24 | Kepler |
| Brasilien | 1974 | 1437–40 | Möbius-Band; 1975 1477 Möbius-Band |
| | 1978 | 1642 | automat. Postsortierung |
| Burma | 1976 | 263 | Rechenbrett |
| | 1981 | 3 Werte | Kepler |
| VR China | 1979 | 1502 | Einstein |
| Cook-Ins. | 1980 | | Kepler (mit Jules Verne) |
| Ekuador | 1936 | 341–49 | 200. Jahrestag der südamerikan. Gradmessung (vgl. <i>alpha</i> 6/1983) |
| Franz.-Polyn. | 1969 | 100 | Napoleon |
| Gabun | 1981 | | 200 Jahre Uranus-Entdeckung (F. W. Herschel) |
| Guayana | 1982 | 6 Werte | metrisches System |
| Guinea-Biss. | 1977 | 84 | Einstein |
| | 1979 | 186 | Math.-Unterricht |
| | 1981 | | Galilei |
| Iran | 1977 | 1880 | integrierte Schaltung |
| | 1979 | 1969 | Gyath-al-Din Jamshid Kashami, Astronom u. Mathematiker (550. Todestag) |
| | 1980 | 1984 | al-Biruni, al-Farabi, Avicenna |
| Japan | 1980 | 1456 | 10. Internat. Tagung f. Kartographie |
| | | 1459 | Kongreß d. Internat. Vereinig. f. Informationstechnik (integrierte Schaltung) |
| Jemen (JAR) | 1978 | 1399 | EDV-Anlage |
| Kanada | 1971 | Bl. 174 | |
| Kolumbien | 1971 | 488 | 100 Jahre Volkszählung (Lochstreifen u. Magnetbandtrommeln) |
| | 1949 | 540 | Julio Garavito Armero (1865 bis 1920), Mathematiker |
| | 1968 | 1056 | Kongreß f. elektron. Datenverarbeitung |
| Komoren | 1975 | 226–27 | Copernicus |
| | 1976 | 286–87 | Copernicus; Einstein |
| | 1977 | 329 | Russell |
| | 1977 | 330 | Planck, Einstein u. a. |
| | 1979 | 485–90 | Galilei, Kepler, Copernicus, Huygens, Herschel, Leverrier |
| | | Bl. 199–205 | |
| VR Kongo | 1980 | 588 | Kepler, Copernicus |
| | 1979 | 697 | Einstein |
| | 1980 | 735 | Claude Chappe (vgl. Frankreich) |
| KDVR | 1980 | 2007 | Kepler |
| | 1981 | | Copernicus |
| | 1982 | | Gemälde <i>Akademie von Athen</i> v. Rembrandt |
| Kuba | 1981 | 2774/2825 | Verne, Ziolkowski, Koroljow/Napoleon in Ägypten (vgl. <i>alpha</i> 4/1981) |
| Laos | 1981 | 532 | Math.-Unterricht |
| Libanon | 1948 | | Avicenna |
| Mali | 1978 | 661 | Einstein (Aufdruck auf 469) |
| | 1980 | 748–49 | Kepler, Copernicus |
| Moçambique | 1982 | | Lochstreifen |
| Mongol. VR | 1980 | Bl. 68 | Kepler |
| Neukaled. | 1974 | 563 | Lissajous-Figur (Überlagerung zweier senkrechter Schwingungen) |
| Nikaragua | 1980 | 2146–53 | Einstein |
| Papua u. | 1967 | 107 | Vermessungswesen |
| Neuguinea | | 108 | Zirkel im Bauwesen |
| Saudi-Arab. | 1977 | | Ptolemäus |
| Sierra Leone | 1983 | | Raffaels Gemälde <i>Akademie des Platon</i> |
| St. Lucia | 1980 | Bl. 22 | Einstein |
| Togo | 1979 | 1325–30 | Einstein |
| | 1981 | | Copernicus |
| USA | 1973 | 1129 | integrierte Schaltung |
| | 1980 | 1435 | Benjamin Banneker (vgl. <i>alpha</i> 2/1981) |
| Venezuela | 1978 | 2112 | Lochstreifen |
| Vietnam | 1979 | 1077–78 | Einstein |
| Zaire | 1980 | 6 Werte + Block | Einstein |
| Zentralafr. Rep. | 1979 | 612 | Einstein |

Wir falten lustige Figuren

Der Teufel

Ausgangsform: Ein Quadrat aus Schreib- oder Zeichenpapier 20 cm × 20 cm.

Anfertigung: Wir falten das Quadrat im Mittelbruch zu einem Rechteck (Bild 2). Die halbe Länge des so entstandenen Rechtecks wird zum anderen Mittelbruch nach innen gelegt (Bild 3). Die zwei oben liegenden Spitzen falten wir nach unten (Bild 4), drehen das Ganze um und wiederholen den letzten Faltvorgang (Bild 5). Wir erhalten ein quadratisches Faltpäckchen (Bild 6).

Es sind vier dreieckförmige „Flügel“, die eine gemeinsame Mittelachse haben. Das linke Dreieck brechen wir zweimal so, daß die äußeren Seitenkanten an die Mitte zu liegen kommen, und falten mit Hilfe der zwei eben entstandenen Faltlinien eine Spitze heraus (Bild 7). Mit den drei anderen „Flügeln“ verfahren wir ebenso, wie es Bild 8 zeigt. Von den beiden scharfen Spitzen des entstandenen Körpers ist eine durch die Faltvorgänge offengeblieben

(Bild 9). Wenn wir in die offene Seite hineinblasen und dabei die zwei unteren Dreieckspitzen mit den Fingern festhalten, entfaltet sich der Teufel. Beim Blasen müssen wir nötigenfalls mit den Fingern nachhelfen, damit die „Hörner“ nicht in den Brüchen hängenbleiben. Man kann an der anderen geschlossenen Spitze die gespaltene „Zunge“ etwas herausholen und nach unten umkippen. Eine entsprechende Bemalung (große Augen, rote Zunge) erhöht den Reiz dieser Faltarbeit.

Der Vogel

Ausgangsform: Quadrat in der Größe von 25 cm × 25 cm (Bild 1a).

Anfertigung: Nach dem Bild wird das Quadrat gefaltet; nach dem Öffnen zeigt es waagerechte und senkrechte Linien, die aus den Faltbrüchen entstanden sind. Nun wird von allen vier Ecken aus an den Diagonalen entlang in Tütenform weitergefaltet und wieder geöffnet, so daß noch mehr Faltlinien zu sehen sind. Das so vorgefaltete Blatt sieht dann nach dem Wiederöffnen wie Bild 1f aus. Wichtig ist nun das Vertrautmachen mit Bild 1e. Diese durch die Faltung entstandenen stumpfen Dreiecke werden angehoben, weiter aufgestellt und nach innen gedrückt (Bild 1f). Die ursprünglichen Ecken treffen sich bei diesem Vorgang als neu entstandene untere Drachenspitzen. Bedingung ist, daß alle Brüche scharf ausgefaltet werden. Wir drücken das Ganze so weit zusammen, bis wir vier zusammenhängende, flach zusammengedrückte Drachenformen erhalten (Bild 2g). Der obere und der untere Dra-

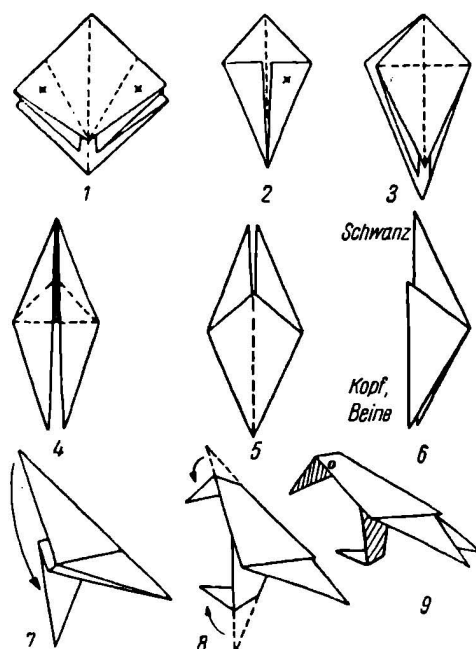
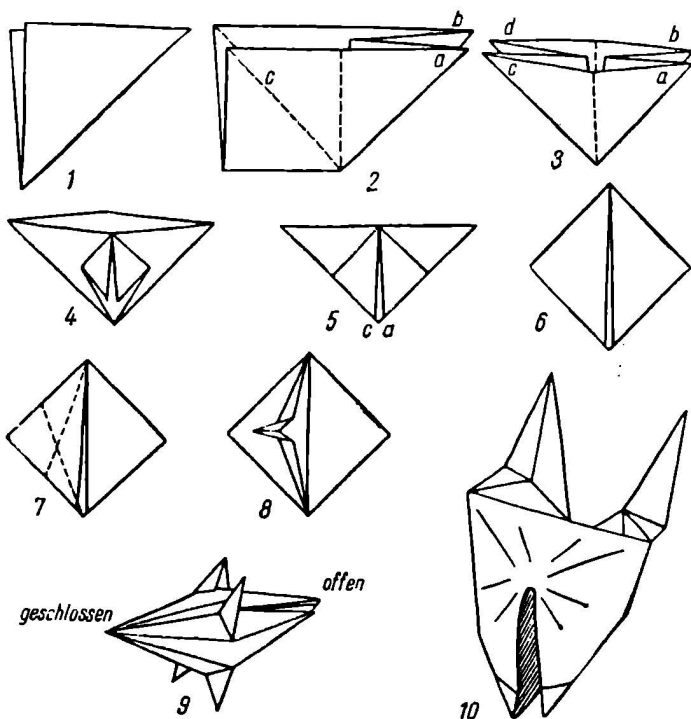
chen sind sichtbar. Die zwei dazwischenliegenden sind rechts und links je in der Mitte in der Längsrichtung gefaltet und zusammengedrückt (Bild 2h). Nun werden von den sichtbaren beiden Drachen die losen, langen Dreiecke über die oberen, zusammenhängenden rechtwinkligen Dreiecke gestülpt. Die oberen Hälften sind geschlossen, die unteren gespalten (Bild 2i und k). Die Zeichnung zeigt nun den weiteren Arbeitsablauf. Das eine lose Viertel wird nach oben und nach innen eingedrückt, wie weit, das zeigt die Zeichnung. Es wird zum Hals und Kopf gefaltet. Der Kopf wird wieder nach unten und innen gedrückt und gefaltet (Bild 3a). Das gezeichnete Auge im Kopf macht die Form deutlicher. Der Schwanz wird ebenso gebildet, nur nach der entgegengesetzten Seite, auch seitlich nach oben, dann nach innen. Jetzt falten wir die beiden immer noch nach oben stehenden Drachenspitzen; je zwei Drittel nach unten, und zwar schräg nach vorn, und die Flügel sind gebildet. Unser Vogel ist fertig (Bild 3c). Wenn man jetzt mit der linken Hand den Vogel vorn unter den Flügeln mit zwei Fingern festhält und hinten am Schwanz leicht hin und her zieht, dann schlagen die Flügel auf und ab.

Diese beiden Faltfiguren entnehmen wir dem Buch:

Werken und Formen,

Verlag Volk und Wissen,
Volkseigener Verlag, Berlin 1960.

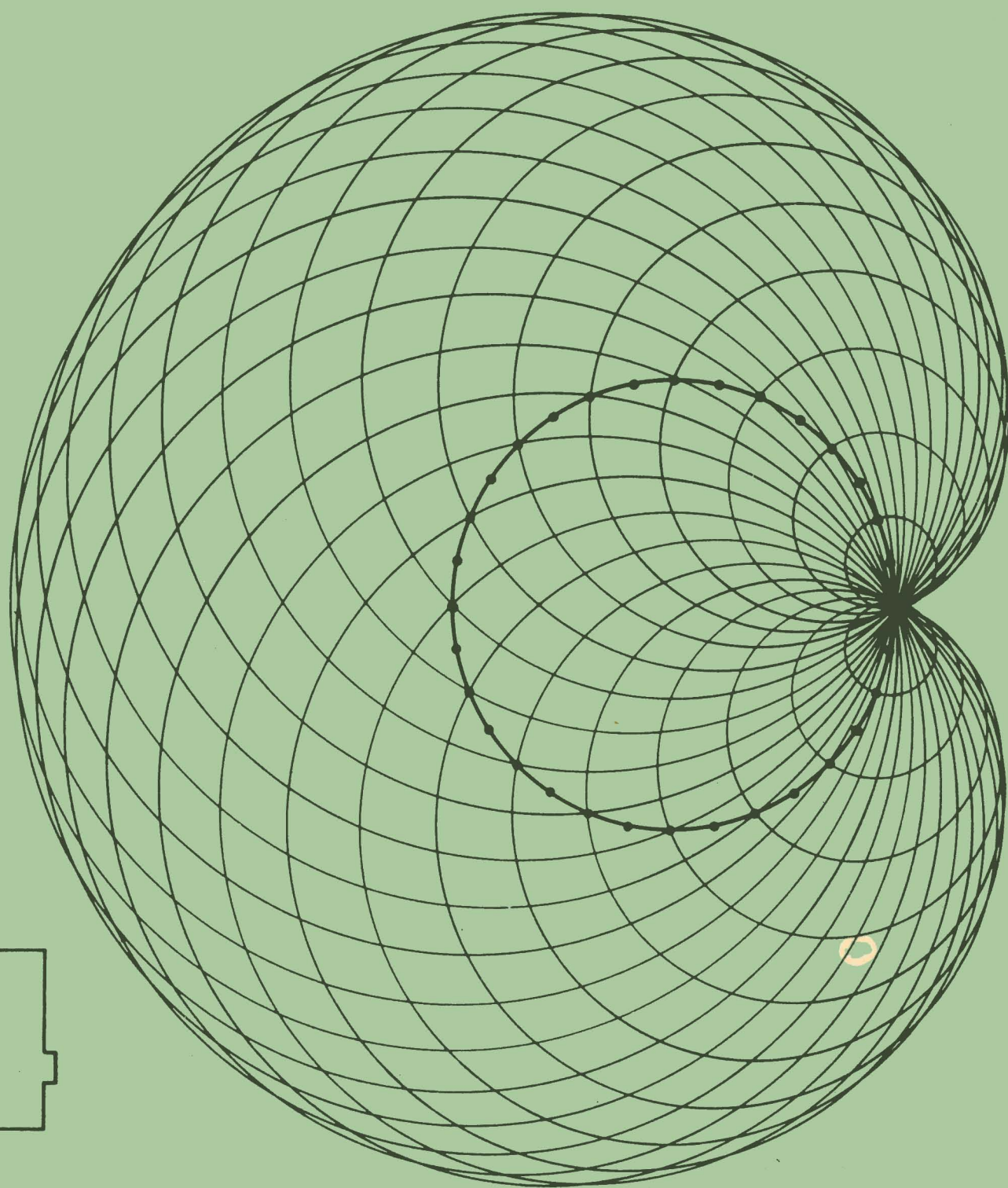
Viel Erfolg und Freude beim Knobeln!



**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**

alpha



4

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stöye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:
OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Viktor Kubal, Prag (S. 77); Jahreswegweiser durch alte und neue Kunst, Aufbau-Verlag Berlin (S. 77); Briefmarke: Dr. P. Schreiber, Greifswald (S. 78); Red. „Freie Welt“, Berlin (S. 78); E. Staginuss, Berlin (S. 81)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Nach einer Vorlage aus *The Australian Mathematics Teacher* (10/83), Queensland, von W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,
III/18/97

AN (EDV) 128

Redaktionsschluß: 26. April 1984

Auslieferungstermin: 20. August 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

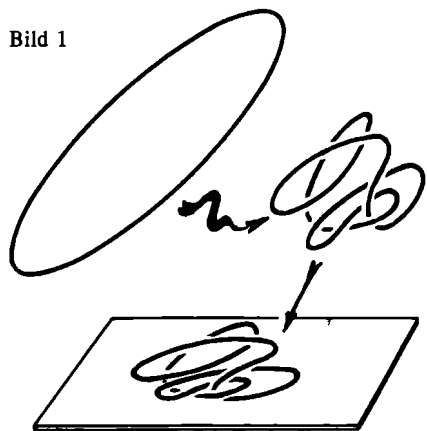
- 73 Das Entwirren von Figuren in der Ebene [8]¹⁾
Prof. Dr. S. W. Matwejew, Lomonossow-Universität Moskau
Beitrag aus Quant 4/83
- 75 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Włodzimierz Kryszicki [8]
Mathematisches Institut der Technischen Universität Łódź
- 76 Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen aus der Sicht der Darstellenden Geometrie [6]
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 78 Zum 1200. Geburtstag Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi [8]
Dr. A. Volodarskij, Institut der Geschichte der Naturw. und Technik der Akad. der Wi. der UdSSR / Mathematikfachlehrer A. Halamejsär, beide Moskau
- 79 *alpha*-Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C. P. Helmholz/J. Lehmann, alle Leipzig
- 80 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Kl. 5/6
Axialsymmetrie [5]
Dr. E. Quaisser/Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam
- 81 Historische Aufgabe: Weizenkörner auf einem Schachbrett [5]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik d. Akademie der Wissenschaften der DDR
- 82 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel, Teil 4 und Schluß
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 84 Ein Spiel: Die fixe 7 [5]
Dipl.-Lehrer Ch. Werge, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 84 Es hat Spaß gemacht – Preisträger des Schachwettbewerbs 1983 (6/83) [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 85 Prof. Dr. Massera am Telefon aus Montevideo [5]
W. Israel, ADN Berlin
- 86 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 88 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Lösungen der Kreisolympiade (Klassenstufen 9/10)
- 90 XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Schulolympiade (1. Stufe)
- 92 Lösungen [5]
- IV. U.-Seite: Fingerspiele aus einem japanischen Unterhaltungsbuch [5]
Internationale Buchausstellung (IBA) 1983

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das Entwirren von Figuren in der Ebene

Wir stellen aus dünnem Draht ein Kreismodell her. Dieses verbiegen wir dann im Raum so, daß es eine kompliziertere Form annimmt. Das Drahtknäuel werfen wir auf die (ebene) Tischplatte und drücken es fest an (Bild 1).

Bild 1



Kann man die so erhaltene Drahtfigur wieder zu einem Kreis entwirren, ohne sie aus der Ebene herauszunehmen?

Um dieses Problem mathematisch bearbeiten zu können, nehmen wir an, daß die Dicke des Drahtes Null sei. Damit erreichen wir, daß in den Punkten, in denen ein Teil der Figur über einen anderen hinweggeht (in den *Doppelpunkten*) auch der obere Teil in der Ebene liegt. Der Draht sei sehr biegsam, dennoch sollen seiner Biegsamkeit Grenzen gesetzt sein: Der Krümmungsradius eines bogenförmigen Stücks darf nicht Null werden, sonst bricht der Draht. Insbesondere sei das Zusammenziehen einer Schleife (Bild 2) verboten.

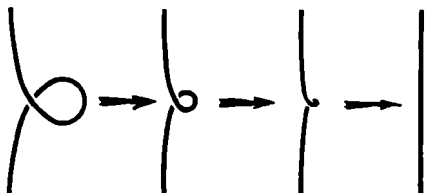
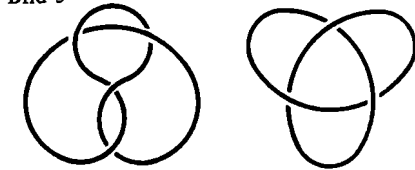


Bild 2

Es ist klar, daß unsere Figur *im Raum* immer entwirrt werden kann, denn wir sind ja von einem Kreis ausgegangen. Diesen kann man wiederherstellen, indem man die vorgenommenen Verbiegungen in umgekehrter Reihenfolge ausführt. Indem wir von einem Kreis ausgegangen sind, haben wir alle mit Knoten zusammenhängenden

Schwierigkeiten umgangen. Wären wir von einer verknoteten Figur wie im Bild 3 ausgegangen, würde uns das Entwirren und Wiederherstellen eines Kreises weder in der Ebene noch im Raum gelingen.

Bild 3



Kehren wir zu unserem Problem zurück.

Wir experimentieren und überlegen

Durch Probieren mit Draht (oder auch mit Bindfaden) merkt ihr leicht, daß die Figur aus Bild 1 entwirrt werden kann. Den entsprechenden Prozeß zeigt Bild 4.

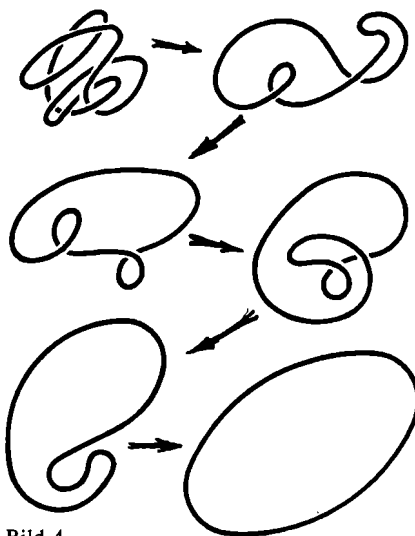


Bild 4

▲ 1 ▲ Versucht, die Figuren a bis f aus Bild 5 zu entwirren! Sicher konntet ihr die Figuren b, e und f entwirren. Der Mißerfolg bei den Figuren a, c und d läßt vermuten, daß es auch nicht entwirrbare Figuren gibt. Doch wie *beweist* man, daß *niemand* diese Figuren entwirren kann?

Im Prozeß des Entwirrens einer gegebenen Figur wird diese schrittweise in andere Figuren überführt. Dabei bleiben manche Eigenschaften dieser Figur erhalten, andere ändern sich. Man ordnet nun jeder (überhaupt möglichen) Figur aufgrund gewisser ihrer Eigenschaften eine Zahl zu. Ändert

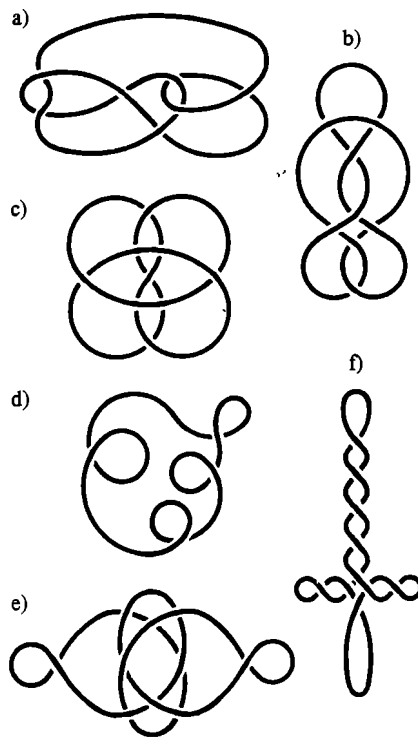


Bild 5

sich während eines beliebigen Entwirrungsprozesses diese Zahl beim Übergang von einer Figur zur nächsten jeweils nicht, so ist sie eine *Invariante*. Man bestimmt nun für die Ausgangsfigur und die angestrebte Endfigur (Kreis) die Werte solch einer Invariante und vergleicht sie. Sind die beiden Werte voneinander verschieden, so ist eine Entwirrung nicht möglich, denn die Invariante darf ihren Wert in solch einem Prozeß ja nicht ändern!

Dieses Verfahren benutzen Mathematiker oft, um die Unmöglichkeit einer Konstruktion bzw. eines Prozesses, bei dem Objekte in andere überführt werden sollen, nachzuweisen. So können wir von zwei Dreiecken mit den Flächeninhalten $A_1 = 25 \text{ cm}^2$ und $A_2 = 15 \text{ cm}^2$ sofort sagen, daß sie nicht durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können (d. h., nicht kongruent sind), denn der Flächeninhalt ist eine Invariante der Bewegungen. (Allerdings kann aus dem Übereinstimmen der Flächeninhalte zweier Dreiecke nicht auf ihre Kongruenz geschlossen werden.)

Versuchen wir nun, jeder unserer *Drahtfiguren* eine gewisse Zahl zuzuordnen. Das erste, was uns einfällt, ist die Anzahl der Doppelpunkte der Figur. Aber das ist keine Invariante, wie z. B. im Bild 4 erkennbar ist. Wenn man dieses Bild jedoch aufmerksam betrachtet, stellt man fest, daß Doppelpunkte *paarweise* erscheinen und verschwinden. Das bringt uns auf eine Idee: Ist die Anzahl der Doppelpunkte gerade (bzw. ungerade), so bleibt sie dies während des gesamten Prozesses, d. h., *der Rest bei Division der Anzahl der Doppelpunkte durch 2* ist eine *Invariante* des Entwirrungsprozesses!

Daraus folgt z. B., daß die Figur 5a nicht entwirrt werden kann (7 Doppelpunkte – ungerade Zahl – Rest 1; Kreis: 0 Doppel-

punkte – gerade Zahl – Rest 0; $1 \neq 0$). Figur 5d hat 4 Doppelpunkte, d. h., bei ihr hat die Invariante den Wert 0 – wie auch beim Kreis. Heißt das, daß sie entwirrt, d. h. in einen Kreis übergeführt werden kann? Nein! Denn darüber, ob das Nullsein der Invariante auch *hinreichend* für die Entwirrbarkeit der Figur ist, wissen wir überhaupt nichts. Die Frage nach der Entwirrbarkeit der Figur 5d bleibt vorläufig offen.

Unsere Überlegungen zeigen, daß es für die Lösung des eingangs gestellten Problems sinnvoll ist, weitere Invarianten des Entwirrungsprozesses zu suchen. Das wollen wir jetzt tun.

Die Invariante V

Es sei eine der oben beschriebenen Figuren in der Ebene gegeben, z. B. die im Bild 6. Wir wählen auf ihr einen beliebigen Punkt A , von dem aus wir (in einer der beiden möglichen Richtungen) die Figur durchlaufen. Dabei denken wir uns in jedem durchlaufenen Punkt einen Pfeil in der jeweiligen Laufrichtung angebracht. (Dieser Pfeil liegt jeweils auf der *Tangente* an die Figur im entsprechenden Punkt. Anschaulich können wir uns vorstellen, daß wir mit einem Auto die Figur abfahren. Unsere Richtungspfeile zeigen dann jeweils in Leuchtrichtung der Scheinwerfer.) Beim Durchlaufen der Figur ändern diese Pfeile dauernd ihre Richtung. Um dies besser verfolgen zu können, legen wir noch einen Punkt 0 in der Ebene fest und denken uns an diesem Punkt einen weiteren Pfeil drehbar angebracht. Beim Durchlaufen der Figur soll sich dieser Pfeil so um 0 drehen, daß er stets parallel zum jeweiligen Richtungspfeil ist.

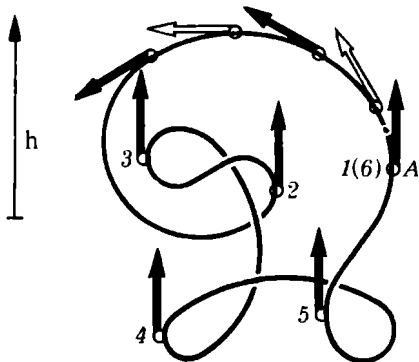
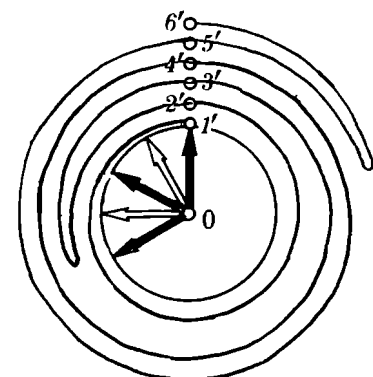


Bild 6



Da im Moment der Vervollendung des Durchlaufs der Figur und der Rückkehr zum Punkt A der sich drehende Pfeil wieder seine Ausgangslage einnimmt, ist die Gesamtzahl seiner Umdrehungen eine ganze Zahl. Dabei werden seine Drehungen entsprechend dem Drehsinn positiv (entgegen dem Uhrzeiger) bzw. negativ (im Uhrzeigersinn) gerechnet.

Im unteren Teil von Bild 6 ist der Weg der Spitze des sich um 0 drehenden Pfeils dargestellt. (Der Anschaulichkeit halber wurden die Kreisbögen versetzt gezeichnet; eigentlich spielt sich alles auf demselben Kreis ab, und die Punkte 1' bis 6' fallen zusammen.) Der Pfeil vollzieht (-1) Umdrehungen: Von 1' zu 2' eine Umdrehung, von 2' zu 3' und von 5' zu 6' werden die Umdrehungen nicht vollendet, von 3' zu 4' und von 4' zu 5' wird je eine Umdrehung im negativen Sinn ausgeführt.

Die angekündigte Invariante V ist der absolute Betrag der Gesamtzahl der Umdrehungen des Pfeils um den Punkt 0. Sie hängt offensichtlich nicht von der Wahl des Ausgangspunktes A ab, auch nicht vom gewählten Durchlaufsinne, da bei seiner Änderung die Gesamtzahl der Umdrehungen nur das Vorzeichen wechselt.

Für die Figur im Bild 6 ist $V = 1$.

Wir deuten hier nur an, wie man beweisen könnte, daß V tatsächlich eine Invariante des Entwirrungsprozesses ist. In solch einem Prozeß ändert sich die Lage der in den Punkten angebrachten Richtungspfeile fließend, ohne Sprünge. Deshalb muß sich auch V stetig ändern. Aber für V kommen nur ganze Zahlen in Frage, zwischen denen nur sprunghafte Änderungen möglich sind. Deshalb bleibt V beim Entwirren einer Figur unveränderlich, ist also eine Invariante.

Jetzt können wir uns wieder mit Figur 5d beschäftigen. Für sie ist $V = 3$, deshalb kann sie nicht zum Kreis ($V = 1$) entwirrt werden.

▲ 2 ▲ Weist nach, daß für Figur 5d $V = 3$ ist!

Bei der Bearbeitung des Auftrages ▲ 2 ▲ habt ihr sicher bemerkt, daß das Zählen der Umdrehungen des Pfeils um den Punkt 0 nicht sehr bequem ist; leicht unterläuft ein Fehler. Aber man kann V auch leichter bestimmen.

Dafür wählen wir eine feste Richtung in der Ebene, z. B. im Bild 6 den Strahl h , und stellen alle Punkte fest, in denen der Richtungspfeil in diese festgelegte Richtung zeigt. Wenn ein kleines Stück der Figur, das solch einen Punkt enthält, links von diesem Punkt liegt, so schreiben wir $+1$ an diesen Punkt. Liegt es rechts, so notieren wir -1 . (Falls die Figur in jeder noch so kleinen Umgebung des betreffenden Punktes zu beiden Seiten des Richtungspfeils verläuft, schreiben wir keine Zahl auf.)

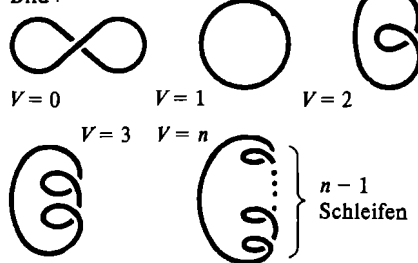
Dann ist die Invariante V gleich dem absoluten Betrag der Summe der aufgeschriebenen Zahlen. Zum Beispiel wird den Punkten 1 und 2 im Bild 6 jeweils $+1$ zugeordnet, den

Punkten 3, 4 und 5 jeweils -1 . Damit wird

$$V = |1 + 1 - 1 - 1 - 1| = |-1| = 1.$$

Im Bild 7 ist für jede nichtnegative Zahl n eine Figur mit $V = n$ abgebildet. Wir erinnern uns daran, daß eine Figur, die entwirrt werden soll, dieselbe Variante V haben muß, wie ein Kreis, nämlich $V = 1$.

Bild 7

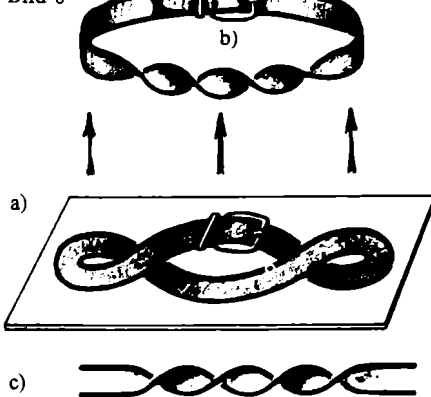


Die Invariante R

$V = 1$ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Figur entwirrt werden kann. Ist diese Bedingung aber auch *hinreichend*?

Ich glaubte zunächst, daß die letzte Frage positiv zu beantworten sei. Jedoch überzeugten mich erfolglose Versuche mit meinem Gürtel, der wie im Bild 8a auf dem Tisch lag, vom Gegenteil. Dabei machte ich aber eine wichtige Beobachtung: Der vom Tisch hochgehobene Gürtel war doppelt verdreht!

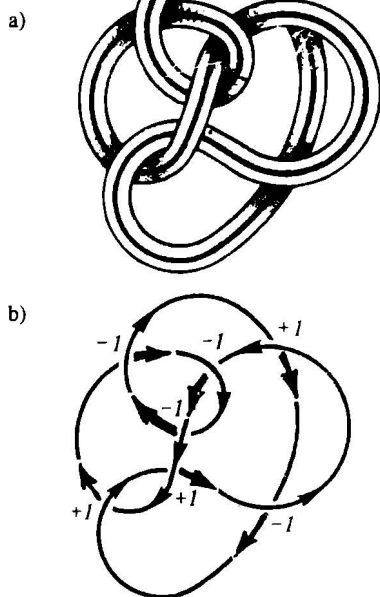
Bild 8



Wir ersetzen die Figur durch ein Band, das so in der Ebene liegt, daß die Figur mit seiner Mittellinie zusammenfällt (Bild 9a).

Wenn wir die Figur im Raum entwirren (indem wir sie in die Ausgangslage vor dem Werfen auf die Ebene zurückbringen), erhalten wir ein verdrehtes Band. Die Anzahl der Verdrehungen bezeichnen wir mit R . Das ist eine zweite Invariante, deren Nullsein notwendig ist für die Entwirrbarkeit der Figur in der Ebene. Die Anzahl der Verdrehungen wird dabei mit dem Vorzeichen „+“ versehen, wenn das Verdrehen wie im Bild 8b geschieht, und mit dem Vorzeichen „-“, wenn das Band so wie in 8c verdreht ist. (Denkt an den Unterschied zwischen Rechts- und Linksgewinde!) R ist tatsächlich eine Invariante, denn das Entwirren einer Figur läßt sich als Entwirren des zugehörigen Bandes in der Ebene auffassen, und die Anzahl der Verdrehungen des Bandes bleibt nicht nur bei seiner Entwirrung in der Ebene, sondern auch bei belie-

Bild 9



biger Deformation im Raum unverändert.

Für das *praktische* Bestimmen von R geben wir (ohne Beweis) ein einfaches Verfahren an: Wir wählen auf der Figur einen Durchlaufssinn. An jeden Doppelpunkt schreiben wir die Zahl $+1$, wenn in ihm der untere Richtungspfeil gegenüber dem oberen nach links zeigt, andernfalls schreiben wir -1 . Die Invariante R ist die Summe dieser Zahlen.

Zum Beispiel hat die Figur im Bild 9b 3 positive und 4 negative Doppelpunkte, deshalb ist $R = -1$. Diese Figur läßt sich in der Ebene nicht entwirren, denn für jeden Kreis ist $R = 0$.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Wir haben erkannt, daß $V = 1$ und $R = 0$ notwendige Bedingungen dafür sind, daß eine Figur entwirrt werden kann, so daß ein Kreis entsteht. Sind diese Bedingungen *zusammen* auch hinreichend? M. a. W., kann man aus $V = 1$ und $R = 0$ auf die Entwirrbarkeit der Figur, die auf eingangs beschriebene Art entstand, schließen?

Die Antwort gibt der folgende Satz, auf dessen recht interessanten, aber auch umfangreichen Beweis wir hier aus Platzgründen verzichten müssen.

Satz: Für die Entwirrbarkeit einer Figur, die durch Werfen eines im Raum deformierten Kreises auf eine Ebene entstand, in dieser Ebene ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Invarianten V und R die Werte $V = 1$ und $R = 0$ annehmen.

Dieser Satz löst das am Anfang des Artikels aufgeworfene Problem vollständig. Die in ihm formulierte notwendige und hinreichende Bedingung ist für eine gegebene Figur schnell zu überprüfen.

▲ 3 ▲ Wendet den Satz auf die Figuren a bis d im Bild 10 an!

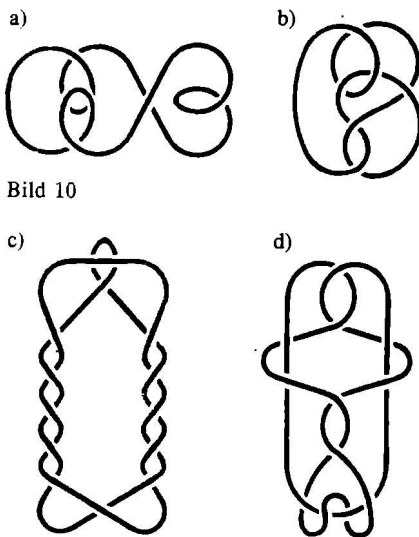


Bild 10

▲ 4 ▲ Zeichnet für jedes Paar ganzer Zahlen m, n ($m \geq 0$) mit ungerader Summe eine Figur mit $V = m$ und $R = n$! Weshalb gibt es keine Figur mit $V = 1$ und $R = 1$?

▲ 5 ▲ Beweist, daß eine beliebige Figur auf einer Kugel entweder in einen Kreis oder in eine „Acht“ überführt werden kann!

S. W. Matwejew als Autor /
C. P. Helmholtz, Leipzig, als Übersetzer
und Bearbeiter

Ein Blick ins Jahr 1953

Kurz nach der Gründung der DDR wurden zur Überprüfung des Leistungsstandes der Schüler in den Klassen 5, 6, 7, 8 und 9 sogenannte Kontrollarbeiten (vor den Winterferien) geschrieben. Wir geben für die Klassenstufen 5 den Inhalt eines Aufgabenzettels original wieder:

Klasse 5

1. Berechne $4895 \cdot 236$.
2. Berechne: $(254 - 38 + 4 \cdot 63) : 18$.
3. Im Jahre 1952 verbrauchte in der DDR jede Person im Durchschnitt 23 kg Zucker. Eine Kleinstadt hatte 19526 Einwohner. Wieviel kg Zucker wurden demnach in diesem Ort benötigt?
4. In einer Schule wurden von den Schülern folgende Beträge gespart: 1. Woche: 25,40 DM; 2. Woche: 35,80 DM; 3. Woche: 46,90 DM; 4. Woche: 48,70 DM. Wieviel DM wurden durchschnittlich in einer Woche gespart?
5. Zeichne einen Winkel von 48° . Verdopple diesen Winkel mit dem Zirkel!
6. Berechne $127806 : 537$; überprüfe das Ergebnis durch Probe!

O. Schulze

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Włodzimierz Kryszicki

Mathematisches Institut
der Technischen Universität Łódź

▲ 2463 ▲ Für welche Werte des Parameters m hat die Gleichung $x^2 - mx + 1 = 0$ eine Doppellösung? Wie lautet diese? Diese Aufgabe wurde dem MSB-Band 119 entnommen.

Keine Angst vor x und y

Unter diesem Titel erscheint im Teubner-Verlag, Leipzig, der 119. Band der „Mathematischen Schülerbücherei“. Der Autor Prof. Dr. W. Kryszicki besuchte 1981 den 1. Mathematikkongreß der DDR, und damals wurden die Einzelheiten zur Übersetzung seines Buches besprochen. Der Übersetzer Dr. H. Schwarz, Berlin, und der Bearbeiter Doz. Dr. R. Hofmann, Leipzig, stellten die deutsche Fassung rechtzeitig vor dem Internationalen Mathematikkongreß in Warschau fertig, so daß im August des vergangenen Jahres letzte Absprachen mit dem Autor getroffen werden konnten. Untenstehender Gruß an alle *alpha*-Leser stammt aus jenen Tagen.



Viele Grüße
an alle
alpha-Leser
W. Kryszicki

Kurzbiographie

Prof. Dr. Włodzimierz Kryszicki wurde 1905 in Warschau geboren. Von 1923 bis 1928 studierte er Mathematik an der Universität Warschau. Seit 1945 ist er als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Hochschullehrer am Mathematischen Institut der Technischen Universität Łódź tätig. Seine Arbeitsgebiete sind vor allem Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Neben Büchern in polnischer, russischer und englischer Sprache erschienen von ihm:

Höhere Mathematik in Aufgaben, Teil 1
Teubner-Verlag 1967

Zählen und Rechnen einst und jetzt
Teubner-Verlag 1968

Höhere Mathematik in Aufgaben, Teil 2
Teubner-Verlag 1971

Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen aus der Sicht der Darstellenden Geometrie

Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen haben mit den symbolischen Zeichen der Mathematik eine Gemeinsamkeit. In beiden Bereichen verwendet man eine sinnfällige Symbolik und Darstellungsweise für die zu fordernden Operationsschritte und Verhaltensnormen.

Im ersten Fall soll dadurch ein reaktions-schnelles Verhalten im Straßenverkehr sichergestellt werden, ohne den Verkehrsteilnehmer dabei mit einem schwer erlernbaren Wissen zu belasten. Im zweiten Fall bewirkt die Sinnfälligkeit der Symbolik ein Entgegenkommen beim Lernprozeß und eine Erleichterung des Abstraktionsprozesses im Umgang mit mathematischen Symbolen und Operationszeichen. Man denke hierbei etwa an die von Leibniz eingeführte Symbolik für das Differenzieren und Integrieren einer Funktion. Wir wollen nun einige Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen im Hinblick auf die *Darstellende Geometrie* unter die Lupe nehmen. Hierzu versetzen wir uns in die Rolle eines PKW-Fahrers, der sein Verhalten und seine Fahrweise auf diese Leiteinrichtungen einzustellen hat.

Der obere Teil des Verkehrszeichens (Bild 1) zeigt mir an, daß ich mich auf einer Hauptstraße befinde. Das untere Zusatzzeichen informiert mich darüber, wie die Hauptstraße über den vor mir liegenden Verkehrsknotenpunkt hinwegführt. Biege ich auf der Kreuzung nach links ab, so bleibe ich weiterhin auf der Hauptstraße mit den entsprechenden Rechten für die Vorfahrt. Wenn ich jedoch an der Kreuzung geradeaus fahre oder nach rechts abbiege, verlasse ich die Hauptstraße, sofern diese Verkehrssituation nicht durch ein weiteres Schild hinter der Kreuzung aufgehoben wird.

Das unter dem Hinweiszeichen für Hauptstraße in Bild 1 angebrachte Zusatzzeichen gibt mir also Auskunft darüber, in welcher Rechtslage ich mich nach Überqueren der Kreuzung in einer der drei möglichen Richtungen befinde. Im Unterbewußtsein klappt der Verkehrsteilnehmer das Zusatzzeichen um seine obere waagerechte Kante so um, daß das Bild nach oben zeigt. Damit erhält er den Grundriß der Kreuzung in richtiger Orientierung, aus welchem sich die Lagen von Haupt- und Nebenstraßen leicht entnehmen lassen. Diese Umsetzung des Straßengrundrisses in seine räumliche Bezogenheit mit den daraus ableitbaren

Vorfahrtsrechten muß sich beim Kraftfahrer im Bruchteil einer Sekunde vollziehen.

In Bild 2 signalisiert mir das obere Vorschriftszeichen (rot berandetes gleichseitiges Dreieck mit einer Ecke nach unten zeigend) „Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten“. Das untere Zusatzzeichen informiert mich darüber, daß ich – auf einer Nebenstraße kommend – an einer Kreuzung angelangt bin, die von einer Hauptstraße in einem Rechtwinkelzug durchsetzt wird. Wegen der Vorfahrt auf der Hauptstraße muß ich den von links kommenden und den entgegenkommenden Verkehr beachten. Da an dieser Kreuzung von rechts eine Nebenstraße einmündet, ist auch den von rechts kommenden Fahrzeugen die Vorfahrt einzuräumen. Das Zusatzzeichen vermittelt bei Anfahrt an eine Kreuzung den Überblick über die Vorfahrt bezüglich aller an der Kreuzung einmündenden Straßen. Man verzichtet auf das Zusatzzeichen, wenn die Straßenkreuzung von der Hauptstraße eindeutig geradlinig durchlaufen wird.

Unerläßlich notwendig sind Zusatzzeichen an Hinweiszeichen für Hauptstraßen in den Fällen, wo komplizierte Straßenknotenpunkte zu schwer überschaubaren Situationen bezüglich des Vorfahrtsrechtes führen können. In Bild 3 findet sich ein solches Zusatzzeichen, dessen Aussage der Kraftfahrer zur Sicherung eines zügigen Verkehrsablaufes in Bruchteilen einer Sekunde lesen und erfassen muß.

Auch auf Warnzeichen finden sich Grobdarstellungen des Grundrisses einer vor dem Fahrer liegenden Straßenführung; z. B. beiderseitige Fahrbahneinengung in Bild 4 und rechtsseitige Einengung der Fahrbahn in Bild 5. Unter den Vorschriftszeichen (weiß auf blauem Grund) zeichnen sich jene durch besondere Sinnfälligkeit aus, welche eine Vergrößerung (Bild 6) oder Verringerung (Bild 7) der Zahl der Fahrspuren symbolisieren. Häufig erfordert die Verringerung der Anzahl von Fahrspuren ein umsichtiges Verhalten und eine Reduzierung der Fahrgeschwindigkeit. Vor Einfahrt in nicht-durchführende Straßen will uns das Hinweiszeichen für »Sackgasse« bewahren (Bild 8). Hier ist die durch einen roten Querbalken versperrte Straße auf blauem Grund im Grundriß dargestellt.

Häufig ergibt sich im Großstadtverkehr die

Situation, daß ein Fahrer mit seinem Fahrzeug an einer Kreuzung links abbiegen möchte, was ihm jedoch durch ein Vorschriftszeichen entsprechend Bild 9 verwehrt wird. Ein solches Verbot für Abbiegen nach links findet sich vielfach an belebten Straßenkreuzungen, weil Linksabbieger den zügigen Verkehrsablauf stark behindern könnten.

An Kreuzungen dieser Art ist dann ein weiteres Vorschriftszeichen angebracht, dessen Aussage manchem Anfänger Schwierigkeiten bereitet. Auf diesem Vorschriftszeichen (Bild 10) ist der Grundriß der Kreuzung und des dazu benachbarten Straßennetzes wiedergegeben. Ferner ist die für „Linksabbieger“ vorgeschriebene Fahrtroute als ein schwarzer Linienzug eingetragen. Durch einen Pfeil erhält der Linienzug eine Orientierung. Mittels der durch dreimaliges Rechtsabbiegen auszuführenden Volte wird erreicht, daß der „Linksabbieger“ die Kreuzung zweimal in Geradeausfahrt überquert, um so an sein Ziel zu gelangen. Dieses Beispiel verdeutlicht besonders gut, welche Hilfe uns solide Grundkenntnisse in der *Darstellenden Geometrie* beim Lesen von Verkehrszeichen bieten können.

Auch Hinweiszeichen sind in der Weise angelegt, daß man durch Umklappen der Schilder um die obere waagerechte Kante mit dem Bild nach oben zu einem ähnlichen und ähnlich gelegenen Lageplan gelangt, der ein schnelles Auffinden des richtigen Weges sichert (Bild 11, 12, 13).

Der unbefangene Leser wird nun meinen, daß auch alle Orientierungstafeln für Reisende z. B. an Ausgängen von Bahnhöfen oder Bushaltepunkten in der gleichen Weise ausgerichtet sind. Gemäß dieser Erwartung hätte der Reisende die Orientierungstafel in Gedanken um eine waagerechte Bildkante so umzulegen, daß der Stadtplan nach oben zeigt, um eine einfache Ähnlichkeitsbeziehung zwischen dem Bild und der objektiven Realität herstellen zu können. Leider erfüllen die vor Bahnhöfen aufgestellten Orientierungstafeln diese Erwartungen nur in den seltensten Fällen. In der Regel sind sie so aufgestellt, daß im Bild der Nordpfeil nach oben weist. Vom Reisenden wäre daher zu fordern, daß er einen Kompaß bei sich führt, um sich nach diesen Orientierungstafeln in einer fremden Stadt zurechtzufinden. Da man Reisen in der Regel ohne Kompaß anzutreten pflegt, müßten solche Orientierungstafeln an Bahnhöfen etwas freundenfreundlicher angelegt werden.

Mit den bisher betrachteten Verkehrszeichen erschöpfen sich keineswegs die Vergleichsmöglichkeiten mit Abbildungsverfahren der Darstellenden Geometrie. Unter den Warnzeichen finden sich Wiedergaben von jenen Objekten durch Seitenrisse, mit denen wir bei grober Unaufmerksamkeit möglicherweise kollidieren können. Von den in ein gleichseitiges Dreieck mit roter Umrandung eingefärbten Seitenrissen einer elektrischen Straßenbahn (Bild 14) oder einer Dampflokomotive (Bild 15) geht zweifellos eine suggestive Wirkung aus, die

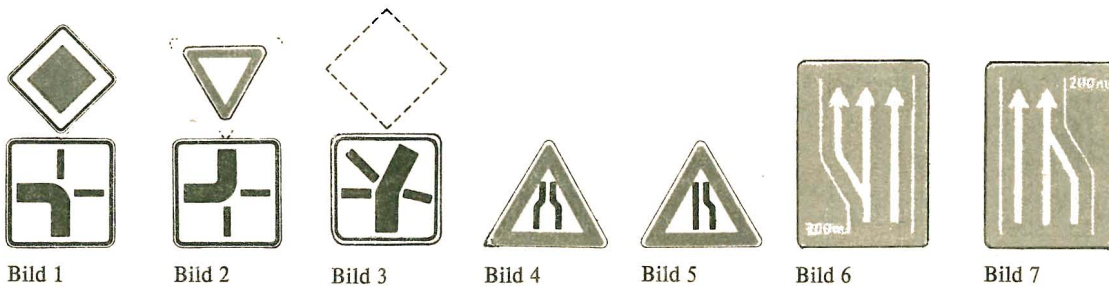


Bild 1

Bild 2

Bild 3

Bild 4

Bild 5

Bild 6

Bild 7

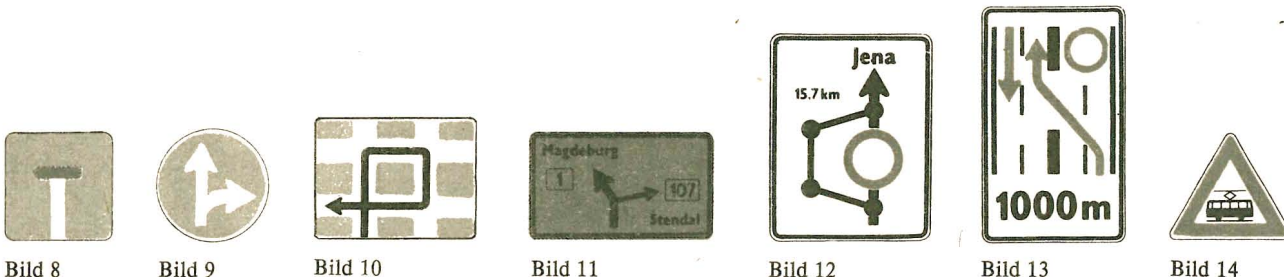


Bild 8

Bild 9

Bild 10

Bild 11

Bild 12

Bild 13

Bild 14

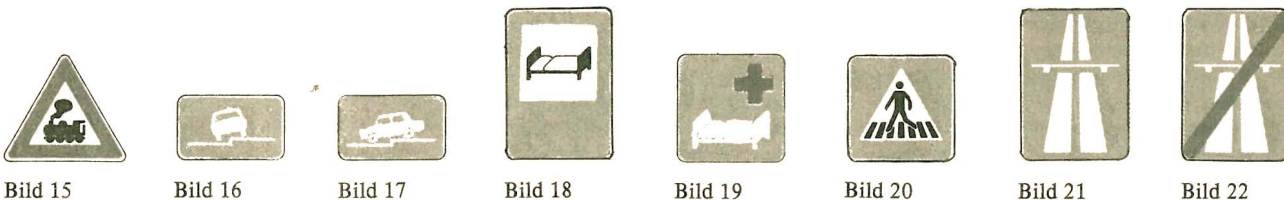


Bild 15

Bild 16

Bild 17

Bild 18

Bild 19

Bild 20

Bild 21

Bild 22

zu vorsichtiger Fahrweise animiert. Vorschriften für das Parken von PKW unter teilweiser Verwendung des Gehweges lassen sich als Aufriß- oder Seitenrißdarstellungen von PKW interpretieren (Bild 16 und 17). Die Bilder dieser Warn- und Verkehrszeichen sind unter dem Sammelbegriff „Normalprojektion“ einzuordnen.

Die Hinweiszeichen für Hotel, Motel und Krankenhaus (Bild 18 und 19) enthalten die bildliche Wiedergabe eines Bettes. Die Längsseite des Bettes liegt parallel zur Bildebene. Die Fuß- und Kopfseite des Bettes erscheinen als Schrägbild, wobei in der Tiefe keine Verkürzungen auftreten. Somit stellt die Abbildung des Bettes eine schiefe Parallelprojektion dar. Durch Parallelprojektion eines räumlichen Objektes auf eine Bildebene entsteht ein axonometrisches Bild. In dem hier betrachteten Fall liegen zwei ausgezeichnete Kanten des Bettes (Längskante und senkrechte Kante) parallel zur Bildebene. Damit liegt der Sonderfall einer frontalaxonometrischen Abbildung vor.

Schließlich bieten uns die Verkehrszeichen auch zentralperspektive Bilder von räumlichen Objekten. Mit Bild 20 wird dem Kraftfahrer ein Fußgängerüberweg signalisiert. Der Weg führt quer über die Fahrbahn. Die „Zebra-Streifen“ sind Tiefenlinien des zentralperspektiven Bildes. Sie

schneiden sich in dem Hauptpunkt der Abbildung, welcher oberhalb des Kopfes des Fußgängers liegt. Der Horizont des Bildes entspricht dann der Waagerechten durch den Hauptpunkt. Ein solcher Bildeindruck entsteht etwa für den Fahrer eines LKW beim Blick aus der Fahrerkabine. Auch Anfang und Ende einer Autobahn werden durch ein zentralperspektives Bild der Autobahn vermittelt (Bild 21 bzw. 22). Der rote Schrägstrich in Bild 22 ist im Sinne einer Negation zu verstehen. So wird auch das Ende einer Hauptstraße durch einen schwarzen Schrägstrich über das Hinweiszeichen für Hauptstraße symbolisiert. Mittels einer genaueren Betrachtung der Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen konnten wir uns davon überzeugen,

daß im Verkehrswesen Abbildungsverfahren der Darstellenden Geometrie sehr wirkungsvoll zum Einsatz gelangen. Ferner können wir aus obigen Darlegungen folgern, daß ein gut entwickeltes räumliches Seh- und Vorstellungsvermögen zur Erhöhung der Sicherheit für uns als aktive Verkehrsteilnehmer und auch für unsere Mitmenschen beiträgt.

E. Schröder



Zum 1200. Geburtstag Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi



Auf Empfehlung der UNESCO wurde 1983 in vielen Ländern der Welt der 1200. Geburtstag des führenden Universalgelehrten Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi begangen.

Die Festveranstaltung der sowjetischen wissenschaftlichen Öffentlichkeit fand aus diesem Anlaß in Moskau, im Säulensaal des Hauses der Gewerkschaften statt. Dieser Saal ist einer der Festsäle, in denen offizielle Feiern und Empfänge stattfinden. Die Jubiläumsveranstaltung wurde vom Vizepräsidenten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Akademiemitglied P. N. Fedoseev, eröffnet. Anschließend setzten die Teilnehmer der Konferenz ihre Arbeit in Taschkent sowie Urgentsch, der heutigen Hauptstadt des Gebietes Choresm in der Usbekischen Sozialistischen Sowjetrepublik, fort. Die Konferenz vereinte Wissenschaftshistoriker und Vertreter anderer wissenschaftlicher Disziplinen aus der DDR, der CSSR, Ungarn, Österreich, der BRD, Belgien, den Niederlanden und den USA sowie sowjetische Wissenschaftler aus Moskau, Leningrad, Kiew, Taschkent, Duschanbe, Baku und anderen wissenschaftlichen Zentren.

Es sind nur wenige biographische Angaben über al-Hwarizmi erhalten. Gewöhnlicher-

weise nimmt man an, daß er 783 geboren worden ist und um 850 verstarb. Sein Geburtsort liegt in Choresm, einem großen Gebiet Mittelasien, durch das der Amudarja fließt, der im Aralsee mündet. Heute gehört es zur Usbekischen Republik (der nordwestliche Teil) und zur Turkmenischen Sowjetrepublik (der nördliche Teil). Auf dem Territorium Choresmiens sind Überreste eines gewaltigen, alten Bewässerungssystems gefunden worden und Ruinen zahlreicher Festungen, Paläste und anderer Bauten. Ihre Ausmaße und ihre Bauweise nötigen uns auch noch heute Bewunderung ab.

Seine Ausbildung erhielt al-Hwarizmi bei sich in der Heimat. Bald erreichte sein wissenschaftlicher Ruf ein solches Niveau, daß er bereits im Alter von etwa 30 Jahren nach Merw (heute in der Turkmenischen Republik), dem Zentrum der arabischen Gouverneure für ganz Mittelasien, berufen wurde. Nach wenigen Jahren lud man ihn nach Bagdad ein, der Hauptstadt des Abbasidenkalifats. Dort wurde er das Haupt des „Hauses der Weisheit“, dem grundlegenden wissenschaftlichen Zentrum der Länder des Islam, an dem es ein astronomisches Observatorium und eine reiche Handschriftenbibliothek gab.

Viele seiner Werke zur Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Astronomie, Geodäsie, Geographie und Geschichte wurden uns überliefert. Erhalten sind auch seine Schriften über die Konstruktion astronomischer Beobachtungsgänge: Astrolabien, Quadranten und Sonnenuhren. Er war in der Tat ein vielseitiger Gelehrter, ein Enzyklopädist.

Besonders wertvoll ist al-Hwarizmi Beitrag zur Entwicklung der Mathematik. Überaus interessant ist sein arithmetisches Traktat „Buch über die indische Rechnung“, in dem er das damals in Indien übliche Rechensystem beschreibt – das dezimale Positionssystem, das jetzt in der ganzen Welt benutzt wird. Das Verdienst al-Hwarizmi besteht darin, daß er als erster dieses Zahlensystem in arabischer Sprache beschrieb, es sehr ausführlich darlegte und anhand zahlreicher Beispiele erläuterte. Wegen der großen wissenschaftlichen und didaktischen Leistungen wurde gerade dieser Text in der Mitte des 12. Jh. ins Lateinische übersetzt, wodurch es einem weiten Kreis von Gelehrten im christlichen Mittel- und Westeuropa bekannt wurde.

Die lateinische Übersetzung beginnt mit den Worten „Dixit Algorizmi“, was bedeutet: „Al-Hwarizmi sagte“. Mitunter schrieb man den Namen des Gelehrten auf lateinisch auch Algorismus oder Algorismus.

Dieses arithmetische Lehrbuch erlangte im katholischen Europa bald Popularität und der Name seines Verfassers wurde auf andere Dinge übertragen. Die mittelalterlichen Mathematiker begannen, das ganze „indische“ System der Zahlenschreibung „Algorismus“ oder „Algorithmus“ zu nennen, d. h., das dezimale Positionssystem. Der Begriff „Algorithmus“ ging in den ewigen Bestand der Mathematik ein und wurde zu einem der wichtigsten Termini der modernen Mathematik.

Al-Hwarizmi benutzte als erster in der arabischsprachigen Literatur einen festen Begriff für den Sinus eines Winkels. In seinen Arbeiten sind Sinus-, Tangens- und Kotangensstabellen enthalten. Er gibt Klassifikationen von Kurven an und beschäftigt sich mit dem Unendlichen.

Selbst das Wort „Algebra“ entstand aus der Bezeichnung seines Werkes zur Lösung von Gleichungen.

Das arabische Äquivalent ist „al-dschabr“. Es bezeichnete die Operation, mit der die Glieder einer Gleichung so umgruppiert wurden, daß zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur noch Glieder mit gleichem, i. a. positivem, Vorzeichen übrigblieben.

Jeder Schüler heute weiß, wie eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen ist. Hierbei sind a , b , c gegebene Zahlen. Eine beliebige davon kann positiv, negativ oder sogar gleich Null sein.

Aber in der Zeit al-Hwarizmi benutzte man negative Zahlen nicht („Zahlen, die kleiner als nichts sind“).¹⁾

In den „Mathematischen Schriften“ al-

Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi, gezeichnet von dem arab. Arzt Malik Nabiew (1982)



Hwarizmi, die 1983 in Taschkent in russischer Sprache herausgegeben worden sind, werden solche Gleichungen wie $x^2 + 5x = 6$ und $x^2 + 6 = 5x$ einzeln betrachtet. Für jede von ihnen gibt al-Hwarizmi eine „eigene“ Lösungsmethode an. Dabei wird die negative Wurzel einer Gleichung überhaupt nicht beachtet. Für die erste der beiden Gleichungen führt al-Hwarizmi nur die Wurzel $x = 1$ an (die Lösung $x = -6$ galt in dieser Zeit als „unmöglich“²). Zwei Lösungen konnte es bei jenen Fällen geben, in denen sie beide positiv waren. Das ist ein Beispiel aus der Abhandlung al-Hwarizmi, das sich in der Folgezeit in vielen arabischen und lateinischen Texten findet.

„Ein Quadrat und die Zahl einundzwanzig sind gleich zehn Wurzeln“, sagt al-Hwarizmi.

In moderner Form bedeutet das:

$$x^2 + 21 = 10x.$$

„Teile die Zahl der Wurzeln, es ergibt fünf“, weist der Autor an. „Multipliziere diese Zahl mit sich selbst, das ergibt fünf- undzwanzig. Subtrahiere davon einundzwanzig, es bleiben vier. Ziehe daraus die Wurzel. Das sind zwei. Ziehe diese von der Hälfte der Zahl der Wurzeln ab, d. h. von fünf, dann bleiben drei. Das ist eine Wurzel des Quadrats, die gesucht wurde. Ihr Quadrat ist neun. Man kann die Wurzel auch zur Hälfte der Zahl der Wurzeln addieren und man erhält sieben. Das ist ebenfalls eine Wurzel des Quadrats, die gesucht wurde. Ihr Quadrat ist neunundvierzig.“

In moderner Bezeichnungsweise läßt sich das alles bedeutend kürzer aufschreiben:

$$x^2 - 10x + 21 = 0;$$

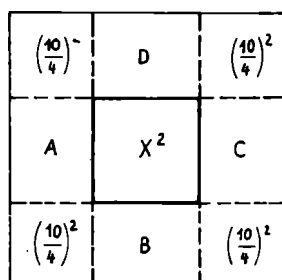
$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2;$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 7.$$

Al-Hwarizmi führt „in geometrischer Sprache“ auch den Beweis für die Richtigkeit der Lösung.

Sei beispielsweise die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ zu lösen, sagt al-Hwarizmi (seine Erklärungen werden jetzt in moderner Form angeführt).

Wir stellen ein Quadrat mit der Seite x dar, d. h. mit der Fläche x^2 . An die Verlängerung seiner Seiten setzen wir Quadrate mit Seiten, die gleich der Hälfte der Hälfte „der Zahl der Wurzel“ sind, d. h. mit Seiten $\frac{10}{4}$ (siehe Bild 1). Wir erhalten auch vier Rechtecke mit Seiten x und $\frac{10}{4}$, d. h.



Rechtecke A, B, C, D in Zeichnung 1. Im Ergebnis dessen erhalten wir ein neues großes Quadrat, dessen Fläche gleich der Summe der Fläche aller Figuren ist:

$$x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

Aber weil laut Voraussetzung $x^2 + 10x = 39$ ist, so finden wir, nachdem wir die ersten beiden Summanden gleich 39 gesetzt haben, daß die Fläche des neuen großen Quadrates gleich $39 + 25 = 64$ und die Seite gleich 8 sind. Entsprechend der Konstruktion ist letztere auch gleich $x + 2 \cdot \frac{10}{4}$, d. h. $x + 2 \cdot \frac{10}{4} = 8$.

Daraus folgt $x = 3$.

Al-Hwarizmi drückt die Lösungsvorschrift für alle sechs Formen quadratischer Gleichungen (jetzt würden wir sagen, daß sich diese „Formen“ durch die Vorzeichen der Koeffizienten a , b und c unterscheiden) wörtlich und anschaulich aus, d. h., er zeigt dem Leser geometrisch ihre Richtigkeit.

Viele Aufgaben aus dem Buch von al-Hwarizmi gehören zur Vermögensteilung, z. B. laut Testamenten. Die folgende ist eine solche Aufgabe.

„Du teilst einen Dirham³) zwischen irgendwelchen Leuten, jeder von ihnen erhält einen gewissen Teil. Dann wird ihnen (ein) Mann hinzugefügt und du sollst erneut einen Dirham zwischen ihnen teilen, wobei jeder ein Sechstel Dirham weniger als beim ersten Mal erhält.“

Wenn man die ursprüngliche Zahl der Leute, nach der in der Aufgabe gefragt wird, mit x bezeichnet, so läßt sich die Aussage der Aufgabe in folgender Form aufschreiben:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}.$$

Als Lösung der Aufgabe erhält al-Hwarizmi, daß der erste Dirham zwischen zwei Leuten und der zweite zwischen drei Leuten geteilt worden ist.

Die Wissenschaftler des arabisch-islamischen Mittelalters leisteten einen bemerkenswerten Beitrag zur Entwicklung wissenschaftlicher Vorstellungen über die uns umgebende Welt, darunter auch über Gesetze der Mathematik. Die Bekanntschaft mit den mathematischen Arbeiten al-Hwarizmi, einem der führenden arabischen Universalgelehrten, hilft die Geschichte der Entwicklung unserer mathematischen Kenntnisse besser zu verstehen.

A. Halameisär/A. I. Volodarskij
Übersetzt und bearbeitet:

Dr. Sonja Brentjes, Leipzig

¹) Das betrifft nicht die Mathematik in Indien und China in dieser Zeit.

²) Negative Lösungen von Gleichungen wurden in der chinesischen Algebra nicht grundsätzlich ausgeschlossen.

³) Dirham ist eine alte arabische Geldeinheit.

Die Briefmarke (siehe Überschrift) wurde anlässlich der Feier des 1200. Geburtstages von Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi in der UdSSR herausgegeben.



▲ 1 ▲ Prove that $n^2 + n + 1$ is a multiple of 19 for infinitely many values of n .

▲ 2 ▲ Un camion transporte 60 cartons contenant des bouteilles d'huile. La masse du chargement est de 1320 kg. Sachant que chaque bouteille d'huile a une masse de 1,4 kg (verre compris) et que la masse de chaque carton vide est de 1 kg, calcule:

- le nombre de bouteilles d'huile transportées,
- le nombre de bouteilles par carton

▲ 3 ▲ Все десять цифр от 0 до 9 разместите в кружочках с таким расчетом, чтобы два примера на умножение были верными.

$$\begin{array}{r} \bigcirc \quad \bigcirc \\ \times \quad \bigcirc \\ \hline \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \quad \begin{array}{r} \bigcirc \quad \bigcirc \\ \times \quad \bigcirc \\ \hline \bigcirc \quad \bigcirc \end{array}$$

Eine harte Nuß

$P_0, \dots, P_{n-1}$ sei ein regelmäßiges n -Eck, $n \geq 3$, mit dem Mittelpunkt M , das in der Ebene ε liegt. $X \in \varepsilon$ sei beliebig gewählt; $X_0, \dots, X_{n-1}$ bezeichne die Projektion von X auf $g(MP_0), \dots, g(MP_{n-1})$. Zeige, daß

$$\sum_{i=0}^{n-1} MX_i = \frac{n}{2} \cdot \overline{MX}!$$

Dr. H. Englisch, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig, ehem. erfolgreicher IMO-Teilnehmer

Wo steckt der Fehler?

Die Gleichung:

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

löst jemand folgendermaßen:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

hieraus:

$$\frac{-(4x-40)}{-(7-x)} = \frac{4x-40}{13-x}$$

also: $13-x = 7-x$ und deshalb: $13 = 7$.

Was wurde falsch gemacht?

aus: Lietzmann, Wo steckt der Fehler?
BSB BG Teubner, mitgeteilt und mit
Lösung versehen von
Ing. A. Körner, Leipzig

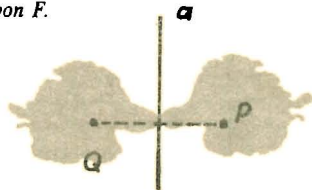


Axialsymmetrie

Hier und in einigen folgenden Beiträgen wollen wir uns mit Symmetrie beschäftigen.

Wir versehen ein Blatt Papier mit Tinten- oder Farbflecken und falten es anschließend (Bild 1). Dabei können recht lustige Figuren entstehen. Für sie ist offensichtlich folgende Eigenschaft charakteristisch: Zu jedem Punkt P der Figur F , der nicht auf der Faltlinie a liegt, gibt es einen Punkt Q von F so, daß a die Mittelsenkrechte von PQ ist. Liegt eine solche Eigenschaft vor, so nennt man die Figur F *symmetrisch bezüglich der Geraden a* und a eine *Symmetrieachse* von F .

Bild 1



Vergleichen wir diese Eigenschaft mit der Erklärung der *Spiegelung an einer Geraden* a , wie sie in der 5. Klasse gegeben wird (vgl. Lehrbuch Kl. 5 (1983), S. 152), so erkennen wir leicht, daß sie gleichwertig zu folgender Eigenschaft ist: Die Figur F geht bei der Spiegelung an der Geraden a in sich über.

Für die Spiegelung an der Geraden a werden wir im folgenden kurz σ_a schreiben; und R soll das Bild von R bei der Spiegelung an a bezeichnen. Übrigens erscheint die russische Bezeichnung „симметрия относительно прямой a “ für „Spiegelung an der Geraden a “ aus unserer obigen Sicht recht treffend.

Bild 2



Axialsymmetrische Figuren begegnen uns ständig, in der Natur, im technischen Bereich und in der Kunst. Das Abbild des Schmetterlings „Schwalbenschwanz“ (Bild 2) besitzt genau eine Symmetrieachse. Die meisten Tiere zeigen eine derartige symmetrische Körperform; und dies ist uns so selbstverständlich, daß uns Abwei-

chungen davon – wie bei der Flunder – besonders auffällig erscheinen. Da sich diese symmetrischen Formen als Ergebnis einer langen Entwicklung herausgebildet haben, sind sie offenbar optimal unter den gegebenen Umweltbedingungen.

Zweckmäßigkeit (und insbesondere Stabilität) ist der Grund für Symmetrie in sehr vielen technischen Konstruktionen. (Siehe z. B. Draufsicht eines Flugzeuges; Bild 3.) Die Axialsymmetrie hat für uns auch einen ästhetischen Reiz; in vielen Kunstwerken können wir sie herausfinden. Das Bild 4 zeigt ein Bürgerhaus (von 1536) in Görlitz; und Bild 5 ist das Stadtwappen von Cottbus. Die Vignette zeigt den „Vitruv-Mann“ von Leonardo da Vinci. – Eine Figur F kann mehrere Symmetrieachsen besitzen.



Bild 3



Bild 5

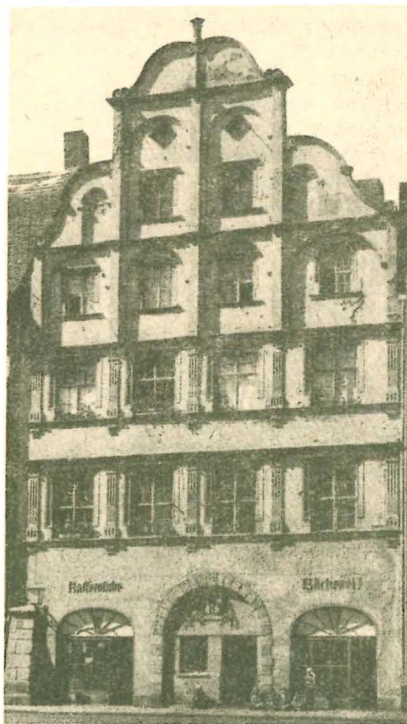
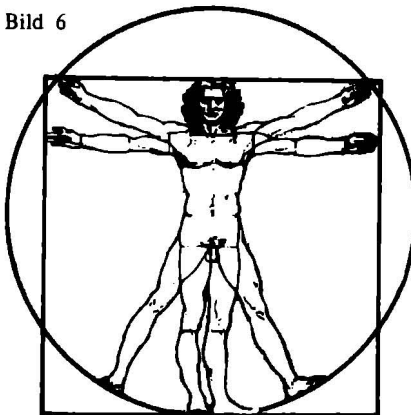


Bild 4

Bild 6

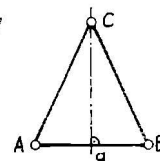


Aufgaben

▲ 1 ▲ Man bestimme alle Symmetrieachsen eines gleichseitigen Dreiecks ABC !

Lösung: Im gleichseitigen Dreieck A geht die Mittelsenkrechte jeder Seite durch die jeweils gegenüberliegende Ecke und ist damit Symmetrieachse (Bild 7). – Ist umgekehrt a eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC , dann können nicht gleichzeitig alle drei Eckpunkte auf a liegen; wir können annehmen, daß die Ecke A nicht auf der Achse a liegt. Dann muß das Bild A' die Ecke B oder C sein, etwa B . Nun muß C auf a liegen, sonst ergäbe C' eine zusätzliche vierte Ecke. Also ist die Gerade a eine Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite.

Bild 7



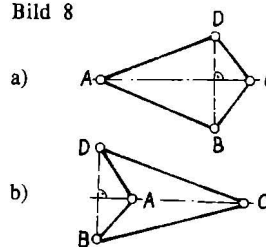
Damit gibt es im gleichseitigen Dreieck genau drei Symmetrieachsen.

▲ 2 ▲ Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges n -Eck ($n > 3$)?

Von Interesse ist das Symmetrieverhalten von speziellen Vierecken. Bekannt ist das Drachenviereck. Es ist dadurch definiert, daß es zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten besitzt. (Vgl. *Kleine Enzyklopädie Mathematik*.)

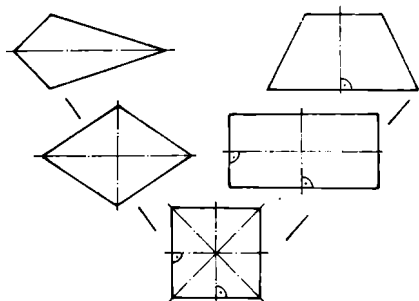
▲ 3 ▲ Man zeige: Ein Viereck ist ein Drache genau dann, wenn (wenigstens) eine seiner Diagonalen Symmetrieachse ist!

Bild 8



Lösung: Ist $ABCD$ ein Viereck, das bezüglich der Diagonalen AC symmetrisch ist, dann sind BDA und BDC gleichschenklige Dreiecke und damit $ABCD$ ein Drache (Bild 8a) und b)). – Umgekehrt folgt aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke BDA und BDC , daß die Mittelsenkrechte von BD Symmetrieachse der beiden Dreiecke ist und damit durch A und C geht. Damit ist die Diagonale AC Symmetrieachse des Vierecks.

▲ 4 ▲ Man gebe mit Axialsymmetrie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Viereck $ABCD$ ein Rhombus bzw. ein Giebel (oder gleichschenkliges Trapez) bzw. ein Rechteck bzw. ein Quadrat ist! Die folgende Übersicht veranschaulicht die Ergebnisse der Aufgabe ▲ 4 ▲:

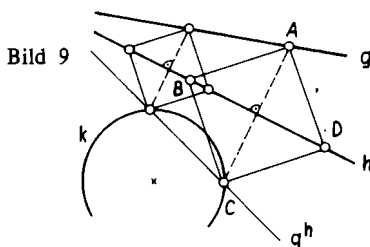


▲ 5 ▲ Warum gibt es keine weiteren axial-symmetrischen Vierecke als die hier genannten?

Für die Lösung einer Konstruktionsaufgabe kann es von Vorteil sein, wenn man erkennt, daß die gewünschte Figur Axial-symmetrie besitzt. Dafür ein Beispiel.

▲ 6 ▲ Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie ein Kreis k . Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ derart, daß $A \in g$ und $B, D \in h$ sowie $C \in k$ gilt.

Lösung: Es sei $ABCD$ eine Lösung. Dann ist die vorgegebene Gerade h Symmetrieachse von $ABCD$. Also ist C sowohl Punkt des Kreises k als auch des Bildes g^h der Geraden g .



Die Aufgabe besitzt genau zwei, eine bzw. keine Lösung, wenn die Gerade g^h den Kreis schneidet, berührt bzw. meidet und wenn außerdem der Schnittpunkt von g und g^h (falls er existiert) nicht auf dem Kreis k liegt (Bild 9). – Für den Fall, daß sich g und h auf k schneiden, ist nun die Lösung auch klar.

▲ 7 ▲ Man erfinde selbst solche Konstruktionsaufgaben wie die Aufgabe ▲ 6 ▲!

Die Ergebnisse in den Aufgaben 1 und 2 lehren uns, daß wir aus der Existenz von zwei und mehr Symmetrieachsen einer Figur nicht auf die Existenz unendlich vieler Symmetrieachsen dieser Figur schließen dürfen. Man kann jedoch zeigen:

▲ 8 ▲ Besitzt eine Figur zwei zueinander parallele Symmetrieachsen, dann hat sie unendlich viele.

Zunächst wollen wir nach Beispielen für derartige Figuren suchen. Einfache Beispiele sind ein Streifen (Bild 10) oder der Graph der Sinus-Funktion (Bild 11). Suche weitere!

Sind a_1 und a_2 zwei zueinander parallele Symmetrieachsen einer Figur F , dann wird

Bild 10

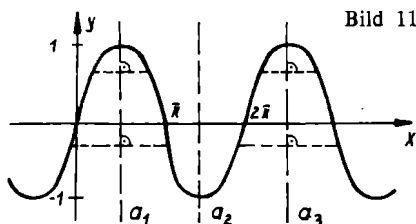
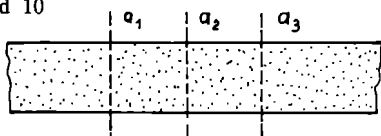


Bild 11

F sowohl bei der Spiegelung an a_1 als auch bei der Spiegelung an a_2 auf sich abgebildet. Ferner geht die zu a_1 symmetrische Figur F bei der Spiegelung an a_2 in eine Figur F^{a_2} über, die zu dem Bild a_3 von a_1 bei σ_{a_2} symmetrisch sein muß. Wegen $F^{a_2} = F$ ist also die Figur F auch zu der Geraden a_3 symmetrisch, siehe Bild 10 und 11. (Übrigens gilt dieser Schluß offenbar auch, wenn wir anstelle der Geradenspiegelung σ_{a_i} irgendeine Bewegung genommen hätten, die F auf sich abbildet.)

Nach der geschilderten Weise kann nun mit a_2 und a_3 eine Achse a_4 gefunden werden usw.

Der Nachweis, daß jede auf diese Weise gefundene Symmetrieachse tatsächlich zu den bisherigen verschieden ist, macht einige Mühe und ist günstig mit der Methode der vollständigen Induktion zu führen.

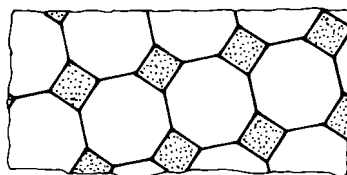
Eine Lösung eines Problems kann mitunter auch durch Herstellen einer symmetrischen Figur gefunden werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Wir wollen als bekannt voraussetzen, daß der Kreis diejenige Figur ist, die bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt hat. Nach der Sage durfte *Dido* sich ein Stück Land an der Küste Afrikas kaufen, das nicht größer sein durfte als das, was man mit einer Ochsenhaut umspannen kann. *Dido* zerschnitt die Ochsenhaut in schmale Streifen, aus denen sie eine Schnur machte, um damit möglichst viel Land abzugrenzen. Wie mußte sie die Abgrenzung des Landes vornehmen, wenn wir annehmen, daß die Begrenzung K durch das Meer geradlinig war? Spiegeln wir die abgegrenzte Figur an K , so mußte sich im günstigsten Fall (siehe unsere Voraussetzung!) ein Kreis ergeben. Also mußte *Dido* (um Karthago zu gründen) einen Halbkreis abgrenzen!

Zum Schluß empfehlen wir noch folgende Aufgabe:

▲ 9 ▲ Man beschreibe alle Symmetrieachsen der in Bild 12 gegebenen Parkettierung, die aus regelmäßigen 4- und 8-Ecken gleicher Seitenlänge besteht!

Bild 12



Das nächste Mal beschäftigen wir uns mit der Zentralsymmetrie.

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

Weizenkörner auf einem Schachbrett

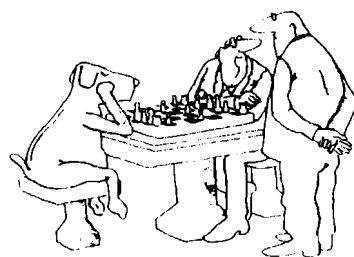
Das Schachspiel ist wahrscheinlich in Indien erfunden worden. Über die Perser lernten auch die Völker der arabischen Kalifate das Spiel kennen. Der Historiker *al-Ja'qubi*, der dort im 9. Jahrhundert lebte, berichtete über die Erfindung des Schachspiels. Nach seinem Bericht erbat sich der Erfinder des Schachspiels von der Tochter des Königs *Balhait* als Geschenk die Menge aller Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn, auf das zweite zwei, auf das dritte vier und so auf jedes folgende die doppelte Anzahl der Körner legt, die das vorhergehende Feld enthält.

In der von *al-Ja'qubi* überlieferten Anekdote heißt es weiter:

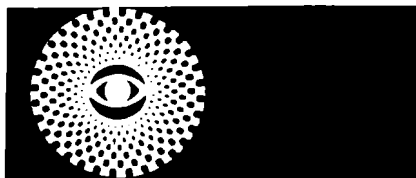
„Da sagt sie: Und wieviel ist der Betrag hiervon? Hierauf befahl sie, daß der Weizen herbeigebracht werde. Und es genügt nichts dafür, bis die Getreidevorräte des Landes erschöpft waren; dann wurde das Getreide in Geld umgewertet, bis der Schatz erschöpft war. Da dies nun viel war, sagte er: Ich brauche das nicht, mir genügt eine geringe Menge von irdischem Gut. Dann fragte sie ihn nach der Zahl der Körner, die er verlangt hatte.“ Wie groß war die Zahl?

Es sei erwähnt, daß diese Aufgabe später auch bei anderen Gelehrten der arabischen Kalifate gestellt wurde. Im Jahre 1202 formulierte *Leonardo Fibonacci* in seinem *Libro abaci* (vgl. *alpha*, Heft 6/1982, S. 134) die Aufgabe, ohne die Anekdote zu nennen. Der Mathematiklehrer am Jesuitenkolleg in Rom, *Christoph Clavius* (1573 bis 1612), berechnete nicht nur die Anzahl der Getreidekörner, sondern auch noch die Anzahl von Schiffen, die benötigt würden, um das Getreide bzw. das Geld zu transportieren, ferner auch den Anteil der Erdkugel, den das Getreide ausfüllen würde.

H. Pieper



„Nein, nein, nicht was Sie denken! Der tut natürlich bloß so...“



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 4 und Schluß

Warum es möglich ist, mit zwei Zeichen das Märchen vom Schneewittchen aufzuschreiben

Schon lange vor Beginn des Mathematikzirkels redeten wir uns die Köpfe heiß; jeder von uns hatte an den Aufgaben, die uns Fräulein Steinmann gestellt hatte, herumgeknobelt, doch nicht alle hatten Lösungen gefunden. So merkten wir zunächst gar nicht, daß unsere Zirkelleiterin in der Tür stand und sich offensichtlich über unseren Eifer freute. Doch dann bat sie uns, noch etwas Geduld zu haben, und lenkte unsere Gedanken auf ein neues Problem, indem sie uns fragte, was wir über das Morse wüßten.

„Man kann sich damit verständigen“, meinte Corinna.

„Man drückt auf Tasten eines Morseapparates“, ergänzte Holger, der sich mehr für die technische Seite des Problems interessierte. „Man kann ein kurzes oder ein langes Zeichen geben“, wußte Utta zu berichten.

Hier griff Fräulein Steinmann ein: „Man hat also zwei Zeichen, nämlich $\cdot$, das ‚kurze‘ Zeichen, und $-$, das ‚lange‘ Zeichen. Aber wie verständigt man sich nun damit?“

Jens konnte uns helfen: „Jedem Buchstaben entspricht eine Folge von Morsezeichen, z. B. wird s durch $\cdot \cdot \cdot$ und o durch $- - -$ ausgedrückt. Mit den Buchstaben kann man dann Wörter bilden.“

„Ob denn zwei Zeichen für alle 26 Buchstaben des Alphabets ausreichen?“ Fräulein Steinmann wollte es genau wissen. Wir erkannten: Wenn jeder Buchstabe ein individuelles Zeichen bekommen soll, braucht man natürlich für 26 Buchstaben genau 26 Zeichen, wie es in unserem Alphabet der Fall ist. Läßt man hingegen die *mehrfache* Verwendung von Grundzeichen zu, kommt man sicher mit weniger als 26 Grundzeichen aus. Im Prinzip genügte sogar ein Zeichen, z. B. „+“: + bedeutet A, ++ bedeutet B, +++ bedeutet C usw., 26 aufeinanderfolgende „+“ schließlich bedeuten den Buchstaben Z. Den Vorteil der Verwendung nur eines Zeichens erkaufte

man sich allerdings mit sehr großen Wortlängen (außerdem muß man besonders genau auf die Abstände der Zeichen achten: ++ + bedeutet AB, ++ + bedeutet BA).

Suchen wir einen „Mittelweg“! Wie lang wird die zur Charakterisierung jedes der 26 Buchstaben notwendige Zeichenfolge höchstens sein, wenn zwei Grundzeichen, etwa $\cdot$ und $-$ wie beim Morse, zur Verfügung stehen? Aus diesen Grundzeichen kann ich bauen:

2 Zeichenfolgen der „Länge“ 1: $\cdot$ $-$

4 Zeichenfolgen der „Länge“ 2:

$\cdot \cdot$ $\cdot -$ $- \cdot$ $- -$

8 Zeichenfolgen der „Länge“ 3:

$\cdot \cdot \cdot$ $\cdot \cdot -$ $\cdot - \cdot$ $\cdot - -$ $- \cdot \cdot$ $- \cdot -$ $- \cdot \cdot$ $- - \cdot$

16 Zeichenfolgen der „Länge“ 4:

$\cdot \cdot \cdot \cdot$ $\cdot \cdot \cdot -$ $\cdot \cdot - \cdot$ $\cdot \cdot - -$ $\cdot - \cdot \cdot$ $\cdot - \cdot -$ $\cdot - \cdot \cdot$ $\cdot - - \cdot$

$- \cdot \cdot \cdot$ $- \cdot \cdot -$ $- \cdot - \cdot$ $- \cdot - -$ $- - \cdot \cdot$ $- - \cdot -$ $- - \cdot \cdot$ $- - - \cdot$

Daraus folgt: Mit Zeichenfolgen aus zwei Grundzeichen von höchstens der Länge 3 kann das 26-buchstabige Alphabet noch nicht ausgedrückt werden, denn $2 + 4 + 8 = 14 < 26$; hingegen kommen wir mit höchstens vierelementigen Zeichenfolgen aus: $2 + 4 + 8 + 16 = 30 > 26$. Beim Morsealphabet muß man also damit rechnen, daß es auch Buchstaben gibt, die mit einer vierelementigen Folge der Grundzeichen $\cdot$ oder $-$ ausgedrückt werden.

Nun sollen wir weiter überlegen: „Reichen bei drei Grundzeichen, etwa $\cdot$ und $-$ und $+$, bereits alle höchstens dreielementigen Zeichenfolgen für das Alphabet aus? Wie viele Grundzeichen würde man wohl mindestens brauchen, um bereits mit zweielementigen Zeichenfolgen auszukommen?“

Wir gingen sogleich ans Probieren, aber unser Fräulein Steinmann, die ja bekanntlich sehr für systematisches Herangehen ist, unterbrach unsere „Zeichenversuche“ mit der Frage: „Können wir nicht gleich ausrechnen, wie viele verschiedene k -elementige Zeichenfolgen man aus n Grundzeichen bauen kann? Denkt an unser „Abzählverfahren“ zur Ermittlung aller Permutationen von n Elementen!“

Kerstin, die einen scharfen Blick hat, „sah“ den Weg als erste:

„An erster Stelle der Zeichenfolge kann jedes der n Grundzeichen stehen, an zweiter Stelle ebenfalls jedes der n Grundzeichen usw., an letzter (k -ter) Stelle wieder jedes der n Grundzeichen. Das liefert n^k verschiedene Möglichkeiten.“ Solches gefiel natürlich unserem Fräulein Steinmann, und sie ergänzte: „Man nennt jede solche k -elementige Zeichenfolge aus n Grundzeichen eine *Variation der k -ten Klasse mit Wiederholung aus n Elementen* und schreibt für ihre Anzahl V_n^k . Es ist also $V_n^k = n^k$.“

Nun konnten wir die oben gestellten Fragen ohne Mühe beantworten: Hat man drei Grundzeichen, so kann man mit ihnen 3^1 einelementige, 3^2 zweielementige und 3^3 dreielementige Zeichenfolgen bilden, insgesamt also $3 + 9 + 27 = 39$ verschiedene Zeichenfolgen höchstens der Länge 3. Diese reichen in der Tat für das Alphabet aus. Die andere Frage läßt man sich nun in

der Form $n^1 + n^2 \geq 26$ formulieren, und die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist $n = 5$.

„Mit $\cdot$ und $-$ kann man also auch alle möglichen Wörter basteln“, meinte Gunter, und Corinna fügte hinzu: „Mit diesen beiden Zeichen kann man sogar das Märchen vom Schneewittchen aufschreiben.“

Wir lachten und gaben ihr recht; Fräulein Steinmann begann jedoch, ein ganz anderes Märchen zu erzählen: „Es war einmal ein junger Bursche namens Hans, der wollte sein ganzes Leben lang umsonst mit der Straßenbahn fahren. Also sammelte er aus den Papierkörben an den Haltestellen ‚abgefahrene‘ Fahrscheine. Dies sind Schnipsel, die dadurch entwertet werden, daß null, eins oder zwei ... oder elf oder zwölf Löcher hineingestanzelt werden.

Besitzt man nun *alle möglichen* Fahrscheine, so kann man bei einer Kontrolle immer einen gültigen Fahrschein vorlegen, sagte sich der schlaue Hans, doch da er nicht gut rechnen konnte und nicht wußte, wann er mit seinem Suchen aufhören konnte, sammelte er unentwegt weiter. Er suchte und suchte und wenn er nicht gestorben ist, so ...“

Wir wußten zwar sofort, daß wir die Anzahl aller möglichen Lochungen ausrechnen sollten, doch das Finden des Ansatzes fiel uns nicht leicht.

Fräulein Steinmann half: „Unsere Ausgangsmenge besteht aus den beiden Elementen *Loch* und *Nichtloch*.“

„Und daraus müssen wir 12-elementige Zeichenfolgen bauen“, platzte Oliver heraus. Damit hatten wir die Lösung gefunden: Es gibt $V_2^{12} = 2^{12} = 4096$ Möglichkeiten, Fahrscheine in der angegebenen Weise zu lochen.

„Der arme Hans“, sagte Utta, die sich den suchenden Burschen genau vorstellen konnte, „dabei kostet das Straßenbahnfahren nur wenige Pfennige.“

Fräulein Steinmann nannte uns noch eine weitere Anwendung des Variationsproblems: „In der Blindenschrift hat man für jeden Buchstaben ein Feld von 2 mal 3 Punkten, die entweder erhaben oder überhaupt nicht in Papier gedrückt werden können. Also ist die Anzahl der Grundzeichen gleich 2 („erhabener“ oder „flacher“ Punkt), die „Wortlängen“ jeweils genau 6, und man kann $V_2^6 = 2^6 = 64$ verschiedene Zeichen (Buchstaben, Satzzeichen, Ziffern) schreiben.“

Nun diskutierten wir die Lösungswege der in den vergangenen Zirkelnachmittagen gestellten Aufgaben:

Kerstin durfte uns erklären, warum es $7! = 5040$ verschiedene Möglichkeiten gibt, aus den Buchstaben ihres Namens Wörter zu bilden. Mike erläuterte die nächste Aufgabe: „Wenn jede der Ziffern 1 2 3 4 5 *genau einmal* genutzt werden darf, so kann man $5! = 120$ voneinander verschiedene fünfstelligen Zahlen bilden. Wenn jede der Ziffern *höchstens zweimal* auftreten darf, kann man weit mehr fünfstelligen Zahlen bilden; es gibt dabei folgende Fälle:

1. Jede Ziffer tritt genau einmal auf; man erhält $5! = 120$ Permutationen.

2. Genau eine der fünf Ziffern tritt genau zweimal auf, z.B. 1 1 2 3 4. Dann muß eine der fünf Ziffern wegfallen. Damit kann man $\frac{5!}{2!} = 60$ fünfstelligen Zahlen bilden.

Da nun aber jede der vier restlichen Ziffern wegfallen kann und jede der fünf Ziffern zweimal auftreten kann, gibt es $4 \cdot 5 \cdot 60$ fünfstelligen Zahlen der genannten Art.

3. Schließlich kommen noch diejenigen fünfstelligen Zahlen hinzu, in denen genau zwei Ziffern genau zweimal auftreten. So kann man z.B. aus den Ziffern 1 1 2 2 3 genau $\frac{5!}{2!2!} = 30$ fünfstelligen Zahlen bilden.

Zu den Paaren 1;1 und 2;2 hätte aber auch die Ziffer 4 oder 5 treten können. Damit erhöht sich die Anzahl der zu bildenden Zahlen auf $3 \cdot 30 = 90$. Nun muß man noch berücksichtigen, daß es $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ Möglichkeiten gibt,² aus einer Menge von 5 Elementen zwei Elemente zur 'Paarbildung' auszuwählen, so daß man für diesen Fall $10 \cdot 90 = 900$ fünfstelligen Zahlen erhält.

Also gibt es $120 + 780 + 900 = 1800$ Möglichkeiten, aus den Ziffern 1 2 3 4 5 fünfstelligen Zahlen zu bilden, wobei jede Ziffer höchstens zweimal auftreten darf.

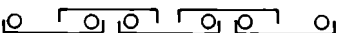
Diese Aufgabe hatten wir nicht alle richtig gerechnet.

Oliver durfte erklären, warum die Ziffer 4 genau $5! = 120$ mal an erster Stelle steht, wenn man alle Permutationen der Ziffern 1 2 3 4 5 und 6 bildet. Natürlich steht die Ziffer 1 auch genau so oft an sechster Stelle. Sehr schnell verstanden wir auch, warum die Ziffer 2 genau 240mal an letzte oder vorletzte Stelle steht.

Nun erklärte uns Oliver noch, daß bei den $6! = 720$ Anordnungen der sechs Ziffern die Ziffern 1 und 2 genau 60mal nebeneinanderstehen. Und das ging so:

Die beiden Ziffern können an 5 verschiedenen Stellen nebeneinander stehen (vgl. Bild 1), vergl. *alpha* 2/84, S. 35. In jedem dieser Fälle kann die 1 vor der 2 oder die 2 vor der 1 stehen, und dies geschieht so oft, wie man die restlichen Elemente miteinander vertauschen kann. Damit stehen die beiden Ziffern $5 \cdot 2 \cdot 3! = 60$ mal nebeneinander.

„Aufgabe 5 geht so ähnlich“, fuhr der eifrige Oliver fort. „Es gibt $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ von-

Bild 1 

einander verschiedene Permutationen der Elemente $a a a a b b b$. Die drei Elemente $b b b$ können an 6 verschiedenen Stellen nebeneinander stehen. Also stehen diese Elemente bei 50 Permutationen nicht nebeneinander.“

Holger hatte die 4. Aufgabe, das „Radfahrproblem“ gelöst. Er ließ die 6 Kinder, der Reihe nach, antreten und ordnete ihnen die 6 Fahrräder zu. Dies wäre auf 6! verschiedene Arten möglich, wenn unter ihnen nicht drei gleiche Räder gewesen wären.

Also müßten $\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$ Radren-

nen ausgetragen werden, wenn alle Möglichkeiten der Verteilung der Räder ausprobiert werden sollten. Da hatten sich die sechs Kinder im Ferienlager sicher zu viel vorgenommen.

Die letzte Aufgabe hatte niemand gelöst, obwohl Fräulein Steinmann meinte, sie sei gar nicht so schwierig:

Wenn man auf dem kürzesten Weg von A nach C will, so muß man sich längs der in Bild 2 eingezeichneten Streckenabschnitte bewegen, und 7 dieser Abschnitte nutzen. Allerdings führen nicht alle 7! Anordnungsmöglichkeiten dieser Abschnitte von A nach C. Will man von einem kürzesten Weg, etwa $b_1 a_1 a_2 b_2 b_3 a_3 b_4$, zu einem anderen übergehen, so ist dies nur möglich, wenn man einen der Abschnitte b mit einem der Abschnitte a vertauscht, so erhält man z.B. den Weg $b_1 a_1 b_2 a_2 b_3 a_3 b_4$. Dagegen bewirkt eine Vertauschung der Elemente $a_1 a_2 a_3$ bzw. $b_1 b_2 b_3 b_4$ untereinander keinen Übergang zu einem Weg von A nach C. Also gibt es $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ mögliche Wege von A nach C.

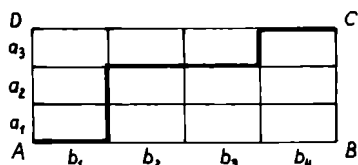


Bild 2

Das müsse sie sich noch einmal überlegen, meinte Utta, die versucht hatte, alle möglichen Wege mit Buntstiften einzuzichnen, an der Unübersichtlichkeit ihrer Darstellung jedoch gescheitert war.

Schließlich hatte uns Fräulein Steinmann noch die Ergebnisse der im letzten Zirkel gestellten Aufgaben gegeben (vergleiche *alpha*, Heft 3/84):

- Wenn 12 Kinder ein Schachturnier (jeder gegen jeden) austragen wollen, sind $C_{12}^2 = 66$ Spiele erforderlich. Bei einer durchschnittlichen Spieldauer von 40 Minuten dauerte das Turnier 44 Stunden, wenn alle Partien *nacheinander* ausgetragen würden.

- Die 8 Gruppenleiter können $C_8^3 = 56$ Skatrunden zusammenstellen. Da in jeder Runde drei Spiele gespielt werden sollen, müssen 168mal die Karten gemischt werden.

- Gruppenleiter Heinz kann

$$C_{32}^{10} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \dots \cdot 23}{10!}$$

verschiedenartige Kartenzusammenstellungen in die Hand bekommen.

- Ein Kind möchte $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ Fotos haben. Der Fotozirkel muß also 155 Bilder anfertigen.

- Wenn sich die 14 Kinder voneinander verabschieden, schütteln sie sich $C_{14}^2 = 91$ mal die Hände.

- Das gesuchte Zahlendreieck besitzt den folgenden Aufbau.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

Man kann jedes Element als Summe der beiden darüberstehenden Zahlen erhalten.

Die Summe aller in der n -ten Zeile dieses Zahlendreiecks stehenden Zahlen ist gleich 2^{n-1} . Wir sehen sofort für die erste Zeile: $1 = 2^{1-1} = 2^0$, für die zweite Zeile $1 + 1 = 2 = 2^1$, für die dritte Zeile $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, für die vierte Zeile $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. Daß diese Gesetzmäßigkeit niemals unterbrochen wird, daß also die Summe S_n aller Elemente der n -ten Zeile gleich 2^{n-1} ist, sehen wir durch den allgemeinen Beweis, daß sie sich von jeder Zeile auf die nachfolgende Zeile „vererbt“ (und da sie auch anfänglich gilt, ist sie demzufolge stets richtig): Dazu benutzen wir das oben erkannte Bildungsgesetz für die Elemente der n -ten Zeile: $C_n^1 = 1 + C_{n-1}^0$; $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ ($n > 1$, $1 < k < n - 1$). Nun formen wir die Summe S_n der in der n -ten Zeile stehenden Elemente um.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n \\ &= 1 + (1 + C_{n-1}^0) + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) \\ &\quad + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots \\ &\quad + (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) + C_n^n) \\ &= 2 + 2C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 2C_{n-1}^2 + \dots \\ &\quad + 2C_{n-1}^{n-2} + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 + 2C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 2C_{n-1}^2 + \dots \\ &\quad + 2C_{n-1}^{n-2} + 2C_{n-1}^{n-1} \\ &\quad \text{(denn } C_n^n = C_{n-1}^{n-1} = 1) \\ &= 2(1 + C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 \\ &\quad + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-2} \\ &\quad + C_{n-1}^{n-1}) \\ &= 2S_{n-1}. \end{aligned}$$

$$S_n = 2S_{n-1}.$$

Hat also die $(n-1)$ te Zeile unseres Dreiecks die behauptete Eigenschaft $S_{n-1} = 2^{n-2}$, so hat sie die folgende, die n -te Zeile:

$S_n = 2S_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Da sie in den ersten Zeilen erfüllt ist (wie wir nachrechneten) und sich von Zeile zu Zeile „weitervererbt“ (wie gezeigt wurde), gilt sie allgemein.

Fräulein Steinmann wertete unseren Aufgabenwettbewerb aus und lobte unseren Fleiß. Dann verabschiedete sie sich ganz besonders herzlich von uns, denn dies war unser letzter Mathematikzirkel vor den Sommerferien gewesen. Doch einige von uns zwinkerten Fräulein Steinmann zu, wir wußten, daß wir sie in nicht allzuferner Zeit im Sommerlager für *Junge Mathematiker* wiedersehen würden.

P. Göthner

Ein jeder Mensch begreift und behält dasjenige im Gedächtnis viel leichter, wovon er den Grund und Ursprung deutlich einsehen; und weiß sich auch dasselbe bei allen vorkommenden Fällen weit besser zu Nutz zu machen.

Aus dem Vorbericht zu Eulers Einleitung zur Rechenkunst

Ein Spiel Die fixe 7

Wir spielen mit vier Würfeln. Folgende Möglichkeiten erzielen einen Gewinn:

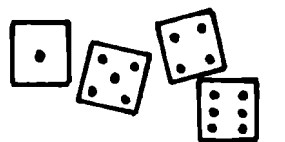
(1) Die Augenzahl von 2, 3 oder vier Würfeln addiert sich zu 7, 14 oder 21.

(2) Je zwei Würfel zeigen mit ihren Augen Zehner- und Einerstelle einer durch sieben teilbaren Zahl.

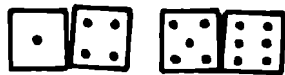
Die gewürfelten Zahlen dividieren wir durch sieben und erhalten so die Wertung.

Gewinnende Würfel bleiben stehen (fix bedeutet fest), mit den übrigen darf weitergewürfelt werden. Haben alle vier Würfel einen Gewinn erzielt, darf beliebig oft in gleicher Weise fortgesetzt werden, jedoch löscht der erste vollständig wertungslose Wurf alle gerade erzielten Punkte. Erst ab sieben Punkte wird ein Ergebnis notiert.

1. Beispiel:



Wertung



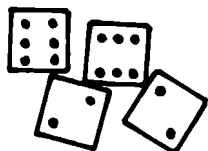
$14 = 2 \cdot 7$ $56 = 8 \cdot 7$ 10 Punkte
(Fortsetzung mit vier Würfeln möglich)



$3 + 4 = 1 \cdot 7$ 1 Punkt
(Fortsetzung mit zwei Würfeln möglich)



$35 = 5 \cdot 7$ 5 Punkte
(Fortsetzung wieder mit vier Würfeln möglich)



$6 + 6 + 2 = 2 \cdot 7$

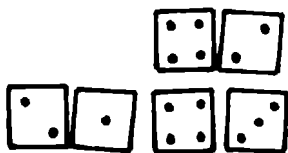
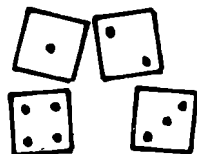
2 Punkte

18 Punkte

(Eine Fortsetzung wäre nur mit einem Würfel möglich, was keinen gültigen Wurf erlaubt.)

2. Beispiel:

Die größte Wertung ist oft nicht die günstigste.



6 Punkte

4 Punkte

Die zweite Kombination gestattet die Fortsetzung mit allen vier Würfeln.

Wer die Spielregeln verstanden und das Spiel probiert hat, versuche sich an folgenden Aufgaben:

▲ 1▲ Ermittle den höchsten und den vollständig gültigen niedrigsten Wurf bei vier verschiedenen Würfelaugen!

▲ 2▲ Wieviel Möglichkeiten von zwei Würfelaugen gewinnen? Ermittle daraus die Chancen für eine erfolgreiche Fortsetzung mit zwei Würfeln!

▲ 3▲ Wie groß ist die Chance, mit vier Würfeln genau fünf Punkte zu erzielen, ohne daß eine andere Wertung möglich ist?

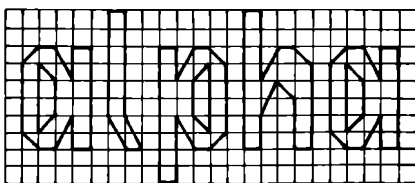
▲ 4▲ Lege sinnvolle Spielregeln für ein ganz ähnliches Spiel, z. B. „Die fixe 6“ fest!

Ch. Werge

Flächenhaftes

Welche Gesamtfläche nehmen die Buchstaben ein?

(1 FE = Fläche eines Kästchens)



Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig

Es hat Spaß gemacht

Die Lösungen und die Gewinner
der alpha-Schachknochelei
aus Heft 6/1983

„Mir haben diese 8 Schachaufgaben sehr viel Spaß gemacht“ (Markus Schwenker, Magdeburg). Nicht nur dir, Markus, sondern auch vielen anderen *alpha*-Lesern hat diese Schachknochelei Freude bereitet! Insgesamt lagen uns 639 Einsendungen vor, die aufmerksam gelesen, ausgewertet und teilweise beantwortet wurden!

Wir danken allen herzlich für ihre Teilnahme! Als jüngste Teilnehmer konnten wir Marcel Krüger (Ludwigslust/7 Jahre) und Alexander Rüstau (Falkensee/8 Jahre) begrüßen. Die Ehrlichkeit vom Alexander (ihm half der Vati) und anderen jüngeren Lesern, denen entweder der Vater, der Opa oder der Bruder halfen, ist zu loben. Martin Bochmann (Dresden/83 Jahre) und Curt Kiel (Jena/82 Jahre) waren die ältesten Teilnehmer. Gefreut haben wir uns auch über die Teilnahme der *AG Schach* der PH Senftenberg und der *AG Schach* der Magnus-Poser-OS Lehesten, und daß Hartmut Gläser (Halle) und Veit Braun (Berlin) die Aufgaben als Lehrstoff in ihren *AG Schach* verwendet haben. Von den 639 Einsendern fanden 367 die richtigen Züge zum Matt. Hier die Lösungen im einzelnen:

▲ 1▲ 1. D:h6+ g:h6 2. Le5 matt.
(Zuerst 1. Le5 ergibt kein Matt im 2. Zug, da sich Schwarz z. B. mit T:f7+ oder Sg8 gegen die Mattdrohung 2. D:h6 verteidigen kann.)

▲ 2▲ 1. Dc7+ S:c7 2. Sb6 matt.

▲ 3▲ 1. Sg6+ Kg8 2. Dg7+ T:g7 3. Sh6 matt.

▲ 4▲ 1. Kg4 f5+ 2. Kg5 f4 3. g:f4 matt.

(Einige Leser fielen leider auf die Zugfolge 1. g7 Kf5 2. g8D Ke5 3. De6 matt herein. Jedoch nach 1. g7 zieht Schwarz f5 und nach 2. g8D Kf6. Danach ist ein Matt im 3. Zug nicht mehr möglich!)

▲ 5▲ 1. Sc7+ S:c7 2. Dd8+ K:d8 3. Lg5++ Ke8 4. Td8 matt.

(Mehrfach wurden hier fehlerhaft die Züge 1. Dd8+ K:d8 2. Lg5+ Ke8 3. Sc7+ S:c7 4. Td8 matt als Lösung angegeben. Schwarz kann sich jedoch auf 2. Lg5+ mit f6 oder Lf6 oder Sf6 besser verteidigen, weil kein Doppelschach vorliegt. Dadurch erreicht Weiß kein Matt im 4. Zug!)

▲ 6▲ 1. Dh1 Ta6+/Ta5/Ta4/Ta3/Ta2/T:a1/Tc8/Td8/Te8/Tf8/Tg8+/T:h8 2. T:a6/T:a5/T:a4/T:a3/T:a2/D:a1/T:c8/T:d8/T:e8/T:f8/T:g8/D:h8 matt.

(Bei diesem Zweizüger von Theodore Herlin, „Deutsche Schachzeitung“ 1852, wurde von vielen Lösern die Notwendigkeit der Aufrechterhaltung der Fesselung des schwarzen Bauern neben der gleichzeitigen Deckung der beiden weißen Türme nicht erkannt. So gab es zahlreiche Fehllösungen wie 1. De8, 1. Da4, 1. Dd4 oder 1. De5. Diese Damenzüge scheitern allesamt an 1. ... Ta6+!)

▲ 7 ▲ 1. Dd7+ L:d7 2. Sd6++ Kd8 3. Sf7+ Kc8 4. Te8+ L:e8 5. Td8 matt.

(Falsch war die Zugfolge 1. Dd7+ L:d7 2. Sd6++ Kd8 3. Te8+ (?) L:e8 4. Sf7++, denn hier spielt Schwarz nicht 4. ... Kc8, sondern Ke7!)

▲ 8 ▲ 1. Dh1 K:b8/Lb6 zieht beliebig 2. Dh8/T:g3 matt.

(Der Reiz dieses Zweizügers, der von M. Velimirovic, 2. Preis im Myllyniemi-Jubiläumsturnier 1980, stammt, besteht in den fünf Verführungen

1. Dc1/De1/Df1/Tc3/T:g3?, die an den schwarzen Verteidigungen 1. ... Lc5/Le3/Lf2/L:a5/Lg1! jeweils scheitern. Auch bei dieser Aufgabe gab es zahlreiche Fehllösungen; zumeist durch 1. T:g3, doch nach 1. ... Lg1 gibt es kein Matt im 2. Zug!)

Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:

Robert Menzel (Dresden); Yvonne Gläsel (Plauen); Veit Eska (Bad Sülze).

Die weiteren drei Buchpreise wurden unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten, ausgelost: Christina Werner (Bötzow); Ralf-Peter Mayer (Wolfen); Haike Schmiediche (Brielow).

Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch!

Aus der Vielzahl der Einsender, die alle Aufgaben richtig lösten, möchten wir noch einige nennen, deren Lösungen vorbildlich waren: Ines Andratchke (Berlin); Johannes Böhmer (Görlitz); Lorenz Fischer (Schwerin); Rudolf Freund (Stockerau/Österreich); Holger Fröbe (Dessau); Sylke German (W.-P.-Stadt Guben); Thomas Harnisch (Neuzelle); Fritz Hoffmann (Weißenfels); Steffen Hoffmann (Potsdam); Gerd Reichling (Bellheim/BRD); Falk Sempert (Dresden); Uffz. Steffen Tarnick (Pragsdorf); Frank Walther (Berlin) und Ralf Wotjatschke (Rostock).

„Mir hat diese Ausschreibung außerordentlich Spaß gemacht, und ich würde mich freuen, wenn ihr so etwas demnächst in dieser oder ähnlicher Form bringen würdet“ (Olaf Steffan, Reichenbach). So wie Olaf äußerten auch andere Leser den Wunsch nach einem erneuten Wettbewerb.

Die Redaktion *alpha* erfüllt ihn! Im Heft 6/1984 erscheint wiederum eine Schachknochelei, wozu wir schon jetzt alle *alpha*-Leser recht herzlich einladen!

J. Lehmann/H. Rüdiger

Prof. Dr. Massera am Telefon aus Montevideo

Ein Freund von Prof. Massera, der uruguayische Journalist W. Israel, ADN Berlin, schreibt an die *alpha*-Leser:

Ich hatte das große Glück, kurz nach der Freilassung Professor Masseras mit ihm zu sprechen, zwar nicht persönlich in Montevideo, sondern telefonisch aus der Redaktion der *Jungen Welt* in Berlin. Ehrlich gesagt, es war ein bewegender Augenblick, als ich die mir so bekannte Stimme des erprobten Kämpfers hörte. Meine Freude kann ich euch kaum schildern, aber Massera stieß einen Schrei der Überraschung und Freude aus, als er hörte, wer mit ihm sprach und daß ich seine Aussagen für die Zeitung der Jugend der DDR haben wollte. „Kein Problem, spare dir die Vorrede, ich bin den Jugendlichen der FDJ und natürlich auch den Bürgern des sozialistischen

deutschen Staates zu Dank verpflichtet“, waren seine herzlichen Worte. Dann schilderte er, wie er während seiner langen Haft im Militärgefängnis von *Libertad* zusammen mit anderen Genossen öfter an die Jugend seines Landes denken mußte. „Wie wird sie durch die schweren Jahre des Faschismus kommen? Was wird an reaktionärem Gedankengut hängenbleiben, da wir ja nicht legal arbeiten können?“ waren einige Fragen, die uns Sorgen machten. Denn, abgeschlossen von der Außenwelt, wußten wir ja nichts oder sehr wenig von dem was im Lande geschah.

Man müßte Dichter sein und nicht Mathematiker, um beschreiben zu können, was ich in den drei Tagen nach meiner Freilassung besonders im Zusammenhang mit den erwähnten Problemen der Jugendlichen erleben konnte.

„Meine Wohnung ist von morgens bis abends voll von Freunden und Genossen. Es sind so viele, daß sie auf dem Korridor warten müssen, bis einige Leute gehen und sie dann Platz finden. Das was ich dir für die Jugendzeitung der DDR sagen will, ist, daß die Mehrzahl der Besucher junge Menschen sind. Einige kannte ich als kleine Kinder, andere waren etwas größer, denn du mußt bedenken, daß ja mehr als zehn Jahre vergangen sind, seit die Diktatur errichtet worden ist“, sagte Massera.

„Aber welche prächtige Jugend haben wir. Alle Befürchtungen haben sich als unberechtigt erwiesen. Ich war erstaunt, wie tief doch unsere Ideale Wurzeln geschlagen haben, wie die jungen Menschen sich nicht von den faschistischen Parolen blenden ließen. Sie stehen zur Demokratie, kämpfen in den Betrieben und in den Studentenbewegungen für ihre Rechte. Ich weiß nicht, ob du verstehen kannst, wie mir zu Mute war, nach so langer Zeit mit Jungen und Mädchen, die eine solche politische Reife haben, zu sprechen. Und mit welcher Natürlichkeit sie von den Aktionen, die noch zur völligen Erlangung der demokratischen Rechte notwendig sind, sprechen. Das wollte ich dir sagen, denn du hast mir von den Aktionen der Studenten der Humboldt-Universität zu Berlin berichtet, die anläßlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde ein Meeting für meine Freilassung abhielten.

Ich möchte besonders den Studenten danken, für alles, was sie getan haben, damit ich jetzt frei bin. Sie sollen wissen, daß die Jugend unseres Volkes, so wie ich es dir beschrieb, ihren Mann steht und daß das in sie gesetzte Vertrauen vollauf gerechtfertigt ist. Du weißt, ich bin als Professor und Mathematiker immer im Kontakt mit der Jugend gewesen. Ohne sie könnte ich mir mein Leben überhaupt nicht vorstellen. Deshalb freut es mich, daß du gerade dieses Gespräch für die Zeitung der FDJ führst.“

Ich erzählte Massera auch von der Schülerzeitschrift *alpha*, die über ihn berichtete. Er versprach mir, wenn er in die DDR kommt, mit *alpha*-Lesern ein Forum durchzuführen.

W. Israel

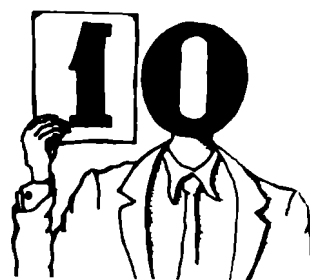
Die Natur hat uns das Schachbrett gegeben ...; sie hat uns die Steine geschnitzt ...; nun ist es an uns, Züge zu tun, von denen wir uns Gewinn versprechen.

Johann Wolfgang von Goethe



Der König zappelt im Mattnetz

Richard Nacke, Dresden, 75 Jahre



aus: Freie Welt, Bulkin, Moskau

Zahlenquadrat

Setze einstellige Zahlen so ein, daß sowohl waage-
recht als auch senkrecht richtig gelöste Aufgaben
entstehen.

Matemacki List, Beograd

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|---|-----|-----|-----|---|-----|---|-----|-----|
| | — | | + | | = 8 | | + | | — | | = 2 |
| + | | × | | : | | × | | + | | + | |
| | × | 2 | + | | = 7 | | × | 8 | — | | = 6 |
| × | | + | | + | | — | | : | | — | |
| | × | | — | | = 4 | | × | | : | | = 3 |
| = 8 | | = 7 | | = 2 | | = 3 | | = 2 | | = 3 | |

Gewichtsprobleme

Satz: Jeder Mensch hat sein Idealgewicht.

Beweis: Sei G das tatsächliche Gewicht einer Person,
 g das zugehörige Idealgewicht. Häufig gilt anschei-
nend $G = g + \ddot{u}$ mit $\ddot{u}$ für Übergewicht.

Wir formen äquivalent um:

$$\begin{aligned}
 G &= g + \ddot{u} \\
 G(G - g) &= (g + \ddot{u})(G - g) \\
 G^2 - Gg &= gG + \ddot{u}G - g^2 - \ddot{u}g \\
 G^2 - Gg - \ddot{u}G &= gG - g^2 - \ddot{u}g \\
 G(G - g - \ddot{u}) &= g(G - g - \ddot{u}) \\
 G &= g \text{ w. z. b. w.}
 \end{aligned}$$

D. Pohlmann, Elmshorn, nach the mathematics teacher

Überraschende Vereinfachungen

Es gibt Terme, die sich auf ungewöhnliche Weise
vereinfachen lassen. Für wen sind beispielsweise
nachfolgende Vereinfachungen von Wurzeln nicht
überraschend?

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2]{5 \frac{5}{24}} &= 5 \sqrt[2]{\frac{5}{24}}; & \sqrt[3]{3 \frac{3}{26}} &= 3 \sqrt[3]{\frac{3}{26}}; \\
 \sqrt[4]{2 \frac{2}{15}} &= 2 \sqrt[4]{\frac{2}{15}}; & \sqrt[5]{2 \frac{2}{31}} &= 2 \sqrt[5]{\frac{2}{31}}.
 \end{aligned}$$

a) Bestimme alle einstelligen natürlichen Zahlen a
und b , für die nachfolgende Wurzelgleichungen zu
wahren Aussagen werden!

$$(I) \quad \sqrt[a]{a + \frac{a}{b}} = a \sqrt[a]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$(II) \quad \sqrt[a]{b + \frac{b}{a^b}} = b \sqrt[a]{\frac{b}{a^b}} \quad (a \neq 0).$$

Es gibt unendlich viele Wurzelausdrücke, die sich
so wie die oben gezeigten Beispiele vereinfachen
lassen.

Betrachte diese Beispiele und die Ergebnisse der
1. Aufgabe aufmerksam!

b) Stelle eine Vermutung auf über die Struktur von
Wurzelausdrücken, die sich so überraschend verein-
fachen lassen!

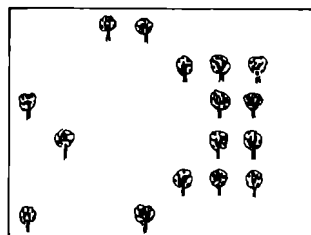
Beweise die Richtigkeit dieser Vermutung!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Zerlegungsproblem

In dem Bild befinden sich 16 Bäume. Das darge-
stellte Grundstück ist so in 8 kongruente Teile zu
zerlegen, daß jeder Teil zwei Bäume enthält.

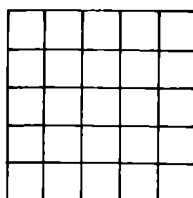
aus: Pogled, Sofia



Magische Primzahlzwillinge

Bilde alle Primzahlzwillinge unter 100! Unter Ver-
wendung aller dieser Primzahlen ist ein Quadrat so
auszufüllen, daß sich in allen Waagerechten, in den
äußeren beiden Senkrechten, im Mittelquadrat so-
wie bei Addition der Primzahlen in den Eckfeldern
die gleiche Summe ergibt. Wie heißt diese Summe
und wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt,
diese Zahl zu ermitteln?

Mathematikfachlehrer A. Schall,
OS Pegau



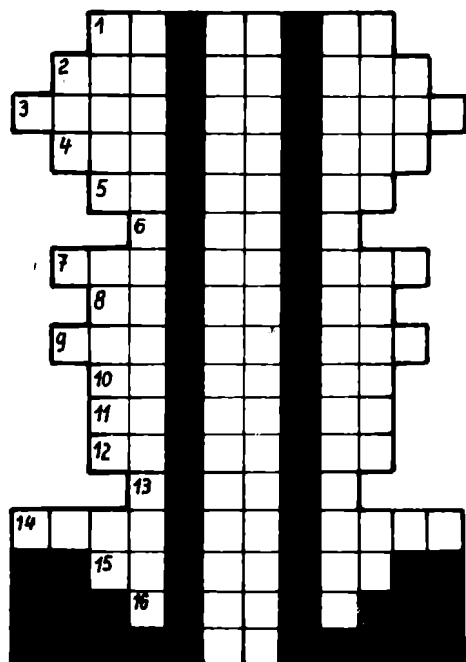
Doppelt

Nimm eine beliebige dreistellige Zahl! Multipli-
ziere sie mit 11 und das Produkt mit 91! Das Erge-
bnis ist überraschend. Wie kann man diese Bezie-
hung nachweisen?

Scholastic Math. Magazine

Siebzehn plus zwei

In die Zeilen der Rätselfigur sind 17 Begriffe einzutragen, die folgende Bedeutung haben: 1. mathematisch: zurücklaufend, 2. einen Kode entschlüsseln, 3. verhältnisgleich, 4. wellenoptische Erscheinung, 5. methodisches Vorgehen bei mathematischen Beweisen, 6. Begriff aus der Wirtschaftsmathematik, 7. Teilnehmergruppe eines Landes zur IMO, 8. zeichnerische Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs, 9. Begriff aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 10. Erdbeben, dessen Entstehungsherd unter dem Meeresboden liegt, 11. eindeutige Abbildung, 12. Ergebnis eines Meßvorganges, 13. Insel im Mittelmeer, 14. maschinenlesbarer Datenträger, 15. Sternforscher, 16. Grundelement der Geometrie, 17. Oberflächenform des Mondes.



Bei richtiger Eintragung der Begriffe ergeben sich in den schattierten Spalten: a) ein Grundbegriff aus der analytischen Geometrie, b) eine Dreieckstransversale.

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig

Lustige Logelei

$$\begin{aligned} m + n + p + q + m &= 38 & (1) \\ 2mq &= p & (2) \\ n : q &= 3 : 2 & (3) \\ q &= 8m^3 & (4) \end{aligned}$$

Ordnet man den Lösungen für m ; n ; p ; q ; den jeweiligen Buchstaben des Alphabets zu (a bis z mit 1 bis 26 beziffert) und setzt sie in der Folge laut Gleichung (1) ein, ergibt sich als Lösung das, was der Löser entweder vor sich liegen oder in der Hand hat! (Nur ganzzahlige, positive Lösungswerte!!)

Ing. A. Körner, Leipzig

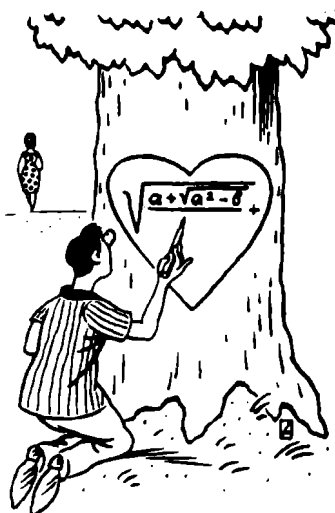
Spiel mit Zahlen

$$\begin{aligned} 98 + 7 \cdot 6 + 5 - 43 - 2 \cdot 1 &= 100 \\ 9 - 8 \cdot 7 \cdot 6 - 5 + 432 \cdot 1 &= 100 \\ . &= 100 \\ . &= 100 \end{aligned}$$

Suche selbst weitere Beispiele!

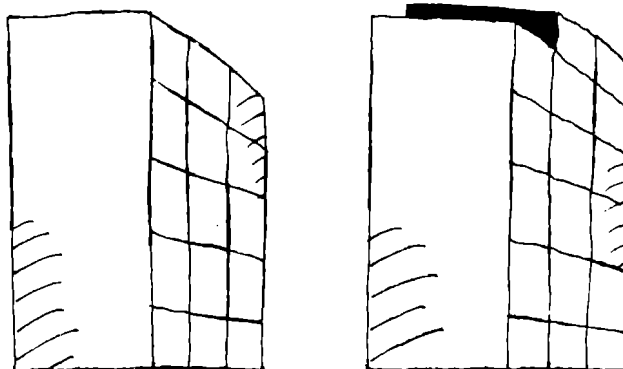
Matemacki List, Beograd

Geständnis



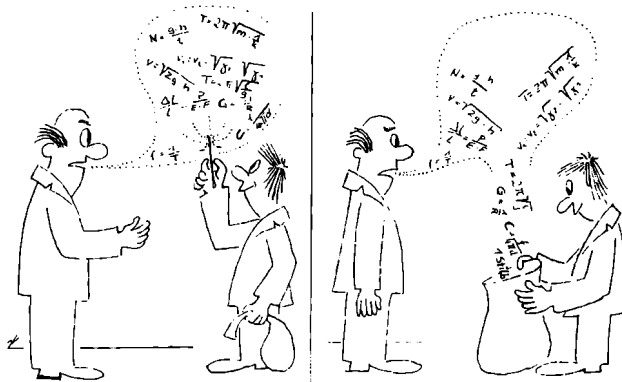
aus: „Sowjetunion“, A. Orechow

Neues von der Architekturszene:



Modell 5/081 (links), Experimentalbau (rechts)

aus: Eulenspiegel, Berlin



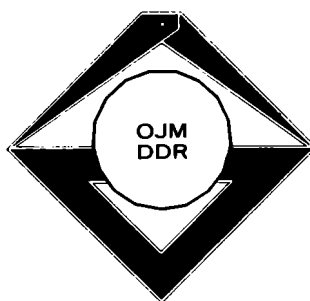
aus: Sammlerexpress, W. Löpke

alpha, Berlin 18 (1984) 4 · 87

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreisolympiade

Klassenstufen 9 und 10



Olympiadeklasse 9

230921 Sind a und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl x , so gilt

$$1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9 \quad (1)$$

und $x = 10a + b$.

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus

$$y = 10b + a.$$

Die Summe

$$x + y = 11a + 11b = 11(a + b)$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in $a + b$ enthalten sind. Wegen (1), also $1 \leq a + b \leq 18$, kann $a + b$ außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist $x + y$ genau dann eine Quadratzahl, wenn

$$a + b = 11$$

gilt. Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertepaare $(a; b)$ der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen x die verlangte Eigenschaft.

| a | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| b | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| x | 29 | 38 | 47 | 56 | 65 | 74 | 83 | 92 |

230922 Es gilt $\overline{ABAC} = \overline{ADCA}$ und $\overline{ABDB} = \overline{ACDB}$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

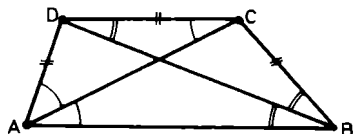
Aus (4) und (1) folgt daher:

$$\overline{ADAC} = \overline{ADCA} \quad (5)$$

bzw. $\overline{ADBC} = \overline{ACDB}$.

Aus (5) folgt:

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}. \quad (6)$$



Wegen (2) ist $ABCD$ kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei D und C , also gilt

$$\angle ADC = \angle DCB = 110^\circ. \quad (7)$$

Die Innenwinkel bei A und B ergänzen (7) jeweils zu 180° , d. h., es gilt

$$\angle DAB = \angle ABC = 70^\circ \quad (8)$$

Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

230923 I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

(1) Die vorderste Ziffer der gesuchten

Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleiner als 2000. Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis ≥ 10 gefordert ist.

Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner- bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, daß die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muß, o.B.d.A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest: Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen

- 0 wegen (3),
- 1 wegen (1),
- 9 wegen (2),
- 2; denn sonst erhält man in der Summe eine 1.

Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe eine 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterstellen) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:

Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbliebenen Ziffern so zu kombinieren, daß die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen * und ** gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

| Einer des zweiten Summanden | Einer in der Summe | restliche Ziffern | mögliche Summe 9 aus zwei Summanden | mögliche dritte Zeile des Schemas |
|-----------------------------|--------------------|-------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 3 | 2 | 0, 4, 5, 6, 7, 9 | 4+5 | 1062 oder 1602 |
| 4 | 3 | 0, 2, 5, 6, 7, 8 | 2+7 | 1053 oder 1503 |
| 5 | 4 | 0, 2, 3, 6, 7, 8 | 2+7 oder 3+6 | * |
| 6 | 5 | 0, 2, 3, 4, 7, 8 | 2+7 | 1035 oder 1305 |
| 7 | 6 | 0, 2, 3, 4, 5, 8 | 4+5 | 1026 oder 1206 |
| 8 | 7 | 0, 2, 3, 4, 5, 6 | 4+5 oder 3+6 | ** |

Damit ist gezeigt, daß nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z. B. die folgenden Eintragungen zeigen:

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 749 | 479 | 829 | 289 |
| + 853 | + 583 | + 674 | + 764 |
| 1602 | 1062 | 1503 | 1053 |
| 429 | 249 | 349 | 439 |
| + 876 | + 786 | + 857 | + 587 |
| 1305 | 1035 | 1206 | 1026 |

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

230924 Indirekter Beweis:

Angenommen, $\sqrt{p}$ wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen m und n mit $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$. Dabei könnte erreicht

werden, daß m und n teilerfremd sind. Daraus würde $pn^2 = m^2$ folgen, die Primzahl p müßte also m teilen, d. h., es würde $m = px$ mit einer natürlichen Zahl x gelten.

Daraus ergäbe sich $pn^2 = p^2 \cdot x^2$, also $n^2 = p \cdot x^2$, und daher müßte p auch n teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von n und m . Also war die Annahme, daß $\sqrt{p}$ rational ist, falsch, d. h., $\sqrt{p}$ ist keine rationale Zahl.

Olympiadeklasse 10

231021 I. Wenn eine Aufstellung von 5 Damen die Forderung erfüllt, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann, so folgt zunächst, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Dame stehen muß. Ferner kann bei der Aufstellung nur eine der beiden Möglichkeiten (1), (2) zutreffen:

(1) Auf dem Feld c3 steht eine Dame.

In Zeile 1 muß dann eine Dame entweder auf b1 oder auf d1 stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, daß auf b1 eine Dame steht. Aus dem Bild ist dann ersichtlich, daß drei weitere Damen nur noch auf a4, d5 und e2 stehen können.

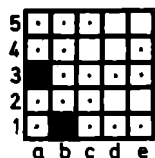
| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | * | * | * | * | * |
| 4 | * | * | * | * | * |
| 3 | * | * | * | * | * |
| 2 | * | * | * | * | * |
| 1 | * | * | * | * | * |

(2) Auf dem Feld c3 steht keine Dame.

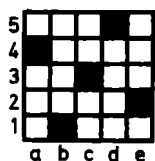
Stünde dann in keinem der Felder

b1, d1, a2, a4, b5, d5, e2, e4 (*)

eine Dame, so müßte von den beiden Zeilen 1 und 5 die eine in einem Eckfeld (Spalte a oder e), die andere in ihrem Mittelfeld (Spalte c) besetzt sein. Das Entsprechende würde für die beiden Spalten a und e gelten. Dies ergäbe einen Widerspruch, da die Dame auf dem Mittelfeld der Zeile 1 oder 5 die Dame auf dem Mittelfeld der Spalte a oder e erreichen könnte.



Also steht eine Dame auf einem der Felder (*); durch eventuelle Drehung und Spiegelung kann erreicht werden, daß auf b1 eine Dame steht. Auf e3 kann dann keine Dame stehen, da von den Damen auf b1, e3 alle Felder der Zeile 2 erreicht würden. Also muß in Zeile 3 eine Dame auf a3 stehen. Aus dem Bild ist dann ersichtlich: Auf d4 kann keine Dame stehen (keine Möglichkeit für Zeile 5), also steht auf c4 eine Dame, und dann können zwei weitere Damen nur noch auf d2 und e5 stehen. Damit ist bewiesen: Es gibt bis auf Spiegelung und Drehung höchstens die beiden Aufstellungen der Bilder.



II. Diese beiden Aufstellungen erfüllen auch die Bedingung, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Sie lassen sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen, da bei jeder Drehung oder Spiegelung des Quadrates das Feld c3 in sich übergeht, das im linken Bild besetzt ist, im rechten Bild aber nicht. Somit gibt es bis auf Drehung und Spiegelung genau die beiden Aufstellungen der geforderten Art, die in den letzten beiden Bildern angegeben sind.

231022 I. Wenn ein Zahlenpaar $[g, r]$ die verlangten Eigenschaften hat, so folgt: Da das Quadrat jeder reellen Zahl ≥ 0 ist, gilt

$$3r^2 + 1 \geq 1. \quad (1)$$

Hieraus folgt einerseits $3r^2 + 1 > 0$; daher und wegen $3 > 0$ gilt

$$\frac{3}{3r^2 + 1} > 0.$$

Andererseits folgt aus (1) (und $3 > 0$, $1 > 0$), daß

$$\frac{3}{3r^2 + 1} \leq \frac{3}{1} = 3$$

gilt. Somit erfüllt die ganze Zahl g die Ungleichung

$$0 < g \leq 3. \quad (2)$$

Aus $\frac{3}{3r^2 + 1} = g$ folgt weiter

$$3gr^2 + g = 3, \quad r^2 = \frac{3 - g}{3g}.$$

Diese Gleichung lautet für die ganzzahligen

Lösungen von (2) so, wie in der folgenden Tabelle angegeben:

| g | $r^2 = \frac{3 - g}{3g}$ |
|-----|--------------------------|
| 1 | $r^2 = \frac{2}{3}$ |
| 2 | $r^2 = \frac{1}{6}$ |
| 3 | $r^2 = 0$ |

Daher können nur die Paare

$$\left[1; \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \left[1; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right], \left[2; \sqrt{\frac{1}{6}}\right], \left[2; -\sqrt{\frac{1}{6}}\right], [3; 0]$$

die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn 1, 2 und 3 sind ganze Zahlen, $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\pm \sqrt{\frac{1}{6}}$, 0 sind reelle Zahlen, und in der folgenden Tabelle wird $\frac{3}{3r^2 + 1} = g$ bestätigt:

| g | r | $3r^2 + 1$ | $\frac{3}{3r^2 + 1}$ |
|-----|--------------------------|-------------------|-------------------------|
| 1 | $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ | $2 + 1$ | $\frac{3}{3}$ |
| 2 | $\pm \sqrt{\frac{1}{6}}$ | $\frac{1}{2} + 1$ | $\frac{3}{\frac{3}{2}}$ |
| 3 | 0 | $0 + 1$ | $\frac{3}{1}$ |

231023 Die Parallelen durch P, Q, R zu FB liegen in den Seitenflächen $ABFE, BCGF$ bzw. $DAEH$. Sie schneiden daher die Strecken AB, BC bzw. DA ; die Schnittpunkte seien U, V bzw. W . Da parallele Geraden bei Parallelprojektion wieder in parallele Geraden übergehen, folgt:

Man konstruiere

(1) die Parallelen durch P', Q', R' zu $F'B'$ und ihre Schnittpunkte U', V' bzw. W' mit $A'B', B'V'$ bzw. $D'A'$; dann sind U', V', W' die Bildpunkte von U, V bzw. W .

Wegen $PU \parallel QV$ liegen P, Q, U, V in derselben Ebene. Die Geraden durch P, Q bzw. U, V sind nicht zueinander parallel (denn wie die Konstruktion ergibt, ist $P'Q' \neq U'V'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{PQ} . Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da P und Q und folglich ihre Verbindungsgerade in dieser Ebene liegen) und in der Ebene durch A, B, C, D (da U und V in dieser liegen). Daraus folgt:

Man konstruiere

(2) die Geraden durch P', Q' bzw. U', V' und ihren Schnittpunkt S'_{PQ} ; dann ist S'_{PQ} der Bildpunkt eines Punktes S_{PQ} auf der Schnittgeraden s der Ebene durch P, Q, R bzw. A, B, C, D .

Ebenso folgt: Man konstruiere

(3) die Geraden durch P', R' bzw. U', W' und ihren Schnittpunkt S'_{PR} ; dann ist S'_{PR} der Bildpunkt eines Punktes S_{PR} auf der Schnittgeraden s .

Konstruiert man also

(4) die Gerade s' durch S'_{PQ}, S'_{PR} , so ist s' die Bildgerade von s .

Die Gerade durch A, B und die Gerade s liegen in der Ebene durch A, B, C, D . Sie sind auch nicht parallel zueinander (denn es ist $A'B' \neq s'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{AB} . Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da s in dieser Ebene liegt) und in der Ebene durch A, B, F, E . Das gilt auch von P . Also ist die Gerade durch S_{AB} und P die Schnittgerade der Ebenen durch P, Q, R bzw. A, B, F, E . Die im Quadrat $ABFE$ gelegene Teilstrecke dieser Geraden ist folglich ein Teil der gesuchten Schnittfigur.

Daraus folgt: Konstruiert man

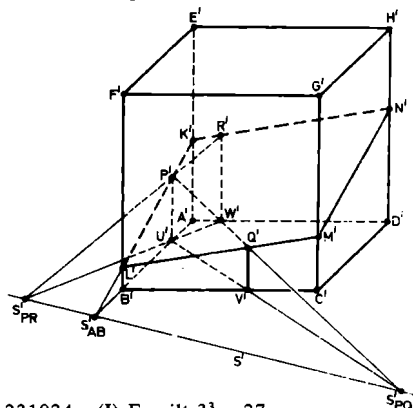
(5) die Gerade durch A', B' und ihren Schnittpunkt S'_{AB} mit s' ,

(6) die Gerade durch S'_{AB}, P' und ihre in $A'B'FE$ gelegene Teilstrecke $K'L'$ (K' auf $A'E', L'$ auf $B'F'$), so ist $K'L'$ das Bild des Teiles der Schnittfigur (K auf AE, L auf BF).

Damit folgt weiter:

(7) Man verlängere $L'Q'$ bis zum Schnitt M' mit $C'G'$ sowie $K'R'$ bis zum Schnitt N' mit $D'H'$.

Dann ist das Viereck $K'L'M'N'$ das Bild der Schnittfigur $KLMN$.



231024 (I) Es gilt $3^3 = 27$.

(II) Aus $0 < x < 1$ folgt auch $x^x < 1$; denn da x rational ist, gibt es natürliche Zahlen

$p, q > 0$ mit $x = \frac{p}{q}$, und damit ist $x^x = \frac{p^p}{x^q}$

$= \sqrt[q]{x^p}$. Aus $x < 1$ folgt somit $x^p > 1$ und daraus $\sqrt[q]{x^p} < 1$.

(III) Aus $x = 1$ folgt $x^x = 1$.

(IV) Aus $1 < x < 3$ folgt $x^x < x^3$, da für Potenzen mit einer Basis oberhalb 1 gilt: Je größer ihr Exponent ist, um so größer ist ihre Potenz.

Weiter folgt $x^3 < 3^3$; denn für Potenzen mit dem Exponenten 3 gilt: Je größer die Basis ist, desto größer ist die Potenz.

(V) Mit den gleichen Begründungen folgt aus $x > 3$, daß $x^x > x^3 > 3^3$ gilt.

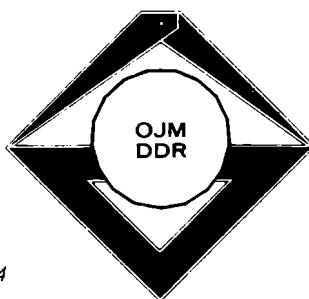
Aus (I) bis (IV) folgt, daß unter allen positiven rationalen Zahlen x genau die Zahl $x = 3$ die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt.

Auf die Lösungen zu den Olympiadeklassen 11/12 wird aus Platzgründen verzichtet.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1984



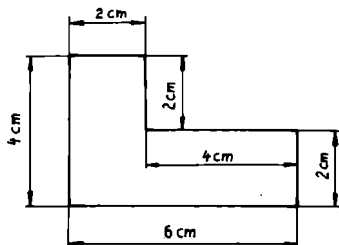
Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden ab Oktober 1984 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärksten Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\angle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\angle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B , während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

240511 Aus Flächenstücken wie im Bild kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt. Wie viele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich? Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!

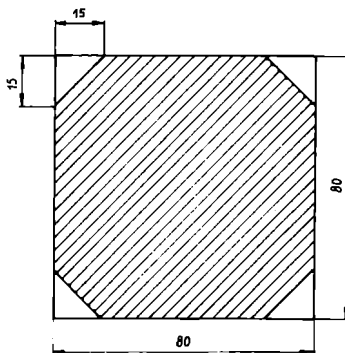


240512 Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36. Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht

den gegebenen Dividenten, sondern die Zahl 756.

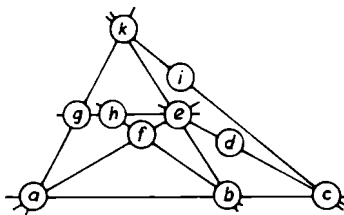
Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

240513 Die schraffierte Fläche im Bild entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden. Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Quadratzentimeter!



240514 In die Felder des Bildes soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + f + e = a + g + k \\ &= b + d = b + e + k = b + f + h \\ &= c + d + e = c + i + k = e + h + g \\ &= e + i = 15 \end{aligned}$$



a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, daß $e = 5$ und $k = 2$ ist!

b) Gib eine weitere von a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)

c) Beweise, daß es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem $e = 10$ gilt!

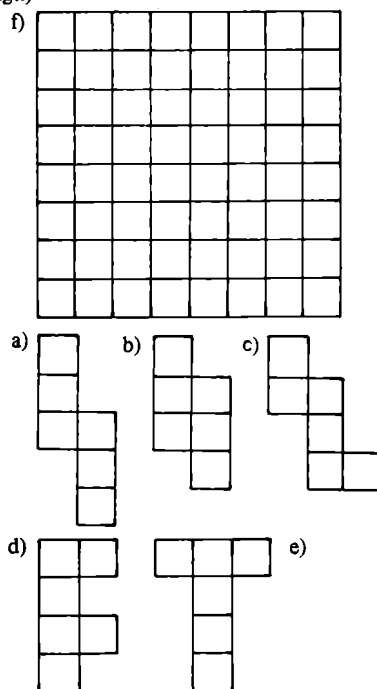
Olympiadeklasse 6

240611 Zum Pionergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eines, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

240612 Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, daß es Körpernetze von Würfeln seien.

(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)



(2) Zeige, daß es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden! Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.

Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein!

Wie viele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

240613 Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so daß er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar. Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, daß von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinaus-

zuragen. In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, daß der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.

Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

240614 Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 11111111.

a) Um welche Zahl z handelt es sich?

b) Ermittle eine Zahl x , die folgende Eigenschaft besitzt!

Wenn man x mit der in a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.

c) Gibt es außer der in b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?

Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

Olympiadeklasse 7

240711 Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:

Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Foto“, „Junge Mathematiker“, „Turnen“ an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Foto“.

(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Junge Mathematiker“.

(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Turnen“.

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Junge Mathematiker“.

(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Turnen“.

(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Junge Mathematiker“ als auch zur AG „Turnen“.

Schließlich gilt auch die Aussage:

(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, daß in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

240712 Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a , b , c in der Darstellung (a , b , c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, daß $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander „verschieden“, wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein

Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?

(2) Beim Spiel fragt Peter: „Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?“ Beantworte diese Frage!

(3) Klaus überlegt: „Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?“ Ermittle auch diese Anzahl!

(4) Nach genau 50 Würfeln beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

240713 In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal.

Die jeweils beiden Erstplatzierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu je sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.

Die jeweils beiden Erstplatzierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner. Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vorrunde und Zwischenrunde soll eine Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluß der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluß der Endrunde und der Siegerehrung soll wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?

Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, daß der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

240714 a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:

(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!

(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche

Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite.

Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorgegeben sind, damit in b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

Olympiadeklasse 8

240811 An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammen genommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21 % des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30 % des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2 % des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

240812 Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft „Mathematik“ folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen.

Wieviele solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

240813 Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, daß sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

240814 Aus drei kongruenten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a läßt sich ein Trapez zusammensetzen.

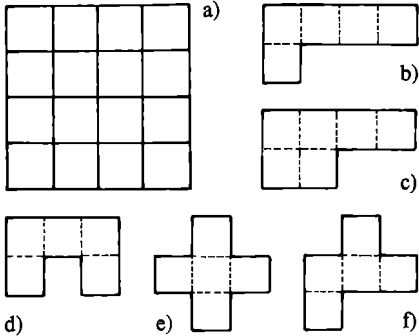
a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez läßt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Paralleelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a !

Olympiadeklasse 9

240911 a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, daß jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und daß dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!



b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$ -Feldes möglich ist!

240912 Beweisen Sie, daß die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

240913 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A . Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D . Beweisen Sie, daß dann stets $AB \cdot CD = AC \cdot AD$ gilt!

240914 Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und

$\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest: Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also

$1 < \frac{2}{x-10}$; für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$; für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$. Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung

$1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.

Norbert behauptet: Die Ungleichung

$1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$. Petra

behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Olympiadeklasse 10

241011 Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich „im Kopf“ nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu

der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, daß dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

241012 In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D . Für ihn gelte

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$!

241013 Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z , für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x(y+z) = 0. \quad (1)$$

$$y(x+z) = 0. \quad (2)$$

241014 Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k , die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, daß jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und daß jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?

Olympiadeklassen 11/12

241211 Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis, so bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks sowie F_2 die Differenz zwischen dem Flächeninhalt des Umkreises und F_1 . Man ermittle unter allen Werten, die das Verhältnis $F_2 : F_1$ unter diesen Voraussetzungen annehmen kann, den kleinsten ganzzahligen Wert.

241212 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das Gleichungssystem

$$x^2y - \frac{6}{xy} = 13,$$

$$xy + x^2y = 6 \quad \text{erfüllen.}$$

241213 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x , für die

$$2x-3, 5x-14 \quad \text{und} \quad \frac{2x-3}{5x-14}$$

ganze Zahlen sind.

241214 Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Jeder der beiden Spieler erhält neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 verzeichnet sind, jede dieser Zahlen auf genau einer Karte (des betreffenden Spielers).

A beginnt und legt eine seiner Karten auf den Tisch; dann legt B eine seiner Karten auf den Tisch, dann wieder A und dann B usw. Es wird jeweils die Summe der auf dem Tisch liegenden Zahlen festgestellt. Das Spiel ist beendet, wenn eine Summe

Lösungen



Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Beweise, daß $n^2 + n + 1$ ein Vielfaches von 19 für unendlich viele Werte von n ist!

Lösung: Beachte, daß $n^2 + n + 1 = (n+8) \cdot (n-7) - 3 \cdot 19$ ist! Deshalb ist $n^2 + n + 1$ nur dann ein Vielfaches von 19, wenn es $n+8$ oder $n-7$ ebenfalls ist. Angenommen $n = 19k - 8$ und $n = 19k + 7$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$, dann erhalten wir zwei unendliche Folgen der Vielfachen von 19.

Zum Beispiel $k = 0$, dann ist $n = 7$.

$$n^2 + n + 1 = 49 + 7 + 1 = 57 = 19 \cdot 3.$$

▲ 2 ▲ Ein Lastwagen transportiert 60 Kartons mit Ölfaschen. Die Masse der Ladung beträgt 1320 kg. Jede Ölfflasche hat eine Masse von 1,4 kg (einschließlich Glas), und die Masse jedes leeren Kartons beträgt 1 kg. Berechne

a) die Anzahl der transportierten Ölfflaschen,

b) die Anzahl der Flaschen in jedem Karton!

Lösung: a) Die Anzahl der Ölfflaschen sei x , dann gilt die Gleichung

$$1320 = 60 + 1,4x, \\ x = 900.$$

Die Anzahl der transportierten Ölfflaschen beträgt 900.

b) $900 : 60 = 15$.

In jedem Karton befinden sich 15 Flaschen.

▲ 3 ▲ Setzt alle zehn Grundziffern von 0 bis 9 so in die Kreise ein, daß zwei richtig gerechnete Multiplikationsaufgaben entstehen!

$$\begin{array}{r} \text{Lösung:} \quad 15 \quad 29 \\ \times 4 \quad \times 3 \\ \hline 60 \quad 87 \end{array}$$

Lösung zu:

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler liegt darin, daß die Gleichung nicht nach der Unbekannten x aufgelöst wurde!

erreicht wird, die größer als 99 ist. Verloren hat derjenige Spieler, durch dessen Karte diese Summe erreicht wurde; der andere Spieler hat gewonnen.

Man untersuche, ob es eine Strategie gibt, durch die bei jeder möglichen Reihenfolge der von A gespielten Karten der Spieler B den Gewinn erzwingen kann. Falls das zutrifft, gebe man eine solche Strategie an.

Richtig muß wie folgt gerechnet werden:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

hieraus:

$$\frac{40-4x}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x} \quad (a)$$

und weiter:

$$(40-4x)(13-x) = (x-7)(4x-40)$$

hieraus:

$$520 - 92x = 280 - 68x$$

$$\text{und: } 24x = 240 \text{ also: } x = 10!$$

In die Ausgangsgleichung eingesetzt folgt:

$$\frac{15}{3} - 5 = 0; \quad \frac{15}{3} = 5!$$

Setzt man den Wert $x = 10$ in Gleichung (a) ein, ergibt sich in beiden Quotienten im Zähler jeweils Null! Die Gleichung (a) lautet dann $0 = 0$. Das ist sicher richtig. Wenn man dann über Kreuz multipliziert, folgt:

$$0 \cdot (13 - x) = 0 \cdot (x - 7),$$

was ebenfalls noch richtig ist.

Der falsche Ausdruck $13 - x = 7 - x$ ergibt sich dann, wenn man beiderseits (verbote-nerweise) durch Null dividiert, wobei vorher auf der rechten Seite noch (-1) vor die Klammer gezogen wird.

Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe – Weizenkörner auf einem Schachbrett

Bezeichnet w_k die Anzahl der Weizenkörner auf dem k ten Feld, so gilt:

$$w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 4 = 2^2, w_4 = 8 = 2^3,$$

$$w_5 = 16 = 2^4, w_6 = 32 = 2^5, w_7 = 64 = 2^6,$$

$$w_8 = 128 = 2^7, w_9 = 256 = 2^8,$$

$$w_{10} = 512 = 2^9,$$

$$w_{11} = 1024 = 2^{10}, \text{ usw., } w_{64} = 2^{63}.$$

Die gesuchte Anzahl ist

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{64}$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}.$$

Offenbar ist $2s = 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$.

Hieraus folgt

$$s = 2s - s = 2^{64} - 1$$

$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Lösungen zu: Die fixe 7

▲ 1 ▲ 15 Punkte:



3 Punkte:



▲ 2 ▲ Notiert man alle Möglichkeiten von (1, 1) bis (6, 6) in einer Tabelle und markiert die gewinnenden, so findet man 17 von 36. Damit ist die Chance bei fast jedem zweiten Wurf gegeben.

▲ 3 ▲ Da mit (1, 4/2, 1) auch sechs Punkte gewonnen werden können (4, 2/...), kommen nur (3, 5/...) und (5, 3/...) in Betracht. Das sind zwei von 36 Möglichkeiten (siehe Tabelle von Aufgabe 2).

Zu diesen zwei dürfen nur solche Augen kommen, die mit 5 oder 3 oder beiden keine andere Wertung erlauben. Das sind nur (.../5, 5). Zwei von 36 und davon nur einer von 36 gewinnen genau 5 Punkte,

also $2 \cdot 1 = 2$ von $36 \cdot 36 = 1296$ Würfeln, d. h. im Durchschnitt jeder 648. Wurf.

Lösung zu: Flächenhaftes

Bei geometrischer Betrachtungsweise erhält man durch Abzählen der Kästchen (und vollkommen ohne Rechnung) die folgenden Buchstabenflächen (in FE):

| a | l | p | h | a |
|----|---|----|----|----|
| 18 | 8 | 20 | 18 | 18 |

Also beträgt die Gesamtfläche der 5 Buchstaben 82 FE.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Zahlenquadrat

$$6 - 1 + 3 = 8; \quad 2 \cdot 2 + 3 = 7;$$

$$1 \cdot 5 - 1 = 4$$

$$7 + 4 - 9 = 2; \quad 1 \cdot 8 - 2 = 6;$$

$$4 \cdot 6 : 8 = 3.$$

Gewichtsprobleme

Dieser Trugschluß beruht (wie viele ähnliche) darauf, daß an einer Stelle der Gleichungen eine unerlaubte Division durch Null erfolgt. Im vorliegenden Beispiel ist das in der vorletzten Zeile der Fall. Auf Grund der Ausgangsgleichung ist hier $(G - g - \ddot{u}) = 0!!!$

Überraschende Vereinfachungen

a) Durch äquivalente Umformung der Gleichung

$$a\sqrt{a + \frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

erhält man

$$b = a^a - 1.$$

Wegen $b \neq 0$ und a, b einstellige natürliche Zahlen, besitzt die Gleichung $b = a^a - 1$ genau eine Lösung, nämlich

$$a = 2, \quad b = 3.$$

Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

$$\text{Probe I: } \sqrt[2]{2 + \frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}}$$

$$2 \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Probe II: } \sqrt[2]{3 + \frac{3}{2^3}} = 3 \cdot \sqrt[2]{\frac{3}{2^3}}$$

$$3 \cdot \sqrt[2]{\frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt[2]{\frac{3}{8}}$$

b) Vermutung:

$$\sqrt[n]{z + \frac{z}{z^n - 1}} = z \sqrt[n]{\frac{z}{z^n - 1}}; \quad (n, z, \text{ natürliche Zahlen}) \quad z^n \neq 1$$

Beweis: Der Term $\sqrt[n]{z + \frac{z}{z^n - 1}}$ wird umgeformt:

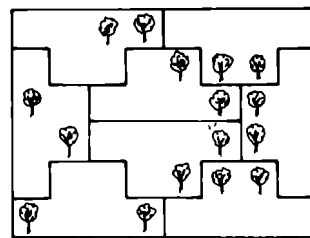
$$\sqrt[n]{z + \frac{z}{z^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{z(z^n - 1) + z}{z^n - 1}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{z^{n+1}}{z^n - 1}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{z^n \cdot z}{z^n - 1}}$$

$$= z \sqrt[n]{\frac{z}{z^n - 1}} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Zerlegungsproblem



Magische Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge [3, 5]; [5, 7]; [11, 13]; [17, 19]; [29, 31]; [41, 43]; [59, 61]; [71, 73]. Bestimmen der Summe: Addition der Primzahlen ergibt 488, Division durch 4 ergibt 122. Die Zeilen- bzw. Spaltensumme beträgt daher 122. Aufschreiben möglicher Kombinationen:

| | | | |
|------|-----|-----|------|
| 71 | 73 | 71 | 71 |
| 31 | 41 | 43 | 29 |
| 11 | 5 | 5 | 17 |
| + 7 | + 3 | + 3 | + 5 |
| 122 | 122 | 122 | 122 |
| 61 | 61 | 59 | 59 |
| 29 | 43 | 41 | 31 |
| 19 | 11 | 17 | 19 |
| + 13 | + 7 | + 5 | + 13 |
| 122 | 122 | 122 | 122 |

Durch Aneinanderreihung identischer Summanden und deren „räumliche“ (beliebige) Anordnung lassen sich alle Primzahlen bis auf 5, 17, 29 und 71 (Mittelquadrat) eindeutig auf die äußeren Felder verteilen.

Es gibt 10 Möglichkeiten, um auf die gesuchte Summe 122 zu kommen.

| | | | |
|----|----|----|----|
| 73 | 11 | 7 | 31 |
| 3 | 29 | 71 | 19 |
| 41 | 17 | 5 | 59 |
| 5 | 61 | 43 | 13 |

Doppelt

Für jede 3stellige Zahl gilt

$$100a + 10b + c$$

mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq a, b \leq 9$.

Mit $11 \cdot 91 = 1001$ multipliziert, ergibt sich

$$\begin{aligned} &1001(100a + 10b + c) \\ &= 100\,100a + 10\,010b + 1001c \\ &= (100\,000a + 10\,000b + 1000c) \\ &\quad + (100a + 10b + c), \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Siebzehn plus zwei

1. rekursiv, 2. dekodieren, 3. proportional, 4. Refraktion, 5. indirekt, 6. Bilanz, 7. Mannschaft, 8. Diagramm, 9. Verteilung, 10. Seebeben, 11. Funktion, 12. Messwert, 13. Zypem, 14. Lochstreifen, 15. Astronom, 16. Gerade, 17. Mare, a. Koordinatensystem, b. Seitenhalbierende.

Lustige Logelei

$$\text{Aus (3): } q = \frac{2}{3}n$$

mit (4) und vorige in (2) folgt:

$$p = 2m \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}mn$$

$$\text{in (1) folgt: } 2m + n + \frac{4}{3}mn + \frac{2}{3}n = 38$$

mit $n = 12m^3$ folgt:

$$2m + 12m^3 + \frac{48}{3}m^4 + \frac{24}{3}m^5 = 38$$

$$2m + 20m^3 + 16m^4 = 38 \text{ bzw.}$$

$$m + 10m^3 + 8m^4 = 19. \quad (5)$$

Aus (5) folgt die triviale Lösung $m = 1$.

Damit: $n = 12$; $p = 16$; $q = 8$;

die entsprechenden Buchstaben

des Alphabets sind:

$$m = a; n = l; p = p; q = h,$$

$$\text{also: } m + n + p + q + m = \text{alpha}.$$

Spiel mit Zahlen

Weitere Beispiele:

$$9 \cdot 8 + 7 - 65 + 43 \cdot 2 \cdot 1 = 100$$

$$98 - 7 - 6 + 54 : 3 - 2 - 1 = 100$$

$$9 + 87 \cdot 6 - 5 \cdot 43 \cdot 2 - 1 = 100$$

$$98 : 7 + 6 + 54 \cdot 3 : 2 - 1 = 100$$

$$9 \cdot 8 + 76 - 54 + 3 + 2 + 1 = 100$$

$$98 : 7 : 6 + 5 \cdot 4 : 3 - 21 = 100$$

$$9 - 8 + 76 + 54 - 32 + 1 = 100$$

$$98 - 7 + 6 - 54 : 3 + 21 = 100$$

$$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$$

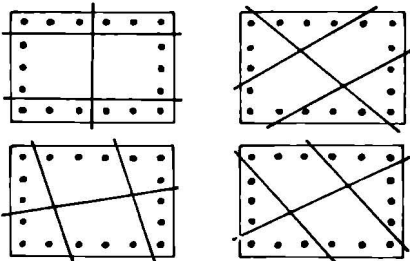
Lösungen zu: Knobeln und Raten

Heft 3/84

Faktoren gesucht

Das Produkt aus einer ein- und einer zweistelligen natürlichen Zahl muß zwei- oder dreistellig sein, also kommen als Produkt nur 777 und 77 in Frage. 777 scheidet aus, da nur die Zerlegungen (mit 2 Faktoren) $777 = 1 \cdot 777 = 3 \cdot 259 = 7 \cdot 111 = 21 \cdot 37$ möglich sind (bis auf Vertauschung der Faktoren). 77 dagegen ist zerlegbar in $77 = 1 \cdot 77 = 7 \cdot 11$ (bis auf Vertauschung der Faktoren). Es gibt damit zwei Lösungsmöglichkeiten: Die gesuchten Faktoren lauten 1 und 77 oder 7 und 11.

Gerechte Teilung



Richtig gezählt

Die Figur enthält 16 Dreiecke:

4 Dreiecke der Form (1, 3, 7),

4 Dreiecke der Form (1, 3, 5) und

8 Dreiecke der Form (1, 2, 5).

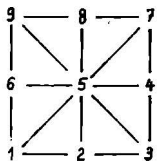
Die Figur enthält weiterhin 17 Vierecke:

1 Quadrat der Form (1, 3, 7, 9),

4 Quadrate der Form (1, 2, 5, 6),

4 Rechtecke der Form (1, 3, 4, 6) und

8 Trapeze der Form (1, 3, 5, 6).

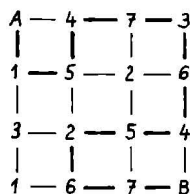


Zwei besondere Zahlen

In der ersten Wortgleichung kommen für L, wie man leicht schließt, die Ziffern von

0 bis 8 nicht in Frage; es bleibt L = 9. Daraus folgt E = 1. Für G schließt man die Ziffern von 1 bis 9 aus; es bleibt G = 0. Damit folgt A = 8. In der zweiten Wortgleichung, in der A = 8 und E = 1 nun bekannt sind, schließt man für K die Ziffern von 0 bis 3 und von 5 bis 9 aus; es bleibt K = 4. Damit ergeben sich M = 2 und T = 7. Es gehen also über: EGAL · L = LAGE in $1089 \cdot 9 = 9801$ und META · K = ATEM in $2178 \cdot 4 = 8712$. (1089 und 2178 sind deshalb „zwei besondere Zahlen“, weil sie die einzigen vierstelligen natürlichen Zahlen sind, die sich bei Multiplikation mit einer geeigneten einstelligen Zahl – 9 bzw. 4 – in der Reihenfolge ihrer Ziffern umkehren.)

Richtiger Weg



Hokuspokus mit Hölzchen

Aus 4 Streichhölzern: VII

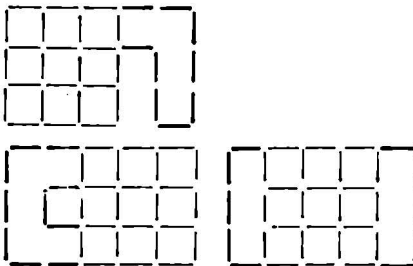
Aus 3 Streichhölzern: IX

Aus 21 Streichhölzern: 1983

Aus 22 Streichhölzern:

MCMLXXXIII

Hölzchenspiel



Ein Hausfest mit Tombola

Die Summe aller Losnummern von 1 bis 20 beträgt 210, folglich muß die Summe für eine Etage $210 : 5 = 42$ betragen. Addiert man die beiden kleinsten Nummern (1 und 2) zu den beiden größten (19 und 20), so erhält man gerade 42. Verfährt man mit den übrigen Nummern genauso ($3 + 4 + 17 + 18$, $5 + 6 + 15 + 16$, $7 + 8 + 13 + 14$, $9 + 10 + 11 + 12$), so ergibt sich auch jedesmal die Summe 42. Jetzt muß man nur noch, um Bedingung 2 zu erfüllen, die für die jeweilige Etage in Frage kommenden Nummern der Größe nach eintragen.

| | | | |
|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 19 | 20 |
| 3 | 4 | 17 | 18 |
| 5 | 6 | 15 | 16 |
| 7 | 8 | 13 | 14 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |

Zerlegung gesucht

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 23 | 1 | 24 | 2 | 7 | 18 |
| 3 | 22 | 13 | 14 | 17 | 8 |
| 21 | 4 | 11 | 12 | 5 | 6 |
| 15 | 10 | 16 | 9 | 20 | 19 |

Kurz überlegen – schnell antworten

1. Nein. 11 ist eine Primzahl.

2. $0,999 - 0,1 = 0,899$.

3. 1000.

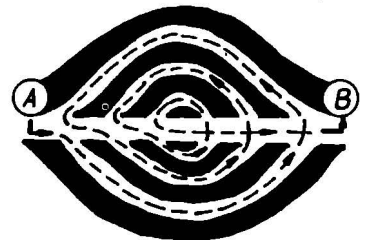
4. 1 Stunde

(4 Zwischenräume zu je $\frac{1}{4}$ Stunde).

5. Ja. 1,1.

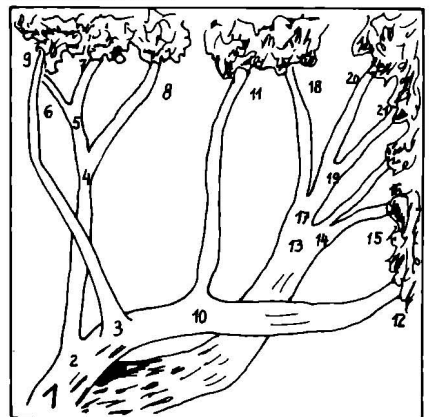
Eine Bootsfahrt, die ist lustig ...

Die Figur zeigt eine mögliche Fahrtroute: (Das Boot könnte natürlich auch zuerst nach links abbiegen und die Fahrtroute dann symmetrisch – Symmetrieachse: Hauptfluß – zur abgebildeten nehmen.)



Eine alte Linde

Es sind die folgenden 11 Kletterrouten möglich (s. Bild):



1-2-4-5-6, 1-2-4-5-7, 1-2-4-8, 1-3-9, 1-10-11, 1-10-12, 1-13-14-15, 1-13-14-16, 1-13-17-18, 1-13-17-19-20 und 1-13-17-19-21.

Magisches Quadrat

Das Quadrat mit den derartig vorgegebenen Zahlen hat folgende Eigenschaft: Setzt man in irgendeins der leeren Felder irgendeine reelle Zahl a , so ist die weitere Eintragung eindeutig bestimmt. Es gibt also so viele verschiedene Eintragungen, wie es reelle Zahlen gibt, und das sind überabzählbar unendlich viele.

Beginnt man z. B. in der 1. Zeile mit der reellen Zahl a , so erhält man durch schrittweises Ausfüllen:

$$\begin{array}{rclclcl} 5 & - & 2 & + & a & = & (a+3) \\ & & & + & & & + \\ (8-a) & + & 15 & - & 2 & = & (21-a) \\ & & & - & & & - \\ (20-a) & - & (12-a) & - & 4 & = & 4 \\ = & & = & & = & & = \\ 17 & + & (5+a) & - & (2+a) & = & 20 \end{array}$$

Beispielsweise ergeben sich

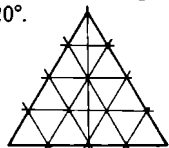
für $a = 7$ bzw. $a = 1,5$:

$$\begin{array}{r} 5 - 2 + 7 = 10 \\ - + - + \\ 1 + 15 - 2 = 14 \\ + - + - \\ 13 - 5 - 4 = 4 \\ = = = = \\ 17 + 12 - 9 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 - 2 + 1,5 = 4,5 \\ - + - + \\ 6,5 + 15 - 2 = 19,5 \\ + - + - \\ 18,5 - 10,5 - 4 = 4 \\ = = = = \\ 17 + 6,5 - 3,5 = 20 \end{array}$$

Dreieckszerlegung

Die Zerlegung ist eindeutig bis auf Drehung der Figur um ganzzahlige Vielfache von 120° .



Wie man sich setzt...

Vater (V), Mutter (M) und Sohn (S) besetzen 3 Stühle, der vierte Stuhl bleibt frei. Auf diesen 3 Stühlen können sie in 6 verschiedenen Anordnungen sitzen: (V, M, S), (V, S, M), (M, V, S), (M, S, V), (S, V, M), (S, M, V). Nun kann aber jeder der vier Stühle einmal frei bleiben und die übrigen drei Stühle werden besetzt. Da es in jedem dieser vier Fälle 6 Plazierungsmöglichkeiten gibt, so gibt es für die Familie insgesamt $24 = 4 \cdot 6$ Möglichkeiten, sich in unterschiedlicher Anordnung an den Tisch zu setzen. (Es geht bei dieser Aufgabe um die Ermittlung der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von 4 Elementen zur Klasse 3.)

Zahl gesucht

Die gesuchte Zahl n muß gemeinsamer Teiler von $45 = 49 - 4$ und $63 = 65 - 2$ sein. Aus der Zerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ und $63 = 3^2 \cdot 7$ ergibt sich $n = 3^2 = 9$ (da $n = 3$ nicht in Frage kommt, denn n muß größer als der größte Rest sein).

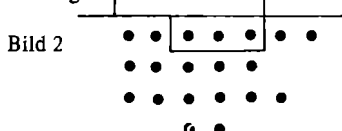
Lösung zu:

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Guzmán
Heft 2/84

▲ 2453 ▲ Um die dritte Reihe zu erreichen, braucht man $2^3 = 8$ Steine, die wie folgt angeordnet werden.



Man könnte nun annehmen, daß man mit $2^4 = 16$ Steinen in die vierte Reihe kommt. Das ist nicht der Fall. Es werden 20 Steine benötigt.



Die große Überraschung aber kommt erst: die fünfte Reihe kann man überhaupt nicht erreichen, wie groß man die Anzahl der Steine auch wählt.

Der exakte mathematische Beweis für

diese Tatsache ist nicht einfach, er benutzt einen interessanten „Trick“. Wir nehmen an, daß ein Feld der fünften Reihe erreicht werden kann, und schreiben in dieses Feld die Zahl 1. Allen anderen Feldern werden nun ebenfalls Zahlen x, x^2, x^3 usw. zugeordnet, wie im Bild angegeben. x soll dabei die positive Zahl sein, die die Gleichung $x^2 + x = 1$ erfüllt (d. h. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ bzw. $x \approx 0,62$).

Bild 3

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \times & & & \\ & & & \times^2 \times \boxed{1} \times & & & \\ & & & \times^3 \times^2 \times \times^2 & & & \\ & & & \times^4 \times^3 \times^2 \times^3 & & & \\ & & & \times^5 \times^4 \times^3 \times^4 & & & \\ & & & \times^6 \times^5 \times^4 \times^5 & & & \\ & & & \times^7 \times^6 \times^5 \times^6 & & & \\ & & & \times^8 \times^7 \times^6 \times^7 & & & \end{array}$$

Wie wir gleich sehen werden, hat diese Zuordnung von Zahlen einen besonderen Zweck. Wir stellen eine Anzahl von Steinen auf das Brett und ermitteln die Summe aller Zahlen von den Feldern, auf denen diese Steine stehen. Diese Summe sei s . Wir führen nun einen Zug aus und ermitteln wieder die Summe, die wir diesmal s_1 nennen. Die wichtige Eigenschaft ist, daß sich die Summe nicht vergrößert haben kann: $s_1 \leq s$. Da der Zug, den wir gemacht haben, zwei benachbarte Felder betrifft, müssen wir, um s_1 zu bekommen, zwei Summanden x^k und x^{k+1} entweder durch x^{k-1} oder durch x^{k+2} ersetzen. Im ersten Fall bleibt die Summe gleich:

$$x^k + x^{k+1} = x^{k-1}$$

wegen der Definition von x , also $s_1 = s$. Man sieht leicht, daß dieser Fall eintritt, wenn der ausgeführte Zug dem mit 1 gekennzeichneten Feld näherkommt. Im zweiten Fall ist offensichtlich $s_1 < s$. Wir können nun eine Reihe von Zügen durchführen und die entsprechenden Summen mit $s_1, s_2, \dots, s_n$ bezeichnen. Es ist $s_n = s$, und wenn bei der letzten Stellung das mit 1 bezeichnete Feld erreicht ist, ist $s_n \geq 1$. Dann müßte auch $s \geq 1$ sein. Wir zeigen nun, daß dies nicht möglich ist, wenn am Anfang alle Steine in der unteren Hälfte des Brettes stehen. Wir zeigen nämlich, daß die Summe der Zahlen in allen (unendlich vielen) Feldern der unteren Hälfte gerade 1 ergibt. Dazu brauchen wir eine Formel für eine unendliche Summe:

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2.$

Diese Formel gilt für $0 < x < 1$, mit x^k multipliziert ergibt sie

$$x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots = \frac{x^k}{1-x}.$$

Wenn wir nun die Spalten der unteren Hälfte des Brettes aufsummieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{x^5}{1-x} + 2 \cdot \frac{x^6}{1-x} + 2 \cdot \frac{x^7}{1-x} + \dots \\ & = \frac{x^5}{1-x} \cdot (1+2) \cdot (x+x^2+\dots) \end{aligned}$$

$$= x^3 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{x}{1-x}\right) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 = 1,$$

wobei die Gleichung $x^2 = 1 - x$ bzw. $x^3 + x^2 = x$ ausgenutzt wurde.

Obwohl man nicht in jedem Fall so einfach mit unendlichen Summen umgehen kann, zeigt dies Beispiel doch die Vorteile dieser Reihen. Da jedem Feld eine positive Zahl zugeordnet war, ist s bei endlich vielen Spielsteinen im unteren Teil immer kleiner als 1. Das beendet den Beweis. Mit dieser Methode kann man auch zeigen, daß die angegebenen Werte 8 und 16 für die dritte und vierte Reihe tatsächlich die Mindestzahlen sind.

Lösung zu: Eine harte Nuß

Heft 1/84

Angenommen, x und y seien ganze Zahlen, die der Gleichung

$$2\sqrt{x} + \sqrt{2y} = \sqrt{32} \quad (1)$$

genügen, so muß für diese offenbar $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gelten.

Aus (1) erhält man durch Quadrieren von $\sqrt{2y} = \sqrt{32} - 2\sqrt{x}$:

$$y = 16 - 2\sqrt{32x} + 2x \quad (2)$$

$$\text{bzw. } 2\sqrt{32x} = 16 + 2x - y. \quad (3)$$

Nach (3) muß $2\sqrt{32x}$ eine ganze Zahl sein, d. h. es gilt $2\sqrt{32x} = a$, a ganz und $a \geq 0$, woraus man durch Quadrieren erhält:

$$2x = \left(\frac{a}{8}\right)^2. \quad (4)$$

Nach (4) ergibt sich aus der Ganzzahligkeit von x , daß a ein ganzzahliges Vielfaches von 8 sein muß, also $a = 8b$, b ganz und $b \geq 0$. Damit geht (4) über in

$$2x = b^2. \quad (5)$$

Nach (5) ist b^2 eine gerade Zahl, folglich muß auch b gerade sein, d. h. $b = 2c$, c ganz und $c \geq 0$, woraus nach (5) folgt:

$$x = c^2. \quad (6)$$

Nun gilt aber für $x > 8$ stets $2\sqrt{x} > 2\sqrt{8} = \sqrt{32}$, also muß wegen (1) $0 \leq x \leq 8$ gelten, woraus man mit (6) erhält: $0 \leq c \leq 2$.

Es kann also c nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen. Mit (6) und (2) ergibt sich jetzt die folgende Tabelle:

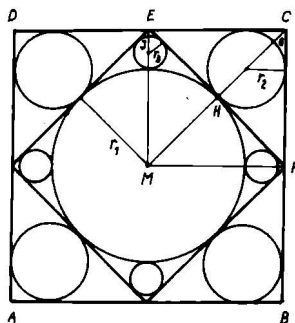
| c | 0 | 1 | 2 |
|-----|----|---|---|
| x | 0 | 1 | 4 |
| y | 16 | 4 | 0 |

Man überzeugt sich leicht davon, daß jedes der Paare (0, 16), (2, 4) und (8, 0) auch wirklich die Gleichung (1) erfüllt. Für die Lösungsmenge L der Gleichung (1) gilt also $L = \{(0, 16), (2, 4), (8, 0)\}$.

Lösungen zu: Eine harte Nuß

Heft 2/84

Wir bezeichnen den Mittelkreis der Figur mit K_1 , einen jeden der 4 (offenbar untereinander kongruenten) Eckkreise des Quadrats $ABCD$ mit K_2 und einen jeden der 4 (offenbar untereinander kongruenten) Eckkreise des eingeschriebenen Quadrats mit K_3 . Bezeichnen wir die Radien der drei Kreise entsprechend mit r_1, r_2 bzw. r_3 und



ihre Flächeninhalte mit A_1, A_2 bzw. A_3 , so gilt für die Summe A der Flächeninhalte aller im Quadrat $ABCD$ liegenden Kreise

$$A = A_1 + 4A_2 + 4A_3,$$

und wegen $A_i = \pi r_i^2$ ($i = 1, 2, 3$) gilt:

$$A = \pi(r_1^2 + 4r_2^2 + 4r_3^2). \quad (1)$$

a) Wir berechnen den Radius r_1 von K_1 :

Im Dreieck EFC gilt wegen $\overline{EC} = \overline{FC} = \frac{a}{2}$

nach dem Satz des Pythagoras $\overline{EF}^2 = \frac{a^2}{2}$,

also ist $\overline{EF} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$. Offenbar gilt $r_1 = \frac{\overline{EF}}{2}$

und damit $r_1 = \frac{a}{4} \sqrt{2} \approx 0,35a$. (2)

b) Wir berechnen den Radius r_2 von K_2 :

Offenbar gilt nach dem Strahlensatz

$$r_2 : \overline{MF} = (r_2 + \overline{GC}) : \overline{MC}. \text{ Wegen } \overline{MF} = \frac{a}{2}$$

und $\overline{MC} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ ergibt sich

$$\overline{GC} = (\sqrt{2} - 1)r_2. \quad (3)$$

Andererseits gilt $\overline{MC} = r_1 + 2r_2 + \overline{GC}$, wor-

aus wegen $\overline{MC} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ folgt:

$$\overline{GC} = \frac{a}{4} \sqrt{2} - 2r_2. \quad (4)$$

Durch Gleichsetzen von (3) und (4) erhält man

$$r_2 = \frac{a}{4} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,15a. \quad (5)$$

c) Wir berechnen den Radius r_3 von K_3 nach demselben Prinzip wie bei b): Wir schließen der Reihe nach auf:

$$\overline{r_3 : MH} = (r_3 + \overline{IE}) : \overline{ME}, \overline{IE} = (\sqrt{2} - 1)r_3, \overline{ME} = r_1 + 2r_2 + \overline{IE},$$

$\overline{IE} = \frac{a}{4} (2 - \sqrt{2}) - 2r_3$, und schließlich ergibt sich:

$$r_3 = \frac{a}{4} (3\sqrt{2} - 4) \approx 0,06a. \quad (6)$$

d) Setzt man (2), (5) und (6) in (1) ein, so ergibt sich

$$A = \frac{\pi}{8} (81 - 56\sqrt{2}) a^2 \approx 0,71a^2.$$

Lösung zu: Eine harte Nuß

Heft 3/84

▲ 2454 ▲ A = Anzahl der am Anfang vorhandenen Nüsse, $\approx 30\,000$

a = Anzahl der Nüsse, die jeder der fünf Matrosen bei der letzten Teilung erhält.

Es gilt

$$\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} (A - 1) - 1 \right] - 1 \right) - 1 \right] = 5a + 1, \text{ d. h.}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$- \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 5a + 1, \text{ also}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) - \sum_{k=0}^4 \left(\frac{4}{5}\right)^k = 5a.$$

$$\text{Mit } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ für } q = \frac{4}{5}$$

und $n = 4$ entsteht

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) - \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5}{1 - \frac{4}{5}} = 5a,$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) + 5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 5(a + 1),$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A + 4) = 5(a + 1), \frac{A + 4}{5}$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^5 (a + 1).$$

Also: A durch 5 mit Rest 1 teilbar $\Rightarrow$

$A + 4$ durch 5 ohne Rest teilbar $\frac{A + 4}{5}$

ganzzählig $\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^5 (a + 1)$ ganzzählig $\Rightarrow$

$a + 1 = k \cdot 4^5$ (k natürliche Zahl) $\Rightarrow$

$$a = k \cdot 4^5 - 1.$$

Daraus:

$$\frac{A + 4}{5} = \left(\frac{5}{4}\right)^5 k \cdot 4^5 = k \cdot 5^5,$$

$$A + 4 = k \cdot 5^6 - 4 \quad (k \text{ natürliche Zahl}).$$

Wegen $A \approx 30\,000$ folgt $k = 2$

und damit $A = 31\,246$.

Lösung zu:

Mathematik und Schach

Heft 3/84

Bei den fünf Figuren wären $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$ verschiedene Anordnungen möglich. Wegen der Übersicht sei der weiße König als *Themafigur* gewählt. Nach der Voraussetzung entfallen jene Anordnungen, wenn der König auf e1 steht, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$.

Steht er auf d1 (c1, b1, a1), können noch drei andere Figuren ihr (verbotenes) Standfeld einnehmen, d. h., es werden noch einmal $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ $6 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten der Anordnung ausgeschlossen. Da jedoch dabei 5 Wiederholungen auftreten, entfallen demnach 13. Das gleiche gilt auch, wenn der König auf c1, b1 oder a1 postiert wird. Somit ergibt sich:

$$120 - 24 - (4 \cdot 13) = 44.$$

Es sind 44 verschiedene Anordnungen der Figuren nach der gegebenen Voraussetzung möglich.

Schachfiguren-Quiz:

1-15, 3-13, 5-8, 7-9, 10-4,

12-2, 14-6, 16-11

Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe

Heft 2/84

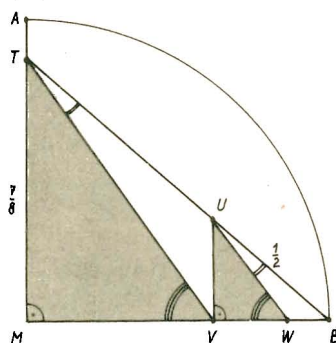
Der Bruch $\frac{355}{113}$ und die Zahl π .

Im rechtwinkligen Dreieck TBM (Bild) gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\overline{TB}^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1 = \frac{113}{64}. \quad (1)$$

Im rechtwinkligen Dreieck UVB gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \overline{UV}^2 + \overline{VB}^2. \quad (2)$$



Die beiden Dreiecke sind ähnlich; also gilt $\overline{TM} : \overline{MB} = \overline{UV} : \overline{VB}$,

d. h. $\frac{7}{8} : 1 = \overline{UV} : \overline{VB}$, also

$$\overline{UV} = \frac{7}{8} \overline{VB}. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt (durch Einsetzen von $\overline{UV} = \frac{7}{8} \overline{VB}$ in (2))

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{8} \overline{VB}\right)^2 + \overline{VB}^2 = \left(\left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1\right) \overline{VB}^2 = \frac{113}{64} \overline{VB}^2, \text{ d. h. } \overline{VB}^2 = \frac{16}{113}. \quad (4)$$

Die Dreiecke TVB und UBW sind ähnlich, also gilt $\overline{UB} : \overline{WB} = \overline{TB} : \overline{VB}$ oder $\overline{UB} \cdot \overline{VB} = \overline{TB} \cdot \overline{WB}$ oder

$$\frac{\overline{UB}^2 \cdot \overline{VB}^2}{\overline{TB}^2} = \overline{WB}^2$$

Wegen $\overline{UB}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (nach Konstruktion)

$$\overline{VB}^2 = \frac{16}{113} \quad (\text{nach (4)}), \quad \overline{TB}^2 = \frac{113}{64} \quad (\text{nach (1)}) \text{ folgt}$$

$$\overline{WB}^2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{113}}{\frac{113}{64}} = \frac{4}{113} \cdot \frac{64}{113} = \frac{16}{113} \cdot \frac{16}{113} = \left(\frac{16}{113}\right)^2,$$

$$\text{also (da } \overline{WB} > 0) \overline{WB} = \frac{16}{113}.$$

Lösung zu:

Kein Königsweg nach Cambridge

Heft 1/84

(i) Man bezeichne mit m die eindeutig bestimmte Zahl, für welche

$$m^2 \leq n < (m + 1)^2 \quad (1)$$

gilt. Wir müssen nun die größte Zahl n finden, die $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$ zum Teiler hat:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \mid n \quad (2)$$

Dies ist erfüllt, wenn $n = 24$, weil dann $m = 4$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Es werde nun angenommen, es gäbe eine Lösung von (2) mit $n > 24$.

Dann wäre

$$m \geq 5 \quad (3)$$

und wir schließen aus (2), daß insbesondere $m(m - 1)(m - 2)$ Teiler von n ist. So ist jedenfalls

$$n \geq m(m - 1)(m - 2) = m^3 - 3m^2 + 2m,$$

und unter Benutzung von (1)

$$(m+1)^2 > m^3 - 3m^2 + 2m, \\ \text{also } 4m^2 + 1 > m^3.$$

$$\text{Weil } 1 \leq m^2, \text{ hätten wir } m^3 < 5m^2,$$

und daher $m < 5$, was (3) widerspricht.

Es folgt, daß 24 die größte Lösung war.

(ii) Es sei $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ eine beliebige Teilmenge von $1, 2, \dots, 2n$. Zu jeder positiven Zahl a können wir eindeutig die kleinste positive ganze Zahl t bestimmen derart, daß $a \cdot 2^t > n$,

und demnach

$$a \cdot 2^{t-1} \leq n;$$

oder anders ausgedrückt

$$n < a \cdot 2^t \leq 2n. \quad (4)$$

Wir wenden (4) auf jedes Element der Teilmenge an und bestimmen demgemäß die Exponenten $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$. So erhalten wir $n+1$ ganze Zahlen

$$a_1 2^{t_1}, a_2 2^{t_2}, \dots, a_{n+1} 2^{t_{n+1}}, \quad (5)$$

welche die Ungleichung

$$n < x \leq 2n$$

befriedigen. Es gibt in diesem Intervall aber nur n ganze Zahlen. Deshalb muß die Folge (5) mindestens zwei gleiche Zahlen enthalten, sagen wir

$$a_i 2^{t_i} = a_j 2^{t_j}$$

wo $t_i \geq t_j$. Also ist $\frac{a_i}{a_j} = 2^{t_j - t_i}$

nicht nur ganz, sondern sogar eine Potenz von 2.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/84

Ma 5 ■ 2407 $5284 \text{ s} = (88 \cdot 60 + 4) \text{ s}$
 $= 88 \text{ min } 4 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min } 4 \text{ s}; 87 \text{ min } 3 \text{ s}$
 $= 1 \text{ h } 27 \text{ min } 3 \text{ s}.$

1 h 27 min 3 s sind weniger als 1 h 27 min 34 s, erst recht weniger als 1 h 28 min 4 s.

Sportler C lief vor Sportler A, dieser vor Sportler B durchs Ziel.

Ma 5 ■ 2408 $3,25 \text{ M}$ sind 325 Pf. Wegen $10 \cdot 35 = 350$ und $350 > 325$ sind es weniger als 10 Briefmarken zu 35 Pf. Da 325 auf die Grundziffer 5 endet, könnten es 1, 3, 5, 7 oder 9 Marken zu 35 Pf sein. Nun gilt $325 - 1 \cdot 35 = 290$, $325 - 3 \cdot 35 = 220$, $325 - 5 \cdot 35 = 150$, $325 - 7 \cdot 35 = 80$, $325 - 9 \cdot 35 = 10$. Nur die Zahlen 220 und 80 sind durch 20 teilbar. Wegen $4 < 7$ entfällt die zweite Möglichkeit. Petra hat 11 Briefmarken zu 20 Pf und 3 zu 35 Pf gekauft.

Ma 5 ■ 2409 Die Quersumme 5 besitzen folgende zweistellige natürliche Zahlen: 14, 23, 32, 41, 50. Nun gilt

$$3 \cdot 14 - 1 = 41, \quad 3 \cdot 23 - 1 = 68, \\ 3 \cdot 32 - 1 = 95, \quad 3 \cdot 41 - 1 = 122, \\ 3 \cdot 50 - 1 = 149. \text{ Nur die Zahl 14 erfüllt die gestellten Bedingungen.}$$

Ma 5 ■ 2410 Angenommen, Wolfgang hat x Blei- und y Faserstifte; dann hat Stefan $2 \cdot x$ Blei- und $(y+3)$ Faserstifte. Nun gilt $x+2 \cdot x=9$, also $x=3$; $y+(y+3)=21$, also $y=9$. Angenommen, Stefan hat z Buntstifte; dann hat Wolfgang $4 \cdot z$ Buntstifte. Nun gilt $z+4 \cdot z=10$, also $z=2$. Somit hat Wolfgang 3 Blei-, 9 Faser- und 8 Buntstifte; Stefan hat 6 Blei-, 12 Faser- und 2 Buntstifte.

Ma 5 ■ 2411 Da Klaus von jeder Sorte wenigstens eine Pose kauft, hat er mit Sicherheit zunächst einmal $0,75 \text{ M} + 1,00 \text{ M} + 0,60 \text{ M} + 0,32 \text{ M} = 2,67 \text{ M}$ ausgegeben. Ihm verbleiben noch $3,91 \text{ M} - 2,67 \text{ M} = 1,24 \text{ M}$. Kein Vielfaches von 75, 100 bzw. 60 endet auf die Grundziffer 4. Wegen $7 \cdot 32 = 224$ und $224 > 124$ gilt nur $2 \cdot 32 = 64$. Aus $1,24 \text{ M} - 0,64 \text{ M} = 0,60 \text{ M}$ folgt, daß Klaus eine Pose zu 75 Pf, eine zu 1,00 M, zwei zu 60 Pf und drei zu 32 Pf kaufte. Es gilt $1 \cdot 75 \text{ Pf} + 1 \cdot 100 \text{ Pf} + 2 \cdot 60 \text{ Pf} + 3 \cdot 32 \text{ Pf} = 391 \text{ Pf} = 3,91 \text{ M}$.

Ma 5 ■ 2412 $7 \cdot 6$ Achsen = 42 Achsen; $(236 - 42)$ Achsen = 194 Achsen. Es verbleiben 60 Waggon mit insgesamt 194 Achsen. Angenommen, es sind x Waggon mit 2 Achsen, also $(60 - x)$ Waggon mit 4 Achsen; dann gilt $2x + 4(60 - x) = 194$, $2x + 240 - 4x = 194$, $2x = 46$, $x = 23$.

Zu diesem Zug gehören 23 Waggon mit zwei Achsen und 37 Waggon mit vier Achsen.

Ma 6 ■ 2413 Es sei x eine einstellige natürliche Zahl; dann gilt

$$(10x + 6) + 9 = 6 \cdot 10 + x,$$

$$10x + 15 = 60 + x,$$

$$9x = 45, \text{ also } x = 5.$$

Die gesuchte Zahl lautet 5, und es gilt $56 + 9 = 65$.

Ma 6 ■ 2414 Aus (4) folgt: Herr Kaiser ist nicht Lehrer von Beruf. Aus (5) folgt: Herr Kaiser ist auch nicht Ingenieur. Folglich ist Herr Kaiser Schriftsteller.

Aus (1) folgt: Herr Meyer ist nicht Ingenieur. Folglich ist Herr Meyer von Beruf Lehrer. Somit ist Herr Müller Ingenieur.

Aus (3) folgt: Herr Meyer, der Lehrer, wohnt in Leipzig. Aus (2) folgt: Herr Müller, der Ingenieur, wohnt in Berlin. Somit wohnt Herr Kaiser, der Schriftsteller, in Cottbus. Die Angabe (6) ist nicht erforderlich.

Ma 6 ■ 2415 5 h 30 min sind $5 \frac{1}{2} \text{ h}$;

$$5,30 \text{ h sind } 5 \frac{3}{10} \text{ h}; 5 \frac{1}{2} \text{ h} - 5 \frac{3}{10} \text{ h} = \frac{1}{5} \text{ h};$$

durch den Schreibfehler entsteht eine Differenz von $\frac{1}{5} \text{ h}$, also von 12 min.

Ma 6 ■ 2416 Aus $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$ folgt

$$17 < 4x \text{ und } 3x < 17, \text{ also } x < 5 \frac{2}{3} \text{ und}$$

$$4 \frac{1}{4} < x. \text{ Deshalb gilt } 4 \frac{1}{4} < x < 5 \frac{2}{3}, \text{ also}$$

$$x = 5. \text{ Die gebrochene Zahl } \frac{5}{17} \text{ erfüllt die}$$

$$\text{Bedingung; es gilt } \frac{1}{4} < \frac{5}{17} < \frac{1}{3} \text{ bzw.}$$

$$\frac{51}{204} < \frac{60}{204} < \frac{68}{204}.$$

Ma 6 ■ 2417 Aus a) folgt: Weder Heinz noch Peter wohnen in Magdeburg. Aus c) folgt: Klaus wohnt nicht in Magdeburg. Deshalb wohnt Manfred in Magdeburg. Aus c) folgt: Klaus wohnt nicht in Dresden. Aus d) folgt: Klaus wohnt nicht in Rostock.

Deshalb wohnt Klaus in Leipzig.

Aus b) folgt: Heinz wohnt nicht in Rostock. Deshalb wohnt Heinz in Dresden und somit Peter in Rostock.

Ma 7 ■ 2418 Das Quadrat habe die Seitenlänge a ; für den Flächeninhalt der dem Quadrat einbeschriebenen Figur gilt dann

$$A_F = a^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{8} \pi \cdot a^2 \right)$$

$$= a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot \frac{A_F}{A_Q} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,57.$$

Der Flächeninhalt der dem Quadrat einbeschriebenen Figur beträgt rund 57% des Flächeninhalts des Quadrates.

Ma 7 ■ 2419 Es sei α die Größe des Winkels $\angle CAB$.

Aus $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$ folgt

$$\angle DHE = \angle CHB = 180^\circ - \alpha.$$

Im Parallelogramm $HBFC$ gilt deshalb $\angle CFB = 180^\circ - \alpha$.

Im Viereck $ABFC$ ergänzen sich somit die gegenüberliegenden Winkel $\angle CAB$ und $\angle CFB$ zu 180° ; folglich ist dieses Viereck ein Sehnenviereck. Das heißt, der Punkt F liegt auf dem Umkreis k des Dreiecks ABC .

Ma 7 ■ 2420 Wegen $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ sind die Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ gleichschenkelig. Deshalb hat der Winkel $\angle ABM$ die Größe 40° und Winkel $\angle CBM$ die Größe 30° , also $\beta = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$.

Jeder der beiden kongruenten Winkel $\angle MAC$ und $\angle MCA$ habe die Größe φ . Dann gilt $2 \cdot \varphi + 40^\circ + 70^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, also $2 \cdot \varphi = 40^\circ$ und somit $\varphi = 20^\circ$. Daraus folgt weiter $\alpha = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ und $\gamma = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

Ma 7 ■ 2421 Angenommen, die Gefäße A, B bzw. C fassen $a = 3 \text{ l}$, $b = 8 \text{ l}$ bzw. $c = 18 \text{ l}$. Dann gilt

$$c - 3a - b = (18 - 3 \cdot 3 - 8) \text{ l} = 1 \text{ l},$$

$$c - 2b = (18 - 2 \cdot 8) \text{ l} = 2 \text{ l},$$

$$a = 3 \text{ l},$$

$$c - 2a - b = (18 - 2 \cdot 3 - 8) \text{ l} = 4 \text{ l},$$

$$b - a = (8 - 3) \text{ l} = 5 \text{ l},$$

$$c - 4a = (18 - 4 \cdot 3) \text{ l} = 6 \text{ l},$$

$$c - a - b = (18 - 3 - 8) \text{ l} = 7 \text{ l},$$

$$b = 8 \text{ l},$$

$$c - 3a = (18 - 3 \cdot 3) \text{ l} = 9 \text{ l},$$

$$c - b = (18 - 8) \text{ l} = 10 \text{ l}.$$

Antwort auf eine Leserfrage

Im Auftrage der Klasse 5 der Franz-Mehring-OS, Berlin fragt André Schwarz:

Wieviel Lösungen werden jährlich zum alpha-Wettbewerb eingesandt? Wieviel Kilogramm Papier wären das?

alpha antwortet:

Im Jahr 1983/84 gingen zum alpha-Wettbewerb insgesamt 93 500 Lösungen ein. Man rechnet für jede Lösung ein A-4-Blatt mit den Maßen 210 mm mal 297 mm zu je 4,1 g und eine Wettbewerbskarte A-6 mit den Maßen 106 mm mal 148 mm zu je 2,6 g.

a) Berechne, wieviel Quadratmeter Papier für jedes Format notwendig sind!

b) Wieviel Kilogramm Papier werden insgesamt verwendet?

(Antwort siehe Heft 5/84)

Fingerspiele,
jap. Buch, ausgestellt
auf der IBA 1983
in Leipzig

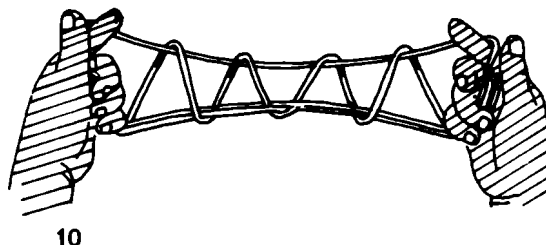
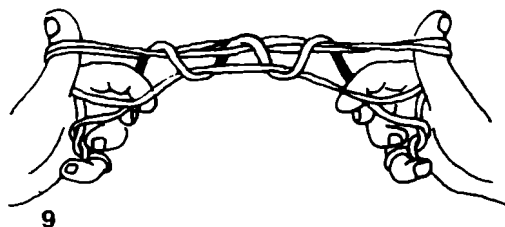
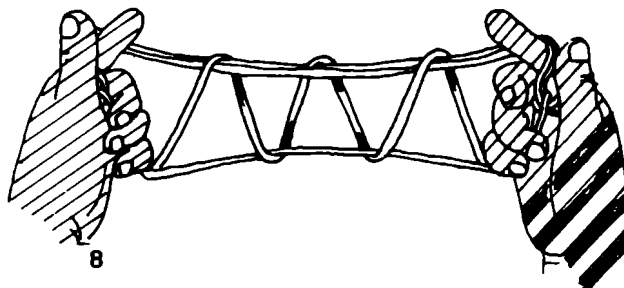
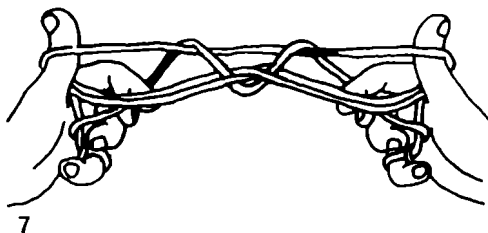
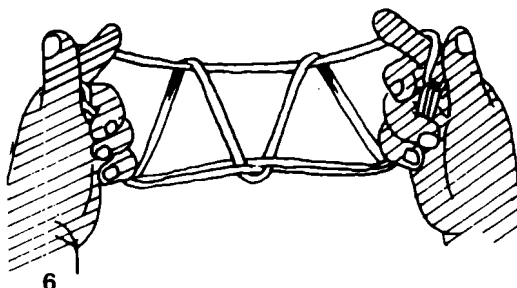
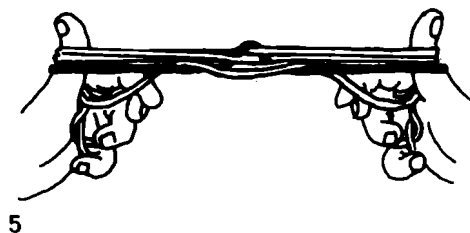
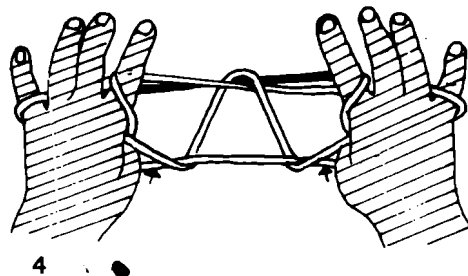
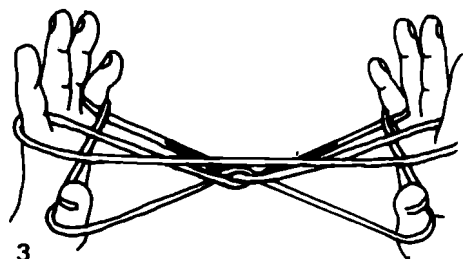
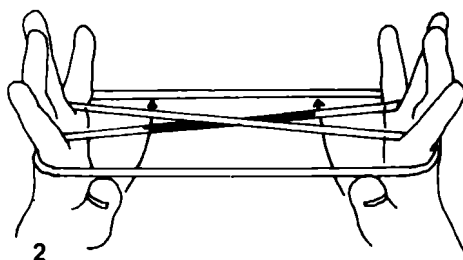
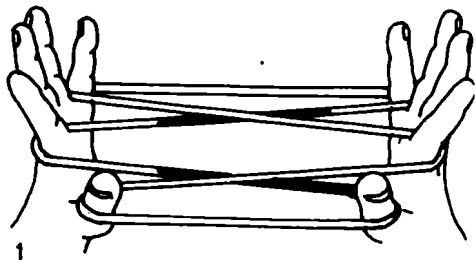
親子であそぶ あやとり絵本

あやとりいとり

さいとうたま 採取・文

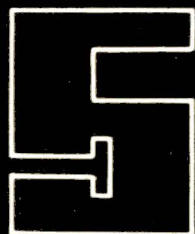
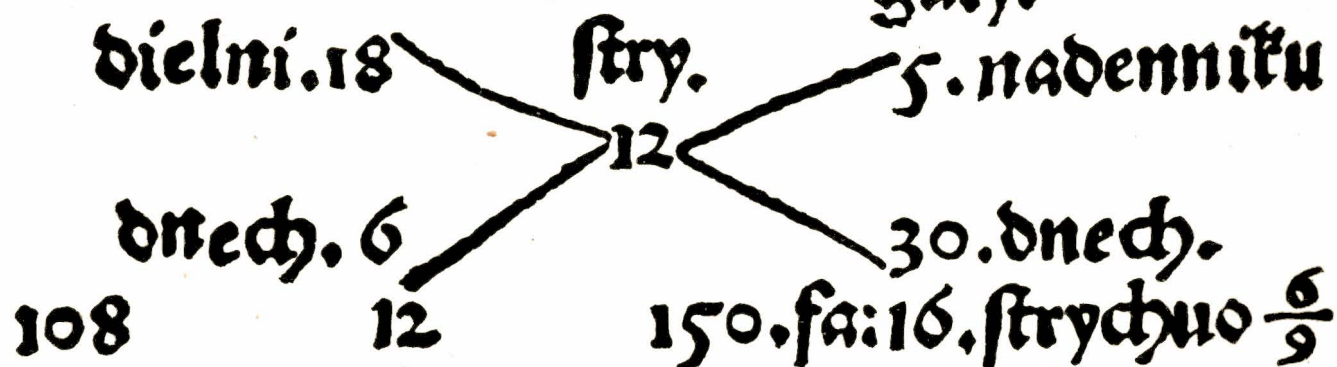
つじむらますろう 絵

1 2 3





Item 18. naden
nikuow w. 6.
dnech skopaly 12
strychu winigý/
worazka polik
strychuow 5. nas
den nikuow we
30. dnech sko-
pagi/stogý wre
guly.



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritzt); Dr. sc. rer. nat. E. Quaiser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:
OSTr J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegen genommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 100/101); aus *rozhledy*, Prag (S. 104/105); W. Milejko, Bukarest (S. 109)

Abzeichen bzw. Signets: J. Lehmann, Leipzig (IV. U.-Seite)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin nach einer Vorlage aus *rozhledy*, Prag

Alle ČSSR-Beiträge wurden dankenswerterweise von O. Langer, Döbeln übersetzt und z. T. bearbeitet.



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,
III/18/97
AN (EDV) 128

Redaktionsschluss: 25. Juni 1984
Auslieferungstermin: 19. Oktober 1984

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Dieses Sonderheft wurde zu Ehren der deutsch-tschechoslowakischen Freundschaft und aus Anlaß der XXV. IMO mit Beiträgen aus unserem benachbarten Freundesland gestaltet.

Inhalt

- 97 Raum und Entfernung [9]¹⁾
Wie man in der Mathematik mißt (Leseprobe)
Prof. Dr. A. Kufner, Karls-Universität Prag
- 99 Eine Aufgabe von Prof. E. Kraemer, Karls-Universität Prag/Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy* [9]
- 100 XXV. Internationale Mathematikolympiade [10/12]
1. bis 10. Juli 1984, Prag
J. Lehmann, Leipzig
- 102 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
Aufgaben und Preisträger der 4. Stufe (DDR-Olympiade)
- 103 Anspruchsvolle Aufgaben für *alpha*-Leser, überreicht durch IMO-Mannschaften [9]
- 104 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben aus der ČSSR
- 106 Tschechische praktische Rechenbücher aus dem 16. und dem frühen 17. Jahrhundert [6]
Ivana Füzeková, aus *rozhledy*
- 107 Für unsere Briefmarkenfreunde: Die Technische Hochschule Prag [7]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
- 108 Aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Mathematische Spielereien [5]
Milan Koman, aus *rozhledy*
- 109 Für unsere Schachfreunde: Böhmisches Schach [7]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 110 Zur Berechnung von Getriebe-Übersetzungen [9]
Vlastimil Mráz, aus *rozhledy*
- 111 Rauminhalt des Vielflachs [9]
Stanislav Horák, aus *rozhledy*
- 112 Papierformate und Mathematik
Vlastimil Mráz, aus *rozhledy*
- 113 Aufgaben bei Aufnahmegesprächen [10/12]
Fakultät Mathematik/Physik an der Komenský-Universität Bratislava
- 113 19 harte Nüsse, zusammengestellt in der mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy* [10]
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 116 Arbeitsgemeinschaft im Blickpunkt
Ein mathematisches Spiel: *Trlenka* [5]
Milan Hejny, aus *rozhledy*
- 117 Lösungen [5]
- 120 Deutschsprachige Literatur aus der ČSSR [6]
- III. U.-Seite: Geschicklichkeitsrätsel [5]
Josef Svoboda, aus *rozhledy*
- IV. U.-Seite: 25 Jahre Internationale Mathematikolympiaden [5]
Dokumentation, zusammengestellt von J. Lehmann, Leipzig

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Raum und Entfernung

Wie man in der Mathematik mißt



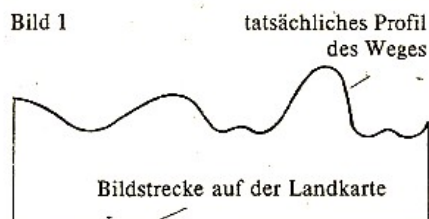
Raum und Entfernung



Einleitung

Aus dem täglichen Leben weiß jeder, daß Entfernung ein sehr relativer Begriff ist. Zum Beispiel hat schon mancher Tourist auf einer Landkarte den Weg des geplanten Marsches ausgemessen und sein Ergebnis für verläßlich gehalten, dann aber festgestellt, daß er in dem unebenen Terrain viel längere Strecken zurücklegen mußte. Er hatte nicht beachtet, daß sein Meßinstrument die Höhenunterschiede auf der Landkarte nicht berücksichtigen kann.

Bild 1



Auch wenn unser naiver Tourist auf einer „idealen“ Ebene ginge, würden sich seine der Landkarte entnommenen Angaben von der tatsächlichen Entfernung unterscheiden. Das ist deshalb der Fall, weil die Erdoberfläche bekanntlich keine Ebene ist, wir sie auf Landkarten aber als Ebene darstellen.

Die Entfernung zwischen den Punkten A und B einer Kugeloberfläche projiziert man in die Ebene; bei Zentralprojektion auf die Strecke A_1B_1 , bei Parallelprojektion auf die Strecke A_2B_2 . Das Bild 2 zeigt, daß die gewählte Projektionsart sowie bei der Zentralprojektion auch noch die Lage des Projektionszentrums S von Bedeutung sind.

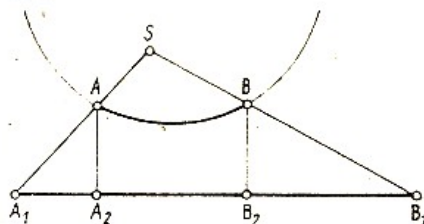


Bild 2

Das Bild verdeutlicht dies, und die Kartographen wissen genau, daß bei der Darstellung eines Terrains auf der Landkarte die Entfernung nicht exakt wiedergegeben werden kann, weil die Kugel keine Fläche ist, die sich in die Ebene abwickeln läßt, und deshalb projizieren sie so, daß entstandene Verzerrungen minimal bleiben.

Beispiel: Die Länge eines Halbkreises mit dem Radius r berechnet sich πr , und bei Parallelprojektion entsteht eine Bildstrecke der Länge $2r$; es kommt also zu einer Verkürzung der tatsächlichen Entfernung im Verhältnis $\frac{\pi}{2} = 1,57 \dots$. Bei Zentralprojektion vom Kreismittelpunkt aus ist die projizierte Halbkreislinie sogar die gesamte unendliche Gerade.

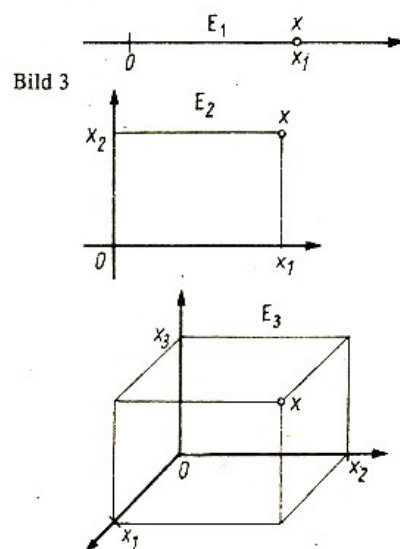
Es zeigt sich also, daß die Entfernung auch im täglichen Leben kritisch betrachtet werden muß und dieser Begriff nicht zu verabsolutieren ist. Wir werden uns daher im weiteren näher mit dem Begriff der Entfernung befassen, allerdings wird es nicht die Entfernung sein, welche uns täglich in vielfältiger Weise begegnet, sondern wir wollen den Abstand in einer Welt genau definierter mathematischer Objekte untersuchen.

Abstand im euklidischen Raum

Zuerst werden wir mit Objekten arbeiten, welche aus der Schule oder auch aus der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) bekannt sind; mit der *Geraden* (eindimensionaler euklidischer¹⁾ Raum E_1 , mit der *Ebene* (zweidimensionaler euklidischer

Raum E_2) und mit dem bekannten dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 .

Die Punkte der Geraden bezeichnen wir mit $x = (x_1)$, die Punkte der Ebene mit $x = (x_1, x_2)$ und die Punkte des Raumes mit $x = (x_1, x_2, x_3)$, wobei x_1, x_2, x_3 reelle Zahlen sind.



In diesen Räumen kennen wir folgende Entfernungen:

Auf der Geraden E_1 bezeichnet das Symbol $d(x, y)$ den Abstand des Punktes $x = (x_1)$ vom Punkt $y = (y_1)$. Die Definition lautet:

$$d(x, y) = |x_1 - y_1|. \quad (1)$$

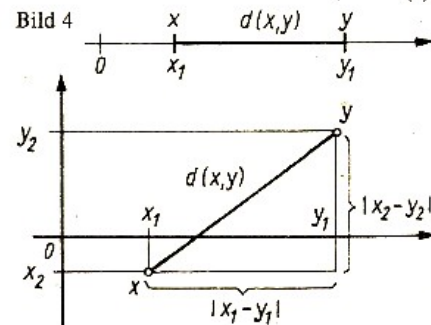
In der Ebene E_2 ist der Abstand $d(x, y)$ des Punktes $x = (x_1, x_2)$ vom Punkt $y = (y_1, y_2)$ folgendermaßen definiert:²⁾

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \quad (2)$$

Entsprechend ist im Raum E_3 der Abstand $d(x, y)$ des Punktes $x = (x_1, x_2, x_3)$ vom Punkt $y = (y_1, y_2, y_3)$ definiert:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}. \quad (3)$$

Bild 4



Bemerkung 1: In allen drei Fällen bezeichnen wir den Abstand mit $d(x, y)$. Das ist konsequent, denn Formel (1) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2}. \quad (1^*)$$

Die Formeln (1) und (2) sind spezielle Fälle von (3), denn die Punkte aus E_1 haben die Form $(x_1, 0, 0)$ und sind somit Sonderfälle der Punkte aus E_3 ; entsprechend haben die Punkte aus E_2 , die Form $(x_1, x_2, 0)$.

Wir nennen $d(x, y)$ *euklidischen Abstand* und betrachten nun ausführlich seine Eigenschaften:

A Vor allem ist $d(x, y)$ stets eine nichtnegative Zahl, d. h.

$$d(x, y) \geq 0, \quad (4)$$

wobei der Abstand des Punktes x vom Punkt y genau dann gleich Null ist, wenn beide Punkte identisch sind:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \quad (5)$$

Wir erinnern uns, daß die Identität der Punkte $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ bedeutet, daß $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ gilt, und wir zeigen die Gültigkeit von (4) und (5): Die Ungleichung (4) folgt aus der Definition (3) des Abstandes $d(x, y)$; für $x = y$ ist nach dieser Definition die Zahl $d(x, y)$ gleich Null. Ist dagegen $d(x, y) = 0$, so gilt auch $[d(x, y)]^2 = 0$, und aus (3) folgt $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 0$. Diese Summe dreier nichtnegativer Zahlen ist genau dann gleich Null, wenn jeder einzelne Summand gleich Null ist, also für $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, $x_3 - y_3 = 0$. Folglich ist $x_i = y_i$ für $i = 1, 2, 3$, und somit gilt $x = y$.

B Außerdem ist der Abstand des Punktes x vom Punkt y gleich dem Abstand des Punktes y vom Punkt x :

$$d(x, y) = d(y, x). \quad (6)$$

Der Beweis folgt wieder aus der Definition von $d(x, y)$:

Weil $(x_i - y_i)^2 = [-(y_i - x_i)]^2 = (y_i - x_i)^2$ für $i = 1, 2, 3$ ist, erhalten wir die Gleichung (6) direkt aus (3).

C In einem Dreieck mit den Eckpunkten x, y und z ist die Länge einer Seite nicht größer als die Summe der Längen der beiden übrigen Seiten.³⁾ Mit anderen Worten, der Abstand des Punktes x vom Punkt z ist nicht größer als die Summe aus dem Abstand des Punktes x vom Punkt y und dem Abstand des Punktes y vom Punkt z . Es ist möglich, dies in Form der sogenannten *Dreiecksungleichung* aufzuschreiben:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (7)$$

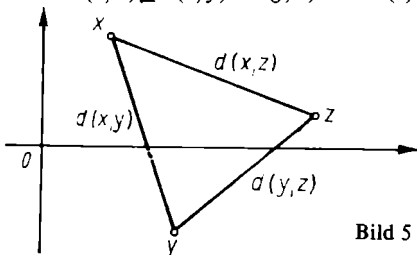


Bild 5

Die Gültigkeit dieser Ungleichung wird zwar durch Bild 5 verdeutlicht, wir werden uns aber nicht allein auf die Anschauung verlassen, damit es uns nicht wie jenem eingangs erwähnten Touristen ergeht. Wir beweisen daher die Gültigkeit der Ungleichung (7) und stellen uns dazu erst einmal einige Hilfsmittel bereit:

Erster Exkurs: Es seien a und b beliebige reelle Zahlen. Dann ist auch die Zahl $(a - b)$ reell, und folglich ist die Zahl $(a - b)^2$ nichtnegativ, d. h.

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

daraus folgt $2ab \leq a^2 + b^2$

$$\text{bzw. } ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Diese Ungleichung gilt für je zwei reelle Zahlen a, b . Wählen wir spezielle a und b , beispielsweise $a = \sqrt{a}$ und $b = \sqrt{b}$ mit den nichtnegativen Zahlen a und b , so erhalten wir die Ungleichung

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b). \quad (8)$$

Es seien auch α_i und β_i mit $i = 1, 2, 3$ nichtnegative Zahlen, und wir definieren die positiven Zahlen

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \text{ und } B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

Wählen wir in (8) $a = \alpha_i^2/A$ und $b = \beta_i^2/B$, so erhalten wir für $i = 1, 2, 3$ die Ungleichungen

$$\frac{\alpha_i \beta_i}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_i^2}{A} + \frac{\beta_i^2}{B} \right),$$

$$\frac{\alpha_2 \beta_2}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2^2}{A} + \frac{\beta_2^2}{B} \right),$$

$$\frac{\alpha_3 \beta_3}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_3^2}{B} \right),$$

und durch Addition auf beiden Seiten entsteht die Ungleichung

$$\frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{B} \right) = 1$$

(die letzte Gleichung folgt aus der obengenannten Definition der Zahlen A und B).

Nach Multiplikation mit der nichtnegativen Zahl $\sqrt{AB}$ erhalten wir dann die sogenannte *Höldersche⁴⁾ Ungleichung*

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{\frac{1}{2}} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle reellen Zahlen α_i und β_i . Wir haben zwar bei dieser Herleitung verlangt, daß $A > 0$ und $B > 0$ seien, jedoch gilt (9) natürlich auch für $A = 0$ und $B = 0$. Die Ungleichung hat dann die Form $0 \leq 0$. (Man beweise das!) Aus der Ungleichung (9) folgt eine weitere wichtige Beziehung, die sogenannte *Minkowskische⁵⁾ Ungleichung*

$$\sqrt{(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2} \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \quad (10)$$

welche für alle reellen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ gilt.

Um die Gültigkeit dieser Ungleichung (10) zu zeigen, setzen wir

$$C = (\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2$$

und können schreiben

$$C = [\gamma_1(\gamma_1 + \delta_1) + \gamma_2(\gamma_2 + \delta_2) + \gamma_3(\gamma_3 + \delta_3)] + [\delta_1(\gamma_1 + \delta_1) + \delta_2(\gamma_2 + \delta_2) + \delta_3(\gamma_3 + \delta_3)].$$

Wenden wir nun auf die zwei Ausdrücke in den eckigen Klammern jeweils die Höldersche Ungleichung (9) an (in der ersten Klammer steht γ_i für α_i , $(\gamma_i + \delta_i)$ für β_i usw., d. h., allgemein gilt $\alpha_i = \gamma_i$ und $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$; für die zweite Klammer gilt entsprechend $\alpha_i = \delta_i$ und $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$, für $i = 1, 2, 3$), dann erhalten wir

$$C \leq (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot [(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot [(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C} \left[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Für $C = 0$ gilt die Ungleichung (10). Ist $C \neq 0$ (nach Definition gilt dann $C > 0$), so genügt es, die vorhergehende Ungleichung durch die Zahl $\sqrt{C} > 0$ zu dividieren, und wir erhalten sofort die Minkowskische Ungleichung (10).

Ende des ersten Exkurses

Nun können wir auch die Dreiecksungleichung (7) beweisen:

Diese ergibt sich aus (10), wenn wir $\gamma_i = x_i - y_i$ und $\delta_i = y_i - z_i$, $i = 1, 2, 3$, setzen, denn dann ist $\gamma_1 + \delta_1 = x_1 - z_1$, und es gilt

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2}.$$

Unter Verwendung der Punkte x, y und z entspricht dies der Dreiecksungleichung (7).

Fassen wir die drei Eigenschaften des euklidischen Abstandes zusammen, welche wir bereits bewiesen haben:

- A** $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- B** $d(x, y) = d(y, x)$ für je zwei Punkte x, y ,
- C** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für je drei Punkte x, y, z .

Beispiel 1: Kehren wir zu unserem Touristen und zu seinem blinden Vertrauen zur Landkarte zurück. Er verstand unter der Entfernung zweier Punkte des E_3 den euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte in der Ebene E_2 , d. h. auf der Landkarte.

Wir verzichten auf eine weitere Dimension und definieren einen neuen Abstand $t(x, y)$ als euklidischen Abstand der Bildpunkte x_1 und y_1 auf der entsprechenden Achse (siehe dazu Bild 6):

$$t(x, y) = |x_1 - y_1|. \quad (11)$$

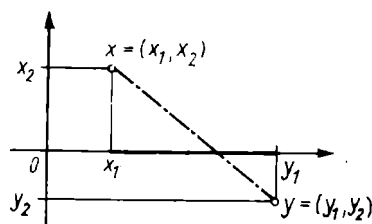


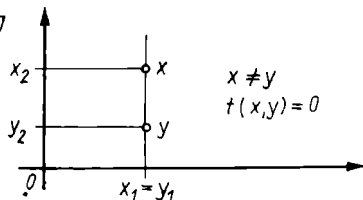
Bild 6

Hat dieser neue Abstand in der Ebene wieder die Eigenschaften A bis C? Die Eigenschaften B und C sind offensichtlich erfüllt, denn für

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \text{ und } z = (z_1, z_2) \text{ gilt} \\ t(x, y) &= |x_1 - y_1| = |(y_1 - x_1)| \\ &= |y_1 - x_1| = t(y, x) \text{ und} \\ t(x, z) &= |x_1 - z_1| = |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \\ &= t(x, y) + t(y, z). \end{aligned}$$

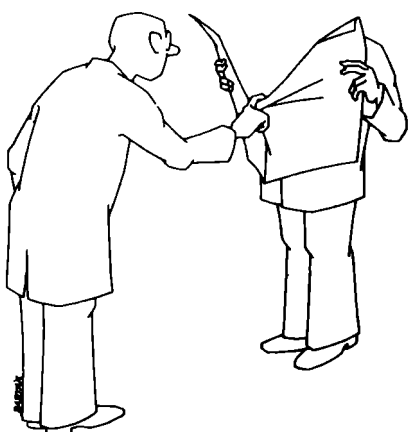
Es ist auch $t(x, y) \geq 0$, und für $x = y$ gilt $t(x, y) = 0$. Die Implikation $\Rightarrow$ aus Eigenschaft A ist jedoch nicht erfüllt, denn obwohl die Punkte $x = (x_1, x_2)$ und $y = (x_1, y_2)$ für $x_2 \neq y_2$ verschieden sind, gilt $t(x, y) = |x_1 - x_1| = 0$ (siehe Bild 7).

Bild 7



A. Kufner

- 1) Euklid von Alexandria (365? bis 300? v. u. Z.), Mathematiker, soll hauptsächlich in Alexandria gewirkt haben.
- 2) Der Leser beachte, daß im Bild auf der waagerechten Achse jeweils die ersten Koordinaten und auf der senkrechten Achse jeweils die zweiten Koordinaten der Punkte x und y abgetragen werden.
- 3) Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, kann dieses Dreieck auch entarten. In E_1 ist dies immer so.
- 4) Otto Hölder (1859 bis 1937), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Leipzig.
- 5) Hermann Minkowski (1864 bis 1909), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Zürich und Göttingen.



Miroslav Barták, ČSSR

Eine Aufgabe von Prof. Emil Kraemer

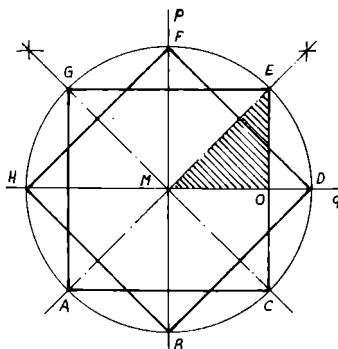
Karls-Universität Prag
Chefredakteur der mathematisch/
physikalischen Umschau (rozhledy)

▲ 2491 ▲ Als Projektion ist das Parallelogramm $A'C'E'G'$ gegeben, dessen Eckpunkte die Parallelprojektionen der nicht- benachbarten Eckpunkte A, C, E, G eines regelmäßigen Achtecks $ABCDEFGH$ sind. Konstruiert mittels Parallelprojektion das vollständige Bild dieses Achtecks!

Lösung

Vereinfachte Lösung des Schülers Jaroslav Smejkal, Klasse 4A6, Velké Meziříčí, Bezirk Südmähren.

Bild 1



Die Punkte A, C, E, G sind Eckpunkte eines Quadrats, ebenso auch die Punkte B, D, F, H (siehe Bild 1). Die Diagonalen AE und CG des ersten Quadrats und die Diagonalen BF, DH des zweiten Quadrats gehen durch den Mittelpunkt M des gegebenen Achtecks.

Gleichzeitig gilt

$$p = BF \parallel AG, \quad q = DH \parallel AC \quad (1)$$

$$\text{und } BD \parallel HF \parallel AE. \quad (2)$$

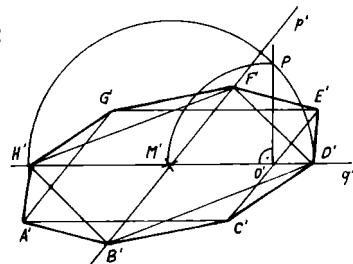
Es sei O der Schnittpunkt der aufeinander senkrecht stehenden Geraden $q = DH$ und CE , es sei $\angle OME = 45^\circ$; dann ist ME die Hypotenuse des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks OME . Nach dem Satz von Pythagoras gilt $|ME|^2 = 2|MO|^2$, ferner ist

$$\frac{|MO|}{|MD|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Bei der Parallelprojektion bleibt die Eigenschaft Parallelität von Geraden erhalten (sofern diese Geraden nicht die Projektionsrichtung darstellen). Deshalb ist die Projektion des Quadrats $ACEG$ das Parallelogramm $A'C'E'G'$; der Schnittpunkt M' seiner Diagonalen ist die Projektion des Mittelpunktes M des gegebenen Achtecks (siehe Bild 2). Die Projektionen der Gera-

den $p = BF, q = DH$, für welche die Beziehung (1) gilt und die durch den Punkt M gehen, sind die Geraden $p' \parallel A'G', q' \parallel A'C'$, die durch den Punkt M' gehen. Die Projektion des Schnittpunktes O der Geraden q und CE ist der Schnittpunkt O' der Geraden q' und $C'E'$.

Bild 2



Bei der Parallelprojektion bleibt auch das Verhältnis der Längen von Strecken erhalten, die auf einer Geraden liegen (vgl. obige Einschränkung). Deshalb gilt für die Länge der Projektionen $M'O', M'D'$ der Strecken MO, MD nach (3) die Beziehung

$$\frac{|M'O'|}{|M'D'|} = \frac{|MO|}{|MD|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir konstruieren also in Bild 2 das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck $M'O'P$ mit der Hypotenuse $M'P$ und auf dem Strahl $M'O'$ den Punkt D' derart, daß $|M'O'| = |M'P|$. Die Projektion des Punktes H ist der Punkt H' , der symmetrisch zum Punkt D' bezüglich des Mittelpunktes M' liegt. Gemäß (2) gilt dann $B'D' \parallel H'F' \parallel A'E'$.



rozhledy

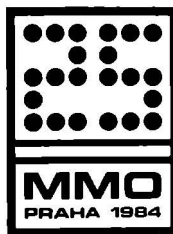
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamení Za zásluhy o výstavbu

Der Verein tschechischer und später tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker begann in den 70er Jahren des 19. Jh. eine Zeitschrift für die Pflege der Mathematik herauszugeben. Diese enthielt auch eine Beilage, die für Schüler der damaligen Mittel- und Oberschulen bestimmt war. Aus ihr ging 1920 die selbständige *Mathematisch-naturwissenschaftliche Umschau* hervor. Neben klassischen Partien der Mathematik werden überwiegend Artikel mit moderner Thematik veröffentlicht. In der Geometrie finden wir vor allem Beiträge, die in der technischen Praxis Anwendung finden. Die Physik gibt Anleitungen aus sich neu bildenden Fachgebieten. Die Wettbewerbsbewegung der Mittel- und Oberschulen wird durch Preisausschreiben gefördert. Eine besondere Rubrik wird den jüngsten Lesern gewidmet. Seit über zwei Jahrzehnten bestehen freundschaftliche Beziehungen zwischen *rozhledy* und *alpha*.

XXV. Internationale Mathematikolympiade

Prag,
1. bis 10. Juli 1984



Aufgaben

1. Tag (4. Juli 1984)

▲ 1 ▲ Es seien x, y und z nichtnegative Zahlen, für die $x + y + z = 1$ gilt. Man beweise die Ungleichung:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

▲ 2 ▲ Man finde ein Paar a, b positiver ganzer Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Zahl $ab(a+b)$ ist nicht durch 7 teilbar,

(2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ ist durch 7^7 teilbar. Begründen Sie Ihre Antwort!

▲ 3 ▲ In der Ebene seien zwei verschiedene Punkte O, A gegeben.

Für jeden Punkt $X \neq O$ der Ebene sei $w(X)$ das Bogenmaß des Winkels $\angle AOX$ ($0 \leq w(X) < 2\pi$, entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen), und $C(X)$ bezeichne die Kreislinie mit dem Mittelpunkt O und dem Radius der Länge $\overline{OX} + \frac{w(X)}{OX}$. Seien endlich viele Farben gegeben und jeder Punkt der Ebene sei mit einer von ihnen gefärbt. Man beweise, daß es einen Punkt Y gibt, für den $w(Y) > 0$ gilt und dessen Farbe auf der Kreislinie $C(Y)$ vorkommt.

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Pro Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

2. Tag (5. Juli 1984)

▲ 4 ▲ In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei die Gerade CD eine Tangente an den Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$.

Man beweise, daß die Gerade AB dann und nur dann den Kreis mit dem Durchmesser $[CD]$ berührt, wenn die Geraden BC und AD parallel sind.

▲ 5 ▲ Ein ebenes konvexes n -Eck ($n > 3$) habe den Umfang p und die Summe der Längen aller Diagonalen sei d .

Beweise:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2$$

($\lfloor x \rfloor$ bedeute die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

▲ 6 ▲ Es seien a, b, c, d ungerade ganze Zahlen, so daß

(1) $0 < a < b < c < d$,

(2) $ad = bc$ und

(3) $a + d = 2^k$ und $b + c = 2^m$ für passende ganze Zahlen k, m gilt.

Beweisen Sie, daß $a = 1$ ist!

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Pro Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

● An der XXV. IMO nahmen 180 Jungen und 12 Mädchen teil.

● Jeder Teilnehmer konnte – bei sechs Aufgaben zu je 7 Punkten – maximal 42 Punkte erreichen. Die tatsächlich erreichte durchschnittliche Punktzahl lag bei 17,8 Punkten. 1. Preis: 42 bis 40 Punkte, 2. Preis: 39 bis 36 Punkte, 3. Preis: 25 bis 17 Punkte.

● Die feierliche Abschlußzeremonie fand im traditionsreichen Festsaal der Karls-Universität, dem *Karolinum*, statt. Die Preise wurden vom Minister für Schulwesen der ČSSR überreicht.

● Der finnische Delegationsleiter lud alle Teilnehmerländer zur XXVI. IMO (Juli 1985) nach Helsinki ein.

alpha stellt vor:

Eine elegante Lösung der 1. Aufgabe von Jörg Stahnke (DDR):

Die linke Ungleichung ist wegen $0 \leq x, y, z \leq 1$ sehr einfach zu zeigen:

$$xy + xz + yz - 2xyz = xy(1-z) + xz(1-y) + yz \geq 0.$$

Zum Beweis der rechten Ungleichung können wir o.B.d.A.

$z \geq y \geq x \geq 0$ annehmen.

1. Fall: Ist $z \leq \frac{1}{2}$, so folgt $1 - 2x \geq 0$,

$1 - 2y \geq 0$, $1 - 2z \geq 0$ und nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(1-2x)(1-2y)(1-2z)} \\ & \leq \frac{(1-2x) + (1-2y) + (1-2z)}{3} \\ & = \frac{3 - 2(x+y+z)}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

wegen $x + y + z = 1$. Weiter folgt

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27}, \quad (1)$$

$$1 - 2(x+y+z) + 4(xy+xz+yz) - 8xyz \leq \frac{1}{27},$$

$$4(xy+xz+yz-2xyz) \leq \frac{28}{27}$$

und die Behauptung.

2. Fall: Ist $z > \frac{1}{2}$, so folgt $x, y < \frac{1}{2}$ wegen

$$x + y + z = 1, (1-2x)(1-2y) \times (1-2z) < 0 \text{ und damit auch (1).}$$

Damit ist der Beweis schon erbracht.

Wettbewerbsatmosphäre



Aus dem Kulturprogramm der XXV. IMO: Stadtrundfahrt durch Prag; Besuch der „Laterna magica“, des „Schwarzen Theaters“, der Ausstellung „Glas 84“, einer Käthekollwitz-Ausstellung im DDR-Kulturzentrum, der Nationalgalerie, Höhepunkt: Tagesexkursion aller IMO-Teilnehmer – Delegationsleiter und Schüler – zur Burg Karlštejn (unser Foto)



Mitarbeiter der Fakultät für Mathematik der Päd. Hochschule Banská Bystrica/Bratislava hatten alle IMO-Teilnehmer zu einem unterhaltsamen Nachmittag unter dem Motto: *Mathematical Games* (Math. Spiele) eingeladen. In fünf Räumen, vorbereitet für die Sprachgruppen russisch, englisch, französisch, spanisch und deutsch, wurden logische Spiele in Wettbewerbsgruppen durchgeführt. „alpha“ wird einige interessante Spiele in den nächsten Heften vorstellen.



Die siegreiche sowjetische Mannschaft



alpha stellt vor: Die DDR-Mannschaft: Karin Gröger, Alexander Schmidt, Ingo Witt, alle EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Oliver Geupel, EOS *Romain Rolland*, Dresden; Arnd Rösch, Spezialklasse Mathematik, TH Karl-Marx-Stadt; Jörg Stahnke, EOS *Willi Sänger*, Pasewalk.

Karin Gröger erhielt einen 1. Preis. Sie ist damit einziges Mädchen, das auf einer IMO diese höchste Auszeichnung erhielt. Sie studiert ab September 1984 an der Karl-Marx-Universität Leipzig Mathematik.

Schulwesen in der ČSSR

Das tschechoslowakische Schulwesen kann auf eine althergebrachte Tradition zurückblicken. Die Prager Karlsuniversität wurde bereits im Jahre 1348 gegründet. Die Grundlagen des modernen Schulwesens der Tschechoslowakei schuf im 17. Jahrhundert der weltbekannte Pädagoge Jan Anos Komenský (Komenius). Schulpflicht besteht schon über 200 Jahre, aber erst die sozialistische Tschechoslowakei gewährte allen das Recht auf kostenlose Bildung, einschließlich Fach- und Hochschulen.

Das System des tschechoslowakischen Schulwesens besteht aus neunjährigen Grundschulen, zwei- bis vierjährigen allgemeinbildenden oder spezialisierten Oberschulen, sowie vier bis fünfjährigen Hochschulen humanistischer, technischer oder künstlerischer Fachrichtung. Mathematikolympiaden werden seit 1951 durchgeführt. Im Vergleich zu 1945 hat sich die Schülerzahl der Fachschulen verdoppelt, und in der Slowakischen Sozialistischen Republik fast vervierfacht. Im Vergleich mit 1936 hat sich die Anzahl der Hochschulstuden-



Zu Beginn der IMO wurde das in Jugoslawien im Jahre 1977 erstmals durchgeführte Symposium zu Fragen der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik durch 10 Vorträge und Diskussionen fortgeführt. Eine wichtige Rolle spielten dabei nationale Mathematikolympiaden bzw. regionale Mathematikolympiaden, z. B. VR Polen – Österreich, Olympiaden nordafrikanischer Länder. Eine Ausstellung mit Literatur, Aufgabensammlungen, Urkunden usw. gab einen umfassenden Einblick in die außerunterrichtliche Tätigkeit auf den verschiedensten Ebenen, zusammengestellt aus Materialien der meisten Teilnehmerländer (siehe Foto).

ten vervierfacht. Infolge der wissenschaftlichen und technischen Revolution nimmt Fachausbildung in der ČSSR ständig an Bedeutung zu. Die Hälfte sämtlicher Studenten studiert in neuen Schulen, die der sozialistische Staat nach dem zweiten Weltkrieg errichtet hat. Auf je 1000 Einwohner entfallen fast 250 mit Mittel- oder Hochschulbildung.

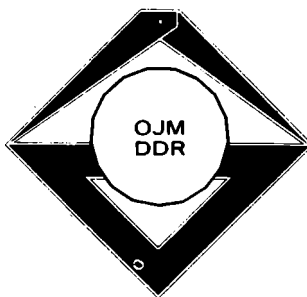
Inoffizielle Länderwertung der XXV. IMO

| | 1. Pr. | 2. | 3. | Punkte | | | | |
|-----------------|--------|----|----|--------|--------------------------------|----|----|------|
| Sowjetunion | 5 | 1 | – | 235 | Brasilien | – | – | 3 92 |
| VR Bulgarien | 2 | 3 | 1 | 203 | Griechenland | – | 1 | – 88 |
| SR Rumänien | 2 | 2 | 2 | 199 | Kanada | – | – | 2 83 |
| Ungarische VR | 1 | 4 | 1 | 195 | Kolumbien | – | – | 2 80 |
| USA | 1 | 4 | 1 | 195 | Kuba | – | – | 1 67 |
| Großbritannien | 1 | 3 | 1 | 169 | Belgien | – | – | 1 56 |
| Vietnam | 1 | 2 | 3 | 162 | Marokko | – | – | 1 56 |
| DDR | 1 | 2 | 3 | 161 | Schweden | – | – | – 53 |
| BRD | – | 2 | 4 | 150 | Zypern | – | – | 1 47 |
| Mongolische VR | – | 3 | 2 | 146 | Spanien | – | – | – 43 |
| VR Polen | – | 1 | 5 | 140 | Algerien (4)* | – | – | – 36 |
| Frankreich | – | 2 | 2 | 126 | Finnland | – | – | – 31 |
| ČSSR | – | 2 | 2 | 125 | Tunesien | – | – | – 29 |
| SFR Jugoslawien | – | – | 4 | 105 | Norwegen (1)* | – | – | 1 24 |
| Australien | – | 1 | 2 | 103 | Luxemburg (1)* | – | – | 1 22 |
| Österreich | – | 1 | 2 | 97 | Kuweit | – | – | – 9 |
| Niederlande | – | 1 | 2 | 93 | Italien | – | – | – 0 |
| | | | | | Pro Land 6 Teilnehmer, außer * | 14 | 35 | 50 |

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, Mai 1984



Olympiadeklasse 10

231041 Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form $z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$ mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

231042 „Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b - c = 10$ cm, $\beta - \gamma = 80^\circ$ und der Differenz $u - v = 4$ cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte u, v von a !“

Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt: Gegeben seien die Längen $d = 10$ cm, $e = 4$ cm und die Winkelgröße $\delta = 80^\circ$. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Seite BC in D schneidet, und wenn b, c, u, v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen des Winkel $\angle ABC, \angle ACB$ sind, so gilt

$$b - c = d, \quad u - v = e, \quad \beta - \gamma = \delta.$$

Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 231043A und 231043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

231043A Von einem Tetraeder $ABCD$ wird $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{CA} = \overline{BD}$ und $\overline{AB} = \overline{CD}$ vorausgesetzt. Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$ seien in dieser Reihenfolge $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$. Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken $\overline{M_1M_4}, \overline{M_2M_5}, \overline{M_3M_6}$ existiert und daß dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ (d. h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!

231043B a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x+1) = f(x) + (-1)^{[x]} \quad (1)$$

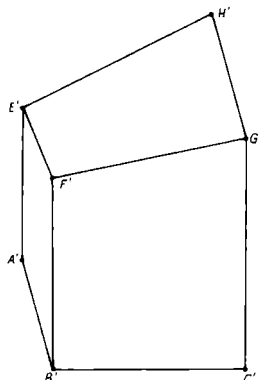
hat! Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$, für die $g \leq z < g+1$ gilt. Beweisen Sie, daß die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat! Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x , für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!

b) Beweisen Sie, daß jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muß, d. h., daß sie für jedes

reelle x die Gleichung $f(x+2) = f(x)$ erfüllt!

231044 Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, daß der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken $ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH$ und $EFGH$ begrenzt wird und daß die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.

Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!



231045 Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x , für die

$$0 \leq x \leq 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{und} \quad (2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x) \cdot \sin x = 1 \quad (2)$$

gilt!

231046 Von einem Achteck $ABCDEFGH$ werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

- (1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achteckseiten sind rationale Zahlen.
 - (2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120° .
- Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen folgt: In dem Achteck $ABCDEFGH$ gilt $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$, $\overline{CD} = \overline{GH}$ und $\overline{DE} = \overline{HA}$.

Olympiadeklassen 11/12

231241 Es sei (x_n) diejenige Folge von reellen Zahlen, für die

$$x_1 = 1$$

$$\text{und} \quad x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gilt. Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

231242 a) Man beweise, daß es eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:

- (1) Jedes Element von M ist eine natürliche Zahl.
- (2) Das kleinste Element von M ist die Zahl 1.
- (3) Das größte Element von M ist die Zahl 100.
- (4) Jedes Element von M mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von M oder das Doppelte eines Elementes von M .

b) Man ermittle eine Menge M , die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat. Daß die ermittelte Menge M diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

231243 Vier Mathematiker T, D, S, P einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln: T denkt sich ein Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen mit $1 \leq x \leq y \leq z$ und $x + y + z \leq 10$. Dann soll er D die Zahl $d = y - x$, S die Zahl $s = x + y + z$ und P die Zahl $p = xyz$ mitteilen, jeweils so, daß die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich D, S und P über ihre Informationen unterhalten.

Untersuchen Sie, ob es ein Tripel (x, y, z) gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von d, s und p) das folgende Gespräch stattfinden kann:

P : „Ich kann das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig ermitteln.“

S : „Das wußte ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben.“

P : „Jetzt kann ich das Tripel ermitteln.“

D : „Ich auch.“

S : „Ich jetzt auch.“

Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist! Ist das der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

231244 Seien $P_1, P_2, \dots, P_n$ verschiedene Punkte in der Ebene, $n \geq 2$. Man beweise:

$$\max_{i,j} \overline{P_i P_j} > \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{n} - 1) \cdot \min_{i,j} \overline{P_i P_j}.$$

$$1 \leq i < j \leq n \quad 1 \leq i < j \leq n$$

231245 Man ermittle alle Funktionen f , die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0$ ist

$$f\left(\frac{1}{x_1 + x_2}\right) = f\left(\frac{1}{x_1}\right) + f\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

- (2) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0$ ist

$$(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2).$$

- (3) Es gilt $f(1) = 1$.

Von den nachstehenden Aufgaben
231246A und 231246B ist genau eine aus-
zuwählen und zu lösen:

231246A Über n Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, daß jedes Tetraeder, das vier dieser n Punkte als Ecke hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.

Man beweise aus dieser Voraussetzung, daß es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle n Punkte in seinem Innern oder auf seinem Rand enthält.

Anmerkung: In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfähre man ebenso.

231246B Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ und k natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k$, die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so daß

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1984$$

$$\text{und } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$$

gilt. Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k$ an.

Preisträger der XXIII. OJM

Einen 1. Preis erhielten

in Olympiadeklasse 10:

Stefan Günther (Kl. 9), EOS Heinrich Hertz, Berlin; Ingo Warnke (Kl. 9), Erw. Spezialoberschule Kleinmachnow, Bez. Potsdam; Uta Hövel (Kl. 9), EOS Heinrich Hertz, Berlin; Jörg Wensch (Kl. 9), Friedensschule Köthen; Aicke Hinrichs (Kl. 9), A.-Diesterweg-OS Parchim; Kristin Fibian, 1. EOS Ernst Thälmann, Rostock; Carsten Schreiber, Spezialschule Martin Andersen Nexö, Dresden; Antje Flechsig, OS Obercrinitz; Martin Welk (Kl. 8), 5. OS Liselotte Hermann, Eisenach; Jörg Jähnel (Kl. 9), Spezialschule Carl Zeiß, Jena;

in Olympiadeklassen 11/12:

Karin Gröger, Alexander Schmidt, Inge Witte, alle EOS Heinrich Hertz, Berlin; Oliver Geupel, EOS Romain Rolland, Dresden; Ulrich Meister (Kl. 11), EOS A. Lachwig, Ludwigsfelde; Mathias-Torsten Tok (Kl. 10), Juri-Gagarin-OS Leipzig; Johannes Waldmann (Kl. 10), W.-Seelenbinde-OS, Hermsdorf.

| | 2. Preis | 3. Preis | Anerkennung |
|-----------|----------|----------|-------------|
| Kl. 10 | 7 | 11 | 19 |
| Kl. 11/12 | 7 | 16 | 16 |
| | 14 | 27 | 35 |

Eine Urkunde für eine ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielten: Ulf Saalmann (Kl. 11), Spezialklasse der TH Otto von Guericke, Magdeburg und Thomas Vojta, EOS Friedrich Engels, Dresden.

Anspruchsvolle Aufgaben

für alpha-Leser –
überreicht
durch IMO-Mannschaften

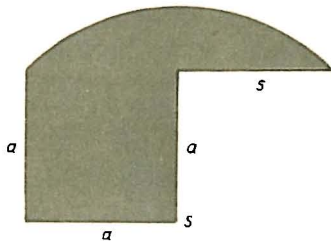
▲ 1 ▲ Aus 2000 Ziegelsteinen (Quadern) der Größe $2 \times 2 \times 1$ wird ein Würfel der Größe $20 \times 20 \times 20$ zusammengesetzt. Es ist zu zeigen: Es gibt eine Gerade g , die durch das Innere des Würfels verläuft, die aber nicht durch das Innere zweier der Ziegelsteine verläuft, die außerdem parallel zu einer der Würfelkanten liegt.

Vereinfachung für untere Klassen: Aus 128 Ziegelsteinen der Größe $2 \times 2 \times 1$ wird ein Würfel der Größe $8 \times 8 \times 8$ zusammengesetzt. Es ist zu zeigen: Es gibt ... (wie oben).

(Finnische Mannschaft)

▲ 2 ▲ Die Figur, bestehend aus einem Quadrat und einem Kreisabschnitt, ist in zwei kongruente Teilfiguren zu zerlegen. (Mittelpunkt des Kreisbogens: S)

(Jugoslawische Mannschaft)



▲ 3 ▲ Die Spieler A und B spielen folgendes Kreuzchenspiel. Sie setzen auf kariertem Papier abwechselnd Kreuze und Kreise, dabei setzt A bei jedem Zug zwei Kreuze und B bei jedem Zug einen Kreis. Kann A erreichen, daß 1982 Kreuze hintereinander zusammenhängend in einer Horizontalen stehen?

(Sowjetische Mannschaft)

▲ 4 ▲ Gegeben seien 6 Punkte A, B, C, A', B', C' in der Ebene, die folgenden Bedingungen genügen:

- $\overline{A'B} = \overline{A'C}$; $\overline{B'A} = \overline{B'C}$; $\overline{C'A} = \overline{C'B}$
- $\angle BA'C = 2\alpha$; $\angle CB'A = 2\beta$; $\angle AC'B = 2\gamma$ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Man zeige, daß dann

$$\angle A'B'C' = \beta; \angle B'C'A' = \gamma; \angle C'A'B' = \alpha \text{ gilt.}$$

(Rumänische Mannschaft)

▲ 5 ▲ Gegeben sei eine vierstellige Zahl, die nicht aus 4 gleichen Ziffern besteht. Bilde mit diesen Ziffern die größte und die kleinste vierstellige Zahl und subtrahiere beide! Man wiederhole das Verfahren siebenmal. Es ist zu zeigen: Irgendwann tritt 6174 auf.

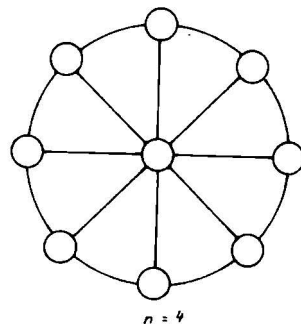
(Bulgarische Mannschaft)

▲ 6 ▲ Wie viele Kreuze kann man in ein aus $n \times m$ Kästchen bestehendes Quadrat setzen, ohne daß 4 mit Kreuzchen belegte Kästchen die Endpunkte eines Rechtecks bilden?

(Holländische Mannschaft)

▲ 7 ▲ In die $2n + 1$ Felder sind die Zahlen von 1 bis $2n + 1$ einzusetzen, so daß die Summe in allen Diagonalen gleich ist und alle miteinander verbundene Zahlen der Peripherie relativ prim sind. Auf wieviel verschiedene Weisen können diese eingesetzt werden?

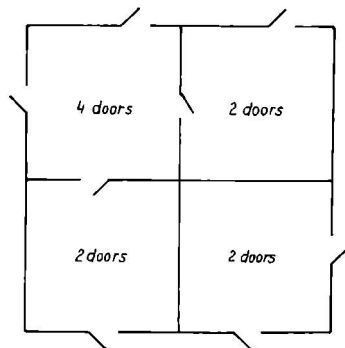
(Ungarische Mannschaft)



▲ 8 ▲ ABC sei ein Dreieck und M, N, P seien in dieser Reihenfolge innere Punkte der Seiten AB, BC, CA . O_1, O_2, O_3 seien die Mittelpunkte der Umkreise der Dreiecke MNB, NPC, PMA . Zeige $\triangle ABC \sim \triangle O_1, O_2, O_3$!

▲ 9 ▲ Erst übersetzen, dann knobeln! Prove: If the number of doors in each room is even, then the number of doors to the outside is also even.

(Englische Mannschaft)



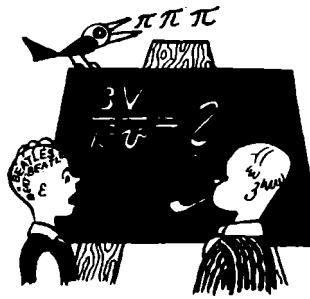
▲ 10 ▲ Man beweise, daß in einem Tangentenviereck die Mittelpunkte der beiden Diagonalen und der Inkreismittelpunkt auf einer Geraden liegen.

(DDR-Mannschaft)

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Aufgaben aus Freundesland

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1985



Die 36 Aufgaben wurden dem slowakischen Buch *500 Riešených slovnych uloh z Matematiky* entnommen.

Die Autoren K. Križalkovič, A. Cuninka, O. Šedivý stellten 500 gelöste Textaufgaben aus dem täglichen Leben, der Ökonomie, der technischen Praxis, der Chemie, der Physik und auch der Unterhaltungsmathematik zusammen.

Die Aufgabengruppe der *alpha* stellte aus diesem Buch Probleme für die Leser zusammen und fügte Lösungen (siehe Heft 1/85) aus unserer Sicht hinzu. Wir wünschen Freude und Erfolg!

Mathematik

Ma 5 ■ 2464 Schüler unternahmen eine Wanderung und legten in drei Tagen 65 km zurück. Am ersten Tag gingen sie doppelt soviel wie am dritten Tag. Am zweiten Tag legten sie 10 km weniger zurück als am ersten Tag. Wieviel Kilometer legten sie an jedem Tag zurück?

Ma 5 ■ 2465 Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich sie mit 5 multipliziere und vom Produkt 20 subtrahiere, erhalte ich die Zahl 15. Welche Zahl habe ich mir ausgedacht?

Ma 5 ■ 2466 3 m Kunstfaserstoff und 4 m Wollstoff kosten zusammen 470 M, wobei 1 m Wollstoff um 30 M teurer ist als 1 m Kunstfaserstoff. Wieviel Mark kostet 1 m Wollstoff bzw. 1 m Kunstfaserstoff?

Ma 5 ■ 2467 Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 4120, ihre Differenz 1280. Welche Zahlen sind das?

Ma 5 ■ 2468 Ein 6 m langer Kupferdraht soll so in zwei Teile zerschnitten werden, daß der eine Teil 60 cm länger ist als der andere. Wie lang sind beide Teile zu wählen?

Ma 5 ■ 2469 Beim Getreidetransport per Eisenbahn hat man in jedem Waggon je 10 t Getreide geladen. Es blieben 8 t Ge-

treide noch unverladen. Damit es nicht erforderlich wird, noch einen Waggon anzukuppeln, verteilte man die übriggebliebenen 8 t auf einige bereits beladene Waggon, und zwar so, daß auf diese je 2 t zusätzlich geladen wurden. Wieviel Tonnen betrug die Gesamtmasse des Getreides, wenn fünfmal soviel Waggon mit je 10 t Ladung wie Waggon mit einer Ladung von je 12 t vorhanden waren?

Ma 6 ■ 2470 In einem Dreieck ist ein Winkel 4° größer als der zweite und 10° kleiner als der dritte Winkel. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Ma 6 ■ 2471 Die Summe zweier Zahlen beträgt 165. Vier Sechstel der ersten Zahl gleichen vier Fünftel der zweiten Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich?

Ma 6 ■ 2472 Ein 80 m langer D-Zug, der eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ hat, fährt an einem stehenden Personenzug vorbei. Das Vorbeifahren dauert 10 s. Wie lang ist der Personenzug?

Ma 6 ■ 2473 Von Bratislava bis Banská Bystrica fuhr ein LKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Gleichzeitig mit diesem fuhr ein Autobus ab, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr und 1 h und 45 min früher als der LKW in Banská Bystrica ankam. Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten?

Ma 6 ■ 2474 Die Summe dreier Zahlen, von denen jede nachfolgende um 3 größer ist als die vorhergehende, beträgt 63. Um welche Zahlen handelt es sich?

Ma 7 ■ 2475 50 Fleischkonserven zweier Sorten, und zwar Gänsefleisch für 5 M und Schweinefleisch für 3 M, kosten insgesamt 210 M. Wie viele Konserven Gänse- bzw. Schweinefleisch sind das?

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

| | | |
|----|---|--------|
| | Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 | Ma 7 • |
| | Kersting-OS, Klasse 7 | 1369 |
| 30 | 150 | |
| | Prädikat: | |
| | Lösung: | |

Ma 7 ■ 2476 Als man den berühmten griechischen Mathematiker Pythagoras fragte, wieviel Schüler in seine Schule gingen, antwortete er: „Die Hälfte der Schüler studiert Mathematik, ein Viertel Musik, ein Siebentel schweigt, und außerdem sind dort noch drei Frauen.“ Wieviel Schüler waren noch in seiner Schule?

Ma 7 ■ 2477 Ein Betrieb fertigte im 1. Quartal 200 t Erzeugnisse, davon 80% in bester Qualität. Im 2. Quartal erzeugte er 300 t, davon 90% bester Qualität. Wie hoch war die Produktion bester Qualität im ersten Halbjahr in Prozenten?

Ma 7 ■ 2478 Ein Fachschulstudent, der nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete: „In zehn Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie ich vor vier Jahren war.“ Wie alt ist dieser Student zum Zeitpunkt der Befragung gewesen?

Ma 8 ■ 2479 In einer Fabrik arbeiteten 1440 Werk-tätige. Für vorbildliche Leistungen erhielten $18\frac{3}{4}\%$ aller Männer und $22\frac{1}{2}\%$ aller Frauen Prämien. Die Betriebsleitung gab bekannt, daß 20% aller Werk-tätigen prämiert wurden. Wieviel Männer bzw. Frauen waren in dieser Fabrik beschäftigt?

Ma 8 ■ 2480 Ein Wirbelsturm knickte einen Baum, dessen Höhe 14,5 m betrug, auf die Weise, daß seine Spitze 4,3 m über dem Erdboden hing. In welcher Höhe wurde der Baum geknickt?

Ma 8 ■ 2481 Um wieviel Prozent würde die Produktion sinken, wenn von einer achtstündigen auf eine siebenstündige Arbeitszeit übergegangen wird, ohne die Arbeitsproduktivität zu steigern? Um wieviel Prozent müßte die Arbeitsproduktivität ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt?

Ma 8 ■ 2482 Eine Uhr zeigt die Zeit 9.00 Uhr an. Stelle fest, in wieviel Minuten der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt!

Ma 9 ■ 2483 Ein Arbeitsplatz wird durch 45 Glühlampen beleuchtet, die insgesamt eine Leistung von 2500 W umsetzen. Einige von ihnen sind 40-W-, die anderen 75-W-Glühlampen. Wie viele Glühlampen von jeder Sorte sind für die Beleuchtung des Arbeitsplatzes erforderlich?

Ma 9 ■ 2484 In einem bestimmten konvexen n -Eck sind 13 Diagonalen mehr als in einem $(n-2)$ -Eck. Es ist zu ermitteln, für welches n diese Bedingung erfüllt ist.

Ma 9 ■ 2485 Die Oberflächen zweier Würfel, von denen einer eine um 22 cm längere Kante hat als der andere, unterscheiden sich um $19\,272\text{ cm}^2$ voneinander. Es sind die Längen der Kanten beider Würfel zu berechnen.

Ma 9 ■ 2486 Bei der ersten Fahrt verbrauchte ein PKW 20% des Kraftstoffes, der sich im Tank befand. Bei der zweiten

Fahrt wurden 10% der Kraftstoffmenge verbraucht, die nach der ersten Fahrt übrigblieb. Nach den beiden Fahrten verblieben noch 9 Liter Kraftstoff im Tank. Wieviel Liter Kraftstoff befanden sich vor Beginn der ersten Fahrt im Tank?

Ma 10/12 ■ 2487 Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist um 2 cm länger als die andere. Wie lang müssen die Katheten mindestens sein, wenn die Hypotenuse länger als 10 cm sein soll?

Ma 10/12 ■ 2488 Die Quersumme einer dreistelligen natürlichen Zahl beträgt 11. Die Summe der Quadrate der drei Grundziffern beträgt 45. Subtrahieren wir von der Zahl 198, so erhalten wir eine Zahl, in der sich die drei Grundziffern in umgekehrter Reihenfolge befinden. Um welche Zahl handelt es sich?

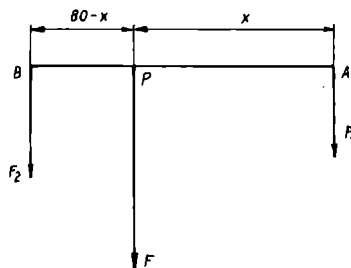
Ma 10/12 ■ 2489 Welche konvexen n -Ecke haben mindestens doppelt so viele Diagonalen wie Seiten?

Ma 10/12 ■ 2490 Der Preis einer Ware stieg um 10%; dann sank er um 10%. Um wieviel Prozent des ursprünglichen Warenpreises änderte sich der Preis?

Physik

Ph 6 ■ 161 Ein Läufer läuft von der Stadt A nach der Stadt B, wobei er täglich 28 km zurücklegt. Gleichzeitig läuft ein anderer Läufer, der täglich 24 km zurücklegt, von B aus in Richtung A. Die Entfernung zwischen den Städten A und B beträgt 260 km. In wieviel Tagen treffen sich beide Läufer?

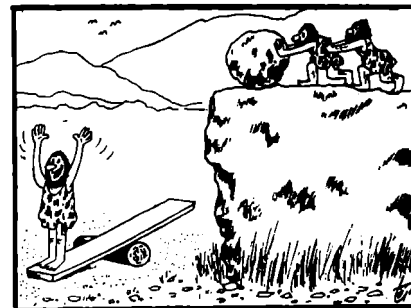
Ph 7 ■ 162 An einer Stange wirken zwei senkrecht angreifende Kräfte von 100 N und 150 N in einer Entfernung von 80 cm voneinander (siehe Bild). Welches ist ihre Resultierende, und wo liegt ihr Angriffspunkt, wenn diese Kräfte parallel wirken? (Die Masse der Stange bleibe unberücksichtigt.)



Ph 8 ■ 163 Eine Stange aus Stahl soll eine Zugkraft von $150\,800\text{ N}$ aufnehmen. Welchen Durchmesser muß der Kreisquerschnitt bei zulässiger Zugbelastung von $12\,000\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ aufweisen?

Ph 9 ■ 164 Wenn anstelle von Buchenholz mit einer zulässigen Belastung von $1000\text{ N}\cdot\text{cm}^{-2}$ Fichtenholz mit einer zuläs-

sigen Belastung von $850\text{ N}\cdot\text{cm}^{-2}$ verwendet wird und wenn der Querschnitt um 20% vergrößert wird, kann der Querschnitt mit 2000 N mehr belastet werden. Wie groß war der Querschnitt des Buchenholzes, und wie hoch war seine Belastung?



Ph 10/12 ■ 165 Zwei Pumpen leeren aus einem Tankwagen in 3,75 h das darin enthaltene Öl. Mit der ersten Pumpe würde der Tankwagen 4 h schneller geleert als mit der zweiten Pumpe. In welcher Zeit wird der Tankwagen von jeder Pumpe allein geleert?

Chemie

Ch 7 ■ 129 Schüler sammelten 3200 g weiße Akazienblüten, gelbe Akazienblüten, Lindenblüten und Ahornblüten. Welche Mengen der Blüten einer jeden Art haben sie gesammelt, wenn sie das Dreifache an Lindenblüten im Vergleich zu weißen Akazienblüten, doppelt soviel Ahornblüten wie weiße Akazienblüten und Lindenblüten zusammen sowie 1200 g gelbe Akazienblüten mehr als Ahornblüten gesammelt hatten?

Ch 8 ■ 130 Meerwasser enthält 5% Salz. Wieviel Kilogramm Süßwasser muß man zu 40 kg Meerwasser hinzugießen, damit der Salzgehalt 2% beträgt?

Ch 9 ■ 131 Wieviel Prozent Kohlenstoff und Wasserstoff enthält Benzol, dessen Formel C_6H_6 ist?

Ch 10/12 ■ 132 Wieviel 20%ige und 45%ige Schwefelsäure (H_2SO_4) müssen wir mischen, um 250 ml 35%ige Schwefelsäure zu gewinnen?



Tschechische praktische Rechenbücher aus dem 16. und 17. Jahrhundert

Im 16. Jahrhundert entwickelte sich ähnlich wie allgemein in Europa auch in den böhmischen Ländern das städtische Leben, besonders das Handwerk und der Handel. Dies erforderte Kenntnisse aus der praktischen Mathematik, besonders zu Aufgaben aus dem kaufmännischen Rechnen. Deshalb finden wir unter den ältesten in tschechischer Sprache gedruckten Büchern auch Rechenbücher. Sie waren für einen breiten Leserkreis gedacht, so für Schüler der Grundschulen wie auch für Handwerker und Kaufleute. Sie enthalten deshalb eine Anzahl praktischer Beispiele, die teilweise durch Abbildungen ergänzt sind, wie das im Bild 1 ersichtlich ist; es stammt aus dem ältesten tschechischen Rechenbuch.

Wechsel slowe

ymienieni.



Item geden
prissel tpeo
niezomény
rychl mu/ry
nien mi. 15.
gr. alt. 6. 8.
na müssen
stau mungy/
deyuri. 3. S.
müssenky za
2. bula 8/ no
tazka go mu
ma dari kolt grossuom strybrnych / die
leytakro rny 2. S. alt. dadi mi 3. S. müssen.
30 mi da 15 gr. alt. 6. S. alt. 12. S. müssen.
geden gr. strybrny / geden gr. stry
brny 8. S. alt. / Srowney zadni počet
spronim zagedno / rydicley gr. na 8. 6.
Enim prydey / stane wreguli takro facit
13. gr. strybrnych 10. S. 1. hl.
2. S. alt. 3. S. müssen. III. S. alt.

Item geden byl dluzen druhe mu 6. funto
minze

Dieses Rechenbuch von Ondřej Klatovský hat – wie damals viele Bücher – einen langen Titel, der umfassend den Inhalt deutlich machen soll (womit sicherlich auch ein Werbezweck verbunden war): *Neue Bücher über Berechnungen mit Ziffern und auf den Linien, dazu einige Regeln und Beispiele, auch für Münzwechsel wie kaufmännisch üblich – in kurzer und nützlicher Weise ausgewählt.*

Dieses Rechenbuch wurde erstmals 1530 in Nürnberg in der Druckerei von Friedrich Peypus gedruckt, später (1558) in Prag bei Jan Kantor. In der Einleitung des Buches hebt der Autor die Bedeutung der Mathematik und praktischer Berechnungen hervor. Er bekundet dies ähnlich wie Pythagoras „... wer nicht rechnen kann, der kann überhaupt nichts ...“, oder wie es Platon sagte „Der Unterschied zwischen Mensch und Tier besteht hauptsächlich darin, daß der Mensch rechnen kann ...“ Klatovský fügte im Rechenbuch auch didaktische Bemerkungen ein, so z. B. einen Hinweis des römischen Dichters Quintus Horatius Flacco „Wenn du jemanden etwas lehren willst, so tue dies in prägnanter Form, damit die Lernenden es schneller begreifen können und dann auch im Gedächtnis behalten ...“.

Den Inhalt hatte Klatovský in vier Abschnitte (Traktate) eingeteilt; zu jedem Abschnitt war einleitend ein Holzschnitt als Schmuck beigelegt, der eine Tätigkeit aus dem Leben eines Rechenmeisters oder Kaufmannes darstellt. Der erste Abschnitt behandelt das Rechnen mit Zahlen (damals sagte man Ziffern), der zweite das Rechnen auf den Linien, der dritte das Rechnen mit Brüchen; der vierte Abschnitt enthält „gängige kaufmännische Berechnungen“.

Zum Titelblatt dieses Heftes

Der Dreisatz im 16. Jahrhundert

Das Rechenbuch von Ondřej Klatovský aus dem Jahre 1530 enthält Anleitungen zur Lösung bestimmter Typen praktischer Aufgaben. Derartige Anleitungen wurden in der damaligen Zeit mit dem lateinischen Wort *regula* bezeichnet.

Eine dieser Anleitungen betraf ein Lösungsverfahren, das früher auch bei uns üblich war und als Dreisatz bezeichnet wurde. Dieser Algorithmus wurde damals *regula de tri* genannt, er fand weitverbreitete Anwendung bei kaufmännischen Berechnungen und wurde deshalb auch als *regula aurea* (Goldene Regel) bezeichnet.

Aus drei bekannten Angaben wurde die vierte zugehörige (unbekannte) Größe berechnet. In der Praxis gab es aber auch kompliziertere Aufgaben, wo man aus fünf Angaben eine 6. Größe zu berechnen hatte.

Für diesen Fall verwendete man eine weitere Regel, die als *regula de quinque* bezeichnet wurde; wir nennen diesen Algorithmus *Kettensatz*. Auch diese Regel war im Rechenbuch von Klatovský enthalten.

Das Titelblatt dieses *alpha*-Heftes zeigt Tagelöhner mit einem zugehörigen Aufgabentext in altschechischer Sprache. Die behandelte Aufgabe lautet (in heutiger Ausdrucksweise):

18 Tagelöhner haben in sechs Tagen 12 Zeilen Weinreben behackt. Wieviel Zeilen können fünf Tagelöhner in 30 Tagen bearbeiten?

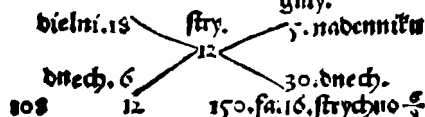
Die Lösung der Aufgabe wurde in Form eines Schemas dargestellt. Die letzten Worte des Aufgabentextes lauten *diese Angaben werden nun für die Regel verwendet*. Dieser Anleitung folgt ein Rechteckschema mit den fünf Zahlen, die in den Eckpunkten und im Mittelpunkt des Rechtecks (die Diagonalen sind angedeutet) eingetragen werden. In der oberen Zeile finden wir die Anzahl der Arbeiter (Tagelöhner), im Mittelpunkt die bekannte Anzahl der Zeilen, auf der unteren Zeile die Anzahl der Tage.

Unterhalb des Schemas steht eine weitere Zeile mit den Angaben 108 (= 18 · 6), 12, 150 (= 5 · 30). Ferner wurde in diese Zeile noch das Ergebnis angefügt, gekennzeichnet durch die Abkürzung Fa (= Facit):

16 Zeilen und $\frac{6}{9}$ (Zeilen).



Item 18. nabem
nifuom w. 6.
dnech / kopaly 12
strychu winygy/
wotazka kolt
strychuow 5. nas
den nifuom we
30. dnech / kop
pagi / stogjore
guly.



Die Zahlen in der Schlußzeile 108 12 150 stellen eine damals in Lehrbüchern übliche Kurzdarstellung einer Proportion (Verhältnisleichung) dar: $108 : 12 = 150 : x$. Für die zu berechnende Größe x wurde jedoch die heute übliche Bezeichnung x noch nicht verwendet; deshalb treten im Dreisatz nur drei Zahlen auf. Aus der an anderer Stelle des Lehrbuchs angeführten Anweisung zur numerischen Berechnung für den Dreisatz ergeben sich daher folgende Operationen: Multipliziere die mittlere Zahl (12) mit der rechten Zahl (150) und teile das Ergebnis durch die linke Zahl (108).

Wenn man dies ausführt, erhält man das notierte Ergebnis $16\frac{6}{9}$ (Zeilen). Versucht nun, aus den Angaben des Aufgabentextes diese Aufgabe mit euren Kenntnissen zu lösen – also unabhängig von den angeführten Regeln des Rechenbuchs! Wie schnell gelangt ihr zum Ergebnis? Ivana Füzeková



Die Technische Hochschule Prag

Etwa seit Beginn des 19. Jh. begannen neben den traditionsreichen Universitäten höhere technische Bildungsanstalten eine rasch wachsende Rolle in der Lehre und Forschung auf dem Gebiet von Mathematik und einigen Naturwissenschaften, vor allem aber natürlich technischer Disziplinen, zu spielen. Es dauerte jedoch rund 100 Jahre, bis die annähernde gesetzliche Gleichstellung dieser Einrichtungen mit den Universitäten erreicht war. Äußerer Ausdruck dessen sind die wechselnden Bezeichnungen dieser Bildungseinrichtungen, die schließlich meist in der Anerkennung als „Technische Hochschule“ gipfelten, und der Kampf um das Recht zur Verleihung akademischer Grade. Der Bindestrich und die Großschreibung von Ing. im Titel Dr.-Ing. (gegenüber Dr. med. = Dr. medicinae, Dr. jur. = Dr. juris usw.) sind noch ein ursprünglich als Herabsetzung aufgefaßtes Überbleibsel jener Kämpfe. (Natürlich verlief diese Entwicklung in verschiedenen Ländern im einzelnen recht unterschiedlich.) Inzwischen haben zahlreiche Technische Hochschulen (oder wie immer sie heißen mögen) bedeutende Traditionen und ein hohes internationales Ansehen errungen und sind in das Alter gekommen, in dem man ans Feiern von Jubiläen denkt. Damit ist es jedoch nicht so einfach wie bei den alten Universitäten, die meist durch päpstliche Bulle gegründet wurden und so ein auf den Tag genau fixierbares eindeutiges Alter haben. Technische Hochschulen wuchsen organisch aus Bildungseinrichtungen vorläufigen Charakters oder niedrigeren Niveaus, entstanden oft durch Zusammenlegung mehrerer Anstalten, wechselten – wie gesagt – mehrfach Status und Namen.

Ein gutes Beispiel ist die heutige Technische Hochschule in Prag. Um 1707 gründete der Militäringenieur Christian Willenberg in Prag mit kaiserlicher Bewilligung eine *Ingenieurschule*. Dem 250jährigen Jubiläum dieser Gründung waren die vier hier abgebildeten Marken gewidmet. 1806 wurde diese Einrichtung in ein „*Polytechnisches Institut*“ umgewandelt, dessen erster Direktor der Mathematiker Franz Joseph Gerstner (1756 bis 1832) wurde, der zugleich Professor an der Prager Universität war und als Lehrer des bedeutenden Ma-

thematikers Bernard Bolzano (vgl. alpha 1981, H. 5) bekannt ist.

Eine besondere Pflege erfuhr an dieser seither noch oft umbenannten Bildungsstätte die darstellende Geometrie, zu deren herausragenden Vertretern Rudolf Skuherský (1828 bis 1863) gehört. Seine Würdigung durch eine der vier Jubiläumsmarken hat er aber dem Umstand zu verdanken, daß er als erster Professor am Prager Polytechnikum 1861 dazu überging, seine Vorlesungen in tschechischer Sprache zu halten, entsprechend der Nationalität der Mehrheit seiner Hörer. Der Streit um die Sprache führte 1869 zur Teilung des Polytechnikums in ein deutsches und ein tschechisches (Analoges geschah auch mit der Prager Universität.), die 1879 beide den Rang einer Technischen Hochschule erhielten. Die Deutsche Technische Hochschule in Prag hat dann neben der Tschechischen noch nach der Gründung eines selbständigen tschechoslowakischen Staates im Jahre 1918 bis in die letzten Jahre des 2. Weltkrieges bestanden und sich (wie auch die deutsche Universität in Prag) als Hochburg deutschen Nationalismus und schließlich faschistischer Ideologie einen traurigen Ruhm erworben. Hingegen ist weltweit unbestritten, daß die „ČVUT“ (České Vysoké Učení Technické – mit russischen Sprachkenntnissen und etwas Phantasie kann man dies leicht übersetzen) zu den ältesten und bedeutendsten technischen Bildungseinrichtungen der Welt gehört. Ihr heutiges Emblem ist von eindrucksvoller Symbolik: Der böhmische Löwe hält einen Zirkel, aus dem es fruchtbar ausschlägt.

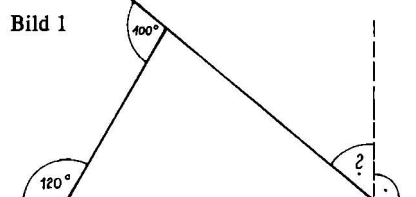
P. Schreiber



Aufgaben für die jüngsten Leser (Klassenstufe 7/8)

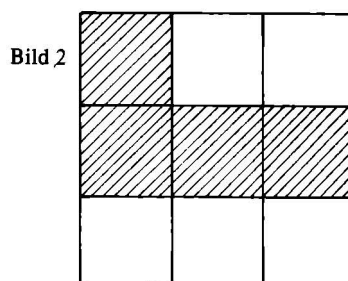
Es sind Aufgaben aus der Geometrie, die zur Lösung etwas Überlegung und Rechenfertigkeit erfordern.

▲ 1 ▲ Welche Größe hat der mit einem Fragezeichen versehene Winkel (Bild 1)?

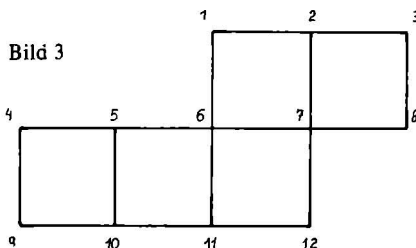


▲ 2 ▲ a) Die dunkle Teilfläche der Figur hat einen Flächeninhalt von 36 cm^2 . Berechne ihren Umfang (Bild 2)!

b) Die dunkle Teilfläche soll nun einen Umfang von 20 cm besitzen; wie groß ist nun ihr Flächeninhalt?



▲ 3 ▲ An die dargestellte Figur (Bild 3), die aus fünf Quadraten besteht, soll noch ein Quadrat angefügt werden, so daß ein Würfelnetz entsteht.



▲ 4 ▲ Wieviel Winkel von 150° könnte a) ein Fünfeck, b) ein Siebeneck höchstens besitzen?

▲ 5 ▲ Kann man innerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser r ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\frac{7}{4} r^2$ zeichnen?

▲ 6 ▲ Kann man innerhalb eines Kreises mit $r = 3 \text{ cm}$ einen Kreis mit dem Umfang $u = 18 \text{ cm}$ zeichnen?

▲ 7 ▲ Gegeben seien eine Kugel K_1 ($r_1 = 1 \text{ cm}$) und eine Kugel K_2 mit dem Rauminhalt 4 cm^3 . Kann man die Kugel K_2 vollständig im Inneren von K_1 unterbringen?

▲ 8 ▲ Gegeben seien eine Kugel ($r = 1 \text{ cm}$) und ein Würfel mit dem Rauminhalt $0,5 \text{ cm}^3$. Ist es möglich, diesen Würfel im Inneren der Kugel unterzubringen? aus: rozhledy



Mathematische Spielereien

„Habt ihr alles; nichts vergessen?“ fragte Tante Eva, bevor das Auto mit Onkel Pepa und den beiden Jungen Honza und Jirka losfuhr. Auf der Landstraße war wenig Verkehr, deshalb achteten die beiden Jungen nicht so sehr auf die polizeilichen Kennzeichen und Typen der anderen Fahrzeuge, sondern konzentrierten sich auf die Verkehrszeichen und ihre Bedeutung. Bald tauchten zwei Zeichen auf *Kurven auf einer Länge von 3 km* sowie *Empfohlene Geschwindigkeit 40 km/h*. Onkel Pepa verminderte daher als disziplinierter Fahrer die Geschwindigkeit.

„Onkel Pepa, bei deinem Tachometer funktioniert die Anzeige der gefahrenen Kilometer nicht“, sagte nach einer Weile der Neffe Jirka. Darauf sagte Onkel Pepa: „Warum meinst du das?“

„Ich habe schon eine ganze Weile auf den Tachometer geschaut, und er zeigt dauernd am Ende die Zahl 253.“

„Was ist denn bei dir dauernd?“ lachte Pepa.

„Als wir am Kurven-Verkehrszeichen vorbeifuhren, zeigte der Tachometer auch schon 253.“

„Schau jetzt hin“, sagte Honza, „gerade jetzt tauchte am Ende der Zahl eine Vier auf.“

„Bei unserem Auto, ebenso – wie ich weiß – beim PKW Škoda erscheint die neue Zahl immer erst dann, wenn ein voller Kilometer abgefahren ist. Wie ist denn das bei eurem Trabant, Jirka?“ fragte der Onkel.

„Bei uns dreht sich der Tachometer wie ein Elektrizitätszähler oder ein Gaszähler, also dauernd.“

„Vati, schau mal hin, schon hast du am Tachometer die Sechs“, sagte nach einer Weile Honza, „also sind die Kurven nun vorbei, und du kannst wieder Gas geben.“

Es war, als ob Jirka nur auf so eine Rede gewartet hätte, denn er warf sofort ein: „Da landen wir im Straßengraben. Herr Fahrer, geben Sie mir Ihre Fahrerlaubnis. Sie können zwar rechnen, aber Sie haben dabei nicht weiter nachgedacht.“

Ein paar Augenblicke später gab es tatsächlich noch einige scharfe Kurven, ohne daß noch ein weiteres Warnzeichen zu sehen gewesen wäre. Onkel Pepa hatte das vor-

ausgesehen und hatte die Fahrt mit geringer Geschwindigkeit fortgesetzt.

„Hier fehlte ein Verkehrszeichen“, meinte Honza.

„Es hat kein Zeichen gefehlt, schau mal her, ich male dir das auf“, sagte nun Jirka ganz kameradschaftlich. „Zur Vereinfachung zeichne ich die Landstraße als gerade Linie.“

Jirka skizzierte eine Gerade und markierte auf ihr mit Hilfe dreier gleich langer Strecken den 3 km langen Straßenabschnitt mit den Kurven; er malte auch das Warnzeichen dazu (siehe Bild 1).

„Erinnere dich, Honza, zu Beginn der Kurven zeigte der Tachometer am Ende die Zahl 253. Zeig jetzt mal ungefähr die Stelle, wo unser Auto war, als die Zahl 253 sichtbar wurde!“

„Wie kann ich das wissen?“ erwiderte unwillig Honza.

„Na, wenigstens ungefähr. Erschien die 253 am Zeichen selbst, davor oder dahinter?“ half ihm Jirka.

„Dahinter bestimmt nicht. Also etwa hier“, sagte nun Honza und markierte auf Jirkas Skizze einen Punkt. Jirka schrieb dazu die Zahl 253, und er forderte nun Honza auf, er solle auch die Punkte markieren, wo die Zahlen 254, 255, 256, 257 erschienen. Honza nutzte seine Fingerbreite zum ungefähren Abmessen der km-Abschnitte, und dabei kam ihm schon ein erleuchtender Gedanke. „Mir ist das jetzt schon klar. Du brauchst mir nichts mehr zu erzählen“, rief Honza. „Wenn wir seit Erscheinen der Zahl 253 – mal angenommen – 400 m gefahren sind, dann endet der Dreikilometerabschnitt auch erst dann, wenn seit Erscheinen der Zahl 256 noch 400 m gefahren sind.“

„Du hast recht“, fügte nun auch der Onkel hinzu. „Erst wenn die Zahl 257 erscheint, haben wir die Gewißheit, daß wir den gesamten gefährlichen Kurvenabschnitt durchfahren haben.“

Im Auto herrschte nun wieder gute Stimmung. Nach einer Weile sagte dann Onkel Pepa: „Paßt auf, ihr Jungen, vor uns liegt der Ort Neudorf. Versucht mal, nach dem Tachometer-Stand die Länge des Ortes zu bestimmen!“

Die Jungen stellten fest, daß am Anfang die Zahl 265, am Ende die Zahl 268 am Tachometer abzulesen war.

Könnt auch ihr das Ergebnis nennen, zu dem die beiden Jungen gekommen waren?

Die Jungen freuten sich, als sie schließlich am Tagesziel, dem Stausee, waren und sich im Wasser tummeln konnten; dabei waren Tachometer, Entfernungsbestimmung usw. rasch vergessen. Doch genügte bei der Rückfahrt ein kurzer Hinweis des Onkels: „Wir sind schon gleich bei Neudorf“, daß die beiden Jungen sich wieder auf ihre *Forschungstätigkeit* bei der Hinfahrt besannen.

„Welchen Stand zeigt der Tachometer?“ fragte sofort wißbegierig Jirka. „Wir wollen doch mal feststellen, ob wir auf das gleiche Ergebnis kommen wie bei der Hinfahrt“, warf Honza zweifelnd ein. Onkel Pepa antwortete nun auf Jirkas Frage: „Der Tachometer zeigt 282,“ und ermunterte die Jungen, daß sie erneut die Länge des Dorfes bestimmen sollen.

„Schade, daß wir nicht früher daran gedacht haben“, bedauerte Jirka, „wir hätten auch die Zeitdauer für die Durchfahrt bestimmen sollen und hätten dann das Ergebnis durch eine Berechnung der Streckenlänge mit Hilfe der Geschwindigkeit überprüfen können. Aber zu diesem Zweck müßten wir ja immer die gleiche Geschwindigkeit haben.“

Wie bestellt, kam gerade eine Gänseschar über die Straße, und Onkel Pepa mußte scharf bremsen und sie vorüberlassen.

„Jetzt haben wir 283,“ sagte Honza. „Jirka, borg mir dein Notizbuch, ich zeichne dazu eine neue Skizze.“

Bild 1

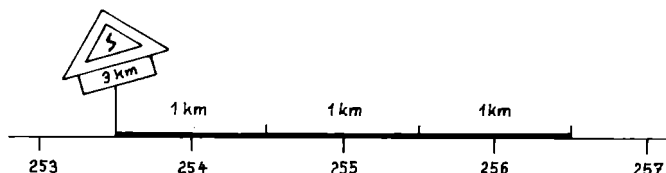


Bild 2

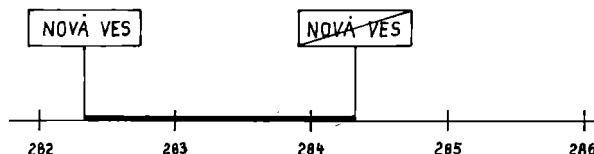


Bild 3

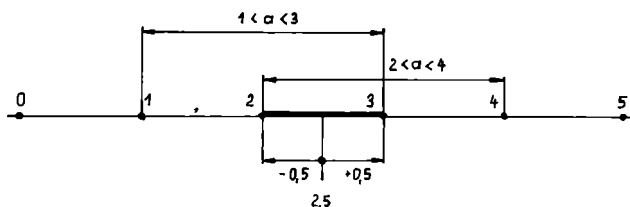
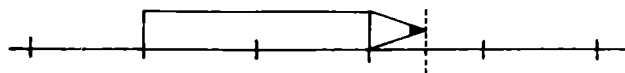


Bild 4



Ehe Honza auf einer neuen Seite die Straße als Zahlengerade gezeichnet hatte, waren sie schon wieder aus dem Dorf heraus. Der Tachometer zeigte dabei bereits seit einigen Dutzend Metern die Zahl 284.

„Ich hatte erwartet, daß es die Zahl 285 sein wird. Bei der Hinfahrt hatten wir einen Unterschied von drei Kilometern, und jetzt ist dieser nur zwei Kilometer,“ erinnerte sich Jirka.

Inzwischen hatte Honza seine Skizze fertig (Bild 2). „Wie du siehst,“ stellte Honza fest, „haben wir ein anderes Ergebnis. Jetzt müßte die Dorfänge zwischen einem und drei Kilometern liegen.“

„Aber das ist eigentlich prima“, freute sich Jirka.

„Was ist denn daran prima, wenn wir jedesmal ein anderes Ergebnis haben?“ meinte verständnislos Honza.

„Na, schau mal her. Auf der Hinfahrt stellten wir fest, daß die Länge des Dorfes zwischen zwei und vier Kilometern betragen muß, also $2 < a < 4$. Jetzt haben wir für die gleiche Streckenlänge gefunden $1 < a < 3$, also zwei verschiedene Abschätzungen, die aber für die gleiche Strecke a gelten,“ erklärte Jirka und fragte schließlich: „Was folgt daraus?“

„Daß die eine Abschätzung falsch ist,“ meinte pessimistisch Honza.

„Gar nichts ist falsch,“ sagte lächelnd Jirka, und er erläuterte sogleich seine Überlegungen. „Vergiß nicht, daß die Länge a in beiden Fällen *gleich* ist. Nur die obere und die untere Abschätzung ist verschieden. Aber gerade darin besteht unser Vorteil. Von den beiden unteren Abschätzungen 1 und 2 können wir die größere verwenden ...“

„... und von den beiden oberen Abschätzungen nehmen wir die kleinere,“ begriff endlich auch Honza. „Also haben wir damit die Möglichkeit, die Abschätzung zu verbessern und können behaupten, daß für a die Abschätzung gilt $2 < a < 3$.“

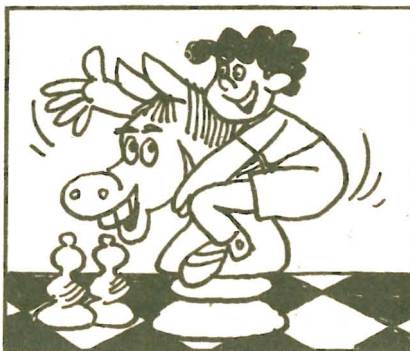
„Wir könnten auch schreiben $a = (2,5 \pm 0,5)$ km,“ ergänzte Jirka und zeigte Honza seine Skizze (siehe Bild 3).

„Ihr seht also, daß es sich gelohnt hat, den Meßversuch zu wiederholen,“ fügte nun der Onkel dem Gespräch bei. „Den Fehler, der zunächst 1 Kilometer betrug, konnten wir durch die neue Messung auf die Hälfte vermindern, d. h. auf 0,5 km.“

„Und wenn wir diese Versuchsmessungen noch einige Male durchführen, würde der Fehler noch kleiner werden,“ meinte nun Honza, um zu zeigen, daß ihm die Sache jetzt völlig klar ist.

„Das ist richtig, aber nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit,“ ergänzte ihn Onkel Pepa, „aber das kann ich euch erst zu Hause erklären, denn jetzt muß ich auf die Straße achten. Überlegt euch inzwischen, ob der Unterschied zwischen den beiden Tachometer-Anzeigewerten am Anfang und am Ende des Dorfes eine andere Zahl als zwei oder drei sein könnte.“

Die Jungen zeichneten eine neue Zahlengerade (Bild 4), und die km-Stiche wählten sie in einem solchen Abstand, daß die



Böhmische Schule

Vor über 120 Jahren gab der böhmische Kunstmaler und Schachproblemkomponist Antonin König (1836 bis 1911) mit einem theoretischen Aufsatz die erste Anregung dazu, den Akzent der kompositorischen Bestrebungen auf die Schlußstellungen der hauptsächlichen Abspiele (Varianten) zu legen, die Mattpositionen zu Mattbildern zu stilisieren und diese dem Grundsatz ökonomischer Formenstrenge zu unterwerfen. Die Mattbilder sollten durchweg ökonomisch bzw. rein sein oder, wie man später sagte, Muster- oder Modellmattbilder.

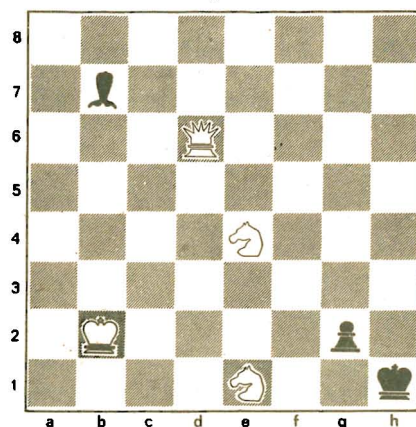
Ökonomisch nennt man eine Mattstellung, an der sämtliche weißen Figuren (ausgenommen eventuell König und Bauern) beteiligt sind. Als rein bezeichnet man ein Mattbild, in dem der schwarze König jeweils nur aus einem einzigen Grunde seine Nachbarfelder nicht betreten darf. Es ist auch zulässig, daß Nachbarfelder durch schwarze Steine blockiert oder verbaut sind; sie dürfen dann aber nicht zugleich durch einen weißen Stein beherrscht werden.

Mit seinem Aufsatz hat Antonin König den Grundstein zur „Česká Školá“, der sogenannten *Böhmischen Schule*, einer Stilrichtung in der Schachkomposition, gelegt. Sie hat sich mit der Zeit von Böhmen aus über ganz Europa verbreitet. Es gibt kaum Problemschachbücher, in denen keine Aufgaben der *Böhmischen Schule* vertreten sind. Bedeutende Problemkomponisten der Böhmischen Schule waren u. a. Dr. Jan Dobrusky (1853 bis 1907), Jiří Chocholous (1856 bis 1930), Josef Pospisil (1861 bis 1916) und Dr. Miroslav Kostal (1881 bis 1958). Von ihrem unbestritten größten Meister Dr. Miroslav Kostal, der sich im Problemschach M. Havel nannte, stammen die beiden folgenden Aufgaben.

Bleistiftlänge etwa eine 2,5-km-Länge darstellte. Durch Verschieben des Bleistifts überzeugten sie sich, daß der Unterschied zwischen den Tachometer-Anzeigewerten ... betragen kann. Macht dazu selbst einen Versuch, und begründet das Ergebnis mathematisch für eine beliebige Länge im Intervall von zwei bis drei Kilometern!

Milan Koman

Matt in drei Zügen

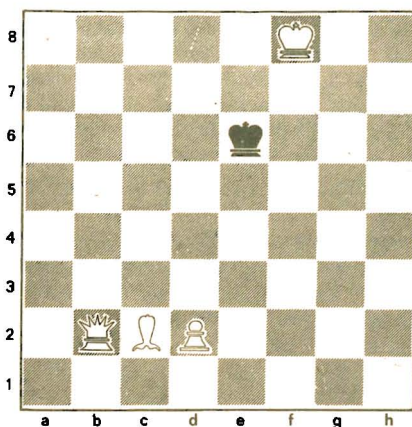


1. Dd1! (Es droht 2. Sf3+.) Kh2/g1S
2. Sf3+/Sf2+ Kh3/Kh2
3. Dd7/Dd6 matt.

Die beiden Varianten enden mit Muster- matt der Böhmischen Schule.

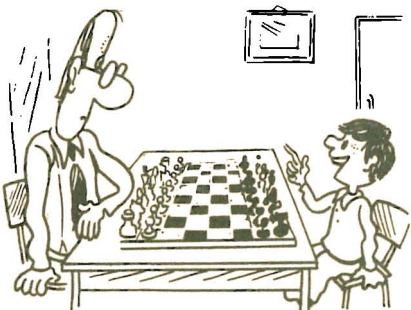
Nach der schwarzen Verteidigung 1. ...g1D ergibt sich zwar durch 2. Df3+ Kh2 3. Dh5 ein weiteres Mustermatt, jedoch entspricht diese Variante nicht der Böhmischen Schule, da Schwarz auf 2. Df3+ auch Dg2 spielen kann, wonach 3. D:g2 matt erfolgt. Die hiernach entstandene Mattstellung ist nicht ökonomisch – der weiße Springer auf e4 ist am Matt nicht beteiligt – und somit kein Mattbild der Böhmischen Schule.

Matt in drei Zügen



Nach dem Schlüsselzug entstehen in vier Abspielen drei Böhmische Mattbilder. Diese sind zu finden!

H. Rüdiger



„Sind wir uns einig, wer verliert, macht die Hausaufgaben.“

W. Milejko

Zur Berechnung von Getriebe-Übersetzungen

Eine Rotationsbewegung wird von einer Welle auf eine andere auf verschiedene Weise übertragen; es kann durch Riemen, Seil oder Kette erfolgen, ferner mittels Reibung, oder mit Zahnrad- bzw. Schneckengetrieben. Die beiden letztgenannten Arten der Übertragung sind am genauesten, denn dabei bleibt die Drehzahl entweder konstant oder sie wird auf eine festgelegte Weise umgewandelt. Zur Berechnung solcher Getriebe-Übersetzungen benötigt man Brüche, wie sie auch in der Schule vorkommen.

Eine einfache Übersetzung wird nachstehend an einem Zahlenbeispiel durchgerechnet. Dieses Beispiel wie auch die Berechnung zusammengesetzter Getriebe führen zur Notwendigkeit, gemeine Brüche auf andere Nenner umzurechnen bzw. sie in periodische Dezimalbrüche umzuwandeln.

Beispiel: In dem Bild 1 ist der Aufriß und ein Seitenriß eines einfachen Zahnradgetriebes dargestellt. Beim Treibrad zeigt ein Pfeil die Drehrichtung an, die Anzahl der Zähne beträgt $z_1 = 70$; die Drehzahl (Frequenz) beträgt $n_1 = 168 \text{ min}^{-1}$. Das getriebene Rad liegt im Eingriff mit dem Treibrad, es gilt $z_2 = 42$; die Drehzahl n_2 soll berechnet werden. Wir wissen, daß bei solchen Zahnradgetrieben eine umgekehrte Proportionalität vorliegt, sie wird durch die Formel (1) dargestellt:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (1)$$

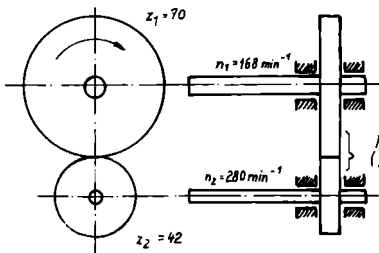


Bild 1

Diese Formel gilt unter der Voraussetzung, daß die Umfangsgeschwindigkeit bei eingreifenden Zahnradgetrieben gleich ist. In einem früheren Beitrag (Jahrgang 60, Heft 10) wurde die Beziehung hergeleitet: $d_1 \cdot d_2 = z_1 \cdot z_2$ (d_i Durchmesser).

In der technischen Praxis wird die Größe der Übersetzung, also das Übersetzungsverhältnis, gewöhnlich durch eine Dezimal-

zahl oder einen periodischen Bruch dargestellt:

$$p = \frac{n_1}{n_2} \text{ bzw. } p = \frac{z_2}{z_1} \quad (2)$$

In unserem Beispiel – vergleiche dazu die Formel (1) – erhalten wir $p = \frac{168}{280} = 0,6$.

Anstelle von p wird oft der Kehrwert $i = \frac{1}{p}$ verwendet, dann gilt

$$i = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

Die Übersetzung wird für den Fall mit i angegeben, wenn p eine periodische Zahl ist. Man wählt also zweckmäßig diejenige der beiden Zahlen p, i , welche die kürzere Anzahl von Stellen aufweist. Gilt $p < 1$ (also $i > 1$ wie im Zahlenbeispiel), sprechen wir von einer Übersetzung (Erhöhung der Drehzahl), für $p > 1$ ($i < 1$) handelt es sich um eine Untersetzung, das getriebene Rad erhält eine kleinere Drehzahl. Für $p = i = 1$ bleibt die Drehzahl konstant.

Im angeführten Zahlenbeispiel ist

$$p = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \text{ Die letzte Zahl } \frac{3}{5} \text{ nennen wir Grundform des Bruches; Zähler und Nenner sind natürliche Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler besitzen.}$$

Wenn man die Grundform erweitert, z. B. mit 10, 11, 12, 13, 14, so erhalten wir der Reihe nach die Brüche $\frac{30}{50}, \frac{33}{55}, \frac{36}{60}, \frac{39}{65}$,

$\frac{42}{70}$; diese Zahlen bezeichnen mögliche Anzahlen von Zähnen z_2 und z_1 . Beim Getriebe im Zahlenbeispiel wurde der Bruch $\frac{42}{70}$ verwendet. Bei einem Getriebe mit

$p = 0,4246$ muß man diese Zahl in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Wir fügen diese Umrechnung bei. Es ergibt sich hier:

$$0,4246 = \frac{4246 - 4}{9990} = \frac{4242}{9990} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 101}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 37} = \frac{707}{1665} \quad (4)$$

Zur Realisierung einer einfachen Übersetzung mit $p = 0,4246$ benötigen wir also Zahnräder mit folgenden Zähne-Zahlen: $z_1 = 1665, z_2 = 707$. Das sind die kleinsten Zahlen, denn die Zahlen 1665 und 707 haben keinen gemeinsamen Teiler. Würden wir statt $p = 0,4246$ den Kehrwert i verwenden, so erhalten wir $\frac{1}{p} = i$

$= 2,355021216407$, damit wäre bei diesem Beispiel nichts vereinfacht.

Statt einer einfachen Über-(Unter-)setzung wird manchmal auch eine mehrfache zusammengesetzte Übersetzung verwendet. Wir benutzen dabei das eben angeführte Übersetzungsverhältnis $p = 0,4246$.

Eine Mehrfach-Übersetzung setzt sich aus einfachen Übersetzungen zusammen; dabei gilt für n beteiligte (einfache) Übersetzungen die Formel (5) für die Verknüpfung der Zahlen

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \quad (5)$$

Ersetzen wir z. B. $p = 0,4246 = \frac{707}{1665}$ durch

zwei Übersetzungsverhältnisse p_1, p_2 , so gilt $p = p_1 \cdot p_2$. Wenn wir die Primzerlegung des Zählers bzw. Nenners verwenden (s. o.), können wir für $n = 2$ schreiben

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{35}{185} \cdot \frac{101}{45} = \frac{21}{185} \cdot \frac{101}{27} = \frac{14}{37} \cdot \frac{101}{90} \text{ usw.}$$

Bei Verwendung des letztgenannten Produkts ist $p_1 = \frac{14}{37} = 0,378, p_2 = \frac{101}{90}$

$= 1,12$; daraus ergibt sich $p = p_1 \cdot p_2 = 0,4246$. Der Leser sollte sich einen Algorithmus für das Produkt $0,378 \cdot 1,12$ überlegen; er kann sich leicht überzeugen, daß dafür ein Taschenrechner nur bedingt geeignet ist. Wegen $p < 1$ handelt es sich bei diesem Beispiel um eine Übersetzung zur Erhöhung der Drehzahl. Die Anzahl der Zähne der beteiligten Zahnräder beträgt $z_1 = 37, z_2 = 14, z_3 = 90, z_4 = 101$; siehe dazu das Schema im Bild 2.

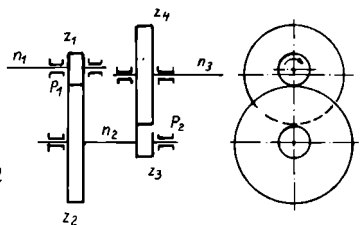


Bild 2

Führen wir auch die Drehzahlen n_i in die Berechnung ein, dann gilt für die einfache Übersetzung p_1 die Beziehung $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$,

für p_2 gilt $\frac{n_2}{n_3} = \frac{z_4}{z_3}$. Wir erhalten daraus

$n_2 = n_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}$ und $n_2 = n_3 \cdot \frac{z_4}{z_3}$. Aus dieser Gleichheit für n_2 ergibt sich

$$n_1 \frac{z_1}{z_2} = n_3 \frac{z_4}{z_3} \text{ oder } \frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3},$$

die wir schon angeführt hatten. Für das ebenfalls angeführte Übersetzungs-Verhältnis $0,4246 = \frac{21}{185} \cdot \frac{101}{27}$ ergibt sich als zusammengesetztes Verhältnis

$p = 0,1135 \cdot 3,740$, diesen Zahlen entsprechen die Zähne-Zahlen $z_1 = 185, z_2 = 21, z_3 = 27, z_4 = 101$.

Wenn wir Rundungen der Brüche zulassen, um die Zähne-Zahlen zu vereinfachen, käme hier z. B. die Ersetzung von $0,4246$ durch $p_E = 0,425$ in Betracht. Damit wäre die Berechnung und besonders die techno-

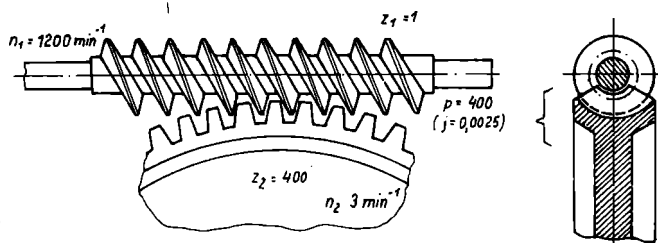


Bild 3

logische Ausführung für ein einfaches wie auch für ein zusammengesetztes Übersetzungs-Getriebe wesentlich einfacher, wie nachstehend angeführt ist:

$$p_E = \frac{425}{10\,000} = \frac{25 \cdot 17}{25 \cdot 400} = \frac{17}{400} = \frac{z_2}{z_1}$$

(einfache Übersetzung)

$$p_E = \frac{425}{10\,000} = \frac{17}{100} \cdot \frac{20}{80} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$$

(für eine zweifache Übersetzung).

Sehr oft ist eine bedeutend größere Über- bzw. Untersetzung erforderlich, z. B. bei einem Aufzug, wobei die hohe Drehzahl des Elektromotors, z. B. $n_1 = 1200 \text{ min}^{-1}$, bedeutend vermindert werden muß, damit die Trommel, auf der das Seil mit der angehängten Aufzugskabine aufgewickelt wird, nur noch eine Drehzahl von z. B. $n_2 = 3 \text{ min}^{-1}$ besitzt; das Zahlenverhältnis

wäre hier $p = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1200}{3} = 400$. In einem

solchen Fall verwendet man zweckmäßig ein Schneckengetriebe, also eine (eingängige) Schneckenstange, die in ein Zahnrad mit 400 Zähnen eingreift (siehe Bild 3). Die Schneckenstange zählt bei der Berechnung wie ein Zahnrad mit nur einem Zahn ($z_1 = 1$). Das Bild 4 zeigt eine zusammengesetzte Übersetzung mit zwei Schneckenstangen und $p_1 = p_2 = 20$; die Gesamtübersetzung ist dann $p = p_1 \cdot p_2 = 400$. Es gibt auch mehrgängige Schneckengetriebe.

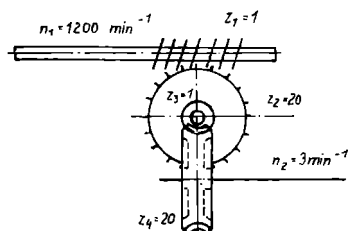


Bild 4

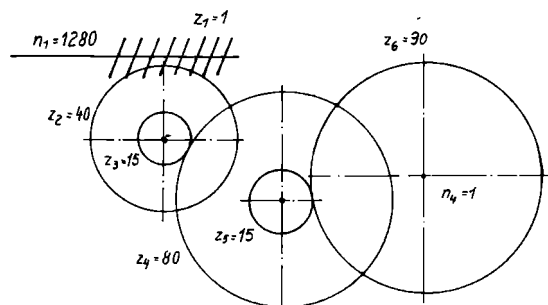


Bild 5

Oft begegnen wir auch Getrieben mit kombinierten Übersetzungen, wobei eine Schneckenstange mit mehreren Zahnradern zusammenwirkt, wie es Bild 5 zeigt. Die Berechnung für dieses Getriebe lautet dann (wegen $p > 1$ liegt eine Untersetzung vor)

$$p = \frac{n_1}{n_4} = \frac{90}{15} \cdot \frac{80}{15} \cdot \frac{40}{1} = 1280;$$

es ergibt sich

$$p = \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1}$$

$$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 6 \cdot 5,3 \cdot 40 = 1280.$$

Wenn daher die Schneckenwelle, die mit der Elektromotorenwelle fest gekoppelt ist, eine Drehzahl von 1280 min^{-1} besitzt, dann wird für $p = 1280$ am Ende des (Untersetzungs-) Getriebes eine Drehzahl von $n_4 = 1 \text{ min}^{-1}$ erreicht.

Ein anderes Beispiel für eine große Untersetzung ist die Antriebseinrichtung für ein astronomisches Fernrohr, das sich mit gleichförmiger Bewegung in 24 Stunden einmal drehen muß. In diesem Falle kann man mehrere Schneckengetriebe verwenden. Die Berechnung und ein Schema des zusammengesetzten Getriebes können wir dem Leser überlassen. Bekannt sind folgende Angaben:

Drehzahl des Elektromotors $n_1 = 2200 \text{ min}^{-1}$, daraus ergibt sich $p = 2\,160\,000$ bzw. $i = 46,296 \cdot 10^{-8}$. Eine mögliche Berechnung, nach der man das Schema zeichnen kann, wäre

$$\frac{2200}{n_4} = \frac{180}{1} \cdot \frac{160}{1} \cdot \frac{150}{1};$$

es ist

$$n_4 = 1 \text{ d}^{-1} = \frac{1}{24} \text{ h}^{-1}$$

$$= \frac{1}{24 \cdot 60} \text{ min}^{-1}$$

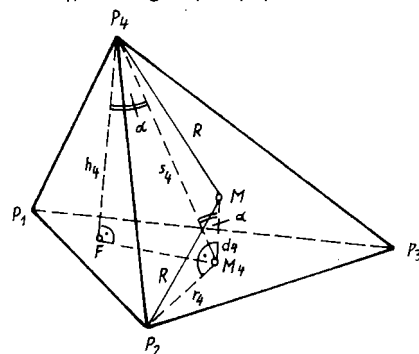
Vlastimil Mráz

Rauminhalt eines Vierflachs

Der Rauminhalt eines beliebigen Vierflachs (d. h., einer unregelmäßig-dreieitigen Pyramide) $P_1P_2P_3P_4$ kann mit Hilfe der Formel

$$V = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^4 A_i^2 (s_i^2 - r_i^2)} \quad (1)$$

berechnet werden. Dabei bedeutet A_i den Flächeninhalt derjenigen Seitenfläche, die nicht die zugehörige Spitze P_i enthält. M_i ist der Mittelpunkt des Umkreises dieser Seitenfläche. So bedeutet A_4 z. B. den Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$. r_i bezeichnet die Länge des Umkreisesradius zur Fläche A_i ; ferner gilt $s_i = \overline{P_iM_i}$.



Beweis der Formel (1)

Den Mittelpunkt und Radius der Kugelfläche, die dem Vierflach umschrieben ist, bezeichnen wir mit M bzw. R . Die Länge der Strecken MM_i bezeichnen wir mit d_i und die Länge der räumlichen Höhe der Spitze P_i über der Fläche A_i mit h_i . Nun berechnen wir den Wert des Terms

$$s_i^2 - r_i^2 = s_i^2 - (R^2 - d_i^2), \quad (2)$$

der aus dem rechtwinkligen Dreieck MM_iP_i folgt. Auf das Dreieck MM_iP_i wenden wir den Kosinussatz an; den Betrag des Winkels $\angle MM_iP_i$ bezeichnen wir mit α :

$$R^2 = s_i^2 + d_i^2 - 2s_id_i \cos \alpha. \quad (3)$$

Bezeichnen wir den Fußpunkt der Höhe h_i mit F (siehe Bild), dann ist $\angle MM_iP_i = \angle FP_iM_i$, denn es sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daher ist $\cos \alpha = h_i / s_i$; die Beziehung (3) erhält damit eine einfachere Form:

$$R^2 = s_i^2 + d_i^2 - 2d_i h_i.$$

Auch die Beziehung (2) wird dadurch nach Einsetzen für R^2 bedeutend einfacher

$$s_i^2 - r_i^2 = 2d_i h_i. \quad (4)$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir die Terme

$$s_i^2 - r_i^2 = 2d_i h_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nun multiplizieren wir die beiden Seiten der Beziehung (4) mit A_4^2 und formen die rechte Seite unter Beachtung von $V = \frac{1}{3} A_4 h_4$ um:

$$A_4^2 (s_4^2 - r_4^2) = 2 A_4 h_4 \cdot A_4 d_4 = 6 V \cdot A_4 d_4. \quad (5)$$

Da man sich das Vierfläch in 4 Pyramiden mit den Grundflächen A_i und den zugehörigen Höhen d_i zerlegt denken kann (gemeinsame Spitze in M), ergibt sich

$$V = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 A_i d_i \text{ bzw. } \sum_{i=1}^4 A_i d_i = 3V.$$

Aus (5) erhalten wir also durch Summieren mit $i = 1, 2, 3, 4$ die Beziehung

$$\sum_{i=1}^4 A_i^2 (s_i^2 - r_i^2) = 6V \sum_{i=1}^4 A_i d_i = 18V^2,$$

woraus sofort die Formel (1) folgt.

Stanislav Horák

Lern-Spiele

Die Station Junger Techniker in Prag vermittelt jetzt Schülern der vierten und fünften Klassen auch Grundlagen der Elektronik und Kybernetik. Die ersten Kursteilnehmer bastelten Mikrorechner, an denen nun alle nachfolgenden Interessenten ausgebildet werden. Kenntnisse in Programmierung und Numerik werden den Kindern in Form von Spielen nahegebracht. Bisher erarbeiteten Schüler schon Programme für Telespiele und für einen Gitarrelehrgang. Aus einem elektronischen Baukasten entstand z. B. eine automatische Futterstelle für Aquarienfische.

Papierformate und Mathematik

Grundlage der Rationalisierung der menschlichen Tätigkeit sind die Erfahrung und Festlegungen, die wir als betriebliche, staatliche oder internationale Normen bezeichnen. Es ist verständlich, daß bei der Festlegung von Normen verschiedene mathematische Beziehungen eine bedeutende Rolle spielen. Wir wollen das bei den Normvorschriften für Papier in Rechteckform betrachten, wie es zum Schreiben, Drucken usw. verwendet wird. So wird z. B. das Format unserer Zeitschrift *rozhledy* als A5 bezeichnet (Abmessungen 148 mm × 210 mm); das ausgebreitete Heft entspricht dem Format A4 (Abmessungen 210 mm × 297 mm).

Aus dem angeführten Beispiel ist zugleich die Grundforderung für genormte Papierformate ersichtlich, d. h., daß durch Halbieren der längeren Seite zwei kleinere Formate entstehen, die ebenfalls normgerecht sind, wodurch Abfall vermieden wird. Die geometrische Form des Ausgangsformats und des kleineren Formats sind daher ähnliche Rechtecke, wie das aus Bild 1 ersichtlich ist. Die längere Seite bezeichnen wir mit y , die kürzere mit x .

Aus Bild 2 ist ersichtlich, wie die einzelnen Papierformate durch fortgesetztes Teilen entstehen.

Bild 1

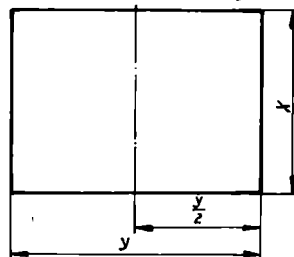
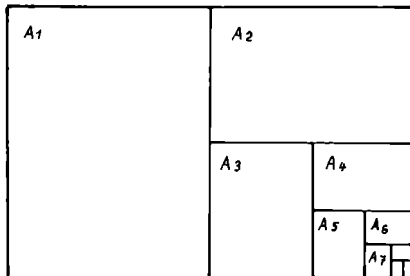


Bild 2



Aus der Grundforderung für das Verhältnis der Seiten eines Rechtecks beim genormten Papierformat ergibt sich die Gleichung

$$y : x = x : \frac{y}{2} \text{ bzw. } y = x \sqrt{2}. \quad (1)$$

Das Seitenverhältnis entspricht also der Beziehung $x : y = 1 : \sqrt{2}$. Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier Formate, wovon das zweite durch Teilung entstand, beträgt 2 : 1.

Nun müssen noch die Abmessungen des Ausgangsformats berechnet werden, das als A0 (A Null) bezeichnet wird. Es ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 1 m². Deshalb gilt die Gleichung

$$xy = 1 \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) bilden ein Gleichungssystem mit zwei Variablen (x ; y). Für die Längen der beiden Seiten des Formats A0 erhalten wir

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,8408964 \dots (\text{Meter})$$

$$y = \sqrt{2} = 1,1892071 \dots (\text{Meter}).$$

Diese beiden theoretischen Maßzahlen für die Seitenlängen des genormten Papierformats A0 sind irrationale Zahlen; nach Rundung auf ganze Millimeter erhalten wir $x = 841$ mm, $y = 1189$ mm. Die relativen Fehler (in %) dieser beiden Maßzahlen im Vergleich zu den theoretischen Werten sind unbedeutend, in der Regel kleiner als

$$0,1\%. \text{ Tatsächlich ist } \Delta x \% = \frac{0,5 \cdot 100\%}{841} \approx$$

$$0,06\%, \Delta y \% = \frac{0,5 \cdot 100\%}{1189} \approx 0,04\%.$$

Der entsprechende Fehler für den Flächeninhalt des Formats A0 beträgt $\Delta A \% = (0,06 + 0,04)\% = 0,1\%$.

In der nebenstehenden Tabelle für die Papierformate der Reihe A sind sowohl die theoretischen Abmessungen als auch die genormten Maßzahlen angeführt. Ergänzend sei bemerkt, daß für technische Zeichnungen kein kleineres Format als A5 verwendet wird. Die Papierformate der Reihe A werden mit Ausnahme von A4 liegend verwendet, d. h., die längere Seite liegt waagerecht.

Vlastimil Mráz

Tabelle der Papierformate, Reihe A

| Format | Theoretische Abmessungen | | Genormte Abmessungen (mm) | Inhalt (m ²) |
|--------|--------------------------|--------------------|---------------------------|--------------------------|
| | $x(m)$ | $y(m)$ | | |
| A0 | $1 : \sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 841 × 1189 | 1 |
| A1 | $0,5 : \sqrt{2}$ | $1 : \sqrt{2}$ | 594 × 841 | $\frac{1}{2}$ |
| A2 | $0,5 : \sqrt{2}$ | $0,5 : \sqrt{2}$ | 420 × 594 | $\frac{1}{4}$ |
| A3 | $0,25 : \sqrt{2}$ | $0,5 : \sqrt{2}$ | 297 × 420 | $\frac{1}{8}$ |
| A4 | $0,25 : \sqrt{2}$ | $0,25 : \sqrt{2}$ | 210 × 297 | $\frac{1}{16}$ |
| A5 | $0,125 : \sqrt{2}$ | $0,25 : \sqrt{2}$ | 148 × 210 | $\frac{1}{32}$ |
| A6 | $0,125 : \sqrt{2}$ | $0,125 : \sqrt{2}$ | 105 × 148 | $\frac{1}{64}$ |
| A7 | $0,0625 : \sqrt{2}$ | $0,125 : \sqrt{2}$ | 74 × 105 | $\frac{1}{128}$ |

Aufgaben bei Aufnahme- gesprächen

Fakultät Mathematik/Physik
an der Komenský-Universität Bratislava

Als Muster führen wir hier zwei Varianten von Aufgabenkomplexen an, die bei Aufnahmegesprächen in früheren Jahren gestellt wurden. Die schriftliche Prüfung dauerte 60 Minuten.

Variante 1

▲ 1 ▲ Löst die nachstehenden Gleichungssysteme im Bereich der reellen Zahlen!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x + 3y = 5 & \text{b) } \lg(4xy) = 2 \\ 7x - 2y = -20 & \lg(x + y) = 1 \\ \text{c) } \sin(x + y) = 1 & \\ \sin x + \sin y = 3 & \end{array}$$

▲ 2 ▲ Auf einer Strecke des Bus-Nahverkehrs gibt es 16 Haltestellen einschließlich der Anfangs- und Endhaltestelle. Der Verkehrsbetrieb hat beschlossen, daß im Interesse einer Beschleunigung des Verkehrs 8 Haltestellen wegfallen sollen.

a) Auf wie viele Arten kann das erfolgen, wenn die Anfangs- und die Endhaltestellen bestehen bleiben?
b) Auf wie viele Arten kann das erfolgen, wenn wir außerdem fordern, daß von beliebigen zwei benachbarten Haltestellen mindestens eine Haltestelle gestrichen wird?

▲ 3 ▲ Entscheidet, ob die nachstehenden Aussagen (Folgerungen) wahr sind! Die Entscheidung ist zu begründen.

$$\begin{array}{l} \text{a) } 3^{400} > 4^{300} \\ \text{b) } \forall a, b \in \mathbb{R}: |a| = |b| \Rightarrow |a + 1| = |b + 1| \\ \text{c) } \exists x, y \in \mathbb{R}: x < y \wedge 2^x \geq 2^y \end{array}$$

▲ 4 ▲ Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit $\overline{AB} = 1 \text{ LE}$. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks BCH , wobei

$$H = \overline{AB} \cap \overline{CE}!$$

▲ 5 ▲ Wie lautet die Gleichung des Kreises $k = (M; r)$, welcher beide Koordinatenachsen berührt und durch den Punkt $P(2; 1)$ geht?

Variante 2

▲ 1 ▲ Bestimmt die Anzahl der Elemente der folgenden Mengen, wenn euch bekannt ist: Menge A besitzt 5 Elemente, Menge B 7 Elemente und die Menge $A \cap B$ besitzt ein Element!

- Menge $A \cup B$
- Menge $A \times B$
- Menge $(A \times B) \cup (B \times A)$.

▲ 2 ▲ Löst die nachstehenden Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen!

$$\text{a) } \frac{3x+8}{2} - \frac{x+6}{2} = x+1$$

$$\text{b) } \sqrt{x+1} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{9x+9} = 6$$

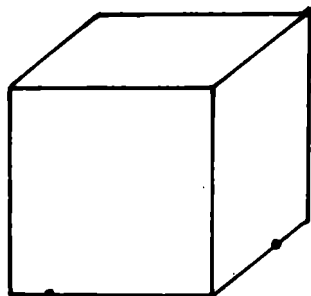
$$\text{c) } \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

▲ 3 ▲ Wieviel verschiedene Fahnen mit drei waagerechten Streifen existieren, wenn folgende Farben zu verwenden sind: Weiß, Rot, Blau, Gelb, Grün und wenn

- die Fahne dreifarbig sein muß,
- die Fahne dreifarbig oder zweifarbig sein kann, wobei aber benachbarte Streifen verschiedenfarbig sein müssen?

▲ 4 ▲ Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck $ABCDEFGH$ mit der Seite $\overline{AB} = 1 \text{ LE}$. Ferner ist ein Punkt P bestimmt durch $P = \overline{AB} \cap \overline{DE}$. Zu berechnen ist $\overline{RC}$.

▲ 5 ▲ Durch gegebene drei Punkte (siehe Bild 1) ist eine Ebene bestimmt. Zeichnet den Schnitt des Würfels mit dieser Ebene, und numeriert die Reihenfolge der Schritte, wie ihr den Schnitt erhaltet!



Bereková/Hecht

19 harte Nüsse –

veröffentlicht in *rozhledy*

A Mathematische Schülerzeitschrift
„Quant“, Moskau

Löst die folgende Ungleichung bzw. die Gleichungen!

$$\text{▲ 1 ▲ } 2(x+1) > x+4$$

$$\text{▲ 2 ▲ } \sqrt{4+2x-x^2} = x-2$$

$$\text{▲ 3 ▲ } \frac{\sqrt[3]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[3]{12+x}}{12} = \frac{64}{3} \sqrt[3]{x}$$

$$\text{▲ 4 ▲ } \frac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$$

$$\text{▲ 5 ▲ } \sqrt[3]{4-4x+x^2} + \sqrt[3]{49+14x+x^2} = 3 + \sqrt[3]{14-5x-x^2}$$

$$\text{▲ 6 ▲ } \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2-16}$$

$$\text{▲ 7 ▲ } \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$$

$$\text{▲ 8 ▲ } \frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3$$

B Mathematische Schülerzeitschrift
„Matematika“, Sofia

▲ 9 ▲ Mit dem Symbol $\overline{xyz}$ bezeichnen wir die dreistellige Zahl $100x + 10y + z$. Löst dazu die Gleichungen!

$$\begin{array}{l} \text{a) } (x+y)^2 = \overline{xy} \\ \text{b) } (\overline{xy})^2 = (\overline{x+2})(\overline{x+2})y \\ \text{c) } (\overline{xy})^2 = (\overline{y-1})xxy \\ \text{d) } x^y = 2(\overline{x-1})(\overline{y-1}) \\ \text{e) } x^5 = \overline{yyyx} \\ \text{f) } x^3 = (\overline{x-2})(\overline{x-7})x \end{array}$$

▲ 10 ▲ Löst die Gleichungen!

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x+\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } x^3(x^2-7)^2-36x=0$$

▲ 11 ▲ Zwischen den Zahlen 50 und 100 sollen alle natürlichen Zahlen x bestimmt werden, für die folgende Bedingungen gelten: $x+4$ ist teilbar durch 3, $x-4$ teilbar durch 5, $c-3$ teilbar durch 7.

▲ 12 ▲ Vereinfacht den Term!

$$\left[4(a+1) + \left(\frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[6]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

▲ 13 ▲ Löst die Gleichungen!

$$\text{a) } \sqrt[3]{5+x} - \sqrt{x-2} = 1$$

$$\text{b) } \log_5^4(x-2)^2 + \log_5^2(x-2)^3 = 25$$

$$\text{c) } (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 14$$

▲ 14 ▲ a) Vereinfacht den Term!

$$\left[\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{2} \right) a^2 - a^{2n+1} : (3a^{2n-2}) \right] \cdot (3a-1)$$

b) Welchen Wert hat der Term für $a = -2$?

C Mathematische Schülerzeitschrift
„Matematičko fizički list“,
Beograd

▲ 15 ▲ Berechne

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}!$$

▲ 16 ▲ Die Zahlen $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$, $\frac{1}{2}$ sind die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge. Berechne die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe!

▲ 17 ▲ Vereinfacht den Term!

$$\frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2+1}}$$

▲ 18 ▲ Berechne den Wert des Terms $3x^2 + 4y - 3y^2$, wenn

$$x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}!$$

▲ 19 ▲ Schreibt den Term

$$\sqrt{13+30\sqrt{2}+9+4\sqrt{2}}$$

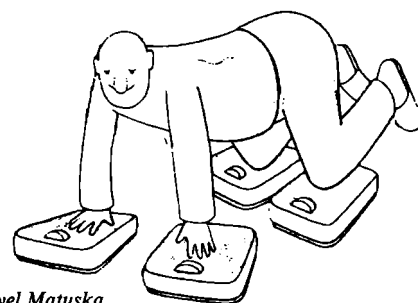
in der Form $a + b\sqrt{2}$!

Zusammengestellt von Ota Setzer, Prag

Anmerkung: Die tschechische mathematische Schülerzeitschrift *rozhledy* spricht Schüler der Klassenstufen 9 bis 12 an.

In freien Stunden · alpha-heiter

Unterhaltungsmathematik aus der ČSSR



Pavel Matuska

Kryptogramme

a) Ersetzt in den gegebenen Diagrammen die Buchstaben durch Ziffern derart, daß die dabei entstehenden Zahlen in allen Zeilen und Spalten (dreiziffrige) Quadratzahlen ganzer Zahlen darstellen!

Jaromír Maláč

| | | |
|---|---|---|
| A | B | B |
| B | C | B |
| B | B | A |

| | | |
|---|---|---|
| K | L | M |
| L | N | L |
| M | L | K |

b) MATHE ČSA Č < K
 MATHE VIVAT KLM S > O
 MATHE VIVAT LOT M < T
 HOBBY MATHE AIR

Dirigent Jindřich Pěňčík, Prag

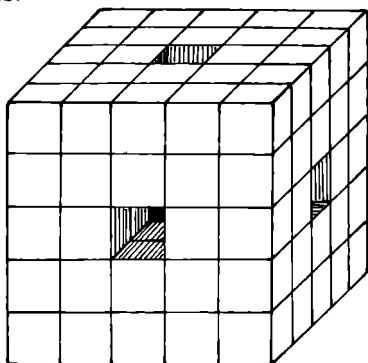
c) Überlegt und rechnet!

$$\begin{array}{r}
 a b b + c d e = f d e \\
 : \quad + \quad - \\
 \underline{g b + g f h = g d h} \\
 i b + j f i = h b i
 \end{array}$$

Petr Hnilička

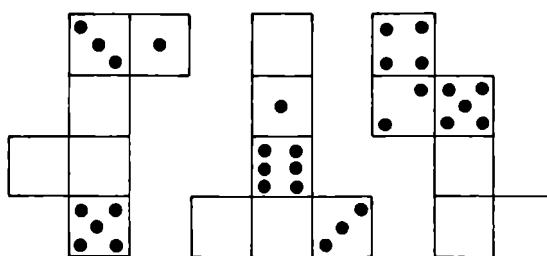
Ein Würfelproblem

Ein Würfel besteht aus 125 kongruenten kleinen Würfeln mit der Kantenlänge 1 (cm). Aus diesem zusammengesetzten Würfel werden nun kleine Würfel herausgenommen, und zwar die mittlere Säule zwischen Grundfläche und Deckfläche, ferner die mittlere Säule zwischen der Vorderfläche und der Hinterfläche sowie die mittlere Säule zwischen der linken und rechten Seitenfläche. Berechnet die Oberfläche und den Rauminhalt des Restkörpers!



Kleine Übung zum Vorstellungsvermögen

Bei den Netzen der Würfel in den Bildern 1, 2, 3 sollt ihr die leeren Felder mit Punkten (Augen) derart ausfüllen, daß aus dem vollständigen Netz ein richtiger Spielwürfel entsteht!



Bei diesem muß die Summe der Punkte auf gegenüberliegenden Seitenflächen 7 sein. Es dürfen auch Punkte zusätzlich auf den bereits ausgefüllten Feldern eingetragen werden; ihr müßt aber dann eine entsprechende neue Punktfigur zeichnen. Füllt also nicht die Felder in der Zeitschrift aus, sondern zeichnet euch die drei Netze auf Papier! Es kann auch mehrere verschiedene Lösungen geben.

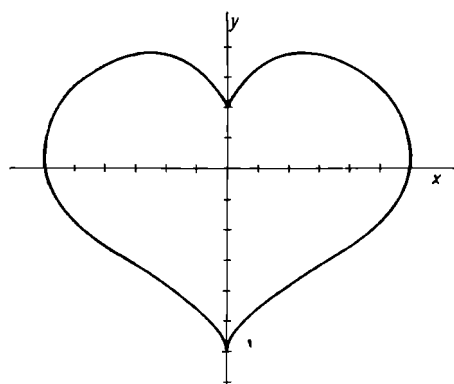
Eine Herzkurve

Ein Beispiel für Funktionen, deren Graph eine geschlossene Kurve in Form eines Herzens aufweist, ist das folgende Paar von Funktionen:

$$y_{1,2} = \frac{2}{3} \left[\frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right]$$

Überlegt den Definitionsbereich der Funktionen, und zeichnet den Funktionsgraph; überlegt ferner, ob Symmetrie vorliegt! Warum entsteht bei diesem Funktionspaar eine geschlossene Kurve?

S. H.



Aufgaben-Allerlei

1. Welche Länge hat der Uhrzeiger, wenn sein Ende in einer Minute einen Bogen von der Länge 1 cm beschreibt?

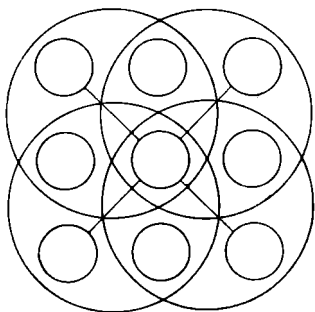
2. Ein Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge a . E, F, G sind der Reihe nach die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, AD . Ohne schriftliche Rechnung soll der Flächeninhalt des Dreiecks EFG bestimmt werden.

3. Welche natürlichen Zahlen kann man in die folgenden drei Terme einsetzen, damit als Ergebnis wieder eine natürliche Zahl entsteht?

a) $\frac{6}{x-1}$ b) $\frac{x}{x-1}$ c) $\frac{x}{x-4}$

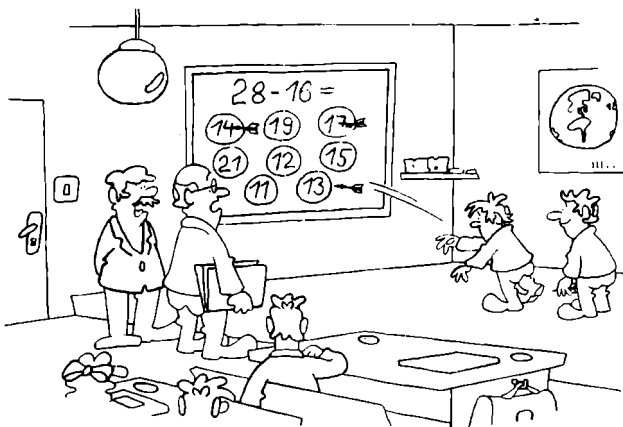
4. In die kleinen Kreise sollen 8 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- die Summen der Zahlen in den beiden Diagonalen sollen gleich sein;
- die Summen der Zahlen innerhalb der großen Kreise sollen gleich sein;
- die doppelte Summe der Zahlen innerhalb eines großen Kreises soll der dreifachen Summe der Zahlen gleich sein, die in einer Diagonale stehen.



5. In einem Kollektiv arbeiten Männer und Frauen. Eine Frau scheidet aus (Altersrente). Würde sie durch einen Mann ersetzt, so wäre der Prozentsatz der Frauen im Kollektiv gerade um ein Prozent kleiner als für den Fall, daß sie ohne Ersatz ausscheidet. Wieviel Männer und Frauen waren ursprünglich im Kollektiv?

Ota Setzer



„Ich richte mich nach Komenský“ (Comenius).
– „...Wir wollen spielend lernen“. – Wer das richtige Ergebnis trifft, erhält eine Eins.

aus: Dikobraz, Václav und Petr Herinkovi

Kreuzzahlenrätsel

In die leeren Felder sind natürliche Zahlen bzw. Grundziffern einzusetzen, die den nachstehenden Bedingungen entsprechen.

Waagrecht: A $\sqrt{1936}$; größter gemeinsamer Teiler zu 36, 72, 126.

B Lösung der Gleichung $x:30 = 9:10$; größte ein-ziffrige Primzahl;

$$2 - \{1 - [2 - (1 - 2) - 1] - 2\} + 8.$$

C Arithmetisches Mittel der Zahlen 1, 1, 3, 7;

$$\sqrt{152^2 + 714^2}; \text{ Lösung der Gleichung}$$

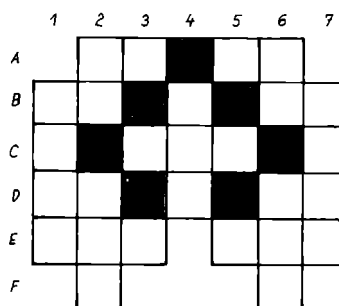
$$\frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{2} - 2.$$

D Summe der Innenwinkel im Zehneck, ausgedrückt in rechten Winkeln;

$$24 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3 + \frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}}; \text{ Basis unseres Zahlensystems.}$$

E Kleinstes gemeinsames Vielfaches der Zahlen 2, 3, 6, 12, 16, 36; kleinste dreiziffrige Primzahl, die auf 17 endet.



Senkrecht: 1 Primzahl

2 $2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$; $28 \cdot 23$

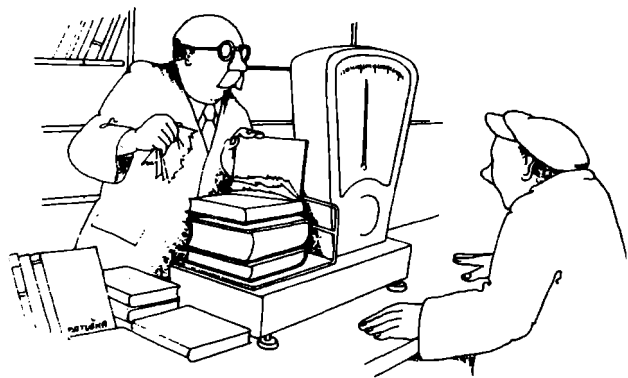
3 ?; größter gemeinsamer Teiler der Zahlen 21, 56, 63, 84; ?

4 Ein Vielfaches von 67

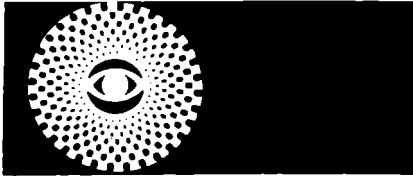
5 $4 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$; eine Zahl, die weder positiv noch negativ ist.

6 3^4 ; drei gleiche Grundziffern

7 Primzahl



aus: NBI, Václav Ostatek



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Ein mathematisches Spiel: Trlenka

Südlich von Ružomberok (Slowakei) liegt das Tal *Trlenská dolina*. Im Juli 1979 war dort ein Pionier-Spezialistenlager für *Junge Mathematiker*. In diesem Lager wurde erstmalig ein Spiel durchgeführt, das für dieses Lager erdacht und nach dem schönen Gebirgstal benannt wurde. Ihr sollt nun eine Beschreibung des Spiels erhalten, das eine gute Unterhaltung bietet.

Spielregeln: *Trlenka* wird auf einem schachbrettähnlichen Brett mit 4×4 Feldern gespielt. Es sind zwei Spieler *A*, *B* beteiligt, die abwechselnd Züge ausführen. Zum Spiel gehören 16 Spielsteine.

Bei jedem Zug legt der Spieler 1, 2, 3 oder 4 Steine auf freie Felder einer Zeile oder einer Spalte. Auf jedes Feld darf nur ein Stein gelegt werden. Derjenige Spieler, der den letzten (16.) Stein hinlegt, hat verloren.

Die Spielregeln für jedes Spiel begreift man am besten beim Spielvorgang selbst; deshalb soll nun eine Beispiel-Partie beschrieben werden.

Der Spielverlauf wird durch eine Folge von acht Diagrammen veranschaulicht (siehe Bild 1), dabei werden die Steine durch

Punkte dargestellt. Beim ersten Zug legte Spieler *A* zwei Steine in die zweite Spalte (schwarze Punkte im Diagramm). Dann legte der Spieler *B* drei Steine in die Felder der ersten Zeile (schwarze Punkte im nächsten Diagramm). Im dritten Zug legte Spieler *A* einen Stein auf ein Feld in der ersten Spalte (siehe 3. Diagramm). Das Spiel wird nun so fortgesetzt, wie es auf den weiteren Diagrammen des Bildes 1 ersichtlich ist. Bei der Zugfolge der Beispielpartie fehlt der letzte Zug; dabei wäre Spieler *A* gezwungen, das letzte freie Feld zu besetzen und er hat damit verloren.

Denkt über diese Beispielpartie nach, und versucht folgende Fragen zu beantworten:

1. Konnte Spieler *A* im 7. Zug so spielen, daß er für jeden beliebigen Zug von *B* die Partie gewann?

2. Wir setzen voraus, daß Spieler *A* im 5. Zug den Stein nicht in die dritte Spalte, sondern in die erste legte. Wie könnte Spieler *B* in diesem Fall fortsetzen?

3. Könnte Spieler *A* im dritten Zug der Partie besser spielen? Wenn es euch gelungen ist, auf die gestellten Fragen eine zutreffende Antwort zu finden, so versucht ein weiteres Problem zu lösen: Kann Spieler *A* die Partie gewinnen? Oder, genauer formuliert: Gibt es eine Anleitung für die Zugfolge, bei deren Einhaltung der Spieler *A* über jeden Gegner siegt?

Dieses Problem könnte unlösbar sein, d. h., daß es keine solche Anleitung gibt. Aber vielleicht existiert dann eine solche Anleitung für den Spieler *B*, d. h., daß *B* jede Partie gewinnen kann? Sicher scheint zu sein, daß es für einen der Spieler (wir wissen aber nicht, für welchen) solch eine Anleitung gibt; man bezeichnet diese Anleitung als Spiel-Strategie.

Die Freude über die Entdeckung einer entsprechenden Strategie wollen wir dem Leser überlassen. Als Hilfestellung wollen wir die Strategie für ein einfacheres Spiel anführen, und zwar für eine Variante zu *Trlenka*, wo wir ein Brett mit nur 3×3 Feldern verwenden; diese Variante soll *Klein-Trlenka* heißen.

Strategie für Klein-Trlenka

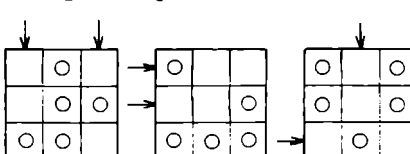
Unter allen möglichen Spielpositionen (wie viele gibt es?) sollen nur einige wichtige behandelt werden, wir nennen sie *kritische Positionen*. Das sind solche Positionen, bei denen derjenige Spieler verliert, der am Zug ist, wenn sein Gegner die Spielstrategie beherrscht. Bei *Klein-Trlenka* gibt es vier Typen kritischer Positionen:

1. Es sind genau 8 Felder besetzt (ein Feld ist frei).
2. Es sind genau 6 Felder besetzt, in jeder Zeile und Spalte ist genau ein Feld unbesetzt.

Bild 2a

b

c



3. Es sind genau 5 Felder besetzt; bei vier freien Feldern entsteht einer von drei Fällen (siehe Bild 2a, b, c).
4. Es ist nur ein Feld besetzt.

Wenn wir die kritischen Positionen kennen, haben wir damit bereits die Grundlage für die Spielstrategie erkannt. Die eigentliche Anleitung für die Zugfolge ist dann relativ einfach:

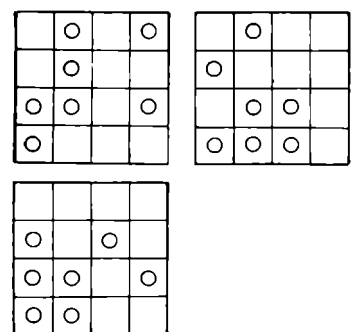
- a) Im ersten Zug legt Spieler *A* einen Stein auf ein beliebiges Feld.
- b) Im dritten Zug ergänzt Spieler *A* die Anzahl der gelegten Steine auf fünf (und zwar so, daß eine der im Punkt 3 beschriebenen Positionen entsteht).
- c) Im fünften Zug spielt *A* so, daß eine der Positionen entsteht, die im Punkt 2 bzw. 1 beschrieben sind.
- d) Wie im vorhergehenden Zug ist eine Position entstanden, wie sie im Punkt 2 beschrieben ist; dann legt im 7. Zug der Spieler *A* einen Stein auf ein beliebiges der restlichen zwei freien Felder.

Nun könnt ihr nach dieser Anleitung einige Partien *Klein-Trlenka* spielen. Dann versucht, eine Spielstrategie für *Trlenka* zu finden! Zur Übung und als Hilfe beantwortet folgende Fragen:

- a) Wieviel wesentlich verschiedene Positionen existieren beim Spiel *Trlenka*, wenn von 16 Feldern 12 besetzt und 4 frei sind?
- b) Wieviel entsprechende Positionen existieren, wenn 10 Felder besetzt und 6 frei sind?

Wir müssen dazu noch erklären, was wir unter *wesentlich verschiedene Positionen* verstehen. Zunächst erklären wir, was *im wesentlichen gleiche Positionen* sind. Das sind zwei Positionen, die wir ineinander durch eine einmalige (ggf. mehrmalige) Anwendung folgender drei Transformationen überführen können: Zeilentausch, Spaltentausch, Umklappen um eine Diagonale. In diesem Sinne sind alle 3 Positionen in Bild 3 im wesentlichen gleich. Positionen, die nicht im wesentlichen gleich sind, werden als (wesentlich) verschieden bezeichnet.

Bild 3

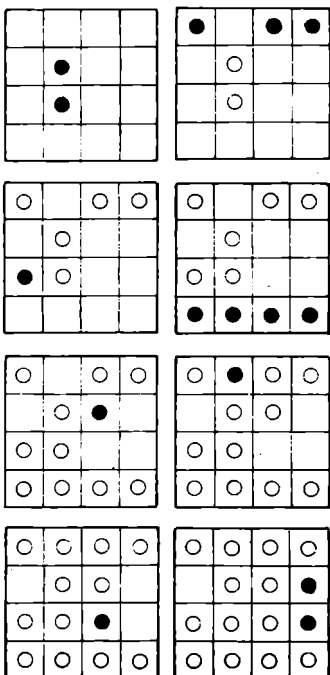


Schlußbemerkung

Das Spiel *Trlenka* kann man auf verschiedenen großen Spielbrettern spielen. Je größer die Anzahl der Felder ist, desto schwieriger ist es, eine zugehörige Spielstrategie zu finden. Dem Autor ist keine Strategie für Spielbretter mit 5×5 Feldern oder größer bekannt.

Milan Hejny

Bild 1



Lösungen



Ergebnisse zu:

Aufgaben für die jüngsten Leser

- ▲ 1 ▲ 50°.
 ▲ 2 ▲ a) 30 cm; b) 16 cm².
 ▲ 3 ▲ Das fehlende Quadrat kann bei einer der folgenden Seiten angefügt werden: 9, 10; 10, 11; 11, 12; 3, 8.
 ▲ 4 ▲ a) 3; b) 5.
 ▲ 5 ▲ nein. 6 ja. 7 ja. 8 ja.

Lösung zu: Böhmisches Schloß

Der Schlüsselzug lautet 1. d2-d4!
 Nach 1. ...Kf6/Kd6 2. Db5/Db7 Ke6/Ke6
 3. Dc6/Dc6 ergibt sich das erste Böhmisches Mattbild.
 Das zweite nach 1. ...Kd5 2. Db6 Kc4 3. Dc5.
 Das dritte nach 1. ...Kd7 2. Db6 Kc8 3. Lf5.

Lösungen zu: 19 harte Nüsse

- A ▲ 1 ▲ $x > 2$ ▲ 2 ▲ $x = 3$
 ▲ 3 ▲ $x_1 = \frac{12}{127}$, $x_2 = \frac{-4}{43}$
 ▲ 4 ▲ $x_1 = 3$, $x_2 = 5$
 ▲ 5 ▲ $x_1 = 1$, $x_2 = -6$ ▲ 6 ▲ $x = 5$
 ▲ 7 ▲ $x = \frac{1}{12}$ ▲ 8 ▲ $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$
 B ▲ 9 ▲ (x; y) = a) (8; 1) b) (2; 1)
 c) (7; 6) d) (4; 3) e) (6; 7) f) $x = 9$
 ▲ 10 ▲ a) $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{2})$
 b) 0; ± 1 ; ± 2 ; ± 3
 ▲ 11 ▲ $x = 59$ ▲ 12 ▲ $2 + 2\sqrt{a}$
 ▲ 13 ▲ a) $x = 3$ b) $x_1 = 7$, $x_2 = \frac{11}{5}$
 c) $x = \pm 2$
 ▲ 14 ▲ a) $\frac{-3a^2}{2} + \frac{a^2}{2}$ b) 14
 C ▲ 15 ▲ 1,5 ▲ 16 ▲ $4 + 3\sqrt{2}$
 ▲ 17 ▲ $\sqrt{2}$ ▲ 18 ▲ $\frac{1}{3}(48\sqrt{10} + 28)$
 ▲ 19 ▲ $5 + 3\sqrt{2}$

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptogramme

- a) 1 4 4 1 6 1
 4 8 4 6 7 6
 4 4 1 9 6 1

| | | |
|----------|-------|-----|
| b) 31592 | 35306 | 287 |
| 31592 | 35306 | 314 |
| 31592 | 70612 | 159 |
| 94776 | | 760 |

c) $600 + 198 = 798$

$$\begin{array}{r} : \\ + \\ - \\ 20 + 275 = 295 \\ 30 + 473 = 503 \end{array}$$

Ein Würfelproblem

Es wurden 13 kleine Würfel herausgenommen;

$$A = 144 \text{ (cm}^2\text{)}, V = 112 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Kleine Übung

zum Vorstellungsvermögen

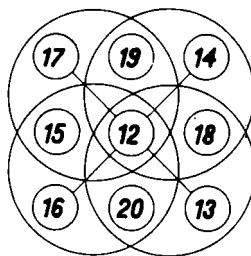
Zu dieser Aufgabe erwartet die Redaktion *alpha* die Lösung und weitere Würfelnetz-Varianten, *Kennwort*: Kleine Übung zum Vorstellungsvermögen.

Eine Herzkurve

Zu dieser Aufgabe erwartet die Redaktion *alpha* Antworten unter dem *Kennwort*: Herzkurve.

Aufgaben-Allerlei

1. $s = 9,6 \text{ cm}$ 2. $A = \frac{a^2}{4}$
 3. a) $x = 2; 3; 4; 7$ b) $x = 2$
 c) $x = 5; 6; 8$
 4. siehe Bild!



5. Im Kollektiv waren ursprünglich 18 Männer und 7 Frauen.

Kreuzzahlrätsel

- A 44; 18 B 27; 7; 13 C 4; 730; 6
 D 16; 7; 10 E 144; 117
 1 2311 2 47; 644 3 4; 7; 4
 4 737 (= 67 · 11) 5 1; 0
 6 81; 111 7 5607

Lösungen zu:

Geschicklichkeitsrätsel

Schwarz und weiß

Zu den Bildern 5, 6, 7, 8 ist zu bemerken, daß die Bilder 5, 6 und 8 die Rätselscheibe an der Vorderseite zeigen (die schwarze Koralle ist rechts), das Bild 7 zeigt die Rückansicht (die schwarze Koralle ist links).

1. *Vorgang* (Bild 5): Die schwarze Koralle verschieben wir auf der Schleife so weit, bis sie hinter der Scheibe ist.

2. *Vorgang* (Bild 6): Wir ergreifen beide Stücke der Zierschnur auf der Rückseite der Scheibe (mit den Pfeilen nach oben bezeichnet) und ziehen sie in Pfeilrichtung so weit, daß wir die Schleifen, an denen sich die beiden Korallen befinden (auf dem Bild mit Pfeilen nach unten bezeichnet)

Bild 5

Bild 6

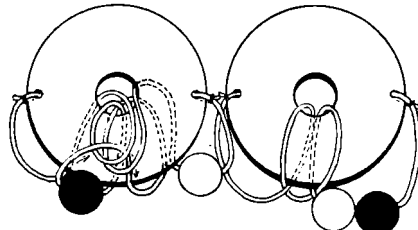
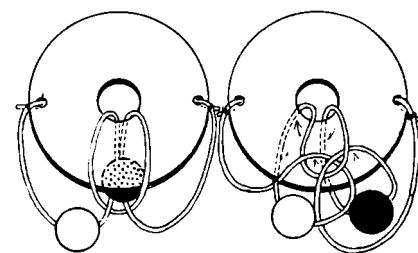


Bild 7

Bild 8

net) durch das Mittelloch in der Scheibe durchziehen. Wenn uns das gelungen ist, wenden wir die Scheibe und nehmen die Rückseite nach vorn.

3. *Vorgang* (Bild 7): Nun haben wir die schwarze Koralle links. Diese Koralle verschieben wir nach rechts und ziehen sie durch beide Schleifen an die Stelle, wohin die Pfeile zeigen. Dann ziehen wir beide Schleifen durch das Mittelloch zurück auf den ursprünglichen Platz, anschließend wenden wir die Scheibe wieder mit der Vorderseite zu uns. Wenn wir die entstandene Situation betrachten, so erkennen wir, daß es leicht möglich ist, die schwarze Koralle an eine Stelle neben die weiße Koralle zu verschieben (siehe Bild 8). Damit ist das Rätsel gelöst. Durch umgekehrtes Vorgehen bringen wir die schwarze Koralle auf den ursprünglichen Platz zurück.

Ein Ring in der Falle

Den Ring schieben wir auf das bewegliche Drahtbogenstück und zusammen mit diesem so dicht wie möglich an die Stelle, wo das andere (nichtverschiebbare) Bogenstück befestigt ist, das wir zuvor umgeklappt haben, siehe Bild 9. Nun können wir mit dem Ring diese Verbindungsstelle umgehen, und der Ring läßt sich dadurch aus dem inneren Bogenstück herausnehmen, siehe Bild 10. Das Hineinbringen des Ringes wird durch die Umkehrung des Vorgangs möglich.

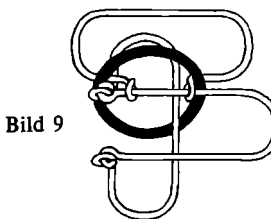


Bild 9

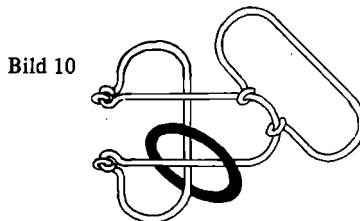


Bild 10

Das gefangene Röhrchen

Wir betrachten dazu Bild 11. Das gefaltete Ende einer der beiden Zierschnuren ziehen wir zunächst durch das Röhrchen durch, dann durch die eine der beiden Öffnungen im Sperrholz. Mittels der Schlinge (mit dem gefalteten Ende der Zierschnur) können wir nun leicht die Koralle umgehen und die Zierschnur aus der Öffnung herausziehen. Damit hätten wir die Hälfte geschafft; das Röhrchen können wir nun leicht aus dem anderen Teil des Gebildes herauslösen.

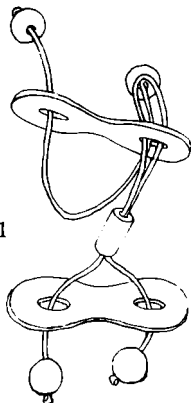


Bild 11

Die Spange in der Spirale

Die beiden Bilder zeigen deutlich das Vorgehen. Wir verschieben die Spange derart entlang der Spirale, bis wir sie an die feste Schleife (an das *Auge*) gebracht haben; mit dem mittleren Teil der Spange können wir die feste Schleife umgehen und die Spange herausnehmen. Durch den umgekehrten Vorgang können wir dann die Spange wieder in die Spirale einschieben.

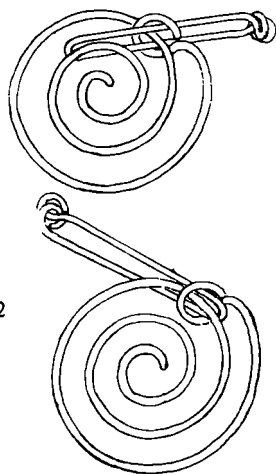


Bild 12

Das Herz im Schuh

Die Herzfigur müssen wir so basteln, daß wir ihren mittleren Teil (die *Nadel*) in das waagrecht liegende Auge der Schuhfigur

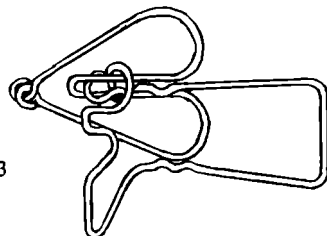


Bild 13

einschieben und dadurch das vertikal liegende Auge, d. h., den zur Schuhspitze liegenden Teil der Schuhfigur, umgehen können (Bild 12).

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb

Heft 1/84 (Fortsetzung)

Ma 8 ■ 2422 Dieses Verfahren kann man nur anwenden, wenn die Quersumme der zweistelligen Zahl kleiner als 10 ist. Es seien a und b die Grundziffern der zweistelligen Zahl in der vorgegebenen Reihenfolge; dann läßt sich die Multiplikationsaufgabe wie folgt darstellen:

$$(10a + b) \cdot 11$$

Nach unserem Verfahren gilt nun

$$100a + 10(a + b) + b$$

Ein Vergleich beider Terme zeigt die Allgemeingültigkeit:

$$(10a + b) \cdot 11 = 100a + 10(a + b) + b,$$

$$110a + 11b = 100a + 10a + 10b + b,$$

$$= 110a + 11b.$$

Wenn $a + b \geq 10$, dann ist

$$10(a + b) \geq 100. \text{ Dann gilt } (10a + b) \cdot 11$$

$$= 100(a + 1) + 10(a + b - 10) + b$$

$$= 100a + 100 + 10a + 10b - 100 + b$$

$$= 110a + 11b.$$

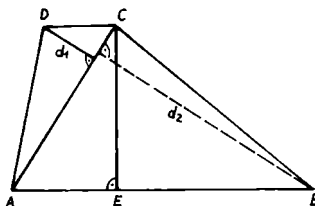
Es muß dann folgendermaßen verfahren werden:

Beispiel: $48 \cdot 11 = 528$.

Da die Quersumme von 48 größer als 10 ist, nämlich 12, schreibt man die 2 als mittlere Grundziffer und erhöht die erste Grundziffer um 1.

Ma 8 ■ 2423 Wegen $2^{10} = 1024 > 1000$ müssen 9 Beutel folgende Anzahlen an Markstücken enthalten: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Der zehnte Beutel muß die restlichen, also 489 Markstücke enthalten.

Ma 8 ■ 2424 Skizze, nicht maßstäblich.



Die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ACD verhalten sich wie 4 : 1. Grundseiten sind AB bzw. CD ; Höhe ist in beiden Dreiecken CE .

Der Flächeninhalt des Dreiecks ACD ist ein Fünftel des Flächeninhaltes des Trapezes, also 24 cm^2 . Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC = 96 \text{ cm}^2$.

Es seien d_1 bzw. d_2 die Abstände der Punkte D bzw. B von der Diagonalen AC . Dann gilt

$$24 \text{ cm}^2 = \frac{10 \text{ cm} \cdot d_1}{2} \text{ und}$$

$$96 \text{ cm}^2 = \frac{10 \text{ cm} \cdot d_2}{2}. \text{ Daraus folgen:}$$

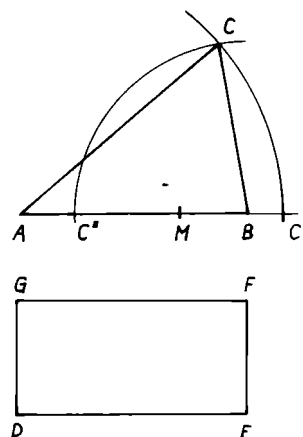
$$d_1 = 4,8 \text{ cm und } d_2 = 19,2 \text{ cm.}$$

Ma 8 ■ 2425

$$\overline{DE} = \overline{AB}$$

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

Man zeichnet um A einen Kreis mit einem Radius der Länge $\overline{AC}$, der die Gerade AB in C' schneidet und um B einen Kreis mit einem Radius der Länge $\overline{BC}$, der die Gerade AB in C'' schneidet. Die Strecke $\overline{C'C''}$ ist genauso lang wie $\overline{AC} - \overline{AB} + \overline{BC}$. Wenn man $\overline{C'C''}$ halbiert, so erhält man mit $\overline{C'M}$ die gesuchte zweite Rechteckseite.



Ma 9 ■ 2426 Es sei m die „Monatszahl“ des Geburtsmonats, j die „Jahreszahl“ des Geburtsjahres und a die Zahl, die das Lebensalter in Jahren am Geburtstag im Jahre 1984 angibt.

Nun gilt

$$(2m + 40) \cdot 50 - 16 - j = 100m + (1984 - j).$$

Wegen $1984 - j = a$ gilt weiter

$$100m + 2000 - 16 - j = 100m + a,$$

$$100m + 1984 - j = 100m + a,$$

$$100m + a = 100m + a.$$

a bedeutet das Alter in Jahren. Bei Streichung von a bedeutet dann m die „Monatszahl“ des Geburtsmonats, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 2427 cee muß eine Quadratzahl sein; es kommen nur 100 oder 144 in Frage. 100 entfällt, da sonst in efa die erste Ziffer eine Null wäre. Man setzt nun in (3) ein und erhält

$$\sqrt[3]{4 \cdot efa} = \sqrt{144},$$

$$\sqrt[3]{4 \cdot efa} = 12,$$

$$4 \cdot efa = 1728,$$

$$efa = 432.$$

Nun gelten

$$(1) 2b \cdot 1d = 432$$

$$(2) 1g \cdot 24 = 432. \text{ Es folgt } g = 8.$$

Wegen $3^3 \cdot 2^4 = 432$ ermittelt man für

$$(1) 27 \cdot 16 = 432, \text{ also für } b = 7 \text{ und } d = 6.$$

Es ergeben sich die folgenden wahren Aussagen:

$$(1) 27 \cdot 16 = 432$$

$$(2) 18 \cdot 24 = 432$$

$$(3) \sqrt[3]{4 \cdot 432} = \sqrt{144}.$$

Ma 9 ■ 2428 Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$r^2 = (r - 21)^2 + 32^2,$$

$$r^2 = r^2 - 42r + 441 + 1024,$$

$$42r = 1465$$

$$r \approx 34,88 \approx 35.$$

Der Radius des Bogens beträgt etwa 35 mm.

Ma 9 ■ 2429 In dem abgebildeten Dreieck ABC sei CD Höhe auf AB . Die Seite AC habe die Seitenlänge $n - 1$, AB

die Seitenlänge n , $\overline{BC}$ die Seitenlänge $n+1$, $\overline{AD}$ die Länge x , also $\overline{BD}$ die Länge $n-x$. Aus $h^2 = (n-1)^2 - x^2$ und $h^2 = (n+1)^2 - (n-x)^2$ folgt $(n-1)^2 - x^2 = (n+1)^2 - (n-x)^2$, also $x = \frac{1}{2} \cdot (n-4)$.

Daraus folgt weiter

$$h^2 = (n-1)^2 - \frac{1}{4} \cdot (n-4)^2 = \frac{3}{4} \cdot (n^2 - 4),$$

also

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3(n^2 - 4)}.$$

$$\text{Nun gilt } \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3(n^2 - 4)} = 84,$$

$$n^4 - 4n^2 - 37632 = 0, n = 14.$$

Das Dreieck ABC hat die Seitenlängen 13 cm, 14 cm und 15 cm.

Ma 10/12 ■ 2430 Es seien $(c+2)$, $(c+1)$ und c die Grundziffern nach Aufgabenstellung. Dann gilt

$$100(c+2) + 10(c+1) + c + 21$$

$$= 3[(c+2) + (c+1) + c]^2.$$

Durch äquivalente Umformung erhält man

$$111c + 231 = 27c^2 + 54c + 27$$

$$\text{und weiter } c^2 - \frac{19}{9}c - \frac{68}{9} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat Lösungen, von denen für unser Problem nur $c = 4$ in Frage kommt.

Daraus folgt, daß die gesuchte dreistellige Zahl 654 heißt. (Quersumme:

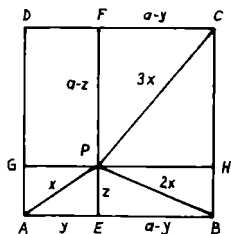
$$6 + 5 + 4 = 15; \quad 15^2 = 225; \quad 3 \cdot 225 = 675; \quad 675 - 21 = 654)$$

Ma 10/12 ■ 2431 Wir zeichnen durch P eine Parallele zu AB und eine weitere zu BC . Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$(1) \quad x^2 = y^2 + z^2,$$

$$(2) \quad 4x^2 = (a-y)^2 + z^2,$$

$$(3) \quad 9x^2 = (a-y)^2 + (a+z)^2.$$



Aus (3) und (2) folgt durch Subtraktion

$$5x^2 = (a-z)^2 - z^2 = a^2 - 2az, \text{ also}$$

$$(4) \quad z = \frac{a^2 - 5x^2}{2a}.$$

Aus (2) und (1) folgt durch Subtraktion

$$3x^2 = a^2 - 2ay, \text{ also}$$

$$(5) \quad y = \frac{a^2 - 3x^2}{2a}.$$

Aus (4), (5) folgt durch Einsetzen in (1)

$$x^2 = \frac{(a^2 - 3x^2)^2}{4a^2} + \frac{(a^2 - 5x^2)^2}{4a^2},$$

$$4a^2x^2 = 2a^4 - 16a^2x^2 + 34x^4,$$

$$x^4 = \frac{10}{17}a^2x^2 + \frac{a^4}{17} = 0.$$

Setzen wir $x^4 = t^2$, dann gilt

$$t^2 - \frac{10}{17}a^2t + \frac{a^4}{17} = 0,$$

$$\text{also } t_1 = \frac{a^2}{17}(5 + 2\sqrt{2}) \approx 0,46a^2 \text{ und}$$

$$t_2 = \frac{a^2}{17}(5 - 2\sqrt{2}) \approx 0,13a^2.$$

Daraus folgt schließlich

$$x_1 \approx 0,68a = 6,8 \text{ cm}$$

$$\text{und } x_2 \approx 0,36a = 3,6 \text{ cm}.$$

Es entfällt x_1 , da in diesem Fall P außerhalb des Quadrates liegt. Die Strecke $\overline{PA}$ hat die Länge 3,6 cm, die Strecke $\overline{PB}$ hat die Länge 7,2 cm.

Ma 10/12 ■ 2432 Im rechtwinkligen

Dreieck DBE ist $\frac{\beta}{2} = 30^\circ$, folglich $\beta = 60^\circ$.

Wegen $\gamma = 60^\circ$ ist ABC ein gleichseitiges Dreieck. Daraus folgt, daß die Strecke $\overline{BE}$ ein Umkreisradius ist. Es gilt

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{r_1}{r_u}; \quad r_u = 2 \text{ cm} : \sin 30^\circ; \quad r_u = 4 \text{ cm}.$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = r_u^2 - r_1^2, \text{ also } \frac{c^2}{4} = 12.$$

Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ABC gilt nun

$$A = \frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 20,78 \text{ cm}^2.$$

Ma 10/12 ■ 2433 Es gilt $h = q$ nach Aufgabenstellung, nach dem Höhensatz

(1) $p \cdot q = h^2$ und nach dem Satz des Pythagoras

$$(2) \quad p^2 + h^2 = q^2 \text{ bzw. } q = \sqrt{p^2 + h^2}.$$

Man setzt (1) in (2) und erhält

$$(3) \quad p^2 + pq = q^2, \quad p^2 + qp - q^2 = 0.$$

Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung ist nur $p_1 = \frac{q}{2}(\sqrt{5} - 1)$

definiert. Das setzt man in die Gleichung $c = p + q$ ein und erhält

$$c = \frac{q}{2}(\sqrt{5} - 1) + q$$

$$\text{bzw. } c \approx 1,618q.$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABC gelten

$$\sin \beta = \frac{q}{c} \text{ und } \cos \alpha = \frac{q}{c}.$$

Es ergeben sich

$$\sin \beta \approx \frac{q}{1,618q} \approx 0,618,$$

$$\text{d. h. } \beta \approx 38,17^\circ.$$

Analog erhält man für $\alpha \approx 51,83^\circ$.

Ph 6 ■ 151 Z. B.:

$$\varrho_a = \frac{m}{V} = \frac{470 \text{ g}}{60 \text{ cm}^3} \approx 7,8 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{Stahl})$$

$$\varrho_b = \frac{m}{V} = \frac{150 \text{ g}}{60 \text{ cm}^3} \approx 2,6 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{Marmor})$$

Es handelt sich um die Stoffe Stahl und Marmor.

Ph 7 ■ 152

Geg.: Gewichtskraft $G = 650 \text{ kg}$

Ges.: Leistung P

Höhe $s = 15 \text{ m}$

Zeit $t = 8 \text{ s}$

Wirkungsgrad $\eta = 0,85$

Nach der Gleichung $\eta = P_2/P_1$ für den Wirkungsgrad ist

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} \text{ mit } P_2 = F \cdot v \text{ und } v = \frac{s}{t},$$

$$P_1 = \frac{F \cdot s}{\eta \cdot t},$$

$$P_1 = \frac{650 \text{ kp} \cdot 15 \text{ m}}{0,85 \cdot 8 \text{ s}},$$

$$P_1 = 1434 \frac{\text{kpm}}{\text{s}},$$

$$P_1 = 1,434 \cdot 9,81 \text{ kW} \approx 13 \text{ kW}.$$

Die Leistung des Elektromotors beträgt rund 13 kW.

Ph 8 ■ 153

Geg.: $W = 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh}$ Ges.: t

$$P_1 = 4 \cdot 40 \text{ W} = 160 \text{ W}$$

$$P_2 = 3 \cdot 60 \text{ W} = 180 \text{ W}$$

$$P_3 = 2 \cdot 100 \text{ W} = 200 \text{ W}$$

(1) Berechnung von P_{Ges}

$$P_{\text{Ges}} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_{\text{Ges}} = 160 \text{ W} + 180 \text{ W} + 200 \text{ W} = 540 \text{ W}$$

(2) Berechnung von t

$$W = U \cdot I \cdot t \text{ und } P = U \cdot I$$

$$W = P_{\text{Ges}} \cdot t$$

$$t = \frac{W}{P_{\text{Ges}}} = \frac{1000 \text{ Wh}}{540 \text{ W}} = 1,852 \text{ h}$$

$$\approx 1 \text{ h } 51 \text{ min}$$

Die Glühlampen vollbringen in 1 h und 51 min eine Arbeit von 1 kWh.

Ph 9 ■ 154

Geg.: $v_1 = 0,5 \text{ m/s}$ Ges.: d_2

$$d_1 = 0,01 \text{ m}$$

$$s = 0,05 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Nach dem Durchflußgesetz sind die Querschnitte und die Geschwindigkeiten umgekehrt proportional. Also

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2.$$

Da nach dem freien Fall $v_2 = v_1 + \sqrt{2gs}$

$$\text{gilt, ist } A_1 \cdot v_1 = A_2 (v_1 + \sqrt{2gs})$$

$$\text{bzw. } \frac{d_1^2 v_1}{4} = \frac{d_2^2 (v_1 + \sqrt{2gs})}{4},$$

$$d_2^2 = \frac{d_1^2 v_1}{v_1 + \sqrt{2gs}},$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_1 + \sqrt{2gs}}},$$

$$d_2 = 0,01 \text{ m}$$

$$\sqrt{\frac{0,5 \text{ m/s}}{0,5 \text{ m/s} + \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,05 \text{ m}}}}$$

$$d_2 \approx 0,06 \text{ m} = 0,6 \text{ cm}.$$

Der Durchmesser beträgt unten 0,6 cm.

Ph 10/12 ■ 155

Geg.: $m = 1500 \text{ kg}$ Ges.: f

$$s = 15 \text{ mm} = 0,015 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{sm}}$$

Da $F = G$ und $G = mg$ gilt, ist

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{sm}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{s}},$$

$$f = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0,015 \text{ m}}},$$

$$f \approx 4,1 \text{ Hz}.$$

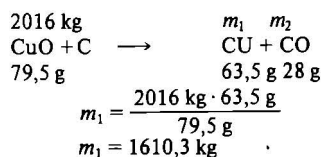
Die Maschine schwingt bei einer Frequenz von 4,1 Hz.

Ch 7 ■ 121 a) $2100 \text{ kg} \approx 100\%$

$$x \approx 96\%$$

$$x = \frac{2100 \text{ kg} \cdot 96\%}{100\%}$$

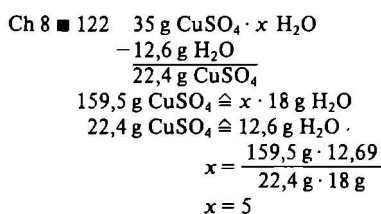
$$x = 2016 \text{ kg}$$



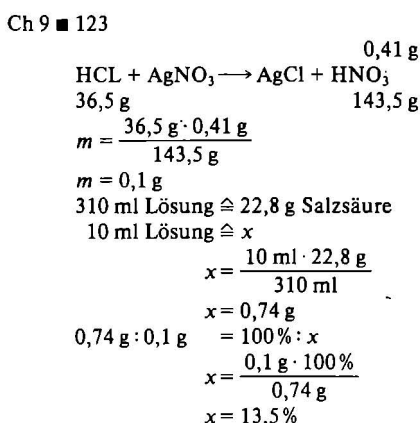
Aus 2,1 t Kupfer (II)-oxid, welches 4 % Verunreinigungen enthält, kann man 1610,3 kg Kupfer gewinnen.

$$\begin{array}{l} \text{b) } m_2 = \frac{2016 \text{ kg} \cdot 28 \text{ g}}{79,5 \text{ g}} \\ m_2 = 710,0 \text{ kg} \\ 710,0 \text{ kg} \hat{=} 100\% \\ x \hat{=} 98,8\% \\ x = \frac{710,0 \text{ kg} \cdot 98,8\%}{100\%} \\ x = 701,5 \text{ kg} \end{array}$$

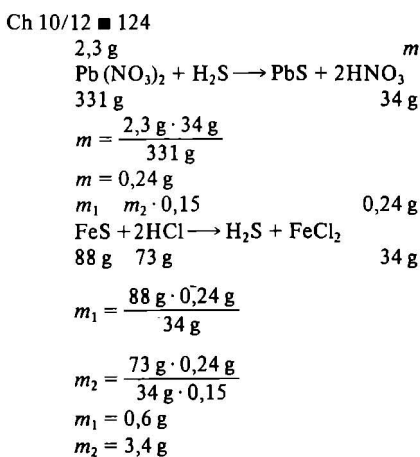
Bei der Reaktion entstehen 701,5 kg Kohlenmonoxid, wenn ein Gasverlust von 1,2 % auftritt.



5 Moleküle Wasser sind an der Kristallisation beteiligt.



Die Salzsäure ist 13,5%ig.



0,6 g Eisen(II)-Sulfid und 3,4 g 15%ige Salzsäure müssen zur Reaktion gebracht werden.

Deutschsprachige Literatur für Junge Mathematiker aus der ČSSR

J. Sedláček

Keine Angst vor Mathematik

168 Seiten, 71 Abb., MSB-Nr. 67
VEB Fachbuchverlag Leipzig/Verlag
SNTL-Verlag technischer Literatur Prag
(1969)
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 4,80 M

A. Kufner

Raum und Entfernung

Wie man in der Mathematik mißt
90 Seiten, 31 Abb., MSB-Nr. 104
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft
Leipzig (1981)
Bestell-Nr.: 666 028 2 Preis (DDR): 6,00 M

F. Latka

Kleine Formelsammlung

265 Seiten, Miniformat A7
VEB Fachbuchverlag Leipzig/
Alfa-Verlag Bratislava (1983)
Bestell-Nr.: 546 877 4 Preis (DDR): 5,80 M

O. Zich/A. Kolman

Unterhaltsame Logik

84 Seiten, zahlr. Abb., MSB-Nr. 51
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft
Leipzig/Verlag Mladá Fronta, Prag (1973)
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 4,40 M

Unser Foto zeigt das Titelblatt des Mathematiklehrbuches, Klasse 8, der ČSSR.



Autorenkollektiv

Aufgaben von Mathematik- olympiaden in der UdSSR und in der ČSSR

292 Seiten, zahlreiche Abb.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin/Staatl. Verlag für päd. Literatur,
Moskau/Staatl. Päd. Verlag Prag (1965)
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 8,20 M

A. Cuninka/K. Křižalkovič/O. Šedivý

Textaufgaben zur Mathematik

mit Ansatz und Lösung
mit 63 Bildern
VEB Fachbuchverlag Leipzig/
Alfa-Verlag Bratislava (1977)
Bestell-Nr.: 546 286 6 Preis (DDR): 9,00 M

J. Vysin

Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

146 Seiten, zahlr. Abb., MSB-Nr. 5
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft
Leipzig/Verlag Státní pedagogické nakla-
datelství, Prag (1972)
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 9,60 M

J. Sedláček

Einführung in die Graphentheo- rie

171 Seiten, zahlr. Abb., MSM-Nr. 40
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft,
Leipzig/Academia-Verlag Prag (1972)
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 6,40 M

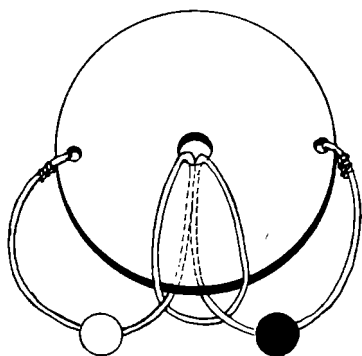
In der ČSSR werden seit 1951 Mathematikolympiaden durchgeführt. Die *Mathematische Gesellschaft* gab zur Förderung dieser Form der außerunterrichtlichen Tätigkeit zahlreiche Broschüren und Bücher mit mathematischen Problemen heraus. Unser Foto zeigt einen solchen (umfassenden) Titel.



Geschicklichkeitsrätsel

Schwarz und weiß

Heute kommen wir mit einem Geschicklichkeitsrätsel, dessen Herstellung zwar leicht, aber dessen Lösung bedeutend schwieriger ist. Dem erfolgreichen Rätsellöser bringt es aber dann große Freude. Die in Bild 1 dargestellte Rätselscheibe mit Zierschnur könnte auch eine andere Form haben. Die Musterscheibe im Bild ist aus Plexiglas, dadurch sieht man auch die auf der Rückseite befindliche Schnur (gestrichelte Linie). Zur Anfertigung der Rätselscheibe benötigen wir eine Scheibe aus beliebigem Material, ferner eine Zierschnur, deren Länge das 5- bis 6fache des Durchmessers der Kreisscheibe sein sollte, sowie zwei verschiedenfarbige Korallen, die so groß sein müssen, daß man sie nicht durch das Mittelloch der Scheibe hindurchziehen kann. Bei der Herstellung müssen wir das Aufziehen der Zierschnur und der Korallen genau nach dem Bild beachten.

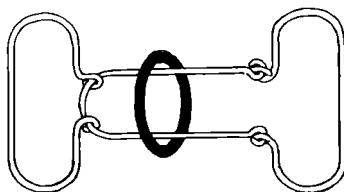


Die Aufgabe für den Rätselfreund lautet: Die schwarze und die weiße Koralle sollen auf die gleiche Schleife nebeneinander gebracht werden und mit dem umgekehrten Vorgang wieder zurück auf den ursprünglichen Platz.

Ein Ring in der Falle

Diesmal ist es eine Rätselform aus nichtrostendem Stahl Draht. Zur Herstellung der Form wird am besten ein Drahtstück in eine Halbkreisform gebogen. Weil sich dieser Draht verhältnismäßig schwer biegen läßt, brauchen wir zur Anfertigung der Rätselform-Drahtstücke etwas Geschicklichkeit und Geduld. Zum Abtrennen des Drahtes auf die benötigte Länge eignet sich eine gewöhnliche Beißzange, zum Biegen

ist eine kleine Zange mit runden Backen zweckmäßig. Der Ring kann aus Metall oder aus Plast sein. Siehe dazu Bild 2.



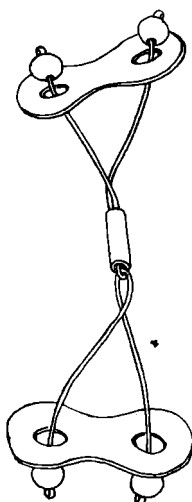
Nun zu den Abmessungen der Rätselform. Beim Festlegen ihrer Abmessungen richten wir uns nach der Größe des Ringes, den wir zur Verfügung haben. Die Länge eines Schenkels (Armes) des mittleren Drahtbogenstücks, an dem zwei weitere, seitliche Bogenstücke befestigt sind – davon das linke verschiebbar, das andere unver-schiebbar –, sollte etwa doppelt so groß sein wie der äußere Durchmesser des Ringes. Die Breite der Form, d. h. Abstand der Schenkel, muß geringfügig kleiner sein als der innere Durchmesser des Ringes (nur um so viel, daß es nicht möglich ist, den Ring über die seitlichen Bogenstücke wegzuziehen). Die Abmessungen der beiden seitlichen Bogenstücke sind ungefähr wie beim mittleren (inneren) Bogenstück zu wählen.

Die Aufgabe besteht darin, den Ring aus der Falle herauszubekommen und nachher wieder hineinzubringen.

Das gefangene Röhrchen

Das Geschicklichkeitsrätsel, das ihr auf dem Bild 3 seht, gehört zu den leichteren dieser Art von Basteleien; es besteht im wesentlichen aus einer Schlinge und einer Öffnung. Wir nannten es *Gefangenes Röhrchen*.

Bild 3



Die Aufgabe besteht darin, dieses Röhrchen aus beiden Schlingen derart herauszulösen, daß kein Teilstück des gesamten Gebildes beschädigt wird.

Ehe wir mit der Lösung beginnen, müssen wir natürlich erst das Gebilde anfertigen. Für einen geschickten Bastler ist das keine schwierige Aufgabe, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.

Wir brauchen dazu ein Stück Sperrholz oder Plexiglas, vier größere gläserne oder hölzerne Korallen, etwa 60 cm dünne Zierschnur, ein Metallröhrchen sowie eine Laubsäge. Natürlich gehört etwas Geduld dazu. Bei der Anfertigung gehen wir nach dem Bild vor.

Die Spange in der Spirale

Die Anfertigung ist für jeden gewandten Bastler fast eine Spielerei; auch die Lösung des Rätsels ist nicht schwierig.

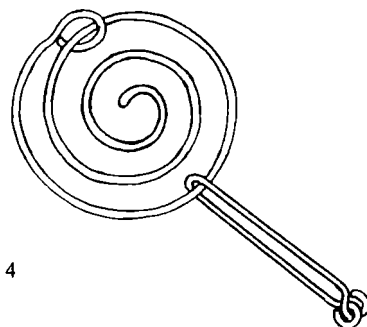
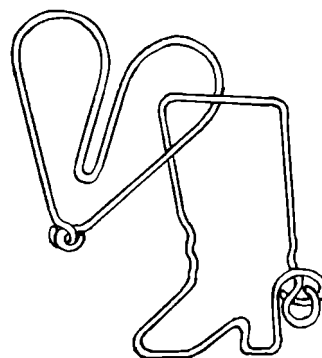


Bild 4

Wir verwenden dazu einen dünnen Stahl-draht (es eignet sich ein Fahrrad-Speichen-draht, im Fachgeschäft erhältlich), eine gewöhnliche Zange und eine kleinere Zange mit runden Backen zum Biegen des Drahtes. Entsprechend des Bildes werden nun an beiden Enden des einen Drahtes die Windungen (Schleifen) angebracht, ebenso an einem Ende des anderen Drahtes. Diesen biegen wir dann zu einer Spirale. Geschickte Bastler können das zugebogene Ende auch verlöten. Die Aufgabe besteht darin, die Spange aus der Spirale zu entfernen.

Das Herz im Schuh

Zum Basteln der Figuren benötigen wir Stahldraht (z. B. Fahrradspeichen), eine Kneifzange sowie eine Zange mit runden Backen zum Biegen des Drahtes.



Entsprechend der Skizze (siehe Bild) fertigen wir das Herz und den Schuh an. Dann bemühen wir uns, die Herzfigur in das Schuhgebilde hineinzuschieben. Wenn uns das gelingt, dann haben wir das Rätsel eigentlich schon gelöst, denn durch die Umkehrung dieses Vorgangs können wir die Herzfigur wieder herauslösen, was unsere Aufgabe ist.

Josef Svoboda

25 Jahre Internationale Mathematikolympiaden



| | | |
|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| I. bis XXV. IMO | IX 1967 Jugoslawien | XVIII 1976 Österreich |
| I 1959 Rumänien | X 1968 Sowjetunion | XIX 1977 Jugoslawien |
| II 1960 Rumänien | XI 1969 Rumänien | XX 1978 Rumänien |
| III 1961 Ungarn (ohne Signet) | XII 1970 Ungarn | XXI 1979 Großbritannien |
| IV 1962 Tschechoslowakei | XIII 1971 Tschechoslowakei | - 1980 - |
| V 1963 Polen (ohne Signet) | XV 1973 Sowjetunion | XXII 1981 Verein. St. v. Amerika |
| VI 1964 Sowjetunion | XIV 1972 Polen | XXIII 1982 Ungarn |
| VII 1965 Deutsch. Dem. Rep. | XVI 1974 Deutsch. Dem. Rep. | XXIV 1983 Frankreich |
| VIII 1966 Bulgarien | XVII 1975 Bulgarien | XXV 1984 Tschechoslowakei |

alpha

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| 15 | 89 | 81 | 83 | 82 | 17 | 18 | 90 | 14 | 16 |
| 36 | 39 | 31 | 38 | 32 | 67 | 63 | 70 | 64 | 65 |
| 06 | 09 | 01 | 98 | 02 | 97 | 93 | 10 | 94 | 95 |
| 26 | 79 | 80 | 78 | 72 | 27 | 73 | 21 | 24 | 25 |
| 66 | 69 | 61 | 68 | 62 | 37 | 33 | 40 | 34 | 35 |
| 45 | 42 | 50 | 43 | 49 | 54 | 58 | 51 | 57 | 56 |
| 75 | 22 | 30 | 28 | 29 | 74 | 23 | 71 | 77 | 76 |
| 96 | 92 | 91 | 03 | 99 | 04 | 08 | 100 | 07 | 05 |
| 55 | 52 | 60 | 53 | 59 | 44 | 48 | 41 | 47 | 46 |
| 85 | 12 | 20 | 13 | 19 | 84 | 88 | 11 | 87 | 86 |

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritzt); Dr. sc. rer. nat. E. Quaiser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Fotoabtlg. Humboldt-Universität (S. 123); Vignette aus „Quant“, Moskau (S. 123); Briefmarken: J. Lehmann, Leipzig (S. 125); Foto: H. Tracksdorf, Leipzig (S. 126); Ing. G. Grebenstein (S. 126); OStR G. Schulze, Herzberg (S. 128); J. Gottwald, DLZ (S. 132); Füles, Budapest (S. 132); J. Lehmann, Leipzig (S. 133; S. 135); LVZ, Naumann, Leipzig (S. 136)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,
III/18/97

AN (EDV) 128

Redaktionsschluß: 24. August 1984

Auslieferungstermin: 15. Dezember 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Ein Minimalproblem in der Ebene und im Raum [9]¹
Dr. D. Cieslik, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald/
Dr. H.-J. Schmidt, *Zentralinstitut für Astrophysik* der Akademie der
Wissenschaften der DDR
- 122 Informatikstudium an der Sektion Mathematik der Humboldt-
Universität zu Berlin [9]
Prof. Dr. L. Budach, Vors. des *Wissenschaftlichen Beirats Mathematik* beim Min.
für Hoch- und Fachschulwesen
- 123 Zum Titelblatt: Knobeleien am Ostseestrand [7]
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
- 124 Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von
Copernicus und Kepler, Teil 1 [9]
Zum 200. Geburtstag des Astronomen und Mathematikers
Friedrich Wilhelm Bessel
Dr. H. Pieper, *Zentralinstitut für Astrophysik* der Akademie der Wiss. d. DDR
- 126 ... die Beckerprob allhier ganz gründlich gemacht [5]
Zum 450. Todestag von Adam Ries
Ing. G. Grebenstein, Leipzig
- 126 Adam-Ries-Wettbewerb in Annaberg-Buchholz [5]
Dr. H. Jähmig, EOS Annaberg-Buchholz
- 127 Für den Briefmarkenfreund: Lewis Carroll's Nonsense-Welt [5]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 128 alpha-Porträt: Oberstudienrat Gerhard Schulze, Herzberg [7]
Oberlehrer B. Weiße, Bezirkskabinett für außerunterrichtl. Tätigkeit, Cottbus
- 130 Wer löst mit? alpha-Wettbewerb [5]
Autor aller Mathematikaufgaben: StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
- 133 alpha-Porträt: Studienrat Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz
Dr. H.-D. Gronau/J. Prestin, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität*
Rostock
- 134 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht, speziell für Klasse 4/5
Unterhaltsame Aufgaben aus dem Mathematiklehrb. Kl. 4
- 135 Die Magischen Ringe [5]
Dr. H.-D. Gronau/J. Prestin, Sektion Mathematik der Universität Rostock
- 136 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt, Sonnenfinsternis 1984 [9]
Dipl.-Lehrer A. Dietzel, EOS Spezialschule phys.-techn. Richtg. Carl Zeiss, Jena
- 137 Schriftliche Abschlußprüfung [10]
Mathematik, Schuljahr 1983/84, Oberschule, Klasse 10
- 138 In freien Stunden · alpha-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 140 Lösungen [5]
- 144 alpha-Wettbewerb 1983/84, Kollektive Beteiligung [5]
- 144 Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. S. Solodownikow [9]
Lomonossow-Universität Moskau
- III. U.-Seite: alpha-Schachwettbewerb 1984 [5]
J. Lehmann, Leipzig/H. Rüdiger, Schichtl./Werk für Fernsehelektronik Berlin
- IV. U.-Seite: Mit Papier und Schere [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

¹ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ein Minimalproblem in der Ebene und im Raum

In Heft 3/1982 war von Prof. Dr. W. Jungk, Päd. Hochschule Köthen, unter der Überschrift: *Eine Aufgabe und vier Lösungen* folgendes Problem gestellt worden: „Drei Orte A, B und C sollen eine gemeinsame Trafostation erhalten. Aus ökonomischen Gründen soll sie so gelegen sein, daß die Summe der Entfernungen zu den drei Orten ein Minimum ist.“ In diesem Artikel wollen wir auf einige Verallgemeinerungen dieses nach Jakob Steiner benannten Problems eingehen. Zunächst kann man die Zahl der vorgegebenen Punkte vergrößern. Die Aufgabe lautet dann in anderer Einkleidung:

Problem S: Die n Bahnhöfe $A_1, \dots, A_n$ sollen durch ein Eisenbahnstreckennetz so verbunden werden, daß man von jedem Bahnhof A_i zu jedem anderen Bahnhof A_j gelangen kann und dafür möglichst wenig Schienen verbraucht werden.

Daß dieses Problem stets mindestens eine Lösung hat, soll hier ohne Beweis angegeben werden. Da eine Strecke die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, ist die optimale Lösung aus Strecken zusammengesetzt, die jeweils zwei Bahnhöfe miteinander verbinden, wobei eventuell einer oder mehrere Umsteigebahnhöfe (d. h. von den A_i verschiedenen Punkte, in denen mindestens 3 Strecken zusammentreffen) eingerichtet werden müssen. Die den Umsteigebahnhöfen entsprechenden Punkte werden *Steinerpunkte* genannt.

Um ein Gefühl für das Problem zu bekommen, sollte der Leser bevor er weiter liest, jetzt erst einmal versuchen, Aufgabe 1 selbstständig zu lösen.

▲ 1 ▲ Problem S soll für $n = 4$, wobei $A_1, \dots, A_4$ die Ecken eines Quadrats der Seitenlänge a sind, gelöst werden.

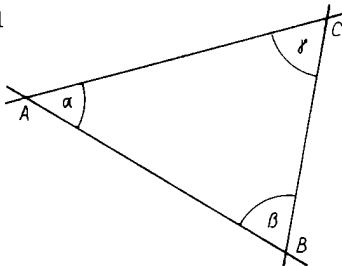
Vermutlich denkt man zunächst daran, drei Seiten des Quadrates zu nehmen, so daß man $3a$ an Schienenlänge benötigt (Bild 5). Kürzer ist jedoch die Lösung, die durch die beiden Diagonalen gebildet wird, sie ergibt $2\sqrt{2}a$ (Bild 7). Um zu untersuchen, ob das tatsächlich bereits die optimale Lösung ist, ist es sinnvoll (wie oft bei mathematischen Problemen) eine allgemeinere Frage (Aufgabe 2) zu stellen, deren Antwort dann bei der Lösung des speziellen Problems weiterhilft.

▲ 2 ▲ In einer optimalen Lösung des Problems S mögen von irgendeinem Bahnhof A (mindestens) zwei Strecken ausgehen;

diese mögen den Winkel α einschließen. Man zeige, daß dann $\alpha \geq 120^\circ$ gilt.

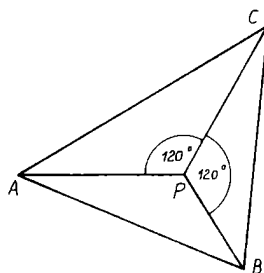
Lösung indirekt: Angenommen, es wäre $\alpha < 120^\circ$, dann könnte man, wie in Bild 1 gezeichnet, ein gleichschenkeliges Dreieck $\triangle ABC$ angeben, das so klein ist, daß innerhalb dieses Dreiecks kein Bahnhof liegt. Ferner ist $\beta = \gamma$, also beides spitze Winkel.

Bild 1



Wenn man jetzt die Strecken AC und AB aus dem Streckennetz entfernt und dafür die Strecken AP, BP und CP einfügt, wobei der Punkt P durch die Bedingungen (Bild 2) $\angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ eindeutig bestimmt ist, erhält man wegen $\alpha < 120^\circ$ ein kürzeres Streckennetz, das auch die Bahnhöfe A_i miteinander verbindet. (Zur Konstruktion Punktes P und den Beweis, daß das Streckennetz tatsächlich kürzer wird, vgl. den oben erwähnten Artikel von W. Jungk.)

Bild 2



Folglich ist das ursprüngliche Streckennetz doch nicht optimal, Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

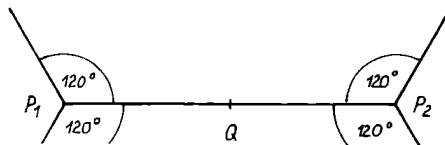
Aus Aufgabe 2 ergibt sich sofort, daß von einem Bahnhof höchstens drei Strecken ausgehen können, und wenn es genau drei Strecken sind, diese dann jeweils Winkel von genau 120° einschließen. Folglich ist die Diagonalenlösung von Aufgabe 1 nicht optimal, und man muß Lösungen mit mehr als einem Umsteigebahnhof betrachten. Es gilt:

▲ 3 ▲ Zur Lösung des Problems S braucht man höchstens $(n - 2)$ Steinerpunkte.

Der Beweis sei dem interessierten Leser überlassen.

Als Folgerung ergibt sich, zusammen mit dem oben Gesagten, daß die Lösung von Aufgabe 1 genau 2 Umsteigebahnhöfe enthält und das Streckennetz folgende Gestalt hat (Bild 3).

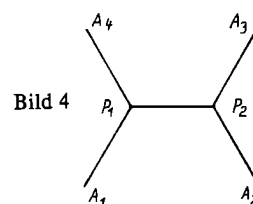
Bild 3



Darauf müssen die Bahnhöfe $A_1, \dots, A_4$ so auf die 4 Strahlen verteilt werden, daß sie die Ecken eines Quadrats bilden. Die Lösung hat letztendlich folgende Gestalt

(Bild 4, dort ist $\overline{A_1A_2} = a$ und $\overline{A_1P_1} = \frac{a}{\sqrt{3}}$)

mit einer Streckenlänge von $(\sqrt{3} + 1)a$, was tatsächlich kleiner als $2\sqrt{2}a$ ist.



So wurde durch Betrachtung einer wesentlich allgemeineren Aufgabe die Lösung einer ganz speziellen Aufgabe gefunden. Hätte man sich nur auf Aufgabe 1 konzentriert, wäre man vermutlich auch nicht schneller ans Ziel gelangt.

Jetzt soll Problem S dahingehend verallgemeinert werden, daß die Punkte A_i nicht in einer Ebene, sondern beliebig im Raum verteilt sind. Viele geometrischen Probleme werden ja beim Übergang zum Raum wesentlich komplizierter, hier hat man jedoch das andere Extrem: Die Lösung sieht im Prinzip genauso aus, d. h., man richtet (maximal $n - 2$ Stück) Umsteigebahnhöfe ein, verbindet die Bahnhöfe A_i und P_j so miteinander durch Strecken, daß von jedem Bahnhof maximal drei Strecken ausgehen, die jeweils Winkel $\geq 120^\circ$ einschließen, und das solange, bis man von jedem Bahnhof zu jedem anderen gelangen kann. Die Lösung von Aufgabe 2 sieht im Raum genauso aus, da man sich in der Betrachtung auf die durch die beiden Strecken aufgespannte Ebene beschränken kann. Die Folgerung aus Aufgabe 2 ist jedoch nicht ganz so einfach zu erhalten, es gilt aber:

▲ 4 ▲ Von einem Punkt P im Raum mögen 4 Strahlen ausgehen. Man zeige, daß unter ihnen zwei Strahlen existieren, die einen Winkel $< 120^\circ$ einschließen.

Folglich gehen auch im Raum bei einer optimalen Lösung des Problems S von jedem Punkt höchstens drei Strecken aus.

Der Beweis ist unter Benutzung der Vektorrechnung ganz einfach: Man heftet in einem Punkt vier Einheitsvektoren an und zeigt, daß die 6 Ungleichungen, die ausdrücken, daß die Winkel paarweise $\geq 120^\circ$ sein sollen, einander widersprechen. Der Beweis ist aber auch ganz elementar möglich. Das einfachste echt dreidimensionale Problem ist:

▲ 5 ▲ Es soll Problem S im Raum gelöst werden, wobei A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken eines regulären Tetraeders der Seitenlänge a bilden. Wegen Aufgabe 4 braucht man gar nicht erst zu versuchen, die vier Strecken $\overline{A_i Q}$, wobei Q den Schwerpunkt des Tetraeders bezeichnet, als optimale Lösung zu bestimmen. Tatsächlich ergibt sich die optimale Lösung wieder gemäß Bild 3, wobei diesmal die linke Hälfte um Q verdreht werden muß, und zwar um 90° . Wie groß muß man $\overline{P_1 P_2}$ in Abhängigkeit von a wählen?

Eine andere Art der Verallgemeinerung des Problems S ist das Problem S_k :

Es soll das Problem S gelöst werden, jedoch nicht mehr als k Umsteigebahnhöfe eingerichtet werden.

Ähnlich wie bei Aufgabe 2 zeigen wir zuerst:

▲ 6 ▲ In einer optimalen Lösung des Problems S_k mögen von irgendeinem Bahnhof A (mindestens) zwei Strecken ausgehen; diese mögen den Winkel α einschließen. Man zeige, daß dann $\alpha \geq 60^\circ$ gilt.

Beweis: Angenommen, es wäre $\alpha < 60^\circ$. Am Ende der Strecken, die von A ausgehen und den Winkel α einschließen, mögen die Bahnhöfe B und C liegen und im Dreieck $\triangle ABC$ die Winkel β und γ entsprechend Bild 1 bezeichnet werden. Da $\alpha < 60^\circ$, ist der Winkel α im Dreieck $\triangle ABC$ sicher nicht der größte Winkel.

Sei β der größte Winkel im Dreieck, so liegt ihm die größte Seite, nämlich $\overline{AC}$, gegenüber. Entfernen wir die Strecke $\overline{AC}$ und fügen dafür $\overline{BC}$ hinzu, so erhielten wir somit ein kürzeres Streckennetz, welches auch die Bahnhöfe miteinander verbindet und keinen weiteren Umsteigebahnhof benötigt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Optimalität des ursprünglichen Streckennetzes. Damit ist $\alpha \geq 60^\circ$ nachgewiesen. Aus der Aufgabe 6 ergibt sich sofort, daß von einem Bahnhof höchstens sechs Strecken ausgehen können. Aus dem Beweis von Aufgabe 6 kann man noch eine weitere Aussage (Aufgabe 7) ableiten, deren Beweis wir dem Leser überlassen wollen.

▲ 7 ▲ a) Es gibt stets eine optimale Lösung des Problems S_k , in der von jedem Bahnhof höchstens fünf Strecken ausgehen.

b) Man gebe ein Beispiel für ein Problem S_1 an, bei dem mehrere optimale Lösungen existieren, und bei einer dieser Lösungen von einem Bahnhof 6 Strecken ausgehen. Es ist wichtig zu wissen, wieviel Strecken maximal von den Umsteigebahnhöfen (Steinerpunkten) in optimalen Lösungen des Problems S_k ausgehen können. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß im Gegensatz zum Problem S bei optimalen

Lösungen des Problems S_k auch Umsteigebahnhöfe auftreten können, von denen vier Strecken ausgehen. Dazu wählen wir $A_i, i = 1, \dots, 4$ als Eckpunkte eines Quadrats und lösen dafür das Problem S_1 (Bild 5, 6, 7). Der Leser überzeuge sich davon, daß nur das in Bild 7 angegebene Streckennetz das Problem S_1 löst. Dort gehen vom Umsteigebahnhof aber vier Strecken aus.

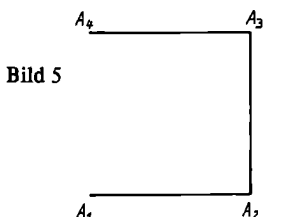


Bild 5

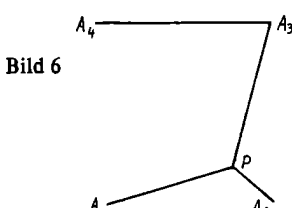


Bild 6

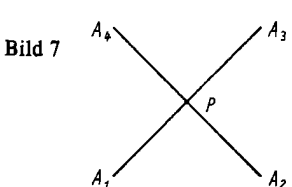


Bild 7

▲ 8 ▲ In einer optimalen Lösung des Problems S_k sei P ein Steinerpunkt. Dann gehen von P höchstens fünf Strecken aus. Wegen Aufgabe 6 müssen wir zum Beweis nur noch ausschließen, daß von einem Steinerpunkt sechs Strecken ausgehen können. Sollten von P sechs Strecken nach $C_1, \dots, C_6$ ausgehen, so bilden die C_i ein regelmäßiges Sechseck, in deren Mittelpunkt P liegt (Bild 8). Somit gilt $\overline{PC_1} = \overline{PC_2} = \dots = \overline{PC_6} = \overline{C_1 C_2} = \overline{C_2 C_3} = \dots = \overline{C_5 C_6} = \overline{C_6 C_1}$.

Jetzt ist klar, daß der punktierte Weg in Bild 8 kürzer ist, als der von P ausgehende Stern. Es wird sogar noch der Umsteigebahnhof P „eingespart“. Das ist mit der Annahme, daß dies Streckennetz das Problem S_k optimal löst, nicht zu vereinbaren. Damit ist Aufgabe 8 gelöst.

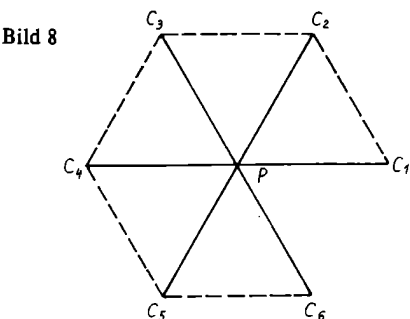


Bild 8

Es ist den Mathematikern bis heute unbekannt, ob ein optimales Streckennetz des Problems S_k für irgendwelche Punkte $A_1, \dots, A_n$ existiert, das einen Steinerpunkt

hat, von dem fünf Strecken ausgehen. Wir vermuten, daß das nicht möglich ist:

In einer optimalen Lösung des Problems S_k sei P ein Steinerpunkt. Dann gehen von P höchstens vier Strecken aus. Vielleicht ist diese Aussage aber auch falsch!

Die Probleme von S und S_k finden in der Praxis vielfach Anwendung. Immer wenn mehrere Punkte (Bahnhöfe, Telefonanschlüsse, Städte u. a.) durch kürzeste Streckennetze (Bahnstreckennetz, Telefonnetz, Straßennetz u. a.) verbunden sein müssen, ist ein solches Minimalbaumproblem zu lösen. Da man nicht immer beliebig viele Steinerpunkte (Umsteigebahnhöfe, Telefonzentralen, Kreuzungen u. a.) einrichten darf (sie verursachen in der Praxis zusätzliche Kosten), löst man dann statt des Problems S ein Problem S_k mit vorgegebenem k . Besonders einfach löst sich das Problem S_0 , d. h., es darf kein Steinerpunkt eingesetzt werden.

Der Leser kann sich das selbst überlegen oder in einem Lehrbuch der Graphentheorie nachlesen. S_1 ist schon schwieriger zu lösen usw.

Wenn wir für n Punkte das Problem S_{n-2} lösen, so ist dies wegen Aufgabe 3 nichts anderes als die Lösung des Problems S . So kann man durch die Problemfolge $S_0, S_1, \dots$ das Problem S näherungsweise lösen.

Der interessierte Leser sei abschließend noch auf das Buch von H. Walther „Anwendungen der Graphentheorie“, Berlin 1979, verwiesen.

D. Cieslik/H.-J. Schmidt

Informatikstudium an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

Seit September 1982 werden an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin Studenten in der neu eingerichteten Studienrichtung *Mathematische Informatik* ausgebildet. Dabei handelt es sich um eine spezielle Variante des Mathematikstudiums, die über die gesamte Studiendauer nach einem eigenen Plan abläuft. Der allgemeine Verlauf und die Stundenzahl je Semester stimmen mit der Grundstudienrichtung Mathematik überein.

Der Einführung eines solchen Studienfaches lag die Einsicht zugrunde, daß der rasche Fortschritt der elektronischen Rechentechnik es dringend erforderlich macht, geeignete mathematische Theorien auf das engste mit den Erkenntnissen und technologischen Methoden der Informationsverarbeitung zu verbinden. Daher zielt das Studium der *Mathematischen Informatik* darauf ab, die enge Wechselwirkung zwischen Mathematik und Informatik als Denkgewohnheit bei den Studenten auszuprägen. Daneben wurde breiter Raum für die Ausbildung praktischer Fähigkeiten



und Fertigkeiten im Umgang mit komplexen Rechner- und Programmsystemen geschaffen. Die Studenten werden mit der Informationsverarbeitung und der Programmierung von Mikrorechnern und Robotersteuerungen vertraut gemacht. Sie erlernen moderne Programmiersprachen wie PASCAL und MODULA-2. Damit wird die Möglichkeit eröffnet, bereits im ersten Semester elementare mengentheoretische Begriffe in den Programmiersprachen darzustellen. Vom ersten Tag des Studiums an können die Informatikstudenten elektronische Rechentechnik als Hilfsmittel nutzen. Die Studierenden beschließen ihre Ausbildung als Diplommathematiker. Die Absolventen werden in Forschungs- und Entwicklungszentren der Industrie, der Akademie der Wissenschaften der DDR, des Hoch- und Fachschulwesens sowie in Rechenzentren eingesetzt.

L. Budach

Wer möchte Mathematik/Physik-Lehrer werden?

Seit 1969 werden in der Speziale Schule Mathematik/Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin jedes Jahr in einem einjährigen Lehrgang politisch gefestigte und fachlich befähigte Absolventen der polytechnischen Oberschulen auf die Aufnahme eines Diplomlehrerstudiums in der Fachkombination Mathematik/Physik vorbereitet.

Die Ausbildung stützt sich auf wesentliche Lehrplaninhalte der Abiturstufe und berücksichtigt bewußt die besonderen Anforderungen des künftigen Studiums. Für das Studium 1985/86 gibt es noch einige freie Plätze.

Informationswünsche sind zu richten an Humboldt-Universität zu Berlin
Speziale Schule Mathematik/Physik
1020 Berlin

Burgstraße 26
Telefon 2 82 65 85

Zum Titelbild: Knotelei am Ostseestrand

Magisches Quadrat 10. Ordnung mit der Jahreszahl 1984

Sicher sind euch *Magische Quadrate* (3. oder 4. Ordnung) bekannt.

Das Bild 1 zeigt so ein *Magisches Quadrat* 4. Ordnung mit 4^2 natürlichen Zahlen, so daß die Summe der Zahlen jeder Zeile, Spalte und Diagonalen gleich ist.

Albrecht Dürer hat in seinem Bild *Melancholia* das Entstehungsjahr 1514 in solch einem *Magischen Quadrat* festgehalten, indem die Zahlen 15, 14 in der Mitte der letzten Zeile stehen (Bild 2).

Als im Feriensommer 1983 Neubrandenburger und Rostocker Schüler der *Mathematischen Schülergesellschaft* der Universität Greifswald an der Ostsee ihren 3. Lehrgang durchführten, hörten sie abends einen zusätzlichen Vortrag über *Magische Quadrate*, ihren Aufbau und ihre Gesetzmäßigkeiten. Ein *Magisches Quadrat* 10. Ordnung mit den Zahlen 1 bis 100 entstand. Ihre Zeilen, Spalten und Diagonalen ergaben die Summe 505.

Da wurde spontan von der Lehrgangsleitung ein beachtlicher Preis für den oder für diejenigen ausgesprochen, denen es gelingen würde, das Quadrat so umzustellen, daß die Jahreszahl 1984 in die Mitte der letzten Zeile zu stehen kommt (nach dem Dürerbeispiel). Tagelang wurde in der Freizeit am Ostseestrand und anderswo geknötelt und kombiniert. Schließlich gelang einer Gruppe von mehreren Schülern die Lösung des Problems (siehe Titelbild). Vielleicht gelingt jemandem nach gründlichem Studium entsprechender Literatur ein *Magisches Quadrat* mit der Jahreszahl 1985 oder 1986?

H.-J. Kerber



▲ 1 ▲ In a triangle, the lengths of the three medians are 9, 12 and 15. Find the length of the side to which the longest median is drawn.

▲ 2 ▲ Le boulanger sait que la masse du pain qu'il fabrique est les $\frac{10}{9}$ de la masse de la farine utilisée.

a) Quelle quantité de pain obtient-il avec 72 kg de farine? avec 117 kg? avec 108 kg?
b) Quelle masse de farine faut-il pour fabriquer 100 kg de pain? 150 kg? 190 kg?

▲ 3 ▲ Мой знакомый Сапша однажды мне сказал: „Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет“. Может ли такое быть?



▲ 4 ▲ Две высоты треугольника не меньше сторон, на которые они опущены. Найти углы треугольника.

Wer fremde Sprachen nicht kennt, weiß nichts von seiner eigenen.

J.W. von Goethe

Eine harte Nuß

Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a werde durch eine Gerade, die parallel zu einer Seite verläuft, so durchgeschnitten, daß die Umfänge der dabei entstehenden Teilfiguren (Dreieck und Trapez) einander gleich sind. In welchem Verhältnis stehen dann ihre Flächeninhalte?

Dr. R. Mildner,
Karl-Marx-Universität Leipzig

Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von Copernicus und Kepler, Teil 1

Zum 200. Geburtstag des Astronomen und Mathematikers Friedrich Wilhelm Bessel

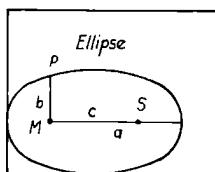
In medio vero omnium residet Sol! (Lateinisch: In der Mitte von allem aber steht die Sonne!) Dies ist ein Satz aus dem 1543 erschienenen Hauptwerk von Nicolaus Copernicus, jenem polnischen Astronomen der Renaissance, der die heliozentrische Planetentheorie aufstellte (helios – griechisch: Sonne, centrum – lateinisch: Mittelpunkt). Bereits in der Antike waren einzelne Gelehrte darauf aufmerksam geworden, daß die Erklärung der (scheinbaren) Bewegungen der Planeten einfacher werden würde, wenn man die Sonne statt der Erde als Mittelpunkt der Bewegung annehmen würde.

Wie Ptolemäus in seinem geozentrischen Planetensystem (geo – griechisch: Erde), ging auch Copernicus vom antiken Prinzip der gleichförmigen Kreisbewegung aus. Um die Sonne herum würden sich die Planeten auf Kreisbahnen in folgender Reihenfolge bewegen:

Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. (Die anderen uns heute bekannten Planeten wurden erst später entdeckt: F.W.Herschel fand 1781 den Planeten Uranus, J.G.Galle entdeckte 1846 den von Leverrier vorausgerechneten Planeten Neptun, C. W. Tombaugh machte 1930 den sonnenfernsten Planeten Pluto ausfindig.) Um gewisse Ungleichmäßigkeiten der Bewegung dieser Himmelskörper zu erklären, mußte Copernicus exzentrische Kreise annehmen (der Standpunkt der Sonne ist nicht im Kreismittelpunkt, sondern ein wenig außerhalb des Mittelpunkts). Copernicus mußte den Planeten überdies noch kleine Sonderbewegungen zuschreiben (sogenannte Epizyklen, wie sie auch für die Theorie des Ptolemäus typisch sind). Erst Johannes Kepler, der auf der Grundlage der Copernicanischen Theorie nach den Planetenbewegungsgesetzen forschte, kam zur richtigen, 1609 veröffentlichten Erkenntnis, daß die Planeten sich nicht auf Kreisbahnen, sondern auf elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen. Die Sonne befindet sich in einem Brennpunkt dieser Ellipsen.

Ist a die große Halbachse (Bild 1), b die kleine Halbachse der elliptischen Bahn, so beträgt die Abplattung $\frac{a-b}{a}$ z. B. bei der Erdbahn weniger als $\frac{1}{7000}$, bei der Marsbahn $\frac{1}{230}$. In der Astronomie wird meist die (sog. numerische) Exzentrizität e der

Bild 1



Ellipse angegeben. Bezeichnet c die Entfernung des Brennpunktes S der Ellipse vom

Mittelpunkt M , so gilt $e = \frac{c}{a}$. Diese Exzentrizität ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Je kleiner e ist, je kleiner ist c , um so weniger weicht S von M ab. Liegt S in M , so ist $c = 0$, $e = 0$, $a = b$, die Ellipse ist ein Kreis. Die Exzentrizitäten der Planetenbahnen sind tatsächlich nur sehr gering. Für die Erde ist $e = 0,0167$, für den Mars ist die Exzentrizität etwa 5mal so groß. (Die Bahn des Plutos hat mit 0,247 von allen Planetenbahnen die größte Exzentrizität.)

Kepler formulierte noch weitere Gesetze über die Bewegung der Planeten, durch die die Anhänger der heliozentrischen Theorie des Copernicus sicher in ihrer Überzeugung gestärkt worden sind. Doch bewiesen war die Theorie keineswegs.

Spiegelte diese Theorie in ihrer verbesserten Keplerschen Fassung tatsächlich die wahre Bewegungsstruktur des Systems der Sonne und der Planeten (einschließlich der Erde) wider, oder war sie nur ein mögliches mathematisches Modell, das den Beobachtungen besser entsprach als etwa das Ptolemäische Modell?

Die Theorie von Copernicus und Kepler ist in der Folgezeit durch verschiedene theoretische und praktische Resultate der Astronomie unwiderlegbar bestätigt worden. Zwei Beispiele:

Der italienische Naturforscher Galileo Galilei, der sich konsequent für die Copernicanische Lehre einsetzte, entdeckte mit seinem 1609 gebauten Fernrohr den Phasenwechsel der Venus, bemerkte also, daß die Venus ähnlich wechselnde Lichtgestalten (z. B. die Sichelgestalt) aufweist, wie wir sie vom Mond kennen. Diese Erscheinung läßt sich durch die Erdbewegung (um die Sonne) plausibel erklären, und Galilei sah sie dann auch als Beweis für die Richtigkeit der Copernicanischen Hypothese an. (Es sei jedoch angemerkt, daß auch eine von Tycho Brahe aufgestellte Hypothese mit dem Phasenwechsel der Venus verträglich ist: Die Erde steht unbewegt als

Bewegungszentrum für die Bahnen des Mondes und der Sonne im Mittelpunkt, während die fünf anderen Planeten sich um die Sonne bewegen.)

Der englische Astronom James Bradley entdeckte im Jahre 1728 die sogenannte jährliche Aberration, eine scheinbare Ortsveränderung der Sterne, die sich nur als Folge der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes (schon 1676 vom dänischen Astronomen Ole Römer aus den Verfinsterungszeiten der Jupitermonde berechnet) und des jährlichen Umlaufs der Erde um die Sonne erklären läßt.

Doch eine schon von Copernicus gestellte Aufgabe zur empirischen Bestätigung seiner heliozentrischen Theorie wurde erst nach fast 300 Jahren vom Astronomen, Geodäten und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel (22. 7. 1784 bis 17. 3. 1846) gelöst. Copernicus wußte, daß die Bewegung der Erde um die Sonne zu sogenannten Fixsternparallaxen führen mußte. Der Nachweis solcher Parallaxen würde also tatsächlich eine astronomische Bestätigung der Heliozentrik (der Theorie von Copernicus und Kepler) bedeuten.

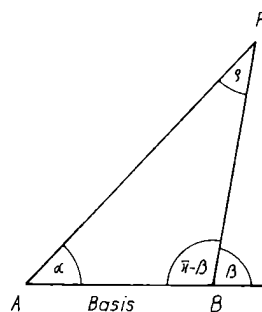
Die Gegner der Copernicanischen Theorie konnten lange Zeit auf die Nichtauffindbarkeit der parallaktischen Bewegung der Fixsterne verweisen.

Erst 1838 gab Bessel die erste erfolgreiche Messung einer solchen Parallaxe bekannt. Worum handelt es sich dabei?

Parallaxe und Entfernung

Beobachtet man einen Punkt P von zwei verschiedenen Beobachtungsorten A und B (Bild 2), so erscheint P unter verschiedenen Winkeln α , β (bezüglich der durch A und B verlaufenden Geraden).

Bild 2

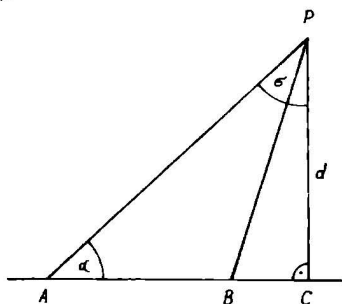


Der Winkel φ , den die Sehstrahlen von A und B zu P bilden, unter dem also die Verbindungsgerade AB (Basis) von P aus erscheint, heißt Parallaxe (griechisch: Abweichung) des Punktes P bezüglich der Basis AB . Da die Winkelsumme im Dreieck ABP 180° beträgt, gilt $\alpha + (180 - \beta) + \varphi = 180$, d. h. $\varphi = \beta - \alpha$. Mißt man also die Winkel α und β , so findet man daraus die Parallaxe φ .

Bei naheliegenden Objekten P tritt schon durch den Augenabstand (A – das linke Auge, B – das rechte Auge) bei wechselseitigem Sehen eine Parallaxe auf. (Deshalb entsteht bei beidseitigem Sehen ein räumliches Bild!)

Bei konstanter Basis AB (also bei festen Beobachtungspunkten A, B) ist die Parallaxe eines Punktes P bzgl. der Basis AB offenbar um so kleiner, je weiter entfernt der beobachtete Punkt P ist. Wird man die Parallaxe als ein Maß für die Entfernung des Punktes P ansehen können? Entfernung des Punktes, wovon? Es möge etwa nach der Entfernung des Punktes P von der Geraden durch A und B gefragt werden. Es wird also nach der Länge d der Strecke PC (Höhe des Dreiecks ABP auf AB) gefragt (Bild 3).

Bild 3



Ist σ die Parallaxe von P bzgl. der Basis AC (der Länge r), so gilt (im rechtwinkligen Dreieck ACP)

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{r}{d},$$

also
$$d = \frac{r}{\operatorname{tg} \sigma}.$$

Aus der Länge r der Basis AC und der Parallaxe von P bzgl. der Basis AC läßt sich also die Entfernung des Punktes P von C bestimmen (wobei die Geraden PC und AC den Winkel 90° einschließen). Aus $d \cdot \operatorname{tg} \sigma = r$ folgt: Je größer d , je kleiner $\operatorname{tg} \sigma$, d. h., je kleiner σ , und umgekehrt. (Wie groß ist der Abstand P von A ?) Die Kenntnis der Parallaxe eines Punktes P bzgl. einer geeigneten Basis ermöglicht also die Bestimmung seiner Entfernung.

Die Entfernung des Mondes

So kann man aus einer geeigneten Parallaxe, z. B. des Mondes, seine Entfernung von der Erde bestimmen.

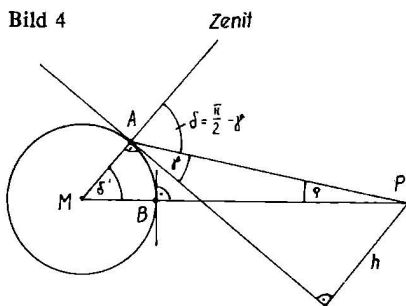
In der Tat zeigt sich bei diesem markantesten Himmelsobjekt die Parallaxe in verschiedenen Erscheinungen.

Betrachtet man den Mond gleichzeitig von verschiedenen Orten der Erde, so scheint er an verschiedenen Stellen der Himmelskugel, also an verschiedenen Stellen bezüglich der als Hintergrund angesehenen Sternbilder zu stehen.

Eine Bedeckung eines Sterns durch den Mond (der Mond tritt in die Sichtlinie Beobachter-Stern) oder die Bedeckung der Sonne durch den Mond (Sonnenfinsternis) wird von verschiedenen Orten der Erde aus zu verschiedener Zeit und in verschiedener Weise gesehen.

Der Mond werde nun von einem Punkt A der Erdoberfläche aus betrachtet (Bild 4). Wir sehen die Erde als eine Kugel an. Wir zeichnen den durch den Punkt A gehenden Längenkreis mit dem Mittelpunkt M (Erdmittelpunkt). Der über A verlängerte Erdradius AM zeigt nach oben auf den Zenit

Bild 4



des Beobachters. Die auf AM senkrecht stehende Gerade durch A kennzeichnet den Horizont. Ein Beobachter in A sieht den Mondmittelpunkt P unter dem Winkel γ in der Höhe h .

Der Winkel δ ($= 90^\circ - \gamma$) heißt Zenitdistanz.

Ein zweiter Beobachtungspunkt B werde nun auf demselben Längenkreis so gewählt, daß der Mond im Zenit erscheint. (B ist der Schnittpunkt von PM mit dem Längenkreis. A und B mögen einen großen geographischen Breitenunterschied haben.)

Der Winkel δ' (Winkel AMP) heißt geozentrische Zenitdistanz. Aus $\delta' + \varrho + (90^\circ + \gamma) = \delta' + \varrho + 90^\circ + (90^\circ - \delta) = 180^\circ$ folgt $\delta' + \varrho - \delta = 0$, also $\varrho = \delta - \delta'$.

Im Dreieck AMP mit den Winkeln δ' , ϱ , $180^\circ - \delta$ gilt nach dem Sinussatz (zwei Seiten, hier: PM und AM , verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, hier: $180^\circ - \delta$, ϱ) unter Beachtung von $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$

$$\frac{AM}{PM} = \frac{\sin \varrho}{\sin \delta}, \text{ also}$$

$$\sin \varrho = \frac{AM}{PM} \sin \delta,$$

worin AM den Erdradius, PM die geozentrische Entfernung Mond-Erde, δ die Zenitdistanz bezeichnet.

Der Winkel ϱ (Winkel APM) heißt Höhenparallaxe des Mondes (in bezug auf den Erdradius MA als Basis). Sie ist natürlich nicht konstant. Kommt der Mond dem Zenit näher, so wird ϱ kleiner. Die Höhenparallaxe wird während der täglichen Bewegung des Mondes ihren größten Wert erreichen, wenn der Mond (der Punkt P) für den Punkt A im Horizont steht, d. h. $\delta = 90^\circ$ ist. Dann heißt sie Horizontalparallaxe, im folgenden mit $\varrho_{\max}$ bezeichnet (Bild 5). Es ist

$$\sin \varrho_{\max} = \frac{AM}{PM} \quad (\text{folglich})$$

$$\sin \varrho = \sin \varrho_{\max} \cdot \sin \delta,$$

$$\text{und } PM = \frac{1}{\sin \varrho_{\max}} AM.$$

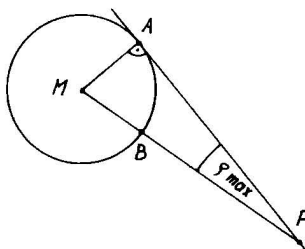


Bild 5

Die Bestimmung der Horizontalparallaxe $\varrho_{\max}$ des Mondes läuft also darauf hinaus, die geozentrische Entfernung PM des Mondes zu bestimmen.

Auf die Methoden zur Bestimmung der Horizontalparallaxe des Mondes soll hier nicht eingegangen werden. Die Astronomen fanden für den Mond eine Horizontalparallaxe von ungefähr 1° . Der Wert schwankt zwischen $54'$ und $61'$ ($1^\circ = 60'$). Dem Mittelwert von etwa $57'$ entspricht eine mittlere Mondentfernung von etwa 60 Erdradien.

Analog kann man Horizontalparallaxen für die Planeten und für die Sonne bestimmen. Es ergeben sich nur wenige Sekunden betragende Winkel ($1^\circ = 60' = 3600''$). Die Horizontalparallaxe für die Sonne beträgt ungefähr $9''$. Unter diesem Winkel erscheint der Erdradius vom Sonnenmittelpunkt aus gesehen. Die entsprechende Parallaxe für Fixsterne ist wegen ihrer großen Entfernung zu klein, um bemerkt zu werden. Da aber die Erde – wie Copernicus und Kepler richtig annahm – im Lauf eines Jahres eine elliptische Bahn um die Sonne durchläuft, so müßte wohl der Sehstrahl zu einem Punkte im Weltraum (einem Stern) während des Erdumlaufs eine merkliche Richtungsänderung erfahren.

H. Pieper

(Fortsetzung in *alpha*, Heft 1/1985)



... die Beckerprob allhier gantz gründlich gemacht

Die Rechenkunst Adam Ries'
nutzten auch die Ratsherren von Leipzig



Mit dem Wiederaufbau des 1943 durch anglo-amerikanische Luftangriffe zerstörten Gebäudes der *Alten Waage* (1556 erbaut) sind auch Erinnerungen an den Rechenmeister Adam Ries verbunden. Er hatte in Leipzig zwei Freunde, mit denen er Rechenaufgaben austauschte; den Waagmeister Bernecker und den Rechenmeister Seehofer.

Das erste Mal dürfte Adam Ries 1536 in Leipzig gewesen sein, als die Buchdruckerei Melchior Lotter sein „Gerechnet Büchlein“ druckte. Nachweislich war er 1550 wegen seines großen Rechenbuches in unserer Stadt, Kurfürst Moritz hatte die Druckkosten vorgeschossen. Kaiser Karl V. gewährte darauf Adam Ries auf dem Reichstag zu Augsburg ein Privileg, nachdem Fachgelehrte der Universität zu Leipzig das Buch geprüft und zur Annahme empfohlen hatten. Bei diesem Besuch hatte Adam Ries laut Eintragung in den Stadtkassenrechnungen dem Rat „etzliche Rechenbüchlein verehret“, wofür er als Anerkennung den Betrag von 2 Schock, 48 Groschen erhielt.

Somit war Adam Ries kein Unbekannter, als der Rat 1557 seine Hilfe zur Aufstellung der Leipziger Brotordnung in Anspruch nahm. Sie machte sich notwendig, weil das Korn vor der Einführung der Kartoffel das Hauptnahrungsmittel war und die Getreidepreise durch eine gute und schlechte Ernte sehr stark schwankten,

während die Arbeitslöhne dagegen konstant blieben. Aus diesem Grunde wurde auch nicht der Brotpreis, sondern stets das Gewicht des Brotes geändert. Es war nun die Aufgabe des Rechenmeisters Adam Ries, anhand der verschiedenen Getreidepreise das Brot- und Semmelgewicht zu ermitteln und in Tabellen aufzustellen, damit „der gemeine Mann nicht übervorteilt wurde“. Der Rat konnte bei Beschwerden der Bevölkerung sofort anhand der Tabellen feststellen, ob das Gewicht in Ordnung war oder der Bäcker bestraft werden mußte. Kostete ein Scheffel Korn (212 Pfund) sechs Groschen, dann wog ein Drei-Pfennig-Brot über sechsdreiviertel Pfund. Bei einem Scheffelpreis von 26 Groschen, diese Preisschwankungen waren keine Seltenheit, hatte das Drei-Pfennig-Brot nur noch ein Gewicht von etwa eindreiviertel Pfund. In solchen Zeiten mußte manche Familie den ganzen Wochenlohn und noch mehr allein für Brot ausgeben.

So fand am Freitag nach Matthäi 1557 auf der Waage das Messen und Wiegen eines Scheffels Metzgetreide im Beisein von vier Bäckermeistern durch den Rechenmeister Adam Ries statt. Der Vorgang wiederholte sich nach dem Ausmahlen des Korns und dem Ausbacken des Mehls, um den Abgang zu ermitteln. Den genauen Hergang schildert ein umfassendes Aktenstück mit den darin aufgestellten Tabellen. Es schließt mit den Worten: „bey solchem

Malen und Begken bin ich Adam Ries voun S. Annabergk auf erfordderung gewesen, wie es ergangen die rechnung gantz gründlich gestellt.“

Für seine geleistete Arbeit wurde Ries am 2. Oktober 1557 (anderthalb Jahr vor seinem Tode) „zur Verehrung gegeben, daß er die Becker prob allhier gemacht, 50 Gulden“. Dieser hohe Betrag entsprach dem Jahreslohn des damaligen Leipziger Waserkunstmeisters.

Auffällig ist, daß der Leipziger Chronist Vogel, ein Pfarrer, in seinen Annalen wohl die Bäckerprobe mit den Namen der daran teilnehmenden Ratspersonen anführt, aber Adam Ries nicht nennt.

Wohl deshalb, weil der Rechenmeister kein studierter Mann gewesen war.

G. Grebenstein

| Getreide
preis | Semmel-
gewicht | Pfennigbrot-
gewicht |
|-------------------|--------------------|-------------------------|
| 10 | 1 11 | 2 5 1/2 |
| 11 | 1 0 | 1 7 1/2 |
| 12 | 1 4 | 1 20 |
| 13 | 1 2 | 1 21 1/2 |
| 14 | 0 31 | 1 17 1/2 |
| 15 | 0 20 | 1 14 |
| 16 | 0 27 | 1 11 1/2 |
| 17 | 0 26 1/2 | 1 8 1/2 |
| 18 | 0 24 | 1 6 1/2 |
| 19 | 0 23 1/2 | 1 4 1/2 |
| 20 | 0 21 1/2 | 1 2 1/2 |
| 21 | 0 20 1/2 | 1 1 |
| 22 | 0 19 1/2 | 0 31 1/2 |
| 23 | 0 18 1/2 | 0 30 |
| 24 | 0 18 | 0 29 |
| 25 | 0 17 | 0 27 1/2 |
| 26 | 0 16 1/2 | 0 26 1/2 |
| 27 | 0 16 | 0 25 1/2 |
| 28 | 0 15 1/2 | 0 24 1/2 |
| 29 | 0 15 | 0 23 1/2 |
| 30 | 0 14 1/2 | 0 22 1/2 |
| 31 | 0 14 | 0 22 |
| 32 | 0 13 1/2 | 0 21 1/2 |
| 33 | 0 13 | 0 21 |
| 34 | 0 12 1/2 | 0 20 1/2 |
| 35 | 0 12 | 0 19 1/2 |
| 36 | 0 12 | 0 19 |

Getreide
preis Semmel-
gewicht Pfennigbrot-
gewicht

Tabelle aus der Leipziger Brotordnung von 1557

Adam-Ries-Wettbewerb in Annaberg-Buchholz

Seit 1981 wird im Kreis Annaberg alljährlich an zwei Tagen der ersten Woche in den Winterferien der *Adam-Ries-Wettbewerb* durchgeführt. Gastgeber ist die Adam-Ries-Oberschule der Kreisstadt. Die Vorbereitung liegt in den Händen eines Komitees. Aus dem Bezirk Karl-Marx-Stadt treffen sich die drei besten *Jungen Mathematiker* der Klassenstufe 5 eines jeden Kreises. In einer dreistündigen Klausur sind drei Aufgaben zu lösen. Die Korrekturgruppen setzen sich aus Kollegen der beteiligten Kreise zusammen. Für diesen Wettbewerb gibt es eine Mannschafts- und Einzelwertung. Die beste Mannschaft erhält den Wanderpokal des Bezirksschulrates, der Einzelsieger seit 1984 die *Adam-Ries-Gedenkmedaille* vom Rat der Stadt Annaberg-Buchholz. Außerdem werden Ehrenpreise und Urkunden vergeben.



Neben dem Wettbewerb gibt es ein Freizeitprogramm. Dabei werden historische Stätten aufgesucht wie der Frohnauer Hammer, das Erzgebirgsmuseum und die restaurierte Annenkirche mit dem von Hans Hesse geschaffenen Bergaltar. Von 1985 an wird die Besichtigung des Adam-Ries-Hauses, das am 30. März 1984 anlässlich des 425. Todestages eröffnet worden ist, in das Programm einbezogen. Außerdem werden die Teilnehmer in einem Lichtbildervortrag über Leben und Wirken des Rechenmeisters und Bergbeamten Adam Ries informiert.

Die Entdeckung mathematischer Talente der Klassenstufe 5 ist das erklärte Ziel des Adam-Ries-Wettbewerbs. Aus den ersten drei Wettbewerben konnten 49 Teilnehmer ausgewählt und als Schüler der Klasse 6 auf einen Frühstart in der Klasse 7 der Bezirksolympiade vorbereitet werden. Diese erfolgreichen Wettbewerbsteilnehmer werden in Korrespondenzzirkeln des Bezirks sowie in Spezialistenlagern besonders gefördert. Im 4. Wettbewerb 1984 hatten wir erstmalig einen Schüler der Klasse 4 als Frühstarter dabei. Er erhielt einen 2. Preis. Jährlich nehmen am Wettbewerb 72 bis 78 Mädchen und Jungen teil.

G. Jähniq

Aufgaben des 4. Adam-Ries-Wettbewerbs 1984

▲ 1 ▲ Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel. Nachdem vom ersten Baum 7 Vögel auf den zweiten Baum geflogen und dann vom zweiten Baum 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten Baum und auf dem dritten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.

Berechne, wieviel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

▲ 2 ▲ In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel im Preis von 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M, 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

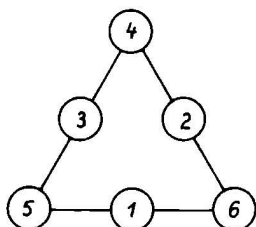
Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt so viel zu bezahlen wie der erste Käufer.

Zeige, daß sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln läßt, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

▲ 3 ▲ a) In Bild 1 sind die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen, daß die drei Seitensummen S gleich groß sind und daß stets $S = 12$ gilt:

$$4 + 3 + 5 = 5 + 1 + 6 = 6 + 2 + 4 = 12$$

Bild 1



Lewis Carroll's Nonsens-Welt

In vielen Ländern der Erde gehört „Alice im Wunderland“ zu den bekanntesten und beliebtesten Kinderbüchern. Davon zeugen auch verschiedene Briefmarken. (Wir zeigen eine britische von 1979 und eine aus der ČSSR aus dem Jahr 1977.) Bei uns ist „Alice“ nicht so populär wie z. B. in der Sowjetunion oder gar in ihrem Heimatland Großbritannien, jedoch gab es auch in der DDR schon Buchausgaben (Holz-Verlag 1967f.). Wenigen ist bekannt, daß Lewis Carroll (1832 bis 1898), der Verfasser dieses Buches, in Wirklichkeit Charles Lutwidge Dodgson hieß und Professor für Ma-

thematik am Christ Church College in Oxford war. Dieses Amt war an die Bedingung geknüpft, Geistlicher der anglikanischen Kirche zu sein und unverheiratet zu bleiben.



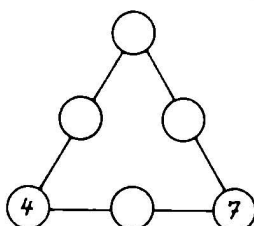
So erschien Dodgson, der Kinder sehr gern hatte, seiner zahlreichen Verwandtschaft als idealer Kinderhüter und Ferienonkel. Bei solchen Anlässen entstanden seine skurrilen Erzählungen, mit denen er eine eigene Literaturgattung, die sogenannte „nonsens-Literatur“ begründete, die im englischsprachigen Bereich viele Nachahmer gefunden hat. Da wird man durch mysteriöse Medizinen winzig klein oder riesengroß, entdeckt im Kaninchenbau ein sonderbares Märchenreich, in dem alle Tiere sprechen, weinende Schildkröten Harfe spielen, Spielkartenkönige regieren und aus Alices Tränen ein großer See entsteht. Außer „Alice im Wunderland“ (zuerst 1865 erschienen und vom Autor selbst illustriert) gibt es von L. Carroll noch Alices Abenteuer im Hinterspiegelland (1872, ebenfalls deutsch im Holz-Verlag, hier ist eine ganze Schachpartie als Nonsens-Geschichte verschlüsselt), die Abenteuer von Bruno und Sylvie (2 Bände, 1888 bzw. 1893) und andere Kinderbücher, jedoch auch einige mathematische bzw. populärwissenschaftliche Werke, z. B. „Curiosa Mathematica“ (2 Bände, 1888, 1893), „Euklid und seine modernen Rivalen“ (1897) und ein Buch über ebene algebraische Geometrie (1860).



Gib je eine Eintragung der Zahlen von 1 bis 6 in ein solches Schema an, so daß $S = 9$ bzw. $S = 10$ bzw. $S = 11$ gilt!

b) In Bild 2 sind die Eckenzahlen 1, 4, 7 mit der Eckensumme $E = 12$ eingetragen.

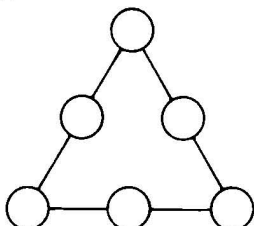
Bild 2



Trage die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so in das Schema ein, daß die drei Seitensummen S gleich groß sind und daß $S = 19$ gilt! Finde möglichst viele solcher Eintragungen!

c) In Bild 3 sind die Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, daß die Seitensummen S gleich groß werden.

Bild 3



Außer $S = 19$ kann noch $S = 17$, $S = 21$ und $S = 23$ gelten. Finde möglichst viele solche Eintragungen!

Hinweis: Die Eckensumme E ist stets durch 3 teilbar. Versuche, eine Gleichung zu finden, mit deren Hilfe man E aus S berechnen kann!

In der englischsprachigen mathematischen Fachliteratur ist es eine verbreitete Sitte, den einzelnen Kapiteln kurze Zitate aus der belletristischen Literatur voranzustellen, die in einem mehr oder weniger direkten Zusammenhang zur folgenden Problematik stehen. Neben Shakespeare behauptet hier „Alice“ einen guten Platz. Will man als Mathematiker derartige Anspielungen bzw. Bezüge verstehen, so muß man sich schon bequemen, Lewis Carroll's Nonsens-Literatur auch einmal im Zusammenhang zu lesen.

P. Schreiber

alpha-Porträt

Oberstudienrat Gerhard Schulze –
am 30.5.1984 65 Jahre alt

Mehr als 30 Jahre arbeitete Gerhard Schulze als Mathematiklehrer und Fachberater im Kreis Herzberg. Unermüdlich und mit großem Ideenreichtum befähigte er die Mathematiklehrer des Kreises, die im Mathematikbeschuß des Jahres 1962 festgelegten Ziele und die sich daraus ergebenden aktuellen Aufgaben immer besser zu erfüllen. Seine reichen Erfahrungen gab er im Kollektiv der Fachberater Mathematik des Bezirkes Cottbus zum Nutzen aller weiter.

Darüber hinaus wirkte er längere Zeit aktiv im Wissenschaftlichen Rat des Ministeriums für Volksbildung und in der zentralen Aufgabenkommission für die schriftlichen Reifeprüfungen im Fach Mathematik mit. Er war Autor zahlreicher Artikel in der Zeitschrift *Mathematik in der Schule* und erarbeitete ein Kapitel für die *Methodik des Mathematikunterrichtes*.

Seine Liebe jedoch gehört bis heute der außerunterrichtlichen mathematischen Tätigkeit. An ihrer Entwicklung im Bezirk Cottbus trägt Gerhard Schulze großen Anteil. Als Mitbegründer des Bezirksklubs Junger Mathematiker förderte er in unerermüdlicher Arbeit die mathematischen Talente, die sich oftmals bei nationalen und internationalen Wettbewerben bewährten.

Als langjähriger Leiter einer zentralen Aufgabenkommission bestimmte er die Inhalte der Mathematikolympiaden mit. Bis heute gehört Gerhard Schulze dem Redaktionskollegium der *alpha* an. Einige Jahre lang korrigierte er viele Schülereinsendungen des *alpha-Wettbewerbs*.

Aber auch an seiner Schule selbst hat er zahlreiche Schüler für die Mathematik interessiert. In der Arbeitsgemeinschaft Mathematik des Klubs Junger Pädagogen der EOS Herzberg befähigte er die angehenden Mathematiklehrer zur Leitung von Arbeitsgemeinschaften in den unteren Klassen. Seinen Niederschlag fand diese Arbeit in einer Pädagogischen Lesung, die eine Vielzahl von Programmen zur Gestaltung von mathematischen Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 3 und 4 enthielt. Nach seinem krankheitsbedingten Ausscheiden aus dem aktiven Schuldienst entwickelte er die Programme für die AG-Tätigkeit in der Richtung weiter, daß eine breite, lustbetonte mathematische Tätigkeit der Schüler erreicht werden kann. Die ersten Ergebnisse dieser Arbeit stellte er in einer stark beachteten Ausstellung vor. Methodisch und gestalterisch hervorragend aufgearbeitet, stellt Gerhard Schulze auf einer Vielzahl von Tafeln mathematische Spiele für die

AG-Tätigkeit, die Hortarbeit und sogar für die Unterrichtsarbeit vor. Anforderungen aus mehreren Bezirken unterstreichen das Interesse an derartigem Material. Auch gegenwärtig arbeitet er an der Erweiterung und Vervollkommnung dieses Ausstellungsmaterials.

Oberstudienrat Gerhard Schulze wurde für sein langjähriges intensives und schöpferisches Wirken bei der Bildung und Erziehung unserer Schuljugend und für die Qualifizierung unserer Mathematiklehrer mit hohen staatlichen und gesellschaftlichen Auszeichnungen gewürdigt.

B. Weiße

Aufgaben des 17. Mannschaftswettbewerbs der Klassenstufe 7, Schuljahr 1983/84

1. Kreisausscheid

▲ 1 ▲ Die Warenproduktion in der Volkswirtschaft der DDR betrug 1949: 32 Milliarden Mark und 1982: 421 Milliarden Mark.

a) Auf das Wievielfache ist die Warenproduktion im angegebenen Zeitabschnitt gestiegen? Runde auf Zehntel!

b) Um das Wievielfache ist sie gestiegen?

▲ 2 ▲ Anett behauptet, daß die Zahl $z = 10^{1983} + 2$ durch 3 teilbar ist. Hat sie recht? Begründe diese Entscheidung!

▲ 3 ▲ Gegeben ist die gebrochene Zahl $a = \frac{5}{3}$.

a) Berechne $b = \frac{a}{a-1}$!

b) Berechne $a + b$ und $a \cdot b$!

c) Vergleiche $a + b$ mit $a \cdot b$!

OStR G. Schulze mit zwei Jungen Mathematikern bei der Herstellung von Bausteinen des „Herzberger Quaders“.

OStR G. Schulze und sein Sohn, Dipl.-Math. J. Schulze, beim Aufbau der Ausstellung „Herzberger Spiele“.

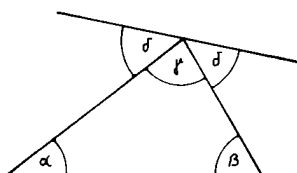


▲ 4 ▲ Die Verpackung eines Fernsehgerätes ist aus Wellpappe und hat folgende Maße: Länge 65 cm, Breite 0,35 m, Höhe 5 dm. Wieviel Quadratmeter Pappe werden insgesamt für die Verpackung von 25 Fernsehgeräten benötigt, wenn für jeden der Kartons $\frac{1}{5}$ des errechneten Pappebedarfs zusätzlich für notwendige Überlappungen gebraucht wird?

▲ 5 ▲ Die Summe der Zahlen, die jeweils das Lebensalter (in ganzen Jahren) von Anita und Bernd angeben, ist 20. Ihr Cousin Christian ist genau 3 Jahre älter als Anita und fünf Jahre jünger als Bernd. Wie alt ist jedes der drei Kinder?

▲ 6 ▲ Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\overline{AC} = e = 4,4$ cm und Winkel $DAB = \alpha = 125^\circ$! Beschreibe kurz die Konstruktion!

▲ 7 ▲ Beweise, daß in der abgebildeten Figur gilt: $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$!



▲ 8 ▲ In der verschlüsselten Additionsaufgabe $xy + xy + xy = zx$ sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe!

▲ 9 ▲ Gegeben sind 27 gleich große Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6. Sie werden zu einem größeren Würfel so zusammengesetzt, daß nur gerade Augenzahlen zu sehen sind. Wie groß ist die Summe der auf der Oberfläche sichtbaren Augenzahlen, wenn sie a) möglichst klein und b) möglichst groß sein soll?

▲ 10 ▲ Die Familien Andreas, Beier und Christensen besitzen je ein Kraftfahrzeug vom Typ „Wartburg“, „Trabant“ bzw. „Škoda“. Die Pkw sind von verschiedener Farbe, einer ist rot, einer grau und einer blau. Uns ist noch bekannt:
a) Familie Andreas hat weder einen blauen Pkw noch ein Fahrzeug vom Typ „Trabant“.
b) Familie Christensen besitzt einen grauen Pkw.
c) Der Pkw vom Typ „Wartburg“ ist nicht von roter Farbe.
d) Familie Beier besitzt nicht den „Trabant“.
Es sind jeweils der Fahrzeugtyp und die Fahrzeugfarbe für die Familien anzugeben!

Bücher mit Mathe



H. Pieper

Die komplexen Zahlen

Theorie · Praxis · Geschichte
256 S., 91 Abb., 8 Tabellen, MSB Nr. 110
Bestell-Nr. 571 051 6 Preis: 12,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

K. G. Steinert

Sphärische Trigonometrie

mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie
Kl. Naturw. Bibl., Reihe Mathe., Bd. 8
160 S., 69 Abb., 13 Tab.
Bestell-Nr. 655 828 9 Preis: 9,50 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

R. Thiele

Die gefesselte Zeit

Spiele, Spaß und Strategien
215 S., 167 Farbfotos, 260 meist farbige Zeichnungen
Bestell-Nr. 653 798 9 Preis: 32,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

G. Höfner/W. Klein

Wahrscheinlich ganz einfach

Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung
175 S., 42 zweifarb. Zeichnungen, 38 mehrfarb. Z., Bestell-Nr. 653 796 2
Preis: 8,50 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

E. Quaisser

Bewegungen in der Ebene und im Raum

128 S., 99 Abb., MSB Nr. 116
Bestell-Nr. 571 194 9 Preis: 10,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

H. Pieper

Zahlen aus Primzahlen

Eine Einführung in die Zahlentheorie
204 S., zahlr. Abb., MSB Nr. 81
Bestell-Nr. 570 150 5 Preis: 9,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

F. S. Salewski

Die Zeit und ihre Messung

266 S., 71 Bilder
Bestell-Nr. 546 133 7 Preis: 9,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

F. S. Salewski

Die Masse und ihre Messung

223 Seiten mit 52 Bildern
Bestell-Nr. 546 265 5 Preis: 9,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

S. Kiese/E. Naumann

Roboter im Blickpunkt

208 S., 107 Bilder, 5 Tab.
Bestell-Nr. 546 841 6 Preis: etwa 16,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

M. Müller

Rechenvorteile

7. Aufl., 95 S., 1 Abb., MSB Nr. 14
Bestell-Nr. 665 065 8 Preis: 3,75 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

I. M. Sobal

Die Monte-Carlo-Methode

72 S., 30 Abb., 5 Tab., MSB Nr. 50
Bestell-Nr. 569 879 9 Preis: 3,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

W. Körner

Physik – kurz gefaßt

136 S., 150 Abb.
Bestell-Nr. 546 709 3 Preis: etwa 6,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Kleffe

Der gefangene Schall

128 S., zahlr. mehrfarb. Ill.
Bestell-Nr. 631 347 5 Preis: 6,80 M
Kinderbuchverlag Berlin

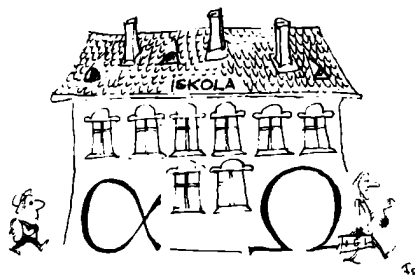
R. Fiedler

Streifzüge durch die Mathematik

200 S., zahlr. mehrfarb. Ill.
Bestell-Nr. 631 726 5 Preis: etwa 6,50 M
Kinderbuchverlag Berlin

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1985



Das langjährige Mitglied des Redaktionskollegiums der Mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, unser geschätzter Kollege Studienrat H.-J. Kerber aus Neustrelitz, feierte in diesem Jahr seinen 65. Geburtstag. Seit dem Jahre 1971 stellte er für den *alpha*-Wettbewerb 300 Knobelaufgaben bereit, eine beachtliche Leistung. Sämtliche Aufgaben dieses Heftes zum *alpha*-Wettbewerb stammen wiederum aus der Feder von H.-J. Kerber.

Unseren Lesern viel Spaß beim Knobeln!

Dem Kollegen Kerber wünscht *alpha* Gesundheit, persönliches Wohlergehen und Schaffensfreude. Wir sind davon überzeugt, daß unsere *alpha*-Leser auch künftig harte mathematische Nüsse, ausgetüftelt von Studienrat H.-J. Kerber, zum Knacken dargereicht bekommen.

Mathematik

Ma 5 ■ 2493 Am 7. Oktober 1984 feierten wir den 35. Geburtstag der DDR. Familie K. hat drei Kinder. Mathias, das älteste Kind, knobelt gern. Er hat folgendes mit der Zahl 5 herausgefunden:

- Die DDR ist 1984 fünfmal so alt wie seine Schwester Susanne.
 - Vor 5 Jahren war die DDR fünfmal so alt wie sein Bruder Stefan zu dieser Zeit.
 - Zwischen Mathias und Susanne beträgt der Altersunterschied 5 Jahre.
- In welchem Jahr wurde jedes der drei Geschwister geboren?

Ma 5 ■ 2494 Katrins Taschengeld besteht aus genau zehn Geldstücken, und zwar aus 10-Pf-Stücken und aus 1-Pf-Stücken. Zuerst gibt sie vom Taschengeld die Hälfte aus, vom Rest dann wieder die Hälfte und vom neuen Rest nochmals die Hälfte. Wieviel Geld behält sie von ihrem Taschengeld danach übrig?
Begründe deine Antwort!

Ma 5 ■ 2495 In einem Wagen des Pionierzuges sitzen 24 Pioniere. Bei der ersten Station steigen 11 Pioniere aus und 8 dazu. Bei der zweiten Station steigen noch 4 Pioniere hinzu. Wie viele Jungen stiegen bei der zweiten Station aus, wenn dort genau fünf Mädchen ausstiegen und noch genau 13 Pioniere weiterfuhren?
Begründe deine Lösung!

Ma 5 ■ 2496 Susi hat sechs Kugeln, und zwar zwei weiße, zwei rote und zwei grüne (w, w, r, r, g, g). Sie soll in Schachtel A eine Kugel, in Schachtel B zwei Kugeln und in Schachtel C drei Kugeln legen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Fertige dazu eine Tabelle für alle möglichen Farbverteilungen an!

Ma 5 ■ 2497 Von 31 Schülern einer Klasse sind genau 6 Schüler in der AG Mathematik. Genau 5 Schüler sind nur in der AG Russisch und in keiner weiteren AG. In der AG Mathematik und in der AG Russisch zugleich sind genau 4 Schüler. Wieviel weitere Schüler sind noch in anderen Arbeitsgemeinschaften, wenn genau 7 Schüler in keiner AG sind? Begründe deine Behauptung!

Ma 5 ■ 2498 a) Zeichne einen Punkt A und einen Punkt B, der 4 cm von A entfernt ist! Zeichne einen Punkt A' als Bild von A! Dabei soll die Verschiebungsweite 2 cm betragen und A, B, A' sollen nicht auf einer Geraden liegen.

b) Zeichne nun B' als Bild von B bei gleicher Verschiebung!

c) Ermittle das Bild B'' von B bei der Verschiebung $\overrightarrow{A'A}$! Welche Aussage kannst du über die Lage von B'' machen?

Ma 6 ■ 2499 a) Gib die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 20 an!

b) Gib die kleinste, durch 5 teilbare natürliche Zahl mit der Quersumme 15 an!

Hinweis: Die Quersumme z. B. der Zahl 14403 lautet $1 + 4 + 4 + 0 + 3 = 12$.

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

| | | |
|---|-----|----------------|
| Thies Luther, 2600 Güstrow, Werdersstr 22 | | Ma 7 ■
1369 |
| Kersting-OS, Klasse 7 | | |
| 30 | 150 | |
| Prädikat: | | |
| Lösung: | | |

Ma 6 ■ 2500 Es sind alle fünfstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:

Wenn man die Grundziffern als Zahlen auffaßt, so ist die erste Grundziffer größer als die letzte, die zweite dreimal so groß wie die erste, die dritte um 4 kleiner als die zweite und die vierte um 1 größer als die zweite.

Ma 6 ■ 2501 Olaf hat ein Aquarium. Es ist dreimal so lang wie breit. Alle 14 Tage erneuert er einen Teil des Aquariumwassers. Als er neunmal eine 3-Liter-Kanne voll mit Wasser dem Aquarium entnommen hatte, war der Wasserspiegel um 10 cm gesunken. Wie lang und wie breit ist sein Aquarium?

Ma 6 ■ 2502 a) Zeichne auf kariertem Papier ein Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 4 cm! Zeichne die Mittelpunkte E, F bzw. G der Seiten $\overline{DC}, \overline{AD}$ bzw. $\overline{AB}$ ein! Zeichne die Gerade g , die durch E und F und die Gerade h , die durch F und G geht!

b) Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei Verschiebung parallel zu h so, daß $A'B'C'D'$ genau einen Eckpunkt mit g gemeinsam hat! Konstruiere dann das Bild $A''B''C''D''$ des Quadrates $A'B'C'D'$ bei Verschiebung parallel zu g so, daß $A''B''C''D''$ genau einen Eckpunkt mit h gemeinsam hat!

c) Zeichne die zu b) gehörenden beiden Verschiebungspfeile!

d) Zeichne einen einzigen Verschiebungspfeil, der zum gleichen Ergebnis führt!

e) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es zu b)? Hinweis: Zeichne farbig!

Ma 6 ■ 2503 a) Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit 3 cm Seitenlänge! Ein Punkt E auf $\overline{AB}$ liegt von A , ein Punkt F auf $\overline{AD}$ liegt von D jeweils 1 cm entfernt. Zeichne diese Punkte!

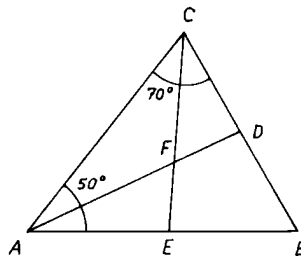
b) Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei Spiegelung an der Geraden, die durch E und F geht!

Ma 7 ■ 2504 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und eine Gerade g , die $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt D , $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt E und die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über A hinaus in F schneidet! Der Winkel $\angle DFB$ habe die Größe φ . Beweise, daß stets gilt: $\beta + \gamma + \varphi < 180^\circ$! (Es habe der Winkel $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$ die Größe β bzw. γ .)

Ma 7 ■ 2505 Von 11 Schülern eines Fotozirkels sind genau 3 Schüler auch im Mathematikzirkel. Im Bastelzirkel sind 12, im Mathematikzirkel 13 Schüler. Genau ein Schüler aus dem Bastelzirkel ist auch im Fotozirkel und genau ein anderer auch im Mathematikzirkel. In allen drei Zirkeln zugleich ist kein Schüler. Um wieviel Schüler handelt es sich insgesamt? Wieviel Schüler sind nur in einem Zirkel? Begründe deine Behauptungen!

Ma 7 ■ 2506 Im abgebildeten Dreieck ABC hat der Winkel $\angle CAB$ die Größe 50° , der Winkel $\angle ACB$ die Größe 70° . Die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{CE}$, die sich in F schneiden, sind beide Winkelhalbierende des

Dreiecks ABC . Bestimme die Größen der vier Innenwinkel des Vierecks $EBDF$!



Ma 7 ■ 2507 Stefan hat neun Kugeln, und zwar drei rote, drei weiße und drei blaue. Er soll in den Kasten A zwei, in den Kasten B drei und in den Kasten C vier Kugeln legen. In jedem Kasten müssen aber mindestens zwei Kugeln verschiedener Farben vorkommen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Fertige eine Tabelle für alle Möglichkeiten an!

Ma 8 ■ 2508 Mathias liest ein Buch. Von den 342 Seiten des Buches will er an jedem Tag die gleiche Anzahl Seiten lesen. Welche Seite las er zuletzt, als er zu seinem Freund Peter sagte: „Heute, Dienstag, am 7. Tag seit Beginn meiner Lektüre, habe ich schon 20 Seiten gelesen“? An welchem Wochentag wird er die letzte Seite des Buches lesen? Begründe deine Feststellungen!

Ma 8 ■ 2509 Zwei Rechtecke, von denen eines ein Quadrat ist, haben den gleichen Umfang.

a) Die Quadratseite ist 4,5 cm lang. Eine der Rechteckseiten ist 5 mm länger als die Quadratseite. Um wieviel Quadratzentimeter unterscheiden sich die Flächeninhalte der beiden Vierecke?

b) Weise die Allgemeingültigkeit folgender Aussage nach:

„Habe ein Quadrat und ein Rechteck den gleichen Umfang, so ist die Quadratseite halb so lang wie die Summe aus den Längen zweier benachbarter Rechteckseiten!“

Ma 8 ■ 2510 30 Schüler einer Klasse wurden gefragt, welches ihre Lieblingsfächer wären. Dabei ergab sich folgendes:

Genau 5 Schüler antworteten: „Mathematik und Russisch“.

Genau 4 Schüler antworteten: „Deutsch und Mathematik“.

Genau 3 Schüler antworteten: „Russisch und Deutsch“.

Genau 2 Schüler nannten nur Mathematik. Genau 1 Schüler gab alle drei Fächer an, nämlich Mathematik, Russisch und Deutsch.

Genau 5 Schüler nannten andere als diese drei Fächer.

Wie viele Schüler nannten Mathematik, Russisch bzw. Deutsch als ihre Lieblingsfächer, wenn sich für Deutsch und Russisch gleich viele Schüler entschieden haben?

Ma 8 ■ 2511 Einem Halbkreis k mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ wurde, wie aus der Zeichnung ersichtlich, ein Viereck $ABCD$ einbe-

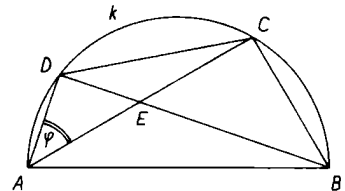
schrieben, dessen Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sich in E schneiden. Weise nach, daß im Viereck $ABCD$ zwischen den angeführten Winkeln folgende Beziehungen gelten, wenn der Winkel $\angle DAC$ die Größe φ hat:

(1) $\angle DAC \cong \angle DBC$;

(2) $\angle ADB \cong \angle ACB$;

(3) $\angle AEB$ hat die Größe $90^\circ + \varphi$;

(4) die Summe aus den Größen der Winkel $\angle DAB$ und $\angle ABD$ beträgt $90^\circ + \varphi$.

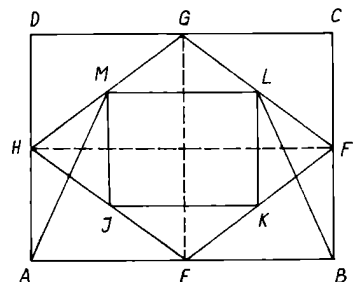


Ma 9 ■ 2512 Gegeben seien zwei aufeinanderfolgende, von Null verschiedene natürliche Zahlen. Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger der kleineren der beiden Zahlen vermehrt um den Vorgänger ist stets gleich dem Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger der größeren der beiden Zahlen vermindert um den Nachfolger. Geben Sie dafür ein Beispiel an, und beweisen Sie diese Behauptung!

Ma 9 ■ 2513 Geben Sie alle Quadrupel (a, b, c, d) von natürlichen Zahlen an, die zugleich die beiden Gleichungen $1983 = (a - 1) \cdot b \cdot (c + 1)$ und $1984 = a \cdot b \cdot (c - d)$ erfüllen!

Ma 9 ■ 2514 In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$, das einen Flächeninhalt von 20 cm^2 besitzt, ist die Summe aus den Längen der beiden Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich der Summe aus den Längen der beiden parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Ferner ist die Seite $\overline{AB}$ viermal so lang wie die Seite $\overline{CD}$. Bestimmen Sie den Umfang des Trapezes!

Ma 9 ■ 2515 Dem abgebildeten Rechteck $ABCD$, dessen Seite $\overline{AB}$ 20 cm und dessen Seite $\overline{BC}$ 16 cm lang ist, wurde ein Viereck $EFGH$, diesem ein weiteres Viereck $JKLM$ derart einbeschrieben, daß die Punkte E, F, G, H bzw. J, K, L, M die Seiten des Rechtecks $ABCD$ bzw. Vierecks $EFGH$ jeweils halbieren.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABLM$!

b) Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $ABLM$!

Ma 10/12 ■ 2516 Schon die Babylonier benutzten für die Bestimmung von Quadratwurzeln die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

a) Bestimmen Sie nach dieser Formel $\sqrt{102}$, $\sqrt{10,2}$, $\sqrt{35,6}$!

b) Ist der Näherungswert größer oder kleiner als der wahre Wert?

Die Antwort ist zu begründen!

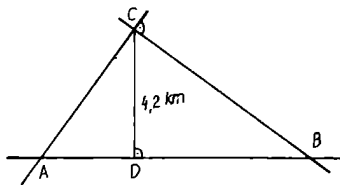
Ma 10/12 ■ 2517 Welche natürlichen

Zahlen x erfüllen die Gleichung

$$1 + \sqrt[3]{x + 77} = x?$$

Ma 10/12 ■ 2518 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, dessen Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\angle DAB$ halbiert und genau so lang ist wie die Seite $\overline{BC}$. Beweisen Sie, daß die Maßzahl der Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ geometrisches Mittel der Maßzahlen der Längen der beiden parallelen Trapezseiten ist!

Ma 10/12 ■ 2519 Das Bild zeigt die Marschskizze einer NVA-Einheit, die von C nach D gelangen soll. Die 4,2 km lange Strecke $\overline{CD}$ ist nicht passierbar. Der Weg, der von C über A nach D führt, ist 8,4 km lang. Die Straßen AC und BC, aber auch



AB und CD kreuzen sich unter einem rechten Winkel. Es ist zu untersuchen, welcher der beiden Wege, der von C über A nach D oder der von C über B nach D, der kürzere ist!

Physik

Ph 6 ■ 166 Im Training läuft ein Sportler eine Strecke von 5 km, das erste Drittel mit einer Geschwindigkeit von 8 km/h (Einlaufen, Geländeanstieg), den Mittelteil mit 10 km/h und das letzte Drittel mit 12 km/h (Geländeabstieg). In welcher Zeit legt er die gesamte Strecke zurück? (Gib die Zeit in Minuten und Sekunden an!)

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ph 7 ■ 167 Von einem Benzinvorrat werden bei der ersten Fahrt 20% verbraucht, bei der zweiten Fahrt 20% der restlichen Benzinmenge und bei der dritten Fahrt noch einmal 20% des verbliebenen Restes. Nach drei Fahrten befanden sich noch 64 l im Vorratsbehälter. Wieviel l betrug der ursprüngliche Benzinvorrat?

Ph 8 ■ 168 Man soll in ein Gefäß Wasser von 30°C füllen. Es stehen 28 l Wasser von 10°C zur Verfügung. Wieviel Liter Wasser von 100°C müssen noch dazugegeben werden?

Ph 9 ■ 169 Eine Masse von 150 kg soll von einem Schüler, dessen Körpergewicht 35 kp beträgt, gehoben werden. Wieviel Rollen muß der zu verwendende gewöhnliche Flaschenzug mindestens haben, wenn jede einzelne Rolle einen Wirkungsgrad von 0,95 hat?

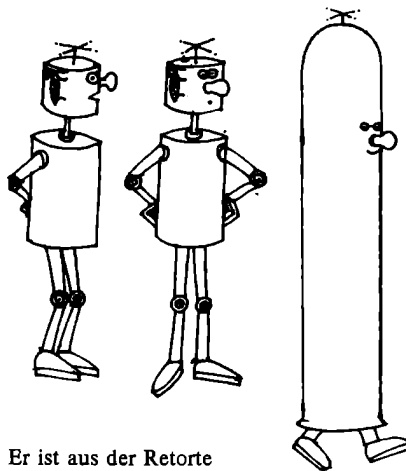
Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ph 10/12 ■ 170 In einem Warenhaus führt von Etage zu Etage eine Fahrtreppe (oft Rolltreppe genannt) mit einem Steigungswinkel von 30°; die Höhe zwischen zwei Etagen ist 5,40 m.

a) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn man auf der Fahrtreppe stehend in 26 s von Etage zu Etage gelangt?

b) Mit welcher Geschwindigkeit wird die nächste Etage erreicht, wenn man auf der laufenden Treppe in Fahrtrichtung steigt und 7 s früher als auf der Treppe stehend ankommt?

Cl. Thielecke, Berlin



Er ist aus der Retorte

Chemie

Ch 7 ■ 133 24 kg Soda sollen zu einer 3%igen Lösung verarbeitet werden. In welche Wassermenge muß das Soda eingetragen werden?

Ch 8 ■ 134 Im VEB Eisenhüttenkombinat wird in sechs Hochöfen Roheisen für die Volkswirtschaft der DDR erzeugt.

a) Für einen Hochofen werden täglich 177 t Eisenerz benötigt. Der in diesem Kombinat unter anderen eingesetzte Magnetkiesstein enthält etwa 58% Eisen(II,III)-oxid.

Berechne die Masse an Eisen, die theoretisch daraus hergestellt werden kann!

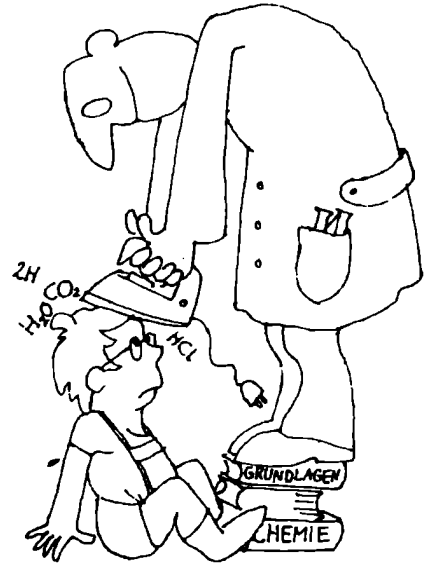
b) Das erzeugte Roheisen enthält bis zu 10% Verunreinigungen, darunter elementare Stoffe (C, Si, P, Mn, S). Welche Masse von Roheisen erhält man tatsächlich?

Ch 9 ■ 135 Der VEB Kombinat Agrochemie Piesteritz erzeugt Synthesegas für die Düngemittelproduktion aus sowjetischem Erdgas. Aus einem Kubikmeter Methan lassen sich drei Kubikmeter Wasserstoff

herstellen. Erdgas aus der Sowjetunion hat einen Methangehalt von etwa 90 Prozent.

a) Welches Volumen an Wasserstoff erzeugt unsere chemische Industrie aus einem Kubikmeter dieses Erdgases?

b) In Piesteritz werden an einem Tag 2 700 t der wertvollen Stickstoffverbindung Ammoniak erzeugt. Berechnen Sie das erforderliche Erdgasvolumen, wenn aus einem Kubikmeter etwa 1,4 kg Ammoniak gewonnen werden!



Ch 10/12 ■ 136 Das Heizkraftwerk Neugersdorf (Kr. Löbau) erhält jährlich 200 kt Rohbraunkohle zur Gewinnung von Wärmeenergie.

a) Bei der vollständigen Oxydation von 1 mol (12 g) Kohlenstoff entsteht eine Wärmemenge von 393,3 kJ (94 kcal). Das Heizkraftwerk erzielt bei der Verbrennung von Braunkohle (relativ geringer Kohlenstoffgehalt und andere Faktoren) jedoch nur 14% dieser Wärmemenge. Stellen Sie die Reaktionsgleichung auf, geben Sie die Reaktionswärme an und rechnen Sie!

b) Während des Winterhalbjahres werden im Heizkraftwerk in einer Stunde 75 t Rohbraunkohle verbrannt. Berechnen Sie die stündlich erzeugte Wärmemenge!

c) Wieviel Kilojoule werden davon je Stunde dem angeschlossenen Wohngebiet „Oberland“ zur Verfügung gestellt, wenn rund 11% der Wärmeenergie für eine ausreichende Versorgung genügen?



alpha-Porträt

StR Hans-Joachim Kerber – einer der erfolgreichsten OJM-Trainer

Im Mai 1964 kehrte die Bezirksmannschaft Neubrandenburg von der DDR-Mathematik-Olympiade ohne Preis und Anerkennung und damit als Schlußlicht in der Bezirkswertung nach Hause zurück. In diesem Jahr brachten die Neubrandenburger Schüler zwei 2. Preise, vier 3. Preise und 5 Anerkennungen auf ihr Konto und erreichten damit, bezogen auf die Schülerzahl im Bezirk, das viertbeste Ergebnis (nach Berlin 1982, 83 und 84), das von einem Bezirk in der 23jährigen Olympiade-Geschichte überhaupt erzielt wurde. Wie kommt ein kleiner (bzgl. Bevölkerung bzw. Schülerzahl) Agrarbezirk, ohne Universitäten oder Hochschulen, zu so einem phantastischen Resultat?

Es ist keineswegs ein Zufallergebnis, sondern basiert auf einer 20jährigen intensiven, kontinuierlichen und engagierten Suche und Förderung von mathematisch talentierten Schülern im Bezirk Neubrandenburg. Zuerst und vor allem ist das das Werk von StR Hans-Joachim Kerber.

Wir wollen den 65. Geburtstag von Herrn Kerber zum Anlaß nehmen, um ihn den *alpha*-Lesern vorzustellen:

Beide Bezirksmannschaften, von 1964 und 1984 (und auch alle dazwischen), standen unter seiner Leitung. Auf der Rückreise von der DDR-Olympiade 1964 analysierten die begleitenden Lehrer StR H. Birken, StR W. Kempcke, OL H. Pätzold und eben StR H.-J. Kerber das schlechte Abschneiden der Schüler. Sie gingen von der These aus, daß auch im Bezirk Neubrandenburg mathematisch talentierte Schüler existieren.

Aber wie sollte man die geeigneten Schüler finden und dann fördern?

Viel wurde überlegt und diskutiert; Erfahrungen, auf die man hätte zurückgreifen können, gab es nicht. Im Ergebnis wurde noch 1964 der Bezirksklub Junger Mathematiker gegründet. Die etwa 10 besten Schüler der Bezirksolympiaden in jeder Klassenstufe werden für ein Jahr in den Klub aufgenommen. Die Zusammenkünfte des Klubs, früher monatlich 1 bis 2 Tage, jetzt etwa sechsmal jährlich 3 bis 5 Tage, bilden die Hauptform der Arbeit im Klub. Hier werden die Schüler mit mathematischen Problemen aus den verschiedensten Gebieten vertraut gemacht. Besonderer Wert wird darauf gelegt, daß die Schüler ihr Wissen auch anwenden können. Während der Lehrgänge wird z. B. durch kleine Klausuren eine anspornende Olympiade-stimmung erreicht. Nach und nach kamen

weitere Formen der Förderung hinzu, so z. B. die persönliche Betreuung von jeweils 3 Schülern durch einen Mentor per Korrespondenz. Besonders wichtig und erfolgreich sind Aktivitäten bei der Talentsuche in den Klassen 4, 5 und 6. Hier ist es H.-J. Kerber in den letzten Jahren gelungen, durch großen eigenen Elan und viele gute Ideen die besten 10 Schüler aus Klasse 5 für die Mitarbeit im Bezirksklub zu motivieren, so daß es noch nie Nachwuchssorgen gegeben hat. Besonders bemerkenswert ist der Enthusiasmus, mit dem sich H.-J. Kerber die vielen eigenen Aufgaben für das System der Vorentscheide ausdenkt. Jeder *alpha*-Leser kennt vom *alpha*-Wettbewerb viele dieser schönen Knobelien.

Erfolge bei den DDR-Olympiaden ließen nach 1964 nicht lange auf sich warten. Erste Höhepunkte waren 1968 ein 5. Platz in der Bezirkswertung und 1969 der erste IMO-Preisträger aus dem Bezirk. Der erste 1. Preis 1972, weitere 7 IMO-Teilnahmen, meist mit Preisen, zwischen 1973 und 1979, sowie das absolute Rekordergebnis in diesem Jahr waren die Sternstunden für die Mentoren und Schüler des Bezirksklubs. Viele weitere sehr schöne Ergebnisse könnte man nennen. Die gute Arbeit in den unteren Klassen zahlte sich durch viele erfolgreiche Frühstarter aus. Acht 2. Preise, drei 3. Preise und 14 Anerkennungsurkunden sind eine stolze Bilanz unserer Frühstarter.

Aber die Arbeit im Bezirksklub wäre unvollständig und falsch eingeschätzt, würde man sie nur an den Erfolgen bei DDR-Olympiaden messen.

Viel wichtiger ist noch, daß sich die dort geweckte Begeisterung für die Mathematik sehr positiv auf die weitere Entwicklung auswirkt. Die erfolgreichsten Bezirksklubmitglieder leisteten und leisten Überdurchschnittliches im Studium und im Beruf.

Aus Anlaß des 20jährigen Jubiläums des Klubs und des 65. Geburtstages von Herrn Kerber berichteten viele ehemalige Mitglieder über ihre weitere Entwicklung. Die meisten von ihnen haben nicht nur schöne Erinnerungen an die Zeit der Mitgliedschaft, sondern sie meinen, daß ihnen die Klubarbeit auch im Studium und im Beruf sehr genützt hat. Und das bezieht sich nicht nur auf konkretes mathematisches Wissen im Falle eines Mathematik-Studiums. In der Tat wird eine weite Palette von Berufen durch unsere ehemaligen Mitglieder überstrichen: vom Experten der EDV über Ärzte bis zum Offizier, vom Statiker über Mathematik-Dozenten bis zur Pianistin.

Unter den Schülern hat der Klub einen sehr guten Namen. So empfinden die meisten Schüler die Mitgliedschaft nicht als zusätzliche Belastung, sondern als Auszeichnung und Chance. Das Klima im Klub war stets ausgezeichnet. Auch daran hat H.-J. Kerber als ideenreicher Lehrgangsleiter immer großen Anteil gehabt. Für die Begeisterung der Schüler gibt es viele Beispiele.

So fuhr z. B. ein Schüler mehrere Kilome-

ter mit Skiern zum nächsten Bahnhof, um zum Klub kommen zu können; Busse verkehrten wegen Schneefalls an dem Tage nicht. Einen anderen Schüler konnten weder Kälte noch Nebel von einer 40-km-Mopedfahrt abhalten, um den persönlichen Mentor zu konsultieren. Die Arbeit im Bezirksklub wird natürlich nicht von H.-J. Kerber allein gemacht. Ein Kreis von etwa zwanzig erfahrenen Mathematiklehrern und engagierten ehemaligen Mitgliedern stehen ihm jetzt zur Seite. Auch wäre die gesamte Arbeit ohne die Unterstützung durch die Volksbildung, insbesondere den Bezirksschulrat, zweifelsohne nicht möglich gewesen. Doch entscheidend war das initiativreiche, beharrliche Wirken von H.-J. Kerber als Voraussetzung für die Einführung neuer Fördermethoden und deren effektiven Gestaltung.

Nicht alle Lehrer und Direktoren bewerteten die Arbeit der Mitglieder mit dem entsprechenden Stellenwert, so daß H.-J. Kerber auch hier Hemmnisse durch Überzeugungsarbeit ausräumen mußte. Insgesamt war die Arbeit von H.-J. Kerber in diesen zwanzig Jahren sicher nicht immer leicht und problemlos, doch letztlich haben sich alle Bemühungen sehr gelohnt, sowohl bzgl. der Erfolge bei DDR-Olympiaden als auch bzgl. der späteren Tätigkeit der Mitglieder. Und wir meinen, daß damit ein vorbildlicher Beitrag zum Problem der Talentsuche und -förderung geleistet wurde – ganz im Sinne des Berichtes von E. Hon-ecker auf dem X. Parteitag der SED (S. 98): „Die großen Aufgaben im Kampf um wissenschaftlich-technische Spitzenleistungen und auf allen anderen Gebieten machen es erforderlich, alle Möglichkeiten noch besser auszuschöpfen, um Begabungen und Talente rechtzeitig zu erkennen, zielstrebig zu entwickeln und systematisch zu fördern.“

Die große Schar von ehemaligen Mitgliedern des Bezirksklubs möchte den 65. Geburtstag zum Anlaß nehmen, um Herrn Kerber für alles ein herzliches Danke zu sagen.

*Im Namen
aller ehemaligen Klubmitglieder
Hans-Dietrich Gronau/Jürgen Prestin*

StR Kerber mit Dr. Gronau, seinem ehemaligen Schüler, im Gespräch (1976)





Unterhaltsame Aufgaben aus dem Mathematik- lehrbuch, Klasse 4

Aufgaben

▲ 1 ▲ a) Ute denkt sich eine dreistellige Zahl:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1 \quad (a, b, c < 10).$$

a ist doppelt so groß wie b , und b ist doppelt so groß wie c . Welche Zahl kann das sein?

b) Jens denkt sich auch eine dreistellige Zahl. Bei ihm ist b dreimal so groß wie a , und c ist dreimal so groß wie b .

▲ 2 ▲ 7 Studenten sind als Helfer im Ferienlager. Jeder betreut eine Gruppe von 9 Pionieren. Für einen Ausflug erhalten sie für jeden Pionier 2,80 M Fahrgeld und für jede Gruppe 48 M für Verpflegung. Für jeden Helfer werden 6,80 M zur Verfügung gestellt.

a) Wieviel Geld kann eine Gruppe mit dem Betreuer verbrauchen?

b) Wieviel Geld wurde für diesen Ausflug bereitgestellt?

▲ 3 ▲ Nach der Schulordnung müssen für 6 Unterrichtsstunden mindestens 70 min Pausenzeit vorgesehen werden, und keine Pause darf kürzer als 10 min sein.

a) An der Goethe-Oberschule beginnt die erste Unterrichtsstunde um 7.50 Uhr. Wann endet die sechste Stunde frühestens?

b) Die Thälmann-Oberschule beginnt schon um 7.45 Uhr mit dem Unterricht. Carsten hat einen Schulweg von 10 Minuten. Wann muß er spätestens das Haus verlassen, wenn sein Unterricht mit der zweiten Stunde beginnt?

▲ 4 ▲ Jens und Klaus fahren mit dem Fahrrad gleichzeitig von einem Ort ab. Jens legt je Stunde 24 km zurück. Klaus 20 km. Wieviel Kilometer muß Klaus nach 3 h noch fahren, um dorthin zu kommen, wo Jens zu diesem Zeitpunkt schon ist?

▲ 5 ▲ Löse die Gleichungen! Gleiche Buchstaben bedeuten in einer Aufgabe gleiche Zahlen. Erfüllen deine Lösungen auch die letzte Gleichung?

a) $3000 + a = 7000$

$$a - b = 2000$$

$$a + b = 6000$$

b) $50000 + a = 90000$

$$a + b = 100000$$

$$80000 - c = b$$

$$b - a = c$$

▲ 6 ▲ Klaus kauft Hefte für je 10 Pf und Bleistifte für je 15 Pf. Er bezahlt 1 M. Wieviel Hefte und wieviel Bleistifte kann er gekauft haben?

▲ 7 ▲ Gib an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

Begründe dein Urteil!

a) Es gibt eine natürliche Zahl a , für die gilt $30000 \cdot a < 90000$.

b) Es gibt eine natürliche Zahl b , für die gilt $50000 \cdot b < 100000$.

c) Für alle natürlichen Zahlen c gilt $350000 + c > 300000$.

d) Für alle natürlichen Zahlen d gilt $70000 + d > 70000$.

Lösungen

▲ 1 ▲ a) Wenn a doppelt so groß ist wie b und b doppelt so groß ist wie c , dann ist a viermal so groß wie c . Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

Für $c = 0$ gilt $b = 0$ und $a = 0$; wir erhalten keine dreistellige natürliche Zahl.

Für $c = 1$ gilt $b = 2$ und $a = 4$; wir erhalten die Zahl 421.

Für $c = 2$ gilt $b = 4$ und $a = 8$; wir erhalten die Zahl 842.

Für $c \geq 3$ gilt $b \geq 6$ und $a \geq 12$, was wegen $a < 10$ entfällt.

Es existieren genau zwei solche Zahlen; sie lauten 421 und 842.

b) Wenn b dreimal so groß wie a ist und c dreimal so groß wie b ist, dann ist c neunmal so groß wie a . Für $a = 1$ gilt $b = 3$ und $c = 9$; wir erhalten die Zahl 139. Für $a \geq 2$ gilt $b \geq 6$ und $c \geq 18$, was wegen $c < 10$ entfällt. (Lehrbuch Kl. 4, Aufg. 6, S. 7)

▲ 2 ▲ a) Auf den Helfer entfallen 6,80 M. Für die 9 Pioniere werden $9 \cdot 2,80 \text{ M} = 25,20 \text{ M}$ Fahrgeld bereitgestellt. Hinzu kommen 48 M für Verpflegung. Deshalb kann die Gruppe mit dem Betreuer insgesamt $6,80 \text{ M} + 25,00 \text{ M} + 48,00 \text{ M} = 80,00 \text{ M}$ verbrauchen.

b) Für diesen Ausflug wurden $7 \cdot 80,00 \text{ M} = 560,00 \text{ M}$ bereitgestellt. (Lehrbuch, Kl. 4, Aufg. 2, S. 115)

▲ 3 ▲ a) Eine Unterrichtsstunde dauert 45 min. Sechs Unterrichtsstunden dauern $6 \cdot 45 \text{ min} = 270 \text{ min}$. Hinzu kommen 70 min Pausenzeit. Das sind zusammen 340 min bzw. 5 h 40 min. 7 h 50 min + 5 h 40 min = 12 h 90 min = 13 h 30 min. Die sechste Stunde endet frühestens um 13.30 Uhr.

b) 7 h 45 min + 45 min = 7 h 90 min = 8 h 30 min. Die erste Stunde endet um 8.30 Uhr. Die zweite Stunde beginnt frühestens um 8.40 Uhr. Als vorbildlicher Schüler ist Carsten bereits um 8.30 Uhr in der Schule; er muß also um 8.20 Uhr (spätestens) das Haus verlassen. (LB Kl. 4, Aufg. 11, S. 49)

▲ 4 ▲ Jens legt in 3 Stunden $3 \cdot 24 \text{ km} = 72 \text{ km}$ zurück. Klaus legt in 3 Stunden $3 \cdot 20 \text{ km} = 60 \text{ km}$ zurück. $72 \text{ km} - 60 \text{ km} = 12 \text{ km}$.

Klaus muß noch 12 km fahren, um dorthin zu kommen, wo sich Jens nach 3 Stunden Fahrzeit befand. (LB Kl. 4, Aufg. 14, S. 49)

▲ 5 ▲ a) Aus der ersten Gleichung folgt $a = 4000$; denn $3000 + 4000 = 7000$. In der zweiten Gleichung ersetzen wir a durch 4000 und erhalten $b = 2000$; denn $4000 - 2000 = 2000$. In der dritten Gleichung ersetzen wir a durch 4000 und b durch 2000 und erhalten $4000 + 2000 = 6000$. Also erfüllen die Lösungen $a = 4000$ und $b = 2000$ auch die dritte (letzte) Gleichung.

b) Aus der ersten Gleichung folgt $a = 40000$; denn $50000 + 40000 = 90000$. In der zweiten Gleichung ersetzen wir a durch 40000 und erhalten $40000 + b = 100000$. Daraus folgt $b = 60000$; denn $40000 + 60000 = 100000$. In der dritten Gleichung ersetzen wir b durch 60000 und erhalten $80000 - c = 60000$. Daraus folgt $c = 20000$; denn $80000 - 20000 = 60000$. In der vierten Gleichung ersetzen wir b durch 60000, a durch 40000 und c durch 20000 und erhalten die wahre Aussage $60000 - 40000 = 20000$. Also erfüllen die Lösungen $a = 40000$, $b = 60000$ und $c = 20000$ auch die vierte (letzte) Gleichung. (LB Kl. 4, Aufg. 12, S. 12)

▲ 6 ▲ Klaus könnte 2, 4 oder 6 Bleistifte gekauft haben. Dafür hätte er 30 Pf, 60 Pf oder 90 Pf bezahlen müssen. Für den Kauf von Hefen würden 70 Pf, 40 Pf oder 10 Pf verbleiben. Dafür erhält Klaus 7, 4 oder 1 Hefte. (LB Kl. 4, Aufg. 7, S. 108)

▲ 7 ▲ a) Diese Aussage ist wahr; denn für $a = 0$ gilt $30000 \cdot 0 < 90000$, also $0 < 90000$. Für $a = 1$ gilt $30000 \cdot 1 < 90000$, also $30000 < 90000$. Für $a = 2$ gilt $30000 \cdot 2 < 90000$; denn $60000 < 90000$. Für $a \geq 3$ gilt nicht mehr $30000 \cdot 3 < 90000$, sondern $30000 \cdot 3 = 90000$. Wir können die Aussage wie folgt präzisieren:

Es gibt genau drei natürliche Zahlen a , für die gilt $30000 \cdot a < 90000$. Es sind dies die Zahlen $a = 0$, $a = 1$ und $a = 2$.

b) Diese Aussage ist wahr; denn für $b = 0$ gilt $50000 \cdot 0 < 100000$, also $0 < 100000$. Für $b \geq 1$ gilt bereits $50000 \cdot b > 100000$. Wir können die Aussage präzisieren: Es gibt genau eine natürliche Zahl b , für die gilt $50000 \cdot b < 100000$. Es ist dies die Zahl $b = 0$.

c) Diese Aussage ist wahr; denn bereits für $c = 0$ gilt $350000 + 0 > 300000$, also $350000 > 300000$. Für jede natürliche Zahl $c \geq 1$ gilt erst recht $350000 + c > 300000$.

d) Diese Aussage ist falsch; denn sie gilt nicht für alle natürlichen Zahlen d . Für $d = 0$ gilt $70000 + 0 = 70000$, also $70000 = 70000$. Bereits ein Gegenbeispiel reicht, um eine Allaussage zu widerlegen. (LB Kl. 4, Aufg. 4, S. 32)

Zusammenstellung:
J. Lehmann, Th. Scholl

Bekanntlich ist man auf nichts so stolz wie auf das, was man seit zwei Minuten weiß.
Kurt Tucholsky

Alles gelernt, nicht um es zu zeigen, sondern um es zu nutzen.

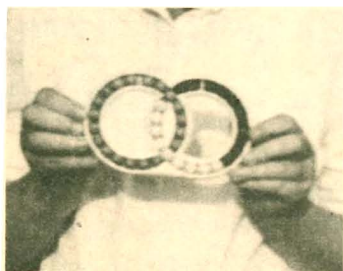
Georg Christoph Lichtenberg

Die magischen Ringe

Gewidmet Studienrat H.-J. Kerber
zum 65. Geburtstag

In diesem Beitrag wollen wir ein weiteres logisch-kombinatorisches Spiel aus Ungarn vorstellen, die *magischen Ringe*. Man kann sie sich als zwei sich schneidende Kugellager denken (siehe Bild 1). In jedem Ring befinden sich 20 Kugeln. Zusammen sind es also 38 Kugeln, und zwar 10 schwarze, 10 rote, 9 blaue und 9 gelbe. Jetzt werden die Kugeln jeweils in einem Ring wie in einem Kugellager beliebig gedreht. Durch Kombination von Drehungen in beiden Ringen kann man eine Kugel in jede beliebige Position bringen.

Bild 1



Stellen wir uns also zunächst einmal die Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten, die 38 Kugeln anzuordnen. Wären alle Kugeln verschieden, gäbe es insgesamt $38! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 37 \cdot 38$ Anordnungen (Permutationen ohne Wiederholung). Überraschend ist, daß bei nummerierten Kugeln tatsächlich jede der $38!$ Permutationen nur durch die beschriebenen möglichen Drehungen erzeugt werden kann. Nun brauchen wir aber die Vertauschungen von gleichfarbigen Kugeln nicht weiter zu unterscheiden. Davon existieren je $10!$, die nur die Schwarzen oder die Roten untereinander permutieren, und je $9!$ für blau und gelb. Dementsprechend existieren insgesamt

$$\frac{38!}{10! \cdot 10! \cdot 9! \cdot 9!} \approx 3,016 \cdot 10^{20}$$

Möglichkeiten (Permutationen mit Wiederholung). Die Anzahl ist etwas größer als beim Rubiks Cube ($\approx 4,3 \cdot 10^{19}$) und wesentlich kleiner als beim Turm von Babylon ($\approx 1,03 \cdot 10^{40}$) (vgl. auch *alpha* 6/83). Der Schwierigkeitsgrad aber entspricht ungefähr dem des Turmes von Babylon und ist nicht zu vergleichen mit der Komplexität des 3^3 -Würfels.

Zur Beschreibung des Spiels seien die Kugelplätze auf folgende Art und Weise durchnummeriert (Bild 2). Dabei sei der geschlossene Ring stets rechts.

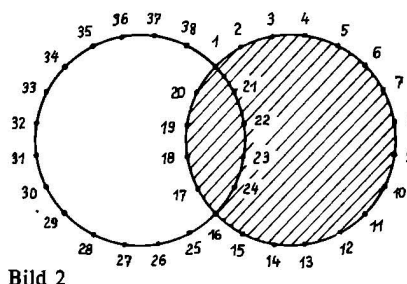


Bild 2

Ziel des Spiels ist es jetzt natürlich, alle Kugeln zu gewünschten Farbmustern zu ordnen, z.B. 2–11 rot; 12–20 blau; 25–34 schwarz und 1, 21–24, 35–38 gelb. Es erweist sich wieder als relativ einfach, gewisse Segmente der Ringe fertigzustellen, etwa die mit den roten und schwarzen Kugeln. Um aber z.B. die letzten 5 Kugeln an den gewünschten Platz zu setzen, braucht man einige Überlegungen. Und es gelingt bestimmt nicht auf Anhieb!

Weiterhin müssen wir die Drehungen bezeichnen können. Die Bewegung der Kugeln des rechten schraffierten Ringes R um i Plätze im Uhrzeigersinn sei definiert als R^i , entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn als R^{-i} . Entsprechende Bewegungen im linken Ring seien L^i und L^{-i} . Man erkennt sofort, daß für alle ganzzahligen i

$$R^i = R^{-(20-i)} \text{ und } L^i = L^{-(20-i)} \text{ gilt.}$$

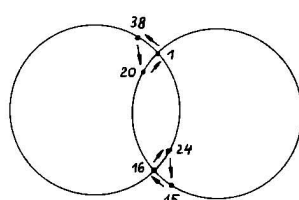
Auch hier geben wir kein Rezept für alle Ausgangsstellungen (s. *alpha* 6/83), sondern wollen wesentliche Operationsfolgen angeben, die es uns ermöglichen, das Ziel zu erreichen. Wiederum werden wir Operationsfolgen zusammenstellen, die möglichst viele Kugeln an ihren Plätzen belassen, also überschaubare Wirkungen haben. Optimal wäre es, wenn wir immer genau zwei Kugeln miteinander vertauschen könnten. Das ist zwar möglich, doch ist die dazu nötige Operationsfolge sehr lang und basiert letztlich auch nur auf folgenden Operationen. Wir drehen einen Ring um i Plätze, dann den anderen Ring um j Plätze und anschließend drehen wir den ersten Ring um i und den zweiten Ring um j Plätze zurück.

Als einfaches Beispiel probieren wir einmal folgendes aus:

$$R^1 L^1 R^{-1} L^{-1}.$$

Dabei vertauschen je drei Kugeln ihre Plätze (Bild 3):

Bild 3



Wir wollen dafür die kurze Zykelschreibweise verwenden

$$(1\ 38\ 20)\ (16\ 24\ 15).$$

Analog dazu kann man weitere Operationsfolgen aufstellen:

$R^1 L^{-1} R^{-1} L^1$ liefert $(1\ 21\ 20)\ (16\ 25\ 15)$,
 $L^{-2} R^3 L^2 R^{-3}$ liefert $(1\ 18\ 22)\ (16\ 13\ 26)$.

Falls immer i und j (die Länge der Drehungen) nicht durch 5 teilbar sind, erhalten wir zwei Dreierzyklen, in denen die Knoten 1 und 16 enthalten sind. Würde man sich eine Sammlung solcher Operationsfolgen übersichtlich aufschreiben, käme man auch sicher zum Ziel. Es erfordert aber sehr viel Überlegungen, sechs zu vertauschende Kugeln vorher in eine für unsere Operationsfolgen günstige Ausgangsposition zu bringen.

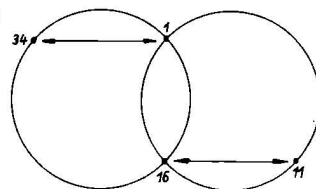
Wir suchen also weiter nach Operationen, die weniger als sechs Kugeln vertauschen. Dazu drehen wir einen Ring um fünf Plätze, z.B. $R^{-5} L^{-1} R^5 L^1$.

Dies liefert einen Zyklus der Länge 5 $(1\ 16\ 25\ 21\ 6)$. Eine sehr unübersichtliche Anordnung der vertauschten Kugeln ist dabei entstanden!

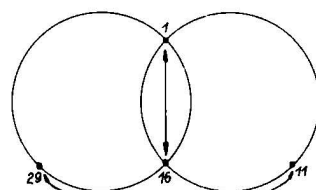
Als wesentlich günstiger erweisen sich Drehungen beider Ringe um je fünf Plätze. Wir erhalten die folgenden vier wichtigen Operationen:

I. $R^5 L^5 R^{-5} L^{-5} \ (1\ 34)\ (16\ 11)$

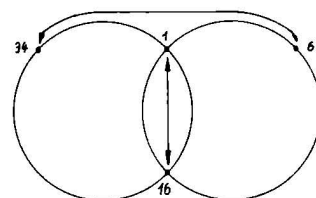
Bild 4



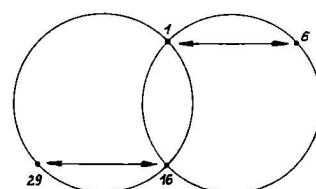
II. $R^5 L^{-5} R^{-5} L^5 \ (1\ 16)\ (11\ 29)$



III. $R^{-5} L^5 R^5 L^{-5} \ (1\ 16)\ (6\ 34)$



IV. $R^{-5} L^{-5} R^5 L^5 \ (16\ 29)\ (1\ 6)$



Mit diesen Operationen sind wir unserem Ziel, immer genau zwei Kugeln miteinander zu vertauschen, sehr nahe. Wir brauchen nur folgende Ausgangsposition zu erzeugen (die zum Schluß natürlich wieder rückgängig gemacht werden muß): Die zu vertauschenden Kugeln stehen an den Plätzen 1 und 34; 11, 16; 1, 16; 11, 29; 6, 34;

16, 29 oder 1, 6 und die sich jeweils bei den Operationen I bis IV außerdem vertauschenden Kugeln sind von gleicher Farbe. Schreiben wir das etwas ausführlicher auf. Zuerst bringen wir die zu vertauschenden Kugeln o. B. d. A. in die Positionen 2 und 17, was man sofort ohne Angabe eines gesonderten Algorithmus ausführen kann. Wir betrachten jetzt die Farben der Kugeln 7 und 12. Existiert im linken Ring noch eine Kugel mit dieser Farbe? Wenn ja, dreht man sie auf Platz 29 oder 34, wendet R^1 und Operation II oder III an. Wenn nicht, bringt man so eine Kugel (außer 2, 7, 12, 17) in den linken Ring auf Position 29 oder 34 und verfährt dann genauso mit R^1 und Operation II oder III.

Zum Schluß muß man die Hilfsoperationen wieder rückgängig machen. Hierzu braucht man etwas Gedächtnis oder man notiert sich die vorher ausgeführten Drehungen.

Das Ganze sei an einem Beispiel illustriert. Wir wollen die Kugeln 4 und 12 miteinander vertauschen. Mit

$$R^4 L^1 R^3 L^{-1} R^6$$

stehen die Kugeln auf den Plätzen 2 und 17. Die Farben der jetzigen Kugeln 7 und 12 mögen im linken Ring nicht mehr existieren. Kugel 7 habe aber jetzt z. B. die gleiche Farbe wie Kugel 4. Wir drehen also

$$R^{-3} L^{-5} R^2.$$

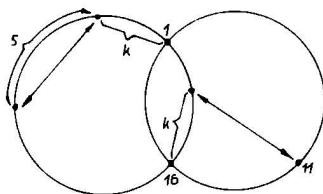
Dann stehen die zu vertauschenden Kugeln in Position 1 und 16, und die Kugeln 6 und 34 haben gleiche Farbe. Durch Anwendung der Operation III wechseln also genau die Farbe der Kugeln von 1 und 16. Zum Schluß werden die Hilfsoperationen in umgekehrter Reihenfolge wieder rückgängig gemacht, d. h. man dreht

$$R^{-2} L^5 R^{-3} L^1 R^{-3} L^{-1} R^{-4}.$$

Dies war die Beschreibung eines möglichen Weges. Eine weitere oftmals nützliche Operation ist folgende:

$$L^{k+5} R^5 L^{-5} R^{-5} L^{-k}.$$

Bild 5

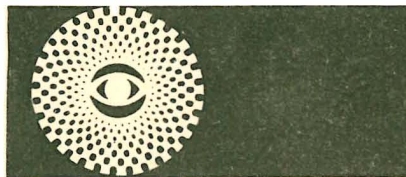


Hat man z. B. schon die schwarzen Kugeln im linken Ring geordnet, so gehen (bei geeignetem k) die schwarzen Kugeln in sich über und durch Benutzung von R^1 läßt sich jede Kugel des rechten Ringes zum Punkt A bringen und von A auch wieder im rechten Ring plazieren.

Legt man sich aber eine kleine Sammlung von Operationsfolgen an, wie in den Bildern 3, 4 und 5 angedeutet, kommt man sicherlich oft wesentlich schneller ans Ziel.

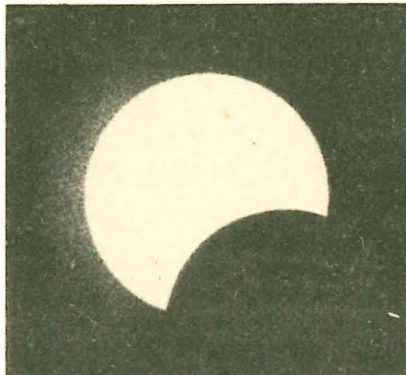
Wir haben nur ein Farbmuster zu Beginn angegeben. Ihr findet bestimmt noch andere hübsche Möglichkeiten. Vielleicht baut ihr euch aus Murmeln selbst so ein Spiel?

H.-D. Gronau/J. Prestin



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Sonnenfinsternis 1984



Wie groß war in Jena der maximale Bedeckungsgrad während der Sonnenfinsternis vom 30. 5. 1984?

Schüler der EOS Spezialschule physikalisch-technischer Richtung Carl Zeiss beobachteten am 30. 5. 1984 (19.20 Uhr bis 20.53 Uhr Sommerzeit) die ringförmige Sonnenfinsternis mit dem Schulfernrohr durch Projektion des Bildes auf einen Schirm als partielle Finsternis. Wegen der späten Ereigniszeit und der damit geringen Sonnenhöhe wurde ein gegenüber dem Westhorizont relativ hoher Standort gewählt. Während des gesamten Finsternisverlaufs wurden zu diesem Projektionsbild Messungen zur Berechnung des prozentualen Bedeckungsgrades ausgeführt.

Für den Höhepunkt der Bedeckung der Sonne durch den Mond möchten wir die Meßergebnisse angeben und die α -Leser auffordern, das mathematische Problem der Berechnung der prozentualen Bedeckung zu lösen. Auf dem Schirm wurden mit Lineal und Zeichendreieck 3 Meßwerte ermittelt:

1. Durchmesser des Sonnenbildes: $d_s = 200$ mm
2. Abstand der Schnittpunkte der Kreisländer von Sonne und Mond: $a = 162$ mm
3. Bogenhöhe über der Sehne a : $h = 43$ mm

Während der gesamten Finsternis registrierten die Schüler die Veränderung von a und h . Der Wert für d_s wurde durch den Abstand Okular-Schirm konstant gehalten. Aus den drei Meßwerten wurde jeweils der prozentuale Bedeckungsgrad zu den verschiedenen Zeitpunkten ermittelt. Natürlich sind diese Ergebnisse mit Fehlern

behaftet, die sich aus der Messung mit Lineal am „wandernden“ Bild auf dem Projektionsschirm durch die Relativbewegungen von Erde, Sonne und Mond ergeben. Wir möchten noch ergänzen, daß eine eindrucksvolle Sonnenfleckengruppe mitbeobachtet werden konnte.

Bild 1

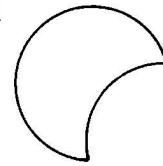
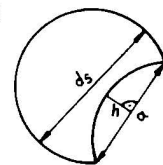


Bild 2



Welcher Lösungsweg führt zum Ziel, die prozentuale Bedeckung zu berechnen?

Hinweis: Für Schüler bis Kl. 9 ist die Lösung nur möglich, wenn benötigte Winkelgrößen einer Zeichnung entnommen werden.

A. Dietzel



Zwei Aufgaben für Freunde der Astronomie

▲ 1 ▲ Welchen Durchmesser hat das etwa in der Mondmitte gelegene Ringgebirge Albategnius? Mit einem Fernrohr (mit Fadenkreuz) wurde die Durchgangszeit von Ost- und Westwall durch die Relativbewegung von Erde-Mond zu $t = 4,9$ s gemessen.

▲ 2 ▲ Vergleiche den Durchmesser eines Sonnenflecks (beobachtet am 30. 5. 84) mit dem Erddurchmesser! Ein mit dem Fernrohr projiziertes Sonnenbild hatte den Durchmesser von 20 cm, und der Sonnenfleck (in der Nähe der Sonnenmitte gelegen) hatte 4 mm Durchmesser.

Antwort auf eine Leserzuschrift

Im α -Wettbewerbsjahr 1983/84 gingen insgesamt 93 500 Lösungen ein (siehe Heft 4/84, III. U.-Seite).

a) A-4-Papierformat

$$0,210 \text{ m} \cdot 0,297 \text{ m} \cdot 93\,500 \approx 5832 \text{ m}^2$$

A-6-Papierformat

$$0,105 \text{ m} \cdot 0,148 \text{ m} \cdot 93\,500 \approx 1453 \text{ m}^2$$

Für das Format A4 werden rd. 5832 m² und für A6 werden rd. 1453 m² gebraucht.

$$\text{b) A4 } 93\,500 \cdot 4,1 \text{ g} \approx 383\,000 \text{ g} = 383 \text{ kg}$$

$$\text{A6 } 93\,500 \cdot 2,6 \text{ g} \approx 243\,000 \text{ g} = 243 \text{ kg}$$

$$383 \text{ kg} + 243 \text{ kg} = 626 \text{ kg}.$$

Insgesamt werden 626 kg Papier verwendet.

Schriftliche Abschlußprüfung

Mathematik,
Schuljahr 1983/84
Oberschule, Klasse 10

Pflichtaufgaben

1. In einem Maschinenbaubetrieb wird ein Schweißbrotter eingesetzt.

a) Die bisherige Tagesproduktion von 425 Teilen konnte dadurch um 84,0% gesteigert werden.

Wieviele Teile werden nun täglich gefertigt?

b) Die Herstellungskosten je Stück sanken dadurch von ursprünglich 8,60 M auf 6,90 M.

Auf wieviel Prozent wurden die Herstellungskosten gesenkt?

2. Lösen Sie folgende Gleichung!

$$3(5x + 3) = 3x - (6x - 18) \quad (x \in P) \text{ (Probe!)}$$

3. a) Durch die Gleichung $y = x^3$ ($x \in P$) ist eine Funktion gegeben.

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

b) Durch die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ ($x \in P; x \neq 0$) ist eine weitere Funktion gegeben.

– Übertragen Sie die zu dieser Funktion gehörende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt, und vervollständigen Sie die Tabelle!

| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----------------|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2 | $-\frac{1}{2}$ | | | | 4 |
| y | | | | -2 | 4 | 2 | 1 | |

– Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem!

c) Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2 .

Geben Sie von jedem der beiden Punkte die Koordinaten an!

4. Ein Schwimmkran hat die Auflagebreite $\overline{AB} = 31$ m. Sein schwenkbarer Ausleger hat die Länge $\overline{BC} = 24$ m (siehe nachfolgende stark vereinfachte Darstellung!).

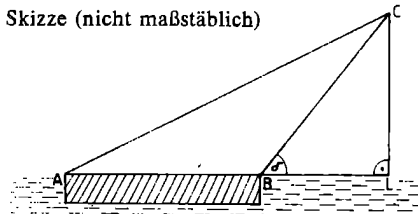
Skizze (nicht maßstäblich)

Berechnen Sie für den Neigungswinkel $\angle LBC = \delta = 60^\circ$

a) die Arbeitsweite $\overline{BL}$,

b) die Länge $\overline{AC}$ des Spannseiles!

Skizze (nicht maßstäblich)



5. Gegeben sei ein Kreis mit einer Sehne $\overline{AB}$, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Ferner seien $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ Durchmesser des Kreises.

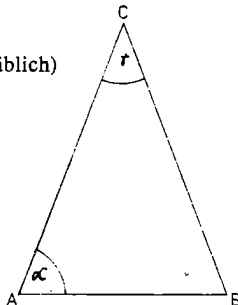
a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur, und tragen Sie die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ ein!

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\angle BAD$ und die des Winkels $\angle CBA$ unter Verwendung eines geeigneten Satzes! Welchen Satz haben Sie benutzt?

c) Beweisen Sie, daß die Dreiecke ABC und ABD zueinander kongruent sind!

6. a) Für ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ (siehe Skizze!) sei $\alpha = 50^\circ$. Geben Sie die Größe von γ an!

Skizze
(nicht
maßstäblich)



b) Ermitteln Sie das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 3,35$ m!

c) Berechnen Sie $(3x + 5y)^2$!

d) Durch die Gleichung $y = 2x - 4$ ($x \in P$) ist eine Funktion gegeben.

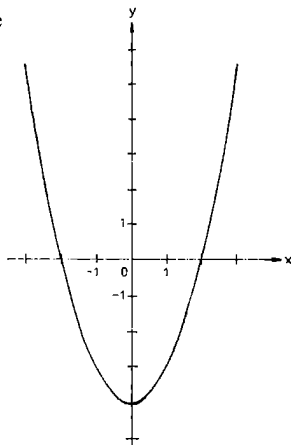
– Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!

– Berechnen Sie deren Nullstelle!

e) Nebenstehende Skizze zeigt den Graph einer quadratischen Funktion.

Geben Sie deren Gleichung an!

Skizze



Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. a) Durch die Gleichung $y = 3 \cdot \sin 2x$ ist eine Winkelfunktion gegeben.

Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!

b) Von einer Funktion $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b > 0; x \in P$) sind bekannt: Wertebereich: $-1,5 \leq y \leq 1,5$;

kleinste Periode: 4π !

– Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

– Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ an!

c) Zur Beschreibung harmonischer Schwingungsvorgänge wird die Gleichung

$$y = f(t) = y_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

verwendet.

Skizzieren Sie in einem geeigneten Koordinatensystem den zeitlichen Verlauf einer vollen Schwingung für den Fall $y_{\max} = 6$ cm und $T = 2$ s!

7.2. Das Dach eines Turmes hat die Form einer geraden Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 4,4$ m.

Die Höhe h der Pyramide beträgt 6,1 m.

a) Stellen Sie diese Pyramide im Maßstab 1:100 in Kavalierperspektive dar!

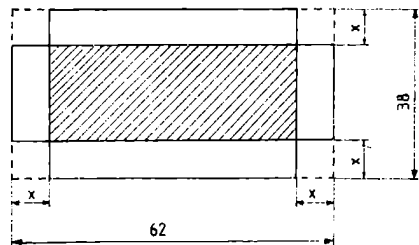
Zeichnen Sie die Höhe h der Pyramide und die Höhe h_s einer Seitenfläche ein!

b) Das Dach dieses Turmes soll neu gedeckt werden. Für 1 m² Dachfläche sind 54 Ziegel zu planen.

Berechnen Sie, wieviel Dachziegel insgesamt bereitgestellt werden müssen!

7.3. Zur Herstellung oben offener quaderförmiger Kästen stehen gleich große rechteckige Blechplatten mit 62 cm Länge und 38 cm Breite zur Verfügung.

Von ihnen werden an den Ecken quadratische Flächen mit der Seitenlänge x cm herausgeschnitten. Der schraffierte rechteckige Teil wird zur Grundfläche des Kastens (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)
(Maßangaben in Zentimeter)

a) Es sei $x = 2,5$.

Berechnen Sie für diesen Fall das Volumen des Kastens!

b) Der Inhalt der Grundfläche des Kastens betrage 1300 cm².

Berechnen Sie für diesen Fall den Wert von x ! Berechnen Sie das Volumen dieses Kastens!

Für Könner

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem!

$$(1) \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = x + \sqrt{xy}$$

$$(2) \quad (x + y)^2 = 2(x - y)^2$$

Bestimmen Sie den reellen Wert von x !

$$x = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{21 + \sqrt{80}}}}{1 + \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$$

In freien Stunden · alpha-heiter



Wolfgang Teiler

Zum Jahreswechsel

$$1 + 9 = 8 + \sqrt{4} \quad \sqrt{198 - \sqrt{4}} = 1 + 9 + 8 - 4$$

$$1 - \sqrt{9} = \sqrt[3]{8} - 4 \quad 1^2 + 9^2 - 8^2 - 4^2 = -1 - \sqrt{9} + 8 - \sqrt{4}$$

$$19 \cdot (8 - 4) = 9 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 84 + 1 - 9$$

$$= -4 + (1 + 9) \cdot 8$$

$$12 = \lg(1 + 9)^{8+4} \quad 35 = 19 - 8 + 4!$$

$$50 = (-1 + \sqrt{9}!) \cdot (8 + \sqrt{4}) \quad 100 = 1 \cdot 98 + \sqrt{4}$$

Betrachte die Summen!

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 529 | 991 | 199 | 265 |
| 397 | 67 | 859 | 661 |
| 331 | 133 | 925 | 595 |
| 727 | 793 | 1 | 463 |

$$1 = 1 - \sqrt{9} + 8 - 5$$

$$2 = [(-1 + \sqrt{9}) + 8] : 5$$

$$3 = -1 - 9 + 8 + 5$$

$$4 = 1^9 + 8 - 5$$

$$5 = (1 \cdot 9 - 8) \cdot 5$$

$$6 = 19 - 8 - 5$$

$$7 = 1 + 9 - 8 + 5$$

$$8 = -1 + \sqrt{9}! + 8 - 5$$

$$9 = (1 \cdot \sqrt{9})! + 8 - 5$$

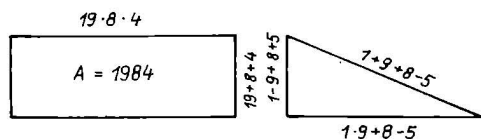
$$10 = (1 + 9 - 8) \cdot 5$$

$$20 = 1 + \sqrt{9} \cdot 8 - 5$$

$$30 = -1 - 9 + 8 \cdot 5$$

Betrachte die Produkte!

| | | |
|------|------|------|
| 62 | 1984 | 32 |
| 7936 | 16 | 31 |
| 8 | 124 | 3968 |



$$A = 1 + 9 + 8 + 5 + 1 + 9 - 8 + 5 \quad FE$$

$$U = 1 + 9 + 8 + 5 + 1 + 9 - 8 + 5 \quad LE$$

a) Stefan sagt zu seinem Freund: „Wenn ich das Alter (in Jahren) meiner beiden Eltern und meines kleinen Bruders miteinander multipliziere, erhalte ich 1984. Außerdem gibt die Summe der Grundziffern in den drei Altersangaben mein Alter an.“ Wie alt ist Stefan, wenn bekannt ist, daß die Eltern beide jünger als 60 Jahre sind?

b) Ermittle alle 6stelligen und durch 12 teilbaren natürlichen Zahlen, die dadurch entstehen, daß

man an die Zahl 1985 auf der linken als auch auf der rechten Seite jeweils genau eine Ziffer anfügt! *Hinweis:* Sicher werden euch bestimmte Teilbarkeitsregeln, die ihr im Mathematikunterricht kennengelernt habt, bei der Lösung der Aufgabe sehr von Nutzen sein.

c) Frau Schulze erklärt, daß das Produkt aus der Zahl, die ihr Alter (in ganzen Jahren) angibt, und den Zahlen, die jeweils das Alter ihrer drei verschiedenen alten Töchter angeben (ebenfalls in ganzen Zahlen), genau 1984 ergibt. Frau Meier stellt fest, daß dies auch für sie und ihre vier Kinder gelte. Wie alt sind die beiden Frauen und ihre Kinder?

d) Setzt in die Kästchen je ein mathematisches Operationszeichen (+, -, ·, :) derart ein, daß sich Gleichungen ergeben!

Beachte dabei: Punktrechnung geht vor Strichrechnung!

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 22 \quad 1 \square 9 \square 8 \square 5 = 5$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 13 \quad 1 \square 9 \square 8 \square 5 = 6$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 12 \quad 1 \square 9 \square 8 \square 5 = 7$$

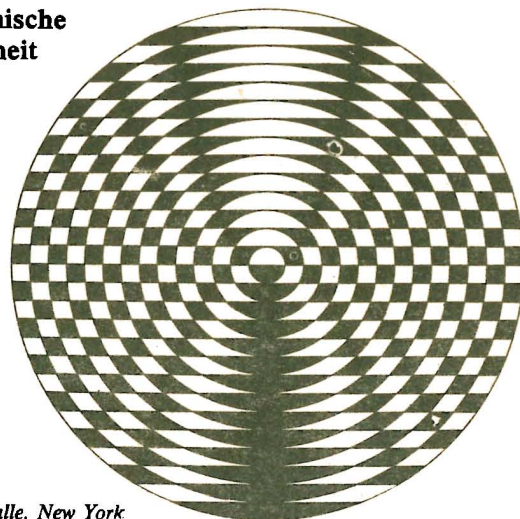
$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 7 \quad 1 \square 9 \square 8 \square 5 = 12$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 6 \quad 1 \square 9 \square 8 \square 5 = 13$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 5 \quad 1 \square 9 \square 8 \square 5 = 22$$

Autoren: AG Mathe, Pionierhaus Gotha; AG Mathe, St. Jg. Techniker, Lütz; Dipl.-Math. A. Fittke, Berlin; Dir. H. Förg (Schwaz, Österr.); Schüler R. Jonack, Tambach-Dietharz; Jiří Mann, Prag; Dr. R. Mildner, Leipzig; Dejan Predić, Sremske Mitrovica (Jug.); Dr. J. Riehl, Egeln; Sab. u. S. Arnold, Drebkau; Schülerin K. Krasemann, Friedland; Diesterweg-OS K.-M.-Stadt

Dynamische Schönheit



H. Baravalle, New York

Wintersport

25 Unterschiede werden gesucht!

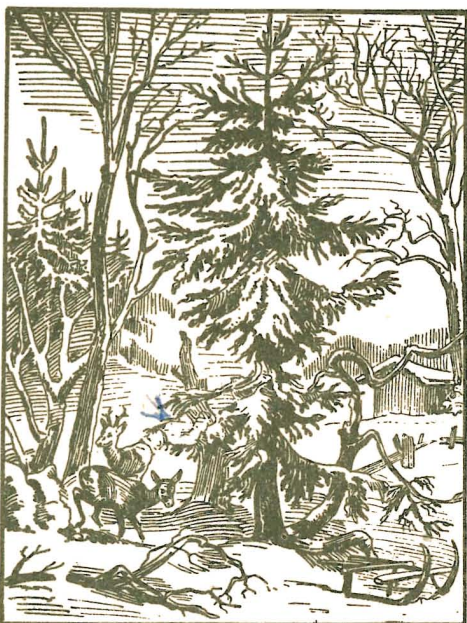


Aus: Füles, Budapest

Gut versteckt

Wer hat sich in der Winterlandschaft versteckt, etwa ein Mensch – so dicht beim Wild?

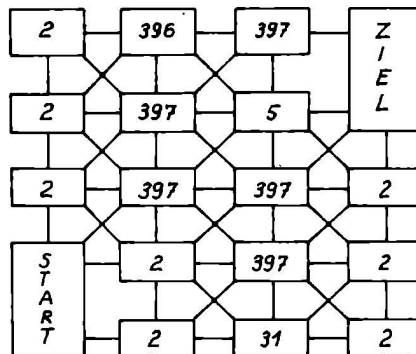
Aus: Troll, Berlin



Silvesterlauf

Der Langläufer gelangt auf 4 bestimmten Wegen ins Ziel: Bei Weg 1 bzw. Weg 2 soll die Summe der überquerten Zahlen 1984 bzw. 1985 und bei Weg 3 bzw. Weg 4 das Produkt der überquerten Zahlen 1984 bzw. 1985 betragen. Findet diese vier Wege! Welcher Weg ist der kürzeste?

Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig



Nun schlägt's 13!

Stellt eine jede der natürlichen Zahlen von 1 bis 13 durch 5 Dreien dar, indem ihr zwischen diese jeweils vier der mathematischen Operationszeichen +, -, ·, : setzt! Sicher werdet ihr in manchen Fällen mehrere Betrachtungsmöglichkeiten für dieselbe Zahl finden. Beachtet dabei: Da keine Klammern stehen, so geht Punkt- vor Strichrechnung!

Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

$$\begin{array}{ll}
 1 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 & 8 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \\
 2 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 & 9 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \\
 3 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 & 10 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \\
 4 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 & 11 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \\
 5 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 & 12 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \\
 6 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 & 13 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \\
 7 = 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 &
 \end{array}$$

Zum Jahresausklang

Varnei, Budapest



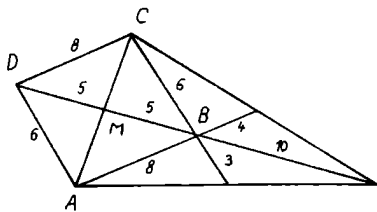
Lösungen



Lösungen zur: Sprachecke

▲ 1 ▲ In einem Dreieck sind die Längen der drei Seitenhalbierenden 9, 12 und 15. Berechne die Länge der Seite, zu der die längste Seitenhalbierende gezogen ist!

Lösung: B teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Betrachte das Parallelogramm $ABCD$, das durch eine Drehung des $\triangle ABC$ um M entstanden ist! Da sich die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren, ist $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BM} = 2 \cdot 5 = 10$. Außerdem ist $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = \overline{BD}^2$. $\triangle BCD$ ist also 90° , und das Parallelogramm muß ein Rechteck sein. Da die Diagonalen in einem Rechteck die gleiche Länge haben, ist $\overline{BD} = \overline{AC} = 10$.



▲ 2 ▲ Der Bäcker weiß, daß die Masse des Brotes, das er herstellt, $\frac{10}{9}$ der Masse des verwendeten Mehls ausmacht.

- Welche Menge Brot erhält er aus 72 kg, aus 117 kg und aus 108 kg Mehl?
- Welche Masse Mehl braucht er, um 100 kg, 150 kg und 190 kg Brot herzustellen?

Lösung: a) $72 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 80 \text{ kg}$;

$117 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 130 \text{ kg}$; $108 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 120 \text{ kg}$

b) $100 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 90 \text{ kg}$;

$150 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 135 \text{ kg}$; $190 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 171 \text{ kg}$

▲ 3 ▲ Mein Freund Sascha sagte eines Tages zu mir: „Vorgestern war ich 10 Jahre alt, aber im nächsten Jahr werde ich 13.“ Kann das sein?

Lösung: Ja. Am 31. Dezember wurde Sascha 11 Jahre alt, und das Gespräch fand am nächsten Tag, dem 1. Januar, statt.

▲ 4 ▲ In einem Dreieck sind zwei der Höhen nicht kürzer als die Seiten, auf denen sie stehen. Bestimme die Innenwinkel des Dreiecks!

Lösung: Ein Winkel ist ein rechter, die beiden anderen betragen je 45° . Seien h_a und h_b die betrachteten Höhen, und es sei $h_a \leq h_b$. Laut Aufgabe ist $a \leq h_a$. Es ist aber $h_b \leq a$, da das Lot die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu einer Geraden ist. Daraus folgt $a \leq h_a \leq h_b \leq a$, also $a = h_a = h_b = b$, und das Dreieck ABC ist gleichschenkelig und rechtwinklig.

Lösung zu: Sonnenfinsternis 1984

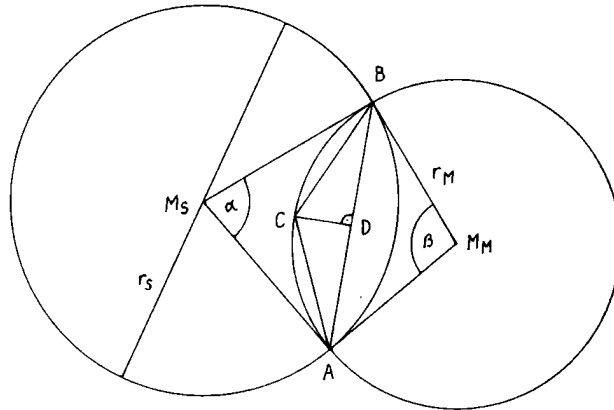


Bild der Sonne

Bild des Mondes

$$d_s = 2r_s = 200 \text{ mm}$$

$$\overline{AB} = a = 162 \text{ mm}$$

$$\overline{CD} = h = 43 \text{ mm}$$

M_s : Mittelpunkt des Bildes der Sonne

M_M : Mittelpunkt des Bildes des Mondes

$r_M = \overline{M_M A} = \overline{M_M B} = \overline{M_M C}$: Radius des Bildes des Mondes

Für das rechtwinklige Dreieck (ADM_M) gilt:

$$\overline{AD} = \frac{a}{2}, \quad \overline{CD} = h$$

$$r_M^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r_M - h)^2 \rightarrow r_M = \frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2} \rightarrow r_M = 9,8 \text{ cm}$$

Damit lassen sich die Winkel α und β bestimmen:

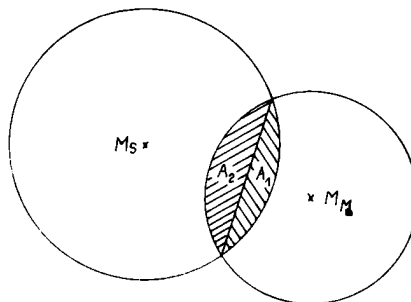
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2 \cdot r_s} = 0,810 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 54^\circ \rightarrow \alpha = 108^\circ$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2 \cdot r_M} = 0,828 \rightarrow \frac{\beta}{2} = 56^\circ \rightarrow \beta = 112^\circ$$

Damit lassen sich die Flächen A_1 und A_2 berechnen:

$$A_1 = \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha\right) \cdot \frac{r_s^2}{2}$$

$$A_2 = \left(\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - \sin \beta\right) \cdot \frac{r_M^2}{2}$$



$$A_1 = 4669 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 4934 \text{ mm}^2$$

Es ergibt sich eine „abgedunkelte“ Fläche $A' = A_1 + A_2 = 9603 \text{ mm}^2$.

Die Fläche der vollen Bildscheibe der Sonne beträgt

$$A = \pi \cdot r_s^2 = 31415 \text{ mm}^2.$$

Damit erhält man $\frac{A'}{A} \cdot 100\% = 30,5\%$.

Aus dieser Berechnung ergibt sich, daß in Jena eine 30,5%ige Sonnenfinsternis beobachtet wurde.

Lösungen zu: Zwei Aufgaben für Freunde der Astronomie

▲ 1 ▲ Die angegebene Lösung kann nur eine Näherung sein. Unter Vernachlässigung der Bewegung des Mondes um die Erde ($360^\circ \triangleq \approx 29 d$) erhält man für die Rotation der Erde $24^h \triangleq 360^\circ$. Damit ergibt sich für $t = 4,9 \text{ s}$ der Winkel $\alpha = 0,0204^\circ$. Bei einer mittleren Mondentfernung von $3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$ und bei Vernachlässigung der Mond- und Erdradien (Bezugspunkte befinden sich ja an der Oberfläche der Himmelskörper) kann man ansetzen

$d = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \sin \alpha$
 $d = 136 \text{ km}$ beträgt der Durchmesser des Ringgebirges. (In der Literatur sind etwa 130 km angegeben.)

▲ 2 ▲ Hier führt eine Verhältnisgleichung zum Ziel. Der wahre Durchmesser des Sonnenflecks beträgt $d = \frac{4 \text{ mm}}{200 \text{ mm}}$.

Sonnendurchmesser

$$d = 0,02 \cdot 1,39 \cdot 10^6 \text{ km} = 2,78 \cdot 10^4 \text{ km}.$$

Bei einem Erddurchmesser von

$1,27 \cdot 10^4 \text{ km} = r_E$ erhält man $d = 2,2 r_E$. Der angegebene Sonnenfleck hat einen mehr als doppelt so großen Durchmesser wie unsere Erde.

Lösungen zu:

In freien Stunden - alpha-heiter

a) Aus der Zerlegung von 1984 in Primfaktoren $1984 = 2^6 \cdot 31$ folgt, daß ein Elternteil 31 Jahre alt sein muß (da es ja jünger als 60 Jahre ist). Somit ist das Produkt der Altersangaben in Jahren des anderen Elternteils und des kleinen Bruders $2^6 = 64$. Unter den Bedingungen der Aufgabe ist das nur zu erfüllen mit $64 = 32 \cdot 2$.

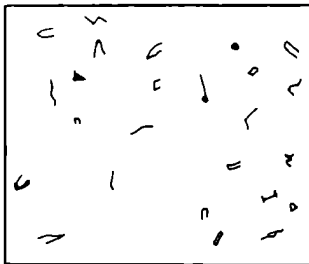
Also sind die Eltern 31 bzw. 32 und der Bruder 2 Jahre alt. Stefan ist damit $3 + 1 + 3 + 2 + 2 = 11$ Jahre alt.

b) Wegen $12 = 3 \cdot 4$ muß jede der gesuchten Zahlen sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar sein. Die Teilbarkeit durch 4 verlangt, daß die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Also können rechts an 1985 nur die Ziffern 2 oder 6 angefügt werden. Die Teilbarkeit durch 3 verlangt, daß die Quersumme durch 3 teilbar ist. Somit können links an 19852 (Quersumme: 25) nur die Ziffern 2, 5 oder 8 und bei 19856 (Quersumme: 29) nur die Ziffern 1, 4 oder 7 angefügt werden. Man erhält also die folgenden sechs Zahlen mit den geforderten Eigenschaften: 219852, 519852, 819852, 119856, 419856 und 719856.

c) $1984 = (1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 31$
Daraus ergibt sich für die beiden Frauen ein Alter von 31 Jahren. Frau Schulzes Töchter zählen 2, 4 und 8 Jahre. Die Kinder von Frau Meier sind 1, 2, 4 und 8 Jahre alt.

d) $1 + 9 + 8 + 4 = 22$ $1 - 9 + 8 + 5 = 5$
 $1 \cdot 9 + 8 - 4 = 13$ $1 \cdot 9 - 8 + 5 = 6$
 $1 + 9 + 8 : 4 = 12$ $1 + 9 - 8 + 5 = 7$
 $1 \cdot 9 - 8 : 4 = 7$ $1 \cdot 9 + 8 - 5 = 12$
 $1 + 9 - 8 + 4 = 6$ $1 + 9 + 8 - 5 = 13$
 $1 \cdot 9 - 8 + 4 = 5$ $1 \cdot 9 + 8 + 5 = 22$

Wintersport



Silvesterlauf

Weg 1:
 $1984 = 397 + 397 + 397 + 396 + 397$
Weg 2:
 $1985 = 397 + 397 + 397 + 397 + 397$
Weg 3: $1984 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Weg 4: $1985 = 397 \cdot 5$ 2 396 397
Weg 4 ist der kürzeste. Z

| | | |
|---|-----|-----|
| 2 | 397 | 5 |
| 2 | 397 | 397 |
| 2 | 397 | 2 |
| S | 2 | 397 |
| | 2 | 31 |
| | 2 | 2 |

Nun schlägt's 13

$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3$
 $2 = 3 : 3 : 3 - 3 : 3$
 $3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3$
 $4 = 3 : 3 : 3 + 3 : 3$
 $5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3$
 $6 = 3 : 3 : 3 : 3 - 3$
 $7 = 3 : 3 - 3 + 3 : 3$
 $8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3$
 $9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3$
 $10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3$
 $11 = 3 : 3 + 3 - 3 : 3$
 $12 = 3 + 3 : 3 + 3 - 3$
 $13 = 3 : 3 + 3 + 3 : 3$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. S. Solodownikow, Heft 6/84

Löst man die Teilsysteme

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 & 2x - y - 4 &= 0, \\ x - 2y - 2 &= 0, & x - 2y - 2 &= 0, \\ x + y + 1 &= 0, & 2x - y - 4 &= 0, \end{aligned}$$

so findet man die drei Punkte

$$(0, -1), (1, -2), (2, 0),$$

von denen nur der zweite und der dritte alle gegebenen Ungleichungen erfüllen. Das bedeutet: Ecken des Bereiches K sind die Punkte $A_1(1, -2)$ und $A_2(2, 0)$.

Lösung zu: Wo steckt der Fehler? (Heft 6/84)

Die Lösung ist deswegen falsch, weil die gegebene Gleichung nicht nach x aufgelöst wurde!

Nach dem Ausmultiplizieren ist weiter zu rechnen:

$$\begin{aligned} abx^2 - x^2 &= ab - 1 \\ x^2(ab - 1) &= ab - 1 \\ x^2 &= 1 \text{ und: } x = \pm 1 \end{aligned}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 2/1984

Ma 5 ■ 2435 Es sei $\overline{xy}$ die einzufügende zweistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise; dann gilt

$$\begin{array}{r} 198xy3 \\ - 19xy83 \\ \hline 360 \end{array}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 0 + 3 &= 3, \\ 6 + 8 &= 14, \text{ also } y = 4, \\ 3 + 4 + 1 &= x, \text{ also } x = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{Probe: } 198843 \\ - 198483 \\ \hline 360 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2436

$$\begin{aligned} 18 \text{ dm} &= 3 \cdot 5 \text{ dm} + 1 \cdot 3 \text{ dm}, \\ 19 \text{ dm} &= 5 \cdot 5 \text{ dm} - 2 \cdot 3 \text{ dm}, \\ 20 \text{ dm} &= 4 \cdot 5 \text{ dm}, \\ 21 \text{ dm} &= 3 \cdot 5 \text{ dm} + 2 \cdot 3 \text{ dm}, \\ 22 \text{ dm} &= 5 \cdot 5 \text{ dm} - 1 \cdot 3 \text{ dm}. \end{aligned}$$

Ma 5 ■ 2437 Angenommen, die zweite Aussage von Klaus ist wahr; dann heißt die gesuchte Zahl 8. Somit ist die erste Aussage von Regina wahr, die zweite falsch.

Angenommen, die erste Aussage von Klaus ist wahr. Dann könnte nur 9 die gesuchte Zahl sein. In diesem Fall wären beide Aussagen von Regina wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Somit gibt es genau eine Lösung. Die zu erratende Zahl heißt 8.

Ma 5 ■ 2438 Da die Zahlen durch 2 teilbar sein sollen, muß die letzte Grundziffer 2, 6 oder 8 lauten, da die Grundziffer 4 nicht vorkommen soll. Auch die Grundziffer 0 entfällt, da eine solche Zahl rückwärts gelesen nicht dreistellig wäre. Es sind folgende Zahlen näher zu untersuchen: 202, 212, 232, 252, 262, 272, 282, 292, 606, 616, 626, 636, 656, 676, 686, 696, 808, 818, 828, 838, 858, 868, 878, 898. Für diese Zahlen treffen die geforderten Eigenschaften sämtlich zu.

Ma 5 ■ 2439 Aus dem dritten Satz der Aufgabe folgt: Mario, aber auch Roger heißen mit dem Zunamen weder Müller noch Krause. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt: Mario hat auch nicht den Zunamen Schneider, also den Zunamen Meier. Somit hat Roger den Zunamen Schneider. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt weiter: Jürgen heißt mit dem Zunamen weder Schneider noch Krause. Folglich hat Jürgen den Zunamen Müller, Uwe den Zunamen Krause.

Ma 5 ■ 2440 Die anfangs gekauften Flaschen „Berliner Pilsner“ bringen als Pfandgeld den Betrag von 9,00 M. Wegen $900 = 5 \cdot 158 + 110$ erhält dieser Kunde beim zweiten Mal 5 Flaschen Bier, und es verbleiben ihm 1,10 M. Für diese 5 Flaschen Bier erhält er 1,50 M Pfandgeld; er verfügt beim dritten Mal über 2,60 M. Dafür erhält er 1 Flasche Bier; ihm verbleiben 1,02 M. Für diese Flasche erhält er 0,30 M Pfandgeld. Ihm verbleiben 1,32 M, und er hat 36 Flaschen Bier insgesamt erworben.

Ma 6 ■ 2441 Angenommen, Dirk hat x Flaschen gesammelt; dann haben Steffen $3x$ Flaschen, Klaus $4x$ Flaschen und Frank $(4x - 22)$ Flaschen gesammelt. Das sind zusammen $(12x - 22)$ Flaschen. Nun gilt $12x - 22 = 194$, $12x = 216$, $x = 18$. Dirk hat 18, Steffen 54, Klaus 72 und Frank 50 Flaschen gesammelt.

Ma 6 ■ 2442 Angenommen, Frank ist n Jahre alt. Dann ist Gerd $2 \cdot n$ und seine Mutter $6 \cdot n$ Jahre alt, und es gilt $6n = n + 25$, $5n = 25$, also $n = 5$. Frank ist 5 Jahre, Gerd 10 Jahre, ihre Mutter 30 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2443 Aus (1) folgt: $z \leq 45$; aus (2) folgt $10 \leq a + b \leq 18$, wobei a die Grundziffer der Zehner- und b die der Einerstelle ist. Aus (3) folgt b gleich 1, 3, 5, 7 oder 9. Aus (4) folgt a gleich 2, 4, 6 oder 8. Auf Grund dieser Angaben existiert genau eine Zahl; sie lautet 29. Herr L. wurde 29 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2444 Eine Zahl endet genau dann auf Null, wenn sie durch $10 = 2 \cdot 5$ teilbar ist. Das gegebene Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

enthält genau zweimal den Faktor 5 und zehnmal den Faktor 2; somit endet das Produkt auf genau zwei Nullen. Folglich sind die Ergebnisse von Rita und Sven falsch. Da 10000 ohne Rest durch 16 teilbar ist ($10000 : 16 = 625$), muß Tonis Ergebnis 6227029800 überprüft werden. Da $29800 : 16 = 1862,5$ gilt, trifft die Teilbarkeit durch 16 nicht zu. Folglich ist auch das Ergebnis von Toni falsch.

Ma 6 ■ 2445 Aus $70 + 7 + 7 = 84$ und $84 : 3 = 28$ folgt, daß jeder der drei Söhne 28 Weinfässer erhielt. Aus

$7 \cdot \frac{2}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$ und $\frac{21}{2} : 3 = \frac{7}{2}$ folgt, daß jeder der drei Söhne 7 halbvoll Weinfässer erhielt. Hierfür gibt es genau drei

Möglichkeiten für eine gleichwertige Aufteilung:

- (1) 1 halbvoller und 3 volle Fässer, also noch 24 leere Fässer;
- (2) 3 halbvoller und 2 volle Fässer, also noch 23 leere Fässer;
- (3) 5 halbvoller und 1 voller Faß, also noch 22 leere Fässer.

Es seien A, B, C die Namen der drei Brüder; die nachstehende Tabelle enthält die möglichen Aufteilungen:

| Name | Anzahl der Fässer | | |
|------|-------------------|------|----------|
| | leer | voll | halbvoll |
| A | 24 | 3 | 1 |
| B | 24 | 3 | 1 |
| C | 22 | 1 | 5 |

| | | | |
|---|----|---|---|
| A | 24 | 3 | 1 |
| B | 23 | 2 | 3 |
| C | 23 | 2 | 3 |

Bei beiden möglichen Aufteilungen erhalten genau zwei Söhne gleichviel volle, halbvoller und leere Fässer.

Ma 7 ■ 2446 Angenommen, in dem Haus gibt es x Wohnungen; dann gilt

$$20 \leq x \leq 70. \text{ In diesem Haus gibt es } \frac{x}{12}$$

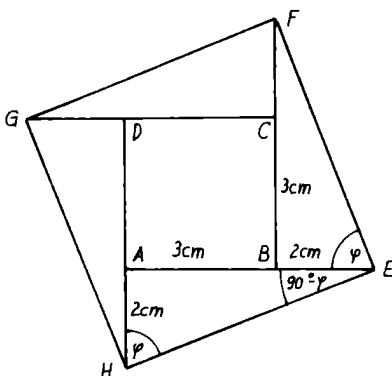
4-Zimmer-Wohnungen, also $\frac{11}{12}x$ Woh-

nungen mit zwei und drei Zimmern. Angenommen, es gibt y 3-Zimmer-Wohnungen; dann gibt es $2 \cdot y$ 2-Zimmer-Wohnungen. Zusammen sind es $3 \cdot y$ Zwei- und Drei-Zimmer-Wohnungen. Deshalb gibt es $\frac{11 \cdot x}{12 \cdot 3} = \frac{11x}{36}$ 3-Zimmer-Wohnungen. Somit ist x ein Vielfaches von 36. Wegen $20 \leq x \leq 70$ gibt es genau eine Lösung, nämlich $x = 36$. In diesem Haus gibt es drei 4-Zimmer-, elf 3-Zimmer- und 22 Zweizimmer-Wohnungen.

Ma 7 ■ 2447 Der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ beträgt

$$A = \left(3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \right) \text{ cm}^2 = 29 \text{ cm}^2.$$

Die vier Dreiecke $\triangle HEA$, $\triangle EFB$, $\triangle FGC$, $\triangle GHD$ sind auf Grund ihrer Konstruktion kongruent. Es habe Winkel $\angle AHE$ die Größe φ , also Winkel $\angle AEH$ die Größe $90^\circ - \varphi$. Dann hat der Winkel $\angle FEB$ die Größe φ und somit der Winkel $\angle HEF$ die



Größe 90° . Somit ist das Viereck $EFGH$ ebenfalls ein Quadrat.

Ma 7 ■ 2448 Es gilt

$$\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \right) \text{ cm}^2 = 39 \text{ cm}^2$$

für die abgeschnittenen Flächenstücke. Das übrig gebliebene Flächenstück hat somit einen Flächeninhalt von $(8^2 - 39) \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$.

Ma 7 ■ 2449 Angenommen, Frau A kaufte a Stück Butterkuchen, Frau B b Stück Bienenstich, Frau C c Brötchen. Dann kaufte Frau A noch $(c+7)$ Brötchen und $(b-1)$ Stück Bienenstich, Frau B noch $(a+3)$ Stück Butterkuchen und $(c+2)$ Stück Brötchen, Frau C noch $(b+2)$ Stück Bienenstich und $(a+1)$ Stück Butterkuchen. Das sind zusammen $(3a+3b+3c+14)$ Stück Backwaren. Nun gilt $3a+3b+3c+14=32$, $3a+3b+3c=18$, $a+b+c=6$. Wegen $a < b < c$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a=1$, $b=2$, $c=3$.

Frau A kaufte 1 Stück Butterkuchen, 1 Stück Bienenstich und 10 Brötchen; Frau B kaufte 4 Stück Butterkuchen, 2 Stück Bienenstich und 5 Brötchen; Frau C kaufte 2 Stück Butterkuchen, 4 Stück Bienenstich und 3 Brötchen.

Ma 8 ■ 2450 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, dann läßt sich eine ungerade durch 3 teilbare Zahl mit $3(2n+1)$ darstellen. Vermehrt man diese um 9, so erhält man $3(2n+1)+9$. Die Behauptung lautet nun $6 \mid 3(2n+1)+9$. Wir formen den Term $3(2n+1)+9$ um, so daß sich $6(n+2)$ ergibt. Es gilt für alle n :

$$6 \mid 6(n+2) \text{ und damit auch}$$

$$6 \mid 3(2n+1)+9.$$

Vermindert man $3(2n+1)$ um 9, so erhält man $3(2n+1)-9$. Man muß $n > 0$ voraussetzen, da sonst der Term keine natürliche Zahl ergäbe. Nun formt man wieder um und erhält $6(n-1)$. Es gilt $6 \mid 6(n-1)$, folglich gilt $6 \mid 3(2n+1)-9$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ma 8 ■ 2451 Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann läßt sich die Summe aus sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wie folgt darstellen:

$$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 + a + 6.$$

Wir fassen zusammen und erhalten $7a + 21$. Es gilt $7a + 21 = 7(a+3)$ und $7 \mid 7(a+3)$, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 2452 Es sei a die Kantenlänge des Würfels und d der Durchmesser der Kugel, dann gilt für die Volumina:

$$V_W = a^3 \text{ bzw. } V_K = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Da die Raumdiagonale des Würfels gleich dem Durchmesser der Kugel ist, also $e = a\sqrt{3} = d$ gilt,

$$\text{ist } V_K = \frac{1}{6} \pi (a\sqrt{3})^3 = \frac{1}{2} \pi a^3 \sqrt{3}.$$

Nun bilden wir die Proportion

$$V_W : V_K = x : 1,$$

$$a^3 : \frac{\pi}{2} a^3 \sqrt{3} = x : 1,$$

$$1 : \frac{\pi \sqrt{3}}{2} = x : 1,$$

$$x = \frac{2}{\pi \sqrt{3}} \\ x \approx 0,37.$$

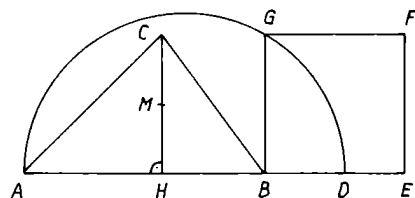
Der Würfel nimmt etwa 37% des Volumens der Kugel ein.

Ma 8 ■ 2453 In dem Dreieck ABC konstruieren wir die Höhe $\overline{CH}$ auf $\overline{AB}$. Wir konstruieren ferner den Mittelpunkt M von $\overline{CH}$. Für den Flächeninhalt A_D des Dreiecks ABC gilt dann

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} \text{ und wegen}$$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{CH} = \overline{HM}$ auch $A_D = \overline{AB} \cdot \overline{HM}$. Wir verlängern $\overline{AB}$ über B hinaus um $\overline{HM}$ bis D und konstruieren über $\overline{AD}$ als Durchmesser einen Halbkreis. Das in B auf $\overline{AD}$ errichtete Lot schneide diesen Halbkreis in G . Nach dem Höhensatz gilt dann $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{HM} = \overline{BG}^2$.

Wir konstruieren ein Quadrat $BEFG$, das $\overline{BG}$ zur Quadratseite hat.



Ma 9 ■ 2454

$$\sqrt{x} = 2 \sqrt[3]{x} \\ x \sqrt{x} = 8x \\ x^3 = 64x^2, \\ x^3 - 64x^2 = 0, \\ x^2(x - 64) = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 64.$$

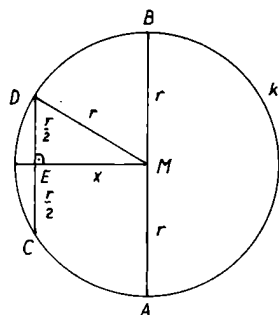
Nur für $x=0$ und $x=64$ wird $\sqrt{x} = 2 \sqrt[3]{x}$ wahr.

Ma 9 ■ 2455 Weil 101|91809 gilt, ist Franks Aussage (1) falsch, folglich muß Franks Aussage (2) wahr sein. Weil 9|27 gilt, ist Ernsts Aussage (1) falsch, folglich muß Ernsts Aussage (2) wahr sein. Da die Zahl durch 101 und durch 9 teilbar ist, ist sie durch 909 teilbar. Daraus folgt, daß Doras Aussage (1) falsch und somit ihre Aussage (2) wahr ist. Nun ist $909 = 101 \cdot 3 \cdot 3$. Wegen Doras Aussage (2) und Ernsts Aussage (2) kann nur noch der Faktor 101 auftreten. $909 \cdot 101 = 91809$ entfällt wegen Franks Aussage (1). $909 \cdot 101^2$ entfällt, da $909 \cdot 101^2 > 9 \cdot 10^6 > 1 \cdot 10^6$. Die gesuchte Zahl lautet 909.

Ma 9 ■ 2456 Angenommen, es waren x Banknoten zu 10 M, y zu 20 M und z zu 50 M; dann gilt $10x + 20y + 50z = 500$ und $x + y + z = 16$. Daraus folgt weiter $x + 2y + 5z = 50$ und $x + y + z = 16$. Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung erhält man $y + 4z = 34$,

also $y = 34 - 4z$. Ferner gilt $x < y < z$. Wegen $4 \cdot 9 = 36 > 34$ gilt $z \leq 8$. Für $z = 8$ gilt $y = 34 - 32$, also $y = 2$ und somit $x = 6$, was wegen $6 > 2$ der Voraussetzung $x < y$ widerspricht. Für $z = 7$ gilt $y = 34 - 28$, also $y = 6$ und somit $x = 3$. Für $z \leq 6$ existieren keine weiteren Lösungen, da in diesem Fall $y = 34 - 4z \geq 10$, also $y > z$ wäre, was der Voraussetzung $y < z$ widerspricht. Herr A. erhielt 3 Banknoten zu 10 M, 6 zu 20 M und 7 zu 50 M ausbezahlt.

Ma 9 ■ 2457 Skizze:



Im rechtwinkligen Dreieck EMD gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4},$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \cdot r^2,$$

$$x = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Der Abstand beträgt $\frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Ma 10/12 ■ 2458 Man multipliziert die Ungleichung zunächst mit 4 und erhält

$$4\sqrt{a} + 4\sqrt{b} \geq a + 1 + 4b + 4$$

und nach weiterer Umformung

$$0 \geq a - 4\sqrt{a} + 4 + 4b - 4\sqrt{b} + 1 \quad \text{bzw.}$$

$$0 \geq (\sqrt{a} - 2)^2 + (2\sqrt{b} - 1)^2. \quad (1)$$

Nun gilt

$$(\sqrt{a} - 2)^2 \geq 0 \text{ und } (2\sqrt{b} - 1)^2 \geq 0. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(\sqrt{a} - 2)^2 = 0 \text{ und } (2\sqrt{b} - 1)^2 = 0, \text{ d.h.}$$

$$\sqrt{a} - 2 = 0 \text{ und } 2\sqrt{b} - 1 = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$a = 4 \text{ und } b = \frac{1}{4}.$$

Nur die Zahlen $a = 4$ und $b = \frac{1}{4}$ erfüllen

die vorgelegte Ungleichung.

Probe:

$$\sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} \geq \frac{4+1}{4} + \frac{1}{4} + 1$$

$$2,5 \geq 2,5.$$

Ma 10/12 ■ 2459 Der erste Summand dieser Summe, der auf die Ziffer 0 endet, ist $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Damit endet jeder weitere Summand von $6!$ bis $100!$ auf die Ziffer Null.

Wir brauchen also nur die Summe $1! + 2! + 3! + 4!$ zu berechnen. Diese ist $1 + 2 + 6 + 24 = 33$. Damit endet die gegebene Summe auf die Ziffer 3.

Ma 10/12 ■ 2460 Es seien a und b die Maßzahlen der Längen der Katheten und c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse eines solchen rechtwinkligen Dreiecks; dann gilt

$$a + b + c = \frac{a \cdot b}{2} \text{ und } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Daraus folgt

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a \cdot b}{2},$$

$$a^2 + b^2 = \left[\frac{a \cdot b}{2} - (a + b)\right]^2,$$

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 b^2}{4} - ab(a + b) + a^2 + 2ab + b^2$$

und wegen $a \neq 0$ gilt

$$0 = \frac{ab^2}{4} - b(a + b) + 2b$$

und wegen $b \neq 0$ gilt

$$0 = \frac{ab}{4} - (a + b) + 2, \text{ also}$$

$$0 = ab - 4a - 4b + 8;$$

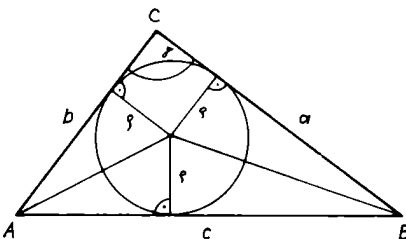
$$ab - 4a = 4b - 8,$$

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}.$$

Nur für b gleich 5, 6, 8, 12 erhalten wir positive ganzzahlige Lösungen für a , und zwar 12, 8, 6, 5. Es existieren genau vier solcher rechtwinkligen Dreiecke. Für die Maßzahlen ihrer Seitenlängen gilt:

| a | b | c |
|-----|-----|-----|
| 12 | 5 | 13 |
| 8 | 6 | 10 |
| 6 | 8 | 10 |
| 5 | 12 | 13 |

Ma 10/12 ■ 2461 Skizze:



M sei der Mittelpunkt des Inkreises. Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$A_{ABC} = A_{ABM} + A_{BCM} + A_{CAM}.$$

Wegen $A = \frac{g \cdot h}{2}$ gilt dann weiter

$$A_{ABC} = \frac{Q}{2} \cdot c + \frac{Q}{2} \cdot b + \frac{Q}{2} \cdot a;$$

$$A_{ABC} = \frac{Q}{2} (a + b + c);$$

$$A_{ABC} = \frac{Q}{2} \cdot u. \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma. \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{Q}{2} \cdot u = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma$$

bzw. $Q \cdot u = a \cdot b \cdot \sin \gamma$ und somit

$$\sin \gamma = \frac{Q \cdot u}{a \cdot b}, \text{ was zu zeigen war.}$$

Ph 6 ■ 156 40 200 000 000 : 300 000 = 134 000 000

Das Licht braucht 134 000 000 Sekunden.

Ein Jahr hat

$$3 600 \cdot 24 \cdot 365 = 31 536 000 \text{ Sekunden.}$$

134 000 000 : 31 536 000 sind 4 Jahre und 7 856 000 Sekunden.

Ein Tag hat $24 \cdot 3 600 = 86 400$ Sekunden.

7 856 000 : 86 400 sind 90 Tage und

80 000 Sekunden. 80 000 : 3 600 sind

22 Stunden und 800 Sekunden.

Das Licht braucht 31 536 000 Sekunden bzw. 4 Jahre, 90 Tage und 22 Stunden.

Ph 7 ■ 157 Geg.: $d = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$

$$V = 4,53 \text{ m}^3$$

$$t = 1 \text{ h} = 3 600 \text{ s}$$

Ges.: a) v_1 b) v_2

a) Beim Durchfluß durch Röhren gilt die Gleichung $V = A v t$.

Dann ist

$$v_1 = \frac{V}{A \cdot t} \text{ mit } A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4},$$

$$v_1 = \frac{4V}{\pi \cdot d^2 \cdot t},$$

$$v_1 = \frac{4,53 \text{ m}^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,04^2 \text{ m}^2 \cdot 3 600 \text{ s}},$$

$$v_1 \approx 1 \text{ m/s}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers beträgt rund 1 m/s.

b) Nach dem Durchflußgesetz gilt die Gleichung $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$.

Dann ist

$$v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2} \text{ mit } A_2 = \frac{\pi d^2}{16},$$

$$v_2 = \frac{\pi d^2 \cdot 16}{4 \cdot \pi d^2} \cdot v_1 = 4 v_1 = 4 \text{ m/s}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt dann 4 m/s.

Ph 8 ■ 158 Geg.: $l_0 = 15 \text{ m}$ Ges.: $\vartheta_{\max}$

$$\Delta l = 45 \text{ mm} = 0,045 \text{ m}$$

$$\vartheta_0 = 12^\circ \text{C}$$

$$\alpha = 0,000 012 \text{ 1/grd}$$

$$\vartheta_{\max} = \vartheta_0 + \Delta \vartheta$$

Aus $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$ folgt

$$\Delta \vartheta = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha},$$

$$\Delta \vartheta = \frac{0,045 \text{ m} \cdot \text{grad}}{15 \text{ m} \cdot 0,000 012} = 250^\circ \text{C},$$

$$\vartheta_{\max} = 12^\circ \text{C} + 250^\circ \text{C} = 262^\circ \text{C}.$$

Während des Brandes betrug die Maximaltemperatur des Trägers 262°C .

Ph 9 ■ 159 a) Die Lstg. berechn. sich aus

$$P = \frac{Q_{\text{NGS}}}{\eta}. \quad \text{b) Die Leistung beträgt } 4,23 \text{ kW}.$$

c) Der Stromkreis muß mit 20 A abgesichert werden.

Ph 10/12 ■ 160 Der Anstiegswinkel der schiefen Ebene beträgt $6,8^\circ$.

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 1 500 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; VEB Fachbuchverlag Leipzig; Kinderbuchverlag Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig.

alpha- Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1983/84

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, Haus der Jungen Pioniere, beide Altenburg; E.-Schneller-OS, Alt-Sühkow; W.-Pieck-Schule, Anklam; OS G. Titow, Arenshausen; OS Asbach; Haus der Jungen Pioniere, Aschersleben; E.-Thälmann-OS, Bad Bibra; Haus der Jungen Pioniere Th. Müntzer, Bad Blankenburg; S.-Rädel-OS, Bad Gottleuba; E.-Thälmann-OS, Bad Langensalza; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; O.-Grotewohl-OS, A.-Saefkow-OS, M.-Poser-OS, Station Jg. Techn. u. Naturf., alle Bad Salzungen; R.-Siewert-OS, Bad Suderode; 2. OS H. Beimler, Bärenklau; 25. OS F. Mehring, 26. OS, M.-A.-Nexö-OS, 39. OS E. Schönherr, Spezialistenlager (Berlin-Pankow), alle Berlin; OS Bernsbach; C.-Zetkin-OS, Bischofferode, OS F. Schiller, Bleicherode; F.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; A.-Bebel-OS, Boizenburg; OS W. Komarow, Boxberg; Dinter-OS, Borna; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; K.-B.-OS, Bredenfelde; OS B. Brecht, Brehme; W.-Seelenbinder-OS, Breitung; OS Brandshagen; OS Freundschaft u. Frieden, Brieselang; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; TOS Büttelstedt; W.-Pieck-OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techn. Cottbus; H.-Wildner-OS, Dahlen; OS B. Kühn, Dambbeck; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; K.-Niederkirchner-OS, Deutschenbora; OS Diesdorf; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; K.-Niederkirchner-OS, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast, 106. OS, beide Dresden; OS Dürörhsdorf; 2. OS W. Meck, Eberswalde; OS Fr. Engels, Effelder; EOS Egeln; W.-Pieck-OS, Eichhof; Geschw.-Scholl-OS, Eisenach; 1. OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; H.-Joachim-OS, Espenhain; Haus d. Jungen Pioniere, Falkensee; Th.-Müntzer-OS, Fambach; E.-Weinert-OS, Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; Zentrale OS, Frankenheim; Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder); BBS ESW, AG Naturw., Freital; OS Friedeburg; Schulkombinat Friedersdorf; OS I. Friedland; OS H. Günther, Fürstenwalde; Dr.-R.-Sorge-OS, Kreisklub Jg. Math., beide Gadebusch; K.-Marx-OS, Gebesee; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; K.-Neuhof-OS, Glienicke; K.-Gräpler-OS, Gnoi; 7. OS, Görlitz; W.-Husemann-OS, Goldberg; OS J. Gagarin, Grabowhöhe; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; OS J. Gagarin, Greußen; OS H. Beimler, Greußen; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Grotitzsch; OS Großbodungen; OS F. Engels, Groß-euchnick; OS K. Gottwald, Großrückerswalde; Pestalozzischule Großschönau; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; Station Jg. Naturf. u. Techn. Guben; M.-Gorki-OS, Hainichen; W.-Pieck-OS, Hagenow; Station Jg. Naturf. u. Techn., M.-Engels-Schule, beide Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, Halle; Station Jg. Techn. u. Naturf. Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; 2. OS Fr. Engels, Herzberg; M.-Gorki-OS, Hillersleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS Horka; 21. OS Hoyerswerda; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; E.-Weinert-OS, Jocketa; F.-Engels-Schule, Kaltennordheim; E.-Weinert-OS,

Kamenz; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; H.-Menzel-OS, E.-Thälmann-OS, W.-Verner-OS, Wl.-Komarow-OS, E.-Schneller-OS, S.-Wenig-OS, Haus der Jungen Pioniere J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS Kelbra; OS Kemberg; OS Kirchworbis; G.-Eisler-OS, Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Klietz; OS E. Thälmann, Klosterfelde; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS N. Ostrowski, Krebes; Bundesgymnasium Krems (Österreich); Th.-Neubauer-OS, Kieselbach; OS I. Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; OS Lauscha; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; E.-Thälmann-OS, OS IV, K.-Liebknecht-OS, EOS, 4. OS J. C. Fuhlrott, alle Leinefelde; Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, OS O. Schön, beide Leipzig; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS, Lichte; E.-Thälmann-OS, Limbach; OS Linda; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; Station Jg. Naturf. u. Techn. Lütz; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Ludwigslust; Fr.-L.-Jahn-OS, Lühthien; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; Haus d. Jungen Pioniere, Magdeburg; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; II. OS, AG Mengenlehre, Mieste; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS H. Danz, Möser; Kinderheim Munzig; OS J. Fučík, Naundorf; W.-Bykowski-Schule, Neetzow; OS O. Grotewohl, Neukloster; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; H.-Beimler-OS, Fr.-Schiller-OS, beide Neustadt; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; P.-Voitel-OS, Niederwürschnitz; OS E. Weinert, Oberschönau; OS Ockrilla; OS W. Seelenbinder, Oechsen; OS Fr. Weineck, Oranienbaum; Pestalozzischule Oschatz; EOS K. Marx, Oschersleben; OS Oster-nienburg; W.-Pieck-OS, H.-Matern-OS, beide Osterwieck; Station Jg. Naturf. u. Techn., EOS, beide Parchim; Zentrale OS, Petersdorf; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwenda; OS Pfiffelbach; M.-Zimmering-OS, Pirna; Herbert-OS, Plauen; MOS, Plessa; OS E. Schneller, Polleben; A.-Bekker-OS, Prenzlau; OS Pritzerbe; OS II Goetheschule, Station Jg. Techn. u. Naturf. Kreisklub Math., beide Pritzwalk; B.-Koenen-Schule, Kreisklub Math., beide Quedlinburg; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; Neue OS, OS Pestalozzi, beide Radebeul; H.-Zille-OS, Radeburg; OS G. Eisler, Racknitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Raguhn; Geschw.-Scholl-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; J.-Gagarin-OS, OS U. Steinhauer, beide Ribnitz-Damgarten; H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, beide Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Ziolkowski-OS, Rossdorf; 34. OS M. Reichpietsch, 72. OS, Haus der Jungen Pioniere, alle Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; OS Rotterode; OS O. Grotewohl, Rudolstadt; OS Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; T.-Bunke-OS, Saßnitz; Station Jg. Naturf. u. Techn., Sangerhausen; OS H. Matern, Scharnberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Schlottwitz; OS J. G. Seume, OS K. Marx, 4. OS, alle Schmalkalden; OS Schneidlingen; OS H. Beimler, Schönhagen; EWOS, Schollene; Haus d. Jungen Pioniere W. Sonnenberg, Schönebeck; OS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; OS M. May, Sebnitz; OS K. Uhlich, Kreisklub Math., Senftenberg; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS Sohl-land; OS W. Pieck, OS Glückauf; beide Sondershausen; OS A. Becker, OS K. Marx, beide Spremberg; K.-Liebknecht-OS, Stadtlangsfeld; J.-Fučík-OS, Steinbach; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; A.-Becker-OS, Stralendorf; O.-Grotewohl-OS, Dr.-S.-Allende-OS, beide Stralsund; O.-Telfe-OS, Straßgräbchen; 12. OS Dr. R. Sorge, 11. OS A. S. Schumawzow, OS Fr. Köhler, alle Suhla; H.-Rieke-Schule, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; OS G. Eisler, OS K. Nie-

Eine Aufgabe von Prof. Dr.

A. S. Solodownikow

Lomonossow-Universität Moskau

▲ 2520 ▲ Man finde sämtliche Ecken des durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + 1 &\geq 0, \\x - 2y - 2 &\geq 0, \\2x - y - 4 &\geq 0\end{aligned}$$

definierten Bereiches κ .

Wo steckt der Fehler?

Löse die Gleichung: $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$

Man rechnet:

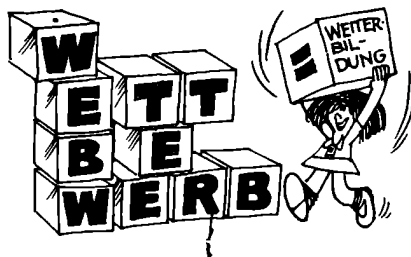
$$\begin{aligned}(a-x)(b-x) &= (1-ax)(1-bx) \\ab - ax - bx + x^2 &= 1 - bx - ax + abx^2 \\x^2 &= 1 + abx^2 - ab \\x^2 - 1 &= ab(x^2 - 1)\end{aligned}$$

also

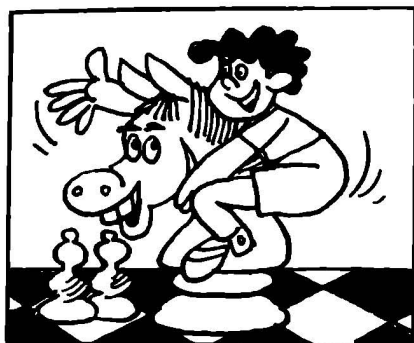
$$ab = 1$$

Ist die Lösung richtig?

Aus: Lietzmann, Wo steckt der Fehler?
Mitgeteilt und mit Lösungen versehen
von Ing. A. Körner, Leipzig



derkirchner, beide Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; A.-Bebel-OS, A.-Nitz-OS, Goetheschule, E.-Weik-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-Hennecke-OS, Untermaßfeld; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS Vitte; alpha-Club Vitzsburg; A.-Bebel-OS, Vogelsang; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Th.-Müntzer-OS, Walsleben; Goetheschule, Waren; OS L. Fünberg, Wegeleben; OS Wernshausen; OS Wernberg; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; OS Weibenborn-Lüderode; OS I. Weißenfels; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.-Rau-OS, Wildau; OS H. Matern, Wippendorf; Station Jg. Techn. u. Naturf. Kreisklub Math., OS IV, beide Wittstock; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wohlmirstedt; OS H. Beimler, Wolfen; Zentralschule Wolkenburg; Mathematik-Lager, Lenin-OS, OS H. Werner, alle Worbis; OS Wülknitz; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; OS Wustermark; OS H. Jacobi, Zella-Mehlis; Station Jg. Naturf. u. Techn. Zernsdorf; 9. OS Zittau; OS A. C. Sandino, Zöblitz; OS K. F. Wander, Zöbzig; Goethe-OS, Zossen; OS Zschornowitz



alpha-Schachwettbewerb 1984

Auch 1984 ruft *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Wenn der eine oder der andere vielleicht auch nicht alle Schachaufgaben lösen kann, so ist dennoch seine Teilnahme, und seine Meinung über die Schwierigkeit der Aufgaben, sehr erwünscht. Es sind acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit zu lösen. Die jeweilige Punktzahl ist bei den Aufgaben mit angegeben. In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Alle Teilnehmer, die die volle Punktzahl erreichen, erhalten eine Urkunde. Unter ihnen werden auch Bücher verlost. Des weiteren werden die Namen von etwa 20 Einsendern veröffentlicht, die alle Aufgaben vorbildlich gelöst haben. Unter allen anderen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden auch Bücher verlost.

Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Als vollständig gilt die Lösung, wenn die wesentlichen Abspiele bis zum Matt angegeben sind.

Die Einsendungen der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) sind bitte bis zum 1. März 1985 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

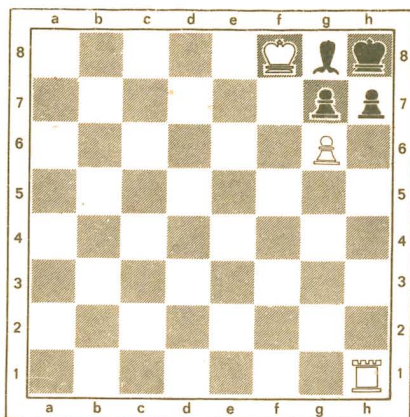
Redaktion *alpha*
7027 Leipzig
PSF 14.

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1985 veröffentlicht.

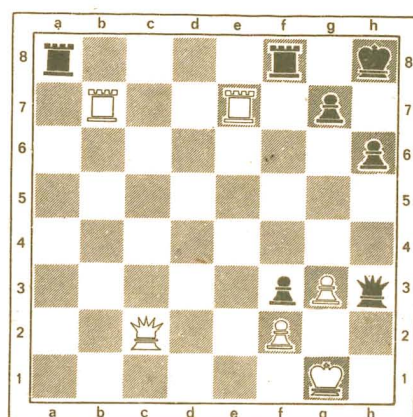
J. Lehmann/H. Rüdiger

Wer einem Schachspieler schweigend zusehen kann, ist wahrhaftig ein überlegener Mann.

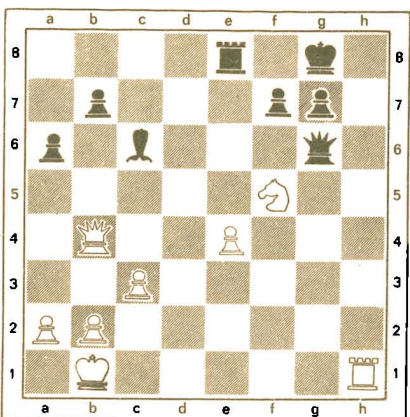
Arabisches Sprichwort



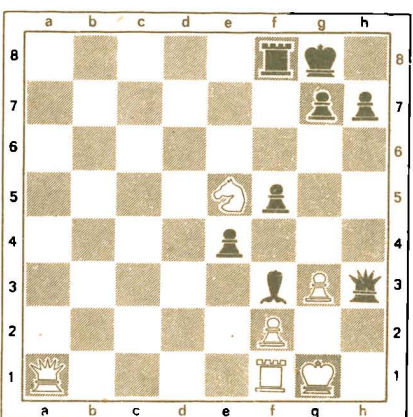
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



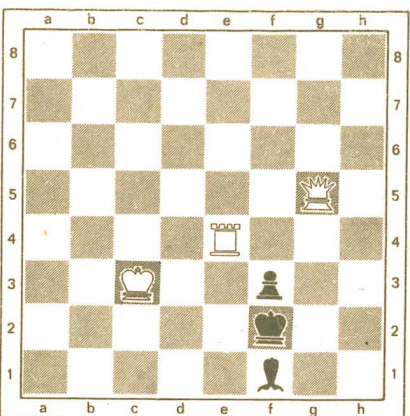
Nr. 5 Matt in vier Zügen 4 Punkte



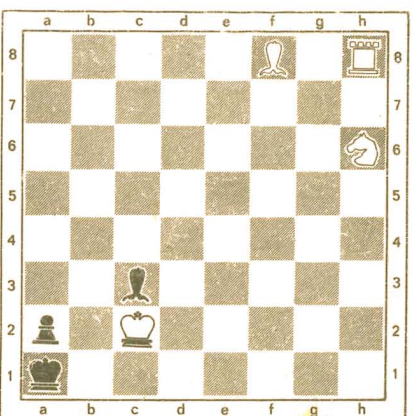
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



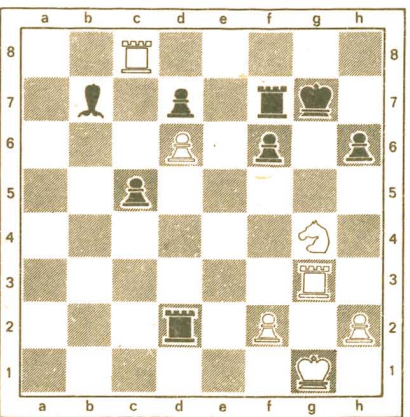
Nr. 6 Matt in fünf Zügen 5 Punkte



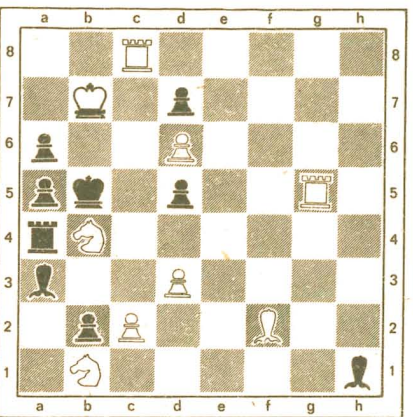
Nr. 3 Matt in zwei Zügen 3 Punkte



Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



Nr. 4 Matt in drei Zügen 4 Punkte



Nr. 8 Matt in zwei Zügen 6 Punkte

Mit Schere und Papier

