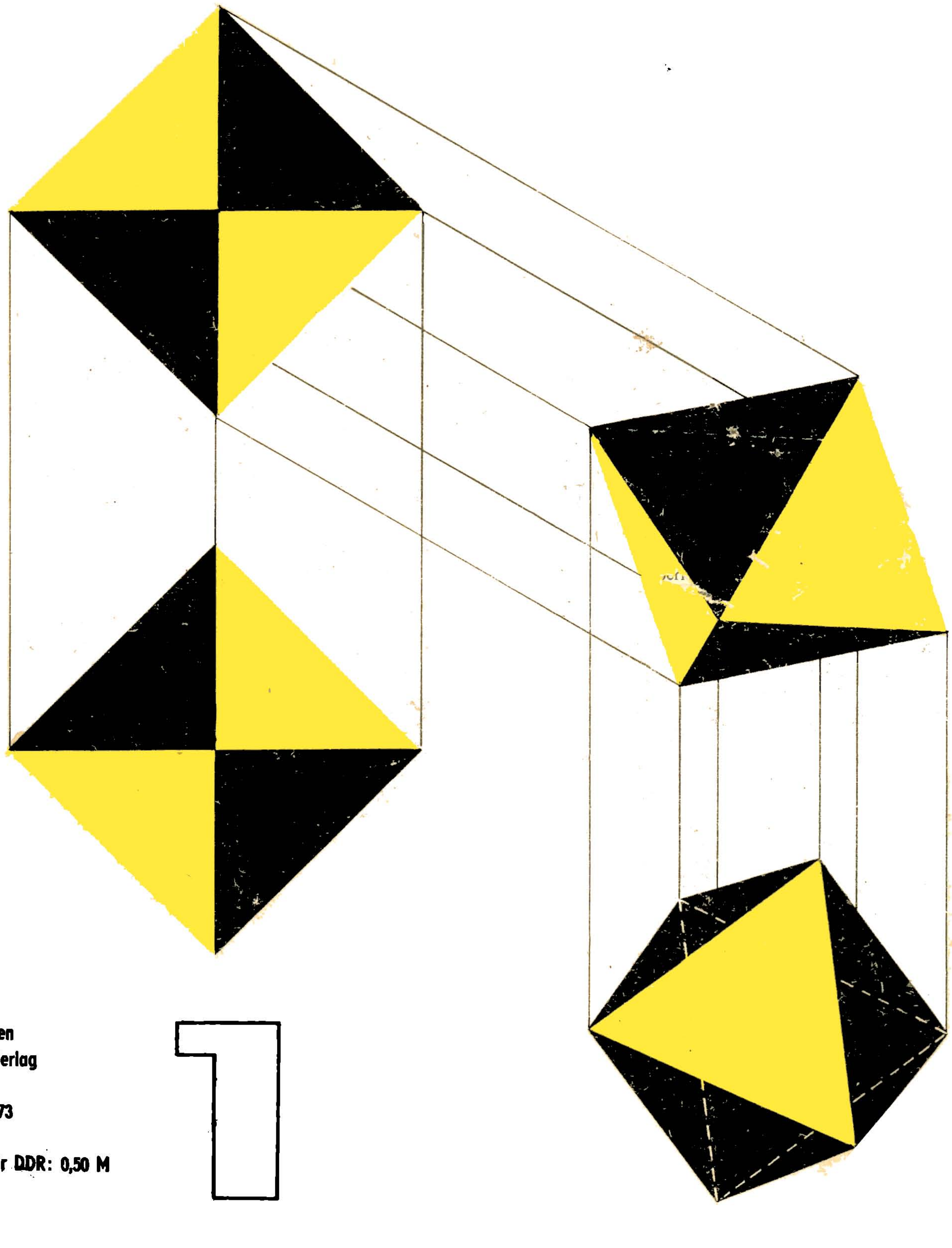
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

1

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten aus „Rentierzüchter am Schwarzen Meer" J. Migunow, Moskau (S. 4); J. Lehmann, Leipzig (S. 6/7); Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. November 1972

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art

Es gibt Schüler, die sich auf Klassenarbeiten freuen und ihre Rückgabe kaum erwarten können. Sie tun das deshalb, weil sie — auch vor sich selbst — beweisen möchten, was sie gelernt haben, und weil ihnen die gute Zensur eine echte Belohnung ist. Es gibt aber auch Schüler, die sich vor Klassenarbeiten fürchten; sie möchten verbergen, daß sie etwas nicht gelernt haben. Sicher gehört jeder *alpha*-Leser zur ersten Gruppe und hat sich deshalb schon manchmal gewundert oder gar geärgert, wenn etwas in einer Klassenarbeit nicht vorkam, was er eigentlich erwartet hatte. Und gerade, wenn das Lernen viel Mühe gekostet hat, möchte man doch gerne eine Bestätigung dafür haben, ob diese Mühe erfolgreich war.

Diese Möglichkeit soll euch jetzt für ein Stoffgebiet gegeben werden, das viel Anstrengung fordert und in Leistungskontrollen nur selten auftritt: *Reelle Zahlen.* Sie werden am Anfang des 9. Schuljahres behandelt, aber schon in Klasse 7 vorbereitet durch die Einführung der Quadratwurzel und der Irrationalzahlen. Deshalb ist fast alles Folgende auch für die Schüler aus den 7. Klassen verständlich, sofern sie die Irrationalzahlen schon kennengelernt haben. Am Wort „Reelle Zahlen", das sie noch nicht kennen, sollten sie nicht scheitern. Es genügt, wenn sie sich vorstellen: Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen ergeben zusammen die Menge der reellen Zahlen.

Und nun viel Spaß beim Nachdenken — und nicht aufs Glatteis führen lassen! Notiert eure Antworten und Lösungen und vergleicht dann mit denen in diesem Heft, Seite 23.

▲1▲ Wenn man etwas tut, sollte man eigentlich wissen, aus welchem Anlaß und mit welchem Ziel man es tut. Das gilt auch in der Mathematik. Darum:

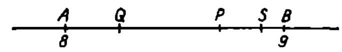
a) Welche wichtige Erkenntnis war der Anlaß für die Einführung der reellen Zahlen?

b) Welches Ziel ergab sich damit für die Einführung?

c) Ist dieses Ziel erreicht worden?

▲2▲ Sicher wurde im Unterricht davon gesprochen, daß den Punkten einer Geraden Zahlen zugeordnet werden. Versuchen wir es:

a) Ordne dem Punkt P möglichst genau einen Dezimalbruch p zu!

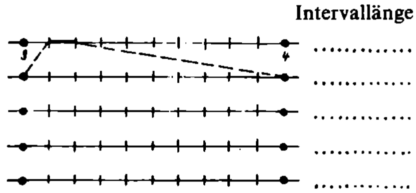


b) Ordne dem Punkt Q möglichst genau einen Dezimalbruch q zu! Q ist folgendermaßen entstanden: Die Strecke $\overline{AB}$ wurde in 11 gleiche Teile geteilt; Q ist Endpunkt des dritten Teilstückes.

c) (Ab Klasse 8). Welche Zahl muß dem Punkt S zugeordnet werden? Für S gilt: Sein Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden ist genau so groß, wie die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 8 bzw. 4 Einheiten lang sind.

▲3▲ Die Zahl π lautet 3,14159265.... Derartige Dezimalbrüche kann man durch fortgesetzte Zehnteilung an der Zahlengeraden veranschaulichen.

Intervallänge



a) Auf dem ersten der fünf Zahlengeradenteile ist dasjenige Intervall gekennzeichnet, in dem der zu π gehörige Punkt liegen müßte. Kennzeichne in gleicher Weise auch auf den anderen vier Zahlengeradenteilen die für π zutreffenden Intervalle! Beschrifte dabei die durch „●" markierten Punkte mit den zugehörigen Dezimalbrüchen!

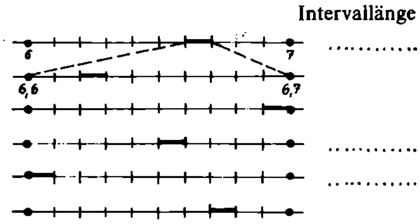
b) Gib rechts (unter Intervallänge) für jeden Schritt die Differenz derjenigen beiden Zahlen an, die zu den durch „●" gekennzeichneten Punkten gehören!

▲4▲ Jetzt wollen wir umgekehrt wie bei Aufgabe 3 vorgehen: Wir wissen von einem Punkt P, daß er bei den ersten sechs Schritten einer fortgesetzten Zehnteilung auf der Zahlengeraden in den gekennzeichneten Intervallen liegt.

a) Beschrifte, wo es noch fehlt, die durch „o" markierten Punkte mit den zugehörigen Dezimalbrüchen!

b) Gib für jeden Schritt die Länge der durch einen starken Querstrich gekennzeichneten Intervalle an!

Intervallänge



c) Gib den zu P gehörigen Dezimalbruch möglichst genau an!

d) Wir wollen annehmen, daß P ein irrationaler Punkt ist und die Zehnteilung (in Gedanken) beliebig weit fortgesetzt wird. Was würdest du auf folgende Frage erwidern: „Wie lang ist das kürzeste dabei entstehende Intervall?"

▲5▲ Auf einer Geraden seien in bekannter Weise die reellen Zahlen aufgetragen; wir erhalten dadurch die uns bekannte reelle Zahlengerade. Überlege, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!

a) Zu jeder rationalen Zahl gehört genau ein Punkt.

b) Zu jedem Punkt gehört genau eine rationale Zahl.

c) Zu jeder irrationalen Zahl gehört genau ein Punkt.

d) Zu jedem Punkt gehört genau eine irrationale Zahl.

e) Zu jeder reellen Zahl gehört genau ein Punkt.

f) Zu jedem Punkt gehört genau eine reelle Zahl.

▲6▲ Schreibe einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch zwischen 6 und 7 auf!

▲7▲ Setze bei a) bis h) zwischen beiden Zahlen das zutreffende Zeichen $<$, $=$, $>$. Setze keins der Zeichen, wenn du meinst, daß auf Grund der vorliegenden Angaben eine Entscheidung nicht möglich ist. (Punkte wie z. B. bei 6,14... bedeuten lediglich, daß es sich um einen unendlichen Dezimalbruch handelt, bei dem nach der 4 nicht nur die 0 auftritt.)

a)	0,373736	$0,\overline{37}$	e)	4,8139	4,8139...
b)	$7,\overline{5}$	7,5555	f)	2,75...	2,754...
c)	$\sqrt{2}$	1,414	g)	9,571...	9,571...
d)	$\sqrt{27}$	$-\sqrt{27}$	h)	6,14999	6,14...

▲8▲ Gib ohne Benutzung von Zahlentafel oder Rechenstab zwei endliche Dezimalbrüche a und b mit folgenden Eigenschaften an:

(1) a und b haben eine Stelle nach dem Komma.

(2) Es gilt: $b-a=0,1$

(3) Es gilt: $a<\sqrt{7}<b$

▲9▲ Beantworte und begründe, ohne Rechenstab oder Zahlentafel zu benutzen:

a) Ist 5,5 der Anfang des unendlichen Dezimalbruchs zu $\sqrt{30}$?

b) Ist 4,1 der Anfang des unendlichen Dezimalbruchs zu $\sqrt{18}$?

▲10▲ Es sei $a = 1{,}23456789101112\ldots$ derjenige unendliche Dezimalbruch, der sich durch fortlaufendes Hinschreiben der Folge der natürlichen Zahlen ergibt. Wenn man aus a endliche Dezimalbrüche bildet, in dem man nacheinander immer eine Stelle mehr berücksichtigt, so erhält man eine unendliche Folge, deren erste fünf Glieder heißen

$$1;\ 1{,}2;\ 1{,}23;\ 1{,}234;\ 1{,}2345.$$

Durchdenke für diese Folge und den unendlichen Dezimalbruch a die Fragen a) bis g)! Überlege, ob eine Antwort möglich ist und wie sie heißen müßte!

a) Wie heißt das 12. Glied der Folge?

b) Wie groß ist die Differenz zwischen dem 7. und dem 6. Glied?

c) Was ist über die Größe zweier beliebiger benachbarter Glieder zu sagen?

d) Welches ist das größte Glied der Folge?

e) Was ergibt ein Größenvergleich aller Glieder mit a?

f) Welches Glied hat den kleinsten Abstand von a?

g) Welches Glied ist genau so groß wie a?

▲11▲ (nur für Klasse 9). Bei den unendlichen Dezimalbrüchen wurden die periodischen mit der Neunerperiode, also z. B. $7{,}1\overline{9}$, besonders erwähnt. Durchdenke die folgenden Sätze, ob sie wahr, ob sie falsch oder ob sie vielleicht sinnlos sind!

a) $7{,}1\overline{9}$ ist kleiner als 7,20.

b) $7{,}1\overline{9}$ ist gleich 7,20.

c) $7{,}1\overline{9}$ ist größer als 7,20.

d) $7{,}1\overline{9}$ und 7,20 gehören zu verschiedenen Punkten der Zahlengeraden.

e) Der Punkt zu $7{,}1\overline{9}$ liegt unmittelbar vor dem zu 7,20.

f) $7{,}1\overline{9}$ und 7,20 gehören zum gleichen Punkt der Zahlengeraden.

g) $7{,}1\overline{9}$ ist eine rationale Zahl.

h) $7{,}1\overline{9}$ ist eine irrationale Zahl.

i) $7{,}1\overline{9}$ ist eine reelle Zahl.

▲12▲ (nur für Klasse 9). Das Rechnen mit reellen Zahlen kam im Unterricht etwas kurz weg. Doch die beiden folgenden Aufgaben sind leicht. Es sei a der unendliche Dezimalbruch von Aufgabe 10 und $b = 3{,}\overline{27}$.

a) Gib $a+b$ bis zur sechsten Stelle nach dem Komma an!

b) Gib $a \cdot b$ bis zur zweiten Stelle nach dem Komma an!

Durchdenke auch das Vorgehen, wenn mehr Stellen gefordert werden!

▲13▲ Wir wollen die unter a) bis f) stehenden Zahlen betrachten:

a) 17 b) 0,17 c) $17{,}\overline{17}$ d) -17 e) $\sqrt{17}$ f) $\frac{17}{2}$

Gib jeweils den Nachfolger der betreffenden Zahl an (bezüglich der Kleinerbeziehung)! Wenn dir das nicht gelingen sollte, so wären als Ursachen dafür drei Fälle zu unterscheiden:

1. Für die betreffende Zahl gibt es gar keinen Nachfolger. 2. Du weißt nicht, ob es für sie einen Nachfolger gibt. 3. Du weißt zwar, daß die betreffende Zahl einen Nachfolger hat, du kannst ihn aber nicht finden.

Welcher Fall liegt bei dir jeweils vor?

▲14▲ Zwei Zahlbereiche kann man besonders gut dadurch vergleichen, daß man gemeinsame und unterscheidende Eigenschaften betrachtet. Wir wollen das für die Bereiche „Rationale Zahlen" und „Reelle Zahlen" tun, indem wir überlegen: Welche der unter a) bis h) beschriebenen Eigenschaften haben beide Bereiche, hat einer (welcher?), hat keiner?

Im Bereich dieser Zahlen

a) ... kann man unbeschränkt dividieren (außer durch 0).

b) ... kann man unbeschränkt potenzieren (natürliche Zahlen größer 0 als Exponenten).

c) ... liegt zwischen zwei beliebigen Zahlen mindestens eine weitere.

d) ... gibt es für jeden Punkt der Zahlengeraden genau eine Zahl.

e) ... gehört zu jeder Zahl genau ein Punkt der Zahlengeraden.

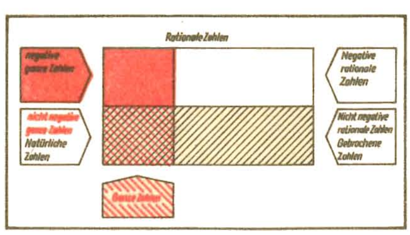
f) ... hat jede positive Zahl eine Quadratwurzel.

g) ... liegen zwischen beliebigen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen.

h) ... ist jede Gleichung der Form $x^n = a$ lösbar. (n kann jede natürliche Zahl, a kann jede Zahl des jeweiligen Bereichs sein.)

G. Pietzsch

(Lösungen siehe Seite 23, d. Red.)



Reelle Zahlen, die rationalen Punkten zugeordnet sind, heißen rationale reelle Zahlen. Alle anderen reellen Zahlen heißen irrational.

Die rationalen reellen Zahlen und die irrationalen reellen Zahlen bilden zusammen den Bereich der reellen Zahlen.

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr. rer. nat. Dr. sc. techn.

Dieter König

Ordentlicher Professor an der Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg

▲1002▲ Wir betrachten zwei zufällige Ereignisse A, B, die unter bestimmten Bedingungen eintreten können, aber nicht notwendig eintreten müssen. Außerdem betrachten wir das Ereignis AB (Produkt von A und B), das darin besteht, daß A und B gemeinsam eintreten (faßt man A und B als Mengen auf, so bedeutet das Produkt AB den Durchschnitt $A \cap B$).

Zwei zufällige Ereignisse A, B heißen (stochastisch) unabhängig voneinander genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit $P(AB)$ für das gemeinsame Eintreten von A und B gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ für das Eintreten von A und $P(B)$ für das Eintreten von B ist, d. h. wenn

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Man prüfe für die drei Ereignisse A, B, C des folgenden Beispiels, ob je zwei von ihnen stochastisch unabhängig sind und ob A, B, C „insgesamt" stochastisch unabhängig sind, d. h. ob gilt

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Beispiel: Es wird gleichzeitig mit zwei regulären Würfeln mit je 6 Seiten mit den Zahlen 1, 2, ..., 6 gewürfelt; die zufälligen Ereignisse seien:

A: beim 1. Würfel liegt eine gerade Zahl oben,

B: beim 2. Würfel liegt eine ungerade Zahl oben,

C: es liegt bei beiden Würfeln eine gerade oder bei beiden Würfeln eine ungerade Zahl oben.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeiten für die auftretenden zufälligen Ereignisse können im Sinne der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt werden, d. h. z. B.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten oben liegender Zahlen, bei denen das Ereignis } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten oben liegender Zahlen}}$$

Zusatzfrage: Welche allgemeine Aussage gestattet das Ergebnis dieses Beispiels?

Berufsbild: Geophysiker

Die Geophysik umfaßt die Physik der festen Erde, der Wasserhülle (Ozeanologie), der Lufthülle (Meteorologie) und der hohen Atmosphäre. Eine besondere volkswirtschaftliche Bedeutung besitzt sie für den Nachweis von nutzbaren mineralischen Rohstoffen.

Bereits seit langer Zeit besteht eine fruchtbare Wechselwirkung zwischen der Geophysik und der Mathematik. So hat das Problem eines flüssigen, rotierenden Erdkörpers, bei dem zwischen der Massenanziehung und der Fliehkraft Gleichgewicht herrscht, die Mathematiker zu Untersuchungen der Erdgestalt angeregt (*Newton, Huygens, Clairant*). Diese Arbeiten bildeten wiederum den Anlaß zu Vermessungen von Meridianbögen (z. B. *Clairant* und *Maupertius* 1736). Es sei auch daran erinnert, daß unser Metermaß nach der *Französischen Revolution* als 10 Millionster Teil eines Meridianquadranten, gemessen zwischen Pol und Äquator, definiert wurde.

Die Analyse des Erdmagnetismus führte *C. F. Gauss* auf verschiedene mathematische Probleme (Potentialtheorie, Kugelfunktionen). Ihm gebührt ferner das Verdienst, gemeinsam mit *Weber* 1836 bis 1841 auf Anregung von *Alexander von Humboldt* erstmalig gleichzeitige Messungen des Magnetfeldes an 44 verschiedenen Orten auf der ganzen Welt zu vereinbarten Zeiten organisiert zu haben.

Zur Darstellung des auf der Erde beobachteten Magnetfeldes benutzte *C. F. Gauss* Reihenentwicklungen nach speziellen Funktionen, jedoch mußten besondere mathematische Hilfsmittel ersonnen werden, um die punktweise gemessenen Werte durch diese Funktionen darzustellen. Die Auswertung erbrachte wesentliche neue Erkenntnisse, man erkannte das Erdinnere als Quelle des überwiegenden Teils des Magnetfeldes. Diese und weitere später erzielte Ergebnisse führten zu der jahrzehntelang vertretenen Hypothese eines aus Nickel und Eisen bestehenden Erdkernes.

Bei der Erkundung von Rohstoffen werden ebenfalls physikalische Messungen an der Erdoberfläche durchgeführt. Für Übersichtsvermessungen erfolgen z. B. Messungen der Schwerkraft, die entsprechend der ungleichmäßigen Verteilung der Dichte im Untergrund an verschiedenen Punkten unterschiedliche Werte besitzt, (Ursache: gestörter geologischer Aufbau der Erdkruste) oder auch magnetische Messungen, die infolge unterschiedlicher Magnetisierbarkeit der Gesteine lokale Abweichungen ergeben. Während es auf Grund bekannter physikalischer Gesetze relativ einfach ist, von einem vorgegebenen Modell der Erdkruste die an der Erdoberfläche zu erwartenden Fehler zu berechnen, bereitet die für die Praxis wichtige Aufgabe, aus den gemessenen Werten die Lage der Grenzflächen zwischen verschiedenen Gesteinen zu bestimmen, große Schwierigkeiten. Für ein einzelnes geophysikalisches Verfahren ist diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar, deshalb werden oft verschiedene Verfahren kombiniert. Andererseits werden die Meßwerte eines Untersuchungsgebietes in ihrer Gesamtheit nach verschiedenen mathematischen Verfahren bearbeitet, um die Vieldeutigkeit einzuschränken.

Die meisten dieser Verfahren erfordern so viel Rechenarbeit, daß sie nur mit elektronischen Rechenmaschinen durchgeführt werden können. Die Entwicklung neuer Verfahren auf der Grundlage guter mathematisch-physikalischer Kenntnisse und ihre sinnvolle Anwendung auf geologische Probleme gehören zu den Hauptaufgaben des Geophysikers.

Seit etwa 1920 werden durch Sprengungen künstlich erzeugte seismische Wellen benutzt, um im oberen Erdkrustenbereich den geologischen Aufbau zu untersuchen, woraus insbesondere Hinweise auf Erdöl- und Erdgaslagerstätten abgeleitet werden können. Einerseits ist der Ausbreitungsvorgang der seismischen Wellen infolge von Reflexionen und Berechnungen an einer Vielzahl von Schichtgrenzen der Erdkruste sehr kompliziert, und andererseits werden die Anforderungen an die Genauigkeit der Bestimmung der Lage und Tiefe geologischer Schichten immer größer. Da nach diesen Angaben kostspielige Tiefbohrungen niedergebracht werden müssen, wird laufend an der Verbesserung der Auswertemethoden gearbeitet. Während früher eine rein manuelle Bearbeitung erfolgte, setzt man seit einigen Jahren auch hier elektronische Rechenmaschinen ein, für die spezielle Seismik-Programme entwickelt wurden.

Die mathematisch-physikalische Theorie der Ausbreitung seismischer Wellen ist die Grundlage dieser Programme.

Auch in unserer Republik besteht ein solches Bearbeitungszentrum für geophysikalische Messungen. Absolventen unserer Hochschulen sind hier an der Verbesserung vorhandener und Entwicklung neuer Rechenprogramme aktiv tätig, um auf diese Weise einen Beitrag für die Sicherung der Rohstoffbasis unserer sozialistischen Industrie zu liefern.

R. Rösler

Übersicht über den Ablauf des Studiums

	Stunden etwa
Gesellschaftswissenschaften	360
Sprachen, Sport	330
Mathematik	400
Höhere Mathematik	
Lineare Algebra, Funktionstheorie	
Stochastik, Kybernetik, Rechentechnik	
Physik	420
Experimentalphysik, Praktikum	
Kernphysik, Theoretische Physik	
Geologie, Mineralogie, Geochemie	350
Lagerstättenlehre	
Geophysik	450

Die Dauer des Studiums beträgt vier Jahre und beginnt mit einem Grundstudium, dem sich das Fachstudium anschließt. Nach $3\frac{1}{2}$ Jahren findet eine Hauptprüfung statt, nach der die Berufsbezeichnung Geophysiker mit Hochschulabschluß geführt werden kann. Danach kann eine Diplomarbeit angefertigt werden und der akademische Grad eines Diplom-Geophysikers erworben werden. Einsatzmöglichkeiten für Geophysiker bestehen in der geologischen Industrie, im Bergbau und teilweise in Forschungsinstituten. Die Betonung der Grundlagenausbildung ermöglicht einen vielseitigen Einsatz in verschiedenen Gebieten. Die internationale Zusammenarbeit der sozialistischen Länder und die notwendige Auswertung der Literatur erfordern gute Sprachkenntnisse, besonders der russischen Sprache.

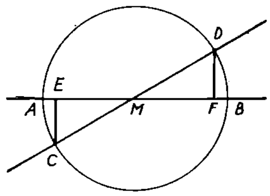
Für fachlich und gesellschaftlich bewährte Absolventen besteht die Möglichkeit im Rahmen des Forschungsstudiums, einer Aspirantur oder neben ihrer beruflichen Tätigkeit eine Dissertation anzufertigen und den akademischen Grad eines Dr. rer. nat. zu erwerben.

Einige Aufgaben aus den Abschluß- und Reifeprüfungen der Schuljahre 1970/71 und 1971/72

Alljährlich finden für viele tausende Schüler der 10. bzw. der 12. und 13. Klassen (Berufsausbildung mit Abitur) schriftliche Abschluß- und Reifeprüfungen im Fach Mathematik statt. Diese Prüfungen geben bis zu einem bestimmten Grade Aufschluß über das erreichte Niveau der mathematischen Bildung unserer Schüler, wenn sie auch nicht in der Lage sind, einzig und allein den Stand des vorhandenen Wissens und Könnens beim Schüler widerzuspiegeln.
Zu einem Zeitpunkt, an dem die neuen Planungsunterlagen in allen Klassen verbindlich geworden sind, sollen einige ausgewählte Aufgaben sowohl den Schwierigkeitsgrad der Abschluß- und Reifeprüfungen aufzuzeigen, als auch auf die neuen Elemente des mathematischen Unterrichtsstoffes hinweisen.

Aus den Abschlußprüfungen der Schuljahre 1970/71 und 1971/72:

Aufgabe: Durch den Mittelpunkt M eines Kreises verlaufen zwei Geraden, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Sie schneiden den Kreis in den Punkten A und B bzw. C und D. Von C und D sind die Lote auf die durch A und B verlaufende Gerade gefällt. Die Fußpunkte der Lote seien E und F (siehe Skizze).



a) Beweisen Sie, daß die Dreiecke MEC und MFD kongruent sind! (Benutzen Sie dabei einen der Kongruenzsätze!)
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{ME}$ für $\overline{MC} = 13$ cm und $\overline{CE} = 5$ cm!
Skizze (nicht maßstäblich)

Lösung: Die gegebene Skizze zeigt:
$\overline{MC} = \overline{MD}$ = Radius des Kreises,
$\sphericalangle MEC = \sphericalangle MFD = 90°$, $\overline{ME} = \overline{MF}$,
$\sphericalangle EMC = \sphericalangle FMD$ (Scheitelwinkel), $\sphericalangle ECM = \sphericalangle FDM$ (Wechselwinkel).
Für den geforderten Beweis können demzufolge alle vier Kongruenzsätze verwendet werden, was die Lösung sehr stark vereinfacht.
An einem Kongruenzsatz soll der Lösungsweg nochmals gezeigt werden.
Satz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
Da $\overline{ME} = \overline{MF}$, $\overline{MC} = \overline{MD}$ und $\sphericalangle CME = \sphericalangle DMF$, gilt also $\triangle MEC \cong \triangle MFD$. Der Teil b) der Aufgabe wird mittels des Satzes des Pythagoras gelöst:

$$(\overline{MC})^2 = (\overline{ME})^2 + (\overline{EC})^2$$
$$(\overline{ME})^2 = (\overline{MC})^2 - (\overline{EC})^2$$
$$\overline{ME} = \sqrt{(\overline{MC})^2 - (\overline{EC})^2}$$
$$\overline{ME} = \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$\overline{ME} \quad \sqrt{169 - 25}$$
$$\overline{ME} = \sqrt{144}$$
$$\overline{ME} = 12$$

Die Länge der Strecke $\overline{ME}$ beträgt 12 cm. $(n \neq 0)$.

Aufgabe: Gegeben ist eine natürliche Zahl n
a) Schreiben Sie in allgemeiner Form die der Zahl n unmittelbar vorangehende natürliche Zahl (Vorgänger) und die unmittelbar folgende natürliche Zahl (Nachfolger) auf!
b) In einem speziellen Fall sei das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von n die Zahl 323. Berechnen Sie n mit Hilfe einer Gleichung!
c) Geben Sie eine natürliche Zahl zwischen 400 und 500 an, die sich ebenfalls als Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen läßt!

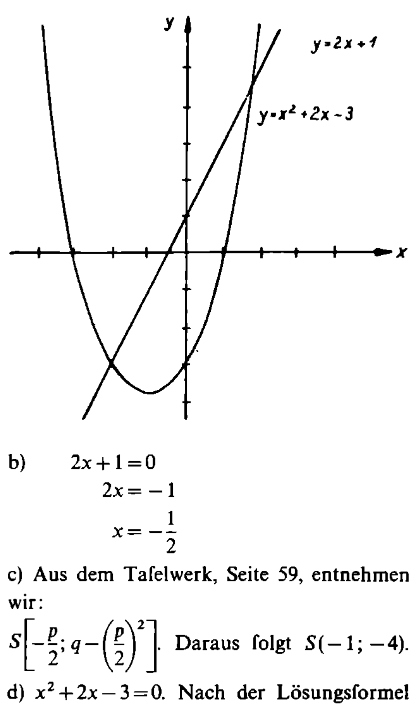
Lösung: a) Wenn die gegebene Zahl n heißt, muß der Vorgänger $n-1$, der Nachfolger $n+1$ sein; also $n-1$, n, $n+1$.
b) Die Lösung dieser Aufgabe führt auf eine rein quadratische Gleichung:

$$(n-1)(n+1) = 323$$
$$n^2 - 1 = 323$$
$$n^2 = 324$$
$$n_1 = +18$$
$$n_2 = -18$$

Da es sich bei der Aufgabe nur um natürliche Zahlen handelt, scheidet die zweite Lösung aus.
c) Hierbei überlegen wir:
1. Es muß wieder eine natürliche Zahl sein.
2. Sie muß zwischen 400 und 500 liegen.
3. Sie muß, um 1 vermehrt, eine Quadratzahl ergeben.
Wir finden im Tafelwerk: $21^2 = 441$ und $22^2 = 484$. Daraus ergeben sich die Möglichkeiten $20 \cdot 22 = 440$ und $21 \cdot 23 = 483$.
Für die Lösung der Aufgabe kommen die Zahlen 440 und 483 in Betracht, wobei laut Aufgabenstellung nur eine angegeben werden braucht.

Aufgabe: Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen
(1) $f_1(x) = y = 2x + 1$,
(2) $f_2(x) = y = x^2 + 2x - 3$ mit $x \in P$.
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_1!
c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel. Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!
e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!

Lösung: a)



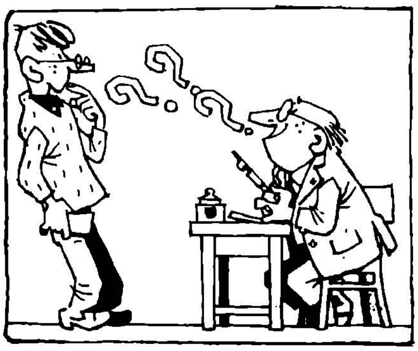
b)
$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

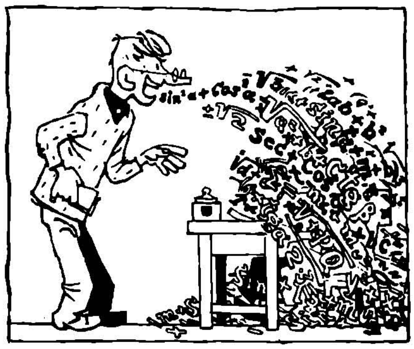
c) Aus dem Tafelwerk, Seite 59, entnehmen wir:
$S\left[-\frac{p}{2}; q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$. Daraus folgt $S(-1; -4)$.
d) $x^2 + 2x - 3 = 0$. Nach der Lösungsformel für die quadratische Gleichung:

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$x_{1;2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$$

e) Hierbei müssen beide Gleichungen zum Schnitt gebracht werden.

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$
$$x^2 = 4$$
$$x_1 = +2; \quad y_1 = +5$$
$$x_2 = -2; \quad y_2 = -3$$





Ein Vorkommnis bei der Prüfung

Aufgabe:
Gegeben ist die lineare Ungleichung

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$$

a) Lösen Sie diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!

b) Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:

1. Die Lösungsmenge L_1 obiger Gleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
2. die Lösungsmenge L_2 obiger Gleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4 < x < 1$;
3. die Menge M aller Elemente, die sowohl in L_1 als auch in L_2 vorkommen!

Lösung:

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$$

a) $$\frac{16x+8}{5} < 3x+2$$

$$16x+8 < 5(3x+2)$$

$$16x+8 < 15x+10 \qquad x < 2$$

b) $L_1 = \{0; 1\}$

$L_2 = \{-3; -2; -1; 0\}$

$M = \{0\}$

Aus den Reifeprüfungen der Schuljahre 1970/71 und 1971/72:

Aufgabe: Durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2+q}{x^2+1} \quad x, q \text{ reell}; q \neq 1)$$

sind rationale Funktionen gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob diese Funktionen für $q > 0$ bzw. für $q < 0$ Nullstellen besitzen! Begründen Sie Ihre Aussage!

b) Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$!

c) Jede derartige Funktion hat genau eine lokale Extremstelle. Berechnen Sie diese Extremstelle und den zugehörigen Funktionswert! (Hinweis: Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung kann auf Grund der Aufgabenstellung verzichtet werden.)

Lösung: $x^2 + q = 0$

$q > 0 \Rightarrow x^2 = -q$ (keine Nullstellen im Bereich der reellen Zahlen)

$q > 0 \Rightarrow x^2 = q$

$x = \pm\sqrt{q}$ (zwei reelle Nullstellen)

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+q}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{q}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

c) $$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+q)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x-2qx}{(x^2+1)^2}$$

$2x(1-q) = 0$

$x_E = 0 \quad y_E = q$

Aufgabe: Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch $a_n = 3n(n-1) \quad (n \geq 1)$.

a) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Zahlenfolge!

b) Bestimmen Sie die Partialsummen s_1, s_2 und s_3 der gegebenen Zahlenfolge!

c) Das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen kann in der Form $s_n = n^3 + r \cdot n \quad (r \in P;\ n \in N;\ n \geq 1)$ dargestellt werden.

Bestimmen Sie den Wert der Variablen r unter Verwendung der im Teil b) berechneten Partialsummen!

d) Setzen Sie den von Ihnen ermittelten Wert der Variablen r in die in c) angeführte Gleichung ein!

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß der so erhaltene Ausdruck das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen ist!

Lösung:

a) $a_1 = 0 \quad (n = 1$ in a_n eingesetzt)

$a_2 = 6$

$a_3 = 18$

b) $s_1 = 0$; $s_2 = 0+6 = 6$; $s_3 = 0+6+18 = 24$

c) Die Lösung kann durch Einsetzen von s_1 oder s_2 oder s_3 erfolgen.

Lösung mit s_1: $s_n = n^3 + r \cdot n$

$0 = 1^3 + 3 \cdot 1$

$r = -1$

d) $s_n = n^3 - n$

I.A.: $n = 1 \Rightarrow s_n = 0$

I.V.: $s_k = k^3 - k$

I.B.: $s_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$

I.Bew.: $s_{k+1} = s_k + 3(k+1)k$

[Für $3n(n-1) = a_n$ setzen wir $a_{n+1} = 3(n+1)(n+1-1) = 3(n+1)n$]

$s_{k+1} = k^3 - k + 3k^2 + 3k$

$= k^3 + 3k^2 + 2k$

$= (k+1)^3 - (k+1)$ w.z.b.w.

G. Püffeld

Zwischen den Prüfungen

Da liege ich,
vom Strand bewacht,
der lockrem Sand befiehlt,
mich festzuhalten.
Plus- und Minuszeichen
hab ich
hinweggespült.

Aber manchmal,
einer Wolke nachsehend,
ertapp ich mich
bei dem Gedanken;
Ähnelt sie nicht
einem Wurzelzeichen?

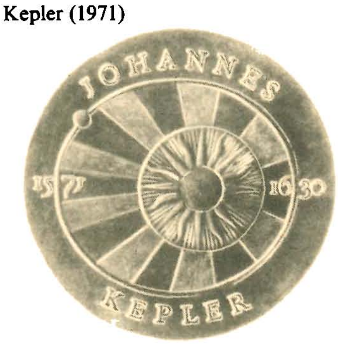
Dann weiß ich:
Die Prüfungen beginnen erst.

Kurt Scharf

2. Zentrales Poetenseminar der FDJ in Schwerin aus: JW 31. 8. 71, S. 5

Denkmal des *N. Copernicus* in Warschau

Gedenkmünze der DDR (5 M), herausgegeben zu Ehren des 400. Geburtstages von J. Kepler (1971)



Nicolaus Copernicus

Teil 3

X

Der Kampf um die Anerkennung des heliozentrischen Weltbildes war schwer, lang und opferreich.
Die katholische und die lutherische Kirche sprachen sich gegen das copernicanische System aus. Als der Naturphilosoph *Giordano Bruno* aus der heliozentrialen Auffassung weltanschauliche Konsequenzen zog, stellte ihn die Inquisition vor Gericht; im Jahre 1600 wurde er in Rom auf dem Scheiterhaufen hingerichtet.
Der große italienische Naturforscher *Galileo Galilei* trat für das heliozentrische Weltbild ein; im Jahre 1633 wurde er zum Widerruf gezwungen. Er starb im Gewahrsam der Inquisition. Die Bücher von *Copernicus* selbst und alle die Werke, die die heliozentrische Auffassung vertraten, wurden auf den päpstlichen Index der verbotenen Bücher gesetzt und die Lehre des Copernicus als „förmlich ketzerisch" erklärt. Dies blieb so, noch bis zum Jahre 1833!
Der hervorragende deutsche Astronom und Mathematiker *Johannes Kepler* (siehe *alpha*, Heft 3/72) war einer der glühendsten Anhänger von *Copernicus*. Mit großem Mut verbreitete er die heliozentrische Auffassung und fügte der Lehre des *Copernicus* die neue Einsicht hinzu, daß sich die Planeten in Ellipsen um die Sonne bewegen. Auf der Keplerschen Grundlage errichtete *Isaac Newton* im 17. Jahrhundert die Fundamente der mathematischen Himmelsmechanik, die auf Grund ihrer großen theoretischen und praktischen Erfolge auch zur Anerkennung des heliozentrischen Weltbildes unter den Naturwissenschaften führte.
Indessen fehlte um diese Zeit noch ein direkter, experimenteller Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne. Bei der Bewegung der Erde mußten eine Aberration* des Lichtes und eine Parallaxe** bei der Beobachtung der Fixsterne nachzuweisen sein. Doch konnten beide physikalische Effekte wegen ihrer Kleinheit erst mit vervollkommneten Instrumenten nachgewiesen werden, die Aberration 1728 durch den Engländer *James Bradley*, die Fixsternparallaxe 1833 durch *Friedrich Wilhelm Bessel*. Damit war nun auch der experimentelle Nachweis der Richtigkeit des heliozentrischen Systems unwiderlegbar erbracht und der Triumph der Lehre von *Copernicus* vollkommen.

XI

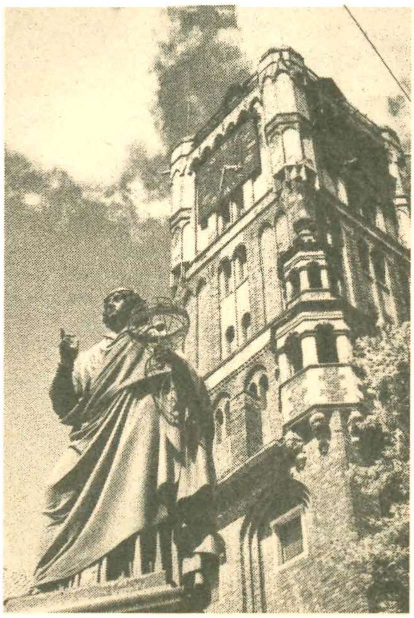
Auch in der Deutschen Demokratischen Republik werden Werk und Person des *Nicolaus Copernicus* aus Anlaß seines 500. Geburtstages gewürdigt werden. Die vielfältigen Vorbereitungen werden durch ein bei der Akademie der Wissenschaften der DDR bestehendes Copernicus-Komitee geleitet, dessen Vorsitzender der Vizepräsident der Akademie, *Prof. Dr. Scheel*, ist.
Eine Fülle von Veranstaltungen an der Akademie, an den Hochschulen und Oberschulen, im Rahmen der Urania-Gesellschaft u. a. m. wird die Leistung von *Copernicus* einem breiten Publikum nahebringen. Die Verlage der DDR werden Publikationen über *Copernicus* vorlegen, deren Ziel es ist, das Wirken von *Copernicus* darzustellen, das durch tiefgreifende Umwälzungen auf dem Wege zum Fortschritt geführt hat, zur Begründung des wissenschaftlichen astronomischen Weltbildes.

H. Wußing

* *Aberration:* a) Eine infolge der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes und der Bewegung der Erde hervorgerufene *scheinbare* Ortsveränderung der Gestirne.
b) Die *jährliche* Aberration, die dadurch bewirkt wird, daß ein Beobachter auf der Erde infolge deren Rotation in einem Kreis um die Erdachse bewegt wird. Infolge der Erdrotation *erscheint* für einen Beobachter am Erdäquator ein Stern im Meridian um einen Winkel von 0,32″ nach Osten verschoben. Mit wachsender geographischer Breite φ des Beobachtungsortes und damit abnehmender Bewegungsgeschwindigkeit wird auch der Aberrations-Winkel α geringer. Es gilt $\alpha = 0{,}32'' \cdot \cos\varphi$.

** Parallaxe: Eine Standortveränderung eines Beobachters gegenüber einem bestimmten Himmelskörper ergibt sich bei der Bewegung der Erde um die Sonne. Infolge dieses dauernden Standortwechsels erscheinen die Himmelskörper von der Erde aus an verschiedene Punkte der Himmelskugel projiziert. Diese dadurch hervorgerufenen Ortsveränderungen werden als eine *parallaktische Bewegung* bezeichnet.

Leitungskollektiv der „Operation Fromburg"



Denkmal des *N. Copernicus* auf dem Markt von Toruń

Bücher anläßlich des 500. Geburtstages

M. Biskup: Mikołaj Kopernik

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler und Techniker

Etwa 140 Seiten mit etwa 10 Abb., kartoniert etwa 4,80 M

In der Broschüre wird *Nicolaus Copernicus* (lateinische Schreibweise des Namens) gewürdigt, der mit seinem heliozentrischen Weltsystem eine wesentliche Grundlage unseres modernen Weltbildes schuf. Auch seine umfangreiche politische Tätigkeit wird hier ausführlich dargestellt.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft · Leipzig

H. Wußing: Nikolaus Kopernikus

85 Seiten, 70 Abbildungen und Fotos, Ganzgewebe, 9,80 M

Mit diesem Buch wird in knapper, übersichtlicher Darstellung und reicher Ausstattung eine der Bedeutung der Ereignisse würdige Publikation vorgelegt. Denn „unter allen Entdeckungen und Überzeugungen", konnte Goethe noch sagen, „möchte nichts eine größere Wirkung auf den menschlichen Geist hervorgebracht haben, als die Lehre des Kopernikus."

Es ist besonderes Anliegen der Arbeit, die Kopernikanische Wendung im Weltbild und die bedeutende wissenschaftsgeschichtliche Persönlichkeit ihres Schöpfers vor dem kulturgeschichtlichen Hintergrund der Renaissance und des Zeitalters der großen geographischen Entdeckungen zu zeichnen.

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Operation Fromburg

Zu Ehren des polnischen Astronomen *Copernicus* rief der polnische Pfadfinderverband zu der Aktion „1001 Kleine Dinge" auf. Über 1500 Jugendliche erklärten sich bereit, nach

Fromburg zu fahren und dort an Verschönerungsarbeiten, Ausgrabungen (unter Anleitung von Wissenschaftlern), Anlegung von Parkanlagen, neuen Wegen usw. mitzuwirken. Die Mädchen und Jungen sind in Schulen, Zeltlagern und Touristenherbergen untergebracht. Die Hälfte des Tages ist der Freizeit (Wanderungen, Spiele, Touristikübungen usw.) gewidmet.

EOS „Heinrich Hertz" ehrt den großen Wissenschaftler

N. Copernicus zu ehren — seinen 500. Geburtstag würdig in den Unterricht und die außerunterrichtlichen Veranstaltungen einzubeziehen — bedeutet für die Schüler unserer Schule eine vielseitige Auseinandersetzung mit den Ergebnissen der modernen Astronomie und den astronomischen Erfahrungen eines halben Jahrtausends.

Im Astronomieunterricht wird das Leben und Wirken des verdienstvollen Astronomen und Mathematikers durch die Einbeziehung von Zitaten aus seinen Werken lebendig gemacht und sein zukunftsweisendes Gedankengut im heliozentrischen Weltbild diskutiert und gezeigt, daß er die Grundbausteine für die Arbeiten eines *J. Kepler* und *I. Newton* vorzeichnete. Durch eine gute Zusammenarbeit mit der Berliner *Archenhold*-Sternwarte ist die Möglichkeit geboten, ein Fünftel des Jahresstoffes des Astronomieunterrichts in den Ausstellungsräumen und dem Planetarium zu erarbeiten. Im *Copernicus*-Jahr werden dabei die Copernicusausstellung und der Copernicus-Gedenkplatz ein weiterer guter Anknüpfungspunkt sein.

Innerhalb des Schullebens spielt der *Heinrich-Hertz*-Wettbewerb eine bedeutende Rolle. In der diesjährigen Ausschreibung ist ein Thema dem Leben und Wirken *N. Copernicus* gewidmet; ein weiteres bestätigt die Ergebnisse seiner Fundamentalaussagen über das *3. Keplersche Gesetz* in der Form:

$$a^3 : u^2 (\mathfrak{M}_\circ + m_{pl}) = k,$$

für das auf dem Rechner SER 2d ein Programm ausgearbeitet wird, das es gestattet, die Größen a und m_{pl} auf sieben Stellen sowie u und $\mathfrak{M}_\circ$ auf vier Kommastellen auszudrücken.

Der Schwerpunkt unserer Arbeit liegt aber in der beobachtungstechnischen Unterweisung mit dem Schulfernrohr 63/840. (Jede Klasse, in der Astronomieunterricht durchgeführt wird, besitzt ein solches Fernrohr.) Jeder Schüler führt ein lehrplangerechtes Beobachtungsprogramm durch, wobei die Planung dafür voll in den Händen der Schüler liegt. Es bildet die Vorstufe einer schöpferischen astronomischen Tätigkeit im Sinne des Lebenswerkes *N. Copernicus*: von der unmittelbaren Anschauung zu theoretischen Kenntnissen zu gelangen. *R. Botschen*

Ersttagsbrief, herausgegeben am 12. 2. 1972 zu Ehren eines *Copernicus*-Symbosiums in Frombork

Aus der Graphentheorie
Teil 2

Zunächst noch eine Frage:
Findet ihr die beiden folgenden Aussagen zunächst nicht auch verblüffend?

Aussage 1: Die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Anzahl von Freunden haben, ist gerade.

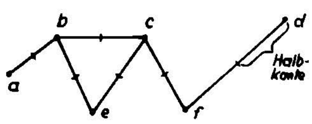
Aussage 2: Die Anzahl der Staaten, die bilaterale Verträge unterzeichnet haben, ist gerade.

Sicher wird es euch gelingen mit Hilfe des Satzes 2, dem wir uns nun sofort zuwenden wollen, beide Aussagen zu beweisen.

Nun zum bereits angekündigten ersten Satz:

Satz 1: Es seien $|X|=n$ die Anzahl der Knotenpunkte, $|U|$ die Anzahl der Kanten und $s_1, s_2, \dots, s_n$ die Valenzen der Knotenpunkte des Graphen $G=[X, U]$.
Dann gilt
$\sum_{i=1}^{n} s_i = 2|U|$, d. h. die Summe der Valenzen aller Knotenpunkte des Graphen G ist gleich der doppelten Kantenzahl.

Beweis: Wir denken uns jede Kante durch zwei Halbkanten ersetzt (Bild 9), so daß jede Halbkante mit genau einem Knotenpunkt inzidiert. Hat der Knotenpunkt $i \in X$ die Valenz s_i, so inzidiert er mit genau s_i Halbkanten, d. h. $\sum_{i=1}^{n} s_i$ ist gleich der Summe aller Halbkanten und damit gleich der doppelten Kantenzahl.



Wenn ihr die Graphen der Bilder 2 und 3b betrachtet, so werdet ihr einen wesentlichen Unterschied feststellen. Im Graphen des Bildes 3b können wir von jedem Knotenpunkt aus jeden der übrigen Knotenpunkte des Graphen erreichen, während wir im Graphen des Bildes 2 von den Knotenpunkten E oder F aus zu keinem der Knotenpunkte A, B, C, D gelangen können. Diesen Unterschied wollen wir exakt erfassen. Dazu müssen wir wieder einige neue Begriffe vereinbaren. (Def. 5 bis 9)

Definition 5: $(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_4)(a_4, a_5) \dots (a_{n-1}, a_n)$ heißt eine *Kantenfolge.* Hierbei werden durch a_i Knotenpunkte, durch (a_i, a_j) Kanten bezeichnet.

Die Kantenfolge heißt *geschlossen,* wenn $a_n = a_1$ ist, sonst *offen.*

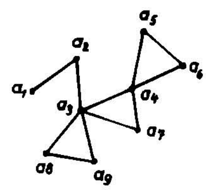
Bemerkung: In einer Kantenfolge können gleiche Kanten mehrmals auftreten.

Definition 6: Eine Kantenfolge, in der jede Kante eines Graphen G höchstens einmal auftritt, heißt *Kantenzug.*

Bemerkung: Gleiche Knotenpunkte können mehr als einmal vorkommen.

Definition 7: Ein offener Kantenzug, in dem kein Knotenpunkt mehr als einmal vorkommt, heißt *Weg.*

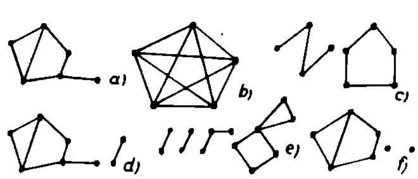
Definition 8: Kommt in einem Kantenzug jeder Knotenpunkt — mit Ausnahme des Anfangsknotenpunktes, der gleich dem Endknotenpunkt ist — genau einmal vor, so spricht man von einem *Kreis.*



Beispielsweise ist im Graphen des Bildes 10
$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9)(a_9, a_3)(a_3, a_7) \cdot (a_7, a_4)(a_4, a_6)(a_6, a_5)(a_5, a_4)(a_4, a_7)(a_7, a_3) \cdot (a_3, a_9)(a_9, a_8)(a_8, a_3)(a_3, a_2)$
eine Kantenfolge, aber kein Kantenzug.
$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9)(a_9, a_3)(a_3, a_7)$ ist eine Kantenfolge.
$(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_3)$ ist ein Kreis und $(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_5)$ „*ein Weg, der den Knotenpunkt a_1 mit dem Knotenpunkt a_5 verbindet.*"

Definition 9: Ein Graph G, in dem je zwei Knotenpunkte a_i, a_j durch (mindestens) einen Weg verbunden ist, heißt *zusammenhängend.*
Nicht zusammenhängende Graphen bestehen aus mindestens zwei (zusammenhängende) *Komponenten.*

Beispiele: Der Graph in Bild 2 ist also ein nichtzusammenhängender Graph mit zwei Komponenten. —
Jeder Graph mit mehr als einem Knotenpunkt, der einen isolierten Knotenpunkt enthält, ist nicht zusammenhängend. —



Die Graphen c), bzw. d), bzw. e), bzw. f) des Bildes 11 sind nicht zusammenhängend und bestehen aus 2 bzw. 4 bzw. 3 Komponenten.
Wir wollen nun endlich einmal wieder die etwas öde Kette der — sehr notwendigen — Definitionen durchbrechen; denn wir sind bereits in der Lage, zwei weitere einfache Sätze in der üblichen graphentheoretischen Terminologie zu formulieren und zu beweisen.

Satz 2: In jedem zusammenhängenden Graphen G ist die Anzahl der Knotenpunkte ungerader Valenz gerade.

Beweis:
Es sei $\sum_1 = \sum_{s_i \text{ ungerade}} s_i$ *und* $\sum_2 = \sum_{s_i \text{ gerade}} s_i$.
Nach Satz 1 ist $\sum_1 + \sum_2 = \sum_{i=1}^{|X|} s_i = 2|U|$.
Es ist $\sum_1 = 2|U| - \sum_2$. (*)
$\sum_2$ als Summe gerader Zahlen ist eine gerade Zahl, $2|U|$ ist ebenfalls gerade und damit auch $2|U| - \sum_2$.
Da die rechte Seite der Gleichung (*) eine gerade Zahl ist, ist es auch die linke: $\sum_1$.
Wir zeigen indirekt, daß $\sum_1$ eine gerade Anzahl (ungerader) Summanden enthält, indem wir annehmen, das Gegenteil sei der Fall und diese Annahme zum Widerspruch führen.
Wir nehmen also an, es sei $\sum_1 = \sum_{i=1}^{2m-1} (2n_i - 1)$.
(Jede ungerade Zahl kann bekanntlich in der Form $2q-1$ mit natürlichem q dargestellt werden.)

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{i=1}^{2m-1} 2n_i - \sum_{i=1}^{2m-1} 1 = 2\sum_{i=1}^{2m-1} n_i - (2m-1)$$
$$= 2\sum_{i=1}^{2m-1} n_i - 2m + 1 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2m-1} n_i - 2m + 2 - 1$$
$$2\left(\sum_{i=1}^{2m-1} n_i - 2 + 1\right) - 1 = 2q + 1.$$

$\sum_1$ ist also eine ungerade Zahl. Unsere Annahme hat damit zum Widerspruch geführt, wir hatten uns ja überlegt, daß $\sum_1$ gerade ist.
Damit haben wir gezeigt, daß $\sum_1$ durch eine gerade Anzahl von Summanden entsteht, diese ist aber gleich der Anzahl der Knotenpunkte geraden Valenz in G.
Unsere neu gewonnenen Erkenntnisse wollen wir wieder durch das Lösen einiger Aufgaben erhärten.

▲5▲ Sieben Freunde, die in Urlaub fahren, vereinbarten, daß jeder von ihnen an drei von den übrigen sechs eine Ansichtskarte schicken sollte.
Kann diese Korrespondenz so organisiert werden, daß jeder nur denjenigen Freunden schreibt, von denen er im Laufe des Urlaubs Ansichtskarten erhält?

▲6▲ Man entscheide, ob ein Graph mit sechs Knotenpunkten existiert, deren Valenzen der Reihe nach 2, 3, 3, 4, 4, 4 sind.

▲7▲ Man entscheide, ob ein Graph mit mehr als einem Knotenpunkt existiert, für den zwei Knotenpunkte niemals die gleiche Valenz haben.

▲8▲ G sei der vollständige n-Graph: Man wähle in G zwei Knotenpunkte x und y aus und bestimme die Anzahl aller Wege im Graphen G, die in x beginnen und in y enden.

▲9▲ $G=[X, U]$ sei ein (endlicher) schlichter Graph, in dem jeder Knotenpunkt die Valenz g hat. Es ist zu beweisen, daß dann $2|U|=g\cdot|X|$ gilt.

▲10▲ G sei der vollständige n-Graph. Wieviel verschiedene Kreise lassen sich in G finden?

W. Voß

Zum 500. Geburtstag von N. Copernicus

● Die UNESCO hat beschlossen, den 500. Geburtstag des polnischen Astronomen am 19. 2. 1973 in Paris feierlich zu begehen. Eine einstimmig gebilligte Resolution unterstreicht die außergewöhnliche Bedeutung der Entdeckungen des N. C. Sie ruft alle Mitglieder und nationalen UNESCO-Kommissionen auf, den Geburtstag dieses großen Wissenschaftlers zu ehren und „die internationale wissenschaftliche Zusammenarbeit, vor allem auf dem Gebiet der Kosmosforschung, zu entwickeln und sie im Geiste des Friedens und des Fortschritts der gesamten Menschheit zugänglich zu machen."

● Ende Februar 1973 läuft in den Filmtheatern der DDR ein zweiteiliger Film (in Farbe) an, der das Leben und Wirken von N. C. zeigt (Koproduktion VR Polen/DDR).

● Die Zeitschrift „Astronomie in der Schule" (Herausgeber: Verlag Volk und Wissen) gab ein Sonderheft zu Ehren des N. C. heraus (6/72). Es eignet sich besonders für den Unterricht sowie für eine intensive außerunterrichtliche Arbeit.

● Der mathematisch-physikalische Salon im Dresdener Zwinger ehrt N. C. durch eine Ausstellung.

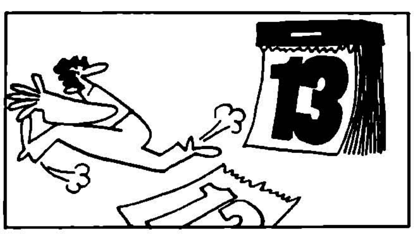
● Zu Ehren des N. C. werden in der VR Polen 500 Copernicus-Kabinette, ausgestattet mit modernen Lehrmitteln für den naturwissenschaftlichen Unterricht, aus gesellschaftlichen Mitteln eingerichtet.

Ach du grüne Neune!

Sprichwörtliche Redensarten

Wir färben die **Neun grün**, kommen vom **Hundertsten ins Tausendste**, **geben unseren Dreier dazu** oder **machen jemandem ein X für ein U vor**. Und doch ist uns der Ursprung solcher Redensarten oft **ein Buch mit sieben Siegeln**.
Daraus kann man nur **das Fazit ziehen**, sie zu erklären.

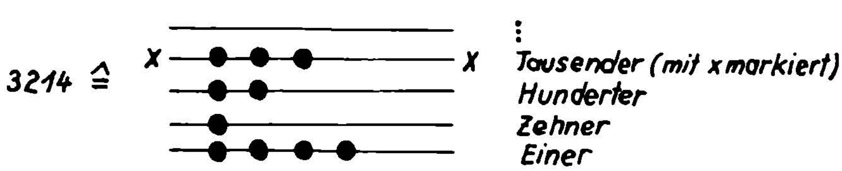
Eigentlich ist es ein Lob für das Zählen und Rechnen, wenn man es zum Kennzeichen für das Verhalten macht: **Er tut, als ob er nicht bis drei zählen könnte**, meint ja, daß sich jemand sehr dumm anstellt. Es ist wohl auch ziemlich einfach, bis drei zu zählen ...
Diese Redensart findet sich an verschiedenen Stellen, so z. B. bei dem Wiener Prediger *Abraham a Santa Clara* in „Mercks Wien" von 1679: „so einfältig, daß sie nicht koennten drey zehlen" oder — etwas abgewandelt — in Luthers Tischreden:
„stellet sich also sehr schwach, als kuendte er nicht vier zehlen".
Aber wenn wirklich jemand nicht bis drei zählen kann, dann fahren sicher viele entrüstet in die Höhe mit einem:
„Jetzt schlägts dreizehn!"



Hat es schon irgendwann dreizehn Mal geschlagen? Bei normalen Uhren sicher nicht, zumal auch die durchgängige Zählung der Stunden erst mit aufkommender Industrialisierung eingeführt wurde. Es wäre also etwas Ungewöhnliches, nicht mit rechten Dingen Zugehendes, wenn es dreizehn Mal schlüge, d. h. — nach mystischer Vorstellung —: der Teufel hat seine Hand im Spiel.
Diese abergläubische Vorstellung ließ besonders den 13. eines Monats zum Inbegriff eines unglücklichen Tages werden.
Und wenn man am 13. die Abmachung trifft, **in acht Tagen** wieder zusammenzukommen, meint man sicher den 20., also zwischen den beiden Terminen die Zeitspanne von einer Woche. Diese hat aber doch nur sieben Tage!?
Die Ursache hierfür liegt in einer mittelalterlichen Rechtsformel.
Alle sechs Wochen wurde eine ordentliche Gerichtsversammlung („Ding") abgehalten. Mußte man nach Gerichtsbeschluß ein Jahr warten (z. B. in Erbschaftsangelegenheiten), so wurde diese Sache auf dem Ding nach diesem Jahr, also insgesamt nach einem Jahr und sechs Wochen verhandelt. Für den kürzeren Zeitraum einer Woche war die analoge Zugabefrist ein Tag (im Französischen auch: „quinze jours" für zwei Wochen, wörtlich 15 Tage).
Nach Adam Ries ist also hier auf alle Fälle etwas falsch, denn mit dieser Redensart pflegt man die Richtigkeit einer Rechnung zu bestätigen und würdigt damit gleichzeitig die großen Verdienste des Annaberger Rechenmeisters. *A. Ries* (*1492 in Staffelstein b. Bamberg, † 1559 in Annaberg) verfaßte die volkstümlichsten und verbreitetsten (weil deutsch geschriebenen und pädagogisch gut aufgebauten) Rechenbücher des 16. Jahrhunderts, in denen er — aufbauend auf Altes — das noch neue Ziffernrechnen verbreitete und viel praktische Beispiele gab.
Jetzt sind wir schon von sich dumm anstellenden Leuten, die nicht bis drei zählen können, zu einem bedeutenden Mann der mittelalterlichen Mathematik gekommen — sozusagen **vom Hundertsten ins Tausendste**, von einem Thema zum anderen. Ihr werdet's vielleicht nicht glauben — wir bleiben mit diesen Worten bei Adam Ries. In Wirklichkeit hat diese Wendung nämlich folgenden Ursprung: Ende des 15. bis ins 17. Jahrhundert (also zu Adam Ries' Zeit!) wurde sehr viel das Rechenbrett benutzt, auf dem waagerechte Linien gezogen waren, die den Stellenwert von aufgelegten Marken (sog. Rechenpfennigen) festlegten: auf der untersten Linie die Einer, dann die Zehner, die Hunderter usf. („Rechnen auf der Linien"). — Siehe Abb. —

Den ursprünglichen Wortlaut dieser Redensart findet man bei *Agricola* (1529): „Er wirfft das hundert in tausent", d. h. der Rechenpfennig wird auf die falsche Linie gelegt.

Ch. Pollmer



Kleine Worte Große Wirkung Teil 3

„Wenn - - -, so . . ." und „Wenn . . ., so - - -"

Als Klaus in seiner Mathematikarbeit begründete, daß die Zahl 3 741 111 durch 3 teilbar ist, schrieb er:

„Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Quersumme dieser Zahl durch 3 teilbar."

Hans dagegen hatte geschrieben:

„Da die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar"

und erhielt die volle Punktzahl.

Klaus war nun der Meinung, daß beide Aussagen dasselbe zum Ausdruck bringen. Ist das wirklich so?

Zunächst sei erst einmal geklärt, daß es sich bei den obigen Sätzen wieder um Aussagenverbindungen handelt, die mit der Wendung „wenn –, so" gebildet werden. Eine solche Aussagenverbindung nennt man auch *Implikation*.

Bei den uns bisher bekannten Aussagenverbindungen (Konjunktion, Alternative, Disjunktion) spielte die Reihenfolge der Teilaussagen für die Entscheidung, ob die Aussage wahr ist, keine Rolle.

Bei der Implikation ist das nicht so. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Der Satz

Wenn *eine Zahl durch* 2^3 *teilbar ist,* **so** *ist sie auch durch 2 teilbar*

hat die Form „wenn – – –, so . . .". Er ist wahr. In solchen Sätzen nennt man den ersten Teil (vor dem Komma) oft *Voraussetzung*, den zweiten Teil *Behauptung*.

Vertauscht man nun die Voraussetzung und die Behauptung, so erhält man die *Umkehrung* dieses Satzes:

Wenn *eine Zahl durch 2 teilbar ist,* **so** *ist sie auch durch* 2^3 *teilbar.*

Dieser Satz ist falsch.

Betrachten wir einmal die Begründungen von Hans und Klaus:

Hans schrieb:

Wenn die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl durch 3 teilbar.

Klaus dagegen schrieb die *Umkehrung* dieses Satzes auf, nämlich:

Wenn die Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Quersumme dieser Zahl durch 3 teilbar.

Beide Sätze haben die „wenn-, so"-Form, aber deswegen kann man nicht sagen, daß sie dasselbe ausdrücken. Dabei spielt es gar keine Rolle, daß diesmal *beide* Sätze *wahr* sind. Sie unterscheiden sich trotzdem sehr wesentlich voneinander:

Die *Voraussetzung* von Hans lautet:

Die Quersumme der Zahl 3 741 111 ist durch 3 teilbar. Die daran anschließende Behauptung ist: Die Zahl 3 741 111 ist auch durch 3 teilbar.

Klaus setzt dagegen voraus, daß die Zahl durch 3 teilbar ist, und schließt daran die Behauptung an, daß auch die Quersumme durch 3 teilbar ist.

Die Umkehrung eines wahren Satzes kann wahr sein, sie kann aber auch falsch sein, wie wir oben gesehen haben. Deshalb ist es stets sehr wichtig, sich genau zu überlegen, ob die Umkehrung eines Satzes wahr ist oder nicht.

Ist die Umkehrung eines wahren Satzes wahr, so kann man beides (Satz und Umkehrung) in *einem* Satz formulieren, indem man die Redewendung „genau dann, wenn" bzw. „dann und nur dann, wenn" verwendet.

Also: Eine Zahl ist **genau dann** durch 3 teilbar, **wenn** ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Oder: Eine Zahl ist **dann und nur dann** durch 3 teilbar, **wenn** ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Wir wollen jetzt zu einigen Sätzen selbst die Umkehrungen bilden und dann nachprüfen, ob sie wahr sind:

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar.

Die Umkehrung lautet:

Wenn eine Zahl durch 2 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.

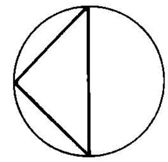
Der zweite Satz ist offenbar falsch, denn 14 ist z. B. durch 2, aber nicht durch 6 teilbar.

Wie steht es mit folgenden Sätzen? Überlegt selbst!

a) Wenn eine Zahl durch 12 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.

b) Wenn ein Rechteck *ABCD* vier gleichlange Seiten hat, so ist das Rechteck *ABCD* ein Quadrat.

c) Wenn irgendein Punkt *P* innerhalb des Dreiecks liegt, so liegt er auch innerhalb des Kreises. (Siehe Abb.)



Nur die Umkehrung des Satzes b) ist wahr.

Zum Schluß noch ein paar schwierigere Aufgaben:

Überprüft, ob folgende Sätze wahr sind!

a) Eine Zahl ist dann und nur dann durch 9 teilbar, wenn sie auch durch 3 teilbar ist.

Lösen wir die Aufgabe a) gemeinsam: Wie wir gelernt haben, bedeutet die Redeweise „dann und nur dann, wenn" die Zusammenfassung eines Satzes mit seiner Umkehrung. Um zu entscheiden, ob der Satz a) wahr ist, wollen wir überlegen, ob die beiden Teilaussagen wahr sind, aus denen der Satz zusammengesetzt werden kann. Die beiden Teilaussagen lauten:

a′) Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar.

a″) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie auch durch 9 teilbar.

Der Satz a′) ist wahr, der Satz a″) aber ist falsch. Also ist der durch Zusammenfassung von a′) und a″) entstandene Satz *falsch*.

Durchdenkt nun einmal selbständig die nächsten Sätze!

b) Ein Dreieck *ABC* besitzt dann und nur dann drei gleichgroße Winkel, wenn es gleichseitig ist.

c) Zwei Zahlen haben genau dann einen gemeinsamen Teiler, wenn sie beide gerade sind.

d) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn sie durch 8 teilbar ist.

L. Flade

Was ist hier unlogisch?

Ungleichungen im Bereich der natürlichen Zahlen

Aufgaben		Lösungsmenge
1	$x<3$	$L=\{0,1,2\}$
2	$4>n$	
3	$2+y<5$	
4	$9-u>7$	
5	$9n<35$	
6	$7x+2<30$	
7	$3(x+5)<15$	
8	$42>5t>19$	
9	$k:9<6$	
10	$72>45+r>66$	

Schon im Altertum treten Ungleichheitsrelationen, vor allem in der Geometrie, häufig auf. So formuliert der griechische Mathematiker *Eukleides* (Euklid) *von Alexandria* (um 365 bis um 300 v. u. Z.) in seinem bedeutenden Werk „Elemente" auch eine Reihe von Sätzen aus der Geometrie, die Ungleichheitsrelationen ausdrücken, z. B. den Satz: *„In jedem Dreieck sind je zwei Seiten zusammen größer als die dritte".* Diese Relationen werden aber stets in Worten formuliert; Ungleichungen im modernen Sinne mit einem Relationszeichen (< oder >) kennt man weder im Altertum noch im Mittelalter.

Diese Zeichen, mit deren Hilfe die Formulierung von Ungleichheitsrelationen wesentlich erleichtert wird und wichtige Schlußfolgerungen aus Ungleichungen hergeleitet werden können, treten in der Mathematik erst seit dem 17. Jahrhundert auf und haben sich seit dieser Zeit allgemein durchgesetzt. Sie können zuerst in dem grundlegenden Lehrbuch der Algebra des englischen Mathematikers *Thomas Harriot* (1560 bis 1621), der auch als Astronom und Kartograph bedeutendes geleitet hat, nachgewiesen werden. Dieses Werk, das den Titel

Artis analyticae praxis

hat, wurde erst 1631, zehn Jahre nach dem Tode *Harriots*, herausgegeben. Die von ihm benutzten Relationszeichen (siehe Abb.) entsprechen bereits den modernen Zeichen, sie sind aber meistens erheblich länger und größer, als sie heute geschrieben werden.

Das Werk ist, wie das noch im 17. Jahrhundert häufig üblich war, in lateinischer Sprache geschrieben.

ARTIS ANALYTICAE
PRAXIS,

Ad æquationes Algebraicas nouâ, expeditâ, & generali methodo, resoluendas:

TRACTATVS

E posthumis THOMÆ HARRIOTI Philosophi ac Mathematici celeberrimi schediasmatis summâ fide & diligentiâ descriptus:

ET

ILLVSTRISSIMO DOMINO
DOM. HENRICO PERCIO,
NORTHVMBRIÆ COMITI,

7 SECTIO QVINTA.

Sectio quinta in qua æquationum communium per canonicarum æquipollentiam, radicum numerus determinatur.

DEFINITIO.

DVæ æquationes similiter graduatæ & similiter affectæ, quarum coefficiens vel coefficientia (si plura sint) & homogeneum datū vnius coefficienti vel coefficientibus & homogeneo dato alterius in simplici inæqualitatis, maioritatis scilicet & minoritatis habitudine conformia sunt, æquipollentes in sequentibus appellandæ sunt. Quod sic rursus interpretandum est, quasi æquali radicum numero pollentes. Hinc est quod æquationibus è radicibus binomijs generatis & earum reductitijs, de quibus in superioribus tribus Sectionibus tractatum est, Canonicarum nomen impositum est: quia facta earum ad æquationes communes comparatione, si supradictis æquipollentiæ conditionibus inter se conueniant, ad radicum numerum in æquationibus communibus dignoscendum & determinandum canones siue exemplaria certa & solennia sint. In conformitate igitur inter æquationum communium & canonicarum coefficientia & homogenea data instituendâ, æquationum communium coefficientia & homogenea formali canonicarum partitioni similiter partienda sunt, & similes vtrinque partes sumendæ, seruatâ in partium habitudine æstimandâ homogeniæ lege, per reductionem scilicet procuratâ homogeniâ; cum coefficientia & homogenea data necessario heterogenea sint, & de heterogeneorum inter se habitudine nulla fieri possit æstimatio.

Lemma 1.

Si quantitas secetur in duas partes inæquales quadratum è dimidia totius maior est facto è duabus partibus inæqualibus.

Si sint p. & q. duæ magnitudinis partes inæquales,
est . . . . $\frac{p+q}{2} \cdot \frac{p+q}{2} > pq$.

Nam è tribus continuè proportionalibus pp. pq. qq. quarum pp. maxima est, qq. verò minima, est . . . $pp-pq > pq-qq$.

Ergo . . . . $pp+qq > 2pq$.

Et addito vtrinq; $2.pq$. est . . $pp+2.pq+qq > 4pq$

Sed . . . . $pp+2.pq+qq = (p+q)(p+q)$

Ergo . . . . $(p+q)(p+q) > 4pq$.

Ergo . . . . $\frac{(p+q)(p+q)}{4} > pq$.

Ergo

▲11▲ Die beiden Ungleichungen $a<b$ und $b<c$ lassen sich als fortlaufende Ungleichung $a<b<c$ schreiben.
Stelle aus den Ungleichungen
$z>x$, $v>x$, $y>v$, $z<v$, $x<y$, $z<y$
eine fortlaufende Ungleichung her!

▲12▲ Bestimme die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die die Ungleichungen $342<n<356$ erfüllt sind und außerdem jeweils eine der folgenden Bedingungen gilt:
a) n ist keine gerade Zahl,
b) n ist Vielfaches von 3,
c) n ist durch 2 und 3 teilbar,
d) n ist durch 2, aber nicht durch 3 teilbar,
e) n ist durch 3, aber nicht durch 2 teilbar,
f) 20 ist Teiler von n,
g) n ist durch 25 teilbar,
h) n ist entweder durch 2 oder durch 3 teilbar,
i) 2 oder 3 sind Teiler von n,
k) n ist sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar.

▲13▲ Wieviel Möglichkeiten gibt es, in der Ungleichung $a<b$ die Variablen a und b durch die natürlichen Zahlen von 0 bis 20 zu ersetzen, daß die Ungleichung dabei stets erfüllt wird?

▲14▲ Es sind alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen anzugeben, für die die Ungleichung
$3x+4y<10$ erfüllt ist.

▲15▲ Es sind alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen anzugeben, für die das Ungleichungssystem
$x+y<4$
$2x+5y>10$ erfüllt ist.

▲16▲ $9x+22-2x<100-11x-42$
Bestimme die Lösungsmenge!

▲17▲ Setze in die folgenden Aufgaben das jeweils richtige Zeichen (=, <, >) für * ein!
$35:7+40$ * 45
$(81-39):7$ * 5
$49:7+55$ * 62
$(94-38):7$ * 9

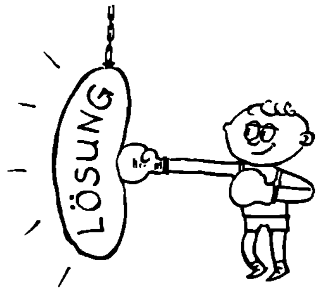
▲18▲ Vergleiche die folgenden beiden Ungleichungen:
$3x+5<20$ und $3x<15$
Was stellst du fest?

Diese Seite wurde gestaltet für einen Arbeitsgemeinschaftsnachmittag in Klasse 5/6 (*alpha*-Club, 29. OS, 7027 Leipzig).

J. Lehmann

Die Redaktion *alpha* erwartet weitere Vorschläge für Zirkelnachmittage in den Klassenstufen 5/6 für die Seite: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 3. Mai 1973

5▲1003 Gegeben sei ein Quader mit dem Rauminhalt $V = 64\,\text{cm}^3$. Welche Kantenlängen a, b und c (in cm) könnte der Quader besitzen, wenn deren Maßzahlen natürliche Zahlen sein sollen? Welcher von diesen Quadern besitzt die kleinste Oberfläche? *P.*

5▲1004 Karin kaufte einen Radiergummi zu 0,23 M, einen Bleistift zu 0,20 M und vier Hefte zum Stückpreis von 0,08 M. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß der Gesamtpreis genau den vierten Teil des Geldbetrages ausmachte, den sie bei sich hatte. Später kaufte sie dann noch ein Zeichendreieck für 0,44 M. Wieviel Mark besaß Karin noch nach dem Einkauf? *Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz*

W 5 ■ 1005 Gegeben sei eine Gerade g und zwei einander entsprechende Punkte A und A', die symmetrisch bezüglich der Geraden g als Symmetrieachse liegen. Ferner sei ein Punkt B, der mit A auf der gleichen Seite von g liegt derart gegeben, daß B nicht auf AA' liegt, und daß AB nicht parallel zu g verläuft. Es ist der Bildpunkt B' von B unter alleiniger Verwendung eines Lineals zu konstruieren, d. h. es dürfen nur Geraden gezogen werden. *Sch.*

W 5 ■ 1006 Ein Lebensmittellager lieferte an vier Konsumverkaufsstellen insgesamt 1200 Schachteln Pralinen mit je 125 g Inhalt. Davon erhielt die erste Verkaufsstelle den dritten Teil. Die zweite Verkaufsstelle erhielt von den danach verbleibenden Schachteln den vierten Teil. Die restlichen Schachteln wurden an die dritte und vierte Verkaufsstelle zu gleichen Teilen aufgeteilt. Wieviel Schachteln Pralinen wurden an jede dieser Verkaufsstellen geliefert? Wieviel Kilogramm wiegt die insgesamt ausgelieferte Menge an Pralinen? *Heidrun Mau, POS Siedenbollentin, Kl. 6*

W 5*1007 Ein Mathematiklehrer war mit seinem Trabant unterwegs. Vor Antritt der Fahrt zeigte das Tachometer eine fünfstellige Kilometerzahl an, bei der (von links nach rechts gelesen) die erste Ziffer mit der vierten, die zweite mit der fünften übereinstimmte. Dividiert man die Zahl, die der zweiten Ziffer entspricht, durch die Zahl, die der ersten Ziffer entspricht, so erhält man als Ergebnis die dritte Ziffer. Keine Ziffer kam in der fünfstelligen Kilometerzahl mehr als zweimal vor. Nach Beendigung der Fahrt waren die vierte und fünfte Ziffer miteinander vertauscht. Wie lautete der Tachometerstand vor Antritt der Fahrt? Wieviel Kilometer war der Lehrer gefahren, wenn er mehr als 20 km, aber weniger als 30 km zurückgelegt hat? *Mathematiklehrer Rolf Langbein, 6427 Lichte*

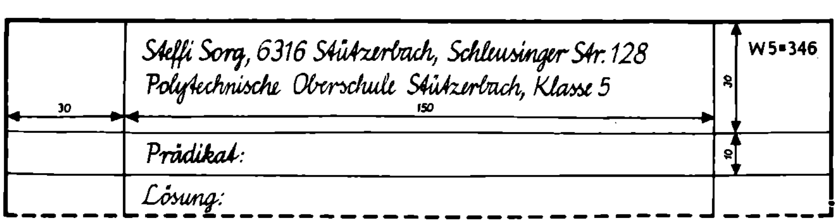
W 5*1008 Addiert man die Zahlen, die jeweils das Lebensalter von *Axel* und *Bernd* (in ganzen Jahren) angeben, so erhält man 21. Ihr Freund *Dieter* ist genau drei Jahre älter als Axel und neun Jahre jünger als *Bernd*. Wie alt ist jeder der drei Jungen?

6▲1009 Ermittle alle durch 36 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Zehnerstelle jeweils eine Primzahl darstellt. *P.*

6▲1010 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit der Rechteckseite $\overline{BC} = a$ und der Diagonalen $\overline{AC} = 2a$. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$ zu bestimmen. *P.*

W 6 ■ 1011 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC, verlängere die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus um sich selbst bis D und verbinde C mit D. Beweise, daß die Geraden AC und CD aufeinander senkrecht stehen! *Sch.*

W 6 ■ 1012 Klaus hat vier verschiedene Sorten Stahlkugeln. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellt er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

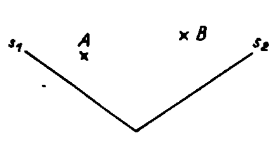
genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Drei Kugeln der Sorte C wiegen ebensoviel wie eine Kugel der Sorte B. Fünf Kugeln der Sorte D haben das gleiche Gewicht wie eine Kugel der Sorte C.
a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Klaus in die eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Klaus in die andere Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten? *P.*

W 6*1013 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Innenwinkeln $\sphericalangle CAB=\alpha=70°$ und $\sphericalangle ABC=\beta=80°$. Ferner ist ein innerer Punkt P, der mit den Punkten A, B und C verbunden ist, derart gegeben, daß $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA$, $\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCB$ und $\sphericalangle PAC=\sphericalangle PCA$ gilt. Es ist die Größe dieser sechs Winkel zu bestimmen. *Sch.*

W 6*1014 Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2, die den Abstand $h=3{,}5$ cm haben. Aus den Stücken $\overline{AD}=d=3{,}8$ cm, $\overline{BC}=b=4{,}5$ cm und $\overline{BD}=f=6{,}0$ cm sind alle möglichen, paarweise nicht kongruenten Trapeze $ABCD$ mit den parallelen Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ so zu konstruieren, daß jeweils $\overline{AB}$ auf g_1 und $\overline{CD}$ auf g_2 liegt. Beschreibe die Konstruktion und begründe die Anzahl der Lösungen. *W. Henker, Pionierhaus „Juri Gagarin", Karl-Marx-Stadt*

7▲1015 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Kreis k um A mit $\overline{AB}$ als Radius schneide die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkte E. Die im Punkte E an den Kreis k zu konstruierende Tangente schneide die Seite $\overline{BC}$ im Punkte F. Es ist zu beweisen, daß $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FB}$ gilt. *Sch.*

7▲1016 Ein Lichtstrahl g, der von einer punktförmigen Lichtquelle A ausgeht, wird an den in der Abbildung gezeigten, gegeneinander geneigten Spiegeln s_1 und s_2 so reflektiert, daß er durch den Punkt B geht. Der Lichtstrahl g ist zu konstruieren; die Konstruktion ist zu begründen. *Sch.*



W 7 ■ 1017 Die Mannschaften A, B, C, D belegten bei einem Turnier die ersten vier Plätze. Auf die Frage, welchen Platz jede dieser Mannschaften belegte, erhielt man von drei Personen R, S, T jeweils zwei Antworten, von denen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch ist.
R_1: Mannschaft C belegte den zweiten Platz.
R_2: Mannschaft D belegte den dritten Platz.
S_1: Mannschaft C belegte den ersten Platz.
S_2: Mannschaft B belegte den zweiten Platz.
T_1: Mannschaft A belegte den zweiten Platz.
T_2: Mannschaft D belegte den vierten Platz.
Welchen Platz belegte jede der Mannschaften A, B, C und D?
Aus der polnischen Zeitschrift: Matematyka-czasopismo dl a nauczycieli

W 7 ■ 1018 Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein fester Punkt P sowie ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1, der mit g keinen Punkt gemeinsam hat. Es ist ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 zu konstruieren, der g in P und den Kreis k_1 von außen in einem Punkte Q berührt.
Nach E. Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise, Leipzig 1967
Mitgeteilt von Christine Kohlmann, 8701 Lawalde, Kl. 11

W 7*1019 Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, den Radien $r_1=2$ cm und $r_2=3$ cm und dem Mittelpunktabstand $\overline{M_1M_2}=9$ cm. Ferner sei ein Punkt P gegeben, für den $\overline{PM_1}=4$ cm und $\overline{PM_2}=6$ cm gilt. Auf dem Kreis k_1 ist ein Punkt A, auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt P halbiert wird. *Sch.*

W 7*1020 Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $r_1<r_2$, die sich in den Punkten P und Q schneiden. Auf k_1 ist ein Punkt A und auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Gerade AB durch P geht und $\overline{AP}=\overline{PB}$ gilt. *Sch.*

▲8▲1021 Man beweise, daß die um 5 verminderte Summe der Quadrate von vier aufeinander folgenden ganzen Zahlen stets gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist.
Hans Reinhard Berger, Liechtenstein Student

W 8 ■ 1022 Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von 85 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Wann wird der zweite Kraftwagen den ersten einholen? Welche Entfernung hat er von dem Zeitpunkt, an dem er von dem ersten noch 2 km entfernt war, bis zum Zeitpunkt des Einholens gerechnet, zurückgelegt? *L.*

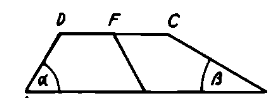
W 8 ■ 1023 Bei den XX. Olympischen Sommerspielen 1972 belegte im Rudern der Vierer ohne Steuermann der DDR den ersten Platz und erhielt eine Goldmedaille. Dabei wurden die folgenden Zeiten nach Zurücklegung einer Strecke von 500 m, 1000 m, 1500 m und der Gesamtstrecke von 2000 m registriert:

Strecke	Zeit
500 m	1 min 31,61 s
1000 m	3 min 10,16 s
1500 m	4 min 50,06 s
2000 m	6 min 24,27 s

Es sollen jeweils die mittleren Geschwindigkeiten des Bootes auf den einzelnen Teilstrecken von je 500 m Länge und auf der Gesamtstrecke berechnet werden, und zwar in $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (mit zwei Stellen nach dem Komma) und in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ (mit einer Stelle nach dem Komma). Ferner soll der größte Betrag der prozentualen Abweichungen der Geschwindigkeiten auf den Teilstrecken von der mittleren Geschwindigkeit auf der Gesamtstrecke berechnet werden. *L.*

W 8*1024 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, das die folgende Eigenschaft besitzt: Die von dem Punkt C ausgehende Höhe $\overline{CD}$ ist doppelt so lang wie der Hypotenusenabschnitt $\overline{AD}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist durch die Höhe $\overline{CD}=h$ auszudrücken. Ferner soll der Flächeninhalt für den Fall $h=4$ cm berechnet werden. *Sch.*

W 8*1025 Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{CD}=c$, dessen Winkel bei den Eckpunkten A und B zusammen 90° betragen: $\alpha+\beta=90°$.



Man berechne die Länge $\overline{EF}$ der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ aus den Längen a und b dieser Grundseiten.
Viktor Chastschanski, Schüler Dzershinsk, UdSSR

▲9▲1026 Man beweise, daß die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets durch 9 teilbar ist.
Viktor Chastschanski, Schüler Dzershinsk, UdSSR

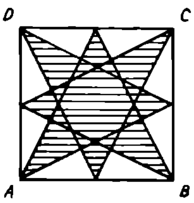
▲9▲1027 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung
$|x|+|x-1|>2$ erfüllt ist. (1)
Ferner ist der Graph der Funktion
$f(x)=|x|+|x-1|$ zu zeichnen; (2)
aus dieser Zeichnung ist die Lösungsmenge der Ungleichung (1) abzulesen.
Dr. Gerhard Hesse, Dresden

W 9 ■ 1028 Bei der inoffiziellen Länderwertung der XX. Olympischen Sommerspiele 1972 belegte die DDR mit 480 Punkten nach der UdSSR und den USA und vor allen übrigen Ländern den dritten Platz. Die DDR erhielt 20 Goldmedaillen. Die Anzahlen der Silbermedaillen, Bronzemedaillen und sechsten Plätze, die die DDR erhielt, waren gleich groß, aber größer als die Anzahl der vierten Plätze, die ebenso groß wie die Anzahl der fünften Plätze und größer als die Anzahl der Goldmedaillen war.
Wieviel Silbermedaillen, Bronzemedaillen, vierte, fünfte bzw. sechste Plätze erhielt

die DDR, wenn für eine Goldmedaille 7 Punkte, für eine Silbermedaille 5 Punkte, für eine Bronzemedaille 4 Punkte und für einen 4., 5. bzw. 6. Platz 3, 2 bzw. 1 Punkte angerechnet werden? *L.*

W 9 ■ 1029 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a = 10$ cm dar. Die Mitte jeder Quadratseite wurde jeweils mit den nichtbenachbarten Eckpunkten des Quadrates verbunden. So entstand ein achtzackiger Stern, dessen Flächeninhalt A_S zu berechnen ist.

Martin Theuer, Crussow
Fachlehrer für Mathematik



W 9*1030 Es sei n eine natürliche Zahl, die größer als 2 ist. Ferner seien a, b die Längen der Katheten und c die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise, daß dann stets

$a^n + b^n < c^n$ gilt.

Janous Walther, Horn (Österreich)

W 9*1031 Es seien a und b zwei reelle Zahlen.

1. Die Summe $a^2 - b^2 + ab$ soll als Produkt von zwei Faktoren dargestellt werden, die in a und b linear sind und deren Koeffizienten reelle Zahlen sind.
2. Es ist nachzuweisen, daß die Summe $a^2 + b^2 + ab$ nicht als Produkt von zwei solchen Faktoren dargestellt werden kann.

Hans-Reinhard Bergen, Student
Hohenstein-Ernstthal

▲10/12▲1032 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x + y = 5, \quad (1)$$
$$x^5 + y^5 = 275 \quad (2)$$

zu ermitteln. *Gerd Weißenborn, Berlin*
EOS „Heinrich Hertz“ Kl. 11

▲10/12▲1033 Es sei f eine Funktion, die aus der Menge aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen besteht, für die die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = x - y^2$ erfüllt ist und für die $y \geqq 0$ gilt.

a) Man bestimme den Definitionsbereich von f.
b) Man stelle die Funktion f in der Form $y = f(x)$ dar.
c) Man bestimme rechnerisch die Nullstellen dieser Funktion und gebe den größten Funktionswert (das Maximum) an.
d) Man zeichne den Graph dieser Funktion.

Wolfgang Riedel, Karl-Marx-Stadt, Student

W 10/12 ■ 1034 Auf Grund einer Verordnung des Ministerrates über die Förderung des Baus von Eigenheimen können für Arbeiterfamilien und kinderreiche Familien besondere Vergünstigungen bei der Finanzierung gewährt werden. Werden z. B. für ein Eigenheim, dessen Baukosten 65 000,– M betragen,
Eigenleistungen (die auch durch Freundes- und Nachbarschaftshilfe sowie die Hilfe des Betriebes erbracht werden können) in Höhe von 19 500,– M
erbracht, so kann
a) für das Baumaterial ein zinsloser Kredit von 32 000,– M,
der mit jährlich 1 % zu tilgen ist, und
b) für Bauleistungen ein Kredit von 13 500,– M
gewährt werden, der mit jährlich 5 % zurückzuzahlen ist, worin jeweils 4 % Zinsen für das Restdarlehn enthalten sind.
65 000,– M

1. Wie hoch ist die jährliche bzw. monatliche Zahlung für die Verzinsung und Tilgung der Kredite zu a) und b)?
2. In wieviel Jahren wird der Kredit zu b) getilgt sein?
3. In wieviel Jahren werden beide Kredite zu a) und b) getilgt sein, wenn man berücksichtigt, daß nach Tilgung des Kredits zu b) alle Zahlungen auf die Tilgung des zinslosen Kredits zu a) verrechnet werden?

Anleitung zur Lösung: Zur Vereinfachung der Rechnung ist anzunehmen, daß die Zahlungen jeweils am Ende eines Jahres erfolgen. Dann kann man die Tilgungszeit t (in Jahren) für den Kredit zu b) aus der Formel

$$5 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = 100 \cdot q^t$$

berechnen, wobei $q = 1{,}04$ ist. *L.*

W 10/12 ■ 1035 Man beweise, daß die Ungleichung

$$|ac + bd| \leqq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \quad (1)$$

für alle reellen Zahlen a, b, c, d erfüllt ist.

Olaf Böhme, stud. math., Dresden

W 10/12*1036 Es seien f_1 und f_2 zwei Funktionen, die für alle reellen Zahlen x durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

$$f_1(x) = \sin x \cdot \cos x, \quad (1)$$
$$f_2(x) = \sin x + \cos x. \quad (2)$$

Man ermittle für jede dieser Funktionen den größten Funktionswert.

Ralph Lehmann, Strausberg,
EOS „Diesterweg“, Kl. 10

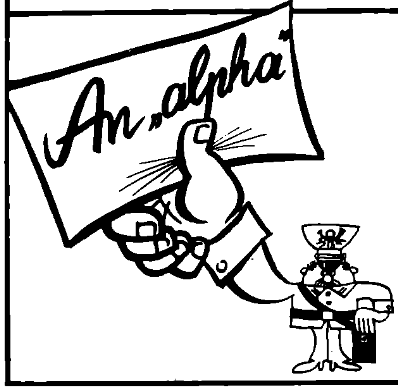
W 10/12*1037 Es seien ABC ein Dreieck und P ein Punkt im Innern dieses Dreiecks. Die Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks mögen die jeweils gegenüberliegenden Seiten in den Punkten D, E und F schneiden. Man beweise, daß dann stets gilt

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{FB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EA}.$$

(Dieser Satz aus der Geometrie wird auch der „Satz des Ceva“ genannt. Er wurde zuerst von dem italienischen Mathematiker Giovanni Ceva im Jahre 1678 veröffentlicht.)

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 11

LESER SCHREIBEN



Seit fünf Jahren bin ich *alpha*-Leser. Die Zeitschrift half mir stets, mein mathematisches Wissen zu erweitern, so daß ich jetzt eine Spezialklasse besuchen kann.

Volker Boos, Dabrun

In Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden hat mir *alpha* sehr geholfen. Mehrfach war ich bei Kreis- und Bezirksolympiaden erfolgreich. *Elisabeth Heusinger, Suhl*

Da die Wettbewerbsaufgaben oft schwer waren, wollte ich manchmal aufgeben. Ich tat es jedoch nicht. So festigte sich mein mathematisches Denken. Es gelang mir zum zweiten Male, einen 1. Platz in der Kreisolympiade zu belegen.

Jens Schönfelder, Schwedt

Allen Mitarbeitern der *alpha* möchte ich für die Mühe danken, die sie im Laufe der Jahre für die Ausarbeitung einer stets interessanten und lehrreichen Zeitschrift aufgewendet haben. Vielleicht haben die Knobelaufgaben und die Beiträge meinen Berufswunsch beeinflußt – ich bin seit September 1972 Mathematikstudent an der TH Karl-Marx-Stadt. Ich werde auch weiterhin die *alpha* lesen und interessante Aufgaben zu meinem Vergnügen lösen.

Wolfgang Riedel, Karl-Marx-Stadt

alpha ist Klasse! Die ständige Beschäftigung mit ihr hat meine schulischen Leistungen sehr gefördert.

Norbert Littig, Lichtenberg

Ich möchte meinen Dank für die interessante und unterhaltsame Zeitschrift aussprechen. Jetzt werde ich ein Mathematikstudium in Leipzig aufnehmen. Daran hat *alpha* gewiß einen Anteil. *Frank Kretschmar, Leipzig*

Das Lösen von Aufgaben macht mir viel Freude und hilft mir auch tüchtig im Unterrichtsfach Mathematik. Im letzten Schuljahr war ich über ein viertel Jahr krank. Trotzdem habe ich „sehr gut“ im Zeugnis erhalten, weil ich mich viel mit den Aufgaben aus der *alpha* befaßt habe und auch schon versuche, Aufgaben höherer Klassenstufen zu lösen. *Judith Klinkert, Nordhausen*

Die Zeitschrift *alpha* hat dazu beigetragen, daß ich ab September 1972 eine Spezialklasse Mathematik besuchen darf und einmal Mathematik studieren werde.

Dagmar Marby, Quedlinburg

Seit Jahren bin ich ein Leser der *alpha*. Besonderes Interesse haben wir Ungarn an den Aufgaben der Schülerzeitschrift. Sie helfen besonders die Olympiaden vorzubereiten. Viele Artikel sind methodisch sehr gut. Sie helfen unseren Lehrern und Schülern in der außerunterrichtlichen Arbeit.

Dr. István Reiman, Kandidat der math. Wissenschaften und Dozent der TU Budapest

Preisträger Physik-Wettbewerb '72

Zum Wettbewerb gingen 809 Lösungen ein, davon 254 von Mädchen. 203 Lösungen wurden als „falsch gelöst" bewertet. Alle Einsender erhielten Antwortkarten, die für den *alpha*-Wettbewerb 1972/73 mitgewertet werden. Folgende Teilnehmer erhielten eine Anerkennungsurkunde und eine Buchprämie (vom Verlag Volk und Wissen): Martin Blümlinger, Linz (Österreich); Thomas Maiwald, Olbersdorf; Thomas Luschtinetz, Stralsund; Thomas Kischel, Greifswald; Daniel Hersberger, Basel (Schweiz); Meinhard Mende, Lunzenau; Ute Winkler, Teelow; Andreas Weller, Altenberg; Cornelia Thannhauser, Linz (Österreich); Viktor Chaschtschanski, Dzerschinsk (UdSSR); Ing. Erhard Eulitzer, Cottbus; Karl Krause, Mansfeld (Rentner, 71 Jahre); Johannes Blümlein, Heldberg.

alpha-Wettbewerb

Preisträger

Thomas Maiwald, 8809 Olbersdorf; Angelika Müller, 22 Greifswald; Thomas Kischel, 22 Greifswald; Viktor Chaschtschanski, Dzerschinsk (UdSSR); Dietmar Gröger, 3257 Hecklingen; Jan Müller, 1034 Berlin; Uwe Schäfer, 75 Cottbus; Marion Bohn, 1055 Berlin; Jürgen Sommerschuh, 85 Bischofswerda; Wolfgang Huschmann, 9156 Oelsnitz; Eva Gerstner, 806 Dresden; Manuela Lehmert, 562 Worbis; Dagmar Lorenz, 89 Görlitz; Cornelia Thannhauser, Linz (Österreich); Siegfried Weiß, 8713 Neusalza-Spremberg; Martin Blümlinger, Linz (Österreich); Frank Müller, 75 Cottbus; Anne-Kathrin Steinbach, 372 Blankenburg; Hubert Steinmetz, 5401 Clingen; Elke Witt, 4401 Uthausen; Gerald Gerlach, 801 Dresden; Andreas Große, 7123 Engelsdorf; Roswitha Schlotte, 90 Karl-Marx-Stadt; Volker Ludley, 4401 Bergwitz; Eva Marx, 5401 Clingen; Ulf Ritschel, 1201 Booßen; Audrey Hoffmann, 1055 Berlin; Falk Bachmann, 402 Halle; Heiko Tennert, 73 Döbeln; Hartmut Herrmann, 1282 Schönow; Andrea Nießen, 1071 Berlin; Jörg Brüstel, 7401 Ziegelheim; Detlef Rütz, 20 Neubrandenburg; Uwe Szyszka, 2001 Brohm, Gisela Czogalla, Jörg Wachsmann, Elke Halecker, Frank Billert, Arnd Halecker, alle 5401 Clingen; Ulv Krabisch, 7024 Leipzig; Birgit Mann, 1071 Berlin; Silke Zimmermann, 5401 Clingen; Sabine Schröder, 128 Bernau; Dagmar Pohle, 7906 Mühlberg; Marcus Kasner, 209 Templin; Waldemar Olk, 6088 Steinbach-Hallenberg; Barbara Wolf, 437 Köthen; Andreas Illing, 9272 Gersdorf; Horst Lange, 8809 Olbersdorf; Reinhard Koeppe, 3404 Loburg; Bianca Herrmann, 4608 Zahna; Hildrun Methling, 2424 Dassow; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Heidi Günther, 8606 Sohland; Jens Burghardt, 12 Frankfurt/O.; Andreas Wenzel, 9201 Dorfchemnitz; Thomas Fiedler, 22 Greifswald; Dietrich Jaeckel, 69 Jena; Uta Stopp, 8019 Dresden; Rolf Bartl, 58 Gotha; Bernd Grünler, 657 Zeulenroda; Petra Peter, 117 Berlin; Bertold Möbius, 8020 Dresden; Michael Minx, 1071 Berlin; Lutz Thorwarth, 608 Schmalkalden; Gudrun Bertram, Karl-Heinz Wiesemann, Silke Kranhold, Sabine Range, alle 5401 Clingen; Kurt Oppitz, 15 Potsdam; Angela Gebhardt, 9402 Bernsbach; Lothar Eimecke, 7901 Fermerswalde; Bengt Nölting, 22 Greifswald; Thomas Kaatz, 445 Gräfenhainichen; Andrea Mittelbach, 1058 Berlin; Andreas Goldhahn, 9402 Bernsbach; Frank Burghardt, 12 Frankfurt/O.; Klaus Schulze, 7253 Brandis; Bernd Bräutigam, 9402 Bernsbach; Karin Schmidt, 9402 Bernsbach; Ulf Ruthenberg, 20 Neubrandenburg; Ingolf Buttig, 8504 Großharthau; Jörg Kunzmann, 9402 Bernsbach; Janis Zadius, Riga (UdSSR); Ines Mannschatz, 1055 Berlin; Jürgen Friedrich, 9341 Boden; Peter Bräuning, 63 Ilmenau; Hans-Peter Küchler, 1055 Berlin; Wolfgang Taubert, 61 Meiningen

Teilnahme von Kollektiven am alpha-Wettbewerb (1971/72)

OS Fambach (131 Schüler; 1191 Karten); OS Steinbach-Hallenberg (96 Schüler, 1079 Karten); OS Burkau (48 Schüler, 433 Karten); OS Haynrode (51 Schüler, 320 Karten); OS Clingen (31 Schüler, 521 Karten); Teil-OS Neunhofe (26 Schüler, 160 Karten); *alpha*-Club Rotta-Bergwitz (31 Schüler, 350 Karten); *alpha*-Club 29. OS Leipzig (30 Schüler, 218 Karten); OS Ernst Thälmann Karl-Marx-Stadt (26 Schüler, 285 Karten); OS Löderburg (20 Schüler, 188 Karten); OS Stolpen (17 Schüler, 212 Karten); OS Bahratal (16 Schüler, 185 Karten); OS II Hainichen (14 Schüler, 168 Karten); OS Kuhfelde (12 Schüler, 120 Karten); OS Rüdnitz (10 Schüler, 73 Karten); Pionierhaus „Juri Gagarin" Karl-Marx-Stadt; OS Adolf Diesterweg, Lobenstein; OS Wingerode; OS Siechenrasen/Schmalkalden; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Breitenbach/Eichsf.; OS I Dingelstädt; Fritz-Reuter-OS Siedenbollentin; Adolf Diesterweg-OS Spremberg; Hegel-OS Magdeburg; Käthe-Kollwitz-OS Wittenberg; Friedrich-Schiller-OS Eilenburg; OS Oberschönau; OS Lössau; OS Gösen; EOS Worbis; Clara-Zetkin-OS Wiehe/Unstr.; OS Wolmirstedt; OS Asbach; OS Jördenstorf; OS Broderstorf; OS I Teltow; OS Großbodungen; Goethe-OS Gnoin; Maxim-Gorki-OS Berlin; 22. OS Rostock; OS Breitenbach; EOS Schmalkalden; OS Zepernick; Martin-Andersen-Nexö-OS Marienberg; Ernst-Thälmann-OS Ruhla; 13. OS Berlin-Friedrichshagen; OS Mittelstille; Klub Junger Mathematiker Cottbus; III. OS Bernau; OS Blumberg; OS Struth-Helmersdorf; Comenius-OS Oranienburg; OS Großpostwitz; Theodor-Neubauer-OS Bad Salzungen; Käthe-Kollwitz-OS Bützow; OS Zörnigall; OS Alt-Töplitz; 9. OS Berlin-Friedrichshagen; OS Mahlis; Karl-Liebknecht-OS Berlin-Köpenick; OS Kavelstorf; OS I Saßnitz; Käthe-Kollwitz-OS Schwerin-Görris; 32. OS Berlin; OS Großtreben; 13. OS Leipzig; OS Radebeul I; Maxim-Gorki-OS Berlin; OS Oberröblingen; BS VEB Erdöl und Erdgas, Grimmen; L. Fürnberg-OS Wegeleben; OS Ahlbeck; G.-Hauptmann-OS Ribnitz-Damgarten; *alpha*-Zirkel OS Bad Kösen; OS Schernberg; Diesterweg-OS I, Halle; OS Gielow; E.-Struwig-OS Großwokern; OS Dorfchemnitz

Vorbildliche Hilfe

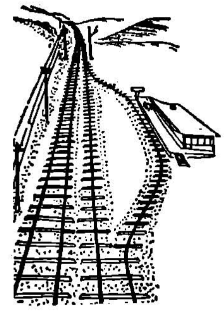
Ende September wurden 150 Päckchen mit Buchprämien für die Preisträger des Wettbewerbs 1971/72 versandt.

Wir danken den Verlagen, welche uns Bücher im Wert von 2500 M zur Verfügung stellten. Das ist ein echtes Zeichen der Anerkennung für die vielen Tausend aktiven Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb.

Einen wertvollen Beitrag zur weiteren Qualifizierung unserer Leser leisteten:

▪ VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin ▪ VEB Fachbuchverlag, Leipzig ▪ Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin ▪ Transpress, VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin ▪ VEB Verlag Technik, Berlin ▪ Sportverlag, Berlin ▪ Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin ▪ BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig ▪ Der Kinderbuchverlag, Berlin ▪ Verlag Die Wirtschaft, Berlin ▪ Deutscher Militärverlag, Berlin ▪ Polnisches Kultur- und Informationszentrum, Leipzig

In freien Stunden alpha heiter



Ludas Matyi, Budapest

Kombiniere!

Bei den Verkehrsbetrieben einer Stadt sind Werner, Horst, Peter, Alfred und Günther als Taxi-Fahrer angestellt. Ihnen stehen innerhalb von 5 Tagen täglich ein Trabant, ein Wartburg, ein Skoda, ein Moskwitsch und ein Tatra zur Verfügung.
Wer fährt am Freitag (5. Tag) welchen PKW-Typ? Wir wissen, daß am Dienstag Peter mit dem Wartburg fuhr und alle anderen einen anderen PKW-Typ. Am Donnerstag fuhren Werner Trabant und Alfred Moskwitsch. Am Montag fuhr Alfred mit dem Trabant. Peter fuhr am Mittwoch Skoda und Günther Wartburg. Alle Taxifahrer fuhren innerhalb von 5 Tagen jeweils einen anderen PKW-Typ. Wer hat nun am Freitag welchen PKW gefahren?

Ing. E. Schmidt, Potsdam

Ein Kenner mathematischer Zusammenhänge

Folgende kleine Begebenheit zeigt, wie ein Kenner der mathematischen Zusammenhänge einem Nur-Rechner überlegen sein kann. Der französische Rechenkünstler *Henri Mondeux* gab als 14jähriger im Jahre 1840 eine Vorstellung an der *Ecole Polytechnique* in Paris. Professoren und Studenten dieser berühmten Lehranstalt waren zugegen; unter ihnen ihr Studiendirektor, der Mechaniker *Coriolis* und der Mathematiker *Cauchy*, der damals schon bekannt und berühmt war.
Mondeux löste zunächst einige Aufgaben aus dem Zuhörerkreis schnell und richtig. Bei einer größeren Rechnung, die ihn für längere Zeit in Anspruch nahm, rief plötzlich *Cauchy* die Lösung eher als er in den Raum. *Coriolis* stellte sich beschützend vor den Wunderknaben und forderte *Cauchy* auf, selbst eine Aufgabe zu stellen. Dieser zögerte nicht lange und ließ *Mondeux* zunächst die vierten Potenzen der ersten 20 natürlichen Zahlen ermitteln. Nachdem dies erledigt war, verlangte der Mathematiker, die Summe dieser 20 Biquadrate zu bilden. Wieder rechnete *Mondeux* lange, und wieder hatte *Cauchy* das Ergebnis schneller als er, denn er bildete natürlich nicht erst die einzelnen vierten Potenzen, sondern bediente sich der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(vgl. *alpha* 4/71), die mit $n=20$ sicherlich auch im Kopf schneller das Ergebnis liefert als die gliedweise Addition.

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Nachgedacht!

Setzt man in die Gleichung

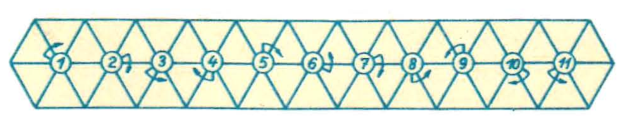
$$a(4+x)+(a+m)^2=(a-m)^2+4a+m(4a+x)$$

für die Variable a die Anzahl der Tage und für die Variable m das Alter des Sperlings ein, so erhält man mit x die Anzahl der Schritte, die dieser Sperling im angenommenen Zeitraum a macht.

Oberlehrer R. Rösel, OS Teterow

Wabenrätsel

1) Größenangabe, die Flächen wie Quadraten, Kreisen usf. zugeordnet ist; 2) bestimmte Menge von Punkten, die auf einer Geraden liegen; 3) griechischer Mathematiker, nach dem ein Satz über rechte Winkel benannt ist; 4) einer der Wahrheitswerte einer Aussage; 5) eine der Beziehungen, die zwischen zwei Zahlen oder Größenangaben bestehen kann; 6) Name für eine natürliche Zahl in bezug auf eine zweite, falls die zweite ein Vielfaches der ersten ist; 7) bestimmter Teil der Oberfläche gewisser Körper; 8) spezieller Körper;



9) kennzeichnende Eigenschaft einer der beiden Arten von Proportionalität; 10) eine der beiden Zahlen, durch die ein Produkt bestimmt ist; 11) Differenz zwischen geschätztem Wert und richtigem Wert.

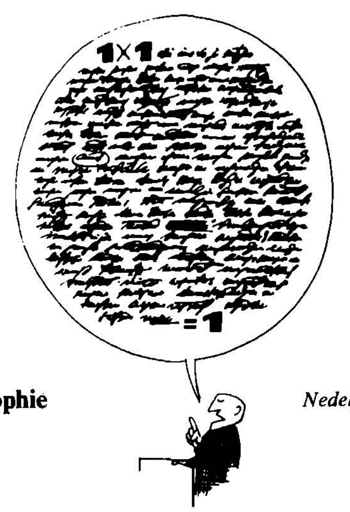
Mathematikfachlehrer W. Träger
Schloßberg-Oberschule Döbeln

$$\begin{array}{r} 1+9+7+3 \\ +1+9+73 \\ +1+9\cdot 7:3 \\ +1\cdot 9+7+3 \\ +1\cdot 9+7\cdot 3 \\ +19-7+3 \\ \hline 1\cdot 9\cdot 7\cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
1973 &= 1-2+345\cdot 6-7-89 \\
&= 987(6-5)(4-3)\cdot 2-1 \\
&= 44\cdot 44+44-4-4+4:4 \\
&= (55\cdot 55)-555-555+55+(5+5+5):5 \\
&= 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6+666+66:6 \\
& \, 9(99+99+9)+99+99:9 \\
&= 23^2+38^2 \\
&= 7^4-6^3-5^3-4^3-3^3+2^2 \\
&= 10^3+10^3-3^3 \\
&= 989-\sqrt{8+9+8}+989 \\
&= (1+9)(7+3)\cdot 19+73 \\
&= 19\cdot 73+197\cdot 3-1\cdot 9+7-3 \\
&= (1\cdot 9+7+3)\cdot(1+9)(7+3)+(1+9)7+3
\end{aligned}$$

$$1\cdot 97+3=(1+9)(7+3)$$
$$(1+9-7):3=(1+9):(7+3)$$
$$197+3=1\cdot 97+3+(1+9)(7+3)$$
$$197+3=(1-9+7+3)(1+9)(7+3)$$
$$1\cdot 9(7+3)=1\cdot 9\cdot 7-3+1\cdot 9+7\cdot 3$$
$$\begin{aligned}
1\cdot 1+9\cdot 9+7\cdot 7+3\cdot 3 &= (1+9)(7+3)+(1+9)(7-3) \\
197\cdot 3-1\cdot 97\cdot 3 &= 197+3+1\cdot 97+3
\end{aligned}$$
$$1+9+7+3=98-76+5+4-3+2-10$$
$$1\cdot 9\cdot 7\cdot 3=123-45+6+7+8+90$$
$$19+73=1+9\cdot 7-3+1+9+7\cdot 3$$
$$19-73=1+9-7+3-1\cdot 9\cdot 7+3$$
$$19\cdot 73=(1\cdot 9+7+3)\cdot[(1+9)7+3]$$
$$19:73=(1\cdot 9+7+3):[(1+9)7+3]$$

Ing. H. Decker, Köln



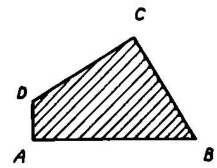
Philosophie

Nedeljko Dragie, Zagreb

Legespiel

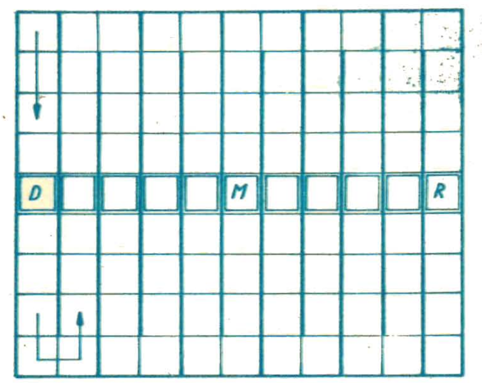
Stelle dir vier kongruente Flächen (siehe Abb.) her und versuche, ein Quadrat daraus zusammenzusetzen.

Aus: „Praxis der Mathematik", Köln (9/65)



Begriffsschlange

In diese Figur sind, links oben beginnend, die Wortbilder mathematischer Begriffe der folgenden Bedeutung einzusetzen:



geometrischer Grundbegriff (6) — geometrischer Grundbegriff (5) — Randpunkt einer Strecke (8) — Eigenschaft, die einer natürlichen Zahl in bezug auf eine andere zukommt, die ein Vielfaches der ersten ist (7) — besondere Strecke am Kreis (6) — kürzeste Verbindung zweier Punkte (7) — Begriff der Mengenlehre (7) — Name des Mathematikers, nach dem ein Satz aus der Kreislehre benannt ist (6) — Zusammenstellung (6) — wichtige Angabe auf Karten (7) — spezielle Abbildung (8) — spezielle Trapezseite (10) — Schrägbild eines Kreises (7) — Zahlwort (4) — spezielles Vieleck (11) — Eigenschaft, die durch Bewegungen aufeinander abbildbaren geometrischen Figuren zukommt (9).

In Klammern ist hier jeweils die Anzahl der Buchstaben des einzusetzenden Wortes angegeben. Die Endbuchstaben der einzusetzenden Worte stimmen mit den Anfangsbuchstaben des jeweils folgenden Wortes überein.

Bei richtiger Lösung steht in den schraffierten Feldern der obigen Figur das Wortbild eines bekannten geometrischen Begriffes.

Irmgard Träger, Dr.-Richard-Sorge-OS Ebersbach

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

(22. November 1972)

Olympiadeklasse 5

1. In der folgenden Aufgabe ist jedes Sternchen (*) so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Dabei muß jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.

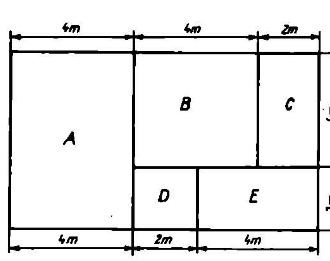
$$\begin{array}{r} 4\,*\,*\cdot 3\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,5 \\ 3\,*\,*\,* \\ 8\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,*\,3\,* \end{array}$$

Als Ergebnis wird nur eine richtig ergänzte Aufgabe ohne Begründung verlangt.

2. Eine Oberschule führte für alle Schulklassen ein Schulsportfest durch. Nach dem Sportfest behauptete Gerald, es hätte insgesamt 325 Teilnehmer gegeben.
Günter, der wußte, daß die Anzahl der an dem Sportfest teilnehmenden Mädchen um genau 24 größer war als die der teilnehmenden Jungen, meinte, Geralds Behauptung sei falsch. Weise nach, daß Günters Meinung richtig ist!

3. In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne. Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Diese Anzahl soll sie so wählen, daß unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen. Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

4. Die Abbildung stellt den Grundriß einer Wohnung mit den Räumen A, B, C, D, E dar.

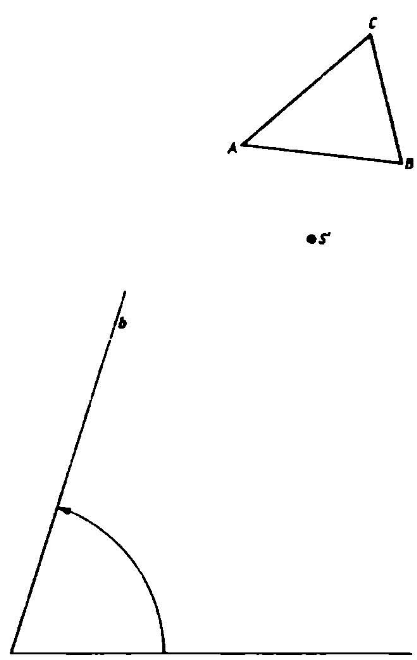


a) Zeichne den Grundriß dieser Wohnung im Maßstab 1:100!

b) Die Fußböden der Räume A und B sollen gestrichen, die der Räume C, D und E mit einem Fußbodenbelag ausgelegt werden. Ermittle den Flächeninhalt der Fußböden der einzelnen Räume und gib die Anzahl der zu streichenden und die der auszulegenden Quadratmeter an!

Olympiadeklasse 6

1. Das auf der Abbildung gezeigte Dreieck $\triangle ABC$ ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\sphericalangle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Dreieck $\triangle A'B'C'$. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

2. An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam. Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

3. Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:
(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.
(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.
(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.
(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.
(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.
Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

4. Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:
„Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien. Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe."
Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

Olympiadeklasse 7

1. Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15390.
(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

2. Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d. h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

3. Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:
(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.
(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.

(3) Christoph ist älter als Detlef.
(4) Bildet man alle möglichen „Doppel" (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser „Doppel" aus zwei gleichaltrigen Spielern.
(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler?
(Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

4. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\sphericalangle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 8

1. Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht.
Es ist außerdem bekannt:
(1) Dieter steht an vierter Stelle.
(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.
(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.
(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben Jungen in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

2. Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$!

3. Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden.
Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.
a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972stelligen Zahl auftreten kann!
b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

4. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7{,}5$ cm, $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist!

3. Zu Dekorationszwecken sollen gleichgroße Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

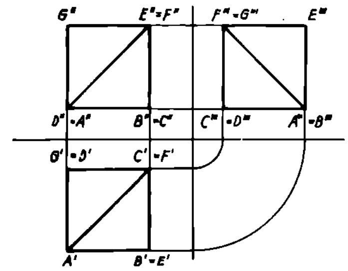
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

4. Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, daß er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A dieses Tangentenvierecks!

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Bildet man aus irgend einer im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2, dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar.

2. In der Abb. ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie für $a = 6$ cm den Körper in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°;\ q = \frac{1}{2}\right)$!
b) Berechnen Sie das Volumen V des in a) dargestellten Körpers!



3. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y-Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0;\ 6)$. Sie hat ferner folgende Eigenschaft:
Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x-Achse (Fußpunkte seien A_1 bzw. B_1), so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x-Achse schneidet!

4. a) Den Schülern einer Klasse wird die Aufgabe gestellt, $\sqrt{12}$ und $\sqrt{133}$ grafisch zu ermitteln. Dafür sollen nur der Höhensatz oder der Kathetensatz oder beide Sätze (für jede der Wurzeln jeweils einer dieser beiden Sätze) benutzt werden. Ein Schüler löst beide Aufgaben an dem gleichen rechtwinkligen Dreieck.
Wie lauten alle Möglichkeiten, hierfür geeignete Maßzahlen p und q der Längen der Hypotenusenabschnitte zu wählen, so daß diese Maßzahlen p und q überdies rationale Zahlen sind?
b) Man beantworte die gleiche Frage für den Fall, daß $\sqrt{11}$ und $\sqrt{133}$ zu ermitteln waren.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.
a) Man beweise, daß dann $x = u \cdot v$, $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$ und $z = \frac{u^2 + v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d. h. daß (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.
b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

2. Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a, b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynoms $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.
Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann ein Teiler eines Polynoms $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so daß $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

3. Man beweise, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n+2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

4. In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:

(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.

Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

Lösungen

* 10 * 911 1. Für alle Winkel α mit $0<\alpha<45°$ gilt

$$\sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$$
$$= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}(1-2\sin^2\alpha)$$
$$= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\left(1-\frac{2\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$$
$$= \frac{2\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1-\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)}.$$

Daraus folgt wegen $\tan^2\alpha \neq 1$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}, \text{ w.z.b.w.}$$

(Vgl. die Formeln in dem Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 61, 62!)

2. Für alle Winkel α mit $0<\alpha<45°$ gilt

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2},$$

da $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$ und $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ ist.

Es gilt also $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

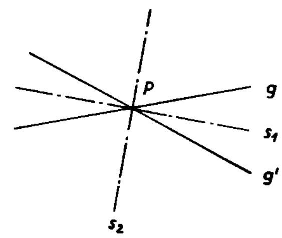
w.z.b.w.

Bemerkung: Wie sich leicht beweisen läßt, gelten die Gleichungen (1) und (2) nicht nur für Winkel zwischen 0° und 45°.
Die Gleichung (1) gilt nämlich für alle Winkel α mit $\alpha \neq 90° + k\ 180°$ und die Gleichung (2) für alle Winkel α mit $\alpha \neq k\,180°$, wobei k eine ganze Zahl ist.

Lösungen zu Heft 5/72

5 ▲ 927 Es sei n die Anzahl der Einfamilienhäuser dieses Ortes. Auf Grund der Aufgabe gilt dann $n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \cdot n$. Von den dreistelligen natürlichen Zahlen mit gleichen Grundziffern 111, 222, ..., 999 ist nur die Zahl 888 durch 24 teilbar. Deshalb gilt $n=37$, da $37 \cdot 24 = 888$ ist. Im Ort gibt es genau 37 Einfamilienhäuser.

5 ▲ 928 Da die Gerade g und ihre Bildgerade g' den Punkt P gemeinsam haben und nicht parallel zueinander sind, muß P auf der Symmetrieachse liegen. Daher gehen alle Symmetrieachsen durch den Punkt P. Andererseits ist jede der Halbierenden der durch die Gerade g und g' gebildeten Winkel auch Symmetrieachse. Folglich sind die beiden Winkelhalbierenden der Geraden g und g' die beiden Winkelhalbierenden der Geraden g einzigen zulässigen Symmetrieachsen.

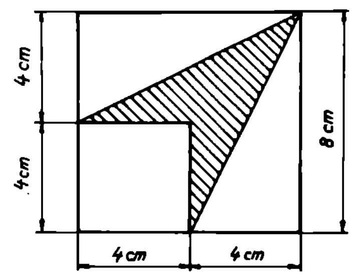


W 5 ■ 929 a) Es ist die größte natürliche Zahl zu ermitteln, die kleiner oder gleich 100 ist und die sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist. Diese Zahl lautet 96.
b) Aus $96:3=32$ und $96:4=24$ und $96-32-24=40$ folgt, daß die Schachtel genau 40 Druckknöpfe enthält.

W 5 ■ 930 Wir rechnen $100-10=90$, $90:2=45$, $45-10=35$.
Oder $(x+10)\cdot 2 = 100-10$,
$(x+10)\cdot 2 = 90$,
$x+10=45$,
$x=35$.
Der Schüler erreichte genau 35 Punkte.

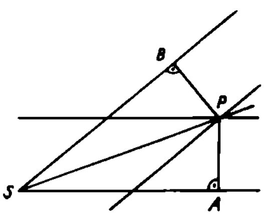
W 5 * 931 Die siegreiche Mannschaft habe $3 \cdot x$ Tore erkämpft; dann hat die gegnerische Mannschaft x Tore erzielt. Zusammen wurden insgesamt $3 \cdot x + x = 4 \cdot x$ Tore geschossen.
Nun gilt $9 < 4 \cdot x < 15$; wegen $4 \cdot 2 = 8 < 9$ und $4 \cdot 4 = 16 > 15$ besitzt die Aufgabe genau eine Lösung, und zwar $x=3$. Der Endstand lautet demnach 9 : 3, und es wurden insgesamt 12 Tore geschossen.

W 5 * 932 Wir erhalten den Flächeninhalt A der schraffiert gezeichneten Fläche, indem wir von dem Flächeninhalt des großen Quadrates ($8 \cdot 8\ cm^2 = 64\ cm^2$) den Flächeninhalt des kleinen weißen Quadrates ($4 \cdot 4\ cm^2 = 16\ cm^2$) und die Flächeninhalte der beiden weißen Dreiecke subtrahieren. Diese beiden weißen Dreiecke lassen sich aber zu einem Rechteck zusammenlegen, das die Seitenlängen 4 cm und 8 cm hat, dessen Flächeninhalt also $4 \cdot 8\ cm^2 = 32\ cm^2$ beträgt.



Daher ist der Flächeninhalt der schraffiert gezeichneten Fläche gleich
$$A = (64-16-32)\ cm^2 = 16\ cm^2.$$

6 ▲ 933 Wir fällen von P die Lote auf die Schenkel des Winkels α, ihre Fußpunkte seien A und B. Aus $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PSB = \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle SAP = \sphericalangle SBP = 90°$ und $\overline{SP} = \overline{SP}$ folgt $\triangle PBS \cong \triangle PSA$ und damit $\overline{PA} = \overline{PB}$, das heißt, die entstandenen Streifen sind gleich breit.

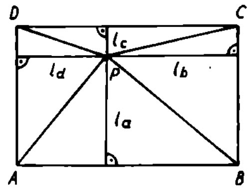


6 ▲ 934 Die gesuchten Zahlen müssen wegen $12 = 3 \cdot 4$ sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar sein. Die vierstelligen Zahlen sind genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden letzten Ziffern gebildeten Zahlen durch 4 teilbar sind, also wenn 7* durch 4 teilbar ist. Das trifft nur für 72 und 76 zu.
Wegen $9+7+2=18$ ist die Quersumme der Zahl 9*72 genau dann durch 3 teilbar, wenn an Stelle des Sternchens die Ziffer 0, 3, 6 oder 9 steht.
Wegen $9+7+6=22$ ist die Quersumme der Zahl 9*76 genau dann durch 3 teilbar, wenn an Stelle des Sternchens die Ziffer 2, 5 oder 8 steht. Die gesuchten Zahlen lauten somit 9072, 9372, 9672, 9972, 9276, 9576 und 9876.

W 6 ■ 935 Wir fällen von P die Lote auf die vier Rechteckseiten; ihre Längen seien l_a, l_b, l_c und l_d. Wie aus der Zeichnung ersichtlich wird, gilt dann

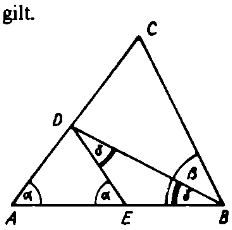
$$A_{ABP} + A_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot l_a + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot l_c$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot (l_a + l_c) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC},$$
$$A_{BCP} + A_{DAP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot l_b + \frac{1}{2} \cdot \overline{DA} \cdot l_d$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot (l_b + l_d) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}.$$

Die Summen der Flächeninhalte der genannten Paare von Dreiecken sind also gleich.

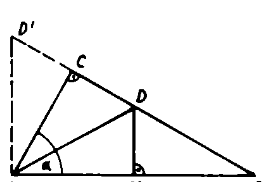


W 6 * 936 Unter den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind nur 2, 3 und 5 Primzahlen. Würden die Augenzahlen der Würfel sämtlich verschieden sein, so wäre die Gesamtaugenzahl wegen $2+3+5=10$ keine Primzahl. Würden die Augenzahlen der Würfel sämtlich gleich sein, so wäre die Gesamtaugenzahl gleich $3 \cdot n$, also durch 3 teilbar und keine Primzahl. Also müssen genau zwei der Würfel die gleiche Augenzahl zeigen. Die möglichen Zahlentripel lauten (2, 2, 3), (3, 3,5), (5, 5, 3).

W 6 * 937 Aus $\overline{AD}=\overline{DE}$ folgt, daß das Dreieck AED gleichschenklig ist und somit $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA = \alpha$ gilt. Aus $\overline{DE}=\overline{EB}$ folgt, daß das Dreieck BDE ebenfalls gleichschenklig ist und $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EDB = \delta$ gilt. Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner $\sphericalangle DEA = 2 \cdot \sphericalangle EBD$, also $\alpha = 2 \cdot \delta$ und somit $\sphericalangle EBD = \frac{1}{2}\alpha$. Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Wir tragen im Punkte B an die Gerade BA den Winkel $\delta = \frac{1}{2}\alpha$ an, dessen freier Schenkel die Seite $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt D schneidet. Um D schlagen wir mit $\overline{AD}$ als Radius einen Kreis, der die Seite $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt E schneidet. Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\frac{1}{2}\alpha < \beta$ gilt.

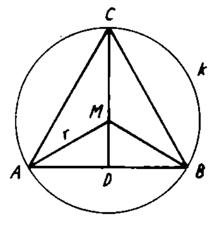


W 6 * 938 Es sei M Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und die Gerade MD sei Mittelsenkrechte zur Seite $\overline{AB}$, dann gilt $\overline{AD}=\overline{BD}$.



Wegen $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$ gilt deshalb auch $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{CD}$. Das Dreieck ADC werde an der Geraden AC als Symmetrieachse gespiegelt, und es sei D' Bildpunkt von D, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AD'} = \overline{DD'} = 2 \cdot \overline{CD}$. Das Dreieck ADD' ist somit gleichseitig, und es gilt Winkel $\sphericalangle ADC = 60^\circ$ und Winkel $\sphericalangle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Der Außenwinkel $\sphericalangle ADC = 60^\circ$ ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABD, also Winkel $\sphericalangle DAB = 30^\circ$. Folglich gilt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

7 ▲ 939 Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$. Da die Gerade MD nach Voraussetzung Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AMB$ ist, gilt $\sphericalangle DMB = \sphericalangle ACB$. Die Nebenwinkel $\sphericalangle DMB$ und $\sphericalangle BMC$ ergänzen sich zu 180°, folglich gilt $\sphericalangle DMB + \sphericalangle BMC = 180^\circ$ und damit auch $\sphericalangle ACB + \sphericalangle BMC = 180^\circ$.



7 ▲ 940 a) Wir rechnen $\frac{3}{2} \cdot 8\% = 12\%$, $2 \cdot 8\% = 16\%$, $4 \cdot 8\% = 32\%$. Aus $8\% + 12\% + 16\% + 32\% = 68\%$ und $100\% - 68\% = 32\%$ folgt $144 : G = 32 : 100$ und somit $G = 450$. Es besuchen 450 Schüler der Klassen 5 bis 10 diese Schule.
b) 2% von 450 Schülern sind 9 Schüler, 8% von 450 Schülern sind 36 Schüler, 12% von 450 Schülern sind 54 Schüler, 16% von 450 Schülern sind 72 Schüler, 32% von 450 Schülern sind 144 Schüler.
Die Schülerzeitschrift *alpha* wird von 36 Schülern bereits das vierte, von 54 Schülern das dritte, von 72 Schülern das zweite und von 144 Schülern das erste Jahr abonniert.

W 7 ■ 941 Die von E ausgehenden beiden Diagonalen zerlegen das Fünfeck in die drei Dreiecke $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ und $\triangle ECD$. Die Summe der Innenwinkel dieser Dreiecke ist gleich der Summe der Innenwinkel des Fünfecks, also gleich $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Jeder Innenwinkel des Fünfecks beträgt somit $540^\circ : 5 = 108^\circ$.
Aus der Gleichheit der Seiten und der Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle ECD$. Diese beiden Dreiecke sind gleichschenklig, also $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CED = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Der Winkel $\sphericalangle BEC$ beträgt demnach $108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$.

W 7 ■ 942 Aus $2a + 3b = 27$ folgt durch Umformung

$$3b = 27 - 2a,$$
$$b = 9 - \frac{2}{3}a.$$

Damit b eine natürliche Zahl ist, muß $\frac{2}{3}a \leqq 9$ und 3 Teiler von a sein. Das trifft zu für $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 9$ und $a_5 = 12$. Als Lösungsmenge dieser Gleichung erhalten wir somit die geordneten Zahlenpaare (0; 9), (3; 7), (6; 5), (9; 3) und (12; 1).

W 7 * 943 Aus $2(m+n) = mn$ folgt $2m + 2n = mn$. Durch weiteres Umformen erhalten wir schrittweise

$$2m = mn - 2n,$$
$$2m = n(m-2),$$
$$n = \frac{2m}{m-2},$$
$$n = 2 + \frac{4}{m-2}.$$

n ist nur dann eine von Null verschiedene natürliche Zahl, wenn $m-2$ positiv und Teiler von 4 ist. Das trifft zu für $m_1 = 3$, $m_2 = 4$ und $m_3 = 6$. Es gibt genau drei geordnete Zahlenpaare (m, n), die die Bedingung erfüllen; sie lauten (3; 6), (4; 4), (6; 3).

W 7 * 944 Aus der Konstruktion folgt: $\sphericalangle DPE = \frac{1}{2}\alpha$, da der Peripheriewinkel über einer Sehne, dessen Scheitel mit dem Mittelpunkt des Kreises auf der gleichen Seite der Sehne liegt, halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel.
Aus dem gleichen Grunde gilt $\sphericalangle ACE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}\alpha$. Aus der Konstruktion folgt dann weiter $\sphericalangle ACB = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{4}\alpha$.

8 ▲ 945 a) Wir erhalten die mittlere Geschwindigkeit als Quotienten aus dem Weg von 165 m und der Zeit von 5,22 s:

$$v = \frac{165}{5{,}22}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 31{,}61\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$= 31{,}61 \cdot 3{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 113{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit während des Skifluges betrug also $113{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; sie war höher als die mittlere Geschwindigkeit der Skispringer auf normalen Schanzen.
b) Berücksichtigt man die angegebenen Fehler, so liegt der Weg zwischen den Werten 164,5 m und 165, 5 m. Die Zeit beträgt höchstens 5,225 s und mindestens 5,215 s.
Daher erhalten wir für die Geschwindigkeit v in $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ die folgende fortlaufende Ungleichung: $\frac{164{,}5 \cdot 3{,}6}{5{,}225} \leqq v \leqq \frac{165{,}5 \cdot 3{,}6}{5{,}215}$,

$$113{,}3 \leqq v \leqq 114{,}3.$$

Die mittlere Geschwindigkeit liegt also bei Berücksichtigung der Fehler zwischen $113{,}3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ und $114{,}3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

8 ▲ 946 1. Es sei x_1 die Anzahl der Arbeitsstunden, die 8 Arbeiter benötigen, um mit modernen Geräten 9 km Gleise zu verlegen. Dann gilt, da 8 Arbeiter in 1 h 90 m Gleise verlegen,

$$90x_1 = 9000, \text{ also } x_1 = \frac{9000}{90} = 100.$$

8 Arbeiter benötigen also 100 Arbeitsstunden, um mit modernen Geräten 9 km Gleise zu verlegen.

2. Es sei x_2 die Anzahl der Arbeitsstunden, die 8 Arbeiter benötigen, um in traditioneller Handarbeit 9 km Gleise zu verlegen. Da unter diesen Bedingungen 40 Arbeiter in $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden 1125 m Gleise verlegen, benöti-

gen 8 Arbeiter hierfür $43\frac{3}{4} \cdot 5 = 218\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden. Daher gilt

$$x_2 : 218\frac{3}{4} = 9000 : 1125, \text{ also}$$

$$x_2 = \frac{9000 \cdot 218\frac{3}{4}}{1125} = 1750.$$

Bei traditioneller Handarbeit werden also 1750 Arbeitsstunden benötigt.

3. a) In traditioneller Handarbeit können 8 Arbeiter in $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden $\frac{1125}{5}$ m $= 225$ m Gleise verlegen.

b) Mit modernen Geräten können dagegen $90 \cdot 43\frac{3}{4}$ m $= 3937{,}5$ m Gleise verlegt werden.

4. Die Arbeitsproduktivität im Falle b) verhält sich zu der im Falle a) wie 17,5 : 1, sie ist also bei der Arbeit mit modernen Geräten 17,5 mal so groß wie bei traditioneller Handarbeit. Denn, da im Falle b) 3937,5 m Gleise und im Falle a) 225 m Gleise von der gleichen Anzahl von Arbeitern in der gleichen Zeit verlegt werden, erhalten wie

$$\frac{3937{,}5}{225} = 17{,}5.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir x_2 durch x_1 dividieren:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1750}{100} = 17{,}5.$$

W 8 ■ 947 Es seien x die Anzahl der Goldmedaillen und y die Anzahl der Silbermedaillen, die die DDR erhielt. Dann gilt

$$7x + 5y + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 84, \quad (1)$$

$$7x + 5y = 43, \quad (2)$$

$$y = \frac{43 - 7x}{5}. \quad (3)$$

Für $x = 0, 1, 2, 3, 5, 6$ ist $43 - 7x$ nicht durch 5 teilbar.

Ferner wird y für $x > 6$ negativ.

Für $x = 4$ erhalten wir jedoch

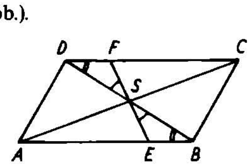
$$y = \frac{43 - 7 \cdot 4}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Daher hat die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (1) genau eine Lösung (x, y), wobei x und y natürliche Zahlen sind, nämlich

$$x = 4, \; y = 3.$$

Die Mannschaft der DDR erhielt also 4 Goldmedaillen und 3 Silbermedaillen.

W 8 ■ 948 Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$ und F ein Punkt auf der Seite $\overline{CD}$, so daß die Strecke $\overline{EF}$ durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht (vgl. die Abb.).



Dann gilt

$\overline{BS} = \overline{SD}$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren,

$\sphericalangle BSE = \sphericalangle DSF$ als Scheitelwinkel,

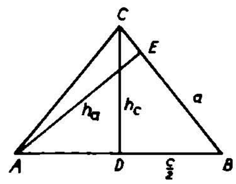
$\sphericalangle EBS = \sphericalangle FDS$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also

$\triangle SEB \cong \triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.

Daraus folgt $\overline{ES} = \overline{SF}$, d. h., die Strecke $\overline{EF}$ wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert, w.z.b.w.

W 8 * 949 Es seien

c die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AB}$, a die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{BC}$, $h_a = 12$ die Maßzahl der Länge der von A ausgehenden Höhe, $h_c = 10$ die Maßzahl der Länge der von C ausgehenden Höhe.



Dann gilt für die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}. \text{ Daraus folgt} \quad (1)$$

$$a \cdot h_a = c \cdot h_c, \quad (2)$$

$$a = \frac{h_c}{h_a} c = \frac{10}{12} c = \frac{5}{6} c. \quad (3)$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck CDB

$$a^2 = h_c^2 + \frac{c^2}{4}. \text{ Daraus folgt wegen (3)}$$

$$\frac{25}{36} c^2 = 100 + \frac{c^2}{4},$$

$$\frac{16}{36} c^2 = 100,$$

$$c^2 = \frac{100 \cdot 36}{16} = 225, \quad c = 15.$$

Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC hat also die Länge 15 cm.

Lösungen zu Flußwanderung bei Muldenstein (Heft 6/72)

1001 a $100 \cdot 10^6 \text{ m}^3 : 4 \text{ km}^2$
$= 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3 : (4 \cdot 10^6 \text{ m}^2) = 25$ m

1001 b $16{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}41$ M $\approx 6{,}8$ Mio M

1001 c $6\,800\,000$ M : $90\,000\,000$
$= 680\,000\,000$ Pf : $90\,000\,000 \approx 8$ Pf

Lösungen zu Ungleichungen im Bereich der natürlichen Zahlen

▲1▲ $L = \{0, 1, 2, 3\}$; ▲2▲ $L = \{0, 1, 2, 3\}$;

▲3▲ $y \in \{0, 1, 2\}$; ▲4▲ $L = \{0, 1\}$;

▲5▲ $L = \{0, 1, 2, 3\}$;

▲6▲ $L = \{0, 1, 2, 3\}$;

▲7▲ Diese Ungleichung hat keine Lösung; denn es gibt keine natürliche Zahl x, so daß $x + 5 < 5$ gilt. Man sagt: „Diese Ungleichung ist unerfüllbar" oder „Die Lösungsmenge dieser Ungleichung ist die leere Menge", Zeichen $L = \emptyset$.

▲8▲ $t \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$

▲9▲ $L = \{0, 9, 18, 27, 36, 45\}$;

▲10▲ $L = \{22, 23, 24, 25, 26\}$

▲11▲ Aus $x < z$, $x < v$, $v < y$, $z < v$, $x < y$, $z < y$ folgt $x < z < v < y$.

▲12▲ Die Ungleichung allein betrachtet wird von den Elementen der Menge $\{343, 344, 345, \ldots, 353, 354, 355\}$ erfüllt. Unter den jeweils zusätzlich gestellten Bedingungen erhalten wir für:

a) $\{344, 346, 348, 350, 352, 354\}$;
b) $\{345, 348, 351, 354\}$;
c) $\{348, 354\}$; d) $\{344, 346, 350, 352\}$;
e) $\{345, 351\}$;
f) Es gibt keine Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt, die Menge ist leer; g) $\{350\}$; h) $\{344, 345, 346, 350, 351, 352\}$; i) $\{344, 345, 346, 348, 350, 351, 352, 354\}$; h) $\{348\}$.

▲13▲ In der Zahlenfolge $0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20$ ist die Zahl 0 kleiner als jede der folgenden 20 Zahlen. Es lassen sich also 20 verschiedene Ungleichungen bilden, in denen stets $a = 0$ ist und für b die Zahlen von 1 bis 20 eingesetzt werden können. Wenn $a = 1$, so kann b durch die Zahlen von 2 bis 20, also durch 19 verschiedene Zahlen ersetzt werden. Die Überlegungen führen wir fort. Für $a = 19$ gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich $b = 20$. Wegen $20 + 19 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (20 + 1) + (19 + 2) + (18 + 3) + \ldots + (11 + 10) = 21 \cdot 10 = 210$ gibt es genau 210 Möglichkeiten zum Ersetzen der beiden Variablen a und b der Ungleichung durch die vorgegebenen Zahlen.

▲14▲ Ist $x = 0$, so gilt $4y < 10$, also $y = 0$, 1 oder 2; ist $x = 1$, so gilt $4y < 7$, also $y = 0$ oder 1; ist $x = 2$, so gilt $4y < 4$, also $y = 0$; ist $x = 3$, so gilt $4y < 1$, also $y = 0$.

Für $x > 3$ erhält man wegen $3x > 9$ keine Lösung.

$L = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 0)\}$.

▲15▲ Ist $y = 0$, so gilt $x < 4$ und $2x > 10$, d. h. $x > 5$, also keine Lösung;

ist $y = 1$, so gilt $x < 3$ und $2x > 5$, also keine Lösung; ist $y = 2$, so gilt $x < 2$ und $2x > 0$, also $x = 1$; ist $y = 3$, so gilt $x < 1$, d. h. $x = 0$, dann ist auch (2) erfüllt.

Für $x > 3$ gibt es wegen $x + y < 4$ keine Lösung.

$L = \{(1, 2), (0, 3)\}$

▲16▲
$$\begin{aligned} 7x + 22 &< 58 - 11x \\ 7x + 11x &< 58 - 22 \\ 18x &< 36 \\ x &< 2 \\ L &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

▲17▲
$$\begin{aligned} 35 : 7 + 40 &= 45 = 45 \\ (81 - 39) : 7 &= 6 > 5 \\ 49 : 7 + 55 &= 62 = 62 \\ (94 - 38) : 7 &= 8 < 9 \end{aligned}$$

▲18▲ Beide Ungleichungen sind einander äquivalent, denn jede dieser Ungleichungen hat die Lösungsmenge $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Lösungen zu „Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art“ (siehe S. 1/2)

▲1▲ a) Nur mit den rationalen Zahlen würde gelten:

(1) Die Zahlengerade besitzt Lücken, es gibt Punkte ohne Zahl und damit auch Strecken ohne Maßzahl.

(2) Es gibt viele positive Zahlen, die keine Quadratwurzeln haben.

(3) Es gibt viele Gleichungen der Form $x^n = a$, die keine Lösung haben.

b) Aus diesen drei, miteinander zusammenhängenden Anlässen ergeben sich als Ziele: Es soll ein Zahlenbereich entstehen, in dem

(1) jeder Punkt der Zahlengeraden seine Zahl findet,

(2) jede positive Zahl ihre Quadratwurzel hat (allgemeiner: in dem das Radizieren positiver Zahlen unbeschränkt ausführbar ist.)

(3) jede Gleichung der Form $x^n = a$ lösbar ist.

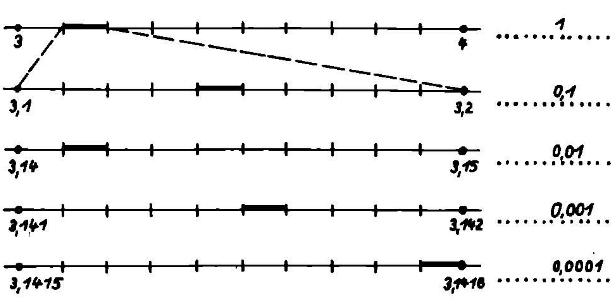
c) Die Ziele (1) und (2) sind erreicht worden, Ziel (3) jedoch nicht. Denn für negative a ist nach wie vor nicht jede derartige Gleichung lösbar. Das wird erst durch eine abermalige Erweiterung, zum Bereich der „komplexen Zahlen“, erreicht.

▲2▲ a) Vom Punkt P ist nichts weiter bekannt, also muß gemessen und dann gerechnet werden: $\overline{AB} = 30$ mm; $\overline{AP} = 21$ mm

$x : 10 = 56 : 80$; $x = 7$; $p = 8 + 0{,}7$; $p = 8{,}7$

b) $q = 8\frac{3}{11} = 8{,}\overline{27}$ c) $\sqrt{80}$

▲3▲



▲4▲ a) 6; 7 b) 0,1 c) 6,629507

6,6; 6,7	0,01	
6,62; 6,63	0,001	
6,629; 6,630	0,0001	
6,6295; 6,6296	0,00001	
6,62950; 6,62951	0,000001	

d) Es gibt bei fortgesetzter Zehnteilung kein kürzestes Intervall. Also läßt sich auch keine Länge dafür angeben.

▲5▲ a) wahr c) wahr e) wahr
b) falsch d) falsch f) wahr

▲6▲ Angaben wie 6,31784... reichen nicht aus, um einen unendlichen Dezimalbruch vollständig anzugeben. Weil man auf diese Weise über die weiteren Stellen nichts weiß, gibt es unendlich viele Dezimalbrüche, die mit 6,31784... gemeint sein könnten. Da man unendlich viele Ziffern nicht hinschreiben kann, muß man eine Vorschrift angeben, nach der diese Stellen zu besetzen sind, z. B.
6,323322333222... (es wechseln 2 und 3; das Beispiel zeigt, wie ihre Anzahl stets um 1 wächst.) Oder
6,24681012... (Die Fortsetzung erfolgt gemäß der Folge der geraden Zahlen.)
Oder $\sqrt{40}$.

▲7▲ a) < b) > c) > d) > e) <
f), g) und h) müssen offen bleiben.

▲8▲ $a = 2{,}6$ und $b = 2{,}7$
denn $a^2 = 2{,}6^2 = 6{,}76 < 7$
und $b^2 = 2{,}7^2 = 7{,}29 > 7$.

▲9▲ a) Nein, denn $5{,}5^2 = 30{,}25 > 30$.
b) Nein, denn $4{,}2^2 = 17{,}64 < 18$.

▲10▲ a) 1,23456789101 b) 0,000007
c) Das nachfolgende Glied ist stets größer
d) Es gibt kein größtes Glied.
e) Alle Glieder sind kleiner als a.
f) und g) Ein solches Glied gibt es nicht.

▲11▲ Wenn bei der Definition für „Reelle Zahl“ die periodischen Dezimalbrüche mit Neunerperiode ausgeschlossen werden — und bei allen Schülern aus Klasse 9 ist das sicher geschehen —, so sind a), b) und c) eigentlich sinnlos. Denn da $7{,}1\overline{9}$ keine reelle Zahl ist, kann $7{,}1\overline{9}$ weder kleiner, noch gleich, noch größer als 7,20 sein. Ist dieser Ausschluß jedoch nicht geschehen, so wäre b) wahr, a) und c) falsch. Auf alle Fälle ist aber e) wahr und sind d) und f) falsch. Bei g), h) und i) ist es ähnlich wie bei a) bis c): Ist ein Ausschluß erfolgt, so sind g), h) und i) falsch, andernfalls nur h).

▲12▲ a) 4,507295
b) 4,04 denn $3{,}2727 \cdot 1{,}2345 < a \cdot b < 3{,}273 \cdot 1{,}235$
also $4{,}04014815 < a \cdot b < 4{,}042155$

▲13▲ Die Frage nach dem Nachfolger einer Zahl ist eigentlich nur sinnvoll, wenn man weiß, in welchem Zahlbereich man sich befindet. Legt man nur den Bereich der ganzen Zahlen zugrunde, so haben 17 und −17 den Nachfolger 18 bzw. −16. Bewegt man sich im Bereich der rationalen oder sogar in dem der reellen Zahlen, so gibt es auch für 17 und −17 keinen Nachfolger, genau so wenig wie für die anderen vier Zahlen. Angaben wie 0,18; $17{,}\overline{171}$; $\sqrt{18}$; $\frac{18}{2}$ sind für diese vier Zahlen auf alle Fälle falsch.

▲14▲	rationale Zahl	reelle Zahl
a)	ja	ja
b)	ja	ja
c)	ja	ja
d)	nein	ja
e)	ja	ja
f)	nein	ja
g)	ja	ja
h)	nein	nein

Lösungen zu alpha-heiter

Kombiniere!

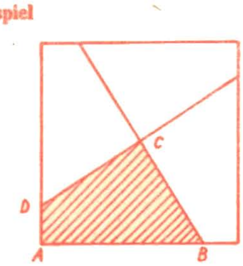
Um die Lösung zu finden, ist es vorteilhaft, eine Tabelle aufzustellen und die bekannten Angaben einzutragen und danach mit den Schlußfolgerungen zu beginnen.
Alfred konnte am 2. und 3. Tag keinen Wartburg fahren, da an diesen Tagen *Peter* und *Günther* diesen belegten, d. h. erst am 5. Tag fuhr *Alfred* mit dem Wartburg. *Peter* konnte am Montag und Donnerstag keinen Trabant fahren, weil *Alfred* und *Werner* diesen benutzten. An den genannten Tagen konnte *Peter* nur Tatra oder Moskwitsch fahren, d. h. am 5. Tag fuhr *Alfred* — Wartburg, *Peter* — Trabant, *Günther* — Moskwitsch, *Werner* — Skoda, *Horst* — Tatra.

Nachgedacht!

Unabhängig von a und m stets $x = 0$. Der Sperling macht keine Schritte, er hüpft nämlich!

Wabenrätsel

Legespiel



Begriffsschlange

Gerade, Ebene, Endpunkt, teilbar, Radius, Strecke, Element, Thales, System, Maßstab, Bewegung, Grundseite, Ellipse, eins, Siebzehneck, Kongruenz; Durchmesser.

Weltfestspiele der Jugend und Studenten

Berlin 1973 Hauptstadt der DDR

Was hat Mathematik mit den X. Weltfestspielen zu tun? Das wird sich mancher fragen, der diese Überschrift liest. In unserer AG Mathematik der 9. und 10. Klassen der EOS *August-Hermann-Francke* Halle meinen wir: sehr viel, denn wir finden uns dort nicht zusammen, um uns die Langeweile zu vertreiben. Wenn die FDJler in den Betrieben in Vorbereitung der X. Weltfestspiele auf vielfache Weise große Anstrengungen zur Erhöhung der Produktion unternehmen, so stellen wir uns das Ziel, gemäß dem Aufruf Lenins an die Jugend „Lernen, lernen, nochmals lernen" hohe Lernergebnisse im Fach Mathematik zu erreichen. Wir wollen damit zugleich Freude beim Knobeln und Lösen von Mathematikaufgaben haben und Schüler für die Mathematik interessieren. Dabei haben wir uns zu Ehren und in Vorbereitung der X. Weltfestspiele verpflichtet:

- Jeder AG-Teilnehmer ist Abonnent der *alpha*-Zeitung und beteiligt sich am *alpha*-Wettbewerb 1972/73.
- Wir bereiten die Teilnahme an Mathematikolympiaden in der Stadt Halle und im Bezirk gründlich vor.
- Im Frühjahr 1973 gestalten wir eine Schulwandzeitung über das Thema „Mathematik und X. Weltfestspiele".
- Jeder erfüllt seine gesellschaftliche Funktion in der FDJ-Gruppe zuverlässig und verantwortungsbewußt.

Wie können wir diese Aufgaben erfolgreich lösen? Wer einmal die *alpha*-Hefte früherer Jahrgänge durchblättert, findet viele Hinweise zu einer lebendigen Gestaltung unserer AG-Zusammenkünfte. Es sei hier z. B. auf Biographien großer Mathematiker verwiesen, auf Artikel über Gleichungen mit absoluten Beträgen (6/70), über darstellende Geometrie (6/67, 1/68, ...), über Logik und Mengenlehre (2/68, 1, 2, 3/67, ...). Besonderes Interesse finden auch die Darlegungen über den Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon in Dresden (2/69), über Mathematik und Musik (6/69) und über die zahlreichen Berichte von Mathematikolympiaden aus vielen Ländern. Nicht unerwähnt sollen hier ferner die hübschen Anregungen in *alpha* heiter bleiben.

Zu einer planmäßigen Auswertung der *alpha*-Zeitschrift studieren wir eine Reihe von Artikeln, die wir in der AG vortragen und diskutieren. So beschäftigen wir uns z. Z. mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion (2/67, 3/67). Dabei lernen wir, mathematische Aufgaben auf verschiedene Arten zu lösen, üben uns in konzentrierter Arbeitsweise und erwerben die Fähigkeit, einfache mathematische Texte zu lesen. Natürlich spielen das Lösen von Aufgaben und die Diskussion über sie eine bedeutende Rolle. Dazu verwenden wir neben der *alpha* u. a. die Bücher „Aufgaben von Mathematikolypiaden aus der UdSSR und ČSSR" und „Olympiadeaufgaben aus der DDR".

Wir sind überzeugt, daß unser erfolgreiches Bemühen auf dem vorgezeigten Wege nicht nur zur Erfüllung des *Mathematik-Beschlusses* des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom Dezember 1962, sondern auch der Lösung der vom VIII. Parteitag gestellten Hauptaufgabe dient.

Auf zum X. Festival! *Kerstin Bachmann*

Unsere Mathematik-Wandzeitung

Leben und Werk des N. Copernicus

Wir beschäftigen uns in der Arbeitsgemeinschaft nicht nur mit mathematischen Problemen, die den Schulstoff vertiefen und ergänzen, sondern unterhalten uns auch über das Leben und Schaffen berühmter Mathematiker und Naturwissenschaftler, werten ihre Stellung innerhalb der menschlichen Gesellschaft ihrer Epoche.

Wir wählen vor allem solche Persönlichkeiten aus, die mit dem von uns behandelten Stoff in Beziehung stehen oder deren Geburts- bzw. Todesjahr sich jährt. Der in den Heften 6/69 bis 5/70 in *alpha* veröffentlichte Mathematikkalender erleichtert uns die Arbeit wesentlich. Ist unsere Entscheidung getroffen, dann beauftragen wir einige Mitglieder der AG, sich mit den wichtigsten Daten aus dem Leben und Werk des Wissenschaftlers an Hand von Lexika und anderen Nachschlagewerken bekanntzumachen.

Andere Schüler suchen in populärwissenschaftlichen Zeitschriften (*Urania, wissenschaft und fortschritt*) oder in der *alpha* sowie *Mathematik in der Schule* nach auswertbaren Beiträgen. Auch Büchern wie „Geschichte der Mathematik im Mittelalter" oder „Mathematik in der Antike", nicht zuletzt den vielen Broschüren der Mathematischen Schülerbücherei („Der Pythagoreische Lehrsatz", „Altes und Neues vom Kreis") haben wir häufig Anregungen entnehmen können. Solches Material sollte in keiner Handbibliothek einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft fehlen. Über einige Mathematiker und Naturwissenschaftler sind Lebensbilder verfaßt, so daß sich ein Gang in eine Bibliothek lohnt. Sind auf diese Art und Weise genügend Quellen erschlossen worden, erarbeiten einige Zirkelmitglieder Zusammenfassungen und tragen diese der AG vor.

Augenblicklich beschäftigen wir uns mit Leben und Werk des polnischen Astronomen N. Copernicus. Da er wesentlich zur Herausbildung des modernen Weltbildes beigetragen hat, entschlossen wir uns, die vorgetragenen Zusammenfassungen so zu bearbeiten, daß sie als Wandzeitungszyklus allen Schülern unserer Schule Anfang 1973 zugänglich gemacht werden kann.

- Auf der ersten Wandzeitung veröffentlichen wir ein Porträt Copernicus und berichten über ihn biographisch.
- Auf der zweiten Wandzeitung bilden wir eine historische Darstellung des heliozentrischen Weltsystems des Copernicus ab und erläutern es. Ferner würdigen wir seine gesellschaftliche Bedeutung in Hinblick auf das ptolemäische geozentrische System. Wir gehen aber auch auf den Mangel des Copernicanischen Systems ein, der vor allem in der Annahme von kreisförmigen Planetenbahnen beruht.
- Da der Begriff „Epizykel" in den Texten der zweiten Wandzeitung verwendet wurde – in einem gesonderten AG-Nachmittag sprachen wir über Rollkurven, zu dem die Epizykloiden gehören – beschlossen wir, auf einer dritten Wandzeitung die diskutierten Begriffe durch Skizzen und deren Beschriftung zu erläutern.
- Da auf den drei beschriebenen Wandzeitungen wenig Bildmaterial verarbeitet wurde, wollen wir diesen Mangel später durch Bildtafeln aus Material der Tagespresse und aus Zeitschriften bereichern.

Ute Schweidt, Waltraud Böttinger,
Mitglieder der AG Mathematik OS Lübtheen

Als geeignete und noch relativ leicht zugängliche Jugendliteratur empfehlen wir:

Harig: **Die Tat des Copernicus** (Urania-Verlag 1962)
Radczun: **Und sie bewegt sich doch** (Kinderbuchverlag Berlin 1971)
Winkler: **Den Sternen auf der Spur** (Postreiter-Verlag Halle 1962)
Mielke: **Zu neuen Horizonten** (Transpress-Verlag Berlin 1972)
Beust: **Unser Sternenhimmel** (Urania-Verlag 1967)
ABC-Astronomie (VEB Brockhaus Leipzig 1971)

Inhaltsverzeichnis 1967 bis 1972
(leicht gekürzt)

alpha (Zeitschrift alpha)
2/67, 1/68 Wissen wo (eine Anleitung zum Selbststudium) (H. Herzog/J. Lehmann) ● 6/68, 6/69 *alpha* berichtet (J. Lehmann) ● 5/69 An die Leser der Zeitschrift alpha (A. Markuschewitsch) ● 6/71 Wie entsteht die Zeitschrift *alpha*? (H. Jüttner/P. Dreßler, J. Lehmann)

alpha-Wettbewerb
1/67, 4/67, 1/68, 5/69, 5/70 Bedingungen und Hinweise (Red.) ● 6/67 Vorstellung der Jury ● 2/68, 2/69, 6/69, 6/70, 6/71, 1/72, 6/72 Auswertung, Preisträger, Statistik der Wettbewerbe 1967/71 (Red.) ● 4/69 Pioniere des *alpha*-Wettbewerbs (E. Manske) ● 4/71, 4/72 Physikwettbewerb

Ähnlichkeitslehre
4/67 Guter Mond, du gehst so stille... (L. Görke)

Aufgaben
5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR (O. Prinits) ● 6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam (H. Tang/Nguyen lam Son) ● 6/69, 1/70 Prüfungsaufgaben aus Island (G. O. Gestsson) ● 1/70, 4/70 Prüfungsaufgaben aus Tanzania (W. Büchel) ● 3/72 Mathematik und Sport (Th. Scholl) ● 5/72 Mathematik und Russisch (OS Döbeln)

Berichte
1/67 Internat. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) (D. Ziegler) ● 2/67, 3/69 *alpha* berichtet aus aller Welt ● 5/67 Nowosibirsk (W. Friedrich) ● 5/67 Aus der Sowjetunion berichtet ● 6/68 Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft in Rostock (H. Titze) ● 1/71 Die Mathematik ist schön (R. Peter) ● 1/71 IV. Internat. Physikolympiade ● 1/71 Taugen Mädchen für die Mathematik? ● 2/71 10 Jahre Weltraumflug (W. Träger) ● 2/72 *alpha* international (Red.) ● 3/72 Mathematikstudenten im Forschungsstudium (O. Krötenheerdt) ● 4/72 Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Dresden (Red.) ● 4/72 Technische Universität Dresden (R. Sonnemann)

Berufe
3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium (W. Zill) ● 6/67 Als Diplommathematiker in Dubna (G. Laßner) ● 6/67 Als Mathematiklehrer in Tanzania (H. Büchel) ● 2/68 Elektronische Datenverarbeitung – eine Perspektive ● 2/68 Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur (J. Pönisch) ● 3/68 Facharbeiter für Datenverarbeitung (Ch. Papendorf) ● 4/68 Mathematisch-technischer Assistent (G. Paulin) ● 5/68 Ingenieur für Programmierung (W. Leupold) ● 6/68 Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung) (J. Lötzsch/G. Seifert) ● 2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten ● 3/69 Ulrich Zähle berichtet (U. Zähle) ● 4/69 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten (H. Ernst) ● 5/69 Hochbauzeichner – ein Beruf für Mädchen ● 6/69 Diplom-Mathematiker (H. Girlich) ● 1/70 Diplomlehrer für Mathematik (R. Mildner) ● 5/70 Bauingenieur W. Wittig ● 6/70 Hochschulingenieur (G. Burucker) ● 1/71 Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter 5/72 Studienmöglichkeiten an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar (D. Schwaab)

Beweise
2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion (W. Stoye) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 4/69 Mathematikprobleme — selbst gemacht (Nazla H. A. Khedre) ● 4/71 Ein interessanter geometrischer Beweis (E. Schröder)

Biographien
2/67 Gottfr. Wilh. Leibniz als Mathematiker (W. Purkert) ● 4/67 Leonard Euler 1707 bis 1783 (H. Bernhardt) ● 4/67 Gaspard Monge 1746 bis 1818 (E. Schröder) ● 5/67 A. J. Chintschin (H. Bernhardt) ● 5/67 Aus der Jugend A. J. Chintschins (A. Artisow/Muromzewa) ● 1/68 Gedenktage (G. Cantor — H. A. Lorentz — D. Hilbert — E. Landau) ● 4/68 August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868 (H. Wußing) ● 1/69 Lew Danowitsch Landau (B. Zimmermann) ● 4/69 Evariste Galois (E. Hertel/O. Stamfort) ● 5/69 Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert (J. Gronitz) ● 6/69 Michael Stifel (J. Schwarz) ● 6/69 Alexander Ossipowitsch Gelfond (H. Boll) ● 1/70 Mathematik in der Familie W. I. Lenins (G. N. Wolkow) ● 3/70 Janos Bolyai (I. Reimann) ● 4/70 Auf den Spuren Jakob Steiners (E. Schröder) ● 5/70 Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin ● 6/70, 2/71, 4/71 Albrecht Dürer (E. Schröder) ● 6/70 Die Leninpreisträger Jurij Rezanov und Jurij Prochorov ● 1/71, 4/71 Der Weg eines Talents — Olga A. Ladyschenskaja (J. Senkjewitsch) ● 5/71, 1/72, 2/72 Ramanujan — das mathematische Genie Indiens (V. Lewin) ● 6/71 Johannes Kepler (Th. Riedrich) ● 5/72, 6/72 Nicolaus Copernicus (H. Wußing)

Funktionen
6/70, 2/71, 4/71 Was ist eine Funktion? (A. N. Kolmogorow)

Geometrie, darstellende
6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) ● 1/68 Abstand zweier Punkte im Raum (E. Schröder) ● 2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) ● 4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur (E. Schröder) ● 1/70 Auch ein Schlußlicht hat es in sich (E. Schröder) ● 5/70 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (E. Schröder) ● 5/72, 6/72 Darstellende Geometrie und Architekturausbildung (E. Kühn)

Geschichte der Mathematik
6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike (M. Otto) ● 6/68 „Mathematische Manuskripte" von Karl Marx (R. Sperl) ● 1/69 Die „mathematischen Manuskripte" von Karl Marx (Aus „Nedelja" 10/68) ● 1/69 Was bedeutet eigentlich „*x*"? (Aus „Po sv'etu" 11/67) ● 1/70 Über die Anfänge der Mathematik aus: „Die Mathematik in der Antike" (H. Wußing) ● 6/69 bis 5/70 Mathematik-Kalender (W. Heinig/J. Lehmann) ● 3/71 Geschichte der Mathematik der Tschechoslowakei (O. Langer)

Gleichungen/Ungleichungen
1/68 Eine schwierige Hausaufgabe (R. Lüders) ● 2/68 Der Lucassche Turm (J. Frormann) ● 6/69 Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) ● 4/70 Einige Ungleichungen für Fakultäten (V. I. Lewin) ● 6/70 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) ● 2/72 Zwei Beweise einer Ungleichung von Cauchy (W. Dziadek) ● 5/72 Diophantische Gleichungen (H. Menzer)

Graphentheorie
3/71 Über die Ramseyschen Zahlen (J. Sedláček) ● 4/72 Der Graph (J. I. Churgin) ● 6/72 Aus der Graphentheorie (W. Voß)

Kombinatorik
6/71 Geometrische Kombinatorik (L. Lovasz/J. Pelikan) ● 6/71, 2/72, 3/72 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? (W. Türke)

Literatur
4/68 Formen und Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung (W. Arnold) ● 2/69 „Werk der Millionen" (Red. *alpha*) ● 6/70 Quant — eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift ● 6/70 Jugend und Mathematik — eine mathematische Schülerzeitschrift der Demokratischen Republik Vietnam. ● 4/72 Formeln — was dann? (J. I. Churgin) ● 5/72 Sammelbildserie: Berühmte Mathematiker (Red.) ● 6/72 Menschen messen Zeit und Raum (E. Padelt)

Logik
2/68 Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage (M. Rehm) ● 2/70 Logisches Denken — spielend erlernt (G. Scholz) ● 3/70 Mathematische Logik für Anfänger (Leseprobe) ● 5/70 Achtung Kreuzung —

Vorfahrt beachten! (W. Träger) ● 5/72, 6/72 Kleine Worte — Große Wirkung (L. Flade)

Mengenlehre

1/67 Mit Mengen fängt es an (1) (W. Walsch/ H. Lohse) ● 2/67 Wir operieren mit Mengen (2) (W. Walsch) ● 3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) (W. Walsch) ● 4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre (W. Walsch) ● 2/69 Zweiermengen und geordnete Paare (H. Tiede)

Nomographie

2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden — Olympiadeaufgaben

1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha—Neubrandenburg (J. Lehmann) ● 3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb (M. Mäthner/G. Schulze) ● 3/67 Mathematische Wettbewerbe in England ● 4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien (S. Bodurow) ● 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tbilissi 1967 (J. Petrakow) ● 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit (R. Höppner) ● 6/67 IX. IMO 1967 (H. Bausch) ● 1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR ● 1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb USA 1967 ● 3/68 Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die OJM der DDR (H. Karl) ● 5/68, 6/68 X. IMO 1968 (H. Bausch/W. Burmeister) ● 6/68 Allunions-Fernolympiade (R. Lüders/J. Lehmann) ● 1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR ● 3/69 Concursul de matematica, Etapa locala - 22 martie 1968 ● 5/69, 1/70 XI. IMO 1969 (H. Bausch/ J. Lehmann) ● 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 (G. Ulbricht) ● 1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR ● 2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR (O. Langer/ St. Horák) ● 3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (I. Reimann/M. Walter) ● 4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden ● 5/70 XII. IMO 1970 (H. Bausch/ J. Lehmann) ● 1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR ● 2/71 10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR ● 2/71 Mathematikolympiaden in der MVR ● 2/71 Österreichische Mathematikolympiade ● 5/71 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/71 XIII. IMO 1971 (J. Lehmann) ● 1/72 bis 5/72 XI. OJM der DDR ● 1/72 FdGB-Urlauber-Olympiade 1972 (W. Träger) ● 3/72 Mathematikolympiaden in der VR Polen (S. Straszewicz) ● 3/72 Rückblick auf die XIII. IMO (Red.) ● 3/72 Mathematikolympiade in der Republik Kuba (L. J. Davidson) ● 5/72 XIV. IMO 1972

Planimetrie

1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat (H. Wiesemann) ● 5/68 Was ist ein Viereck? (L. Görke) ● 6/68, 1/69, 3/69, 5/69, 6/72 Mit Zirkel und Zeichendreieck (J. Lehmann) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 3/69 Mit Bleistift und Lineal (E. Schröder) ● 3/69 Bange machen gilt nicht! — Modell eines geom. Extremwertproblems (Th. Scholl) ● 5/69 Übe sinnvoll — überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck (G. Pietzsch) ● 6/69 Kleine geometrische Exkursion (Th. Scholl) ● 2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (H. Titze) ● 3/70, 4/70 Ornamente (R. Bittner) ● 2/72 Arbeitsblatt Geometrie (H. Herzog) ● 3/72 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (E. Schröder)

Relationen

6/70, 1/71, 2/71 Relationen (R. Herrmann)

Stereometrie

1/69 Fernsehfußball — reguläre Polyeder (E. Schröder) ● 2/69 Der Eulersche Polyedersatz (H. Günther) ● 5/71 Durch die Welt der Tetraeder (G. Geise)

Unterhaltung

1/68 Hinter die Kulissen geschaut (W. Träger) ● 3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel (Th. Scholl) ● 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil (W. Träger) ● 6/68 Schön ist so ein Ring(el)spiel (J. Frormann) ● 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (W. Unze) ● 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (W. Träger) ● 1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie (W. Träger) ● 3/71 Wirklichkeit und Täuschung (J. Sedláček) ● 1/72 Kryptarithmetik (J. Lehmann/ R. Lüders) ● 1/72 Geometrisches Kreuzworträtsel aus: Quant ● 2/72 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (Ch. Riehl) ● 3/72 Mathe-Quiz im Ferienlager (J. Lehmann/ W. Träger)

Verbindung zur Praxis

1/67 Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten (S. Günther) ● 3/67 Schwankt der Fernsehturm? (W. Zill) ● 3/67 Der Berliner Fernsehturm (W. Zill) ● 4/67 Auf den Spuren Roald Amundsen (S. Meier) ● 5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) (H. Werner) ● 6/67 Ernährung und Leistungsfähigkeit (W. Kraak) ● 1/68 50 Jahre Rote Armee ● 1/68 Dresden in Zahlen (W. Weidauer) ● 1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge (A. Hanisch) ● 2/69 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden — Zwinger (H. Grötzsch) ● 3/69 Mathematische Modelle aus der DDR (W. Glaß) ● 4/69 Multicurve (E. Schröder) ● 4/69 Aus der VAR berichtet ● 5/69 20 Jahre Entwicklung des Volksbildungswesens in der DDR (J. Lehmann) ● 6/69 Mathematik und Musik (Ch. Lange) ● 6/69 Rund um das Schachbrett (K. Kannenberg) ● 1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (J. Frormann) ● 4/71 Waffen aus Suhl (E. Hoffmann) ● 6/71, 1/72 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (W. Träger) ● 1/72 bis 6/72 Graphiken zur Direktive des VIII. Parteitages der SED (Verlag Die Wirtschaft) ● 3/72 Fluidkompaß Sport 3 (Red.) ● 4/72 Die Rechenmaschine — ein Souvenir aus der Sowjetunion (A. Mertens) ● 6/72 Mathematik im Reich der Töne (E. Schröder)

Zahlenbereiche

5/68 Übe sinnvoll — Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen (G. Pietzsch) ● 1/72 Über zwei Operationen mit Zahlen (K. Tschimow)

Zahlenfolgen

6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums (A. A. Kolosow) ● 3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen (H. Lohse)

Zahlentheorie

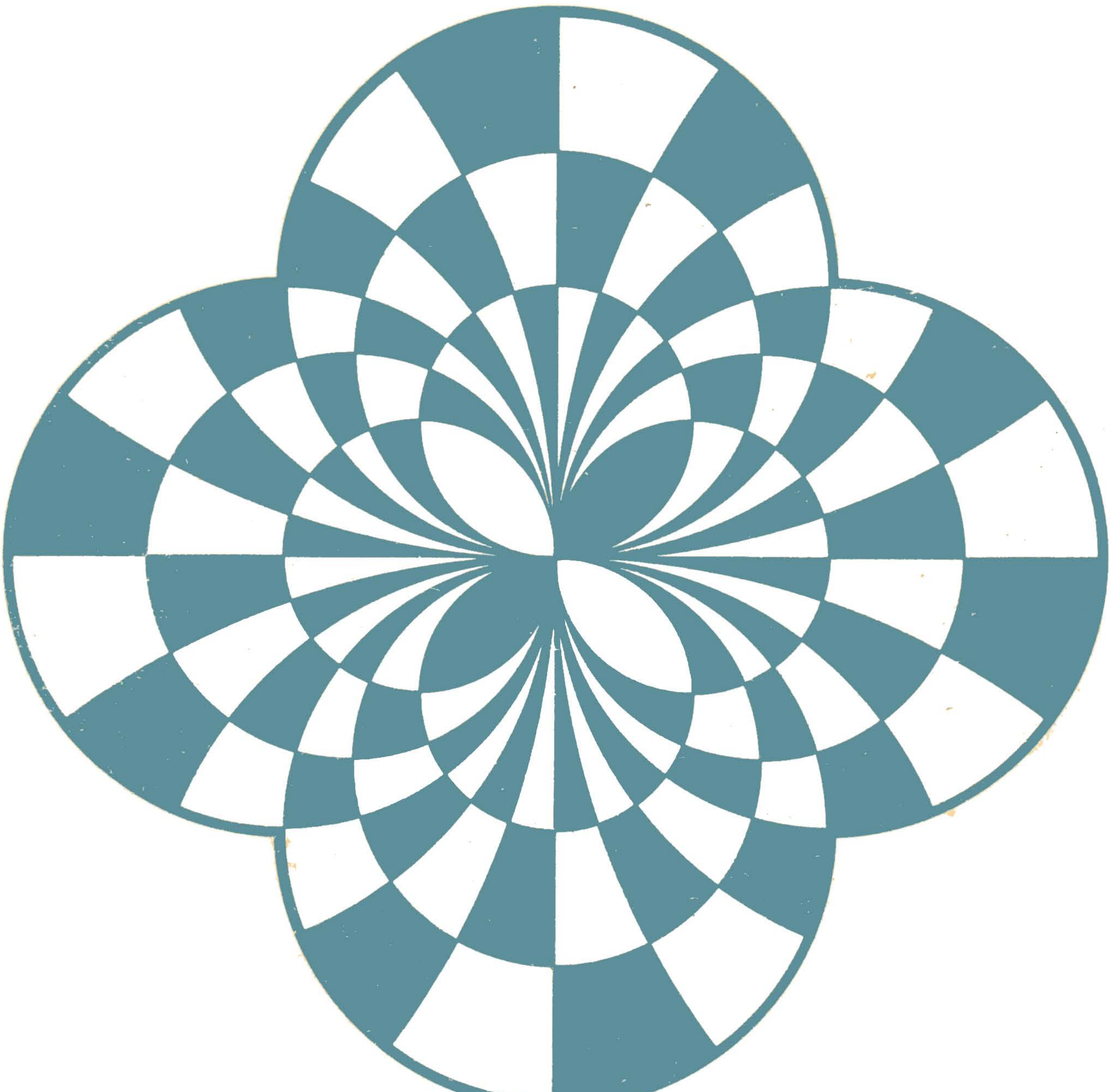
3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten (G. Lorenz) ● 5/70 Freitag der 13. (T. Bailey/G. Hofmann) ● 4/71 Die Teilbarkeit durch 7 (E. Naumann) ● 2/72, 3/72 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten (D. B. Fuchs)

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

1/67 Eine Arbeitsgemeinschaft erlebte die Deutsche Bücherei (AG 29. OS Leipzig) ● 5/67 Mathematischer Wettbewerb (W. Werner) ● 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? (G. Horn) ● 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA" (W. Träger) ● 5/70 Arbeitsgemeinschaften haben das Wort ● 2/72 Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew (L. A. Kaloujmine) ● 4/72 Arbeitspläne Mathematik (Kl. 5/6) (D. Klöppel/W. Rautenberg) ● 4/72 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (AG Math. Lübtheen) ● 4/72 Mathematik frei Haus (Korrespondentenzirkel) (R. Bergmann) ● 5/72 Mathematikern über die Schultern geschaut (H. Bode)

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignette: K.-H. Guckuk, Leipzig – nach einer Idee von B. Radestock, LVZ Leipzig (S. 27); Bild S. 29: Musikabteilung der Sächsischen Landesbiblothek Dresden (S. 29 oben, Mitte); *Foto:* H. P. Hofmann, Berlin (S. 29); *Vignette:* G. Fricke, Berlin (S. 30), Vignette: Cork aus Pythagoras, Niederlande (S. 32); *Vignette:* K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 33); Alte Bücher: Deutsche Bücherei, Leipzig und J. Lehmann, Leipzig (S. 34/35); J. Lehmann, Leipzig (S. 44); *Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. Januar 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Über die Bedeutung der Mathematik für den Markscheider

Der Gegenstand des Fachgebietes *Markscheidewesen* ist die Ermittlung und Interpretation bergbaulicher Gegebenheiten in lage- und höhenmäßiger, betrieblich-ökonomischer und geologisch-lagerstättenkundlicher Hinsicht. Die Methode besteht aus der Ermittlung und Sammlung, der Verarbeitung und Speicherung sowie der Angabe den Gegenstand betreffender Daten und Informationen.

Die Arbeit des Markscheiders beginnt mit der Erfassung von Daten. Dabei handelt es sich vor allem um die Erfassung von Meßwerten, die hauptsächlich aus Winkeln, Längen und Höhendifferenzen bestehen. Wie bereits gesagt, müssen die gemessenen Werte weiterverarbeitet werden. Ein wesentliches Ergebnis der Arbeit jeder Markscheiderei ist das bergmännische Riß-, Karten- und Planwerk, das aus Karten der Erdoberfläche, des Grubengebäudes und des Gebirges besteht und neben vollständigen Lage- und Höhenangaben auch alle interessierenden Qualitätsparameter der nutzbaren Mineralien enthält.

Im Markscheidewesen sind dazu oft komplizierte mathematische Operationen notwendig. Neben der sphärischen Trigonometrie spielt die ebene Trigonometrie eine dominierende Rolle. Dreiecksberechnungen sind in den vielfältigsten Arten durchzuführen. Ob bei der Berechnung der Koordinaten eines trigonometrischen Punktes im Übertagegelände oder bei der Berechnung trigonometrisch gemessener Höhen in der Grube, immer sind mathematische, hier besonders trigonometrische Probleme vorherrschend. Recht umfangreich nutzt der Markscheider auch die mathematische Statistik zur Informationsverdichtung mit Hilfe statistischer Prüf- und Schätzverfahren, zur Planung von Experimenten und Versuchen auf Grund der statistischen Entscheidungstheorie, zur Analyse der Meß- und Auswertegenauigkeit nach fehlertheoretischen Grundsätzen sowie zur Einflußgrößenrechnung.

Ein weiteres Gebiet der Mathematik, welches im Markscheidewesen große Bedeutung hat, ist die Geometrie. Aufgaben der Planimetrie, der Stereometrie, der Analytischen Geometrie bis zur Differentialgeometrie müssen tagtäglich gelöst werden. Erst nach der mathematischen Behandlung der Meßwerte (und dann oft noch durch eine nachfolgende zeichnerische Darstellung) ist man imstande, die Lage der einzelnen Grubenbaue und der Gebirgsschichten zueinander festzustellen.

Somit ist zur analytisch-mathematischen Qualifikation auch noch ein ausgezeichnetes räumliches Denken notwendig, was wiederum, mathematisch gesehen, in der Darstellenden Geometrie seinen Niederschlag findet.

In den Tagebauen der Braunkohle, der großen Kalkwerke usw. stehen vor allen Dingen Massen- und Vorratsberechnungen im Vordergrund.

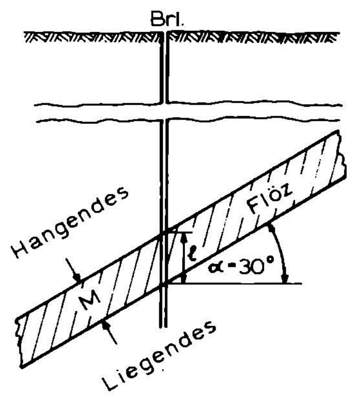
Die mathematischen Aufgaben im Markscheidewesen sind in diesem Jahrhundert stark angewachsen. Während es früher möglich war, alle Berechnungen noch mit der Logarithmentafel zu bestreiten, ging man später zu mechanischen Tischrechnern über, und heute bedient sich ein großer Teil der Markscheider bereits modernster elektronischer Datenverarbeitungsanlagen.

Es wird niemand bestreiten können: „So interessant wie die Mathematik ist auch der Beruf des Markscheiders“. Interessierte Abiturienten haben die Möglichkeit, dieses Fachgebiet an der Bergakademie Freiberg, der ältesten Bergbauhochschule der Welt, zu studieren.

H. Meixner

Aufgaben aus der Markscheidekunde

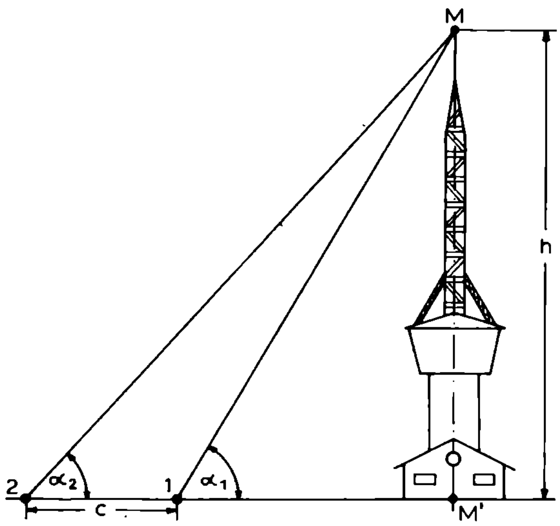
▲1▲ Bei einer Erkundungsbohrung nach Steinkohle wurde ein mit 30° einfallendes Flöz durchbohrt. Der Bohrkern (Kohle) hat eine Länge l von 1,80 m.
Wie groß ist die Mächtigkeit M dieses Flözes?



▲2▲ Eine auf der gesamten Erde vorgegebene Richtung ist die der Schwerkraft. Lotlinien konvergieren deshalb zum Erdinnern, so daß der Abstand zwischen zwei Lotlinien mit zunehmender Teufe (bergmännisch für: Tiefe) immer kleiner wird. In verschiedenen Höhenlagen (besonders im Bergbau, wo zwischen Übertage und den einzelnen Sohlen beachtliche Höhenunterschiede auftreten) gemessene Längen müssen deshalb eine Verbesserung erhalten.
Im Abstand von 1 km sind 2 Schächte von je 1 000 m Teufe vorhanden. In jeden dieser Schächte wird zur Orientierungsmessung für das Grubengebäude ein Lot gehängt.
Wie groß ist der Unterschied der Entfernung der Lote zwischen Übertage und Untertage?

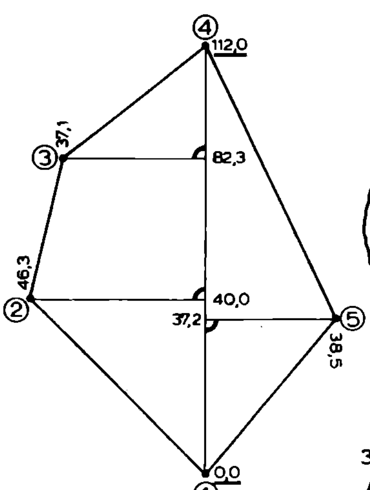
▲3▲ Um die Flugsicherheit eines in der Nähe eines Braunkohlentagebaues liegenden GST-Segelflugplatzes zu gewährleisten, muß die Höhe eines zur Grube gehörenden Wasserhochbehälters mit aufgesetzter UKW-Antenne bestimmt werden.
Zur Berechnung dieser Höhe wurde ein vertikales Hilfsdreieck gemessen.

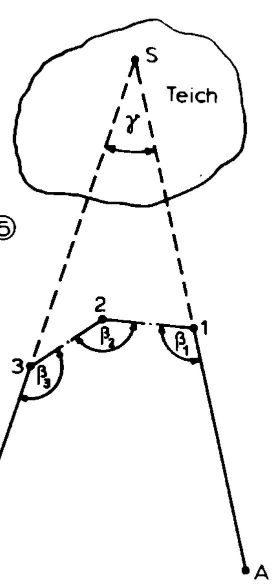
$\alpha_1 = 37°30'$ $\alpha_2 = 26°10'$ $c = 57{,}65$ m



Hierbei liegen M', 1 und 2 auf einer Geraden und in gleicher Höhe. Wie hoch ist die Höhe h des Turmes?

▲4▲ Die Größe eines Feldes innerhalb der Grenzsteine 1 bis 5 soll bestimmt werden.
Hierzu wurde entsprechend der Skizze durch die Punkte 1 und 4 eine Meßlinie (Abszisse) gelegt. Auf dieser Abszisse stehen rechtwinklig die Ordinaten zu den Punkten 2, 3 und 5.
An der Abszisse steht die Entfernung vom Punkt 1 bis zur jeweiligen Ordinate und bis zum Punkt 4. An den Punkten 2, 3 und 5 ist die Länge der Ordinate angegeben.





▲5▲ Es sind 2 Gleisachsen gegeben: $A-1$ und $B-3$. Diese sollen mit einer Kurve verbunden werden.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lothar Berg

Sektion Mathematik der Universität Rostock, stellv. Direktor der Sektion für Forschung

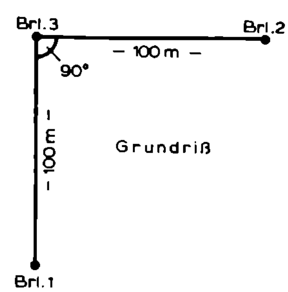
▲1038▲ Eine Gardine soll an n vorgegebene Haken gehängt werden, wobei mit den beiden äußersten zu beginnen ist. Um eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Haken zu erreichen, bestimme man bei der jetzt in einem Bogen herunterhängenden Gardine nach Augenmaß die Mitte und hänge sie an den mittleren der verbleibenden Haken, sofern es einen solchen gibt. Bei den jeweils entstehenden Teilbögen verfahre man entsprechend.
Man gebe eine Übersicht über alle nur möglichen Zahlen $n \geqq 2$ an, bei denen das beschriebene Verfahren bis zum letzten Haken ausführbar ist, und beweise die Richtigkeit des Ergebnisses.

Zu diesem Zweck ist der Winkel γ im Schnittpunkt S der beiden Gleisachsen zu bestimmen. An diesem Punkt befindet sich keine zugängliche Stelle, wo man einen Theodolit aufstellen könnte, um den Winkel direkt zu messen. Es sind dafür die Winkel

$\beta_1 = 106°20'$ $\beta_2 = 141°52'$ $\beta_3 = 142°29'$

gemessen worden. Berechne den Winkel γ!

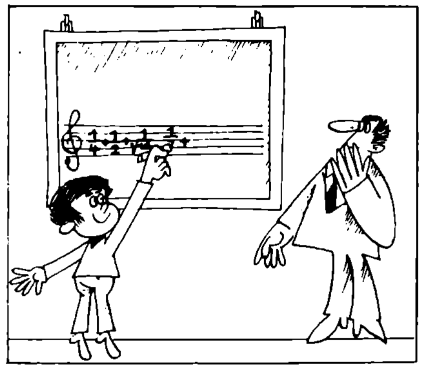
▲6▲ Zur Erkundung eines Flözes wurden 3 Bohrlöcher in folgender Anordnung niedergebracht:



Das Flöz wurde in den Bohrlöchern in folgenden Höhen angetroffen:
im Bohrloch 1 bei +35 m NN
im Bohrloch 2 bei +45 m NN
im Bohrloch 3 bei +85 m NN
Wie groß ist das Einfallen α des Flözes?
Unter dem Einfallen eines Flözes oder einer Gebirgsschicht versteht man den Vertikalwinkel, den die horizontale Linie mit der Spur eines auf dem Flöz oder der Gebirgsschicht abrollenden, nur der Schwerkraft überlassenen Körpers bildet. Dieses Maß ist für den Bergmann (Projektierung, Ausrichtung etc.) sehr wichtig.

Mathematik im Reich der Töne

Teil 2



Für weitere mathematische Betrachtungen stellen wir die Zahlenverhältnisse übersichtlich zusammen:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$
bezogen auf Nachbarton		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Die diatonische Tonleiter hat fünf reine Quinten, nämlich $c-g$, $e-h$, $f-c'$, $g-d'$ und $a-e'$. Bezeichnend sind die großen Terzen $c-e, f-a$ und $g-h$, die in der pythagoreischen Stimmung nur unrein geboten werden. Durch das mehrfache Auftreten der großen Terz und der kleineren Verhältniszahlen ist die diatonische der pythagoreischen Stimmung bezüglich des Klanges von Akkorden überlegen. Bringt man die auf den Grundton bezogenen Brüche der Übersicht auf den gemeinsamen Hauptnenner 24, lassen sich die Verhältniszahlen für die Frequenzen der diatonischen Tonleiter in der folgenden fortlaufenden Proportion schreiben:

24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48.

Für den Grundakkord $c-e-g$ (Tonika) lassen sich die Verhältniszahlen kürzen. Es gilt die Proportion 4 : 5 : 6. Sie wird auch von dem Dominantakkord $g-h-d'$ und dem Subdominantakkord $f-a-c'$ erfüllt. Die diatonische Tonleiter befriedigt optimal die Forderung nach harmonischem Zusammenklang der Töne. Man bezeichnet sie deshalb auch als die reine Tonskala.

Vergleichsweise lautet der Hauptnenner der entsprechenden Brüche in der pythagoreischen Stimmung 384. Dadurch gestaltet sich die Reihe der ganzen Verhältniszahlen für die Töne der Tonleiter wesentlich komplizierter. Bezieht man beide Stimmungen auf die kleinstmögliche ganze Zahl 384, ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
pythagoreische	384	432	486	512	576	648	729	768
diatonische Stimmung	384	432	480	512	576	640	720	768

Von musikalischem Interesse ist weiterhin die Unterscheidung nach Dur- und Moll-Tonart. Die bisher aufgestellten Verhältniszahlen repräsentieren die Dur-Tonart. Bei der Moll-Tonart werden, vom Grundton c ausgehend, die an der Dur-Tonleiter bekannten Intervallschritte in einer anderen Reihenfolge gesetzt, nämlich $\frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$. Bemerkenswert ist hierbei, daß sich die Moll-Tonart aus der Dur-Tonart nicht allein durch zyklische Vertauschung der Intervalle ableiten läßt. Es ist auch eine Inversion der zwischen den Halbtonschritten liegenden Intervalle $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ vorzunehmen. Wie man durch elementare Rechnung selbst nachprüfen kann, lassen sich die zu der Tonfolge gehörigen Schwingungszahlen durch folgende Proportion ganzzahlig erfassen:

120 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240

Ein weiteres Kürzen dieser Verhältniszahlen ist nicht möglich. Der Grunddreiklang wird durch das Zahlentripel 10 : 12 : 15 beschrieben. Wegen der Verschiedenheit der musikalischen Wirkung der beiden Tonarten auf die Psyche des Menschen spricht man von Tongeschlechtern. Während man die Dur-Tonart (dur – hart) mit den Vorstellungen von Kraft, Mannestum, Fröhlichkeit und Kühnheit verbindet, erweckt die Moll-Tonart (moll – weich) Gefühle der Trauer, des Ernstes und der in sich gekehrten Besinnlichkeit.

Das Bemühen, zwischen den Zahlen der fortlaufenden Proportionen und den durch die verschiedenen Tongeschlechter ausgelösten psychischen Stimmungen eine Korrelation herzustellen, führt leicht in Bereiche unbeweisbarer Spekulationen. Uns geht es hier um eine zahlenmäßige Erfassung akustischer Effekte an Tonleitern.

Die bisher behandelten Gedankenexperimente beschränkten sich auf ein Monochord. Beim Aufbau von Tonleitern darf uns jedoch nicht allein der Standpunkt des Wohlklanges von Tonfolgen und Akkorden interessieren. Wir müssen auch an die musikalische Praxis und den Instrumentenbau denken. Vor allem richtet sich unser Interesse auf Instrumente mit fester Tonlage, wie Klavier, Orgel oder Harmonika. Eine besonders harte Forderung, die der Musizierende an sein Instrument stellt, ergibt sich daraus, daß er sich bei Wahl der Tonlage seiner Umgebung (einem Chor oder anderen Instrumenten) anpassen muß. Das Instrument muß modulationsfähig sein. Auf einfachste Form gebracht lautet die Forderung: „Alle durch das Instrument verfügbaren Töne (mit Ausnahme der höchsten Oktave) müssen als Grundton einer Tonleiter einsetzbar sein."

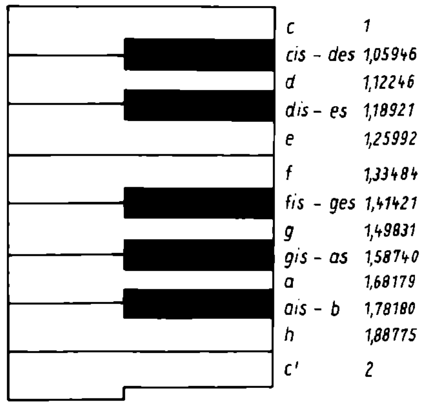
Zunächst ist klar, daß diese Forderung bei der Verschiedenartigkeit der Intervalle innerhalb einer der bisher behandelten Tonleitern schon aus mathematischen Überlegungen heraus nicht realisierbar ist. Deshalb ist man im Instrumentenbau mit fester Tonlage zu einem Kompromiß gezwungen, um dem ausübenden Musiker die Modulationsfreiheit und Spielbarkeit seines Instrumentes zu sichern. Der Kompromiß verlangt, daß an der Reinheit der Harmonien und dem Wohlklang der Tonfolgen gewisse Abstriche vorzunehmen sind. Die Tonstimmung, die auf Grund dieser Forderung konstruiert worden ist, bezeichnet man als temperierte Stimmung. Wie geht man an den Aufbau dieser Tonfolge heran?

Als erstes bleibt die Forderung bestehen, die Oktave rein zu bieten. Sowohl bei der pythagoreischen wie auch bei der diatonischen Tonleiter gibt es fünf ganze und zwei halbe Tonschritte, wobei die Worte „ganz" und „halb" nicht im mathematischen Sinn zu werten sind. Bei der diatonischen Tonleiter war noch zwischen großen und kleinen ganzen Intervallen zu unterscheiden. Es liegt zunächst nahe, die den beiden Tonleitern lagemäßig gemeinsamen fünf ganzen Tonschritte durch Einschalten je eines Zwischentones in zehn halbe Tonschritte aufzuteilen. Im Instrument sind daher vom Grundton zur Oktave nicht mehr, wie früher, sieben Tonschritte unterschiedlicher Weite, sondern insgesamt zwölf Tonschritte einzubauen. Da ferner jeder dieser zwölf Töne als Grundton einer Tonleiter wählbar sein soll, bleibt keine andere Lösung, als den Tonschritten eine einheitliche Größe zu geben. Zwei Tonintervalle sind aber für unser musikalisches Empfinden genau dann gleich, wenn die Quotienten ihrer Frequenzen miteinander übereinstimmen. Andererseits soll sich die Frequenz – auf zwölf Tonschritte gleich verteilt – verdoppeln. Beide Forderungen sind erfüllt, wenn der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne $q=\sqrt[12]{2}$ ist, denn es muß gelten $q^{12}=2$. Geht man also von einem Ton mit der Frequenz n um einen ganzen Ton höher, so gehört zu diesem die Frequenz nq^2, während beim Fortschreiten um einen halben Ton die neue Frequenz bei nq liegt. Übernimmt man in die neue Tonleiter den Wechsel von Ganz- und Halbtonschritten aus der pythagoreischen und diatonischen Tonleiter, so ergibt sich folgende Lösung für die Verhältnisse der Tonfrequenzen:

c	d	e	f	g	a	h	c′
1	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2

Die Wurzelausdrücke lassen noch keinen rechten Vergleich mit den Schwingungszahlen der pythagoreischen und diatonischen Tonleiter zu. Wir werden deshalb die drei hier behandelten Tonleitern auf Dezimalzahlen (5 Stellen nach dem Komma) umschreiben und dem Grundton wieder die Zahl 1 zuordnen. Man gelangt zu folgender Übersicht:

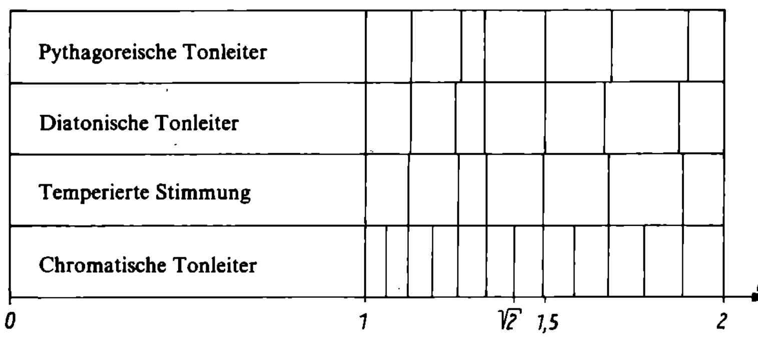
Den zwölf innerhalb einer Oktave liegenden Tönen sind folgende Verhältniszahlen zuzuordnen, wenn man den Grundton mit der Zahl 1 belegt:



Mit dieser Klaviatur ist auch aus der Sicht der Spieltechnik die Forderung erfüllt, daß jeder verfügbare Ton des Instrumentes zum Grundton einer spielbaren Tonleiter mit gut Regale, Spinetten und dergleichen wohl temperirt stimmen könne, damit nach heutiger Manier alle modi ficti in einer angenehm und erträglichen Harmonia genommen werden, mit vorhergehender Abhandlung von dem Vorzuge, Vollkommen- und weniger Vollkommenheit der musikalischen Zahlen (Proportionen) und Consonantien, welche bei Einrichtung der Temperaturen wohl in acht zu nehmen sind, benebst einem dazu gehörig – in Kupfer vorgebildeten deutlichen und völligen Monochordo, beschrieben und an das Tageslicht gegeben durch Andreas Werckmeistern, Stiffts-Hof-Organisten zu Quedlinburg. 1691."

Johann Sebastian Bach trat gleichfalls als Komponist und virtuoser Organist mit allem Nachdruck für das neue Tonsystem ein. Seine Instrumente Klavichord und Spinett waren in entsprechender Weise gestimmt. Ferner schrieb er die berühmten achtundvierzig Präludien und Fugen für das „Wohltemperierte Klavier"! Damit suchte er zu beweisen,

	pythagor. Stimmung	diatonische Stimmung	temperierte Stimmung
c	1	1	1
d	1,12500	1,12500	1,12246
e	1,26563	1,25000	1,25992
f	1,33333	1,33333	1,33484
g	1,50000	1,50000	1,49831
a	1,68750	1,66667	1,68179
h	1,89844	1,87500	1,88775
c′	2	2	2



Die Zusammenstellung zeigt unverkennbar, daß die zuletzt eingeführte temperierte Stimmung vermittelnd zwischen der pythagoreischen und der diatonischen Stimmung liegt. Bei keinem der acht Töne zeigt die hier konstruierte Tonleiter eine wesentliche Abweichung von den zuvor behandelten Tonleitern. Die außerordentliche Überlegenheit der temperierten Stimmung liegt jedoch darin begründet, daß sie den Bau von Instrumenten fester Tonlage mit optimaler Modulationsfähigkeit ermöglicht. Bei den Klaviaturen derart gestimmter Instrumente ist die Tastenanordnung für die anschlagbaren Töne so getroffen, daß jede Tonart technisch spielbar ist. Die fünf nachträglich in der c-Dur-Tonleiter eingeschobenen Zwischentöne erklingen durch Anschlagen von schwarzen Tasten. Diese Tasten sind etwas kleiner und kürzer ausgebildet und ragen aus dem ebenen Feld der weißen Tasten heraus.

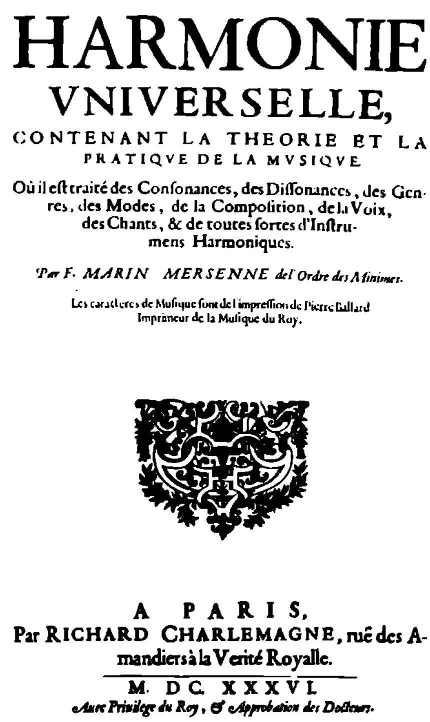
Schlägt man sämtliche verfügbaren Klaviertasten der Reihe nach von unten nach oben laufend an, erklingt die chromatische Tonleiter. Das Intervall zweier Nachbartöne aus der Tonfolge wird durch den Quotienten $q=\sqrt[12]{2}$ numerisch erfaßt. Eine Ausrechnung dieser Zahl auf zehn Stellen nach dem Komma liefert $q=1{,}0594630944$.

anschlagbaren Akkorden gemacht werden kann. Wählt man z. B. e als Grundton, so lautet die zugehörige Tonleiter in temperierter Stimmung:
e-fis-gis-a-h-cis′-dis′-e′. Ist f der Grundton, ergibt sich für die zugehörige Dur-Tonleiter: f-g-a-b-c′-d′-e′-f′.

Man kann sich leicht übungsweise weitere Beispiele von Tonleitern in temperierter Stimmung zusammensetzen und dabei überlegen, welche Versetzungszeichen beim Eintragen in Notenlinien anzubringen sind.

Die theoretischen Grundlagen der temperierten Stimmung stellte der französische Mathematiker Mersenne bereits 1636 in seinem Buch „Harmonie universelle" zur Diskussion. Die nachweislich erste Anwendung fand diese Stimmung in der von Arp Schnitger 1688–1692 erbauten Orgel für die St. Jakobi-Kirche in Hamburg. Bahnbrechend für die gleichschwebend temperierte Stimmung wirkte der Halberstädter Organist Andreas Werckmeister durch sein 1691 erschienenes Buch mit dem umfänglichen Titel: „Musikalische Temperatur, oder deutlicher und warer mathematischer Unterricht, wie man durch Anweisung des Monochordi ein Klavier, sonderlich die Orgelwercke, Positive,

daß auf dem gleichschwebend temperierten Instrument alle Tonarten technisch spielbar sind, ohne daß dabei ungewollte Disso-


HARMONIE
VNIVERSELLE,
CONTENANT LA THEORIE ET LA PRATIQVE DE LA MVSIQVE.
Où il eſt traité des Conſonances, des Diſſonances, des Genres, des Modes, de la Compoſition, de la Voix, des Chants, & de toutes ſortes d'Inſtrumens Harmoniques.
Par F. MARIN MERSENNE de l'Ordre des Minimes.
Les caracteres de Muſique ſont de l'impreſſion de Pierre Ballard Imprimeur de la Muſique du Roy.
A PARIS,
Par RICHARD CHARLEMAGNE, ruë des Amandiers à la Verité Royalle.
M. DC. XXXVI.
Auec Priuilege du Roy, & Approbation des Docteurs.

Musicalische Temperatur,

Oder

deutlicher und warer Mathematischer Unterricht/

Wie man durch Anweisung des

MONOCHORDI

Ein Clavier / sonderlich die Orgel-Wercke/ Positive, Regale, Spinetten/ und dergleichen wol temperirt stimmen könne/ damit nach heutiger manier alle Modi ficti in einer angenehm- und erträglichen Harmonia mögen genommen werden/

Mit vorhergehender Abhandlung

Von dem Vorzuge/ Vollkommen- und weniger Vollkommenheit der Musicalischen Zahlen/ Proportionen/ und Consonantien,

Welche bey Einrichtung der Temperaturen wohl in acht zu nehmen sind:

Benebst einem darzugehörig- in Kupffer vorgebildeten deutlichen und völligem

MONOCHORDO

beschrieben/ und an das Tages-Licht gegeben Durch

Andreas Werckmeistern/ Stiffts- Hof- Organisten zu Quedlinburg.

Franckfurt und Leipzig/

In Verlegung Theodori Philippi Calvisii, Buch-Händler in Quedlinburg/ ANNO 1691.

nanzen in den Akkorden und Verfälschungen in der Melodie auftreten. Von mathematischer, akustischer und technischer Seite war mit der Erfindung und Konstruktion des wohltemperierten Klavieres der Weg für die großen Klavierkomponisten und Virtuosen der folgenden Jahrhunderte bereitet. Hierzu müssen wir uns selbst Andeutungen ersparen, um nicht vom Thema abzukommen.

Die gleichschwebend temperierte Stimmung, nach der heute in allen Konzertsälen der Welt musiziert wird, ist das Ergebnis jahrhundertelangen Suchens und Forschens, wozu die verschiedensten Völker wertvolle Beiträge geliefert haben. Wenn am Ende dieses langen Entwicklungsprozesses eine völlig unpythagoreische Lösung steht, so werden dadurch keinesfalls die Verdienste der Pythagoreer mit ihren ersten systematischen Untersuchungen zur Akustik geschmälert.

Bisher haben wir uns allerdings nur darauf beschränkt, die Töne in ihrem relativen Verhalten zueinander zu beurteilen und relative Maße für die Töne von Tonleitern festzulegen. Es wären jedoch keine Konzerte mit internationaler Besetzung denkbar, wenn nicht auch internationale Absprachen über die absoluten Schwingungszahlen der Töne getroffen würden. Nur so kann der Zusammenklang von Instrumenten verschiedenster Herkunft gesichert sein.

		Demitons égaux, I	*Demitons inégaux.* II
1	C	100,000	100,000. Demiton majeur
2	♯	105946	106666 $\frac{2}{3}$ moyen
3	B	112246	112500 majeur
4	A	118921	120,000. mineur
5	xg	125995	125000. majeur
6	G	133481	133333 $\frac{1}{3}$ majeur

Das menschliche Ohr registriert bestenfalls akustische Schwingungen im Frequenzbereich von 16 bis 20 000 pro Sekunde als Ton. Dabei ist die obere Grenze einem altersbedingten Schwund ausgesetzt. In der Musik beschränkt man sich auf Töne im Frequenzbereich von 30 bis 4 000. Dies entspricht etwa sieben Oktaven. Die empfindlichste Ansprechbarkeit des menschlichen Ohres liegt etwa bei der Frequenz von 2 700. Die Druckschwankungen für einen gerade noch wahrnehmbaren Ton dieser Frequenz belaufen sich auf $1 \cdot 10^{-10}$ Atmosphären. Dieser Druckunterschied tritt in Meereshöhe bei Überwindung einer Höhendifferenz von etwa $1 \cdot 10^{-4}$ cm auf. Durch diesen Vergleich wird uns die außerordentlich hohe Reizempfindlichkeit unseres Hörsinnes verdeutlicht.

Zur Festlegung einer absoluten Tonskala wurde 1858 in Paris die Übereinkunft getroffen, dem Ton a' 435 Schwingungen pro Sekunde zuzuordnen. Diese Festlegung wurde 1885 in Wien bestätigt. Man bezeichnet diesen Einstimmton als Kammerton oder Normalton. Allerdings erfolgte 1939 in London aus praktischen Erwägungen eine Neufestlegung der Schwingungszahl auf 440, was nun als „hohe" Stimmung bezeichnet wird.

Die Kenntnis der physikalischen Zusammenhänge bei Tonleitern erlaubt auch gewisse Schlüsse über die Verarbeitung äußerer Reize durch die menschliche Psyche. Zum Beispiel hat man beim Abspielen der chromatischen Tonleiter auf dem Klavier die Empfindung, auf einer akustischen Leiter Sprosse um Sprosse emporzuklettern. Benachbarte Sprossen einer Leiter haben gleichen Abstand. Würde man jede Sprosse einer aufgestellten Leiter mit einer ihrer Höhe über dem Boden entsprechenden Maßzahl versehen, ergäbe sich eine arithmetische Zahlenfolge. Schreibt man jedoch auf jede Klaviertaste die zugehörige Schwingungszahl pro Sekunde, ergibt sich eine geometrische Folge, denn der Quotient q zweier Nachbartöne ist gleich $\sqrt[12]{2}$.

Unsere aus diesem Beispiel resultierende Erfahrung könnte so formuliert werden: Stellt eine Folge gleichartiger, zahlenmäßig erfaßbarer äußerer physikalischer Reize eine geometrische Folge dar, so wird diese durch die Psyche des Menschen in eine arithmetische Folge umgesetzt. Die Psyche des Menschen ist vergleichbar mit einer Logarithmentafel. Für die einzelnen Temperamente ist nur die Basis der Logarithmen verschieden. Schlägt man z. B. von der geometrischen Zahlenfolge 10, 100, 1 000, ... der Reihe nach die zugehörigen Briggsschen Logarithmen auf, ergibt sich die Zahlenfolge 1, 2, 3, ... Diese Gesetzmäßigkeit wird nach dem Physiker Weber und dem Arzt und Psychologen Fechner auch Weber-Fechnersches Gesetz genannt*. Wegen des Vorhandenseins bestimmter Reizschwellen besteht dieser psychophysische Zusammenhang nur innerhalb gewisser Bereiche. Im Beispiel der Tonfolgen ist diese Beziehung über einen großen Bereich sehr gut bestätigt.

Gewisse Begriffsbildungen aus der Akustik lassen sich – um damit auf den Ausgangspunkt zurückzukehren – sinngemäß auf die Wellenoptik übertragen. Das durch unser Auge wahrnehmbare Farbspektrum umfaßt nur eine Oktave der sehr vielfältig in Erscheinung tretenden elektromagnetischen Wellen. Gewissen Farbzusammenstellungen, wie rot und grün oder blau und gelb entsprechen der uns aus der Akustik bekannten Quarte. Werden wir von einer Pracht schönster Farben besonders beeindruckt, spricht man von einer Farbsymphonie. Dagegen glaubt man beim Anblick einer unglücklichen Farbkombination das schrille Tonintervall einer Sekunde zu vernehmen. *E. Schröder*

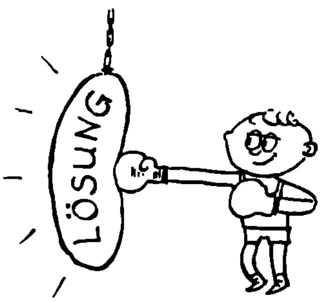
* Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) konstruierte 1833 mit Gauß die erste elektromagnetische Telegraphenanlage. Er ist einer der „Göttinger Sieben", die 1837 gegen die Aufhebung der liberalen Verfassung von 1833 durch König Ernst August von Hannover protestierten und daraufhin aus ihren Ämtern entlassen wurden.

Der Verfasser dankt an dieser Stelle für das freundliche Entgegenkommen der Musikabteilung der Sächsischen Landesbibliothek Dresden bei der Beschaffung besonders seltener Musikliteratur.

Dipl.-Päd. Bernd Aust,
Musiker mit Fachschulabschluß,
Leiter der „electra-combo", Dresden:

Exakte theoretische Kenntnisse sind die Grundlagen für jeden guten Musiker. Dazu gehört auch die genaue Kenntnis über den Aufbau der Instrumente und das Wissen darüber, wie der Ton im Instrument entsteht, welche mathematischen und physikalischen Gesetze im Reich der Töne gelten.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 30. Juni 1973

▲5▲1039 Ein Fußgänger wandert mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit von 5 Kilometern je Stunde von A nach dem 30 Kilometer entfernten Ort B. Unterwegs legt er eine Rast von zwei Stunden ein. Wieviel Minuten später als der Wanderer muß ein Radfahrer in A abfahren, wenn er den gleichen Weg mit der dreifachen durchschnittlichen Geschwindigkeit des Fußgängers fährt und zum gleichen Zeitpunkt wie der Fußgänger in B eintreffen will? *P.*

▲5▲1040 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die nicht die Null als Grundziffer enthalten?

W 5 ■ 1041 In der verschlüsselten Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} XY \\ +XY \\ \hline \underline{\underline{ZX}} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Wieviel Lösungen besitzt die Aufgabe? *T.*

W 5 ■ 1042 Der Fußboden eines Raumes von 6 m Länge und 4,5 m Breite soll mit quadratischen Fliesen von der Seitenlänge 15 cm ausgelegt werden.

a) Wieviel Fliesen dieser Art werden benötigt?

b) Da diese Fliesen nicht vorrätig sind, werden rechteckige mit den Maßen 12 cm Breite und 22,5 cm Länge benutzt. Wieviel Fliesen dieser Sorte werden gebraucht? *Sch.*

W 5*1043 Eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist, hat folgende Eigenschaft:
Die Hälfte dieser Zahl ist um 5 größer als der dritte Teil dieser Zahl. Wie heißt die Zahl?

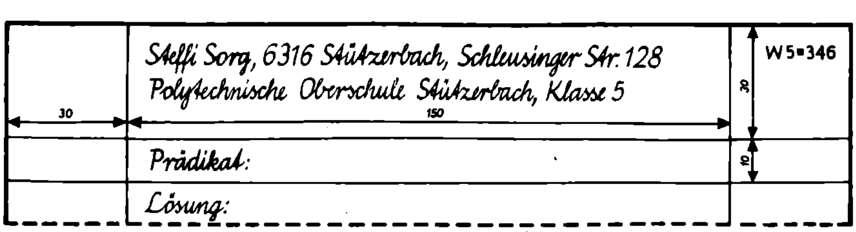
W 5*1044 In einer Spezialverkaufsstelle wurden an einem Tage Hühner, Enten, Gänse, Puten und Kaninchen verkauft, insgesamt genau 100 Stück. Zusammen waren es 52 Hühner und Enten, 43 Enten und Gänse, 34 Gänse und Puten, 30 Puten und Kaninchen. Wieviel Stück jeder Tierart wurden an diesem Tage verkauft? *Sch.*

▲6▲1045 Ein 130 m langer Güterzug fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $42\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durch einen 220 m langen Tunnel. Wieviel Minuten dauert es, bis der Zug mit seiner ganzen Länge den Tunnel durchfahren hat, das heißt, von der Einfahrt der Lokomotive in den Tunnel bis zur Ausfahrt des letzten Waggons aus dem Tunnel gerechnet?

▲6▲1046 In einem rechtwinkligen Dreieck sei der eine spitze Winkel doppelt so groß wie der andere. Beweise, daß dann die Hypotenuse doppelt so lang ist wie eine der beiden Katheten!

W 6 ■ 1047 Aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 lassen sich durch verschiedenartige Anordnung dieser Ziffern eine bestimmte Anzahl vierstelliger Zahlen bilden. Berechne die Summe aller Zahlen, die sich auf diese Weise bilden lassen, ohne sie alle zum Zwecke des Addierens aufzuschreiben. *Sch.*

W 6 ■ 1048 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC, konstruiere die Halbierungslinien der Winkel $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle ABC = \beta$, und bezeichne ihren Schnittpunkt mit S! Ziehe durch den Punkt S die Parallele zur Geraden AB; sie möge die Gerade AC in P und die Gerade BC in Q schneiden. Beweise, daß dann $\overline{AP} + \overline{BQ} = \overline{PQ}$ gilt!



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

W 6*1049 In der verschlüsselten Additionsaufgabe $XY+XY+XY=ZX$
sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Wieviel Lösungen besitzt diese Aufgabe? *T.*

W 6*1050 Eine sechsstellige natürliche Zahl z_1 beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt man sie hinten wieder an, so erhält man eine sechsstellige Zahl z_2, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Wie heißen diese beiden Zahlen?

▲7▲1051 In der verschlüsselten Additionsaufgabe $XY+XY+XY=ZY$
sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Wie viele Lösungen besitzt diese Aufgabe? *T.*

▲7▲1052 Klaus nahm an der diesjährigen Kreisspartakiade am Wettbewerb im Weitsprung teil. Frank erkundigte sich bei Klaus nach den von ihm erzielten Sprungweiten. Pfiffig antwortete Klaus: „Mein erster Sprung lag zwischen 3 m und 4 m. Die Maßzahl dieser Sprungweite (gemessen in cm) ist durch 5 teilbar. Mit dem vierten Sprung schaffte ich genau 410 cm. Die Quersumme der Maßzahl des vierten Sprungs ist gleich der Quersumme der Maßzahl des ersten Sprungs. Der dritte Sprung war um die Hälfte weiter als der erste. Hätte ich beim zweiten Sprung nicht 44 cm verschenkt, so wäre ich genau so weit gesprungen wie beim dritten Sprung. Der fünfte Sprung war ungültig. Die Summe der Sprungweiten aller übrigen gültigen Sprünge betrug 2118 cm." Ermittle die Weiten der sechs ausgeführten Sprünge, wenn alle Längenangaben in vollen Zentimetern erfolgen!

Dietmar Kurtz, Schüler, 5401 Friedrichroda

W 7■1053 In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich zunächst je 6 Personen auf je eine Bank, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur 3 Personen Platz nehmen. Setzen sich hingegen je 5 Personen auf jede der vorhandenen Bänke, so müssen 4 Personen stehen. Wieviel Bänke und wieviel Personen befinden sich in diesem Aufenthaltsraum?

W 7■1054 Zwei Primzahlen p_1 und p_2 heißen Primzahlzwillinge, wenn für sie $p_1<p_2$ und $p_1+2=p_2$ gilt.
Es seien p_1 und p_2 Primzahlzwillinge und es gelte $p_1>3$ und $p_2>3$. Es ist zu beweisen, daß dann $p_1\cdot p_2+1$ stets durch 36 teilbar ist. Sch.

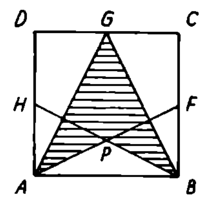
W 7*1055 Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleich der vierten Potenz ihrer Quersumme sind. Wie viele solcher Zahlen gibt es?

W 7*1056 Konstruiere ein spitzwinkliges Dreieck ABC, zeichne die drei Höhen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ und verbinde die Fußpunkte D, E und F der Höhen miteinander! Es ist zu beweisen, daß die Höhen des Dreiecks ABC die Innenwinkel des Dreiecks DEF halbieren. *Sch.*

8▲1057 Man beweise, daß die Zahl
$z=n^3-n$
a) für alle geraden natürlichen Zahlen n durch 6 und
b) für alle ungeraden natürlichen Zahlen n durch 24 teilbar ist.

Herwig Gratias, Sömmerda
EOS „Ernst Schneller", Kl. 11

8▲1058 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=8\,\text{cm}^2$ dar. Die Mitte G der Seite $\overline{CD}$ wurde mit den Punkten A und B, die Mitte F der Seite $\overline{BC}$ mit A und die Mitte H der Seite $\overline{AD}$ mit B verbunden. Es ist der Flächeninhalt A_0 des schraffierten konkaven Vierecks $APBG$ zu berechnen.



Martin Theuer, Crussow
Fachlehrer für Mathematik

W 8■1059 Die fahrplanmäßigen Züge der Deutschen Reichsbahn legen mit dem Fährschiff „Saßnitz" die 107,4 km lange Strecke von Saßnitz nach Trelleborg in 3 h 50 min zurück. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Fährschiffs in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ bzw. in Knoten auf dieser Strecke?
(Die errechneten Geschwindigkeiten sind jeweils auf eine Stelle nach dem Komma zu runden.)
Das im Jahre 1972 in Dienst gestellte neue Fährschiff „Rügen" erreicht eine Dienstgeschwindigkeit (mittlere Reisegeschwindigkeit) von 20,6 kn. In welcher Zeit kann dieses Schiff die Strecke von Saßnitz nach Trelleborg zurücklegen?
Bemerkung: Bei Seeschiffen wird die Geschwindigkeit meistens in Knoten angegeben: $1\,\text{kn}=1\,\text{sm}\cdot\text{h}^{-1}$; $1\,\text{sm}=1852\,\text{m}$. *L.*

W 8■1060 Ein innerer Punkt P eines Dreiecks ABC ist mit den drei Eckpunkten des Dreiecks zu verbinden. Die Verbindungsstrecken $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$ sind zu halbieren, ihre Mittelpunkte D, E und F sind miteinander zu verbinden. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks DEF durch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auszudrücken. *Sch.*

W 8*1061 Dreiecke lassen sich nach den Winkeln klassifizieren als spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. Hat ein Dreieck x spitze, y rechte und z stumpfe Winkel, so wollen wir sagen, es sei vom Typ $(x;\ y;\ z)$. So sind die spitzwinkligen Dreiecke vom Typ (3; 0; 0), die rechtwinkligen vom Typ (2; 1; 0) und die stumpfwinkligen vom Typ (2; 0; 1).
In entsprechender Weise können wir auch ebene Vierecke klassifizieren. Hat ein ebenes Viereck x spitze, y rechte, z stumpfe und t überstumpfe Winkel, so wollen wir sagen, es sei vom Typ $(x;\ y;\ z;\ t)$.
Es sollen nun alle Typen von ebenen Vierecken angegeben werden, die genau zwei spitze Winkel haben, und es soll jeder Typ durch eine Zeichnung veranschaulicht werden. *T.*

W 8*1062 Jedes Dreieck ABC kann auf die in den Abbildungen 1, 2, 3 und 4 gezeigten verschiedenen Arten in drei Teildreiecke zerlegt werden.

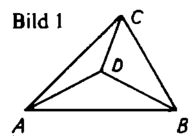
Bild 1


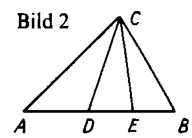
Bild 2


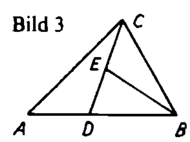
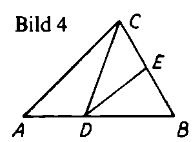
Bild 3


Bild 4


a) Man beweise, daß der kleinste aller Innenwinkel dieser Teildreiecke nicht größer als 45° ist.
b) Man gebe ein Dreieck ABC und eine Zerlegung dieses Dreiecks in drei Teildreiecke an, bei der der kleinste aller Innenwinkel der Teildreiecke genau 45° beträgt.

Harald Englisch, stud. math., Leipzig
IMO-Teilnehmer 1971 und 1972

9▲1063 Es seien a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt im allgemeinen nicht
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$
Denn für $a=9$, $b=16$ gilt z. B.
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$$
aber $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, und es ist $5\neq 7$.
Es sollen nun alle geordneten Paare $[a;\ b]$ von nichtnegativen reellen Zahlen a und b ermittelt werden, für die
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$ gilt. *T.*

9▲1064 Es sei P ein innerer Punkt eines Dreiecks ABC derart, daß die Dreiecke ABP, BCP und CAP flächengleich sind.
Man beweise, daß dann P der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, also der Schwerpunkt dieses Dreiecks, ist. *Sch.*

W 9 ■ 1065 Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

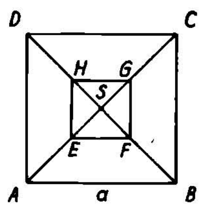
$$\frac{2ax}{x+a}+\frac{2ax}{x-a}-\frac{a}{x^2-a^2}=2$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen in x hat.

L.

W 9 ■ 1066 Die beiden abgebildeten Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ befinden sich in Ähnlichkeitslage mit dem Schnittpunkt S der Diagonalen als Ähnlichkeitszentrum, und es gilt $\overline{AB}=\overline{AG}=a$. Es ist zu beweisen, daß auch $\overline{FG}=\overline{GC}$ gilt!

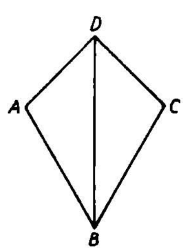
Sch.



W 9*1067 Es sind alle Primzahlen p zu ermitteln, für die die Zahlen $14+p$, $26+p$, $32+p$, und $38+p$ wieder Primzahlen sind.

Hans-Reinhard Berger, EOS „Prof. Dr. Max Schneider", Lichtenstein, Kl. 12

W 9*1068 Jemand behauptet, daß jedes Viereck $ABCD$, in dem die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleichlang sind und in dem die Diagonale $\overline{DB}$ den Innenwinkel $\sphericalangle CDA$ des Vierecks halbiert, ein Drachenviereck sei, und beweist diese Behauptung wie folgt (vgl. die Abb.):



Aus $\overline{DB}=\overline{DB}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\sphericalangle BDA=\sphericalangle CDB$ folgt, da die Dreiecke BDA und CDB in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, $\triangle BDA\cong\triangle CDB$. Also gilt auch $\overline{DA}=\overline{DC}$, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Drachenviereck.

Ist diese Behauptung richtig, oder liegt hier ein Trugschluß vor? Die Ausführungen sind durch die Zeichnung eines Vierecks $ABCD$ mit $\overline{AB}=\overline{BC}=2{,}6$ cm, $\overline{DB}=5$ cm, $\sphericalangle CDA=60°$ zu veranschaulichen.

L.

10/12 ▲ 1069 Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $a>c$ und $b>d$. Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(b-d)^2}\geq\frac{8}{(a+b-c-d)^2}.$$

Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Neustrelitz

10/12 ▲ 1070 Man beweise, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen Zahlen n

$$s_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\dots+\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

gilt, und berechne s_n für $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=10$, $n=100$.

Wolfgang Riedel, stud. math. Karl-Marx-Stadt

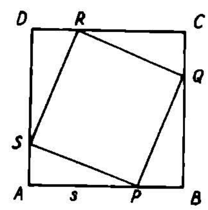
W 10/12 ■ 1071 Es sind alle reellen Zahlen a zu ermitteln, für die die Gleichung

$$\sqrt{x^2-a}=ax$$

mindestens eine reelle Lösung in x hat. Ferner sind diese Lösungen jeweils anzugeben.

Dr. Gerhard Hesse, Dresden

W 10/12 ■ 1072 Einem Quadrat $ABCD$ mit der Seite $\overline{AB}=a$ sei ein Quadrat $PQRS$ einbeschrieben, dessen Eckpunkte auf den Seiten des Quadrates $ABCD$ liegen (vgl. die Abb.).



a) Es ist der Flächeninhalt des Quadrates $PQRS$ zu berechnen, wenn $\overline{AP}=s$.

b) Es sei $a=10$ cm. Kann dann der Flächeninhalt des Quadrates $PQRS$ gleich 30 cm^2 sein?

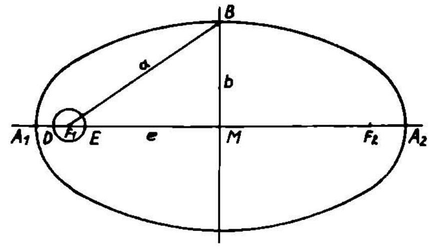
c) Es ist der kleinste Flächeninhalt zu ermitteln, den das Quadrat $PQRS$ haben kann.

Prof. Dr. N. Tschaikowski (†) Lwow, UdSSR

W 10/12*1073 Einem regelmäßigen Tetraeder seien eine Kugel einbeschrieben und eine Kugel umbeschrieben. Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Kugeln zueinander?

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 11

W 10/12*1074 Im Juni 1972 wurde in der Sowjetunion die automatische Station Prognos 2 gestartet. Die Umlaufbahn dieser Station ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt der Mittelpunkt der Erde liegt (vgl. die nicht maßstäbliche Abbildung). Die maximale Erdentfernung der Station beträgt 200000 km, die minimale Erdentfernung 550 km, die Umlaufzeit 97 h.



1. Es sollen die Halbachsen a und b der Ellipse berechnet werden.

2. Es soll die Länge der Umlaufbahn (also der Umfang der Ellipse) berechnet werden.

a) nach der sehr groben Näherungsformel $s_1=\pi(a+b)$;

b) nach der besseren Näherungsformel $s_2=\pi[1{,}5(a+b)-\sqrt{ab}]$

c) nach der genauen Formel

$$s=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\varepsilon^4-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\varepsilon^6-\dots-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}\right)^2\varepsilon^{2n}-\dots\right],$$

wobei $\varepsilon^2=1-\frac{b^2}{a^2}$ ist.

3. Es soll die mittlere Geschwindigkeit der Station (in km $\cdot$ h^{-1}) auf ihrer Umlaufbahn berechnet werden.

Anleitung zur Lösung:

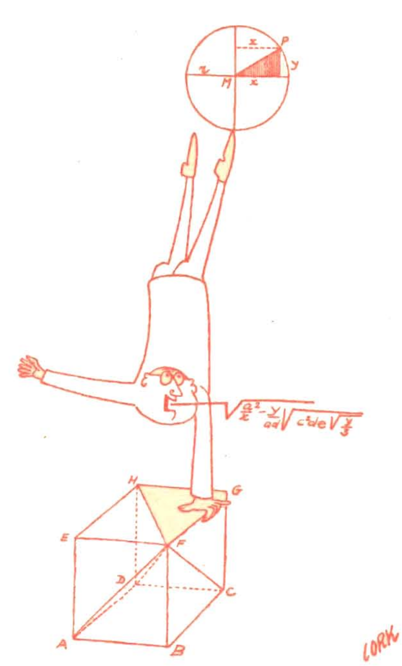
Mit Hilfe der Abbildung können wir a und b leicht berechnen. Wir erhalten nämlich $\overline{A_1D}=550$ km, $\overline{EA_2}=200000$ km,
$r=\overline{DF_1}=\overline{F_1E}=6370$ km, also
$a=\overline{A_1M}=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}(550+200000+2\cdot 6360)$ km,
$a=106650$ km;
$e=\overline{F_1M}=a-r-550$ km $=99730$ km.
Ferner erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreieck BF_1M
$b=\sqrt{a^2-e^2}=11950$ km.
Die weiteren Rechnungen zu a), b) und c) können nunmehr mit dem Rechenstab durchgeführt werden, wobei die Ergebnisse auf Vielfache von 1000 km zu runden sind.

L

Druckfehlerteufel

W 5*1008: An Stelle von 21 muß es 22 heißen! Alle zu dieser Aufgabe bis 30. Juni noch eingehenden Lösungen werden gewertet.

Redaktion *alpha*



Berufsbild:
Statistiker –

eine Spezialisierungsrichtung im Grundberuf Wirtschaftskaufmann

Statistik –
Zahlen, Tabellen, Formulare, Erhebungen, Zählungen, Erfassungen –
Eine gesellschaftswissenschaftliche Disziplin –
Eine mathematische Disziplin –
Ein zentrales staatliches Organ –
Bezirks- und Kreisstellen für Statistik

Statistik ist in allen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens anzutreffen, sowohl in der Theorie als auch in der Praxis. Dieser Artikel soll Aufschluß über die Statistik als Spezialisierungsrichtung im Grundberuf *Wirtschaftskaufmann* geben.

Was ist der Inhalt dieses Berufes und was sind die Aufgaben eines Statistikers?

Für die 17 Millionen Einwohner der Deutschen Demokratischen Republik, die in Tausenden Städten und Gemeinden leben, müssen Kindergärten und Schulen, Arbeitsplätze und Altersheime, Nahrungsmittel und Kleidung, Wohnungen und Ferienheime, Ärzte und Krankenhäuser in ausreichendem Maße vorhanden sein. Wie sollten in unserem Staat all diese Dinge geplant und bereitgestellt werden können, ohne daß die Staatlichen Organe durch die Statistik erfahren, wieviel Betriebe und Arbeitskräfte vorhanden sind, ohne daß die Industriebetriebe melden, was und wieviel sie produzieren – die Landwirtschaft, wieviel sie an pflanzlichen und tierischen Produkten erzeugt – der Handel, was er verkauft hat – ohne daß schließlich die Gemeinden melden, wieviel junge Paare heiraten und wieviel Kinder geboren werden. Aus all diesen Meldungen gewinnt der geschulte Statistiker, der über gute Kenntnisse der Politischen Ökonomie und der Betriebsökonomie verfügen muß, ein Gesamtbild der Bevölkerungsentwicklung, der Entwicklung der Produktion und des Bedarfs. Er erhält Aufschluß über alle wesentlichen Vorgänge in der Volkswirtschaft und gewährleistet durch seine Arbeit eine schnelle Information über ökonomische Vorgänge in den Betrieben und Institutionen. Durch seine Tätigkeit hilft er mit, die leitenden Staats- und Wirtschaftsorgane mit einem möglichst geringen Aufwand an Arbeit umfassend und schnell zu informieren. Dazu wird die Elektronische Datenverarbeitung weitgehend angewandt.
Wie jeder Beruf, stellt natürlich auch der Beruf des *Statistikers* ganz bestimmte Anforderungen an Können und Eigenschaften der jungen Menschen, die erfolgreich auf dem Gebiet der Statistik arbeiten wollen.

Voraussetzungen

Voraussetzung für die Bewerbung ist der erfolgreiche Abschluß der 10. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule mit guten Leistungen, insbesondere in den Fächern Mathematik, Deutsch, Staatsbürgerkunde und Russisch.

Ausbildungsdauer und Ausbildungsablauf

Die Ausbildung umfaßt für alle Lehrlinge zwei Jahre, davon ein Jahr berufliche Spezialisierung, und schließt mit dem Facharbeiterzeugnis *Wirtschaftskaufmann – Spezialisierungsrichtung Statistiker* – ab.
In der einjährigen Grundlagenbildung im ersten Lehrjahr werden umfassende Kenntnisse auf mathematischem und ökonomischem Gebiet vermittelt. Die Ausbildung wird im Turnuswechsel von theoretischer und praktischer Ausbildung durchgeführt.
Das zweite Lehrjahr umfaßt die berufliche Spezialisierung und ist vorwiegend durch eine praktische Berufsausbildung gekennzeichnet.

Einsatzmöglichkeiten nach Abschluß der Berufsausbildung

bestehen als Sachbearbeiter in einer Bezirks- oder Kreisstelle der Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik mit der Entwicklungsmöglichkeit bis zum mittleren Führungskader (Referent). Nach Abschluß der Lehre kann bei vorhandenen Voraussetzungen ein Fachschulstudium aufgenommen werden, welches nach einem dreijährigen Direktstudium bzw. vierjährigen Fern- oder Abendstudium abschließt.

E. Blüher/R. Schröter

Aufgaben

▲1▲ In der statistischen Arbeit ist zur Darlegung ökonomischer Zusammenhänge die Anwendung mathematischer Methoden von großer Bedeutung.
Drei Kreise eines Bezirkes werden nach dem Pro-Kopf-Verbrauch der Bevölkerung an Nahrungsmitteln untersucht. Es wurden folgende Ergebnisse (Jahresangaben) ermittelt!

Kreis	Gesamtverbrauch (1 000 M)	Pro-Kopf-Verbrauch (M)
1	65 500	2 620
2	106 400	2 800
3	195 300	3 150

Zu berechnen ist: a) der durchschnittliche Pro-Kopf-Verbrauch für alle 3 Kreise insgesamt
b) um wieviel Mark weichen die Angaben über den Pro-Kopf-Verbrauch vom durchschnittlichen Pro-Kopf-Verbrauch ab?

▲2■ Über den Pro-Kopf-Verbrauch an Fleisch und Rauchtabak für die DDR von 1964 bis 1971 liegen folgende Angaben vor:

Jahr	Fleisch (kg)	Rauchtabak (g)
1964	55,0	130
1965	56,3	123
1966	53,5	135
1967	56,0	125
1968	58,0	106
1969	58,7	100
1970	60,1	101
1971	61,5	88

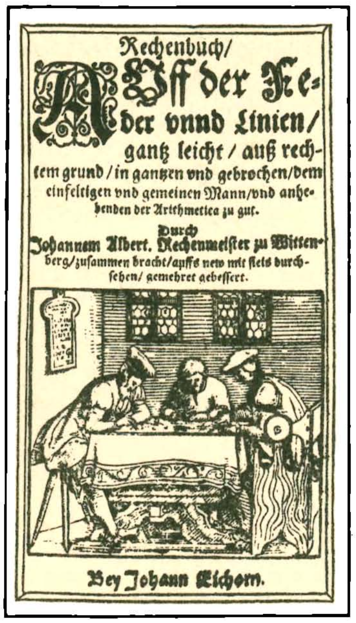
Es ist das durchschnittliche Wachstumstempo des Pro-Kopf-Verbrauchs von 1954 bis 1971
a) bei Fleisch b) bei Rauchtabak
zu ermitteln.

Computer-Lieder doch mit Gefühl?

Mit der Frage, ob eine Maschine Musik schaffen kann, befaßte sich ein Symposium in Rostow am Don. Die Antwort war positiv. Die sowjetischen Wissenschaftler analysierten klassische Musikwerke, u. a. Klaviersonaten mit mathematischen Methoden, und kamen zu dem Schluß, daß auf EDV-Anlagen Musikwerke modelliert werden können. Musikstudenten, Künstler des Moskauer Bolschoi-Theaters und Musikwissenschaftlern legte man 16 Liedmelodien vor, von denen acht von dem Computer „Ural-22" geschaffen worden waren. Obwohl die Teilnehmer des Experiments in einer vorherigen Befragung die Computermusik abgelehnt hatten („Die ganze Computermusik ist keine Musik, da ihr das Gefühl fehlt.), zeigte sich, daß keiner in der Lage war, die Computerlieder sicher von den anderen zu unterscheiden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

(Die auf dieser Seite veröffentlichten Aufgaben wurden z. T. in unsere heutige Umgangssprache umgesetzt)


Rechenbuch/ Auff der Fe-der vnnd Linien/ gantz leicht / auß rech-tem grund / in gantzen vnd gebrochen / dem einfeltigen vnd gemeinen Mann / vnd anhe-benden der Arithmetica zu gut. Durch Johannem Albert. Rechenmeister zu Witten-berg / zusammen bracht / auffs new mit fleis durch-sehen / gemehret gebessert.

Bey Johann Eichorn.

▲1▲ Jemand habe mit drei Würfeln gewürfelt. Willst du raten, wieviel Augen auf jedem Würfel zu sehen sind, so lasse ihn folgendes ausrechnen:

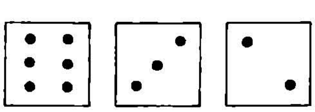
Die Augenzahl des ersten Würfels ist zu verdoppeln und anschließend ist 5 zu addieren. Die Summe ist mit 5 zu multiplizieren und zum Produkt sind 10 zu addieren.

Zu diesem Ergebnis ist die Augenzahl des zweiten Würfels zu addieren und die Summe mit 10 zu multiplizieren.

Schließlich sind noch die Augen des dritten Würfels zu addieren.

Nun lasse dir diese Summe nennen, subtrahiere im Kopfe 350 und aus dem verbleibenden Rest (eine dreistellige Zahl) kannst du die Augenzahlen der Würfel (d. i. jede Ziffer der Zahl) ansagen.

Beispiel: Die Würfel zeigen die Augen



$$\begin{array}{lll} \cdot 2 = 4 & 55 & 580 \\ +5 = 9 & +\ 3 = 58 & +\ \ \ 6 \\ \cdot 5 = 45 & \cdot 10 = 580 & \overline{586} \\ +10 = 55 & & \end{array}$$

Lösung: $\begin{array}{r} 586 \\ -350 \\ \hline 236 \end{array}$, also 2; 3; 6.

▲2▲ Es reisen zwei Gesellen zugleich von Wittenberg nach Spanien. Der erste läuft jeden Tag 7 Meilen, und der andere läuft am ersten Tag eine Meile, am nächsten Tag zwei, am dritten Tag drei Meilen und so fortsetzend, jeden Tag eine Meile mehr. Es ist die Frage zu beantworten, in wieviel Tagen diese zwei Gesellen zusammen ankommen.

Eine Lösung erhält man durch Aufstellung einer Tabelle:

Tag	1. Geselle		2. Geselle
1.	7 Meilen		1 Meile
2.	14 Meilen	+ 2 Meilen =	3 Meilen
3.	21 Meilen	+ 3 Meilen =	6 Meilen
4.	28 Meilen	+ 4 Meilen =	10 Meilen
5.	35 Meilen	+ 5 Meilen =	15 Meilen
6.	42 Meilen	+ 6 Meilen =	21 Meilen
7.	49 Meilen	+ 7 Meilen =	28 Meilen
8.	56 Meilen	+ 8 Meilen =	36 Meilen
9.	63 Meilen	+ 9 Meilen =	45 Meilen
10.	70 Meilen	+ 10 Meilen =	55 Meilen
11.	77 Meilen	+ 11 Meilen =	66 Meilen
12.	84 Meilen	+ 12 Meilen =	78 Meilen
13.	91 Meilen	+ 13 Meilen =	91 Meilen

Zusammenkunft also nach 13 Tagen.

Oder auch so:

Am 7. Tag der Reise stimmt die täglich zurückgelegte Anzahl der Meilen zwischen beiden Gesellen überein, nämlich 7 Meilen. Der zweite Geselle muß nun die gleiche Anzahl der zunächst zurückgebliebenen Meilen nachholen, d. h. es ergibt sich die Gleichung:

$$(7-6)+(7-5)+(7-4)+(7-3)+(7-2)+$$
$$+(7-1)+7+(7+1)+(7+2)+(7+3)+$$
$$+(7+4)+(7+5)+(7+6)=7x \text{ bzw.}$$
$$91=7x \text{ und}$$
$$x=13$$


JOHANNIS HEMELINGII
Käyserl. gekrönten Poëten und bestallten Schreib- und Rechen-Meisters der Stadt Hannover,
ARITHMETIscher Anfang/
Oder
Kleines
Rechen-Buch
Das ist:
Kurtze/ doch gründliche Abfassung/ welcher gestalt die edle Rechen-Kunst einem begierigen Liebhaber derselben gründlich und bald anzuführen;
Nunmehro aber aufs neue revidiret,
und nach itzigem Handels-Stylo und Gebrauch mit einigen neuen Regulen und vielen nützlichen Aufgaben, samt der Italiän- oder Welschen Practica,
Von
GERHARD Meyer/
Verordnetem Schreib- und Rechen-Meister der alten Stadt Hildesheim.
Hildesheim,
Gedruckt und verlegt bey Just Henning Matthäi,

▲3▲ Practic-Rechnung

Not. Weilen der Divisor 12 ein Numerus Compositus, oder geschickte Zahl ist, so zerstreue ihn nach dem Einmahl Eins in 2 mahl 6. oder 3 mahl 4. mit jedem dividiere absonderlich, und mache jedesmahl einen Strich: fac.

Exempla zur Übung.

Mit 135 Theile 133 110. fac. 986.

Nota: 135 zerfälle in 9·5·3 mit jedem dividiere absonderlich. fac.

Lösung:

$133\,110 : 135 = \frac{133\,110}{135}$ da QS durch 9 teilbar

$= \frac{14\,790}{45}$ da QS durch 3 teilbar

$= \frac{4\,930}{5}$ letzte Ziffer 0 bzw. 5, durch 5 teilbar

$= 986$

▲4▲ Von der Regel Detri.

(Universalregel zur Berechnung aller Exempel in Brüchen)

Beispiel:

Z. E. Für $\frac{3}{4}$ Rthl. bekommt man 8 ℔, wieviel für 5 Rthl.?

Dieses stehet also:

$\frac{4}{3} - \frac{8}{1} - \frac{5}{1}$ Antwort $\frac{160}{3}$ oder $53\frac{1}{3}$ ℔

Nämlich, wenn ihr alle Glieder eingerichtet und *A* verkehret habt, so multipliciret (weil allhier keine obere Zahl gegen eine untere zu kleinern,) sofort die oberen Zahlen $4 \times 8 \times 5$, desgleichen auch besonders die unteren Zahlen $3 \times 1 \times 1$ in einander, so giebt jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner in dem verlangten Facit, nämlich $\frac{160}{3}$ oder im Ganzen $53\frac{1}{3}$ ℔

Lösung: Rthl. Reichsthaler (Riksdaler), bis 1845 schwedische Geldeinheit.

℔ Pfund (ältere Gewichtseinheit), lateinisch libra, abgekürzt lb, aus dem das Zeichen entstand.
Wir rechnen so:

$$\frac{3}{4} : 8 = 5 : x \text{ und } \frac{3}{4}x = 40.$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{40 \cdot 4}{3} = 53\frac{1}{3}, \text{ d.s. } 53\frac{1}{3} ℔.$$

Anfangsgründe
der kaufmännischen
Rechenkunst,
Oder
gründliche Anweisung, kurz und mit
Vortheil zu rechnen;
Welche
nicht nur die gemeinen Rechnungsarten
auf eine vortheilhafte Art, sondern auch die
Ketten- und andern kaufmännischen Rechnungen
nebst einer compendiösen Probe in sich
fasset,
nach Claußbergischen Regeln entworfen,
und
zum bequemen Gebrauche derer, die sich der Handlung widmen,
mit vielen Exempeln erläutert
von
Christoph Pflugbeil,
Arithmeticus bey der Schule zu St. Nicolai in Leipzig.

Leipzig,
bey Adam Friedrich Böhmen, 1773.

Aufgabe.

Es sollen sich vier Brüder in eine Erbschaft von 1000 Thaler dergestalt theilen, daß der zweite 100 Thaler weniger bekommt als der älteste, der dritte 75 Thaler mehr als der zweite, und der vierte 60 Thaler mehr als der dritte; Man verlanget zu wissen, wie viel ein jeder bekommt.

Vorbereitung.

Wenn man den Theil wüste, den der erste bekommt, so wäre es leicht zu bestimmen, wie viel ein jeder bekommt. Denn wenn man diesen Unbekannten Theil x nennt; so ist $x - 100$ der Theil des zweiten $x - 100 + 75$ der Theil des dritten, $x - 100 + 75 + 60$ den Theil des vierten. Nun ist offenbar, daß alle diese Theile zusammen genommen so groß seyn müssen, als das ganze Capital 1000 Thl.

Auflösung.

Also ist

$$1000 = x + x - 100 + x - 100 + 75 + x - 100 + 75 + 60$$

Aus dieser Gleichung muß x bestimmt werden.

Nun ist $x + x + x + x = 4x$
$-100 - 100 - 100 = -300$
$75 + 75 + 60 = 210$

Dieses kann man nun in der Gleichung setzen, und alsdenn dieselbe kürzer so schreiben

$$1000 = 4x - 300 + 210$$

und weil $-300 + 210 = -90$ ist
so wird $1000 = 4x - 90$

Nachdem man diese Gleichung so weit gebracht hat, muß man x nur allein auf die eine Seite, und alle bekannte Zahlen auf die andre bringen.

Um dieses zu bewerkstelligen folgt man der (§. 62.) gegebenen Regel, man schreibe nemlich die Zahl -90 mit dem umgekehrten Zeichen auf die andere Seite, so wird $1000 + 90 = 4x$
oder $1090 = 4x$

Der Theil des ersten viermahl genommen, ist also so groß als 1090 Thlr. Folglich muß der vierte Theil so gros seyn als x oder $\frac{1090}{4} = x$

und wenn man die Division wirklich verrichtet

$$272\tfrac{2}{4} \text{ Thlr.} = x$$

▲5▲ *Lösung:* Wir rechnen so:
Der erste Bruder sei x, dann gilt:

$$x + (x - 100) + (x - 100 + 75) + (x - 100 + 75 + 60) = 1\,000$$

Nach Auflösen der Klammern, Zusammenfassen und Ordnen erhält man

$$4x = 1\,090$$

$$x = 272\frac{1}{2}$$

Die Aufteilung der Erbschaft geschieht daher folgendermaßen:

1. Bruder	$272\frac{1}{2}$ Taler
2. Bruder	$172\frac{1}{2}$ Taler
3. Bruder	$247\frac{1}{2}$ Taler
4. Bruder	$307\frac{1}{2}$ Taler
Zusammen	1 000 Taler

G. F. Tempelhoffs
vollständige
Anleitung
zur
Algebra.

Neue Auflage.

Berlin,
verlegts Arnold Wever, 1773.

Aufgabe.

Zwey Kaufleute haben ein Capital von 1800 Thlr. zusammengelegt. Nach Verlauf von einiger Zeit haben beyde gleichviel gewonnen, und der Gewinnst des ersten ist dreymahl so groß als die Summe die er einlegte, der Gewinnst des zweiten aber 5 mahl so groß als das Geld, welches er eingelegt. Man will wissen, wie viel ein jeder zu der Summe von 1800 Thlr. gegeben.

▲6▲ *Lösung:* Wir rechnen so:
Der erste Kaufmann sei x; der zweite $(1\,800 - x)$. Dann gilt:

$$3x = 5(1\,800 - x)$$

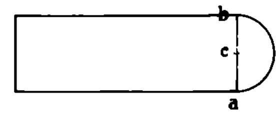
bzw. $x = 1\,125$

Es folgt daraus, daß der erste Kaufmann 1 125 Taler einbrachte und der zweite $(1\,800 - 1\,125)$ Taler $= 675$ Taler.
Zur Probe führt: $1\,125 \cdot 3 = 3\,375$
und $675 \cdot 5 = 3\,375$,
d. h. beide hatten gleichviel Gewinn aus ihrem Kapital erzielt.

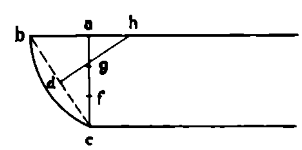
Der praktische Geometer
oder
Anleitung
zur gewerblichen Geometrie.

Langensalza 1857

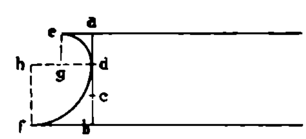
Der Stab: Man theilt die Höhe ab in 2 gleiche Theile und beschreibt mit dem Halbmesser *ac* aus *c* einen Halbbogen.



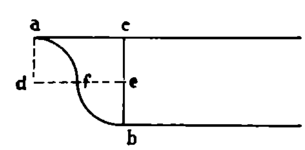
Der Viertelstab oder Wulst: Man theile die Höhe *ac* in 3 gleiche Theile; 2/3 davon $= ab$, was man die Ausladung nennet; man verbinde *b* und *c* durch eine Hülfslinie und errichte auf der Mitte derselben eine Normale nach *h*. Von *h* aus beschreibe man mit der Zirkelöffnung bis *b* den Bogen *bc*.



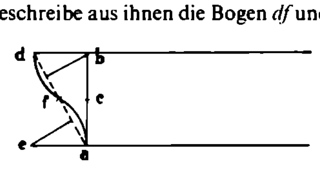
Die Doppelhohlkehle: Man theile *ab* in 3 gleiche Theile, so daß $ad = 1/3$ und $db = 2/3$ ist; mache $ac = ad$ und $bf = bd$; ziehe *eg* parallel mit *ad* und *bd* parallel mit *fb*; beschreibe aus *g* mit *gd* den Bogen *dc* und aus *h* mit *hd* den Bogen *df*.



Die Karnies oder die Kehlleiste: Man theile *cb* bis *e*; mache die Ausladung $ac = cb$ und ziehe aus *e* eine punktierte Parallele *de* mit *ac*; beschreibe aus *d* mit *ad* den Bogen *af* und aus *e* mit *eb* den Bogen *fb*.



Ein Karnies: Man theile *ab* in *c*, trage 1/2 von *b* nach *d* und 1/2 von *a* nach *e*, ziehe die Hülfslinie *ad* und theile sie in *f*, errichte aus den Mittelpunkten die Normalen *b* und *e*, und beschreibe aus ihnen die Bogen *df* und *fa*.



Zusammenstellung: J. Lehmann;
Lösungen: W. Unze

Aus der Graphentheorie

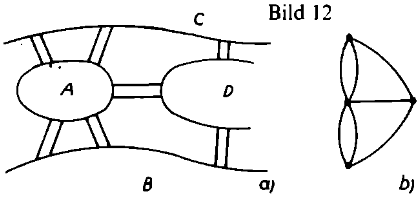
Teil 3

Nachdem wir das bisher Dargebotene etwas geübt haben, wollen wir uns wieder der Theorie widmen. Wir wollen uns mit gewissen offenen oder geschlossenen Kantenzügen von Graphen befassen:

Eulersche und Hamiltonsche Linien

Zu einer seiner Arbeiten (es handelt sich um die eingangs genannte, 1736 erschienene) wurde der geniale Mathematiker *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) durch eine Fragestellung angeregt, die in den Bereich der Unterhaltungsmathematik gehört und über die viele seiner Zeitgenossen nachdachten:
Es handelt sich um das Problem der *Königsberger Brücken*. Mit einigen Resultaten Eulers, die auch dieses Problem lösten, aber weit darüber hinausgingen, nahm (wie bereits erwähnt) die systematische Graphentheorie ihren Anfang.
Bild 12a veranschaulicht die Lage der sieben Königsberger Brücken.

Bild 12



Dem Bild 12a können wir den Graphen des Bildes 12b zuordnen. Seine Knotenpunkte stellen die Festlandteile A, B, C, D dar. Zwei Knotenpunkte sollen durch soviel Kanten verbunden werden, wie die ihnen entsprechenden Festlandteile durch Brücken verbunden sind.

▲11▲ Sicher wird es euch nicht sehr viel Mühe bereiten, mittels Durchprobieren aller Möglichkeiten herauszufinden, daß es nicht möglich ist, in einem der Gebiete A, B, C, D beginnend, alle sieben Brücken in einem einzigen – zum Ausgangspunkt zurückführenden – Spaziergang genau einmal zu passieren.

Der Satz 3, den wir jetzt formulieren und beweisen wollen geht auf *Euler* zurück. Er liefert die Aussage, die auch eine Antwort auf den in Aufgabe 11 erläuterten *Spaziergang über die Königsberger Brücken* gibt.

Satz 3: Man kann sämtliche Kanten eines zusammenhängenden (endlichen) Graphen G dann und nur dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufen, wenn G nur Knotenpunkte gerader Valenz enthält.
Zum Beweis des Satzes 3 benutzen wir eine Aussage, die wir in einem Hilfssatz formulieren wollen.
(Die Bezeichnung „Hilfssatz" bezieht sich, das sei bemerkt, nur auf seine Stellung zum Satz 3.)

Hilfssatz: Enthält ein zusammenhängender Graph G (mit mehr als einem Knotenpunkt) nur Knotenpunkte gerader Valenz, so ist jeder seiner Knotenpunkte in (mindestens) einem Kreis von G enthalten.

Beweis des Hilfssatzes: x sei ein beliebiger Knotenpunkt aus G und (x, y) sei eine der mit x inzidenten Kanten. G^* sei der Graph, den wir aus G durch Entfernung der Kante (x, y) erhalten. G^* ist zusammenhängend, denn andernfalls enthielte die Komponente von G^*, in der der Knotenpunkt x liegt, einen einzigen Knotenpunkt ungerader Valenz, nämlich x. Das widerspräche aber Satz 2.
Da G^* also zusammenhängend ist, gibt es in G (mindestens) einen Weg, der x und y verbindet. Dieser Weg, zusammen mit der Kante (x, y), liefert uns einen Kreis in G, der x enthält.
Wir wollen nun zum Beweis des Satzes 3 schreiten:
Der Beweis erfolgt in zwei Schritten; wir beweisen die Aussagen, die wir mit 1 und 2 bezeichnen.
Zunächst noch eine Definition.

Definition 10: Ein geschlossener (offener) Kantenzug, der jede Kante eines Graphen G enthält, heißt eine *geschlossene (offene) Eulersche Linie* des Graphen G.

Aussage 1: Wenn alle Knotenpunkte des Graphen G gerade Valenz haben, dann enthält G eine geschlossene Eulersche Linie.

Beweis der Aussage 1: Aus allen x enthaltenden geschlossenen Kantenzügen von G (einen gibt er nach dem Hilfssatz sicher) wählen wir einen aus, der die meisten Kanten enthält. Wir nennen ihn Z.
Wir bilden den Graphen G_1, der alle Kanten enthält, die nicht auf Z liegen, und alle mit diesen Kanten inzidierten Knotenpunkte. Offensichtlich enthält G_1 nur Knotenpunkte gerader Valenz. (G_1 ist im allgemeinen nicht zusammenhängend!) Da G zusammenhängend ist, muß G_1 mit Z mindestens einen Knotenpunkt gemeinsam haben, sagen wir den Knotenpunkt y. Nach dem Hilfssatz gibt es in G_1 einen Kreis K, der y enthält. Wir bilden nun in G einen Kantenzug Z_1 nach folgender Vorschrift:
In y beginnend durchlaufen wir Z ganz und gelangen wieder zum Knotenpunkt y; nun setzen wir – wiederum in y beginnend – den Kantenzug mit den Kanten und Knotenpunkten des Kreises K fort.
Z ist ein den Knotenpunkt x enthaltender geschlossener Kantenzug, der mehr Kanten enthält als Z. Das steht aber im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität von Z. Z ist also bereits eine geschlossene Eulersche Linie des Graphen G.

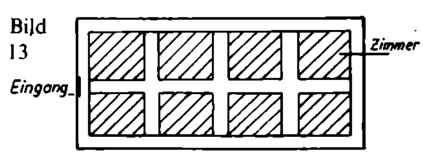
Aussage 2: Wenn G eine geschlossene Eulersche Linie besitzt, so hat jeder Knotenpunkt von G gerade Valenz.
(*Bemerkung:* Die Aussagen 1 und 2 gemeinsam erfassen die Aussagen „dann und nur dann" in Satz 3.)

Beweis von Aussage 2: Wir „wandern auf der Eulerschen Linie entlang", bis wir zum Ausgangspunkt zurückkehren. In jeden beliebigen Knotenpunkt P von G gehen wir dabei ebensooft hinein wie aus ihm heraus. Da wir bei unserer Wanderung jede Kante genau einmal durchlaufen, schließen wir sofort, daß p mit einer geraden Anzahl von Kanten inzidiert, d. h. gerade Valenz hat.
Eng verwandt mit Satz 3 ist der folgende Satz, dessen einfacher Beweis euch als Aufgabe überlassen bleiben kann.

Satz 4: Ein zusammenhängender endlicher Graph G kann genau dann in einem offenen Kantenzug – der jede Kante von G enthält – durchlaufen werden, wenn er genau zwei Knotenpunkte ungerader Valenz hat. Die beiden Knotenpunkte ungerader Valenz sind dabei Anfangs- und Endpunkt des Kantenzuges.
Mit Hilfe des Satzes 4 erkennen wir sofort, daß es auch nicht möglich ist, über jede der sieben Königsberger Brücken genau einmal hinwegzuspazieren, ohne den Spaziergang an seinem Ausgangspunkt beenden zu können. An dieser Stelle wird es wieder angebracht sein, eine kleine Pause zu machen, in der wir uns mit einigen Übungsaufgaben befassen wollen.

▲12▲ Eine Schau moderner Wohnraumgestaltung – untergebracht in acht Räumen – wurde kombiniert mit einer Ausstellung zeitgenössischer Graphiken und Malereien. Diese wurden zu beiden Seiten der Wandelgänge des Gebäudes plaziert. (Bild 13)

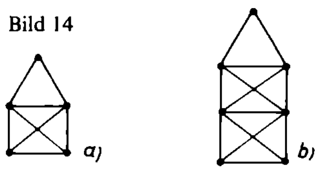
Bild 13



Ihr wollt die Graphiken und Malereien beider Wandseiten betrachten, ohne von einer Seite zur anderen springen und ohne Umwege machen zu müssen. Ihr möchtet einen Spazierweg durch die Ausstellung finden, der euch – am Eingang beginnend und endend – jede Stelle des Ganges genau zweimal passieren läßt. Beim ersten Passieren wird die eine Wandseite betrachtet, beim zweiten die andere. Bild 13 soll euch eine Vorstellung von den Gängen vermitteln. Könnt ihr einen solchen Spazierweg finden?

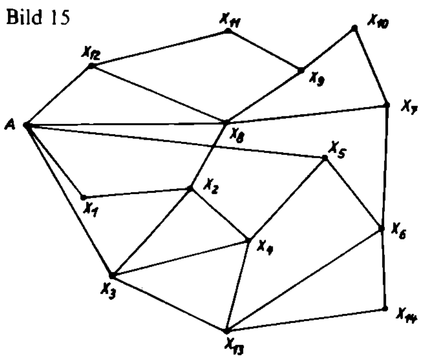
▲13▲ Welcher der Graphen des Bildes 14 kann in „einem Zug" gezeichnet (d. h. in einer offenen oder geschlossenen *Eulerschen Linie* beschrieben) werden?

Bild 14



▲14▲ Jürgen besucht die 9. Klasse einer Spezialschule. Aus den Schulen der umliegenden Dörfer war jeweils der geeignetste Schüler zu dieser Schule geschickt worden. In jedem der Dörfer X_i wohnt einer von Jürgens Klassenkameraden. In den Ferien will Jürgen eine Radtour machen. Er will möglichst viele der Ortschaften X_i erreichen und dem dort wohnenden Kameraden einen Kurzbesuch abstatten. Dabei will er kein Straßenstück doppelt passieren und am Ende der Tour wieder in seinem Heimatort A angelangt sein. In Bild 15 sind die Lage der Orte und das sie verbindende Straßennetz skizziert. Welchen Weg wird Jürgen wählen? Zeichnet ihn in Bild 15 ein!

Bild 15



Bei der Lösung einer der Aufgaben werdet ihr eine Aussage benötigt haben, die wir als Satz 5 formulieren und beweisen wollen.

Satz 5: Jeder (endliche) zusammenhängende Graph G kann in einer solchen geschlossenen Kantenfolge durchlaufen werden, daß jede Kante genau zweimal beschrieben wird.

Beweis: Zu jeder Kante (x, y) des Graphen G führen wir vorübergehend eine Kante $(x, y)_1$ ein, die ebenfalls die Knotenpunkte x und y miteinander verbindet. In dem so erhaltenen Graphen G^* haben alle Knotenpunkte gerade Valenz. Nach Satz 3 läßt sich G^* in einer geschlossenen Eulerschen Linie E durchlaufen. In dem E entsprechenden Kantenzug ersetzen wir alle mit dem Index 1 versehenen Kanten durch die entsprechende nicht indizierte Kante (beispielsweise $[x, y]_1$ durch $[x, y]$). So erhalten wir eine Kantenfolge, in der jede Kante genau zweimal vorkommt.

Erinnern wir uns noch einmal des ebenen Graphen des Bildes 4, den wir dem Dodekaeder zugeordnet hatten bzw. der das Dodekaeder darstellt.

1859 beschäftigte sich der bedeutende irische Mathematiker *W. R. Hamilton* (1805 bis 1865) mit einem Spiel, das darin besteht, den (eben erwähnten) Graphen des Bildes 4 in einem geschlossenen Kantenzug so zu durchlaufen, daß jede Kante des Graphen höchstens einmal darin vorkommt, aber jeder Knotenpunkt berührt wird. (Zwei Lösungen zeigt das Bild 16.) Wir wollen einen neuen Begriff einführen:

Definition 11: Ein Kreis eines zusammenhängenden (endlichen) Graphen G, der alle Knotenpunkte des Graphen enthält, heißt Hamiltonsche Linie von G.

Äußerlich ähnelt das Problem der Existenz einer Hamiltonschen Linie der Frage nach einer Eulerschen Linie, es ist aber mit viel größeren Schwierigkeiten verknüpft, so daß bisher bei weitem nicht ein solches abschließendes Ergebnis erzielt werden konnte wie bei dem Problem der Eulerschen Linie.

Ein von *Dirac* gefundenes Resultat besagt, daß ein zusammenhängender Graph mit n Knotenpunkten sicher dann eine *Hamiltonsche Linie* besitzt, wenn die Valenz eines jeden seiner Knotenpunkte größer als $\frac{n}{2}$ ist.

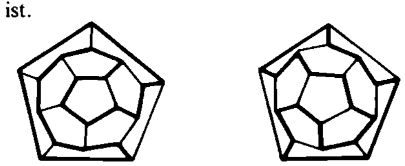


Bild 16

Eine bekannte Aufgabe verlangt, mit dem Rössel alle Felder des Schachbrettes in „einem geschlossenen Zug" genau einmal zu überstreichen und mit dem letzten Sprung das Ausgangsfeld zu erreichen (Problem des Rösselsprungs).

Die Lösung dieser Aufgabe besteht – wie man sich leicht überlegt – im Auffinden einer Hamiltonschen Linie in einem speziellen Graphen G, den man wie folgt erhält:

Den 64 Feldern des Schachbrettes entspricht je ein Knotenpunkt des Graphen G. Zwei Knotenpunkte a_i, a_j werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn das Rössel gemäß den Regeln des Schachspiels von dem a_i entsprechenden Feld nach dem a_j entsprechenden springen kann (bzw. von a_j nach a_i). Dieser Graph G kann in der Ebene wohl kaum in übersichtlicher Weise dargestellt werden – das leuchtet wegen der recht großen Knotenpunkt- und Kantenzahlen sofort ein.

In Bild 17 geben wir drei Lösungen des Rösselsprungproblems in der üblichen Weise an.

Bemerkung zu Bild 17: Wir beginnen im mit „1" bezeichneten Feld, springen von dort nach „2", von „2" nach „3" usw. – Die aus Bild 17a ersichtliche Lösung wurde von *Euler* gefunden. Die von *Jaenisch* 1862 angegebene Lösung (Bild 17c) weist eine Besonderheit auf: Die Tafel des Bildes 17c ist ein magisches Quadrat; die Summe der in jeder ihrer Zeilen und Spalten auftretenden Zahlen ist 260.

Man kann sich auch fragen, ob man, in einem Feld des Schachbrettes beginnend, in einer aufeinanderfolgenden Reihe von Zügen – die jeden möglichen Zug genau einmal enthält – zum Ausgangsfeld zurückkehren kann. Jetzt haben wir eine geschlossene Eulersche Linie des Graphen G zu suchen. Die Frage nach der Existenz einer solchen können wir sehr leicht beantworten. Wir müssen uns überlegen, welche Valenz die Knotenpunkte von G haben, und können dann Satz 3 anwenden.

Aus Bild 18 sind die Valenzen zu entnehmen:

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

Bild 18

Eine geschlossene Eulersche Linie gibt es laut Satz 3 nicht. (Satz 4 liefert, daß auch keine offene Eulersche Linie zu finden ist.)

Die beiden zuletzt behandelten Aufgaben können einer Gattung von Spielen zugeordnet werden, die wir als „Solospiele" („Einmannspiele") bezeichnen.

Diesen wollen wir uns im nächsten Beitrag – anhand weiterer Beispiele – zuwenden.

W. Voß

Bild 17

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

50	59	48	33	22	31	12	5
41	34	51	58	13	6	23	30
60	49	40	47	32	21	4	11
35	42	57	52	7	14	29	24
56	61	46	39	20	25	10	3
43	36	53	64	15	8	17	28
62	55	38	45	26	19	2	9
37	44	63	54	1	16	27	18

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

Kleine Worte – Große Wirkung Teil 4

Entweder „Nicht alle ...“
oder „Alle ... nicht“

Heute wollen wir dem letzten Fehler, den Klaus in seiner Mathematikarbeit gemacht hat, zu Leibe gehen. Es war die Aufgabe gestellt worden, eine falsche Aussage durch Verneinung in eine wahre Aussage zu überführen.

Zur Klärung sei erst einmal folgendes festgestellt:

- Die logische Verneinung einer falschen Aussage ergibt eine wahre Aussage.
- Durch logische Verneinung einer wahren Aussage erhält man eine falsche Aussage.

Verneint nun selbst einmal folgende Sätze!
a) 247 ist eine Primzahl.
b) $2^4+2^2=2^5$
c) a ist größer als 7.
d) Das Produkt $17 \cdot 11$ ist eine gerade Zahl.
e) Alle Primzahlen sind ungerade.

Die Verneinung der Sätze a) bis d) ist schnell aufgeschrieben:
a′) 247 ist **keine** Primzahl.
b′) $2^4+2^2 \neq 2^5$
c′₁) a ist **nicht** größer als 7.
oder:
c′₂) a ist kleiner als 7 **oder** gleich 7.
d′) Das Produkt $17 \cdot 11$ ist eine **un**gerade Zahl.

Wie man sieht, sind die Verneinungen recht unterschiedlich gebildet worden. Also ist es gar nicht so einfach, eine feste Vorschrift für das Verneinen von Aussagen zu finden. Um jedoch bei der Bildung einer Verneinung ganz sicherzugehen, kann man stets die Wendung „Es gilt nicht, daß ...“ vor die Aussage schreiben. So wäre z. B. der Satz „Es gilt nicht, daß alle Primzahlen ungerade sind“ eine richtige Verneinung der Aussage e). Von mir befragte Schüler gaben als Verneinung des Satzes „Alle Primzahlen sind ungerade“ folgende Antworten:

Ralf: Alle Primzahlen sind **nicht** ungerade.
Inge: **Nicht** alle Primzahlen sind ungerade.
Petra: **Keine** Primzahl ist ungerade.
Bernd: Es gibt mindestens eine Primzahl, die **nicht** ungerade ist. Wir wissen, daß die Allaussage „Alle Primzahlen sind ungerade“ falsch ist. Also muß die Verneinung dieser Aussage wahr sein (siehe oben).

Bei der Überprüfung der Aussagen von Ralf, Inge, Petra und Bernd stellen wir fest, daß nur die Sätze von Inge und Bernd wahre Aussagen sind.
Für den Satz von Ralf „Alle Primzahlen sind nicht ungerade“ kann man auch schreiben „Alle Primzahlen sind gerade“.
Hier wird offensichtlich, daß der Satz falsch ist. (Somit ist auch der Satz von Petra falsch.)
Die Aussagen von Inge bzw. Bernd sind logisch richtige Verneinungen des Satzes „Alle Primzahlen sind ungerade“. Damit ist auch klar, daß die logische Verneinung des Satzes „Alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger“ nicht heißen kann „Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger“, sondern „Nicht alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger“ oder „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger besitzt“.

Nun wollen wir noch folgende falsche Sätze verneinen:
1) **Für alle** natürlichen Zahlen a, b, gilt $a-b=b-a$.
2) **Jedes** Dreieck hat zwei stumpfe Winkel.
3) **Alle** Drachenvierecke sind Rhomben.
Die Verneinungen könnten folgendermaßen formuliert werden:
1′) **Nicht für alle** natürlichen Zahlen a, b gilt $a-b=b-a$.
Oder auch: **Es gibt** natürliche Zahlen a, b, **für die nicht** gilt, daß $a-b=b-a$.
2′) **Nicht jedes** Dreieck hat zwei stumpfe Winkel.
Oder auch: **Es gibt** Dreiecke, **die nicht** zwei stumpfe Winkel haben.
3′) **Nicht alle** Drachenvierecke sind Rhomben.
Oder auch: Mindestens ein Drachenviereck ist **kein** Rhombus.
Die Verneinung von Allaussagen kann man demnach sowohl mit den Wendungen „Nicht alle ...“, „Nicht jede...“ als auch mit den Redeweisen „Mindestens eine... nicht“, „Es gibt..., die nicht...“ ausdrücken.

Neben den Allaussagen kennen wir aus dem Mathematikunterricht auch schon Existentialaussagen.
Z. B.: **Es gibt** rechtwinklige Dreiecke.

Es gibt mindestens ein Rechteck, das ein Quadrat ist.
Man verneint Existentialaussagen mit Hilfe der Wendung „Es gibt kein...“ oder „Alle ... nicht“.
So lautet die Verneinung der Aussage „Es gibt eine natürliche Zahl, die die Gleichung $13-a=17$ erfüllt“:
Es gibt keine natürliche Zahl, die die Gleichung $13-a=17$ erfüllt.
Oder auch: **Alle** natürlichen Zahlen erfüllen **nicht** die Gleichung $13-a=17$.
Die letzten beiden Sätze bringen denselben Sachverhalt zum Ausdruck.
Verneine selbst alle falschen Aussagen!
a) Die Gleichung $a \cdot 0=17$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen mindestens eine Lösung.
b) Alle durch 17 teilbare Zahlen sind ungerade.
c) Jede natürliche Zahl, die die Ungleichung $3^2<x<72$ erfüllt, erfüllt auch die Ungleichung $3<x<2^4$.
d) Es gibt Zahlenpaare a, b, für die gilt: $a^b=b^a$
e) Mindestens ein gleichseitiges Dreieck ist rechtwinklig.
f) Alle Rhomben sind Drachenvierecke.

Wenn wir in Zukunft bei der sprachlichen Formulierung von mathematischen Sachverhalten auch auf die **große** Bedeutung der **kleinen** Wörter achtgeben, werden wir uns klarer ausdrücken können, wir werden uns sicherer fühlen und weniger Fehler machen.

L. Flade

Gut gedacht ist halb gelöst

(Lösungen siehe Seite 48)

▲1▲ Aus 88 Brettern werden 12 Tische und einige Schränke hergestellt. Für einen Tisch brauchte man 4 Bretter, für einen Schrank 8.
Wieviel Schränke wurden hergestellt?

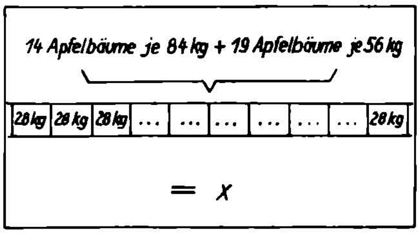
88 Bretter	
12 Tische je 4 Bretter	x Schränke je 8 Bretter
Rest .... Bretter	Rest aus Tischen: .... Schränke

▲2▲ Zwei Brigaden arbeiten an der Montage von Maschinen. Die erste Brigade montiert 60 Maschinen in 4 Tagen, die zweite Brigade 72 Maschinen in 6 Tagen.
Wieviel Maschinen montiert die eine Brigade täglich mehr als die andere?

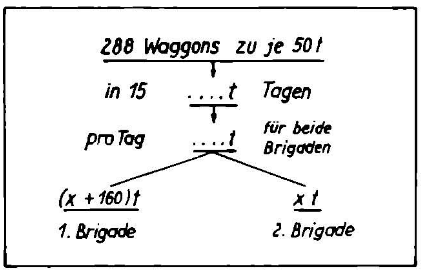
1. Brigade		2. Brigade
60 Maschinen		72 Maschinen
: .... Tage		: .... Tage
An einem Tag	$\gtreqless$	An einem Tag ....

▲3▲ Im Schulgarten ernteten Schüler Äpfel. Von 14 Apfelbäumen ernteten sie durchschnittlich je 84 kg Äpfel, von 19 weiteren Bäumen durchschnittlich je 56 kg Äpfel.

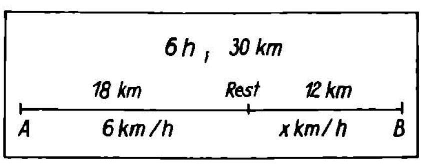
Die eingebrachte Ernte wurde in Kästen zu je 28 kg verteilt.
Wieviel Kästen wurden benötigt?



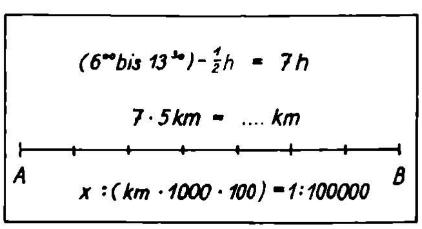
▲4▲ Zwei Bergmannsbrigaden förderten gemeinsam in 15 Tagen 288 Waggons Kohle zu je 50 t. Dabei förderte die erste Brigade 160 t täglich mehr als die zweite Brigade. Welche Fördermenge erreichte die zweite Brigade?



▲5▲ Ein Tourist ging 30 km in 6 Stunden. Vor der Rast ging er 18 km mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h.
Mit welcher Geschwindigkeit legte der Tourist den restlichen Weg zurück?



▲6▲ Eine Einheit der NVA führt einen Übungsmarsch durch. Sie verläßt um 6.00 Uhr die Kaserne und kehrt um 13.30 Uhr zurück. Die durchschnittliche Marschgeschwindigkeit beträgt 5 km in der Stunde. (Bei der Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit wurde die reine Marschzeit berücksichtigt.)



Wie lang ist diese Marschstrecke auf einer Karte mit dem Maßstab 1 : 100000, wenn man beachtet, daß unterwegs eine halbstündige Pause eingelegt wurde?

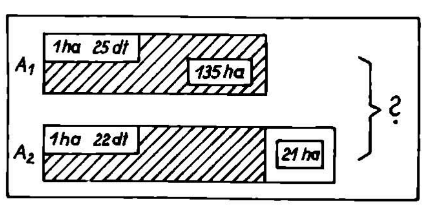
▲7▲ Ein Kindergarten kauft für 1130 M zwei Karussells und 6 Kletterstangen. Ein Karussell kostet 340 M.
Wieviel kostet eine Kletterstange? Fertige dazu ein Lösungsbild an!

▲8▲ Ein Schüler braucht im Jahr etwa 15 Hefte. Aus einer Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden.
a) Wieviel Schüler kann man für ein Jahr mit Heften aus 3 t Papier versorgen?
b) Welches Gewicht (welche Masse) hat im Durchschnitt ein Heft?
c) Bilde selbst ähnliche Aufgaben unter Benutzung anderer Tatsachen.

▲9▲ Die Parallelklassen einer Schule stehen bei der Spendenaktion „Hilfe für Vietnam" miteinander im Wettbewerb. Die Klasse 5a hat 33,75 M gesammelt. Die Klasse 5b hat durch eine Altstoffsammlung das Vierfache des von der Klasse 5a gesammelten Betrages erreicht. Die Klasse 5c kam bisher auf den dritten Teil des Betrages, den die Klasse 5a gespendet hat.
a) Wieviel Mark hat die Klasse 5a mehr gespendet als die Klasse 5c?
b) Wieviel Mark haben die drei Klassen bisher insgesamt gespendet?
c) Wieviel Mark im Durchschnitt betrug die Spende einer Klasse dieses Schuljahres?
d) In welchem kleinsten ganzzahligen Verhältnis befinden sich die Spendenbeträge der drei Klassen?
Bilde selbst weitere ähnliche Aufgaben, indem du den Wettbewerb der Spendenaktion unter vier oder mehr Schülern zugrunde legst!
Lege dazu eine Tabelle an und trage zueinander zugehörige Werte unter Benutzung von „wenn – dann" ein.

▲10▲ In einem Berliner Stadtbezirk wurden 160 große Wohnungen renoviert. Der zehnte Teil davon hat 55 m^2 Wohnfläche je Wohnung, der vierte Teil von der Gesamtzahl der renovierten Wohnungen hat 67 m^2 Fläche pro Wohnung und die restlichen Wohnungen je 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die Gesamtwohnfläche aller renovierten Wohnungen!

▲11▲ Versuche aus der nachstehenden Zeichnung eine Aufgabe zu erkennen und löse sie!



J. Lehmann/W. Unze
(Zusammenstellung für einen AG.-Nachmittag der Klassenstufe 5/6 des *alpha*-Clubs der 29. OS, 7027 Leipzig)

In freien Stunden alpha heiter

Aus: *Starchel*, bulgarische Zeitschrift
für Humor und Satire

Das Verschiebespiel

Das im folgenden beschriebene Brettspiel ist in seiner Konzeption auf dem Verschiebebegriff aufgebaut; dabei ist es nötig, nicht nur jeweils einen Stein zu bewegen, sondern Figurationen von Steinen zu verschieben. Schon bei der ersten Partie merkt man, wie wenig man die Möglichkeiten, die im Begriff der Verschiebung liegen, *übersieht*, und wieviel Chancen man eben dadurch *übersieht*.

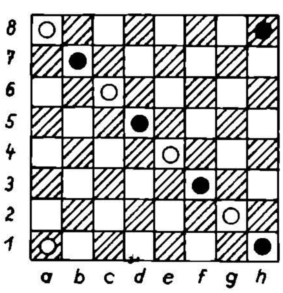


Fig. 1 Ausgangsstellung

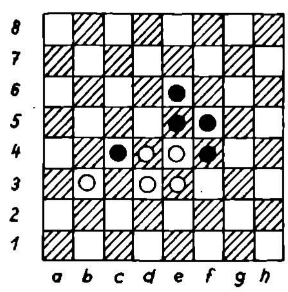


Fig. 2 Gewinnstellung für Weiß.

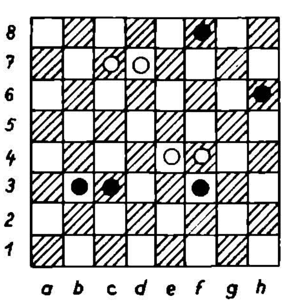


Fig. 3 Weiß kann durch folgende Züge gewinnen:
a) b4 nach d6
b) c7 nach e5, d7 nach f5

Spielregeln: Die beiden Partner setzen vier Damesteine abwechselnd in die Diagonale eines Schachbrettes. Ein freier Stein wird in die freie Ecke gesetzt (Ausgangsstellung Fig. 1).

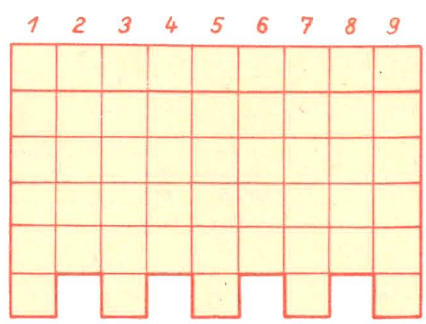
Es wird abwechselnd verschoben. Dabei darf der ziehende Spieler beliebig viele Steine (aber mindestens einen Stein) seiner Farbe in einer Richtung und um dieselbe Anzahl von Feldern, also mit gleichem Verschiebevektor, bewegen. Zulässige Richtungen sind die Richtungen, die eine Dame im Schachspiel ziehen darf. Weder fremde noch eigene Steine dürfen übersprungen werden. – Gewonnen hat, wem es gelingt, vier Steine zu einem Quadrat unmittelbar nebeneinander zusammenzuführen (Fig. 2). – Mit diesem Spiel können in einem kleinen Turnier die Anschauung und der Überblick über Konfigurationen einzelner Punkte ganz erheblich entwickelt werden. Fig. 3 zeigt eine Spielsituation.

K.-H. Hürten, aus „Praxis der Math.", Köln

Füllrätsel

Es sind abwechselnd Wörter mit sechs und fünf Buchstaben zu suchen, deren Anfangsbuchstaben einen Begriff aus der Mengenlehre ergeben.
1. deutsches Wort für Divisor, 2. Schweizer Mathematiker, 3. Begriff aus der Geometrie, 4. Hohlmaß, 5. Anschauungsmittel, 6. Geometrisches Grundgebilde, 7. Teil eines Bruches, 8. deutscher Mathematiker, 9. Vieleck.

Oberlehrer Annelies Helwes, OS Burkhardtsdorf



Welchen Beruf übt Frau Kimmer aus?

Oberlehrer Annelies Helwes, OS Burkhardtsdorf

HERTA KIMMER
THALE

Permutationsrätsel

In jedem der abgedruckten Wortbilder ist jeweils ein Buchstabe durch einen anderen des Alphabetes zu ersetzen. Wird dieser erste Schritt geeignet ausgeführt, so lassen sich aus den in jeder Zeile stehenden Buchstaben durch Permutieren die Bilder von Worten mit folgender Bedeutung bilden: geometrischer Grundbegriff – Name einer der beiden Zahlen, die einen

Bruch bestimmen – Zahlwort – Zeichen für Rechenoperationen – Länge einer geschlossenen Kreislinie – Zahlwort – Name für eine bestimmte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks – Name für eine natürliche Zahl in bezug auf eine andere, die ein Vielfaches der ersten ist.

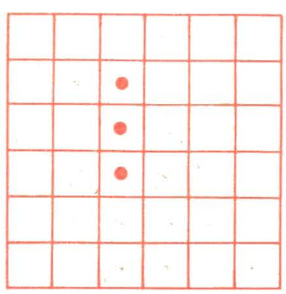
B I E N E
K E N N E R
R E D E
L A U S
G A U M E N
N U T E
T H E A T E R
R E I T E R

Die ersten Buchstaben der Lösungswörter bilden *von oben nach unten* gelesen das Wortbild eines mathematischen Begriffes.

Magisches Quadrat

Setze in die Figur noch 15 Spielsteine so ein, daß diagonal, senkrecht und waagerecht jeweils drei Steine liegen.

M. Schneider, OS Hartha



Kombination mit alpha

Wievielmal läßt sich das Wort *alpha* zusammenstellen, wobei jeweils nur in Einerschritten nach rechts, unten bzw. diagonal gelesen werden darf?

R. Schulz, Leiter des alpha-Clubs Rotta-Bergwitz und des Kreis-Klubs Junger Mathematiker Gräfenhainichen

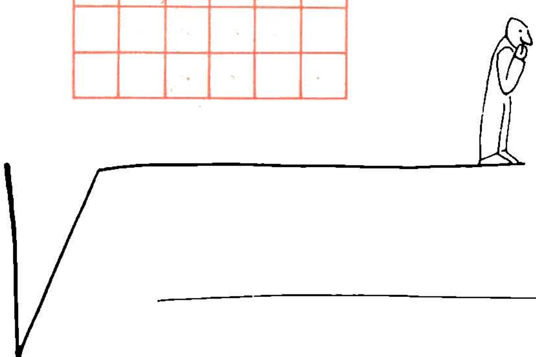
A	L	P	H	A	H
L	P	H	A	H	E
P	H	●	●	E	I
H	A	●	●	I	T
A	H	E	I	T	E
H	E	I	T	E	R

A	L	P	H	A
L	L	P	L	L
P	P	P	P	P
H	H	P	H	H
A	L	P	H	A

1. $\sqrt{\pi r^2}$
Da sitze ich also und rechne!
Buchstaben tanzen,
Zahlen verwischen die Gedanken an Dich
Die Lösung aber
bringt sie mir wieder!

2.
„Ich liebe Dich!"
Bin bei Dir, bin glücklich!
Ich möcht Dir soviel sagen,
öffne den Mund und frage ...
nach der Lösung von $\sqrt{\pi r^2}$

Sylvia Grätsch, Berlin (20 J.)
(Aus: Neues Leben 7/71)



Jean-Michel Folon, aus: *Magazin* 12/72

$$\frac{4}{\dfrac{\dfrac{2(\alpha+i\beta)}{(1+\alpha+i\beta)} - \dfrac{\gamma_T^2+4\gamma_L^2-\frac{3}{2}\mu-\frac{ick}{\omega}+\gamma_T^4(1+\alpha)^2}{1+\alpha+i\beta\pm\sqrt{\frac{\gamma_T^4}{(1+\alpha+i\beta)^2}}+4\gamma_L^2} \pm 2(\alpha+i\beta)^2 - \dfrac{\frac{4(\gamma_T^2+4)^2}{(1+i\beta)^2}}{1-\alpha+i\beta}}{\alpha-\dfrac{\gamma_T^2}{2(1+\alpha)}\pm\sqrt{\dfrac{\gamma_T^4}{4(1+\alpha)^2}}+\left(\sum_{i=1}^{k} x_i-w a_{ik}\right)\pm\dfrac{\gamma_T^2+4\gamma_L^2}{(2+\alpha-i\beta)^2}-\gamma_T^2\pm\sqrt{\gamma_T^4}}}$$

Symmetrie

Volkskunst aus der VR Polen: Scherenschnitte

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

10./11. Februar 1973

Olympiadeklasse 7

1. An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.

(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.

(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.

(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die

a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,

b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

2. Beweise, daß es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

3. Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ cm,

(2) $\sphericalangle EAB=\sphericalangle ABC=95°$,

(3) $\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{BE}$,

(4) $\overline{AE}=\overline{ED}$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier „Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch die genaue Stellung zu erkennen war.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen:

(Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a & b\cdot & c & d \\ \hline & e & f & g & 1 \\ h & i & j & 1 & \\ \hline k & m & n & 1 & p \\ \hline\hline \end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd: „Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!" Doch Gerd entgegnete ihm: „Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten." Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

5. Ermittle alle nicht negativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung

$$x+|x-1|=1 \text{ erfüllen!}$$

6. Beweise den folgenden Satz:

Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt.

Olympiadeklasse 8

1. Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tip darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden. Als man die Tipscheine auswertete, stellte es sich heraus, daß ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurden die Reihenfolge Bernd – Annekatrin – Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolgen Bernd – Claudia – Annekatrin und Claudia – Annekatrin – Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tips genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tipschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17.

Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettbewerb, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tip Bernd – Claudia – Annekatrin insgesamt abgegeben?

2. Beweise den folgenden Satz:

Sind a, b, c ($a \geqq b \geqq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zweien dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

3. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite $\overline{AB}$ sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, daß dessen Seite $\overline{DE}$ mit C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, daß dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und daß außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, daß D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.

Beweise, daß dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

4. Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei $\overline{AB}$. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes P_2. Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben? Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMP_2$!

5. Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP}=\overline{MR}=9$ cm und einem Zentriwinkel $\sphericalangle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, daß A auf $\overline{MP}$ liegt, B und C auf dem Bogen $\widehat{PR}$ liegen und D auf $\overline{MR}$ liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

6. Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

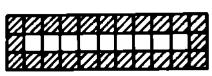
$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$ finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

Olympiadeklasse 9

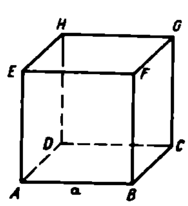
1. Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist!

2. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, daß sämtliche an den Rand dieses Rechteckes grenzenden Quadratflächen rot sind (im Bild gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.



Geben Sie (durch Angabe der Anzahlen der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

3. Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Bild) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen. Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfel dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.



4. Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:

A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, den Rest mit 5 km/h.

B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, während der übrigen Zeit mit 5 km/h.

Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

5. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{BC} + \widehat{DA}$. Beweisen Sie, daß dann $AC \perp BC$ gilt!

6. Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m+1) = 3808$ gilt.

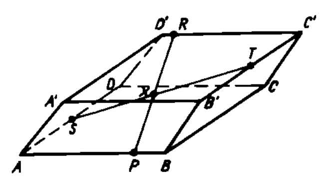
b) Man gebe alle Tripel an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

Olympiadeklasse 10

1. Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $\overline{CD} = h$ und die Basislänge $\overline{AB} = g$ genannt. Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, daß $\overline{EF}$ auf $\overline{AB}$, G auf $\overline{BC}$ und H auf $\overline{AC}$ liegen.

Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h:g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie $9:4$ verhalten!

2. Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d. i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche.



Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{ST}$ auftreten können, wenn P ein Punkt auf $\overline{AB}$, R ein Punkt auf $\overline{C'D'}$, S ein Punkt auf $\overline{AD}$ und T ein Punkt auf $\overline{B'C'}$ ist.

3. Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend numeriert, es mögen also numeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	...

Es ist zu beweisen, daß dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

4. Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, daß er eine Verspätung von genau 4 min hatte. Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.

Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

5. Beweisen Sie, daß

$$lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+lg\left(1-\frac{1}{26^2}\right)+\ldots+lg\left(1-\frac{1}{99^2}\right)$$
$$+lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=lg\frac{606}{625} \text{ gilt!}$$

6. Beweisen Sie den folgenden Satz:

Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von 36°, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem „Goldenen Schnitt" geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem „Goldenen Schnitt" in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung $\tan x + \cot x = 4$ erfüllen.

(Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

2. Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in einer und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleichweit entfernt sind.

3. Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: „Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"

Zuschauer: „Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."

Reporter: „Wie wurden die Punkte verteilt?"

Zuschauer: „In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."

Reporter: „In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"

Zuschauer: „Ich weiß es nicht."

Reporter: „Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"

Zuschauer: „Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei."

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!

a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?

b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz? (Es sei bekannt, daß in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

4. Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leqq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an + b$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) eine Folge natürlicher Zahlen gegeben. Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d. Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

5. Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist. Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen $n (n \geqq 4)$ an, für die das gilt.

Von den folgenden Aufgaben 6a und 6b ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

6a. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaft hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x f(x+1)$;

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.

b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.

c) Man gebe eine spezielle Funktion f_o an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leqq x \leqq 4$.

6b Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke $\overline{AB}$ Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, daß sie die Strecke $\overline{AB}$ in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.

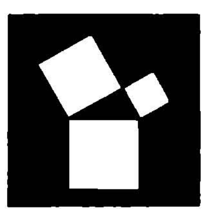
a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß zwei aus den Punkten $P_1, \ldots, P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke $\overline{AB}$ derart zerlegen, daß sich aus den drei Teilstrecken $\overline{AP_k}$, $\overline{P_kP_m}$, $\overline{P_mB}$ ein Dreieck konstruieren läßt.

b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert:
Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein „Fall" bezeichnet. Ein „Fall" heiße ein „günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, daß sich aus den Strecken $\overline{AP_k}$, $\overline{P_kP_m}$ und $\overline{P_mB}$ ein Dreieck bilden läßt. Ist dann z die Anzahl aller möglichen „Fälle" und z_1 die Anzahl aller „günstigen Fälle" so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

Mathematik-olympiaden in den Niederlanden

Auch in Holland gibt es eine Olympiade. Sicher interessiert es die alpha-Leser, etwas davon zu lesen. Es sei aber vorausgeschickt: Die holländische Olympiade ist eine kleine! Im Vergleich zur DDR kann man sie sogar „winzig klein" nennen. Erstens hat sie nur zwei Stufen. Zweitens nehmen nur Schüler aus der Mittelschule teil und zwar aus den letzten zwei Jahren vor dem Abitur. Die erste Stufe kann man als Vorstufe bezeichnen, als Weg, eine Vorauswahl zu treffen. An alle Schulen werden Aufgaben versandt. Die Schüler des vorletzten (11. Schuljahres) erhalten eine Kostprobe, nämlich die Aufgaben des Vorjahres mit nach Hause. So können sie in aller Ruhe beurteilen, ob sie es wagen können mitzumachen. Haben sie Mut gefaßt, arbeiten sie in einer Klausur an den offiziellen Aufgaben. In drei Stunden Arbeitszeit sind zehn Aufgaben zu lösen, natürlich keine vollständigen Lösungen, sondern nur die Antworten auf die gestellten Probleme. Die Aufgaben sind sehr verschieden von dem in der Schule gebotenen Stoff. Erfahrung nützt wenig, man muß etwas Originelles leisten, um Erfolge zu erzielen!



Drei Beispiele sollen das zeigen:

▲999a▲ Jemand zeichnet n Geraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$ $(n > 3)$, die in derselben Ebene liegen, die paarweise nicht parallel sind und von denen keine drei einen Punkt gemeinsam haben.
Die Anzahlen der Schnittpunkte in den beiden Halbebenen, die von der Geraden g_1 erzeugt werden, seien gleich.
Die Anzahlen der Schnittpunkte in den beiden Halbebenen, die von der Geraden g_2 erzeugt werden, sollen sich wie 1 : 6 verhalten.
Es ist die kleinste Anzahl der Geraden zu ermitteln, die zu zeichnen sind.

▲999b▲ Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a = 4$ cm, $\overline{BC} = b = 3$ cm, $\overline{CD} = c = 3$ cm und $\overline{AD} = d = 2$ cm. Es ist der größtmögliche Flächeninhalt zu bestimmen, den dieses Viereck haben kann!

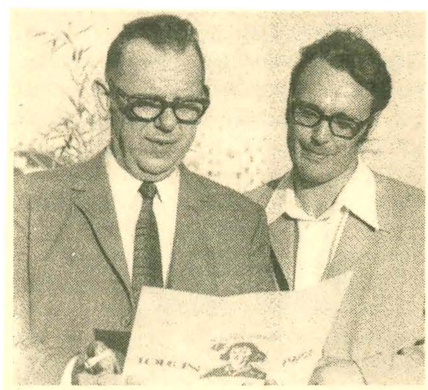
▲999c▲ Zu jeder positiven ganzen Zahl n existieren eindeutig bestimmte nichtnegative ganze Zahlen $a(n)$ und $b(n)$, die die Gleichung

$$n = 2^{a(n)} \cdot [2 \cdot b(n) + 1]$$ erfüllen.

Für positive ganze Zahlen k sei $S(k)$ durch

$$S(k) = a(2^1) + a(2^2) + a(2^3) + \ldots + a(2^k)$$

definiert.
Man schreibe $S(k)$ als Funktion von k.



Bildunterschrift: *Prof. A. von Tooren* (links) und *Prof. A. A. Hoogendoorn*, langjährige Delegationsleitung der niederländischen Mannschaft bei internationalen Mathematikolympiaden

Die Lösungen der Wettbewerbsteilnehmer werden sehr sorgfältig geprüft. Aus den 60 „Klugen" werden die 10 Klügsten ausgewählt. Mit ihren Eltern und Lehrern sind sie Gast des holländischen Erziehungsministeriums. Erst dort wird die Reihenfolge der zehn Preisträger bekanntgegeben, jeder wird mit einem Paket wertvoller mathematischer Lehrbücher belohnt. Selbstverständlich ist die Presse dabei und jeder kann sich am Abend im Fernsehen bewundern. Fast ist es das Ende dieses Berichts. Nun aber kommt noch eine „Kleinigkeit ..., die IMO." Die acht Besten werden ausgewählt. Jedes Mitglied dieser Mannschaft ist stolz darauf, den hervorragenden Jungen Mathematikern aus der DDR und aus vielen anderen Ländern zu begegnen; denn die Mathematik kennt keine Grenzen und das ist gut!

A. v. Tooren

Lösungen

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. König

▲1002▲ $P(A)=P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

$P(C)=\frac{2\cdot 3\cdot 3}{36}=\frac{1}{2}$.

$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{3\cdot 3}{36}=\frac{1}{4}$

$P(ABC)=\frac{0}{36}=0$

$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}=P(AB)$, folglich A, B stochastisch unabhängig. Genau so ergibt sich, daß A und C sowie B und C stochastisch unabhängig sind.

$P(ABC)=0$, jedoch $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, folglich sind A, B, C nicht „insgesamt" stochastisch unabhängig.

D. h. in diesem Beispiel sind je zwei der drei Ereignisse A, B, C stochastisch unabhängig (die Ereignisse A, B, C sind also paarweise unabhängig), jedoch sind die drei Ereignisse nicht „insgesamt" stochastisch unabhängig.

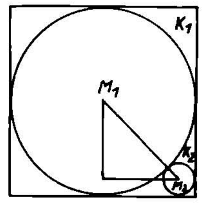
Das Beispiel gibt daher Anlaß, für mehr als zwei Ereignisse eine weitere, stärkere Unabhängigkeitseigenschaft zu definieren: n zufällige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen vollständig stochastisch unabhängig $=_{\text{Def}}$ für jede beliebige Auswahl von r der n Ereignisse, genau dann, wenn $1\leqq r\leqq n$, gilt, daß die Wahrscheinlichkeit des Produkts der r ausgewählten Ereignisse gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit der r Ereignisse ist.

Das obige Beispiel erlaubt somit folgende allgemeine Aussage: Aus der paarweisen stochastischen Unabhängigkeit von n zufälligen Ereignissen folgt nicht deren vollständige stochastische Unabhängigkeit (trivialerweise gilt aber die Umkehrung).

▲925▲ Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. O. Krötenheerdt (4/72)

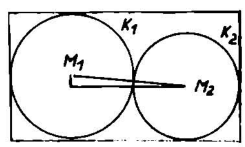
Man denke sich zunächst ein flächenkleinstes Quadrat Q, welches K_1 im Inneren enthält. Für die Radiusmaßzahl r_2 eines größtmöglichen Kreises K_2, welcher K_1 von außen berührt und ebenfalls noch im Inneren von Q liegt, gilt nach dem Satz des Pythagoras $(r_1+r_2)^2=2\cdot(r_1-r_2)^2$, das heißt $r_2^2-6\cdot r_1 r_2+r_1^2=0$, also $r_2=(3\pm 2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$.

(Für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt ist nur das Minuszeichen von Bedeutung.) Zur Lösung der Aufgabe erweist sich nun die folgende Fallunterscheidung als zweckmäßig.



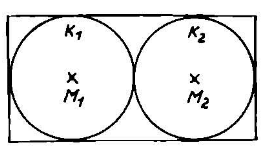
a) Ist $r_2\leqq(3-2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$, so ist jedes flächenkleinste Rechteck R, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält, ein Quadrat der Seitenmaßzahl $2r_1$. Gilt das Kleinerzeichen, so existieren unendlich viele derartige Quadrate; gilt das Gleichheitszeichen, so existiert genau ein derartiges Quadrat.

b) Ist $r_2>(3-2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$, aber $r_2<r_1$, so existieren genau zwei flächenkleinste Rechtecke, welche K_1 und K_2 im Inneren enthalten; dabei wird K_1 von genau 3 und K_2 von genau 2 Rechtecksseiten berührt. Diese beiden Rechtecke R und R' liegen symmetrisch zur Geraden durch M_1 und M_2. Jedes andersgelegene Rechteck R_0 (mit K_1 und K_2 im Innern) besitzt einen größeren Flächeninhalt. Um dies einzusehen, denke man sich K_2 auf K_1 abgerollt, und dabei verfolge man das jeweils flächenkleinste, zu R_0 seitenparallele Rechteck R_φ, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält. In wenigstens einer der beiden Abrollrichtungen tritt gegenüber der Ausgangslage zunächst eine Flächenverkleinerung von R_φ ein.



Im Rechteck R ist die kleinere Seitenmaßzahl offenbar gleich $2r_1$. Für die größere Seitenmaßzahl folgt mit dem Satz des Pythagoras $r_1+r_2+\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$ $=r_1+r_2+2\cdot\sqrt{r_1 r_2}$.

Dieser Ausdruck gilt auch noch für den Fall $r_2=(3-2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$ und nimmt dann den Wert $2r_1$ an; denn $r_1+(3-2\sqrt{2})\cdot r_1+2\cdot\sqrt{r_1^2\cdot(3-2\sqrt{2})}=$ $(4-2\sqrt{2})\cdot r_1+2r_1\cdot(\sqrt{2}-1)=2r_1$.



c) Ist $r_2=r_1$, so gibt es genau ein flächenkleinstes Rechteck R, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält; dieses Rechteck hat die Seitenmaßzahlen $2r_1$ und $4r_1$. Daß jedes andersgelegene Rechteck R_0 (mit K_1 und K_2 im Inneren) einen größeren Flächeninhalt besitzt, kann mit denselben Überlegungen wie im Fall b) begründet werden. Der im Fall b) gefundene Ausdruck für die größere Seitenmaßzahl gilt auch noch für den Fall $r_2=r_1$.

O. Krötenheerdt

Lösungen zu: Mathematikern über die Schultern geschaut (5/72)

▲926▲ Falls eine Lösung existiert, muß gelten

$$a=\frac{n}{\sin\alpha} \text{ und } a=\frac{m}{\cos\beta}$$

Dabei ist $\beta=180°-60°-(90-\alpha)=30°+\alpha$

Man erhält:

$$\frac{n}{\sin\alpha}=\frac{m}{\cos(30+\alpha)} \text{ mit } 0<\alpha<90°$$

Das ist äquivalent mit

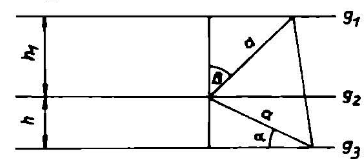
$$\frac{\cos(30°+\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{m}{n}$$

Daraus erhält man:

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cot\alpha+\frac{1}{2}=\frac{m}{n}$ (wegen $\cos(30+\alpha)=$ $=\cos 30\cdot\cos\alpha-\sin 30\sin\alpha$)

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cot\alpha=\frac{m}{n}+\frac{1}{2}=\frac{2m+n}{2n}$

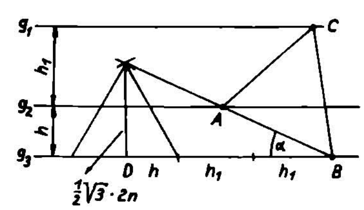
$$\cot\alpha=\frac{2m+n}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2n}$$



a: Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks

Damit ist α konstruierbar. Da der Kotangens für Winkel zwischen 0° und 90° alle Werte von 0 bis ∞ genau einmal annimmt, existiert für jedes gegebene Zahlenpaar (m, n) für α genau eine Lösung. Unter den angegebenen Bedingungen waren alle Umformungen äquivalent, also ist die Aufgabe eindeutig lösbar.

Konstruktion: Der Ausdruck $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2n$ ist die Länge der Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $2n$. Daher kann man wie folgt konstruieren:



Auf g_3 wählt man B beliebig. Von B aus trägt man $2m+n$ auf g_3 ab. Man erhält D. Nun konstruiert man ein gleichseitiges Dreieck, so daß eine Seite auf g_2 fällt und D der Mittelpunkt dieser Seite ist (Seitenlänge $2n$).

Die D gegenüberliegende Ecke verbindet man mit B. Damit ist bei B der Winkel α konstruiert.

Die Verbindungslinie schneidet g_2 in A. Mit $\overline{AB}$ hat man eine Seite des gleichseitigen Dreiecks und damit läßt sich die Ecke C leicht konstruieren. Das $\triangle ABC$ erfüllt auch die gestellten Bedingungen, da der Innenwinkel bei A sich aus $180° - \alpha - \beta$ ergibt und α und β so bestimmt worden sind, daß dieser Winkel $60°$ beträgt, wenn $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist. Außerdem liegt wegen $a = \frac{m}{\cos\beta}$ der Punkt C auf g_1.

Zur Lösung der Aufgabe W 10 ■ 908/(2/72)

Bemerkung: Bei der Darstellung der Zahl Z in der Aufgabe 908 in *alpha* 2/72, S. 37 muß es heißen:

$$Z = \underbrace{1\,000\ldots 001}_{1970 \text{ Nullen}}$$

Zusatz zur gleichen Aufgabe (Lösung):
x^2 ist also durch 2^5 teilbar, also auch durch $2^4 = 2^2 \cdot 2^2$. Daher ist x durch 2^2 teilbar. Nun ist aber x sogar durch 2^3 teilbar. Wäre das nämlich nicht der Fall, so wäre $x = 2^2 \cdot y$, wobei y ungerade ist, also $x^2 = 2^4 \cdot y^2$, wobei y^2 ungerade ist. x^2 wäre also nur durch 2^4 und nicht durch 2^5 teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.
Analog zeigt man, daß x auch durch 3^2 teilbar ist. Daher ist x, da 2 und 3 teilerfremd sind, teilbar durch $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

---

9 ▲ 952 Bezeichnen wir den Divisor in der ersten Zeile der Aufgabe mit x, so ist x eine dreistellige Zahl, und es gilt $x < 1000$. Da die letzte Ziffer des Quotienten gleich 2 ist, steht in der 6. Zeile der Aufgabe die Zahl $2x$, und es gilt $2x \geqq 1000$. In der 2. und 4. Zeile kann also nur die Zahl $1 \cdot x$ stehen.
Wegen $x < 1000$ gilt $2x < 2000$. Bezeichnen wir nun die in der 3. Zeile stehende vierstellige Zahl mit a, so gilt

$$a - x < 2,$$

weil in der letzten und vorletzten Zeile eine Zahl steht, die kleiner als 2000 ist. Daraus folgt

$$x > a - 2$$

und wegen $a \geqq 1000$

$x > 1000 - 2 = 998$. Andererseits gilt $x < 1000$, also ist $x = 999$.
Damit sind der Divisor und die Zahlen in der 2., 4. und 6. Zeile eindeutig bestimmt. Wir können daher, von der sechsten Zeile ausgehend, auch die noch fehlenden Ziffern bestimmen und erhalten die folgende Lösung:

```
1000000998 : 999 = 1001002
 999
 ‾‾‾
   1000
    999
   ‾‾‾‾
      1998
      1998
      ‾‾‾‾
         0
```

W 9 ■ 953 Angenommen, x sei eine reelle Lösung der Gleichung

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3. \qquad (1)$$

Dann gilt

$$x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27,$$
$$2x^3 - 12x - 18 = 0,$$
$$x^3 - 6x - 9 = 0. \qquad (2)$$

Wir setzen $f(x) = x^3 - 6x - 9$ und erhalten

$$f(0) = -9,\ f(1) = -14,\ f(2) = -13,$$
$$f(3) = 0.$$

Die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) ist also für $x = 3$ erfüllt.
Wir müssen nun noch nachweisen, daß die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) keine weiteren reellen Lösungen hat. Aus (2) erhalten wir

$$x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 3x - 9 = 0,$$
$$x^2(x-3) + 3x(x-3) + 3(x-3) = 0,$$
$$(x^2 + 3x + 3)(x-3) = 0. \qquad (3)$$

Nun gilt für alle reellen x

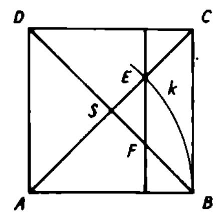
$$x^2 + 3x + 3 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} + 3 - \frac{9}{4} =$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

d. h. der erste Faktor auf der linken Seite von (3) ist für alle x von Null verschieden, die Gleichung (3) ist also nur für $x = 3$ erfüllt. Daher hat auch die gegebene Gleichung genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 3$.
Wir überzeugen uns noch durch die Probe davon, daß die Gleichung (1) für $x = 3$ erfüllt ist. Wir erhalten

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$
$$27 + 64 + 125 = 216,$$
$$216 = 216,$$

also eine wahre Aussage.

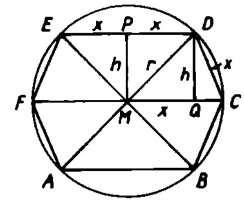
W 9 ■ 954 Aus $\sphericalangle ECB = \sphericalangle FBC = 45°$ und $EF \parallel BC$ folgt, daß das Viereck $BCEF$ ein gleichschenkliges Trapez ist; somit gilt $\overline{CE} = \overline{FB}$.



Aus $\overline{AE} = a$ und $\overline{AS} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ folgt $\overline{SE} = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$
$= \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$. Ferner gilt $\overline{EF} = \overline{SE} \cdot \sqrt{2}$
$= \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1)$. Aus $\overline{AC} = a\sqrt{2}$ und $\overline{AE} = a$ folgt $\overline{CE} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$.
Deshalb gilt $\overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.
$BCEF$ gleichschenkliges Trapez: $\overline{CE} = \overline{FB}$.

$$\overline{SE} = a - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$$
$$\overline{EF} = \overline{SE}\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1)$$
$$\overline{CE} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1) \quad \overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FB}.$$
$$BCEF: A = \frac{1}{2}(a + a\sqrt{2} - a) \cdot \frac{1}{2}(a - a\sqrt{2} + a),$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a(2 - \sqrt{2}) =$$
$$= \frac{a^2}{4}(2\sqrt{2} - 2) = \frac{a^2}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

W 9 * 955 Es sei $ABCDEF$ das gegebene, einem Kreis einbeschriebene Sechseck. Wir setzen $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FA} = x$. Dann gilt nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{ED} = 2x$ (vgl. die Abb.).
Um x zu berechnen, müssen wir zunächst nachweisen, daß die Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ durch den Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks gehen. Dann folgt nämlich $AB \parallel FC \parallel ED$. Wir verbinden den Mittelpunkt M des Kreises mit den sechs Eckpunkten. Dann gilt $\triangle BMA \cong \triangle EMD$, da diese Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen. Daraus folgt $\sphericalangle BMA = \sphericalangle EMD$.



Ferner gilt
$\triangle CMB \cong \triangle DMC \cong \triangle FME \cong \triangle AMF$.
Daraus folgt
$\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMC = \sphericalangle FME = \sphericalangle AMF$.
Mithin gilt
$\sphericalangle CMB + \sphericalangle DMC + \sphericalangle EMD$
$= \sphericalangle FME + \sphericalangle AMF + \sphericalangle BMA$, also, da diese Winkel zusammen $360°$ betragen,
$\sphericalangle CMB + \sphericalangle DMC + \sphericalangle EMD = 180°$, d. h. die Punkte B, M, E liegen auf einer Geraden, die Diagonale $\overline{BE}$ geht also durch den Mittelpunkt M des Kreises. Analog beweist man, daß auch die Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ durch M gehen.
Jetzt fällen wir das Lot $\overline{MP}$ von M auf $\overline{ED}$ und das Lot $\overline{DQ}$ von D auf $\overline{MC}$. Wir setzen $\overline{MC} = \overline{MD} = r$, $\overline{MP} = \overline{DQ} = h$.
Es gilt $\overline{PD} = \overline{MQ} = x$, und wir erhalten nach dem Satz des Pythagoras

$$h^2 = r^2 - x^2, \qquad (1)$$
$$h^2 = x^2 - (r - x)^2 = 2rx - r^2, \qquad (2)$$

also $2rx - r^2 = r^2 - x^2$,

$$x^2 + 2rx - 2r^2 = 0. \qquad (3)$$

Die quadratische Gleichung (3) hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$x = -r + \sqrt{r^2 + 2r^2} = -r + r\sqrt{3} =$$
$$= r(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}732r. \qquad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt nun
$h^2 = r^2 - x^2 \approx r^2 - 0{,}732^2 r^2 \approx 0{,}464 r^2$,
$h \approx 0{,}681 r$.
Für den Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ gilt daher

$$A_1 = 4\left(xh + \frac{r - x}{2}h\right) = 2(r + x)h,$$
$$A_1 \approx 2(0{,}732r + r)0{,}681r$$
$$\approx 2 \cdot 1{,}732 \cdot 0{,}681 r^2$$
$$A_1 \approx 2{,}359 r^2.$$

Für den Flächeninhalt des umbeschriebenen Kreises gilt

$A_2 = \pi r^2 \approx 3{,}142 r^2$. Wir erhalten

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2{,}359}{3{,}142} \approx 0{,}7508,$$

d. h. der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ ist nur etwas größer als 0,75, d. s. $\frac{3}{4}$ des Flächeninhalts des umbeschriebenen Kreises.

W 9*956 Angenommen, a und b seien zwei natürliche Zahlen, für die die Gleichung

$$10a+(a-9)b^2=88+(6a-54)b$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$10a+ab^2-9b^2=88+6ab-54b,$$
$$ab^2-6ab+10a=9b^2-54b+88,$$
$$a(b^2-6b+9+1)=9b^2-54b+81+7,$$
$$a[(b-3)^2+1]=9(b-3)^2+7.$$

Wir setzen $b-3=t$, wobei t eine ganze Zahl ist, und erhalten wegen $t^2+1>0$

$$a=\frac{9t^2+7}{t^2+1}=\frac{2t^2}{t^2+1}+7.$$

a ist also nur dann eine natürliche Zahl, wenn $\frac{2t^2}{t^2+1}$ ganzzahlig ist.

Nun gilt für alle ganzen Zahlen t

$$0\leq\frac{2t^2}{t^2+1}=\frac{2(t^2+1)}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}<2.$$

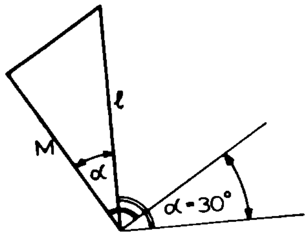
Also gibt es, da $\frac{2t^2}{t^2+1}$ ganzzahlig ist, nur die folgenden Möglichkeiten:

1. $\frac{2t^2}{t^2+1}=0$, d. h. $t=0,\ b=3,\ a=7.$
2. $\frac{2t^2}{t^2+1}=1$, d. h. $t=1,\ b=4,\ a=8$
   oder $t=-1,\ b=2,\ a=8.$

Es können also nur die geordneten Paare (7, 3), (8, 4), (8, 2) Lösungen der gegebenen Gleichung sein. Die Probe zeigt, daß diese Paare tatsächlich Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

Lösungen zu: Aufgaben aus der Markscheidekunde (2/72, S. 25)

▲1▲ $M=l\cdot\cos\alpha$
$M=1{,}80\ \text{m}\cdot 0{,}8660=1{,}56\ \text{m}$

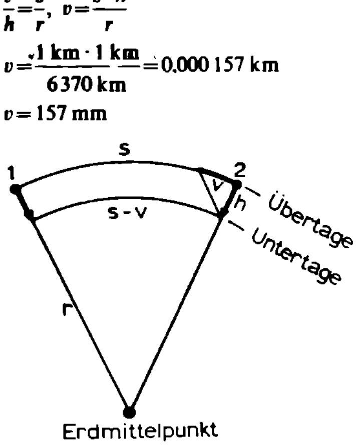


▲2▲ Nach der Skizze ist

$$\frac{v}{h}=\frac{s}{r},\quad v=\frac{s\cdot h}{r}$$

$$v=\frac{1\ \text{km}\cdot 1\ \text{km}}{6370\ \text{km}}=0{,}000\,157\ \text{km}$$

$v=157\ \text{mm}$



Der Abstand der beiden Lote in 1000 m Tiefe ist 157 mm kleiner als Übertage.

1 und 2 = Aufhängepunkte der Lote
s = Abstand der Lote Übertage
$s-v$ = Abstand der Lote Untertage
r = Erdradius 6730 km
h = Höhenunterschied zwischen Übertage und Untertage
v = Verbesserung

▲3▲ $c=b-a$

$$b=\frac{h}{\tan\alpha_2};\quad a=\frac{h}{\tan\alpha_1}$$

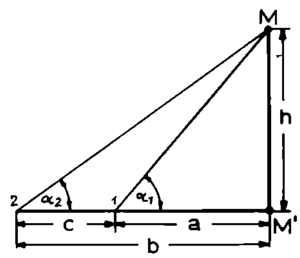
$$c=\frac{h}{\tan\alpha_2}-\frac{h}{\tan\alpha_1}$$

$$c=h\left(\frac{1}{\tan\alpha_2}-\frac{1}{\tan\alpha_2}\right)$$

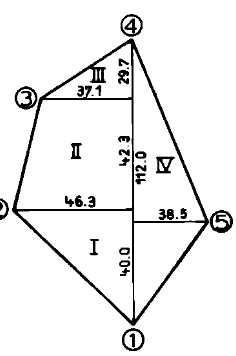
$$h=c\,\frac{1}{\frac{1}{\tan\alpha_2}-\frac{1}{\tan\alpha_1}}=c\,\frac{1}{\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{\tan\alpha_2\cdot\tan\alpha_1}}$$

$$h=c\,\frac{\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}$$

$$h=57{,}65\,\frac{0{,}7673\cdot 0{,}4913}{0{,}7673-0{,}4913}=78{,}74\ \text{m}$$



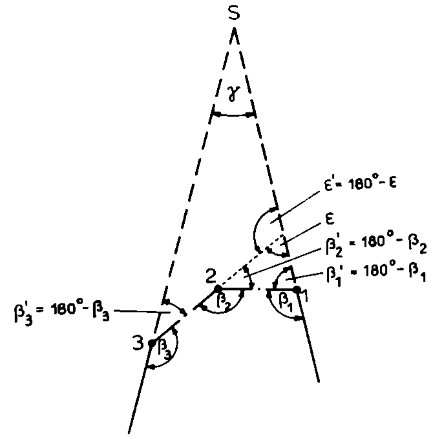
▲4▲ In dieser Form aufgemessene Grundstücke werden in Dreiecke und Trapeze zerlegt.



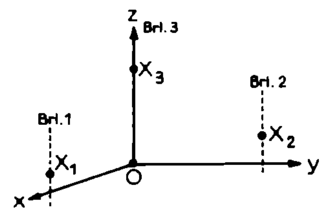
I	Dreieck	$\frac{1}{2}\cdot 40{,}0\cdot 46{,}3$	$=926\ \text{m}^2$
II	Trapez	$\frac{1}{2}\cdot(46{,}3+37{,}1)\cdot 42{,}3$	$=1\,764\ \text{m}^2$
III	Dreieck	$\frac{1}{2}\cdot 29{,}7\cdot 37{,}1$	$=551\ \text{m}^2$
IV	Dreieck	$\frac{1}{2}\cdot 112{,}0\cdot 38{,}5$	$=2\,156\ \text{m}^2$
		F	$=\underline{5\,397\ \text{m}^2}$

▲5▲ $\varepsilon=180°-\beta_1'-\beta_2'$
$\varepsilon=180°-(180°-\beta_1)-(180°-\beta_2)$
$\varepsilon=\beta_1+\beta_2-180$
$\gamma=180°-\varepsilon'-\beta_3'$
$\gamma=180°-(180°-\varepsilon)-(180°-\beta_3)$
$\gamma=180°-(180°-\beta_1-\beta_2+180°)-(180°-\beta_3)$
$\gamma=\beta_1+\beta_2+\beta_3-360°$

$$\begin{aligned}\beta_1&=106°20'\\ \beta_2&=141°52'\\ \beta_3&=142°29'\\ &\underline{-360°00'}\\ \gamma&=\ \ 30°41'\end{aligned}$$



▲6▲ In die gegebene Skizze wird ein Koordinatennetz gelegt. O (Origo) für x und y im Bohrloch 3 und für z Normal Null.



Die Koordinaten der Punkte, an denen das Flöz von den Bohrlöchern getroffen wurde, sind:

bei Bohrloch 1 X_1 (100; 0; 35)
bei Bohrloch 2 X_2 (0; 100; 45)
bei Bohrloch 3 X_3 (0; 0; 85)

Für die vektorielle Parameterdarstellung einer Ebene durch 3 Punkte X_1, X_2, X_3 kann u. a. geschrieben werden:

$\varepsilon_1\ \ldots\ \mathfrak{e}=\mathfrak{e}_1+(\mathfrak{e}_2-\mathfrak{e}_1)\sigma+(\mathfrak{e}_3-\mathfrak{e}_1)\tau$

Die 3 entsprechenden äquivalenten skalaren Gleichungen lauten dann:

$$\varepsilon_1\ \ldots\ \begin{cases}x=x_1\ (x_2-x_1)\sigma+(x_3-x_1)\tau\\ y=y_1\ (y_2-y_1)\sigma+(y_3-y_1)\tau\\ z=z_1\ (z_2-z_1)\sigma+(z_3-z_1)\tau\end{cases}$$

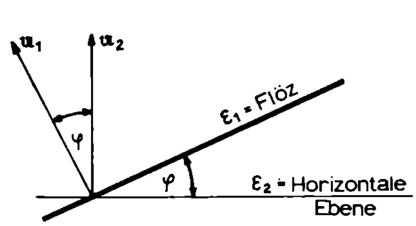
$$\varepsilon_1\ \ldots\ \begin{cases}x=100-100\sigma-100\tau\\ y=\qquad +100\sigma\\ z=\ \ 35+\ \ 10\sigma+\ \ 50\tau\end{cases}$$

Durch Eliminierung von σ und τ erhält man die Ebenengleichung

$\varepsilon_1\ldots 5x+4y+10z-850=0$

Es muß nunmehr der Schnittwinkel mit einer horizontalen Ebene

$\varepsilon_2\ldots z=0$ berechnet werden.



Die beiden Flächen schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Stellungsvektoren $\mathfrak{a}$, wobei hier gilt

$\varepsilon_1 \ldots \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{e} + k_1 = 0$

$\varepsilon_2 \ldots \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{e} + k_2 = 0$

$\mathfrak{a}_1 = (a_1; b_1; c_1) = (5; 4; 10)$

$\mathfrak{a}_2 = (a_2; b_2; c_2) = (0; 0;\ 1)$

Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren berechnet sich aus

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1|\,|\mathfrak{a}_2|}$$

Hierzu die skalare Darstellung

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{25 + 16 + 100}\ \sqrt{1}} = \frac{10}{\sqrt{141}} = 0{,}8425$$

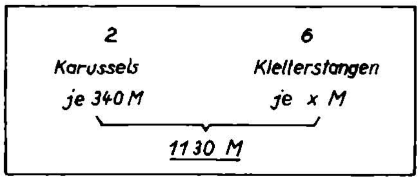
$$\varphi = 32°36'$$

Lösungen zu „Gut gedacht ist halb gelöst" (2/72, S. 38)

▲1▲ Die Lösung führt auf die Gleichung $4 \cdot 12 + x \cdot 8 = 88$ bzw. $(88 - 4 \cdot 12) : 8 = 5$, d. h. es wurden 12 Tische und 5 Schränke hergestellt.

▲2▲ Die Lösung führt auf die Ungleichung
$60 : 4 > 72 : 6$

▲7▲ Das Lösungsbild ist:
Die Lösung führt auf die Gleichung
1. Variante: $2 \cdot 340 + 6 \cdot x = 1130$
2. Variante: $(1130 - 2 \cdot 340) : 6 = x$ und $x = 75$, d. h. eine Kletterstange kostet 75 M.



▲8▲ Zur Lösung führen für a) und b) je zwei Varianten:

a) $(3 \cdot 25000) : 15 = x$ oder
$15x = 3 \cdot 25000$; $x = 5000$, d. h.
5000 Schüler können aus diesem Altpapier mit Heften versorgt werden.

b) $1 \cdot 1000 \cdot 1000 : 25000 = x$, oder
$25000x = 1 \cdot 1000 \cdot 1000$; $x = 40$ d. h.
ein Heft hat durchschnittlich eine Masse von 40 g.

▲9▲ Alle Gegebenheiten werden in einer Tabelle niedergeschrieben. Die Lösungen ergeben sich aus der Vervollständigung der Tabelle.

Klasse	Anteil am Sammelergebnis		Sammelergebnis der Klasse	Lösung der Aufgaben	d)
5a	33,75		= 33,75	a) 33,75 − 11,25 = 22,50	3
5b	4 · 33,75		= 135,00		12
5c	33,75 : 3		= 11,25		1
		b)	= 180,00	c) 180 : 3 = 60	
			·		
			·		
			$\frac{11{,}25}{16}$		

bzw. $15 > 12$ und $15 - 12 = 3$, d. h. die Mehrleistung erfolgt durch die erste Brigade mit täglich drei montierten Maschinen.

▲3▲ Die Lösung führt auf die Gleichung $(84 \cdot 14 + 56 \cdot 19) : 28 = x$ und $x = 80$,
d. h. es konnten 80 Kästen mit je 28 kg Äpfel gefüllt werden.

▲4▲ Die Lösung führt auf die Gleichung
$50 \cdot 288 : 15 - (x + 160) = x$
bzw. $800 = 2x$
und $x = 400$, d. h.
die zweite Brigade förderte täglich 400 t Kohle.

▲5▲ Die Lösung führt auf die Gleichung
$(30 - 18) : \left(6 - \frac{18}{6}\right) = x$ und $x = 4$, d. h.
der Tourist legte den restlichen Weg von 12 km mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h zurück.

▲6▲ Die Lösung führt auf die Gleichung
$7 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 1000 \cdot 100}{100000} = x$ bzw. $x = 35$, d. h.
die Marschstrecke auf der Karte 1 : 100000 beträgt 35 cm.

a) Die Klasse 5a spendete 22,50 M mehr als Klasse 5c.

b) Die drei Klassen spendeten insgesamt 180,00 M.

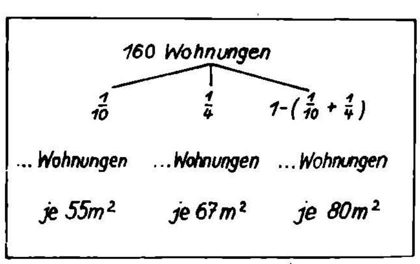
c) Im Durchschnitt spendete jede Klasse 60,00 M.

d) Die Spenden der Klassen 5a : 5b : 5c standen im Verhältnis 3 : 12 : 1

▲10▲ Die Lösung führt auf die Gleichung:

$$\frac{160}{10} \cdot 55\ \text{m}^2 + \frac{160}{4} \cdot 67\ \text{m}^2 + \frac{160}{1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right)} \cdot 80\ \text{m}^2 = x$$

bzw. $(880 + 2680 + 8320)\ \text{m}^2 = 11880\ \text{m}^2$ Wohnraum insgesamt.



▲11▲ Lösung:

Aufgabe: Auf einem Feld von 135 ha wird ein Ernteertrag von 25 dt/ha erwartet; auf einem 21 ha größeren Feld ein solcher von 22 dt/ha.

a) Welches der beiden Felder wird den größeren Gesamtertrag erreichen bzw. wieviel dt mehr sind das?

b) Wieviel dt/ha wird der Durchschnittsertrag beider Felder zusammen sein?

Lösung:

a) $25\ \text{dt} \cdot 135 = 3375\ \text{dt}$
$22\ \text{dt} \cdot (135 + 21) = 3432\ \text{dt}$,
d. h. $A_1 < A_2$ das sind $(3432 - 3375)\text{dt} = 57\ \text{dt}$ Mehrertrag.

b) $(3375 + 3432)\text{dt} : (135 + 135 + 21)\text{ha} =$
$= 23{,}39\ldots \approx 23{,}4\ \text{dt/ha}$.

Rechne *nicht* so: $\left(\frac{25 + 22}{2}\right)\text{dt} = 23{,}5\ \text{dt}$ Durchschnitt. Warum nicht? Begründe!

Lösungen zu alpha-heiter

Füllrätsel

1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	E	I	L	M	E	N	G	E
E	U	N	I	O	B	E	A	L
I	L	H	T	D	E	N	U	F
L	E	A	E	E	N	N	S	E
E	R	L	R	L	E	E	S	C
R		T		L		R		K

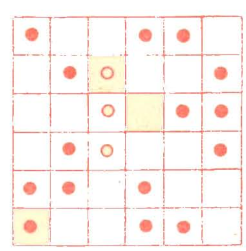
Welchen Beruf übt Frau Kimmer aus?

Frau Kimmer ist *Mathematiklehrer.*

Permutationsrätsel

Ebene – Nenner – drei – plus – Umfang – neun – Kathete – Teiler: ENDPUNKT

Magisches Quadrat



Kombination mit alpha

Es gibt 28 Möglichkeiten.

	1	1	1	1	1	6
1	2	3	4	5	6	5
1	3	•	•	5	11	4
1	4	•	•	5	16	3
1	5	5	5	10	26	2
1	6	11	16	26	52	1
a	b	c	d	e	f	

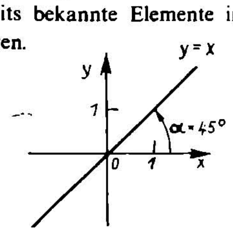
Das vorliegende Büchlein wendet sich an einen breiten Leserkreis, kann Schülern von der 8. oder 9. Klasse an empfohlen werden und will der mathematischen Allgemeinbildung dienen.

An Hand des recht anschaulichen Stoffes werden das allgemeine logische Schließen, die Verallgemeinerung beziehungsweise Spezialisierung, das Schaffen von Querverbindungen sowie die Systematik bei der Lösung mathematischer Probleme geübt und fast unmerklich gefestigt. Allerdings handelt es sich nicht um eine Sammlung von Knobelaufgaben oder Kuriositäten, sondern um ein systematisches kleines Lehr- und Übungsbuch in Form einer Vorstufe programmierten Lehrmaterials. Es wird deshalb vom Leser der Wille zum Mitdenken erwartet, und der volle Erfolg kann sich nur bei intensivem Durcharbeiten – dann aber auch bei nicht speziell mathematisch talentierten Schülern – einstellen.

Leseprobe

Lineare Funktionen

Wir gehen nun zu einem systematischen Studium des Verhaltens verschiedener Funktionen und der Konstruktion ihrer graphischen Darstellungen über. Dabei werden wir nicht nur charakteristische Züge des Verhaltens dieser Funktionen und die Besonderheiten ihrer Graphen, sondern auch eine Menge weiterer Beispiele kennenlernen. Bei der Konstruktion komplizierterer graphischer Darstellungen werden wir stets versuchen, bereits bekannte Elemente in ihnen aufzuspüren.

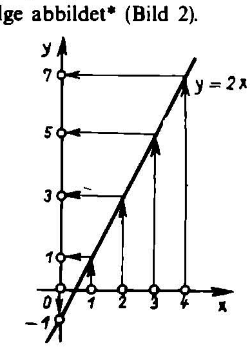


Die einfachste Funktion ist sicher die Funktion $y=x$. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade, nämlich die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems (Bild 1).

Sicher wißt ihr auch bereits, daß die graphische Darstellung jeder beliebigen linearen Funktion $y=kx+b$ immer eine gewisse Gerade ist. Umgekehrt ist auch jede Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, das Bild einer gewissen linearen Funktion.

Der Verlauf einer Geraden ist bereits vollkommen bestimmt, wenn zwei ihrer Punkte gegeben sind. Dementsprechend ist jede lineare Funktion bereits vollkommen festgelegt, wenn zwei ihrer Werte zu zwei gegebenen Argumentwerten bekannt sind.

Die typische Eigenschaft der linearen Funktion besteht darin, daß y sich gleichmäßig ändert, wenn x gleichmäßig, das heißt jeweils um die gleiche Zahl zunimmt. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $y=3x-2$. Es soll x die Werte 1, 3, 5, 7, ... annehmen, von denen jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende ist. Die entsprechenden Funktionswerte sind 1, 7, 13, 19, ... Sie sehen, daß jeder Wert um ein und dieselbe Zahl, nämlich 6, größer als der vorangegangene ist. Eine Zahlenfolge, die aus einer beliebigen Zahl durch wiederholte Addition einer beliebigen, aber festen Zahl gebildet wird, ist eine sogenannte arithmetische Zahlenfolge. Demnach besteht die oben beschriebene charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion darin, daß jede lineare Funktion eine arithmetische Zahlenfolge eindeutig auf eine andere arithmetische Zahlenfolge abbildet* (Bild 2).



In unserem Beispiel bildet die Funktion $y=3x-2$ die arithmetische Folge 1, 3, 5, 7, 9, ... auf die arithmetische Zahlenfolge 1, 7, 13, 19, 25, ... *ab*, während Bild 2 zeigt, daß die Funktion $y=2x-1$ die arithmetische Zahlenfolge 0, 1, 2, 3, ... auf die arithmetische Folge -1, 1, 3, 5, ... abbildet.

Die beschriebene charakteristische Eigenschaft läßt sich aber auch noch anders beschreiben.

Bei jeder linearen Funktion sind nämlich die Differenzen zweier beliebiger Argumentwerte und der dazugehörigen Funktionswerte zueinander proportional:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k.$$

Der Proportionalitätsfaktor k ist dabei gleich dem Anstieg der Geraden, die das Bild der gegebenen linearen Funktion ist.

Dem Leser der Zeitschrift *alpha* bietet das Buch eine Fülle von Anregungen, Beispielen und Aufgaben, die zum Teil recht originell sind und überraschende Anwendungen der im ganzen völlig elementaren Überlegungen aufzeigen.

▲1▲ Überlegen Sie sich eine lineare Funktion, die die arithmetische Folge -3, -1, 1, 3, ... auf die arithmetische Folge -2, -12, -22, -32, ... abbildet. Welche lineare Funktion bildet die zweite auf die erste Folge ab?

▲2▲ Es mögen zwei arithmetische Folgen a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ... und c, $c+t$, $c+2t$, $c+3t$, ... gegeben sein. Kann man dann immer eine lineare Funktion $y=kx+b$ finden, welche die eine Folge auf die andere abbildet?

▲3▲ Man konstruiere die graphische Darstellung der Funktion $y=\sqrt{3}x$.

a) Es ist zu beweisen, daß dieselbe außer durch (0, 0) durch keinen weiteren Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen kann. Wenn Sie als Maßeinheit die Kantenlänge eines Kästchens wählen, dann sind alle Eckpunkte von Kästchen solche „ganzzahligen" Punkte. Wählen Sie den Koordinatenanfang in der linken unteren Ecke der Seite und zeichnen Sie die Gerade $y=\sqrt{3}x$ so genau wie möglich ein! (Unter welchem Winkel zur x-Achse muß sie gezeichnet werden?)

Einige der ganzzahligen Gitterpunkte befinden sich recht nahe bei dieser Geraden. Geben Sie unter Ausnutzung dieser Tatsache einen gemeinen Bruch an, der ein Näherungswert für $\sqrt{3}$ ist. Vergleichen Sie den gefundenen Wert mit dem Tabellenwert $\sqrt{3}\approx 1{,}7321$.

b) Etwas schwieriger ist folgende Aufgabe: Man zeige, daß es einen ganzzahligen Gitterpunkt gibt, der von der Geraden $y=\sqrt{3}x$ einen kleineren Abstand als $\frac{1}{1000}$ hat.

Es wäre zu wünschen, daß dieses kleine Buch ebenso wie in der Sowjetunion auch bei uns recht viele aufgeschlossene Leser findet.

* Unter Abbildung versteht man in der Mathematik eine Zuordnung von Elementen zweier verschiedener Mengen.

Leseprobe

Die Teilbarkeit von Summen und Produkten

Bei der Division mit Rest kommt es in vielen Fällen gerade darauf an, den Rest der Division einer Zahl a durch eine Zahl b zu finden, während die Größe des unvollständigen Quotienten dabei keine Rolle spielt.

Wir wollen zum Beispiel feststellen, auf welchen Wochentag der 1. Januar des Jahres 2000 fällt (natürlich unter der Voraussetzung, daß der gegenwärtig gültige Kalender auch dann noch gültig ist). Ein Blick auf den Kalender zeigt, daß der 1. Januar 1973 ein Montag war. Die 27 Jahre, die diese beiden Daten voneinander trennen, bestehen aus $27 \cdot 365+6$ Tagen (der zweite Summand ist die Anzahl der Tage, welche durch die Anzahl der in diesem Zeitraum liegenden Schaltjahre dazu kommen); also beträgt der gesamte Zeitraum 9861 Tage. Diese Tage bilden 1408 vollständige Wochen und fünf Tage. Nach Ablauf dieser 1408 Wochen kommt also wieder ein Montag, so daß nach den noch verbleibenden Tagen ein Sonnabend kommen muß, welcher der 1. Januar 2000 ist. Offenbar ist es für die Lösung dieser von uns selbst gestellten Aufgabe völlig unerheblich, wieviel vollständige Wochen in diesen 27 Jahren vergehen. Entscheidend ist lediglich, wieviel Tage über die Anzahl der vollständigen Wochen hinaus vorhanden sind.

Mit Aufgaben dieser Art werden vor allem Historiker – besonders die Orientalisten – konfrontiert, wenn sie Daten verschiedener Kalender miteinander vergleichen sollen. Es hat den Anschein, als würde man den Rest bei Division einer Zahl durch eine andere am leichtesten erhalten, indem man die Division tatsächlich ausführt. Bei der praktischen Durchführung einer solchen Division stellt man jedoch recht oft fest, wie umständlich ein solches Verfahren vor allem dann ist, wenn der betreffende Dividend nicht in unserem vertrauten Dezimalsystem, sondern als komplizierter Ausdruck, etwa in der Form $2^{1000}+3^{1000}$ gegeben ist. Außerdem beansprucht gerade die Berechnung des unvollständigen Quotienten den Löwenanteil der Arbeit, obwohl uns dieser an und für sich gar nicht interessiert. Deshalb ist es notwendig, Verfahren zu entwickeln, mit deren Hilfe man den Rest unmittelbar erhält, ohne erst den unvollständigen Quotienten berechnen zu müssen.

Wir führen ein solches Verfahren an Hand des oben dargestellten Beispiels vor. Dabei überlegen wir folgendermaßen: Jedes Jahr, das kein Schaltjahr ist, besteht aus 365 Tagen, hat also 52 ganze Wochen und einen Tag. Ein Schaltjahr dagegen hat ebenso viele ganze Wochen und zwei Tage. Das heißt, der Zeitraum vom 1. Januar 1973 bis zum 1. Januar 2000 enthält eine gewisse Anzahl (es ist völlig unwichtig zu wissen wieviel) ganzer Wochen plus eine Anzahl von Tagen, die gleich der Zahl der Jahre dieses Zeitraumes ist, wobei für die Schaltjahre jeweils ein zusätzlicher Tag hinzukommt. Diese Anzahl der Tage ist $27+6=33$. Ziehen wir davon wieder die Anzahl der Tage für ganze Wochen ab, so erhalten wir noch fünf übrigbleibende Tage, die wir zu unserem Montag dazuzählen. Es zeigt sich, daß ein solches „Ersetzen eines Jahres durch einen Tag" das Modell eines äußerst allgemeinen Verfahrens ist, mit welchem wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Definition: Wir nennen die Zahlen a und b restgleich hinsichtlich der Division durch m, wenn die Reste bei Division von a und b durch m einander gleich sind.

Wir wollen einige Eigenschaften restgleicher Zahlen ermitteln.

Satz 1: Die Zahlen a und b sind dann und nur dann restgleich hinsichtlich der Division durch m, wenn ihre Differenz $a-b$ durch m teilbar ist.

Satz 2: Sind die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ den Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_n$ hinsichtlich der Division durch m restgleich, so sind es auch die Summen $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ und $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ sowie die Produkte $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Folgerung: Sind die Zahlen a und b hinsichtlich der Division durch m restgleich, so sind es auch die Zahlen a^n und b^n für jedes natürliche n.

Der Satz 2 und seine Folgerung liefern schon viele Möglichkeiten, Reste bei der Division zu erhalten. Wir führen einige Beispiele an.

Beispiel 1: Man bestimme den Rest bei Division der Zahl
$A=13^{16}-2^{25} \cdot 5^{15}$ durch 3.

Offenbar sind hinsichtlich der Division durch 3 die 13 mit der 1, die 2 mit der -1 und die 5 ebenfalls mit der -1 restgleich. Aufgrund des bisher Bewiesenen heißt das: Die Zahl A ist hinsichtlich der Division durch die Zahl 3 restgleich mit der Zahl $1^{16}-(-1)^{25} \cdot (-1)^{15} = 1-1=0$. Das heißt, der gesuchte Rest ist Null und A demzufolge durch 3 teilbar.

Beispiel 2: Man bestimme den Rest bei Division derselben Zahl A durch 37. Dazu stellen wir die Zahl A in folgender Form dar:

$$A=(13^2)^8-(2^5)^5 \cdot (5^3)^5.$$

Bei Division durch 37 ist $13^2=169$ restgleich mit -16, ferner $2^5=32$ restgleich mit -5 und $5^3=125$ restgleich mit 14. Somit ist die gesamte Zahl A restgleich mit

$$(-16)^8-(-5)^5 \cdot (+14)^5$$

oder, was das gleiche ist, mit

$$(16^2)^4+70^5.$$

Da $16^2=256$ restgleich mit -3 und 70 restgleich mit -4 ist, heißt das, A ist restgleich mit

$$(-3)^4+(-4)^5$$

oder, was das gleiche ist, mit

$$81-(2^5)^2, \text{ also mit}$$

$$81-(-5)^2=81-25=56.$$

Schließlich ist 56 hinsichtlich der Division durch 37 restgleich mit 19; diese Zahl ist nicht negativ und kleiner als 37, also der gesuchte Rest.

Aufgabe: Man bestimme den Rest bei Division von
a) $A=(116+17^{17})^{21}$ durch 8;
b) $A=14^{256}$ durch 17.

Aufgabe: Man beweise, daß für jedes n die folgenden Teilbarkeitsbeziehungen gelten:
a) $6|(n^3+11n)$;
b) $9|(4^n+15n-1)$;
c) $3^{n+2}|(10^{3^n}-1)$;
d) $(a^2-a+1)|(a^{2n+1}+(a-1)^{n+2})$ für beliebiges a.

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Aus der kleinen Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik (MSB) empfehlen wir in diesem Zusammenhang

I. N. N. Worobjow
- **Die Fibonaccischen Zahlen** 4,80 M

V. A. O. Gelfond
- **Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen** 3,80 M

E. B. Dynkin/W. A. Uspenki
- **Aufgaben aus der Zahlentheorie** 6,10 M
(Mathematische Unterhaltungen, Teil II)

L. A. Kaloujnine
- **Primzahlzerlegung** 2,40 M

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten

Berlin 1973

Hauptstadt der DDR

Wir sind dabei

3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 50, 54/56, 58, 63, 64); R. Dannenberg, Karl-Marx-Stadt (S. 64); Pionierhaus *Juri Gagarin* (S. 64 2 mal); Eigenfotos von Ch. Meinel, Berlin (S. 51). M. Geisler, W. Hossack, Gera (S. 65), Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 59, S. 63); *Vignetten:* W. Fricke (III./IV. U-Seite); M. Naumann (S. 50, S. 65).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 26. März 1973

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren der X. Weltfestspiele von Jugendlichen für Jugendliche gestaltet.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Gitterpunkte

Ich möchte mich in meinem Beitrag mit einigen Sätzen über Gitterpunkte beschäftigen. Vorausgesetzt werden die Kenntnisse des Schulstoffs, sowie die Benutzung des Zeichens $[a]$ (ganzer Anteil von α). Weiterhin werde folgendes vereinbart: Z sei die Menge aller ganzen Zahlen, R die Menge aller reellen Zahlen.

Im Text sind Übungsaufgaben angegeben, deren Lösung dem Leser angeraten sei, da sich das Folgende teilweise darauf aufbaut.

Zunächst wollen wir die Definition eines Gitters und der Gitterpunkte im zweidimensionalen Raum E^2 (denn nur mit solchen werden wir uns beschäftigen) angeben. Dabei verstehen wir unter einer ganzzahligen Linearkombination zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einen Vektor $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}=n\mathfrak{a}+m\mathfrak{b}$, wobei n und m ganze Zahlen sind. Zwei Vektoren heißen im E^2 linear unabhängig, wenn sie nicht parallel sind.

Definition: Eine Menge $\mathfrak{G}$ von Vektoren des zweidimensionalen Raumes nennen wir ein (Vektor-) Gitter, wenn $\mathfrak{G}$ folgende Eigenschaft hat: Es existieren zwei linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{G}$ aus allen ganzzahligen Linearkombinationen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ besteht. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nennen wir eine Basis von $\mathfrak{G}$.

Eine Menge Γ von Punkten des zweidimensionalen Raumes, die man erhält, wenn man an einen Punkt 0 dieses Raumes alle Vektoren eines Vektorgitters abträgt, heißt (Punkt-) Gitter, ihre Elemente Gitterpunkte $\Gamma=\{\mathfrak{P}\in\mathfrak{E}^2 \mid \overline{0\mathfrak{P}}\in\mathfrak{G}\}=\Gamma\{0,\mathfrak{G}\}$. Aus der Definition folgt sofort: $0\in\Gamma$, wegen $0\in\mathfrak{G}$.

1. Läßt sich eine Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eines Gitters mit $|\mathfrak{a}|=|\mathfrak{b}|=1$ und $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=0$ finden, so sind die Gitterpunkte von $\Gamma\{0,\mathfrak{G}\}$ gerade die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung 0 und den Maßvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Mit diesem Fall werden wir uns im 1. Abschnitt beschäftigen.

1.1. Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(a,b)$ und dem Radius r im kartesischen Koordinatensystem. Weiter sei $f(x)$ die Funktion $f(x)=\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ die für alle reellen x mit $a-r\leqq x\leqq a+r$ definiert ist.

$T(r,a,b)$ bezeichne die Anzahl der Gitterpunkte, die innerhalb oder auf der Peripherie dieses Kreises liegen (für diesen Sachverhalt werden wir in Zukunft nur noch „im" benutzen).

Dann gilt:

(1) $T(r,a,b)=\sum([b+f(x)]+[f(x)-b]+1)$
$\quad a-r\leqq x\leqq a+r, x\in Z$

Beweis: Der Kreis hat die Mittelpunktsgleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Daraus folgt:

$$(y-b)^2=f(x)^2,\quad |y-b|=f(x)$$

Letztere Gleichung gilt wegen $f(x)\geqq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Damit erhalten wir:

$$y=b+f(x) \text{ für } y\geqslant b,$$
$$y=b-f(x) \text{ für } y<b.$$

Bestimmt werde nun die Anzahl der Gitterpunkte, die sowohl auf der Geraden $x=t$ mit $t\in Z$, $a-r\leqq t\leqq a+r$ als auch im Kreis liegen. Es sei $P(t,y)$ ein variabler Punkt auf dieser Geraden. Das größte ganze y, für das P noch im Kreis liegt, ist $[b+f(x)]$, das kleinste ganze y, für das P noch im Kreis liegt, ist $-[-(b-f(x)]$. Die erste Behauptung ist nach der Definition des Zeichens $[a]$ sofort klar. Die zweite werden wir durch eine Fallunterscheidung beweisen.

a) $b-f(x)$ ist ganz. Dann ist das kleinste ganze y, für das P noch im Kreis liegt, gleich $b-f(x)$. Nun ist:
$b-f(x)=[b-f(x)]=-[-(b-f(x))]$.

b) $b-f(x)$ ist nicht ganz. Dann ist das kleinste ganze y, für das P noch im Kreis liegt, gleich $[b-f(x)]+1$. Sei nun zunächst $b-f(x)\geqq 0$. Dann läßt sich $b-f(x)$ darstellen: $b-f(x)=B+\varepsilon$ mit ganzem $B\geqq 0$ und $0<\varepsilon<1$. Es ist:
$[b-f(x)]+1=[B+\varepsilon]+1=B+[\varepsilon]+1$
$B+1=B-[-\varepsilon]=-(-B)-[-\varepsilon]$
$=-[-(B+\varepsilon)]=-[-(b-f(x))]$. Analog läßt sich die Behauptung für $b-f(x)\leqq 0$ beweisen.

Die Anzahl der Gitterpunkte, die gleichzeitig auf der Geraden und im Kreis liegen, ist dann gleich:
$[b+f(x)]-(-[-(b-f(x))])+1$
$=[b+f(x)]+(f(x)-b]+1$

(Es muß eine 1 addiert werden, da bei der bloßen Differenzenbildung ein Gitterpunkt nicht erfaßt wird.) Durch Summation ergibt sich (1).

1.2. Als Spezialfall nehmen wir nun an: $a,b\in Z$. Dann ist: $[b+f(x)]=b+[f(x)]$, $[f(x)-b]=[f(x)]-b$.

Damit vereinfacht sich (1) zu:

(2) $T(r,a,b)=\sum(2[f(x)]+1)$
$\quad a-r\leqq x\leqq a+r,\ x\in Z.$

Es sei $x'=(x-a)$. Dann ist
$\sqrt{r^2-(x-a)^2}=\sqrt{r^2-x'^2}$.

Wir erhalten aus (2):

$$T(r,a,b)=\sum(2[\sqrt{r^2-x'^2}]+1)$$
$$-r\leqq x'\leqq r,\quad x'\in Z.$$

(Wegen $a\in Z$ ist mit $x\in Z$ auch $x'\in Z$.)

Durch einfache Umformung folgt:

$$T(r,a,b)=2[r]+1$$
$$+2\sum_{x'=1}^{[r]}(2[\sqrt{r^2-x'^2}]+1)=$$
$$=4\sum_{x'=0}^{[r]}[\sqrt{r^2-x'^2}]+1.$$

Wie man sieht, ist $T(r,a,b)$ für $a,b\in Z$ von a, b unabhängig.

Zu diesem Ergebnis kämen wir auch durch geometrische Betrachtungen, da ein Punktgitter Γ durch eine Translation um einen Vektor $\mathfrak{c}\in\mathfrak{G}$ in sich selbst übergeht (Beweis?).

Wir geben (2) nun also die Form:

(3) $$T(r)=4\sum_{k=0}^{[r]}[\sqrt{r^2-k^2}]+1$$

Aufgabe 1: Zeige, daß auch

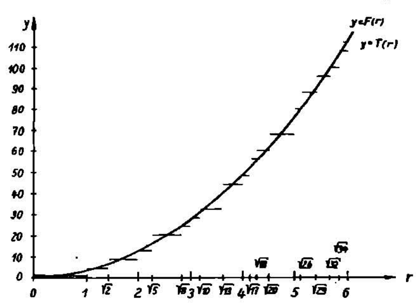
(4) $$T(r)=1+4[r]-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2+$$
$$+8\sum_{k=1}^{\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]}[\sqrt{r^2-k^2}]$$

gilt. (*Anleitung:* Berechne zunächst die Anzahl der Gitterpunkte in einem dem Kreis einbeschriebenen Quadrat und dann die Anzahl in den restlichen Bereichen des Kreises!)

1.3. Wir werden jetzt für alle reellen $r\leqq 6$ die (stückweise konstante) Funktion $T(r)$ berechnen und zusammen mit den zugehörigen Flächeninhalten $F(r)$ in eine Tabelle eintragen:

r	$T(r)$	$F(r)$	$\frac{T(r)}{F(r)}$
0	1	0	—
1	5	3,14	1,59
$\sqrt{2}$	9	6,6	1,37
2	13	12,57	1,03
$\sqrt{5}$	21	15,9	1,32
$\sqrt{8}$	25	24,63	1,02
3	29	28,27	1,01
$\sqrt{10}$	33	31,37	1,05
$\sqrt{13}$	45	41,17	1,08
4	49	50,27	0,97
$\sqrt{17}$	57	53,59	1,11
$\sqrt{18}$	61	56,51	1,08
$\sqrt{20}$	69	62,8	1,10
5	81	78,5	1,03
$\sqrt{26}$	89	81,8	1,09
$\sqrt{29}$	97	91,0	1,07
$\sqrt{32}$	101	100,5	1,005
$\sqrt{34}$	109	108,2	1,006
6	113	114,5	0,98

Grafisch dargestellt ergibt sich Abbildung 1.



Wie wir sehen, nähern sich beide Kurven immer mehr. Diesen Sachverhalt erfassen wir mathematisch durch:

(5) $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{T(r)}{F(r)}=1.$

Beweis: Um jeden Gitterpunkt im Kreis mit dem Mittelpunkt $M(a,b), a, b \in Z$ dem Radius r und der Fläche $F(r)$ werde ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 so konstruiert, daß jede Quadratseite parallel zu einer Koordinatenachse verläuft und der jeweilige Gitterpunkt mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats zusammenfällt. Jedes Quadrat hat dann den Flächeninhalt 1. Die Anzahl der Gitterpunkte des Kreises ist dann gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate. Dann ist:

(6) $F\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\leqq T(r)\leqq F\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$

Denn alle Quadrate liegen innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(a,b)$ und dem Radius $r+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, da die größtmögliche Entfernung eines Punktes eines Quadrats zu dem zugehörigen Gitterpunkt $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

Analog zeigt man die andere Seite der Ungleichung. Mit der bekannten Formel für die Kreisfläche folgt:

$$\pi\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2\leqq T(r)\leqq\pi\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

oder nach Division durch $F(r)\neq 0$:

(7) $$\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{r^2}\leqq\frac{T(r)}{F(r)}\leqq\frac{\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{r^2}$$

Wegen $\frac{\left(r\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{r^2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2}$

folgt aus (7):

$$1-\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2}\leqq\frac{T(r)}{F(r)}\leqq 1+\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2}.$$

Da $\lim\limits_{r\to\infty}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2}\right)=1$ ist, folgt:

$\lim\limits_{r\to\infty}\frac{T(r)}{F(r)}=1$, d. h. (5).

1.4. Analoge Betrachtungen wollen wir jetzt bei einer Ellipse durchführen. Wir werden uns dabei auf den Fall beschränken, daß die Ellipse den Mittelpunkt $M(0,0)$ hat. (Wie beim Kreis werden auch hier gleich die Fälle eines Mittelpunktes $M(c,d)$ mit $c, d \in Z$ erfaßt.) $T(a,b)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte, die in einer Ellipse E mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen $a \geqq b$ liegen. (Das „in" hat die gleiche Bedeutung wie beim Kreis.) Es sei $f(x)$ die Funktion $f(x)=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(d^2-x^2)}$ die für alle reellen x mit $a\geqq x\geqq -a$ definiert ist. Dann gilt:

(8) $$T(a,b)=\sum_{-a\leqq x\leqq a,\ x\in Z}(2[f(x)]+1)$$

Aufgabe 2: Beweise (8)! *Anleitung:* Verwende die Mittelpunktsgleichung der Ellipse!

1.5. Analog zum Kreis werde nun um jeden Gitterpunkt in der Ellipse ein Quadrat mit der Fläche 1 konstruiert. $F(a,b)$ sei die Fläche der Ellipse $E(a,b)$ und λ die reelle Zahl mit $\lambda=\frac{6}{b}$. Dann gilt für alle reellen a, b mit $a\geqq b\geqq 8$:

(9) $$\pi\cdot a\cdot b\cdot(1-\lambda)^2\leqq T(a,b)\leqq\pi\cdot a\cdot b\cdot(1+\lambda)^2.$$

Beweis: Die rechte Ungleichung von (9) ist bewiesen, wenn gezeigt wird, daß alle Quadrate in der Ellipse $E(a(1+\lambda), b(1+\lambda))$ mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen $a(1+\lambda)\geqq b(1+\lambda)$ liegen. Für Quadrate, die einschließlich ihres Randes innerhalb $E(a,b)$ liegen, ist das klar. Sei Q ein Quadrat, das mit der Ellipsenperipherie von $E(a,b)$ einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gemeinsam hat. Die Punkte, die außer P_0 noch in diesem Quadrat liegen, mögen die Koordinaten $(x_0+\alpha), (y_0+\beta)$ haben. Man sieht sofort: $|\alpha|\leqq 1, |\beta|\leqq 1$, dann ist:

$$\frac{(x_0+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta)^2}{b^2}$$
$$=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+2\left(\frac{x_0\alpha}{a^2}+\frac{y_0\beta}{b^2}\right)$$
$$\leqq 1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\left(\frac{|x_0||\alpha|}{a^2}+\frac{|y_0||\beta|}{b^2}\right)$$
$$\leqq 1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\leqq(1+\lambda)^2$$

Wir erhalten also:

$$\frac{(x_0+\alpha)^2}{(a(1+\lambda))^2}+\frac{(y_0+\beta)^2}{(b(1+\lambda))^2}\leqq 1,$$

d. h. $Q\subseteq E(a(1+\lambda), b(1+\lambda))$. Damit ist die rechte Seite von (9) bewiesen.

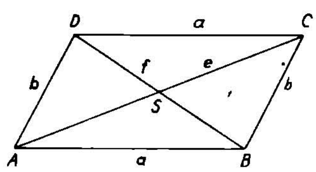
M. Günther

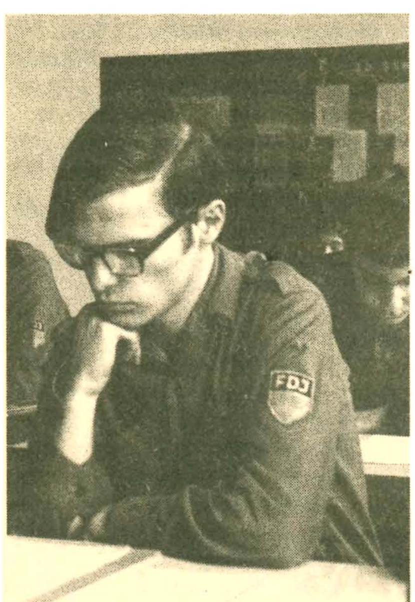
Eine Aufgabe von stud. math. W. Burmeister

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
erfolgreichster Teilnehmer der DDR bei Internationalen Mathematikolympiaden

▲1075▲ Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b (dabei sei $a>b$) und den Diagonalen e und f. Es ist zu zeigen, daß dann stets die Ungleichung

$(a+b)(a-b)<ef$ gilt.





Wolfgang Burmeister — 1971 zum letzten Mal Teilnehmer der DDR-Olympiade

Eine Aufgabe von P. Kröger

49. Oberschule Leipzig, Klasse 8; jüngster Teilnehmer und 1. Preisträger der XIV. Internationalen Mathematikolympiade (1972)

▲1076▲ Bei einer Veranstaltung mögen sich $2n$ Personen treffen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl sei. Von diesen Personen seien einige miteinander bekannt, während andere nicht miteinander bekannt seien. Dabei sei stets, wenn A mit B bekannt ist, auch B mit A bekannt. Ferner möge es keine drei Personen geben, von denen jede mit jeder bekannt ist. Endlich mögen nicht alle $2n$ Personen dieselbe Anzahl von Bekannten haben.

Man beweise, daß es dann mindestens eine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat.

Hinweis zur Lösung: Der Beweis erfolgt am besten indirekt, d. h., man geht davon aus, daß alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt sind und daß es *keine* Person gibt, die weniger als n Bekannte hat. Daraus kann dann ein Widerspruch zu den Voraussetzungen der Aufgabe hergeleitet werden, womit die Behauptung bewiesen ist.

Pawel Kröger übergibt dem Chefredakteur seine Aufgabe

Über eine Aufgabe der XII. Internationalen Mathematik-Olympiade

Ausgehend von einer Aufgabe der XII. Internationalen Mathematik-Olympiade wollen wir andeuten, wie man sich mit einer Aufgabe, über die Lösung hinausgehend, beschäftigen kann. Interessant sind einerseits verschiedene Lösungswege, die teilweise wesentlich verschiedene Lösungshilfsmittel benutzen, und andererseits andere Probleme (z. B. Verallgemeinerungen), die aus der gestellten Aufgabe gewonnen werden können.

Zunächst wollen wir die erwähnte Aufgabe formulieren:

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Die Menge

$$\mathfrak{M}=\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$$

läßt sich so in zwei elementefremde nichtleere Teilmengen zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.

Wir geben zuerst folgende sehr elegante Lösung:

Angenommen, die Zahl n hat die beschriebene Eigenschaft. Dann teilt jeder Primteiler p eine der Zahlen

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$$

auch noch eine weitere dieser Zahlen. Dabei kann p nur 2, 3 oder 5 sein, und ferner können die Zahlen

$$n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$$

nur 2 und 3 als Primteiler haben. Unter diesen Zahlen sind genau 2 Zahlen ungerade und 2 gerade. Die beiden ungeraden Zahlen können nur Potenzen der 3 sein. Dieses ist aber nicht möglich, da beide ungeraden Zahlen eine Differenz von 2 haben und die Differenz

$$3^k-3^m,\ k\geqq 1,\ m\geqq 1$$

nie gleich 2 sein kann. Demnach war unsere Annahme falsch und es gibt keine natürliche Zahl n mit der angegebenen Eigenschaft.

Es tut sich doch nun sofort folgendes interessante Problem auf. In der gelösten Aufgabe bestand $\mathfrak{M}$ aus sechs aufeinanderfolgenden Zahlen. Wie sieht die Lösung aus, wenn $\mathfrak{M}$ aus k ($k\geqq 1$ sei eine natürliche Zahl) aufeinanderfolgenden Zahlen besteht? Für welche k gibt es überhaupt Lösungen? Gibt es für kein k eine Lösung?

Wir wollen uns mit diesen Fragen beschäftigen. Zunächst stellen wir eine notwendige Bedingung für eine Lösung mit k aufeinanderfolgenden Zahlen auf. Dazu führen wir folgende Überlegungen durch. Wir nehmen an, es existieren zwei natürliche Zahlen n und k mit der Eigenschaft, daß sich die Menge

$$\mathfrak{M}=\{n,\ n+1,\ \ldots,\ n+k-2,\ n+k-1\}$$

in zwei elementefremde Mengeh $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zerlegen läßt, so daß

$$P_{\mathfrak{M}_1}=P_{\mathfrak{M}_2} \qquad (1)$$

ist, wobei $P_{\mathfrak{M}_i}(i=1;2)$ das Produkt der Elemente von $\mathfrak{M}_i$ bedeutet.

Es sei m eine natürliche Zahl aus dem Intervall $[0,\ k-1]$. Wir betrachten die Reste von $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ beim Teilen durch $(n+m)$. In einem der Produkte $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ ist $(n+m)$ als Faktor enthalten, da $n+m\in\mathfrak{M}$ ist. Wir können annehmen (ohne Beschränkung der Allgemeinheit), daß

$$n+m\in\mathfrak{M}_2 \qquad (2)$$

ist, d. h.

$$P_{\mathfrak{M}_2}\equiv 0 \bmod (n+m).$$

Wegen (1) muß also auch

$$P_{\mathfrak{M}_1}\equiv 0 \bmod (n+m) \qquad (3)$$

sein, Wegen (2) ist sicher

$$\mathfrak{M}_1\subseteqq\mathfrak{M}_3=\{n,\ n+1,\ \ldots,\ n+m-1,\ n+m+1,\ \ldots,\ n+k-1\},$$ d. h. wenn

$$P_{\mathfrak{M}_3}=n(n+1)\ldots(n+m-1)(n+m+1)\ldots(n+k-1)$$ ist, gilt

$$P_{\mathfrak{M}_3}\equiv 0 \bmod P_{\mathfrak{M}_1},$$

und somit folgt aus (3)

$$P_{\mathfrak{M}_3}\equiv 0 \bmod (n+m), \qquad (4)$$

$$n(n+1)\ldots(n+m-1)(n+m+1)\ldots(n+k-1)\equiv 0 \bmod (n+m).$$

Ist l eine natürliche Zahl aus dem Intervall $[0, k-1]$, so gilt

$$n+l\equiv(l-m) \bmod (n+m).$$

Somit erhalten wir

$$P_{\mathfrak{M}_3}=n\ldots(n+m-1)(n+m+1)\ldots(n+k-1)\equiv(-m)\ldots(-1)\cdot 1\ldots(k-m-1) \bmod (n+m),$$ d. h.

$$P_{\mathfrak{M}_3}\equiv(-1)^m\cdot m!\cdot(k-m-1)! \bmod (n+m).$$

Wegen (4) ist

$$(-1)^{m+1}\, m!\,(k-m-1)!\equiv 0 \bmod (n+m),$$

d. h. $$m!(k-m-1)!\equiv 0 \bmod (n+m). \qquad (5)$$

Die Gleichung (5) muß für alle $m=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$ erfüllt sein. Mit Hilfe dieser Bedingung (5) können wir ein Verfahren angeben, wie man für ein bestimmtes vorgegebenes k feststellen kann, ob eine Lösung vorliegt oder nicht.

Für $m=0$ ist

$$(k-1)!\equiv 0 \bmod n,$$

d. h. n muß ein Teiler von $(k-1)!$ sein. Wir prüfen, ob alle Teiler n von $(k-1)!$ die Kongruenzen

$$m!(k-m-1)!\equiv 0 \bmod (n+m)$$
$$\text{für } m=1, 2, 3, \ldots, k-1$$

erfüllen. Nur wenn ein n alle Kongruenzen erfüllt, kann eine Lösung existieren. In so einem Fall kann man dann an den konkreten Zahlen (n und k sind dann ja bestimmt) untersuchen, ob tatsächlich eine Lösung unseres Problemes vorliegt.

Unser Verfahren gibt uns zwar eine prinzipielle Möglichkeit zur Lösung unseres Problems für konkrete k, aber schon für etwa $k=12$ ist ein erheblicher Rechenaufwand zu realisieren. Zum anderen gibt uns unser Verfahren keine Auskunft, ob überhaupt Lösungen existieren.

Für $k=6$, d. h. für die eingangs gestellte Aufgabe, erhalten wir recht schnell eine Lösung.

Betrachten wir für $m=2$ und $m=3$ die Bedingung (5), so erhalten wir

$$12=2!3!\equiv 0 \bmod (n+2)$$
und $$12=2!3!\equiv 0 \bmod (n+3).$$

Wegen $n\geqq 1$ folgt hieraus als einzige Lösung, wie man sich leicht überlegen kann, $n=1$. Für $n=1$ ist aber unsere Bedingung (5) für $m=4$ nicht erfüllt, denn es ist

$$24=4!\not\equiv 0 \bmod 5.$$

Auch für $k=1,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10$ ist das gestellte Problem nicht lösbar, wie man mit unserem Verfahren zeigen kann. Außerdem wissen wir, daß keine Lösung existiert, wenn k eine Primzahl ist, denn dann wäre genau eine Zahl von $\mathfrak{M}$ und damit nur eine Zahl in einer der Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ durch diese Primzahl teilbar. Also wissen wir auch, daß für $k=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$ keine Lösung existiert. Zusammenfassend ist klar, daß für $k\leqq 12$ unser Problem nicht lösbar ist. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß es nicht nur für $k\leqq 12$ sondern für alle natürlichen Zahlen n und k keine Lösung gibt.

Es sind zwei Ziele für weitere Untersuchungen ins Auge zu fassen:

1. Einen allgemeinen Beweis für unsere Vermutung zu finden.
2. Zu ermitteln, für welche Zahlen n und k unser Problem Lösungen hat. Weiterhin wäre hier interessant, wie man weitere Lösungen finden kann und wie die allgemeine Struktur dieser Lösungen ist.

Beide Ziele sind von uns noch nicht erreicht worden, und wir würden uns freuen, wenn ihr durch neue Ideen zur Lösung beitragen würdet.

H.-D. Gronau/W. Harnau

**Es ist nicht das Wissen,
sondern das Lernen,
nicht das Besitzen,
sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn,
sondern das Hinkommen,
was den größten Genuß gewährt.**

Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehen; so sonderbar ist der nimmersatte Mensch, hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um ruhig darin zu wohnen, sondern um ein anderes anzulegen.

C. F. Gauß

Inversion oder Spiegelung am Kreis

Christoph Meinel stellt sich vor:

Das bin ich gerade zwischen zwei Mathematikknobeleien. Ihr, liebe Leser, kennt das ja selbst: die Beine leicht geschüttelt, die Gehirnzellen gelockert und frisch durchblutet — dann ran an die nächste Aufgabe! Ich bringe gerade das letzte Zwölftel meiner Schulzeit hinter mich. Aber schon jetzt (normalerweise erinnert man sich erst in höherem Alter wohlwollend an die Schulzeit) denke ich ganz gerne an bestimmte Tage im Schulkalender zurück. Zu diesen Tagen gehören vor allen Dingen die jährlichen Mathematikwettstreite auf den verschiedenen Ebenen. Schon manches mathematikolympische Metall konnte ich *errechnen.* So belegte ich seit fünf Jahren in unserem Stadtbezirk Treptow stets einen 1. Platz und im Bezirksmaßstab zweite und dritte Preise. Für dieses Jahr — es ist ja mein letztes Olympiadejahr — habe ich mir noch einmal etwas vorgenommen.

Erfolge sind natürlich ohne Training nicht möglich. So begann ich zuerst in verschiedenen Arbeitsgemeinschaften zu arbeiten. Vor drei Jahren wurde ich dann in die *Mathematische Schülergesellschaft* an der Humboldt-Universität aufgenommen. Hier wurde mir neben den verschiedenen Seminaren und Ferienlehrgängen noch eine persönliche Förderung durch einen Dozenten für Geometrie zuteil. Diese Patenschaft brachte mir Erkenntnisse über das Wesen, die Methoden und Ziele der Mathematik.

Natürlich darf ich in einer solchen Aufzählung meinen ständigen Heimtrainer, die *alpha*, nicht vergessen. Sie weckte mit verschiedenen Beiträgen überhaupt erst meine Begeisterung für die Mathematik.

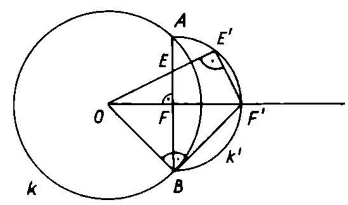
Aufgabe: Konstruiert zu einem beliebigen im Inneren des Kreises k gelegenen Punkt $P \neq 0$ den Spiegelpunkt P'!

Bevor wir diese Aufgabe lösen können — sie wurde übrigens zur DDR-Olympiade von 1968 gestellt — müssen wir die mit *Inversion am Kreis* bezeichnete Abbildung definieren. Es soll folgendes gelten:

(1) P' liege auf dem von 0 ausgehenden Strahl durch P.

(2) Es sei $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. (*)

Bild 1

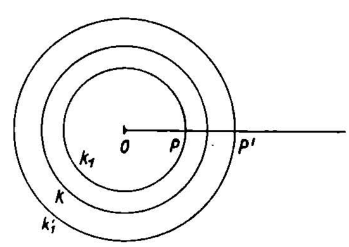


Erinnert ihr euch an eine Formel aus dem Schulunterricht, wenn wir für $\overline{OP'} = c$ und für $\overline{OP} = q$ setzen? Unsere Beziehung (*) hat dann folgende Gestalt:

$$q \cdot c = r^2.$$

Ihr habt sicher den *Satz von Euklid* erkannt. Da dieser aber nur im rechtwinkligen Dreieck gilt, haben wir schon einen wichtigen Hinweis für unsere Lösung. P' ist nämlich wie 0 Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks $OP'T$, wobei T ein Punkt der Kreisperipherie von k sein muß.

Bild 2



Wollen wir unsere Erkenntnisse zusammenfassen:

$\overline{OP'}$ ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $OP'T$ mit der Höhe $\overline{TP}$ und einer Kathete r. Nach dieser Analyse fällt es sicherlich keinem mehr schwer, die Ausgangsaufgabe zu lösen. Wir verbinden O und P und verlängern $\overline{OP}$ über P hinaus. Im Punkt P errichten wir die Senkrechte zu $\overline{OP}$ und erhalten als einen Schnittpunkt mit der Kreisperipherie von k den Punkt T. Nun verbinden wir O und T und errichten zu dieser Strecke $\overline{OT}$ in T die Senkrechte. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Gerade durch O und P ist der gesuchte Bildpunkt P' zu P.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei unserer Konstruktion!

Es gilt z. B.:

$$\overline{P'T}^2 = \overline{OP'}^2 - r^2 = k(P). \qquad (**)$$

Wir haben hiermit eine Beziehung hergeleitet, die als die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises k bezeichnet wird (Schreibweise $k(P)$). Diese Kreispotenz hat einige interessante Eigenschaften. So haben z. B. alle Punkte P, die auf einem Kreis k' um O mit dem Radius r' liegen, die gleiche Potenz $k(P)$ bezüglich des Kreises k, nämlich:

$$k(P) = r'^2 - r^2.$$

Insbesondere gilt:

$-r^2 \leqq k(P) < 0$, wenn P im Inneren des Kreises k liegt;

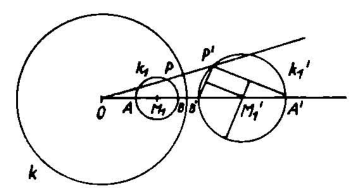
$k(P) = 0$, wenn auf der Peripherie von k liegt;

$k(P) > 0$ für alle Punkte P außerhalb von k.

Da die Inversion mit positiver Potenz mit der Spiegelung an einer Geraden verwandt ist, können wir auch von einer Spiegelung am Kreis sprechen.

Es sei noch erwähnt, daß wir die Beziehung (**) auch noch auf andere Weise hätten herleiten können, nämlich mit Hilfe des Sehnen-Tangentensatzes.

Bild 3



Hier gilt auch:

$$\overline{P'T}^2 = \overline{PS} \cdot \overline{PR} = (\overline{OP'} - r)(\overline{OP'} + r) = OP'^2 - r^2 = k(P).$$

Mit diesen theoretischen Hilfsmitteln können wir nun interessante Fragestellungen beantworten. War doch bei der Spiegelung an einer Geraden noch jede Gerade wieder in eine Gerade und jeder Kreis wieder in einen Kreis überführt worden, so werden wir bei der Inversion eine Überraschung erleben. Doch probiert selbst!

▲ Spiegelt eine Sehne des Kreises k an k (d. h. spiegelt mindestens drei Punkte der Sehne)!

▲ Zeichnet in den Kreis k um den Punkt P einen Kreis k' mit dem Radius r' und spiegelt ihn an k!

Bevor wir unsere Betrachtungen auswerten wollen, müssen wir uns noch überlegen, warum für die zu spiegelnden Punkte P immer $P \neq 0$ gelten muß. Was passiert mit dem Mittelpunkt O, wenn wir ihn an k spiegeln würden? Wo wäre sein Bildpunkt zu finden?

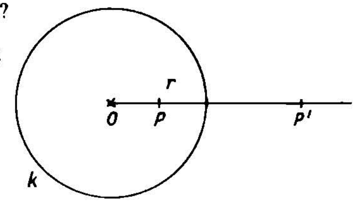
Um das zu erfahren, wenden wir unsere Beziehung

$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ an und setzen für $P = 0$ und erhalten:

$$0 \cdot \overline{OO'} = r^2.$$

Jeder erkennt leicht, daß dieser Ausdruck sinnlos ist und wir schlußfolgern, daß zu O im Endlichen kein Bildpunkt O' existiert. Doch nun zurück zu unseren Aufgaben. Ihr habt die Sehne s am Kreis k gespiegelt und beobachtet, daß die Mittelpunktsehnen in sich selber überführt werden. Sie bleiben also Geraden. Doch was geschieht mit Sehnen, die nicht durch das Inversionszentrum O gehen?

Bild 4



Die Schnittpunkte mit der Peripherie des Kreises k A und B bleiben unverändert, denn $\overline{OA}=r$ und somit

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$$
$$\overline{OA'}=r.$$

Greifen wir uns nun zwei weitere Punkte E und den Schnittpunkt F des Lotes von O auf $\overline{AB}$ heraus. Konstruiert zu E und F die Bildpunkte E' und F' und verbindet sie! Aus

$$\overline{OE}\cdot\overline{OE'}=\overline{OF}\cdot\overline{OF'}=r^2 \quad \text{folgt}$$
$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}}=\frac{\overline{OF'}}{\overline{OE'}}$$

und wir schlußfolgern, daß $\triangle OEF$ und $\triangle OF'E'$ ähnlich sind, denn sie stimmen nicht nur in zwei Seitenverhältnissen überein, sondern haben auch den Winkel $\sphericalangle E'OF'$ gemeinsam. Da $\triangle OEF$ nach unserer Konstruktion rechtwinklig ist, muß auch $\triangle OF'E'$ rechtwinklig sein.

Wenn ihr nun eure Konstruktion noch einmal anschaut, könnt ihr feststellen, daß über der Hypotenuse $\overline{OF'}$ zwei rechtwinklige Dreiecke zu finden sind. Es sind die Dreiecke $\triangle OE'F'$ und $\triangle OF'B$. Nach dem *Satz des Thales* können wir jetzt einen Kreis durch die Punkte O, B, E', F' und A zeichnen. Da der Punkt E beliebig gewählt war, können wir sagen, daß eine Sehne s, die nicht durch den Mittelpunkt O von k geht, bei der Spiegelung am Kreis in einen Kreis über dem Durchmesser $\overline{OF'}$ übergeht.

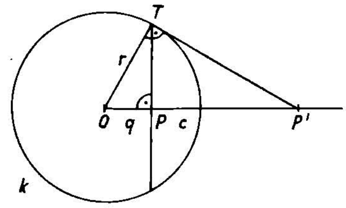
Da die Inversion — wenn wir vom Punkt O absehen wollen — eine ein-eindeutige Abbildung ist, gilt selbstverständlich auch die Umkehrung dieses eben gefundenen Satzes. Jeder durch O gehende Kreis k' wird in die auf dem Durchmesser $\overline{OF'}$ senkrecht stehende Gerade g überführt. Für den Schnittpunkt mit $\overline{OF'}$ gilt:

$$\overline{OF}\cdot\overline{OF'}=r^2 \qquad \text{(siehe Bild 4).}$$

Doch wenden wir uns der zweiten Aufgabe zu. Ihr solltet einen Kreis k_1, der im Inneren des Kreises k liegt, an diesem spiegeln. Von den möglichen Fällen soll hier nur kurz auf zwei eingegangen werden.

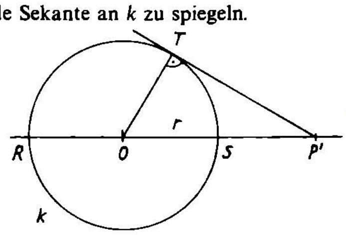
1. Der Kreis k_1 ist zu Kreis k konzentrisch, d. h. sie haben einen gemeinsamen Mittelpunkt O. Wie wir im Abschnitt über die Kreispotenz festgestellt hatten, haben alle Punkte der Kreisperipherie von k_1 die gleiche Potenz bezüglich k. Das heißt aber, daß unser Kreis k_1 durch die Inversion in den zu k und k_1 konzentrischen Kreis k_1' übergeht. Konstruktiv läßt sich der Radius r_1' finden, indem ein Punkt P der Kreisperipherie von k_1 an k gespiegelt wird.

Bild 5



2. Was wird aber aus einem Kreis k_1, der nicht durch das Inversionszentrum O geht? Zur Konstruktion des Spiegelkreises k_1' würde ich euch empfehlen, die Schnittpunkte A und B der Geraden durch O und M_1 mit k_1 und einen Schnittpunkt P der durch O gehende Sekante an k zu spiegeln.

Bild 6



Ihr erhaltet die Punkte A', B' und P', die alle drei auf einem Kreis k_1', dem gesuchten Spiegelkreis liegen. Seinen Mittelpunkt findet ihr in dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken von A', B' und P' (die Mittelsenkrechten aller Sehnen im Kreis gehen durch den Mittelpunkt). Dieser so gefundene Kreis ist der Kreis k_1', der inverse zu k_1. Zum Beweis dieses etwas komplizierteren Problems sei für den fortgeschritteneren Leser darauf hingewiesen, daß die Kreise k_1 und k_1' durch das Ähnlichkeitszentrum O und den Ähnlichkeitskoeffizienten $\frac{r^2}{k(P)}$ verbunden sind.

Beweist nun mit Hilfe dieser Beziehung, daß k_1 und k_1' zueinander invers sind!

Zum Schluß — bevor ich euch noch zwei Aufgaben zum Knobeln anbieten möchte — wollen wir unsere Erkenntnisse über die Inversion zusammenfassen.

Die Inversion ist eine Transformation der Ebene mit unendlich vielen Fixpunkten, die alle auf einem festen Kreis um O liegen. Dabei ist der Mittelpunkt O singulär, d. h. er hat keinen Bildpunkt im Endlichen. Bei einem gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r ist die Abbildung eines beliebigen Punktes $P \neq 0'$ *auf* P' *definiert durch die Beziehung* $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$.

▲1▲ Zeige, daß im allgemeinen die Mittelpunkte M_1 und M_1' zweier zueinander inverser Kreise k_1 und k_1' nicht invers sind!

▲2▲ Konstruiere zu zwei gegebenen Kreisen k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 alle Punkte P der Ebenen, die bezüglich beider Kreise die gleiche Kreispotenz haben! (Solche und ähnliche Aufgaben findet ihr mit Lösungen in dem Heft „Übungen für Junge Mathematiker" von *G. Grosche*, das in der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft erschienen ist.) *Ch. Meinel*

Probleme — Probleme

Auf den folgenden drei Seiten stellen wir 15 Jugendfreunde — Teilnehmer der DDR-Olympiade 1972 — vor. Sie stellen Aufgaben für die *alpha*-Leser, bearbeitet von stud. math. *W. Burmeister*, bisher erfolgreichster Teilnehmer an Internationalen Mathematikolympiaden.

Matthias Bär, Freital

Vier Jungen A, B, C und D sprechen je zwei Sätze, von denen je einer wahr und einer falsch ist. Wir wissen, daß A und C Brüder sind, die an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, B und D sind Zwillinge aus einer anderen Familie, die am gleichen Tag geboren sind. Die folgenden Sätze werden an einem Tag gesprochen, an dem weder A noch C Geburtstag haben:

1. a) A ist mein Bruder.
   b) Der 2. ist mein Bruder, wir haben am selben Tag Geburtstag.
2. a) Ich habe heute Geburtstag.
   b) Ich bin der Bruder des 1.
3. a) Ich bin nicht D und habe heute Geburtstag.
   b) Der 2. ist mein Bruder.
4. a) Heute haben der 3. und ich Geburtstag.
   b) Ich habe heute nicht Geburtstag.

Welcher der vier Jungen hat jeweils als 1., 2., 3. und 4. gesprochen? Man gebe alle Möglichkeiten an.

Brigitte Brand, Zella-Mehlis

In einer Ebene sind eine Gerade g und ein nicht zu g gehörender Punkt P gegeben. Außerhalb der Ebene befindet sich ein Punkt Q. Zu bestimmen ist die Lage eines Punktes R auf der Geraden g, so daß der Umfang des Dreiecks PQR möglichst klein wird.

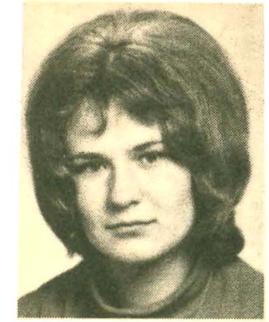
Ulf Brüstel, Altenburg

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seiten die Längen a, b, c und dessen Seitenhalbierenden die Länge s_a, s_b, s_c haben. Es ist zu beweisen, daß dann folgende Beziehung gilt:

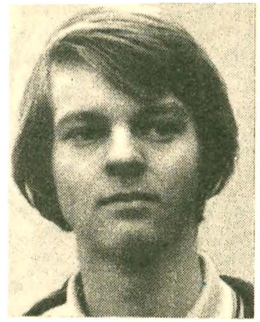
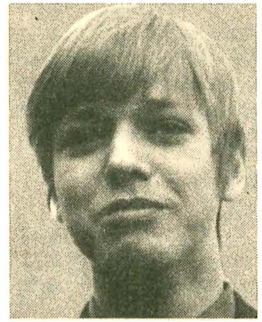
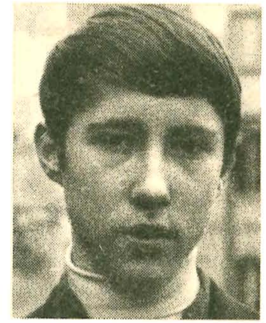
$$s_a^2+s_b^2+s_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

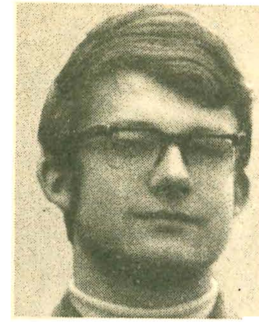
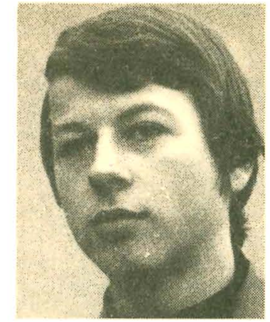
Fortsetzung auf Seite 57

alpha stellt vor:



Name	**Sabine Schlorff**	**Ute Winkler**	**Rainer Zerck**	**Bernd Süssmilch**	**Brigitte Brandt**
Bezirk	Neubrandenburg	Potsdam	Rostock	Schwerin	Suhl
Schule, Klasse	EOS „Clara Zetkin" Neustrelitz, Klasse 11	Spezial-EOS-Kleinmachnow, Klasse 10	EOS „Geschwister Scholl" Wismar, Klasse 10	BBS Maschinelles Rechnen Schwerin, Klasse 12	EOS „Fr. Schiller" Zella-Mehlis Klasse 12
Beruf des Vaters	Lehrer	Dipl.-Ing., Dr.-Ing.	Ing. für Maschinenbau	Kaufm. Angestellter	Graveur
Tätigkeit des Vaters	Direktor einer EOS	Wissenschaftl. Abteilungsleiter	Leiter für Ökonomie	Ökonom	Graveur
Beruf der Mutter	Lehrerin	Buchhalterin	Industriekaufmann	Verkäuferin	Stenotypistin
Tätigkeit der Mutter	Lehrerin	Hausfrau	Sachbearbeiterin	Sachbearbeiterin	Maschinenarbeiterin
Berufswunsch	Mathematiker	Mathematiker	Kernphysiker	Mathematiker	Mathematiker
Besondere Interessen	Musik (Musikschule), Sport (Handball), Russisch (im Schulsprachkabinett)	Kunsterziehung, Briefmarken (Motive), Handarbeiten, Literatur	Technik, Philatelie	Tanzmusik, moderne Konzertmusik	Literatur (historische Romane, med. Literatur), Musik (mod. Musik bis Klassik)
Förderung in Mathematik	Bezirksklub, Ferienlager, Korrespondenzzirkel, Wurzelwettbewerb	Mathezirkel, Bezirksklub, regelm. Lösen der Aufgaben in *alpha* und „Wi u. Fo".	Kreis-, Bezirks- und DDR-Klub Junger Mathematiker	Kreis- und Bezirksklub	im Unterricht und individuelle Förderung durch Lehrer und Korrespondenzzirkel
Erfolge in der Olympiadebewegung	1968 Bezirk 2. Preis 1969 Bezirk 3. Preis 1971 Bezirk 3. Preis	1970 Bezirk 2. Preis 1971 Bezirk 3. Preis 1972 Bezirk 1. Preis 1972 DDR 3. Preis	1970 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 3. Preis 1971 DDR 1. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1070 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1971 DDR 2. Preis 1972 Bezirk 2. Preis	1971 Bezirk 1. Preis 1972 Bezirk 1. Preis
alpha-Leser	*alpha* seit 1968/Wurzel	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Gold/Wurzel	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Gold/Wurzel	*alpha* seit 1967	*alpha* seit 1969/Wurzel
Auszeichnungen	Herder-Medaille in Silber, Abzeichen für gutes Wissen in Bronze, Silber und Gold	Anerkennung für ausgezeichnete Leistungen in Russisch, Abzeichen für gutes Wissen in Bronze	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber, Lessing-Medaille	Lessing-Medaille in Silber, Abzeichen für gutes Wissen	Abzeichen für gutes Wissen in Gold
Wer weckte Interesse?	Delegierung zur Kreisolymp. Erfolge im Kreisklub, Aufgaben mit einfachen Zuordnungen (welcher Schüler treibt welche Sportart usw.)	Delegierung zur Mathematikolymp., Förderung durch Kreisfachberaterin	Delegierung zur Kreisolymp., auf Grund guter schulischer Leistungen (in Kl. 5) und dem Leiter des Kreisklubs	Mein Bruder weckte Interesse, er war erfolgreicher Oly.-Teilnehmer, jetzt Armee-Student EDV (Vorbildwirkung)	Mathematiklehrerin in Kl. 5, Anreiz vom formalen Rechnen zu selbständigem Durchdenken und Lösen von Aufgaben
Motive	Ich möchte Mathematik studieren in der SU. Es macht Spaß, schwierige Aufgaben zu lösen. Ich freue mich über jedes Erfolgserlebnis.	Der Wunsch, das Mathematikstudium aufzunehmen und in den Olymp. gut abzuschneiden; auf diese Weise kann ich das logische Denken weiterschulen.	Mathematik begeistert mich durch ihre vielfältigen Variationen. Nicht zuletzt ist Mathematik eine gute Vorbereitung auf meinen zukünftigen Beruf.	Interesse und Gefallen an der Logik und Eindeutigkeit der Mathematik	Spaß am Knobeln und die Freude über jede gelöste Aufgabe

					
Name	**Gerd Weißenborn**	**Manfred Pockrandt**	**Matthias Bär**	**Hans-Joachim Hauschild**	**Karin Kühn**
Bezirk	Berlin	Cottbus	Dresden	Erfurt	Frankfurt
Schule, Klasse	EOS „Heinrich Hertz", Klasse 10	8. OS Cottbus, Klasse 10	EOS Freital, Klasse 9	EOS Humboldt, Erfurt Klasse 11	EOS „Clara Zetkin", Eisenhüttenstadt, Klasse 10
Beruf des Vaters	Arzt	Maschinenschlosser	Schlosser	Werkzeugmacher, Dipl.-Ing.	Ingenieur
Tätigkeit des Vaters	Arzt	Sicherheitsinspektor	Fräser	Offizier der NVA	Ingenieur
Beruf der Mutter	Ärztin	zahnärztl. Gehilfin	kaufm. Sachbearbeiterin	Näherin	Kindergärtnerin
Tätigkeit der Mutter	Ärztin	Anmeldegehilfin	Industriekaufmann	Hausfrau	z. Z. Rentnerin
Berufswunsch	Mathematiker	Mathematiker	Mathematiker	Mathematiker	Funkoffizier d. Handelsmarine
Besondere Interessen	Musik (Klavierspiel)	Musik	Bau von Modelleisenbahnen, Fahrplangestaltung bei den Massenverkehrsmitteln	Naturwissensch., bes. Physik Philosophie, Schach	Sprachen, Nachrichtentechnik
Förderung in Mathematik	Mathematische Schülergesellschaft-Selbststudium	Kreis- und Bezirksklub Cottbus, Einzelförderung durch Leiter des Kreisklubs	Mathematikklub an der TU Dresden, Korrespondenzzirkel Dresden Spezialförderung durch Fachberater	Mathezirkel an der PH Erfurt, Korrespondenzzirkel Erfurt, fakult. Unterricht an EOS	Bezirksklub, Korrespondenzzirkel, Ferienlehrgänge
Erfolge in der Olympiadebewegung	1971 Bezirk 1. Preis 1972 DDR 2. Preis 1972 XIV. IMO 3. Preis	1969 Bezirk 1. Preis 1970 Bezirk 2. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1972 Bezirk 2. Preis	1970 Bezirk 2. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1969 Bezirk 3. Preis 1971 Bezirk Anerkennung 1972 Bezirk 1. Preis	1970 Bezirk 3. Preis 1972 Bezirk 3. Preis
alpha-Leser	*alpha* seit 1969, Abzeichen in Silber/Wurzelleser	*alpha* seit 1969, Abzeichen in Silber	*alpha*, Abzeichen in Silber	*alpha* seit 1968, Abzeichen in Silber/Wurzel	*alpha* seit 1969
Auszeichnungen	Abzeichen für gutes Wissen in Silber	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze	Urkunde für gutes Wissen in der sozialistischen Schule	Herder-Medaille in Silber, Abzeichen für gutes Wissen in Silber
Wer weckte Interesse?	Zeitschrift *alpha* und Olympiadebewegung	Mathematiklehrer unserer Schule, Leiter des Kreisklubs	Ich war immer Bester der Klasse. Ab Klasse 3 nahm ich an Olympiaden teil, Mathezirkel des Hauses JP.	Mein Mathematiklehrer, Olympiadebewegung, Mathematikzirkel	Ich habe immer gern geknobelt und mich an der Schulolympiade, dann an den Kreisolympiaden beteiligt, Spezialförderung.
Motive	Mir macht es Spaß, über mathematische Probleme nachzudenken.	Ich knoble gern und freue mich über die Lösung schwieriger Aufgaben. Mathematik ist für mich die am meisten interessierende Wissenschaft.	Mathematik macht mir Spaß. In der Schule und den Olympiaden möchte ich gute Plätze belegen. Mathematik braucht man in allen Gebieten des Lebens.	Was ich heute lerne, wird mir morgen leichter fallen — ich möchte Mathematiker werden; um gut in den Olympiaden abzuschneiden.	Bei Olympiaden bemerkt man Schwächen, die man beseitigen möchte. M. braucht man in der Freizeit, z. B. bei Nachrichtentechnik. Gute Erfolge beim Lösen von Aufgaben spornen an.

Name	Roland Matthus	Oswald Knoth	Barbara Kluge	Ulf Brüstel	Axel Hintze
Bezirk	Gera	Halle	Karl-Marx-Stadt	Leipzig	Magdeburg
Schule, Klasse	Spezialschule „Carl Zeiss", Jena, Klasse 12	Spezialklasse Mathematik Universität Halle, Klasse 11	EOS Olbernhau Klasse 10	EOS „Karl Marx", Altenburg Klasse 10	Spezialklasse der TH Magdeburg, Klasse 11
Beruf des Vaters	Tischler	Landwirt	Lohnbuchhalter	Mathematiklehrer	Gebrauchswerber
Tätigkeit des Vaters	Technologe	Agronom	Lohnbuchhalter	Mathematiklehrer	Gruppenleiter Werbung und Messen
Beruf der Mutter	Verkäuferin	Diplombetriebswirtschaftler	Schneiderin	—	Stenotypistin
Tätigkeit der Mutter	Kassiererin	Kreissekretär VdgB	Schneiderin	Hortnerin	Hausfrau
Berufswunsch	Physiker	Mathematiker	Mathematiker	Elektronik/Physik	Mathematiker
Besondere Interessen	Volleyball (Bez.-Klasse) Physik	Volleyball, theoretische Physik	Sport (Volleyball), Musik (Gitarre), Schulchor, Tanzen	Klavierspiel (seit 1964). Durch die Musikschule wurde ich 3mal zum Bach-Wettbewerb delegiert.	Lilien- und Kakteenzucht, Fotographie
Förderung in Mathematik	Bezirksklub, Mathematik-AG	Bezirksklub Junger Mathem. Leipzig (seit Klasse 6)	Kreisklub, Spezialistenlager im Kreis und Bezirk, Korrespondenzzirkel	Bezirksklub, Mathematiklager, Förderung durch Vater	Kreis- und Bezirkszirkel
Erfolge in der Olympiadebewegung	1970 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 3. Preis 1972 Bezirk 1. Preis 1972 DDR 3. Preis	1970 Bezirk 4. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1971 DDR 3. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1969 Bezirk 4. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1969 Bezirk 1. Preis 1970 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1968 bis 1972 jeweils 1. Preis im Bezirk
alpha-Leser	nein, Wurzel	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Silber	*alpha* seit 1968	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Gold	*alpha* seit 1967
Auszeichnungen	Abzeichen für gutes Wissen, Anerkennung von der VI. Internationalen Physik-Olymp.	Arthur-Becker-Medaille in Bronze	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber	Herder-Medaille, Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber	Lessing-Medaille, Abzeichen für gutes Wissen in Silber
Wer weckte Interesse?	Mein Interesse wurde durch die Schule geweckt. Nach guten Erfolgen bei math. Knobeleien besuchte ich AG's und den Klub.	Erstes Interesse durch ABC-Olympiade und Lösen von Aufgaben	Delegierung durch Mathematiklehrerin zur Kreisolym. Lösen von Aufgaben, erteilt vom Mathematiklehrer.	Mein Vater weckte Interesse, er gab mir schon frühzeitig Knobelaufgaben, später schwierigere.	Eigentlich gar keiner. Ich habe im Kindergarten schon „gerechnet". In der Spezialklasse ab Kl. 7 gab der Mathematiklehrer Anregungen.
Motive	Mathematik ist eines meiner Hauptsteckenpferde. Bei schwierigen Aufgaben setze ich mich ran und knoble immer mündlich. Bei zahlr. physikalischen Problemen benötige ich Mathematik.	In erster Linie ist es die Begeisterung für Mathematik. Mich faszinieren die Exaktheit, der grundlegend logische Aufbau, die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten.	Knobeln macht mir Spaß. Ich benutze dazu Nachschlagewerke und versuche, anhand ähnlicher Aufgaben zur Lösung der gestellten Aufgabe zu kommen.	Es macht Spaß. Ich schätze Mathematik wegen ihrer Exaktheit und Klarheit. Math. fördert das gesamte Denkvermögen.	Es macht Freude, besonders wenn ich verblüffende Lösungsmöglichkeiten finden kann.

Axel Hinze, Magdeburg

Für den Fall, daß $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen größer als 1 sind, ist folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geqq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

Barbara Kluge, Olbernhau

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n

$$11^{n+2}+12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist!

Oswald Knoth, Wurzen

Aufgabe aus einer sowjetischen Aufgabensammlung:

Man beweise die folgenden Ungleichungen, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

a) $\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n$

b) $\lg(n!) \quad > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Roland Matthus, Jena

Eine Aufgabe aus unserem Mathematik-Klub:

Gesucht ist die Summe $\sum_{k=0}^{n} (k-1)k\binom{n}{k}$.

Sabine Schlorff, Neubrandenburg

In unserem Bezirksclub ist es zur Tradition geworden, daß sich jeder Bezirksolympiadeteilnehmer eine Aufgabe ausdenkt und einen Lösungsvorschlag dazu erarbeitet. Die besten Eigenaufgaben werden von den Mathematiklehrern ausgewählt, von den Teilnehmern der DDR-Olympiade unseres Bezirkes auf dem Vorbereitungslehrgang noch einmal überarbeitet und zu einer Broschüre zusammengefaßt. Hier möchte ich eine meiner Eigenaufgaben nennen:

Aus dem Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems gehen Strahlen durch die Punkte $[1;c]$, $[2;c]$, ..., $[k;c]$, ... Diese schließen jeweils mit der x-Achse die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ ein. Es sind alle c gesucht, für die gilt:

Man kann zu jedem Winkel, der zwischen zwei Strahlen liegt, einen unter den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ finden, der gleich groß ist.

Bernd Süssmilch, Schwerin

Gegeben sind reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Man bestimme die kleinste Zahl M, für die

$|a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n| \leqq M \max |x_i|$

$(i=1, 2, \ldots, n)$

für beliebige reelle x_i gilt.

Gerd Weißenborn, Berlin

Löse das Gleichungssystem

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x^3+y^3+z^3=1$$

in reellen Zahlen x, y, z!

Ute Winkler, Kleinmachnow

Bei unserer letzten Klubveranstaltung befaßten wir uns unter anderem auch mit folgender Aufgabe:

Man beweise, daß sich jede Funktion mit symmetrischem Definitionsbereich (bezüglich des Nullpunktes) als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen läßt.

Rainer Zerck, Wismar

Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Quadrate der Abstände a und b zu den Geraden mit den Gleichungen $y=\sqrt{3}\,x$ und $y=\frac{x}{3}\sqrt{3}$ gleich einer gegebenen Zahl c ist.

Rückblick auf die XIV. IMO

Jede Mannschaft, die an der XIV. IMO in der VR Polen im vergangenen Jahr teilnahm, überreichte dem Chefredakteur der Schülerzeitschrift *alpha* eine Aufgabe für unsere anspruchsvollen Leser. *Olaf Böhme*, Preisträger der XIV. IMO, jetzt stud. math. an der *Technischen Universität Dresden*, übersetzte und bearbeitete die Aufgaben.

VR Bulgarien

Gesucht sind alle Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und für die gilt: $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(xy)$

für alle reellen x und y.

ČSSR

Gegeben sei eine mit natürlichen Zahlen ausgefüllte $31 \cdot 31$-Tabelle, in der jede der Zahlen von 1 bis 31 einunddreißigmal vorkommt und die zur Hauptdiagonalen symmetrisch ist. Es ist die Summe der Zahlen in der Hauptdiagonalen gesucht. (Die Hauptdiagonale läuft von links oben nach rechts unten.)

DDR

Man gebe alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen an, für die $a^b+b^c=abc$ gilt.

Großbritannien

Gesucht ist eine Folge (a_n), $n=0, 1, 2, \ldots$, nichtnegativer ganzer Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $a_0=0$

(2) $a_{n+1}>a_n$ für alle n

(3) Zu jeder positiven ganzen Zahl k existieren Glieder a_i, a_j $(i \neq j)$ der Folge so, daß $k=a_i+a_j$ gilt.

(4) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}=0$.

SFR Jugoslawien

Gegeben sei eine Menge P von $\binom{m}{n}$ Personen, so daß sich beliebige zwei von ihnen stets gegenseitig kennen oder gegenseitig nicht kennen.

Man beweise, daß dann stets eine Teilmenge T von P existiert, die einer der folgenden Bedingungen genügt:

1. T enthält genau $n+1$ Personen, und diese kennen sich paarweise.
2. T enthält genau $m-n+1$ Personen, und diese kennen sich paarweise nicht.

(m, n sind positive ganze Zahlen mit $m>n$.)

Republik Kuba

Es sei p_n die n-te Primzahl. Man beweise, daß dann für

$n \geqq 3$ gilt $p_n > 3n-6$.

Mongolische VR

Man beweise: Zu jeder positiven ganzen Zahl n existiert eine n-stellige natürliche Zahl N so, daß N^2 $2n$-stellig ist und an den letzten n-Stellen mit N übereinstimmt.

Niederlande

Man konstruiere einen Rhombus, dessen Flächeninhalt ebensogroß ist wie der eines gegebenen konvexen Vierecks.

Österreich

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen sei gegeben durch

$a_0=A$, $a_1=B$, $a_{k+2}=\frac{a_{k+1}^2+c}{a_k}$ $(k \in N)$,

wobei A, B und $\frac{A^2+B^2+C}{AB}$ ganze Zahlen sind.

Man beweise, daß alle Glieder der Folge ganzzahlig sind.

VR Polen

Für jede natürliche Zahl n sei a_n die Quersumme der im Dezimalsystem dargestellten Zahl $(1972)^n$. Man beweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

SR Rumänien

Gegeben sei eine Überdeckung eines Einheitsquadrates mit kleineren Quadraten, deren Seiten zu denen des Einheitsquadrats parallel (bzw. senkrecht) sind und die sich auch überdecken können. Man beweise, daß man einige der kleineren Quadrate so auswählen kann, daß keine zwei von ihnen einen gemeinsamen Punkt haben und die Summe ihrer Flächeninhalte nicht kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Schweden

Es sei p eine Primzahl. Man gebe die kleinste natürliche Zahl n an, für die $n!$ durch $(p^2+p)^2$ teilbar ist.

Sowjetunion

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (n positive ganze Zahl) reelle Zahlen mit

$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \geqq 0$,

$y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n \geqq 0$,

$x_1 \geqq y_1$,

$x_1+x_2 \geqq y_1+y_2$,

$\vdots$

$x_1+x_2+\ldots+x_n=y_1+y_2+\ldots+y_n$.

Man beweise, daß dann für jede positive ganze Zahl k gilt:

$x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k \geqq y_1^k+y_2^k+\ldots+y_n^k$.

Ungarische VR

Es seien n eine positive ganze und x und a reelle Zahlen.

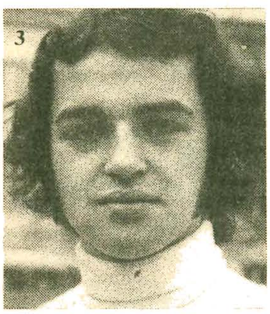
Man beweise, daß dann stets

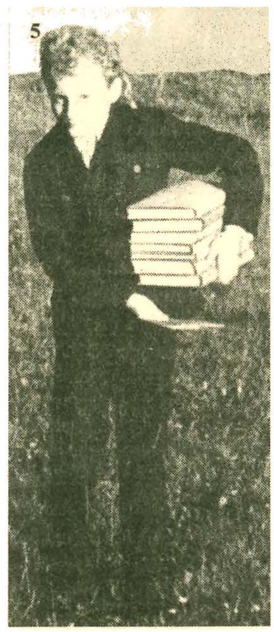
$(x+a)^n \cdot (x-na) \leqq (x^2+na^2)^{\frac{n+1}{2}}$ gilt.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade

16. 4. bis 18. 4. 1973





Erste Preise wurden vergeben:

Uwe Löbus, EOS Romain Rolland, Dresden (Klasse 9)	Bild 1
Uwe Risch, EOS Geschwister Scholl, Burg (Kl. 9) *(beide Olympiadeklasse 10)*	Bild 2
Albrecht Heß, EOS Dresden-Süd *(Olympiadeklasse 11)*	Bild 3
Jürgen Roßmann, EOS Fr. Engels, Neubrandenburg	Bild 4
Pawel Kröger, 49. OS Leipzig (Kl. 8) *(beide Olympiadeklasse 12)*	Bild 5

Zweite Preise wurden vergeben:

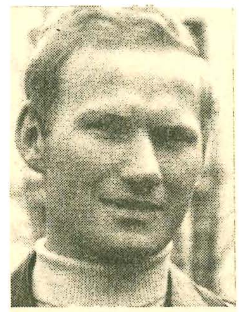
In Olympiadeklasse 10 an: Klaus Schulze, Goethe-OS Wurzen; Kurt Frischmuth, EOS Mühlhausen; Udo Matte, Goethe-EOS, Weißenfels; H.-U. Frömmer, EOS C. Zetkin, Neustrelitz; Jörg Schulze, EOS Luckenwalde (Kl. 9); Siegfried Weiß, OS Neusalza-Spremberg; Klaus Altmann, EOS H. Hertz, Berlin
In Olympiadeklasse 11 an: Helmut Roßmann, A.-Zapototzky-OS, Neubrandenburg (Kl. 10)
In Olympiadeklasse 12 an: Albrecht Böttcher und Elias Wegert, beide Spezialkl. der TH Karl-Marx-Stadt; Holger Steinberg, BBS Schiffselektronik, Rostock

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Egbert Lindner, BBS VEB Pentacon, Dresden; Bernd Mathiszik, EOS Lessing, Erfurt; Harald Schneider, EOS Geschw. Scholl, Löbau; Eckard Wildgrube, EOS L. Cranach, Wittenberg; Volker Ihde, Goethe-EOS, Schwerin; Alfred Pietrzik, OS II Gadebusch (Kl. 8); Peter Reuter, OS Kreischa (Kl. 9); Uwe Quasthoff, EOS Leibniz, Schkeuditz; Horst Kohlschmidt, EOS R. Rolland, Dresden; Michael Funke, EOS Karl Marx, Altenburg; Renate Molgedey, EOS H. Hertz, Berlin
In Olympiadeklasse 11 an: Bernd Zaddach, A. Becker-OS Cottbus (Kl. 10); K.-D. Wirth, EOS H. Hertz, Berlin; Ralph Lehmann, EOS Diesterweg, Strausberg (Kl. 10); Konrad Engel, Herder-EOS, Rostock; Jörg Bergmann, Spezialsch. f. elektronische Industrie M.-A.-Nexö, Dresden (Kl. 10); Ulf Brüstel, EOS Karl Marx, Altenburg
In Olympiadeklasse 12 an: Guntram Pausch, EOS W. Pieck Leipzig; Borna; Ingo Bandlow, ABF Walter Ulbricht, Halle; Reinhard Schuster, EOS Helmholtz, Leipzig (Kl. 11); Lothar Wenzel, EOS F. List, Berlin; Oswald Knoth, Spezialklasse der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg

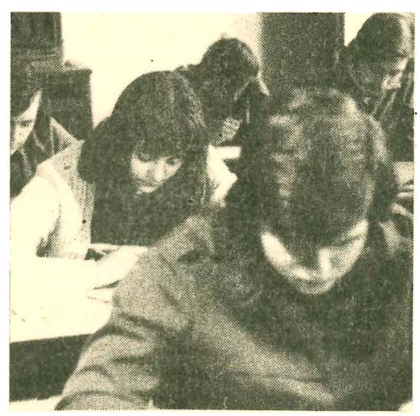
Zwei Diplome wurden für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe vergeben. 30 Schüler erhielten Anerkennungsurkunden für gute Leistungen.

Aus dem Rahmenprogramm der OJM: Vortrag von Prof. Dr. F. Kuhnert: Über moderne Aspekte der *Numerischen Mathematik;* Forum zu den X. Weltfestspielen, Lichtbildervortrag: Auf den Spuren des Copernicus; Besuch der Hauptstadt der DDR



Angela Rohrbeck, EOS Franzburg, Teilnehmerin am *alpha*-Wettbewerb seit Gründung der Zeitschrift. Sie gehört zu den erfolgreichsten Teilnehmerinnen der OJM.

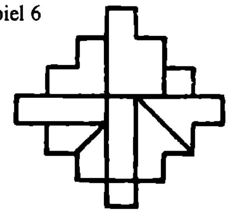
Wettbewerbsatmosphäre



Die Losung der XII. OJM:

Lernt und arbeitet für unsere Republik – vorwärts zu den X. Weltfestspielen!

Spiel 6



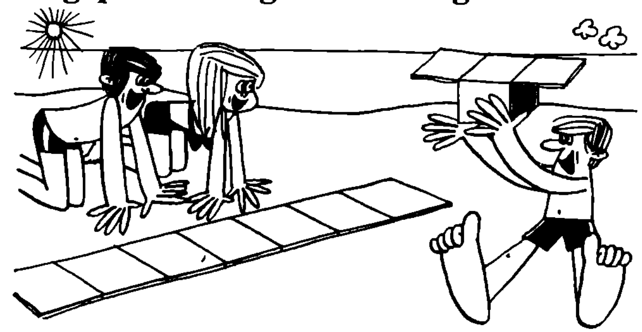
Spiel 7a: Man halte den Bogen mit der beschrifteten Seite nach unten, so daß beim Betrachten zu sehen ist:
2356
1874

Man falte nun die rechte Hälfte des Bogens nach links, so daß die 5 über der 2, die 6 über der 3, die 4 über der 1 und die 7 über der 8 liegt. Die untere Hälfte falte man nun nach oben, so daß die 4 über der 5 und die 7 über der 6 liegt. Anschließend falte man 4 und 5 zwischen 6 und 3 und falte 1 und 2 unter das Paket. Die Lösung der Figuren 7 und 8 sei dem Leser selbst überlassen.

Zusammenstellung dieses Ferienheftes:
Studienrat J. Lehmann,
Verd. Lehrer des Volkes, Leipzig

12

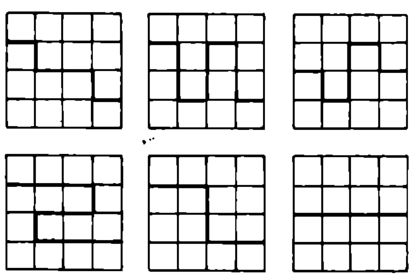
aufgepaßt–nachgedacht–mitgemacht



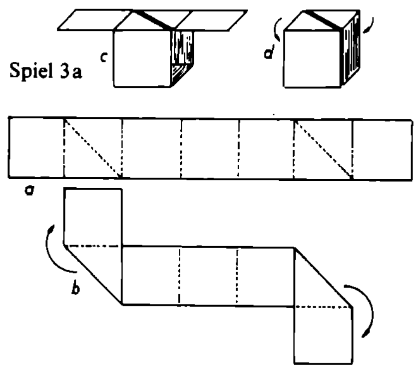
alpha Spiel-Magazin

Lösungen

Spiel 1: Es gibt 6 Möglichkeiten.



Spiel 3a



10

Spiel 2

Falte das Zahlenquadrat so, daß nur die vier Zweien sichtbar sind!

3

2	2
2	2

5	2	1	3
1			2
2			1
3	1	2	5

Spiel 7

a) Es gibt 40 Möglichkeiten, diese Karte an den eingezeichneten Linien so zu falten, daß ein quadratisches Paket entsteht, welches an oberster Stelle die „1" zeigt. Der Bogen ist so zu falten, daß die Quadrate in ihrer natürlichen Reihenfolge zu liegen kommen. Die Figur *b* wird wesentlich schwerer zu lösen sein!

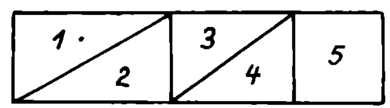
1	8	7	4
2	3	6	5

1	8	2	7
4	5	3	6

8

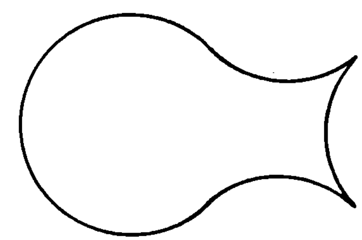
Spiel 4

a) Die vorliegenden 5 Flächen sind so zusammenzustellen, daß ein Quadrat entsteht.



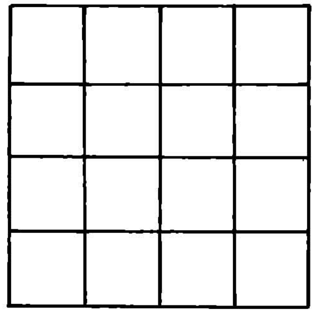
5

b) Durch drei gerade Schnitte ist die Figur so zu zerschneiden, daß daraus zwei Quadrate zusammengestellt werden können, die der gegebenen Figur flächengleich sind.



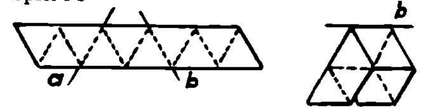
Spiel 1

Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein 4×4 Quadrat in zwei Hälften zu zerlegen, welche von gleicher Größe und gleicher Figur sind, d. h. die beiden Hälften müssen jeweils deckungsgleich sein.

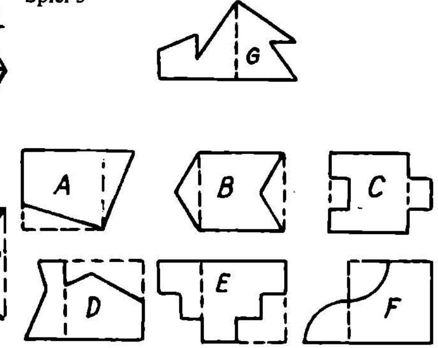


2

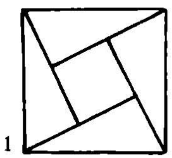
Spiel 3b



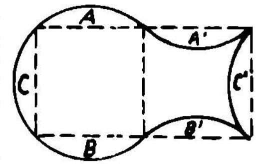
Spiel 5



Spiel 4a



Spiel 4b

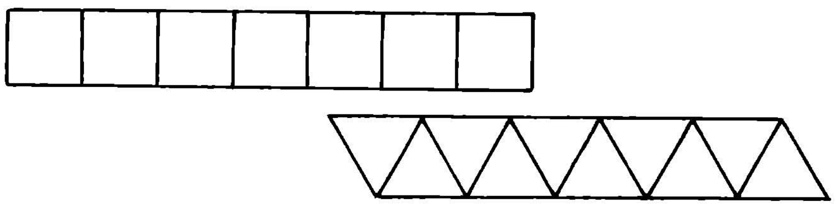


11

Spiel 3

a) Gegeben sei ein Streifen von 2 cm Breite und 14 cm Länge. Falte aus ihm einen Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm.

b) Falte den Streifen, bestehend aus 10 gleichseitigen Dreiecken, so, daß ein Sechseck entsteht!



4

Spiel 8

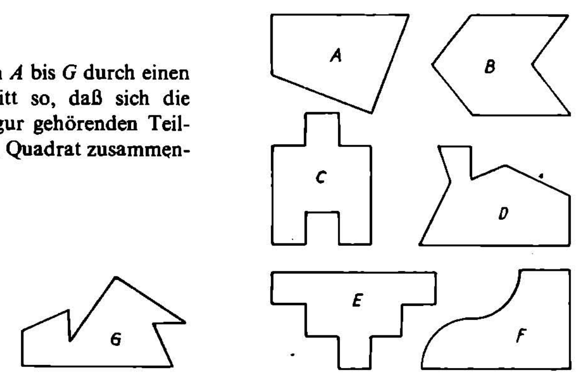
Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge WOLFGANG übereinanderliegen!

O	N	G	A
W	G	F	L

9

Spiel 5

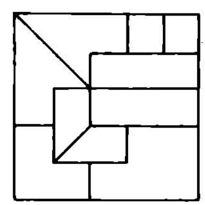
Zerschneide die Figuren *A* bis *G* durch einen einzigen geraden Schnitt so, daß sich die beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einem Quadrat zusammensetzen lassen!

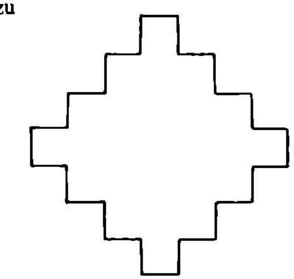


6

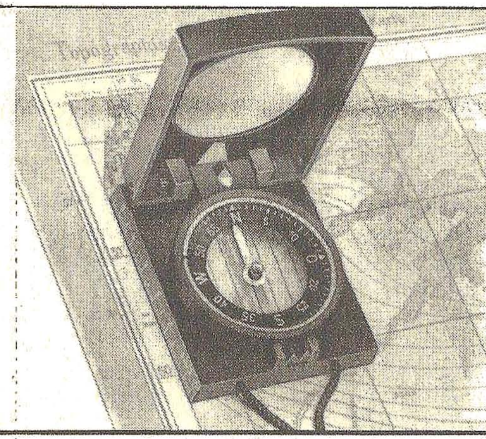
Spiel 6

Das abgebildete Quadrat ist in 10 Teile aufgeteilt. Aus diesen Teilen ist eine Fläche zu bilden, die die abgebildete Form hat.





7



Mit Karte und Kompaß

Marschkompaß F 70

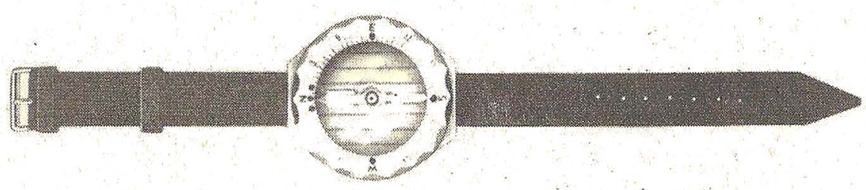
rosionsfestem Kunststoff. Das Magnetsystem ist in der Fluidkapsel aus unzerbrechlichem, glasklarem Kunststoff vollkommen geschützt gegen Staub, Wasser und dergl. untergebracht. Der Boden der Fluidkapsel ist mit einer Schar paralleler Richtungslinien versehen, mit deren Hilfe aus der Karte Marschrichtungszahlen entnommen werden können, ohne die Karte vorher orientieren zu müssen. Da hierzu der Kompaß nach Art eines Kartenwinkelmessers benutzt und das Magnetsystem nicht verwendet wird, scheiden magnetische Umwelteinflüsse als Fehlerquelle völlig aus.

Streckenlängen auf der Karte werden mit der Millimeterteilung der Anlegekante gemessen und mit Hilfe des Maßstabes der verwendeten Karte umgerechnet.
Die als Einstellmarke dienenden starken parallelen Richtungsstriche auf dem Kapselboden, das Nordende der Magnetnadel sowie Kimme und Korn der Visiereinrichtung sind für Zielungen bei Dunkelheit mit Leuchtfarbe ausgelegt worden.

3

Aufsuchen des Marschzieles im Gelände
Beispiel: Entfernung 1 500 m, Marschrichtungszahl 20
Stelle die vorgegebene Marschrichtungszahl 20 durch Drehen des Teilungsringes auf die Spitze des Leuchtzeigers (Korn) ein, kippe den Kompaßdeckel mit Spiegel so, daß beim Visieren über Kimme und Korn Strichteilung und Magnetnadel im Spiegel sichtbar werden. Stecke den Daumen durch die Handschlaufe und halte den Kompaß in Augenhöhe. Drehe dich mit dem Kompaß so, daß das Nordende der Magnetnadel (Nadelhälfte mit Leuchtspitze) genau zwischen den beiden parallelen Leuchtstrichen auf dem Kompaßboden einspielt. Visiere bei einspielender Magnetnadel über Kimme und Korn einen markanten Orientierungspunkt im Gelände an (Baum, Strauch, Haus oder dergl.). Der anvisierte Punkt liegt in deiner Marschrichtung. Erreiche das Marschziel in einer Entfernung von 1 500 m (Schrittmaß beachten).
Eine dem Kompaß beigegebene Beschreibung legt jetzt dar, wie man die Marschrichtung im Gelände festlegen kann, eine Marschrichtung in die Karte übertragen kann, ein im Gelände gegebenes Marschziel auf der Karte aufsuchen kann.

5



8

Kurvimeter 62

mit Nullstellungs-Drucktaste (Preis 11,60 M, Masse 20 g)

Mit dem *Kurvimeter 62* werden rasch und sicher Entfernungen auf Karten und Plänen gemessen. Seine Handhabung ist einfach: Durch kurzen Druck auf den Knopf an dem oberen Griffende wird der Zeiger auf Null gestellt und dann das Laufrädchen entlang der zu messenden Linie von beliebiger Krümmung geführt. Auf einer doppelseitigen Teilung kann unter dem Zeiger die dem Kartenmaßstab entsprechende Entfernung abgelesen werden.
Glasklare, unzerbrechliche Celluloidscheiben schützen die verschieden gefärbten Teilungen für folgende Maßstäbe:

1 : 25 000	1 : 100 000
1 : 40 000	1 : 200 000
1 : 50 000	1 : 300 000.

Das Kurvimeter wird in einer gefälligen Plasthülle geliefert.

10

VEB FREIBERGER PRÄZISIONSMECHANIK

DDR 92 Freiberg

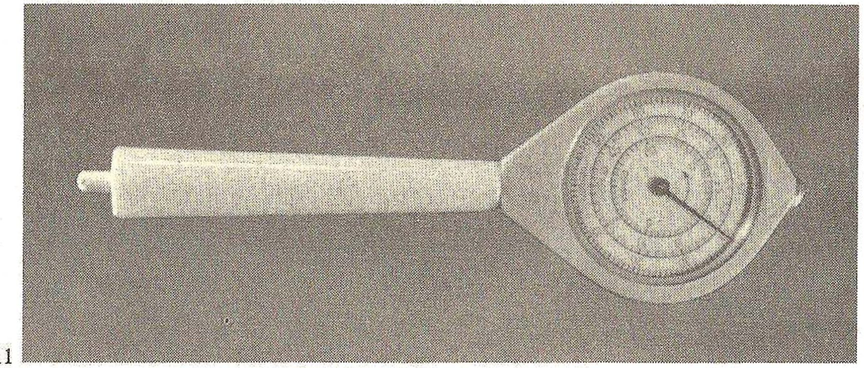
Anwendung
Der *Marschkompaß F 70* mit Fluidkapsel dient zur Orientierung im Gelände. Er ermöglicht das Übertragen von Richtungen aus der Karte ins Gelände und umgekehrt. Für die Entnahme von Marschrichtungen aus der Karte oder zum Übertragen im Gelände gemessener Richtungen in die Karte ist kein Orientieren der Karte notwendig.

Technische Daten

Teilkreisdurchmesser	45 mm
Skalenwert der Kreisteilung	1-00 (5°)
Genauigkeit der Richtungsangabe	±0-25 (±1,5°)
Einschwingdauer der Magnetnadel	≦7 s
Teilungslänge der Anlegekante	55 mm
Skalenwert der Anlegekante	1 mm
Funktionsfähigkeit im Temperaturbereich	−30° bis +50° C
Abmessungen (Maße in mm)	72 × 55 × 20
Masse	95 g
Preis	18,75 M

Beschreibung
Sowohl das Gehäuse als auch der den Spiegel enthaltende Kompaßdeckel bestehen aus kor- 2

11



Handhabung

Entnahme von Marschrichtungszahlen aus der Karte
Das Orientieren der Karte ist dazu nicht erforderlich. Magnetische Gegenstände (Taschenmesser und dergl.) beeinflussen die Messung nicht. Lege den Kompaß mit der Millimeterteilung der Anlegekante so an die Verbindungslinie zwischen Ausgangspunkt und Zielpunkt an, daß der Nullpunkt der Längsteilung mit dem Ausgangspunkt übereinstimmt. Ist die Entfernung zwischen Ablaufpunkt und Zielpunkt größer als die Länge der Anlegekante, dann ziehe mit weichem Bleistift eine Hilfslinie zwischen Ablaufpunkt und Marschziel.
Halte nun den Kompaß fest und drehe den Teilring so, daß der Kreisteilungs-Nullpunkt (Nordmarke „N") nach Karte — Nord zeigt und die Richtungslinie auf dem Boden der Fluidkapsel parallel zu den Kartenmeridianen verlaufen. Lies an der Spitze des Leuchtzeigers (am Korn der Visiereinrichtung) auf dem Teilkreis deine Marschrichtungszahl ab.

4

9

Daten

Teilringdurchmesser	37 mm
Skalenwert der Kreisteilung (rechtsläufig)	5°
Einschwingdauer der Magnetnadel	≦7 s
Mittlere Einspielunsicherheit der Magnetnadel	±0,5°
Funktionsfähigkeit im Temperaturbereich	−30° bis +50°
Abmessungen	∅ 60 mm × 21 mm hoch
Masse	45 g
Preis	15,80 M

Anlegen einer Routenskizze
Die Routenskizze enthält eine annähernd maßstäbliche Aneinanderreihung von Marschrichtungszahlen und Streckenlängen zwischen je zwei Knickpunkten einer Marschroute. An jede Seite des auf diese Weise entstehenden gebrochenen Linienzuges wird die Marschrichtungszahl in Grad oder Strich und die Streckenlänge in Meter oder im Schrittmaß angeschrieben. Die Knickpunkte werden mit den als Richtungspunkte verwendeten markanten Geländezielen bezeichnet.

Weitere Themen des Anleitungsheftes: Messen von Entfernungen in der Karte, Messen von Entfernungen im Gelände, Bestimmen der Uhrzeit mit dem Kompaß, Berücksichtigung der magnetischen Abweichung u. a.

6

Der Armband-Fluidkompaß Sport 10

ist ein dauernd funktionsbereites, nicht erschütterungsempfindliches und beim Gebrauch praktisch unverlierbares Orientierungsmittel, insbesondere für den Sporttaucher.
Der Kompaß wird am linken Handgelenk so getragen, daß der Richtungsstrich auf dem feststehenden Gehäuseunterteil bei angewinkeltem linken Arm vom Körper weg in Blickrichtung zeigt.
7 Für die Orientierung ist ebenso wie beim Fluidkompaß „Sport 3" der Teilring am Richtungsstrich auf eine vorgegebene Richtung einzustellen und das rote Nordende der Magnetnadel parallel zu dem Doppel-Leuchtstrich auf dem Kapselboden zu orientieren. Der feste Richtungsstrich auf dem Gehäuseunterteil zeigt dann in die vorgegebene Marsch- bzw. Schwimmrichtung.
Gegenüber dem bisherigen Armband-Fluidkompaß zeichnet sich der *Sport 10* durch folgende Eigenschaften aus:
Fluidkapsel, Teilring, Gehäuse und Armband bestehen aus korrosions- und feuchtigkeitsbeständigem Material.

Pioniere des alpha-Wettbewerbs

Fakten — Fakten

Der Kreis Schmalkalden ist der aktivste und vorbildlichste Kreis der DDR im *alpha*-Wettbewerb. In den Jahren 1968 bis 1972 gingen aus diesem Kreis etwa 12000 Lösungen in der Redaktion *alpha* ein:

1968: 50 Teilnehmer aus 14 Schulen (1524 Einsendungen) erhielten Urkunden;

1969: 39 Urkunden — 16 Schulen — 1374 Einsendungen;

1970: 238 Urkunden (davon 27 Abzeichen in Gold) — 16 Schulen — 2500 Einsendungen;

1971: 411 Teilnehmer (davon 36 Abzeichen in Gold) — 14 Schulen — 4000 Einsendungen;

1972: 228 Urkunden (46 Abzeichen in Gold, davon 13 mit drei- oder fünfjähriger Teilnahme) — 2600 Einsendungen.

Erfolgreichste Teilnehmer

Von den 56 Teilnehmern, die 1972 das *alpha*-Abzeichen in Gold für fünfjährige Teilnahme erhielten, stammen 12 aus dem Kreis Schmalkalden (d. s. 21 %). Weiterhin erhielten zwei Schüler das Abzeichen in Gold für vierjährige und 33 Schüler das Abzeichen in Gold für dreijährige Teilnahme.

Ehrentafel der aktivsten Lehrer

Werner Gehb, OS Fambach (Kreisfachberater Mathematik); Erwin Manske, Heinz Gotthelf, Siegmund Hellmann, alle OS Steinbach-Hallenberg; Roland Richter, OS J. G. Seume, Schmalkalden; Herbert Avemarg, OS Mittelstille; Helmut Kiehnapfel, OS Floh; Karl Koch, OS am Siechenrasen, Schmalkalden.

Erfolgreichste Schule des Kreises Schmalkalden

An der *Ernst-Thälmann-OS* in Steinbach-Hallenberg erhielten allein im Wettbewerbsjahr 1971/72 22 Schüler das *alpha*-Abzeichen in Gold und 74 Schüler das Abzeichen in Silber. Seit 1968 wurde das *alpha*-Abzeichen schon 402 mal an Schüler (davon 41 mal in Gold) verliehen.

Als Anerkennung für die vorbildlichen Leistungen besuchte der Chefredakteur der Schülerzeitschrift *alpha* unseren Jugendklub und hielt einen Lichtbildervortrag: „Auf den Spuren des Copernicus" (Erlebnisbericht von der XIV. IMO).

An unserer Schule wird bereits seit über zehn Jahren eine aktive, planmäßige außerunterrichtliche mathematische Betätigung durchgeführt. Noch vor Gründung der *alpha* gab es bei uns *Aufgaben des Monats*. Sie dienten der Vorbereitung auf Olympiaden. Durch *alpha* konnte ein noch viel größerer Teil unserer Schüler für die mathematische Arbeit interessiert werden. Die Lösung von Wettbewerbsaufgaben ist schon für zahlreiche Schüler unserer Schule zu einer Gewohnheit geworden. Jedes Jahr gehen vier dicke Pakete mit Lösungen direkt an *alpha*. Insgesamt sandten wir etwa 5000 Lösungen in fünf Jahren ein. In den Klassen gibt es Verantwortliche für den *alpha*-Wettbewerb. Sie sind gleichzeitig Fachhelfer für Mathematik, die im Zusammenwirken mit dem Fachlehrer ihrer Klasse folgende Aufgaben übernommen haben:

Anfertigung von Teilnehmerlisten — wöchentliches Einsammeln der Lösungen und ihre Registrierung — Informieren des Fachlehrers über den Stand der Beteiligung am Wettbewerb — Einwirken auf die Mitschüler, die Lösungen gewissenhaft und termingerecht einzusenden — Registrierung der Antwortkarten — Mithilfe beim Abschluß des Wettbewerbs.

Immer mehr Schüler gehen dazu über, gleich beim Erscheinen einer neuen *alpha* mit der Lösung der Aufgaben zu beginnen und zu versuchen, alle vorgestellten Probleme (pro Klassenstufe) zu lösen. Die in *alpha* gestellten Aufgaben empfinden wir als gut. Eine große Hilfe sind die ausführlichen Lösungen. Eine gute Hilfe beim Knacken der *alpha*-Nüsse sind unsere Arbeitsgemeinschaften. Wöchentlich wird einmal trainiert, nach einem ganz bestimmten Plan, der neben lehrplangerechten Stoffeinheiten auch andere enthält, z. B. in Klasse 7: Kombinatorik, Permutation.

In den Zusammenkünften tauschen wir auch die Meinung über die Wettbewerbsaufgaben aus. Unser AG-Leiter gibt Hinweise, welche Aufgaben höherer Klassenstufen wir schon lösen könnten. Im Vordergrund unserer Tätigkeit in der AG steht aber die Befähigung zur Lösung von Aufgaben nach Inhalt und Form, wie sie bei Mathematik-Olympiaden gefordert werden. Bei Konstruktionen lernen lernen wir z. B., daß zu ihrer vollständigen Lösung eine Vorüberlegung, die Konstruktion, die Konstruktionsbeschreibung, ein Beweis und eine Lösungsdiskussion gehören. Eine Aufgabe wollen wir den Lesern stellen. Sie war besonders geeignet, die genannten Schritte zu erarbeiten:

Aufgabe: Konstruiere ein Dreieck ABC aus $s_a = 4{,}8$ cm $s_b = 3{,}3$ cm und $h_c = 3{,}0$ cm!

Höhepunkt und Bewährung der Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb und der Arbeit der AG's sind die Olympiaden, bei denen unsere Schule schon recht beachtliche Erfolge erzielen konnte.

Einen großen Anteil an diesen Erfolgen haben die Mathematiklehrer. Dafür möchten wir ihnen danken. Mit noch höheren Leistungen in der Schule und zu unserem späteren beruflichen Leben wollen wir unser Bestes zum Wohle und zur Festigung unseres sozialistischen Staates geben.

AG Mathematik, OS Steinbach-Hallenberg

Durch meine Schwester lernte ich *alpha* kennen. In der 6. Klasse bekam ich 52 Antwortkarten für richtig gelöste Aufgaben. Zweimal schon erhielt ich das *alpha*-Abzeichen in Gold. Mathematik wurde durch *alpha* zur Freizeitbeschäftigung neben meinem intensiven Training für den Skilanglauf... *Gerlinde Koch, im Bild links, OS „Wilhelm Pieck", Trusetal (Kl. 8)*

Mein schönstes Erlebnis: Teilnahme an der DDR-Olympiade 1972. Daß mir diese Erfolge nicht geschenkt worden sind, ist selbstverständlich. Große Hilfe erhielt ich durch die Lehrer, die aktive Teilnahme in Arbeitsgemeinschaften. *alpha* ist mein ständiger Freund und Helfer seit ihrem Erscheinen.

Beate Recknagel, im Bild rechts, EOS Schmalkalden (Kl. 11)

Ein Mathematikzentrum in Aktion

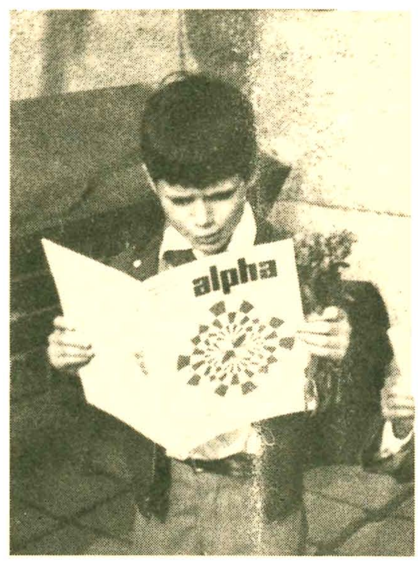
Karl-Marx-Stadt

Seit zehn Jahren besteht in unserem Pionierhaus das *Mathematikzentrum*. Viele tausend Pioniere haben seitdem in Zirkeln, bei Veranstaltungen und Pionierfesten die Mathematik noch besser kennengelernt. Um euch und euren Klubs einige Anregungen zu geben, wollen wir in *alpha* kurz über uns berichten:

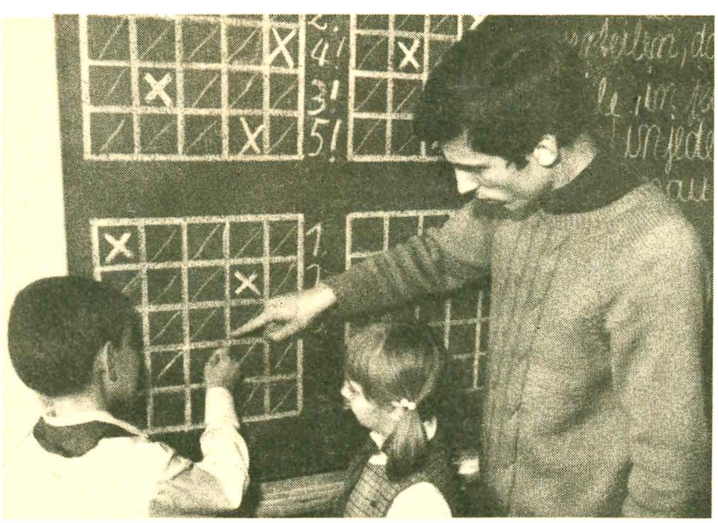
- In unseren Zirkeln der Klassenstufen 3 bis 10 arbeiten etwa 160 der besten *Jungen Mathematiker* unserer Stadt. Für jede Klassenstufe gibt es zwei Zirkel. Diese treffen sich 14täglich (bis Kl. 6) bzw. wöchentlich (ab Kl. 7) für 90 Minuten. Die Zirkelleiter sind Studenten der Technischen Hochschule, Fachrichtung *Lehrer für Mathematik*. Unser Jahresprogramm stellen wir entsprechend den Lehrplananforderungen und den Erfahrungen bei den Kreisolympiaden zusammen. Dabei werden Themen über längere Zeit behandelt, wie Einführung in das Beweisen, Konstruktionsaufgaben.
- Unsere Zirkelmitglieder erringen jährlich etwa die Hälfte der Medaillen bei den Kreisolympiaden. Natürlich wollen wir uns noch verbessern.
- Ab Klasse 5 bekommt jeder die *alpha* zum Jahrespreis von 1,— M. Der *alpha*-Wettbewerb ist ständige Hausaufgabe und lockert die systematische Arbeit auf. Etwa 15 Mitglieder besitzen das *alpha*-Abzeichen in Gold.
- Die Erfolge und die Entwicklung eines jeden Mitgliedes werden jährlich auf einer Karteikarte registriert.
- Zur gesellschaftlichen Arbeit gehören die Gestaltung des Schaukastens, die Diskussion aktueller Ereignisse, Spendenaktionen für Vietnam u. a.
- Zur Zeit bauen wir ein Kabinett für programmierten Unterricht.
- In jedem Jahr führen wir eine ABC-Stadtolympiade für die Klassen 3 und 4 durch. Jede Schule delegiert zwei Teilnehmer. Die Sieger erhalten ein Wandrelief von unserer AG Plastbearbeitung. Mit dieser Olympiade erkennen wir zeitig unseren Nachwuchs.
- Bei Pionierfesten und in den Ferien treten wir mit unseren Wissensstraßen für die Klassen 3/4 und 5/6 auf. Wir bieten außerdem noch die Veranstaltung *Lustige Knobeleien* an, bei der es wenig zu rechnen, aber viel zu knobeln gibt. Im Haus der JP gibt es vierteljährlich die bunte Veranstaltung *Zahlen und Zaubern*, bei der zehn Pioniere das Laienspiel *Dr. Plusminus und seine Zahlen* zeigen.

An vielen anderen Problemen arbeiten wir noch. Schreibt uns doch einmal von eurer außerunterrichtlichen Tätigkeit. *W. Henker*

Junge Mathematiker konstruieren Figuren, die man in einem Zuge nachziehen kann.

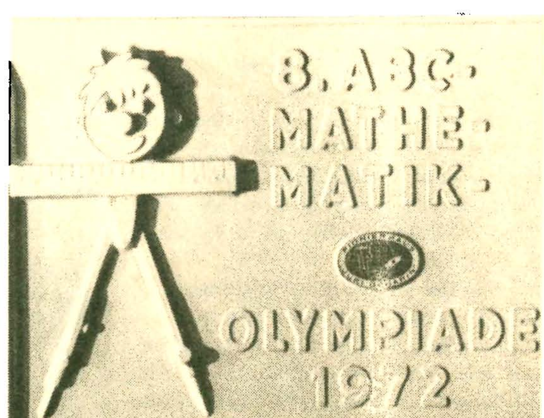


Einer der jüngsten *alpha*-Leser — einer der Sieger der ABC-Olympiade Karl-Marx-Stadt



Wolfgang Henker, vor zehn Jahren Sieger in der Bezirksolympiade Leipzig, heute Diplomlehrer für Mathematik und Leiter des Mathematikzentrums. Unser Bild: Kombinatorik in Klassenstufe 5

Plastrelief (23 cm × 31 cm), hergestellt in der Vakuumtiefzieanlage der AG Plast.



Aus der Messezeitung der EOS „Otto Grotewohl" — Gera

... Im vergangenen Jahr konnte die MMM an unserer Schule mit einem beachtlichen Erfolg abgeschlossen werden. Die Exponate dieser Messe, der auch eine *Hobby-Ausstellung* angeschlossen war, umfaßte die verschiedenartigsten Gebiete. Neben den dominierenden praxisverbundenen Objekten wurden erstmals mathematische Exponate gezeigt. Was ist darunter zu verstehen?

Diese Frage mußte im vergangenen Jahr von mathematisch interessierten Schülern und den Mathematiklehrern beantwortet werden, um die Voraussetzung für eine sinnvolle Vorbereitung auf die nächste Messe zu schaffen. Zur Teilnahme an der MMM bewog uns zunächst der Gedanke, nicht länger abseits zu stehen. Wir sahen ferner darin die beste Möglichkeit, alle Schüler noch stärker für die Mathematik zu interessieren. Die Freude an der Darlegung mathematischer Probleme sollte geweckt, deren Qualität erhöht werden. Die *Jungen Mathematiker* unserer Schule, die bereits jahrelang in verschiedenen Zirkeln ihre Kenntnisse ständig erweitern, nahmen die Messe zum Anlaß, den Gedanken der seit zwölf Jahren bestehenden Mathematikolympiaden noch mehr zu popularisieren.

Von der Differenziertheit der Zielstellung wurde für die MMM die Art der Exponate bestimmt. Wir teilen sie in drei Gruppen ein:

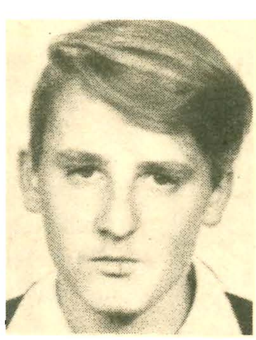
- *Beiträge zur Ausgestaltung unserer Fachunterrichtsräume:* Tafeln zeigen Leben und Werk berühmter Mathematiker (Leibniz, Gauß), die historische Entwicklung bestimmter Zweige der Mathematik (zwei Tafeln über den Mathematisch-physikalischen Salon im Dresdner Zwinger), inhaltliche Zusammenfassung von Teilgebieten des Unterrichtsstoffes (Satzgruppe des Pythagoras, Infinitesimalrechnung, graphische Darstellung gerader und ungerader Funktionen). Da ich selbst eine Tafel über Differentialrechnung gestaltet habe, weiß ich, wie schwer es ist, nur das wesentliche in übersichtlicher und anschaulicher Form darzulegen.
- *Anfertigung von verschiedenartigen, eleganten Lösungsmustern für Olympiadeaufgaben:* Wir wollten damit zugleich einen Angriff auf die im Unterricht teilweise noch praktizierte schablonenhafte Lösung von Problemen starten.
- *Ausstellung von Jahresarbeiten:* Meist ging man dabei unter Nutzung von Sekundärliteratur über den Lehrplanstoff hinaus, bzw. setzte sich kritisch mit ihm auseinander. Themen waren u. a.:
  - Herleitung der Tangentengleichung bei Kegelschnitten
  - Bedeutung der 1. und 2. Ableitung für das lokale Verhalten einer Funktion
  - Mathematische Beweise und Beweisverfahren.

Obwohl von den über 50 Arbeiten nur die besten ausgewählt werden konnten, wuchs bei allen Beteiligten das Vertrauen in die eigene Leistung.

Der Erfolg des Vorjahres spornt uns bei der Vorbereitung der diesjährigen MMM an.

Wolfgang Hossack (Kl. 12/1)

Michael Geisler (Kl. 11/1) sei an dieser Stelle gedankt. Er überreichte uns seine Arbeit mit dem Thema „Folgen und Reihen", die wir aus Platzgründen im Augenblick nicht veröffentlichen können. *Red. alpha*



Mathematikwettstreit — gemeinsam mit Freunden

Unsere Kreisolympiade wurde in diesem Schuljahr erstmals mit internationaler Beteiligung durchgeführt. Die Gäste, je vier *Junge Mathematiker* aus der Klassenstufe 9, kamen aus den Städten Brno (ČSSR), Plowdiv (VR Bulgarien), Poznań (VR Polen) und aus der sowjetischen Schule in Cottbus.

Das *Fest der Freundschaft* begann mit einer Stadtrundfahrt durch unsere Bezirkshauptstadt. Am Nachmittag wurde die Kreisolympiade feierlich eröffnet. Der erste Tag unseres Treffens endete mit einer Kinder- und Jugendtanzveranstaltung.

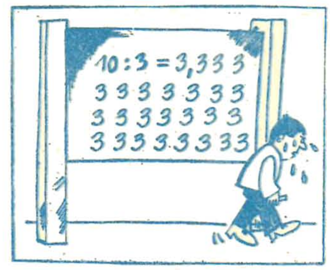
Am 22. November 1972, an dem in allen Kreisen der DDR die Kreisolympiade durchgeführt wurde, traten neben hundert *Jungen Mathematikern* unserer Stadt auch die fünf Mannschaften zum Wettbewerb an. Grundlage des Leistungsvergleiches waren die zentral gestellten Aufgaben, für unsere Gäste von der EOS Cottbus übersetzt. Neun der 20 Schüler erreichten die volle Punktzahl und erhielten erste Preise. Mannschaftssieger wurde Poznań vor Brno.

Das Treffen klang mit einer Exkursion in den Dresdner Zwinger aus. Wir freuen uns jetzt schon auf den nächsten Wettbewerb in Brno.

Uwe Schäfer, Mitglied des Clubs Junger Mathematiker, Haus der Jungen Pioniere Cottbus

Eine Mannschaft der sowjetischen Schule in Altenburg nahm an der Bezirksolympiade des Bezirks Leipzig teil. Unser Foto: *Tanja Grusina* bei der Klausur

In freien Stunden alpha heiter



Glos Nauczycielski, Warschau

Kompliziertes Problem — einfache Lösung

Schreibe eine beliebige dreistellige natürliche Zahl nieder, bei der die erste und letzte Ziffer verschieden sind! Schreibe die Ziffernfolge in umgekehrter Reihenfolge darunter und subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl!
Schreibe dabei dein Ergebnis stets dreistellig, d. h. eine Null an erster Stelle ist mitzuschreiben. Schreibe das Ergebnis nochmals in umgekehrter Reihenfolge darunter und addiere die beiden Zahlen! Stets erhältst du 1 089.
Wie ist das möglich? — In welchem Falle kann die Subtraktionsaufgabe auf eine dreistellige Zahl mit der Anfangsziffer 0 führen? Wie heißt die Zahl?

Oberlehrer H. Bellmann, Freital

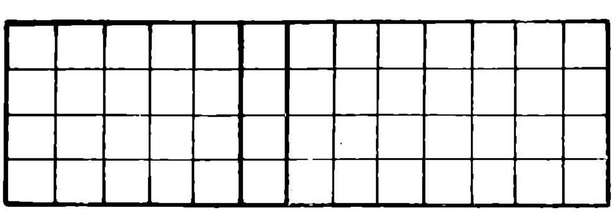
Alle Tassen im Schrank?

Von zwei Tassen hat eine die Form eines Zylinders (Radius R, Höhe H), die andere die Form eines Kegelstumpfs (Grundkreisradius $r<R$, R ist der Radius des oberen Randes.) Beide Tassen fassen gleichviel, wenn sie bis zum Rand gefüllt sind.
Welche Tasse enthält mehr Flüssigkeit, wenn beide nicht bis zum Rand gefüllt sind, sondern der Flüssigkeitsspiegel um $d<\frac{1}{4}H$ unter dem Rand liegt?

Aus: Mathematics in School, Yorkshire (England) Nov. 1971

Verkettung

In jeder Zeile des folgenden Schemas sind die Wortbilder zweier mathematischer Begriffe einzusetzen. Der letzte Buchstabe des ersten Wortes stimmt jeweils mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes überein und ist in eins der markierten Felder einzutragen.

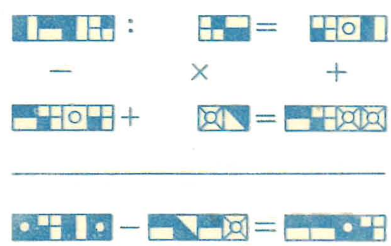


Die in den vier markierten Feldern bei richtigem Einsetzen stehenden Buchstaben ergeben von oben nach unten gelesen das Wortbild eines mathematischen Begriffes.

1. Zeile: Strecke am Kreis — Teil eines Winkels
2. Zeile: Spezieller Körper — Rechenoperation
3. Zeile: Größenangabe, die Flächen, wie Rechteck und Kreis zugeordnet ist — Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat.
4. Zeile: Spezielles Viereck — Spezieller Körper

Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln

Zahlenrätsel



Steffi Nestler, EOS „Erich Weinert", Kl. 11

Kryptarithmetik

Setze für die Variablen a und b Ziffern ein, so daß eine sinnvolle Gleichung entsteht. (Gleiche Variable entsprechen gleichen Ziffern.)

$$(a+a)+3(b+b)=a^a+b^a$$

Michael Jütte, 10. OS Greifswald, Kl. 7

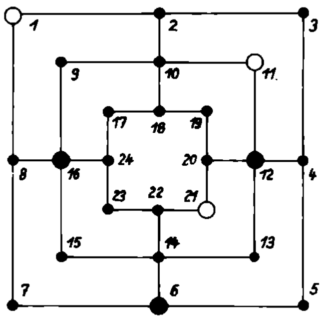
Silbenrätsel

Die Silben
ab – ar – bel – bil – di – dung – gens – graph – hy – in – li – me – mo – na – nal – ne – no – o – or – per – ra – sprung – sym – tan – te – ter – ti – ton – trisch – ur – vall.
ergeben Begriffe aus dem Stoffgebiet *Funktionen*. Es handelt sich beispielsweise um Eigenschaften und Namen bestimmter Funktionen.
Die Anfangsbuchstaben eines jeden Begriffes ergeben bei richtiger Ordnung das Wort *Algorithmus*!

K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

Für Mühlespieler

Die Felder des Mühlespielbretts seien in der folgenden Weise von 1 bis 24 durchnumeriert:



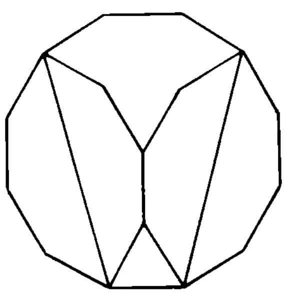
Bei einer Partei hat „Weiß" noch drei Steine, die auf den Feldern 1, 11 und 21 stehen. „Schwarz" hat ebenfalls noch drei Steine, die auf den Feldern 6, 12 und 16 stehen. — „Weiß" ist am Zug. Wie muß „Weiß" spielen, um mit Sicherheit spätestens mit seinem dritten Zug die Partie zu gewinnen?

W. Träger, Schloßberg-OS, Döbeln

Magisches Zwölfeck

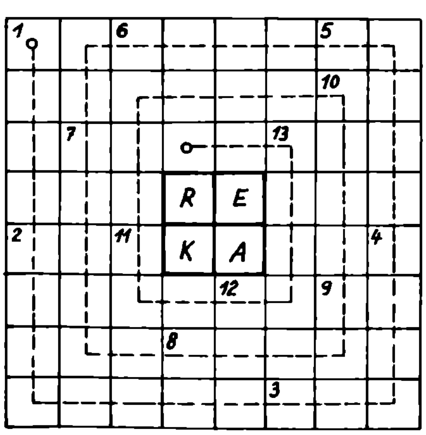
Aus den sechs Teilen des abgebildeten Zwölfecks ist ein Quadrat zu legen.

Aus: Matematicko Fizicki List, Zagreb (SFR Jugoslawien) 1/72/73



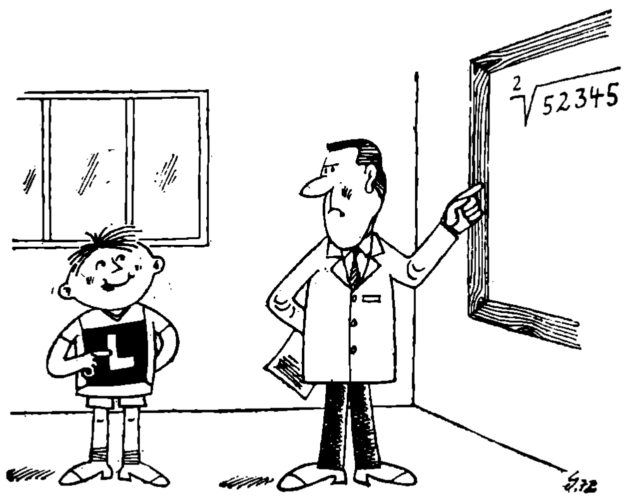
Rätselspirale

In das Quadrat sind bei 1 beginnend Wörter folgender Bedeutung einzutragen, wobei jedes folgende Wort mit dem letzten Buchstaben des vorhergehenden beginnt. Bei richtiger Lösung ergeben die beiden Diagonalen die Namen von zwei berühmten Mathematikern



1. geometrischer Begriff
2. notwendige Bedingungen einer Funktion
3. mehr als eine Schranke
4. unwirtliche Gegend
5. berühmter Mathematiker (1707 bis 1783)
6. wirklich
7. niederländischer Physiker (1853 bis 1928)
8. Werkzeug
9. geometrischer Begriff
10. ein berühmtes Programm nach Felix Klein
11. Hauptstadt der Lettischen SSR
12. indischer Dichter
13. Fluß in der SU

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz



Schrader, aus: DLZ 48/72

Das Un-Staben-Alphabet

Lösungen

10/12▲957 Für alle reellen Zahlen a und alle reellen Zahlen x gilt

$$x^2+ax-a=\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\left(a+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(a+\frac{a^2}{4}\right) \text{ und } \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \geqq 0,$$

weil das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist.

Daher gilt für alle x

$x^2+ax-a>0$ genau dann, wenn

$a+\frac{a^2}{4}<0$, d. h. $a\left(1+\frac{a}{4}\right)<0$ ist.

Das ist aber nur dann der Fall, wenn $a<0$ und $1+\frac{a}{4}>0$, also $\frac{a}{4}>-1$, d. h. $a>-4$, gilt.

Daher erfüllen alle reellen Zahlen a mit $-4<a<0$ und nur diese Zahlen die gegebene Bedingung.

10/12▲958 Da die Gleichung

$$x^3+x^2+ax+b=0 \quad (1)$$

drei reelle Wurzeln hat, gilt für diese Wurzeln x_1, x_2, x_3 nach dem *Vietaschen Wurzelsatz*

$$x_1+x_2+x_3=-1 \quad (2)$$

und $\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a. \quad (3)$

Aus (2) folgt durch Quadrieren auf beiden Seiten

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=1,$$

also wegen (3)

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a=1,$$

d. h. $\quad 2a=1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. Nun gilt für alle reellen Zahlen x_1, x_2, x_3

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqq 0$. Daraus folgt

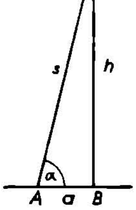
$2a \leqq 1$, also $a \leqq \frac{1}{2}$, w. z. b. w.

W 10/12 ■ 959 Es seien (vgl. die Abb.)

$\overline{AS}=s$ die Achse des Turmes,

$SB=h=18$ m die Höhe des Turmes,

$\sphericalangle SAB=\alpha$ der Neigungswinkel der Achse $\overline{AS}$ gegen die Horizontale AB,



$AB=a=1{,}47$ m die Verschiebung der Turmspitze in der Horizontalen.

a) Dann gilt

$$\tan\alpha=\frac{h}{a}=\frac{18}{1{,}47}=12{,}24.$$

Hieraus erhalten wir (vgl. Tafelwerk, S. 27) die Größe des Neigungswinkels $\alpha=85{,}3°$.

b) Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABS können wir nach dem *Satz des Pythagoras* die Länge der Seite s berechnen:

$$s^2=h^2+a^2=18^2+1{,}47^2=324+2{,}16$$
$$=326{,}16,$$
$$s=18{,}06.$$

Wegen $s-h=18{,}06-18=0{,}06$ erhöhte sich also der Turm nach seiner Wiederaufrichtung nur um rund 0,06 m, d. s. 6 cm.

W 10/12 ■ 960 Bei genauer Rechnung erhält man durch Multiplikation in der Gleichung (1) mit 101 und in der Gleichung (2) mit 302

$$9039{,}5x+3050{,}2y=215\,877{,}4, \quad (6)$$
$$8878{,}8x+3050{,}2y=\;\;25\,217{,}0 \quad (7)$$

und hieraus durch Subtraktion

$$160{,}7x=190\,660{,}4,$$
$$x=\;\;1186{,}4, \quad (8)$$

wobei auf eine Stelle nach dem Komma gerundet wurde. Ferner erhält man durch Einsetzen in (2)

$$y=\frac{83{,}5-29{,}4x}{10{,}1}=-3445{,}2.$$

Die richtigen Werte für x und y weichen von den früher erhaltenen Werten erheblich ab. Daher sind diese als Näherungslösungen nicht brauchbar.

Die großen Fehler sind wie folgt zu erklären: Infolge der Rundung ist in der Gleichung (3) der Koeffizient von x um 0,5 zu groß und in der Gleichung (5) um 1,2 zu klein. Daher ist in der Gleichung $3x=1885$ der Koeffizient von x um $0{,}5-(-1{,}2)=1{,}7$ zu groß. Dieser verhältnismäßig hohe Fehler wirkt sich bei der Division erheblich aus und führt zu einer großen Abweichung bei dem Wert für x und dann auch entsprechend bei dem Wert für y. Daher ist in dem gegebenen Gleichungssystem die Rundung der Koeffizienten nicht zulässig, sie ergibt keine brauchbaren Näherungslösungen.

W 10/12*961 a) Wir zerlegen den Dachkörper $ABCDEF$ (vgl. die Abb.) durch zwei auf der Grundfläche senkrecht stehende Schnitte, die durch E und F gehen und parallel zu AD verlaufen. Dann entstehen zwei Pyramiden $APSDE$ und $QBCRF$ sowie ein Prisma $PSEQRF$.

Jede der Pyramiden hat eine rechteckige Grundfläche mit dem Flächeninhalt $\frac{a-c}{2}\cdot b$ und die Höhe h. Wir erhalten daher das Volumen

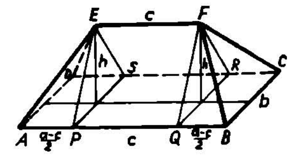
$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a-c}{2}\cdot bh.$$

Die Grundfläche PSE des Prismas hat den Flächeninhalt $\frac{b\cdot h}{2}$. Da seine Höhe gleich c ist, hat das Prisma das Volumen

$$V_2=\frac{bh}{2}c.$$

Daher beträgt das Volumen des Dachkörpers

$$V=2V_1+V_2=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a-c}{2}bh+\frac{bh}{2}c$$
$$=\frac{1}{6}(2a-2c+3c)bh,$$
$$V=\frac{1}{6}(2a+c)bh, \text{ w. z. b. w.}$$



b) Wir erhalten

$$V=\frac{1}{6}(2\cdot 16+8)\cdot 6\cdot 4\text{ m}^3=160\text{ m}^3.$$

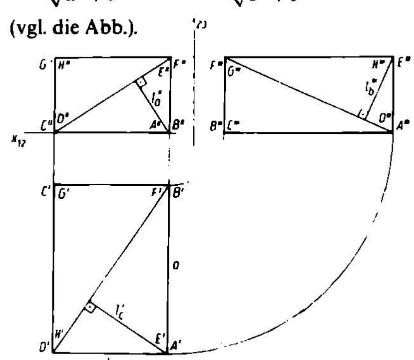
W 10/12*962 Das Gemeinlot l_c liegt lotrecht zur Quaderkante c. Folglich muß l_c parallel zur Grundrißtafel liegen. Ferner schließt l_c mit der Diagonalen DF nach Voraussetzung einen rechten Winkel ein. Da einer der Schenkel dieses rechten Winkels parallel zur Bildebene liegt, geht er bei der Normalprojektion in einen rechten Winkel über. Da l_c sich in wahrer Länge abbildet, kann die folgende Proportion aus dem Grundriß abgelesen werden:

$$l_c : b = a : \sqrt{a^2+b^2}.$$

Also gilt $l_c=\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, und durch zyklische Vertauschung folgt weiter

$$l_b=\frac{c\cdot a}{\sqrt{a^2+c^2}} \quad \text{und} \quad l_a=\frac{b\cdot c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

(vgl. die Abb.).



5▲963 Wir rechnen wie folgt:

2,36 M − 0,52 M = 1,84 M (Preis für Brot und Brötchen);

1,84 M · 2 $\quad$ = 3,68 M (Preis für Fleisch und Wurstwaren);

10,00 M − 2,36 M − 1,84 M − 3,68 M = 2,12 M (verbleibender Geldbetrag).

5▲964 Wir rechnen wie folgt:

350 · 150 = 52500; das rechteckige Grundstück besitzt eine Fläche von 52 500 m² = 5,25 ha.

6,00 ha + 5,25 ha = 11,25 ha (Fläche des Parks nach Erweiterung).

W 5 ■ 965 Die kürzeste Nacht betrage x Stunden, dann beträgt der längste Tag $(x+10)$ Stunden, und es gilt

$$x+(x+10)=24,$$
$$2x+10=24,$$
$$2x=14,$$
$$x=7.$$

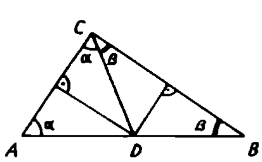
Der längste Tag dauert somit $7+10=17$ Stunden an.

W 5 ■ 966 Hätte der Lehrer von Minsk 12 Dias mehr, von Leningrad 20 Dias mehr angefertigt als von Moskau, also insgesamt $112+12+20=144$ Dias hergestellt, dann besäße er von jeder Stadt gleich viel Dias. Das wären $144:3=48$ Dias je Stadt. Folglich hat er von Minsk $48-12=36$ Dias, von Moskau 48 Dias, von Leningrad $48-20=28$ Dias.

W 5*967 Es gibt genau zwei Primzahlen 29 und 47, die die gestellten Bedingungen erfüllen.
Regine möge x Buntstifte besitzen; dann besitzt Ute $2x$ Buntstifte und Sabine $(x-13)$ Buntstifte; das sind insgesamt $(4x-13)$ Buntstifte. Es gilt entweder $4x-13=29$ oder $4x-13=47$. Daraus folgt entweder $4x=42$ oder $4x=60$. Da 42 nicht durch 4 teilbar ist, gibt es genau eine Lösung $x=15$.
Regine besitzt 15, Ute 30 und Sabine 2 Buntstifte.

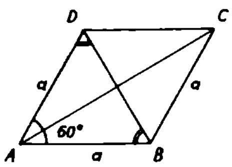
W 5*968 Die siegreiche Mannschaft A habe a Tore, die Mannschaft B habe b Tore geschossen; dann gilt
$(9a):(3b)=9$, also $a:(3b)=1$ bzw. $a=3b$.
Ferner gilt $1 \leqq a+b<6$.
Für $b_1=0$ erhalten wir $a_1=0$, was der Aufgabenstellung widerspricht. Für $b_2=1$ erhalten wir $a_2=3$, also $a+b=4$. Für $b_3=2$ erhalten wir $a_3=6$, also $a+b=8>6$, was nicht möglich ist. Das Spielergebnis lautete somit 3 : 1; es wurden vier Tore geschossen.

6▲969 Es sei D der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC, und es liege D zwischen A und B. Da die Mittelsenkrechten zugleich Symmetrieachsen sind und jeder Punkt einer

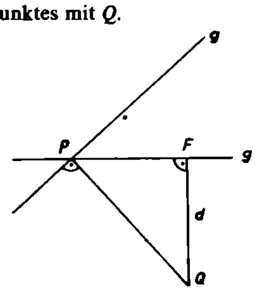


Symmetrieachse von zwei einander entsprechenden Punkten gleich weit entfernt ist, gilt $\overline{AD}=\overline{CD}$ und $\overline{BD}=\overline{CD}$. Die Dreiecke $\triangle CAD$ und $\triangle BCD$ sind somit gleichschenklig und es gilt $\sphericalangle CAD=\sphericalangle ACD=\alpha$ und $\sphericalangle CBD=\sphericalangle BCD=\beta$. Da die Summe der Innenwinkelgrößen eines Dreiecks 180° beträgt, gilt in unserem Falle $2\alpha+2\beta=180°$, also $\alpha+\beta=90°$. Somit ist Winkel $\sphericalangle ACB=90°$, d. h. Dreieck ABC ist rechtwinklig.

6▲970 Aus $\overline{AB}=\overline{AD}=a$ folgt, daß das Dreieck ABD gleichschenklig ist. Somit gilt $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ADB=(180°-\alpha):2=$ $=(180°-60°):2=60°$. Dreieck ABD ist also gleichwinklig und somit auch gleichseitig, und es gilt $\overline{AB}=\overline{BD}$. Nach der Dreiecksungleichung ist die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer als die dritte Seite. Deshalb gilt
$\overline{AB}+\overline{AD}=2a>\overline{BD}$ und $\overline{AB}+\overline{BC}=2a>\overline{AC}$.



W6 ■ 971 Es sei F der Fußpunkt des vom Punkt Q auf die Gerade g gefällten Lotes, und es sei F von P verschieden. Dann gilt $d=\overline{QF}<\overline{QP}$, weil die Länge d des Lotes $\overline{QF}$ kleiner ist als die Verbindungsstrecke jedes von F verschiedenen und auf g liegenden Punktes mit Q.



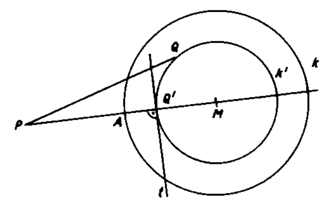
Fällt F mit P zusammen, dann gilt $d=\overline{QP}=\overline{QF}$ und g steht senkrecht auf PQ. Also ist in diesem Fall der Abstand d des Punktes Q von g am größten.

W 6 ■ 972 Wegen $96=2^5\cdot 3$ hat der gesuchte größte gemeinsame Teiler beider Zahlen eine Primfaktorenzerlegung von der Form $2^x\cdot 3^y$, wobei x und y natürliche Zahlen sind und $x\leqq 5$ und $y\leqq 1$ gilt.
Weil die Quersumme $s=36$ der zweiten Zahl durch 3 teilbar ist, gilt $y=1$. Weil die aus den letzten zwei Ziffern der zweiten Zahl gebildete Zahl 24 durch 4 und somit die Zahl selbst durch 4 teilbar ist, gilt $x=2$. Denn die zweite Zahl ist, weil 324 nicht Vielfaches von 8 ist, nicht durch 8 teilbar. Der g. g. T. beider Zahlen lautet somit $2^2\cdot 3^1=12$.

W 6*973 Für die Quersumme s der fünfstelligen Zahl gilt $4+8+x+7+y=19+x+y$. Damit die fünfstellige Zahl durch 3 teilbar ist, muß $x+y$ bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Falls x bei Division durch 3 den Rest 0 läßt, muß y bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Den Rest 0 lassen bei Division durch 3 nur die Zahlen 0, 3, 6 und 9. Den Rest 2 lassen bei Division durch 3 die Zahlen 2, 5 und 8. In diesem Fall erhalten wir $4\cdot 3=12$ Lösungen.
Falls x bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, muß y bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1 lassen. Es ist dies möglich für $x=1$ oder 4 oder 7 und für $y=1$ oder 4 oder 7. In diesem Falle erhalten wir $3\cdot 3=9$ Lösungen.
Falls x bei Division durch 3 den Rest 2 läßt, muß y bei Division durch 3 den Rest 0 lassen. Dies trifft zu für $x=2$ oder 5 oder 8 und für $y=0$ oder 3 oder 6 oder 9. Wir erhalten somit $3\cdot 4=12$ Lösungen.
Insgesamt besitzt die Aufgabe $12+9+12=33$ Lösungen.

W 6*974 Es sei Winkel $\sphericalangle ABC=\beta$, dann gilt $\sphericalangle CBP=\sphericalangle PBA=\frac{1}{2}\beta$. Ferner gilt $\sphericalangle PQC=\sphericalangle BQD=90°-\frac{1}{2}\beta$ als Scheitelwinkel. Im rechtwinkligen Dreieck PBC gilt Winkel $\sphericalangle CPB=90°-\frac{1}{2}\beta$. Somit besitzt das Dreieck PQC zwei kongruente Winkel, nämlich $\sphericalangle CPQ=\sphericalangle CQP=90°-\frac{1}{2}\beta$. Da in einem Dreieck gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, gilt $\overline{CP}=\overline{CQ}$, d. h., Dreieck PQC ist gleichschenklig.

7▲975 Für jeden inneren Punkt Q des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gilt $\overline{MQ}<\overline{MA}=r$. Wir zeichnen einen Kreis k' um M als Mittelpunkt mit dem Radius $\overline{MQ}$, der $\overline{AM}=r$ in einem inneren Punkt Q' schneidet. Da der Punkt Q' Berührungspunkt der in Q' an den Kreis k' gelegten Tangente t ist und P und Q auf verschiedenen Seiten von t liegen, ist $\overline{PQ'}<\overline{PQ}$. Ferner gilt $\overline{PQ'}=\overline{PA}+\overline{AQ'}$, also $\overline{PA}<\overline{PQ'}$. Deshalb gilt auch $\overline{PA}<\overline{PQ}$.



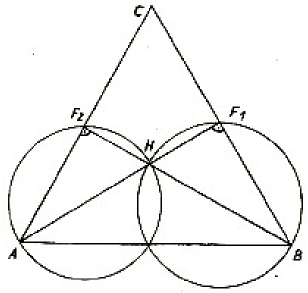
7▲976 Angenommen es haben x Schüler die Note 4 erhalten, dann haben $2x$ Schüler die Note 2 erhalten und $(23-3x)$ Schüler die Note 1. Demnach gilt

$$\frac{(23-3x)\cdot 1+2x\cdot 2+8\cdot 3+x\cdot 4}{31}=2,$$
$$23-3x+4x+24+4x=62,$$
$$47+5x=62,$$
$5x=15$, also $x=3$.

14 Schüler erhielten die Note 1, 6 Schüler die Note 2, 8 Schüler die Note 3 und 3 Schüler die Note 4.

W 7 ■ 977 Es seien F_1 Fußpunkt der Höhe $\overline{AF_1}$ zur Seite $\overline{BC}$ und F_2 Fußpunkt der Höhe $\overline{BF_2}$ zur Seite $\overline{AC}$. Wegen $\sphericalangle BF_1H=\sphericalangle AF_2H=90°$ liegt F_1 auf dem Thaleskreis über $\overline{BH}$ und F_2 auf dem Thaleskreis über $\overline{AH}$ als Durchmesser. Daraus folgt die folgende Konstruktion:
Wir zeichnen zunächst das Dreieck $\triangle ABH$ aus seinen drei Seiten $\overline{AB}=c=11$ cm, $\overline{AH}=6$ cm und $\overline{BH}=7$ cm. Danach zeichnen wir den Kreis mit $\overline{AH}$ und den Kreis mit $\overline{BH}$

als Durchmesser. Die Gerade BH schneidet den ersten Kreis in F_2, die Gerade AH den zweiten Kreis in F_1. Die Verbindungsgeraden AF_2 und BF_1 schneiden sich in C.



W 7 ■ 978 Vor dem Verdunsten bestand die Kochsalzlösung zu 99 % aus Wasser und zu 1 % aus Kochsalz, d. h. sie enthielt 1 g Kochsalz, da die Masse der Lösung 100 g betrug. Nach dem Verdunsten bestand die Kochsalzlösung zu 2 % aus Kochsalz. Aus $2:100=1:x$ folgt $x=50$; die Kochsalzlösung besaß nunmehr nur noch 50 g Masse.

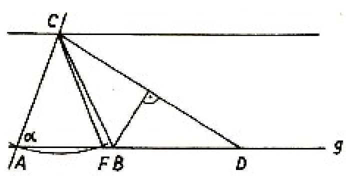
W 7 * 979 Angenommen es wurden a Rechenstäbe, b Zirkel und c Zeichenhefte angeschafft; dann gilt

$$\begin{array}{rl} 10a+3b+0{,}5c= 100 & |\cdot 2 \\ a+b+c=100 & |\cdot(-1) \\ \hline 20a+6b+c=200 & | \\ -a-b-c=-100 & | \; + \\ \hline 19a+5b=100 & \\ 5b=100-15a-4a & \\ b=20-3a-\dfrac{4a}{5} & \end{array}$$

b ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn a Vielfaches von 5 ist. Das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, die den Bedingungen entspricht, nämlich $a=5$, $b=1$ und $c=94$. Es wurden 5 Rechenstäbe, 1 Zirkel und 94 Zeichenhefte eingekauft.

W 7*980 Verlängert man im Dreieck ABC die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus bis D um $\overline{BC}=a$, so gilt $\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{AB}=a+c$, und das Dreieck DCB ist gleichschenklig. Beschreibt man um C mit dem Radius $\overline{AC}=b$ einen Kreis, so schneidet dieser die Seite $\overline{AB}$ wegen $b<c$ in einem inneren Punkt F, und es gilt $\sphericalangle CAF=\sphericalangle CFA=\alpha$, $\sphericalangle CFD=180°-\alpha$ und $\overline{FD}=a+c-b$.

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion:



Wir zeichnen eine Gerade g, legen auf ihr einen Punkt A fest und tragen in A an g den Winkel $\alpha=70°$ an. Die zu g im Abstand $h_c=4$ cm zu konstruierende Parallele schneidet den freien Schenkel von α in C. Der Kreis um C mit $\overline{AC}=b$ als Radius schneidet g in F. Der Kreis um F mit dem Radius $a+c-b=5$ cm schneidet g in D. Die Mittelsenkrechte von $\overline{CD}$ schneidet g in B.

8 ▲ 981 Es sei x eine natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft; dann ist ihr Nachfolger $x+1$, und es gilt

$$5x=(x+1)^2+1, \qquad (1)$$

also $$(x+1)^2+1-5x=0. \qquad (2)$$

Wir setzen

$$f(x)=(x+1)^2+1-5x$$

und erhalten, wenn wir für x der Reihe nach 0, 1, 2, 3 einsetzen.

$$\begin{aligned} f(0)&=\ \ 1+1-\ \ 0=2,\\ f(1)&=\ \ 4+1-\ \ 5=0,\\ f(2)&=\ \ 9+1-10=0,\\ f(3)&=16+1-15=2. \end{aligned}$$

Für $x \geqq 4$ wird

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)(x+1)+1-5x\\ &>5\cdot x+1-5x>0, \end{aligned}$$

da $x+1 \geqq 5$ und $x+1>x$ ist.

Also gilt $f(x)=0$ nur für $x=1$ und $x=2$. Daher sind die natürlichen Zahlen 1 und 2 die einzigen natürlichen Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben.

Bemerkung: Wer schon quadratische Gleichungen lösen kann, kann auch wie folgt vorgehen:

Man erhält aus (2)

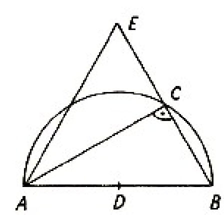
$$x^2+2x+1+1-5x=0,$$
$$x^2-3x+2=0$$

und hieraus die beiden Lösungen

$$x_1=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2,$$

$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1.$$

8 ▲ 982 a) Da das Dreieck ABC rechtwinklig mit $\gamma=90°$ ist, ist der Mittelpunkt D der Hypotenuse $\overline{AB}$ gleichzeitig Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks (vgl. die Abb.).



Daraus ergibt sich die Konstruktion:

Wir zeichnen die Hypotenuse $\overline{AB}=6$ cm und konstruieren um den Mittelpunkt D dieser Seite den Kreis mit dem Radius $r=3$ cm. Dann tragen wir an $\overline{AB}$ in A den Winkel $\alpha=30°$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet den Kreis um D in dem Punkt C. ABC ist das verlangte Dreieck.

b) Verlängert man die Seite $\overline{BC}$ über C hinaus um sich selbst bis zum Punkt E, so sind die Dreiecke ABC und ACE kongruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel übereinstimmen. Daher gilt $\sphericalangle CEA=\sphericalangle ABC=60°$, d. h. das Dreieck ABE ist gleichseitig mit der Seite $c=6$ cm. Nun ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite c gleich $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist halb so groß, also gleich

$$A=\frac{c^2}{8}\sqrt{3}=\frac{36}{8}\sqrt{3}\text{ cm}^2=\frac{9}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^2$$
$$\approx 7{,}79\text{ cm}^2.$$

W 8 ■ 983 Da die erste Aussage wahr ist, läuft Sabine schneller als Gabriele. Daher ist in der dritten Aussage die Schlußfolgerung falsch, also muß in dieser Aussage auch die Voraussetzung falsch sein, d. h. Sabine läuft nicht schneller als Ellen. Es sind also zwei Fälle möglich:

a) Ellen läuft ebenso schnell wie Sabine. Dann ist in der zweiten Aussage die Voraussetzung wahr, also auch die Schlußfolgerung wahr, d. h., Gabriele läuft schneller als Ellen, also auch schneller als Sabine. Das widerspricht aber der ersten Aussage. Daher kann dieser Fall nicht eintreten.

b) Ellen läuft schneller als Sabine. Dann ist die Voraussetzung in der zweiten Aussage falsch, also kann auch die Schlußfolgerung falsch sein, d. h. die zweite Aussage ist wahr. Es sind also in diesem Falle alle drei Aussagen wahr.

Wir erhalten daher das folgende Ergebnis:

Ellen läuft schneller als Sabine, und Sabine läuft schneller als Gabriele. Ellen läuft daher am schnellsten von den drei Mädchen, und Gabriele läuft am langsamsten.

W 8 ■ 984 Mit 35 Mähdreschern E 512 können an einem Einsatztag $15\cdot 35$ ha $=525$ ha abgeerntet werden und mit y Mähdreschern E 175 an einem Einsatztag $4y$ ha. Insgesamt können also an einem Einsatztag $(525+4y)$ ha abgeerntet werden. Da die gesamte Ernte (14 000 ha) in t Einsatztagen eingebracht werden soll, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} (525+4y)t&=14\,000,\\ 525t+4yt&=14\,000,\\ 4yt&=14\,000-525t,\\ y&=\frac{14\,000-525t}{4t}=\frac{3\,500}{t}-131{,}25. \end{aligned}$$

Damit haben wir schon die Anzahl y der einzusetzenden Mähdrescher E 175 als Funktion der Anzahl t der Einsatztage dargestellt.

a) Bei 24 Einsatztagen ($t=24$) erhalten wir $y=\frac{3\,500}{24}-131{,}25=14{,}58$. Es werden also 15 Mähdrescher E 175 benötigt.

b) Bei 25 Einsatztagen ($t=25$) erhalten wir $y=8{,}75$. Es werden also 9 Mähdrescher E 175 benötigt.

c) Bei 26 Einsatztagen ($t=26$) erhalten wir $y=3{,}37$. Es werden also 4 Mähdrescher E 175 benötigt.

Für $t=23$ erhalten wir $y=20{,}92$. Da nur 18 Mähdrescher E 175 zur Verfügung stehen, kann also die gesamte Ernte nicht in 23 Einsatztagen eingebracht werden.

W 8*985 Für $n=0$ gilt $z=n!-1=0!-1=1-1=0=0^2$.

Für $n=1$ gilt $z=1!-1=0=0^2$.

Für $n=2$ gilt $z=2!-1=2-1=1=1^2$.

In diesen drei Fällen ist also jeweils z gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

Nun sei $n \geqq 3$. Dann ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ durch 3 teilbar; also gilt $n! = 3k$, wobei k eine natürliche Zahl ist, und $z = n! - 1 = 3k - 1$. Wäre nun $z = x^2$ eine Quadratzahl, so wäre wegen $x = 3s$ oder $x = 3s + 1$ oder $x = 3s - 1$

$$x^2 = 9s^2 = 3 \cdot (3s^2)$$

oder $$x^2 = (3s+1)^2 = 9s^2 + 6s + 1 = 3 \cdot s(3s+2) + 1$$

oder $$x^2 = (3s-1)^2 = 9s^2 - 6s + 1 = 3 \cdot s(3s-2) + 1.$$

In jedem Falle wäre also $z = x^2$ entweder durch 3 teilbar oder würde bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen. Das steht aber im Widerspruch zu der obigen Gleichung $z = 3k - 1$.

Also ist für $n \geqq 3$ die Zahl $z = n! - 1$ niemals eine Quadratzahl. Daher ist z nur für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ eine Quadratzahl.

Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt mit dem Nachweis, daß z für $n \geqq 3$ keine Quadratzahl ist, schneller zum Ziel:

Für $n \geqq 3$ gilt $z = n! - 1 \equiv -1 \pmod 3$.

Nun folgt aus

$$x \equiv 0 \pmod 3 \quad x^2 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$x \equiv 1 \pmod 3 \quad x^2 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$x \equiv -1 \pmod 3 \quad x^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

In keinem Falle ist also $z = x^2 \equiv -1 \pmod 3$, wobei der Nachweis erbracht ist.

W 8*986 Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also zunächst an, daß in einem Dreieck ABC die Höhe h_c und die Seitenhalbierende s_c zusammenfallen. Dann weisen wir nach, daß dieses Dreieck gleichschenklig ist. Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, womit die Behauptung im 1. Fall (Höhe und Seitenhalbierende) bewiesen ist. Entsprechend verfahren wir im 2. Fall (Höhe und Winkelhalbierende) sowie im 3. Fall (Seitenhalbierende und Winkelhalbierende).

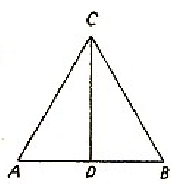
1. Fall: In dem Dreieck ABC mögen die Höhe $\overline{CD}$ und die Seitenhalbierende $\overline{CD}$ zusammenfallen (siehe Bild 1).

Dann gilt $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$ und $\overline{AD} = \overline{DB}$. Wegen $\overline{CD} = \overline{CD}$ folgt hieraus nach dem Kongruenzsatz (sws)

$$\triangle ADC \cong \triangle CDB,$$
also $$\overline{AC} = \overline{BC}.$$

Daher ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

Bild 1



2. Fall: In dem Dreieck ABC mögen die Höhe $\overline{CD}$ und die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ zusammenfallen (siehe Bild 1).

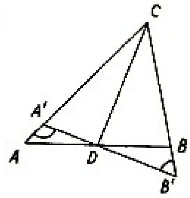
Dann gilt $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$ und $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCD$. Wegen $\overline{CD} = \overline{CD}$ folgt hieraus nach dem Kongruenzsatz (wsw)

$$\triangle ADC \cong \triangle CDB,$$
also $$\overline{AC} = \overline{BC}.$$

Daher ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

3. Fall: In dem Dreieck ABC mögen die Seitenhalbierende $\overline{CD}$ und die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ zusammenfallen (siehe Bild 2).

Bild 2



Dann stimmen die Dreiecke ADC und CDB zwar in zwei Seiten ($\overline{CD}$ und $\overline{CD}$ sowie $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$) und einem Winkel ($\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle BCD$) überein, aber daraus können wir nach dem Kongruenzsatz (ssw) noch nicht schließen, daß diese Dreiecke kongruent sind; denn bei diesem Kongruenzsatz wird vorausgesetzt, daß die Dreiecke in dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, was hier nicht zutreffen muß. Wir müssen daher den Beweis für die Kongruenz der Dreiecke ADC und CDB anders führen. Angenommen, diese Dreiecke seien nicht kongruent. Dann steht $\overline{CD}$ nicht senkrecht auf $\overline{AB}$. Wir errichten nun auf $\overline{CD}$ in D die Senkrechte, die nicht mit $\overline{AB}$ zusammenfällt und $\overline{CA}$ in A' sowie $\overline{CB}$ in B' schneidet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß A' ein innerer Punkt der Seite $\overline{AC}$ und B' ein äußerer Punkt der Seite $\overline{BC}$ ist. Dann gilt $\overline{A'D} = \overline{DB'}$, weil die Dreiecke $A'DC$ und CDB' kongruent sind (sww). Hieraus folgt weiter $\triangle ADA' \cong \triangle BDB'$, weil diese Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (Scheitelwinkel) übereinstimmen.

Daher gilt $\sphericalangle DA'A = \sphericalangle DB'B$. Diese Winkel sind aber Wechselwinkel an den geschnittenen Geraden CA und CB; also sind diese Geraden parallel, was zu einem Widerspruch führt, weil zwei Seiten eines Dreiecks nicht parallel sein können. Damit ist bewiesen, daß die Dreiecke ADC und CDB kongruent sind und wegen $\overline{AC} = \overline{BC}$ das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Da in jedem der drei Fälle das Dreieck ABC gleichschenklig ist, haben wir bewiesen, daß in einem nicht gleichschenkligen Dreieck weder die Höhe und die Seitenhalbierende noch die Höhe und die Winkelhalbierende noch die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende zusammenfallen können.

9▲987 Durch Umformung erhalten wir

$$z = n^6 + 8n^2 - 1$$
$$= (n^6 + 4n^4 + 4n^2) - (4n^4 - 4n^2 + 1)$$
$$= (n^3 + 2n)^2 - (2n^2 - 1)^2$$
$$= (n^3 + 2n + 2n^2 - 1)(n^3 + 2n - 2n^2 + 1).$$

Wegen $n \geqq 1$ gilt

$n^3 + 2n + 2n^2 - 1 \geqq 1 + 2 + 2 - 1 = 4$ und

$n^3 + 2n - 2n^2 + 1 = n(n^2 - 2n) + 2n + 1$

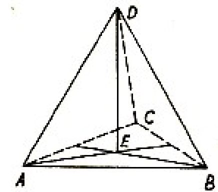
$= n(n^2 - 2n + 1) - n + 2n + 1$

$= n(n-1)^2 + n + 1 \geqq 1 + 1 = 2,$

da $n \geqq 1$ und $n(n-1)^2 \geqq 0$ ist.

Die Zahl z läßt sich also stets in zwei Faktoren zerlegen, die beide natürliche Zahlen und größer als 1 sind. Damit ist bewiesen, daß die Zahl z niemals eine Primzahl ist.

9▲988 Es seien $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $\overline{AB} = 2a$ und E der Fußpunkt der von D ausgehenden Höhe dieses Tetraeders (vgl. die Abb.).



Dann ist E der Schnittpunkt der drei Höhen des gleichseitigen Dreiecks ABC, und es gilt

$$\overline{BE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}.$$

Ferner gilt $\overline{BD} = 2a$, und wir erhalten für die Länge h der Höhe $\overline{DE}$ des Tetraeders die Gleichung

$$h^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 = (2a)^2 - \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 4a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{8}{3}a^2, \quad \text{also}$$
$$h = a\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{6}.$$

Da der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ABC

$G = \frac{1}{4}(2a)^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$ beträgt, erhalten wir für das Volumen des Tetraeders $ABCD$

$$V_1 = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{6} = \frac{2}{3}a^3\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Nun ist das Volumen eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius a und der Höhe a gleich

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \frac{1}{3}\pi a^3. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt wegen $\sqrt{8} < 3 < \pi$

$$V_1 = \frac{2}{3}a^3\sqrt{2} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{8} < \frac{1}{3}\pi a^3 = V_2$$

d. h. das Volumen des geraden Kreiskegels ist größer als das Volumen des Tetraeders.

Für $a = 10$ cm erhalten wir z. B.

$$V_1 = \frac{2}{3} \cdot 1000\sqrt{2}\ \text{cm}^3 \approx 943\ \text{cm}^3,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1000\ \text{cm}^3 \approx 1047\ \text{cm}^3.$$

W 9 ■ 989 Um die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{9}{x-2} \leqq 3 \qquad (1)$$

zu ermitteln, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $x - 2 > 0$, d. h. $x > 2$.

Dann ist die Ungleichung (1) für alle x erfüllt, für die

$$9 \leqq 3(x-2),$$
$$9 \leqq 3x - 6,$$
$$3x \leqq 15, \quad x \geqq 5.$$

Wegen $5>2$ ist also in diesem Falle die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen x mit $x \geqq 5$ erfüllt.

2. Fall: $x-2<0$, d. h. $x<2$.

Dann ist (1) für alle x erfüllt, für die

$$9 \geqq 3(x-2),$$
$$9 \geqq 3x-6,$$
$$3x \geqq 15, \quad x \leqq 5.$$

In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen x mit $x<2$ erfüllt.

Damit haben wir die Lösungsmenge der Ungleichung (1) erhalten; diese Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen x, für die $x<2$ oder $x \geqq 5$ gilt.

W 9 ■ 990 a) Wir erhalten die Gleichungen

$475 = m \cdot 0 + n$,

$25 = m \cdot 62 + n$, also

$n = 475$ und $m : 62 + 475 = 25$, also

$$m = \frac{25-475}{62} = -\frac{450}{62} = -7{,}258.$$

Die gesuchte Funktion ist also durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$y = -7{,}258x + 475.$$

b) Für $x_1 = 25$ erhalten wir

$y_1 = -7{,}258 \cdot 25 + 475 \approx 294$,

für $x_2 = 40$ erhalten wir

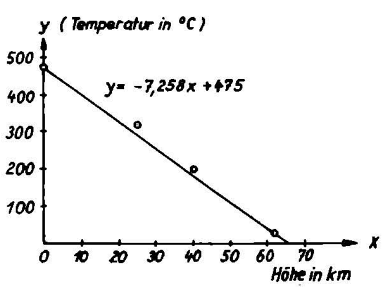
$y_2 = -7{,}258 \cdot 40 + 475 \approx 185$.

Die gemessenen Werte sind also etwas höher als die berechneten. Es ergeben sich die prozentualen Fehler:

$$x_1 = 25,\ \delta_1 = \frac{320-294}{320} = \frac{26}{320} \approx 0{,}081 = 8{,}1\,\%;$$

$$x_2 = 40,\ \delta_2 = \frac{200-185}{200} = \frac{15}{200} \approx 0{,}075 = 7{,}5\,\%.$$

Die Abweichungen von den gemessenen Werten sind also, wenn man die Schwierigkeiten bei der Messung in der Venusatmosphäre berücksichtigt, mit 8,1 % bzw. 7,5 % verhältnismäßig gering, so daß mit Recht ein linearer Verlauf der Funktion angenommen werden kann.



c) Die Abbildung zeigt den Graph der Funktion. Die gemessenen Temperaturwerte sind jeweils durch kleine Kreise gekennzeichnet. Man erkennt auch hier, daß die gemessenen Werte für $x_1 = 25$ und $x_2 = 40$ nur wenig von der Geraden abweichen. Es sei noch bemerkt, daß für die Maßzahlen von x und y jeweils ein anderer Maßstab gewählt wurde, damit der Verlauf der Funktion recht deutlich wird.

Lösungen zu alpha-heiter (3/73)

Kompliziertes Problem — einfache Lösung

Der Minuend habe die Ziffernfolge a, b, c, wobei auf Grund der Aufgabenstellung $a>c$ gelten soll. Der Subtrahend hat dann die Ziffernfolge c, b, a mit $0<a, c \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$.

Zur Subtraktionsaufgabe: In der Einerstelle ist $c-a$ nicht im Bereich der natürlichen Zahlen durchführbar, d. h. die letzte Ziffer der Differenz ergibt sich aus $(10+c)-a$. Hieraus folgt, daß die mittlere Ziffer der Differenz 9 sein muß, denn $1+9+b=10+b$. Da die 10 in der Hunderterstelle ihre Berücksichtigung findet, lautet die 1. Ziffer der Differenz $a-(c+1)$.

Hunderter	Zehner	Einer	
a	b	c	
c	b	a	
$a-(c+1)$	9	$(10+c)-a$	*Differenz*
$(10+c)-a$	9	$a-(c+1)$	
10	8	9	Summe

Zur Additionsaufgabe: Das Ergebnis in der Einerstelle ist stets 9, in der Zehnerstelle stets 18, wobei die 1 in der Hunderterstelle berücksichtigt wird, so daß hier das Endergebnis 10 lautet.

b) Die erste Ziffer der Differenz ist nur dann 0, wenn $a=c+1$ ist. Die Einerstelle lautet dann stets $(10+c)-(c+1)=9$. Nur im Falle 0 9 9 steht also in der Differenz eine 0 an der ersten Stelle, und es gilt dann

$$\begin{array}{r} 099 \\ +\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Alle Tassen im Schrank?

(Übersetzt und bearbeitet v. Oberlehrer H. Büchel, Zella-Mehlis)

Alle „Zahlenangaben" (R, r, d, H) verwirren nur! Natürlich enthält die „Stumpftasse" mehr Flüssigkeit. Die „Fehlmenge" ist bei ihr nur ein Kegelstumpfvolumen (mit der Höhe d), während sie im anderen Fall ein Zylindervolumen (mit der Höhe d) ist. Der Unterschied im Volumen ließe sich berechnen, aber danach ist nicht gefragt.

Verkettung

r	a	d	i	u	s	c	h	e	n	k	e	l
p	r	i	s	m	a	d	d	i	t	i	o	n
i	n	h	a	l	t	a	n	g	e	n	t	e
t	r	a	p	e	z	y	l	i	n	d	e	r

Zahlenrätsel

$$\begin{array}{rcrcr} 7276 & : & 68 & = & 107 \\ - & & \cdot & & + \\ 2101 & + & 43 & = & 2144 \\ \hline 5175 & - & 2924 & = & 2251 \end{array}$$

Kryptarithmetik

$$(2+2)+3(6+6)=2^2+6^2$$
$$4 \quad +3 \cdot 12 \quad =4 \ +36$$
$$4+36 \quad =40$$
$$40 \quad =40$$

Silbenrätsel

Abbildung – Linear – Graph – Ordinate – Rational – Intervall – Tangens – Hyperbel – Monoton – Ursprung – Symmetrisch

Für Mühlespieler

Da beide Spieler nur noch drei Steine haben, können sie mit ihren Steinen springen, statt nur von einem Feld auf ein benachbartes zu ziehen. Im ersten Zug springt „Weiß" mit dem Stein vom Feld 21 auf Feld 2. „Schwarz" springt entweder (erster Fall) mit einem seiner Steine auf Feld 3 oder er führt (zweiter Fall) einen anderen möglichen Zug aus.

Im zweiten Fall wird „Weiß" bei seinem zweiten Zug den Stein von Feld 11 auf Feld 3 setzen, damit eine Mühle und die Partie mit seinem zweiten Zug gewinnen. Im ersten Fall wird „Weiß" bei seinem zweiten Zug den Stein von Feld 1 auf Feld 10 setzen.

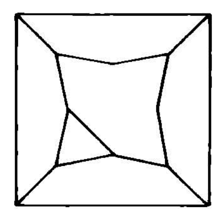
Die nun möglichen Züge von „Schwarz" unterscheiden wir in der folgenden Weise:

Fall a: „Schwarz" springt mit einem seiner Steine auf Feld 18.

Fall b: „Schwarz" springt nicht mit einem seiner Steine auf Feld 18.

Im Fall a springt „Weiß" von Feld 2 auf Feld 9, im Fall b von Feld 11 auf Feld 18. In beiden Fällen a und b erringt „Weiß" eine Mühle und gewinnt die Partie im dritten Zug.

Magisches Zwölfeck

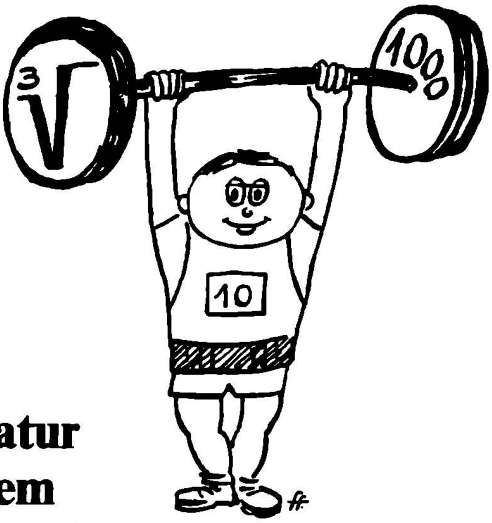


Rätselspirale

1 L	E	6 R	E	L	U	5 E	D
I	A	N	A	L	R	10 E	Ö
N	7 L	G	N	O	13 D	N	N
I	O	E	R	E	N	E	I
2 E	R	11 R	K	A	A	B	4 E
I	E	I	G	12 A	N	E	Z
N	N	T	8 Z	A	N	G	N
D	E	U	T	I	3 G	R	E

„Bei aller Liebe zur Mathematik — um 23 Uhr gehörst du nach Hause."

Glos Nauczycielski, Warszawa



Literatur aus dem Sportverlag

K.-H. Stichert

Schülersport — Sportschwimmen

160 S., 5,— M

Das Selbsterlernen der Techniken der vier Wettkampfschwimmarten für Schüler ist jetzt möglich! Ein methodisch gut aufbereitetes Sportfachbuch, leichtverständlich.

W. Lohmann

Schülersport — Lauf, Sprung, Wurf

160 S., 5,— M

Ein programmiertes Schülerfachbuch zum Selbsterlernen leichtathletischer Techniken und zum Selbsttraining.

N. Rogalski/E.-G. Degel

Schülersport — Fußball

160 S., 5,— M

Fußball ist ein Sportfachbuch für Schüler, mit dessen Hilfe sie die einzelnen Techniken und grundlegendsten taktischen Verhaltensweisen weitgehend selbständig erlernen können. Der Stoff wird in programmierter Form leicht faßbar dargeboten.

H. Rothert

Schülersport — Ringen

160 S., 5,— M

Dieser programmierte Lernstoff für die Hand des Schülers ist ein wesentlicher Beitrag zur Verbesserung der Grundausbildung im Ringkampfsport. Dieses Buch behandelt die olympischen Disziplinen *Klassischer Stil* und *Freier Stil.*

Über das Symbol der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten

Der rot gedruckte Teil des abgebildeten vereinfachten Symbols der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten symbolisiert die fünf bewohnten Erdteile und das Recht ihrer Menschen auf Gleichberechtigung. Dieser Teil wird begrenzt von fünf kongruenten Kreisbögen, von denen je zwei benachbarte Kreisbögen jeweils gemeinsame Endpunkte haben, die sämtlich auf einem Kreis liegen.
Der schwarz gedruckte Teil des abgebildeten Symbols, der die Erdkugel darstellt, besteht aus einem Kreis, zwei senkrecht aufeinander stehenden Durchmessern dieses Kreises und einer Ellipse, mit einem dieser Durchmesser als Hauptachse und der halben Länge des zweiten Durchmessers als Nebenachse.
Unter Beachtung dieser Angaben haben wir für unsere interessierten Leser folgende Aufgaben zusammengestellt:

5▲1077 Zeichne mit Zirkel, Lineal und Winkelmesser das Bild des rotgedruckten Teiles des abgebildeten Symbols der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten! Der Radius des Kreises, auf dem die Endpunkte der kongruenten Kreisbögen liegen, betrage $r=4$ cm.

6▲1078 Die abgebildete Ellipse läßt sich näherungsweise durch zwei kongruente Kreisbögen ersetzen, die einen der beiden Kreisdurchmesser als gemeinsame Sehne haben und die die auf dem anderen Durchmesser liegenden Radien halbieren. Es ist diese Näherungskonstruktion für den Durchmesser des Kreises $d=7$ cm auszuführen.

7▲1079 Vervollständigt man die im rotgedruckten Teil des abgebildeten Symbols dargestellten fünf kongruenten Kreisbögen zu vollständigen Kreisen, so schneiden sich diese Kreise in weiteren fünf Punkten. Welche Figur wird durch diese weiteren fünf Schnittpunkte bestimmt?

8▲1080 Im schwarzgedruckten Teil des abgebildeten Symbols werde die dem Kreis einbeschriebene Ellipse durch zwei kongruente Kreisbögen ersetzt, die den einen der abgebildeten Durchmesser als gemeinsame Sehne haben und die die auf dem anderen Durchmesser liegenden beiden Radien halbieren. Es ist der Abstand des Mittelpunkts des dargestellten Kreises vom Mittelpunkt des zu einem der Kreisbögen gehörigen Kreises zu berechnen.

9▲1081 Die im schwarzgedruckten Teil des abgebildeten Symbols dargestellte Ellipse ist das durch senkrechte Eintafelprojektion entstandene Bild eines Längenkreises des Erdglobus, wobei die zugehörige Bildebene die Ebene ist, in der der dargestellte Kreis liegt. Welchen Winkel bildet die Ebene, die den Längenkreis enthält, mit der Ebene, die den dargestellten Kreis enthält?

10/12▲1082 Es sei s die Verbindungsstrecke (Sehne) der beiden Endpunkte eines der im rotgedruckten Teil des abgebildeten Symbols dargestellten fünf kongruenten Kreisbögen und r der Radius des Kreises, auf dem sämtliche Endpunkte dieser Kreisbögen liegen. Es ist zu zeigen, daß s und r der Gleichung

$$s=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

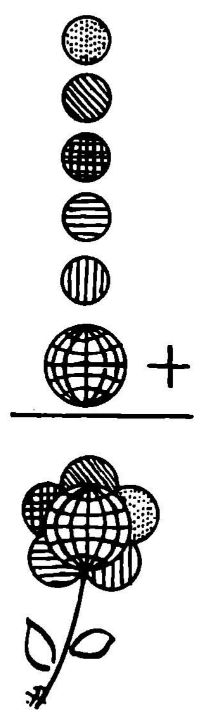
genügen.

Th. Scholl/W. Träger

---

von Prag bis Berlin

Stationen des Festivals



I Prag (20. 7. bis 17. 8. 1947)
Es war die erste Zusammenkunft der friedliebenden Weltjugend nach dem zweiten Weltkrieg, die den unbeugsamen Willen, ihre im Krieg geschmiedete Einheit aufrechtzuerhalten und für Frieden und Demokratie zu wirken, manifestierte. (17000 Teilnehmer aus 72 Ländern)

II Budapest (11. bis 18. 8. 1949)
Das Festival unter der Losung „Jugend, vereinige dich! Vorwärts für einen dauerhaften Frieden, Demokratie, nationale Unabhängigkeit und eine bessere Zukunft der Völker!" (10000 Teilnehmer aus 82 Ländern) Erstmalig war eine Delegation unserer FDJ vertreten, die am 21. 3. 1948 in den WBDJ aufgenommen wurde.

III Berlin (5. bis 19. 8. 1951)
Dieses Festival bewies das Vertrauen der demokratischen Weltjugend in die Jugend des ersten deutschen Arbeiter- und Bauernstaates. (26000 Teilnehmer aus 104 Ländern) Im Zentrum aller Veranstaltungen stand der Kampf gegen Atomwaffen und für das Verbot der Massenvernichtungsmittel.

IV Bukarest (2. bis 16. 8. 1953)
Das Festival stand im Zeichen eines großen Sieges der Weltfriedensbewegung, des Waffenstillstandes in Korea. (30000 Teilnehmer aus 111 Ländern)

V Warschau (31. 7. bis 14. 8. 1955)
Im Mittelpunkt stand der Kampf gegen die aggressiven imperialistischen Militärpakte. (30000 Teilnehmer aus 114 Ländern)

VI Moskau (28. 7. bis 11. 8. 1957)
Das Festival im ersten sozialistischen Staat der Welt stand im Zeichen des Kampfes gegen Kolonialismus und Militarismus für friedliche Koexistenz zwischen Staaten unterschiedlicher Gesellschaftsordnung. (34000 Teilnehmer aus 131 Ländern)

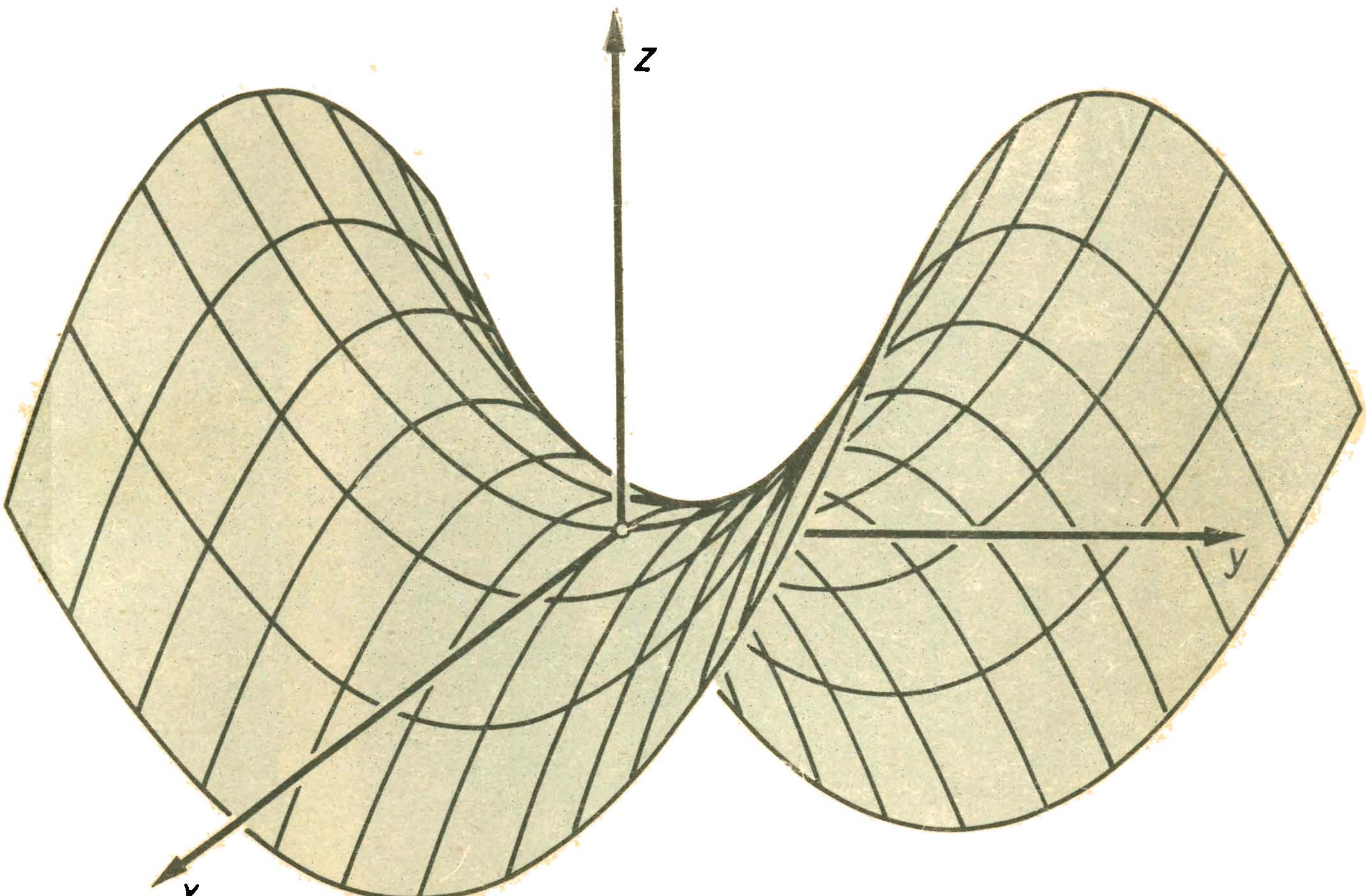
VII Wien (24. 7. bis 4. 8. 1959)
Zum ersten Male fanden damit Weltfestspiele in einem kapitalistischen Staat statt. Trotz aller Provokationen des Gegners wurden sie dank der Überzeugungskraft der ihnen zugrunde liegenden Idee und der Disziplin der Teilnahmer ein Erfolg. (18000 Teilnehmer aus 112 Ländern)

VIII Helsinki (28. 7. bis 6. 8. 1962)
Die Jugend demonstrierte ihren Willen nach Frieden und Freundschaft zwischen den Völkern, für Einstellung der Kernwaffenversuche, für Verbot der Atomwaffen. (18000 Teilnehmer aus 137 Ländern)

IX Sofia (28. 7. bis 6. 8. 1968)
Losung: „ Für Solidarität, Frieden und Freundschaft". Die FDJ-Vertreter übergaben der vietnamesischen Delegation 2,3 Mio Mark als Ergebnis der Aktion „Eine Schiffsfracht für Vietnam". (18000 Teilnahmer aus 142 Ländern)

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



$x^2-y^2+z=0$

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31 059

4

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Alle Vignetten an den Anfängen der Artikel wurden unserer tschechoslowakischen mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy*, Praha, entnommen; H. Pelka, Leipzig (S. 81); Archiv *alpha* (S. 89);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

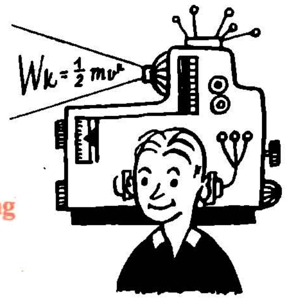
Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 31. Mai 1973

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik und Physik



Mathematisches Wissen und Können — eine Voraussetzung zur physikalischen Erkenntnisfindung

Die Mathematik spielt in unserem Leben eine immer größer werdende Rolle. Es gibt kaum einen wissenschaftlichen oder gesellschaftlichen Bereich, der ohne Mathematik bestehen kann. Immer stärker dringen mathematische Methoden und Verfahren in andere Wissenschaften ein. Besonders die Physik – hier ist die mathematische Betrachtungsweise schon Tradition, weil von Beginn des physikalischen Forschens an üblich und notwendig – ist ohne Mathematik nicht denkbar.

Mathematik soll kein Selbstzweck sein. Natürlich ist es reizvoll, logische Operationen mit formalen mathematischen Symbolen durchzuführen. Doch dabei sollen wir vor allem die Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben, die wir benötigen, um unsere Umwelt verstehen und beherrschen zu können.

In der Physik werden physikalische Erscheinungen und Vorgänge durch mathematische Symbole beschrieben. Die physikalische Erkenntnis ist im allgemeinen erst durch die mathematische Fassung vollständig, weil sich die physikalischen Erscheinungen mathematisch in ihrem Wesen tiefer und vollständiger und in sehr kurzer und damit übersichtlicher Form erfassen lassen.

Doch die Interpretation mathematisch gefaßter physikalischer Ergebnisse ist nicht immer einfach und muß erst erlernt werden. Viele Schüler glauben, daß die Ableitung physikalischer Formeln nur das Ziel verfolgt, später mit ihrer Hilfe physikalische Aufgaben lösen zu können. Das ist eine sehr einseitige Betrachtungsweise der mathematischen Durchdringung der Physik. Hinter den Formeln verbergen sich ganz exakte Aussagen über die Natur; physikalische Erscheinungen und Prozesse werden dadurch viel genauer als durch Worte beschrieben.

Wir wollen das an einigen Beispielen zeigen:

1. Das *Newtonsche Grundgesetz der Mechanik* lautet:

$$F = m \cdot a$$

Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung.

1.1. Gilt $F=0$, d. h. wirkt auf einen Körper der Masse m keine Kraft ein, so gilt

$$m \cdot a = 0. \text{ Wegen } m \neq 0 \text{ ergibt sich } a = 0.$$

Die Beschleunigung ist 0, d. h. die Geschwindigkeit verändert sich nicht; der Körper bleibt in Ruhe oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, wenn auf ihn keine Kraft einwirkt. Das bekannte Trägheitsgesetz ist also ohne Mühe durch einfache logische Operationen mit mathematischen Symbolen aus dem Newtonschen Grundgesetz ableitbar.

1.2. Wird die auf einen Körper einwirkende Kraft verdoppelt, so ergibt sich nicht nur die oft benutzte qualitative Aussage, daß dann die Beschleunigung a auch größer werde, sondern aus dem Grundgesetz folgt, daß dann auch a verdoppelt wird. Kraft und Beschleunigung verändern sich proportional.

$$F \sim a \text{ mit } m = \text{konst.}$$

Dabei ist die Zusatzbedingung $m=$konst. zu beachten, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

2. Das *Ohmsche Gesetz* besagt: $U \sim I$

Wenn die Spannung U verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die Stromstärke I; verdreifacht man die Spannung, muß sich auch die Stromstärke verdreifachen usw.

Aufgabe 1: Ein Experiment mit einer Lampe aus dem Elektrik-Schülerübungsgerät ergab folgende Meßwerte:

Nr.	U (in V)	I (in A)
1	2	0,10
2	4	
3	6	

Ergänzt die Tabelle, indem ihr überlegt, welche Stromstärkewerte zu erwarten sind, wenn $U \sim I$ gilt. Die in Wirklichkeit gemessenen Werte sind der unteren Tabelle zu entnehmen:

Nr.	U (in V)	I (in A)
1	2	0,10
2	4	0,16
3	6	0,21

Das Ergebnis entspricht nicht der Erwartung. Die Stromstärke wird mit wachsender Spannung zwar auch größer, doch verändern sich beide Größen nicht proportional. Die Ursache für den Widerspruch zwischen Voraussage und Ergebnis ist darin zu suchen, daß bei der Vorüberlegung gegen ein mathematisches Gesetz verstoßen wurde:

$$U \sim I \text{ gilt nur, wenn } R = \text{konst. gilt.}$$

Das bedeutet, daß alle den Widerstand beeinflussenden Faktoren konstant bleiben. Bei unserem Versuch ändert sich aber mit wachsender Stromstärke die Temperatur der Heizwendel der Lampe, der Widerstand wird damit größer. Die Stromstärke muß also hinter den vorausgesagten Werten zurückbleiben.

Führen wir den gleichen Versuch mit dem Bauelement Konstantandraht des SEG Elektrik durch, erhalten wir die erwartenden Werte, da der Widerstand des Konstantandrahtes fast temperaturunabhängig ist.

Nr.	U (in V)	I (in A)
1	2	0,12
2	4	0,23
3	6	0,35

Eine Verdopplung der Spannung zieht also auch eine Verdopplung der Stromstärke nach sich.

3. Im Gleichstromkreis berechnet man die Leistung mit Hilfe der Formeln

$P = U \cdot I$ bzw. wegen (1)

$U = I \cdot R$

$P = I^2 \cdot R$ (2)

Aufgabe 2: Beantworte folgende Frage:

In einem Stromkreis mit einem Festwiderstand aus Konstantandraht wird die Stromstärke verdoppelt. Wird die Leistung P

a) auch verdoppelt wegen $P \sim I$ aus Formel (1)

b) vervierfacht wegen $P \sim I^2$ aus Formel (2)?

Es sei noch darauf hingewiesen, daß diese Überlegungen bei der Übertragung von Elektroenergie eine große Rolle spielen. Da die Leistungsverluste vom Quadrat der Stromstärke abhängen, muß bei konstanter übertragener Leistung die Stromstärke recht klein gehalten werden, die Spannung wird entsprechend hoch transformiert. Wird die Stromstärke auf die Hälfte herabgesetzt, gehen die Übertragungsverluste auf den vierten Teil zurück.

4. Die *allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase* lautet: $\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \text{konst.}$

Ohne experimentelle Untersuchungen können durch rein mathematische Überlegungen aus der Zustandsgleichung physikalische Schlußfolgerungen gezogen werden, die in der Praxis eine große Rolle spielen.

Wir untersuchen zuerst den Quotienten

$$\frac{a \cdot b}{c} = \text{konst.}$$

gebildet aus den formalen Symbolen a, b und c!

a) Aus a=konst. folgt $\frac{b}{c}$=konst. oder $b \sim c$

b) Aus b=konst. folgt $\frac{a}{c}$=konst. oder $a \sim c$

c) Aus c=konst. folgt ab=konst. oder $a \sim \frac{1}{b}$

Aufgabe 3: Übertrage diese Überlegungen formal auf die allgemeine Zustandsgleichung! Ergänze dazu folgende Tabelle:

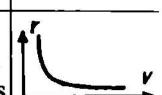
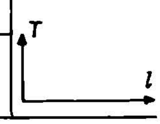
Bedingung	Name der Zustandsänderung	Gesetz	Proportionalität	Anwendungsbeispiel
p=konst.	isobar	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$V \sim T$	Gasthermometer
V=konst.				
T=konst.				

5. Viele physikalischen Formeln entsprechen den im Mathematikunterricht behandelten Funktionen, sie haben nur ein spezielles, ein physikalisches Gewand. Die Kenntnisse aus der Funktionslehre kann man bei ihrer Behandlung und grafischen Darstellung anwenden. *Beispiele:*

1. Das *Boylesche Gesetz* lautet: $p \cdot V$=konst. mit T=konst.

2. Für die *Schwingungsdauer T des Fadenpendels* gilt $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Aufgabe 4: Ergänzt folgende Tabelle!

Formel	Abhäng. Größen	formale math. Funktion	Def. Bereich	Gültigkeitsbereich	grafische Darstellung
pV= konst.	$p=f(v)$	$y=\frac{c}{x}$	$V>0$	T= konst. ideales Gas	
$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$					

Das l-T-Diagramm der Pendelschwingung kann leicht durch experimentelle Bestimmung einiger Wertepaare von $T=f(l)$ überprüft werden.

Das war nur ein kleiner Ausschnitt, der die starke mathematische Durchdringung der Physik zeigen Mathematisches Wissen und Können sind Voraussetzungen zur Erfassung physikalischer Probleme. Wir sollen uns an der Schönheit und Strenge mathematischer Betrachtungen und Ableitungen erfreuen, doch dabei nicht vergessen, daß wir sie vor allem deshalb betreiben, weil sie uns die Hilfsmittel zur besseren Erkenntnis der Natur und unserer gesamten Umwelt liefern sollen.

E. Mittmann

Eine Aufgabe von Prof. Dr.
E. W. Trost

Professor am Technikum Winterthur (Zürich)
Redakteur der „Elemente der Mathematik", Basel

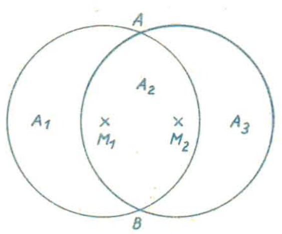
▲1083▲ Eine Parabel (Parameter p) bewegt sich in einem rechten Winkel (Scheitel S) so, daß sie stets beide Schenkel berührt. B sei einer der Berührungspunkte. Man bestimme das Minimum der Strecke $\overline{SB}$. (Die Aufgabe kann ohne Differentialrechnung gelöst werden, indem man sie auf die Bestimmung des Maximums eines kubischen Polynoms zurückführt.)

Eine interessante, aber schwierige Aufgabe

Unser Leser, Herr *Schulz*, Fachlehrer für Mathematik in Rotta, Kr. Bitterfeld, sendet uns die folgende geometrische Aufgabe, die insofern recht interessant ist, als sie zu einer transzendenten Gleichung führt, deren Lösung nur mit Näherungsmethoden möglich ist:

Aufgabe:

Zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem gleichen Radius $r=5$ cm und den Mittelpunkten M_1, M_2 mögen sich in zwei Punkten A und B so schneiden, daß die dabei entstehenden von Kreisbögen dieser Kreise begrenzten Flächenstücke A_1, A_2, A_3 den gleichen Flächeninhalt haben (vgl. die Abb. 1).



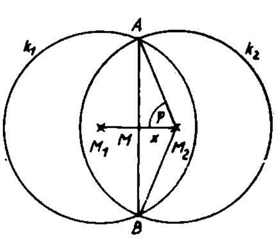
Es ist der Abstand $\overline{M_1M_2}$ der Mittelpunkte der beiden Kreise k_1, k_2 zu berechnen.

Lösung:

Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$, der gleichzeitig der Schnittpunkt der aufeinander senkrecht stehenden Geraden M_1M_2 und AB ist, mit M und setzen $\overline{MM_2}=x$, $\sphericalangle MM_2A=\varphi$ (vgl. Abb. 2).
Dann gilt $\overline{M_2A}=r$ und

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}, \text{ also } x=r\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi=\frac{\overline{MA}}{r}, \text{ also } \overline{MA}=r\sin\varphi.$$



Ferner bezeichnen wir den Flächeninhalt des durch die Radien $\overline{M_2A}$ und $\overline{M_2B}$ sowie durch den im Innern des Kreises k_1 liegenden Kreisbogen $\widehat{AB}$ des Kreises k_2 begrenzten Kreissektors mit S_1 und den Flächeninhalt des Dreiecks ABM_2 mit D_1. Dann gilt:

$$S_1 : r^2\pi = 2\varphi : 2\pi, \text{ also } S_1 = r^2\varphi;$$

$$D_1=\overline{MA}\cdot x = r\cdot\sin\varphi\cdot r\cos\varphi = $$
$$= r^2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi.$$

Daraus folgt, daß der Flächeninhalt des zu dem Sektor S_1 gehörenden Kreissegments gleich

$$S_1-D_1=r^2\varphi-\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi=$$
$$=r^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$$

ist; daher gilt für den Flächeninhalt des mittleren Flächenstücks

$$A_2=2r^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right).$$ Ferner gilt

$$A_1=A_3=\pi r^2-A_2$$

Daraus folgt wegen $A_1=A_2=A_3$

$$\pi r^2-A_2=A_2,\ 2A_2=\pi r^2,$$
$$4r^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)=\pi r^2,$$
$$\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{\pi}{4}=0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich φ berechnen und daher auch wegen $\overline{M_1M_2}=2r\cos\varphi$ der gesuchte Abstand $\overline{M_1M_2}$.
Da in dieser Gleichung aber sowohl φ als auch $\sin 2\varphi$ vorkommt, ist die Berechnung mit den bekannten Methoden der Gleichungslehre nicht möglich. Es handelt sich nämlich um eine sogenannte transzendente Gleichung, da die Variable φ sowohl linear als auch als Funktionswert der Sinusfunktion auftritt.
Wir müssen daher eine Näherungsmethode anwenden, mit deren Hilfe wir φ mit einer beliebigen Genauigkeit bestimmen können. Wir beachten, daß φ im Bogenmaß einzusetzen ist und setzen

$$f(\varphi)\quad=\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{\pi}{4}.$$ Wir erhalten

$$f(0)\quad=-\frac{\pi}{4}=-0{,}7854,$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f(1{,}0472)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin 60^\circ-\frac{\pi}{4}=$$
$$=-0{,}1712,$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(1{,}5708)=\frac{\pi}{2}-0-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}=$$
$$=0{,}7854.$$

Der gesuchte Wert von φ liegt also zwischen 1,0472 und 1,5708.
Wir interpolieren und erhalten den besseren Näherungswert

$$\varphi_1=1{,}047+0{,}524\cdot\frac{0{,}171}{0{,}957}=$$
$$=1{,}047+0{,}094=1{,}141.$$ Wir erhalten

$$f(1{,}141)=1{,}141-\frac{1}{2}\sin 2{,}282-0{,}785=$$
$$=-0{,}023.$$

Dieser Wert ist noch etwas zu klein; wir interpolieren noch einmal und erhalten den besseren Näherungswert

$$\varphi_2=1{,}141+0{,}094\cdot\frac{0{,}023}{0{,}194}=$$
$$=1{,}141+0{,}011=1{,}152.$$

Wir erhalten

$$f(1{,}152)=-0{,}005.$$

Wir interpolieren noch einmal und erhalten

$$\varphi_3=1{,}155\triangleq 66{,}2^\circ \text{ mit } f(\varphi)=0{,}000.$$

Damit haben wir einen Näherungswert für φ erhalten, dessen Genauigkeit für die praktische Rechnung ausreicht. Wir erhalten weiter den gesuchten Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise

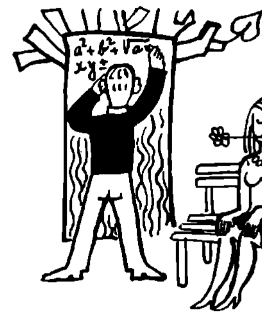
$$\overline{M_1M_2}=2r\cdot\cos 66{,}2^\circ=2r\cdot 0{,}4035=$$
$$=0{,}807r=0{,}807\cdot 5\text{ cm}$$
$$=4{,}035\text{ cm}.$$

Wir bemerken noch, daß die Funktion $f(\varphi)$ in dem Intervall $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ nur eine Nullstelle hat; die gestellte Aufgabe hat also genau eine Lösung. Das ergibt sich auch aus der Anschauung, weil beim Auseinanderrücken der Mittelpunkte der Flächeninhalt von A_2 kleiner und der von A_1 bzw. A_3 größer wird; das Umgekehrte ist der Fall, wenn die Mittelpunkte zusammenrücken.
Übrigens können wir uns durch Auflegen eines quadratischen Rasters und Auszählen bzw. Abschätzen der Quadrate in Abb. 2 davon überzeugen, daß tatsächlich die Flächeninhalte der drei Flächenstücke gleich sind.
Zum Schluß bemerken wir noch, daß wir, wie in der angewandten Mathematik üblich, bei den obigen Rechnungen Gleichheitszeichen gesetzt haben, obwohl wegen der Rundungen (auf vier bzw. drei Stellen nach dem Komma) die Zahlenwerte jeweils nur angenähert gleich sind. *R. Lüders*

Vorbildlicher Kreisklub

Seit Jahren betreut unser *alpha*-Leser und Mitarbeiter *Reinhard Schulz* aus Rotta, Kreis Gräfenhainichen, an seiner Oberschule eine Arbeitsgemeinschaft Mathematik. Durch die regelmäßige Teilnahme am Wettbewerb der Zeitschrift *alpha* und durch eine rege Aktivität beim Lösen komplizierter Aufgaben erzielten seine Schüler bei Kreisolympiaden sehr bald vorbildliche Leistungen. Deshalb beauftragte ihn der Kreisschulrat im März 1972 mit der Bildung des Kreisklubs zur Förderung aller talentierten Schüler der 5. bis 8. Klassen.
Den 120 *Jungen Mathematikern*, die in drei Stützpunkten des Kreisgebietes wöchentlich bzw. 14täglich zusammentreten, stellt Kollege *Schulz* neben dem laufenden *alpha*-Wettbewerb unter anderem geometrische Probleme zur Lösung. Besonderen Anklang finden beispielsweise solche Aufgaben, in denen die Kongruenz oder die Gleichheit von Flächen zu beweisen ist. In dieser Richtung liegt auch das auf Seite 75 dargelegte Problem, das in der Arbeitsgemeinschaft aufgeworfen wurde, jedoch mit den Mitteln der Schulmathematik in den Klassen 5 bis 8 noch nicht lösbar ist. *Redaktion alpha*

Ein Verfahren zur Abspaltung linearer und quadratischer Polynome



Läßt sich von einem Polynom $f(x)= x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, dessen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ gegebene ganze Zahlen sind, ein Linearfaktor $x-t_0$ abspalten, t_0 ganzzahlig, so erhält man $(x-t_0)(x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0)= x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.
Hierbei ist $t_0b_0=a_0$. Es gilt also $t_0 \mid a_0$ (t_0 teilt a_0) und $(x-t_0) \mid f(x)$ für jede ganze Zahl x.
Setzt man also in $f(x)$ für x eine bestimmte ganze Zahl m ein, dann muß, falls die Abspaltung eines Linearfaktors $x-t_0$ möglich ist, neben $t_0 \mid a_0$ gelten:
$(m-t_0) \mid f(m)$, d. h. es muß die Gleichung $m-t_0=t_m$ für einen gewissen Teiler t_m von $f(m)$ und ein gewisses t_0 erfüllt sein.
Hieraus folgt die Bedingung $(L_m) t_m+t_0=m$ für die Abspaltung eines Linearfaktors $x-t_0$ von $f(x)$.
Unter den Teilern t_0 von a_0 kommen mithin nur diejenigen in Frage, zu denen es einen Teiler t_m von $f(m)$ gibt, so daß durch (t_m, t_0) die Bedingung (L_m) erfüllt ist. Dadurch wird i. a. die Anzahl der in Frage kommenden t_0 bereits eingeschränkt und man kann unter diesen eine „2. Auslese" treffen, indem man eine weitere ganze Zahl $m' \neq m$ wählt und nach denjenigen t_0 sucht, die – mit geeigneten Teilern $t_{m'}$ von $f(m')$ – auch noch der Bedingung $(L_{m'}): t_{m'}+t_0=m'$ genügen. Damit kann man sukzessive zu wenigen möglichen Teilern t_0 von a_0 gelangen. Ob sich nun mit einem dieser t_0 tatsächlich ein Linearfaktor abspalten läßt, kann nur durch Überprüfen, ob $(x-t_0) \mid f(x)$ bzw. ob $f(t_0)=0$, entschieden werden.

Beispiel: $f(x)=x^7-13x^6-34x^5+61x^4-14x^3-32x^2+267x-180$

a) $m=1 \quad f(1)=56$

$(L_1) \quad t_1+t_0=1$

$t_0/180$, also $t_0=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \pm 20, \pm 30, \pm 36, \pm 45, \pm 60, \pm 90, \pm 180$.
$t_1/56$, also $t_1=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56$.
Die Bedingung (L_1) wird nur von den folgenden geordneten Zahlenpaaren erfüllt:
$(t_1, t_0)=(+2, -1), (-1, +2), (-2, +3), (+4, -3), (-4, +5), (+7, -6), (-8, +9), (-14, +15)$.
Es sind also nur noch die folgenden 8 Teiler zu überprüfen:
$t_0=-1, +2, +3, -3, +5, -6, +9, +15$.

b) $m=-1 \quad f(-1)=-384$

$(L_{-1}) \quad t_{-1}+t_0=-1$

$t_{-1} \mid -384$, also $t_{-1}=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16$ usw.
Weitere Teiler kommen wegen der Bedingung (L_{-1}) nicht in Frage. Die Bedingung (L_{-1}) wird von den geordneten Zahlenpaaren $(t_{-1}, t_0)=(-3, +2), (-4, +3), (+2, -3), (-6, +5), (-16, +15)$ erfüllt.
Es bleiben folgende 5 Teiler zu überprüfen: $t_0=+2, \pm 3, +5, +15$.

c) $m=+2 \quad f(2)=-702$

$(L_2) \quad t_2+t_0=2$

$t_2 \mid -702$, also $t_2=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 13$ usw.

Die Bedingung (L_2) wird von den geordneten Zahlenpaaren $(t_2, t_0)=(-1, +3), (-3, +5), (-13, +15)$ erfüllt. Die Zahl der möglichen Teiler sind nur noch $t_0=+3, +5, +15$.

d) $m=-2 \quad f(-2)=374$

$(L_{-2}) \quad t_{-2}+t_0=-2$

Wegen der geringen Anzahl von möglichen Teilern t_0 empfiehlt es sich, auf Grund der Bedingung (L_{-2}) zu überprüfen, ob -5, -7 oder -17 Teiler von 374 sind. Nur $t_{-2}=-17$ teilt 374. Das geordnete Zahlenpaar $(t_{-2}, t_0) =(-17, +15)$ erfüllt als einziges die Bedingung (L_{-2}).
Es ist nun zu prüfen, ob $f(15)=0$ bzw. ob $x-15$ ein Teiler von $f(x)$ ist.
Die Division mit Rest von $f(x)$ durch $(x-15)$ ergibt die Zerlegung
$x^7-13x^6-34x^5+61x^4-14x^3-32x^2+267x-180=(x-15)(x^6+2x^5-4x^4+x^3+x^2-17x+12)$
Wie das Verfahren erkennen läßt, ist eine weitere Abspaltung eines Linearfaktors nicht möglich.
Hat ein Polynom $g(x)$ rationale Koeffizienten, so läßt es sich stets in der Form $g(x)=\frac{1}{v}f(x)$ schreiben, wobei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist; man braucht dazu für v nur ein gemeinsames Vielfaches der Nenner aller (rationalen) Koeffizienten von $g(x)$ zu nehmen. Einen Linearfaktor von $g(x)$ abspalten heißt demzufolge einen solchen von $f(x)$ abspalten. Dieses Problem wurde bereits behandelt für den Fall, daß der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist. Im allgemeinen Fall fragt man nach der Möglichkeit, einen Linearfaktor t_nx-t_0 vom Polynom $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ abzuspalten:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
$\quad =(t_nx-t_0)(b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0)$;
$\quad |a_n|>0$.

Hierbei ist $t_0b_0=a_0$ und $t_nb_{n-1}=a_n$.
Also gilt: $t_0 \mid a_0$, $t_n \mid a_n$, $(t_nx-t_0) \mid f(x)$. Setzt man wieder für x eine bestimmte ganze Zahl m ein und bezeichnet die Teiler von $f(m)$ mit t_m, so muß für ein gewisses t_0 und für ein gewisses t_m die Gleichung $t_nm-t_0=t_m$ *erfüllt sein.*

Hieraus folgt die Bedingung
$(L_m^{\prime n}) \quad t_m+t_0=t_nm;\ t_m/f(m),\ t_0/a_0,\ t_n/a_n$
Läßt man t_n der Reihe nach die Teiler von a_n durchlaufen, so kann für jedes einzelne t_n das oben angegebene Verfahren benutzt werden.
Es gilt:
Wenn t_nx-t_0 bzw. t_nx+t_0 teilt $f(x)$,
so auch $-t_nx+t_0$ bzw. $-t_nx-t_0$ teilt $f(x)$.
Es brauchen also nur die positiven Teiler t_n von a_n untersucht zu werden.

Beispiel:
$f(x)=3x^6-8x^5+5x^4+6x^3+5x^2+14x-65$.
Wegen $t_n \mid a_n$, d. h. hier $t_n \mid 3$ kommen nur die beiden Linearfaktoren $x-t_0$ und $3x-t_0$ als Teiler von $f(x)$ in Frage:

1. Fall: $t_n=1 \quad (L_m^1) \quad t_m+t_0=m$
2. Fall: $t_n=3 \quad (L_m^1) \quad t_m+t_0=3m$

Zum 1. Fall:

a) $m=1 \quad f(1)=-40$

$(L_1^1) \quad t_1+t_0=1$

$t_1=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40$
$t_0=\pm 1, \pm 5, \pm 13, \pm 65$
Die Bedingung (L_1^1) wird nur von den beiden Paaren erfüllt:
$(t_1, t_0)=(+2, -1), (-4, +5)$

b) $m=-1 \quad f(-1)=-64$

$(L_{-1}^1) \quad t_{-1}+t_0=-1$

$t_{-1}=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$.
Wegen $f(-1)=-64$ bleibt nur $t_0=+5$ zu überprüfen. Da hierzu kein Teiler t_{-1} existiert, so daß Bedingung (L_{-1}^1) erfüllt ist, kann kein Linearfaktor $x-t_0$ abgespalten werden.

Zum 2. Fall:

a) $m=1 \quad f(1)=-40$

$(L_1^3) \quad t_1+t_0=3$

t_1, t_0 wie unter a) zum 1. Fall.

Die Bedingung erfüllen die Zahlenpaare $(t_1,\ t_0)=(+4,\ -1),\ (-2,\ +5),\ (+8,\ -5)\ (-10,\ +13)$

$m=-1$ ergibt für t_0 keine weitere Einschränkung.

b) $m=2 \quad f(2)=47$

$(L_2^3) \quad t_2+t_0=6$

$t_2=\pm 1,\ \pm 47.$

Nur $(t_2,\ t_0)=(+1,\ +5)$ erfüllt die Bedingung (L_2^3). Die Division mit Rest von $f(x)$ durch $(3x-5)$ führt auf die Zerlegung

$3x^6-8x^5+5x^4+6x^3+5x^2+14x-65$
$=(3x-5)(x^5-x^4+2x^2+5x+13)$

Die Abspaltung eines weiteren Linearfaktors ist nicht möglich. Wir wenden uns nun der etwas schwierigen Frage nach der Abspaltbarkeit eines quadratischen Polynomes vom Polynom $f(x)$ zu. Für das Polynom sei folgende Zerlegung möglich:

$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=$
$=(x^2+b_1x+b_0)(x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0).$

Es wird zunächst wieder $a_n=1$ vorausgesetzt und ferner, daß alle auftretenden Koeffizienten ganzzahlig sind. Für x werden bestimmte ganze Zahlen m und r eingesetzt $(m,\ r+0)$. Dann gilt:

$t_m=g(m)=m^2+b_1m+b_0$ mit
$b_0=t_0,\ t_0\,|\,a_0,\ t_m\,|\,f(m)$
$t_r=g(r)=r^2+b_1r+b_0$ mit
$b_0=t_0,\ t_0\,|\,a_0,\ t_r\,|\,f(r).$

Multipliziert man die erste Gleichung mit r und die zweite mit m, so ergibt sich

$rt_m=rm^2+b_1rm+rb_0$
$mt_r=r^2m+b_1rm+mb_0$

Subtraktion bzw. Addition beider Gleichungen ergibt die Bedingungen

$rt_m-mt_r=rm^2-r^2m+(r-m)\,b_0$ bzw.
$rt_m+mt_r=rm^2+r^2m+2rmb_1+(r+m)\,b_0$

Setzt man $r=1$ und $m=-1$, so erhält man die Bedingungen

$(Q_{t_0}) \quad t_{-1}+t_1=2+2t_0$ mit $b_0=t_0$

$$t_{-1}-t_1=-2b_1,\ \text{also}\ b_1=\frac{t_1-t_{-1}}{2}$$

Beispiel:

$f(x)=x^8+5x^7+10x^6+6x^5-8x^4-5x^3+$
$+3x^2+9x+15$

$m=1 \quad f(1)=36$ und $m=-1\ f(-1)=6$

$t_0\ =\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15$

$t_1\ =\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 12,\ \pm 18,\ \pm 36$

$t_{-1}=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$

Es ergeben sich die Bedingungen (Q_{t_0}) wie folgt:

(Q_1)	$t_1+t_{-1}=\ \ 4$	(Q_5)	$t_1+t_{-1}=\ \ 12$
(Q_{-1})	$t_1+t_{-1}=\ \ 0$	(Q_{-5})	$t_1+t_{-1}=-\ 8$
(Q_3)	$t_1+t_{-1}=\ \ 8$	(Q_{15})	$t_1+t_{-1}=\ \ 32$
(Q_{-3})	$t_1+t_{-1}=-4$	(Q_{-15})	$t_1+t_{-1}=-28$

Folgende Zahlenpaare erfüllen die Bedingungen

$(Q_1)(t_1, t_{-1})$
$=(+1,\ +3)$ mit $b_1=-1,$
$(+2,\ +2)$ mit $b_1=0$
$=(-2,\ +6)$ mit $b_1=-4,$
$(+3,\ +1)$ mit $b_1=1$
$=(+6,\ -2)$ mit $b_1=\ \ 4$

$(Q_{-1})(t_1, t_{-1})$
$=(+1,\ -1)$ mit $b_1=\ \ 1,$
$(-1,\ +1)$ mit $b_1=-1,$
$=(+2,\ -2)$ mit $b_1=\ \ 2,$
$(-2,\ +2)$ mit $b_1=-2,$
$=(+3,\ -3)$ mit $b_1=\ \ 3,$
$(-3,\ +3)$ mit $b_1=-3,$
$=(+6,\ -6)$ mit $b_1=\ \ 6,$
$(-6,\ +6)$ mit $b_1=-6$

$(Q_3)(t_1, t_{-1})$
$(+2,\ +6)$ mit $b_1=-2,$
$(+6,\ +2)$ mit $b_1=\ \ 2,$
$=(+9,\ -1)$ mit $b_1=\ \ 5$

$(Q_{-3})(t_1, t_{-1})$
$=(-1,\ -3)$ mit $b_1=\ \ 1,$
$(-2,\ -2)$ mit $b_1=0,$
$=(+2,\ -6)$ mit $b_1=\ \ 4,$
$(-3,\ -1)$ mit $b_1=-1$
$=(-6,\ +2)$ mit $b_1=-4,$

$(Q_5)(t_1, t_{-1})$
$=(+6,\ +6)$ mit $b_1=\ \ 0,$
$(+9,\ +3)$ mit $b_1=\ \ 3$
$=(+18,\ -6)$ mit $b_1=\ 12$

$(Q_{-5})(t_1,\ t_{-1})=$
$=(-2,\ -6)$ mit $b_1=\ \ 2,$
$(-6,\ -2)$ mit $b_1=-2$
$=(-9,\ +1)$ mit $b_1=-5$

$(Q_{15})(t_1, t_{-1})$ entfällt
$(Q_{-15})(t_1, t_{-1})$ entfällt.

Wegen der oben für $f(x)$ vorausgesetzten Zerlegung ist

$a_1=c_1t_0+b_1c_0$ mit $c_0=\dfrac{a_0}{t_0}$ also

$a_1=c_1t_0+\dfrac{b_1a_0}{t_0}$

Deshalb ist $c_1=\dfrac{a_1}{t_0}-\dfrac{b_1a_0}{t_0^2}.$

Folglich muß für die Zerlegung des gegebenen $f(x)$ die Bedingung

(*) $\quad c_1=\dfrac{9}{t_0}-\dfrac{15b_1}{t_0^2}$ mit c_1 ganzzahlig erfüllt sein.

Die Bedingung (*) ist außer für alle unter (Q_1) und (Q_{-1}) angegebenen Zahlen t_0 und b_1 nur für die Zahlen

$t_0=-3$ und $b_1=0$, $t_0=5$ und $b_1=3$, $t_0=-5$ und $b_1=2$

erfüllt. Von den nachstehenden 16 Polynomen ist deshalb zu ermitteln, ob sie Teiler von $f(x)$ sind. Ist dies der Fall, so müssen, wenn man in ihnen für x bestimmte ganze Zahlen m einsetzt, die sich ergebenden Zahlen t_m Teiler der zugehörigen Zahl $f(m)$ sein. Zur besseren Übersicht wird jedem der in Frage kommenden Polynome die sich durch Einsetzen von m ergebende Zahl mit einem Pfeil zugeordnet.

$m=-3 \quad f(-3)=960=2^6\cdot 3\cdot 5$

$x^2-\ x+1\to\ 13$	$x^2-2x-1\to\ 14$
$x^2+1\to\underline{10}$	$x^2+3x-1\to\underline{-\ 1}$
$x^2-4x+1\to\ 22$	$x^2-3x-1\to\ 17$
$x^2+\ x+1\to\ 7$	$x^2+6x-1\to\underline{-10}$
$x^2+4x+1\to\underline{-\ 2}$	$x^2-6x-1\to\ 26$
$x^2+\ x-1\to\ \underline{5}$	$x^2-3\to\ \underline{6}$
$x^2-\ x-1\to\ 11$	$x^2+3x+5\to\ \underline{5}$
$x^2+2x-1\to\ \underline{2}$	$x^2+2x-5\to\underline{-2}$

Da nur die unterstrichenen Zahlen Teiler von 960 sind, bleiben nur noch die folgenden 9 Polynome zu überprüfen.

$m=3 \quad f(3)=25\,530=2\cdot 3\cdot 5\cdot 23\cdot 37$

$x^2+1\to\underline{10}$	$x^2+3x-1\to 17$
$x^2+4x+1\to 22$	$x^2+6x-1\to 26$
$x^2+\ x-1\to 11$	$x^2-3\to\ 6$
$x^2+2x-1\to 14$	$x^2+3x+5\to 23$
$x^2+2x-5\to\underline{10}$	

Da nur die unterstrichenen Zahlen Teiler von 25 530 sind, bleiben nur noch die folgenden 4 Polynome zu überprüfen:

$m=-5 \quad f(-5)=133\,170=2\cdot 3\cdot 5\cdot 4439$

$x^2+1\to 26$	$x^2+3x+5\to\underline{15}$
$x^2-3\to 22$	$x^2+2x-5\to\underline{10}$

Da weder 13 noch 11 Teiler von 4439 sind, ist nur zu untersuchen ob $x^2+3x+5\,|\,f(x)$ und ob $x^2+2x-5\,|\,f(x)$.

Die Division mit Rest von $f(x)$ durch x^2+3x+5 ergibt die Zerlegung

$x^8+5x^7+10x^6+6x^5-8x^4-5x^3+3x^2+$
$9x+15=(x^2+3x+5)(x^6+2x^5-x^4-x^3+3)$

x^2+2x-5 kann nicht ein weiterer Teiler sein, da $-5+3$.

Die Ausdehnung des Verfahrens auf den Bereich der rationalen Zahlen erfolgt durch Übergang zu dem abspaltbaren quadratischen Faktor $t_nx^2+b_1x+t_0$ mit $t_n|a_n$, $|a_n|>1$, a_n Koeffizient der höchsten Potenz von x, die nicht verschwindet, und zu den Bedingungen $(Q_{t_0}^{t_n})\ t_{-1}+t_1=2t_n+2t_0$

$$b_1=\frac{t_1-t_{-1}}{2}$$

Hierdurch muß, wie bei der Abspaltung von Linearfaktoren bereits gezeigt ist, zusätzlich eine Fallunterscheidung entsprechend der Anzahl aller Teiler t_n von a_n aufgenommen werden. Wegen der sich daraus ergebenden hohen Anzahl von Rechenschritten wird das Verfahren sehr umständlich. Sein Vorteil ist allerdings darin zu sehen, daß auch hier der abzuarbeitende Algorithmus mit elementarsten Mitteln erfolgt.

H. Butzke

Es ist bekannt,
daß die Kenntnis der Menschen
die Bezeichnung Wissenschaft in
Abhängigkeit davon verdienen,
welche Rolle in diesen Kenntnissen
die Zahl spricht.

Emile Borel

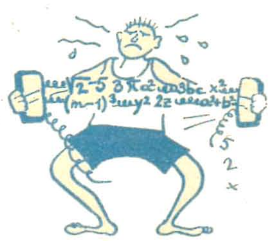
Eine Wissenschaft ist erst dann als
entwickelt anzusehen, wenn sie
dahin gelangt ist, sich der
Mathematik bedienen zu können.

Karl Marx (Überliefert von P. Lafargue)

Die Natur ist ein Buch,
das in der Sprache der Mathematik
geschrieben ist.

Galileo Galilei

Gitterpunkte Teil 2



Aufgabe 3: Zeige die linke Ungleichung von (9)!

Nach Umformung von (9) erhalten wir:

(10) $(1-\lambda)^2 \leqq \dfrac{T(a,b)}{F(a,b)} \leqq (1+\lambda)^2$ für alle reellen a, b mit $a \geqq b \geqq 8$.

Nun ist bekannt:

(11) $\lim\limits_{b\to\infty}(1\pm\lambda)^2=1$

Zu beachten ist, daß mit $b\to\infty$ auch $a\to\infty$ wegen $a\geqq b$.

Für diesen Sachverhalt schreiben wir:

(12) $\lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to\infty}} \dfrac{T(a,b)}{F(a,b)}=1$

Aufgabe 4: Es seien p und q zueinander teilerfremde positive ungerade Zahlen. Beweise:

$$\sum\left[\frac{p}{q}x\right]+\sum\left[\frac{q}{p}y\right]=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)$$

$0<x<\frac{q}{2}, x\in Z \quad 0<y<\frac{p}{2}, y\in Z$

Anleitung: Deute beide Seiten der Gleichung als Anzahl der Gitterpunkte im Bereich $0<x<\frac{q}{2},\ 0<y<\frac{p}{2}$!

Aufgabe 5: Es sei $T(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte des Bereichs $0<x$, $0<y$, $xy\leqq n$ mit $n>0$. Zeige

$$T(n)=2\sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right]-[\sqrt{n}]^2=\sum_{K=1}^{[n]}\left[\frac{n}{x}\right]$$

Aufgabe 6: Zeige! Es existieren Punkte P im zweidimensionalen Raum mit der Eigenschaft, daß sich zu jeder natürlichen Zahl n ein Kreis um P finden läßt, in dem genau n Gitterpunkte liegen.

Anleitung: $P\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$ ist einer der gesuchten Punkte.

Aufgabe 7: Ein Punkt P, dessen beide Koordinaten rationale Zahlen sind, erfüllt die Bedingungen der Aufgabe 6 nicht.

2. Wir werden uns jetzt mit einem Satz über beliebige Gitter beschäftigen. Dazu sind einige Hilfssätze nötig. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Vektor- und $\Gamma\{O,\mathfrak{G}\}$ das daraus entstehende Punktgitter.

Hilfssatz 1: Ist $\overrightarrow{OP}=\mathfrak{G}$, $P\neq O$ so existiert genau ein Vektor $\overrightarrow{O\bar{P}}=\mathfrak{G}$ mit $-\overrightarrow{O\bar{P}}=\overrightarrow{OP}$.

Aufgabe 8: Beweise Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2: Es sei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eine Basis des Vektorgitters $\mathfrak{G}$. n_1, m_1, n_2, m_2 seien beliebige ganze Zahlen mit $n_1m_2-m_1n_2=1$. Dann bilden die Vektoren $\mathfrak{a}'=n_1\mathfrak{a}+m_1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'=n_2\mathfrak{a}+m_2\mathfrak{b}$ wieder eine Basis des Gitters.

Beweis: Durch eine einfache Rechnung bestätigt man:

$$\mathfrak{a}=\frac{m_2}{n_1m_2-n_2m_1}\mathfrak{a}'-\frac{m_1}{n_1m_2-n_2m_1}\mathfrak{b}'$$
$$=m_2\mathfrak{a}'-m_1\mathfrak{b}'$$
$$\mathfrak{b}=\frac{n_1}{n_1m_2-n_2m_1}\mathfrak{b}'-\frac{n_2}{n_1m_2-n_2m_1}\mathfrak{a}'$$
$$=n_1\mathfrak{b}'-n_2\mathfrak{a}'.$$

Daraus ersieht man, daß jede ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auch eine ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ ist. Umgekehrt ist sofort klar, daß jede ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ auch eine ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist. $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ bilden also eine Basis des Gitters. Wir benutzen diesen Hilfssatz zur Konstruktion einer Basis von $\mathfrak{G}$. Dazu sei $P_1\in\Gamma$, $P_1\neq O$ so gewählt, daß P_1 einen minimalen Abstand von O hat, d. h. $\overline{OP_1}\leqq\overline{OP}$ für alle Punkte $P\in\Gamma$ mit $P\neq O$. Ferner sei:

$\Gamma'=\Gamma\setminus\{P\in\Gamma \mid \overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OP_1},\ \lambda\in Z,\ \lambda\neq O\}$. $P_2\neq O$ sei nun ein Punkt aus Γ', der einen minimalen Abstand von O hat, d. h. $\overline{OP_2}\leqq\overline{OP}$ für alle $P\in\Gamma'$ mit $P\neq O$. Wegen Hilfssatz 1 können $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ so gewählt werden, daß $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}\geqq 0$ ist.

Hilfssatz 3: $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ bilden eine Basis von $\mathfrak{G}$.

Aufgabe 9: Beweise Hilfssatz 3! Anleitung: Setze $\overrightarrow{OP_1}=n_1\mathfrak{a}+m_1\mathfrak{b}$, $\overrightarrow{OP_2}=n_2\mathfrak{a}+m_2\mathfrak{b}$. Überlege, welche Werte n_1, m_1, n_2, m_2 annehmen können und wende Hilfssatz 2 an!

Hilfssatz 4: Es gilt dann:

$|\overrightarrow{OP_1}|\leqq|\overrightarrow{OP_2}|\leqq|\overrightarrow{P_1P_2}|\leqq|n\overrightarrow{OP_1}+m\overrightarrow{OP_2}|$ für alle ganzen n, m und $n,m\neq 0$.

Beweis: Die beiden ersten Aussagen dieser fortlaufenden Ungleichung gelten laut Konstruktion von P_1 und P_2. Den Beweis für die Gültigkeit des letzten Ungleichheitszeichens führen wir indirekt, d. h. wir nehmen an, es existiert ein Gitterpunkt P_3 mit $\overrightarrow{OP_3}=n\overrightarrow{OP_1}+m\overrightarrow{OP_2}$, $n\neq 0$, $m\neq 0$ und $|\overrightarrow{OP_3}|<|\overrightarrow{P_1P_2}|=|\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}|$. Wir erhalten damit:

$|n\overrightarrow{OP_1}+m\overrightarrow{OP_2}|^2<|\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}|^2$

Daraus folgt:

$(n^2-1)\overrightarrow{OP_1}^2+(m^2-1)\overrightarrow{OP_2}^2<-2(mn+1)\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$. Nun ist:

$|\overrightarrow{OP_1}|\leqq|\overrightarrow{P_1P_2}|=(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})^2$

$\Longrightarrow\overrightarrow{OP_2}^2\geqq 2\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$

$|\overrightarrow{OP_2}|\leqq|\overrightarrow{P_1P_2}|=(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})^2$

$\Longrightarrow\overrightarrow{OP_1}^2\geqq 2\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$. Damit erhalten wir:

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}(n^2+m^2-2)$
$<-(mn+1)\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$.

Ist $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=0$, so stellt diese Gleichung einen Widerspruch dar. Für $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=0$, so stellt diese Gleichung einen Widerspruch dar. Für $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}>0$ folgt:

$$1>m^2+n^2+nm\geqq|nm|.$$

(Letzteres folgt nach dem Satz über das arithmetische und geometrische Mittel.) Wegen $n,m\neq 0$ und $n,m\in Z$ stellt diese Ungleichung auch einen Widerspruch dar. Unsere Annahme war also falsch, d. h. Hilfssatz 4 ist richtig. Kommen wir nun zu unserem Satz

Satz: Gegeben sei ein Punktgitter $\Gamma=\{O,\mathfrak{G}\}$. Bekannt sei die Funktion $T(r)$, die zu jedem r die Anzahl der Gitterpunkte angibt, die im Kreis um O mit dem Radius r liegen. Dann läßt sich das Punktgitter bis auf eine Drehung um O und eine Spiegelung an einer Geraden durch O eindeutig konstruieren.

Beweis: Es sei $r=r_0$, die erste Unstetigkeitsstelle von $T(r)$, d. h. das kleinste $r\geqq 0$ für das $T(r)\neq 1$ ist. Es sei $T(r)=m+1$. Nach Hilfssatz 1 ist m gerade, denn $O\in\Gamma$ und mit jedem Punkt $P\in\Gamma\,(P\neq O)$ ist auch sein bezüglich O symmetrischer Punkt $\bar{P}\in\Gamma$.

1. Fall: $m\geqq 6$

Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_0 liegen mindestens 6 Gitterpunkte, aus denen man nach der obigen Festlegung P_1 und P_2 auswählen kann. Ferner gibt es unter diesen m Punkten mindestens einen Gitterpunkt P_3 mit $\overrightarrow{OP_3}=n\overrightarrow{OP_1}+m\overrightarrow{OP_2}$ und $n\neq 0$, $m\neq 0$, ganzzahlig. Wegen $|\overrightarrow{OP_3}|=r_0$ folgt aus Hilfssatz 4 $r_0=|\overrightarrow{P_1P_2}|$. Das Gitter besitzt also Basisvektoren, die ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge r_0 aufspannen. Dadurch ist es bis auf Drehung und Spiegelung festgelegt.

2. Fall: $m=4$

Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_0 liegen 4 Gitterpunkte, unter denen wir P_1, P_2 gemäß obiger Festlegung auswählen können.

Es sei jetzt für alle reellen $r\geqq 0$:

$$T_1(r)=T(r)-4\left[\frac{r}{r_0}\right]-1.$$

$T_1(r)$ gibt offenbar die Anzahl der Gitterpunkte P im Kreis um O mit dem Radius r an, für die gilt: $\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP_1}+m\overrightarrow{OP_2}$ mit $n\neq 0$, $m\neq 0$, ganzzahlig. r_1 sei das kleinste positive r, für das $T_1(r)\neq 0$ ist. Nach Hilfssatz 4 folgt: $r_1=|\overrightarrow{P_1P_2}|$. Damit ist aus der Kenntnis der Funktion $T(r)$ das Dreieck OP_1P_2 bis auf Drehung und Spiegelung festgelegt.

3. Fall: $m=2$

Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_0 liegen zwei diametral gegenüberliegende Gitterpunkte. Einer davon kann als P_1 gewählt werden. Wir bilden jetzt für alle reellen $r \geqq 0$:

$$T_1(r) = T(r) - 2\left[\frac{r}{r_0}\right] - 1.$$

$T_1(r)$ gibt offenbar die Anzahl der Gitterpunkte P im Kreis um O mit dem Radius r an, für die gilt:

(*) $\quad \overrightarrow{OP} \neq n\overrightarrow{OP_1}$ für alle ganzen n.

Es sei r_1 das kleinste $r > 0$, für das $T_1(r_1) = k \neq 0$ ist. Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_1 liegen k Gitterpunkte P, für die (*) gilt, unter denen P_2 gemäß obiger Festlegung ausgewählt werden kann. Ist $k \geqq 4$, schließt man wie oben:

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = r_1$. Sei nun $k = 2$. So bilden wir für alle reellen $r \geqq 0$:

$$T_2(r) = T_1(r) - 2\left[\frac{r}{r_1}\right].$$

Ist r_2 das kleinste positive r mit $T_2(r_2) \neq 0$, so folgt wieder $|\overrightarrow{P_1P_2}| = r_2$. Dadurch ist das Dreieck OP_1P_2 aus der Kenntnis der Funktion $T(r)$ bis auf Drehung und Spiegelung festgelegt. Wir haben damit unseren Satz vollständig bewiesen.

Aufgabe 10: Es sei r_0 das kleinste $r > 0$ für das $T(r) \neq 1$ ist und $T(r_0) = m + 1$. Zeige: $m \leqq 6$.

Zum Abschluß noch einige Aufgaben, die allgemeinere Aussagen betreffen, als wir sie bisher betrachtet haben:

Für die Aufgaben 11 bis 14 sei ein Punktgitter $\Gamma\{O, \mathfrak{G}\}$ gegeben, das eine Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ hat, für die gilt: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ stehen senkrecht aufeinander) und $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 1$.

Aufgabe 11: n und $m \geqq 4$ seien gegebene natürliche Zahlen. Zeige: Es existieren unendlich viele, verschiedene konvexe m-Ecke mit dem Flächeninhalt n, in denen (das „in" wird wie in 1.1. erläutert gebraucht) genau n Gitterpunkte liegen.

Aufgabe 12: n sei eine gegebene natürliche Zahl. Zeige: Es gibt mindestens ein gleichschenkliges Dreieck, in dem genau n Gitterpunkte liegen und das den Flächeninhalt n hat.

Aufgabe 13: Zeige: Zu jedem natürlichen n gibt es ein gleichseitiges Dreieck, in dem genau n Gitterpunkte liegen.

Aufgabe 14: Gegeben sei ein konvexes n-Eck $P_1P_2 \ldots P_n$. Für $\overline{P_1P} \geqq \overline{P_iP_j}$ für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Weiter seien P_1P_K und ein Vektor $\mathfrak{a}$ parallel. T sei die Anzahl der Gitterpunkte, die in dem n-Eck liegen und F der Flächeninhalt des n-Ecks.

a) Zeige: $F - 2([\overline{P_1P_K}] + 1) \leqq T \leqq F + 2([\overline{P_1P_K}] + 1)$

b) Betrachtet werden nun alle zum ursprünglichen n-Eck ähnliche n-Ecke $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n}$. $\overline{P_1}\overline{P_K}$ sei stets zu $\mathfrak{a}$ parallel.

Zeige: $\lim\limits_{\overline{P_1}\overline{P_K} \to \infty} \frac{T}{F} = 1$

M. Günther

Wissenschaftler schreiben über alpha

Prof. Dr. Dr.-Ing. V. Lewin

Lenin-Pädagogisches Institut Moskau

Mathematische Zeitschriften für die Jugend gibt es jetzt in vielen Ländern, da man fast überall bestrebt ist, mathematische Begabungen zu finden und auszubilden.

Die *alpha* der DDR ist ein gutes Beispiel dafür, wie man solche Zeitschriften gestalten soll. Nicht zu einfach, nicht zu anspruchsvoll, bietet *alpha* für alle Interessenten etwas zum Nachdenken. Angemessene Informationen aus der Wissenschaft und dem Leben, amüsante Bemerkungen, Aufgaben zum Lösen – daß muß, glaube ich, der *alpha* eine Menge von Freunden eingebracht haben. Was man der *alpha* noch wünschen kann: größeren Umfang, mehr Aufgaben, immer neue Freunde und Leser aus der Jugend.

Dr. Istvan Reiman

Technische Universität Budapest

Seit Jahren bin ich ein Leser der *alpha*. Besonderes Interesse haben wir Ungarn an den Aufgaben der Zeitschrift. Sie helfen, die Mathematikolympiaden gut vorbereiten. Zahlreiche Artikel sind methodisch sehr gut und helfen Lehrern und Schülern bei der außerunterrichtlichen Arbeit.

Prof. A. F. van Tooren

Redakteur der niederländischen Schülerzeitschrift „Pythagoras"

In jedem *alpha*-Heft sind zahlreiche Aufgaben in reicher Variation vorhanden, so daß jeder Schüler etwas Passendes für sich findet. Ich erachte auch die regelmäßig erscheinenden historischen Beiträge als wertvoll. Das Redaktionskollegium ist offenbar bestrebt, mit jedem Heft die engen Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Leben aufzuzeigen. Der Leser wird angeregt mitzuarbeiten (und das nicht nur an den gestellten Aufgaben). *alpha* bietet ein gutes Gleichgewicht zwischen ernst und heiter.

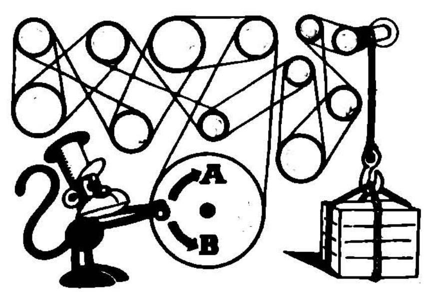
Prof. Wolfgang Ratzinger

Musisch-pädagogisches Bundesrealgymnasium, Linz, Österreich

Seit dem Jahre 1970 werden in Österreich Mathematische Olympiaden durchgeführt, an denen sich alle Schüler bis zum Abitur beteiligen können (ca. 18 Jahre) ...

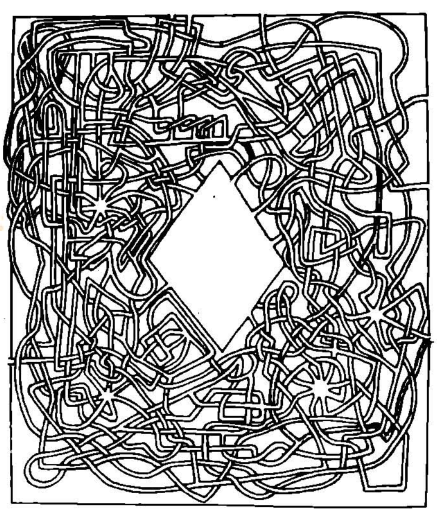
Durch diese Wettbewerbe ist unter den Schülern ein großes Interesse an Denksportaufgaben und mathematischen Problemen, die in netten Beispielen verpackt sind, entstanden. Genau diese Wünsche erfüllt die Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*, die sich in unserem Lande aus diesem Grunde einer zunehmenden Beliebtheit erfreut.

Ich verwende diese Zeitschrift sehr gern in den Vorbereitungskursen für die Österreichischen Mathematikolympiaden. Dabei schätze ich sehr, daß in dieser Zeitschrift die Schüler ab Klassenstufe 5 angesprochen werden, so daß jeder Leser Beispiele für seinen Geschmack findet. Zur Entspannung bieten die Beispiele aus *alpha* heiter immer wieder Grund zum Schmunzeln, so doch die Schüler erkennen, daß die Mathematik auch sehr unterhaltsam sein kann.



Nach welcher Richtung muß das Rad in Bewegung gesetzt werden, damit die Kiste gehoben wird, nach A oder B?

aus NBI 4/73 Lösung auf S. 96



Labyrinth

Ein Labyrinth, von Prof. *Lewis Coroll* (Oxford) in seinen Jugendjahren entworfen: Die Aufgabe besteht darin, den Ausweg aus dem Mittelfeld zu finden. Die Wege führen über- und untereinander hinweg, werden an manchen Stellen jedoch durch einen Querstrich blockiert.

alpha -Wettbewerb Physik

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1973

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet Ihr genau wie im Vorjahr Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (*Richtlinie:* Schuljahr 1972/73) Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit P 10/12 ■ gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Name des Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1972/73 unterrichtete. Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiert. Die Namen der aktivsten Teilnehmer werden veröffentlicht. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1973/74 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an:

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

Kennwort auf Briefumschlag: Physik-Wettbewerb 1973.

P 6 ■ 1085 Eine Schraubenfeder wird von einer Kraft F = 20 p um 5 cm gedehnt.
a) Wie groß ist die gesamte Längenänderung zweier hintereinander gehängter Federn dieser Art, wenn an die untere ein Wägestück mit dem Gewicht G = 28 p gehängt wird?
b) Um wieviel verlängert sich jede Feder, wenn beide nebeneinander befestigt werden und das Wägestück so darangehängt wird, daß sein Gewicht sich gleichmäßig auf beide Federn verteilt?

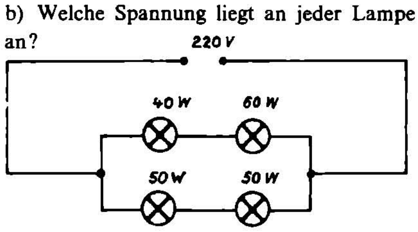
P 6 ■ 1086 Ein Schiff legt stromabwärts in 4 Stunden einen Weg von 120 km zurück. Für den Rückweg braucht es zwei Stunden mehr.
a) Mit welcher Geschwindigkeit fließt der Fluß?
b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit des Schiffes in stehendem Wasser?

P 7 ■ 1087 In einer Schüssel mit Wasser der Temperatur 0 °C schwimmt ein Stück Eis, von dem ein Zehntel seines Volumens aus dem Wasser herausragt. Wie ändert sich der Wasserstand in der Schüssel, wenn das Eis schmilzt?

P 7 ■ 1088 Wie groß ist die Arbeit, die man beim Dehnen einer Schraubenfeder um 12 cm verrichtet, wenn man für eine Verlängerung um 10 cm eine Kraft von 2 kp aufwenden muß!

P 8 ■ 1089 Mit Hilfe einer elektrischen Kochplatte von 500 W Leistung wird Wasser erwärmt und unter normalem Luftdruck zum Verdampfen gebracht.
a) Welche Wärmemenge gibt die Kochplatte in einer Minute ab?
b) Bei einer Anfangstemperatur des Wassers von 10 °C kann man beobachten, daß das Sieden nach einem Siebentel der Gesamtzeit vom Beginn des Erwärmens bis zum völligen Verdampfen des Wassers einsetzt. Wie groß ist danach die Verdampfungswärme des Wassers?

P 8 ■ 1090 Die vier Glühlampen in der Schaltskizze haben die angegebene Nennleistung und eine Nennspannung von 110 V. Die an den Stromkreis angelegte Spannung beträgt 220 V.
a) Wie groß ist die Gesamtstromstärke?
b) Welche Spannung liegt an jeder Lampe an?



P 9 ■ 1091 An den Enden eines über eine feste Rolle gelegten Fadens hängt je ein aus Magnesium bestehender Kegel mit der Grundfläche $A = 8\ \text{cm}^2$ und der Höhe $h = 12$ cm. Die Wichte beträgt $1{,}7\ \text{p} \cdot \text{cm}^{-3}$. Ein Kegel hängt mit der Spitze nach oben, der andere mit der Spitze nach unten. Man hält zunächst den Faden fest und taucht beide Kegel bis zur halben Höhe in Wasser. Dann läßt man los. Welche Gleichgewichtslage stellt sich ein?

P 9 ■ 1092 Ein Auto mit der Masse 1,5 t fährt über eine konvex gewölbte Brücke mit dem Krümmungsradius $R = 50$ m. Mit welcher Kraft drückt das Fahrzeug in der Mitte auf die Brücke, wenn es mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h darüberfährt?

P 10/12 ■ 1093 Auf eine elastische Platte fallen zwei Stahlkugeln, die erste aus der Höhe $h_1 = 44$ cm, die zweite aus der Höhe $h_2 = 11$ cm. Die Zeitdifferenz zwischen dem Loslassen beider Kugeln beträgt t_0. Nach einer bestimmten Zeit fallen sowohl Richtung als auch Betrag der Geschwindigkeiten beider Kugeln zusammen. Man bestimme alle Zeiten t_0, für die das eintreten kann und den Zeitraum, in welchem jeweils die Geschwindigkeiten beider Kugeln gleich sind. Die Kugeln stoßen sich während der Bewegung nicht.

P 10/12 ■ 1094 Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer 0,5 s beträgt, wird auf einem Wagen befestigt, der eine geneigte Ebene mit dem Neigungswinkel 45° hinabfährt und sich dann auf einer waagerechten Ebene weiterbewegt.
a) Wie groß ist die Schwingungsdauer beim Hinunterrollen?
b) Wie groß ist die Schwingungsdauer während der waagerechten Bewegung.

U. Walta

Berufsbild: Diplomlehrer für Physik

Die Physik vermag sicherlich wie nur wenige Wissenschaftszweige, Menschen aller Altersgruppen unmittelbar zu fesseln. So kann das Miterleben von eindrucksvoll gestalteten Experimenten, z. B. im Physikunterricht, eine unauslöschliche Erinnerung hinterlassen und in anschaulicher Weise zur Bereicherung des persönlichen Wissens beitragen. Diese Praxisbezogenheit gehört zu den wichtigsten und freilich auch schönsten und interessantesten Aspekten des Physikunterrichts, aber auch der Physik als Wissenschaft. Wir leben gegenwärtig in einer Epoche, wo physikalische Forschungsergebnisse besonders rasch die Entwicklung der Technik beeinflussen. So tauchen in den letzten Jahren immer neue Bauelemente auf, die eine Verwirklichung von elektronischen Aufgaben ermöglichen, die zuvor unlösbar schienen. Die ungeheuer vielseitige Verflechtung der Physik mit fast allen modernen Industriezweigen unserer sozialistischen Wirtschaft und mit anderen Wissenschaftsbereichen (Elektronik, Automatisierung, Datenverarbeitung, Militärtechnik, Energiewirtschaft, Astrophysik, Philosophie, um nur einige zu nennen) zeigt, welche große Aufgabe darin besteht, die Jugend mit einem soliden physikalischen Grundwissen als eine wichtige Voraussetzung für die schöpferische Meisterung der Technik als Facharbeiter, Ingenieur oder Wissenschaftler auszurüsten.
Der weitere Aufbau des Sozialismus erfordert den Einsatz von hochqualifizierten Fach-

lehrern für Physik an unseren Schulen, die diese Aufgabe wahrnehmen. Neben seinen pädagogischen Fähigkeiten muß der Physiklehrer die Entwicklung seines Wissenschaftsgebietes überblicken. Auf Grund seiner soliden Ausbildung an einer Hochschule oder Universität ist er in der Lage, sein Wissen und Können selbständig von Jahr zu Jahr zu vervollkommnen, so daß er seinen Unterricht am neuesten Stand der Wissenschaft orientieren kann. Ein junger Physiklehrer, der im Jahre 1980 seine Berufspraxis beginnt, wird im allgemeinen noch im Jahr 2010 unterrichten, ein Zeitraum, in dem sich das Wissen der Menschheit um ein vielfaches vermehrt haben wird. Der Anteil, den der Physiklehrer auf seinem Gebiet indirekt daran zu leisten hat, kann nicht hoch genug eingeschätzt werden. Alle bedeutenden Forscher bekamen ihr Grundwissen von Lehrern vermittelt, die meist rechtzeitig die Fähigkeiten ihrer Schüler erkannten und förderten. In seinem Leben wird ein Lehrer sehr viele Schüler unterrichten. Mit Sicherheit werden sich hochbegabte Schüler darunter befinden, die in der Lage sein werden, Überdurchschnittliches für unseren Staat zu leisten. Diese Talente rechtzeitig herauszufinden und zu fördern, ist eine besondere Aufgabe des Lehrers, wenn auch seine Hauptaufgabe darin besteht, die überwiegende Mehrheit der Schüler zu befähigen, die physikalischen Zusammenhänge in der Natur zu erkennen und schöpferisch anzuwenden.

Die Tatsache, daß die Physik eine experimentelle Wissenschaft ist, gibt dem Physiklehrer die Möglichkeit, seinen Unterricht interessant und abwechslungsreich zu gestalten, aber auch die Schüler zu kritischer Beobachtung zu erziehen.

Vier Jahre umfaßt das Studium des Diplomlehrers. Es wird mit der Lehrberechtigung für den Fachunterricht in zwei Fächern, Physik und Mathematik, an der allgemeinbildenden Oberschule abgeschlossen. Außer in den beiden Unterrichtsfächern erfolgt die Ausbildung in Marxismus-Leninismus, Pädagogik/Psychologie, Methodik und Sport. Die ersten beiden Studienjahre (Phase des Grundstudiums) dienen zur Sicherung eines breiten Grundlagenwissens, in denen sich der Student die Fähigkeiten aneignet, sich selbständig in eine spezielle Problematik einzu-(Phase das Fachstudiums) ist neben der Einbeziehung des Studenten in die selbständige wissenschaftliche Forschungsarbeit der unmittelbaren Vorbereitung auf den Unterricht gewidmet.

In dieser Zeit wird der Student durch fachmethodische Lehrveranstaltungen, in die u. a. auch Hospitationen und Lehrproben einbezogen sind, in die selbständige Unterrichtsgestaltung eingeführt. Nach erfolgreicher Absolvierung des Fachstudiums ist der Student in der Lage, einen wissenschaftlich einwandfreien Unterricht in den Fächern Physik und Mathematik zu erteilen.

M. Wurlitzer

Übersicht über die Ausbildung von Diplomlehrern für Physik

a) im Fach Physik

	Studienjahr	Fächer		
Grund-studium	1 2	Physik-Grundausbildung	laborpraktische Grundausbildung	
Fach-studium	3	Theoretische Physik	Spezial-ausbildung	phys. Schul-Experimente
	4		Diplomarbeit	Geschichte der Physik

Physik-Grundausbildung: Mechanik, Wärmelehre, elektromagnetische Erscheinungen, Physik der Atomhülle und des Atomkerns

b) in den anderen Fächern

	Studienjahr	Fächer					
Grund-studium	1 2	Mathematik	Marxism.-Leninism.	Erzieh. wissen-schaftl. Kurs	Sport	Fremd-spr.	Sprech-erz.
Fach-studium	3 4						

Erziehungswissenschaftlicher Kurs: Grundkurs, Pädagogik, Psychologie, Methodiken der beiden Unterrichtsfächer

Junge Physiker in Aktion

An der II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig nahmen 170 Schüler teil. In einer vierstündigen Klausur mußten je vier Aufgaben von den Teilnehmern aus den Klassenstufen 8 bis 12 gelöst werden. Gastgeber waren die Sektion Physik, die Bezirkssektion der Physikalischen Gesellschaft und die Abteilung Volksbildung des Rates des Bezirkes. Prof. Dr. Uhlmann sagte zur Begrüßung, daß diese Wettbewerbe – genau wie in Mathematik – zu einer echten Tradition werden mögen. Er legte den jungen Physikern dar, daß nur der gute Erfolge in diesem für unsere gesellschaftliche Entwicklung so wichtigem Fach, sei es in der Schule wie im Studium erzielen kann, wer eine echte Verbindung zwischen Theorie und Praxis in Physik, aber auch zu anderen Fächern – insbesondere zur Mathematik – und dem Leben schafft. Er betrachtete diese Olympiade als einen wertvollen Beitrag zu den X. Weltfestspielen. Assistenten und Studenten der Sektion Physik korrigierten und bewerteten die Lösungen. Im Rahmen der Siegerehrung wurde der achte, einer der schon traditionellen Experimentalvorträgen mit dem Thema: „Schwingungen und Wellen" gehalten.

Aus jedem Schuljahr bieten wir je eine praxisbezogene Aufgabe:

Klassenstufe 8

Ein Motorradfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht auf eine Mauer zu. Im Abstand D von der Mauer gibt er ein kurzes Hupsignal. Das reflektierte Signal empfängt er, nachdem er $\frac{1}{9}$ der Strecke D zurückgelegt hat.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Motorradfahrers, wenn die Schallgeschwindigkeit $v_s = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist?

Klassenstufe 9/10

Eine elektrische Heizplatte hat zwei Stromkreise. Schaltet man nur den ersten ein, dann siedet eine Wassermenge in 15 Minuten. Schaltet man den anderen ein, dann siedet die Menge in 30 Minuten.

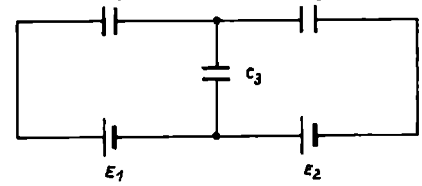
Es ist zu berechnen, in welcher Zeit das Wasser zum Sieden gebracht wird, wenn

a) beide Stromkreise parallel,

b) beide Stromkreise in Reihe eingeschaltet sind.

Klassenstufe 11/12

In der angegebenen Schaltung haben die 3 Kondensatoren die Kapazitäten C_1, C_2 und C_3 und die Spannungsquellen E_1 und E_2.



Die Ladung auf jedem einzelnen Kondensator ist zu berechnen! (Die K. können als ideal betrachtet werden.)

J. Lehmann

Herstellung eines Rechenstabes

Geschichtlich

Im Laufe von 350 Jahren hat unser Rechenstab einige Male seine Form gewechselt. Während es sich anfangs lediglich um eine Platte (Gunter-Table) handelte, auf der die einzige Teilung als logarithmische Grundteilung aufgetragen war, entwickelte *Oughtred* 1633 zwei Stäbe mit gleicher Teilung, die er aneinander verschob, um das Anfügen des zweiten Faktors einer Multiplikationsaufgabe mit dem Zirkel zu vermeiden. Eine weitere Verbesserung erfolgte im Jahre 1654 durch *Robert Bissacker*, bei der die zweite Teilung als Zunge in einem Holzkörper glitt. Diese *Kastenform* hat lange Zeit, bis in unsere Tage hinein, bestanden und wird auch jetzt noch, wenn auch seltener, bei einfachen Stäben angewandt.
Ein praktischer Vorschlag kam bereits 1648 von dem englischen Landmesser und Mathematiklehrer *Seth Partridge*, der zum ersten Mal drei Holzstreifen verwendete, bei denen die beiden äußeren durch Messingstreifen verbunden und der dritte zwischen ihnen verschiebbar angeordnet war. Es hat allerdings verhältnismäßig lange Zeit gedauert, bis sich diese Form, die Zweiseiten- oder Duplexform, allgemein durchsetzen konnte. Nach dem zweiten Weltkrieg gab man den Rechenstäben, wenn auch zunächst noch zögernd, überwiegend die Zweiseitenform. Damit wurde Platz gewonnen. Man konnte jetzt die zahlreicher gewordenen Teilungen bei höher entwickelten Rechenstäben auf beiden Seiten unterbringen. Das Ablesen von Winkelangaben in Fenstern oder Ausschnitten entfiel. Man gewann einen vergleichenden Überblick über die gesamte Winkelteilung.

Vorteile der Zweiseitenform bei der Produktion

Im Grunde genommen besteht ein moderner Rechenstab aus drei Streifen, von denen die äußeren beiden durch Stege zusammengehalten werden. Dabei hat jeder europäische Herstellbetrieb sein eigenes Verfahren. Während der eine die Verbindung auf beiden Seiten durch Nieten vornimmt, verwendet sie ein anderer nur auf der einen Seite. Die andere erhält Schrauben in Langlöchern, um die einwandfreie Gängigkeit beliebig korrigieren zu können. In letzter Zeit ist man dazu übergegangen, die Stege mit den Stabkörperleisten durch Kleben fest zu verbinden. Das Bearbeiten der früheren *Kastenform* durch Fräsen, Einlegen federnder Verbindungen usw. fällt bei der Zweiseitenform weg; hier federn die Stabkörperleisten selbst leicht gegen die Zunge und halten sie in ihrer jeweiligen Stellung fest.

Das Material

Für die früheren Stäbe in *Kastenform* wurde zunächst Buchsbaum-, später Birnbaum- oder Mahagoniholz verwendet. Damit sich diese bei längerem Gebrauch nicht verziehen, mußte das Material bis zu zehn Jahren lagern. Später konnte man die Ablagerungszeit durch Schnelltrockenverfahren verkürzen. Jetzt werden die Zweiseitenstäbe allgemein aus weißem Thermoplast hergestellt. Das Material in Form von Platten wird zunächst in Streifen von bestimmter Länge geschnitten. Bevor drei von ihnen zu einem Rechenstab zusammengestellt werden können, müssen die Streifen noch planparallel bearbeitet und *geprägt* werden.

Prägen und Räumen

Geprägt, also eingepreßt, werden alle Zahlen als spätere Wertangaben für die Teilstriche, weiterhin Rechenmarken, die Teilungsbenennungen auf der linken Stabseite und die mathematischen Kurzzeichen rechts. Geprägt wird mit Prägeleisten aus Messing. Auf ihnen sind Zahlen und Buchstaben vorher spiegelbildlich und positiv, also erhaben, graviert worden. Je nach dem Stabtyp werden die Leisten zu einer Prägeplatte zusammengestellt, die schließlich am Oberteil einer Prägepresse befestigt wird. Auf dem Prägetisch darunter befindet sich die Aufnahmevorrichtung für die Rechenstableisten. Das Einpressen der Zeichen kann mit Hand- oder Motorantrieb erfolgen.
Die äußeren, die Stabkörperleisten, müssen jetzt noch mit Nuten und die Zunge, die später zwischen ihnen gleiten soll, mit Federn versehen werden. Diese spanabhebende Arbeit wird auf Räummaschinen vorgenommen. In ihnen erhalten die Plaststreifen durch Vorbeiführen an einer Reihe scharfer Zähne ihr Profil, werden *profiliert*. Jetzt können die drei Leisten, die zunächst noch eine Überlänge haben, zusammengefügt und an den Enden durch provisorische Stege verklebt oder durch Verschweißen an den Trennfugen fest miteinander verbunden werden. Damit ist der Stab für das präzise Gravieren der Teilstriche, für die *Teilung*, vorbereitet.

Die Teilung

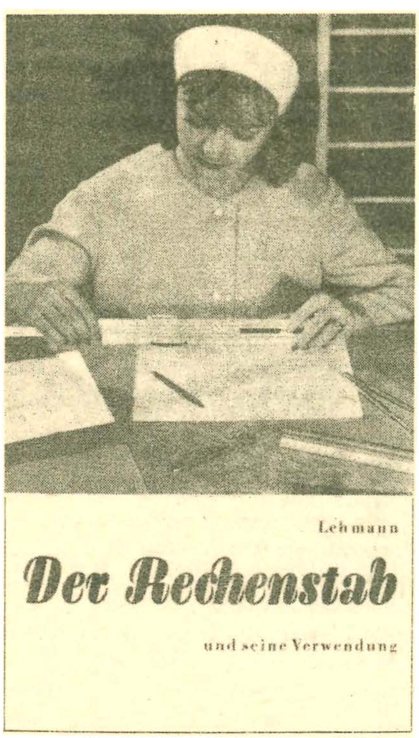
In der ersten Zeit wurde jeder Stab einzeln geteilt. Man spannte ihn in eine Vorrichtung, die mit einer Meßmaschine fest verbunden war. Mit dem Mikroskop suchte man die vorher errechneten Entfernungen vom Teilungsbeginn bis zu den einzelnen Teilstrichen auf und führte an diesen Stellen einen gewicht- oder federbelasteten Stahlstichel zugleich über Stabkörper und Zunge, beispielsweise dort, wo sich die C- und D-Teilung später befinden sollen. Dabei mußte genau auf die verschiedenen Strichlängen geachtet werden. Es versteht sich von selbst, daß diese Methode sehr zeitaufwendig war. Man ging dazu über, mehrere Stäbe gleichzeitig zu teilen. Der Gedanke war keineswegs neuartig. Der Franzose *Etienne Lenoire* baute bereits um 1800 eine Teilmaschine nach Entwürfen von *Jamarde* und *Collardean*. Mit dieser Maschine konnte er gleichzeitig acht Stäbe von 25 cm Teilungslänge bearbeiten.
Um die Produktion zu steigern, gingen die beiden Betriebe der DDR (VEB Meß- und Zeichengerätebau Bad Liebenwerda und KG Meissner (jetzt VEB Mantissa) in Klotzsche bei Dresden) dazu über, Einrichtungen zu verwenden, die die gleichzeitige Teilung einer noch größeren Anzahl von Rechenstäben zuließen; zunächst waren es 30, später 50.
Auf der ebenen Metallfläche einer Teilmaschine werden jetzt 50 vorbereitete Rechenstäbe fest aufgespannt. Ein fahrbares Gestell trägt über den Stäben je einen Stichel, der, um den notwendigen Schnittdruck zu erzeugen, gewichtbelastet ist. In der ersten Zeit wurde, wie bei der Einzelteilung, die Strichentfernung vom Teilungsbeginn mit Meßmaschine und Mikroskop ermittelt. Das Verschieben des Wagens, die Begrenzung der Schnittlänge bei vollen, verkürzten Fünfer- oder bei kurzen Strichen durch einstellbare Anschläge und das Senken der Stichel wurden mit der Hand vorgenommen. Dabei können sich Fehler allerdings fünfzigfach auswirken.
In letzter Zeit hat nun auch die photoelektrische Steuerung ihre Mitwirkung bei der Rechenstabteilung angemeldet. Der Abstand der Teilstriche und ihre Länge werden auf einem Glasnormal oder einer ähnlichen Einrichtung von Photozellen abgetastet, die das Verschieben des Wagens bis zum nächsten Teilstrich, das Auslösen der neuerdings pneu-

matisch belasteten Stichel und die Auswahl des richtigen Anschlages für die Strichlänge bewirken.
Die Einführung der photoelektrischen Steuerung stellt einen wesentlichen Fortschritt dar. Nicht nur, daß Arbeitskraft eingespart wird, auch das Teilen selbst geht zügiger vonstatten. Eine Arbeitskraft ist nur noch nötig, wenn das Normal für eine Stabart mit anderer Teilungsanordnung angebracht und die Anschläge dafür neu eingerichtet werden müssen.

Abschließende Arbeiten

Die vorläufigen Stege werden durch die endgültigen ersetzt. Dabei werden auch die überlangen Teile, die für die Bearbeitung notwendig waren, gekürzt.
Die vertieft liegenden Zahlen, Zeichen und Teilstriche erhalten Farbe. Nach erfolgter Beseitigung von Farbresten usw. werden die Stäbe noch mit einem farblosen Überzug versehen.
Zum Einstellen einer Aufgabe und zum Ablesen des Ergebnisses dient bekanntlich der Läufer. In neuerer Zeit verwendet man dazu nicht mehr Glas im Metallrähmchen, sondern randlose Freiblickläufer, die man mit Ablesestrichen versieht. In der DDR werden Rechenstäbe vom VEB Kombinat Zentronik, Betriebsteil Meß- und Zeichengerätebau Bad Liebenwerda, und vom VEB Mantissa in Klotzsche bei Dresden gefertigt. Die in diesen Betrieben hergestellten Rechenstäbe entsprechen den schulischen und technisch-mathematischen Erfordernissen.

A. Ewert

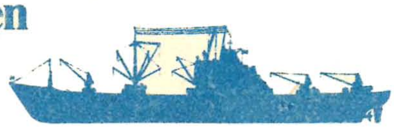


Die Mathematik ist ein besonders geeignetes Werkzeug zur Behandlung abstakter Begriffe jeder Art und ihrer Anwendung sei keine Grenzen gesetzt. Aus diesem Grund muß auch ein Buch über die moderne Physik, wenn es nicht bloß rein beschreibend für experimentelle Arbeiten ist, im wesentlichen mathematisch sein.

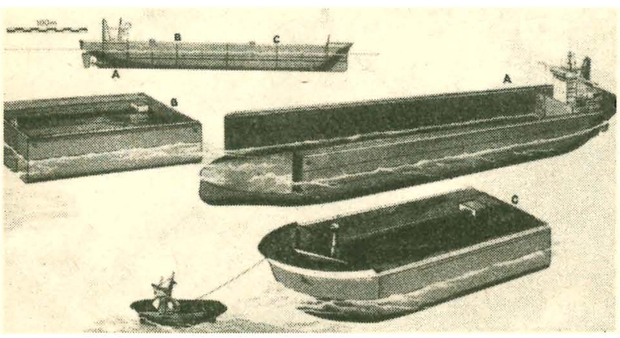
P. A. M. Dirac (Quantum mechanies 1930)

Unser Buchtip — Vorschlag für eine Wandzeitung

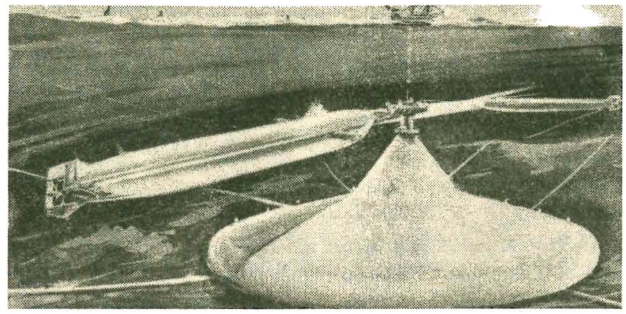
Schiffe und Schiffahrt von morgen



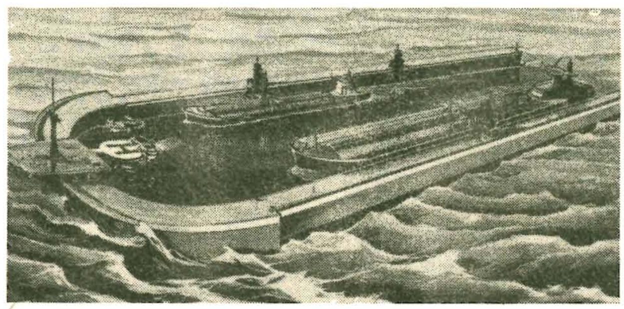
In diesem großzügig gestalteten Buch wird der Versuch unternommen, die Frage nach der Zukunft der Schiffe und der Schiffahrt zu beantworten. Vier Wissenschaftler untersuchen den heutigen Stand, die zu erwartenden Transportaufgaben, die zahlreichen bekanntgewordenen Zukunftsprojekte und stellen eigene Ideen vor. In anschaulicher Form geben sie dem Leser eine Fülle von Einzelinformationen, 30 Fotos und über 170 eindrucksvolle, größtenteils mehrfarbige Graphiken veranschaulichen den Text zu einem populärwissenschaftlichen Werk für Junge Physiker, Techniker und Mathematiker (Preis ca. 25,— M).



In der Horizontalen teilbarer Tanker
A Antriebs- und Dockteil, *B* ausschwimmbarer Mitteltankteil, *C* ausschwimmbarer Vordertankteil
Das Schiff besteht aus drei Teilen: dem Antriebsteil und Dockteil, dem ausschwimmbaren Mittelteil und dem ausschwimmbaren Vordertankteil.
Bei der Fahrt im tiefen Wasser sind alle Teile fest miteinander verbunden. Das Schiff ist dann von einem normalen Tanker kaum zu unterscheiden. Ist die Flachwassergrenze erreicht, werden Ballast-Wassertanks im Dockteil *A* geflutet, so daß die Teile *B* und *C* ausgeschwommen werden können. Anschließend werden die Ballast-Wassertanks wieder gelenzt, und der ebenfalls Öl transportierende Dockteil *A* schwimmt relativ weit auf. Die Teile *B* und *C* und der Dockteil *A* haben nun nur noch etwa 60% des Tiefgangs wie vor dem Trennen.
Eine mögliche Lösung des Problems, wie relativ flache Häfen von Schiffen mit großem Tiefgang angelaufen werden können.



Beladung von Unterwassertanker aus dem Sammeltank von Ölgewinnungsstellen auf dem Meeresboden.
Das von unterseeischen Ölgewinnungsstellen stammende Öl fließt durch Pipelines in einen Plastik-Sammeltank, dessen Spitze von einem Spezialschiff gehalten wird. Eine Abzapfvorrichtung über dem Sammeltank dient dazu, Unterwassertanker mit Öl zu beladen.
Eine mögliche Lösung des Problems, wie Erdöl aus Gewinnungsstellen am Meeresboden abtransportiert werden kann.



Schwimmende Betoninsel zum Verladen von Erdöl aus Förderstätten im Schelfgebiet: Dieses Bauwerk aus Leichtbeton ist an seiner geschlossenen Seite verankert, so daß es sich mit der Wind- und Seegangrichtung drehen kann. Das U-förmige Becken bietet damit einen ruhigen Liegeplatz für Tankleichterverbände (Kombination aus Ladeteil und abkoppelbarem Antriebsteil), die die Ladung in die Tanks der Insel pumpen, so daß die Insel als Pufferlager dient, die entweder von Großtankern geleert wird oder selbst zur nahegelegenen Küste geschleppt werden kann.
Eine Möglichkeit zur Lösung des Problems, auf welche Weise Erdöl abtransportiert werden kann, das unter Wasser im Schelfgebiet gefördert wird.

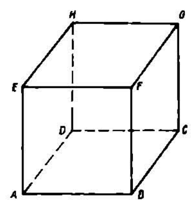
XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

1. a) Zeigen Sie, daß es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist: Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkel genau m spitze sind.
b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!
c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

2. Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abb.) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.



a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!
b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!

3A. a) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat.
b) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AB}=\overline{AD}=x$, $\overline{CB}=\overline{CD}=y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat.
c) Man beweise: Sind M und U die Mittelpunkte, ϱ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt

$$\overline{MU}^2=r^2+\varrho^2-\varrho\sqrt{\varrho^2+4r^2}.$$

3B. Dirk und Jens spielen ein Spiel mit den folgenden Regeln: Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug“. Ein „Zug“ besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen Zug zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am Zug befindliche Spieler aber keinen Zug nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

4. In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x, y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y=-1$. Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, daß k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0; 1)$.

5. Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe: Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, daß sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine *g-adisch*-zweistellige Zahl ergibt, und daß man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl, die im gleichen Zahlensystem in der Gestalt 12 (zweistellig) zu schreibende Zahl erhält?

6. Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D. Die erste Karawane marschierte jeweils 3 Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils 2 Tage hintereinander und legte dann 2 Ruhetage ein. Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.
Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.
Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.
Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

Olympiadeklasse 11/12

1. Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a, b)=\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

2. Es sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung
$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2$
erfüllt ist.

3. Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

4. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3; 4; 0)$ bzw. $(10; 8; 4)$. Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so daß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

5. Jemand schrieb auf die 6 Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen die Zahlen 0 und 1 befanden. Danach ersetzte er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der 4 Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatte. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden mußte.)
Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzigmal durch. Zum Schluß stellte er fest, daß er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.
Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

6A. Man zeige, daß der Term $\frac{(14+\cos x)\sin x}{9+6\cos x}$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, daß für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenz beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.
Anmerkung:
Es gilt $\pi=3{,}14159+\delta$ mit $0<\delta<10^{-5}$
und $\sqrt{2}=1{,}41421+\varepsilon$ mit $0<\varepsilon<10^{-5}$.

6B. In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreisflächen K_1 und K_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ABC so, daß B auf dem Rand von K_1 und C auf dem Rand von K_2 liegen.

a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.

b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solche Dreiecke gibt.

Lösungen

Kreisolympiade

Die Lösungen zu Klasse 5 und 6 – siehe Heft 6/73.

Klassenstufe 7

1. (I) Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

(1) $x+y=15390$,

(2) $z=u$.

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer 8 und als letzte Ziffer nicht 0. Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88. Daher kann nur $x=6$ oder $x=2$ sein.

Wäre $x=2$, so wäre $y=15388$, und man erhielte $z=215\,388$ sowie $u=153\,882$ im Widerspruch zu $4\cdot 153\,882=615\,528\neq 215\,388$.

Daher können nur $x=6$ und $y=15384$ die geforderten Eigenschaften haben.

(II) In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z=615384$ sowie $u=153846$, so daß wegen $4\cdot 153846=615\ 384$ auch (2) erfüllt ist. Somit gibt es genau die Möglichkeit $x=6$, $y=15384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

2. In dem Viereck $ABCD$ sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\overline{AE}=\overline{EC} \text{ sowie } \overline{BE}=\overline{ED}$$

Nun gilt weiter: $\sphericalangle AEB\cong\sphericalangle DEC$ als Scheitelwinkel und ebenso $\sphericalangle AED\cong\sphericalangle BEC$.

Daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AEB=\triangle DEC\\ \triangle AED=\triangle BEC\end{array}\right\}\text{(s, w, s)}$$

Folglich gilt:

$\sphericalangle EAB\cong\sphericalangle ECD$ (1) sowie

$\sphericalangle EAD\cong\sphericalangle ECB$ (2).

Aus (1) folgt: $AB\parallel DC$, Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parellelen.

Aus (2) folgt: $AD\parallel BC$,

d. h. $ABCD$ ist ein Parallelogramm, w. z. b. w.

3. Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

(1) $a+b+c+d=100$.

(2) $a+b=c+d$.

(3) $c>d$. *)

Aus (1) und (2) folgt

(6) $a+b=c+d=50$

Wäre nun $a=c$ oder $a=d$ oder $b=c$ oder $b=d$, so folgte daraus wegen (2) $b=d$ bzw. $b=c$ bzw. $a=d$ bzw. $a=c$ im Widerspruch zu (4).

Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), daß $a=b=25$ sein muß.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c>50-c$, also $c>25$, und daher $d=50-c<25$.

Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c-d=4$, woraus zusammen mit (6) dann $c=27$ und $d=23$ folgt.

Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt und Detlef ist 23 Jahre alt.

*) Andere Fortsetzung

Wegen (2), (3) und (4) gilt $a=b$.

Wäre nämlich in jedem der Paare (Arnold; Bruno) bzw. (Christoph; Detlef) je einer der beiden Gleichaltrigen, dann müßten auch die beiden anderen gleichaltrig sein, was (4) widerspricht.

Da somit Christoph älter als Detlef ist, beide zusammen aber genau so alt wie die beiden gleichaltrigen Arnold und Bruno zusammen sind, ist Christoph der älteste und...

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D. Dann gilt für das Dreieck $\triangle BCD$ wegen $\beta<90°$:

$\overline{\sphericalangle DBC}=\beta$, $\overline{\sphericalangle BDC}=90°$ und $\overline{CD}=h_c$.

Punkt A liegt

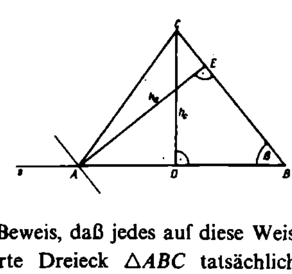
1. auf dem Strahl s aus B durch D und
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf derselben Seite von BC wie D liegenden, weil A auf dem Strahl s liegt.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle BCD$ aus den Winkeln $\sphericalangle DBC$, $\sphericalangle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, 90° bzw. h_c sind.

(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.

(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.



(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\sphericalangle$DBC, und dieser hat die Größe β, ferner ist $\overline{CD}=h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta<90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken $\triangle ABC$ gelangt.

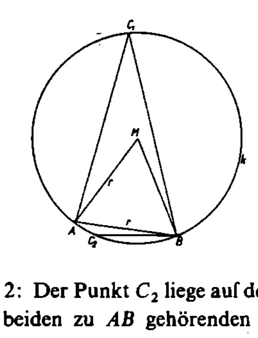
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 8

1. Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müßte. Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter. Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müßte Axel im Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle. Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin: Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

2. Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $\overline{AB}=\overline{AM}=r$. Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:

Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\sphericalangle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\sphericalangle AC_1B$ eine Größe von 30°.



Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegenden Winkel zu 180°. Daher hat der Winkel $\sphericalangle AC_2B$ eine Größe von $180°-30°=150°$.

3. a) Unter allen 1972stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17748$. Da hiernach die erste Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 17748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17748 und folglich als Quersumme der Zahl 9999, d. i. 36.

[Denn jede natürliche Zahl x mit $10 \leqq x < 9999$ hat höchstens vier Ziffern, aber nicht vier Ziffern 9, also hat x stets eine Quersumme < 36; jede natürliche Zahl y mit

$9999 < y \leqq 17748$

aber hat genau fünf Ziffern, und zwar als erste eine 1, als zweite eine Ziffer < 8 und daher ebenfalls eine Quersumme < 36.]

Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d. i. 11.

b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, daß die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2999.

Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, daß die aus den vorangehenden $1972 - 333 = 1639$ Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = 1\underbrace{0\ldots0}_{1637}1\underbrace{9\ldots9}_{333},$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.

Ist nun g irgend eine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:

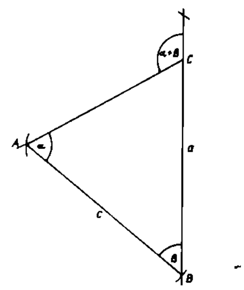
Wegen $\frac{g}{9} = \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972-stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer $\geqq 2$. Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$. Damit ist A als kleinste unter allen 1972stelligen Zahlen nachgewiesen, die die dritte Quersumme 11 besitzen.

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist durch die Außenwinkel bei C, deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es läßt sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180° - 120° = 60°$.

Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\sphericalangle ACB = 60°$, $\overline{BC} = a = 6{,}5$ cm, $\overline{AB} = c = 7{,}5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.



(III) Beweis, daß jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach dem Außenwinkelsatz gilt

$$\alpha + \beta = 180° - \sphericalangle ACB = 120°$$

und nach Konstruktion

$\overline{AB} = c = 7{,}5$ cm sowie $\overline{BC} = a = 6{,}5$ cm.

(IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 9

1. Ist n die mittlere der drei natürlichen Zahlen, so lauten sie $(n-1)$, n, $(n+1)$. Die Summe ihrer Kuben ist die Zahl

$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$= 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n)$, und diese Zahl ist durch 3 teilbar, w. z. b. w.

2. Der genannte Quotient ist genau dann negativ, wenn entweder

$8 - 3x > 0$ und $7x - 2 < 0$ (Fall 1) oder

$8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$ (Fall 2) ist.

Trifft Fall 1 für ein x zu, so folgt aus

$8 - 3x > 0$ sowie aus $7x - 2 < 0$

$3x < 8$, also $\qquad 7x < 2$, also

$x < \frac{8}{3}$ $\qquad x < \frac{2}{7}$.

Wegen $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$ folgt also $x < \frac{2}{7}$.

Trifft Fall 2 für ein x zu, so folgt entsprechend aus

$8 - 3x < 0$ sowie aus $7x - 2 > 0$

$3x > 8$, also $\qquad 7x > 2$, also

$x > \frac{8}{3}$ $\qquad x > \frac{2}{7}$.

Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ folgt also $x > \frac{8}{3}$.

Tatsächlich ist für $x < \frac{2}{7}$ erst recht $x < \frac{8}{3}$ und daher $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$, so daß Fall 1 zutrifft.

Tatsächlich ist für $x > \frac{8}{3}$ erst recht $x > \frac{2}{7}$ und daher $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$, so daß Fall 2 zutrifft. Mithin ist der genannte Quotient genau für diejenigen reellen Zahlen x negativ, für die $x < \frac{2}{7}$ oder $x > \frac{8}{3}$ gilt.

3. Es sei n die Anzahl der Reihen. Dann ist die Anzahl s aller verwendeten Büchsen wegen (1) und (2) gleich der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, also gilt:

$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$.

Wegen (3) und (4) muß diese Summe durch 3 teilbar sein. Weiter gilt wegen (3), (5) und (6) $n \geqq 3$. Für $n = 3$ ist $s = 6$. Da es in diesem Fall genau 3 Reihen gibt, ist wegen (5), (6) und (3) die Bedingung (4) nicht erfüllbar.

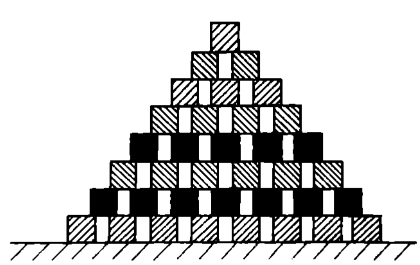
Für $n = 4$ ist $s = 10$, also nicht durch 3 teilbar.

Für $n = 5$ ist $s = 15$. Wegen (4) müßten also von jeder Sorte genau 5 Büchsen verwendet werden. Da wegen (1) und (2) in diesem Falle die unterste Reihe 5 Büchsen enthält, müßten die übrigen beiden Sorten so auf die restlichen 4 Reihen verteilt werden, daß jeweils 5 Büchsen der beiden Sorten verwandt werden. Andererseits müßten wegen (6) die Sorten von Reihe zu Reihe wechseln. Nun enthalten die Reihen aber der Reihe nach die Anzahlen 4, 3, 2, 1, und es ist $4 + 2 \neq 3 + 1$. Daher lassen sich auch für $n = 5$ die Bedingungen (1) bis (6) nicht gleichzeitig erfüllen.

Für $n = 6$ ist $s = 21$. Wegen (4) müßten mithin von jeder Sorte genau 7 Büchsen verwendet werden. Da wegen (1) und (2) in diesem Falle die unterste Reihe 6 Büchsen enthält, müßte die siebente Büchse der für die unterste Reihe verwendeten Sorte in der obersten Reihe stehen. Die restlichen Reihen mit 2, 3, 4 bzw. 5 Büchsen wären dann mit den restlichen beiden Büchsensorten zu besetzen, und zwar wegen (6) abwechselnd. Wegen $2 + 4 \neq 3 + 5$ ist dann aber (4) nicht erfüllt.

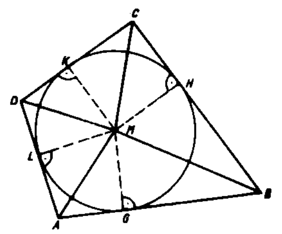
Für $n = 7$ ist $s = 28$, also nicht durch 3 teilbar.

Für $n = 8$ ist $s = 36$. Stellt man die erste Sorte Büchsen in die Reihen mit 1, 3 bzw. 8 Büchsen, die zweite Sorte in die Reihen mit 2, 4 bzw. 6 Büchsen und die dritte Sorte in die Reihen mit 5 bzw. 7 Büchsen, dann wurden wegen $1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7 = 12$ von jeder Sorte gleich viel verwendet und auch die Bedingungen (1), (2), (3), (5) und (6) wurden eingehalten. Daher ist $n = 8$ die kleinste Anzahl von Reihen, mit der (1) bis (6) erfüllbar sind, und somit $s = 36$ die gesuchte kleinste Anzahl von Büchsen.



Die (vom Schüler nicht verlangte) Abb. veranschaulicht die Lösung.

4. Der Mittelpunkt des Inkreises sei M, die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Seiten AB, BC, CD, DA seien der Reihe nach G, H, K, L. Nun gilt:
$\overline{MG}=\overline{MH}=\overline{MK}=\overline{ML}=r$ und $MG \perp AB$, $MH \perp BC$, $MK \perp CD$, $ML \perp DA$.



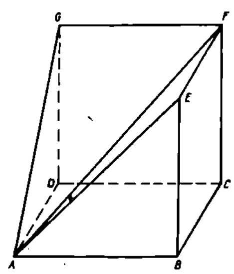
Der gesuchte Flächeninhalt F ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$, $\triangle DAM$.
Da diese Dreiecke sämtlich die Höhenlänge r haben und die Summe der Längen der zugehörigen Grundseiten AB, BC, CD, DA gleich dem Umfang u ist, gilt mithin:

$$F=\frac{1}{2}u\cdot r.$$

Klassenstufe 10

1. Da z_1 und z_2 aus den gleichen Ziffern bestehen, haben sie auch die gleiche Quersumme q. Daher lassen beide Zahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest $r (0 \leqq r < 9)$.
Mithin gilt:
$z_1 = 9n + r$ sowie $z_2 = 9m + r$ (n, m natürliche Zahlen).
Daraus folgt $|z_1 - z_2| = 9|n-m|$, d. h. $|z_1 - z_2|$ ist durch 9 teilbar.

2. a)



b) Den Körper kann man sich entstanden denken, indem man aus einem Würfel mit der Kantenlänge a einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und der zugehörigen Höhe der Länge a herausschneidet. Daher gilt für das Volumen V dieses Körpers

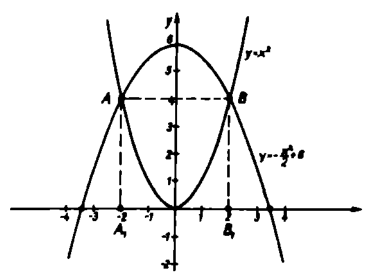
$$V=a^3-\frac{1}{3}a^2\cdot a=\frac{2}{3}a^3.$$

3. (I) Da A und B auf der ersten Parabel liegen, müssen ihre Koordinaten die Gleichung $y=x^2$ erfüllen. Da beide Parabeln symmetrisch zur y-Achse liegen, müssen A und B symmetrisch zu dieser Achse liegen; B sei der im ersten Quadrant gelegene unter diesen beiden Punkten. Weiter müssen auch A_1 und B_1 symmetrisch zur y-Achse liegen, d. h. der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Strecke A_1B_1. Da ferner nach Voraussetzung $\overline{A_1B_1}=\overline{BB_1}$ ist, gilt für die Koordinaten x_1; y_1 des Punktes B folgende Beziehung:

$y_1 = 2x_1$. Aus dem

Gleichungssystem (1) $y_1 = x_1^2$ (2) $y_1 = 2x_1$ erhält man $x_1 = 2$ und $y_1 = 4$.
(Die zweite Lösung des Gleichungssystems, $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ entfällt, da auf der Symmetrieachse der zweiten Parabel kein Punkt außer dem Scheitelpunkt liegen kann.)
Also gilt B (2; 4) und damit $A(-2; 4)$.
(II) Da die zweite Parabel den Scheitelpunkt S (0; 6) hat, lautet ihre Funktionsgleichung $y = ax^2 + 6$, mit einer geeigneten reellen Zahl a.
Diese Gleichung muß durch die Koordinaten von B erfüllt werden. Daher erhält man $4 = 4a + 6$ und daraus $a = -\frac{1}{2}$. Die zweite Parabel ist mithin der Graph der Funktion, deren Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ lautet.
(III) Ihre Nullstellen erhält man daher aus der Gleichung $-\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$.
Sie lauten $x_{01} = \sqrt{12}$ und $x_{02} = -\sqrt{12}$.
Die gesuchten Schnittpunkte der zweiten Parabel mit der x-Achse haben demnach die Koordinaten

$(\sqrt{12}; 0)$ und $(-\sqrt{12}; 0)$.



4. a) Angenommen, es gäbe ein derartiges rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ und es seien die Maßzahlen der Längen
der p zugeordneten Kathete mit a
der q zugeordneten Kathete mit b und
der Höhe mit h bezeichnet.
Nun unterscheiden wir folgende beiden Fälle:
Fall 1: Die eine der zu ermittelnden Wurzeln wird durch h, die andere durch a oder b dargestellt.
Fall 2: Die eine der zu ermittelnden Wurzeln wird durch a, die andere durch b dargestellt.
Im Fall 1 gilt: $h^2 = p\cdot q = 12$ sowie
$a^2 = p(p+q) = 133$.
Daraus erhält man durch Subtraktion $p^2 = 121$, also $p = 11$, da $p > 0$ gilt.
Mithin gilt $q = \frac{12}{11}$, und man erhält tatsächlich
$h^2 = 12$ $a^2 = 133$, also $h = \sqrt{12}$ und $a = \sqrt{133}$.
Im Fall 2 gilt: (wenn o. B. d. A. $a > b$ angenommen wird)
$a^2 = p(p+q) = 133$ sowie $b^2 = q(p+q) = 12$.
Durch Addition erhält man daraus
$(p+q)^2 = a^2 + b^2 = 145$, folglich ist $p+q$ keine rationale Zahl.
Also gibt es im Fall 2 kein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
b) Hier gilt im Fall 1:
$h^2 = p\cdot q = 11$ sowie
$a^2 = p(p+q) = 133$.
Daraus erhält man durch Subtraktion $p^2 = 122$, folglich ist p nicht rational.
Also gibt es im Fall 1 kein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Im Fall 2 gilt:
(1) $a^2 = p(p+q) = 133$ sowie
$b^2 = q(p+q) = 11$.
Daraus erhält man durch Addition $(p+q)^2 = 144$, also wegen p, $q > 0$ $p+q = 12$ bzw. $q = 12 - p$. Durch Einsetzen in (1) ergibt sich $12p = 133$, also $p = \frac{133}{12}$ und mithin $q = \frac{11}{12}$.
Tatsächlich erhält man in diesem Falle $a^2 = 133$, also $a = \sqrt{133}$, sowie $b^2 = 11$, also $b = \sqrt{11}$, wie es verlangt war.

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: math.-natw., S: Sport-AG, K: Künstler-AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen.
Dann folgt:
(0) $N+M+S+K+MS+MK+SK+MSK = 500,$
(1) $S + MS + SK + MSK = 250,$
(2) $K + MK + MSK = 125,$
(3) $M + MS + MK + MSK = 225,$
(4) $SK + MSK = 25,$
(5) $MS + MSK = 75,$
(6) $MK + MSK = 25,$
(7) $MSK = 5.$
Wegen (7) und (4) bzw. (5) bzw. (6) ist
(8) $SK = 20,$
(9) $MS = 70,$
(10) $MK = 20.$
(11) $S = 155,$
(12) $K = 80,$
(13) $M = 130.$
Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist
(14) $N = 20.$
Die in a) gesuchte Anzahl ist $S+K+M$; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365. Die in b) gesuchte Anzahl ist N; wegen (14) beträgt sie 20.

2. Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei j. Dann gilt $1 \leqq j$, und

die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1) $j, j+1, j+2, \ldots, j+49, j+50$. Nun gilt laut Aufgabe $j+50 \leqq 100$, also $1 \leqq j \leqq 50$. Folglich gehört $j+j=2j$ auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen, w. z. b. w.

3. (I) Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist $\triangle BCE$ gleichseitig, also gilt $\overline{\sphericalangle CBE}=60°$. Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da $ABCDE$ konvex ist. Daher gilt: $\overline{\sphericalangle ABE}=\overline{\sphericalangle ABC}-\overline{\sphericalangle CBE}=95°-60°=35°$.

(II) Daher erfüllt ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

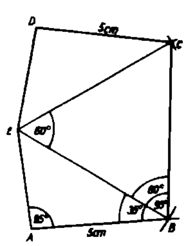
(α) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABE$ aus $\overline{AB}=5$ cm,
$\overline{\sphericalangle EAB}=95°$ und $\overline{\sphericalangle ABE}=35°$.

(β) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius $\overline{BE}$. Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.

(γ) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius $\overline{AE}$. Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion ist $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ cm, $\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{BE}$, $\overline{AE}=\overline{DE}$, also sind (1), (3), (4) erfüllt. Ferner ist $\overline{\sphericalangle EAB}=95°$, $\overline{\sphericalangle ABE}=35°$, und, da $\triangle BCE$ gleichseitig ist, $\overline{\sphericalangle CBE}=\overline{\sphericalangle BCE}=\overline{\sphericalangle BEC}=60°$.



Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt $\overline{\sphericalangle ABC}=\overline{\sphericalangle ABE}+\overline{\sphericalangle CBE}=35°+60°=95°$, also ist auch (2) erfüllt, und es gilt $\overline{\sphericalangle AEB}=180°-95°-35°=50°$. Weiterhin ist $\triangle DCE \cong \triangle ABE$ (s, s, s), also
$\overline{\sphericalangle EDC}=95°$, $\overline{\sphericalangle DCE}=35°$ und $\overline{\sphericalangle DEC}=50°$.
Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt $\overline{\sphericalangle BCD}=\overline{\sphericalangle BCE}+\overline{\sphericalangle DCE}=60°+35°=95°$.

Schließlich gilt $\overline{\sphericalangle AED}=\overline{\sphericalangle AEB}+\overline{\sphericalangle BEC}+\overline{\sphericalangle DEC}=50°+60°+50°=160°$.
Also hat $ABCDE$ an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als 180° ist, ist somit konvex.

(IV) Konstruktionsschritt (α) ist wegen $95°+35°<180°$ nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (β) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d. h. es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C. Schließlich ist auch Konstruktionsschritt (γ) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck $ABCDE$ ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. Offensichtlich gilt $p=1$ und $g=0$.
Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt $d \neq 1$ und $c \neq 1$.
Das Produkt $b \cdot d$ endet ebenso wie das Produkt $b \cdot c$ mit 1. Es sind nun genau die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei $b=9$, $c=d=9$.
Daraus folgt $b \cdot d=81$. Wegen $g=0$ muß das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 9$, mit der Ziffer 2 enden, (denn $2+8=10$). Das ist aber genau für $a=8$ der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99.
Tatsächlich führt die Rechnung $189 \cdot 99$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei $b=7$, $c=d=3$.
Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

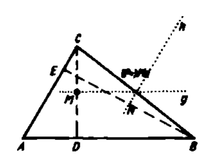
3. Fall: Es sei $b=3$, $c=d=7$.
Daraus folgt $b \cdot d=21$. Das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 7$, muß dann mit der Ziffer 8 enden (denn $2+8=10$). Das ist genau für $a=4$ der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77. Tatsächlich führt die Rechnung $143 \cdot 77$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht. Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

$189 \cdot 99$	$143 \cdot 77$
1701	1001
1701	1001
18711	11011

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

5. Es sei x eine beliebige rationale Zahl, für die $0 \leqq x \leqq 1$ gilt. Dann gilt $x+|x-1|=x+1-x=1$, also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen x, für die $0 \leqq x \leqq 1$ gilt, diese Gleichung.
Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x>1$, die die Gleichung $x+|x-1|=1$ erfüllt. Dann wäre $1=x+|x-1|=x+x-1$ und somit $2x=2$, also $x=1$, im Widerspruch zu $x>1$. Also gibt es keine rationale Zahl $x>1$, die die gegebene Gleichung erfüllt.
Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen x, für die $(0 \leqq)\ x \leqq 1$ gilt, die gegebene Gleichung.

6. Die zwei im Satz genannten Höhen seien o. B. d. A. die zu AB und AC gehörenden. Ihre Fußpunkte seien D bzw. E, ihre Mittelpunkte M bzw. N.
Die genannten Parallelen, g parallel zu AB durch M bzw. h parallel zu AC durch N, sind nicht parallel zueinander (da AB nicht zu AC parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte. Nun schneidet g den Strahl aus B durch C (da M und C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegen) in einem Punkt P. Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so haben die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle ABP$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}F$; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge $\overline{CD}$, in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge $\overline{MD}=\frac{1}{2}\overline{CD}$. Da nun die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABP$ in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt $\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{BC}$. Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt M_a. Analog beweist man, daß auch h die Strecke BC in M_a schneidet. Daher ist M_a ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da M_a auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.



Klassenstufe 8

1. Im folgenden seien die Namen der auf den Tipzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit A, B, C abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben. Da A, B und C

1. Möglichkeit der Tipverteilung

Platzvert.	A	B	C	A
	$A\ B\ C$	$A\ C\ B$	$C\ A\ B$	$C\ B\ A$
BAC 5 mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
BCA 4 mal	0+0+0	0+4+0	0+0+0	0+0+4
CAB 3 mal	0+0+0	0+0+3	3+3+3	3+0+0
Summe	5	7	14	7

2. Möglichkeit der Tipverteilung

Platzvert.	$A\ B\ C$	$A\ C\ B$	$C\ A\ B$	$C\ B\ A$
BAC 5 mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
BCA 3 mal	0+0+0	0+3+0	0+0+0	0+0+3
CAB 4 mal	0+0+0	0+0+4	4+4+4	4+0+0
Summe	5	7	17	7

die ersten drei Plätze belegten und B nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage:
(1) ABC, (2) ACB, (3) CAB, (4) CBA.
Nun läßt sich in einer Tabelle angeben, wieviel Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tipverteilungen hätten vergeben werden können.
Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip BCA genau 3 mal abgegeben wurde.

2. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1: Die bei der Division der Zahlen a, b, c durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden. Es lassen o. B. d. A. die Zahl a den Rest 0, die Zahl b den Rest 1 und die Zahl c den Rest 2. Dann lassen sich a, b, c in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} a&=3m\\ b&=3n+1\\ c&=3s+2 \end{aligned}\right\}\ \text{mit natürlichen Zahlen } m,\ n,\ s. \text{ Nun gilt:}$$

$$\begin{aligned} a+b+c&=3m+3n+1+3s+2\\ &=3(m+n+s)+3\\ &=3(m+n+s+1), \text{ d. h.} \end{aligned}$$

$3 \mid a+b+c$.

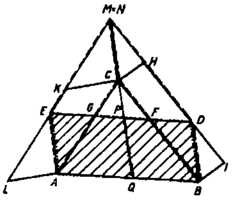
Fall 2: Es gibt unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest r lassen. Das seien o. B. d. A. die Zahlen a und b. Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} a&=3m+r\\ b&=3n+r \end{aligned}\right\}\ \text{mit natürlichen Zahlen } m,\ n,\ r \text{ wobei } 0 \leqq r \leqq 2 \text{ gilt. Nun gilt:}$$

$$\begin{aligned} a-b&=3m+r-(3n+r)\\ &=3(m-n), \text{ d. h.} \end{aligned}$$

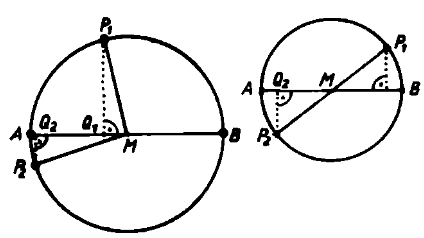
$3 \mid a-b$.

3. Falls benötigt, werden die Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:
Man zieht durch C die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten BD und EA. Ihre Schnittpunkte mit ED bzw. AB seien P bzw. Q genannt. Die Gerade durch K und L schneide die genannte Parallele durch C in einem Punkte M, die Gerade durch I und H schneide sie in einem Punkte N.

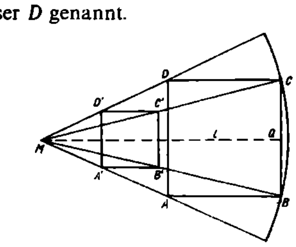


Dann sind $ACME$ und $CBDN$ ebenfalls Parallelogramme und es gilt $\overline{EA}=\overline{MC}$ sowie $\overline{BD}=\overline{NC}$, woraus wegen $\overline{EA}=\overline{BD}$ folgt, daß $M=N$ ist. Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich:
einerseits $ACKL$, $ACME$ und $AQPE$,
andererseits $BIHC$, $BDMC$ und $BDPQ$.
Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $AQPE$ und $BDPQ$ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACKL$ und $BIHC$, w. z. b. w.

4. Für jede Lage des Punktes P_1 auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist P_2 so gelegen, daß $\overline{\sphericalangle AMP_2}=\frac{1}{4}\overline{\sphericalangle AMP_1}<\frac{1}{4}\cdot 180^\circ$ $=45^\circ$ gilt. Umgekehrt nimmt die Größe des $\sphericalangle AMP_2$ während der beschriebenen Bewegung alle Werte zwischen 0° und 45° an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind Q_1 bzw. Q_2 die Fußpunkte der von P_1 bzw. P_2 auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn
(1) $\quad \overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}$ gilt.
Im Fall $\overline{\sphericalangle AMP_1}<90^\circ$ ist $\overline{\sphericalangle Q_2MP_2}=$
$=\overline{\sphericalangle AMP_2}=\frac{1}{4}\overline{\sphericalangle AMP_1}<\overline{\sphericalangle AMP_1}=$
$=\overline{\sphericalangle Q_1MP_1}$ und daher
$\overline{P_2Q_2}<\overline{P_1Q_1}$. Im Fall
$\overline{\sphericalangle AMP_1}=90^\circ$ ist $\overline{\sphericalangle Q_2MP_2}=\overline{\sphericalangle AMP_2}=$
$=\frac{1}{4}\overline{\sphericalangle AMP_1}<90^\circ$ und daher ebenfalls
$\overline{P_2Q_2}<(\overline{MP_2}=\overline{MP_1}=)\,\overline{P_1Q_1}$.
Also kann (1) in den Fällen $\overline{\sphericalangle AMP_1}\leqq 90^\circ$ nicht erfüllt werden.
Im Fall $\overline{\sphericalangle AMP_1}>90^\circ$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn (2) $\overline{\sphericalangle BMP_1}=$ $=\overline{\sphericalangle Q_1MP_1}=\overline{\sphericalangle Q_2MP_2}=\overline{\sphericalangle AMP_2}$ gilt;
denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit
$180^\circ-4\cdot\overline{\sphericalangle AMP_2}=\overline{\sphericalangle AMP_2}$
und dies mit $\overline{\sphericalangle AMP_2}=36^\circ$.
Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\sphericalangle AMP_2$ die Größe 36° hat.



5. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei A' ein Punkt auf MP. Es sei weiter Q der Fußpunkt des Lotes l von M auf BC. Dann ist $\triangle MBQ=\triangle MCQ$ (ssw), also ist l die Mittelsenkrechte von BC und daher auch die von AD. Somit gilt $\overline{MA}=\overline{MD}$. Die Parallele durch A' zu AB schneide den Strahl aus M durch R in einem Punkt, *der* D' genannt sei. Die Parallelen durch B' zu BC und durch D' zu DC mögen sich im Punkt C' schneiden. Dann ist $A'B'C'D'$ ein Viereck, das aus $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $\overline{MA}=\overline{MD}$ auch $\overline{MA'}=\overline{MD'}$ gilt.
Da das Quadrat $ABCD$ nicht auf derselben Seite von AD liegt wie M, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie M.
(II) Daraus ergibt sich, daß ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Man wählt auf MP einen beliebigen Punkt A'.
(2) Man schlägt den Kreis um M mit $\overline{MA'}$. Schneidet er den Strahl aus M durch R in einem Punkt, so sei dieser D' genannt.
(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie M.
(4) Man zeichnet die von M ausgehenden Strahlen durch B' bzw. C'. Schneiden sie den Bogen $\widehat{PR}$, so seien diese Schnittpunkte B bzw. C genannt.
(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch B. Schneidet sie PM in einem Punkt, so sei dieser A genannt.
(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch C. Schneidet sie RM in einem Punkt, so sei dieser D genannt.



(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte l von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $\overline{MA'}=\overline{MD'}$ geht sie durch M, ist also auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle B'MC'$. Schneidet sie BC in Q, so ist daher $\triangle MBQ\cong\triangle MCQ$ (sws), also l auch senkrecht auf BC und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen. Daher ist ABCD ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

6. Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl a gebe es eine natürliche Zahl x, für die

$$(1)\qquad \frac{25}{2}x-a=\frac{5}{8}x+142 \text{ gilt.}$$

Dann gilt auch

$$100x-8a=5x+1136 \text{ bzw.}$$

$$95x=1136+8a, \text{ also}$$

$$(2)\qquad x=\frac{1136+8a}{95}.$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl a nur dann eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft (1), wenn $1136+8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a>0$ gilt. Da 1136 bei

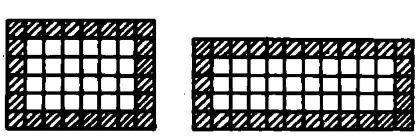
Division durch 95 den Rest 91 läßt, erhält man die kleinste Zahl a für $8a=4$, sie lautet also $a=\frac{1}{2}$. Für sie ergibt sich nach (2) $x=12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x=12$ zusammen mit $a=\frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes a mit den geforderten Eigenschaften, und x nimmt hierfür den Wert 12 an.

Klassenstufe 9

1. Es gilt $n^6-n^2=n^2\cdot(n^4-1)$
$=n^2\cdot(n^2+1)\cdot(n^2-1)$.
Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen n^2-1, n^2, n^2+1 ist mindestens eine gerade. Ist n durch 5 teilbar, so ist n^2 durch 5 teilbar. Ist n nicht durch 5 teilbar, so läßt n bei Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3, 4. Dann läßt n^2 bei Division durch 5 bzw. den Rest 1, 4, 4, 1.
Läßt n^2 bei Division durch 5 den Rest 1, so ist n^2-1 durch 5 teilbar.
Läßt n^2 bei Division durch 5 den Rest 4, so ist n^2+1 durch 5 teilbar.
In jedem Falle ist daher $n^6-n^2=$
$=(n^2-1)\cdot n^2\cdot(n^2+1)$ durch 2 und durch 5 und folglich, da 2 und 5 teilerfremd sind, auch durch 10 teilbar.
Bemerkung: n^6-n^2 ist für jedes ganze n sogar durch 60 teilbar.

2. Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus a und jede Spalte aus b Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a\geqq 3$ und $b\geqq 3$, da sonst keine weißen Quadratflächen aufträten, und die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt $2a+2b-4$, die Anzahl der weißen Quadratflächen beträgt $(a-2)\cdot(b-2)=$
$=ab-2a-2b+4$.
Somit gilt $2a+2b-4=ab-2a-2b+4$, also
(1) $a(b-4)=4b-8$.
Wäre $b=3$, so folgte $-a=4$; wäre $b=4$, so folgte $0=8$, was beides einen Widerspruch darstellt. Also gilt $b>4$, d. h. (2) $b-4>0$. Wegen (1) ist $4b-8=4(b-4)+8$ durch $b-4$ teilbar und daher auch (3) 8 durch $b-4$ teilbar.
Nach (2), (3) kann $b-4$ nur eine der Zahlen 1, 2, 4, 8 sein. Hieraus und aus (1) ergeben sich für das Paar (a, b) nur die Möglichkeiten

a	b
12	5
8	6
6	8
5	12

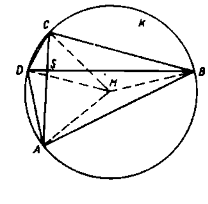


Wie die Abb. zeigt, erfüllen in der Tat diese Paare die Bedingungen der Aufgabe (Fall 1 und 4 bzw. Fall 2 und 3 gehen durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten auseinander hervor).
Der vorstehende Lösungsweg untersucht, wann sich aus (1) eine natürliche Zahl a ergibt. Einfacher wird die Darstellung bei folgendem 2. Lösungsweg:
Die (durch positive ganze a, b, zu erfüllende) Bedingung ist äquivalent mit $ab-4a-4b+8=0$ und dies mit (*) $(a-4)(b-4)=8$.
Also hat man alle ganzzahligen Faktorenzerlegungen(*) von 8 zu prüfen, ob für sie a und b positiv (ganzzahlig) sind. Ist nun eine der Zahlen $(a-4)$, $(b-4)$ ein Faktor (-8) oder (-4), so hat die betreffende Zahl a bzw. b den Wert (-4) oder (0).
Daher lösen genau die Zerlegungen $8=8\cdot 1=4\cdot 2=2\cdot 4=1\cdot 8$ und somit genau die oben angegebenen Paare (a, b) die Aufgabe.

3. Die vier Raumdiagonalen eines Würfels schneiden sich in einem Punkt. Er sei mit M bezeichnet. Mit M als Spitze und je einer Würfelfläche als Grundfläche gibt es genau 6 vierseitige Pyramiden, die den Würfelkörper vollständig ausfüllen. Diese Pyramiden sind untereinander kongruent.
Jede der vier Seitenflächen jeder Pyramide ist in genau einer der 6 in der Aufgabe genannten Schnittebenen enthalten, d. h. daß jede Pyramide nur noch von zwei der gegebenen Ebenen geschnitten werden kann. Dies wird sie in der Tat, nämlich von denjenigen beiden Schnittebenen, die auf der Grundfläche der Pyramide senkrecht stehen und deren (Flächen-)Diagonalen enthalten. Sie zerlegen die Pyramide in vier untereinander volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper. Der Würfel wird daher in 24 Teilkörper zerlegt.
Alle Teilkörper sind untereinander volumengleich. Das Volumen jedes dieser Teilkörper beträgt daher $\frac{a^3}{24}$.

4. Mit den üblichen Bezeichnungen s für die Weglänge, v für die Geschwindigkeit und t für die aufgewandte Zeit gilt $s=v\cdot t$ bzw. $t=\frac{s}{v}$. Wird nun die von A aufgewandte Zeit mit t_A und die von B aufgewandte Zeit mit t_B bezeichnet, dann gilt einerseits für A:
$t_A=t_1+t_2$ mit $t_1=\frac{s}{2\cdot 4}=\frac{s}{8}$ und $t_2=\frac{s}{2\cdot 5}=\frac{s}{10}$,
also $t_A=\frac{9}{40}s$,
$s_B=s_1+s_2$ mit $s_1=\frac{t_B}{2}\cdot 4$ und $s_2=\frac{t_B}{2}\cdot 5$, also
$s=\frac{t_B}{2}\cdot 9$ bzw. $t_B=\frac{2}{9}s$.
Wegen $9\cdot 9>2\cdot 40$ gilt nun $t_A>t_B$, d. h. B war eher am Ziel als A.
2. Lösungsweg: Man kann sich die Gesamtstrecke in 9 gleichlange Teilstrecken geteilt denken.
Dann ging A genau $4\frac{1}{2}$ dieser Teilstrecken mit 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B dagegen ging genau 4 dieser Teilstrecken mit 4 km/h, die restlichen 5 Teilstrecken mit 5 km/h; denn bei dieser Aufteilung sind die aufgewandten Zeiten für die beiden Geschwindigkeiten gleichlang (und, da sie bei jeder anderen Aufteilung anders ausfallen, auch nur bei dieser). Daher kam B zuerst am Ziel an.
Oder noch einfacher (ohne Rechnung):
Wäre die Teilstrecke s, die B mit 5 km/h durchläuft, eine Hälfte der Gesamtstrecke oder weniger, so benötigte B für s weniger Zeit als für die andere, langsamer durchlaufene und mindestens ebenso lange Teilstrecke. Dies widerspricht der Aufgabenstellung. Also war die mit 5 km/h durchlaufene Teilstrecke für B länger als die für A. Folglich kam B zuerst am Ziel an.

5. Der Mittelpunkt von k sei M, der Schnittpunkt der Diagonalen sei S. Nach Voraussetzung gilt: $\sphericalangle \overline{AMB}+\sphericalangle \overline{CMD}=\sphericalangle \overline{BMC}+\sphericalangle \overline{DMA}$, also da die Summe beider Seiten dieser Gleichung 360° beträgt, $\sphericalangle \overline{AMB}+\sphericalangle \overline{CMD}=180°$.
Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel gilt daher:
$\sphericalangle \overline{SCB}+\sphericalangle \overline{CBS}=\sphericalangle \overline{ACB}+\sphericalangle \overline{CBD}=$
$=\frac{1}{2}\sphericalangle \overline{AMB}+\frac{1}{2}\sphericalangle \overline{CMD}=90°$.
Mithin gilt nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck $\triangle BSC$: $\sphericalangle \overline{BSC}=180°-(\sphericalangle \overline{SCB}+\sphericalangle \overline{CBS})=90°$, also $AC\perp BD$, w. z. b. w.



6. a) Wegen $3808=2^5\cdot 7\cdot 17$ sind alle Quadratzahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 4 und 16. Ferner sind alle ungeraden natürlichen Zahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 7, 17 und $7\cdot 17=119$. Daraus folgt:
Eine natürliche Zahl n kommt genau dann als zweite Zahl in einem der zu betrachtenden Tripel (k, n, m) vor, wenn sie eine der Zahlen (1) 1, 2, 4 ist.
Eine natürliche Zahl m kommt genau dann als dritte Zahl in einem Tripel (k, n, m) vor, wenn $2m+1$ eine der Zahlen 1, 7, 17, 119 ist, d. h. genau dann, wenn m eine der Zahlen (2) 0, 3, 8, 59 ist.
Für jedes Paar (n, m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt es genau eine natürliche Zahl k, so daß (k, n, m) eines der zu betrachtenden Tripel ist, nämlich (3) $k=\frac{3808}{n^2(2m+1)}$.
Da es genau 12 verschiedene Paare (n, m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt und die hiermit entstehenden Tripel (k, n, m) erst recht verschieden sind, beträgt deren Anzahl somit ebenfalls 12.
b) Es gilt stets $knm\geqq 0$. Der Wert $knm=0$ wird nach (1), (2), (3) genau dann angenommen, wenn $m=0$ ist. Er ist somit für alle

betrachteten Tripel der kleinste Wert und wird genau für die Tripel mit $m=0$, n aus (1) und k aus (3), d. h. genau für (3808, 1, 0); (952, 2, 0); (238, 4, 0) angenommen.

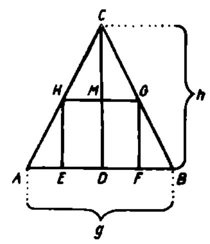
Klassenstufe 10

1. Sind D und M die Mittelpunkte von AB bzw. HG, dann gilt:
mit $\overline{EF}=a$ nach dem Strahlensatz $\overline{AB}:\overline{HG}=\overline{CD}:\overline{CM}$, also
$g:a=h:(h-a)$, $ah=gh-ag$,

$$a=\frac{g\cdot h}{g+h} \qquad (1).$$

Angenommen nun, $h:g$ sei ein solches Verhältnis, wie es in der Aufgabe verlangt wird. Dann ist $\frac{1}{2}gh$ der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und a^2 der des Quadrates $EFGH$, also gilt

$\frac{1}{2}gh:a^2=9:4$ und daher $2gh-9a^2=0$ (2).



Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man

$$2gh=\frac{9g^2h^2}{(g+h)^2}=0,$$

$2(g^2+2gh+h^2)-9gh=0$, also die Gleichung (3)

$h^2-\frac{5}{2}gh+g^2=0$, die genau die Lösungen

$h_{1;2}=\frac{5}{4}g\pm\sqrt{\frac{25}{16}g^2-g^2}$, d. h.

$h_1=2g$ und $h_2=\frac{1}{2}g$ hat.

Also können höchstens die Verhältnisse $h:g=2:1$ und $h:g=1:2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Umgekehrt gilt: Man kann den folgenden Nachweis auch dadurch erbringen, daß man die bisherigen Schlüsse umkehrt.

Aus $h_1=2g$ folgt wegen (1) $a_1=\frac{2}{3}g$.

Ebenso folgt aus

$h_2=\frac{1}{2}g$ wegen (1) $a_2=\frac{1}{3}g$.

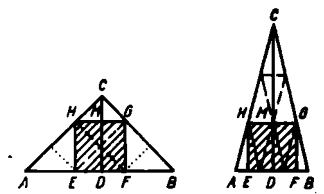
Daher ergibt sich in den genannten Fällen:

$$\frac{1}{2}gh:a^2=\frac{1}{2}g\cdot 2g:\left(\frac{2}{3}g\right)^2=$$

$$=g^2:\frac{4}{9}g^2=9:4 \text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{2}gh:a^2=\frac{1}{2}g\cdot\frac{1}{2}g:\left(\frac{1}{3}g\right)^2=$$

$=\frac{1}{4}g^2:\frac{1}{9}g^2=9:4$, wie es gefordert war. Es gibt mithin genau zwei Verhältnisse $h:g$, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich $h:g=1:2$ und $h:g=2:1$.



2. Die Ebene ε durch A, B, C' geht auch durch D'; denn $ABC'D'$ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke PR mit P auf AB und R auf $C'D'$ liegt in ε. Die Ebene η durch D, A, B' geht auch durch C'; denn $DAB'C'$ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke ST mit S auf AD und T auf $B'C'$ liegt in η. Die Punkte A und C' gehören ε und η an, B dagegen ε und nicht η, also haben ε und η genau die Gerade durch A und C' gemeinsam. Ist nun ein Punkt X Schnittpunkt von PR und ST, so liegt X im Parallelepiped, in ε und in η, also im Durchschnitt dieser drei Mengen, d. h. auf der Strecke AC'. Liegt umgekehrt ein Punkt X auf AC', d. h. auf der gemeinsamen Diagonalen der Parallelogramme $ABC'D'$ und $DAB'C'$, so schneiden z. B. die Parallelen durch X zu AD' bzw. AB' die Strecken AB und $C'D'$ bzw. AD und $B'C'$ in Punkten P, R bzw. S, T, so daß X als Schnittpunkt von PR und ST auftritt. Daher ist die gesuchte Menge die Strecke AC'.

3. Jede natürliche Zahl $z\geqq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$ mit natürlichem $m\geqq 1$. Da $6m$, $6m+2$, $6m+4$ durch 2 teilbar und (wegen $z\geqq 5$) größer als 2 sind, und da $6m+3$ durch 3 teilbar und größer als 3 ist, folgt: Jede Primzahl $p\geqq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m+1$ ($m\geqq 1$). Numeriert man alle diese Zahlen auf dieselbe Weise wie die Primzahlen $p\geqq 5$ der Größe nach und bezeichnet dabei die mit der Nummer n versehene Zahl mit f_n, dagegen die Primzahl mit der Nummer n mit p_n, so gilt also

(1) $p_n\geqq f_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Die Zahlen f_n ergeben sich nun, indem man der Reihe nach für jedes $m=1, 2, 3 \ldots$ erst $6m-1$ und dann $6m+1$ bildet. Die Nummern n kann man ebenso dadurch erhalten, daß man der Reihe nach für jedes $m=1, 2, 3,\ldots$ erst $2m-1$ und dann $2m$ bildet.

Da aber für $m=1, 2, 3, \ldots$ stets $6m-1>3(2m-1)$ und $6m+1>3\cdot 2m$ gelten, ergibt sich

(2) $f_n>3n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Aus (1) und (2) folgt $p_n>3n$ für alle $n=1, 2, 3, \ldots$, w. z. b. w.

4. Es seien t bzw. t' die Maßzahlen der in Stunden gemessenen Zeiten für das fahrplanmäßige bzw. für das tatsächliche Durchfahren der Strecke s, ferner seien v bzw. v' die Maßzahlen der in km/h gemessenen fahrplanmäßigen bzw. tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit. Dann gilt

(1) $t\cdot v=20$ und (2) $t'\cdot v'=20$, ferner

(3) $t'=t-\frac{1}{15}$ und (4) $v'=v+10$.

Aus (3) und (1) folgt $t'=\frac{20}{v}-\frac{1}{15}$; setzt man dies in (4) und in (2) ein, so ergibt sich

$\left(\frac{20}{v}-\frac{1}{15}\right)\cdot(v+10)=20$, also $(3000-v)\cdot(v+10)=300v$

(5) $v^2+10v-3000=0$. Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$V_{1,2}=-5\pm 3025$, d. h. $v_1=50$, $v_2=-60$.

Wegen $v0$ betrug daher die fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/h.

5. Nach den Logarithmengesetzen läßt sich die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+\ldots+lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=$$

$$=lg\left[\left(1-\frac{1}{25^2}\right)\left(1-\frac{1}{26^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)\right].$$

Nach Verwendung einer binomischen Formel ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung, also gleich

$$lg\left[\left(1-\frac{1}{25^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)\right]=$$

$$=lg\left[\frac{(25-1)(25+1)}{25^2}\cdot\frac{(26-1)(26+1)}{26^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\right]$$

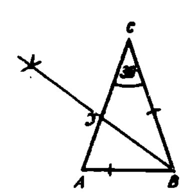
$$lg=\left[\frac{24\cdot 26\cdot 25\cdot 27\cdot 26\cdot 28\cdot 27\cdot 29\cdot\ldots\cdot 96\cdot 98\cdot 97\cdot 99\cdot 98\cdot 100\cdot 99\cdot 101}{25^2\cdot 26^2\cdot 27^2\cdot 28^2\cdot\ldots\cdot 98^2\cdot 99^2\cdot 100^2}\right]$$

$$lg=\left[\frac{24\cdot 25\cdot 26^2\cdot 27^2\cdot\ldots\cdot 98^2\cdot 99^2\cdot 100\cdot 101}{25^2\cdot 26^2\cdot 27^2\cdot\ldots\cdot 97^2\cdot 98^2\cdot 99^2\cdot 100^2}\right]=$$

$=lg\left(\frac{24\cdot 101}{25\cdot 100}\right)=lg\frac{606}{625}$, w. z. b. w.

6. Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$ und $\sphericalangle ACB=36°$. Dann gilt $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC$ und nach dem Winkelsummensatz $\sphericalangle BAC+\sphericalangle ABC=144°$, also $\sphericalangle BAC=72°$. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ schneide AC in D. Dann gilt $\sphericalangle ABD=36°$, und nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf $\triangle ABD$: $\sphericalangle ADB=72°$. Folglich sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle BCD$ gleichschenklig, und es gilt $\overline{AD}<\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{DC}$.

Ferner gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz:
$\triangle ADB\approx\triangle ABC$
und daher
$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$,
also
$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{DC}:\overline{AC}$,
w. z. b. w.



Die Lösungen zur Kreisolympiade, Klassenstufe 5/6, sowie zur DDR-Olympiade, Klasse 10, werden in *alpha*, Heft 5/73 veröffentlicht, die Lösungen zu Klassenstufe 11/12 (DDR-Olympiade) in Heft 12/73 der Zeitschrift *Mathematik in der Schule*.

Klasse 5

▲1▲ Axel meint zu Bernd: „Sowohl unser Garten als auch euer Garten haben beide die Form eines Rechtecks. Obwohl unser Garten einen größeren Flächeninhalt als euer Garten besitzt, benötigen wir weniger Zaunmaterial zum Einzäunen als ihr.“ Kann Axel mit dieser Feststellung recht haben, wenn beide Zäune von der gleichen Art sind? Die Antwort ist zu begründen!

▲2▲ Es sei $m-n$ die Differenz zweier voneinander verschiedener natürlicher Zahlen m und n. Wie verändert sich diese Differenz, wenn

a) der Minuend vergrößert wird und der Subtrahend unverändert bleibt?

b) der Minuend verkleinert wird und der Subtrahend unverändert bleibt?

c) sowohl der Minuend als auch der Subtrahend um die gleiche natürliche Zahl vergrößert werden?

d) sowohl der Minuend als auch der Subtrahend um die gleiche natürliche Zahl verkleinert werden?

e) der Minuend um eine natürliche Zahl a und der Subtrahend um eine natürliche Zahl b vergrößert werden und $a>b$ gilt?

▲3▲ Es seien x und y natürliche Zahlen. Ersetze in den folgenden sechs Beispielen jeweils das Sternchen durch eines der Zeichen $>$, $<$ oder $=$ so, daß wahre Aussagen entstehen.

a) Wenn $x>8$, so $x+3 * 10$.

b) Wenn $60 \cdot x=50 \cdot y$, so $x * y$.

c) Wenn $5 \cdot x>10$ und $y>x$, so $y * 3$.

d) Wenn $x>y$, so $y+2 * x+5$.

e) Wenn $x>y$, so $60-x * 75-y$.

f) Wenn $y<5$, so $3 \cdot y * 17$.

▲4▲ Es seien a, b und c natürliche Zahlen, die die Ungleichung $5+a<b+c$ erfüllen, und es sei $c<5$. Weise nach, daß dann auch $a<b$ gilt!

▲5▲ Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl betrage 12. Vertauscht man die beiden Grundziffern dieser Zahl miteinander, so ist die neu entstandene Zahl mehr als doppelt so groß wie die ursprüngliche. Wie viele Lösungen besitzt die Aufgabe?

Klasse 6

▲6▲ Heinz hat mittwochs im 14tägigen Rhythmus Pioniernachmittag. Er geht regelmäßig jeden Sonntag und jeden Mittwoch, an dem nicht der Pioniernachmittag stattfindet, ins Kino. Heinz fuhr mit seiner Klasse in ein fünftägiges Winterferienlager (einschließlich An- und Abreisetag); wir wissen nicht, an welchem Wochentag er abgefahren ist.

a) Wieviel Tage vergehen mindestens, bis Heinz wieder ins Kino gehen kann?

b) Wieviel Tage vergehen höchstens (vom Anreisetag an gerechnet), an denen Heinz nicht ins Kino gehen kann?

▲7▲ Es seien x, y und z gebrochene Zahlen, die die Ungleichung $x+y>\frac{z}{3}$ erfüllen, und es sei $x>y$. Weise nach, daß dann stets $x>\frac{z}{6}$ gilt!

▲8▲ Ist P ein innerer Punkt eines Dreiecks ABC, so gilt stets $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}$. Diese Behauptung ist zu beweisen!

▲9▲ Gerd wollte gegen Ende des Schuljahres seinen Zensurendurchschnitt abschätzen. Er konnte mit der Note 1 in genau sechs Fächern, mit der Note 3 in genau drei Fächern rechnen. Die Noten in den übrigen drei Fächern waren noch ungewiß, aber es war mit Sicherheit nur mit den Noten 2 oder 3 zu rechnen. Wie müssen sie ausfallen, damit der Zensurendurchschnitt besser als 2 wird?

▲10▲ Martin und Norbert liefen um die Wette. Martin lief mit einer konstanten Geschwindigkeit von $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Nach 30 Sekunden hatte er gegenüber Norbert einen Vorsprung erreicht, der mindestens 15 m beträgt. Wie groß kann die (konstante) Geschwindigkeit von Norbert höchstens sein?

Mathematik und Sport

Klasse 7

▲11▲ Nach den Wettkampfbestimmungen muß beim Hochsprung die Sprunglatte aus Holz sein und ihr Querschnitt die Form eines gleichseitigen Dreiecks haben. Wie schwer ist eine 3,80 m lange Sprunglatte, wenn eine Querschnittskante 3 cm lang ist? (Wichte für Holz $\gamma=0{,}5\ \text{p} \cdot \text{cm}^{-3}$).

▲12▲ Vor einem Marathonlauf wurden für die Plazierung der drei Favoriten H., J. und W. zwei Prognosen aufgestellt.

a) W. wird den ersten, H. den zweiten und J. den dritten Platz belegen.

b) W. wird Dritter, H. Sieger und J. Zweiter sein.

Nach der Zielankunft stellte sich heraus, daß die drei Favoriten tatsächlich die ersten drei Plätze belegten, aber keine der beiden abgegebenen Prognosen stimmte. In beiden Voraussagen traf nicht einmal eine der drei genannten Platzziffern zu. Wer belegte den ersten, zweiten und dritten Platz?

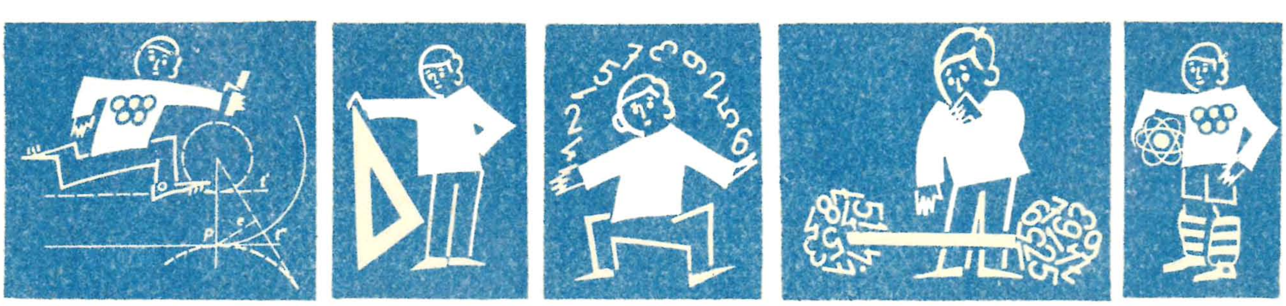
▲13▲ In einer Mannschaft erhielt eine Turnerin am Stufenbarren von zehn erreichbaren Punkten $\frac{7}{8}$. Eine andere erhielt 104% dieser Wertung, während die dritte Wettkämpferin für ihre Übung $\frac{4}{5}$ der Punktzahl der höheren der ersten beiden Wertungen erhielt. Die übrigen beiden Turnerinnen standen punktgleich und erhielten zusammen 60% der Gesamtpunktzahl der ersten drei Turnerinnen. Wieviel Punkte erkämpfte jede Turnerin? Welche Gesamtwertung erzielte die Mannschaft?

▲14▲ Christoph Höhne (DDR) gewann 1968 die Goldmedaille im 50-km-Gehen. Er benötigte für diese Strecke 4:20:13,6 Stunden. Welcher Geschwindigkeit entspricht diese Rekordleistung

a) in $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, b) in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

▲15▲ Eine Sprungbahn soll ohne Neigung, also ohne Gefälle verlaufen. Die Wettkampfbestimmungen besagen, daß die höchstzulässige Neigung längs der Sprungbahn 1:1000 betragen darf. Wieviel Zentimeter Höhenunterschied sind das auf einer Bahn von 100 m Länge?

Th. Scholl



XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Letzter Abgabetermin: 16. Oktober 1973 (beim Mathematiklehrer)

Olympiadeklasse 5

1. a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen.
b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r=3$ cm und numeriere die Schnittpunkte!

2. Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, daß am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlänge entstehen.
a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!
b) Stelle fest, wieviel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muß, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d. h. wenn das Schneiden „im Paket" nicht gestattet ist!

3. Das Dreifache der Summe der Zahlen 38 947 und 12 711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9127 und 8004 dividiert werden. Wie lautet der Quotient?

4. Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7. Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, daß 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese drei Zirkel gibt es in diesem Klub nicht. Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, daß 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören. Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an. Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten!
(Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

Olympiadeklasse 6

1. Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, daß die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.
Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

2. Für die „Galerie der Freundschaft" ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

3. In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, daß die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und daß dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt: Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert. (Dabei heiße „Differenz": rechte Zahl minus linke Zahl" bzw. „untere Zahl minus obere Zahl".) Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

2					
	8				
	11	16			

4. Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1 000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist.
Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

Olympiadeklasse 7

1. Gib sämtliche Teiler der Zahl 111 111 an!

2. Beweise den folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck.

3. Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.
Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

4. An einer Kreisolympiade *Junger Mathematiker* nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:
(1) Anneliese und Christiane
(2) Bertram und Franziska
(3) Anneliese und Franziska
(4) Bertram und Erich
(5) Anneliese und Detlev.
Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war. Wie heißen die beiden Preisträger?

Olympiadeklasse 8

1. Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, daß sie folgende Eigenschaften hat:
(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.
(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.
(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

2. In $** \cdot 9* = ***$
ist jedes Sternchen so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß eine richtige Gleichung entsteht. Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

3. Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift „alpha" erhielten drei

Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris
(2) Eva, Elke, Uwe
(3) Roland, Marion, Bernd
(4) Iris, Heike, Uwe
(5) Roland, Heike, Bernd
(6) Eva, Marion, Christian
(7) Christian, Eva, Elke.

Es stellte sich heraus, daß in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.
Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

4. In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G. Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!

Olympiadeklasse 9

1. Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$ s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand. Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, daß der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

2. Jemand will aus einer Mischung, die zu 99% aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98% dadurch herstellen, daß er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.
Man ermittle, wieviel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muß.

3. In das abgebildete Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.
Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.
(Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrats eingetragenen Buchstaben zu benutzen. Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.)

4. Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d. h. es gilt
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.
Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endet (Endnullen).

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle Mengen $\{a, b, c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, daß $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a, b, c\}$ ist!

2. Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.
Man beweise, daß dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist.

3. Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n-1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, daß als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.
Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben.

4. Jens und Dirk spielen das folgende Spiel: Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen $a \neq 0$, b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.
Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein „ungerechtes Spiel" handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmöglichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000000000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus $\mathfrak{M}$), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus $\mathfrak{M}$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

2. Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfs ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.
Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

3. Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geqq 2$ und $n \geqq 2$. Man beweise: Die Menge $\mathfrak{M} = \{a, a^2, \ldots, a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, für die die Summe der in $\mathfrak{M}_1$ enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in $\mathfrak{M}_2$ enthaltenen Zahlen ist.

4. Gegeben seien k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k natürliche Zahl, $k \geqq 1$), für die
$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k$ (1)
und $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$ (2) gilt.
Man beweise, daß dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leqq k$ die Ungleichung
$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqq \frac{1}{k}$ erfüllt ist.

Preisträger — Aufgabe 1000

Zu der Aufgabe 1000 gingen 1057 Lösungen ein.
Preisträger wurden:
Kathlen Schönfelder, 133 Schwedt (Kl. 5); Olaf Mittmann, 759 Spremberg (Kl. 5); Angelika Müller, 22 Greifswald (Kl. 6); Eva Gerstner, 806 Dresden (Kl. 7); Uwe Ohm, 1601 Töpchin (Kl. 8); Barbara Wolf, 437 Köthen (Kl. 8); Kerstin Miertschink, 7701 Torno (Kl. 9); Andreas Näther, 925 Mittweida (Kl. 10); Karl Krause, 4274 Mansfeld (71 Jahre)

Aus der Graphentheorie

Teil 4 und Schluß

Solospiele

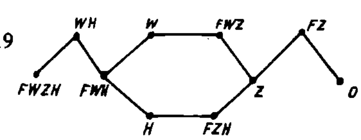
Beim Solospiel handelt es sich darum, von einem gegebenen Zustand (Position) ausgehend durch eine endliche Folge von Schritten (Zügen) einen gegebenen Zustand (oder einen von mehreren gegebenen Zuständen) herbeizuführen, wobei die Schritte frei aus einer gegebenen Menge von Schritten (welche die Spielregeln ausmacht) gewählt werden können.

Das erste Beispiel soll sich mit der ältesten und bekanntesten Aufgabe befassen, die zu den Problemen der „erschwerten Überfahrten" gehört:

Ein Fährmann soll mit seinem Boot einen Wolf, eine Ziege und Heu über den Fluß setzen. Sein Boot ist so klein, daß er nur einen der Passagiere bzw. das Heu aufnehmen kann. Aus verständlichen Gründen dürfen weder der Wolf und die Ziege zusammen – ohne Aufsicht des Fährmanns – am Ufer zurückbleiben, noch die Ziege mit dem Heu.

Der Aufgabe entspricht der Graphe des Bildes 19.

Bild 19



In Bild 19 kennzeichnet der Knotenpunkt *WH* beispielsweise den Zustand, in dem sich der Wolf mit dem Heu auf dem diesseitigen Ufer befindet, während der Fährmann die Ziege übersetzt und der Knotenpunkt *FZH* den Zustand, in dem der Fährmann mit der Ziege und dem Heu diesseits ist, der Wolf hingegen am anderen Ufer steht. Knotenpunkt 0 besagt: Alle sind jenseits des Flusses.

Zwei Knotenpunkte sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die ihnen entsprechenden Zustände (ohne Verletzung der angegebenen Bedingungen) durch eine Überfahrt ineinander übergeführt werden können.

Der Fährmann muß den Fluß mindestens siebenmal überqueren. Die beiden Lösungsmöglichkeiten könnt ihr leicht aus Bild 19 entnehmen.

Im zweiten Beispiel wollen wir uns einer „Umfüllaufgabe" widmen.

Von drei Gefäßen faßt das erste 4 l und ist mit Wasser gefüllt, das zweite Gefäß faßt 3 l, das dritte 1 l. Die beiden letzten Gefäße sind leer. Durch Umfüllungen soll – ohne Maßzylinder! – erreicht werden, daß die beiden ersten Gefäße je 2 l enthalten.

Das Tripel $\{x, y, z\}$ soll den Zustand kennzeichnen, bei dem im 1. Gefäß x Liter, im 2. y Liter und im 3. Gefäß z Liter enthalten sind.

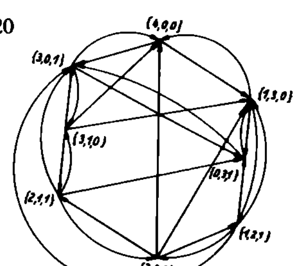
Die folgenden Tripel geben alle Möglichkeiten der Verteilung der Flüssigkeit (in ganzen Litern) auf die 3 Gefäße an.

$\{4, 0, 0\}$ $\{0, 3, 1\}$ $\{2, 2, 0\}$
$\{3, 0, 1\}$ $\{3, 1, 0\}$ $\{2, 1, 1\}$
$\{1, 3, 0\}$ $\{1, 2, 1\}$

Den Tripeln ordnen wir Knotenpunkte zu. Vom Knotenpunkt $\{x_1, y_1, z_1\}$ zum Knotenpunkt $\{x_2, y_2, z_2\}$ soll genau dann ein Bogen (gerichtete Kante) führen, wenn der Zustand $\{x_1, y_1, z_1\}$ durch einmaliges Umgießen in den Zustand $\{x_2, y_2, z_2\}$ übergeht. Wir erhalten den Graphen des Bildes 20. In ihm haben wir einen Weg zu suchen, der den Knotenpunkt $\{4, 0, 0\}$ mit dem Knotenpunkt $\{2, 2, 0\}$ verbindet und nur „gleichgerichtete" Bögen enthält. Zwei solche Wege sind im Bild 20 hervorgehoben.

Bemerkung: Diese Umfüllaufgabe war – wie ihr sicher bemerkt habt – besonders einfach geartet – um so durchsichtiger konnte an ihr das Prinzip erläutert werden, das zur Lösung dieses Aufgabentyps angewandt wird.

Bild 20



Die Bedeutung der Graphentheorie liegt nun keinesfalls etwa in dem Wert, den sie für die Unterhaltungsmathematik besitzt, wennschon sie aus dieser besonders zu Anfang ihrer systematischen Entwicklung Impulse erhalten hat.

Es gibt heute kaum eine Wissenschaft, in der nicht graphentheoretische Methoden – oder doch zumindest Begriffe der Graphentheorie zur Interpretation gewisser Sachverhalte – benutzt würden.

Die Anwendungen liegen entweder an der Oberfläche – sofern es sich um bloße Interpretation mittels graphentheoretischer Begriffe handelt – oder aber sie reichen so tief, daß uns augenblicklich noch die Voraussetzungen für eine nähere Betrachtung fehlen. Vielleicht können wir uns in einem späteren Beitrag mit einigen solcher Anwendungen befassen.

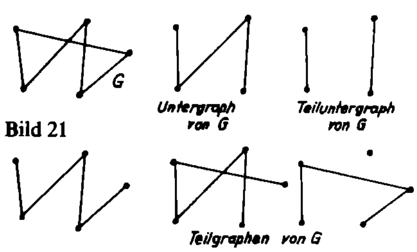
Der vorliegende Beitrag aber soll nicht beendet werden, ehe wir uns noch mit einem Problem befaßt haben, das für die Volkswirtschaft große Bedeutung hat – und für dessen Behandlung wir uns alle Voraussetzungen geschaffen haben.

Zunächst haben wir noch einige Definitionen anzuführen. Definition 12: Ein Untergraph des Graphen $G = [X, U]$ ist ein Graph, dessen Knotenpunktmenge A eine Teilmenge von X ist, und der genau alle diejenigen Kanten von U enthält, die in G die Knotenpunkte von A verbinden.

Definition 13: Ein *Teilgraph* von G ist ein Graph, der aus allen Knotenpunkten von X und aus den Kanten einer Teilmenge V von U besteht.

Definition 14: Ein *Teil-Untergraph* ist ein Teilgraph eines Untergraphen. (Bild 21)

Bild 21



Definition 15: Einen zusammenhängenden Graphen, der keinen Kreis enthält, nennt man *Baum.* (Bild 22)

Bild 22

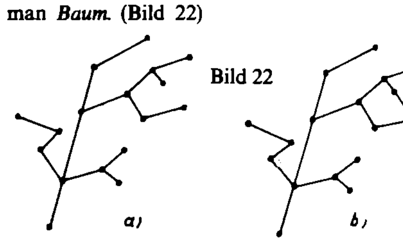
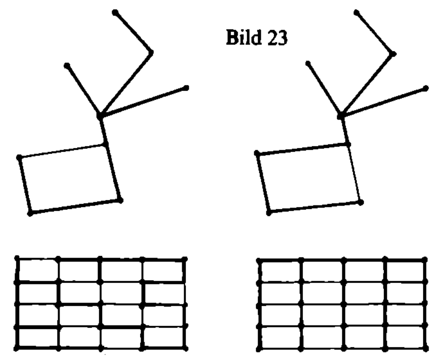


Bild 22a zeigt einen Baum, Bild 22b hingegen nicht. Der Graph des Bildes 3b beispielsweise ist ebenfalls ein Baum.

Bild 23



Definition 16: Ein Teilgraph eines Graphen G, der ein Baum ist, heißt *Gerüst* von G. (Bild 23) Für die beiden in Bild 23 dargestellten Graphen wurden je zwei Gerüste ausgezeichnet. Sicher findet ihr leicht weitere!

Danach könnt ihr euch bei der Behandlung der Aufgabe 12 entspannen, ehe wir zum „Endspurt" schreiten.

▲15▲ Suche einen Graphen G, der zwei Gerüste hat, die keine gemeinsame Kante besitzen!

Wir wollen das folgende Problem betrachten: n Ortschaften A_i $(i = 1, \ldots, n)$ sollen durch ein Telephonnetz N verbunden werden, das folgende Eigenschaften hat:

A) Über das Netz kann man von jeder Ortschaft aus jede andere erreichen.

B) Verzweigungspunkte gibt es – aus Gründen der Betriebssicherheit – nur in den Orten selbst.

C) N soll von allen Telephonnetzen, die die Bedingungen A) und B) erfüllen, dasjenige sein, das zu seinem Bau die geringsten Kosten verursacht.

Das Gelände, innerhalb dessen die Ortschaften liegen, mag überall von gleicher Beschaffenheit sein, d. h. wir sind gerechtfertigt, die wesentlichen Voraussetzungen V und W zu machen.

V) Beim Bau eines jeden A) erfüllenden Telephonnetzes sind die Kosten pro Meter konstant oder mit anderen Worten: Die Kosten zur Schaffung eines Netzstückes der Länge 1 sind stets der Länge 1 proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor stets den gleichen Wert hat.

W) Wir können jede Stadt mit jeder anderen durch ein gradliniges Netzstück verbinden.

Unter den Voraussetzungen V) und W) können wir die Eigenschaft C so formulieren:

C') Unter allen Netzen, die die Bedingungen A und B erfüllen, ist dasjenige zu finden, dessen Gesamtlänge am kürzesten ist. Wir wollen hier ein etwas allgemeineres Problem behandeln, was uns dann unter anderem ermöglichen wird, das gesuchte Telephonnetz zu konstruieren. Dabei folgen wir der von *H. Sachs* in dem Buch „Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, I" (Leipzig 1970) gegebene Darstellung.

Gegeben sei ein schlichter zusammenhängender Graph G mit n Knotenpunkten, in dem jeder Kante k eine beliebige reelle Zahl $1(k)$ als „Länge" zugeordnet ist. Gesucht sind die „Minimalgerüste", das sind diejenigen Gerüste H von G, deren „Gesamtlänge"

$$1(H) = \sum_{k \in H} 1(k) \text{ minimal ausfällt.}$$

Das Problem wird durch Satz 5 gelöst.

Satz 5: Sind die Längen der Kanten von G paarweise verschieden, so besitzt G genau ein Minimalgerüst. Dieses findet man mittels des folgenden Algorithmus: Man konstruiere eine endliche Folge von in G enthaltenen Bäumen $H_1, H_2, \ldots, H_n$; H_1 bestehe aus einem einzigen beliebigen Knotenpunkt von G; $H_{\nu+1}(1 \leqq \leqq n-1)$ entstehe aus H_ν auf folgende Weise: $k_{\nu+1}$ sei die kürzeste unter denjenigen Kanten von G, die mit H_ν genau einen Knotenpunkt gemeinsam haben; man füge $k_{\nu+1}$ sowie deren noch freien Endpunkte zu H_ν hinzu. Dann gilt: H_n ist das gesuchte Minimalgerüst.

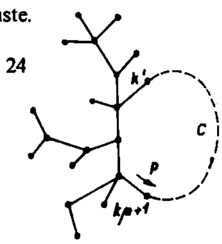
Beweis: H_1 ist ein Baum (bestehend aus einem isolierten Knotenpunkt). Unter Voraussetzung, daß H_ν ein Baum mit ν Knotenpunkten ist, ist zu zeigen, daß $H_{\nu+1}$ ein Baum mit $\nu+1$ Knotenpunkten ist. Angenommen $H_{\nu+1}$ wäre ein Baum, dann enthielte er einen Kreis, der beim „Anbau" der Kante $k_{\nu+1}$ an H_ν entstanden sein müßte. Dann hätte $k_{\nu+1}$ aber beide Endpunkte mit Knotenpunkten von H_ν gemeinsam – im Widerspruch zu der vom Algorithmus vorgeschriebenen Eigenschaft von $k_{\nu+1}$, mit H_ν genau einen Knotenpunkt gemeinsam zu haben. – Nach dem vorgeschriebenen Algorithmus geht der „Anbau" der Kante $k_{\nu+1}$ an H_ν mit der Hinzunahme genau eines Knotenpunktes einher. $H_{\nu+1}$ enthält also $\nu+1$ Knotenpunkte.

Daraus folgt, daß H_n ein Baum ist, der alle KP von G enthält; H_n ist also ein Gerüst von G.

Wir zeigen nun, daß jedes von H_n verschiedene Gerüst von G eine Gesamtlänge hat, die größer ist als die von $H_n \cdot H_n$ ist dann also das gesuchte Minimalgerüst. Es sei H ein beliebiges Gerüst von G, welches von H_n verschieden ist. Da $H_1 \subset H$, aber $H_n \not\subseteq H$, gibt es einen Index $\mu(1 \leqq \mu \leqq n)$, so daß $H\mu \subset H$, während $H_{\mu+1} \not\subseteq H$. Dann gehört die Kante $k_{\mu+1}$ nicht zu H; wird sie zu H hinzugefügt, so entsteht genau ein Kreis C. Da $H_{\mu+1}$ keinen Kreis enthält, gibt es in C mindestens eine Kante k, welche nicht zu $H_{\mu+1}$ und damit auch nicht zu H_n gehört. Unter diesen Kanten k findet man auch eine Kante k', die mit einem Knotenpunkt von H_μ inzidiert (siehe Bild 24) andernfalls könnte man, wenn man den Kreis C im Knotenpunkt P beginnend in Pfeilrichtung durchläuft, niemals wieder zum Knotenpunkt P zurückkehren. Es können nicht beide Endpunkte von k' zu H_μ gehören, weil H keinen Kreis enthält. k' inzidiert also mit genau einem Knotenpunkt von H_μ und hat folglich eine größere Länge als $k_{\mu+1}$. Wird k' gelöscht, so entsteht ein neues Gerüst $H' = H + k_{\mu+1} - k'$, welches eine geringere Gesamtlänge als H hat; also ist H kein Minimalgerüst. Da es unter den endlich vielen Gerüsten von G gewiß eines kleinster Gesamtlänge gibt, schließen wir, daß es genau ein Minimalgerüst gibt und daß dieses mit H_n identisch ist.

Zusatz: Enthält G mehrere Kanten gleicher Länge, so findet man die Minimalgerüste auf folgende Weise: Man wende den Algorithmus an, wobei man jedoch unter denjenigen Kanten von G, die mit genau einem Knotenpunkt eines schon konstruierten Baumes H_ν inzidieren, jeweils eine der kürzesten willkürlich auswähle und zu H_ν hinzufüge: So erhält man stets ein Minimalgerüst, und indem man die Auswahl der jeweils hinzuzufügenden Kante auf jede zulässige Weise vornimmt, bekommt man auch alle Minimalgerüste.

Bild 24



Auf den Beweis des Zusatzes wollen wir hier nicht näher eingehen.

Wir sehen uns abschließend die Konstruktion des Minimalgerüstes an einem Beispiel an (Bild 25). Dabei wollen wir speziell das Problem des billigsten Telefonnetzes behandeln und annehmen, daß die oben formulierten Voraussetzungen V und W erfüllt seien.

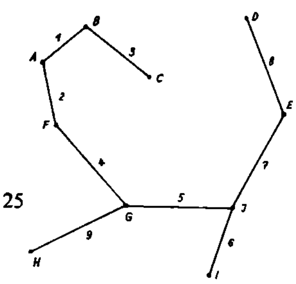


Bild 25

Wir gehen vom Knotenpunkt A aus und erhalten in den Schritten 1 bis 9:

1. H_1 – besteht nur aus A	
2. $H_2 = H_1 \cup (A, B)$	6. $H_6 = H_5 \cup (G, J)$
3. $H_3 = H_2 \cup (A, F)$	7. $H_7 = H_6 \cup (J, I)$
4. $H_4 = H_3 \cup (B, C)$	8. $H_8 = H_7 \cup (J, E)$
5. $H_5 = H_4 \cup (F, G)$	9. $H_9 = H_8 \cup (G, H)$

In Bild 25 tragen die Kanten des Graphen G die Nummer des Schrittes, bei dem sie „angebaut" wurden. G ist das gesuchte Minimalgerüst.

$H_{\mu+1} = H_\mu \cup (X, Y)$ ist der Baum, der aus H_μ entsteht, wenn wir zu H_μ die Kante (X, Y) sowie denjenigen ihrer Knotenpunkte, der nicht Knotenpunkt von H_μ ist, hinzufügen.

Achtung — alpha-Wettbewerb!

Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle (richtigen) Antwortkarten geschlossen an die Redaktion, 7027 Leipzig Postfach 14 einzusenden. Wer zwei (oder mehr) Urkunden einsendet, dazu die Karten des Jahres 1972/73, erhält das alpha-Abzeichen in Gold und sein Name wird veröffentlicht. Bitte alle Einsendungen (und evtl. Rückantwortbriefe) richtig frankieren! Geschwister senden ihre Unterlagen getrennt ein.

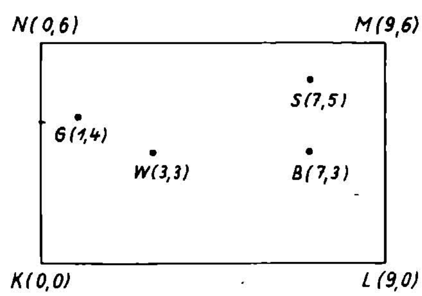
Red. alpha

In freien Stunden
alpha heiter

V. Renčin, Praha

Billiardspiel

Den meisten Lesern ist sicher das Billiardspiel in irgendeiner Form bekannt. In einigen Gaststätten stehen die kleinen Loch-Billiard-Tische, die oft von zahlreichen Spielern und Zuschauern umlagert sind. Meine ägyptischen Kollegen und ich (Mathematikfachlehrer H. Büchel, ehem. Mitarbeiter im Min. f. Erziehung der Arabischen Republik Ägypten, d. Red.) spielten hier in Kairo einmal in der Woche an einem großen Billiard, das an den Ecken und in den Mitten der langen Rechteckseiten Löcher und Netze hat, um die Kugeln aufzunehmen. Es bestehen natürlich bestimmte Regeln. Die Spieltechnik wird von mathematischen und physikalischen Gesetzen beherrscht. Diese Tatsache und die mit dem Spiel verbundene Freude über gelungene und mißglückte Aktionen machen es uns zu einer schönen Freizeitbeschäftigung.



Das Rechteck *KLMN* veranschauliche den Tisch, die Ecken haben die folgenden Koordinaten: $K(0, 0)$, $L(9, 0)$, $M(9, 6)$, $N(0, 6)$. Eine schwarze Kugel liegt in $S(7, 5)$, eine blaue Kugel in $B(7, 3)$, eine grüne Kugel in $G(1, 4)$, eine weiße Kugel in $W(3, 3)$ und eine rote Kugel direkt an der Öffnung $M(9, 6)$. Die Spielregel verlangt, daß die weiße Kugel so gestoßen wird, daß sie die rote Kugel in das Netz bringt, ohne vordem eine andersfarbige Kugel zu berühren.

a) Zeige, daß die rote Kugel nicht direkt von der weißen getroffen werden kann.

b) Zeige, daß es nicht möglich ist, die weiße Kugel an eine Bande (Rand des Tisches) zu spielen (mit dem Ziel, die rote Kugel zu treffen), ohne daß eine andersfarbige Kugel getroffen wird.

c) Bestimme den Weg der weißen Kugel bei einem Zwei-Banden-Spiel, damit sie die rote Kugel ins Netz stößt.

In der Aufgabe werde vorausgesetzt, daß die Kugel an der Bande dem Reflexionsgesetz gehorcht.

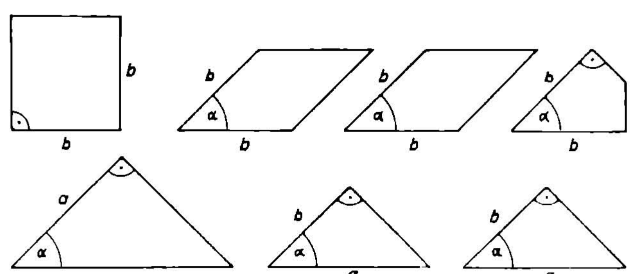
Anmerkung: Für Schüler der höheren Klassen könnten Methoden der analytischen Geometrie eingesetzt werden. Da aber die Kugeln nicht punktförmige Massen sind, sondern einen beträchtlichen Durchmesser besitzen, ist eine konstruktive Lösung der Aufgabe ohne weiteres ausreichend und kann damit auch von jüngeren Schülern gefunden werden. Vor allem der Teil c) ist recht reizvoll.

Auf zahlreiche Lösungsvorschläge freuen sich die Redaktion *alpha* und der Einsender.

Mathematikfachlehrer H. Büchel, EOS Zella-Mehlis

Legespiel Euklid

Die sieben Plastiksteine (mit $\alpha = 45°$) sind zu einem Rechteck zusammenzustellen. Es gibt zwei nichtkongruente Typen.



Aus „Praxis der Mathematik", 8/68, Köln

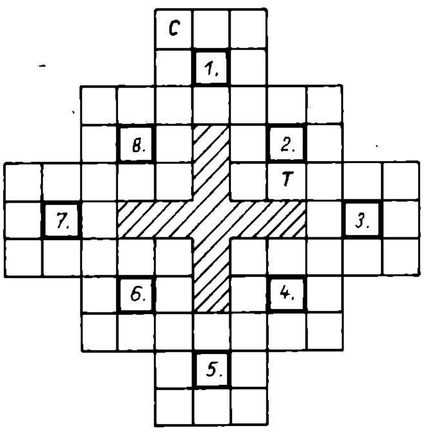
Zum Copernicus-Jahr

RAO	+	POS	=	JJEP
−		·		+
CNP	:	N	=	JSN
COP	+	ERN	=	JCUS

Ing. H. Decker, Köln

Wabenrätsel

In die weißen Felder sind so Buchstaben einzusetzen, daß die rundherum um eine Ziffer stehenden Buchstaben bei geeigneter Wahl des Anfangsfeldes und des Drehsinns die Wortbilder mathematischer Begriffe der folgenden Bedeutung ergeben:

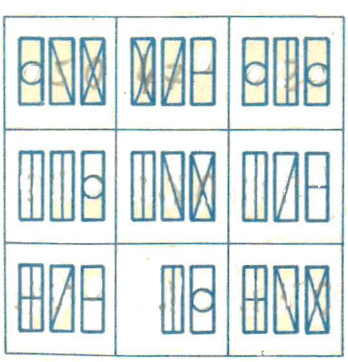


1. eine der Angaben, die eine Gerade festlegen
2. Grundrechenoperation
3. Ergebnis einer bestimmten Rechenoperation
4. eine der beiden Zahlen, die eine Potenz bestimmen
5. eine der Angaben, die einen Winkel festlegen
6. Grundrechenoperation
7. eine der beiden Zahlen, die eine Wurzeloperation bestimmen
8. natürliche Zahl mit genau zwei Teilern

Fachlehrerin Irmgard Träger, Döbeln

Magisches Zahlenquadrat

In diesem verschlüsselten magischen Zahlenquadrat bedeuten gleiche Symbole gleiche Grundziffern und verschiedene Symbole verschiedene Grundziffern.



Entschlüßle dieses magische Zahlenquadrat, in dessen Zeilen, Spalten und Diagonalen jeweils natürliche Zahlen stehen, deren Summe 750 ist!

Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS, Döbeln

Silbenrätsel

1. Äußere Begrenzung einer Fläche
2. Halbmesser
3. Beiderseitig begrenztes Stück einer Geraden
4. Griechischer Mathematiker
5. Spezielles Viereck
6. Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist
7. Winkelfunktion
8. Lehrsatz aus der Ähnlichkeitslehre
9. Zahlwort
10. Freihandzeichnung
11. Eingliedriger Ausdruck
12. Begriff aus der Mengenlehre
13. Längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks
14. Fachausdruck für unentwickelt, unaufgelöst
15. eine Bewegung
16. Ergebnis der Subtraktion
17. Griechischer Buchstabe
18. Grundrechenart
19. Festlegung eines Begriffs

Aus den folgenden Silben sind Wörter der obenstehenden Bedeutung zu bilden. Die zweiten Buchstaben ergeben von oben nach unten gelesen eine alljährlichen schulischen Höhepunkt.

ad - ben - de - di - di - dif - e - eck - fe - fi - fang -gam - ge - gens - hy - im - ke - kreis - le - len - les - lung - ma - ment - mo - ni - nom - nu - on - on - pli - po - ra - recht - renz - satz - se - sie - skiz - spie - strah - strek - tan - te - tha - ti - ti - um - um - us - ze - zit

Oberlehrer Annelies Helwes, OS Burkhardtsdorf

Anekdote

P. A. M. Dirac war es gewöhnt, sich immer klar und deutlich auszudrücken. Nach Ende eines Vortrages fragte er: „Gibt es noch Fragen?" Ein Zuhörer meldete sich: „Ich habe die Herleitung dieser Formel nicht verstanden!" Darauf *Dirac*: „Das ist keine Frage, sondern eine Feststellung. Gibt es noch Fragen?"

Geburt der Potenzwurzel-Lyrik

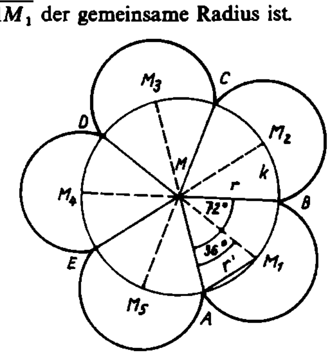
In der Mathestunde
trat ein Integral auf mich zu
und sprach:
Worauf wartest du?
Mach ein Gedicht aus mir ...

Sabine Kühn (16 Jahre), Lyrikclub „Heinrich Heine", Berlin

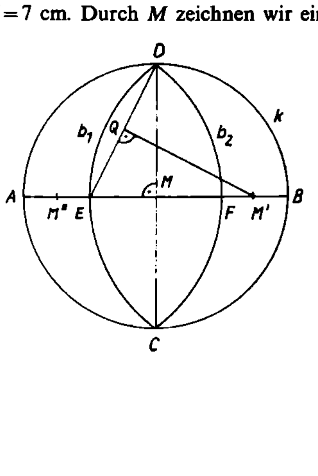
Lösungen

Lösungen zu: Über das Symbol der X. Weltfestspiele

5 ▲ 1077 ▲ Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r=4$ cm. Auf dem Kreis k sollen fünf Punkte (gemeinsame Endpunkte zweier benachbarter kongruenter Kreisbögen) liegen; diese Punkte legen auf dem bereits gezeichneten Kreis k weitere fünf kongruente Kreisbögen fest, die sämtlich den gleichen Mittelpunktswinkel $360°:5=72°$ besitzen. Wir legen deshalb auf dem Kreis k einen Punkt A fest und verbinden ihn mit M. In M tragen wir an $\overline{MA}$ einen Winkel von 72° an, dessen freier Schenkel den Kreis k im Punkt B schneidet. In M tragen wir an $\overline{MB}$ wiederum einen Winkel von 72° an, dessen freier Schenkel k in C schneidet und so fort. Die so erhaltenen fünf kongruente Mittelpunktswinkel sind mit dem Winkelmesser zu halbieren. Die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden schneiden den Kreis k in den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 und M_5, den Mittelpunkten der noch zu konstruierenden fünf Kreisbögen, für die $r'=\overline{AM_1}$ der gemeinsame Radius ist.

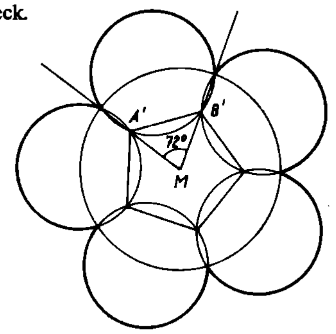


6 ▲ 1078 ▲ Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $\overline{AB}=d=7$ cm. Durch M zeichnen wir einen



zweiten Durchmesser $\overline{CD}$, der senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Wir halbieren $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$; die Mittelpunkte dieser Strecken seien E und F. Aus Symmetriegründen liegt der Mittelpunkt M' des zum Kreisbogen b_1 gehörenden Kreises auf $\overline{AB}$, zum anderen auf der Mittelsenkrechten der Sehne $\overline{DE}$. Der Mittelpunkt M'' des zum Kreisbogen b_2 gehörenden Kreises liegt dann symmetrisch zu M' bezüglich der Geraden CD als Symmetrieachse.

7 ▲ 1079 ▲ Die Konstruktion der Figur ist aus der Lösung zur 1. Aufgabe ersichtlich. Daraus folgt aber auch, daß sich die Figur bei Drehung um M um einen Winkel von 72° im mathematisch positiven (oder negativen) Sinn auf sich selbst abbildet. Folglich sind die Seiten des entstandenen Fünfecks $A'B'C'D'E'$ und seine Innenwinkel kongruent. Es handelt sich also um ein regelmäßiges Fünfeck.



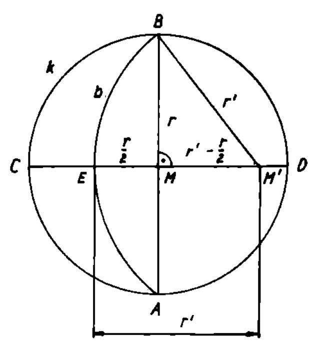
8 ▲ 1080 ▲ Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, und es sei E die Mitte von $\overline{CM}$. Bezeichnen wir den zum Bogen b gehörenden Kreis mit k', seinen Mittelpunkt mit M' und seinen Radius mit r', dann gilt, wie aus der Zeichnung ersichtlich wird,

$$(r')^2 = r^2+\left(r'-\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$(r')^2 = r^2+(r')^2-r\cdot r'+\frac{r^2}{4},\quad rr' = \frac{5}{4}r^2,$$

$r' = \frac{5}{4}r$. Folglich erhalten wir

$$\overline{MM'}=\frac{5}{4}r-\frac{1}{2}r=\frac{3}{4}r.$$

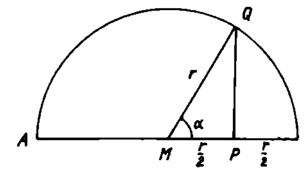


Der Abstand des Mittelpunktes des dargestellten Kreises vom Mittelpunkt des zu einem der Kreisbögen gehörenden Kreises beträgt somit $\frac{3}{4}r$ bzw. $\frac{3}{8}d$, wobei d der Durchmesser des gegebenen Kreises ist.

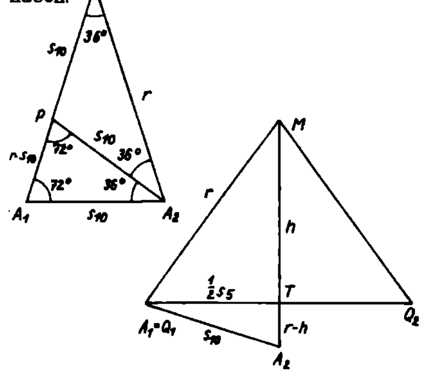
9 ▲ 1081 ▲ Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich:

$$\cos\alpha = \frac{r}{2}:r=\frac{1}{2},\quad \alpha=60°.$$

Die Ebene, die den Längenkreis enthält, bildet mit der Ebene, die den dargestellten Kreis enthält, einen Winkel von 60°.



10/12 ▲ 1082 ▲ Jedes regelmäßige n-Eck läßt sich durch die Radien r vom Mittelpunkt M des Umkreises nach den n Ecken in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegen, die den Winkel $\frac{360°}{n}$ an der Spitze M haben.



Es sei Dreieck A_1A_2M mit den Seiten $\overline{A_1A_2}=s_{10}$, $\overline{A_1M}=\overline{A_2M}=r$ und dem Winkel $\sphericalangle A_1MA_2=36°$ eines der zehn kongruenten gleichschenkligen Dreiecke, in die sich ein regelmäßiges Zehn-Eck zerlegen läßt. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle A_1A_2M$ schneide die Seite $\overline{A_1M}$ im Punkt P. Dann gelten folgende Winkelbeziehungen:

$$\sphericalangle A_2A_1M = \sphericalangle A_1A_2M=\frac{1}{2}(180°-36°)=72°,$$

$$\sphericalangle A_1A_2P=\sphericalangle PA_2M=36°,\ \sphericalangle A_1PA_2 =180°-(72°+36°)=72°.$$

Aus $\sphericalangle A_2A_1P=\sphericalangle A_1PA_2$ folgt nun $\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}=s_{10}$. Aus $\sphericalangle PMA_2=\sphericalangle PA_2M$ folgt $\overline{PM}=\overline{PA_2}=s_{10}$, und es gilt somit $\overline{A_1P}=r-s_{10}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔA_1A_2M und ΔA_1A_2P folgt dann $(r-s_{10}):s_{10}=s_{10}:r$ bzw.

$${s_{10}}^2+r\cdot s_{10}-r^2=0.$$

Die Lösung $s_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ erfüllt diese quadratische Gleichung und genügt dem geometrischen Sachverhalt.

Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, gilt zwischen der Seite s_5 eines regelmäßigen Fünfecks und der Seite s_{10} eines regelmäßigen Zehnecks folgende Beziehung:

$$\frac{1}{4}{s_5}^2+(r-h)^2={s_{10}}^2.$$

Wegen $h^2=r^2-\frac{1}{4}{s_5}^2$ erhalten wir durch Einsetzen dann

$\frac{1}{4}s_5^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_5^2}\right)^2 = s_{10}^2$ bzw.

$\frac{1}{4}s_5^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_5^2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2.$

Durch Umformen gewinnen wir daraus $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

W 8 * 950 Zunächst stellen wir fest, daß für $a=0$, $b=0$ die Zahl $z=a^3+b^3=0$ nicht Primzahl ist. Auch für $a=0$, $b=1$ sowie für $a=1$, $b=0$ ist die Zahl $z=a^3+b^3=1$ nicht Primzahl.

Dagegen erhalten wir für $a=1$, $b=1$

$$z=a^3+b^3=1+1=2.$$

In diesem Fall ist also z eine Primzahl.

Nun nehmen wir an, daß mindestens eine der Zahlen a, b größer als 1 ist. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit können wir annehmen, daß $a>1$ ist. Wäre nun $b=0$, so wäre

$$z=a^3+b^3=a^3,$$

d. h., die Zahl z wäre nicht Primzahl, da sie sich in drei Faktoren ($z=a \cdot a \cdot a$) zerlegen läßt, die sämtlich größer als 1 sind. Ist aber $b \geqq 1$, so ist $a+b>1$ und ab >1. Wir erhalten jetzt die folgende Faktorenzerlegung:

$z=a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3,$
$z=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b),$
$z=(a^2-ab+b^2(a+b).$
$z=(a^2-ab+b^2)(a+b).$

Für den ersten Faktor in dieser Faktorenzerlegung gilt nun

$a^2-ab+b^2=a^2-2ab+b^2+ab$
$=(a-b)^2+ab \geqq 2;$

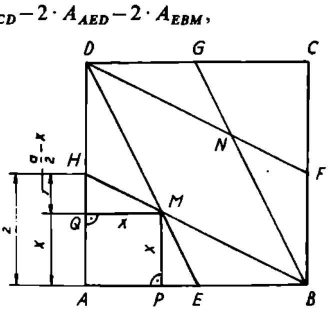
denn $(a-b)^2 \geqq 0$ und $ab \geqq 2$.

Für den zweiten Faktor gilt $a+b \geqq 2$. Also sind beide Faktoren größer als 1, d. h. die Zahl z ist in diesem Fall nicht Primzahl.

Damit haben wir bewiesen, daß nur für $a=1$, $b=1$ die Zahl $z=a^3+b^3$ eine Primzahl ist.

9▲951 Die abgebildete Figur ist axialsymmetrisch bezüglich der Symmetrieachsen AC und BD. Daraus folgt $\overline{DM}=\overline{MB}=\overline{BN}=\overline{ND}$, d. h. das Viereck $BNDM$ ist ein Rhombus. Fällen wir jeweils von M das Lot auf $\overline{AB}$ und auf $\overline{AD}$ und bezeichnen wir die Fußpunkte der Lote mit P und Q, so gilt $\overline{MP}=\overline{MQ}=x$, d. h. das Viereck $APMQ$ ist ein Quadrat. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle QMH$ und $\triangle HAB$ folgt $\left(\frac{a}{2}-x\right):x = \frac{a}{2}:a$, also $x=\frac{a}{3}$. Für den Flächeninhalt des Rhombus $BNDM$ gilt somit

$A_R = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{AED} - 2 \cdot A_{EBM}$,



$A_R = a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = \frac{1}{3}a^2$ und wegen $a=6$ cm gilt $A_R = 12\,\text{cm}^2$.

Lösungen zu: aufgepaßt, nachgedacht, mitgemacht (Heft 4/73)

Klasse 5

▲1▲ Axel kann mit seiner Feststellung recht haben. Das folgende Beispiel verdeutlicht dies. Der erste Garten habe die Seitenlängen 16 m und 20 m, der zweite Garten habe die Seitenlängen 10 m und 30 m. Dann gilt

$A_1 = 16 \cdot 20\,\text{m}^2 = 320\,\text{m}^2,$
$u_1 = 2 \cdot (16+20)\text{m} = 72\,\text{m};$
$A_2 = 10 \cdot 30\,\text{m}^2 = 300\,\text{m}^2,\ u_2 = 2 \cdot (10+30)\text{m} = 80\,\text{m}.$

In diesem Falle gilt also $A_1 > A_2$, aber $u_1 < u_2$.

▲2▲

a) $(m+a)-a>m-n$, also wird die Differenz größer.

b) $(m-a)-a<m-n$, also wird die Differenz kleiner.

c) $(m+a)-(n+a)=m-n$, also bleibt die Differenz konstant.

d) $(m-a)-(n-a)=m-n$, also bleibt die Differenz konstant.

e) $(m+a)-(n+b)>m-n$ für $a>b$, also wird die Differenz größer.

▲3▲

a) Wenn $x>8$, so $x+3>11$, also gewiß $x+3>10$.

b) Wenn $60 \cdot x = 50 \cdot y$, so $x=5 \cdot k$ und $y=6 \cdot k$, wobei k eine natürliche Zahl ist; also gilt $x<y$.

c) Wenn $5x>10$, so $x>2$; wegen $y>x$ gilt dann $y>3$.

d) Wegen $x>y$ gilt $x=y+k$, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Nun ist $y+2<y+k+5$, also auch $y+2<x+5$.

e) Wegen $x>y$ gilt $x=y+k$, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Nun gilt $60-(y+k)<75-y$, also auch $60-x<75-y$.

f) Wenn $y<5$, so $3y<15$, also gewiß auch $3y<17$.

▲4▲ Wegen $c<5$, gilt $5+a<b+c<b+5$, also $5+a<b+5$, d. h. $a<b$.

▲5▲ Es sei z_1 eine zweistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 12 beträgt, und es sei z_2 die durch Vertauschen der Grundziffern entstandenen Zahl. Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Fälle:

z_1	93	84	75	66	57	48	39
z_2	39	48	57	66	75	84	93

Nur für die Zahl $z_1=39$ gilt $z_2>2 \cdot z_1$ bzw. $93>2 \cdot 39$. Die Aufgabe besitzt somit genau eine Lösung, nämlich $z_1=39$.

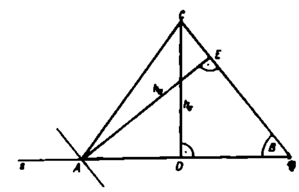
Klasse 6

▲6▲a) Der günstigste Fall tritt ein, wenn das Winterferienlager von Dienstag bis Sonnabend stattfindet. Dann vergeht nur ein Tag, bis Heinz wieder ins Kino gehen kann, da der nächste Tag ein Sonntag ist.

b) Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn das Winterferienlager von Mittwoch bis Sonntag stattfindet. Am darauffolgenden Mittwoch könnte Pioniernachmittag sein. Dann müßte Heinz sieben Tage bis zum nächsten Kinobesuch am darauffolgenden Sonntag warten.

▲7▲ Wegen $x>y$ und $x+y>\frac{z}{3}$ gilt sicher $x+x>\frac{z}{3}$ bzw. $2x>\frac{z}{3}$ und damit auch $x>\frac{z}{6}$.

▲8▲ Da der Punkt P ein innerer Punkt des abgebildeten Dreiecks ABC ist, schneidet die Parallele zu BC durch P jede der Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ jeweils in genau einem inneren Punkt dieser Strecken. Diese Schnittpunkte seien E und F. Für den Umfang des Dreiecks BCP gilt dann $u_1=\overline{BC}+\overline{PB}+\overline{PC}$. Für den Umfang des Trapezes $BCFE$ gilt $u_2=\overline{BC}+\overline{CF}+\overline{FP}+\overline{BE}+\overline{EP}$.



Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt $u_3=\overline{BC}+\overline{AE}+\overline{AF}+\overline{BE}+\overline{CF}$. Wegen $\overline{PC}<\overline{CF}+\overline{FP}$ und $\overline{PB}<\overline{BE}+\overline{EP}$ gilt somit $u_1<u_2$. Wegen $\overline{AE}+\overline{AF}>\overline{EP}+\overline{FP}$ gilt ferner $u_2<u_3$, also auch $u_1<u_3$. Daraus folgt $\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}+\overline{PB}+\overline{PC}$, also auch

$$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}.$$

▲9▲ Wegen $6 \cdot 1+3 \cdot 3=15$ und $24-15=9$ muß die Summe aus den Noten der übrigen drei Fächer kleiner als 9 sein, damit der Zensurendurchschnitt besser als 2 wird; denn $24:12=2$, aber $23:12<2$. Es seien a, b und c die Noten dieser drei Fächer. Dann gibt es folgende Möglichkeiten:

a	b	c
2	3	3
3	2	3
3	3	2

Diese Noten müssen mindestens erreicht werden, um einen Zensurendurchschnitt besser als 2 zu erhalten.

▲10▲ Nach 30 s hatte Martin $s=v \cdot t = \frac{5}{8}\,\text{m} \cdot 30\,\text{s} = 150\,\text{m}$ zurückgelegt. Norbert hingegen hatte in dieser Zeit höchstens 135 m geschafft. Seine Geschwindigkeit kann daher höchstens $\frac{135}{30}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ betragen.

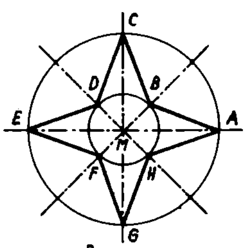
W 9*991 Aus $a^2+b^2+c^2=1$ folgt $(a^2+b^2+c^2)^2=1$, also

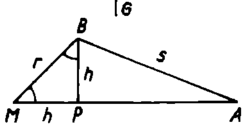
$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=1,$
$a^4+b^4+c^4+a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)$
$+c^2(a^2+b^2)=1.$ Nun folgt aus (3)

$a+b+c=0$
$a+b=-c,$
$(a+b)^2=c^2,$
$a^2+b^2+2ab=c^2,$
$a^2+b^2=c^2-2ab.$ Analog folgt (4)

$$b^2+c^2=a^2-2bc, \tag{5}$$
$$a^2+c^2=b^2-2ac. \tag{6}$$
Daher folgt aus (4), (5), (6) durch Einsetzen in (3)
$$a^4+b^4+c^4+a^2(a^2-2bc)+b^2(b^2-2ac)$$
$$+c^2(c^2-2ab)=1,$$
$$a^4+b^4+c^4+a^4+b^4+c^4-2a^2bc-2ab^2c-$$
$$-2abc^2=1,$$
$$2(a^4+b^4+c^4)-2abc(a+b+c)=1.$$
Wegen $a+b+c=0$ folgt hieraus weiter
$$2(a^4+b^4+c^4)=1,$$
$$z=a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}.$$

W 9*992 a) Da das Stern-Achteck symmetrisch ist und MA, MB, MC, MD Symmetrie-Achsen sind, sind die Dreiecke MAB, MBC, MCD, MDE usw. einander kongruent, und ihre bei M liegenden Winkel sind jeweils gleich 45°. Der Flächeninhalt A des Stern-Achtecks ist daher achtmal so groß wie der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks MAB (siehe Bild 1). Um nun diesen Flächeninhalt zu berechnen, ermitteln wir zunächst die Länge h der Höhe $\overline{BP}$ in dem Dreieck MAB (siehe Bild 2). Wegen $\sphericalangle BMP=45°$ gilt auch $\sphericalangle PBM=45°$ und daher $\overline{MP}=\overline{BP}=h$. Wir erhalten also nach dem Satz des Pythagoras
$$h^2+h^2=r^2,$$
$$2h^2=r^2,$$
$$h=\frac{r}{2}\sqrt{2}.$$





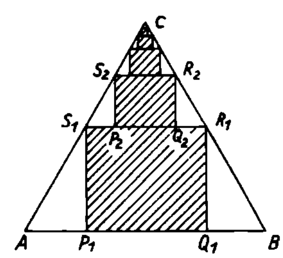
Wegen $\overline{MA}=R$ ist daher der Flächeninhalt des Dreiecks MAB gleich
$$A_1=\frac{1}{2}Rh=\frac{Rr}{4}\sqrt{2},$$
also der Flächeninhalt des Stern-Achtecks gleich
$$A=8A_1=2Rr\sqrt{2}.$$
b) In dem rechtwinkligen Dreieck BPA gilt nach dem Satz des Pythagoras wegen $\overline{PA}=R-h$ für die Seite $s=\overline{AB}$ des Stern-Achtecks
$$s^2=(R-h)^2+h^2=R^2+2h^2-2hR.$$
Wegen $2h^2=r^2$ und $h=\frac{r}{2}\sqrt{2}$ folgt hieraus
$$s^2=R+r^2-Rr\sqrt{2},$$
$$s=\sqrt{R^2+r^2-Rr\sqrt{2}}.$$
c) Für $R=r$ wird aus der sternförmigen Figur $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck, da dann alle Eckpunkte auf einem Kreis um M mit dem Radius r liegen und die Strahlen MA und MB, MB und MC usw. miteinander einen Winkel von 45° bilden. Der Flächeninhalt des regelmäßigen Achtecks mit dem Umkreisradius r beträgt daher
$$A=2r^2\sqrt{2}$$
und die Seitenlänge
$$s=\sqrt{2r^2-r^2\sqrt{2}}=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
in Übereinstimmung mit den in dem Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 53, angegebenen Formeln.

10/12▲993 Es seien x und y zwei natürliche Zahlen, für die die Gleichung
$$2^x=y!+304 \tag{1}$$
erfüllt ist. Dann gilt $2^x>304$. Wegen $2^8=256$ und $2^9=512$ gilt also $x\geqq 9$. (2)
Wegen $304=2^4\cdot 19$ folgt daher aus (1)
$$2^x=y!+2^4\cdot 19,$$
$$y!=2^4(2^{x-4}-19).$$
Wegen (2) ist dabei $x-4\geqq 5$; also ist $y!$ durch 2^4, aber nicht durch 2^5 teilbar.
Nun sind $0!=1$, $1!=1$, $2!=2$, $3!=2\cdot 3$, $4!=2^3\cdot 3$, $5!=2^3\cdot 3\cdot 5$ nicht durch 2^4 teilbar. Dagegen sind $6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ und $7!=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ durch 2^4, aber nicht durch 2^5 teilbar, während $y!$ für $y>7$ durch 2^5 teilbar ist.
Für $y=6$ erhalten wir
$$y!+304=720+304=1024=2^{10} \tag{3}$$
für $y=7$ erhalten wir
$$y!+304=5040+304=5344=2^5\cdot 167,$$
in diesem Fall ist also $y!$ nicht gleich einer Potenz von 2. Wegen (3) ist daher die Gleichung (1), wenn x und y natürliche Zahlen sind, nur für $x=10$ und $y=6$ erfüllt. Daher ist das geordnete Paar (10, 6) die einzige Lösung, die die gestellten Bedingungen erfüllt.

10/12▲994 Für alle positiven ganzen Zahlen n und a gilt, da das arithmetische Mittel zweier verschiedener nicht negativer reellen Zahlen stets größer als ihr geometrisches Mittel ist,
$$Z=\sqrt[n]{a+2}+\sqrt[n]{a-1}>2\cdot\sqrt{\sqrt[n]{a+2}\cdot\sqrt[n]{a-1}}$$
$$=\sqrt[2n]{(a+2)(a-1)},$$
$$Z>2\cdot 2\sqrt[n]{a^2+a-2}.$$
Nun müssen wir die folgenden beiden Fälle unterscheiden:
1. Fall: $a\geqq 2$
Dann gilt $a^2+a-2\geqq a^2$,
also $\quad Z>2\cdot\sqrt[2n]{a^2}=2\cdot\sqrt[n]{a}.$
2. Fall: $a=1$
Dann gilt
$$Z=\sqrt[n]{a+2}+\sqrt[n]{a-1}=\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{1}$$
$$=\sqrt[n]{3}+1>2=2\cdot\sqrt[n]{a}.$$
In den beiden Fällen gilt also
$Z=\sqrt[n]{a+2}+\sqrt[n]{a-1}>2\cdot\sqrt[n]{a}$. Daraus folgt $\sqrt[n]{a+2}-\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a-1}$, w.z.b.w.

W 10/12 ■ 995 a) Wir erhalten
$$\frac{10\cdot 10^9}{144{,}5\cdot 10^6}=\frac{100\,000}{1\,445}\approx 69{,}2.$$
Bei jährlich gleichbleibender Förderung würden also die Vorkommen noch für 69,2 Jahre reichen.
b) Es seien
a = 144,5 die Erdölförderung des Jahres 1969 (in Mill. t),
q = 1,07 der jährliche Wachstumsfaktor der Erdölförderung
n = die Anzahl der Jahre, in denen noch gefördert werden kann,
c = 10000 die Erdölvorkommen (in Mill. t).
Dann gilt
$$aq+aq^2+\ldots+aq^n=c,$$
$$aq\frac{q^n-1}{q-1}=c,$$
$$q^n-1=\frac{c(q-1)}{aq},$$
$$q^n=\frac{c(q-1)}{aq}+1.$$
Setzen wir für c, q und a die obigen Werte ein, so erhalten wir
$$1{,}07^n=\frac{10\,000\cdot 0{,}07}{144{,}5\cdot 1{,}07}+1=4{,}53+1=5{,}53.$$
Durch Logarithmieren erhalten wir hieraus
$$n\cdot\lg 1{,}07=\lg 5{,}53$$
$$n=\frac{\lg 5{,}53}{\lg 1{,}07}=\frac{0{,}7427}{0{,}0294}=25{,}3.$$
In diesem Falle reichen also die Erdölvorkommen nur noch für 25,3 Jahre.

W 10/12 ■ 996 Es seien $P_1Q_1R_1S_1$ das erste Rechteck, $P_2Q_2R_2S_2$ das zweite Rechteck der Folge usw. (vgl. die Abb.). Dann gilt nach Voraussetzung
$$\overline{P_1Q_1}=\overline{R_1S_1}=\frac{a}{2},\quad \overline{P_2Q_2}=\overline{R_2S_2}=\frac{a}{4}\quad\text{usw.}$$
Nun denken wir uns das Dreieck ABC in eine Folge von gleichschenkligen Trapezen ABR_1S_1, $S_1R_1R_2S_2$ usw. zerlegt.



Der Flächeninhalt des ersten Trapezes, dessen Höhe wir mit h_1 bezeichnen, ist gleich
$$F_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)h_1=\frac{3}{4}ah_1.$$
Dagegen ist der Flächeninhalt des ersten Rechtecks $P_1Q_1R_1S_1$ gleich
$$F_1'=\frac{a}{2}h_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}ah_1=\frac{2}{3}F_1.$$
Analog erhalten wir für den Flächeninhalt des zweiten Rechtecks
$$F_2'=\frac{2}{3}F_2,$$
wobei F_2 der Flächeninhalt des zweiten Trapezes der Folge ist. Für jedes Rechteck der Folge gilt nun, daß sein Flächeninhalt gleich $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts des ihm umbeschriebenen Trapezes ist. Daher ist die Summe der Flächeninhalte F' aller Rechtecke gleich $\frac{2}{3}$ der Summe aller Trapeze, also gleich $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts F des

Dreiecks ABC. Wir erhalten daher für den Flächeninhalt der treppenförmigen Figur

$$F'=\frac{2}{3}F=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{a^2}{6}\sqrt{3}.$$

W10/12 * 997 1. Es sei $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$. Dann folgt aus (1) und (2)

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=n,$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1.$$

Das ist aber ein Widerspruch wegen $n\geqq 2$.

2. Es sei $a_1=a_2=\ldots=a_n=-1$.
Dann folgt aus (1) und (2)

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-n$$
$$-(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\begin{cases}1, & \text{falls } n \text{ gerade}\\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Auch hier erhalten wir wegen $-n\leqq -2$ einen Widerspruch.

Im Falle $a_1=a_2=\ldots=a_n$ hat also das Gleichungssystem keine Lösung.

3. Es seien nicht alle a_i einander gleich. Dann ist mindestens eines der a_i gleich 1 und mindestens eines der a_i gleich -1.

Wir können jetzt o.B.d.A. die a_i so numerieren, daß

$a_1=a_2=\ldots=a_k=1$ und $a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=a_n=-1$ ist, wobei $0<k<n$ gilt.

3.1. Nun sei $n-k$, d. h. die Anzahl der a_i, die gleich -1 sind, gerade. Dann folgt aus (1) und (2)

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)+(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)=k+(n-k)=2k-n, \quad (3)$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)-(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)=1. \quad (4)$$

Hieraus folgt durch Addition

$$2(x_1+x_2+\ldots+x_k)=2k-n+1,$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_k=k-\frac{n-1}{2}.$$

Das Gleichungssystem (1), (2) hat also *keine* ganzzahligen Lösungen, wenn n eine *gerade* Zahl ist. Dann ist nämlich $\frac{n-1}{2}$ nicht ganzzahlig, also können nicht alle x_i ganzzahlig sein. Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so ist $\frac{n-1}{2}$ ganzzahlig, und wir können auch eine ganzzahlige Lösung angeben. Wir setzen nämlich

$$x_1=k-\frac{n-1}{2},$$
$$x_2=x_3=\ldots=x_{n-1}=0,$$
$$x_n=k-\frac{n+1}{2} \text{ und erhalten}$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)+(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)=k-\frac{n-1}{2}+k-\frac{n+1}{2}=2k-n,$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)-(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)=k-\frac{n-1}{2}-k+\frac{n+1}{2}=1,$$

d. h. die Gleichungen (3) und (4) und damit auch die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt.

3.2. Ist nun $n-k$, d. h. die Anzahl der a_i, die gleich -1 sind, *ungerade*, so erhalten wir wieder die Gleichungen (3) und (4'), wobei aber auf der rechten Seite von (4') die Zahl -1 steht.

Weiter erhalten wir analog wie oben

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=k-\frac{n+1}{2}.$$

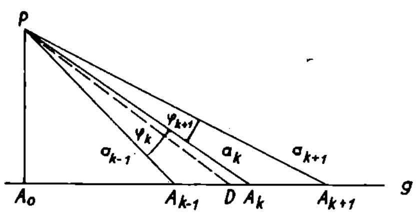
Auch in diesem Falle hat das Gleichungssystem (1), (2) *keine* ganzzahligen Lösungen, wenn n *gerade* ist.

Ist aber n *ungerade*, so hat das Gleichungssystem (1), (2) ganzzahlige Lösungen, z. B.

$$x_1=k-\frac{n+1}{2},$$
$$x_2=x_3=\ldots=x_{n-1}=0,$$
$$x_n=k-\frac{n-1}{2}.$$

Dann sind nämlich die Gleichungen (3), (4') und damit auch die Gleichungen (1), (2) erfüllt. Damit haben wir die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

W 10/12 * 998 Zum Beweis der Behauptung genügt es zu zeigen, daß für zwei beliebige aufeinanderfolgende Winkel φ_k und φ_{k+1} ($k=1, 2, \ldots, n-1$) stets $\varphi_k>\varphi_{k+1}$ gilt. Nun sei $a_{k-1}=\overline{PA_{k-1}}$, $a_{k+1}=\overline{PA_{k+1}}$ (vgl. die Abb.).



In dem Dreieck $PA_{k-1}A_{k+1}$ ist der Winkel $\sphericalangle PA_{k-1}A_{k+1}$ stumpf und der Winkel $\sphericalangle A_{k-1}A_{k+1}P$ spitz; daher gilt

$$a_{k+1}>a_{k-1}, \text{ also } \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}<1,$$

weil in jedem Dreieck dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüberliegt.

Ist nun $\overline{PD}$ Winkelhalbierende in diesem Dreieck, so gilt, weil nach einem bekannten Satz der Geometrie eine Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt,

$$\frac{\overline{A_{k-1}D}}{\overline{DA_{k+1}}}=\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}<1.$$

Da A_k Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_{k-1}A_{k+1}}$ ist, liegt also D innerhalb der Strecke $\overline{A_{k-1}A_k}$. Daher liegt auch $\overline{PD}$ innerhalb des Dreiecks $PA_{k-1}A_k$, und es gilt $\varphi_k>\varphi_{k+1}$, w.z.b.w.

Bemerkung: Mit Hilfe der Trigonometrie kann man die Behauptung noch schneller beweisen. Da die Dreiecke $PA_{k-1}A_k$ und PA_kA_{k+1} in der Länge der Grundlinie und der Höhe übereinstimmen, sind ihre Flächeninhalte gleich, und es gilt

$$\frac{1}{2}a_{k-1}a_k\sin\varphi_k=\frac{1}{2}a_ka_{k+1}\sin\varphi_{k+1},$$

also $\quad \sin\varphi_k=\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\sin\varphi_{k+1}.$

Hieraus folgt wegen $\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}>1$ (vgl. Abs. 1 der Lösung)

$\sin\varphi_k>\sin\varphi_{k+1}$, also $\varphi_k>\varphi_{k+1}$, w.z.b.w.

5 ▲ 1003 Wir zerlegen 64 in ein Produkt von drei Faktoren, die sämtlich natürliche Zahlen sind, und ermitteln die zugehörigen Oberflächen $A_0=2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)$. Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Fälle.

a	b	c	A_0
1	1	64	258
1	2	32	196
1	4	16	168
1	8	8	160
2	2	16	136
2	4	8	112
4	4	4	96

Der Quader, der die Form eines Würfels besitzt, hat die kleinste Oberfläche.

5 ▲ 1004 Aus 0,23 M + 0,20 M + 4 · 0,08 M = 0,75 M und 4 · 0,75 M = 3,00 M folgt, daß Karin genau 3,00 M bei sich hatte. Nach dem Einkauf besaß Karin noch 3,00 M − 0,75 M − 0,44 M = 1,81 M.

W 5 ■ 1005 Wir zeichnen die Gerade AB; ihr Schnittpunkt mit g sei Q, und wir verbinden Q mit A'. Dann zeichnen wir die Gerade BA', ihr Schnittpunkt mit g sei P. Die nun zu zeichnende Gerade AP schneidet die Gerade QA' in B', dem Bildpunkt von B.

W 5 ■ 1006 Die erste Verkaufsstelle erhielt 1 200 : 3 = 400 Schachteln Pralinen. Die zweite Verkaufsstelle erhielt (1 200 − 400) : 4 = 200 Schachteln. Die dritte und vierte Verkaufsstelle erhielten je (1 200 − 600) : 2 = 300 Schachteln Pralinen.

Die ausgelieferte Menge wog 1 200 · 125 g = 150 000 g = 150 kg.

W 5 * 1007 Da keine Ziffer mehr als zweimal vorkommen darf, entfallen 12, 13, 14, ..., 19 als erste zwei Ziffern. In diesen Fällen wären nämlich die zugehörigen Quotienten 2, 3, 4, ..., 9 und diese Ziffern würden dreimal, also mehr als zweimal vorkommen. Aus dem gleichen Grunde entfallen 24 und 39 als erste zwei Ziffern. Die Zahl, die der zweiten Ziffer entspricht, ist Vielfaches der Zahl, die der ersten Ziffer entspricht. Deshalb verbleiben noch folgende Möglichkeiten:

26 326, 28 428, 36 236, 48 248.

Wegen 26 362 − 26 326 = 36 > 30, 28 482 − 28 428 = 54 > 30, 48 284 − 48 248 = 36 > 30 verbleibt als einzige Lösung 36 236; denn es gilt 36 263 − 36 236 = 27 und 20 < 27 < 30.

Vor Antritt der Fahrt lautete der Tachometerstand 36 236. Der Lehrer hat 27 km zurückgelegt.

W 5 * 1008 Wir fertigen uns eine Tabelle an. Es sei a das Lebensalter von Axel, b das von Bernd und d das von Dieter.

$a+b$	a	b	$a+3=d$	$b-9=d$
22	1	21	4	12
22	2	20	5	11
22	3	19	6	10
22	4	18	7	9
22	5	17	8	8
22	6	16	9	7
..	.	..	.	.
22	14	10	17	1

Nur für $a=5$ und $b=17$ ist $a+3=b-9$. Axel ist 5, Bernd 17 und Dieter 8 Jahre alt.

6▲1009 Die Grundziffern der Zehnerstelle der zu ermittelnden dreistelligen Zahlen könnten 2, 3, 5 oder 7 lauten. Da 4 und 9 teilerfremd sind und $4 \cdot 9 = 36$ ist, sind natürliche Zahlen durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar sind.
Bei Verwendung der Grundziffer 2 könnten unter Beachtung der Teilbarkeit durch 4 die beiden letzten Ziffern 20, 24 oder 28 lauten. Unter Beachtung der Teilbarkeit durch 9 erhalten wir schließlich 720, 324 und 828.
Bei Verwendung der Grundziffer 3 erhalten wir bei analogem Vorgehen zunächst 32, 36, danach 432 und 936. Auf die gleiche Weise ermitteln wir die restlichen Zahlen mit der geforderten Eigenschaft: 252, 756, 972, 576.

6▲1010 Spiegeln wir das Rechteck $ABCD$ an der Geraden AB als Symmetrieachse und sei C' Bildpunkt von C, dann gilt $\overline{BC}=\overline{BC'}=a$, also $\overline{CC'}=2a$. Ferner gilt $\overline{AC}=\overline{AC'}=2a$. Das Dreieck $AC'C$ ist somit gleichseitig, also auch gleichwinklig. Der Winkel $\sphericalangle CAC'$ beträgt demnach 60°. Die Symmetrieachse AB halbiert diesen Winkel, also Winkel $\sphericalangle CAB=30°$.

W 6 ■ 1011 Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$ und damit $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCA=\sphericalangle CAB=60°$. Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit 120°. Aus $\overline{BC}=\overline{BD}$ folgt $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BDC=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$ und somit $\sphericalangle ACD=60°+30°=90°$, das heißt $AC\perp CD$.

W 6 ■ 1012 Eine Kugel der Sorte A möge a Gramm, eine der Sorte B möge b Gramm usw. wiegen. Dann gilt:
a) $a=2b$ und $b=3c$ und $c=5d$;
daraus folgt
$a=2b$ und $2b=6c$ und $6c=30d$,
also $a=30d$.
30 Kugeln der Sorte D halten einer Kugel der Sorte A das Gleichgewicht.
b) Aus $c=5d$ folgt $4c=20d$. Aus $20d+5c$ folgt durch Einsetzen $4c+5c=9c$. Aus $b=3c$ folgt $3b=9c$, also $20d+5c=3b$. 3 Kugeln der Sorte B halten 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht.

W 6 * 1013 Aus $\alpha=70°$ und $\beta=80°$ folgt Winkel $\sphericalangle ACB=\gamma=30°$, da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° beträgt. Ferner gilt $2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=180°$, also $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=90°$. Aus $\alpha_1+\alpha_2=\alpha=70°$ und $\alpha_3=90°-(\alpha_1+\alpha_2)$ folgt $\alpha_3=90°-70°=20°$. Somit gilt $\alpha_2=\gamma-\alpha_3=30°-20°=10°$, $\alpha_1=\alpha-\alpha_2=70°-10°=60°$.

W 6 * 1014 Wir legen auf g_1 einen Punkt B fest und schlagen um B mit dem Radius $\overline{BD}=6{,}0$ cm einen Kreis, der g_2 wegen $\overline{BD}>h$ in den Punkten D und D' schneidet. Ein weiterer Kreis um B mit $\overline{BC}=4{,}5$ cm als Radius schneidet wegen $\overline{BC}>h$ die Gerade g_2 in den Punkten C_1 und C_2. Der Kreis um D mit dem Radius $\overline{AD}=3{,}8$ cm schneidet g_1 wegen $\overline{AD}>h$ in den Punkten A_1 und A_2. Es sind auf diese Weise vier paarweise nicht kongruente Trapeze A_1BC_1D, A_1BC_2D, A_2BC_1D oder A_2BC_2D entstanden, die sich durch die nicht flächengleichen Dreiecke $\triangle A_1A_2D$ und $\triangle BC_1C_2$ unterscheiden. Schlägt man um D' einen weiteren Kreis mit dem Radius $\overline{AD}$, so schneidet dieser g_1 in den Punkten A_3 und A_4. Jedes der so entstehenden weiteren Trapeze ist aber einem der bereits konstruierten Trapeze kongruent, wovon man sich leicht überzeugen kann. Es gibt also genau vier Lösungen.

7▲1015 Aus Winkel $\sphericalangle ECF=45°$ und Winkel $\sphericalangle CEF=90°$ folgt $\sphericalangle EFC=45°$; also gilt auch $\overline{CE}=\overline{EF}$. Da die Gerade FB senkrecht auf dem Radius $\overline{AB}$ des Kreises k steht, ist die Gerade FB ebenfalls Tangente an den Kreis k. Folglich gilt für die Tangentenabschnitte $\overline{EF}=\overline{FB}$. Deshalb gilt auch $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FB}$.

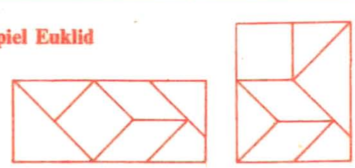
7▲1016 Wir spiegeln A an s_1, B an s_2 als Symmetrieachse. Es sei A' Bildpunkt von A, B' Bildpunkt von B. Die Verbindungsgerade $A'B'$ schneide s_1 in P und s_2 in Q. Der Streckenzug $\overline{APQB}$ gibt den Verlauf des zu konstruierenden Lichtstrahles an.
Auf Grund der Symmetrieverhältnisse gilt $\varphi_1=\varphi_2$; ferner gilt $\varphi_2=\varphi_3$ (Scheitelwinkel) und somit auch $\varphi_1=\varphi_3$. Es sei h das in P auf s_1 errichtete Einfallslot des Lichtstrahls. Dann gilt $\alpha_1=90°-\varphi_1$ und $\alpha_2=90°-\varphi_3=90°-\varphi_1$, also gilt für Ein- und Ausfallwinkel $\alpha_1=\alpha_2$. Analoge Überlegungen über die Reflexion in Q führen zu entsprechenden Ergebnissen.

W 7 ■ 1017 Angenommen Aussage R_1 sei wahr, d. h. Mannschaft C belegte den zweiten Platz. Dann muß Aussage S_1 falsch und somit Aussage S_2 wahr sein. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist Aussage R_1 falsch und Aussage R_2 wahr, d. h. den dritten Platz belegte Mannschaft D.
Daraus folgt, daß Aussage T_2 falsch und somit Aussage T_1 wahr ist. Den zweiten Platz belegte Mannschaft A. Daraus folgt weiter, daß Aussage S_2 falsch und somit Aussage S_1 wahr ist; den ersten Platz belegte Mannschaft C. Den vierten Platz belegte deshalb Mannschaft B.

Lösung von Seite 79
Das Rad muß in Richtung A in Bewegung gesetzt werden.

Lösungen zu alpha-heiter 4/73

Legespiel Euklid

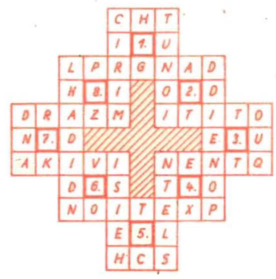


Zum Copernicus-Jahr

In der mittleren Summe ist $I=1$ und $E=9$. Dann kann in der mittleren Reihe N nur 2 sein, denn $N=3$ ergäbe für S den Wert 9, der jedoch bereits belegt ist. P ist daher 4 und $C=3$. Die übrigen Werte lassen sich nun leicht bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} 708+486 & = & 1\,194 \\ - \quad\quad \cdot & & + \\ 324 : \quad 2 & = & 162 \\ \hline 384+972 & = & 1\,356 \end{array}$$

Wabenrätsel



Magisches Zahlenquadrat

Laut Einerstelle der Hauptdiagonale muß $3 \cdot ⊠ = 0 + k \cdot 10$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$ gelten. Hieraus folgt ⊠ = 0.
Laut Zehnerstelle der Hauptdiagonale muß nunmehr weiterhin $3 \cdot ⧅ = 5 + k \cdot 10$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$ gelten. Hieraus folgt $k=1$ und ⧅ = 5.
Gemäß mittlerer Zeile muß 3 · ⎅ · 100 + (⎅□ + 50 + ⎅⊟) = 750 gelten. Hiernach muß ⎅□ + 50 + ⎅⊟ zunächst ein ungerades Vielfaches von 50 sein, für das nunmehr weiterhin 50 ≦ ⎅□ + 50 + ⎅⊟ ≦ 250 gelten muß. Damit ergibt sich die Abschätzung 400 ≦ 3 · ⎅ · 100 ≦ 700. Mithin muß ⎅ = 2 gelten. Gemäß Einerstelle der mittleren Spalte muß ⊟ + □ = 10 gelten. Damit ergibt sich laut Zehnerstelle der mittleren Spalte ⧄ = 7 und laut Hunderterstelle dieser Spalte ⊠ = 4.
Gemäß Hunderterstelle der ersten Zeile ergibt sich nunmehr □ = 1 und damit folgt aus ⊟ + □ = 10 weiterhin ⊟ = 9. Gemäß Hunderterstelle der letzten Zeile muß nunmehr ⊞ = 3 gelten.
Die Lösung lautet:

150	479	121
221	250	279
379	21	350

Silbenrätsel

Umfang, Radius, Strecke, Thales, Rechteck, Umkreis, Tangens, Strahlensatz, Sieben, Skizze, Monom, Element, Hypotenuse, implizit, Spiegelung, Differenz, Gamma, Addition, Definition – Mathematikolympiade.

Arbeitspläne Mathematik

für die außerunterrichtliche Tätigkeit der Klassen 7/8

In Nummer 4/72 der Zeitschrift *alpha* wurde ein Vorschlag der außerunterrichtlichen Tätigkeit in Mathematik für die Klassenstufen 5/6 vorgelegt. Wir erweitern nunmehr diesen Vorschlag auf die Klassenstufen 7/8. Nachfolgend angegebene Stoffgebiete und Stoffinhalte bauen organisch auf den bereits dargelegten Stoffgebieten und Stoffinhalten für die Klassenstufen 5/6 auf. Es ist deshalb notwendig, zu sichern, daß die Schüler die wesentlichen Inhalte des Vorschlages für die Klassenstufen 5/6 beherrschen. Das betrifft insbesondere die Stoffgebiete:

Logik, Mengenlehre, Algebra, Zahlentheorie, Analysis und Geometrie (Anwendung mengentheoretischer Grundlagen).

Bei unseren Vorschlägen ist stets zu beachten, daß es uns nicht auf eine Definition zahlreicher abstrakter Begriffe ankommt, sondern daß die Begriffsbildung stets am Ende einer sorgfältigen aus Beispielen und Übungen bestehenden Vorbereitung erfolgt. Nicht alle Begriffe können explizit definiert werden (z. B. der Begriff Strategie), es geht aber stets darum, inhaltliche Vorstellungen zu entwickeln.
In diesem Vorschlag für die Klassenstufen 7/8 werden neben einigen vollkommen neuen Stoffinhalten auch eine Reihe von bekannten Stoffinhalten aus dem Mathematikunterricht angeboten. Das ist einerseits notwendig, um den allgemeinen Zusammenhang zu wahren; andererseits kommt es gerade darauf an, diese Stoffinhalte zu vertiefen, zu ergänzen und mit den neuen Stoffinhalten zu verbinden. Das ist vor allem in Hinsicht auf eine systematische Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiaden notwendig.
Bei der Auswahl der Lehrstoffe wurde versucht, die Beziehungen zwischen den einzelnen Stoffgebieten herauszuarbeiten. Dabei standen nicht die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Stoffgebieten im Vordergrund; es kam vielmehr darauf an, die Sachverhalte (auch an Beispielen) von verschiedenen Seiten – z. B. mengentheoretisch, logisch, algebraisch und zahlentheoretisch – zu betrachten. In Klassenstufe 7 steht in diesem Sinne der Äquivalenzbegriff im Mittelpunkt, in Klassenstufe 8 sind es die Begriffe Abbildung und Gruppe.

In Zusammenhang mit unseren Vorschlägen sei darauf hingewiesen, daß Ungleichungen zunehmend an Bedeutung auch in den Mathematik-Olympiaden gewinnen.

K. D. Klöpfel/W. Rautenberg

Klassenstufe 7

1. Logik

1. Aussageformen und deren Komposition, Vorrangdefinition zur Klammereinsparung
2. Erfüllbare, nichterfüllbare und allgemeingültige Ausdrücke
3. Semantische Äquivalenz (von Aussageformen)
4. Logische Interpretation der Begriffe „notwendig“ und „hinreichend“, Zusammenhang zur Implikation

2. Mengenlehre

1. Kreuzmenge, zweistellige Relationen Reflexivität Symmetrie und Transitivität bei zweistelligen Relationen
2. Ordnungsrelationen
Geordnete und teilweise geordnete Mengen, ev. Anwendung der Ergebnisse auf die Potenzmenge
3. Äquivalenzrelationen
Äquivalenzklassen, endliche Zahlen als Klasseneinteilung der endlichen Mengen nach ihrem Umfang, Extensionalität der semantischen Äquivalenz von Ausdrücken (z. B. daß äquivalente Ausdrücke gleiche Mengen beschreiben)

3. Algebra

1. *Äquivalenz von Termen* (Wertverlaufsgleichheit)
Äquivalentes Umformen einfacher, insbesondere arithmetischer Terme (z. B. $a(b+c)$ ist äquivalent $ab+ac$), Vorrangregeln zur Klammereinsparung
2. *Gleichungen*
Darstellung der Äquivalenz von Termen in Form von Gleichungen, Äquivalenz von Gleichungen, lineare Gleichungen mit einer zu bestimmenden Variablen
3. *Strukturerweiterungen algebraischer Strukturen* – Beispiele: Erweitern natürlicher Zahlen auf gebrochene Zahlen, Erweitern der positiven Zahlen auf rationale Zahlen, Besonders hervorzuheben ist die Äquivalenzklassenbildung bei Strukturerweiterungen, z. B. gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen, rationale Zahlen als Klassen von Zahlenpaaren

4. Zahlentheorie

1. Zahlenkongruenzen, Restklassen als Äquivalenzklassen (mengentheoretische Auffassung)
Grundrechenarten mit Restklassen, Repräsentantenauswahl, primitive Restklassen, äquivalentes Umformen von Kongruenzen, z. B. $a \equiv b \bmod c \Rightarrow at \equiv bt \bmod c$ mit $t \in \Gamma$
2. Diskussion der Kongruenz $ax \equiv \bmod c$, wobei x zu bestimmen ist; Unterschied zu Gleichungen deutlich herausarbeiten

5. Analysis

1. Spezielle Ungleichungen, z. B.
$|a \pm b| \leqq |a|+|b|$,
$$x+\frac{1}{x} \geqq 2 \text{ u. a.}$$
2. Äquivalentes Umformen von Ungleichungen bei Anwendung der vier Grundrechenarten und des Potenzierens; Problem der Umkehrbarkeit (z. B. $a^2 < b^2 \rightarrow a < b$?)
3. Einfache lineare Ungleichung mit und ohne Absolutbetrag, z. B.
$|x-3| < |x-2|$, oder
$|x-2| - 2x = 5$
Fallunterscheidung bei Auflösen des Betragszeichens
4. Spezielle Anwendungen des Betragszeichens z. B. beim Bestimmen des Maximums zweier Zahlen a, b
$$\max(a, b) = \frac{|a+b|+|a-b|}{2}$$

6. Geometrie

1. Grundlagen
a) Inzidenzgeometrie
Inzidenzbeziehungen (liegt in, geht durch, verbinden, schneiden), Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, Parallelitätsrelation
b) Kreis
Sehnen-, Tangentenvierecke, Beziehungen zwischen Kreis und Dreieck (Umkreis, Inkreis, Ankreis), Spiegelung am Kreis
2. Konstruktionen
a) Kreis: Tangentenkonstruktionen (von Punkt an Kreis, gemeinsame Tangenten zweier Kreise), Dreieckskonstruktionen unter Verwendung der Sätze über den Kreis (z. B. c, h_a, h_b gegeb. oder α, γ, c gegeben)
b) Flächenverwandlung (z. B. Fünfeck unter Beibehaltung eines Punktes in ein flächengleiches Dreieck)
c) Einwandfreie Konstruktionsbeschreibungen mit Konstruktion, Beschreibung, Begründung und Determination aufstellen
3. Berechnungen
Kreisberechnungen (Bogen, Fläche, Segment, Umfang, zusammengesetzte Figuren) Arbeiten mit Winkel im Bogenmaß

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ereignis, abhängige und unabhängige Ereignisse (Erläuterung an zahlreichen Beispielen) Beziehungen zu Mengenzerlegungen (Nur endliche Mengen betrachten).
2. Häufigkeit von Ereignissen
3. Berechnung von Urnenbeispielen, Lottoaufgaben

8. Kybernetik

1. Addition und Subtraktion von Dualzahlen und logische Schaltungen
2. Realisation dieser Rechenarten in Elektronischen Datenverarbeitungsanlagen

Klassenstufe 8

1. Logik

1. Aussagenlogische Identitäten (insbesondere: de Morgansche Regeln, Kontraposition, ev. Kettenschluß)
2. Schlußregeln, systematische Darlegung Einsetzungsregeln, Abtrennungsregeln, Kontrapositionsregel, Regel der Fallunterscheidung; Anwendung auf die formale Darstellung gebräuchlicher Schlußweisen
3. Direkter und indirekter Beweis

2. Mengenlehre

1. Abbildungen, Darstellung als zweistellige Relationen, Beispiele, z. B. Permutationen als Abbildungen endl. Mengen auf sich, Funktionsbegriff, Begriffe: auf, in, von, aus bei Abbildungen; Spezielle Abbildungen (z. B. Identität, inverse Abbildung)
2. Komposition von Abbildungen, Gruppeneigenschaften Anwendungen auf Geometrie (Bewegungen, Projektion)
3. Kardinalzahlenbegriff, natürliche Zahlen als Kardinalzahlen, Begriffe abzählbar und überabzählbar

3. Algebra

1. Operationen als dreistellige Relationen; Klassifizierung von Operationen: assoziative, kommutative
2. Gruppen als einfache algebraische Strukturen; Untergruppen Gruppenordnung, Isomorphie; Abelsche und Zyklische Gruppen, Interpretationen an Permutationsgruppen; Isomorphie zwischen endlichen Gruppen und Untergruppen von Permutationsgruppen
3. Einbettung algebraischer Strukturen in andere algebraische Strukturen – Beispiele natürliche Zahlen und rationale Zahlen
4. Arbeiten mit Variablen, Anwenden beim Lösen nichtlinearer Gleichungen, die auf lineare führen.

4. Zahlentheorie

1. Additive Gruppen der Kongruenzen, multiplikative Gruppen der Kongruenzen nach Primzahlmodul
2. Lineare Diophantische Gleichungen, Lösungen mit Hilfe von Kongruenzen;
3. Zahlentheoretische Untersuchungen unter Verwendung des Positionssystems z. B. bei Teilbarkeitsregeln für 7, 9, 11

5. Analysis

1. Funktionen, spezielle Eigenschaften: Monotonie, Nullstellen, Darstellung in Koordinaten, Parallelverschiebung und Spiegelung von Funktionen, Substitutionen
2. Lineare und stückweise lineare Funktionen, Deutung der Konstanten in Geradengleichung, Schnittpunkte linearer Funktionen, zueinander orthogonale lineare Funktionen
3. Folgen, Bildungsgesetze von Folgen erkennen, als Funktionen darstellen; Begriffe überall dicht, Satz von oberer Grenze
4. Ungleichungen mit zwei Variablen, Anwendung des Funktionsbegriffs bei Lösung, z. B. $x+y<10$ bedeutet Zerlegung der Ebene in zwei Halbebenen mit der Trennungsgeraden $y=10-x$

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Bewegungen als Abbildungen, Gruppeneigenschaften (In Verbindung mit Verschiebungen einführen des Vektorbegriffes möglich – unter Bezugnahme auf den Physikunterricht).
b) Innere und äußere Teilung von Strecken, Doppelverhältnis, Goldener Schnitt
c) Sehnensatz, Sekanten-Tangentensatz am Kreis (Anwendung auf geometr. Beweise)
d) Ähnlichkeit und lineare Funktionen (Proportionen, neue Deutung der Konstanten in linearen Funktionen)

2. Konstruktionen

a) Konstruktionen in beschränkter Ebene Lot fällen, Senkrechte errichten, Strecken und Winkel halbieren, Parallelen konstruieren (z. B. zu gegebenen Gerade, Punkt nicht auf der der Ebene, sondern als Schnittpunkt – außerhalb der Ebene liegend – zweier gegebener Geraden), Punkt mit anderen verbinden, der nicht auf der Ebene liegt
b) Konstruktionen von Vielecken, insbesondere Dreiecken aus beliebigen Stücken und Teilungsverhältnissen, regelmäßige Zehnecke und Fünfecke

3. Berechnungen

a) Berechnungen mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes
b) Spezielle Teilungsverhältnisse am Dreieck, z. B. Teilung der Seiten durch Winkelhalbierende, Höhen, Teilung der Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden untereinander

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ereignisse, Elementarereignisse, zusammengesetzte Ereignisse als Mengen von Elementarereignissen (Anzahl der Elementarereignisse als endlich vorausgesetzt), Vergleich zu Mengen, Vereinigung und Durchschnitt von Ereignissen
2. Wahrscheinlichkeit, klassischer Begriff (Anzahl der günstigen zu Anzahl der möglichen Ereignisse), Grundeigenschaften, Beispiele einfacher diskreter Verteilungen, Urnenbeispiele, Spiele (Gewinnchancen)

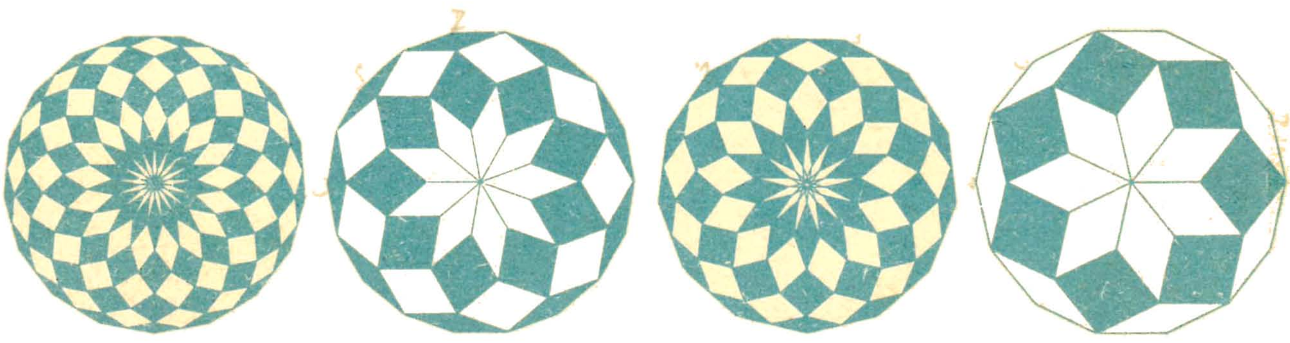
8. Spieltheorie

1. Spiele, Mathematische Definition eines Spieles, endliche Spiele, Begriffe Regel, Zug, Spiel, Strategie, Gewinn, Verlust
2. Zwei-Personen-Nullsummenspiele, Matrixdarstellung, Sattelpunkte, anschauliche Erläuterung des Minimaxtheorems, Existenz von Sattelpunkten

9. Kybernetik

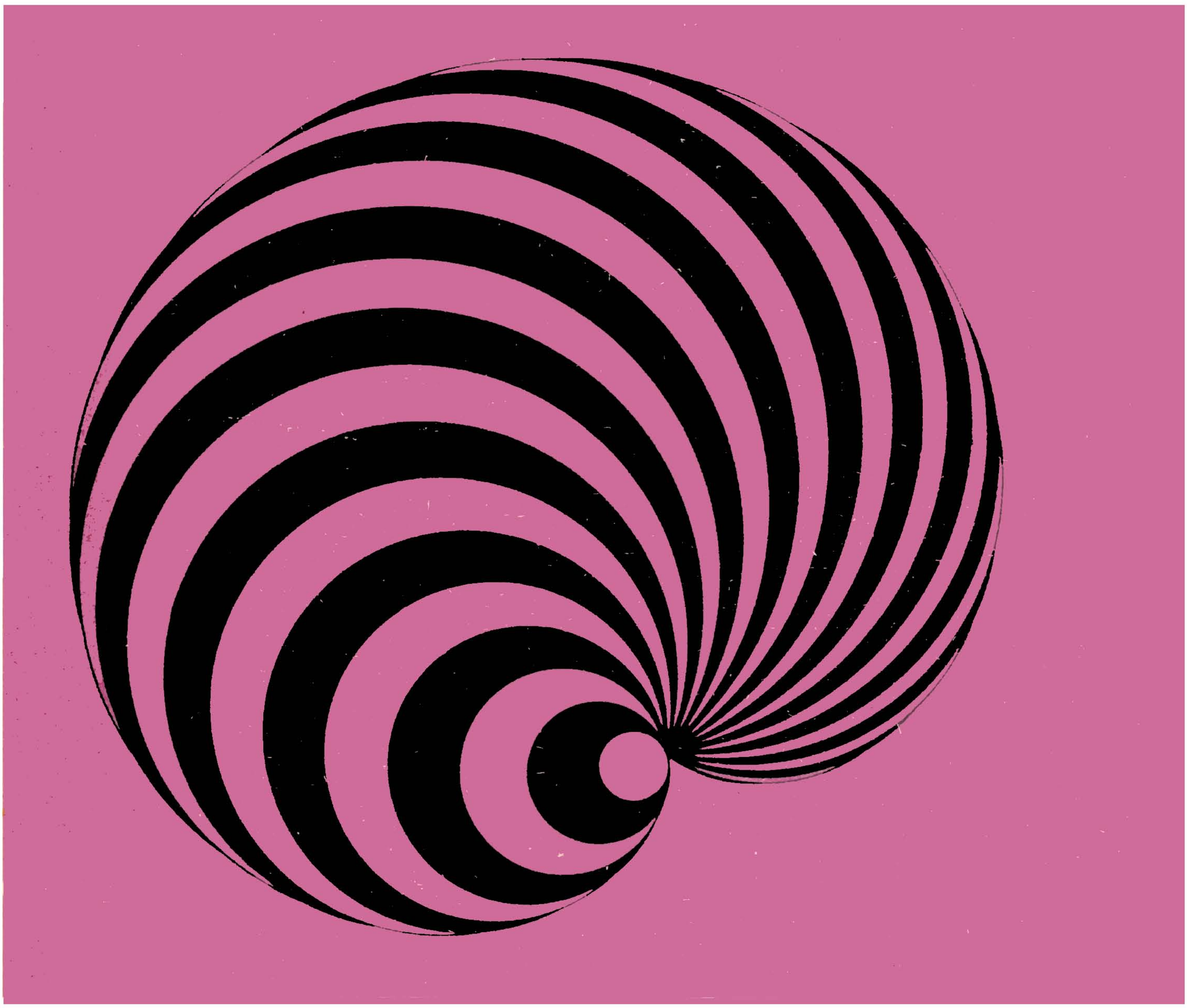
1. Aufbau einer EDVA (Blockschaltbild), Bestandteile der ersten Peripherie
2. Arbeitsweise einer EDVA – Grobschema: Befehl. Programm, Zusammenhang zwischen Speicher, Rechenwerk und Leitwerk

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

5

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 100, 101, 110, 111); F. Fricke, Berlin (S. 112); Archiv *alpha* (S. 97); J. Lehmann (S. 97); Eigenfoto: A. Ljapunow, Nowosibirsk (S. 102); A. Vilenkin, Moskau, 3 Fotos (S. 106/107); J. Lehmann, 7 Fotos (S. 106/107); AG-Mathematik Burkau (III. Umschlagseite); Vignetten aus: Studenten in der Sowjetunion, APN-Verlag, Moskau (S. 108/109), Briefmarken: W. Unze, Leipzig (S. 102)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 23. Juli 1973

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren der XV. Internationalen Mathematikolympiade in der UdSSR ausschließlich aus Material unserer sowjetischen Freunde zusammengestellt.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

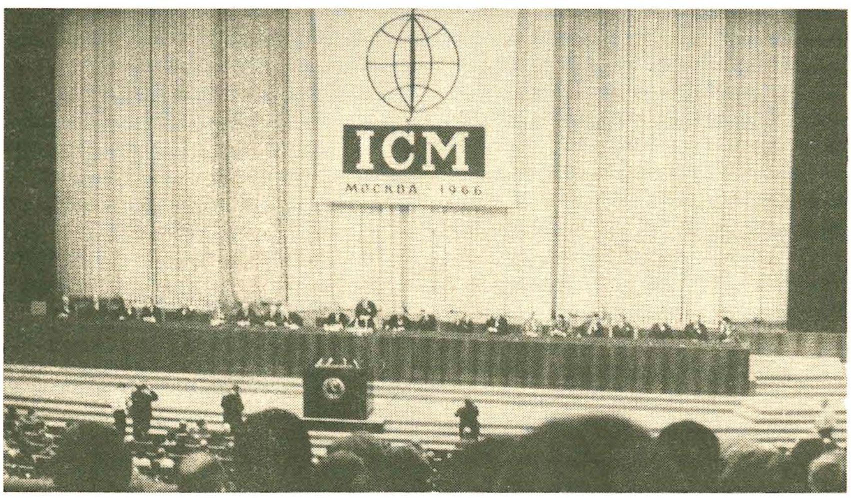
Millionen auf der Bleistiftspitze

Teil 1

А. Я. Халамайзер

Im 16. Jahrhundert kannten sich nur wenige Menschen in der Mathematik aus. Etwas war den Seefahrern bekannt, noch weniger den Landvermessern. Das Häuflein Gelehrter, das sich auf die Universitäten verteilte, beschäftigte sich mit der *reinen* Mathematik und zollte ihrer Anwendung im alltäglichen Leben keine Aufmerksamkeit ....

Im August 1966 erörterten mehr als 5000 führende Mathematiker der ganzen Welt eineinhalb Wochen lang in Moskau die wichtigsten Fragen der Anwendung der Mathematik. Und das nicht nur in der Technik und Ökonomie, sondern auch in der Medizin,



in der Biologie und sogar in einer von der Mathematik entfernt scheinenden Wissenschaft wie der Sprachwissenschaft. 1967 wurde im Ministerium für Gesundheitswesen der Sowjetunion ein Rechenzentrum geschaffen, und in der Akademie der Landwirtschaftswissenschaften *K. A. Timirjasew** begann man mit der Ausbildung von Mathematikern – Kybernetikern für die Arbeit in der Landwirtschaft. Im Herbst 1970 befanden sich unter den Gelehrten auf dem Mathematikerkongreß in Nizza (Frankreich) allein über hundert aus der Sowjetunion. Besondefs oft ergeben sich im Leben Aufgaben des Auffindens von *optimalen Bedingungen*: eines Maximums an Nutzeffekt, eines Minimums an Ausgaben, eines Maximums an Produktion oder Gewinn, eines Minimums an Arbeitskräften, Ausrüstung, Transportmitteln....

Als Beispiel betrachten wir zunächst eine *Hausaufgabe.*

„Was meint ihr, wenn wir in diesem Jahr Erdbeeren anpflanzen würden", fragte Natascha während des Mittagessens.

„Jaja, die pflanzen wir an, und dann plündern sie die Jungen nach und nach alle weg", widersprach Lena.

„Man müßte sie einzäunen", bemerkte der Vater.

„Womit denn? Außerdem würde man immer noch drüberklettern ..."

„Morgen frag ich im Werk. Ich glaube es gibt Zaunfelder aus Abfällen", versprach der Vater.

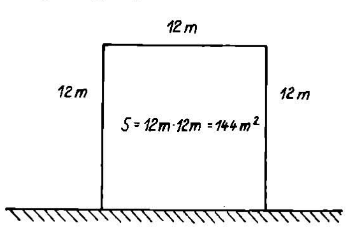
Am nächsten Tag stand fest, daß man 36 Meter festen Zaunes bekommen könnte.

„Über den klettert niemand drüber", sagte der Vater. „Übrigens, wir können eine Parzelle längs der Werkmauer nehmen, dann brauchten wir sie von einer Seite nicht einzuzäunen."

„Aber, daß die Beete gerade werden", erinnerte die Mutter.

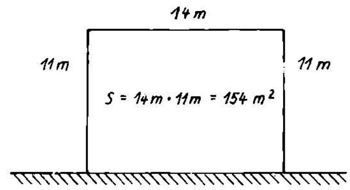
„So ..., wenn wir eine quadratische Parzelle nehmen .... Gib mir mal einen Bleistift, Natascha." Und die Mutter zeichnete: (Bild 1).

Bild 1



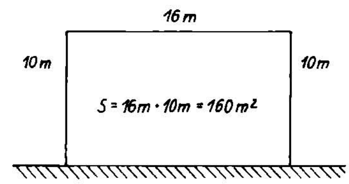
„Etwas wenig ergibt das, insgesamt nur 144 m²", sagte Natascha. „Wir machen eine Seite lieber etwas länger, so .... (Bild 2)

Bild 2



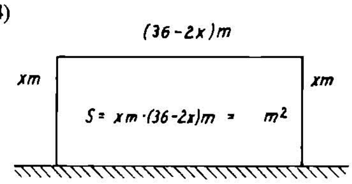
„Man kann die Seite noch länger machen", erwiderte Lena und nahm den Bleistift (Bild 3). „Seht mal, so wird die Parzelle größer, und Erdbeeren werden es mehr."

Bild 3



„Und die Seite kann man noch größer machen", lächelte spöttisch der Vater. „Nur ist es besser nicht zu raten, sondern exakt die Aufgabe zu formulieren und sie zu lösen." (Bild 4)

Bild 4



▲1▲ Die zur Werksmauer senkrechten Seiten der Parzelle seien je x Meter lang; dann ist die zur Werksmauer parallele Seite $26-2x$ Meter lang, und die Fläche S des eingeschlossenen Rechtecks beträgt

$$S=x\cdot(36-2x)\ \mathrm{m}^2.$$

Wir formen den Ausdruck um, um ein volles Quadrat herauszulösen:

$$S=x\cdot(36-2x)=-2(x^2-18x)=$$
$$=-2(x^2-2\cdot 9x+9^2-9^2)=$$
$$=-2(-9^2)-2(x-9)^2=$$
$$=162-2\cdot(x-9)^2.$$

Die Fläche der Parzelle ist also gleich der Differenz zwischen der konstanten Größe 162 und der veränderlichen Größe

$$2\cdot(x-9)^2.$$

Dafür, daß die Fläche möglichst groß wird, muß man von der Zahl 162 möglichst wenig abziehen. Natürlich wäre es gut, von 162 eine negative Zahl abzuziehen (dann würde die Fläche sogar größer als 162), nur kann $2\cdot(x-9)^2$ nie negativ werden. Also, um

* Kliment Arkadjewitsch Timirjasew (1843 bis 1920) – russ. Pflanzenphysiologe

eine möglichst große (maximale) Fläche zu erhalten, muß der Subtrahend Null sein:

$$2 \cdot (x-9)^2=0.$$

Hieraus folgt sofort $x=9$, d. h. die Länge der Parzelle (längs der Werkmauer) müßte 18 Meter und ihre Breite 9 Meter betragen. Unter dieser Bedingung wird die Fläche der rechteckigen Parzelle maximal und beträgt 162 m^2.

Und jetzt lieber Leser, wirst du zum Direktor der Transportabteilung des Brothandels in einer kleinen Stadt ernannt. Deine Aufgabe – die Lieferung von Brot aus 3 Bäckereien in 5 Geschäfte zu gewährleisten. In Tabelle 1 sind die Produktionskapazitäten der Bäckereien und der Bedarf der Geschäfte angegeben (je Tag). Als Maßeinheit haben wir die Tragfähigkeit eines Brotautos angenommen.

Die Ziffern in den Kästchen der Tabelle 1 bedeuten die Transportkosten je Brotauto (in Mark); so gibt die Ziffer 4 im linken oberen Kästchen an, daß die Transportkosten eines Brotautos aus der Bäckerei B_1 in das I. Geschäft 4 Mark betragen.

Als erstes muß der Transportplan aufgestellt werden. Von der Produktion aus der Bäckerei B_1 gehen in das I. Geschäft 25 Autos, in das II. – 20 und in das III. – 5. Von der Produktion B_2 gehen in das III. Geschäft 10 und in das IV. – 30 Autos. Schließlich gehen von der Produktion B_3 in das IV. Geschäft 25 und in das V. – die übrigen 35 Autos. Der entsprechende Transportplan ist in der Tabelle 2 angegeben.

Wir füllten – indem wir diesen Plan aufstellten – eine Tabelle (man nennt sie oft *Matrix*) aus, und zwar angefangen mit dem oberen linken Kästchen. Auf einer geographischen Karte entspricht die obere linke Ecke der nordwestlichen, deshalb bezeichnet man solch einen Transportplan als *Nordwestecken-Plan.*

Es ist nicht schwer, die täglichen Gesamttransportkosten entsprechend diesem Plan zu berechnen:

$4 \cdot 25+5 \cdot 20+2 \cdot 5+5 \cdot 10+4 \cdot 30+7 \cdot 25+4=695$ (Mark).

Es taucht die Frage auf, ob man das Brot nicht nach einem anderen Plan billiger ausfahren könnte. Wenn man nun das I. Geschäft nicht aus A, sondern aus B beliefern würde, und entsprechend in das IV. Geschäft 25 Autos aus A schickt (Tabelle 3)? Jetzt betragen die täglichen Gesamttransportkosten $5 \cdot 20+2 \cdot 5+2 \cdot 25+5 \cdot 10+4 \cdot 30+2 \cdot 25+4 \cdot 35=520$ (Mark).

Durch eine kleine Änderung des Transportplanes könnten wir täglich 175 Mark einsparen. Für das ganze Jahr ergibt das mehr als 50 000 Mark Nutzen!

Man könnte übrigens noch mehr einsparen. Tabelle 4 zeigt eine optimale (billigste) Variante des Transportplanes. Die täglichen Transportkosten nach diesem Plan betragen nur 385 Mark – anstatt 695 Mark nach der ersten Variante. Auf diese Art und Weise gelang es nur mit Hilfe eines Bleistiftes die täglichen Transportkosten um 310 Mark bzw. um 45% gegenüber den Anfangskosten zu senken.

Die oben behandelte sogenannte *Transportaufgabe* ist nur eine aus einer ganzen Reihe von Aufgaben der *linearen Programmierung,* deren Ausarbeitung in den letzten Jahrzehnten besonders intensiv betrieben wird. Hier noch eine Reihe verwandter Aufgaben: die optimale Auslastung der vorhandenen Produktionsausrüstung, der Plan der Standortverteilung von Produktions- und Handelseinrichtungen, die Landverteilung im Gartenbau .... Viele dieser Aufgaben sind gut erforscht und in allgemeiner Form ausgearbeitet.

In unserem Beispiel hatten wir 3 Bäckereien (Produzenten) und 5 Geschäfte (Verbraucher). Unsere Tabelle – *Matrix* – hatte insgesamt $3 \cdot 5=15$ Kästchen. Es war nicht schwer, alle möglichen Varianten des Transportplanes zu berechnen und die effektivste (optimalste) auszuwählen. Beim Vorhandensein von 10 Produzenten und einem halben Hundert Verbraucher wird die Matrix schon $10 \cdot 50=500$ Kästchen enthalten. Die Menge der möglichen Varianten wird so groß, daß es unmöglich ist, sie alle zu berechnen. Sogar mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen! Es sind jedoch Methoden ausgearbeitet worden, die es gestatten, von einem gegebenen Plan (z. B. Nordweststecken-Plan) zu einem anderen *effektiveren* überzugehen. So kann man z. B. mit der *Simplex-Methode* Schritt für Schritt jeden vorhandenen Plan so lange verbessern, bis er optimal wird.

Bäckereien und ihre Produktionskapazität	Die Geschäfte und ihr Bedarf				
	I : 25	II : 20	III : 15	IV : 55	V : 35
B_1 : 50	4	5	2	2	3
B_2 : 40	3	6	5	4	2
B_3 : 60	2	5	3	7	4

Tab. 1

B_1 : 50	^{4}25	^{5}20	^{2}5	2	3
B_2 : 40	3	6	^{5}10	^{4}30	2
B_3 : 60	2	5	3	^{7}25	^{4}35

Tab. 2

B_1 : 50	4	^{5}20	^{2}5	^{2}25	3
B_2 : 40	3	6	^{5}10	^{4}30	2
B_3 : 60	^{2}25	5	3	7	^{4}35

Tab. 3

B_1 : 50	4	5	2	^{2}50	3
B_2 : 40	3	6	5	^{4}5	^{2}35
B_3 : 60	^{2}25	^{5}20	^{3}15	7	4

Tab. 4

▲2▲ Ein Werk kann Geräte zweier verschiedener Typen B und M herstellen. Für jedes Gerät B werden 15 Dioden und 12 Trioden, für jedes Gerät M – 2 Dioden und 6 Trioden gebraucht. Eine Überprüfung am Prüfstand des Gerätes B dauert 3 Minuten, des Gerätes M – 12 Minuten. Beim Verkauf erhält das Werk für ein Gerät B – 9 Mark Gewinn (nicht gerechnet die Unkosten), für ein Gerät M – 6 Mark. Die Materialien zur Herstellung der Geräte sind beschränkt; während jeder Schicht kann das Werk über nicht mehr als 300 Dioden und 306 Trioden verfügen, und der Prüfstand kann in jeder Schicht nicht mehr als 6 Stunden (360 Min.) zuverlässig arbeiten.

Wie viele Geräte B und M muß das Werk herstellen, damit der Gewinn (in einer Schicht) maximal wird? Die Bedingungen der Aufgabe können gekürzt in Form der Tabelle 5* geschrieben werden.

Lösung: I. Wir bezeichnen die Menge der Geräte B und X_1 und die Menge der Geräte M mit X_2. Nun kann unsere Aufgabe mathematisch folgendermaßen formuliert werden: es sind zwei unbekannte Größen X_1 und X_2

zu finden, die folgenden Ungleichungen genügen

$$15 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leqq 300 \quad (1)$$
$$12 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 \leqq 306 \quad (2)$$
$$3 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 \leqq 360 \quad (3)$$
$$X_1 \geqq 0 \quad (4)$$
$$X_2 \leqq 0, \quad (5)$$

und zwar so, daß die Größe $T = 9 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2$ einen möglichst großen Wert annimmt.

Die Bedingungen unserer Aufgabe sind jetzt in der Form von *linearen* Ungleichungen aufgeschrieben. Die *Zielfunktion T* ist auch eine *lineare* Funktion. Deshalb nennt man solch eine Aufgabe gewöhnlich eine Aufgabe der *linearen Programmierung*.**

II. Da in der Aufgabe nur zwei unbekannte Größen X_1 und X_2 figurieren, kann man versuchen, sie graphisch zu lösen: es ist in der (X_1, Y_2)-Ebene ein Punkt mit den nötigen Koordinaten X_1 und X_2 zu finden (anstelle X_1 und X_2 schreibt man oft X und Y).

Wir geben uns ein System von rechtwinkligen Koordinaten mit den Achsen X_1 und X_2 vor. Wegen der Ungleichungen (4) und (5) sind nur Lösungen im ersten Quadranten möglich (Bild 5). Dann zeichnen wir die Gerade $15X_1 + 2X_2 = 300$.

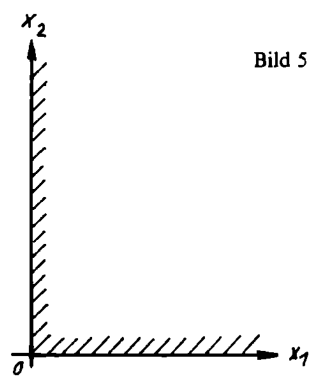


Bild 5

Wegen der Ungleichung (1) ist eine Lösung unserer Aufgabe nur in den Punkten des ersten Quadranten möglich, die unter (links) dieser Geraden liegen (Bild 6). Weiterhin zeichnen wir die Geraden

$$12X_1 + 6X_2 = 306$$
und $$3X_1 + 12X_2 = 360.$$

Ähnlich wie oben ist nun wegen der Ungleichungen (2) und (3) eine Lösung nur in den Punkten möglich, die unter diesen Geraden liegen, d. h. im abgeschlossenen Vieleck *OABCE* (Bild 7).

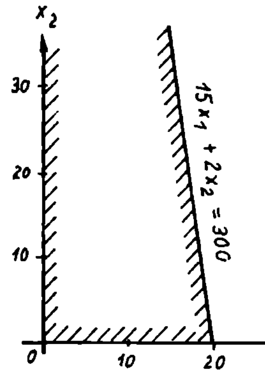


Bild 6

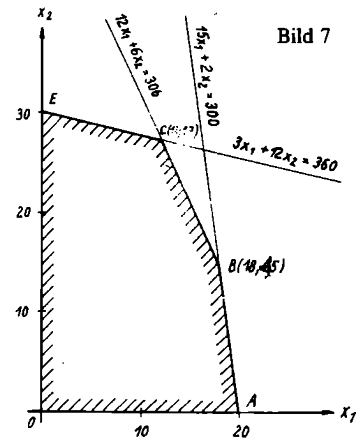


Bild 7

Der Wert der Zielfunktion auf jeder der Geraden $9X_1 + 6X_2 = K$ (K – beliebige Zahl) ist konstant. Da diese Geraden keiner einzigen Seite des Vielecks parallel sind, so verläuft durch jede Ecke des letzten Vielecks nur eine solche Gerade und fällt dabei mit keiner Seite des Vielecks zusammen. Wir bestimmen diese Geraden:

T_1: $9X_1 + 6X_2 = 0$
(durch den Punkt 0);
T_2: $9X_1 + 6X_2 = 180$
(durch die Punkte A und E);
T_3: $9X_1 + 6X_2 = 252$
(durch den Punkt B);
T_4: $9X_1 + 6X_2 = 270$
(durch den Punkt C).

Die aufgezählten Geraden seht ihr auf Bild 8. Es ist leicht zu sehen, daß die Zielfunktion ihren maximalen Wert im Punkt C erreicht:

$$T(c) = T(12, 27) = 9 \cdot 12 + 6 \cdot 27 = 270.$$

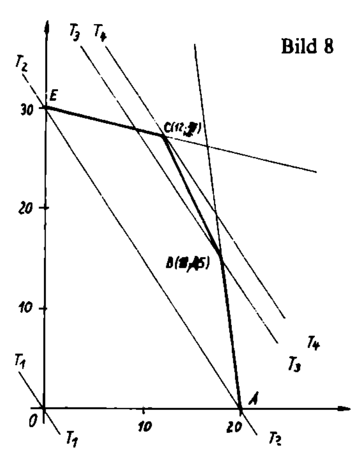


Bild 8

Nach rechts kann man die Gerade $9X_1 + 6X_2 = 270$ nicht verschieben, da sie dann keinen einzigen Punkt des Vielecks *OABCE* enthalten würde; wenn man sie nach links verschiebt, nimmt sie kleinere als 270 Werte an.

Antwort: Die Zielfunktion erreicht ihren maximalen Wert, gleich 270, bei $X_1 = 12$ und $X_2 = 27$, d. h. maximalen Gewinn (und zwar 270 Mark) erreicht das Werk, wenn es 12 Geräte B und 27 Geräte M herstellt.

III. Die graphische Lösung der Aufgabe war möglich, da in ihr nur zwei unbekannte Größen X_1 und X_2 figurierten. Reale Aufgaben der linearen Programmierung enthalten nicht selten ... zig, ja manchmal Hunderte Unbekannte.

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man auch die sogenannte Simplex-Methode anwenden. Das soll in einem zweiten Beitrag in Heft 6/73 geschehen.

A. Halameisär

* Die Tabellen 5 bis 7 siehe in Heft 6/73 (Teil 2), d. Red.

** Unter Programmierung versteht man oft die Aufstellung eines Programms für die Arbeit einer elektronischen Rechenmaschine. Der Begriff „Programmierung" ist hier nicht sehr passend gewählt, er ist aber allgemein üblich. Besser wäre die Bezeichnung „lineare Planung".

Mathematikstunde

von der wüste
ziehen wir die wüste ab
und bekommen
das feld

das feld
nehmen wir in die dritte potenz
und bekommen
den wald

aus dem wald
ziehen wir die wurzel
und bekommen
den garten

die früchte addieren wir
und bekommen
brot

das brot teilen wir
und bekommen
freundschaft
dann multiplizieren wir alles
und bekommen
das leben

Wjatscheslaw Kuprijanow
Nachdichtung: Axel Schulze

Primzahlen

Primzahlen haben schon die Menschen im Altertum interessiert. Über diese Zahlen wurden viele interessante Fragen gestellt. Es ist bemerkenswert, daß einige dieser Fragen bis heute nicht beantwortet wurden.

1. Wir nehmen die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... In dieser Folge gibt es keine größte Zahl. Wie groß man auch eine natürliche Zahl n wählt, es gibt stets eine größere, z. B. die folgende natürliche Zahl $n+1$. Folglich gibt es keine größte natürliche Zahl. Diese Tatsache haben die Mathematiker im Auge, wenn sie sagen, daß die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist.

2. Wir kommen zur Folge der natürlichen Zahlen zurück. Die Zahl 1 ist die kleinste Zahl der Folge. Sie hat nur einen Teiler, die 1. Die nächste Zahl ist 2. Diese Zahl besitzt zwei Teiler, und zwar 1 und 2. Die Zahl 3 hat auch zwei Teiler 1 und 3. Die nächste Zahl 4 besitzt dagegen drei Teiler, 1, 2 und 4. Die Zahl 5 hat zwei Teiler, 6 hat vier Teiler usw. Eine Zahl kann aber auch noch mehr Teiler besitzen, so hat die Zahl 60 z. B. die 12 Teiler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Alle Zahlen, die genau 2 Teiler haben (1 und sich selbst), nennt man Primzahlen. Bei mehr als 2 Teilern spricht man von zusammengesetzten Zahlen. So sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11 Primzahlen, 4, 6, 8, 9, 10 dagegen zusammengesetzte Zahlen. Und was für eine Zahl ist 1? Sie besitzt doch nur einen Teiler. Deshalb ist sie weder Primzahl noch zusammengesetzte Zahl.

Dadurch wird die Menge der natürlichen Zahlen in 3 Teile – oder wie man auch sagt, in 3 Untermengen – aufgeteilt. Die erste Untermenge besteht nur aus einer Zahl, und zwar aus der Zahl 1. Die zweite Untermenge enthält alle Primzahlen, und die dritte enthält alle zusammengesetzten Zahlen. Dabei sei hervorgehoben, daß jede natürliche Zahl in einer und nur in einer Untermenge enthalten ist. Dazu sagt man auch, diese drei Untermengen sind einander elementfremd.

3. Man errät leicht, daß die Menge der zusammengesetzten Zahlen unendlich ist. In der Tat gibt es bereits unendlich viele Zahlen der Form 2^n, wo n die Werte 2, 3, 4, ... durchläuft, darüber hinaus gibt es aber noch weitere zusammengesetzte Zahlen!

Was kann man nun aber von den Primzahlen sagen, bilden sie eine endliche oder eine unendliche Menge? Der bekannte altgriechische Mathematiker Euklid, der im dritten Jahrhundert unserer Zeitrechnung gelebt hat, hat bewiesen, daß die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Schauen wir uns an, wie scharfsinnig Euklid beim Beweis dieser Tatsache überlegt hat!

Es sei p eine gewisse Primzahl. Wir wollen beweisen, daß es zu ihr noch eine größere gibt. Dazu multiplizieren wir alle Primzahlen bis p, p eingeschlossen, miteinander, und addieren zu diesem Produkt eine Eins. Wir erhalten die folgende Zahl:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p+1.$$

Diese Zahl, die offensichtlich größer als p ist, ist entweder Primzahl oder zusammengesetzt. Wenn sie Primzahl ist, so haben wir damit bereits bewiesen, daß es eine Primzahl gibt, die größer als p ist. Ist diese Zahl jedoch zusammengesetzt, so muß sie durch eine gewisse Primzahl teilbar sein; sie wird jedoch von keiner der Primzahlen 2, 3, 5, ..., p geteilt, denn bei der Division durch diese Zahlen erhält man als Rest stets 1. Das bedeutet, daß sie durch eine Primzahl teilbar sein muß, die größer als p ist. Somit müssen wir auch in diesem Falle zugeben, daß es eine Primzahl gibt, die größer als p ist. Wegen der Willkür in der Wahl von p bedeutet das indessen, daß es keine größte Primzahl gibt, und daraus folgt sogleich die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen.

4. Die Menge der Primzahlen ist somit unendlich. Dabei ist klar, daß die Menge der Primzahlen, die kleiner oder gleich einem gewissen n ist, endlich ist. Wie kann man diese Zahlen finden? Am einfachsten geht man dazu nach einer Methode vor, die ein Zeitgenosse von *Archimedes*, der griechische Mathematiker *Eratosthenes*, vorgeschlagen hat. Wir wollen dieses Verfahren näher erläutern. Es seien alle Primzahlen zu bestimmen, die kleiner oder gleich n sind. Wir schreiben dazu die Teilfolge der Zahlen von 1 bis n auf: 1, 2, 3, 4, 5, ..., n.

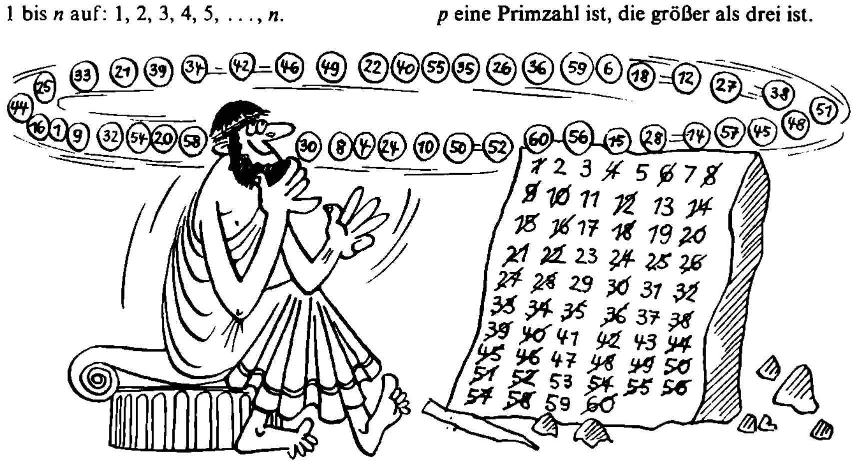
Als erstes steht hierin eine 1. Sie ist, wie wir bereits wissen, nicht Primzahl. Daher streichen wir sie weg. Die nächste Zahl ist 2. Sie ist Primzahl. Wir behalten diese Zahl bei und streichen alle Zahlen weg, die Vielfaches von 2 sind. Dazu brauchen wir bloß von 3 ab, jede zweite Zahl zu streichen. Fahren wir fort! Die erste nichtweggestrichene Zahl ist 3. Sie ist Primzahl. Wir behalten sie bei und streichen alle Zahlen, die Vielfache von ihr sind, d. h. von 4 ab jede dritte Zahl (Bei der Zählung muß man auch die bereits weggestrichene Zahl berücksichtigen: 6, 12, 18, ...) Nach dieser Operation ist die erste Zahl, die nicht weggestrichen und die damit Primzahl ist, 5. Wir behalten sie bei und streichen alle Zahlen weg, die Vielfaches von 5 sind, d. h. von 6 ab jede fünfte Zahl. Wir gehen weiter zur folgenden nichtweggestrichenen Zahl (diese ist 7) über usw.

Schließlich haben wir alle zusammengesetzten Zahlen weggestrichen, und uns verbleiben nur noch die Primzahlen. So erhalten wir z. B., wenn $n=60$ ist, die untenstehende Tabelle mit allen Primzahlen von 1 bis 60. Bei der Anwendung des Verfahrens von *Eratosthenes* haben wir gewissermaßen die Zahlen durchgesiebt, und dabei sind alle zusammengesetzten Zahlen durch das Sieb gedrungen und nur die Primzahlen übriggeblieben. Diese Methode heißt *Sieb des Eratosthenes.*

Zum Schluß wollen wir noch für unsere älteren Leser bemerken, daß man bei der Anwendung des *Siebes des Eratosthenes* mit dem Wegstreichen aufhören kann, sobald man bei einer Primzahl p angelangt ist, die größer als $\sqrt{n}$ ist. Zu diesem Zeitpunkt sind alle nicht weggestrichenen Zahlen Primzahlen. So bricht der Prozeß des Wegstreichens im Falle $n=60$ ab, wenn man alle Zahlen weggestrichen hat, die Vielfache von 7 sind.

A. D. Bendukidse

Wir schlagen euch vor, euch einmal mit der folgenden kleinen Aufgabe zu befassen: Beweist, daß p^2-1 durch 24 teilbar ist, wenn p eine Primzahl ist, die größer als drei ist.



alpha zu Gast bei Квант

Quant — die physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift der UdSSR

Freundschaftlicher Austausch
Im Januar 1970 erschien Heft 1 dieser populärwissenschaftlichen Schülerzeitschrift. Zwischen den beiden stellv. Chefredakteuren von *Quant* und dem Chefredakteur von *alpha* bestehen enge freundschaftliche Verbindungen. Immer mehr Artikel beider Zeitschriften werden ausgetauscht. Bei der Zusammenstellung dieses Heftes wurden wir von unseren sowjetischen Freunden umfassend beraten.

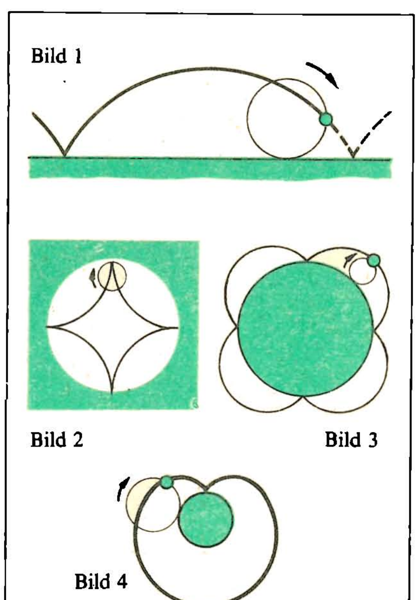
Welches Grundanliegen hat Quant?
Einen bedeutenden Teil des in der Zeitschrift enthaltenen Materials muß man mit dem Bleistift in der Hand lesen. In einer Reihe von Artikeln werden Fragen der modernen Mathematik und Physik behandelt. Eine Reihe von Artikeln haben gleiche Titel wie die in Schullehrbüchern. Sie enthalten bedeutendes Zusatzmaterial und bereichern so die Lehrabschnitte mit neuen Aufgaben. In der Zeitschrift finden die Leser auch interessante Mitteilungen aus der Geschichte der Wissenschaft. Bei den jungen Lesern wird durch anschaulich illustrierte Beiträge die Liebe zum Experimentieren geweckt. *Quant* bietet besonders für Hochschulbewerber Mathematik- und Physikaufgaben. Genau wie in *alpha* finden wir lustige Anekdoten, aktuelle Informationen, Briefmarken. Der Astronomie und der Technik wird auch Beachtung geschenkt.

Aus dem Inhalt des Heftes 5/73:
Ballistische Probleme im Kosmos – Der Kybernetiker sucht nach unterirdischen Lagerstätten – Fundamentale physikalische Konstanten – Versuche mit infraroter Strahlung – Summen gleicher Potenzen natürlicher Zahlen – Reguläre Polyeder – Mathematische und physikalische Aufgaben – Praktikum für Abiturienten: Aufgaben über periodische Funktionen – Heitere Probleme – Aufgaben über Maxima und Minima (ohne Verwendung der Differential- und Integralrechnung) – Die Nowosibirsker Staatsuniversität stellt Aufgaben für Abiturienten – Buchrezensionen – Leserbriefe – Aufgaben aus *Abschlußprüfungen Mathematik* der DDR, Klassenstufe 10 – *Quant* für junge Leser – Über die Verteilung von Primzahlen – Briefmarken über das Internationale Jahr der Meteorologie – Lösungen
Umfang des Heftes: 64 Seiten, Format 23 cm × 16 cm, 12 Hefte pro Jahr, Preis für Leser der DDR: 3,25 M vierteljährlich. Zu bestellen bei jedem Postamt unter Nr. 13101.

J. Lehmann

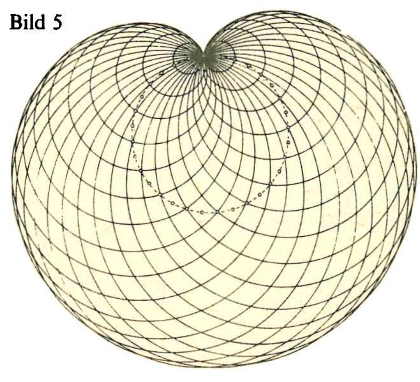
Die Kardioide

Die auf der ersten Umschlagseite des Heftes 1/72 der sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift *Quant* abgebildeten Figur – von *alpha* als Titelblatt übernommen – stellt eine bemerkenswerte Kurve dar, die *Kardioide*. Das Wort *Kardioide* stammt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie Herzförmige (Herzlinie). Die Eigenschaften dieser Kurve wurden erstmalig 1674 von dem dänischen Gelehrten *Ole Römer* untersucht.
Die *Kardioide* besitzt viele Verwandte. Das sind vor allem die verschiedenen Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden. Rollt ein Kreis auf einer Geraden ab, so hinterläßt ein auf diesem Kreis befestigter Punkt in der Ebene eine Spur, eine Kurve, die Zykloide heißt (Bild 1).



Läßt man einen beweglichen Kreis auf der Innenseite eines festen Kreises abrollen, so beschreibt ein auf dem ersteren befestigter Punkt in der Ebene eine Kurve, die Hypozykloide heißt (Bild 2).
Rollt dagegen der bewegliche Kreis auf der Außenseite eines festen Kreises ab, so nennt man die Kurve, die ein auf dem beweglichen Kreis liegender Punkt beschreibt, Epizykloide (Bild 3). Die *Kardioide* ist diejenige Epizykloide, bei der der Rollkreis und der Festkreis ein und denselben Radius besitzen (Bild 4). Über die Besonderheiten aller dieser Zykloiden, darunter der Kardioide, könnt ihr in dem Buch von *G. N. Berman*: Zykloiden (Gostechizdat 1954) nachlesen.
In Bild 5 ist eine der Möglichkeiten wiedergegeben, eine *Kardioide* zu konstruieren. Man zerlegt den festen Kreis durch einzelne Punkte in Abschnitte. Um jeden dieser

Bild 5



Punkte als Mittelpunkt schlägt man je einen Kreis, der außerdem durch einen festen Punkt des Festkreises hindurchgeht. Versucht selbst zu beweisen, daß ihr bei dieser Konstruktion tatsächlich eine *Kardioide* bekommt (die allen diesen Kreisen umbeschrieben ist).
Zum Schluß sei noch eine lustige Deutung der *Kardioide* erwähnt:

Wir betrachten eine im Querschnitt kreisförmige nicht gleitfähige unbewegliche Taille. Um sie rotiert ein *Hulareifen* von doppelt so großem Radius. Dann beschreibt jeder Punkt des Reifens um die Taille eine *Kardioide*.

M. L. Smoljanskij
stellv. Chefredakteur von Quant

Mathematiker auf Briefmarken der Sowjetunion

Euler, Leonhardt (15. 4. 1707 Basel bis 18. 9. 1783 Petersburg)
Schweizerischer genialer Mathematiker, höchst produktiv auf allen Gebieten der Mathematik und Astronomie, besonders bei seinem Wirken in Rußland. Besonders erwähnenswert sind seine Arbeiten auf dem Gebiet der Algebra, der Analysis der Unendlichen. In der Kreisberechnung führte er die Zahl π ein.

Ljapunow, Alexander Michailowitsch (1857 bis 1918)
Bedeutender russischer Mechaniker und Mathematiker. Maßgebende Arbeiten über die Stabilität der Bewegung mechnischer Systeme sowie auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch (1. 12. 1792 bis 24. 2. 1856)
Russischer Mathematiker und materialistischer Denker. Entwikkelte eine Nichteuklidische (d. h. das Parallelenpostulat nicht voraussehende) Geometrie.

Lomonossow, Michail Wassijewitsch (19. 11. 1711 in Mischaninskaja, Gouvernement Archangelsk bis 15. 4. 1765 Petersburg)
Hervorragendster russischer Gelehrter, Denker und Dichter.

Ostrogradski, Michail Wassilowitsch (1801 bis 1861)
Russischer Mathematiker und Schullehrer einer Hochschule. Er arbeitete über mathematische Analyse und gründete die mathematische „Petersburger Schule".

Torricelli, Evangelista (25. 10. 1608 Modiglina bis 25. 10. 1647 Florenz)
Italienischer Mathematiker und Physiker. Wichtig sind seine Berechnungen zum atmosphärischen Luftdruck, nach ihm wird die Maßeinheit des Luftdrucks benannt:

1 Torr $\triangleq$ 1 mm Hg-Säule bei 0 °C.

Ziolkowski, Konstantin Eduardowitsch (17. 9. 1857 bis 19. 9. 1935)
Russischer Mathematiker. Entwarf 1887 das Projekt eines Ganzmetalluftschiffes und schuf die wissenschaftliche Grundlage zur Bearbeitung des Raketenproblems, die theoretischen Arbeiten zum Weltraumflug.

Eine Aufgabe von Leninpreisträger Prof. Dr. A. Ljapunow

Nowosibirsk

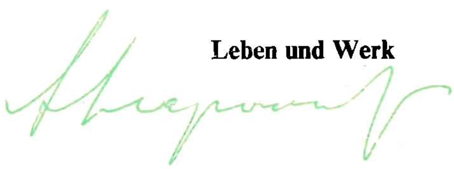
Liebe *alpha*-Leser!
Mit freundlichen Grüßen sende ich Euch einige mathematische Probleme, deren Aufstellung mir großes Vergnügen bereitete.

▲1084▲ Es sei E eine Ellipse und A ein Dreieck, das in diese Ellipse einbeschrieben ist. Die Ellipse E sei in ein Dreieck B einbeschrieben.
Es stellen sich folgende Fragen:
1. In welchen Verhältnissen stehen die Flächen der Figuren A und E, bzw. E und B?
2. Zu beweisen, daß für jeden Punkt I der Ellipse zwei extremale Dreiecke existieren, nämlich ein Dreieck A maximalen Umfangs (maximaler Fläche), dessen einer Eckpunkt I ist, und ein Dreieck B minimalen Umfangs (minimaler Fläche), dessen eine Seite durch den Punkt I geht.
3. Welches sind die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der genannten extremalen Dreiecke?
4. Was kann man über die Flächen aller solchen extremalen Dreiecke sagen?
5. Es sei auf einer Ebene eine Ellipse gezeichnet und ein Punkt dieser Ellipse markiert. Mit Hilfe von Zirkel und Lineal sollen die beiden extremalen Dreiecke für den markierten Punkt konstruiert werden.
6. Analoge Fragen für den Fall von Vierecken, Sechsecken und Fünfecken (schwierig!).
7. Was kann man in analoger Weise für beliebige n-Ecke aussagen, für $n>6$. (Das ist schon mit der *Theorie von Galois* verknüpft.)

Im Oktober 1971 waren *Armin Beck* vom Akademieverlag und ich vom VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW) in Akademgorodok bei Nowosibirsk. Dort unterstützten wir die Deutsche Buch-Export- und Import GmbH bei der Durchführung einer Buchausstellung.
Zu unseren unvergeßlichen Eindrücken gehörte die Festsitzung im *Hydrodynamischen Institut* der Sibirischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR zum 60. Geburtstag von Leninpreisträger *Prof. Dr. A. A. Ljapunow*. Der Institutsdirektor, Akademiemitglied und Präsident der Sibirischen Abteilung der Akademie, *Prof. Dr. M. A. Lawrentjew*, hielt die Festansprache, in der er Leben und Werk des Jubilars würdigte. Vertreter vieler Institute aus der ganzen Sowjetunion überreichten Glückwunschadressen

und Geschenke; wir überreichten Bücher. Es herrschte eine fröhlich-feierliche Stimmung, die nach den bewegten Dankesworten des Geburtstagskindes und einer Würdigung seiner eigens aus Moskau angereisten, hochbetagten, aber noch sehr rüstigen Mutter ihren Höhepunkt erreichte.

Die Zeitungen *Nowosibirsk am Abend* und *Sowjet-Sibirien* brachten Geburtstagsartikel, aus denen *F. Rehak*, Berlin, die folgenden, stark gekürzten Ausführungen zusammenstellte. *L. Boll*



Leben und Werk

Alexej Andrejewitsch Ljapunow begann seine wissenschaftliche Tätigkeit im Jahre 1929 als Laborant im Staatlichen Geophysikalischen Institut von Moskau. Im Jahre 1934 wechselte er in das W. A. Steklow-Institut für Mathematik über, dessen Mitarbeiter er für lange Jahre bleiben sollte. Im Jahre 1939 verteidigte er seine Dissertation über ein Thema aus der Mengenlehre.

All seine neuen Vorhaben und Pläne und die weitere Vertiefung seiner Arbeit wurden jedoch durch den Krieg jäh unterbrochen. Er ging an die Front. Aber auch an der Front, in den Kampfpausen, dachte er weiter nach und zeichnete in seinen Frontnotizbüchern das auf, was später zu Grundsteinen in einer Reihe seiner Nachkriegsarbeiten werden sollte.

Im Jahre 1944 trat *Ljapunow* der KPdSU bei. Für seine Verdienste an der Front wurde er mit dem Orden *Roter Stern* und mit einer Reihe von Medaillen ausgezeichnet. Gegen Ende des Krieges berief man ihn von der Front an die Artillerieakademie, an der er eine Lehrtätigkeit aufnahm. Besonders hier und in der Folgezeit in der Staatlichen Moskauer Universität trat seine ausgeprägte pädagogische Begabung zutage. Mit seiner persönlichen Anziehungskraft, seiner Kunst, klar und verständlich, gleichzeitig aber auch konzentriert und präzise den Stoff darzulegen, eroberte er sich die Achtung jedes Auditoriums. Hier arbeitete er als erster völlig neue Vorlesungen für eine Reihe von mathematischen Disziplinen aus.

Nach der Demobilisierung kehrte *Ljapunow* in das vertraute W. A. Steklow-Institut zurück. Im Jahre 1956 wurde ihm für seine wissenschaftliche und pädagogische Tätigkeit der *Rotbannerorden der Arbeit* verliehen.

Im Jahre 1961 kam *A. A. Ljapunow* in das Nowosibirsker wissenschaftliche Zentrum. Hier wurde er zum Korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften gewählt.

A. A. Ljapunow war einer der ersten Wissenschaftler in der Sowjetunion, der sofort die außerordentliche Bedeutung der elektronischen Rechenautomaten und der Ideen der Kybernetik erkannte und sein wissenschaftliches Interesse auf diese neuen Gebiete verlegt hat. Seine Tätigkeit auf diesem Gebiet förderte die intensive Entwicklung und die schnelle Anerkennung dieser wichtigen wissenschaftlichen Richtungen, die von großer prinzipiell-theoretischer und praktischer Bedeutung sind. Der Enthusiasmus, die Energie, die hohe Meisterschaft der Darlegung, die wissenschaftliche Kühnheit und seine begeisternde Persönlichkeit haben eine sehr wichtige Rolle bei der Verbreitung und Entwicklung dieser Gebiete gespielt. Deshalb reicht das Ergebnis seiner Tätigkeit hier weit über den Rahmen jener wichtigen Forschungen und Arbeiten hinaus, die er selbst geleistet hat.

Auch seine umfangreiche Arbeit zur Ausbildung von Kadern darf nicht unerwähnt bleiben. Eine intensive Arbeit hat er in der Artillerieakademie und in der Moskauer Universität geleistet, wo von ihm völlig neue Vorlesungen eingeführt wurden, und zwar Programmierung und Kybernetik. Gegenwärtig setzt er diese Arbeit in der Nowosibirsker Universität fort. Seine Tätigkeit hat auch auf die Ausbildung der sowjetischen Militärfachleute ihren Einfluß ausgeübt. Unter seinen Schülern befinden sich sieben habilitierte Doktoren und ungefähr fünfzig Kandidaten der Wissenschaften. Drei seiner Schüler sind Korrespondierende Mitglieder der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

A. A. Ljapunow verwendet viel Kraft darauf, das Niveau der mathematischen Ausbildung in der Mittelschule und der Arbeit in den Spezial-Schulen zu erhöhen. Sehr bekannt ist die Physikalisch-Mathematische Schule von Akademgorodok, an deren Gründung und an deren Arbeit er aktiven Anteil hat. Darüber hinaus leistet er eine umfangreiche Arbeit bei der Ausbildung von Spezialisten mit hoher Qualifikation in allen Gegenden der Sowjetunion. Die Abteilung Fernstudium der mathematischen Fakultät der Nowosibirsker Staatlichen Universität ist unter unmittelbarer Beteiligung *A. A. Ljapunows* entstanden.

Für die aktive Beteiligung an der Arbeit des in Nowosibirsk geschaffenen wissenschaftlichen Zentrums wurde *A. A. Ljapunow* im Jahre 1968 mit dem *Rot-*

bannerorden der Arbeit und im Jahre 1970 mit der *Jubiläumsmedaille* ausgezeichnet. Zum 60. Geburtstag erhielt er den *Leninorden*.
In seiner fast vierzigjährigen wissenschaftlichen Tätigkeit lassen sich drei Hauptrichtungen feststellen — die Mengenlehre, die Kybernetik und die Methodologie der Naturwissenschaft. Die erstere gehört zu den grundlegenden Teilgebieten der Mathematik. Die zweite umfaßt den mit der Programmierung und Modellierung auf elektronischen Rechenautomaten, mit der Regelungstheorie, mit der maschinellen Übersetzung von Sprachen und mit verschiedenen Zweigen der Biologie zusammenhängenden Problemkreis. Die dritte Richtung berührt die Natur unserer Erkenntnis selbst. Insgesamt stellt das Schaffen *A. A. Ljapunows* eine Einheit dieser drei Richtungen dar. Sie äußert sich in einem tiefen Eindringen in das, was gewissermaßen hinter diesen Richtungen steht, was ihre ideelle Gemeinsamkeit bildet und was die Bearbeitung einer jeden dieser Richtungen befruchtet.

Nachruf
Aus Nowosibirsk wurde uns mitgeteilt, daß *Prof. Dr. Ljapunow* während eines Aufenthalts in Moskau am 23. Juni 1973 verstorben ist.
Wir verlieren in ihm einen bedeutenden Wissenschaftler unserer Zeit. Der Förderung der Jugend hat er bis in sein Alter hinein stets große Aufmerksamkeit geschenkt. *Ein* Beweis sind die uns handschriftlich in deutscher Sprache zur Verfügung gestellte Aufgabe und ein Brief mit herzlichen Grüßen an die Leser der Schülerzeitschrift *alpha*.

Figuren auf einem Stück Gummi

Beginnen wir mit dem sicher schon oft verwünschten Dreieck. Wenn man eine Menge bestimmter Objekte studieren will, so sucht man entweder nach gemeinsamen Eigenschaften dieser Objekte oder man versucht zu verstehen, wodurch sie sich unterscheiden.
Was haben die beiden im Bild 1 dargestellten Dreiecke gemeinsam? Eigentlich nur, daß beide Dreiecke sind, d. h. sie haben drei Winkel, die von drei Strecken gebildet werden. Aus dieser Gemeinsamkeit folgen weitere gemeinsame Eigenschaften: Die Summe ihrer Innenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln; ihre Fläche läßt sich ausdrücken als das halbe Produkt einer beliebigen Seite mit der entsprechenden Höhe. Sicher erinnern Sie sich von ihrer Schulzeit her noch an eine ganze Reihe von Sätzen über Dreiecke.

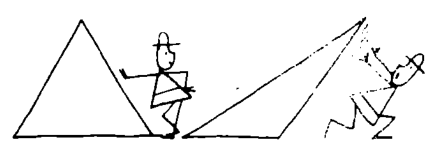
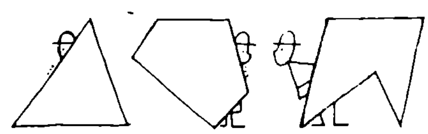
Bild 1


Bild 2


Was haben nun die Figuren im Bild 2 gemeinsam? Sie sind aus Strecken gebildet, sie haben eine ungerade Anzahl von Ecken, und das ist offenbar auch schon alles. Und wie ist es mit den Figuren im Bild 3? Obwohl sie durch irgend etwas einander ähnlich sind, ist es bereits schwieriger, ihre gemeinsamen Eigenschaften herauszustellen.

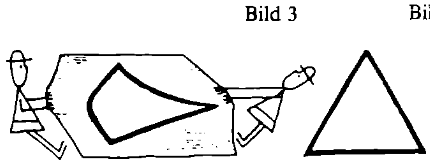
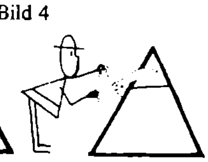
Bild 3


Bild 4


Kehren wir zurück zum Dreieck. Im Bild 4 ist von einem Dreieck ein ähnliches Dreieck abgeschnitten, d. h. ein Dreieck, das ebenso große Winkel wie das ursprüngliche hat. Die beiden Dreiecke besitzen dann außer den gemeinsamen Eigenschaften aller Dreiecke auch noch Ähnlichkeit. Wir nehmen ein Stück Gummi und zeichnen unsere ähnlichen Dreiecke darauf (Bild 5).* Wenn man den Gummi in seiner Länge dehnt, so ändern sich zwar die Dreiecke; sie bleiben aber immer noch einander ähnlich (Bild 6). Somit ist die Ähnlichkeit eine Eigenschaft, die bei gleichmäßiger Ausdehnung in einer bestimmten Richtung erhalten bleibt. Wenn der Gummistreifen jedoch inhomogen (d. i. ungleichmäßig zusammengesetzt) ist oder nicht gleichmäßig ausgezogen wird, so kann aus dem Dreieck so etwas werden, wie im Bild 7 zu sehen ist. Seine Seiten sind schon nicht mehr geradlinig, doch irgend etwas Gemeinsames mit den vorangehenden Figuren ist geblieben. Dieses „Etwas" zu erfassen, wäre interessant.

Doch warum sollten wir den Gummi nur nach einer Richtung ausziehen? Wir nehmen ein Stück dünnen ebenen Gummi und zeichnen unsere ähnlichen Dreiecke darauf (Bild 8). Nun ziehen wir an verschiedenen Seiten unterschiedlich stark, so als ob wir z. B. eine Trommel bespannen wollten. Was wir erhalten, ist etwas, das der Zeichnung eines dreijährigen Kindes ähnelt (Bild 9). Eine gewisse Gemeinsamkeit zwischen den Bildern 8 und 9 ist aber immerhin erhalten geblieben. Die Figuren im Bild 9 sind gewissermaßen eine Karikatur der Dreiecke von Bild 8, aber auch sie haben Ecken, und die Dreiecke haben sich nicht etwa übereinandergeschoben. Und was wird, wenn wir auf dem Gummi zwei amöbenförmige (also unregelmäßig umrandete) Figuren aufmalen, eine kompakte und eine mit einem Loch in der Mitte (Bild 10), und den Gummi wieder „auf eine Trommel spannen"? Die „Amöben" bleiben „Amöben", doch auch das Loch bleibt; wenn wir nichts zerreißen, kann uns keine Dehnung davon befreien.

Nach diesen Beobachtungen müßten wir nun versuchen, zu verstehen, wodurch sich alle diese Transformationen des Gummistücks auszeichnen.

Mathematik und Kunst

Die Mathematik geht so ähnlich vor wie die Kunst; sie greift Erscheinungen der realen Umwelt auf, vereint analoge Ereignisse, Prozesse oder Fakten und verallgemeinert sie. Der bekannte Schauspieler und Künstler *Sergej W. Obraszow* führt manchmal Puppen vor. Hündchen, Kätzchen, Löwen oder Hasen veranschaulichen irgendwelche komischen, rührenden oder schlechte Eigenschaften der Menschen. Die Puppen werden durch Kugeln auf den Fingern oder einfach durch die Finger selbst dargestellt. Mit Hilfe dieser primitiven Mittel unterstreicht *S. Obraszow* das Markante im Benehmen und im Charakter der Menschen, in ihren Beziehungen zueinander. Nachdem die Kunst solcherart die Analogie gezeigt hat, hält sie ein und sagt den Zuschauern, daß sie sich den Rest selbst hinzudenken mögen.

Doch beim Mathematiker beginnt die Arbeit erst, wenn er in einer mitunter langen und schwierigen Beobachtung etwas Wichtiges oder Allgemeines bemerkt hat, das eine ganze Klasse von Erscheinungen charakterisiert. Er hat genau zu formulieren, welche Eigenschaften ihn interessieren, ein Schema zu schaffen und dieses genau zu studieren, um dann schließlich noch nachzuprüfen, ob die von ihm geschaffene Theorie der Wirklichkeit entspricht.

Stetige Verformungen

Im vorigen Beispiel haben wir festgestellt, daß bei Verformungen der Ebene wie etwa der willkürlichen Verzerrung eines Stücks Gummi gewisse Eigenschaften der Figuren erhalten bleiben. Der Mathematiker nennt derartige Verformungen stetige Transformationen. Das Wort stetig bedeutet dabei, daß nahe beieinander gelegene Punkte nach der Transformation wieder nahe beieinander liegen und daß eine Linie wieder in eine Linie übergeht. Es ist leicht einzusehen, daß zwei sich schneidende Linien sich auch nach der Transformation schneiden werden; sich nicht schneidende werden sich auch nach der Transformation nicht schneiden. Eine Figur mit einem Loch kann nicht in eine Figur ohne Loch oder eine mit zwei Löchern übergehen, denn dazu wäre eine Klebestelle oder ein Riß nötig, also eine Verletzung der Stetigkeit.

Diese Betrachtungen sind ein Ausgangspunkt der Topologie, einer Wissenschaft, die die Eigenschaften der geometrischen Figuren herausstellt, die sich bei stetigen Transformationen nicht ändern.

* Wir wollen hier davon absehen, daß das Gummistück etwas schmaler wird, wenn wir es in die Länge ziehen.

Bild 5

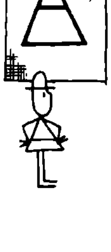


Bild 6

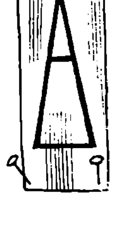


Bild 7

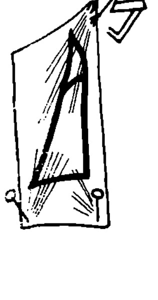


Bild 8

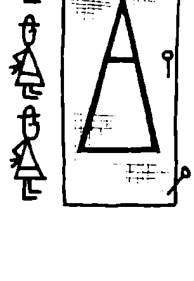


Bild 9

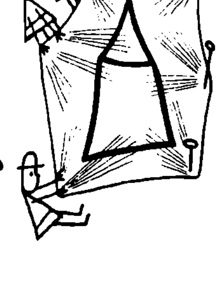
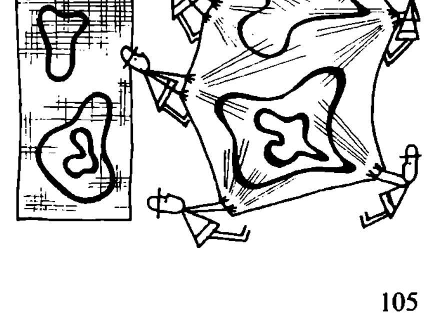


Bild 10



XV. Internationale Mathematikolympiade

Moskau 7. bis 17. 7. 1973

Aufgaben

1. Es sei O ein Punkt auf einer Geraden g. $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ seien Einheitsvektoren, wobei alle Punkte P_i in einer Ebene, die g enthält, auf derselben Seite von g liegen.
Man zeige: Ist n ungerade, so gilt
$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_n}| \geqq 1$$
(Dabei bedeutet $|\overrightarrow{OM}|$ die Länge eines Vektors $\overrightarrow{OM}$.) (ČSSR, 6 Punkte)

2. Man prüfe, ob es im dreidimensionalen Raum eine endliche Menge M von nicht in einer Ebene gelegenen Punkten gibt mit der Eigenschaft, daß für beliebige zwei Punkte $A, B \in M$ zwei andere Punkte $C, D \in M$ existieren, so daß die Geraden AB und CD parallel und verschieden sind.
(VR Polen, 6 Punkte)

3. Es seien a und b reelle Zahlen, für welche die Gleichung
$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$
wenigstens eine reelle Lösung hat. Man bestimme den kleinsten möglichen Wert der Summe a^2+b^2.
(Schweden, 8 Punkte)

4. Ein Soldat hat sich zu überzeugen, daß im Innern oder auf dem Rand eines Gebietes, das die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich des Randes) hat, keine Mine vorhanden ist. Der Wirkungsgrad seines Detektors ist gleich der halben Höhe des Dreiecks. Der Soldat beginnt seinen Weg in einem der Eckpunkte des Dreiecks.
Welchen Weg muß er wählen, damit die Länge seines Marsches zur Überprüfung des gesamten Gebietes am kürzesten wird?
(SFR Jugoslawien, 6 Punkte)

5. Gegeben sei eine nicht leere Menge G von nicht konstanten Funktionen f der Gestalt
$f(x)=ax+b$ (Nachweisen, daß wenn $a=1$, dann $b=0$.)
a, b sind reelle Zahlen mit $a \neq 0$, x ist eine reelle Variable. G habe die folgenden Eigenschaften:
(1) Ist $f, g \in G$, dann gilt auch $g \circ f \in G$ (wobei $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *ist*).
(2) Ist $f \in G$ mit $f(x)=ax+b$, dann gehört auch die inverse Funktion f^{-1} der Menge G an (wobei $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$ ist).
(3) Für jedes $f \in G$ gibt es ein x_f, so daß $f(x_f)=x_f$. Man zeige: Es gibt kein k, so daß $f(k)=k$ für alle $f \in G$.
(VR Polen, 6 Punkte)

6. Es seien n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben, sowie eine reelle Zahl q mit $0<q<1$. Man gebe solche n reellen Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ an, daß
a) $a_k<b_k$ für alle k von 1 bis n.
b) $q<\dfrac{b_{k+1}}{b_k}<\dfrac{1}{q}$ für alle k von 1 bis $n-1$.
c) $b_1+b_2+\ldots+b_n<\dfrac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$
gilt. (Schweden, 8 Punkte)

Eröffnung der XV. IMO in der 68. Oberschule in Moskau kurz vor Beginn der 1. Klausur

Preisträger der XV. IMO

Land	Punkte	1. Preis	2. Preis	3. Preis
Sowjetunion	254	3	2	3
Ungarische VR	215	1	2	5
DDR	188	—	3	4
VR Polen	174	—	2	4
Großbritannien	164	1	—	5
Frankreich	153	—	3	1
ČSSR	149	—	1	4
Österreich	144	—	—	6
SFR Jugoslawien	137	—	—	5
SR Rumänien	131	—	1	3
Schweden	99	—	1	1
Niederlande	96	—	—	2
VR Bulgarien	96	—	—	1
Finnland	86	—	—	2
Mongolische VR	64	—	—	1
Cuba	42	—	—	1*
	2192**	5	15	48

* Aus der Republik Kuba nahmen nur 5 Schüler teil.
** Insgesamt wurden von der Jury 2192 Punkte vergeben, das sind 43,8% der erreichbaren Gesamtpunktzahl (Zum Vergleich: XIII. IMO: 28%; XIV. IMO: 47%)
*** 1. Preis: 40 bis 35 Punkte; 2. Preis: 34 bis 27 Punkte; 3. Preis: 26 bis 17 Punkte.

DDR-Teilnehmer der XV. IMO

Elias Wegert 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

Albrecht Böttcher 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

Pawel Kröger 2. Preis
49. Oberschule Leipzig, Klasse 8

Gerd Weißenborn 3. Preis
EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 11

Reinhard Schuster 3. Preis
EOS „Hermann von Helmholtz", Leipzig, Klasse 11

Albrecht Heß 3. Preis
EOS Dresden-Süd, Klasse 11

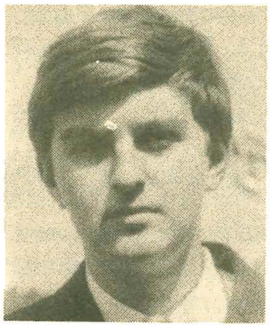
Jürgen Roßmann 3. Preis
EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg, Klasse 12

Helmut Roßmann
Antonin-Zapotocky-Oberschule, Neubrandenburg, Klasse 10

Einen ersten Preis erhielten:

1 Sergej Konjagin, Saratow (UdSSR)
2 Pawel Grosmann, Moskau
3 Georgy Jegorow, Moskau
4 János Kollár, Budapest
5 David Goto, London

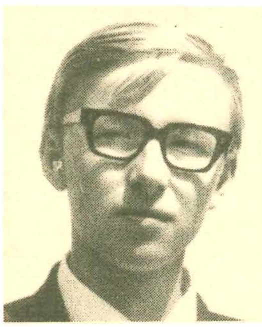
1



2

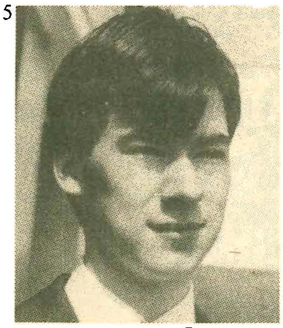
Mitglieder der Jury bei der Korrektur der Lösungen

3



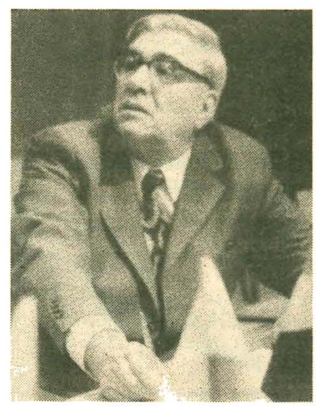
4

5



Prof. Ottescu, stellv. Delegationsleiter der rumänischen Mannschaft, zeichnete für *alpha* die beiden Mädchen, welche an der XV. IMO teilnahmen (bei 125 Schülern):
Joke Brinkhuis, Gorinchem, Niederlande (links) und Gudrun Brattström, Helsingborg, Schweden

Wettbewerbsatmosphäre



Prof. Dr. Alexej Markuschewitsch nimmt im Pionierpalast an den Leninbergen die Auszeichnung der Preisträger vor

DDR-Mannschaft

Fakten — Zahlen — Fakten

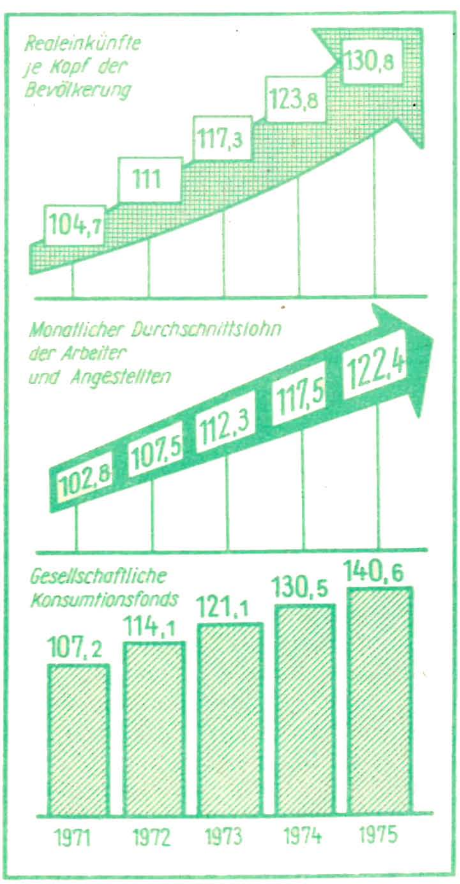
- Die beiden Klausuren fanden am 9. und 10. Juli 1973 in der 68. Schule Moskaus statt (reine Arbeitszeit: je 4 Stunden).
- *Sergej Konjagin* (UdSSR) bereits 1. Preisträger der XIV. IMO, erreichte als einziger Schüler die volle Punktzahl (40 Punkte). Seine der Redaktion *alpha* überreichte Aufgabe (siehe S. 114) wurde gleichzeitig als eine der Aufgaben der Moskauer Stadtolympiade gestellt.
- Die XVI. IMO findet vom 4. bis 17. 7. 1974 in der DDR statt (Klausuren an der Päd. Hochschule in Erfurt, Abschlußfeier in der Hauptstadt der DDR).

Porträt in Zahlen

Die Wirtschaft der UdSSR im neunten Planjahrfünft

Industrieproduktion
1970: 69,1 Mrd. Rubel 1975: 528—544 Mrd. Rubel
Landwirtschaft
1970: 80,3 Mrd. Rubel 1975: 96—98 Mrd. Rubel
Elektroenergie
1970: 740 Mrd. kWh 1975: 1030—1070 Mrd. kWh
Erdöl
1970: 349 Mio t 1975: 480—500 Mio t
Erdgas
1970: 198 Mrd. m^3 1975: 300—320 Mrd. m^3
Steinkohle
1970: 624 Mio t 1975: 685—695 Mio t
Stahl
1970: 116 Mio t 1975: 142—150 Mio t

Entwicklung des Lebensniveaus des Sowjetvolkes
(in Prozent zum Jahre 1970)



Plaste, synthetische Harze
1970: 1,672 Mio t 1975: 3,457 Mio t
Chemiefasern
1970: 623000 t 1975: 1,05—1,1 Mio t
Pkw
1970: 344000 Stück 1975: 1,2—1,3 Mio Stück

Leichtindustrie, Kultur- und Haushaltwaren
1970: 76,5 Mrd. Rubel 1975: 112,4 Mrd. Rubel
Möbel
1970: 2,8 Mrd. Rubel 1975: 4,55 Mrd. Rubel

Haushaltkühlschränke
1970: 4,140 Mio St. 1975: 6,686 Mio St.
Stoffe
1970: 8,9 Mrd. m^2 1975: ca. 11 Mrd. m^2

Lustige Statistik

In fünf Studienjahren verbraucht ein Chemiestudent im Laboratorium durchschnittlich 100 Kilo chemischer Reagenzien.
In einem Jahr legt ein Student im Universitätsbereich im Durchschnitt 1000 Kilometer zurück.
An der Hochschule muß der Student mindestens 20000 Buchseiten durchlesen.
In fünf Studienjahren besucht ein Student im Durchschnitt 400 Mal das Kino, wo er 1500 Kilometer Film sieht. Der Student gibt doppelt soviel Geld für Piroggen (15000 Stück) oder für Kefir (über 1000 Flaschen) aus wie für den Kinobesuch.
In fünf Studienjahren verbraucht ein Student mehr als zwei Pud (32 Kilo) Salz, rund 200 Kilo Zucker, rund eine Tonne Brot und trinkt eine Zisterne Wasser aus. Diese Nahrung enthält 3 bis 4 Kilo Phosphor, etwa anderhalb Kilo Kalzium und fast ebenso viel Magnesium.

Schule in Zahlen

In der UdSSR gibt es heute über 220 000 allgemeinbildende Schulen, mehr als 4 200 Fachschulen und über 800 Hochschulen und Universitäten.

Seit Gründung der UdSSR hat sich die Zahl der sowjetischen Wissenschaftler alle sechs bis sieben Jahre verdoppelt (im gleichen Zeitraum in den USA alle zehn, in Westeuropa alle fünfzehn Jahre).

Vor der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution ging im zaristischen Rußland nur jedes fünfte Kind entsprechenden Alters zur Schule. Fast 75 Prozent aller Männer und Frauen waren des Lesens und Schreibens unkundig. Noch schlechter war die Situation in den kolonial unterdrückten Gebieten: etwa 97 Prozent der Kirgisen, Turkmenen, Tadschiken, Usbeken und Jakuten waren Analphabeten, 48 nationale Minderheiten besaßen nicht einmal eine eigene Schriftsprache. Die Sowjetmacht sorgte auch im Bildungsbereich für eine schnelle Veränderung. Für alle Kinder in der UdSSR soll bis 1975 der Übergang zur allgemeinen Zehnklassen-Oberschulpflicht abgeschlossen werden.

Gegenwärtig arbeiten in den sowjetischen Schulen etwa drei Millionen Lehrer aller Nationalitäten. Allein in diesem Jahr wurden ihre Reihen um 150 000 Absolventen von Hochschulen und pädagogischen Lehranstalten verstärkt. 1,1 Millionen künftige Lehrer bereiten sich derzeit auf ihre Arbeit in der Praxis vor.

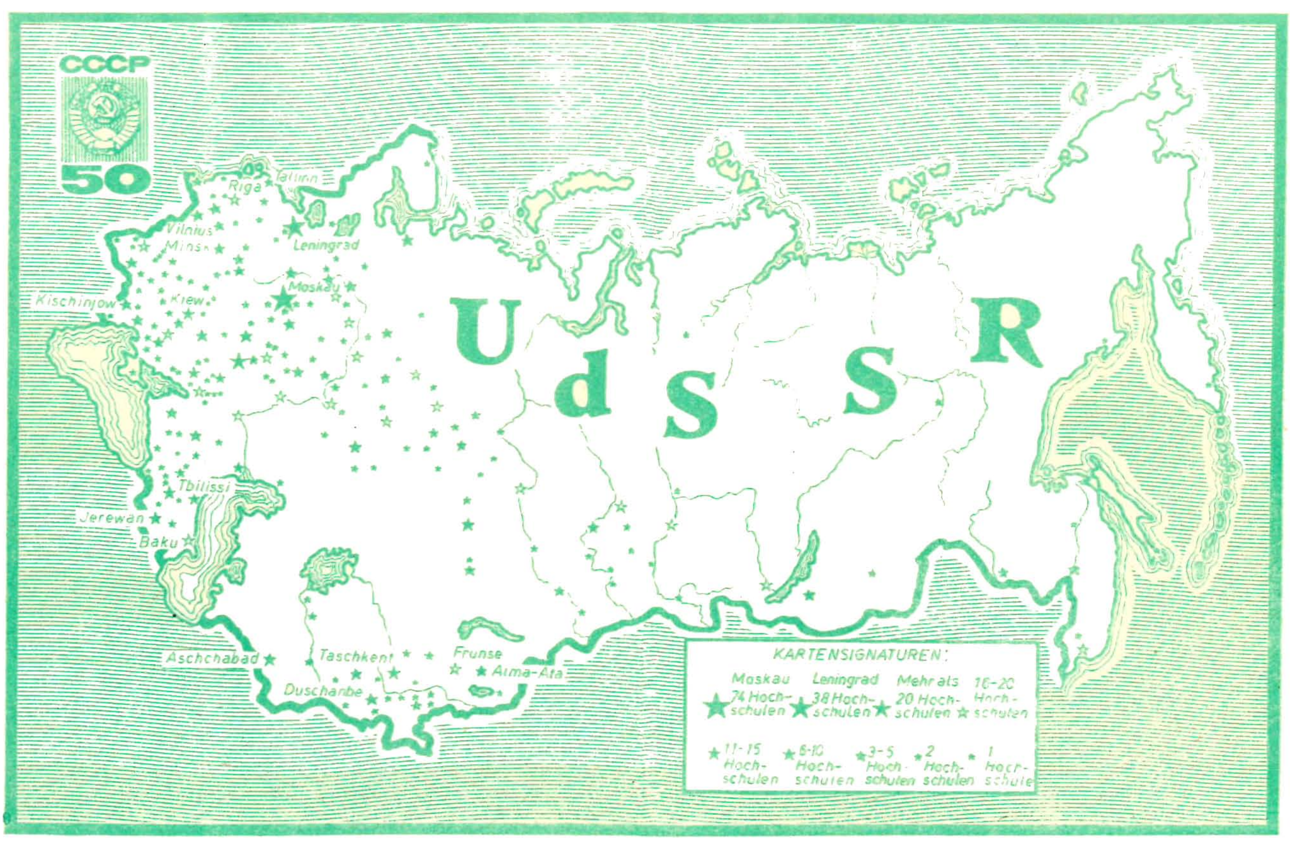
In der UdSSR gibt es etwa 3 600 Pionierpaläste und -häuser, 560 Stationen Junger Techniker und 330 Stationen Junger Naturforscher. Allein in diesem Jahr erhöhte sich die Platzkapazität an sowjetischen Schulen um 1,5 Millionen.

Studenten in der Sowjetunion

Die Karte der UdSSR ist mit Sternen versehen. Jeder kleine Stern bedeutet eine Hochschule, der größte Stern in Moskau symbolisiert 74 Hochschulen. Insgesamt zählen wir 247 Sterne, d. h. 247 „Studentenstädte“ mit 805 Hochschulen.

Vor reichlich 200 Jahren, als es längst die Sorbonne und Cambridge gab, besaß Rußland keine einzige Hochschule. Wer eine Hochschule besuchen wollte, mußte nach Europa gehen. Die erste Universität wurde am 12. Januar 1755 in Moskau eröffnet. 1915 gab es im Russischen Reich nur 105 Hochschulen mit insgesamt 127 000 Studenten, hauptsächlich aus vermögenden Familien, da die Studiengelder für Werktätige zu hoch waren. So sah das Erbe aus, das die junge Sowjetrepublik vor 50 Jahren antrat.

Heute studieren in der Sowjetunion fünf Millionen in 805 Hochschulen. 94 % von ihnen sind Mitglied des 27 Millionen zählenden Leninschen Kommunistischen Jugendverbandes.



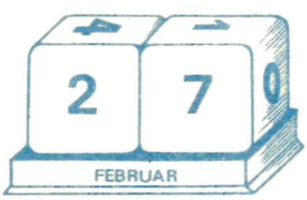
In freien Stunden alpha heiter

Letzte Chance, die Zwischenprüfung zu bestehen!

K. Muschkin, Moskau

Kalender aus Würfeln

Auf dem Tisch der Redaktion Quant steht ein Kalender, wie ihn das Bild zeigt. Er besteht aus zwei Würfeln. Überlegt, wie er angefertigt wurde: In welcher Weise muß man die Grundziffern auf die Seitenflächen der beiden Würfel kleben, damit man jedes beliebige Monatsdatum darstellen kann. Es ist offensichtlich, daß es mehrere Lösungen gibt. Was meint ihr wohl, wie viele?

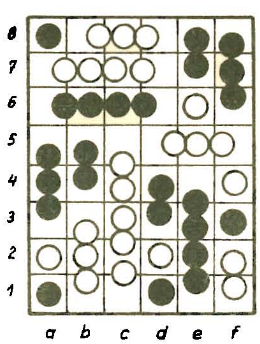


Kamsolow

Für dieses Spiel, dem wir den Namen nach seinem Erfinder *Juri Kamsolow* (UdSSR) gaben, wird ein 6×8-Felder-Brett mit 24 weißen und schwarzen Steinen benötigt. Es kann zu zweit und zu viert gespielt werden.

ZU ZWEIT. Wer beginnt, wird ausgelost.

Man setzt abwechselnd jedesmal zwei Steine der eigenen Farbe auf beliebige Felder. Jeder bemüht sich, waagerechte und senkrechte Reihen zu bilden sowie den Gegner, der die gleiche Absicht hat, daran zu hindern. Je länger die Reihe wird, um so besser ist die Position.

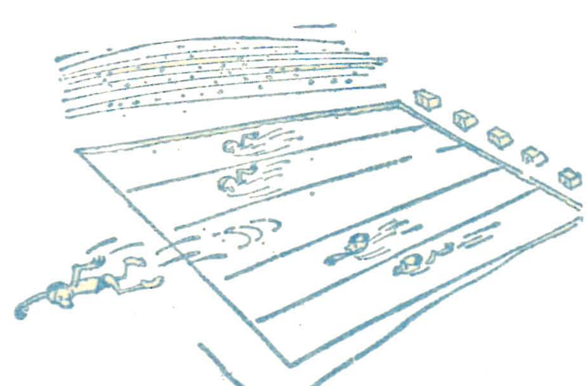


Sind alle Felder besetzt, werden die Punkte errechnet. Wer die meisten errang, hat gewonnen. Für die kleinste Reihe aus zwei gleichfarbigen Steinen werden 4 Punkte, für die Dreier 9, für einen Vierer 16 Punkte usw. vergeben. Vereinzelte Steine zählen nicht. Steine, die zugleich in zwei Reihen stehen, dürfen nur einmal berücksichtigt werden. Die Steine sind so aneinanderzureihen, daß die Höchstpunktzahl herauskommt. Der Anschaulichkeit halber rückt man die Steine am besten zusammen; siehe Abbildung, die eine mögliche Schlußstellung zeigt. Wie man sieht hat Weiß einen Fünfer, einen Vierer, drei Dreier und einen Zweier. Das ergibt $25+16+(3\cdot 9)+4=72$ Punkte. Die Steine auf den Feldern a2, d2, e6 und f3 sind „Isolanis“ und fallen nicht unter die Wertung. Schwarz schaffte $(16\cdot 2)+(9\cdot 2)+(4\cdot 3)=62$ Punkte. Falls sich gleiche Punktezahlen ergeben, ist die Partie remis.

ZU VIERT. Es spielen zwei gegen zwei mit je 12 Steinen. Die Paare sitzen einander gegenüber und setzen reihum. Auch hier setzt jeder Spieler wieder zwei Felder. Punkterechnung wie beim Spiel zu zweit.

Falls weder Brett noch Steine vorhanden sind, nimmt man einfach Pappe oder einen Bogen Papier und zeichnet den Spielplan mit 48 Feldern auf, und anstelle von Spielsteinen werden Kreise (Weiß) und Kreuze (Schwarz) eingetragen. Und weil man sie am Ende nicht zusammenrücken kann, streicht man einfach die für die Wertung in Betracht kommenden Gewinnreihen durch.

aus: NBI 19/73



Alexander Aljoschitschew

Aus einem Bericht eines Korrespondenten der Literarischen Zeitung

„Erst drei Wochen sind seit dem Beginn des Jahres 1973 vergangen, aber der große elektronische Rechenautomat in unserem wissenschaftlichen Zentrum hat schon mit einer Genauigkeit von 10^{-9} ausgerechnet, daß das nächste Jahr die Jahreszahl 1974 tragen wird."

mitgeteilt von Prof. Ju. I. Sokolowskij, Nowosibirsk

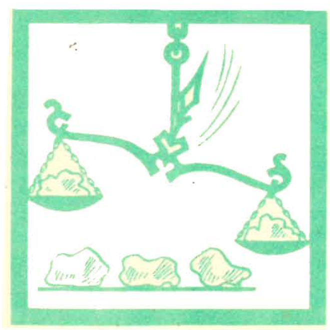
Rational oder nicht?

Die Summe
$S=10^{-1}+10^{-4}+10^{-9}+\ldots+10^{-n^2}+\ldots$
hat unendlich viele Summanden. Ist S eine rationale oder eine irrationale Zahl?

Prof. Ju. I. Sokolowskij, Nowosibirsk

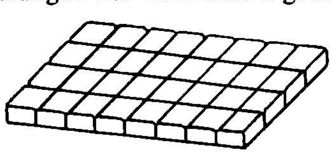
Wir wägen

Wir haben fünf Kieselsteine verschiedenen Gewichts und eine Hebelwaage. In jede Wägeschale paßt nur ein Kieselstein. Es sollten nicht mehr als 7 Wägungen vorgenommen werden, um die Kieselsteine ihrem Gewicht nach zu ordnen.



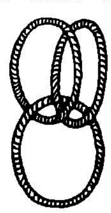
Eine Tafel Schokolade

Wie viele Male muß man mindestens brechen, um die Tafel Schokolade in die auf dem Bild angegebenen Teile zu zerlegen? Dabei darf nur gradlinig in den Vertiefungen der Schokolade gebrochen werden.



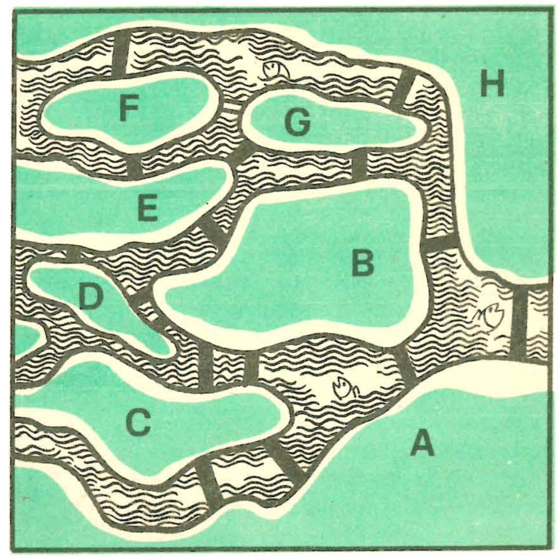
Ein Schnitt genügt

Auf dem Bild sind drei Ringe dargestellt. Wenn man den oberen Ring zerschneidet, sind alle Ringe voneinander getrennt, zerschneidet man einen der unteren, bleiben die anderen aneinandergekettet. Versucht die drei Ringe so zu verketten, daß beim Zerschneiden eines beliebigen von ihnen alle drei voneinandergetrennt werden!



Ein interessanter Spaziergang

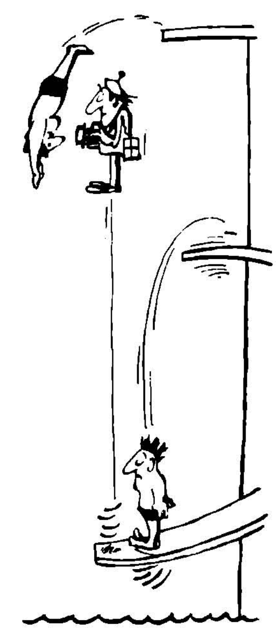
Vor euch seht ihr einen Stadtplan. Wie kann man einen Spaziergang so durchführen, daß man über jede Brücke genau einmal geht?



Modell des Fernsehturms

Der Fernsehturm in Ostankino hat eine Höhe von 530 m und wiegt 30 000 Tonnen. Wieviel würde ein genaues Modell dieses Turmes wiegen, das eine Höhe von 53 cm besitzt?

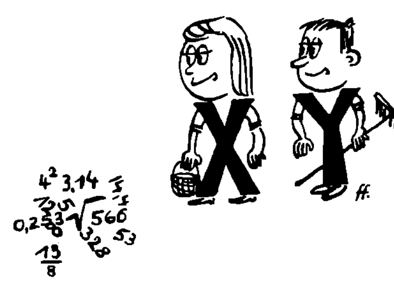
Kopfsprung



Die Schülerzeitschrift *Quant* übernahm diese Vignette eines ausländischen Karikaturisten aus „Sowjetski Sport" — Der Künstler schrieb unter seine Zeichnung: Ohne Worte. Wir (d. h. *Quant*) schlagen eine andere Unterschrift vor:
Ist das möglich? Geht das? — Versucht, die Karikatur unter diesem Gesichtspunkt zu beurteilen!

W. Alexandrow, Moskau

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 6. Januar 1974

Die folgenden Aufgaben für die 5. bis 10. Klasse stellen einerseits eine Auswahl aus den Aufgaben für die II. Stufe der Mathematischen Schülerolympiade 1973 der UdSSR dar, andererseits sind die der sowjetischen Populärwissenschaftlichen Mathematisch-physikalischen Zeitschrift *Quant* entnommen, insbesondere der Rubrik *Quant für jüngere Schüler*. Wir danken der Leitung der *Sowjetischen Schule* in Altenburg und der Redaktion der Zeitschrift *Quant*, die uns dieses Material zur Verfügung stellten.

▲5▲1095 Gegeben seien drei Teller mit Nüssen. Auf dem ersten Teller liegen 22, auf dem zweiten 14 und auf dem dritten 12 Nüsse. In jeweils einem Schritt dürfen von einem dieser Teller genau soviele Nüsse in einen anderen Teller gelegt werden, wie dort bereits vorhanden sind. Wie kann man in nur drei Schritten erreichen, daß auf allen drei Tellern gleichviel Nüsse liegen?

▲5▲1096 Es ist zu zeigen, daß die Summe von vier beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine Primzahl sein kann!

W 5 ▪ 1097 Ein Becken mit einer horizontalen Bodenfläche von 1 Hektar enthält 1 Million Liter Wasser. Läßt sich in diesem Becken ein Schwimmwettkampf austragen?

W 5 ▪ 1098 Zwei Familien wollen sich 16 l Kwaß teilen, der sich in einem Faß befindet. Zum Abfüllen stehen ihnen aber nur zwei Eimer mit dem Fassungsvermögen von 6 l bzw. 11 l zur Verfügung. Auf welche Weise ist das Getränk umzufüllen, damit jede Familie 8 l erhält?

W 5 * 1099 „Wenn ich für jeden meiner Enkel zwei Würstchen heiß mache“, dachte Oma, „dann bleiben vier Würstchen übrig. Wenn aber jeder drei Würstchen erhalten soll, müßte ich erst noch ein Würstchen zukaufen.“ Wieviel Enkel hat diese Großmutter, und wieviel Würstchen sind vorrätig?

W 5 * 1100 Unter den Teilnehmern einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik befinden sich genau dreimal soviel Jungen wie Mädchen. Als Ursula einmal fehlte, hatte ein Arbeitsgemeinschaftsteilnehmer Uwe als Gast mitgebracht. An diesem Tage waren viermal soviel Jungen wie Mädchen anwesend. Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nehmen regelmäßig an der Arbeitsgemeinschaft teil?

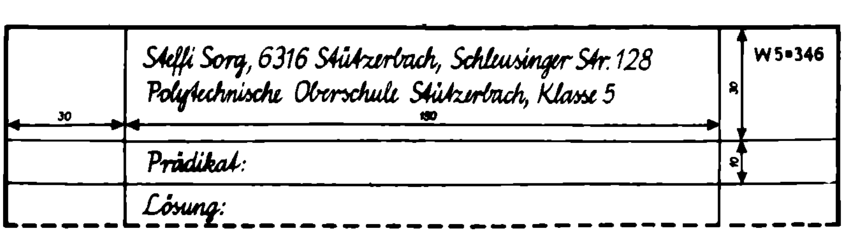
▲6▲1101 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die größer als 3 ist und die bei Division durch 4, 17 bzw. 29 stets den gleichen von Null verschiedenen Rest ergibt!

▲6▲1102 Die Maßzahl des Umfangs eines Rechtecks *ABCD* (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhalts (gemessen in cm^2). Die Seitenlängen dieses Rechtecks (gemessen in cm) seien ferner ganzzahlig. Wieviel mögliche Lösungen gibt es?

W 6 ▪ 1103 Ein Maultier und ein Pferd trugen einige Säcke. Das Pferd ermüdete schneller und sagte zum Maultier: „Hilf mir bitte, nimm einen Sack von meinem Rücken und trage du ihn weiter!“ „Würde ich das machen,“ erwiderte das Maultier, „so wäre meine Last doppelt so groß wie deine. Wenn du mir aber einen Sack abnimmst und ihn trägst, werden wir gleiche Lasten tragen.“ Wieviel Säcke trug das Maultier, wieviel das Pferd?

W 6 ▪ 1104 Zwei Seiten eines Dreiecks *ABC* haben die Seitenlängen 5 cm bzw. 2 cm. Die Länge der dritten Dreieckseite (gemessen in cm) sei ebenfalls ganzzahlig. Welche Länge könnte die dritte Seite haben?

W 6 * 1105 Es ist zu untersuchen, ob die Zahl $z = 10^{1973} + 2$ durch 3 teilbar ist. Die Antwort ist zu begründen.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ▪ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

W 6 * 1106 Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit dem spitzen Winkel $\sphericalangle BAD=\alpha=60°$. Eine Gerade g schneide die Seite $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt M und die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt N so, daß $\overline{BM}+\overline{BN}=\overline{AB}=a$ gilt. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck MND gleichseitig ist!

▲7▲1107 Bezogen auf seine Masse enthält Meerwasser 5 % Salz. Mit wieviel Kilogramm Süßwasser muß man 80 kg Meerwasser mischen, damit der Salzgehalt der Mischung 2 % beträgt?

▲7▲1108 Für die Fahrt auf dem Dnepr von Kiew nach Dnepropetrowsk benötigt ein Schiff 48 Stunden, für die Rückfahrt hingegen 72 Stunden. In wieviel Stunden würde ein Floß von Kiew nach Dnepropetrowsk treiben? (Dabei wird vorausgesetzt, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Dnepr und die Eigengeschwindigkeit des Schiffes konstant sind.)

W 7 ■ 1109 Ein Schüler zählt sein restliches Taschengeld und stellt fest, daß er noch über einen Geldbetrag von 46 Kopeken verfügt, der sich aus genau 20 Münzen und zwar aus 3-Kopeken-Münzen und 1-Kopeken-Münzen zusammensetzt. Weise nach, daß diesem Schüler beim Zählen des Geldes ein Fehler unterlaufen ist! Kann man diese Feststellung auch treffen, wenn er 48 Kopeken oder 49 Kopeken gezählt hätte? Welche Geldbeträge lassen sich aus zwanzig Münzen, unter denen sich nur 3-Kopeken-Münzen und 1-Kopeken-Münzen befinden, bilden?

W 7 ■ 1110 Eine LPG verkauft in den Monaten von Juli bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel ist im September um 20 % niedriger als im Juli, im November hingegen um 20 % höher als im September. Sind die Äpfel im November billiger, gleich teuer oder teurer als im Juli? Falls die Äpfel im November billiger oder teurer als im Juli sind, ist anzugeben, um wieviel Prozent.

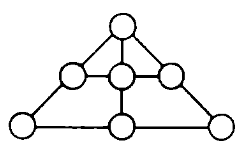
W 7 * 1111 In einem Dorf in der Nähe der Bahnstation D. befindet sich ein Volkseigener Betrieb. Der Direktor dieses Betriebes, der in L. wohnt, fährt an jedem Arbeitstag mit der Bahn von L. nach D. und kommt dort pünktlich um 7.00 Uhr an. Ein Dienstwagen fährt ihn um 7.00 Uhr von D. direkt in den Betrieb. An einem Tage erreichte der Direktor D. bereits um 6.00 Uhr. Da er vergessen hatte, den Kraftfahrer zu verständigen, ging er zu Fuß in seinen Betrieb. Er begegnete unterwegs dem Dienstwagen, der ihn unverzüglich in den Betrieb brachte, wo er genau 12 Minuten früher als gewöhnlich ankam. (Dabei wird vorausgesetzt, daß der Kraftfahrer auch an diesem Tage zu derselben Zeit von dem Betrieb abfuhr und daß die Geschwindigkeit des Kraftwagens stets gleichbleibend war. Ferner fuhr der Kraftfahrer an den anderen Tagen so, daß er genau um 7.00 Uhr am Bahnhof D. eintraf.) Zu welchem Zeitpunkt begegnete der Direktor dem Dienstwagen?

W 7 * 1112 Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=6$ cm und ein innerer Punkt E der Seite $\overline{AB}$, für den $\overline{EB}=2$ cm gilt. Dem Quadrat ist ein gleichseitiges Dreieck EFG so einzubeschreiben, daß auch die Eckpunkte F und G dieses Dreiecks auf den Seiten des Quadrates liegen. Die Konstruktion ist zu begründen.

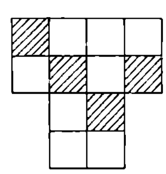
▲8▲1113 Wieviel natürliche Zahlen bis zu der Zahl 1973 sind durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar?

▲8▲1114 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Schreibt man links zu der dreistelligen Zahl drei weitere Grundziffern hinzu, so erhält man das Quadrat dieser Zahl.

W 8 ■ 1115 In jeden der Kreise der abgebildeten Figur soll genau eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, daß alle Summen von je drei Zahlen, die auf einer Geraden liegen, gleich sind.



W 8 ■ 1116 Die abgebildete Figur, die aus 12 Quadraten besteht, soll so in genau vier, von Quadratseiten begrenzte kongruente Teilfiguren zerlegt werden, daß jede Teilfigur genau ein schraffiertes Quadrat enthält.



W 8 * 1117 Kann man 50 Steine, deren Massen 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 466 kg, 468 kg betragen, mit sieben Dreitonnern befördern? Dabei darf jedoch jeder der sieben Lastkraftwagen mit höchstens 3 t beladen werden; eine Überschreitung dieser Belastung — auch nur um wenige Kilogramm — ist unzulässig.

W 8 * 1118 Drei Seeräuber wollen die Beute teilen, die aus 10 Piastern, 10 Dublonen und einem Faß Wein besteht. Sie haben zwar Gefäße zur Abfüllung und genauen Aufteilung des Weines, aber, o weh! jeder Seeräuber hat seine eigene Meinung darüber, wieviel Wert der Wein im Verhältnis zu den Piastern bzw. Dublonen beträgt. Alle sind sich aber darüber einig, daß das Faß Wein mehr als 4 Piaster und mehr als 4 Dublonen kostet. Es ist zu beweisen, daß die Seeräuber die Beute so teilen können, daß jeder von ihnen einen Anteil erhält, der nach seiner Ansicht keinen geringeren Wert hat als der Anteil eines jeden anderen.

▲9▲1119 Man zerlege in Faktoren
$(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3$.

▲9▲1120 Auf welche Grundziffern kann das Quadrat einer zweistelligen natürlichen Zahl enden, wenn dieses Quadrat eine ungerade Anzahl von Zehnern enthält?

W 9 ■ 1121 Sechs Schüler, die an einem Subbotnik teilnahmen, wurden in drei Brigaden eingeteilt. Die Brigadiere waren Wolodja, Petja und Wasja. Wolodja und Mischa erhielten 2 m lange Holzstämme, Petja und Kostja $1\frac{1}{2}$ m lange, aber Wasja und Aljoscha 1 m lange. Sie hatten jeden Stamm in $\frac{1}{2}$ m lange Stämme zu zersägen. An der Wandzeitung wurde mitgeteilt, daß der Brigadier Lawrow mit Roshkow insgesamt 26 Stämme von je $\frac{1}{2}$ m Länge fertiggestellt hatte, der Brigadier Galkin mit Komkow 27 Stämme und der Brigadier Koslow mit Jewdokimow 28 Stämme. Wie lautet der Vorname Komkows?

W 9 ■ 1122 Der Flächeninhalt eines Rechtecks sei gleich der doppelten Differenz der Flächeninhalte zweier gleichseitiger Dreiecke, deren Seiten ebenso lang wie zwei anliegende Seiten dieses Rechtecks sind. Es ist das Verhältnis des Umfanges des Rechtecks zu dem Umfang des größeren der beiden gleichseitigen Dreiecke zu ermitteln.

W 9 * 1123 Es ist zu entscheiden, ob die folgende Behauptung richtig ist:
Der Rest bei der Division des Quadrats einer Primzahl, die größer als 3 ist, durch 24 ist stets gleich 1.

W 9 * 1124 Nach einer Kinoveranstaltung fuhren mehr als 150 Zuschauer mit 6 Autobussen nach Hause. In jedem Autobus waren gleichviele Zuschauer. Die anderen Kinobesucher — es waren genau um 15 % mehr — gingen zu Fuß nach Hause.
Wieviel Zuschauer waren im Kino, wenn das Kino nicht mehr als 400 Plätze hatte und alle Zuschauer einen Platz erhielten?

▲10/12▲1125 Man untersuche, ob die Zahl

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

eine rationale Zahl ist, und gebe, falls das zutrifft, diese Zahl an.

Eine Aufgabe von
Sergej Konjagin

Der sowjetische Student Sergej Konjagin, Saratow, UdSSR, der bei der XIV. Internationalen Mathematikolympiade 1972 die volle Punktzahl erzielte und einen I. Preis erhielt, stellt uns die folgende interessante, aber schwierige Aufgabe zur Verfügung:

▲1082▲ Gegeben sei ein gleichseitiges konvexes Fünfeck *ABCDE*.
a) Man beweise, daß ein solches Fünfeck stets zwei an derselben Seite liegende Innenwinkel hat, die größer als 60° und kleiner als 120° sind.
b) Man beweise ferner, daß stets ein gleichseitiges Dreieck mit den folgenden Eigenschaften existiert:
Eine Seite dieses gleichseitigen Dreiecks fällt mit einer Seite des Fünfecks *ABCDE* zusammen, und der dieser Seite gegenüberliegende Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks liegt im Innern des Fünfecks.

▲10/12▲1126 Es seien x und y reelle Zahlen mit $x>y>0$. Man beweise, daß dann stets die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:
$$\frac{x^4-y^4}{4y^3}>x-y>\frac{x^4-y^4}{4x^3}.$$

W 10/12 ■ 1127 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung
$$|2x-3|+|x-3|-|4x-1|=0$$
zu ermitteln.

W 10/12 ■ 1128 Es sei $\log_{14}7=a$ und $\log_{14}5=b$. Es soll die Zahl $z=\log_{35}28$ durch die Zahlen a und b ausgedrückt werden.

W 10/12 * 1129 Die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks *ABCD* seien
$$\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{CD}=c,\ \overline{DA}=d.$$
Es soll die Länge der Diagonale $\overline{BD}$ dieses Sehnenvierecks ermittelt werden.

W 10/12 * 1130 Man beweise, daß die natürliche Zahl
$(10^{1973}+10^{1972}+\ldots+10+1)\cdot(10^{1974}+5)+1$
gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Vorliegende Aufgaben wurden sowjetischer Literatur entnommen

Der Repetitor

Aus der sowjetischen Zeitschrift:

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!
МОСКОВСКИЙ КОМСОМОЛЕЦ
ОРГАН МК и МГК ВЛКСМ

Und hier richtet sich die bekannte Zeitung *Der Moskauer Komsomolze* an Euch, liebe Schüler.
Nur ein leichtfertiger Mensch kann glauben, daß ja noch viel, viel Zeit bis zur Abschlußprüfung sei. Es ist allgemein bekannt, daß das letzte Vierteljahr bei weitem nicht so lang ist, wie es erscheint. April, Mai — und im Juni sind schon Prüfungen. Na und dann beginnt ein ruheloses Leben. Viele von Euch möchten Abiturienten werden. Welch beunruhigender Titel! Stöße von Büchern, Konspekten, vorbereitende Übungen ..., und vielleicht hilft dies alles gar nichts, denn kann man alle verzwickten Fragen kennen, die der Prüfende stellt?
„Es ist gut", behauptet er, „daß Du alle Formeln kennst, fehlerfrei schreibst, Dich auszudrücken vermagst. Aber wie ist Dein logisches abstraktes Denken entwickelt?" Hier liegt möglicherweise der Hund begraben. Damit Ihr nicht den Kopf verliert, sondern gewappnet in die Prüfungen geht, eröffnet der „Altersgenosse" eine neue Rubrik, den „Repetitor". Wir hoffen, daß Aufgaben und Fragen, die hier veröffentlicht werden, Euch aus der schwierigen Lage heraushelfen, in die Euch der Prüfende bringen kann. Es versteht sich, daß wir keine volle Garantie geben können. Diejenigen, die als erste nicht nur die richtigen Antworten, sondern auch den Lösungsweg einsenden, werden in unserer nächsten Ausgabe genannt. Auf diejenigen, die die einfallsreichste, eine originelle oder elegante Lösung finden, warten unsere Preise.

Aufgaben (Auswahl)

▲1▲ Wie gehen die Uhren? „An einem der letzten Tage des Aufenthaltes im Erholungsheim", erzählte mir ein Freund, „hörten wir nach dem Abendbrot das Zeitzeichen. Es war genau 19.00 Uhr. Auf meiner Uhr war es fünf vor 19.00 Uhr. Aber die Uhr geht vor, wußte ich, und zum Zeitpunkt meiner Abfahrt wird sie die genaue Abfahrtszeit des Zuges anzeigen. Die Uhr meiner Nachbarin war vier Minuten vor 19.00 Uhr. Ihre Uhr geht am Tag drei Minuten mehr vor als meine," setzte mein Freund fort. „Die Nachbarin mußte den gleichen Zug wie ich benutzen, nur einen Tag eher. Ihre Uhr wird zum Zeitpunkt ihrer Abfahrt auch die genaue Zeit angeben. Wieviel Minuten geht jede der beiden Uhren am Tage vor?

▲2▲ Von Moskau nach Bykow fuhr ein Radfahrer. 25 Minuten später startet ein Auto, das den Radfahrer nach 15 Minuten einholt. Es fuhr bis Bykow und kehrte sofort wieder um, und 55 Minuten nach der Abfahrt aus Moskau traf es denselben Radfahrer wieder. Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit des Radfahrers und des Autos, wenn die Entfernung von Moskau bis Bykow 34 km beträgt.

▲3▲ Finde den Familiennamen! Sidorow, Iwanow und Petrow sind Kapitän, Maschinist und Steuermann eines Passagierschiffes. Unter den Passagieren befinden sich auch ein Sidorow, Iwanow und Petrow. Über sie ist bekannt:
a) Der Passagier Sidorow wohnt in Ismailow.
b) Der Maschinist wohnt in Kunzew.
c) Der Passagier Petrow hat längst vergessen worin sich Kosinus und Sinus unterscheiden.
d) Der Fahrgast, der den gleichen Familiennamen wie der Maschinist hat, wohnt in Malachowok.
e) Einer der Passagiere, ein bekannter Physiker, wohnt in derselben Straße wie der Maschinist.
f) Während des Aufenthaltes des Passagierschiffes spielen die beiden Besatzungsmitglieder Iwanow und der Steuermann oft Schach. Wie heißt der Kapitän mit Familiennamen?

▲4▲ Am Bau eines Hauses nehmen Zimmerleute und Maler teil. Beide erhielten ein und dieselbe Summe Arbeitslohn, aber es waren zwei Maler mehr als Zimmerleute, und deshalb erhielt jeder Maler einen Rubel mehr als ein Zimmermann. Wieviel Zimmerleute und wieviel Maler waren es, wenn bekannt ist, daß die Summe der Rubel, die ihnen allen gezahlt wurde, um 26 größer war, als das Dreifache der Anzahl aller Arbeiter?

Lösungen

Lösungen zu den Aufgaben der XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (aus Heft 4/73)

1. Teil a) und b) löste der Schüler Michael Schaper, Magdeburg, so: Die Summe der Außenwinkelgrößen in einem konvexen Vieleck ist 360°. (Ein einmaliger Umlauf auf den Kanten des Vielecks bewirkt z. B. eine einmalige volle Umdrehung.)

Sind x Innenwinkel spitz, so haben die Größen der entsprechenden Außenwinkel eine Summe, die größer als $x \cdot 90°$ ist, während die Summe der übrigen Außenwinkelgrößen jedenfalls positiv ist. Daher folgt

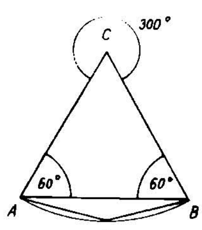
$$x \cdot 90° < 360°, \text{ d. h. } x < 4.$$

Somit ist für a) gezeigt, daß es eine größte Zahl m der behaupteten Art gibt, und zwar ist $m \leqq 3$.

Da es außerdem Vielecke (z. B. Dreiecke) mit genau 3 spitzen Innenwinkeln gibt, lautet die Antwort für b): $m = 3$.

Folgendes Beispiel eines Schülers zeigt, daß Frage c) zu bejahen ist:

In einem gleichseitigen Dreieck ABC wird ein Kreisbogen um C durch die beiden Punkte A und B gelegt. Ist P ein Punkt dieses Bogens, so gilt nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz $\sphericalangle \overline{APB} = 150°$. Dann sind (in $\triangle ABP$) $\sphericalangle \overline{BAP}$ und $\sphericalangle \overline{ABP}$ kleiner als 30°, und daher $\sphericalangle \overline{CAP}$ und $\sphericalangle \overline{CBP}$ spitz.



Legen wir also die $n-3$ Punkte $P_1, \ldots, P_{n-3}$ auf den Kreisbogen $\widehat{AB}$, so hat das n-Eck $BCAP_1 \ldots P_{n-3}$ genau 3 spitze Winkel. ($\sphericalangle CAP_1$ und $\sphericalangle CBP_{n-3}$ sind neben $\sphericalangle ACB$ nach der letzten Überlegung spitz!)

Bemerkungen: Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe kann für die 4. Stufe einer Olympiade als angemessen angesehen werden, obwohl die 2fache Existenzaussage in a) für die Altersstufe hohe Anforderungen stellt. Die meisten Schüler fanden einen Zugang zur Aufgabe, wobei jedoch exakte bzw. nahezu exakte Lösungen auch nur relativ selten erbracht wurden.

Häufige Fehler waren: Aus $m < 4$ wurde aus rein zahlentheoretischen Gründen auf $m = 3$ geschlossen (fehlender Nachweis der Existenz von Vielecken mit $x = 3$).

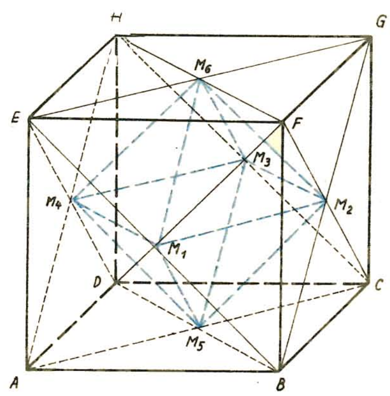
Für c) wurden Winkelbetrachtungen in n-Ecken durchgeführt, jedoch kein Existenzbeweis erbracht. Aus einer wahren Conclusio wurde auf wahre Prämisse geschlossen. Verteilung der Punktstufen:

0	1	2	3	4	5	6
6	10	16	38	8	9	10.

Dr. K. D. Drews, Universität Rostock

2. Lösung zu a)

1. Man merkt sofort, daß keine der 8 Schnittebenen durch den Mittelpunkt des Würfels hindurchgeht. Folglich liegt „in der Mitte" des Würfels einer der gesuchten Teilkörper. Wir suchen zunächst die Form dieses Teilkörpers. Die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels seien mit $M_1, M_2, \ldots, M_6$ bezeichnet. Jede der 8 gegebenen Schnittebenen



enthält genau 3 dieser Punkte M_j. Jeder Würfelecke kann man nun diejenigen 3 Punkte M_j zuordnen, die die Mittelpunkte der in der betrachteten Würfelecke zusammenstoßenden Seitenflächen des Würfels sind, also z. B. der Würfelecke E die 3 Punkte M_1, M_4, M_6. So entspricht auch jeder Würfelecke ein Dreieck mit den dieser Würfelecke zugeordneten Punkten M_j als Ecken. Z. B. entspricht der Würfelecke E das Dreieck $M_1M_4M_6$. Diese Dreiecke sind gleichseitig. Die Seitenlänge ist $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, wie man durch einfache Anwendung des Satzes von Pythagoras feststellt. Der Körper mit den Ecken $M_1, M_2, \ldots, M_6$ wird folglich von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt; es handelt sich um ein Oktaeder. Jedes der 8 begrenzenden Dreiecke liegt in genau einer der 8 Schnittebenen. Daher wird das Oktaeder $M_1M_2M_3$ $M_4M_5M_6$ von keiner der Schnittebenen durchsetzt. Es ist also einer der gesuchten Teilkörper.

2. An jeder Würfelecke findet man ein Tetraeder, dessen Ecken die betreffende Würfelecke und die drei dieser Würfelecke wie in 1. zugeordneten Mittelpunkte von Würfelseitenflächen sind. Z. B. liegt an der Würfelecke E das Tetraeder $EM_1M_4M_6$. Die vier ein solches Tetraeder begrenzenden Dreiecke liegen in vier Schnittebenen. Es ist leicht einzusehen, daß ein solches Tetraeder durch die übrigen Schnittebenen nicht mehr zerlegt wird, d. h. daß es sich um einen weiteren der gesuchten Teilkörper handelt. Jede Schnittebene, die keines der begrenzenden Dreiecke eines betrachteten Tetraeders enthält, ist nämlich zu einer Schnittebene, in der ein solches Dreieck liegt, parallel. Die durch A, H, C und E, B, G bestimmten Ebenen bilden z. B. ein derartiges Paar paralleler Ebenen. Enthielte nun die durch A, H, C bestimmte (also eine zu EM_1M_6 parallele) Ebene innere Punkte des Tetraeders $EM_1M_4M_6$, so müßte sie die Strecke EM_4 in einem von M_4 verschiedenen Punkt schneiden. Da sie den Punkt M_4 enthält, würden auch die Punkte E und D in dieser Ebene liegen. Die Ebene müßte folglich die fünf Punkte A, D, E, H, C enthalten, was aber unmöglich ist. In ähnlicher Weise könnte man zeigen, daß überhaupt keine Schnittebene durch das Tetraeder $EM_1M_4M_6$ hindurchgeht. Entsprechend den acht Würfelecken gibt es acht derartige Teilkörper. Man erkennt durch einfache Anwendungen des Satzes von Pythagoras, daß es sich um regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ handelt.

3. An jeder Würfelkante findet man ein Tetraeder, dessen Ecken die auf der betreffenden Würfelkante liegenden Würfelecken und die Mittelpunkte der beiden Würfelseitenflächen, die sich in dieser Würfelkante schneiden, sind. Z. B. ist EFM_1M_6 ein solches Tetraeder. Ähnlich wie in 2. oder auch rein anschaulich kann gezeigt werden, daß diese Tetraeder durch die Schnittebenen nicht weiter zerlegt werden. Entsprechend den 12 Würfelkanten gibt es 12 solche Tetraeder, die aber im Gegensatz zu den unter 2. gefundenen nicht regelmäßig sind. Fünf ihrer Kanten haben die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, eine Kante hat die Länge a.

4. Insgesamt wurden somit 21 Teilkörper gefunden. Zwei beliebige unter ihnen haben keine inneren Punkte gemeinsam.

Lösung zu b)

5. Das in 1. beschriebene Oktaeder kann als aus 2 kongruenten Pyramiden mit der gemeinsamen quadratischen Grundfläche $M_1M_2M_3M_4$ und den Spitzen M_5 bzw. M_6 zusammengesetzt aufgefaßt werden. Der Flächeninhalt der Grundfläche ist $\frac{1}{2}a^2$, die Höhe hat die Länge $\frac{a}{2}$. Daher beträgt das Volumen des Oktaeders

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6}a^3.$$

Jedes der in 2. beschriebenen regelmäßigen Tetraeder (Kantenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$) *hat eine* Grundfläche vom Inhalt $\frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$ und eine Höhe der Länge $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Sein Volumen ist daher

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}a^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{3}=\frac{1}{24}a^3.$$

Jedes der in 3. beschriebenen Tetraeder läßt sich als eine Pyramide auffassen, deren Grundfläche den Inhalt $\frac{1}{4}a^2$ (nämlich ein Viertel des Inhalts einer Würfelseitenfläche) und deren Höhe die Länge $\frac{a}{2}$ hat. Sein Volumen ist also $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{24}a^3$.

6. Addiert man die Volumina sämtlicher gefundener Teilkörper, so erhält man

$$\frac{1}{6}a^3+8\cdot\frac{1}{24}a^3+12\cdot\frac{1}{24}a^3=a^3.$$

Daraus folgt, daß der Würfel durch die angegebenen Teilkörper wieder vollständig zusammengesetzt werden kann. Es wurden also sämtliche entstehenden Teilkörper gefunden.

Einige Bemerkungen zu den Schülerlösungen: Die Grundlage für die Behandlung der Aufgabe bildete bei allen Schülern eine Zeichnung. War diese übersichtlich und klar, wurde auch die Lösung meistens gefunden. Die Aufgabe ist sicher für die 4. Stufe der Olympiade als „leicht" zu bezeichnen. Das wird auch durch die verhältnismäßig große Anzahl von Schülern, die 6 oder 7 Punkte erreichten, belegt:

0	1	2	3	4	5	6	7
10	7	8	11	5	7	14	35

Die Schüler, die sich mit gewissem oder vollem Erfolg an der Aufgabe versuchten (nur vier Schüler bearbeiteten die Aufgabe überhaupt nicht), gingen im Prinzip den hier dargestellten Weg, der in seinen wesentlichen Teilen auch mit dem Vorschlag der Aufgabenkommission übereinstimmt. Die Punktabzüge hatten meist ihren Grund darin, daß nicht sämtliche Typen von Teilkörpern erkannt worden sind.

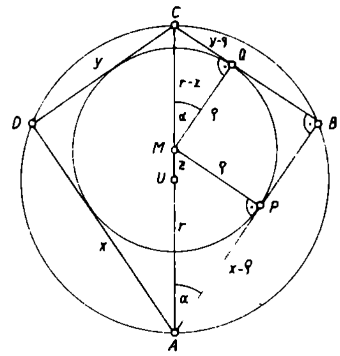
Oft wurde bei Teil b) auch so vorgegangen, daß die Volumina nur von Teilkörpern zweier Typen explizit berechnet worden sind. Das Volumen der übrigen Teilkörper läßt sich dann aus der in 6. angegebenen Gleichung bestimmen, nachdem man sich (z. B. anschaulich) davon überzeugt hat, daß tatsächlich sämtliche Teilkörper gefunden worden waren.

Dr. G. Seifert, Ingenieurhochschule Berlin

3 A. a) (entsprechend dem Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission). Ist $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $\overline{AB}=\overline{AD}$ und $\overline{CB}=\overline{CD}$, so ist AC Symmetrieachse. Folglich ist $\overline{AC}$ Halbierende der Innenwinkel bei A und C, und die Halbierenden der Innenwinkel bei B und D schneiden $\overline{AC}$ in ein und demselben Punkt M. Also hat M den gleichen Abstand von den Seiten des Vierecks. Zusammen mit der Konvexität von $ABCD$ folgt daraus, daß dieses Viereck einen Inkreis besitzt.

b) (entsprechend dem Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission). Nach der Umkehrung des Satzes des Thales geht der Kreis mit der Strecke $\overline{AC}$ als Durchmesser durch die Punkte B und D. Folglich hat $ABCD$ einen Umkreis.

c) (siehe dazu die Abb.)



Die Fußpunkte P und Q der Lote von M auf $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ liegen auf den zugehörigen Seiten von $ABCD$ (wegen der Konvexität von $ABCD$). Das Viereck $MPBQ$ ist ein Rechteck und wegen $\overline{MP}=\overline{MQ}=\varrho$ sogar ein Quadrat. Für $\overline{MU}$ schreiben wir kurz z.

Wir können o.B.d.A. $x\geqq y$ voraussetzen. Dann gilt nach dem pythagoreischen Satz (bzgl. der Dreiecke ABC, APM und CQM)

$$x^2+y^2=4r^2 \quad (1),$$
$$(r+z)^2=\varrho^2+(x-\varrho)^2 \quad (2)$$
und $$(r-z)^2=\varrho^2+(y-\varrho)^2 \quad (3).$$

Aus (2) und (3) folgt
$2r^2+2z^2=4\varrho^2+x^2+y^2-2\varrho(x+y)$
und zusammen mit (1) dann
$$z^2=2\varrho^2+r^2-\varrho(x+y) \quad (4).$$
Nach dem Strahlensatz ist
$(x-\varrho):x=\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{MP}:\overline{CB}=\varrho:y$;
also $$\varrho(x+y)=xy \quad (5).$$
Mit (1) und (5) ist
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=4r^2+2\varrho(x+y)$; und aus dieser quadratischen Gleichung für $(x+y)$ folgt wegen $x+y>0$
$$x+y=\varrho+\sqrt{\varrho^2+4r^2} \quad (6).$$
Setzen wir schließlich (6) in (4) ein, so erhalten wir die Behauptung
$z^2=r^2+\varrho^2-\varrho\sqrt{\varrho^2+4r^2}$, w.z.b.w.

Bemerkungen: Für diese geometrische Wahlaufgabe hatte sich zwar die Hälfte der Teilnehmer entschieden, doch nur zwei konnten die volle Punktzahl erreichen. Einer von diesen ist Gernot Förster (Bezirk Cottbus), dessen Lösungsweg zu c) wir hier im wesentlichen wiedergegeben haben. (Dieser Schüler leitet (5) über Flächeninhalte ab.)

Drei Schüler wählten folgenden günstigen trigonometrischen Lösungsweg für c), den nur Jörg Schulze (Bezirk Potsdam) erfolgreich zu Ende führen konnte: Es ist $\sin=\frac{\varrho}{r+z}$ und $\cos\alpha=\frac{\varrho}{r-z}$ (siehe Abb.). Aus der Identität $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für z^2, für die wegen $z^2<r^2$ nur die Behauptung als Lösung in Frage kommt.

Die meisten Lösungswege für c) führten im wesentlichen auch zu dieser biquadratischen Gleichung für z. Viele waren nicht in der Lage, zweckmäßige und zielstrebige Umformungen vorzunehmen und die erhaltene Gleichung für z richtig auszuwerten. Den Überlegungen wurde häufig eine bestimmte Größenbeziehung zwischen x und y zugrunde gelegt, ohne daß dies erkannt bzw. genügend diskutiert wurde.

Zum Beweis von a) und b) wurde vielfach gezeigt, daß die bekannten Charakterisierungen für Tangenten- bzw. Sehnenviereck erfüllt sind. (Für a) und b) wurden 2 bzw. 1 Punkt vergeben.) Abschließend kann eingeschätzt werden, daß die beiden Wahlaufgaben eine ungünstige Zusammenstellung waren. Ein Vergleich der Ergebnisspiegel unterstreicht das nachdrücklich. Die sehr leichten Teile a) und b) von 3 A. haben sicherlich viele Schüler zur Wahl dieser Aufgabe verleitet. Die Hälfte der vorgelegten Arbeiten kam aber über diese Teile nicht hinaus.

0	1	2	3	4	5	6	7
0	3	6	17	8	6	5	2

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

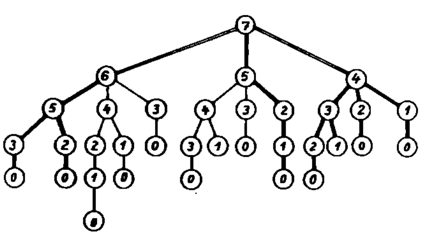
3 B. Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln: Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug". Ein „Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen Zug zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am Zug befindliche Spieler aber keinen Zug nach den Spielregeln ausführen kann.

Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission: Wenn der Anziehende A im ersten Zug 1 Hölzchen nimmt, so kann der andere Spieler den Gewinn erzwingen, nämlich indem er ebenfalls 1 Hölzchen nimmt, so daß beim zweiten Zug von A 5 Hölzchen vorhanden sind. Von ihnen muß er laut Spielregeln 2 oder 3 Hölzchen nehmen, und dann bleiben 3 bzw. 2 Hölzchen übrig, die der zweite Spieler nunmehr nehmen kann.

Wenn A im ersten Zug 2 Hölzchen nimmt, so kann der zweite Spieler ebenfalls den Gewinn erzwingen, nämlich indem er 3 Hölzchen nimmt, so daß genau 2 Hölzchen übrig bleiben. Von ihnen darf der erste Spieler laut Spielregeln nur 1 Hölzchen nehmen, und das restliche Hölzchen kann dann wieder der zweite Spieler nehmen. Nimmt aber der erste Spieler im ersten Zug 3 Hölzchen, so kann er den Gewinn erzwingen, falls der Nachziehende nun 2 oder 3 Hölzchen nimmt; denn dann bleiben 2 bzw. 1 Hölzchen übrig, die A vollständig fortnehmen kann. Falls jedoch der zweite Spieler nun 1 Hölzchen nimmt, so verbleiben drei Hölzchen. Von ihnen kann der erste Spieler in seinem zweiten Zug laut Spielregel nur 1 oder 2 Hölzchen nehmen. Nimmt er 1 Hölzchen, so verliert er. Nimmt er dagegen 2 Hölzchen, so kann der zweite Spieler das verbleibende Hölzchen nach den Spielregeln nicht nehmen; das Spiel endet also unentschieden.

Damit ist gezeigt, daß es keinen Spieler gibt, der bei jeder Spielmöglichkeit des anderen den Gewinn erzwingen kann. Viele Schüler realisierten auch ihre Lösungen in etwa in dieser Art. Besonders sorgfältige und gut formulierte Lösungen gaben ab: Klaus Altmann (Berlin), Hagen Meltzer (Bezirk Potsdam), Peter Reuter (ein Frühstarter aus dem Bezirk Dresden) und Eckard Widgrube (Bezirk Halle). Eine besonderes gute Übersicht über alle oben geschilderten Spielsituationen erhält man durch einen „Spielbaum", wie er z. B. von dem Schüler Peter Erward (Bezirk Magdeburg) benutzt wurde:



In diesem Spielbaum sind die Fälle, in denen ein Spieler einen in einem Zug zu realisierenden Sieg „verschenkt" nicht mit aufgenommen. Die in der obigen Lösung betrachteten Zugfolgen sind hervorgehoben. Weitere Erläuterungen sind wohl nicht notwendig.

Wenn auch die Aufgabe vom Typ her ungewohnt war, so muß sie doch als relativ leicht eingeschätzt werden, das wird auch bestätigt durch das Ergebnis:

0	1	2	3	4	5	6	7
4	–	2	4	5	4	9	21

Nur wenige Schüler wurden also mit wesentlichen Punktabzügen bedacht, diese Schüler hatten dann entweder eine unvollständige Fallunterscheidung durchgeführt oder die Spielregeln nicht immer beachtet bzw. falsch interpretiert.

Verwunderlich bleibt nur, daß etwa die Hälfte der Schüler nicht diese leichte, sondern die viel schwierigere andere Wahlaufgabe bearbeitete. *Dr. H.-J. Sprengel*
Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

4. Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

$$P \in k \to \overline{PF} = \overline{PQ} \quad (1)$$
$$P \notin k \to \overline{PF} \neq \overline{PQ}, \quad (2)$$

dabei sei $P=(x, y)$ das Zeichen für einen beliebigen Punkt der Ebene und Q sei das Zeichen für den Punkt der Menge g, der dieselbe x-Koordinate hat wie P, d. h. es ist $Q=(x, -1)$. Aus der Abstandsformel ergibt sich

$$\overline{PQ} = \sqrt{(y+1)^2} = |y+1| \text{ bzw.}$$
$$\overline{PF} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

Da (2) die Umkehrung von (1) ist, sind (1) und (2) bewiesen, wenn nur äquivalente Umformungen durchgeführt werden:

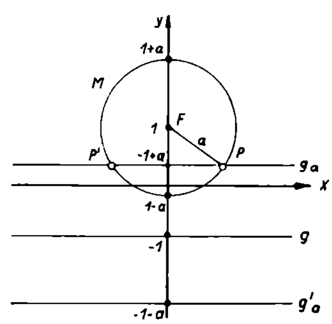
$$P \in k \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 \leftrightarrow (y+1)^2 = x^2+(y-1)^2$$
$$\leftrightarrow |y+1| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \leftrightarrow \overline{PQ} = \overline{PF}.$$

Dieser (von der Aufgabenkommission vorgeschlagene) Weg, der durch Kürze ausgezeichnet ist, wurde von keinem Schüler gegangen. Es wurde von den Schülern (1) isoliert von (2) nachgewiesen. Dabei beachteten viele nicht, daß auch die Umkehrung bewiesen werden muß. Die Abstandsformel zweier Punkte

$$A=(x_1, y_1), \; B=(x_2, y_2)$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

war nur wenigen Schülern geläufig. Das hatte zur Folge, daß Fallunterscheidungen getroffen werden mußten. Bei der analytischen Formulierung von $\overline{PF}$ sind das die Fälle $y>1$, $y=1$, $y<1$; bei der analytischen Formulierung von $\overline{PQ}$ die Fälle $y>-1$, $y=-1$, $y<-1$. Zu bemerken ist folgendes:

1. Besonders elegante Lösungen wurden nicht gegeben; wahrscheinlich ist das bei dieser Aufgabenstellung auch gar nicht möglich.
2. Nur ein Schüler benutzte die Definitionsmöglichkeit einer Parabel als Menge der Punkte, die von einem festen Punkte (Brennpunkt F) denselben Abstand haben wie von einer festen Geraden (Leitlinie g).



3. Von mehreren Schülern wurde (2) (besser die Kontraposition $\overline{PF}=\overline{PQ} \to P \in k$) durch Konstruktion der Parabel nachgewiesen. Um $F=(0, 1)$ wird ein Kreis M mit dem Radius $a=\overline{PF}=\overline{PQ}$ geschlagen und zu g werden die Parallelen $g_a: y=-1+a$, $g'_a: y=-1-a$ gezogen. Offensichtlich ist

$$M \cap (g_a \cup g'_a) = M \cap g_a,$$

da $M \cap g'_a = \emptyset$ ist (Der kleinste y-Wert eines Punktes von M ist $1-a$; die y-Werte der Punkte von g'_a sind stets $-1-a$ und die Gleichung $1-a=-1-a$ ist nicht lösbar). Für $a>1$ ist $M \cap g_a = \{p, p'\}$, bei $a=1$ fallen P und P' zusammen, ist $a<1$, dann ist $M \cap g_a$ die leere Menge. Genügen die Koordinaten von $P=(x, y)$ der Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2$, dann auch die Koordinaten von $P'=(-x, y)$.

α) $a=1 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$

β) $a=2 \Rightarrow x=2, y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$

γ) $a=1, a \neq 2 \Rightarrow y=-1+a$
$$x=\sqrt{a^2-|1-(-1+a)|^2}$$
$$=\sqrt{4a-4}$$
$$y=\frac{1}{4}x^2$$

4. Punkte mußten abgezogen werden
a) bei Nichtbehandlung von (1) und (2)
b) bei unvollständiger Fallunterscheidung durch Nichtkenntnis der Abstandsformel.

Dipl.-Math. P. K. Kobelt,
Ingenieurhochschule Berlin

5. Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe: Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, daß sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adische-zweistellige Zahl ergibt, und daß man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Da von den 97 beteiligten Schülern 58 die Aufgabe lösten (29 erhielten die volle Punktzahl und weitere 29 nur einen Punkt weniger), kann sie für die Klassenstufe 10 als recht einfach angesehen werden. Unsicherheiten traten vor allem beim logischen Aufbau der Lösungsvorschläge auf. So waren Formulierungen der Art „also ist $a=3$ und $b=1$ im 4-adischen System eine Lösung und die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung", nachdem gezeigt worden war, daß höchstens im 4-adischen Zahlensystem eine Lösung existieren kann, die nur die Form $a=3$ und $b=1$ hat, häufig anzutreffen. Diese Schüler erkannten offenbar nicht, daß erst die Probe bestätigt, daß die für die Lösung ermittelten notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. Die unten angegebene Lösung entspricht den Gedanken, die eine Reihe von Startern in ihren Lösungsvorschlägen entwickelten.

Lösung: Wir nehmen an, daß ein g-adisches Zahlensystem existiert, in dem es eine Lösung z der Aufgabe gibt. Die g-adischen Ziffern der Zahl z seien in dieser Reihenfolge a und b. Da auch nach Vertauschung der Ziffern a und b eine zweistellige Zahl z' vorliegen soll, sind a und b von 0 verschieden. Laut Aufgabenstellung treten in dem g-adischen Zahlensystem wenigstens die Ziffern 1 und 2 auf, folglich gilt

$$g \geq 3. \quad (1)$$

Aus $z-z'=1 \cdot g+2$ ergibt sich $\quad (2)$

$$ag+b-(bg+a)=g+2. \quad (3)$$

Durch Umformung von (3) erhält man

$$(a-b)(g-1)=g+2. \qquad (4)$$

Wegen (1) ist die Division durch $g-1$ möglich, und es folgt

$$a-b=1+\frac{3}{g-1}>0. \qquad (5)$$

Als Primzahl hat 3 nur die Teiler 3 und 1 im Bereich der natürlichen Zahlen. Der Fall $g=2$ entfällt wegen (1), und es bliebt nur $g=4$ übrig. Wegen (2) sind a und b verschieden voneinander und mit $g=4$ ergibt sich aus (5) $a=3$ und $b=1$. Wenn es also überhaupt eine Lösung gibt, dann kann es nur die in der Form 31 im 4-adischen System geschriebene Zahl sein. Da durch das Vertauschen der Ziffern wieder eine zweistellige 4-adische Zahl entsteht und

$$\begin{aligned}31_{(4)}-13_{(4)}&=3\cdot 4+1-(1\cdot 4+3)\\&=5\\&=12_{(4)}\end{aligned}$$

gilt, ist das 4-adische Zahlensystem das einzige g-adische Zahlensystem, in dem die Aufgabe eine Lösung besitzt, nämlich genau die Zahl $z=31_{(4)}$.

H.-J. Vogel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

Auf die Lösung der Aufgabe 6 muß aus Platzgründen verzichtet werden.

Kreisolympiade (XII. OJM)
Klassenstufe 5

1.
```
415 · 382
 1245
  3320
    830
 158530
```

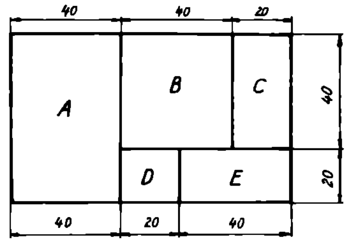
2. Günter konnte z. B. folgendermaßen schließen: Die Differenz der Anzahl der Mädchen zu der der Jungen war eine gerade Zahl. Daher mußten die Anzahlen der Mädchen und die der Jungen entweder gerade oder beide ungerade sein. In jedem dieser Fälle ist aber die Summe eine gerade Zahl, kann also nicht 325 sein.
Oder: Die Anzahl aller Teilnehmer ist gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der teilnehmenden Jungen und 24, und damit eine gerade Zahl. Günters Meinung ist also richtig.

3. Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue, 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen. Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben rot, blau, schwarz oder weiß tragen. In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe. Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.

4. a) Bei dem angegebenen Maßstab 1 : 100 entspricht 1 cm auf der Zeichnung 1 m in der Wirklichkeit.
Daher ergibt sich folgende Zeichnung:

b) Der Grundriß läßt sich in der aus der Abb. ersichtlichen Weise in Quadrate von je 1 cm Kantenlänge, also von 1 cm^2 Flächeninhalt, einteilen. Wegen des Maßstabes 1:100 entspricht mit der Kantenlänge 1 m, also mit dem Flächeninhalt 1 m^2. Die Fußböden der Räume haben folgenden Flächeninhalt:

Raum A: 24 m^2	Raum D: 4 m^2
Raum B: 16 m^2	Raum E: 8 m^2
Raum C: 8 m^2	



Zu streichen sind wegen $24+16=40$ insgesamt 40 m^2 Fußbodenfläche.
Auszulegen sind wegen $8+4+8=20$ insgesamt 20 m^2 Fußbodenfläche.

Klassenstufe 6

1. Auf die Abbildung muß aus Platzgründen verzichtet werden.

2. Da jede Prämienstufe mindestens einmal vertreten war, gibt es mindestens 1 Werktätigen, der 150 M, einen, der 250 M, einen, der 350 M, einen der 400 M und einen, der 500 M erhalten hatte. An diese fünf Werktätigen wurden daher insgesamt 1650 M ausgezahlt.
Für die restlichen 6 Werktätigen stehen mithin noch genau 1000 M zur Verfügung. Hätte jeder dieser Werktätigen genau 150 M erhalten, dann wären das zusammen 900 M. Also muß mindestens einer der 6 Werktätigen mehr als 150 M Prämie bekommen haben. Laut Aufgabe hat er dann aber mindestens 250 M Prämie bekommen. Für die restlichen 5 Werktätigen verbleiben nun höchstens 750 M, es konnte also kein weiterer der fünf Werktätigen mehr als 150 M Prämie erhalten haben. Folglich beträgt die gesuchte Anzahl 6.

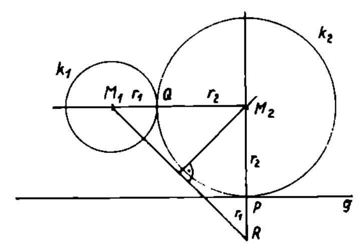
3. Die von den Pionieren erzielten Sammelergebnisse seien mit r, w, m, b, j (in Mark) bezeichnet.
Dann gilt laut Aufgabe:

(1) $w>b>j$
(2) $j>r$; $r=13$
(3) $b=r+4$
(4) $w=m+2$ $m=j+1$

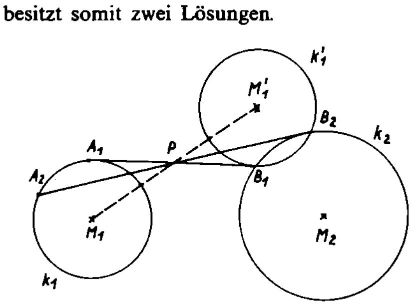
Aus (2) und (3) folgt $b=17$. Aus (1) und (2) folgt $w>b>j>r$, aus (4) $w>m>j$ und daraus sowie aus (5) $m=b$, also $m=17$.
Daher sammelten: Werner 19 M, Beate und Margot je 17 M, Jan 16 M und Rita 13 M.

4. Die Anzahl der in der DDR beheimateten Schiffe beträgt laut Aufgabe $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl, also stammten 7 Schiffe aus der DDR. Die restlichen 14 Schiffe stammten aus den anderen vier Ländern.
Nun hat Manfred laut Aufgabe mindestens 1 indisches Schiff sowie infolgedessen mindestens 3 finnische, 4 bulgarische und 6 sowjetische Schiffe gesehen. Da das zusammen bereits 14 Schiffe sind, sind damit die gesuchten Anzahlen gefunden.

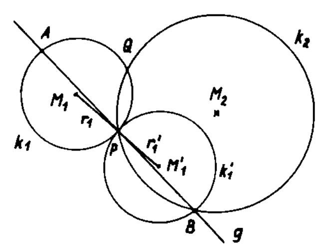
W 7 ■ 1018 Nach Voraussetzung gilt $\overline{M_1Q}=r_1$, $\overline{QM_2}=r_2$ und $\overline{M_1M_2}=r_1+r_2$. Tragen wir auf der Geraden PM_2 von P bis R den Radius r_1 (wie aus der Zeichnung ersichtlich) ab, so gilt $\overline{M_2R}=\overline{M_1M_2}=r_1+r_2$, d. h. das Dreieck M_1RM_2 ist gleichschenklig. Spiegeln wir nun k_1 an der Mittelsenkrechten von $\overline{M_1R}$ als Symmetrieachse, so fällt das Bild M_1' von M_1 mit R und das Bild Q' von Q mit P zusammen. Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Wir zeichnen durch P eine Senkrechte zu g, tragen auf ihr r_1 von P bis R so ab, daß R und M_1 auf verschiedenen Seiten von g liegen. Wir verbinden R mit M_1. Die zu konstruierende Mittelsenkrechte von $\overline{RM_1}$ schneidet die Gerade RP in M_2. Der Kreis um M_2 mit $\overline{M_2P}=r_2$ als Radius ist der zu konstruierende Kreis k_2.



W 7 * 1019 Wir drehen den Kreis k_1 um den Punkt P als Drehzentrum um den Drehwinkel von 180°. Das Bild k_1' von k_1 schneidet k_2 in den Punkten B_1 und B_2. Die Gerade PB_1 möge k_1 in A_1, die Gerade PB_2 möge k_1 in A_2 schneiden. Auf Grund der Konstruktion und der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (Punktspiegelung an P) gilt $\overline{A_1P}=\overline{PB_1}$ und $\overline{A_2P}=\overline{PB_2}$. Die Aufgabe besitzt somit zwei Lösungen.



W 7 * 1020 Wir drehen den Kreis k_1 um den Punkt P als Drehzentrum um einen Dreh-



winkel von 180°. Das Bild k_1' von k_1 schneide den Kreis k_2 außer im Punkt P noch in B. Die Gerade BP schneide k_1 in A. Dann gilt auf Grund der Konstruktion und der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (Punktspiegelung an P) $\overline{AP}=\overline{PB}$.

8 ▲ 1021 Es sei n eine beliebige ganze Zahl. Dann folgen ihr die drei weiteren ganzen Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$. Wir erhalten für die um 5 verminderte Summe der Quadrate dieser vier Zahlen

$$z=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2-5$$
$$n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n+9-5$$
$$=4n^2+12n+9=(2n+3)^2.$$

Daher ist z gleich dem Quadrat der ganzen Zahl $2n+3$, w. z. b. w.

Bemerkung: Wir weisen darauf hin, daß die vier aufeinanderfolgenden Zahlen nicht notwendig positive ganze Zahlen sein müssen. Sie können auch sämtlich oder teilweise negativ sein. So gilt z. B.

$$(-5)^2+(-4)^2+(-3)^2+(-2)^2-5$$
$$=25+16+9+4-5=49=7^2;$$
$$(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2-5=4+1+0+1-5$$
$$=1=1^2.$$

W 8 ■ 1022 Es sei x die Maßzahl der Zeit (in h), die der zweite Kraftwagen benötigt, um den ersten einzuholen. Dann legt der zweite Kraftwagen bis zum Einholen $85x$ km zurück und der erste $80x$ km. Da der erste Kraftwagen 2 km mehr zurücklegen muß, gilt die Gleichung

$85x=80x+2$. Daraus folgt

$$85x-80x=2,$$
$$5x=2,$$
$$x=\frac{2}{5}.$$

Der zweite Kraftwagen hat also den ersten nach $\frac{2}{5}$ h $=24$ min eingeholt. In dieser Zeit hat er eine Entfernung von

$$85\cdot\frac{2}{5}\,\text{km}=34\,\text{km zurückgelegt.}$$

Bemerkung: Wir können diese Aufgabe noch schneller lösen, wenn wir beachten, daß die Relativgeschwindigkeit des zweiten Kraftwagens (bezogen auf den ersten) $5\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ beträgt. Da der Abstand zwischen den Kraftwagen ursprünglich 2 km betrug, erhalten wir durch Division die Zeit bis zum Einholen

$$x=\frac{2\,\text{km}}{5\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}=\frac{2}{5}\,\text{h}=24\,\text{min}.$$

W 8 ■ 1023 Bei einem Weg von der Länge a (in Metern) und einer Zeit t (in Sekunden) erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit

$$v=\frac{a}{t}\ (\text{in m}\cdot\text{s}^{-1})$$

und $$v_1=\frac{a}{t}\cdot\frac{3600}{1000}=\frac{a\cdot 3{,}6}{t}\ (\text{in km}\cdot\text{h}^{-1}).$$

Ferner ergeben sich für die einzelnen Teilstrecken von je 500 m Länge die folgenden Zeiten: 91,61 s, 98,55 s, 99,90 s, 94,21 s.

Für die Gesamtstrecke von 2000 m Länge ergibt sich die Zeit 384,27 s. Daher erhalten wir für die erste Teilstrecke

$$v=\frac{500}{91{,}61}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=5{,}46\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$v_1=\frac{500\cdot 3{,}6}{91{,}61}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=19{,}6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Analog erhalten wir die weiteren in der folgenden Tabelle angegebenen Werte:

	Weg in m	Zeit in s	Geschwindigkeit in $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
1. Teilstrecke	500	91,61	5,46	19,6
2. Teilstrecke	500	98,55	5,07	18,3
3. Teilstrecke	500	99,90	5,01	18,0
4. Teilstrecke	500	94,21	5,31	19,1
Gesamtstrecke	2000	384,27	5,20	18,7

Der größte Betrag der Abweichung der mittleren Geschwindigkeit auf einer Teilstrecke von der mittleren Geschwindigkeit auf der Gesamtstrecke beträgt $(19{,}6-18{,}7)\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $=0{,}9\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Daher ist der größte Betrag der protentualen Abweichung gleich

$$\frac{0{,}9\cdot 100}{18{,}7}\,\%=4{,}8\ .$$

W 8 * 1024 Wir setzen $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h$ und erhalten nach Voraussetzung $\overline{AD}=\frac{h}{2}$ (vgl. Abb.). Dann gilt $\overline{DB}=c-\frac{h}{2}$ und nach dem Höhensatz

$$h^2=\frac{h}{2}\left(c-\frac{h}{2}\right),\ \text{also wegen } h\neq 0$$

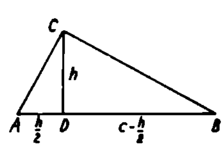
$$h=\frac{c}{2}-\frac{h}{4},\ \frac{c}{2}=\frac{5}{4}h,\ c=\frac{5}{2}h.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist daher gleich

$$A=\frac{1}{2}ch=\frac{5}{4}h^2.$$

Für $h=4$ cm erhalten wir den Flächeninhalt

$$A=\frac{5}{4}\cdot 16\,\text{cm}^2=20\,\text{cm}^2.$$



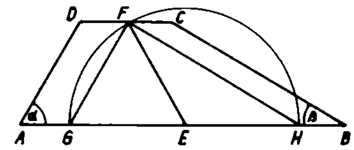
W 8 * 1025 Die Parallelen durch den Punkt F zu den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ mögen die Grundseite $\overline{AB}$ in den Punkten G und H schneiden (vgl. die Abb.). Dann sind die Vierecke $AGFD$ und $HBCF$ Parallelogramme, und es gilt

$$\overline{AG}=\overline{DF}=\frac{c}{2},\ \overline{HB}=\overline{FC}=\frac{c}{2}.$$

Wegen $\alpha+\beta=90°$ gilt $\alpha<90°$ und $\beta<90°$, also $a>c$, $\frac{a}{2}>\frac{c}{2}$. Daher liegt G zwischen A und E und H zwischen E und B. Da $AGFD$ ein Parallelogramm ist, gilt $\sphericalangle GFD=\alpha$, und da $HBCF$ ein Parallelogramm ist, $\sphericalangle CFH=\beta$. Daraus folgt

$$\sphericalangle GFD+\sphericalangle CFH=\alpha+\beta=90°,$$

also $$\sphericalangle HFG=90°,$$



das Dreieck GHF ist daher rechtwinklig.

Nun gilt $\overline{GE}=\overline{AE}-\overline{AG}=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}$,

$$\overline{EH}=\overline{EB}-\overline{HB}=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}.$$

Daher ist E der Mittelpunkt der Hypotenuse GH des rechtwinkligen Dreiecks GHF und gleichzeitig Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks (Umkehrung des Satzes des Thales).

Daraus folgt $\overline{EF}=\overline{EG}=\overline{EH}=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}$,

also $$\overline{EF}\frac{a-c}{2}.$$

9 ▲ 1026 Es seien $n-1$, n, $n+1$ mit $n\geqq 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann ist die Summe ihrer dritten Potenzen gleich

$$s=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$$
$$=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1$$
$$=3n^3+6n=3n(n^2+2).$$

Um nun nachzuweisen, daß s stets durch 9 teilbar ist, müssen wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. n ist durch 3 teilbar, d. h. $n=3k$.
2. n läßt bei der Division durch 3 den Rest 1, d. h. $n=3k+1$.
3. n läßt bei der Division durch 3 den Rest 2, d. h. $n=3k+2$, wobei in allen Fällen k eine natürliche Zahl ist. Wir berechnen jetzt s in allen drei Fällen.

1. Für $n=3k$ erhalten wir

$$s=3n(n^2+2)=3\cdot 3k[(3k)^2+2]$$
$$=9k[(3k)^2+2];$$

s ist also durch 9 teilbar.

2. Für $n=3k+1$ erhalten wir

$$s=3(3k+1)[(3k+1)^2+2]$$
$$=3(3k+1)(9k^2+6k+1+2)$$
$$3(3k+1)3(3k^2+2k+1).$$

s ist also auch in diesem Fall durch 9 teilbar.

3. Für $n=3k+2$ erhalten wir

$$s=3(3k+2)[(3k+2)^2+2]$$
$$=3(3k+2)(9k^2+12k+6)$$
$$=3(3k+2)3(3k^2+4k+2).$$

s ist also auch in diesem Fall durch 9 teilbar. Damit haben wir nachgewiesen, daß in jedem Fall die Summe s durch 9 teilbar ist, w. z. b. w.

Bemerkungen: 1. Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt noch etwas schneller zum Ziel.

Ist $n\equiv 0$ (mod 3), so gilt $s=3n(n^2+1)\equiv 0$ (mod 9).

Ist $n\equiv 1$ (mod 3), so gilt $n^2+2\equiv 1+2\equiv 0$ (mod 3), also $s\equiv 0$ (mod 9).

Ist $n\equiv 2$ (mod 3), so gilt $n^2+2\equiv 4+2\equiv 0$ (mod 3), also $s\equiv 0$ (mod 9).

In allen drei Fällen gilt also $s\equiv 0$ (mod 9), w. z. b. w.

2. Der Satz gilt auch, wenn es sich um drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen handelt; denn bei dem Beweis haben wir nur vorausgesetzt, daß die Zahlen $n-1$, n, $n+1$ ganze Zahlen sind. Z. B. ist

$(-4)^3+(-3)^3+(-2)^3=-64-27-8=-99$

durch 9 teilbar.

9▲1027 Wir unterscheiden die Fälle $x>1$, $0\leqq x\leqq 1$, $x<0$.

1. Im Falle $x>1$ *erhalten wir*

$f(x)=|x|+|x-1|=x+x-1=2x-1.$

Nun gilt $2x-1>2$ genau dann, wenn $2x>3$, also $x>\frac{3}{2}$. In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) für alle $x>\frac{3}{2}$ erfüllt.

2. Im Falle $0\leqq x\leqq 1$ gilt wegen $x-1\leqq 0$

$f(x)=|x|+|x-1|=x-(x-1)=1.$

In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) niemals erfüllt.

3. Im Falle $x<0$ gilt $|x|=-x$ und $|x-1|=-x+1$, also

$f(x)=|x|+|x-1|=-x+(-x+1)$

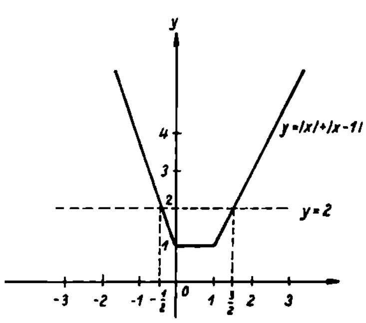
$=-2x+1.$

Nun gilt $-2x+1>2$ genau dann, wenn $2x<-1$, also $x<-\frac{1}{2}$. In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) für alle $x<-\frac{1}{2}$ erfüllt.

Die Ungleichung (1) ist also genau dann erfüllt, wenn

$x<-\frac{1}{2}$ oder $x>\frac{3}{2}$ gilt.

$$\text{Wegen } f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{falls } x<0,\\ 1, & \text{falls } 0\leqq x\leqq 1,\\ 2x-1, & \text{falls } x>1\end{cases}$$



besteht der Graph dieser Funktion aus drei linearen Teilstücken, die wir leicht zeichnen können, indem wir die Punkte $(-1;\ 3)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 3)$ in das Koordinatensystem einzeichnen (vgl. die Abb.). Ferner entnehmen wir der Zeichnung, daß die Lösungsmenge der Ungleichung (1) aus allen reellen Zahlen x mit $x<-\frac{1}{2}$ oder $x>\frac{3}{2}$ *besteht.*

W 9 ■ 1028 Es seien $x_1=20$, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 die Anzahlen der Gold-, Silber-, Bronzemedaillen, 4., 5. bzw. 6. Plätze, die die DDR erhielt. Dann gilt

$7\cdot 20+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5+x_6=480.$ (1)

Nun gilt nach Voraussetzung

$x_2=x_3=x_6\quad x_4=x_5\quad 20.$ (2)

Aus (1) und (2) folgt daher

$140+5x_2+4x_2+3x_4+2x_4+x_2=480,$

$10x_2+5x_4=340,$

$2x_2+x_4=68.$ (3)

Wegen (2) gilt $x_2>x_4$; daher folgt aus (3)

$68>2x_4+x_4=3x_4,$

$x_4<\frac{68}{3}=22\frac{2}{3},$

also, da x_4 ganzzahlig ist, $x_4\leqq 22$.

Andererseits ist wegen (2) $x_4>20$, also ist $x_4=21$ oder $x_4=22$. Wäre nun $x_4=21$, so wäre wegen (3) $2x_2=68-x_4=47$, was zu einem Widerspruch führt, weil x_2 ganzzahlig ist. Daher gilt $x_4=22$, und wir erhalten weiter $2x_2=68-22=46$, also $x_2=23$. Aus (2) erhalten wir ferner $x_2=x_3=x_6=23$, $x_4==x_5=22$. Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß mit diesen Werten die Gleichung (1) und auch die Beziehung (2) und damit alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Die DDR erhielt also 23 Silbermedaillen, 23 Bronzemedaillen, 22 vierte Plätze, 22 fünfte Plätze und 23 sechste Plätze.

W 9 ■ 1029 Es sei P der Schnittpunkt der Geraden BH und CE (vgl. die Abb.). Das Quadrat $ABCD$ ist axialsymmetrisch bezüglich der Symmetrieachse EG. Daraus folgt $\sphericalangle AED=\sphericalangle BEC$.

Aus $\sphericalangle ABH=\sphericalangle EBP$ und $\sphericalangle AHB=\sphericalangle AED$ $=\sphericalangle BEP$ folgt $\triangle ABH\sim\triangle EBP$. Somit gilt $\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{EB}:\overline{EP}$. Ferner gilt

$\overline{BH}^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}a^2$, also $\overline{BH}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Durch Einsetzen erhalten wir

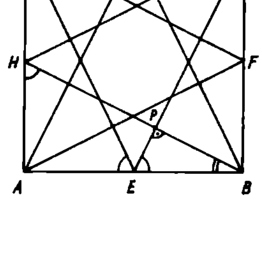
$\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right):\frac{a}{2}=\frac{a}{2}:\overline{EP}$, also $\overline{EP}=\frac{a}{10}\sqrt{5}$.

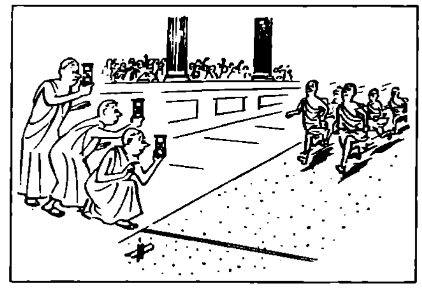
Aus $\overline{EP}:\overline{BP}=1:2$ folgt weiter

$\overline{BP}=2\cdot\overline{EP}=\frac{a}{5}\sqrt{5}$. Für den Flächeninhalt des achtzackigen Sternes gilt somit

$A_S=A_{ABCD}-8\cdot A_{EBP}=a^2-8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{10}\sqrt{5}\cdot\frac{a}{5}\sqrt{5}$

$=\frac{3}{5}a^2$, also $A_S=60\ \text{cm}^2$.





Lösungen zu alpha-heiter

Zu den Beiträgen
Kalender aus Würfeln — Wir wägen —
erwarten wir zahlreiche
Lösungsvorschläge, d. Red.

Rational oder nicht?

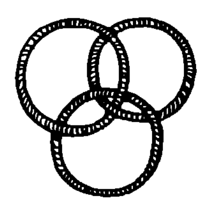
S = 0,1001000010000001000000001.... Der Bruchteil dieser Zehn (dezimal geschrieben) hat eine regelmäßige Struktur: er besteht nach dem Komma aus Nullen, die mit Einsen in Gruppen eingeteilt sind. Die erste Gruppe hat keine Null, die zweite hat zwei Nullen. Die n-te hat $2n-1$ Nullen. [So groß ist die Differenz zwischen n^2 und $(n-1)^2$.] Ein solcher Bruch ist nicht periodisch und deshalb irrational.

Eine Tafel Schokolade

Wir stellen fest, daß wir bei jedem Brechen die Anzahl der Stücke um eines vergrößern. Die Anzahl der Stücke ist $4\cdot 8=32$. Vor dem Brechen hatten wir ein Stück, nach dem ersten Brechen waren es zwei, nach dem zweiten drei ..., nach dem 31. waren es 32. Ganz gleich, wie wir die Schokolade brechen, immer sind es 31mal.

Ein Schnitt genügt

Die geforderte Verkettung der drei Ringe ist auf dem Bild dargestellt.



Modell des Fernsehturms

Das Modell wiegt 30 g.

Abbildungen vertauscht

In dem Beitrag: *Inversion oder Spiegelung am Kreis* (3/73) wurden versehentlich die Abbildungen der Seiten 52 und 53 vertauscht. (1 und 4, 2 und 5, 3 und 6)

Junge Mathematiker bei Freunden am Baikalsee

Seit sechs Jahren laufen an der Oberschule Burkau für die Klassen 5 bis 10 Mathematikarbeitsgemeinschaften, die monatlich zweimal zusammen kommen. Sie werden in vorbildlicher Weise von Frau *Hannelore Jurack* betreut. Seit fünf Jahren ist dieser Klub eifriger

Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb, das zeigen die Erfolge: Im Jahre 1971/72 nahmen 48 Schüler am *alpha*-Wettbewerb teil. Sie erhielten 433 Antwortkarten.

5 Jahre Teilnahme: Heike Jurack, Rainer Schwierz; 4 Jahre: Regine Katzer, Gabriele Gnauck, Rainer Woger, Harald Anders;
3 Jahre: Rainer Sturm, Olaf Kylau, Sabine und Ingolf Puppe, Matthias Vincentini, Doris Kuban, Holger Jurack, Annegret Wobst, Ulrike Gnauck, Elke Sturm, Marlies Dorgel, Thilo Feidt, Andrea Gerlach;
2 Jahre: 17 Schüler; 1 Jahr: 10 Schüler.

Als Auszeichnung unternahmen die Schüler im vergangenen Jahr — wie *alpha* bereits berichtete — eine Exkursion nach Liberec (ČSSR).

In diesem Jahr erhielten wir von den 12 vorbildlichen AG-Teilnehmern einen Gruß aus Irkutsk am Baikalsee. Insgesamt 20 Schüler der Schule waren Gast einer sowjetischen Schule in Irkutsk, der Patenschule der OS Burkau.
Unsere Anerkennung gilt diesem fleißigen Kollektiv von Burkau. Auf weiterhin gute Zusammenarbeit

J. Lehmann, Chefredakteur

Mathematik im Moskauer Pionierpalast auf den Leninbergen

Schon länger als zehn Jahre besteht auf den Leninbergen, am steilen Flußufer, der allen Moskauern wohlbekannte Pionierpalast. Sein *Mathematikzirkel* jedoch besteht kaum halb so lange. Anfangs bestanden lange Zeit Zweifel, ob es angebracht sei, die Mathematik neben den *Studios für künstlerische Laientätigkeit*, der *Tanzschule* und solch unterhaltsamen Beschäftigungen wie *Kosmonautik* oder *Flugmodellbau* einzuführen. Dann aber wurde beschlossen, daß es richtig sei (immerhin befinden wir uns jetzt im Zeitalter der wissenschaftlich-technischen Revolution und Mathematisierung der Kenntnisse), und es erhob sich die Frage: Was soll man die Teilnehmer im Mathematikzirkel lehren? Zu wiederholen, um die Kenntnisse zu vervollständigen, könnte dazu führen, daß das in der Schule Gelernte nicht mehr das nötige Interesse fände. Den Stoff der Oberschule zu vermitteln, bedeutet vorwegzunehmen; und das zu tun, ist nicht immer empfehlenswert. Die Praxis zeigt, daß Studenten, die bereits in der Schule mit der Differentialrechnung bekannt gemacht wurden, lustlos die Mathematikvorlesungen besuchten, da sie glaubten, doch nur das geboten zu bekommen, was ihnen schon bekannt sei, und in der Endkonsequenz blieben sie oft hinter denen zurück, die erst begannen, die Mathematik zu studieren, erstmalig, aber ernsthaft und voller Begeisterung.

Wenn man es aber trotzdem für richtig hält, vorzugreifen, sollte man sich dann nicht auf Gebiete beziehen, die an den Schulen und sogar Hochschulen wenig behandelt werden, aber für die Zukunft von großer Bedeutung sind, wie beispielsweise: Maschinelle Rechentechnik? Genau diese Entscheidung wurde letzten Endes getroffen.
Auch eine solch reiche Einrichtung wie der Pionierpalast konnte nicht aus eigener Kraft bestehen. Hilfe von seiten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR war nötig. Wissenschaftler kamen den Kindern zu Hilfe. Den Zirkelteilnehmern wurde die ausgezeichnete elektrische Rechenmaschine MIR, die im Rechenzentrum der Akademie der UdSSR aufgestellt ist, zur Verfügung gestellt.
Der Anfang war gemacht ...
Vor vier Jahren traten die ersten Zirkelteilnehmer schüchtern an das elektronische Gehirn heran. Im Verlauf der Jahre beendeten viele von ihnen die Schule und studieren jetzt an Instituten. Der Zirkelteilnehmer *Brailow* macht sich bereits einen Namen, obwohl er noch die Schule besucht. Er wurde Sieger der Allunions-Mathematikolympiade. Champion Moskaus in Physik wurde sein Zirkelkamerad *Sascha Schen. Andrej Formanowski*, der den Zirkel sogar noch besuchte, nachdem er an der Universität immatrikuliert worden war, siegte in der zehnten Klasse auf der Allunions-Chemieolympiade und wurde erster Chemiker unter den Schülern des ganzen Landes. *Sascha Strigaljew*, einer der ersten Zirkelteilnehmer, leistet schon im ersten Studienjahr am Institut für Nachrichtentechnik ernsthafte wissenschaftliche Arbeit.
Allein diese Beispiele unterstreichen hinreichend den Nutzen dieses Zirkels. Trotzdem scheint uns, daß das Wesentliche nicht darin besteht, daß aus dem Zirkel einige Stars hervorgingen, sondern darin, daß in den Jahren seines Bestehens Hunderte von Jungen und Mädchen lernten, Probleme zu stellen, sie in die Sprache von Maschinenprogrammen zu übersetzen und die erhaltenen Ergebnisse auszuwerten. Diese Jugendlichen werden nicht unbedingt Berufsmathematiker, — der Zirkel ist nicht auf diejenigen orientiert, für die die Mathematik später einmal das Hauptsächlichste im Leben sein wird, — aber in ihrer zukünftigen Arbeit wird sie das Vermögen zu denken, das im Zirkel anerzogen wurde, und die kurze Bekanntschaft mit der Rechentechnik begleiten. Wenn es gilt, irgend eine wichtige Aufgabe rasch zu lösen, werden sie sich erinnern, wie sie im Pionierpalast und im Rechenzentrum der Akademie der Wissenschaften der UdSSR mit den Elementen der numerischen Mathematik konfrontiert wurden.

▲ Und hier einige Beispiele zu diesem „Sicherinnern“:
... Anfangs, ungefähr zwei Monate lang, beschäftigten wir uns nur im Pionierpalast. Um an die Maschine heranzutreten, war es noch zu früh. Man machte uns mit den Grundlagen der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt und stellte interessante Aufgaben. Einige von ihnen konnten bereits hier gelöst werden, andere, die umfangreiche Berechnungen erforderten, wurden beiseite gelegt, bis am Komputer gearbeitet werden durfte ...

● Kommentar: Die Wahrscheinlichkeitstheorie und die ihr vorangegangene Kombinatorik wurden im Zirkel deshalb als Hauptrichtung behandelt, weil sie erstens jetzt in vielen Gebieten der Wissenschaft eine wichtige Rolle spielen, die humanitäre eingeschlossen, und zweitens die Aufgaben hier in der Regel ihrem Aufbau nach einfach sind, zur Lösung aber eine große Anzahl von Rechnungen erfordern, d. h. an ihnen kann man den Nutzen von elektronischen Rechenmaschinen besonders klar erkennen.

▲ ... Im Hörsaal des Palastes beschäftigen sich nicht nur Lehrer mit den Neulingen, sondern auch Schüler als Instrukteure, Zirkelteilnehmer des zweiten und dritten Lehrjahres. Sie erklärten den jüngeren Kameraden, wie Formeln hergeleitet werden, Programme zu schreiben sind, wie man an den im Palast vorhandenen elektronischen Rechenmaschinen arbeite. Und dann brach der lang erwartete Tag an. Voller Spannung hatten wir gewartet, bis wir an der Reihe waren, und jeder von uns gab mit noch ungeschickten Fingern eine Information in die Maschine. Nach einigen Sekunden ratterte diese die Antwort selbst auf den Lochstreifen. Das war ein Erlebnis!

● Kommentar: Die Maschine MIR, auf der die Zirkelteilnehmer arbeiten, benutzt als Maschinensprache die russische Variante des ALGOL.

▲ ... Nach einigen Jahren beherrschten wir sie vollständig. Wir fühlten uns an der Maschine wie zu Hause. Jeder wußte, was er zu tun hatte. Die Maschinenzeit ist teuer, und alle bemühten sich, sie maximal zu nutzen. Aber diejenigen, die darauf warteten an der Reihe zu sein, versäumten es nicht, sich über die am Lochstreifen Sitzenden lustig zu machen, und manchmal Wetten bezüglich des Resultats abzuschließen. Es kam vor, daß irgend jemand bat: „Kinder, stellt mir fünfzehn Minuten zur Verfügung, ich habe ein ausgezeichnetes Programm für ein Spiel, eine fehlerfreie Strategie!“

● Kommentar: Obwohl im Zirkel Standardaufgaben in mathematischer Statistik gegeben werden, sind der Initiative der Zirkelteilnehmer keine Grenzen gesetzt. Jeder, der ein interessantes Programm aufgeschrieben hatte, das vom Lehrer gebilligt worden war, kann zwanzig bis dreißig Minuten Maschinenzeit für die Realisierung erhalten.

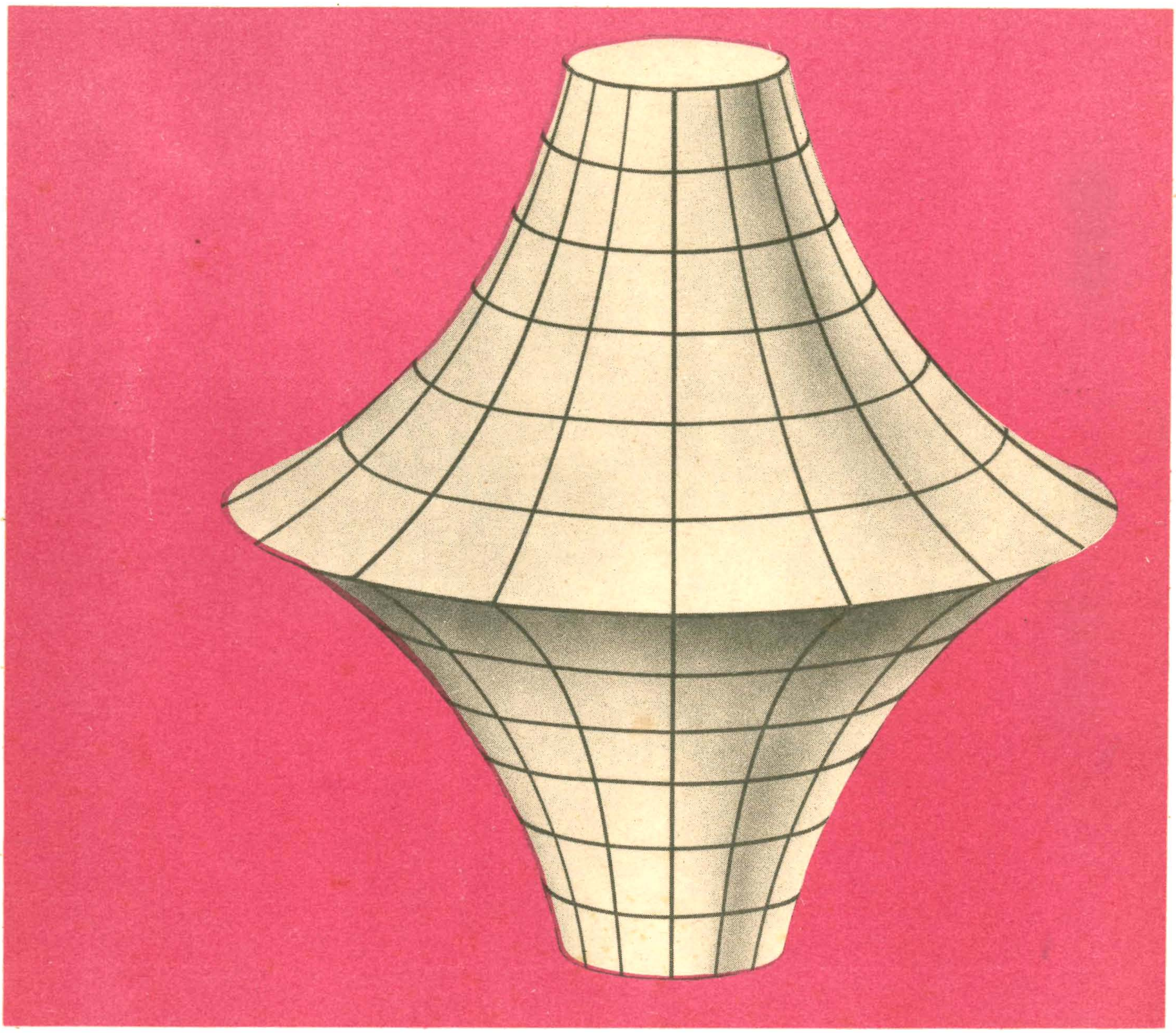
▲ ... Und da vergehen drei Stunden. Schon andere Anwärter warteten darauf, an der Reihe zu sein und schauten auf die Uhr. Der Lochstreifen muß ausgewechselt werden, und für eine Woche muß man sich von der Maschine trennen. Schade! Fünf Minuten reichten nicht! Kann das Programm schlecht gewesen sein? Das muß man zu Hause überprüfen, oder man muß es nach zwei Tagen während der Übungen im Palast mit dem Lehrer und den anderen Kindern untersuchen. Solche Fehler müssen nicht sein ...

W. Trostnikow, Moskau

In Heft 1/74 bringt *alpha* den Inhalt einer Übung des Mathematikzirkels des Moskauer Pionierpalastes, d. Red.

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31 059

6

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: aus Quant 12/72, Moskau; PH Güstrow S. 124/25, (2 Abb.); J. Lehmann, Leipzig S. 124/25, 4 Abb.; Zentralinst. f. Metallurgie (S. 125); F. Fricke, Berlin (S. 128); E. Zschech, Bautzen (S. 132); Zentralschule der JP, Droyßig (S. 133);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. September 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über den Schöpfer einer neuen Geometrie

Zum 180. Geburtstag von N. J. Lobatschewski

Die Entdeckung der *nichteuklidischen Geometrie* durch *N. J. Lobatschewski* erschütterte zum ersten Male die jahrhundertalte Meinung, daß die von *Euklid* formulierten geometrischen Gesetze unveränderlich und im Kosmos gültig sind. Die alten Raumvorstellungen wurden auch physikalisch unhaltbar durch die Ergebnisse des bekannten Versuches von *Michelson* zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Schließlich brach *A. Einstein* in der allgemeinen Relativitätstheorie endgültig mit der Vorstellung eines absoluten Raumes, den es nach seiner Auffassung ebensowenig gibt, wie die absolute Zeit.

Und wie das *Kopernikanische System* das Rätsel des Aufbaus des Planetensystems löste, welches die Astronomen gequält hatte, so war die *Lobatschewskische Geometrie* die Lösung eines Problems, mit dem sich die Geometer jahrhundertlang abgemüht hatten.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski wurde am 1. Dezember 1792 als Sohn eines kleinstädtischen Beamten geboren. Zehn Jahre später besuchte er gemeinsam mit seinen beiden Brüdern *Alexander* und *Alexej* das staatliche Gymnasium in Kasan. Schon hier zeigte

Lobatschewski ungewöhnliche Fähigkeiten vor allem für Mathematik und Physik. Der junge Lehrer *G. J. Kartaschewski* spielte für die Entwicklung von *Lobatschewskis* Talent eine große Rolle. Seit 1807 war *Nikolai* Student an der Kasaner Universität. Die Professoren wunderten sich über die Leichtigkeit, mit der er die Wissenschaften aufnahm, und über die Fähigkeiten und die Originalität seines Denkens. *Nikolai* wurde der „Stolz der Universität". Aber er blieb trotz allem ein richtiger Junge, der bald Raketen steigen ließ, bald auf einer Kuh durch den städtischen Garten ritt oder anderen Unfug anstellte.

1811 wurde *Lobatschewski* nach einem glänzenden Abschluß seines Studiums Magister. Seit 1814 war er Adjunkt und ab 1816 Professor. (Magister und Adjunkt waren untere akademische Grade an den russischen Universitäten (bis 1863)).

Im November 1820 wurde *Lobatschewski* zum Dekan der physikalisch-mathematischen Fakultät gewählt und im Jahre 1827 Rektor der Universität. Dieses Amt bekleidete er fast 20 Jahre. Lange Zeit leitete *Lobatschewski* die Bibliothek der Universität. Er suchte die Lehr- und Forschungsliteratur aus, deren Kauf er dann auch persönlich vornahm.

Seit 1822 war *Lobatschewski* Mitglied der Baukomitees und ab 1827 dessen Vorsitzender. Er begnügte sich nicht mit der Einstellung der besten Architekten jener Zeit, sondern er studierte selbst ernsthaft Architektur. Unter seiner Leitung wurden mehrere Lehrgebäude, die Bibliothek, das astronomische Observatorium, die Klinik und die Druckerei neu erbaut oder rekonstruiert.

Lobatschewski übernahm das Amt des Rektors in einer schwierigen Zeit. Viele Professoren lehrten im Stile des Mittelalters, und *Lobatschewski* übernahm die Aufgabe, die Universität gegen den Widerstand reaktionärer Kreise von solchen Lehrern zu säubern. In seiner bedeutsamen Rede „Über die wichtigen Dinge der Erziehung", die er am 17. Juli 1828, ein Jahr nach seiner Amtsübernahme hielt, forderte er, daß an der Universität keine leeren Worte gepredigt, sondern echte Wissenschaft vermittelt werden sollte:

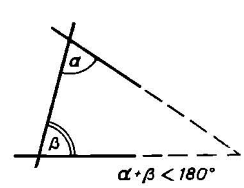
„Fragt die Natur! Sie enthält alle Wahrheit und wird alle Fragen ausreichend beantworten."

Die Kasaner Universität wurde zu einer erstklassigen Lehranstalt, die durch die ebenfalls von *Lobatschewski* gegründete Zeitschrift „Wissenschaftliche Beiträge der Kasaner Universität", die noch heute erscheint, weithin bekannt wurde. In Kasan studierten in der Folgezeit so bekannte Persönlichkeiten wie *L. N. Tolstoi*, die Chemiker *Sinin* und *Butlerow*, *Ilja Nikolajewitsch Uljanow* und am Ende des 19. Jahrhunderts *Wladimir Iljitsch Uljanow-Lenin*.

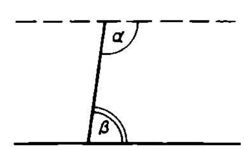
Viel Energie wandte der Rektor auf, um ein in Kasan im Jahre 1842 ausgebrochenes Feuer zu bekämpfen. (Es brannten auch die Universitätsbibliothek und das neuerbaute Observatorium.) *Lobatschewski* leitete die Rettungs- und Löscharbeiten. Das Observatorium fiel den Flammen zum Opfer; es konnten aber alle Einrichtungen gerettet werden. Das Feuer in der Bibliothek konnte rechtzeitig gelöscht werden. Unterdessen verbrannte das Haus von *Lobatschewski* und ebenso seine Universitätswohnung. Darüber hinaus kamen das gesamte Eigentum und die unschätzbaren Handschriften von *Lobatschewski* im Feuer um.

Die Kühnheit seiner Urteile und sein aufrechter Charakter waren Ursachen dafür, daß man gegen *Lobatschewski* zu intrigieren begann. Schließlich kam es zu seiner Entlassung von der aktiven Leitung und von der pädagogischen Tätigkeit. Seine Kräfte verließen ihn jetzt schnell. Aber er glaubte trotz allem an die große Zukunft seiner Entdekkung. Sein wissenschaftliches Testament *Pangeometrie* konnte noch kurz vor seinem Tod erscheinen. Schon in seiner Jugend interessierte sich *Lobatschewski* für die Grundlagen der Geometrie und unterzog die Elemente *Euklids* einer kritischen Prüfung. Besonders das 5. Postulat zog ihn in seinen Bann:

„Bringt man zwei Geraden mit einer dritten zum Schnitt und beträgt die Winkelsumme auf einer Seite weniger als zwei rechte Winkel, so schneiden sich die beiden Geraden."



$\alpha + \beta < 180°$



$\alpha + \beta = 180°$

Die Geometer versuchten seit vielen Jahrhunderten, das 5. Postulat als Theorem zu beweisen, doch stets führte man dabei unbebeweisen, doch stets führte man dabei unbewußt irgendeine offensichtlich richtige Voraussetzung ein. „... *In der Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Geraden den gleichen Abstand haben, wieder eine Gerade."* Das schrieb *Posidoni* (Rom, 1. Jh. v. u. Z.).

Omar Chaijam (Mittelasien, 11. Jh.) behauptete: *„... zwei sich nähernde Geraden schneiden sich stets."*

„... Zu jeder Figur kann man eine ähnliche konstruieren." Das schrieb *John Wallis* (Engl., 17. Jh.).

Alexis Claude Clairaut (Frankreich, 18. Jh.) entwickelte eine *Theorie der parallelen Linien* auf der Grundlage der Existenz eines Rechtecks.

Wolfgang Bolyai (Ungarn, Ende des 18., Beginn des 19. Jh.) bewies das 5. Postulat unter der Annahme, daß man durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, stets einen Kreis legen kann.

Aber alle diese Voraussetzungen erwiesen sich als äquivalent zum 5. Postulat von *Euklid* oder sie waren sogar noch stärker als das Postulat. So ist zum Beispiel die Behauptung, daß durch einen Punkt, der außerhalb einer gegebenen Geraden liegt, eine und nur eine Gerade geht, die die gegebene Gerade nicht schneidet, äquivalent damit, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Bereits 1828 wurde *Lobatschewskis* Geometrievorlesung gedruckt. Im ersten Teil entwickelte er die absolute Geometrie, die das Parallelenaxiom nicht benützte. *Lobatschewski* war fest davon überzeugt, daß alle Axiome *Euklids* ohne das Parallelenaxiom sich nicht widersprechen.

Eine wichtige Rolle spielte für *Lobatschewskis* Entdeckung seine kritische Einstellung zu der Überzeugung, daß unser geometrisches Wissen angeboren ist. Aus dieser seiner Auffassung heraus entstand ein einzigartiges geometrisches System.

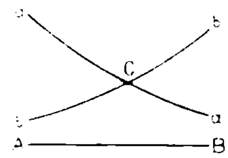
Das Akademiemitglied *Nikolai Iwanowitsch Fuß*, ein Schüler des großen *Euler*, äußerte sich sehr negativ über *Lobatschewskis* Arbeit. *Fuß* war besonders über die Einführung des Meter als Maßeinheit und über die Unterteilung des Kreises in 400 Grad statt in 360 Grad empört. Er schrieb in seiner Rezension:

„Diese neuen Einheiten wurden während der französischen Revolution ausgedacht, aber wegen der offensichtlichen Unbequemlichkeit werden diese Neuheiten bald wieder vergessen sein ...“.

Diese Rezension war zweifach falsch. Erstens erwiesen sich die genialen Ideen *Lobatschewskis* nicht nur *Fuß*, sondern auch vielen anderen talentierten Gelehrten jener Zeit als unzugänglich. Und zweitens wurde das Meter ein in der gesamten Welt gebräuchliches Längenmaß.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski ließ sich nicht durch die vernichtende Rezension von *N. I. Fuß* beirren, sondern er entwickelte seine Ideen weiter und machte in den folgenden Jahren einen genialen, aber einfachen Schritt. Er löste sich vom 5. Postulat, das das Denken der Geometer während fast zweitausend Jahren beherrschte und das von keinem Vorgänger oder Zeitgenossen *Lobatschewskis* angezweifelt wurde.

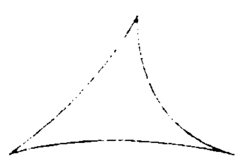
Er nahm an, daß man durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nicht weniger als zwei Geraden legen kann, die die vorgegebene Gerade nicht schneiden. Aus dieser auf den ersten Blick sinnlosen Voraussetzung zog *Lobatschewski* weitere Schlüsse. Dabei gelangte er zu keinerlei Widersprüchen. Darüber hinaus erhielt er ein in sich abgeschlossenes logisches geometrisches System, das er als scheinbare Geometrie bezeichnete analog zu den imaginären Zahlen, die er auch scheinbar nannte. Ebenso wie die imaginären Zahlen die allgemeinsten Zahlen sind für die die Gesetze der gewöhnlichen Algebra gelten, so ist die scheinbare Geometrie das allgemeinste geometrische System, für die alle Axiome Euklids bis auf das Parallelenaxiom zutreffen.



Lobatschewski nahm an, daß man durch einen Punkt *C*, der außerhalb der Geraden *AB* liegt, mindestens zwei Geraden *a* und *b* legen kann, die die Gerade *AB* nicht schneiden.

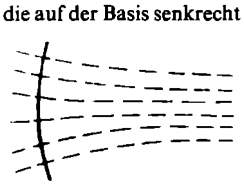
Und ebenso wie die reellen Zahlen ein Spezialfall der komplexen Zahlen sind, so ist auch die gewöhnliche euklidische Geometrie ein Spezialfall eines allgemeinen geometrischen Systems. Die *Scheingeometrie* unterscheidet sich wesentlich von der *euklidischen Geometrie.*

Zunächst ist die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180°. Dann ist die Punktmenge der Ebene, die von einer gegebenen Geraden, der Basis, den gleichen Abstand hat, im allgemeinen keine Gerade mehr. Man nennt sie *Äquidistante*. In dieser Geometrie kann man durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, einen Kreis oder eine Äquidistante oder auch einen Grenzkreis legen.

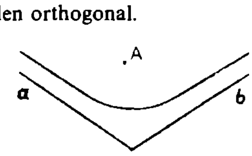


Die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als 180°.

Die Äquidistante ist zu allen Geraden orthogonal, die auf der Basis senkrecht stehen.



Der Grenzkreis ist zum Büschel paralleler Geraden orthogonal.



Durch den Punkt *A* kann man i. allg. keine Gerade legen, die die Strahlen *a* und *b* schneidet.

Weiterhin kann man im allgemeinen durch einen Punkt, der im Inneren derjenigen Fläche liegt, die zwei sich schneidende Geraden bilden, keine Gerade legen, die die beiden anderen Geraden schneidet. Schließlich gibt es in dieser Geometrie keine ähnlichen Vielecke.

Lobatschewski leitete die trigonometrischen Beziehungen in den Dreiecken seiner Geometrie her. Er führte Koordinaten ein und konnte damit erstmals eine große Anzahl von Aufgaben der analytischen Geometrie, der Flächen- und Umfangsberechnung und viele bestimmte Integrale lösen.

Durch ein Experiment versuchte *Lobatschewski* herauszufinden, ob in der realen Welt die *euklidische* oder die *scheinbare Geometrie* gilt. Dazu berechnete er die Winkelsumme im Dreieck. Das Dreieck bildeten dabei zwei diametral entgegengesetzte Punkte der Erdbahn und ein Fixstern. *Lobatschewski* fand, daß die berechnete Winkelsumme innerhalb der Fehlergrenzen des Experiments nicht von 180° abwich, und er folgerte deshalb, daß man die Geometrie in der realen Welt als euklidisch ansehen kann. Er war aber trotzdem der Ansicht, daß man bei großen kosmischen Dreiecken eine Abweichung der Winkelsumme von 180° feststellen kann.

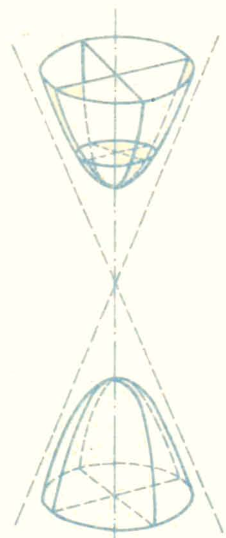
Unabhängig von *Lobatschewski* entdeckten zwei weitere Mathematiker die nichteuklidische Geometrie. Schon Ende des 18. Jahrhunderts kam *Gauß* auf die Idee, eine nichteuklidische Geometrie zu betrachten. Er beschäftigte sich einige Jahrzehnte hindurch mit dieser Frage, aber er veröffentlichte seine Ergebnisse nicht. Wenig später entdeckte *Johann Bolyai* die nichteuklidische Geometrie. Seine Ergebnisse erschienen als Anhang zum mathematischen Werk seines Vaters *Wolfgang Bolyai*, das 1832 gedruckt wurde. Man spricht nun *Lobatschewski* die Priorität der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie zu, da *Gauß* seine Ergebnisse nicht veröffentlichte und weil *Bolyai* seine Entdeckung nach *Lobatschewski* publizierte.

Am 23. Februar 1826 hielt der 33jährige *Lobatschewski* einen Vortrag über seine Geometrie auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Abteilung der Kasaner Universität, und er bat darum, seine Ergebnisse zu veröffentlichen. Die Anwesenden verstanden die Darlegungen von *Lobatschewski* nicht. Sie wählten deshalb eine Kommission aus drei Spezialisten, die sich ausführlich mit der Arbeit beschäftigen sollte. Jedoch verstand die Arbeit weder der Adjunkt *Nikolai Dimitriwitsch*, der später ein großer Gelehrter wurde und die Moskauer Mathematische Gesellschaft begründete, noch Professor *Alexander Jakowlewitsch Kupfer*. Auch *Lobatschewskis* alter Freund und Schulkamerad *Iwan Michailowitsch Simonow*, der in jener Zeit ein angesehener Gelehrter war, erkannte die große philosophische Bedeutung der neuen Geometrie nicht. Es vergingen

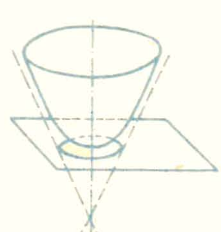
viele Jahre; aber es traf kein Gutachten der wissenschaftlichen Kommission ein. Die unschätzbare Arbeit wurde im Archiv der Universität abgelegt.
Lediglich 1829 erschien eine erste Fassung der Entdeckung *Lobatschewskis* unter dem Titel *‚Über die Grundlagen der Geometrie* in der Universitätszeitschrift *Kasaner Bote*. In den 30iger Jahren des 19. Jahrhunderts erschienen einige weitere Aufsätze und Memoiren, in denen die Hauptresultate dargelegt wurden.
Im Jahre 1840 erschien in Berlin *Lobatschewskis* Buch *„Geometrische Untersuchungen zur Theorie der parallelen Linien"* in deutscher Sprache. Es enthielt eine systematische Darstellung seiner Entdeckungen. Dieses Buch las auch *Karl Friedrich Gauß*. Er war der einzige Mahtematiker jener Zeit, der in der Lage war, die Genialität von *Lobatschewskis* Entdeckungen zu erkennen. Er erkannte sie auch. *Gauß* schrieb 1841 an eine seiner Schüler: *„Wie man mir mitteilte, sind in den Veröffentlichungen der Kasaner Universität viele Aufsätze von Lobatschewski in russischer Sprache enthalten. Mein Wunsch ist es, diese Aufsätze dieses geistreichen Mathematikers zu lesen."* Mit 63 Jahren begann er die russische Sprache zu lernen. *Gauß* schrieb später: *„Ich kann jetzt schon recht fließend russisch lesen und das bereitet mir große Freude."*
Lobatschewski wurde auf Initiative von *Gauß* zum korrespondierten Mitglied der *Göttinger königlichen Gesellschaft* gewählt. Das Diplom wurde *Lobatschewski* nach Kasan zugeschickt. Darin wird er als einer der vortrefflichsten Mathematiker des russischen Staates bezeichnet.
Aber auch der König der Mathematiker verschaffte *Lobatschewski* keine öffentliche Anerkennung für seine Entdeckung. *Gauß* fürchtete das Unverständnis seiner Zeitgenossen. Lediglich ein Kollege von *Lobatschewski*, der Professor der Kasaner Universität *P. I. Kotelnikow*, trat öffentlich für die wissenschaftliche und erkenntnistheoretische Bedeutung der Entdeckung von *Lobatschewski* ein. Die wirkliche Anerkennung kam erst einige Jahre nach seinem Tode dank der Arbeiten von *Eugenio Beltrami* (Italien), *Felix Klein* (Deutschland) und *Henri Poincaré* (Frankreich).

Lobatschewski schrieb mehrere Arbeiten über andere Gebiete der Mathematik. Einige Veröffentlichungen bezogen sich auf seine neue Geometrie wie zum Beispiel ein Aufsatz über die Berechnung bestimmter Integrale. Ein anderer beschäftigte sich mit dem zufälligen Fehler bei der Berechnung der Winkelsumme in Dreiecken mit großen Seiten. Andere Arbeiten betrafen Gebiete der Algebra und Analysis: *Algebra oder das Rechnen mit endlichen Größen* (1834), *Über das Verschwinden trigonometrischer Reihen* (1834), *Über die Konvergenz unendlicher Reihen* (1841) u. a.
Lobatschewski gab mit als einer der ersten eine allgemeine Definition der *Funktion*. Ebenso formulierte er die Begriffe der *Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion* und zeigte den Unterschied auf. Aber *Lobatschewskis* Hauptverdienst war die Überwindung der gewohnten und intuitiven Vorstellung in der Geometrie. Das war der Verzicht auf das 5. Postulat und die Schaffung einer verallgemeinerten Geometrie, in der die euklidische Geometrie nur ein Spezialfall ist. Damit bereicherte *Lobatschewski* den Schatz der Weltwissenschaft um einen wertvollen Beitrag.
„Die Ideen unseres genialen Landsmannes, die noch vor hundert Jahren als unzulässiges Paradox angesehen wurden, sind heute, weiterentwickelt und verallgemeinert, wichtige Bausteine in der allgemeinen Wissenschaft."
Das sind die Worte des angesehenen sowjetischen Geometers *P. K. Raschewski*.

A. J. Halameisär/B. A. Rosenfeld

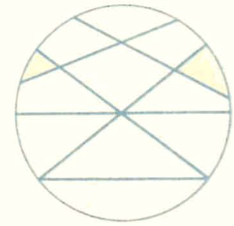


Auf jeder Fläche des Hyperboloids kann man die Lobatschewskische Geometrie realisieren, wenn man die Entfernung d zwischen zwei Punkten $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ durch
$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$ definiert. Einen Raum mit einer solchen Abstandsdefinition bezeichnet man als *pseudoeuklidisch*.

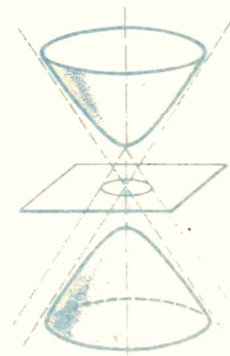


Die *Beltrami-Kleinsche Interpretation* erhält man, wenn die Kugel mit imaginärem Radius im pseudoeuklidischen Raum auf diejenige Ebene projeziert wird, die die Kugel im Zentrum berührt.

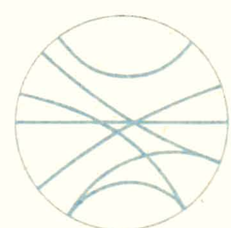
Auf dem Umschlag:
Die pseudosphärische Fläche von Beltrami.



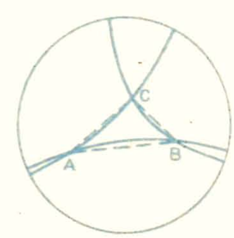
Nach der Beltrami-Kleinschen Interpretation ist die gesamte Lobatschewskische Ebene eine Kreisfläche. Die Geraden sind die Sehnen des Kreises.



Die *Pioncarésche Interpretation* erhält man, wenn die Kugel mit imaginärem Radius des pseudoeuklidischen Raumes von einem Pol aus auf die Äquatorialfläche projeziert wird.



Nach der Pioncaréschen Interpretation ist die Lobatschewskische Ebene ebenfalls eine Kreisfläche. Die Geraden stehen senkrecht auf dem Kreis und sie sind ebenfalls Kreise. Die Winkel behalten ihre natürliche Größe.



Ein Dreieck in der Pioncaréschen Interpretation. Offensichtlich ist die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als 180°.

Solidarität in Aktion

Liebe junge Freunde!
Seit Jahren führten die amerikanischen Imperialisten einen barbarischen Krieg gegen unser Volk. Ihre Ziele waren nicht nur Kraftwerke, Betriebe und Bewässerungsanlagen, sondern auch Kulturbauten und Bildungseinrichtungen. Hunderte Bildungseinrichtungen, von Kinderkrippen bis zu Hochschulen, die in den Augen der Aggressoren sogenannte militärische Ziele waren, wurden zerstört, zahlreiche Kinder getötet noch bevor sie ihre neuen Schulhefte geöffnet hatten. Lehrer kamen ums Leben, bevor sie alle ihre ihnen anvertrauten Schüler richtig kennengelernt hatten.

Der Aggressionskrieg ist beendet. Für uns beginnt eine neue Zeit, die Zeit, da der Wiederaufbau unseres Landes eine unserer wichtigsten Aufgaben ist.

Wir kämpfen nun nicht nur an den Ökonomie- und Verkehrsfronten, sondern auch an der Bildungsfront. Unser hochverehrter Präsident *Ho-Chi-Minh* hat gesagt: „Was immer geschehen mag — wir müssen den Wettbewerb für gutes Lehren und Lernen fortsetzen.“ und „Die Herausbildung und Erziehung der kommenden revolutionären Generation ist eine überaus wichtige und notwendige Aufgabe.“

Die Kinder von heute sind die Herren von morgen, die einen wichtigen Beitrag zum Aufbau des Sozialismus und zur Verteidigung unseres Landes leisten werden. Die Herausbildung der Menschen neuen Typus, die die Liebe zum Vaterland und das sozialistische Bewußtsein in sich vereinen, die die Wissenschaft und Technik beherrschen, ist eine große Aufgabe der Partei und des ganzen Volkes. Trotz Bomben und Krieg hat sich unser Bildungswesen in raschem Tempo sowohl qualitativ als auch quantitativ entwickelt. Folgende Zahlen belegen das:

1965 lernten 2 670 000 Schüler in 9 295 Schulen.

1969 erhöhte sich die Zahl der Schüler auf 4 000 000 und die der Schulen auf 11 362.

1972 wurden trotz barbarischem Bombardement die Schulen mit 4 700 000 Schülern wieder feierlich eröffnet. Wir sind sehr stolz auf diese Zahlen, die neben der Anzahl der abgeschossenen USA-Flugzeuge ein Symbol für den Sieg unseres Volkes ist.

Zerstörte Schulen werden durch Hütten aus Bambusmaterial ersetzt — von Schülern und Lehrern selbständig aufgebaut — bis neue feste Bauwerke an ihre Stelle treten können. Unsere Schüler verstehen sehr wohl wofür und wozu sie lernen. Eine neunjährige Schülerin schreibt:

Mein großer Traum ist es
Eine Arbeiterin zu werden;
Um liebe Schulen und Städte
wieder schöner aufzubauen.

Ein anderer Schüler schrieb:

In meiner kleinen Schule lerne ich,
in die weite Welt zu schauen.

Im Wettbewerb *Für gutes Lehren und Lernen* bemühen sich alle Schüler, zu allseitig entwickelten Persönlichkeiten zu werden. Die Mathematik spielt dabei eine große Rolle. Heute ist es schwierig, ein Gebiet zu finden, sei es in der Praxis, in Wissenschaft oder Technik, auf dem man ohne Mathematikkenntnisse gut arbeiten kann. Unter der Losung *Keine Angst vor der Mathematik* dringen viele junge Freunde in dieses Schwerpunktfach mehr und mehr ein. Die Liebe zur Mathematik wird zu einem der Ziele der Schüler.

Gute Grundkenntnisse, festes theoretisches Wissen soll gepaart sein mit der Kenntnis über mathematische Probleme aus der gesellschaftlichen Praxis. Zahlreiche Schüler bemühen sich, mit ihren in der Schule erworbenen Mathematikkenntnissen praktische Probleme in den landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften zu lösen.

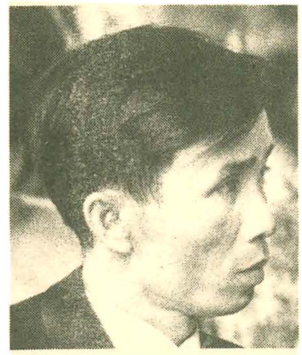
Zur Erfüllung dieser großen Aufgaben leistet die mathematische Schülerzeitschrift „TOAN HOC VA TUOI TRE“ (Mathematik und Jugend) einen wichtigen Beitrag. Jährlich erhalten viele Leser, die die zahlreich gebotenen Aufgaben gut gelöst haben, wertvolle Preise. In Mathematikolympiaden haben alle *Jungen Mathematiker* Gelegenheit, ihr Können zu beweisen. Sehr gute Schüler werden in Spezialschulen für Mathematik aufgenommen. So bieten sich zahlreiche Möglichkeiten, sich für die Mathematik zu interessieren und immer tiefer in ihre Probleme einzudringen.

Immer mehr Kinder unseres Volkes interessieren sich für die Mathematik. Sie prägen sich die Worte unseres Ministerpräsidenten *Phan-Van-Dong* ein:

Mathematik ist der Sport des Gehirns. Sie hilft, uns zu Methoden des Denkens, des Lernens, des Lösens verschiedenartigster Probleme und zur schöpferischen Intelligenz zu erziehen.

Liebe junge Freunde in der DDR!
Wir bedanken uns bei Euch für Eure Sympathie und Solidarität für unser Volk und unser Vaterland. Wir beglückwünschen Euch zu Euren steten, sehr guten Leistungen bei Internationalen Mathematikolympiaden.

Freundschaft



Tran-Khanh-Hung
und Nguyen-Ba-Kim

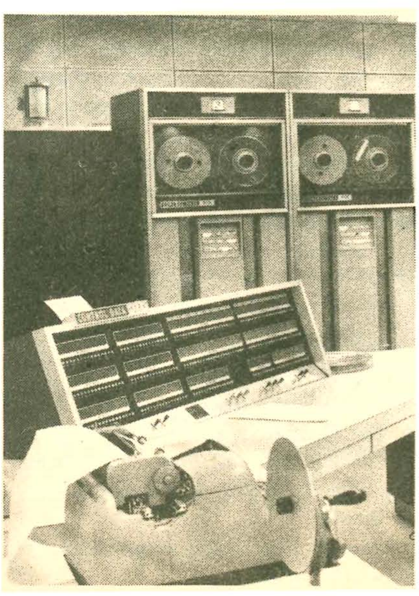
Über die Botschaft der DRV in Berlin erhielt die Redaktion *alpha* die vietnamesische mathematische Zeitschrift *Mathematik und Jugend* (im Austausch mit unserer Zeitschrift).

Wir danken der mathematischen Gesellschaft der DDR, insbesondere Herrn Prof. Dr. Wintgen, Berlin. Durch sie wurden direkte freundschaftliche Verbindungen zu vietnamesischen Aspiranten und Studenten in Berlin und Halle sowie mit dem Sekretär der mathematischen Schülerzeitschrift *Mathematik und Jugend* geschaffen (siehe S. 127). Unser Bildbericht soll einen kleinen Einblick in die herzlichen Kontakte mit unseren Freunden aus der DRV geben.

Das Foto zeigt die Eröffnung der 2. Tagung der Fachsektion Unterricht und Ausbildung (9. bis 12. 5. 1973) der mathematischen Gesellschaft der DDR an der Päd. Hochschule *Lieselotte Herrmann* in Güstrow.

Unter den 600 Teilnehmern befanden sich — als Gäste der MG der DDR — die beiden Aspiranten, welche obigen Beitrag überreichten. Es kam zu einem umfassenden freundschaftlichen Erfahrungsaustausch mit dem Chefredakteur von *alpha*.

Als Abschluß und Höhepunkt der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik lud der *alpha-Club* der 29. OS Leipzig beide Aspiranten zu einem Besuch in die Messestadt ein. *Unser Foto:* Die beiden Freunde bei einem Stadtbummel, begleitet von den Jugendfreunden des *alpha-Clubs* und Mitgliedern ihrer Patenbrigade, dem *Wartungskollektiv des Rechenzentrums des Zentralinstituts für Metallurgie*, Leipzig.



Die Mitglieder des *alpha-Clubs* besuchen gemeinsam mit den beiden vietnamesischen Freunden das Rechenzentrum des Zentralinstituts für Metallurgie. In einem anschließenden Forum berichten sie über den Kampf des vietnamesischen Volkes gegen die Aggressoren und über den Wiederaufbau ihres Landes. Die FDJler des *alpha-Clubs* berichten, daß die Schüler der 29. OS im ersten Halbjahr 1 530 M und das Lehrerkollektiv 1 750 M für den Wiederaufbau in der DRV gespendet haben. Die Patenbrigade des *alpha-Clubs* überreicht 200 M.

▶

Herzliche Aussprache über enge Zusammenarbeit zwischen dem Redaktionssekretär der vietnamesischen Schülerzeitschrift *Mathematik und Jugend* und dem Chefredakteur von *alpha* in Potsdam.

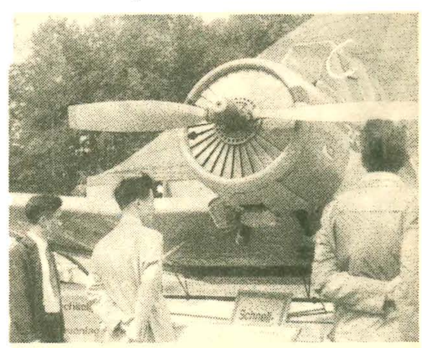
Eine Aufgabe von
Tran Khanh Hung und Nguyen Ba Kim

Demokratische Republik Vietnam

▲1131a▲ Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl gibt, die die folgenden Eigenschaften hat:
Bei der Division dieser Zahl
durch 3 ergibt sich der Rest 1,
durch 4 ergibt sich der Rest 2,
durch 5 ergibt sich der Rest 3,
durch 6 ergibt sich der Rest 4.
Bejahendenfalls ist die kleinste natürliche Zahl anzugeben, die diese Eigenschaften hat.

▲1131b▲ Auf einem Tisch liegen 30 Hölzchen. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
Zunächst nimmt A von dem Haufen mindestens 1, aber höchstens 6 Hölzchen weg; dann nimmt B von den verbleibenden Hölzchen mindestens 1, aber höchstens 6 Hölzchen weg; dann folgt wieder A, dann B usw. Wer die letzten Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.
Wie kann der Spieler A, der die ersten Hölzchen wegnimmt, erreichen, daß er unter allen Umständen gewinnt?

Besuch der Agra 1973



Millionen auf der Bleistiftspitze

Teil 2

Aufgabe:

▲2▲ Ein Werk kann Geräte zweier verschiedener Typen *B* und *M* herstellen. Für jedes Gerät *B* werden 15 Dioden und 12 Trioden, für jedes Gerät M — 2 Dioden und 6 Trioden gebraucht. Eine Überprüfung am Prüfstand des Gerätes *B* dauert 3 Minuten, des Gerätes *M* — 12 Minuten. Beim Verkauf erhält das Werk für ein Gerät *B* — 9 Mark Gewinn (nicht gerechnet die Unkosten), für ein Gerät *M* — 6 Mark. Die Materialien zur Herstellung der Geräte sind beschränkt; während jeder Schicht kann das Werk über nicht mehr als 300 Dioden und 306 Trioden verfügen, und der Prüfstand kann in jeder Schicht nicht mehr als 6 Stunden (360 Minuten) zuverlässig arbeiten.
Wie viele Geräte *B* und *M* muß das Werk herstellen, damit der Gewinn (in einer Schicht) maximal wird?
Im Teil I wurde die Lösung dieser Aufgabe dargestellt. Die dort auch zitierten Tabellen 5, 6 und 7 holen wir an dieser Stelle nach.

Wir werden jetzt zur Lösung dieser Aufgabe eine andere, die sogenannte *Simplex-Methode* betrachten. Wir führen nichtnegative Veränderliche X_3, X_4 und X_5 ein, um die Bedingungen (1) bis (3) durch folgende Gleichungen zu ersetzen:

$$15\,X_1+\;2\,X_2+X_3=300 \qquad (6)$$
$$12\,X_1+\;6\,X_2+X_4=306 \qquad (7)$$
$$3\,X_1+12\,X_2+X_5=360. \qquad (8)$$

Wir drücken die neueingeführten Größen (*Basisgrößen*) X_3, X_4 und X_5 durch die Anfangsgrößen (*freie Größen*) X_1 und X_2 aus:

$$X_3=300-15\,X_1-\;2\,X_2 \qquad (9)$$
$$X_4=306-12\,X_1-\;6\,X_2 \qquad (10)$$
$$X_5=360-\;3\,X_1-12\,X_2. \qquad (11)$$

Die *Simplex-Methode* besteht in der schrittweisen Verbesserung der vorhandenen Lösungen. Deshalb muß man zuerst irgendeine zulässige Lösung (entsprechend den Bedingungen (1) bis (5))[3] finden, die nicht unbedingt optimal ist. Das leichteste ist, man setzt

$$X_1=X_2=0.$$

Dabei ist der Gewinn $T=9\,X_1+6\,X_2$ natürlich auch gleich Null.
Eine *Verbesserung* der Lösung soll in der Vergrößerung des Gewinns bestehen. Man kann dazu z. B. X_1 vergrößern[4], nur müssen wir beachten, daß alle Veränderliche nur nichtnegative Werte annehmen können. Aus Bedingung (9) ist zu ersehen, daß

$$X_1=\frac{300}{15}=20.$$

Ähnlich erhalten wir aus (10) und (11)

$$X_1\leqq\frac{306}{12}=25{,}5 \text{ und } X_1<\frac{360}{3}=120,$$

d. h. X_1 kann nicht größer als 20 sein. Wir setzen $X_1=20$.
Dann erhalten wir aus (9) bis (11)

$$X_2=X_3=0;\; X_4=66;\; X_5=300.$$

Alle Veränderlichen erwiesen sich als nichtnegativ, die Lösung also als zulässig. Wir berechnen den entsprechenden Wert der Zielfunktion (Gewinn):

$$T_1=9\cdot 20+6\cdot 0=180.$$

[3] Diese Bedingungen sind gleichbedeutend damit, daß unsere fünf Unbekannten nicht negativ sein sollen.
[4] Da der Koeffizient bei X_{11} in der Zielfunktion größer ist als der Koeffizient bei X_2.

IV. Die gefundene Lösung ist *besser* als die anfängliche, es ist ein Gewinn von 180 Mark zu verzeichnen. Wir werden uns bemühen, diese Lösung noch zu *verbessern*. Dazu vertauschen wir die Rollen der Unbekannten: X_2 und X_3, die in unserer Lösung Null waren, werden wir als freie ansehen und alle übrigen Unbekannten sowie die Zielfunktion durch sie ausdrücken[5]:

$$X_1=\;20-\frac{2}{15}X_2-\frac{1}{15}X_3 \qquad (12)$$
$$X_4=\;66-\frac{22}{5}X_2+\frac{4}{5}X_3 \qquad (13)$$
$$X_5=300-\frac{58}{5}X_2+\frac{1}{5}X_3 \qquad (14)$$
$$T\;=180+\frac{24}{5}X_2-\frac{3}{5}X_3. \qquad (15)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, daß *T* gleichzeitig mit X_2 wächst. Auch hier müssen wir uns allerdings wieder daran erinnern, daß alle Veränderliche nur nichtnegative Werte annehmen können. Die Bedingung (12) führt zur Einschränkung $X_2\leqq 150$; ähnlich ergeben (13) und (14)

$$X_2\leqq 15 \text{ und } X_2\leqq\frac{1500}{58}\approx 25,$$

d. h. X_2 kann nicht größer als 15 sein. Wir setzen $X_2=15$. Dann erhalten wir aus den Bedingungen (12) bis (14):

$$X_1=18;\; X_3=X_4=0;\; X_5=126.$$

Die Werte aller Veränderlicher sind wirkwirklich nicht negativ, die Lösung also zulässig. Der entsprechende Wert der Zielfunktion beträgt

$$T_2=9\cdot 18+6\cdot 15=252$$[6]

V. Zur weiteren *Verbesserung* werden wir die Größen X_3 und X_4 als freie ansehen (bei der vorhergehenden Lösung nahmen sie den Wert 0 an!), und alle übrigen Unbekannten und die Zielfunktion durch sie ausdrücken

$$X_1=18-\frac{1}{11}X_3+\frac{1}{33}X_4 \qquad (16)$$
$$X_2=15+\frac{2}{11}X_3-\frac{5}{22}X_4 \qquad (17)$$
$$X_5=126-\frac{21}{11}X_3+\frac{29}{11}X_4 \qquad (18)$$
$$T\;=252+\frac{3}{11}X_3-\frac{12}{11}X_4. \qquad (19)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, daß *T* gleichzeitig mit X_3 wächst. Ähnlich wie oben finden wir die Bedingung $X_3\leqq 66$. Als nächste *Verbesserung* erhalten wir:
$X_1=12$; $X_2=27$; $X_3=66$, $X_4=X_5=0$.

[5] Hier wie auch im weiteren Verlauf führen wir die Umwandlungen der Gleichungen nicht aus, sondern geben nur das Endresultat an. Der Leser sollte aber alle Umwandlungen ausführlich ausführen. Gerade hier braucht man also auch den eingangs erwähnten Bleistift.
[6] Diesen Wert kann man auch aus der Gleichung (15) erhalten.

Beschränkungen	Bedarf		Bemerkungen	Gewinn je Gerät		
Vorräte	B	M		B	M	
300	15	2	Dioden (Stück)			
306	12	6	Trioden (Stück)	9	6	Tab. 5
360	3	12	Arbeitszeit des Prüfstandes			
225	15	4				
100	5	3		6	8	Tab. 6
192	4	8				
333	9	9				
360	5	12		9	12	Tab. 7
400	16	4				

Die Werte aller Veränderlichen sind nichtnegativ, die Lösung also zulässig. Als entsprechenden Wert der Zielfunktion erhalten wir

$$T_3 = 9 \cdot 12 + 6 \cdot 27 = 270.$$

Um die nächste *Verbesserung* zu erhalten, wählen wir X_4 und X_5 als freie Unbekannte und drücken mit ihrer Hilfe die Zielfunktion aus:

$$T = 270 - \frac{1}{7} X_5 - 5X_4. \qquad (20)$$

Bei $X_4 = X_5 = 0$ erhalten wir offensichtlich $T = 270$. Bei positiven Werten dieser Veränderlicher wird $T < 270$, und negative Werte der Veränderlichen sind nicht zulässig. Eine weitere *Verbesserung* ist also unmöglich, der gefundene Wert der Zielfunktion ist maximal und die Lösung selber $X_1 = 12$ und $X_2 = 27$ – optimal

Interessant ist die Feststellung, daß die aufeinanderfolgenden verbesserten Werte der Zielfunktion mit den Werten T_0, T_1, T_2 und T_3 zusammenfallen, die wir bei der graphischen Lösungsmethode erhielten.

VI. Das Wesen der *Simplex-Methode* besteht also in der schrittweisen Veränderung der Basis und, folglich, im schrittweisen Übergang von einer Ecke des Vielecks zur anderen. Im Fall von drei Unbekannten erhalten wir anstelle eines Vielecks, das durch Geraden begrenzt ist, ein durch Flächen begrenztes Polyeder (Vielkant). Wenn es noch mehr Unbekannte sind, muß man sich ein n-dimensionales Polyeder zulässiger Lösungen vorstellen; die schrittweise Verbesserung der Lösung wird dabei zum Übergang von einer Ecke des Polyeders zu einer anderen geführt. Man kann auch ein Programm der nächstfolgenden Verbesserung für eine elektronische Rechenmaschine aufstellen.

Die Notwendigkeit der Anwendung mathematischer Methoden bei der Lösung ökonomischer Aufgaben steht schon längst außer jedem Zweifel. Nur ist es zur Einführung dieser Methoden in die Volkswirtschaft notwendig, daß sie von einem großen Kreis von Ökonomen beherrscht wird. Übrigens sind zur Ausführung von Berechnungen in Verbindung mit solchen Aufgaben mathematische Kenntnisse im Umfang der 8. Klasse durchaus ausreichend. Und nur bei einer sehr großen Anzahl von Ausgangsgrößen ist die Hilfe eines Mathematikers, eines Programmierers und die Anwendung einer elektronischen Rechenmaschine notwendig.

Zum Schluß geben wir euch die Möglichkeit, selbständig zwei Aufgaben zu lösen, ähnlich den oben besprochenen. Die Bedingungen dieser Aufgaben findet ihr in Kurzform in den Tabellen 6 und 7, die der Tabelle 5 ähnlich sind.

A. Halameisär

Die mathematische Schülerzeitschrift

Toan hoc va tuoi tre

Die mathematische Schülerzeitschrift *Toan hoc va tuoi tre* (Mathematik und Jugend) ist als Organ der *Vietnamesischen Mathematischen Gesellschaft* im Jahre 1964 ins Leben gerufen worden. Unter den Bedingungen des schwierigen Kampfes gegen den USA-Imperialismus ist die Zeitschrift regelmäßig alle zwei Monate einmal erschienen und hat damit das Lerninteresse der Schüler für die Mathematik wesentlich gefördert.

Schwerpunkte der Zeitschrift:

Gespräche mit *Jungen Mathematikern* – Biographien bekannter Mathematiker – Einführung in die moderne Mathematik – Mathematik und Praxis – Mathematik-Olympiaden der DRV – Mathematik-Olympiaden in den sozialistischen Bruderländern und IMO – Mathematische Aufgaben und Lösungen.

Die Schüler nehmen mit großer Begeisterung an den Wettstreiten zur Lösung der gestellten Aufgaben teil. Neben den Aufgaben, die von den Mathematikern, Fachlehrern und Schülern der DRV gestellt wurden, übernehmen wir auch Aufgaben aus den mathematischen Schülerzeitschriften der sozialistischen Länder, z. B. *Quant* (UdSSR) und *alpha*. Die vietnamesischen Schüler haben große Freude beim Lösen solcher Aufgaben und finden dafür manche sehr interessante Lösungen.

Wir möchten die *alpha*-Leser mit einigen Aufgaben aus *Toan hoc va tuoi tre* bekanntmachen. Manche Aufgaben sind den *alpha*-Lesern vielleicht schon bekannt, jedoch deren neuen Lösungswege werden noch gesucht. Nun wünschen wir viel Freude beim Knobeln!

Hiermit bringen wir die Hoffnung zum Ausdruck, daß in Zukunft die mathematischen Schülerzeitschriften unserer Länder eine regelmäßige Beziehung miteinander unterhalten. Es wird sicherlich für die *alpha*- und *toanhocvatuoitre*-Leser nützlich sein.

Hoang Chung

Aufgaben

▲1▲ Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c mit

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a+b \geqq 0, a+c \geqq 0, b+c \geqq 0$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$$

genau dann gilt, wenn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

▲2▲ Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen a, b, c und für alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen n gilt:

Wenn $a+b+c$ und $a^2+b^2+c^2$ durch n teilbar sind, so ist auch $a^4+b^4+c^4$ durch n teilbar.

▲3▲ Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$.

Man ermittle alle reellen Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des folgenden Gleichungssystems:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a^n.$$

▲4▲ Man ermittle alle natürlichen Zahlen k mit $k \geqq 3$, für die die Gleichung

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+k-2)^3 = (x+k-1)^3$$

eine Lösung x hat, die eine natürliche Zahl ist.

▲5▲ Man beweise ohne Benutzung eines Tafelwerkes, daß

a) $\cos 36° > \tan 36°$;

b) $\cos 37°30' > \tan 37°30'$;

c) $\cos 38° > \tan 38°$.

▲6▲ Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, über dessen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ nach außen die Quadrate $CBDE$ und $CAFG$ konstruiert sind.

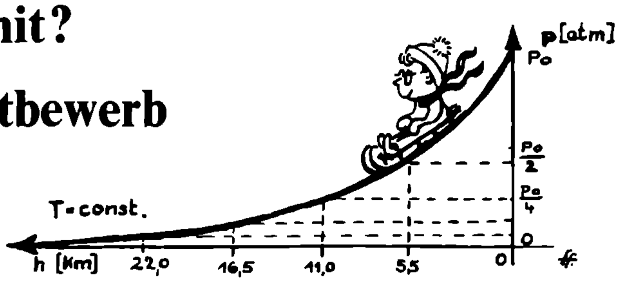
Man beweise, daß die Mittelpunkte P und Q dieser Quadrate und der Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ die Eckpunkte eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks sind.

Aus schaffensreicher Arbeit wurde unser Redaktionsmitglied, Mathematikfachlehrer *W. Unze*, am 29. 9. 1973 aus unserer Mitte gerissen. Wir verlieren in ihm einen gewissenhaften, pflichtbewußten Pädagogen, der seit Gründung der *alpha* mit Herz und unermüdlichem Fleiß mitarbeitete und damit einen aktiven Beitrag für die außerunterrichtliche Arbeit der Jugend leistete. Unser Foto: *W. Unze* im Unterricht.

Wer löst mit?

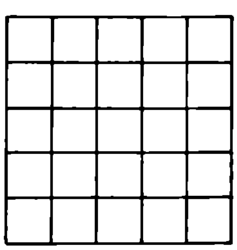
alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin:
7. März 1974



▲5▲1132 Die Schüler der Klassen 5a und 5b einer Schule halfen bei der Obsternte. Alle 31 Schüler der Klasse 5a pflückten an 9 Tagen jeweils nachmittags und schafften zusammen insgesamt 2 232 Körbe mit Äpfeln. Die 33 Schüler der Klasse 5b ernteten an 8 Nachmittagen zusammen insgesamt 2 210 Körbe mit Äpfeln; ein Schüler dieser Klasse hat dabei nur an 4 Nachmittagen geholfen. Welche dieser beiden Klassen erzielte die bessere Leistung, d. h. das höhere Durchschnittsergebnis je Schüler und je Nachmittag? *Albrecht Opitz, 825 Meißen*

▲5▲1133 Auf zehn Felder des abgebildeten Spielfeldes ist je ein Spielstein so zu setzen, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonale des Spielfeldes jeweils genau zwei Spielsteine liegen. Es ist eine mögliche Anordnung der zu setzenden zehn Spielsteine anzugeben! *T.*



W 5 ■ 1134 Einer 5. Klasse einer Schule gehören weniger als 30 Schüler an. Die letzte Klassenarbeit im Fach Mathematik hatte folgendes Ergebnis: Es erhielten doppelt so viel Schüler die Note 4 wie die Note 5, und doppelt so viel Schüler die Note 3 wie die Note 4. Es wurden genau so viel „Einsen" wie „Zweien" erreicht. Die Anzahl der „Dreien" war halb so groß wie die Anzahl der „Zweien". Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an, wenn zwei Schüler wegen Erkrankung die Klassenarbeit nicht mitgeschrieben haben? *Andreas Fittke, 1035 Berlin, Rosa-Thälmann-OS, Klasse 5*

W 5 ■ 1135 Eine Mutter hat ihren Kindern Äpfel mitgebracht. Gibt sie jedem Kind 5 Äpfel, so bleiben 3 Äpfel übrig. Will sie aber jedem Kind 6 Äpfel geben, so hat sie einen Apfel zu wenig. Wieviel Kinder und wieviel Äpfel waren es? *Sch.*

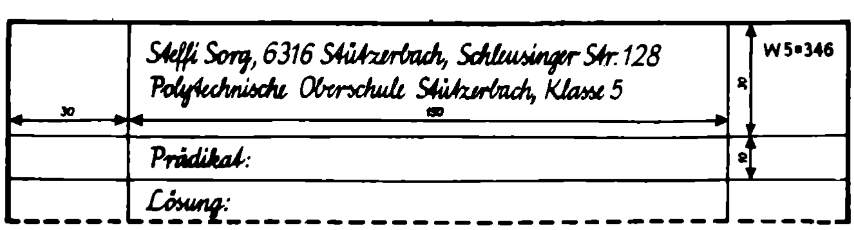
W 5*1136 Hans und Peter gehen über den Schulhof. Vor einer großen Linde bleibt Peter plötzlich stehen und sagt zu Hans: „Ich werde jetzt auf geradlinigem Wege bis zum 80 m vom Baum entfernten Zaun gehen und dabei in einem Abstand von jeweils einem Meter je eine Murmel auf die Erde legen, die letzte lege ich genau am Zaun nieder. Ich wette, daß du nicht in der Lage bist, innerhalb einer viertel Stunde jede Murmel einzeln zum Baum zurückzubringen." Hans nimmt die Wette an, da er davon überzeugt ist, dies zu schaffen. Wer von den beiden behält recht? *Albrecht Opitz, 825 Meißen*

W 5*1137 Die Familien Krause, Meier und Schmidt besitzen je ein Kraftfahrzeug vom Typ „Wartburg", „Skoda" bzw. „Trabant". Genau einer dieser PKW war von roter, genau einer von blauer und genau einer von grauer Farbe. Uns ist ferner folgendes bekannt:

a) Familie Krause erhielt weder einen blauen PKW noch ein Fahrzeug vom Typ „Trabant".
b) Familie Schmidt wurde Besitzer eines grauen PKW.
c) Der PKW vom Typ „Wartburg" ist nicht von roter Farbe.
d) Familie Meier wurde nicht Besitzer eines „Trabant".

Es sind jeweils der Fahrzeugtyp und die Fahrzeugfarbe für die Familien anzugeben. *Cornelia Linz, 75 Cottbus, Kl. 7*

▲6▲1138 Ein Junge hatte einen Fisch geangelt und wurde gefragt, wie schwer dieser sei. Scherzhaft antwortete er: „Der



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

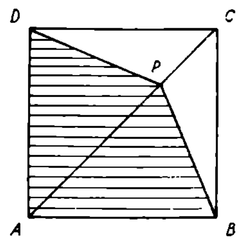
Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Fisch wiegt $\frac{3}{4}$ kg mehr als drei Viertel seines Gewichtes." Wieviel Kilogramm wiegt der Fisch? *Volker Zillmann, 801 Dresden*

▲6▲1139 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ dar. Ein innerer Punkt P der Diagonale $\overline{AC}$ wurde mit den Punkten B und D verbunden. Welchen Abstand muß P von der Geraden BC haben, wenn der Flächeninhalt des nicht schraffierten Flächenstückes (Viereck $BCDP$) gleich dem dritten Teil des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ sein soll? *Sch.*



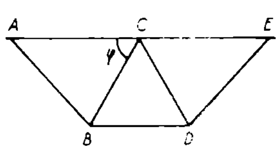
W 6 ■ 1140 Die Summe von fünf natürlichen Zahlen, von denen die folgende stets um 1 größer als das Doppelte der vorhergehenden ist, beträgt 243. Wie lauten diese fünf Zahlen?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz

W 6 ■ 1141 Der Bruch $\frac{1}{7}$ läßt sich bekanntlich als unendlicher Dezimalbruch darstellen. Es ist anzugeben, welche Grundziffer in diesem unendlichen Dezimalbruch an der 100. Stelle rechts vom Komma steht, ohne zuvor alle Stellen zu notieren.

Reinhard Schulz, 4401 Rotta

W 6*1142 Die Abbildung stellt zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDE$ dar. Die Punkte A, C und E liegen auf einer Geraden, und es gilt $\overline{AC}=\overline{CE}$, $\overline{AB}=\overline{DE}$ und $\overline{BC}=\overline{DC}$. Welche Bedingungen muß der Winkel $\sphericalangle ACB=\varphi$ erfüllen, damit das Dreieck BDC



a) spitzwinklig, b) rechtwinklig, c) stumpfwinklig, d) gleichseitig ist. Die Antworten sind zu begründen!

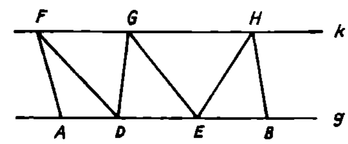
Mathematiklehrer Peter Brack, 5702 Großengottern

W 6*1143 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{ZWEI} \\ +\ \text{ZWEI} \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Grundziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Es ist von den möglichen Lösungen genau diejenige zu ermitteln, für welche „ZWEI" durch die kleinstmögliche Zahl belegt wird! *T.*

▲7▲1144 Die abgebildete Figur stellt zwei zueinander parallele Geraden g und k dar. Auf g wurden vier sämtlich voneinander verschiedene Punkte A, D, E und B, auf k drei sämtlich voneinander verschiedene Punkte F, G und H festgelegt, und es wurde F mit A und D, G mit D und E, H mit E und B verbunden. Es ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADF$, $\triangle DEG$ und $\triangle EBH$ ist, so zu konstruieren, daß die Strecke $\overline{AB}$ der abgebildeten Figur zur Dreiecksseite $\overline{AB}$ wird, und daß der Eckpunkt C mit dem Punkt G auf derselben Seite von g liegt. *L. L.*



▲7▲1145 Zwei Touristen mieten ein Faltboot, um für vier Stunden auf einem Fluß zu paddeln. Sie erreichen mit dem Boot eine durchschnittliche Eigengeschwindigkeit von 4,5 km · h^{-1} (bei stehendem Gewässer). Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt jedoch 1,5 km · h^{-1}.

a) Wie weit können sich die Touristen vom Anlegepunkt entfernen, wenn sie pausenlos paddeln und pünktlich zurück sein wollen?

b) Nach wieviel Stunden sind sie am Wendepunkt angelangt, wenn sie zunächst stromaufwärts fahren?

W 7 ■ 1146 Es ist ein Dreieck ABC aus den Stücken $\sphericalangle CAB=\alpha=50°$, $\overline{BE}=h_b=3$ cm und $\overline{AD}=s_a=2{,}5$ cm zu konstruieren; die Konstruktion ist zu begründen.

Nach E. Hameister, Geometrische Konstruktion und Beweise, mitgeteilt von Christine Kohlmann 8701 Lawalde, Kl. 11

W 7 ■ 1147 Das Café im Berliner Fernsehturm, das Plätze für 200 Gäste hat, ist täglich von 9.00 Uhr bis 24.00 Uhr geöffnet. Der Eintrittspreis für einen einstündigen Aufenthalt beträgt für Erwachsene 5,— M und für Kinder die Hälfte. Wieviel Erwachsene und Kinder besuchten während eines Tages das Turmcafé, wenn es stets ausverkauft war und die Tageseinnahme der Eintrittspreise 12 000 M betrug?

Claudia Busse, POS Bischofferode, Kl. 8

W 7*1148 Es sind alle sechsstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) Die Grundziffern der ersten und vierten Stelle von links gerechnet stimmen überein, ferner die Grundziffern an der zweiten und fünften Stelle, aber auch die Grundziffern an der dritten und sechsten Stelle.

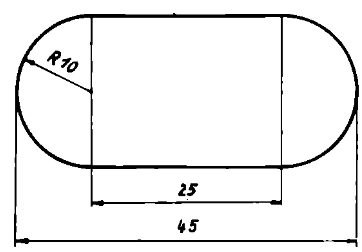
b) Die gesuchte Zahl ist gleich dem Siebenfachen einer Quadratzahl.

Volker Zillmann, 801 Dresden

W 7*1149 Die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Ecks ($n \geq 4$) beträgt $s=(n-2)\cdot 180°$. Es ist nachzuweisen, daß ein konvexes n-Eck höchstens vier rechte Innenwinkel besitzen kann. *T.*

W 7 ■ 1109: s. S. 130

▲8▲1150 Traglufthallen sind Konstruktionen aus mit Kunststoff beschichteten synthetischen Geweben, die frei von tragenden Konstruktionen im Innern sind und nur von dem durch Kompressoren erzeugten Überdruck gehalten werden. Solche Traglufthallen finden Verwendung im Bauwesen zum witterungsunabhängigen Bauen, als Montage-, Lager- und Messehallen usw.



Die beigefügte Abbildung zeigt den Grundriß einer Traglufthalle vom Typ B 43 des VEB Textil- und Veredlungsbetriebes Neugersdorf. Dieser Grundriß besteht aus einem Rechteck und zwei angesetzten Halbkreisen. Die Traglufthalle hat die Form eines Halbzylinders mit zwei angesetzten Viertelkugeln, ihre Höhe beträgt 10 m. Man berechne

a) die Grundfläche der Traglufthalle (in m^2),

b) den Rauminhalt der Traglufthalle (in m^3),

c) die Oberfläche der Traglufthalle (in m^2), also die Fläche des Gewebes, das für die Halle benötigt wird. *L.*

▲8▲1151 Die im Mai 1973 fertiggestellte 2 200 km lange Erdölleitung Ust-Balyk-Ufa-Almetjewsk hat eine maximale Durchlaßfähigkeit von 90 Mill t jährlich, d. h. bei einem ununterbrochenen Betrieb (365 Tage) können durch diese Leitung, die einen Rohrdurchmesser von 1 220 mm hat, in einem Jahr 90 Mill. t Erdöl fließen.

a) Wie groß ist unter diesen Bedingungen die mittlere Geschwindigkeit des transportierten Erdöls (in km · h^{-1} bzw. in m · s^{-1})?

b) Wieviel Stunden beträgt die Zeit, in der das Erdöl von Ust-Balyk bis Almetjewsk fließt? *L.*

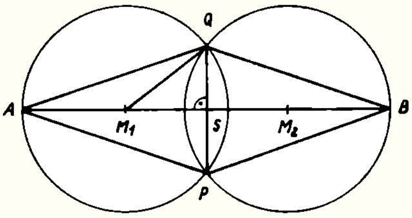
W 8 ■ 1152 Wieviel verschiedene siebenstellige natürliche Zahlen kann man im dekadischen System mit Hilfe von sieben verschiedenen Grundziffern bilden,

a) falls alle diese sieben Grundziffern von Null verschieden sind,

b) falls eine dieser sieben Grundziffern gleich Null ist? *Dr. Gerhard Hesse, Radebeul*

W 8 ▪ 1153 a) Es ist zu beweisen, daß es in einem n-Eck ($n \geqq 3$) höchstens $n-3$ überstumpfe Winkel (d. h. Winkel, die größer als 180° sind) gibt.
b) Es soll für $n=5$ ein spezielles n-Eck mit genau $n-3$ überstumpfen Winkeln gezeichnet werden.
Anleitung zu Lösung: Der Beweis zu a) wird am besten indirekt geführt; dabei kann die Formel für die Summe s der Winkel eines n-Ecks benutzt werden: $s=(n-2)180°$. *T.*

W 8*1154 Die abgebildete Figur stellt zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, den Radien $\overline{r_1}=\overline{r_2}=3$ cm und dem Mittelpunktsabstand $\overline{M_1M_2}=e=5$ cm dar. Die Schnittpunkte A und B der Geraden M_1M_2 mit den Kreisen k_1 und k_2 wurden mit den Schnittpunkten P und Q der beiden Kreise verbunden. Es ist der Flächeninhalt des Vierecks $APBQ$ zu ermitteln. *Sch.*



W 8*1155 Man beweise, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen Hypotenuse die Länge $\overline{AB}=c$, dessen Katheten die Längen $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ und dessen Höhe auf AB die Länge h hat, die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

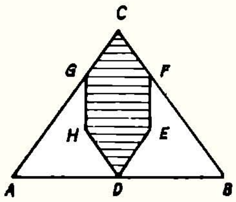
Thomas Maiwald, POS Olbersdorf, Kl. 7

W 9 ▪ 1156 Es sind alle geordneten Paare (x, y) von natürlichen Zahlen anzugeben, für die die Gleichung

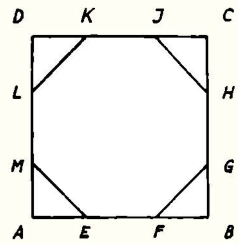
$$x^2-y^2=1972$$

erfüllt ist. *Sch.*

W 9 ▪ 1157 Die abgebildete Figur stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}=a=6$ cm und den Schenkeln $\overline{AC}=\overline{BC}=b=5$ cm dar, dem ein gleichseitiges konvexes Sechseck $DEFCGH$ so einbeschrieben wurde, daß der Eckpunkt D die Basis $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC halbiert und die Seiten $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ parallel zur Höhe $\overline{CD}$ des Dreiecks ABC sind. Es ist der Flächeninhalt des Sechsecks zu ermitteln. *Sch.*

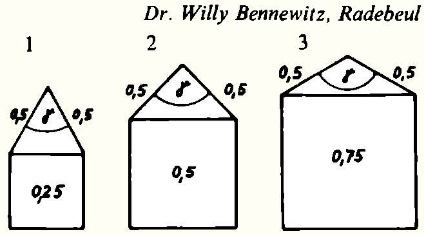


W 9*1158 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=4$ cm dar, dem ein regelmäßiges Achteck $EFGHJKLM$ mit der Seitenlänge $\overline{EF}=s$ einbeschrieben ist. Es ist der Flächeninhalt dieses Achtecks zu berechnen.
Roland Schlesinger, Saßnitz



W 9*1159 In dem Kombinat VEB Lokomotivbau Elektrotechnische Werke *Hans Beimler* in Hennigsdorf werden Elektrotriebwagen für den Vorortverkehr entwickelt, die bereits 1974 den Versuchsbetrieb aufnehmen werden. Diese Elektrotriebwagen haben eine verhältnismäßig hohe Anfahr- und Bremsbeschleunigung von $a=1\text{m}\cdot s^{-2}$ und erreichen eine Höchstgeschwindigkeit von $v_1=120\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Welche Zeit benötigt ein solcher Elektrotriebwagen
a) für eine Strecke von einer Haltestelle bis zu der nächsten 4 km entfernten Haltestelle?
b) für eine Strecke von 20 km, wenn auf dieser Strecke Haltestellen im Abstand von jeweils 4 km vorgesehen sind und der Zug jeweils 30 s hält?
c) Welche Zeit benötigt für die Strecke von 20 km im Falle b) ein Vorortzug, der nur eine Beschleunigung von $0{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ hat und nur eine Höchstgeschwindigkeit von $90\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ erreicht?
Anleitung zur Lösung:
Man nehme zunächst eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit an, dann die konstante Höchstgeschwindigkeit und endlich bis zur Erreichung der nächsten Haltestelle eine gleichmäßig verzögerte Bewegung. Dazu benutze man die Formeln für den Weg und die Zeit bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung (vgl. Tafelwerk, 7. bis 12. Klasse, S. 74). *L.*

W 10/12 ▪ 1160 In den Abbildungen 1, 2 und 3 sind drei gleichschenklige Dreiecke gezeigt, bei denen die Länge der Schenkel jeweils gleich 0,5 ist und das über der Basis konstruierte Quadrat den Flächeninhalt 0,25 bzw. 0,50 bzw. 0,75 hat. Man berechne in allen drei Fällen die Größe des Winkels γ.
Dr. Willy Bennewitz, Radebeul



W 10/12 ▪ 1161 Es ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$|x-10|+|x-2|=|x^2-10x+16|$$

im Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln.
Andreas Schwarzig, Görlitz

W 10/12*1162 Es sei $ABCDEFGH$ ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ (Seitenlänge a) und der Höhe h. Dabei sollen die Punkte E, F, G, H senkrecht über den Punkten A, B, C bzw. D liegen. Die Flächendiagonale $\overline{EG}$ sei durch die Punkte P_1 und P_2 in drei gleichlange Teile geteilt, so daß $\overline{EP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2G}$ ist. Es ist das Volumen des Körpers $ABCDP_1P_2$ zu berechnen, der durch die Kanten $\overline{P_1A}$, $\overline{P_1B}$, $\overline{P_1D}$, $\overline{P_2B}$, $\overline{P_2C}$, $\overline{P_2D}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ und $\overline{P_1P_2}$ begrenzt ist. *Detlef Tolksdorf (Kl. 11) und Frank Burghardt (Kl. 10), Spezialschule Frankfurt (Oder)*

W 10/12*1163 Es sei

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, und es sei
$f(0)=f(1)=f(2)=1$, $f(3)=100$.
Man ermittle die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 dieses Polynoms. *L.*

W 7 ▪ 1109 Viele Leser haben bemerkt, daß sich in diese Aufgabe ein Fehler eingeschlichen hat:
Es muß heißen: 47 Kopeken (nicht 46 k.). Wir verlängern den Einsendetermin für diese Aufgabe bis 7. März 1974.

- Im Wettbewerbsjahr 1972/73 gingen 44300 Lösungen ein. (Heft 5/72, 6/72, 1/73, 2/73). 1010 Einsendungen wurden als Nichtwettbewerbslösungen zurückgewiesen, 4242 mit falsch gelöst bewertet (das sind 9,5%).
- Einsendungen aus dem Ausland:

Österreich:	197	Schweiz:	9
UdSSR:	86	Algerien:	3
Ungarische VR:	28		

- Zur Durchführung des Wettbewerbs stellt der *Volkseigene Verlag Volk und Wissen* jährlich ca. 10000 M zur Verfügung (Postgebühren, Druck der Antwortkarten und Urkunden, Herstellung der Abzeichen, Schreibarbeiten u. a.).
- Unser besonderer Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten:
BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig

alpha-Wettbewerb 1972/73

Preisträger

Dittmar Kurtz, Friedrichsrode; **Andrea Nießen,** Berlin; **Roger Labahn,** Leipzig; **Audrey Hoffmann,** Berlin; **Berthold Möbius,** Dresden; **Andreas Kasparek,** Gräfenhainichen; **Thomas Luschtinetz,** Stralsund; **Martin Blümlinger,** Linz (Österreich); **Andreas Fittke,** Berlin; **Uwe Hanisch,** Dresden; **Heinz Ernst,** Linz (Österreich); **Steffen Hanisch,** Dresden; **Wolfgang Taubert,** Meiningen; **Michael Winks,** Berlin; **Iris Schulz,** Rotta; **Thomas Kaatz,** Gräfenhainichen; **Oberschule Friedeburg (Kollektiv); Monika Schöbe,** Rotta; **Uwe Trautvetter,** Neuenhofe; **Heiko Müller,** Schmalkalden; **AG Jg. Mathematiker,** Lichte; **Franz Sander,** Görlsdorf; **Dagmar Lorenz,** Görlitz; **Cordula Becker,** Moskau (UdSSR); **Ing. A. Körner,** Leipzig; **Andreas Philipp,** Rochlitz; **Roland Schlesinger,** Saßnitz; **Stefan Krötenheerdt,** Halle; **Klaus Baumgart,** Dresden, **Bernd Bojahr,** Greifswald, **Viktor Chatschtschanski,** Dzerschinsk (UdSSR).

Vorbildliche Leistungen

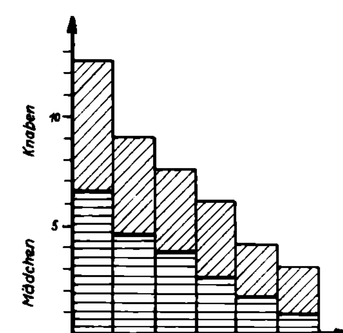
Ulf Ritschel, Booßen; Ute Busch, Lobenstein; Eckhard Liebscher, Ilmenau; Andreas Feige, Mühlhausen; Michael Reissig, Halle; Rüdiger Schultz, Bergen (Rg.); Arnhild Lorenz, Görlitz; Torsten Ueberdick, Halle; Bengt Nölting, Greifswald; Angela Gebhardt, Bernsbach; Gudrun Billig, Coswig; Klaus Heving, Halle; Cornelia Thannhausser, Linz (Österreich); Udo Fechner, Spremberg; Peter Herrmann, Zahna; Karsten und Frank Richter, Herzberg; Sylvia Schmidt, Buchholz; Wolfgang Huschmann, Oelsnitz; Heike Manthey, Ribnitz-Damgarten; Jürgen Sägenschnitter, Cottbus; Dagmar Laux, Leipzig; Frank Zschörnig, Meißen; Gunter Reißig, Weimar; Claudia Riemer, Ponickau; Dieter Kratsch, Göhren; Claudia Kummer, Leipzig; Pamela Teubner, Leipzig; Frank Seidel, Radebeul; Wilfried Röhnert, Radebeul; Christiane Mallek, Berlin; Birgit Rosenberger, Suhl; Holger Stehfest, Havelberg; Atzel Müller, Oberlungwitz; Uta Weidauer, Bernsbach; Andreas Kopf, Berlin; Heiner Schulz, Strausberg; Bernd Bräutigam, Astrid Pflaum; Andreas Goldhahn, Bernsbach; Andrea Hönemann. Stützerbach, Stephan Jung, Berlin; Frank Bergner, Großenhain; Clemens Jaunich, Cottbus; Martina Menge, Bernburg; Volkamr Türke, Auerbach; Regina Bohr, Berlin; Bettina Müller, Bannewitz; Ronald Rösch, Karl-Marx-Stadt; Michael Minx, Berlin; Ralf Kretschmar, Dresden; Peter Burkhardt, Steinbach-Hllg.; Michael Kaufmann, Linz (Österreich); Annekatrin Elsner, Ponickau; Kathrin Kotzner, Radebeul; Manuel Richter, Wilthen; Birgit Arnhold, Radebeul; Torsten Löwe, Schleiz; Birgit Oelschlegel und Arndt Gläßer, beide Altenbeuthen; Frank Bräuer und Frank Macher, Bahratal; Kurt Schulze, Himmelsberg; Hartmut Rommel, Niederspier; Ulrich Crinesura, Weida; Stefan Borchhardt, Worbis; Rainer Grimm, Breitenbach, Martin Obst und Sylvia Czarratzki, beide Zaatzke; Bettina Schulz, Rotta; Frank Billert, Manfred Häußler, Uwe Lumm, Andreas Hempel, Uta Steinmetz, Katrin Steinmetz, alle Clingen; Dirk Herrmann, Alt-Töplitz (aus Kl. 2); Karin Rasche und Jürgen Gäber, beide Stolpen; Barbara Höpfner, Wolgast; Frauke Apel, Klausdorf; Thomas Lenz und Norbert Behnke, beide Greußen; Iris Schwerdt, Zörnigall; Bernd Pauli, Pfaffroda; Tino Puppe und Claudia Barthel, beide Burkau; Christina Grau, Falk Oelschläger, Constanze Prause, alle Schmalkalden; Torsten Flade, Beierfeld; Ute Busch, Lobenstein; Claudia Riemer, Ponkau.

Weitere 2400 Wettbewerbsteilnehmer erhielten Urkunde und Abzeichen in Silber. Alle, die das *Abzeichen in Gold* erworben haben, veröffentlichen wir in Heft 1/74.

Kollektive Beteiligung von Schulen am alpha-Wettbewerb

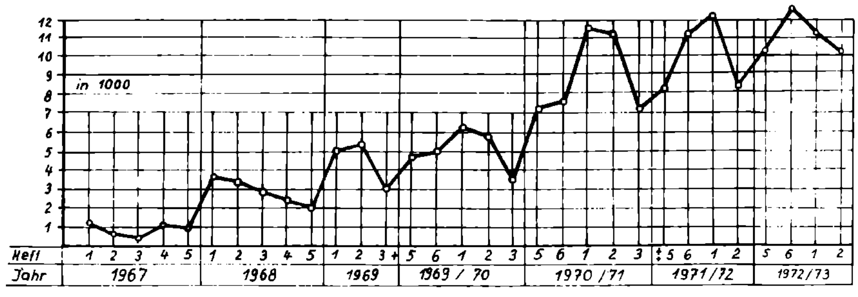
OS Rüdnitz; OS Kuhfelde; OS Fambach; J. G. Seume-OS Schmalkalden; OS Mahlis; OS Clingen; OS I Saßnitz; OS Groß Wüstenfelde; Wille-Wallstab-OS Löderburg; OS II Hainichen; OS I Teterow; OS Stolpen; OS Pfiffelbach; OS Bornstedt; 3. OS Weida; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Goethe-OS Gnoin; Hugo-Jacobi-OS Zella-Mehlis; Geschw.-Scholl-OS Wittenberg; OS Neuenhofe; EOS Worbis; Egon-Schultz-OS Grimma; Klub *Junger Mathematiker* Cottbus; Pionierhaus *Juri Gagarin*, Karl-Marx-Stadt; OS Klausdorf; OS Oberschönau; Juri-Gagarin-OS Greußen; E.-Thälmann-OS Karl-Marx-Stadt; OS Lössau; 3. OS Neustrelitz, Fritz-Reuter-OS Siedenbollentin; OS I und II Breitungen; OS Güsen; OS Beierfeld; OS Wolkenburg; Karl-Marx-OS Wilkau-Haßlau; OS Wohlmirstedt; Hegel-OS Magdeburg; OS Wellmitz; Hanno-Günter-OS Fürstenwalde; OS Großbartloff; Th.-Neubauer-OS Bad Salzungen; OS Viernau; Comenius-OS Oranienburg; OS Ziegelheim; OS Teistungen; OS Bischofferode; C.-Zetkin-OS Wiehe; Egon-Schultz-OS Berlin; OS Wernshausen; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Schorssow; G.-Hauptmann-OS Obercunewalde; OS Altentreptow; OS Sachsendorf; Max-Lenk-OS Zepernick; Fr.-Engels-OS Effelder; A.-Becker-OS Spremberg; A.-Diesterweg-OS Spremberg; OS Ahlbeck; OS Asbach; F.-Schiller-OS Eilenburg; OS Steinbach-Hallenberg; OS Burkau; OS Zaatzke; E.-Schneller-OS Hoyerswerda; OS Naundorf; OS Bahratal; OS Gr. Schwarzlosen; A.-Diesterweg-OS Lobenstein; OS Mittelstille; OS Jördenstorf; OS Blumberg; OS Schernberg; OS Alt-Töplitz; 22. OS Rostock; K.-Kollwitz-OS Dingelstädt; OS Rotta; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; OS Zörnigall; OS Neukloster; OS Oßling; OS Löwenberg; OS Cossebaude; A.-Becker-OS Kamsdorf; OS Vockerode; OS Treben; M.-Poser-OS Drognitz; OS Lichte; F.-Dettmann-OS Stralsund; OS Spora; L.-Fürnberg-OS Wegeleben; OS Olbersdorf; Pestalozzi-OS Oberlungwitz; *alpha*-Club 29. OS Leipzig; H.-Beimler-OS Hirschfeld; Karl-Marx-OS Schmalkalden; OS Wernshausen; OS Friedeburg; OS Neetzow; K.-Liebknecht-OS Karl-Marx-Stadt; OS Breitenbach; OS Wingerode; Lenin-OS Wolgast; OS Brehme; OS Beierfeld; OS Leinefelde; OS Wohlmirstedt; OS Menterode; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Lichte

Im Wettbewerbsjahr 1972/73: 44300 Lösungen



Kl.	5	6	7	8	9	10
Kn. in %	47	49	50	56	58	68
Mä. in %	53	51	50	44	42	32

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs 1967/73



+ umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

‡ ab Wettbewerbsjahr 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe im Jahr

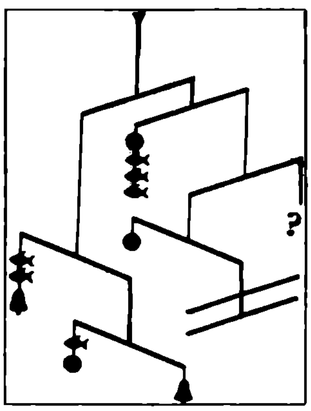
In freien Stunden alpha heiter

„Achtung, alle im Chor“
Utschitelsko delo, Sofia

Der Äquilaber

Barnard, englischer Publizist für unterhaltsame Mathematik, nannte dieses bei uns als „Windspiel“ bekannte System aus „Äquilibristik“ und „Kandelaber“. *Barnards* Äquilaber hing in seinem Zimmer und befand sich im Gleichgewicht.
Welche beiden Gegenstände halten das System (bestehend aus Fischen, Kugeln, Glöckchen und Waagebalken bzw. Kombinationen davon) anstelle des Fragezeichens ($\triangleq x$) in der Schwebe? Das Gewicht der Fäden bleibt dabei unberücksichtigt, nicht aber das der Waagebalken.

(Aus NBI, Arithmetische Gymnastik 30)



Eine Zahl fehlt

In jeder Reihe fehlt eine Zahl, die in den zur Auswahl stehenden Zahlen enthalten ist. Die Zahl kann gefunden werden, wenn eine Beziehung zwischen den Zahlen innerhalb der Reihen erkannt wird.

Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

a) 3 21 8 32 ○ 7
4; 6; 8

b) 21 11 ○ 15 17 18
8; 13; 25

c) 5 625 3 ○ 2 4
8; 24; 361

Läufersprung

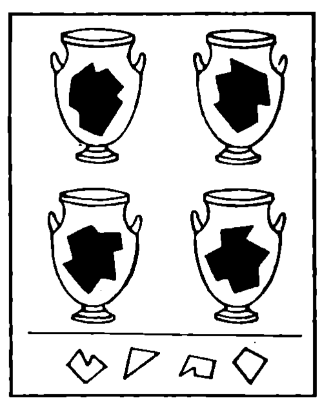
Für eine geeignete Folge von Läuferzügen gilt: Die Felder der obigen Figur, auf denen der Läufer nacheinander steht, tragen Silben, die in dieser Reihenfolge einen aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannten Satz darstellen.

Irmgard Träger, Dr.-R.-Sorge-OS, Ebersbach

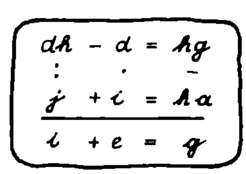
	den		nes		in		hen
ein		ecks		ei		die	
	an		schnei		ei		punkt
drei		der		hö		nem	

Der zerbrochene Krug

Einer der zerbrochenen Krüge läßt sich mit den vier Bruchstücken wieder reparieren.



Das hab ich mir ausgedacht



Elke Schönemann, AG-Mathe (Kl. 7), Elbingerode

Magisches Quadrat

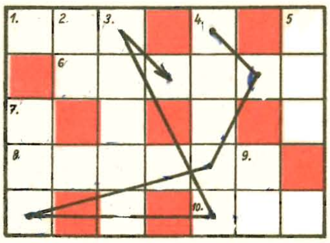
Es sind drei Ziffern so zu vertauschen, daß ein magisches Quadrat entsteht, d. h. die Summen in jeder Spalte, Reihe und Diagonale übereinstimmen.

Lutz Gärtner, Pestalozzi-OS Wismar (Kl. 9)

7	13	3	6
11	8	10	5
14	1	15	4
2	12	16	9

Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Zeichen für *Sinus*; 6. halber Durchmesser eines Kreises; 8. Körper mit paralleler Grund- und Deckfläche; 10. Zeichen für *Arkus*.



Senkrecht: 2. Vorsilbe für *nicht, un...*; 3. dem Zenit gegenüberliegender Punkt der scheinbaren Himmelskugel; 4. griechischer Buchstabe (Zeichen für Summe); 5. griechischer Buchstabe; 7. Kurzzeichen einer Arbeitseinheit; 9. Flächenmaß.
Die Buchstaben entlang des Pfeiles ergeben ein Glied der Aditionsaufgabe. *Frank Berger, Großenhain (Kl. 8)*

Einen „Weltrekord im Kopfrechnen" erzielt

81jähriger zog 19. Wurzel aus 133stelliger Zahl

Mexiko-Stadt. Der 81jährige Deutscnmexikaner Herbert Freiherr Grote hat nach seinen Angaben einen neuen Weltrekord im Kopfrechnen aufgestellt.

Ohne Bleistift und Papier zog er die 19. Wurzel aus einer 133stelligen Zahl. Das mexikanische National-Institut für Kernenergie bestätigte, daß Grote diese Leistung dort vor mehreren Wissenschaftlern in einer knappen halben Stunde vollbracht hat.

Grote hat am Donnerstag in Mexiko-Stadt einen Preis von 5000 Dollar für denjenigen ausgesetzt, der ihm diese Leistung noch in diesem Jahr nachmacht. Der pensionierte Dolmetscher aus Berlin, der 1939 nach Mexiko auswanderte, hatte bereits 1969 die siebte Wurzel aus einer 53stelligen Zahl und 1970 die 13. Wurzel aus einer 100stelligen Zahl durch Kopfrechnen ermittelt. Seine Erfolge werden im Londoner „Guines book of records" veröffentlicht.

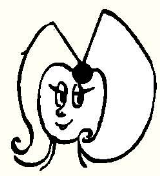
Die Zahl, aus der Grote im mexikanischen National-Institut für Kernenergie die 19. Wurzel zog, lautete: 1760 185 682 853 945 889 025 317 892 532 435 069 724 025 004 269 817 133 517 292 723 416 744 847 428 630 182 920 842 612 948 934 301 581 468 616 708 530 771 118 899 154 386 944.

Nach Grotes Kopfrechnen-Kunststücken ist dies das gleiche wie 9 126 254 insgesamt 19mal mit sich selbst multipliziert.

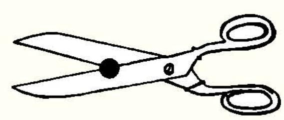
Wasserhähne unter sich

Mathematikfachlehrer K. Koch, Schmalkalden

Punkt, Punkt, Punkt

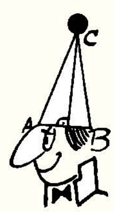


Scheitelpunkt

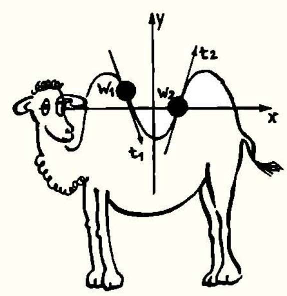


Schnittpunkt

Mittelpunkt



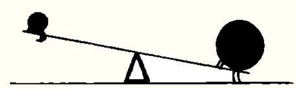
Eckpunkt



Wendepunkt

Siedepunkt

Punkt 8 Uhr



Schwerpunkt

F. Fricke, Berlin

Die Anekdote — Das beste Werk

Abraham Gotthelf Kästner (1719 bis 1800), Mathematiker und Epigrammdichter, lernte als Student so spielend leicht, daß er es sich vor seinem Staatsexamen leisten konnte, mit der bildhübschen Tochter seines Professors spazierenzugehen, anstatt die Nase in die Bücher zu stecken. Als ihn der Professor deswegen zur Rede stellte, erwiderte *Kästner* schlagfertig: „Herr Professor, Sie haben uns Studenten als Vorbereitung für das Examen das Studium Ihrer eigenen Werke empfohlen. Ihre Tochter halte ich für Ihr bestes."

Zum 25. Geburtstag der Pionierorganisation

Ernst Thälmann

Sei stolz auf deine Organisation, Junger Pionier!

- Über 6 Millionen Menschen in unserer Republik waren in den 25 Jahren des Bestehens der Pionierorganisation Mitglieder dieser Organisation.
- *Pionierrepublik Wilhelm Pieck* heißt das größte und schönste Pionierlager in der DDR. 60 km von Berlin entfernt, empfängt die Pionierrepublik (1952 errichtet) jeweils 800 bis 1000 Pionierräte für 8 bis 10 Wochen.
- Der Verlag *Junge Welt* gibt 9 Zeitungen und Zeitschriften für die Jugend heraus.
- Unsere Pionierorganisation *Ernst Thälmann* ist mit mehr als 40 Pionier- und Kinderorganisationen auf allen Kontinenten freundschaftlich verbunden.
- Fast 4000 Pioniere aus 25 Ländern sind Jahr für Jahr zu Gast in der Pionierrepublik, im Pionierlager Prerow an der Ostsee und in anderen schönen Lagern.
- Bis zum Sommer 1971 rollten bereits 36 Freundschaftszüge — besetzt mit Lenin- und Thälmann-Pionieren, FDJ-Mitgliedern und Komsomolzen — über die Grenzen der UdSSR und der DDR.
- Das Abzeichen für gute Arbeit in der Schule ist die älteste Auszeichnung der Pionierorganisation *Ernst Thälmann*. Es wurde im Verlauf von 25 Jahren an über eine Million vorbildlich und aktiv in ihrer Gruppe tätige Pioniere verliehen.
- Der Kinderbuchverlag, das Berliner *Theater der Freundschaft* und fünf weitere Kindertheater, 50 zentrale Pionierlager und 367 Häuser der Jungen Pioniere, Stationen Junger Touristen, Techniker und Naturforscher gehören in unserer Republik den Kindern.
- Jede Woche lesen fast eine halbe Million Pioniere ihre Pionierzeitung *Trommel*.

Rechenzentrum alpha begeisterte in der Berliner Wuhlheide

„Immer lebe die Sonne" — Das war das Motto des *Internationalen Kinderfestes* zu den X. Weltfestspielen, das am 1. August 1973 in der Berliner Wuhlheide stattfand. Zehntausende Kinder aus 46 Ländern hatten in Stadien, auf Bühnen, in Kabinetten, am Badesee und an den Bastel- und Knobelstraßen unvergeßliche Erlebnisse.

Großen Zuspruch hatte das unweit von der Station *Junger Techniker* aufgebaute *Rechenzentrum alpha* des Hauses der Jungen Pioniere Bautzen. Etwa 500 Pioniere überprüften ihr Wissen und erhielten ein Souvenir und einen von Bautzener Pionieren geschriebenen Kartengruß. Das *Rechenzentrum alpha* bereitete den Pionieren viel Spaß. Darüber freuten wir Betreuer des Rechenzentrums uns am meisten. Das war der verdiente Dank an die Pioniere und FDJler in sieben Arbeitsgemeinschaften des Pionierhauses Bautzen, die in den vergangenen zwei Schuljahren in fleißiger Arbeit das Rechenzentrum entwickelt, projektiert und gebaut haben.

Die Stunden des Festivals waren Anlaß, einmal zurückzublicken. Wie haben wir damals vor zwei Jahren angefangen? Das *Haus der Jungen Pioniere Bautzen* erhielt den Auftrag, bis zum *1. Zentralen Rätetreffen* im August 1972 ein mathematisches Objekt zu gestalten, um viele Pioniere der Klassen 1 bis 7 durch interessante Formen für die Mathematik zu begeistern.

In den folgenden Monaten trugen Pioniere und FDJler der Arbeitsgemeinschaften der Bereiche *Mathematik / Naturwissenschaften* und *Technik* ihre Gedanken zusammen und entwarfen Skizzen. In enger Zusammenarbeit der Arbeitsgemeinschaften *Mathematik, Elektronik, Elektrotechnik, BMSR-Technik* und *Technisches Basteln* entstand das ursprüngliche *Rechenzentrum alpha*, das beim 1. Zentralen Rätetreffen in Dresden seine Generalprobe bestand.

Bis zu den X. Weltfestspielen wurde das Rechenzentrum *alpha* wesentlich erweitert. So wurden beispielsweise im vergangenen Schuljahr von den Pionieren der Arbeitsgemeinschaft Mathematik Klasse 7 (jetzt Klasse 8) für zwei Computer PIKO-dat Programme entwickelt und gesteckt. Diese Computer wurden mit einer bereits vorhandenen Arbeitstafel über eine Relaisschaltung verbunden. Dadurch wurde das Niveau der bereits vorhandenen Arbeitstafel wesentlich erhöht. Heute können die Pioniere an sieben Arbeitstafeln (1972 waren es nur vier) logisches Denken, Kombinieren und Rechnen üben. Da am Rechenzentrum *alpha* gleichzeitig sieben Schüler arbeiten können, beträgt der Durchlauf pro Stunde etwa 80 Schüler. Für die Betreuung des Rechenzentrums

Pionierorganisation „Ernst Thälmann"	1969	1970	1971	1972
Mitglieder	1 826 136	1 852 443	1 907 566	1 957 980
Jungpioniere (Klassenstufe 1 bis 3)	833 007	822 619	832 802	831 398
Thälmannpioniere (Klasse 4 bis 7)	993 129	1 029 824	1 074 764	1 126 582
Gruppenpionierleiter	68 786	66 173	67 751	72 125

alpha sind nur drei Pioniere erforderlich. Die Tafeln können auch einzeln von Pioniergruppen eingesetzt werden. Alle Tafeln von *alpha* werden elektromechanisch und elektronisch gesteuert und zeigen die Ergebnisse der Denkoperationen optisch oder akustisch an. Mit Hilfe von Tasten und Schaltern werden die Aufgaben von dem am Rechenzentrum *alpha* arbeitenden Schüler eingegeben und nach erfolgter Rechenoperation auf ähnliche Weise auf ihre Richtigkeit hin ausgewertet.

Nun möchte ich noch eine Tafel näher beschreiben: Auf einer Sperrholztafel ist die Landkarte der Sowjetunion mit acht Großstädten eingezeichnet. Je zwei Großstädte sind durch Glühlampenketten miteinander verbunden. Durch Betätigen eines Drehschalters mit vier Ebenen leuchten zwei (durch Glühlampen verbundene) Städte der Sowjetunion auf. Dreht man den prismenförmigen Drehschalter um 90° weiter, so ist eine neue Aufgabe zu lösen und es leuchten zwei andere entsprechende Glühlampen auf. Nach schriftlicher Lösung der Aufgabe wird das dreistellige Ergebnis auf einem Schaltpult mit den Ziffern 0 bis 9 durch vierpolige Stecker gesteckt und der Stromkreis durch einen Schalter geschlossen. Bei richtiger Lösung leuchten die Anzeige „Richtig" (grün) und die Glühlampenkette zwischen den zwei Städten auf. Bei falscher Lösung leuchtet die Anzeige „Falsch" (rot) auf und die Glühlampenkette blinkt rot.

Zum Schluß noch eine Aufgabe von dieser Tafel:

Im Jahr 1970 flossen 8,5 Mill. Tonnen Erdöl durch die Pipeline *Freundschaft* in die DDR. 1975 werden es bereits 16,5 Mill. Tonnen sein. Die Länge der Ölleitung von Kuibischew bis Schwedt beträgt 1200 km. Diese Strecke durchfließt das Erdöl in 20 Tagen.

Wieviel Kilometer legt es in 8 Tagen zurück?

(Lösung: 480) *Ehrenfried Zschech*

(*E. Zschech* ist langjähriger Leser der *alpha*, mehrfach Preisträger und Träger des *alpha*-Abzeichens in Gold, d. Red.)

Aus der Zentralschule der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" berichtet

In den letzten Tagen und Wochen bereiteten wir uns — Studenten und Lehrer der Zentralschule der Pionierorganisation *Ernst Thälmann* in Droyßig (bei Zeitz) — auf den 15. Geburtstag unserer Schule und den 25. Jahrestag der Gründung der Pionierorganisation *Ernst Thälmann* vor. Wir haben mit dem Politbürobeschluß vom Juli 1973 einen Kompaß für unsere politische und pädagogische Arbeit erhalten. Mit neuen Initiativen werden wir zur Ausbildung klassenbewußter Freundschaftspionierleiter beitragen. Vor allem das Studium des Marxismus-Leninismus und der Erziehungswissenschaften bildet die solide Basis der Ausbildung unserer Studenten. Im Prozeß der Ausbildung erwerben sie unter anderem auch die Lehrbefähigung für die unteren Klassen. Ziel der Ausbildung im Fach *Methodik des Mathematikunterrichts* ist es, die Studenten zu befähigen, einen lehrplangetreuen Unterricht in den Klassen 1 bis 4 zu erteilen. Besondere Berücksichtigung findet dabei die Anwendung der in diesem Fach erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten in der späteren Arbeit auf außerunterrichtlichem Gebiet.

Unser Grundsatz ist, die außerunterrichtliche Tätigkeit in den gesamten Bildungs- und Erziehungsprozeß der Schule einzuordnen, damit sie ein breites Betätigungsfeld der FDJ und Pionierorganisation bildet. Dabei sind besonders die Aspekte einer politisch-ideologisch niveauvollen, interessanten und vielseitigen Massenarbeit und einer zielgerechten Förderung von Neigungen, Interessen und Begabungen zu beachten.

So fertigten unsere Studenten des 2. Studienjahres im Schuljahr 1972/73 viele Knobelwandzeitungen mit gesellschaftlichen Themen an. An der Lösung der Aufgaben dieser Knobelwandzeitungen beteiligten sich 170 Pioniere und Schüler der Klassen 1 bis 4 unserer Übungsschule, der Oberschule Droyßig.

Den Höhepunkt der außerunterrichtlichen Tätigkeit auf mathematischem Gebiet bildete im Mai (nach Beteiligung der Pioniere und Schüler an der 1. und 2. Stufe der ABC-Mathematik-Olympiade) die 3. Stufe — die ABC-Schulolympiade der Klassen 1 bis 4 der OS Droyßig, durchgeführt als Klausur (mit anschließender kultureller und sportlicher Tätigkeit und Auszeichnung der Besten.

Die Weiterführung dieser Arbeit betrachten wir als einen konkreten Beitrag zur Verwirklichung des Politbürobeschlusses *Für ein hohes Niveau der sozialistischen Erziehung in der Pionierorganisation Ernst Thälmann.*

I. Koch

Quiz für helle Köpfe

Heitere Mathematik für Pioniernachmittage

Für die folgenden sieben Fragen sind jeweils drei Antworten zur Auswahl angegeben. Für jede Frage ist genau eine Antwort (entweder *a* oder *b* oder *c*) in der abgebildeten Tabelle anzukreuzen. Alle Aufgaben sind im Kopf zu lösen, d. h. Notizen, Zwischenergebnisse und dergleichen sind nicht statthaft. Die Zeit von 15 Minuten sollte für das Lesen der Aufgabentexte und das Ankreuzen der gewählten Antworten nicht überschritten werden.

1. Ein Zug wird von zwei Lokomotiven gezogen und fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fährt jede der beiden Lokomotiven?

a $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **b** $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **c** $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2. Von zwei Würfeln W_1 und W_2 hat Würfel W_2 die doppelte Kantenlänge von W_1.

Wieviel mal so groß ist der Rauminhalt des Würfels W_2 wie der des Würfels W_1?

a zweimal so groß
b viermal so groß
c achtmal so groß

3. In einem Kasten befinden sich genau drei rote und drei blaue Kugeln.

Wieviel Kugeln muß man bei verbundenen Augen wenigstens herausnehmen, um mit Sicherheit drei rote Kugeln zu haben?

a 3 Kugeln **b** 4 Kugeln **c** 6 Kugeln

4. Die Summe aus allen natürlichen Zahlen von 0 bis 9 ist

a kleiner als das Produkt
b gleich dem Produkt
c größer als das Produkt

aus diesen Zahlen?

5. Ein Balken wurde mit drei Schnitten in Stücke zu je einem halben Meter Länge zersägt.

Wie lang war dieser Balken?

a 1,5 m **b** 2,0 m **c** 3,0 m

6. Ein Eis mit Früchten kostet 80 Pf. Die Früchte kosten 20 Pf mehr als das Eis.

Wie teuer ist das Eis ohne Früchte?

a 20 Pf **b** 30 Pf **c** 60 Pf

7. Jemand will ein Buch kaufen. Auf die Frage nach dem Preis des Buches antwortet die Verkäuferin scherzhaft: „Zahlen Sie die Hälfte des Preises, und legen Sie noch eine Mark hinzu; dann stimmt es."

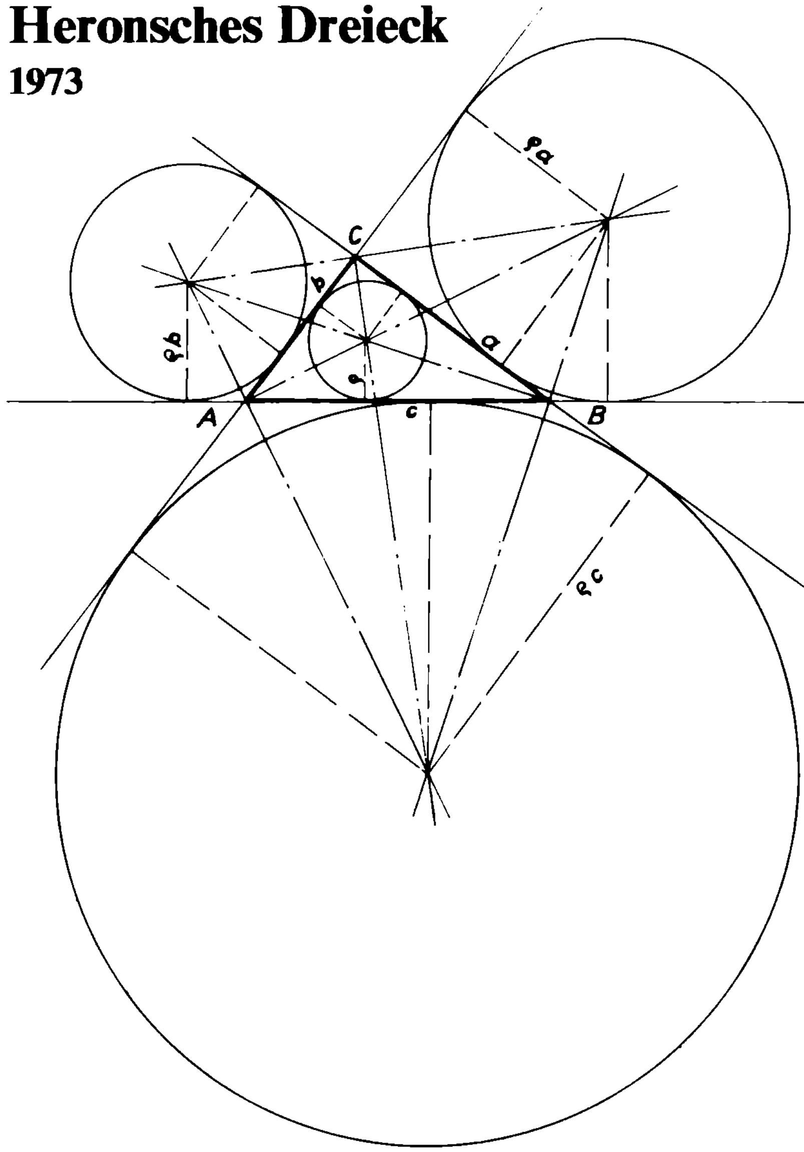
Wieviel Mark kostet das gewünschte Buch?

a 1 M **b** 2 M **c** 4 M

	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							

Diplomlehrer W. Henker, Pionierhaus Juri Gagarin, Karl-Marx-Stadt

Heronsches Dreieck
1973



In Heft 6/72 wurde mit einer originellen Vignette allen Lesern ein frohes 1973 gewünscht. Mir hat sie Anlaß zu weiteren Knobeleien gegeben:

Es zeigt sich, daß das pythagoreische Dreieck mit den Seitenlängen $c=10$, $a=8$, $b=6$ nebst seinem Um- und Inkreis sowie seinen Ankreisen noch weitere Spielereien mit den Ziffern der Jahreszahl 1973 zuläßt.

Der halbe Dreiecksumfang läßt sich nämlich in der Form

$$s=\frac{a+b+c}{2}=-1+9+7-3$$

schreiben. Mit den Differenzen

$$(s-a)=-1+9-7+3$$
$$(s-b)=1+9-7+3$$
$$(s-c)=1-9+7+3$$

ergibt die Heronsche Dreiecksformel den Flächeninhalt

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{(-1+9+7-3)(-1+9-7+3)}$$
$$\cdot\sqrt{(1+9-7+3)(1-9+7+3)}$$
$$=(1-9+7+3)(-1+9+7-3)$$
$$=1^2+9^2-7^2-3^2.$$

Weiter beträgt der Radius des Umkreises (der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den drei Seiten)

$$r=\frac{abc}{4A}=1(9-7+3).$$

der Radius des Inkreises (der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel)

$$\varrho=\frac{A}{s}=1-9+7+3.$$

Die Radien der Ankreise (jeweiliger Mittelpunkt als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der beiden Außenwinkel und der Winkelhalbierenden des nicht benachbarten Innenwinkels) sind

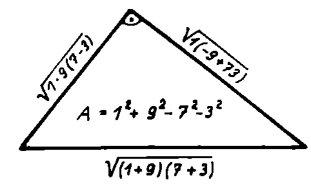
$$\varrho_a=\frac{s}{(s-a)}\varrho=1+9-7+3$$

$$\varrho_b=\frac{s}{(s-b)}\varrho=-1+9-7+3$$

$$\varrho_c=\frac{s}{(s-c)}\varrho=-1+9+7+3.$$

Schließlich ist die Summe der Flächeninhalte des Inkreises und der drei Ankreise (siehe die △ Fig. 1973) noch proportional dem Ausdruck

$$\varrho^2+\varrho_a^2+\varrho_b^2+\varrho_c^2=(1+9)^2+(7+3)^2.$$



Das Jahr 1973 scheint demnach in besonders innigem Zusammenhang mit der Mathematik zu stehen! Viel Spaß bei der Kontrolle des Zahlenspiels.

Zeige, daß

$$\varrho^2+\varrho_a^2+\varrho_b^2+\varrho_c^2=a^2+b^2+c^2 \text{ ist.}$$

F. Klar

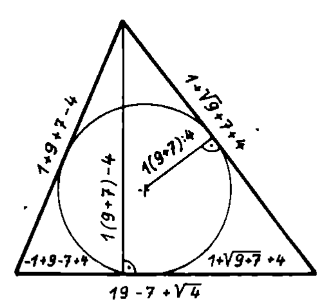
Das ist sie, die **Seite 1000**

der Schülerzeitschrift *alpha*.

1973/74

Welch ein Zufall! Unabhängig von der obigen Leserzuschrift sendet unser westdeutscher Mitarbeiter die nachfolgende Figur mit dem folgenden Text:

Als *Heronsche Dreiecke* bezeichnet man solche Dreiecke, deren Seiten rationale Maßzahlen haben und deren Flächeninhalt ebenfalls durch eine rationale Zahl angegeben werden kann (nach dem griechischen Mathematiker *Heron von Alexandria*, ca. 100 v. u. Z.)



$s=1+9+7+4$

$A=1+9+74$

Ganzzahlige Werte im dargestellten Dreieck		Maßzahl
drei Seiten	a, b, c	15, 13, 14
halber Umfang	s	21
Flächeninhalt	A	84
Höhe	h_c	12
Höhenabschnitte	p_c, q_c	5, 9
Inkreisradius	ϱ	4

H. Decker

Lösungen

W 9*1030 Nach dem Satz des Pythagoras gilt, da a, b, c die Längen der Katheten bzw. der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind,

$$a^2+b^2=c^2.$$

Hieraus folgt wegen $c\neq 0$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Ferner gilt, da jede Kathete kürzer als die Hypotenuse ist,

$$\frac{a}{c}<1 \text{ und } \frac{b}{c}<1.$$

Daraus folgt, weil $n-2$ nach Voraussetzung eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, $\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}<1$ und $\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}<1$.

Daher gilt

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n=\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}<\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

und $$\left(\frac{b}{c}\right)^n=\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}<\left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

also $$\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

d. h. $a^n+b^n<c^n$, w. z. b. w.

W 9*1031 1. Wir erhalten

$$a^2-b^2+ab=a^2+ab+\frac{b^2}{4}-b^2-\frac{b^2}{4}$$
$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{5}{4}b^2$$
$$=\left(a+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\,b\right)\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\,b\right), \text{ also}$$
$$a^2-b^2+ab$$
$$=\left[a+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)b\right]\left[a-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)b\right],$$

womit die geforderte Faktorenzerlegung gegeben ist.

2. Angenommen, es gäbe auch für die Summe a^2+b^2+ab eine solche Zerlegung in Linearfaktoren. Dann hätten diese Linearfaktoren die Form $a+xb$ bzw. $a+yb$, wobei x und y reelle Zahlen sind, und es würde gelten

$$a^2+b^2+ab=(a+xb)(a+yb)$$
$$=a^2+(x+y)ab+xyb^2.$$

Hieraus folgt, da die Koeffizienten von ab und b^2 auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, $x+y=1$

und $xy=1$, also wegen $x\neq 0$

$$y=\frac{1}{x}.$$

Daraus folgt weiter $x+\frac{1}{x}=1$,

also $x^2-x+1=0$.

Nun gilt aber für alle reellen x

$$x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4},$$

was zu einem Widerspruch führt.

Daher läßt sich die Summe a^2+b^2+ab nicht in zwei Faktoren von der geforderten Art zerlegen.

10/12▲1032 Angenommen, (x, y) sei eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt wegen (1) $y=5-x$, also wegen (2)

$$x^5+(5-x)^5=275, \qquad (3)$$
$$x^5+5^5-5\cdot 5^4x+10\cdot 5^3x^2-10\cdot 5^2x^3$$
$$+5\cdot 5x^4-x^5=275,$$
$$25x^4-250x^3+1250x^2-3125x+2850=0,$$
$$x^4-10x^3+50x^2-125x+114=0. \qquad (4)$$

Wir setzen

$$f(x)=x^4-10x^3+50x^2-125x+114.$$

Dann gilt $f(0)=114, f(1)=30, f(2)=0, f(3)=0$, d. h. die Gleichung (4) hat die reellen Lösungen $x_1=2$ und $x_2=3$.

Weitere reelle Lösungen hat diese Gleichung nicht; denn wir erhalten durch Division

$$\frac{f(x)}{(x-2)(x-3)}=x^2-5x+19.$$

Und es gilt für alle reellen x

$$x^2-5x+19=x^2-5x+\frac{25}{4}+19-\frac{25}{4}$$
$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{51}{4}>0.$$

Wegen (1) erhalten

wir für $x_1=2$ $y_1=3$

und für $x_2=3$ $y_2=2$.

Wenn also das gegebene Gleichungssystem überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen (2, 3) und (3, 2) sein. Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für diese Werte die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind, daß also genau diese Paare Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind.

10/12▲1033 a) Angenommen, es sei (x, y) ein geordnetes Paar reeller Zahlen mit $y\geq 0$, für das die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2=x-y^2 \qquad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$x^4+2x^2y^2+y^4-x+y^2=0,$$
$$y^4+(2x^2+1)y^2+x^4-x=0. \qquad (2)$$

Diese quadratische Gleichung für y^2 hat die folgenden Lösungen

$$y^2=-x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+\frac{1}{4}-x^4+x}$$
$$=-x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$$
$$=-x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (3)$$

und $$y^2=-x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}. \qquad (4)$$

Wegen $y^2\geq 0$ kommt nur die Lösung (3) in Frage.

Für $x\geq -\frac{1}{2}$ gilt $x+\frac{1}{2}\geq 0$,

und wir erhalten

$$y^2=-x^2-\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}=x(1-x). \qquad (5)$$

Daher ist $y^2\geq 0$ nur dann, wenn $x\geq 0$ und $x\leq 1$, d. h. nur für

$$0\leq x\leq 1. \qquad (6)$$

In diesem Falle gilt

$$y=\sqrt{x(1-x)} \qquad (7)$$

Für $x<-\frac{1}{2}$ gilt $x+\frac{1}{2}<0$, also

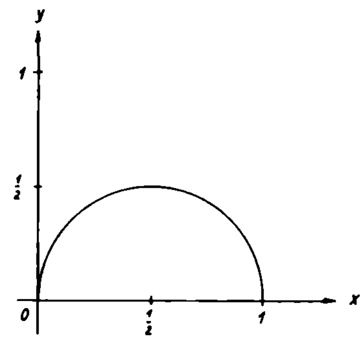
$$y^2=-x^2-\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)=-x^2-x-1$$
$$=-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}$$
$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0,$$

d. h., wir erhalten keine reellen Werte für y.

Wegen (6) besteht daher der Definitionsbereich von f aus allen reellen x mit $0\leq x\leq 1$.

b) Wegen (7) gilt

$$y=f(x)=\sqrt{x(1-x)}. \qquad (8)$$



c) Wegen (8) gilt $y=0$ genau dann, wenn $x=0$ oder $x=1$. Die Funktion hat also die Nullstellen $x_1=0$ und $x_2=1$.

Ferner gilt

$$y^2=x-x^2=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$$

und $y^2=\frac{1}{4}$, d. h. $y=\frac{1}{2}$, genau dann, wenn $x=\frac{1}{2}$. Daher ist der größte Funktionswert (das Maximum) $\frac{1}{2}$.

d) Wir können den Graph dieser Funktion punktweise konstruieren, indem wir aus (8) die Funktionswerte für $x=0$; $x=0{,}1$; $x=0{,}2$; ...; $x=1$ berechnen (vgl. die Abb.). Zu unserer Überraschung stellen wir fest, daß der Graph ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und dem Radius $r=\frac{1}{2}$ ist.

Das ergibt sich aber auch aus der Gleichung (5). Wir erhalten nämlich aus dieser Gleichung

$$y^2=x-x^2.$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4},$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Für $y \geq 0$ ist das die Gleichung eines Halbkreises mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und dem Radius $r=\frac{1}{2}$.

W 10/12 ■ 1034 1. Es sind für Verzinsung und Tilgung der Kredite zu a) und b) jährlich zu zahlen

1‰ von 32 000,– M, d. s.	320,– M,
und 5‰ von 13 500,– M, d. s.	675,– M,
zusammen also	995,– M,

d. s. monatlich 82,92 M, also rund 83,– M.
2. Die Tilgungszeit t (in Jahren) für den Kredit zu b) erhalten wir aus der Gleichung

$$5 \cdot \frac{q^t-1}{q-1}=100 \cdot q^t.$$

Wegen $q=1{,}04$ erhalten wir weiter

$$5(q^t-1)=100 \cdot 0{,}04 \cdot q^t,$$
$$5q^t-5=4q^t,$$
$$q^t=5, \text{ also } 1{,}04^t=5.$$

Hieraus erhalten wir durch Logarithmieren
$t \cdot \lg 1{,}04=\lg 5$,

$$t=\frac{\lg 5}{\lg 1{,}04}=\frac{0{,}69\,90}{0{,}01\,703}=41{,}04.$$

Die Tilgungszeit für den Kredit zu b) beträgt also rund 41 Jahre.
3. Nach 41 Jahren verbleibt für den Kredit zu a) noch ein Restkredit von
32 000,– M – 41 · 320,— M = 18 880,— M.
Da alle Zahlungen von jährlich 995,— M nunmehr auf die Tilgung des zinslosen Kredits verrechnet werden, erhalten wir die restliche Tilgungszeit

$$t'=\frac{18\,880}{995}=19{,}0.$$

Die restliche Tilgungszeit beträgt also 19 Jahre, so daß die beiden Kredite nach insgesamt 60 Jahren getilgt sind.

W 10/12 ■ 1035 Da beide Seiten der Ungleichung (1) nicht negativ sind, ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2), \quad (2)$$
$$a^2c^2+2abcd+b^2d^2 \leq a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2, \quad (3)$$
$$0 \leq a^2d^2+b^2c^2-2abcd, \quad (4)$$
$$0 \leq (ad-bc)^2. \quad (5)$$

Nun ist aber die Ungleichung (5) für alle reellen Zahlen a, b, c, d erfüllt, da das Quadrat einer reellen Zahl stets größer oder gleich Null ist.
Daher sind auch die im Bereich der reellen Zahlen äquivalenten Ungleichungen (4), (3), (2) und (1), also die gegebene Ungleichung für alle reellen Zahlen a, b, c, d erfüllt, w.z.b.w.

W 10/12 * 1036 1. Für alle reellen x gilt

$$f_1(x)=\sin x \cdot \cos x=\frac{1}{2}\sin 2x \leq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

da $\sin 2x \leq 1$ ist.
Nun gilt $f_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$; daher hat die Funktion f_1 den größten Funktionswert $\frac{1}{2}$.

2. Für alle reellen x gilt

$$[f_2(x)]^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x \cdot \cos x$$
$$=1+2\sin x \cdot \cos x. \quad (4)$$

Nun gilt wegen (3) $\sin x \cdot \cos x \leq \frac{1}{2}$, also

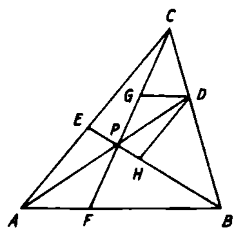
$$[f_2(x)]^2 \leq 1+2 \cdot \frac{1}{2}=2, \quad (5)$$

mithin $f_2(x) \leq \sqrt{2}$.
Da nun $f_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, hat die Funktion f_2 den größten Funktionswert $\sqrt{2}$.

W 10/12 * 1037 Es soll bewiesen werden, daß stets gilt

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE}=\overline{FB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EA}. \quad (1)$$

Zum Beweis ziehen wir zunächst durch D zu AB eine Parallele, die die Gerade CF im Punkt G schneidet, und durch D zu CA eine Parallele, die die Gerade BE im Punkt H schneidet (vgl. die Abb.).



Nun wenden wir den Strahlensatz an und stellen Proportionen auf, in denen die in der behaupteten Gleichung (1) auftretenden Strecken vorkommen. Dabei beachten wir, daß der Strahlensatz auch dann gilt, wenn der Scheitelpunkt des Winkels zwischen den beiden Parallelen liegt. Es gilt

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}, \quad (2)$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{CE}}. \quad (3)$$

Ferner stellen wir Proportionen auf, in denen die Strecken $\overline{DG}$ und $\overline{DH}$ vorkommen:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}, \quad (4)$$

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}}. \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (2), (3), (4) und (5) erhalten wir durch Multiplikation

$$\frac{\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{DG} \cdot \overline{DH}}{\overline{DG} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{EA}}=\frac{\overline{AP} \cdot \overline{DH} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{PD}}{\overline{PD} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AP}}$$

und hieraus durch Kürzen bzw. Multiplikation mit den Nennern beider Seiten der Gleichung

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE}=\overline{FB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EA}, \text{ w.z.b.w.}$$

---

5 ▲ 1039 Aus 30 : 5 = 6 und 6 + 2 = 8 folgt, daß der Fußgänger für den Weg von A nach B einschließlich der Rast acht Stunden benötigt. Aus 3 · 5 = 15 und 30 : 15 = 2 folgt, daß der Radfahrer dafür nur zwei Stunden benötigt. Er muß also sechs Stunden, d. s. 360 Minuten, später als der Fußgänger in A abfahren.

5 ▲ 1040 Wenn in einer dreistelligen natürlichen Zahl die Null nicht als Grundziffer vorkommt, so können jeweils an der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle nur die Grundziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 auftreten. Es können also an jeder Stelle genau neun verschiedene Grundziffern vorkommen. Daher gibt es genau $9 \cdot 9 \cdot 9=729$ dreistellige natürliche Zahlen, die nicht die Null als Grundziffer enthalten.

W 5 ■ 1041 Sowohl die Summe zweier gerader als auch die Summe zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets gerade. Deshalb ist X wegen $Y+Y$ eine gerade Zahl. Da die Summe $ZX<100$ ist, muß $X \leq 4$ sein. Für $X=0$ wäre XY keine zweistellige natürliche Zahl; deshalb muß $X>0$ sein. Also gilt $X=2$ oder $X=4$.
Aus $X=2$ folgt $Y=1$ oder $Y=6$ bzw. $Z=4$ oder $Z=5$.
Aus $X=4$ folgt $Y=2$ oder $Y=7$ bzw. $Z=8$ oder $Z=9$.
Die gesuchten Lösungen lauten somit

21	26	42	47
+21	+26	+42	+47
42	52	84	94

W 5 ■ 1042 a) Fläche des Fußbodens:
6 m = 600 cm, 4,5 m = 450 cm,
$A_1=600 \cdot 450\ \text{cm}^2=270\,000\ \text{cm}^2$.
Fläche einer quadratischen Fliese:
$A_2=15 \cdot 15\ \text{cm}^2=225\ \text{cm}^2$.
Es werden 270 000 : 225 = 1 200 Fliesen benötigt.
b) Fläche einer rechteckigen Fliese:
$A_3=120 \cdot 225\ \text{mm}^2=27\,000\ \text{mm}^2=270\ \text{cm}^2$.
Von dieser Sorte werden 270 000 : 270 = 1 000 Stück benötigt.

W 5 * 1044 Es sei h die Anzahl der verkauften Hühner, e die der Enten, g die der Gänse, p die der Puten und k die der Kaninchen.
Aus $100-(h+e)-(p+k)=100-52-30=g$ folgt $g=18$.
Aus $(e+g)-18=43-18=e$ folgt $e=25$.
Aus $52-25=h$ folgt $h=27$; aus $34-18=p$ folgt $p=16$;
aus $30-16=k$ folgt $k=14$.
An diesem Tage wurden 27 Hühner, 25 Enten, 18 Gänse, 16 Puten und 14 Kaninchen verkauft.

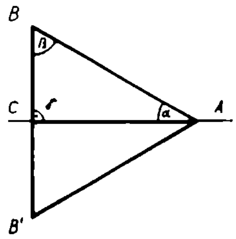
W 5 * 1043 Da die gesuchte natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, läßt sie sich durch $z=6 \cdot n$ ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) darstellen. Die Hälfte von z lautet dann $3 \cdot n$; der dritte Teil von z lautet $2 \cdot n$.
Aus $3 \cdot n-5=2 \cdot n$ folgt $n=5$ und damit $z=6 \cdot 5=30$.

6 ▲ 1045 Aus $s_1=130$ m und $s_2=220$ m folgt $s=130\ \text{m}+220\ \text{m}=350$ m. Deshalb gilt

$$t=\frac{s}{v}=\frac{350\ \text{m} \cdot \text{h}}{42\ \text{km}}=\frac{350 \cdot 60}{42\,000}\ \text{min}=\frac{1}{2}\ \text{min}.$$

In einer halben Minute hat der Güterzug den Tunnel in seiner ganzen Länge durchfahren.

6▲1046 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit
$\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$ (vgl. die Abb.).



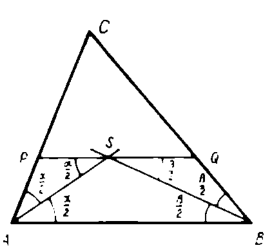
Aus $\alpha + \beta = 90°$ und $\beta = 2\alpha$ folgt dann $3\alpha = 90°$, also $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$. Wir spiegeln das rechtwinklige Dreieck ABC an der Geraden AC als Symmetrieachse; dann gilt für die Winkel des Dreiecks ABB' $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle BB'A = \sphericalangle BAB' = 60°$, d. h. das Dreieck ist gleichwinklig und damit auch gleichseitig. Aus $\overline{BB'} = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \overline{CB'}$ folgt dann $2 \cdot \overline{BC} = \overline{AB}$. Die Hypotenuse $\overline{AB}$ ist somit doppelt so lang wie die Kathete $\overline{BC}$.

W 6 ■ 1047 Die Ziffern 1, 2, 3 und 4 lassen sich wie folgt anordnen:

1 2 3 4, 2 1 3 4, ..., 4 1 2 3
1 2 4 3, 2 1 4 3, ..., 4 1 3 2
1 3 2 4, · ..., ·
1 3 4 2, ...,
1 4 2 3, · ..., ·
1 4 3 2, 2 4 3 1, ..., 4 3 2 1.

Es lassen sich also $4 \cdot 6 = 24$ verschiedene Zahlen bilden. Jede Ziffer steht genau je sechsmal an der Einer-, Zehner- bzw. Hunderterstelle. Die Quersumme der Ziffern beträgt 10, das Sechsfache der Quersumme somit $6 \cdot 10 = 60$. Damit ergibt sich folgende Rechnung:
60 Einer sind 6 Zehner, 60 Zehner sind 6 Hunderter, 60 Hunderter sind 6 Tausender, 60 Tausender sind 6 Zehntausender; wir erhalten als Summe aller dieser Zahlen demnach 66 660.

W 6 ■ 1048 Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle PAS = \sphericalangle SAB = \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle QBS = \sphericalangle SBA = \frac{1}{2}\beta$.
Ferner gilt $\sphericalangle PSA = \sphericalangle SAB = \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle QSB = SBA = \frac{1}{2}\beta$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Die Dreiecke $\triangle ASP$ und $\triangle SBQ$ sind somit gleichschenklig, da gleichen Winkeln eines Dreiecks gleiche Seiten gegenüberliegen, und es gilt $\overline{AP} = \overline{PS}$ und $\overline{BQ} = \overline{SQ}$. Daraus folgt
$\overline{AP} + \overline{BQ} = \overline{PS} + \overline{SQ} = \overline{PQ}$.



W 6 * 1049 Da die Summe $ZX < 100$ ist, muß $X \leqq 3$ sein. Für $X = 0$ wäre XY keine zweistellige natürliche Zahl; deshalb muß $X > 0$ sein. Also gilt $X = 1$ oder $X = 2$ oder $X = 3$.
Es sei $X = 1$; dann ist $Y = 7$ und $Z = 5$.
Es sei $X = 2$; dann ist $Y = 4$ und $Z = 7$.
Es sei $X = 3$; dann ist $Y = 1$ und $Z = 9$.
Die gesuchten Lösungen lauten somit

$$\begin{array}{rrr} 17 & 24 & 31 \\ +17 & +24 & +31 \\ \underline{+17} & \underline{+24} & \underline{+31} \\ \underline{\underline{51}} & \underline{\underline{72}} & \underline{\underline{93}}. \end{array}$$

W 6 * 1050 Für z_1 gilt $z_1 = 1 \cdot 100\,000 + x$, für z_2 gilt $z_2 = 10 \cdot x + 1$. Wegen $3 \cdot z_1 = z_2$ gilt dann

$$3 \cdot (100\,000 + x) = 10x + 1,$$
$$300\,000 + 3x = 10x + 1,$$
$$7x = 299\,999,$$
$$x = 42\,857.$$

Die Zahl z_1 lautet somit 142 857, und die Zahl z_2 lautet 428 571, und es gilt $3 \cdot 142\,857 = 428\,571$.

7▲1051 Da die Summe $zy < 100$ ist, muß $x \leqq 3$ sein. Für $x = 0$ wäre xy keine zweistellige natürliche Zahl; deshalb muß $x > 0$ sein. Also gilt $x = 1$ oder $x = 2$ oder $x = 3$. Wegen $y \leqq 9$ gilt $3 \cdot y \leqq 27$; somit gilt für die Einerstellen $3 \cdot y = 0 \cdot 10 + y$ oder $3 \cdot y = 1 \cdot 10 + y$ oder $3 \cdot y = 2 \cdot 10 + y$.
Aus $3 \cdot y = 0 \cdot 10 + y$, also $3 \cdot y = y$ folgt $y = 0$.
Aus $3 \cdot y = 10 + y$, also $2 \cdot y = 10$ folgt $y = 5$.
Aus $3 \cdot y = 20 + y$, also $2 \cdot y = 20$ folgt $y = 10$; das ist wegen $y \leqq 9$ nicht möglich.
Die gesuchten Lösungen lauten somit

$$\begin{array}{rrrrr} 10 & 20 & 30 & 15 & 25 \\ +10 & +20 & +30 & +15 & +25 \\ \underline{+10} & \underline{+20} & \underline{+30} & \underline{+15} & \underline{+25} \\ \underline{\underline{30}} & \underline{\underline{60}} & \underline{\underline{90}} & \underline{\underline{45}} & \underline{\underline{75}} \end{array}$$

7▲1052 Es seien $s_1, s_2, \ldots, s_6$ die erzielten Sprungweiten (gemessen in cm); dann folgt aus den Angaben von Klaus:

$s_4 = 410$ cm (Quersumme 5);
$300\text{ cm} < s_1 < 400\text{ cm}$ (Quersumme 5); von den Zahlen 311, 302 und 320 ist nur 320 durch 5 teilbar, folglich gilt $s_1 = 320$ cm;
$s_3 = s_1 + \frac{1}{2}s_1 = 320\text{ cm} + 160\text{ cm} = 480\text{ cm}$;
$s_2 + 44\text{ cm} = s_3$; $s_2 + 44\text{ cm} = 480\text{ cm}$, also $s_2 = 436$ cm; s_5 war ein ungültiger Sprung;
also gilt, da die Summe der Sprungweiten s_1, s_2, s_3, s_4 und s_6 gleich 2 118 cm war, $s_6 = 2\,118\text{ cm} - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = 2\,118\text{ cm} - 1\,646\text{ cm} = 472\text{ cm}$.

W 7 ■ 1053 Angenommen im Aufenthaltsraum stehen x Bänke, dann gilt

$$6 \cdot (x-1) + 3 = 5 \cdot x + 4,$$
$$6x - 6 + 3 = 5x + 4,$$
$$x = 7.$$

Für den ersten Fall gilt $6 \cdot (7-1) + 3 \cdot 1 = 39$ Personen; für den zweiten Fall $5 \cdot 7 + 4 = 39$ Personen.
Im Aufenthaltsraum befinden sich 7 Bänke und 39 Personen.

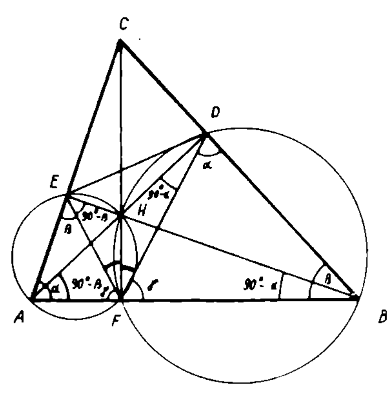
W 7 ■ 1054 Aus $p_1 \cdot p_2 + 1$ und $p_2 = p_1 + 2$ erhalten wir durch Einsetzen
$p_1 \cdot (p_1 + 2) + 1 = p_1^2 + 2p_1 + 1 = (p_1 + 1)^2$.
Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p_1, p_1 + 1, p_1 + 2$ ist eine durch 3 und eine durch 2 teilbar. Da p_1 und $p_1 + 2$ beide Primzahlen und beide größer als 3 sind, muß $p_1 + 1$ sowohl durch 3, als auch durch 2 und deshalb durch 6 teilbar sein. Ihr Quadrat ist darum durch $6 \cdot 6 = 36$ teilbar.

W 7 * 1055 Es sei q die Quersumme einer vierstelligen natürlichen Zahl mit der geforderten Eigenschaft; dann gilt

$$999 < q^4 \leqq 9\,999,$$
$$961 = 31^2 < q^4 \leqq 99^2 = 9\,801,$$
$$31 < q^2 \leqq 99,$$
$$5 < q < 9.$$

Die Quersumme q könnte also gleich 6, 7 oder 8 sein. Nun gilt
$6^4 = 1\,296$ und $q = 1 + 2 + 9 + 6 = 18 \neq 6$,
$7^4 = 2\,401$ und $q = 2 + 4 + 0 + 1 = 7$,
$8^4 = 4\,096$ und $q = 4 + 0 + 9 + 6 = 19 \neq 8$.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung; die einzige natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft lautet 2 401.

W 7 * 1056 Es sei H der Schnittpunkt der drei Höhen. Für das rechtwinklige Dreieck ABE gilt $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FBH = 90° - \alpha$. Da jeder der beiden Punkte D und F Scheitel eines rechten Winkels ist, die über derselben Sehne $\overline{BH}$ stehen, liegen D und F auf dem Kreis mit $\overline{BH}$ als Durchmesser. Dann gilt auch $\sphericalangle FBH = \sphericalangle FDH = 90° - \alpha$ als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{FH}$. Aus $\sphericalangle ADB = 90°$ und $\sphericalangle FDH = 90° - \alpha$ folgt $\sphericalangle FDB = \alpha$. Wegen $\sphericalangle FDB = \beta$ folgt daraus ferner $\sphericalangle BFD = \gamma$. Somit gilt $\sphericalangle HFD = 90° - \gamma$.



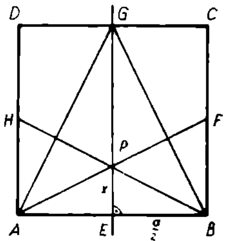
Für das rechtwinklige Dreieck ABD gilt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAH = 90° - \beta$. Die Scheitel E und F der rechten Winkel liegen auf dem Kreis mit $\overline{AH}$ als Durchmesser. Deshalb gilt $\sphericalangle FAH = \sphericalangle FEH = 90° - \beta$ als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{FH}$. Daraus folgt $\sphericalangle AEF = \beta$ und somit $\sphericalangle AFE = \gamma$, also $\sphericalangle HFE = 90° - \gamma$. Die Höhe $\overline{CF}$ des Dreiecks ABC halbiert somit den Innenwinkel EFD des Dreiecks DEF.
Der Nachweis, daß auch die übrigen Höhen die Innenwinkel des Dreiecks DEF halbieren, erfolgt in analoger Weise.

8▲1057 Für $n=0$ und $n=1$ trifft die Behauptung wegen $z=0$ zu, da die Zahl 0 durch 6 und durch 24 teilbar ist. Es sei nun n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Dann gilt $z=n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$.
Die Zahl z ist also in jedem Falle durch 3 teilbar; denn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine Zahl durch 3 teilbar, und daher ist auch ihr Produkt durch 3 teilbar.
a) Ist nun n eine gerade natürliche Zahl, so ist sie durch 2 teilbar, also ist auch das Produkt $z=(n-1)n(n+1)$ durch 2 teilbar. Da z durch 2 und durch 3 teilbar ist und da 2 und 3 teilerfremde natürliche Zahlen sind, ist z auch durch 6 teilbar, w.z.b.w.
b) Ist aber n eine ungerade natürliche Zahl, so gilt $n=2k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. In diesem Falle erhalten wir
$z=(n-1)n(n+1)=2k(2k+1)(2k+2)$
$=4k(k+1)(2k+1)$. Nun ist das Produkt $k(k+1)$ durch 2 teilbar, weil von den beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen k und $k+1$ eine Zahl durch 2 teilbar ist. Also ist z durch 8 teilbar. Da, wie oben gezeigt wurde, z auch durch 3 teilbar ist und da 3 und 8 teilerfremd sind, ist in diesem Falle z durch $3\cdot 8=24$ teilbar, w.z.b.w.

8▲1058 Die abgebildete Figur ist axialsymmetrisch bezüglich der Geraden GP als Symmetrieachse. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABH$ und $\triangle EBP$ folgt $\overline{AH}:\overline{AB}=\overline{EP}:\overline{EB}$ bzw. $\frac{a}{2}:a=x:\frac{a}{2}$, also $x=\frac{a}{4}$. Für den Flächeninhalt des konkaven Vierecks $APBG$ gilt demnach

$$A_0=A_{ABCD}-A_{ABP}-2\cdot A_{BCG},$$
$$A_0=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{2}=\frac{3}{8}a^2,$$

also $A_0=24\,\text{cm}^2$.



W 8 ■ 1059 1. Das Fährschiff „Saßnitz" legt die 107,4 km lange Strecke von Saßnitz nach Trelleborg in 3 h 50 min $=\frac{230}{60}$ h zurück; daher beträgt seine mittlere Geschwindigkeit

$v_1=\frac{107{,}4\cdot 60}{230}$ km/h $\approx 28{,}0$ km/h.

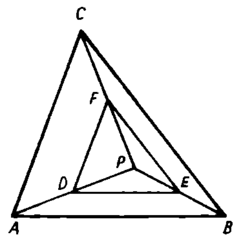
Nun ist 1 sm = 1,852 km, also 1 km $=\frac{1}{1{,}852}$ sm.
Daraus folgt

$v_1\approx\frac{28{,}0}{1{,}852}$ sm/h $\approx 15{,}1$ kn.

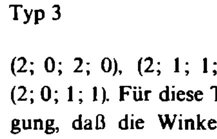
Die mittlere Geschwindigkeit dieses Fährschiffes beträgt also 15,1 kn.
2. Das neue Fährschiff „Rügen" legt die Strecke von 107,4 km mit einer mittleren Geschwindigkeit von $v_2=20{,}6$ sm/h zurück. Da 1 sm = 1,852 km, beträgt die Geschwindigkeit

$v_2=20{,}6\cdot 1{,}852$ km/h $\approx 38{,}15$ km/h. Die Strecke von 107,4 km wird also in der Zeit $t=\frac{107{,}4}{38{,}15}$ h $\approx 2{,}815$ h ≈ 2 h 49 min zurückgelegt.

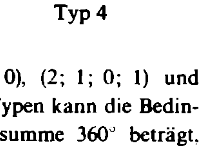
W 8 ■ 1060 Aus $\overline{PD}:\overline{PA}=\overline{PE}:\overline{PB}=1:2$ folgt nach dem Strahlensatz $DE\parallel AB$ und $\overline{AB}=2\cdot\overline{DE}$. Entsprechend gilt $EF\parallel BC$ und $\overline{BC}=2\cdot\overline{EF}$ bzw. $DF\parallel AC$ und $\overline{AC}=2\cdot\overline{DF}$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ sind somit einander ähnlich. Aus der Ähnlichkeit folgt $A_{DEF}:A_{ABC}=\overline{DE}^2:\overline{AB}^2=\overline{DE}^2:4\cdot\overline{DE}^2=1:4$. Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF ist somit genau ein Viertel so groß wie der des Dreiecks ABC.



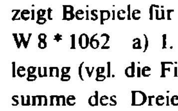
W 8 * 1061 Nach Voraussetzung gilt $x=2$. Da ein Viereck vier Winkel hat, gilt $x+y+z+t=4$, also $y+z+t=2$.
Es könnte also höchstens die Typen
(2;2;0;0), (2;0;2;0), (2;0;0;2), (2;1;1;0), (2;1;0;1) und (2;0;1;1)
geben. Nun beträgt die Winkelsumme eines Vierecks stets 360°. Daher scheidet der 1. Typ aus; denn dann wäre die Winkelsumme kleiner als 360°. Ferner scheidet auch der 3. Typ aus; denn hier wäre die Winkelsumme größer als 360°. Es verbleiben also nur die folgenden vier Typen von ebenen Vierecken mit genau zwei spitzen Winkeln:

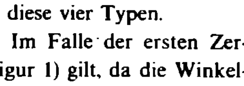


Typ 1



Typ 2


Typ 3

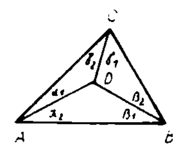

Typ 4

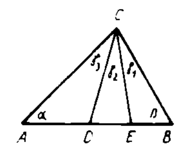
(2; 0; 2; 0), (2; 1; 1; 0), (2; 1; 0; 1) und (2; 0; 1; 1). Für diese Typen kann die Bedingung, daß die Winkelsumme 360° beträgt, erfüllt werden. Die beigefügte Abbildung zeigt Beispiele für diese vier Typen.
W 8 * 1062 a) 1. Im Falle der ersten Zerlegung (vgl. die Figur 1) gilt, da die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich 180° ist, $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=180°$.
Nun sei der kleinste der Winkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 gleich φ.
Dann gilt $\alpha_1\geqq\varphi$, $\alpha_2\geqq\varphi$, $\beta_1\geqq\varphi$, $\beta_2\geqq\varphi$, $\gamma_1\geqq\varphi$, $\gamma_2\geqq\varphi$; also

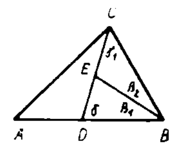
$$180°=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2\geqq 6\varphi,$$

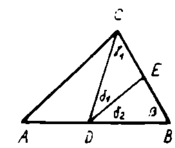
d. h. $\varphi\leqq\frac{180°}{6}=30°$.

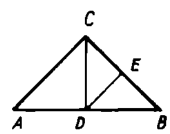
Der kleinste dieser Winkel ist also nicht größer als 30°, also auch nicht größer als 45°; daher ist auch der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°.


Figur 1


Figur 2


Figur 3


Figur 4



Figur 5

2. Im Falle der zweiten Zerlegung (vgl. die Figur 2) gilt, da die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich 180° ist,

$$\alpha+\beta+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=180°.$$

Nun sei analog wie oben der kleinste dieser Winkel gleich φ, dann gilt

$$180°=\alpha+\beta+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\geqq 5\varphi,$$

d. h. $\varphi\leqq\frac{180°}{5}=36°$.

Auch in diesem Falle ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°.
3. Im Falle der dritten Zerlegung (vgl. die Figur 3) gilt, da die Winkelsumme des Dreiecks CDB gleich 180° ist,

$$\delta+\beta_1+\beta_2+\gamma_1=180°.$$

Nun sei der kleinste dieser Winkel gleich φ, dann gilt

$$180°=\delta+\beta_1+\beta_2+\gamma_1\geqq 4\varphi,$$

d. h. $\varphi\leqq\frac{180°}{4}=45°$.

Auch in diesem Falle ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°.
4. Im Falle der vierten Zerlegung (vgl. die Figur 4) erhalten wir analog wie in Ziff. 3

$$\delta_1+\delta_2+\beta+\gamma_1=180°,$$
$$180°=\delta_1+\delta_2+\beta+\gamma_1\geqq 4\varphi,$$
$$\varphi\leqq\frac{180°}{4}=45°.$$

In allen vier Fällen ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°, w.z.b.w.
b) Die Figur 5 zeigt ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck ABC, das in die ebenfalls gleichschenklig-rechtwinkligen Teildreiecke ADC, DBE, CDE zerlegt worden ist. Jedes dieser Teildreiecke hat einen rechten

Winkel und zwei Winkel von je 45°. In diesem Falle ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke genau gleich 45°.

9▲1063 Es seien a, b zwei nichtnegative reelle Zahlen, für die

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b} \qquad (1)$$

gilt. Dann folgt durch Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung (1)

$$(\sqrt{a+b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2,$$
$$a+b=a+2\sqrt{ab}+b,$$

also $\quad 2\sqrt{ab}=0. \qquad (2)$

Die Gleichung (2) ist aber nur dann erfüllt, wenn $a=0$ oder $b=0$ gilt. Daher kann die Gleichung (1) höchstens dann erfüllt sein, wenn $a=0$ oder $b=0$. Andererseits erhalten wir für $a=0$

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{0+b}=\sqrt{b}=\sqrt{0}+\sqrt{b}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b} \text{ und für } b=0$$
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a+0}=\sqrt{a}=\sqrt{a}+\sqrt{0}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

d. h., die Gleichung (1) ist erfüllt, wenn $a=0$ oder $b=0$. Die gesuchten geordneten Paare, für die (1) erfüllt ist, sind also alle Paare $[0;b]$ und $[a;0]$, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind.

9▲1064 Wir beweisen zunächst, daß der Punkt P auf der Seitenhalbierenden $\overline{CD}$ des Dreiecks ABC liegt. Nun gilt nach Voraussetzung für die Flächeninhalte der Dreiecke CAP und CPB

$$A_{CAP}=A_{CPB}. \qquad (1)$$

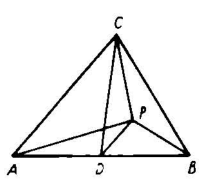
Ferner gilt, da wegen $\overline{AD}=\overline{DB}$ die Grundlinien und die Höhen der Dreiecke PAD und PDB gleichlang sind,

$$A_{PAD}=A_{PDB}. \qquad (2)$$

Endlich gilt wegen $\overline{AD}=\overline{DB}$ auch

$$A_{CAD}=A_{CDB}=\frac{A}{2}, \text{ wobei} \qquad (3)$$

A der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.



Würde nun P nicht auf der Seitenhalbierenden $\overline{CD}$ liegen, z. B. wie in der Abbildung innerhalb des Dreiecks CDB, so wären wegen (1) und (2) die Vierecke $ADPC$ und $CPDB$ flächengleich, und der Flächeninhalt A_1 des Vierecks $CPDB$ wäre gleich

$$A_1=\frac{A}{2}.$$

Andererseits gilt aber, da P innerhalb des Dreiecks CDB liegt,

$$A_1<A_{CDB},$$

also

$$A_1<\frac{A}{2}.$$

Das ist aber ein Widerspruch; daher ist die Annahme, daß P nicht auf der Seitenhalbierenden $\overline{CD}$ liegt, falsch. Damit ist bewiesen, daß P auf $\overline{CD}$ liegt.

Analog beweisen wir, daß P auch auf den Seitenhalbierenden $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ liegt. Der Punkt P ist also der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, w.z.b.w.

W 9▲1065 Es sei x eine reelle Lösung der gegebenen Gleichung; dann gilt

$$\frac{2ax}{x+a}+\frac{2ax}{x-a}-\frac{a}{x^2-a^2}=2$$

und $x\neq a$, $x\neq -a$, da sonst die Nenner in (1) nicht von Null verschieden wären. Nun folgt aus (1) durch Multiplikation mit x^2-a^2

$$2ax(x-a)+2ax(x+a)-a=2(x^2-a^2), \qquad (2)$$
$$2ax^2-2a^2x+2ax^2+2a^2x-a=2x^2-2a^2,$$
$$4ax^2-2x^2+2a^2-a=0,$$
$$2(2a-1)x^2+a(2a-1)=0,$$
$$(2a-1)(2x^2+a)=0. \qquad (3)$$

1. Nun sei $2a-1=0$, also $a=\frac{1}{2}$.

Dann ist die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (2) für alle reellen x und daher die Gleichung (1) für alle reellen x mit $|x|\neq\frac{1}{2}$ erfüllt.

2. Es sei $2a-1\neq 0$. Dann folgt aus (3)

$$2x^2+a=0,$$
$$x^2=-\frac{a}{2}. \qquad (4)$$

2. a) Ist nun $a>0$ und $a\neq\frac{1}{2}$, so hat die Gleichung (4) und daher auch die Gleichung (1) wegen $-\frac{a}{2}<0$ keine reelle Lösung.

2. b) Ist aber $a<0$, also $-\frac{a}{2}>0$, so hat die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (2) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=\sqrt{-\frac{a}{2}}$ und $x_2=-\sqrt{-\frac{a}{2}}$.

Dann hat aber auch die Gleichung (1) diese beiden Lösungen unter der Voraussetzung, daß $|x|\neq a$, also $a\neq -\frac{1}{2}$ gilt.

2. c) Ist $a=0$, so hat zwar die Gleichung (3) genau eine reelle Lösung, nämlich $x=0$, aber die Gleichung (1) ist wegen $x=a$ nicht erfüllt, weil alle Nenner gleich Null sind.

Zusammenfassung: Die Gleichung (1) hat also

a) keine reelle Lösung, wenn $a\geqq 0$ und $a\neq\frac{1}{2}$ oder wenn $a=-\frac{1}{2}$;

b) genau eine reelle Lösung in keinem Falle;

c) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=\sqrt{-\frac{a}{2}}$ und $x_2=-\sqrt{-\frac{a}{2}}$, wenn $a<0$ und $a\neq -\frac{1}{2}$;

d) mehr als zwei reelle Lösungen, und zwar unendlich viele Lösungen, wenn $a=\frac{1}{2}$. In diesem Falle ist die Gleichung für alle x mit $|x|\neq\frac{1}{2}$ erfüllt.

W 9■1066 Es sei $\overline{AC}=d$, $\overline{GC}=x$ und $\overline{FG}=y$; dann ist nachzuweisen, daß $x=y$ gilt.

Aus $\overline{AC}=d=a\sqrt{2}$ und $\overline{AG}=a$ folgt $\overline{GC}=x=a\sqrt{2}-a$, also $x=a(\sqrt{2}-1)$. Ferner gilt $\overline{SG}=\frac{a}{2}\sqrt{2}-a(\sqrt{2}-1)=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$.

Aus der Ähnlichkeit der Figuren folgt

$$\overline{SG}:\overline{SC}=\overline{FG}:\overline{BC}, \text{ also}$$

$$\frac{\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})}{\frac{a}{2}\sqrt{2}}=\frac{y}{a}, \text{ also } y=\frac{a(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=a(\sqrt{2}-1)$$

und damit $x=y$.

W 9*1067 Für $p=2$ ist die Zahl $14+p=16$ nicht Primzahl. Für $p=3$ ist die Zahl $32+p==35$ nicht Primzahl. Für $p=5$ sind die Zahlen $14+p=19$, $26+p=31$, $32+p=37$ und $38+p=43$ sämtlich Primzahlen.

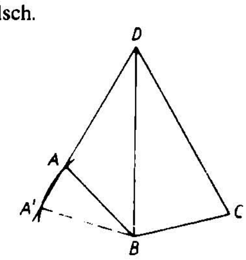
Damit haben wir bereits eine Primzahl, nämlich $p=5$, erhalten, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Wir wollen nun zeigen, daß es keine weitere solche Primzahl gibt. Angenommen, es gäbe eine solche Primzahl p mit $p>5$. Dann ist p nicht durch 5 teilbar. Man kann daher p in einer der Formen $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$ darstellen, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.

Für $p=5k+1$ erhalten wir die Zahl $14+p=5k+15=5(k+3)$, die nicht Primzahl ist; für $p=5k+2$ erhalten wir die Zahl $38+p==5k+40=5(k+8)$, die nicht Primzahl ist; für $p=5k+3$ erhalten wir die Zahl $32+p==5k+35=5(k+7)$, die nicht Primzahl ist, für $p=5k+4$ erhalten wir die Zahl $26+p==5k+30=5(k+6)$, die nicht Primzahl ist.

Damit haben wir nachgewiesen, daß es keine Primzahl, die größer als 5 ist, gibt, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Es gibt also genau eine Primzahl, nämlich $p=5$, so daß die Zahlen $14+p$, $26+p$, $32+p$, $38+p$ wieder Primzahlen sind.

W 9*1068 Nach dem Kongruenzsatz (ssw) sind zwei Dreiecke immer dann kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. In dem vorliegenden Fall sind aber die Dreiecke ABD und BDC nicht notwendig kongruent, wenn die Seite $\overline{AB}$ kleiner als die Seite $\overline{BD}$ und daher auch die Seite $\overline{BC}$ kleiner als die Seite $\overline{BD}$ ist. In diesem Falle stimmen nämlich die Dreiecke ABD und BCD in zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel überein, woraus nicht notwendig die Kongruenz dieser Dreiecke folgt. Daher ist auch das Viereck $ABCD$ nicht immer ein Drachenviereck, und die aufgestellte Behauptung ist falsch.



Das wird durch die beigefügte Abbildung veranschaulicht. Obwohl in dieser Abbildung $\overline{DB}=\overline{DB}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\sphericalangle BDA=\sphericalangle CDB$ gilt, sind die Dreiecke ABD und BCD nicht kongruent, und das Viereck $ABCD$ ist kein Drachenviereck.

W 10/12 ▲ 1069 Wir setzen
$a-c=x,\ b-d=y.$
Dabei gilt nach Voraussetzung $x>0$, $y>0$ und $a+b-c-d=x+y>0$. Nun ist die Ungleichung (1) genau dann erfüllt, wenn die Ungleichung

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x-y)^2} \tag{2}$$

erfüllt ist.
Zum Beweis der Richtigkeit der Ungleichung (2) leiten wir zunächst eine Ungleichung für $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ ab. Für alle positiven reellen Zahlen x, y gilt nämlich

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\geq 0,\ \frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}\geq 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{2}{xy}.\ \text{Andererseits gilt}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^2&=x^2+2xy+y^2=\\&=x^2-2xy+y^2+4xy\\&=(x-y)^2+4xy\geq 4xy.\end{aligned}$$

also $(x+y)^2\geq 4xy$. (4)
Aus (4) erhalten wir durch Division

$$\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{(x+y)^2},\ \text{also}\ \frac{2}{xy}\geq\frac{8}{(x+y)^2}.$$

Daraus folgt wegen (3)

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x+y)^2},$$

womit die Ungleichung (2) und damit auch die Ungleichung (1) bewiesen ist.

W 10/12 ■ 1070 Mit Hilfe einer geschickten Umformung können wir die Summe s_n leicht berechnen. Es gilt nämlich für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen k

$$\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

Daraus folgt

$$s_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}+\frac{1}{6-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2n+1-1}{2n+1}=\frac{2n}{2(2n+1)}.$$

$$s_n=\frac{n}{2n+1},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.
Für $n=1$ erhalten wir

$$s_1=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Ferner erhalten wir für $n=2$, 3, 10 *bzw.* 100

$$s_2=\frac{2}{4+1}=\frac{2}{5},$$

$$s_3=\frac{3}{6+1}=\frac{3}{7},$$

$$s_{10}=\frac{1}{20+1}=\frac{10}{21},$$

$$s_{100}=\frac{100}{200+1}=\frac{100}{201}.$$

Wir erkennen, daß die Summe s_n sich um so mehr der Zahl $\frac{1}{2}$ nähert, je größer n wird. Es gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Lösungen zu alpha-heiter 6/73:

Der Äquilaber
Bezeichnen wir mit Buchstaben $F\triangleq$ Fisch, $K\triangleq$ Kugel, $G\triangleq$ Glöckchen, $W\triangleq$ Waagebalken, dann ergibt sich anhand der Zeichnung:

$K=2\,W$ (1)
$F+K=G$ (2)
$2\,F+G=F+K+G+W$ (3)
oder $F=K+W$ (4)
aus (1) und (4) $F=3\,W$ (5)
aus (1), (2) und (5) $G=5$ W (6)
$x=3\,W+K=5\,W$

Mit zwei Gegenständen (laut Aufgabenstellung) läßt sich dieses Gewicht durch eine Kugel und einen Fisch aufbringen [nach (6) und (2)].

Ein statt kein
Heft 5/73, S. 106: In Aufgabe 5 muß es heißen: ... Es gibt ein k, ...

Eine Zahl fehlt
Es fehlt
a) die 4; denn $3\cdot 7=21$ und $4\cdot 8=32$
b) die 13, denn 11, 13, 17 sind Primzahlen und 15, 18, 21 sind durch 3 teilbar
c) die 8; denn $2^3=8$ und $5^4=625$.

Läufersprung
Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Der zerbrochene Krug
Es ist der Krug unten rechts.

Das hab ich mir ausgedacht

$$\begin{array}{c}21-2=19\\ :\quad\cdot\quad-\\ \underline{7+3=10}\\ 3+6=\ \ 9\end{array}$$

Magisches Quadrat

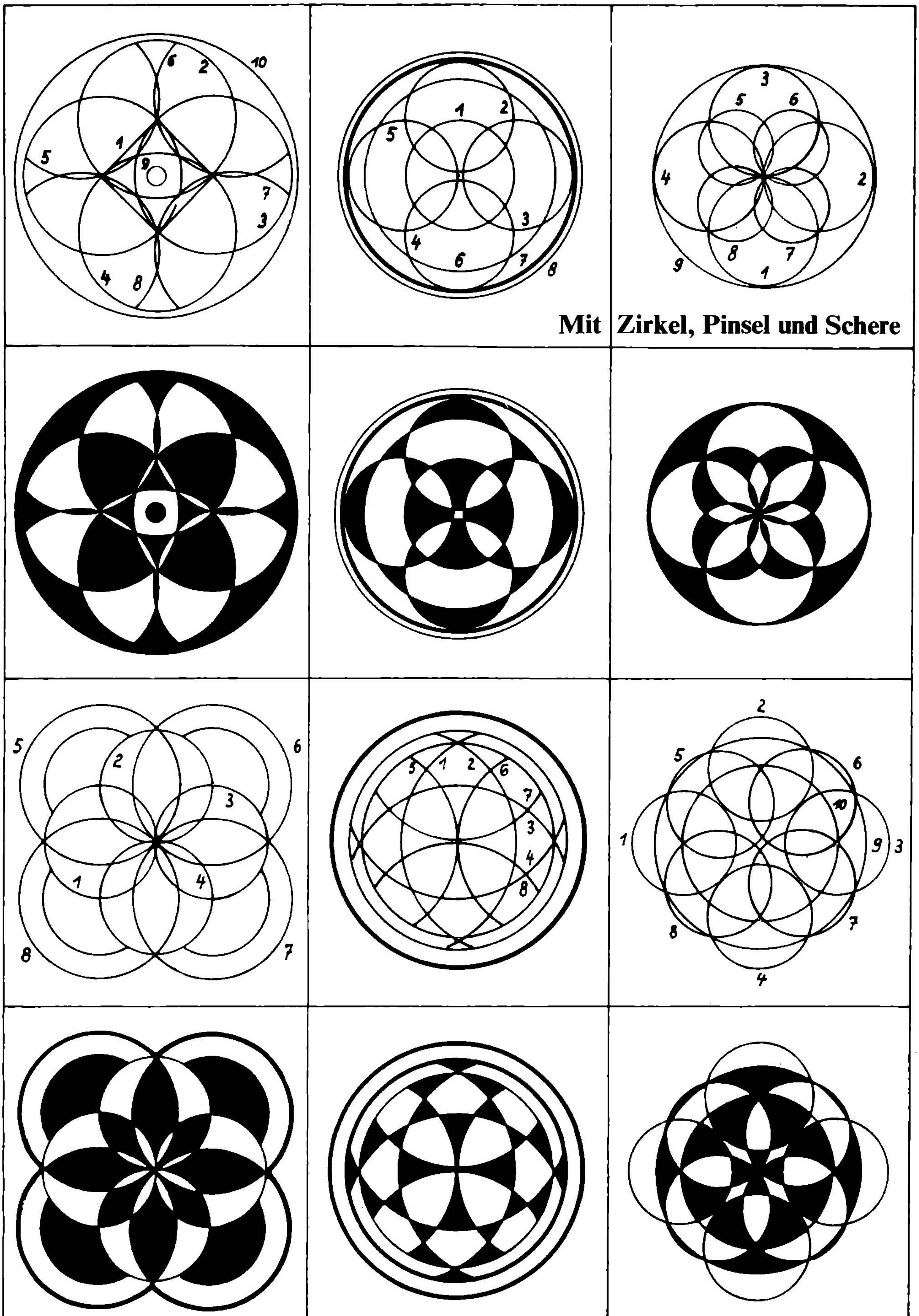
2	13	3	16
11	8	10	5
14	1	15	4
7	12	6	9

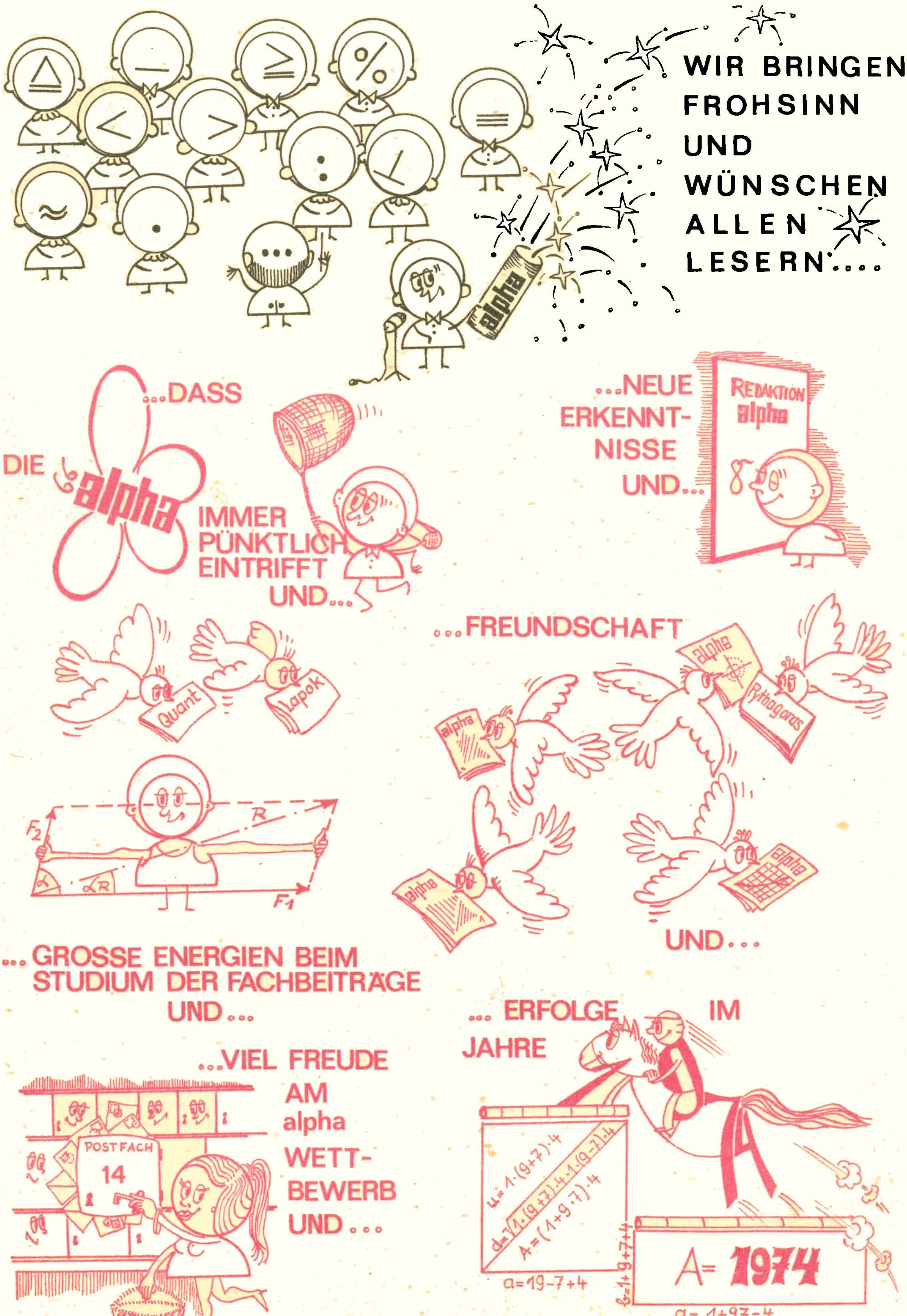
Kreuzworträtsel

1. S	2. I	3. N		4. S		5. P
	6. R	A	D	I	U	S
7. K		D		G		I
8. P	R	I	S	M	9. A	
M		R		10. A	R	C

Summand

Lösungen zu: Quiz für helle Köpfe
1. b 2. c 3. c 4. c 5. b
6. b 7. b


Mit Zirkel, Pinsel und Schere



WIR BRINGEN
FROHSINN
UND
WÜNSCHEN
ALLEN
LESERN....
alpha
...DASS
DIE alpha IMMER PÜNKTLICH EINTRIFFT
UND...
...NEUE ERKENNTNISSE UND...
REDAKTION alpha
Quant
Lapok
...FREUNDSCHAFT
alpha
Pythagoras
F2
R
F1
UND...
... GROSSE ENERGIEN BEIM STUDIUM DER FACHBEITRÄGE
UND...
...VIEL FREUDE AM alpha WETTBEWERB UND...
POSTFACH
14
... ERFOLGE IM JAHRE
a=19-7+4
A= 1974
a= 1+97-4