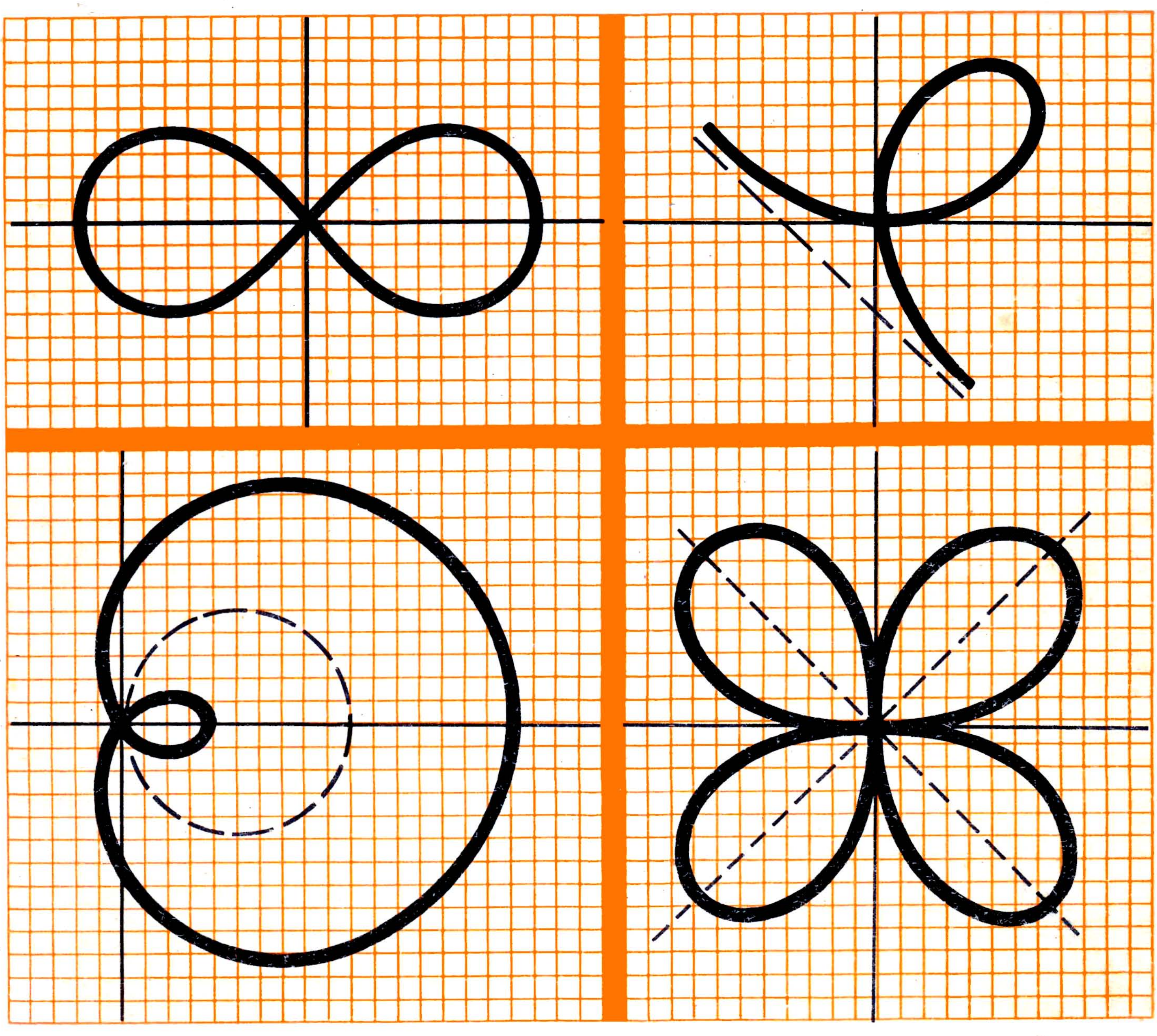
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

1

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 · Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten: K.-G. Guckuk, Leipzig (S. 11 [2×], S. 14, S. 16); J. Lehmann, Leipzig (S. 2, S. 14); J. Piehler, Eigenfoto (S. 6); *Colloquium Mathematicum*, Bd. 1, 1948, Wrocław (S. 8); B. Krötenheerdt, Eigenfoto (S. 10); W. Fricke, Berlin (S. 12); *Post card, pictorial math.*, Yeshiva University New York (S. 17); Briefmarken: H. Decker, Köln
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. November 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Elementare Grundzüge der klassischen und modernen Variationsrechnung

Was ist eigentlich Variationsrechnung?

Zur inhaltlichen Klärung dieser Frage gehen wir einleitend von den bekannten *Extremwertaufgaben* der Analysis aus. Diese sind, ganz allgemein charakterisiert, an die Zielsetzung geknüpft, zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ ihren größten oder kleinsten Wert bezüglich aller x einer vorgegebenen Teilmenge M des Definitionsbereiches von $f(x)$ zu bestimmen, also $\mathrm{Max}_M f(x)$ bzw. $\mathrm{Min}_M f(x)$ zu berechnen. Damit verbindet sich zugleich die Aufgabe, solche $x = x_{Max}$ bzw. $x = x_{Min}$ aus M (sog. Extremstellen) zu ermitteln, für die $f(x_{Max}) = \mathrm{Max}_M f(x)$ und $f(x_{Min}) = \mathrm{Min}_M f(x)$ gilt. Ist zum Beispiel $f(x)$ eine stetige Funktion und M ein Intervall $[a, b]$ der x-Achse, so existieren stets $\mathrm{Max}_{[a,b]} f(x)$ und $\mathrm{Min}_{[a,b]} f(x)$, und ihre zugeordneten Extremstellen liegen entweder im Innern von $[a, b]$ oder auf dem Rande dieses Intervalls. Ist $f(x)$ darüber hinaus differenzierbar, muß in jeder im Innern von $[a, b]$ liegenden Extremstelle x_0 notwendig für die erste Ableitung $f'(x_0) = 0$ gelten. Diese Gleichung bildet zugleich eine Berechnungsgrundlage zur Ermittlung von x_0. Ob umgekehrt eine Lösung dieser Gleichung $f'(x) = 0$ tatsächlich eine Extremstelle von $f(x)$ darstellt, bedarf freilich jedesmal noch zusätzlicher Untersuchungen.

Mit den oben skizzierten Extremwertaufgaben und ihrer Lösungsmethode erfaßt man aber bei weitem nicht die vielseitigen Formen von *Optimierungsproblemen*, die heute von Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie gestellt werden. Die Ursache dafür liegt darin, daß viele technische und ökonomische Vorgänge gar nicht bloß durch *einen* Parameter x, also durch die Festlegung *einer* Variablen x, eindeutig bestimmt werden, sondern zu ihrer Beschreibung anderer mathematischer Größen bzw. Hilfsmittel bedürfen, z. B. mehrerer unabhängiger Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oder auch Funktionen $x(t)$. Faßt man solche in gewissen Grenzen noch als frei wählbaren Größen wiederum in der Kurzbezeichnung x zusammen, so nennt man eine ihnen eindeutig zugeordnete Zahl $f(x)$ ein *Funktional* von x. Stellt z. B. x eine ebene Kurve dar, so ist deren Länge $L = f(x)$ ein Funktional der Kurve x; genauso ist der Energieverbrauch einer Maschine (pro Arbeitsgang) ein Funktional ihrer Steuerung x, der landwirtschaftliche Ertrag einer Anbaufläche ein Funktional ihrer Bearbeitung (einschließlich Bewässerung, Düngung und dergleichen).
Von diesem allgemeinen Standpunkt aus versteht man heute unter *Optimierungstheorie* jenes Teilgebiet der Mathematik, das die Lösbarkeit und Lösungsmethoden verallgemeinerter Extremwertaufgaben des Typs

$f(x) \to \mathrm{Min}\ (\mathrm{Max})$ auf M

(gelesen: man minimiere bzw. maximiere $f(x)$ bezüglich aller x von M) erörtert, wobei $f(x)$ ein vorgegebenes Funktional bezüglich aller Elemente x einer Menge M (dem *zulässigen Bereich*) ist. Nach dem Vorbild *klassischer* Extremwertaufgaben der Differentialrechnung sind in diesem Jahrhundert sehr leistungsfähige Methoden entwickelt worden, die zur Beschreibung und Bestimmung von Lösungen solcher allgemeiner Optimierungsprobleme dienen. Die Weiterentwicklung dieser Theorie ist gegenwärtig noch stark im Gange.

Einen für die Anwendung wichtigen Sonderfall der Optimierungstheorie umfaßt nun die *Variationsrechnung*, nämlich *solche* Optimierungsprobleme — *Variationsprobleme* genannt —, wo $f(x)$ durch ein Integral dargestellt wird und x eine Funktion (oder mehrere Funktionen) verkörpert. Zurückgreifend auf ein obiges Beispiel stellt die Aufgabe

$$f(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\, dt \to \mathrm{Min} \text{ auf } M \qquad (1)$$

ein Variationsproblem dar, wenn wir unter M die Gesamtheit aller im t-Intervall $[a, b]$ stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $x(t)$ verstehen*), die den vorgegebenen Randbedingungen $x(a) = c_1$ und $x(b) = c_2$ genügen.
Die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t ist hier mit $\dot{x}(t)$ bezeichnet. Unter Beachtung, daß dieses $f(x)$ das Funktional der Bogenlänge einer ebenen Kurve in der rechtwinkligen kartesischen Darstellung $y = x(t)$ beschreibt, wird durch die Aufgabe (1) analytisch die Frage nach der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte $P_1(a, c_1)$ und $P_2(b, c_2)$ ausgedrückt. Die Lösung dieser Aufgabe ist offenbar geometrisch die Strecke $\overline{P_1P_2}$, analytisch dargestellt die Funktion

$$x_0(t) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{b - a}(t - a) \text{ für } a \leq t \leq b.$$

Anfänge der Variationsrechnung gehen bis auf das Altertum zurück.
Durch *Pappus von Alexandrien* ist uns überliefert, daß bereits im 2. Jhdt. v. u. Z. durch *Zenodoros* das sog. (spezielle) isoperimetrische Problem gelöst wurde; d. h. er wies nach, daß allein der Kreis unter allen geschlossenen Kurven gleicher Länge den größten Flächeninhalt einschließt. Einen systematischen Aufbau erfuhr die Variationsrechnung jedoch erst mit der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung. Fast alle der namhaften Begründer der Analysis haben in Beispielen und Theorie wesentliche Beiträge zur Variationsrechnung geliefert. Hervorzuheben sind *I. Newtons* Untersuchungen zur Rotationsfläche kleinsten Widerstands (1686), die zahlreichen Beiträge der Brüder *Johann und Jacob Bernoulli* (1667 bis 1748 bzw. 1654 bis 1705) und die theoretische Fundierung der *klassischen Variationsrechnung* durch *L. Euler* (1707 bis 1783) — der übrigens auch den Namen für diese Disziplin prägte — und *J. L. Lagrange* (1736 bis 1813).
Die große Bedeutung der Variationsrechnung wurde besonders dadurch herausgestellt, daß zahlreiche Naturgesetze in einfacher Weise als Variationsprobleme zu formulieren sind. Hierzu zählt das berühmte *Fermatsche Prinzip*, nach dem in einem optisch durchlässigen Medium mit ortsabhängigem Brechnungsindex n ein zwei Punkte verbindender Lichtstrahl gerade die Eigenschaft besitzt, eine minimale *optische Weglänge* aufzuweisen. Im ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem formuliert, heißt das genauer: Die Bahnkurve $y = x_0(t)$ eines Lichtstrahls von $P_1(a, c_1)$ nach $P_2(b, c_2)$ ist eine Lösung des Variationsproblems:
optische Weglänge

$$f(x) = \int_a^b n(t, x(t)) \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\, dt \to \mathrm{Min}$$

auf M im Sinne von Aufgabe (1).
Mit dem *Hamilton-Prinzip* wurden die Bewegungsgesetze der Mechanik in verwandter Weise aus einem Variationsproblem deduzierbar. Ähnliches gelang später für die Elektrodynamik und Quantentheorie. Heute nehmen auch zunehmend ökonomische Fragestellungen den Einsatz der Variationsrechnung in Anspruch, das gleiche gilt für die moderne Regelungs- und Steuerungstechnik.

Einige Aspekte zur Lösungstechnik von Variationsproblemen

a) Die klassische Methode von Euler und Lagrange

Wir studieren Variationsprobleme des Typs

$$f(x) = \int_a^b r(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \mathrm{Min} \text{ auf } M; \qquad (2)$$

der zulässige Bereich M habe hier die gleiche

Bedeutung wie im Beispiel (1). Der Integrand r ist abhängig von der Integrationsvariablen t sowie von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$. Es wird angenommen, für die Funktion $x=x_0(t)$ werde das Minimum von $f(x)$ erzielt. Dann muß offenbar für alle $x(t)$ aus M die Relation gelten $f(x)\geqq f(x_0)$. Insbesondere gilt das gleiche auch für $x(t)=x_0(t)+\varepsilon h(t)$, wo $h(t)$ eine willkürliche stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, die den Randbedingungen $h(a)=h(b)=0$ genügt; ε ist ein zusätzlicher willkürlicher Parameter. Für $\varepsilon=0$ ist $x(t)\equiv x_0(t)$, für $\varepsilon\neq 0$ ist $x(t)$ eine bezüglich x_0 abgeänderte (*variierte*) Funktion aus M. Nach voranstehenden Bemerkungen muß also für alle ε

$f(x_0+\varepsilon h)\geqq f(x_0)$

sein. Bei festgewähltem $h(t)$ ist $f(x_0+\varepsilon h)$ eine Funktion von ε allein, $\Phi(\varepsilon)$ genannt, und $\Phi(\varepsilon)$ hat für $\varepsilon=0$ sein Minimum $\Phi(0)=f(x_0)$. Folglich muß nach den Ergebnissen der Differentialrechnung für alle im obigen Sinne frei wählbaren $h(t)$

$$\Phi'(0)=0 \qquad (3)$$

sein. Diese Bedingung (3) bildet zugleich eine rechnerische Grundlage zur Bestimmung von $x_0(t)$; mit Mitteln der höheren Analysis können aus (3) darüber hinaus äquivalente Bedingungen abgeleitet werden, die die Berechnung von x_0 vereinfachen. Allerdings ist umgekehrt im allgemeinen nicht jede zu M gehörende Lösung x_0 der Bedingung (3) zugleich eine Lösung des Variationsproblems (2). Wenn jedoch das Funktional $f(x)$ von (2) *konvex* ist, d. h. wenn für beliebige Funktionen x_1 und x_2 aus M und beliebige Zahlen λ_1, $\lambda_2\geqq 0$ mit $\lambda_1+\lambda_2=1$ stets

$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqq\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$

gilt, dann ist jede zu M gehörende Lösung von (3) in der Tat eine Lösung von (2).

Zum Verständnis dieser Ausführungen erproben wir diese Methode an dem einfachen Beispiel

$$f(x)=\int_a^b \dot{x}^2\,dt\to\text{Min auf } M. \qquad (4)$$

Hier ist $\Phi(\varepsilon)=f(x_0+\varepsilon h)=\int_a^b(\dot{x}_0+\varepsilon\dot{h})^2\,dt=$

$$=\int_a^b\dot{x}_0(t)^2\,dt+2\varepsilon\int_a^b\dot{x}_0(t)\dot{h}(t)\,dt+\varepsilon^2\int_a^b\dot{h}(t)^2\,dt.$$

Somit lautet die Bedingung (3) jetzt

$$\Phi'(0)=2\int_a^b\dot{x}_0(t)\dot{h}(t)\,dt=0 \qquad (5)$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $h(t)$ mit $h(a)=h(b)=0$. Man bestätigt leicht, daß jede Funktion $x_0(t)$ mit $\dot{x}_0(t)=\text{const.}=A$ die Bedingung (5) erfüllt, denn

$$\int_a^b A\dot{h}(t)\,dt=A\int_a^b\dot{h}(t)\,dt=A[h(b)-h(a)]=0.$$

Erfüllt $x_0(t)$ außerdem noch die Randbedingungen $x_0(a)=c_1$, $x_0(b)=c_2$ neben $\dot{x}_0(t)=\text{const.}$, so kann $y=x_0(t)$ wegen des konstanten Anstiegs offenbar nur die Gleichung einer Geraden in demselben Sinne wie die Lösung von Problem (1) sein. Es läßt sich sogar zeigen, daß diese Funktion $x_0(t)$ die einzige Lösung von (5) aus dem zulässigen Bereich M ist und zugleich das gestellte Variationsproblem (4) löst.

b) Das Pontrjaginsche Maximumprinzip

In vielen Anwendungen der Variationsrechnung treten Optimierungsaufgaben nicht in der einfachen Form von Problem (2) auf, sondern unter Hinzunahme weiterer Nebenbedingungen, etwa in der Gestalt $\alpha\leqq\dot{x}(t)\leqq\beta$ (d. h. hier unter Anstiegsbeschränkungen der Kurven $y=x(t)$). Mit $U=[\alpha,\beta]$ und Einführung zusätzlicher Funktionen $u(t)=\dot{x}(t)$ zu $x(t)$ aus M tritt jetzt an die Stelle des Variationsproblems (2) die allgemeinere Fragestellung*

$$\int_a^b r(t,x(t),u(t))\,dt\to\text{Min} \qquad (6)$$

bezüglich aller $x(t)$ aus M unter den Nebenbedingungen $\dot{x}=u$ und $u(t)$ aus U für alle t von $[a,b]$.

Für solche und noch allgemeinere Variationsprobleme ähnlichen Typs ist in den Jahren 1958 bis 1960 durch eine Gruppe sowjetischer Mathematiker unter Leitung des berühmten Mitglieds der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften und Leninpreisträgers *Prof. Dr. L. S. Pontrjagin* ein grundlegend neues Lösungsprinzip geschaffen worden. Mit ihm ist zugleich eine Neuorientierung der gegenwärtigen Forschung auf dem Gebiete der Variationsrechnung gegeben worden.

An Aufgabe (6) erläutert, basiert dieses neue Lösungsprinzip — *Pontrjaginsches Maximumprinzip* genannt — auf der Grundidee, die Minimierung des in (6) beschriebenen Funktionals auf eine Schar gewöhnlicher Extremwertaufgaben einer zugeordneten Funktion — der *Pontrjagischen Funktion* — zurückzuführen. Genauer formuliert lautet das Pontrjaginsche Maximumprinzip: Ist $x_0(t)$, $u_0(t)$ mit $\dot{x}_0=u_0$, x_0 aus M, $u_0(t)$ aus U eine Lösung des Variationsproblems (6), so gibt es eine (durch hier nicht näher beschriebene Zusatzbedingungen definierte) Funktion $y(t)$, mit der die *Pontrjaginsche Funktion*

$H^*(t,x,u,y)=-r(t,x,u)+yu$ der folgenden Bedingung genügt (bezüglich aller v aus U)

$\mathrm{Max}_U H^*(t,x_0,v,y)=H^*(t,x_0,u_0,y)$ für alle t aus $[a,b]$.

Dieses Maximumprinzip kann wiederum als eine Berechnungsgrundlage für x_0 und u_0 angesehen werden.

* D. h. $x(t)$ ist eine im ganzen Intervall $[a,b]$ stetige Funktion, für die eine Zerlegung von $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle angebbar ist, in denen die Ableitung $\dot{x}(t)$ existiert und stetig ist.

R. Klötzler

Eine Aufgabe von Prof. Dr. R. Klötzler

Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Eine Optimierungsaufgabe zu einem Produktionsmodell

▲1164▲ Ein Produktionsbetrieb hat die Auflage, eine konstante (zeitunabhängige) Produktion von x Mengeneinheiten/Monat einer leicht verderblichen Ware aufzunehmen. Der Bedarf im j-ten Monat beträgt b_j Mengeneinheiten ($b_j>0$). Der Erlös für verkaufte Ware beträgt k_1 M/Mengeneinheit. Nichtabsetzbare Ware kann wegen ihrer Verderblichkeit nicht mehr im darauffolgenden Monat zum Verkauf angeboten werden; d. h. diese Ware muß als Verlust von k_0 M/Mengeneinheit verbucht werden.

Frage 1:
Wie groß ist (unter Einbeziehung der Verluste) der Gesamtertrag $K(x)$ des Betriebes in n Monaten?

Frage 2:
Wie ist x zu wählen, damit K maximal wird?

Frage 3:
Wie lautet eine Lösung von Aufgabe 2 unter der zusätzlichen Kapazitätsbeschränkung $0\leqq x\leqq C$ (mit $C>0$)?

Hinweise: Man benutze zur Beschreibung von $K(x)$ die Symbole

$\sum_{i=1}^{n}$ des Summenzeichens,

Min (a,b) als kleinste der Zahlen a und b,

$$c_+=\begin{cases}c & \text{wenn } c\geqq 0\\ 0 & \text{wenn } c<0.\end{cases}$$

Man denke sich außerdem die Numerierung der b_j (nötigenfalls nach Umnumerierung) so ausgeführt, daß $b_1\leqq b_2\leqq b_3\leqq\ldots$ ist.

Ist eine Landkarte eine mathematisch genau verkleinerte Abbildung eines Teiles der Erdoberfläche?

Jeder Schüler muß im Laufe seiner Schulzeit mit einer Landkarte umgehen. Schon in der Unterstufe erfährt er, daß eine Landkarte die verkleinerte Abbildung eines Teiles der Erdoberfläche ist. Es scheint, als sei dies eine einfache Sache, denn es leuchtet jedem ein, daß man die Erdoberfläche nicht in Originalgröße abbilden kann.
Da außerdem gesagt wird, daß die Verkleinerung mit Hilfe eines bestimmten Maßstabes erfolgt, ergeben sich vorerst keine Probleme, noch dazu, wo die in der Unterstufe verwendeten Karten Teile der Erdoberfläche darstellen, die verhältnismäßig klein sind.
Aber wir wollen einmal etwas genauer hinsehen und zuerst ein Problem untersuchen, das auch mathematisch recht interessant ist. Wir wissen, daß die Erde der Kugelgestalt sehr nahekommt. In den Atlanten und als Wandkarten haben wir Karten, auf denen die ganze Erde dargestellt ist. Es ergibt sich für uns das Problem zu untersuchen, ob es möglich ist, die dreidimensionale Oberfläche der Erde, d. h. eine der Kugeloberfläche ähnliche Fläche, überhaupt auf eine zweidimensionale, also ebene Fläche zu übertragen.
Dazu sollten wir wissen, welche Forderungen an die Genauigkeit der Abbildung gestellt werden müssen. Im Idealfalle müßten drei Forderungen berücksichtigt werden.
Die Karte müßte *längentreu* sein, d. h. alle Entfernungen müßten in einer dem Kartenmaßstab entsprechenden Verkleinerung auf die Karte übertragen werden.
Die Karte müßte *winkeltreu* sein, d. h. daß alle auf der Erdoberfläche zwischen bestimmten Punkten gemessenen Winkel die gleiche Größe haben müssen wie die Winkel zwischen den gleichen Punkten auf der Karte.
Die Karte müßte *flächentreu* sein, d. h. daß die Flächen der Territorien nach der Verkleinerung auf der Karte eine dem Maßstab entsprechende Fläche einnehmen müssen.
Um eine Antwort auf unsere Frage zu finden, führen wir zuerst einen kleinen Versuch durch. Wir nehmen einen kugelähnlichen Körper, z. B. eine Apfelsine, und versuchen, nachdem wir sie durch einen Schnit halbiert und das Innere herausgenommen haben, die Schalenhälften plattzudrücken, d. h. sie zu verebnen. Der Versuch wird immer scheitern, denn es bilden sich immer an einer Stelle Falten, oder aber die Apfelsinenschale reißt an den Rändern wegen der zu starken Verzerrung auf.
Wir kommen nach diesem Versuch zu dem Schluß, daß die zweidimensionale Abbildung der dreidimensionalen Kugeloberfläche nicht möglich ist, ohne Verzerrungen in Kauf zu nehmen.
Gauß hat mathematisch nachgewiesen, daß eine längentreue Abbildung der Kugeloberfläche auf einer Ebene nicht möglich ist. Eine längen-, winkel- und flächentreue Verkleidung der Erdoberfläche ist nur mit Hilfe eines Globus möglich. Der Globus ist jedoch sehr unhandlich und deshalb nicht überall einsetzbar. So müßte z. B. ein Globus, auf dem die Alpenländer in der Größe eingetragen sind, wie sie im Schulatlas auf Seite 43 abgebildet sind, einen Durchmesser von mehr als 5 m haben.
Für die Darstellung der Insel Rügen oder des Erzgebirges im Maßstab 1 : 500 000 (S. 4) benötigte man einen Globus von über 25 m Durchmesser, d. h. in der Höhe eines fünfstöckigen Hauses. Alle Karten, auf denen große Gebiete der Erde dargestellt sind, können diesen Teil der Erdoberfläche immer nur annäherungsweise wiedergeben. Es gibt immer Verzerrungen der Längen, der Flächen oder der Winkel.
Karten werden aber für die unterschiedlichsten Zwecke verwendet. Deshalb haben Kartographen und Mathematiker, darunter auch *Gauß*, versucht, solche Lösungen für die Karten zu finden, daß sie wenigstens für die jeweils vorgesehenen Zwecke hinreichend genau sind.
Gauß hat bewiesen, daß längentreue Abbildungen der Erdoberfläche nur auf Karten möglich sind, die sehr kleine Gebiete abbilden, Gebiete, bei denen die Krümmung der Erdoberfläche durch ihre Kugelgestalt noch keine Rolle spielt. Diese Karten erhält man dadurch, daß im Gelände die Entfernungen und Winkel zwischen den auf die Karte einzutragenden Punkten gemessen und diese im entsprechenden Maßstab verkleinert auf die Karte übertragen werden. Aber dieses Verfahren kann für die Abbildung der gesamten Erdoberfläche nicht verwendet werden.
Auf Seekarten ist wiederum die Flächentreue unwichtig, dafür aber muß gefordert werden, daß eine Seekarte winkeltreu ist, damit der zu steuernde Kurs genau festgelegt werden kann. Diese Winkeltreue kann man unter anderem dadurch erzielen, daß man die Kugeloberfläche auf einem Zylindermantel abbildet. Diese Karte ist dann allerdings weder flächen- noch längentreu, weil z. B. der Nordpol nicht als ein Punkt, sondern als gerade Linie abgebildet wird, deren Länge der des Äquators entspricht. (Bild 1).

Bild 2
Kegelentwurf

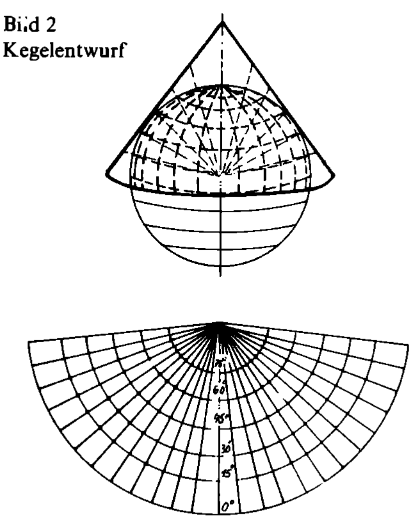
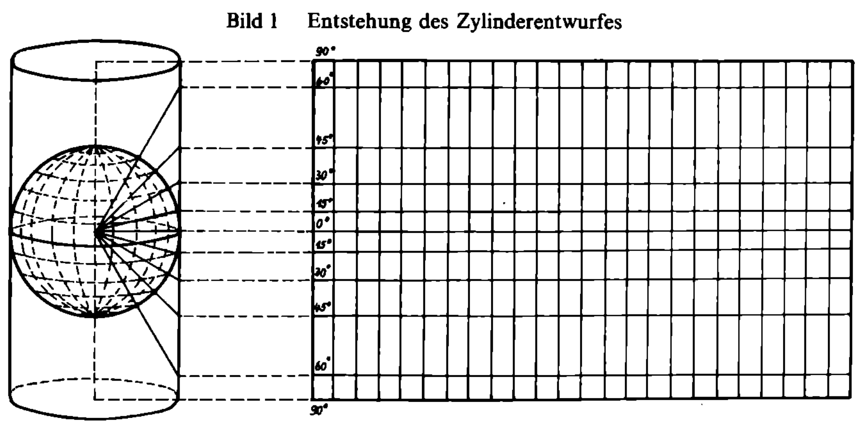


Bild 1 Entstehung des Zylinderentwurfes



Es gibt noch sehr viele andere Lösungsmöglichkeiten. In unseren Atlanten sind u. a. mehrere Arten der Kegelentwürfe benutzt worden, deren Entstehung vereinfacht so dargestellt werden kann, daß man über die Erdkugel einen Kegel stülpt, das Abbild der Erdoberfläche auf den Kegelmantel überträgt und diesen dann aufschneidet und verebnet.
Nachstehende Skizzen zeigen, wie stark bei den verschiedenen Kartenentwürfen bestimmte Flächen verzerrt werden können.

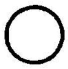
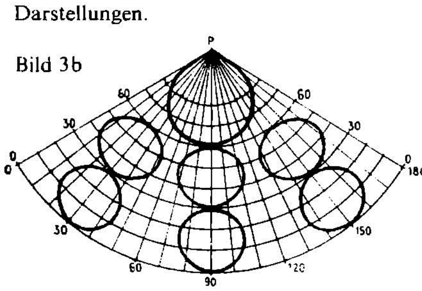


Bild 3a

Dieser Kreis (∅ – 30 Meridiankreise, Maßstab 1:400 Mill.) kann nur auf dem Globus maßstäblich und unverzerrt wiedergegeben werden. Wie derselbe Kreis, bei gleichem Maßstab, in verschiedenen Kartennetzentwürfen abgebildet wird, zeigen die folgenden Darstellungen.

Bild 3b



Einfacher Kegelentwurf

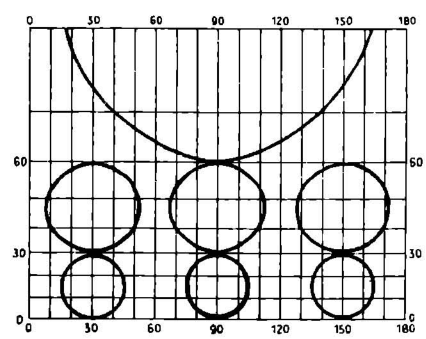


Bild 3c: Winkeltreuer Zylinderentwurf (Mercatorentwurf)

Auch durch den Vergleich der Atlaskarten 90, 92 und 82 könnt ihr sehen, wie z. B. die Fläche Grönlands unterschiedlich dargestellt werden mußte. Diese Karten sind nicht flächentreu. Wenn man jedoch Karten von kleineren Teilen der Erdoberfläche zeichnen will, läßt sich eine wesentlich größere Genauigkeit erzielen.
Man verwendet z. B. bei den meisten amtlichen Karten, in denen die Gebiete eines Landes dargestellt werden, die sogenannte Polyederprojektion. (Ein Polyeder ist ein allseitig von Ebenen begrenzter Körper.)
Zu diesem Zwecke wird das Gradnetz der Erde in viele noch kleinere Flächen unterteilt, so daß auf der einzelnen Fläche nur ein sehr kleines Territorium abzubilden ist. Dadurch kann die Krümmung der Kugeloberfläche vernachlässigt werden, weil sie einen sehr kleinen Wert besitzt. Wir können annehmen, daß diese kleine Fläche fast eben ist. Allerdings kann man die so erhaltenen Karten kleiner Gebiete nicht zu einer Weltkarte zusammensetzen, sondern kann sie entweder nur zu Längenkreisstreifen oder Breitenkreisstreifen zusammenlegen. Zwischen den einzelnen Streifen gibt es immer wieder Lücken, die man berücksichtigen muß, wenn man ein größeres Gebiet abbilden will.
Die einzelnen Blätter einer solchen Karte haben sehr unterschiedliche Gestalt. Während die Blätter, auf welchen von Längen- und Breitenkreisen begrenzte Gebiete in Äquatornähe abgebildet werden, fast quadratisch sind, haben die Karten, die Gebiete in Polnähe abbilden, trapezähnliche Gestalt und werden immer länglicher und spitzer.
Die Karte, die den Streifenteil mit dem Nordpol aufnimmt, ist ein Dreieck. Um das zu verstehen, braucht man sich nur die Gestalt der einzelnen Felder des Gradnetzes auf dem Globus einmal genau anzusehen.
Mit der Verebnung der Kugeloberfläche hängt aber noch ein zweites Problem zusammen.
Wir können auf dem Globus zeigen, daß alle Meridiane in Nord-Süd-Richtung und alle Breitenkreise senkrecht dazu in Ost-West-Richtung verlaufen.
In der Unterstufe haben wir gelernt, daß auf einer Landkarte Norden immer oben, Süden unten, Westen am linken Rand und Osten

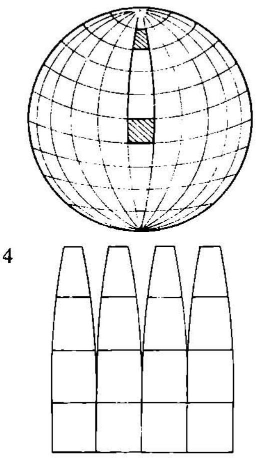
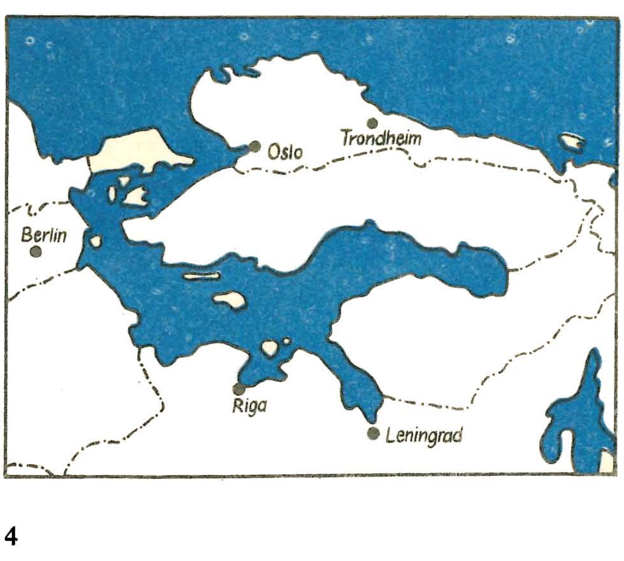
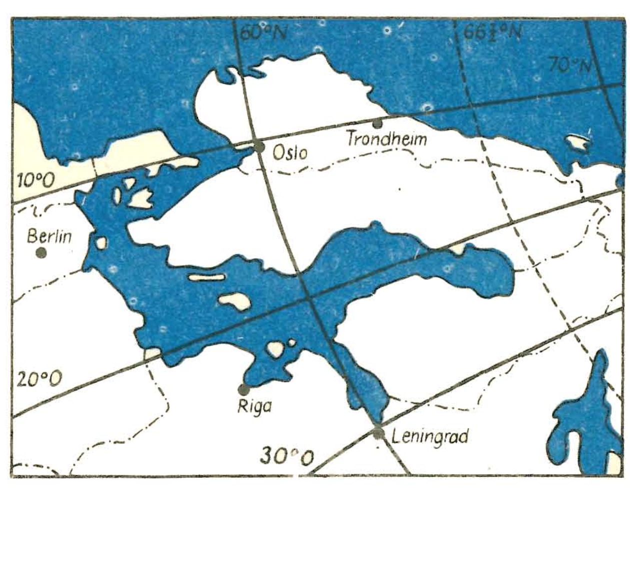


Bild 4

am rechten Rand ist. Wenn wir die Neigung der Erdachse vernachlässigen, d. h. wenn wir den Globus so hinstellen, daß die Erdachse senkrecht nach oben zeigt, stimmt diese Behauptung immer. Und auf Karten, auf denen sehr kleine Gebiete wie der Heimatkreis oder ein Bezirk der DDR abgebildet sind, stimmt das auch. Aber sehen wir uns doch einmal im Atlas auf Seite 48/49 die Karte der Sowjetunion an.
Wenn unsere Behauptung über die Himmelsrichtungen, daß Norden auf der Karte immer oben, Süden immer unten, Westen links und Osten rechts liegt, den Tatsachen entspricht, müßte nach dieser Karte Leningrad östlich von Riga und Berlin westnordwestlich von Leningrad liegen.

Bild 5
Ausschnitt aus der Atlaskarte 48/49 Sowjetunion – ohne Eintragung des Gradnetzes
Bild 6
Ausschnitt aus der Atlaskarte 48/49 – mit der Eintragung des Gradnetzes. Erst das Gradnetz ermöglicht eine genaue Angabe der Himmelsrichtungen zwischen den einzelnen Orten

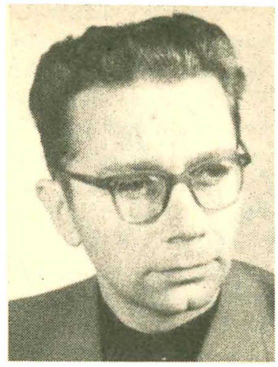




Prüfen wir den gleichen Sachverhalt jedoch auf dem Globus nach, so stellen wir etwas ganz anderes fest!
Es stellt sich heraus, daß hier westlich von Leningrad Oslo liegt, und daß wir Riga nicht in westlicher, sondern in südwestlicher Richtung zu suchen haben. Westnordwestlich von Leningrad wird nicht Berlin, sondern Trondheim in Norwegen zu finden sein, weil Berlin südwestlich von Leningrad liegt. Wo liegt der Fehler? Auf dem Globus haben wir festgestellt, daß die Lage eines Ortes durch seine Lage im Gradnetz bestimmt wird. Das Gradnetz der Atlaskarte wurde jedoch bei unserer ersten Feststellung nicht berücksichtigt.
Wir haben gesagt, daß alle Breitenkreise immer von Westen nach Osten verlaufen. Auf der Karte sind diese Breitenkreise aber als Kurven eingetragen. Diese enden, weil es sich bei dieser Karte um einen Kegelentwurf handelt, an den oberen Rändern der Karte. Von Leningrad aus gesehen wäre also z. B. Westen am linken oberen Kartenrand.
Wie wenig die Behauptung von den Himmelsrichtungen zu halten ist, zeigt sich auch auf den Karten 90 und 91, auf denen das Nordpolargebiet und die Antarktis abgebildet sind. Auf Karte 90 ist z. B. Norden in der Mitte, denn dort ist der Nordpol eingetragen, und alle Meridiane laufen darauf zu. Süden ist auf dieser Karte an allen Kartenrändern zu suchen, denn alle Meridiane laufen vom Nordpol aus nach dem Süden, wie wir auf dem Globus nachprüfen können.
Wo auf dieser Karte Osten oder Westen ist, kann man nicht sagen. Es läßt sich nur eine Aussage darüber machen, ob ein Ort östlicher oder westlicher von einem anderen Ort liegt. So befindet sich z. B. München östlicher als Paris, und Nome in Alaska ist östlicher als Anadyr im Fernen Osten der Sowjetunion, obwohl Nome auf dieser Karte weiter links liegt als Anadyr.
Dabei wird das Kuriosum noch größer, wenn man einmal die geographischen Längen beider Orte bestimmt. Anadyr liegt nämlich auf etwa 175° östlicher Länge und ist trotzdem westlich von Nome, das 175° westlicher Länge ausweist. Überlegt einmal wie das kommt! Seht euch dazu das Gradnetz der Karte 90 genau an!
Wir wollen uns nun Gedanken über ein weiteres Problem machen. Im Unterricht haben wir gelernt, daß die Entfernungen auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines Maßstabes auf die Karten übertragen werden. Dieser Maßstab wird als Maßstabsleiste oder als Zahlenverhältnis an den Rand der Karte gedruckt.
Wir haben bisher diese Maßstäbe benutzt, um auf den Kreis-, Bezirks- oder DDR-Karten Entfernungen dadurch festzustellen, daß wir zwei Orte mit einer Linie verbunden haben. Dann maßen wir die Länge der Strecke und rechneten mit Hilfe des Maßstabes die richtige Entfernung aus.
Auf diesen Karten waren jedoch nur verhältnismäßig kleine Teile der Erdoberfläche dargestellt, bei denen die Verzerrungen von Längen oder Winkeln so gering sind, daß man sie vernachlässigen kann.
Nun wollen wir aber einmal sehen, ob man mit dem eben genannten Verfahren auch auf anderen Karten Entfernungen richtig messen kann. Zu diesem Zwecke nehmen wir wieder die Atlaskarte S. 48/49 Sowjetunion. Wir wissen, daß dies eine Karte ist, die als Kegelentwurf hergestellt wurde, bei der also eine Längentreue nicht vorhanden ist und deren Breitenkreise auf dem Kegelmantel entsprechend als Kurven eingetragen sind.
Nach unserem Verfahren verbinden wir also zwei Orte, Leningrad und Kap Oljutorski im Fernen Osten, die auf dem gleichen Breitenkreis liegen, durch eine Gerade. Die Messung der Entfernung zwischen beiden Orten ergibt nach dieser Methode 6 320 km. Überprüfen wir aber mit Hilfe eines Fadens, der auf dem Globus von Ort zu Ort gespannt wird, die Entfernung, so stellt sich heraus, daß wir offensichtlich einen großen Fehler gemacht haben, denn auf dem Globus messen wir eine Entfernung von 7780 km, die auch der wirklichen entspricht. Wo liegt der Fehler?
Wir haben auf dem Globus den Faden genau auf dem 60. Breitengrad Nord gespannt. Aber auf der Karte sind wir mit unserer Linie nicht der Kurve des Breitenkreises gefolgt, sondern haben die Sehne dieses Bogens gemessen. Und diese ist natürlich kürzer. Dem wahren Weg auf der Erdoberfläche entspricht aber der Verlauf des 60. Breitengrades. Um die kürzere Strecke bewältigen zu können, müßten wir von Leningrad nach Kap Oljutorski einen Tunnel bauen. Man kann diesen Sachverhalt wieder mit einem kleinen Versuch veranschaulichen. Dazu durchbohren wir einen Apfel mit einer geraden Nadel. Mit einem Zwirnsfaden messen wir die äußere Entfernung auf der Apfeloberfläche zwischen den beiden Punkten. Die innere Entfernung können wir an der Nadel ablesen, wenn wir die beiden Punkte markieren, an denen die Nadel die Apfelhaut durchstößt. Sie wird immer kürzer sein als die Fadenlänge.
Wenn man also bei so großen Gebieten die West-Ost-Entfernung zweier Orte annähernd genau feststellen will, muß man immer auf dem Breitenkreis messen.
Aufgabe: 1. Miß auf der Karte 48/49 die richtige Entfernung zwischen Moskau und Petropawlowsk (Halbinsel Kamtschatka), und ermittle den Fehler, der entstanden wäre, wenn du die beiden Orte mit einer Geraden verbunden und diese Strecke gemessen hättest!
2. Suche auf dem Globus den kürzesten Flugweg von Moskau nach Vancouver an der Westküste Kanadas. Er geht nicht in die Ost-West-Richtung! Benutze dazu wieder ein Stück Bindfaden! Verfolge diese Strecke auch auf den Atlaskarten 90 und 93! Mit der maßstabgerechten Verkleinerung hängt aber auch noch ein anderes Problem zusammen.
Auf der Karte der Sowjetunion sind die Eisenbahnen als 0,25 mm dicke schwarze Linien dargestellt. Wenn man die Dicke des Striches mit dem Maßstab der Karte einfach umrechnet, ergibt sich eine Breite der Eisenbahnlinie von 5 km!
Eigentlich dürfte eine Eisenbahnlinie, die etwa 20 m breit ist, nur als 0,001 mm starker Strich gezeichnet werden. Dieser ließe sich nur mit einem guten Mikroskop auf der Karte erkennen. Ein Menschenhaar hat die Dicke von 0,07 bis 0,17 mm!
Man kann also schon aus zeichnerischen Gründen nicht alles, was an Zeichen in einer Karte verwendet wird, in dem richtigen Größenverhältnis darstellen, das dem Kartenmaßstab entspricht. Wichtige Fakten, z. B. Hauptstädte oder Flüsse, werden oftmals größer oder stärker gezeichnet, andere, weniger wichtige läßt man dafür ganz weg, um die Karte nicht zu überladen. Diese Arbeit des Kartenzeichners nennt man „Generalisieren".
Aufgabe: Auf der Karte 28 des Atlas ist die Elbe bei Magdeburg als 0,5 mm starker blauer Strich eingetragen (Maßstab 1:500000). Welcher Breite entspräche das in der Natur? (Die Elbe ist bei Magdeburg zwischen 150 bis 200 m breit.)
Wir haben am Anfang gesagt, daß es scheinbar keine Probleme bei der verkleinerten Darstellung der Erdoberfläche auf der Landkarte gibt. Ihr werdet erkannt haben, daß das in Wirklichkeit nicht so ist. Dabei konnte eine Reihe von Problemen, die z. B. mit der Darstellung des Grandnetzes auf einer ebenen Karte zusammenhängen, nur angedeutet werden, weil zu deren Verständnis größere mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden müssen. Für den Karthographen ist es sehr schwierig, den Anforderungen der Praxis an die Karte immer Rechnung zu tragen. Nur durch die Auswahl einer für eine bestimmte Karte besonders geeigneten Darstellungsart ist es möglich, die verschiedenartigen Schwächen der Landkarte weitestgehend auszugleichen. Deshalb trägt der Kartograph eine sehr große Verantwortung. Er muß nicht nur über ein sehr gutes geographisches Wissen verfügen und gut zeichnen können, er muß auch anwendungsbereite mathematische Kenntnisse haben, um brauchbare Kartenentwürfe anfertigen zu können.
In der Schule muß manches, was sich im Leben als sehr kompliziert darstellt, vereinfacht werden. Deshalb ist es aber nicht falsch. Wir müssen aber immer wieder überprüfen, ob das, was wir einmal gelernt haben, dem für uns neuesten Stand immer noch entspricht.

K. Sandner

Mathematik und Chemie



Viele Leser werden bei dieser Überschrift denken, daß Mathematik und Chemie nur wenig miteinander zu tun haben, weil in der Mathematik gerechnet und in der Chemie experimentiert wird. Das wäre jedoch ein recht leichtfertiges und oberflächliches Urteil, denn in der Chemie wird ebenfalls gerechnet und – das ist vielleicht noch etwas erstaunlicher – in der Mathematik wird experimentiert!

Beginnen wir mit dem Rechnen in der Chemie. Vielleicht gehen wir zunächst davon aus, warum überhaupt in der Chemie gerechnet werden muß: Experimente kosten Geld und Zeit, besonders, wenn sie kompliziert sind, und man muß daher die Frage stellen, ob man nicht das Ergebnis des Experiments ausrechnen und damit auf seine Durchführung verzichten kann. Das ist in vielen Fällen tatsächlich möglich. Will man ein Experiment rechnerisch durchführen, so muß man sich erst einmal die entsprechenden mathematischen Formeln überlegen, nach denen gearbeitet werden soll. Die Formeln müssen natürlich den chemischen Vorgang widerspiegeln, d. h. nachbilden oder modellieren; sie müssen letzten Endes das gleiche oder wenigstens ein näherungsweises Ergebnis des Versuchs liefern. Das Aufstellen dieser Berechnungsformeln, des sogenannten Modells, ist oft die schwierigste Arbeit bei der Anwendung mathematischer Methoden in der Chemie. Bei komplizierten Modellen kann natürlich dann auch die Lösungsmethode Schwierigkeiten bereiten.
Es ist aber auch noch ein weiterer Gesichtspunkt zu berücksichtigen.
Chemische Experimente werden nicht nur durchgeführt, um festzustellen, wie irgendwelche Stoffe miteinander reagieren, sondern in der Praxis kommt es insbesondere darauf an, die Bedingungen, unter denen die Reaktion stattfindet, so zu wählen, daß das gewünschte Produkt in möglichst großer Menge entsteht, oder auch, daß irgendein Vorgang möglichst billig abläuft. Man sucht also, die entsprechenden Prozesse in diesem Sinne bestmöglich oder optimal durchzuführen. Eine Optimierung ist meist auch durch Versuche möglich, doch braucht man hierzu im allgemeinen längere Versuchsreihen. Die Mathematik stellt dagegen Optimierungsmethoden zur Verfügung, die auf das entsprechende Modell angewendet werden können und dann die Optimallösung liefern, ohne daß chemische Versuche durchgeführt werden müssen. Gerade in dieser Ausnutzung von Optimierungsmethoden liegt die besondere Bedeutung der Mathematik für die Chemie, und hierin liegt auch das hauptsächliche Einsatzgebiet des Mathematikers in der chemischen Industrie, der mit seinen Kenntnissen und Methoden unter Benutzung von Rechenautomaten die Chemiker und Verfahrenstechniker (das sind Ingenieure, die die chemischen Verfahren in großtechnische Maßstäbe umsetzen) wirkungsvoll unterstützen kann.

Um das Gesagte etwas besser zu veranschaulichen, sollen zwei einfache Beispiele solcher Optimierungsprobleme folgen.
Nehmen wir an, wir hätten drei Gase mit bestimmten Heizwerten und Schwefelgehalten und sollen daraus ein Gas mischen, welches einen minimalen Heizwert nicht unterschreitet, einen maximalen Schwefelgehalt nicht überschreitet und dabei noch möglichst billig wird. Es seien p_1, p_2, p_3 die Preise pro m^3 der Gase, s_1, s_2, s_3 die Schwefelgehalte in g Schwefel pro m^3 der Gase und h_1, h_2, h_3 die Heizwerte in kcal pro m^3. Die geforderte Menge Mischgas sei m, dessen minimaler Heizwert h und maximaler Schwefelgehalt s. Gesucht sind dann solche Mengen x_1, x_2, x_3 der vorhandenen Gase m^3, daß die geforderten Bedingungen erfüllt sind.
Dann kann man die Problemstellung formelmäßig sofort folgendermaßen formulieren:
Es sind solche Werte $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_3 \geqq 0$ zu finden, daß

$$\begin{aligned} h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 &\geqq hm \\ s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 &\leqq sm \\ x_1 + x_2 + x_3 &= m \end{aligned}$$

gilt und

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$$

möglichst klein wird.
Eine solche Problemform nennt man ein lineares Optimalproblem, weil eine lineare Funktion zu optimieren, d. h. möglichst klein – oder in anderen Fällen auch möglichst groß – werden soll und lineare Ungleichungen oder Gleichungen dabei einzuhalten sind. Die Mathematiker haben eine ganze Reihe von Lösungsverfahren für solche Aufgaben entwickelt, von denen das bekannteste und gebräuchlichste die sogenannte Simplexmethode ist.
In den letzten Jahren sind viele weitere Anwendungen hinzugekommen. Heutzutage rechnet man die Produktionspläne großer chemischer Kombinate, wie etwa im VEB Leuna-Werke, mit Hilfe solcher linearer Optimalprobleme aus. Diese haben einige hundert Nebenbedingungen und Variable und können nur mittels Rechenautomaten gelöst werden; aber es handelt sich genau um denselben Problemtyp wie oben bei dem Mischungsproblem:
Eine lineare Funktion — z. B. der Gewinn — ist möglichst groß zu machen, wobei gewisse Nebenbedingungen, die von der Leistungsfähigkeit der einzelnen Anlagen bestimmt werden, einzuhalten sind. Die Variablen sind dabei die Produktmengen, die in den verschiedenen Anlagen produziert und dann verkauft oder in anderen Anlagen weiterverarbeitet werden.

Diese linearen Optimalprobleme sind vom mathematischen Standpunkt als die einfachsten Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen anzusehen; ihre Lösung macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten, wenn sie auch bei großen Problemen langwierig werden kann. Es gibt aber auch viele Aufgabenstellungen in der Praxis der chemischen Industrie, wo die Nebenbedingungen oder auch die zu maximierenden oder minimierenden Funktionen nicht mehr linear von den Variablen abhängen. Das ist fast immer dann der Fall, wenn es um Probleme geht, die sich mit der günstigsten Konstruktion oder dem optimalen Betrieb chemischer Anlagen befassen. Hier spielen vor allem die Fragen nach möglichst großen Ausbeuten oder hohen Umsätzen bei chemischen Reaktionen eine Rolle. Ausbeuten und Umsätze hängen aber von einer ganzen Reihe physikalischer Größen ab, wie etwa Temperatur und Druck, unter denen die Reaktion abläuft oder auch von der Reaktionszeit. Diese Abhängigkeiten sind im allgemeinen recht verwickelt und enthalten oft Exponentialfunktionen oder Logarithmen.
Manchmal ist es möglich, solche Abhängigkeiten durch quadratische Funktionen angenähert wiederzugeben, aber auch dann ist das entstehende Optimierungsproblem nicht linear. Solche Aufgabenstellungen sind eine Grundlage für die schon erwähnte Planung der Produktion. Wenn man nämlich die einzelnen Anlagen nicht optimal betreibt, so schätzt man vielleicht die Leistungsfähigkeit nicht richtig ein und hat schon eine falsche Problemstellung bei der Planung. Dann kann man natürlich auch keinen richtigen Plan ausrechnen.

Die Probleme zur Maximierung der Ausbeute bzw. des Umsatzes können unter Umständen so kompliziert sein, daß man keine direkte Lösungsmethode benutzen kann. Dann kann man Simulationsverfahren anwenden, über die wir später noch einiges sagen werden. Anderenfalls ist eines der gebräuchlichsten Verfahren die Gradientenmethode. Um eine gewisse Vorstellung von dieser Methode zu vermitteln, wollen wir die Lösung eines Optimalproblems mit der Besteigung eines Berges vergleichen. Einen Berg kann man ja als geometrische Veranschaulichung einer Funktion mit zwei Veränderlichen betrachten, und die Spitze entspricht dem gesuchten größten Funktionswert.

Nun kann die Besteigung des Berges – jedenfalls theoretisch – so geschehen, daß man immer in der Richtung des steilsten Anstiegs geht. Diese Richtung kann man berechnen, und man nennt sie Gradient. Nun kann es aber sein, daß die Verfolgung der steilsten Richtung beim Erklettern des Berges nicht immer möglich ist, weil man an einen Zaun oder zu steilen Abhang kommt. Dann geht man eben an dem Zaun oder dem Abhang entlang, bis es wieder möglich wird, die Gradientenrichtung weiterzuverfolgen. Zaun oder Abhang entsprechen aber den Nebenbedingungen in unserem Optimalproblem, die man nicht verletzen darf, und es gibt Methoden, die genau dem Entlanggehen am Zaun oder Abhang entsprechen. Wenn auch unser Beispiel einem Problem mit nur zwei Variablen entspricht, so läßt sich das Verfahren doch im Prinzip auch auf Optimierungen mit mehr Varaiblen anwenden, und es ist damit eine sehr allgemeine Methode gefunden.

Zu Beginn erwähnten wir, daß die Mathematik auch mit Experimenten arbeitet. Gemeint ist hier der verhältnismäßig junge Zweig mathematischer Verfahren, die unter dem Begriff „Simulation" bekannt sind. Es kommt nämlich immer häufiger vor, daß wichtige Aufgaben auf solch komplizierte Modelle führen, daß es keine Lösungsverfahren gibt oder die bekannten Verfahren mit einem viel zu hohen Rechenaufwand verbunden sind. Wir sahen, daß eine Optimierungsaufgabe immer darin besteht, gewisse Größen $x_1, \ldots, x_n$ so zu bestimmen, daß eine Zielfunktion einen größten oder kleinsten Wert annimmt und gewisse Nebenbedingungen erfüllt werden. Wenn es nun kein brauchbares Verfahren gibt, die gesuchten optimalen Werte auszurechnen, so kann man vielleicht durch Probieren solche finden. Man sucht sich Werte aus, die den Nebenbedingungen genügen, setzt sie in die Zielfunktion ein und wiederholt das mehrere Male. Die Werte, die zum größten Wert der Zielfunktion führen, betrachtet man als Näherungslösung der Aufgabe. Vielfach gibt es dann auch Möglichkeiten zur Abschätzung, wie weit der gefundene Wert vom wirklichen Optimalwert entfernt ist. Ob man die „Versuchswerte" willkürlich oder systematisch bestimmt, hängt von dem Problem ab; man kennt beide Möglichkeiten. Was wir soeben beschrieben haben, ist aber gerade die Simulation oder experimentelle Mathematik. Sicher haben viele unbewußt bereits solche Gedanken ausgenutzt, indem sie z. B. durch Probieren einen Näherungswert für die Nullstelle einer Gleichung gefunden haben, den sie dann durch ein anderes Verfahren verbessern konnten. Auch bei Simulationsverfahren ist es oft möglich, anschließend die gefundene Näherungslösung noch durch andere Methoden zu verbessern. Wesentlich bei dem genannten Experimentieren ist, daß man das Modell des Prozesses benutzt und damit die Experimente auf der Rechenmaschine und nicht im chemischen Sinne durchführt. Dadurch kann trotz des Experimentierens viel Zeit und Aufwand eingespart werden.

Interessant ist noch, daß die Simulationsverfahren bei kleinen und einfachen Problemen wesentlich mehr Aufwand als direkte mathematische Verfahren erfordern, aber bei komplizierten Problemen — und darin liegt gerade ihre Stärke — noch Lösungen ermöglichen, wo die direkten Verfahren schon längst versagen.

Aus all dem Gesagten wird deutlich, welch vielgestaltige und interessante Aufgaben ein Mathematiker in der Praxis zu lösen hat. Gerade die Forschungen auf Gebieten, wo verschiedene Wissenschaften – in unserem Fall eben Mathematik und Chemie – zusammentreffen, sind ja außerordentlich bedeutungsvoll und für die weitere Entwicklung der Volkswirtschaft unumgänglich notwendig.

J. Piehler

Leser schreiben an alpha

● Unsere Oberschule mit ca. 200 Schülern (Klasse 1 bis 8) beteiligt sich schon seit vielen Jahren am *alpha*-Wettbewerb. Die Lösung dieser Aufgaben hat uns sehr geholfen, unser mathematisches Wissen zu erweitern. Im letzten Schuljahr beteiligten sich besonders die Mitglieder unseres Mathematikzirkels. die auch sämtlich Mitglieder des *Kreisklubs Junger Mathematiker* sind.

Mathematikzirkel der OS Zaatzke, Krs. Wittstock

● Im vergangenen Jahr habe ich mich erstmals am Wettbewerb beteiligt. Die Aufgaben halfen mir in der Schule. Sie haben mir viel Spaß gemacht. Mit Stolz trage ich das erworbene *alpha*-Abzeichen.

Henry Albrecht, Wittenberge

● Ich habe den Wunsch, einmal Mathematik zu studieren. Schon allein deshalb beteilige ich mich an den jährlichen Wettbewerben. ... In den Heften 5/72 und 6/72 waren Aufgaben enthalten, die im Lehrplan des Mathematikunterrichts erst später behandelt werden ...

Elke Köhler, Staßfurt

● Hiermit sende ich der Redaktion 21 Antwortkarten . . Bemerken möchte ich noch, daß ich während meiner Lehrerlaufbahn, die mit der Ausbildung auf einem „Königlichen Preußischen Lehrerseminar" begann, keinerlei Qualifikation für den Mathematikunterricht erworben habe.

Karl Krause, Rentner (72 Jahre), Mansfeld

● Mir macht das Lösen der *alpha*-Aufgaben immer viel Spaß... Doch die Aufgabe W 5*1007 konnte ich ohne die Hilfe meines Vaters nicht lösen. Ich finde, diese Aufgabe ist für die 5. Klasse zu schwer. (Zu dieser Aufgabe gingen 520 Lösungen ein, davon 490 richtig gelöst, d. Red.)

Gundra Schünichen, Berlin

● Ich abonniere schon seit dem 6. Schuljahr eure Zeitschrift. Leider habe ich damals kein Interesse für die Aufgaben gezeigt. Seit dem 7. Schuljahr arbeite ich mit *alpha*. Sie hat gewiß auch einen großen Anteil, daß ich in der 8. Klasse erstmalig die Note 1 in Mathematik erhielt. Am *alpha*-Wettbewerb 1972/73 nahm ich erstmals teil, und ich freue mich über jede Karte, die mir meine richtige Lösung bestätigt. Eines steht für mich fest: Mein späterer Beruf muß im Zusammenhang mit Mathematik stehen. Natürlich werde ich *alpha* treu bleiben, denn *alpha* ist einfach große Klasse.

Elke Peckstein

● Als ungarischer Wissenschaftler möchte ich der Zeitschrift *alpha* gratulieren. *alpha* ist eine gute Zeitschrift, die ich ab sofort abonnieren werde.

János Ágoston, Budapest

Mathematik im Schottischen Kaffee

Heute weiß man in der ganzen Welt, daß es in Lwow (Ukrainische SSR) ein Kaffee gab, in dem der Zahlkellner seinen Gästen ein Buch zur aktiven mathematischen Mitarbeit empfahl. Und darüber soll in diesem Beitrag berichtet werden.

S. Banach, der bekannteste polnische Mathematiker, war ein unermüdlicher Arbeiter, der oft nachts, tagelang über einem Problem saß.

Berühmt wurden seine „Séances" – seine Sitzungen. Er lud seine Anhänger in das *Schottische Kaffee* ein, um mit ihnen bei einer Tasse Kaffee wissenschaftliche Konversationen und Diskussionen zu führen. Damit entfachte er einen Meinungsstreit über mathematische Ideen und Probleme, die die Jugend genauso wie das Alter ansprachen. Die Wahl der Themen war stets interessant, meist kurios. Die Freiheit der Diskussionen in einem Kaffee gestattete es, zwanglos – fern von der oft strengen, engbegrenzten Thematik und Atmosphäre des Hörsaales – von einem Problem in das andere überzuwechseln. *Banach* verstand es, durch diese Diskussionen die Hemmungen seiner Schüler abzubauen, war stets bestrebt, einen engen Kontakt zu schaffen, der den Willen beim jungen Menschen weckte, seine eigenen Gedanken zu äußern und zu vertreten. *Banach* demonstrierte, daß er nicht zu den pedantischen Wissenschaftlern seiner Zeit gehörte, die Angst um den Nimbus ihrer Würde hatten, wenn sie mit der Jugend an einem Tische saßen, wenn ihnen ein Fehler unterlief oder das von ihnen gestellte Problem in einer Sackgasse endete.

Viele angesehene Bürger der Stadt zweifelten, daß man in einem Kaffee seriös arbeiten könne. Diese Tischrunde ließ sich, das zeigte sich immer wieder – weder durch die Unruhe an den Nachbartischen noch durch die Musik oder das Auf und Ab der Hauptstraße – von ihren Gesprächen abbringen. Der Disput wurde oft sehr heiß. Man schrieb auf die weißen Marmorplatten der Tische und auf Servietten, erregte damit immer wieder den Mißmut der Kellner, die mit ihren Tüchern versuchten, die mathematischen Probleme zu löschen. Mehrfach kam es zu heftigen Auseinandersetzungen mit dem Bedienungspersonal. *Banach* beendete den Streit der beiden Parteien, den mathematisch Interessierten und den Kellnern, indem er ein großes dickes Buch beschaffte, in dem alle Probleme festgehalten, begonnene Lösungen vervollständigt wurden. Für besonders elegante oder originelle Lösungen setzten Teilnehmer an der Tischrunde Preise aus. Sie lagen zwischen einer guten Tasse Mokka und einer lebenden Gans.

Beim Zahlen nahm der Kellner das *Schottische Buch* an sich und brachte es wieder, wenn Mathematiker im Kaffee erschienen.

Neben den Eintragungen von *Banach* finden wir die Handschriften vieler bekannter Mathematiker wie *Ulan* und *Mazur*. Der zweite Weltkrieg machte dieser Tischrunde nach zehn Jahren ein Ende. Das Buch, ein originelles Dokument einer außerordentlichen Persönlichkeit, wurde 1941 geschlossen und der Ehefrau *Banachs* überreicht. Ein gern gesehener Gast der Gesprächsrunde war der bekannte, im Jahre 1971 verstorbene Mathematiker *H. Steinhaus*. Der *Urania-Verlag* gab 2×100 Aufgaben von ihm heraus. Eine Auswahl von Problemen soll unsere Leser anregen, dieses Buch zu erwerben und einmal die *Methode Banach* auszuprobieren.

Viel Freude und Erfolg
wünscht J. Lehmann

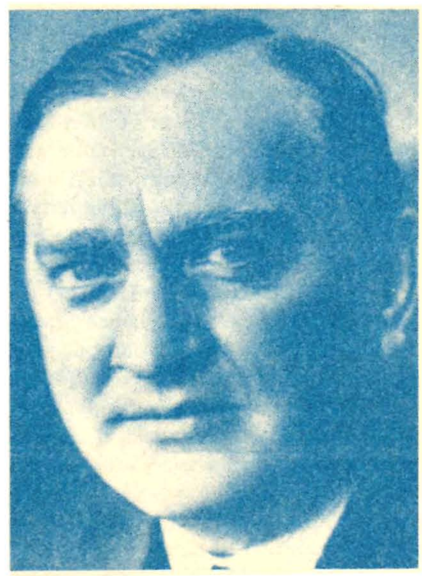
Stefan Banach

30. 3. 1892 bis 31. 8. 1945

Stefan Banach ist geboren und aufgewachsen in Kraków. Nach Ablegung des Abiturs (1910) war er Student am Polytechnikum in Lwow. In den Jahren des ersten Weltkrieges kehrte er in seine Heimatstadt zurück und studierte dort Mathematik und veröffentlichte bereits 1919 seine ersten Forschungsergebnisse. 1920 wurde er Assistent an der Mathematischen Fakultät der Universität Lwow und erwarb im gleichen Jahr den Doktorgrad. 1922 wurde er außerordentlicher, 1927 ordentlicher Professor, 1924 korrespondierendes Mitglied der Polnischen Akademie der Wissenschaften.

Gemeinsam mit *H. Steinhaus* gründete er 1929 die Zeitschrift *Studia Mathematica* und arbeitete an ihr bis 1941 aktiv mit. Er ist einer der Initiatoren der *Mathematischen Biographien*, erstmals 1931 herausgegeben. Die Preisträger der XIV. IMO – Toruń 1972 – erhielten englischsprachige Ausgaben dieser wertvollen Fachbücher.

Während der nazistischen Okkupation ruhte die Professur *Banachs*. Die Faschisten setzten ihn als Tierpfleger für Versuchstiere am *Institut zur Bekämpfung von Typhus* ein. Sein Gesundheitszustand erlaubte es nicht, den ihm nach Ende des zweiten Weltkrieges angebotenen Lehrstuhl an der Universität Kraków zu übernehmen. *Banach* veröffentlichte über 60 wissenschaftliche Arbeiten, insbesondere auf dem Gebiet der Funktionalanalysis, der Theorie der reellen Funktionen und der Maßtheorie.



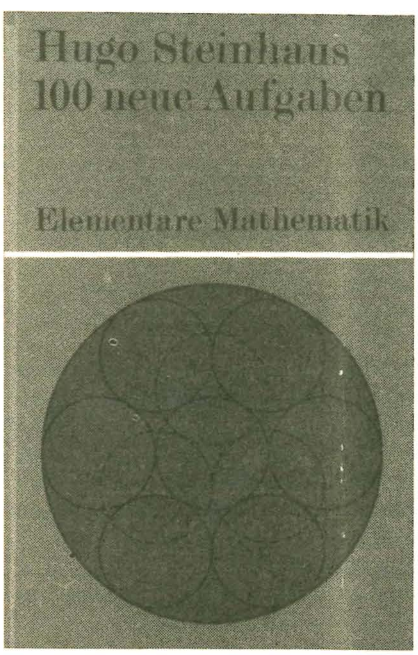
Internationales mathematisches Zentrum „Stefan Banach"

Anfang 1972 wurde in Warschau das internationale mathematische Zentrum gegründet. Es ist das Ergebnis des Grundsatzabkommens über multilaterale Zusammenarbeit der Akademien sozialistischer Länder (vom Dezember 1971). Es erhielt den Namen *Stefan Banach*. In seinem Sinne nahmen von Januar bis Juli 1973 in einem ersten Semester 15 Nachwuchswissenschaftler aus acht sozialistischen Ländern teil. Namhafte polnische und ausländische Wissenschaftler sprachen zu Grundlagenproblemen der Mathematik, wie *Die Theorie der Modelle*, *Die Theorie der Rekursion* und einige angewandte Probleme der *Logik*. Zur Ausbildung der jungen Spezialisten gehörten außer Vorlesungen, Kolloquien, Symposien und Gesprächen im kleinen Kreis auch praktische Übungen, verbunden mit angewandter Forschungsarbeit.

So werden die progressiven Ideen *Banachs* in diesem jungen Zentrum fortgesetzt.

Hugo Steinhaus 2 × 100 Aufgaben

Die beiden Bücher des polnischen Wissenschaftlers enthalten viele interessante Probleme und unterhaltsame Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie mit den dazugehörigen ausführlichen Lösungen. Leser ab etwa 14 Jahren erlernen bei der Beschäftigung mit den originellen Aufgaben, bei deren Auswahl – insbesondere im 2. Band – der Autor sich davon leiten ließ, die Verbindung der Mathematik zur Wirklichkeit darzustellen, ein gründliches Vorgehen. Aber auch mathematische Tricks und eine Einführung in die Bearbeitungsmethoden mathematischer Aufgaben werden ihm durch die beiden Sammlungen geboten, die gleichzeitig den Weg von der Schulmathematik zur höheren Mathematik ebnen.



Proportionen

Die Zahlen A, B, C, p, q, r seien durch die Beziehungen

$$A:B=p,\ B:C=q,\ C:A=r$$

miteinander verknüpft.
Man schreibe die folgende fortlaufende Proportion auf:

$$A:B:C=\square:\square:\square$$

Dabei sollen in den Leerstellen $\square$ Ausdrücke in p, q, r so eingesetzt werden, daß diese durch zyklische Vertauschung der Buchstaben p, q, r auseinander hervorgehen. (Das ist so zu verstehen: Aus dem ersten Ausdruck $\square$ wird der zweite und aus dem zweiten der dritte Ausdruck erhalten, wenn man p durch q, q durch r, r durch p ersetzt.)

Teilbarkeit von Zahlen

Die Zahl $3^{105}+4^{105}$
ist teilbar durch 13, 49, 181 und 379, aber nicht durch 5 und durch 11. Wie beweist man das?

Dreiecke

In der Ebene seien $3n$ Punkte (n sei eine natürliche Zahl) gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Ecken nimmt) n Dreiecke bilden, die keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

Die Diagonale eines Ziegelsteins

Mit Hilfe eines Lineals soll die Raumdiagonale eines Ziegelsteines, der die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Quaders) hat, gemessen werden, d. h. der Abstand der am weitesten auseinander liegenden Ecken. Man gebe ein praktisches Verfahren zur Messung dieser Diagonale an, das sich z. B. in einem Betrieb anwenden läßt. Den Lehrsatz des Pythagoras wollen wir nicht benutzen!

Verschnüren von Päckchen

Ein Karton in Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Quaders) wird im allgemeinen über Kreuz verschnürt: Im Mittelpunkt N der Deckfläche sowie im Mittelpunkt P der Grundfläche überscneidet sich der Bindfaden jeweils in einem rechten Winkel. Man zeige: Wenn man die Schnur in N und in P fest zusammenklebt, läßt sie sich nicht mehr verschieben.

Drei Läufer

Drei Läufer, A, B, C trainieren systematisch auf der 200-m-Strecke. Nach jedem Lauf notieren sie die Reihenfolge, in der sie das Ziel passieren. Am Ende der Saison stellen sie fest, daß A in den meisten Trainingsläufen B geschlagen hat, daß B meistens C besiegt hat und daß in fast allen Läufen C vor A lag.
Wie ist das möglich?

Eine Ungleichung

Man beweise, daß für $a>b>c>0$ die Beziehung gilt:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}>0.$$

Umkreis und Inkreis

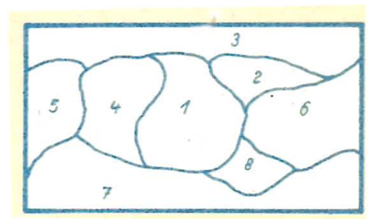
Für ein gleichseitiges Dreieck ist der Radius des Umkreises gleich dem Durchmesser des Inkreises. Der Flächeninhalt des Umkreises ist folglich viermal so groß wie der des Inkreises. Man zeige, daß für andere Dreiecke das Verhältnis dieser Flächeninhalte stets größer als vier ist.

Heureka!

Gegeben sei eine Kugel vom Durchmesser 1. Wir zeichnen auf der Kugeloberfläche einen Kreis, der diese Fläche im Verhältnis 1 :9 zerlegt. Wie groß ist der Kreisumfang?

Färbung einer Landkarte

Das Bild zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbungen verschieden sind?



Ein Kuchen für drei

Zwei Brüder, Lutz und Bernd, haben den Weihnachtskuchen bereits in zwei Teile A und B zerlegt. Beide betrachten die Teilung als gerecht. Da erscheint überraschend Dr. Abrakadabra, um am Fest teilzunehmen. Er verbirgt seine Zweifel an der angeblichen Gleichheit $A=B$ nicht und benutzt eine Methode, die jedem $\frac{1}{3}$ des Kuchens sichert und zugleich $A=B$ nicht außer acht läßt. In der Tat erreicht die Methode, ausgehend von der ersten Teilung, eine gerechte Zerlegung in drei gleiche Teile.
Worin besteht der Trick?

Mathematische Literatur aus dem Urania-Verlag

H. Steinhaus
100 Aufgaben
179 S., 131 Abb., Pappband, cellophaniert 8,50 M

H. Steinhaus
100 neue Aufgaben
176 S., 97 zweifarbige Zeichnungen, Pappband, cellophaniert 8,50 M

Leonhard A. Rastrigin
Zahl oder Wappen
Ein Buch über den Zufall
300 S., 80 Zeichnungen, Ganzgewebe 9,80 M

Wir bauen eine „Unruhe" mit regelmäßigen Polyedern

Liebe *alpha*-Leser der 5. und 6. Klassen! Mein Name ist *Birgit Krötenheerdt*. Ich besuche zur Zeit eine 9. Klasse der *Dr.-Kurt-Fischer-Oberschule* in Halle. Seit mehreren Jahren gehöre ich zu den Lesern der Schülerzeitschrift *alpha*. Mit diesem Beitrag möchte ich Euch eine Anleitung zum Basteln einer Unruhe mit regelmäßigen Polyedern geben. Eine solche Unruhe kann, wenn sie frei beweglich aufgehängt ist, ein schöner Zimmerschmuck sein. Auch Eurem Mathematiklehrer könnt Ihr damit vielleicht eine Freude bereiten.

Sicher ist Euch bekannt, daß ein Würfel als *regelmäßiger Körper* oder auch als *regelmäßiges Polyeder* bezeichnet wird. Die Begrenzungsflächen sind regelmäßige Vielecke, und an jeder Ecke stoßen gleich viele Kanten zusammen. Es kann bewiesen werden, daß es genau 5 Arten regelmäßiger Polyeder gibt.

(In der Tabelle und im folgenden Text wird das Wort *regelmäßig* mit r. abgekürzt.)

In Bild 1 sind diese Polyeder der Reihe nach von links nach rechts zu sehen. Für alle r. Polyeder und auch für viele andere Polyeder gilt die Formel $E-K+F=2$, die von dem Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) erkannt und bewiesen wurde.

Beim Basteln unserer Unruhe wollen wir die r. Polyeder weder als massive Körper, noch als Flächenmodelle aus den Netzen, sondern als Kantenmodelle bauen. Dazu benötigen wir etwa 20 Trinkröhrchen (möglichst von gleicher Farbe), Garn, eine große Stopfnadel, Nähseide für die Aufhängung und 4 Stäbe, welche in die Trinkröhrchen passen (z. B. Mikadostäbe).

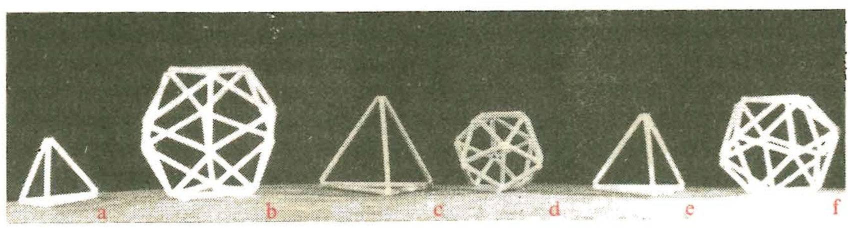
Wie lang müssen nun die Kanten der verschiedenen r. Polyeder gewählt werden, damit die Unruhe ein gefälliges Aussehen erhält? Offensichtlich wäre es ungünstig, für alle 5 Polyeder dieselbe Kantenlänge zu wählen, weil dann z. B. das Tetraeder gegenüber dem Ikosaeder viel zu klein wirken würde (vgl. Bild 2a, b).

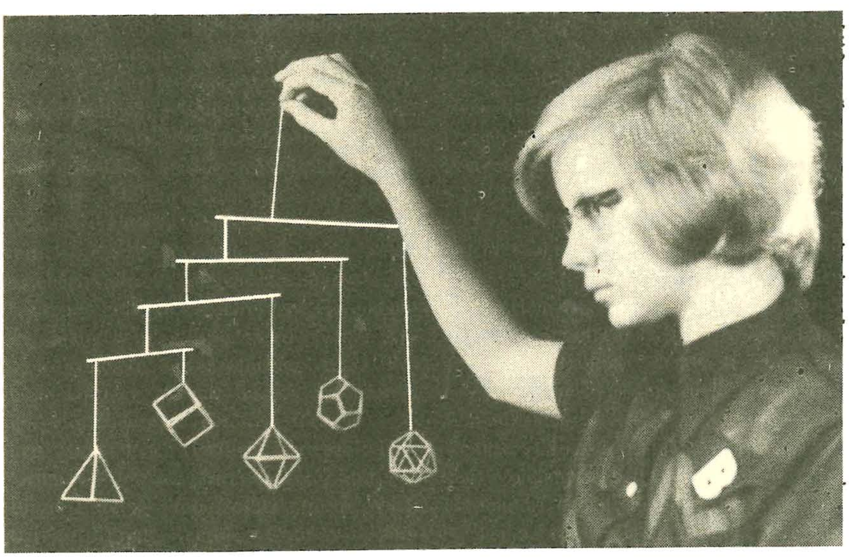
Ein etwas gefälligeres Aussehen wäre gewährleistet, wenn wir die Kantenlängen so wählen, daß alle 5 Polyeder gleiche Volumina haben (vgl. Bild 2c, d). Würden wir für die einzelnen Polyeder Kantenlängen verwenden, mit denen die umbeschriebenen Kugeln gleiche Größe besitzen, so bekommen z. B. das Tetraeder und das Ikosaeder das Aussehen des Bildes 2e, f (als umbeschriebene Kugel eines r. Polyeders wird diejenige Kugel bezeichnet, auf deren Oberfläche die Ecken des r. Polyeders liegen). Um ein noch gefälligeres Aussehen der Unruhe zu erreichen, wählen wir die Kantenlängen so, daß für jedes r. Polyeder die gedachte Kugelfläche durch die Kantenmittelpunkte einen Radius von 2 cm erhält. Die erforderlichen Berechnungen können erst mit den Kenntnissen der 8. und 9. Klassen ausgeführt werden.

In der folgenden Tabelle sind die errechneten Werte für die Kantenlängen (auf eine Stelle nach dem Komma genau) angegeben.

Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder
5,6 cm	2,8 cm	4,0 cm

Dodekaeder	Ikosaeder
1,5 cm	2,4 cm





Name	Begrenzungsflächen	Kanten an jeder Ecke	Ecken E	Kanten K	Flächen F
r. Tetraeder	r. 3-Ecke	3	4	6	4
r. Hexaeder (Würfel)	r. 4-Ecke	3	8	12	6
r. Oktaeder	r. 3-Ecke	4	6	12	8
r. Dodekaeder	r. 5-Ecke	3	20	30	12
r. Ikosaeder	r. 3-Ecke	5	12	30	20

Der Wert für das Oktaeder ist ein exakter Wert, während die anderen Werte nur Näherungen darstellen.

Wir bauen zuerst das r. Tetraeder; dazu schneiden wir 6 Röhrchen der Länge 5,6 cm von den großen Trinkröhrchen ab. Mit Nadel und Garn (doppelt etwa 1 m lang) werden zunächst 3 Röhrchen zu einer geschlossenen Kette aufgefädelt. Mit einem Röhrchen dieser Kette und mit zwei weiteren Röhrchen wird eine zweite geschlossene Kette hinzugefügt. Mit dem 6. Röhrchen wird nun das r. Tetraeder vollendet; durch jedes Röhrchen sollte das Garn mindestens zweimal hindurchgezogen werden.

Beim r. Hexaeder (dem Würfel) benötigen wir 12 Röhrchen der Länge 2,8 cm. Wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 4 Röhrchen. Mit einem Röhrchen dieser Kette und mit 3 weiteren Röhrchen wird eine zweite geschlossene Kette hinzugefügt. Mit den restlichen 5 Röhrchen wird das r. Hexaeder vollendet; es ist darauf zu achten, daß an jeder Ecke 3 Röhrchen zusammenstoßen.

Beim r. Oktaeder benötigen wir 12 Röhrchen der Länge 4,0 cm, und wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 3 Röhrchen; an

jeder Ecke müssen 4 Röhrchen zusammenstoßen.
Beim r. Dodekaeder benötigen wir 30 Röhrchen der Länge 1,5 cm, und wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 5 Röhrchen; an jeder Ecke müssen 3 Röhrchen zusammenstoßen.
Beim r. Ikosaeder benötigen wir 30 Röhrchen der Länge 2,4 cm, und wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 3 Röhrchen; an jeder Ecke müssen 5 Röhrchen zusammenstoßen.
Während die Kantenmodelle des Tetraeders, des Oktaeders und des Ikosaeders sehr stabile Form besitzen, können die Kantenmodelle des Hexaeders und des Dodekaeders leicht verformt werden. Deshalb sollte bei ihnen das Garn besonders straff gezogen werden.
Zum Aufhängen der Polyeder verwenden wir 4 Trinkröhrchen von etwa 20 cm, 17 cm, 14 cm und 10 cm Länge. Durch eingeschobene Stäbe verhindern wir ein leichtes Verbiegen dieser Röhrchen. Entsprechend dem Bild 1 werden die Polyeder mit Nähseide aufgehängt. Dazu brauchen wir etwas Geduld, um Gleichgewicht der Röhrchen mit den Stäben zu erreichen. Ich hoffe, ihr habt Spaß beim Basteln, und die Unruhe gelingt euch genauso wie mir. Wer noch mehr über regelmäßige Polyeder lesen möchte, dem empfehle ich: *alpha*-Heft 1, 1969 (*Fernsehfußball- Reguläre Polyeder* von Dr. *E. Schröder*), *alpha*-Heft 2, 1969 (*Der Eulersche Polyedersatz* von Dr. *H. Günther*), die *Kleine Enzyklopädie der Mathematik* und das Büchlein *Reguläre und halbreguläre Polyeder* von *T. Roman* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin).

B. Krötenheerdt

Inhalt einer Übung des Mathematik-Zirkels des Moskauer Palastes der Pioniere und Schüler

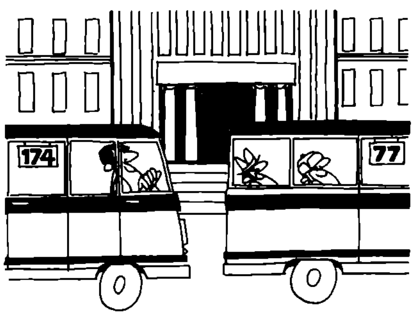
Thema: Wahrscheinlichkeit · Grundbegriffe und einfachste Berechnungen

■ *Frage des Lehrers an alle:* Neben meinem Haus halten zwei Autobusse — Nr. 77 und Nr. 174. Der erste fährt dreimal so häufig wie der zweite. Ich setze mich in den zuerst abfahrenden Bus. Welche Chance habe ich, daß es Nr. 174 ist?

▲ *Die sofortige Antwort vieler Zirkelteilnehmer:* 25 %!

■ *Lehrer:* Richtig. In Bruchteilen der Eins ausgedrückt ist dies 0,25. Wer kann die Antwort begründen?

▲ *Zirkelteilnehmer A:* Wir nehmen an, daß auf der Strecke vier Autobusse verschiedener Nummern verkehren, Nr. 75, Nr. 76, Nr. 77 und Nr. 174, die in einheitlichen Zeitabständen fahren, wobei die ersten drei die gleiche Fahrtroute haben. Dann ist klar, daß die Chance, mit der Nr. 174 zu fahren, 0,25 ist.



■ *Lehrer:* Eine sehr gute Erklärung. Verallgemeinern wir sie! In der Antwort von A war von vier Autobussen die Rede, die in gleichen Zeitabständen fahren, d. h., die in dieser Hinsicht gleichberechtigt sind. Die Chance, in einem von den gleichberechtigten Bussen zu fahren, erhielten wir, indem wir Eins durch die Anzahl der gleichberechtigten Busse dividierten. Warum?

▲ *Viele:* Na das ist klar!

■ *Lehrer:* In der Mathematik muß man alles begründen. Oder etwa nicht alles?

▲ *Zirkelteilnehmer B:* Außer Axiomen und Definitionen alles.

■ *Lehrer:* Und was liegt hier vor — ein Satz, ein Axiom oder eine Definition?

▲ *B:* Natürlich eine Definition.

■ *Lehrer:* Stimmt. Schreiben wir also eine allgemeinere Definition auf, indem wir das Wort „Chance" durch das wissenschaftlichere Wort Wahrscheinlichkeit ersetzen: „Wenn wir es mit ... gleichberechtigten Varianten zu tun haben, dann ist bei zufälliger Auswahl die Wahrscheinlichkeit dafür, eine von ihnen auszuwählen, definitionsgemäß ... ."

Achtet darauf, daß in dieser Definition die Termini „gleichberechtigt" und „zufällig" vorkommen. Diese definieren wir an dieser Stelle nicht, sondern verlassen uns auf unser Sprachgefühl.

Jetzt werden wir eine Aufgabe über die Gewinnwahrscheinlichkeit im *Sportlotto* lösen. In diesem Spiel erhält derjenige eine Prämie, der von sechs „Glückszahlen" (insgesamt sind es 49 Zahlen) drei, vier, fünf oder alle sechs Zahlen errät.

Beginnen wir mit dem günstigsten Fall — wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, alle sechs Glückszahlen zu erraten? Wie muß man bei der Lösung vorgehen?

▲ *Zirkelteilnehmer C:* Von 49 Nummern kann man sechs auf so viele Weisen auswählen, wie es Kombinationen von 49 Elementen zur k-ten Klasse gibt. Alle diese Varianten kann man als gleichberechtigt ansehen. Jedoch führt nur eine von ihnen zum Gewinnen. Deshalb wird die Antwort durch den Ausdruck $\frac{1}{\binom{49}{6}}$ gegeben.

■ *Lehrer:* Richtig. Wir rechnen das nicht aus, sondern führen es dann auf der Maschine gleich für alle Möglichkeiten aus. Jetzt verallgemeinern wir die Lösung auf den Fall eines beliebigen Spieles dieser Art (es heißt *Genuesische Lotterie*). Hier ist die Aufgabenstellung: „Unter n Zahlen gibt es m Glückszahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, k dieser Glückszahlen zu erraten, wenn man m Zahlen auswählt?"

▲ *C:* (An die Tafel gehend) Insgesamt gibt es $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten der Auswahl. Wieviel von ihnen enthalten k Glückszahlen? Dazu müssen k von unseren m Zahlen zu den m Glückszahlen und die übrigen $m-k$ zu den $n-m$ Nichtglückszahlen gehören. Das bedeutet nach den Formeln der Kombinatorik, daß es

$$\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{m-k}$$

solcher Möglichkeiten gibt. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, k dieser Zahlen zu erraten, gleich

$$\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{m-k}\Big/\binom{n}{m}.$$

■ *Lehrer:* Die Aufgabe ist richtig gelöst. Die erhaltene Formel übersetzen wir jetzt in die Programmsprache, und beim nächsten Besuch im elektronischen Rechenzentrum rechnen wir die Gewinnchancen im *Sportlotto* durch, indem wir die konkreten Zahlen für k, m und n einsetzen. Und das ist das Programm:

$P = \Pi(i = m-k+1, m, i)/\Pi(i = 1, k, i)$ x
x $\Pi(i = n-m-m+k+1, n-m, i)/$
$\Pi(i = 1, m-k, i)/(\Pi(i = n-m+1, n, i)/$
$\Pi(i = 1, m, i))$.

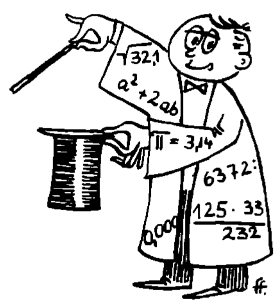
(Es wurde die Eingabesprache der Maschine „MIR - 1" benutzt.)

Π ist das Zeichen der Multiplikation

$\Pi(i = a, b, i)$ bedeutet $\prod_{i=a}^{i=b} i$.

W. Trostnikow

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1974

▲5▲1165 Längs einer 234 m langen Straße sollen die beiderseitigen 1,50 m breiten Fußgängerwege mit quadratischen Platten ausgelegt werden.
a) Wieviel Platten werden benötigt, wenn jede Platte eine Seitenlänge von 25 cm besitzt?
b) Wieviel Arbeitsstunden benötigen sechs Arbeiter zum Verlegen der Platten, wenn jeder von ihnen in einer Arbeitsstunde 24 Platten verlegt?

Elsemarie Anger, Oschatz Kl. 8

▲5▲1166 Kerstin kaufte in einem Schreibwarengeschäft einen Radiergummi zu 20 Pf, ein Lineal zu 80 Pf, einen Tuschkasten und einen Zirkel, der zweimal so teuer war wie der Tuschkasten. Insgesamt hatte sie genau 10 M zu bezahlen. Wie teuer waren Tuschkasten und Zirkel?

Frank Deutsch, Falkensee, Kl. 7

W 5 ■ 1167 In einer Schule sind mehr als 20, aber weniger als 30 Lehrer tätig. In der Mittelstufe unterrichten doppelt soviel Lehrer wie in der Unterstufe und genausoviel Lehrer wie in der Oberstufe. Wieviel Lehrer sind an dieser Schule tätig, wenn jeder von ihnen in genau einer dieser drei Stufen unterrichtet?

Anke Mentkowski, Eichwalde, Kl. 8

W 5 ■ 1168 Ein Lehrer wußte, daß sein Kollege Müller im Jahre 1973 gerade 46 Jahre alt geworden war. Er kannte aber dessen genaues Geburtsdatum nicht. Auf eine Anfrage hin erhielt er folgende Antwort: „Die Monatszahl meines Geburtsdatums ist dreimal so groß wie die Tageszahl. Das Produkt aus Monats- und Tageszahl ist gleich der Zahl, die den beiden letzten Stellen meines Geburtsjahres entspricht." Wann wurde der Kollege Müller geboren?

Heiko Tennert, Döbeln, Kl. 7

W 5*1169 Multipliziert man eine zweistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 12 beträgt, mit 2 und subtrahiert man von diesem Produkt 12, so erhält man als Ergebnis wiederum eine zweistellige natürliche Zahl, bei der die Grundziffern in umgekehrter Reihenfolge angeordnet sind wie bei der ursprünglichen Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl? Wieviel Lösungen besitzt diese Aufgabe?

Eberhard Gralle, Görlitz

W 5*1170 Auf einer Radrennveranstaltung starteten vier Tandems. Uns ist über den Verlauf folgendes bekannt:
a) Lutz erkämpfte zusammen mit seinem Partner den 1. Platz.
b) Klaus und sein Partner kamen auf den 2. Platz.
c) Manfred und dessen Partner Dirk waren schneller als Bernd und dessen Partner.
d) Holger errang mit seinem Partner den 2. Platz.
e) Steffen erkämpfte mit seinem Partner einen der ersten drei Plätze.
f) Norbert hatte Bernd zum Tandempartner. Welche Sportler fuhren zusammen auf einem Tandem? Welchen Platz erkämpften sie?

Henry Albrecht, Wittenberge, Kl. 8

▲6▲1171 Es ist nachzuweisen, daß jede dreistellige natürliche Zahl, deren Hunderterstelle um 4 kleiner ist als deren Einerstelle, um 396 kleiner ist als diejenige dreistellige Zahl, die man erhält, wenn man die Grundziffern der gegebenen Zahl in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt.

Johanna Determann, Leutenthal, K. 8

▲6▲1172 Es ist zu beweisen, daß die Summe aus sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 7 teilbar ist!

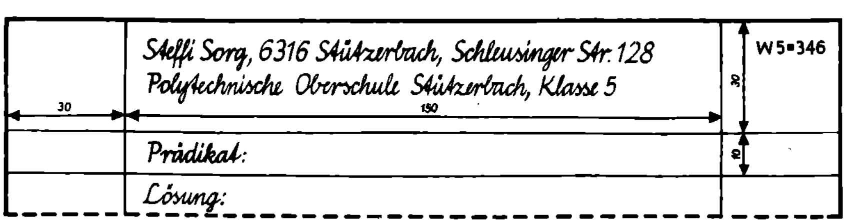
Hagen Peters, Lübbenau

Wettbewerbsbedingungen

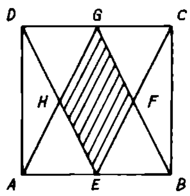
1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*



W 6 ■ 1173 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a$ dar. Der Mittelpunkt G der Seite $\overline{CD}$ wurde mit den Punkten A und B, der Mittelpunkt E der Seite $\overline{AB}$ mit den Punkten C und D verbunden und die entstandenen Schnittpunkte mit H und F bezeichnet. Es ist der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ durch den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ auszudrücken. *Sch.*



W 6 ■ 1174 Es sind zwölf zweistellige natürliche Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) An der ersten Stelle kommt die Grundziffer 2 genau viermal, die Grundziffer 3 genau fünfmal, die Grundziffer 4 genau zweimal und die Grundziffer 5 genau einmal vor.

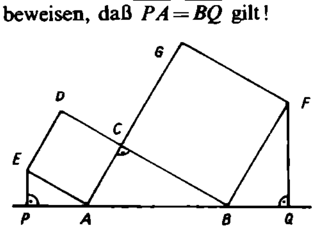
b) An der zweiten Stelle kommt die Grundziffer 2 genau einmal, die Grundziffer 3 genau zweimal, die Grundziffer 4 genau zweimal, die Grundziffer 5 genau dreimal und die Grundziffer 6 genau viermal vor.

c) Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen sollen sämtlich verschieden voneinander sein.

d) Für genau zehn der zu ermittelnden Zahlen ist die Ziffer der ersten Stelle kleiner als die der zweiten. *T.*

W 6*1175 Zwischen zwei Orten A und B verkehren zwei Autobusse, die auf der Fahrt von A nach B bzw. von B nach A genau einmal im Orte C jeweils 10 Minuten halten. Beide Autobusse fahren zum gleichen Zeitpunkt in A bzw. B ab, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Sie erreichen die Endstation B und A zum gleichen Zeitpunkt nach $1\frac{1}{2}$ Stunden. Die Entfernung der Orte A und C beträgt $\frac{4}{5}$ der Entfernung der Orte B und C. Es ist nachzuweisen, daß sich die Autobusse bei konstanter Geschwindigkeit im Orte C treffen. *Albrecht Opitz, Meißen*

W 6*1176 Über den Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ wurden die Quadrate $ACDE$ und $BFGC$ konstruiert. Von den Eckpunkten E und F dieser Quadrate wurden die Lote $\overline{EP}$ und $\overline{FQ}$ auf die Gerade AB gefällt. Es ist zu beweisen, daß $\overline{PA}=\overline{BQ}$ gilt! *Sch.*



▲7▲1177 In einem Produktionsbetrieb sind genau 45 % aller Beschäftigten Frauen, die übrigen sind Männer. Es arbeiten in diesem Werk 82 Männer mehr als Frauen. Wie groß ist die Anzahl aller Betriebsangehörigen? *Sch.*

▲7▲1178 Gegeben seien drei beliebige von Null verschiedene Grundziffern. Durch unterschiedliche Anordnung dieser Grundziffern lassen sich sechs verschiedene dreistellige Zahlen bilden. Es ist zu beweisen, daß die Summe dieser sechs Zahlen stets durch 37 teilbar ist.
Dipl.-Ing. Martin Walter, Meiningen

W 7 ■ 1179 Wie alt ist Angela, wenn ihre Mutter 30 Jahre, ihre Großmutter 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal und die Großmutter achtmal so alt wie Angela sein wird? *Sch.*

W 7 ■ 1180 In dem Schema

VIER
+EINS
FÜNF

sollen die Buchstaben so durch Grundziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Zeige, daß die Aufgabe keine Lösung besitzt! *T.*

W 7*1181 Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB}>\overline{BC}$ und $\sphericalangle BAD<90°$. Schlage um A mit $\overline{AD}$ als Radius einen Kreis; sein Schnittpunkt mit der Geraden CD sei E. Schlage um C mit $\overline{CD}$ als Radius einen weiteren Kreis; sein Schnittpunkt mit der Geraden AD sei F. Ziehe die Verbindungsgeraden BE, BF und EF! Weise nach, daß das Dreieck BFE gleichschenklig ist! *Sch.*

W 7*1182 Es ist die kleinste mehrstellige natürliche Zahl z zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Die Zahl z beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 4.

b) Streicht man diese Grundziffer 4 und fügt man sie rechts hinter der letzten Grundziffer an, so erhält man eine natürliche Zahl z', die gleich dem vierten Teil von z ist.
Volker Zillmann, Dresden

W 8▲1183 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}=3$ cm, dessen Umfang 13 cm beträgt. Eine Gerade g, die zu der Geraden AB parallel ist, schneide $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt D und $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt E so, daß der Umfang des Vierecks $ABED$ gleich 7,4 cm ist. Es ist die Länge der Strecke $\overline{AD}$ zu ermitteln. *Sch.*

W 8 ■ 1184 In den arabischen Erzählungen von den tausendundein Nächten, die vor vielen hundert Jahren gesammelt worden sind, finden wir in der 458ten Nacht das folgende *Rätsel*:
Eine fliegende Taubenschar kam zu einem hohen Baume, und ein Teil von ihnen setzte sich auf den Baum, ein anderer darunter. Da sprachen die auf dem Baume zu denen, die unten waren: „Wenn eine von euch herauffliegt, so seid ihr ein Drittel von uns allen; und wenn eine von uns hinabfliegt, so werden wir euch an Zahl gleich sein."
Wieviel Tauben setzten sich auf den Baum und wieviel darunter? *L.*

W 8*1185 Es sei $A_1B_1C_1$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{A_1B_1}=5$ cm und den Katheten $\overline{B_1C_1}=3$ cm, $\overline{A_1C_1}=4$ cm. Es sind die Maßzahlen (in cm) der Längen der Seiten aller dem Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlichen Dreiecke ABC anzugeben, wobei diese Maßzahlen natürliche Zahlen sein sollen und außerdem auch die Maßzahl der Höhe $\overline{CD}$ dieser Dreiecke eine natürliche Zahl sein soll. *T.*

W 8*1186 Drei Ruderer fahren auf drei verschiedenen Strecken mit der gleichen konstanten Eigengeschwindigkeit von 12 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ nach einem 1 km entfernten Punkt und kehren von dort ohne Aufenthalt sofort wieder zurück. Der erste rudert auf einem Fluß zunächst 1 km stromabwärts und dann wieder zurück, der zweite rudert auf diesem Fluß zunächst 1 km stromaufwärts und dann wieder zurück, und der dritte rudert in einem stehenden Gewässer.

a) Welcher der drei Ruderer kehrt zuerst zu dem Ausgangspunkt zurück und welcher zuletzt? Dabei wird vorausgesetzt, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses konstant ist und 3 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ beträgt.

b) Man beweise, daß man die gleiche Reihenfolge für das Eintreffen der Ruderer für jede Eigengeschwindigkeit v und jede Strömungsgeschwindigkeit des Flusses u erhält, falls $u<v$ gilt. *L.*

W 9 ■ 1187 Die Gedenkmünze, die 1971 von der Staatsbank der DDR anläßlich des hundertsten Geburtstages von Karl Liebknecht und Rosa Luxemburg herausgegeben wurde, besteht aus einer Silber-Kupfer-Legierung. Sie hat eine Masse von 20,9 g und ein Volumen von 2123 mm^3.
Aus wieviel Teilen Silber und aus wieviel Teilen Kupfer (bezogen auf eine Masse von 1000) besteht die Legierung, aus der die Gedenkmünze angefertigt worden ist?
Als bekannt wird dabei vorausgesetzt, daß die Dichte des Silbers 10,5 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ und die Dichte des Kupfers 8,92 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ beträgt. *L.*

W 9 ■ 1188 Gegeben seien zwei Dreiecke, von denen die Seiten des einen 9 cm, 12 cm und 15 cm lang sind und die des anderen 7 cm, 15 cm und 20 cm. Man untersuche, ob sich diese beiden Dreiecke zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammenlegen lassen, und führe bejahendenfalls die Konstruktion aus. *T.*

W 9*1189 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$x^{x-2}\cdot x^{x-3}+x^{x-4}=21$$

erfüllt ist. *Herwig Gratias, Sömmerda EOS „Ernst Schneller", Kl. 12*

W 9*1190 Für ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ und den Diagonalen $\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ gelte $c+d+e=b+c+f=c+d+f$.
Es ist zu beweisen, daß dann dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist. *Sch.*

W 10/12 ■ 1191 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{x+y}{1-xy}=3, \quad (1) \qquad \frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3} \quad (2)$$

zu ermitteln. *Dipl.-Ing. Fritz Rueß, Leuna*

W 10/12 ■ 1192 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC, legen Sie auf $\overline{AC}$ einen inneren Punkt D und auf $\overline{BC}$ einen inneren Punkt E so fest, daß $\overline{DC}=\frac{1}{3}\cdot\overline{AC}$ und $\overline{EC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}$ gilt, und verbinden Sie D mit E! Weisen Sie nach, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC genau sechsmal so groß ist wie der des Dreiecks DEC! *Sch.*

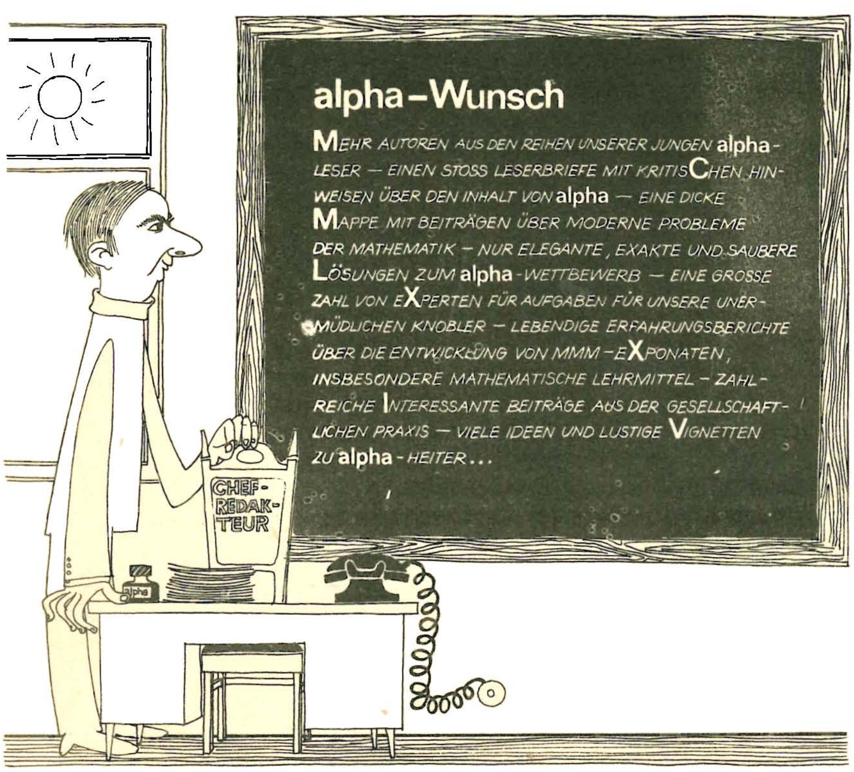
W 10/12 ■ 1193 Man ermittle ohne Benutzung einer Logarithmentafel und ohne Kenntnis des Wertes für $\lg 2$ die Anzahl der Stellen der Zahl 2^{100}.
Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

W 10/12 ■ 1194 Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Man beweise, daß sich dann der Bruch

$$\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}$$

stets kürzen läßt, d. h., daß der Zähler $1+n^2+n^7$ und der Nenner $1+n+n^8$ stets einen von 1 und -1 verschiedenen ganzzahligen Teiler haben.
Aus der math. Schülerzeitschrift der DRV „Mathematik und Jugend"

Das sind sie, die 12000 Lösungen des *alpha*-Wettbewerbs, die mit jedem Heft eingehen. Das ist sie, die fleißige Redaktionsassistentin (Bild links), die alle Briefe öffnet, die Lösungen sortiert und an die Korrektoren weiterleitet. Alle Wettbewerbsteilnehmer können sie bei dieser aufwendigen Arbeit unterstützen, indem sie die Wettbewerbsbedingungen gewissenhaft einhalten.



Preisträger des Physik-Wettbewerbs 1973

Im Physikwettbewerb 1973 gingen 510 Lösungen (davon 203 Mädchen) ein. Es wurden 36 Lösungen mit falsch gelöst bewertet.

P 6 ■ 1085	51	P 9 ■ 1090	61
P 6 ■ 1086	63	P 9 ■ 1091	28
P 7 ■ 1087	81	P 10/12 ■ 1092	24
P 8 ■ 1088	112	P 10/12 ■ 1093	20
P 8 ■ 1089	50		

Preisträger:
Für vorbildliche Leistungen erhielten eine Urkunde, das *alpha*-Abzeichen und eine Buchprämie:
Meinhard Mende, Lunzenau; Angelika Müller, Greifswald; Angelika Konieczny, Schulzendorf; Thomas Müller, Krems (Österreich); Eckhard Liebscher, Ilmenau; Wilfried Carl, Halle; Gudrun Billig, Coswig; Bertold Möbius, Dresden; Annette Damnik, Luckenwalde; Michael Weicker, Mügeln; Annette Blödner, Wiederitzsch; Dittmar Kurzt, Friedrichrode; Manfred Seidler, Cottbus; Irene Schwaß, Wismar; Dagmar Klatte, Görlitz; Bärbel Groß, Rodewisch.

alpha-Wettbewerb

Abzeichen in Gold

Für sechsjährige Teilnahme

Kerstin Bachmann, Halle; **Ralph Lehmann**, Petershagen; **Jörg Hutschenreiter**, Dresden; **Uwe Lewandowski**, Leipzig; **Harald Herrmann**, Hammerunterwiesenthal; **Christina Feige**, Mühlhausen; **Lutz Püffeld**, Hennigsdorf; **Angela Rohrbeck**, Franzburg; **Christoph Scheurer**, Glauchau-Gesau; **Eckhard Schadow**, Oranienburg; **Karin Fischer**, Dresden; **Gerlinde Koch**, Trusetal; **Bernd Heymann**, Leipzig; **Ehrenfried Zschech**, Bautzen; **Bettina Zabel**, Mühlhausen; **Henrik Frank**, Greifswald; **Wolfgang Richter**, Pirna; **Peter Linhart**, Waldheim; **Christian Endter, Eberhard Eff, Reiner Nothnagel, Eberhard Manske**, alle Steinbach-Hallenberg; **Annegret Kirsten**, Leuna; **Ute Winkler**, Teltow.

Für fünfjährige Teilnahme

Kirsten Helbig, Frankfurt; **Ines und Ute Greiner**, Wurzen; **Astrid Rösel**, Teterow; **Karl-Heinz Hering**, Erfurt; **Andreas Schlosser**, Zwickau; **Detlef Poppe**, Mühlhausen; **Bernd Hanke**, Großschweidnitz; **Guido Blosfeld**, Halle; **Bärbel Rahnefeld**, Karl-Marx-Stadt; **Wolfgang Kögler**, Wiesenberg; **Regina Hildenbrandt**, Stützerbach; **Ullrich Tetzlaff**, Friesack; **Sibylle Rohrbeck**, Franzburg; **Norbert Köppe**, Glienecke; **Ullrich Bittner**, Greifswald; **Lothar Jenning,** Gülzowshof; **Regina Rau,** Schneeberg; **Marina Schulz,** Görlitz; **Brigitte Hildenbrandt,** Stützerbach; **Michael Schnelle,** Calau; **Norbert Littig,** Lichtenberg; **Martin Ermrich,** Elbingerode; **Sigrid Straßburger,** Zella-Mehlis; **Rüdiger Blach,** Calau; **Reiner Lindemann,** Cottbus; **Wolfgang Herrmann,** Elterlein; **Barbara Recknagel,** Steinbach-Hallenberg; **Sabine Mamerow,** Altentreptow; **Hans-Peter Tams,** Ribnitz-Damgarten.

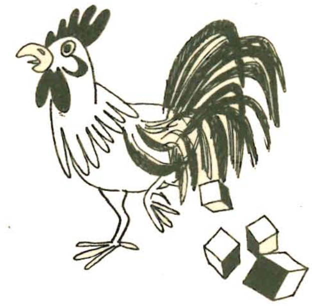
Für vierjährige Teilnahme

Angelika Müller, Greifswald; **Andreas Näther,** Mittweida; **Birgit Kühnstedt,** Erfurt; **Ralf Weber,** Bischofswerda; **Uwe Risch,** Burg; **Olaf Richter,** Pirna; **Hermann Tenor,** Dessau; **Dirk Sprengel,** Potsdam; **Jens-Uwe Richter,** Kemptau; **Sven-Thorsten Freitag,** Zwickau; **Rainer Gutsche,** Herzberg; **Arndt Petzold,** Karl-Marx-Stadt; **Bernd Derlich,** Teterow; **Lars Luther,** Güstrow; **Ulrike Bandemer,** Freiberg; **Birgit Krötenheerdt,** Halle; **Torsten Waldeck,** Karl-Marx-Stadt; **Ilona Drews,** Wöbbelin; **Ulli Riedel,** Flöha; Jörg Schubert, Pfaffroda; Giesbert Löwe, Schleiz; Astrid Schulz, Rotta; Reinhold Albrecht, Reuden; Barbara Pahl, Neuenhofe; Manfred Zmeck, Rüdnitz; Andrea Gerlach, Säuritz; Marlies Dergel, Annegret Wobst, Doris Kuban, Ulrike Gnauch, Elke Sturm, Matthias Sturm, Matthias Vincentini, Ingolf Puppe, Holger Jurack, alle Burkau, Hiltrut Manske, Bettina Zimmermann, Falk Bahner, Hansjürgen Kiehm, Elke Gernoth, Sabine Kämpf, Birgit Recknagel, Gabriele Raumschüssel, Armin Endter, alle Steinbach-Hallenberg; Heidrun Weichler, Fambach; Beate Esch, Thaldorf; Werner Weber, Dingelstädt; Bernd Redlich, Wernburg; Sabine Steinert, Dresden; Falk Bachmann, Halle; Horst Kohlschmidt, Dresden; Manfred Seidler, Cottbus; Matthias Liehm, Ludwigsfelde; Annelie Günther, Bernterode; Norman Bitterlich, Karl-Marx-Stadt; Hellfried Schumacher, Ahlbeck; Andreas Hochhaus, Mühlhausen; Gina Jahnke, Dresden; Gerd Köhler, Hainichen; Wilfried Carl, Halle; Andreas Neubert, Schwarzenberg; Achim Bobeth, Dresden; Angela Bagola, Spremberg; Ulf Hutschenreiter, Dresden; Gisela Gottlieb, Halle; Peter Herrlich, Radebeul; Udo Grunert, Wurgwitz; Jutta Becker, Lübtheen; Birgit Lorenz, Pirna-Copitz; Birgit Weiß, Bernau; Fred Rempel, Cottbus; Heidrun Scheinhardt, Bad Dürrenberg; Manfred Lehrmann, Walbeck; Andreas Gröschke, Cottbus; Wolfram Ulrici, Leipzig; Katrin Gote, Berlin; Ingrid Hauenschild, Karl-Marx-Stadt; Thomas Rehm, Bernau; Astrid Binder, Halle-Neustadt; Caroline Oelsnitz, Teterow; Pia-Gabriela Preußer, Greifswald; Stephan Fleischmann, Zella-Mehlis; Dietmar Kochrian, Schipkau; Beate Brandtner, Schildau; Christine Frenzel, Groitzsch; Gerd Reif, Silbach; Uwe Haufe, Oberlichtenau; Thorsten Langrock, Weimar; Jens Walther, Benndorf; Marianne Bomberg, Mühlhausen; Gudrun Möller, Dresden; Claudia Heuer, Magdeburg; Michael Huhn, Teterow; Kerstin Müller, Brandis; Hans-Dirk Dunker, Zwenkau; Ulli Klaus, Erfurt.

Für dreijährige Teilnahme

Thomas Maiwald, Olbersdorf; **Uwe Schäfer,** Cottbus; **Jan Müller,** Berlin; **Uwe Szgszka,** Brohm; **Dietmar Gröger,** Hecklingen; **Frank Schulze,** Himmelsberg; **Jürgen Sommerschuh,** Bischofswerda; **Rainer Seifert,** Pinnau; **Marid Helbig,** Frankfurt; **Andreas Illing,** Gersdorf; **Sabine Schröder,** Bernau; **Eva Gerstner,** Dresden; **Ingolf Buttig,** Großharthau; **Manuela Lehmert,** Worbis; **Elke Seidel,** Dresden; **Thomas Kischel,** Greifswald; **Uwe Heiber,** Ilmenau; **Thies Luther,** Güstrow; **Gundula Hanke,** Frankenheim; **Meinhard Mende,** Lunzenau; **Andreas Wenzel,** Dorfchemnitz; **Frank Müller,** Cottbus; **Barbara Wolf,** Köthen; **Sigrun Herbst,** Halberstadt; **Karl Krause,** Mansfeld (Rentner); **Marcus Kasner,** Templin; **Ingo Fietze,** Cottbus; **Frank Burgkhardt,** Frankfurt; **Volker Lerche,** Schmalkalden; **Elke Witt,** Uthausen; **Lew Dimenstein,** Leningrad (UdSSR); **Lutz Thorwarth,** Schmalkalden; **Ulv Krabisch,** Leipzig; **Reiner Stein,** Roßdorf; Michael Heymann, Karl-Marx-Stadt; Hanspeter Herzel, Güstrow; Thomas Jakob, Gera; Heidi Bruhn, Warin; Andreas Börner, Schkortitz; Gerd Oberwinter, Potsdam; Eckhard Kantz, Greifswald; Sabine Pohl, Jena; Uwe Prochnow, Berlin; Norbert Strecker, Lauchhammer, Heidrun Heller, Schwallungen; Rita Rempel, Cottbus; Wulf Henze, Milow; Wolfram Flämig, Dresden; Mathias Hofmokel, Karl-Marx-Stadt; Frank Schulz, Goßwitz; Achim Günther, Geisa; Steffen Würtenberger, Karl-Marx-Stadt; Astrid Richter, Zerpenschleuse; Silvia König, Forst; Michael Meisel, Bad Langensalza; Helfried Schmidt, Dresden; Dieter Hess, Schwallungen; Dagmar Müller, Eilenburg; Karin Landler, Staaken; Enzio Schnabel, Potsdam; Hannelore Oelschläger, Schmalkalden; Uwe Rauner, Gersdorf; Uwe Heidrich, Olbersdorf; Uwe Westphal, Dresden; Wolfgang Seeber, Gehren; Klaus Plotze, Gräfendorf; Klaus Schulze, Brandis; Uwe Schwennicke, Jena; Uwe Gruschke, Greppin; Marina Tischer, Eisleben; Carola Fechtner, Neubrandenburg; Angela Franke, Karl-Marx-Stadt; Karine Hauffe, Goldbach; Frank Mehner, Döbeln; Günter Richter, Dingelstädt; Kirsten Liebmann, Karl-Marx-Stadt; Klaus Richter, Dingelstädt; Thomas Kuhl, Zepernick; Birgit Sieger, Eilenburg; Klaus-Peter Erler, Königs Wusterhausen; Kerstin Reisner, Cottbus; Dieter Stuhr, Güstrow; Elke Zießler, Erfurt; Rita Klingl, Schleusingerneundorf; Norbert Haak, Torgelow; Ulrich Pahner, Neuburg; Frank Mulsow, Parchim; Herbert Franke, Mittweida; Frank Höse, Malitschkendorf; Gabriele Schröter, Ilmenau; Steffi Müller, Döbeln; Angelika Richter, Neukirch; Egbert Eulitzer, Cottbus; Peter Ölke, Linstow; Renate Baus, Berlin; Kerstin Gehrisch, Cottbus; Bernd Kraußer, Zella-Mehlis; Thomas Guse, Mühlhausen; Andreas Weinreich, Demmin; Andreas Renz, Hoyerswerda; Uta Stopp, Dresden; Jens Erb, Glauchau-Gesau; Petra Westphal, Berlin; Borwin Wegener, Berlin; Heide-Rose Bartel, Rostock; Klaus Brinckmann, Güstrow; Heike Werner, Waldheim; Matthias Angrick, Mühlhausen; André Otto; Berlin; Karin Poser, Kleinmachnow; Klaus Conrad, Dresden; Ralf Kalesky, Potsdam; Monika Brandt, Dessau; Klaus-Dieter Eickhoff, Berlin; Wolfgang Baier, Pfaffendorf; Dietlinde Pargelow, Teterow; Wolfram Werner, Dresden; Cornelia Drechsler, Karl-Marx-Stadt; Uta Hegemann, Greifswald; Petra Weißbecker, Gehren; Hans-Günter Reglin, Berlin; Andreas Ohm, Ahlbeck; Mariana Kloper, Borsdorf; Bärbel Schröder, Teterow; Holger Vogel, Ziegenhain; Udo Funk, Gnoien; Karin Neumann, Reichenbach; Birgit Graizarek, Erfurt; Lutz Bohmhammel, Zehdenick; Manuela Schütte, Böhrigen; Jörg Hasemann, Uebingen; Roland Kaschner, Lauchhammer-Mitte; Ralf Wegel, Dresden; Wolfgang Peinelt, Burgstädt; Jürgen Kelber, Suhl; Silvia Glatzel, Riesa; Joachim Ernst, Döbeln; Stephan Kaiser, Niederschmalkalden; Andreas Bergmann, Karl-Marx-Stadt; Rolf Corand, Teterow; Anke Jahn, Eilenburg; Heike Kwauka, Dresden; Volkmar Schulz, Greiz-Pohlitz; Udo Töpfer, Reuden; Steffen Salomon, Ringethal; Dieter Herrmann, Prisannewitz; Wolfgang Henkel, Erfurt; Annelie Gilberg, Teterow; Karin Bomberg, Mühlhausen; Martina Kurtschick, Kleinopitz; Heidemarie Hendzlik, Wilh.-Pieck-Stadt Guben; Bettina Göbel, Schmalkalden; Angela Weigert, Kirchberg; Friedbert Röde, Wingerode; Ulf Meißner, Herzberg; Frank Engelmann, Ellrich; Uwe Bormann, Magdeburg; Jörg Bork, Strausberg; Bernd Wernder, Dorfchemnitz; Jens Burghardt, Frankfurt; Monika Kurch, Cottbus; Eberhardt Ohm, Ahlbeck; Gudrun Drews, Wöbbelin; Gesine Lamm, Ilsenburg; Susanne Osterwald, Halle; Uwe Schoen, Reichenbach; Siegfried Weiß, Neusalza-Spremberg; Heidi Günther, Sohland; Eva-Maria Lüderitz, Gräfendorf; Hans-Jürgen Weißbecker, Gehren; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Birgit Holze, Ascherode; Klaus Schlegel, Dresden; Sigrun Below, Seelow; Carola Zimmermann, Döbeln; Ingo Melzer, Oberlungwitz; Ulrike König, Lübbenau; Detlef Fuchs, Neukloster; Cornelia Güntzel, Cottbus; Gunter Klemm, Karl-Marx-Stadt; Peter Hahn, Nauendorf.

In freien Stunden alpha heiter



Scholastizismus

„Ein Nest“, sagte die Waldohreule, die im Ruf großer Gelehrsamkeit steht, „ist ein halbkugelförmiges Gebilde, dessen Radius mit r, dessen Umfang mit $2\pi r$ und dessen Oberfläche mit $4\pi r^2:2$ ausgedrückt wird. Die Dimensionen sind verschieden und entsprechen den Körperformen der jeweiligen Nestbenutzer beziehungsweise deren Eiern.“

Keiner widersprach; denn es war klar ausgedrückt, mathematisch definiert und demnach unantastbar.

Aber der Webervogel kümmerte sich nicht darum. Er sammelte Grashalme, baute und flocht ein großartiges, birnenförmiges Kunstwerk mit windgeschütztem Eingang, Vorzimmer, Brutnische und Kinderzimmer.

„Mein Nest!“ sagte er dann mit berechtigtem Stolz.

„Alles andere als das“, widersprach die Waldohreule und verwies auf mehrere Lehrbücher und auf die von ihr selbst aufgestellten Grundsätze des Nestbaues.

Es war wirklich alles andere als ein Nest nach klassischer Definition; aber es war ungemein praktisch.

aus: Kurt Kauter „Also sprach der Marabu“, Eulenspiegelverlag

Trugschluß

Unser Leser, *Stefan Böhm*, Eisenach, teilte uns den folgenden Trugschluß mit, den er in einem alten Mathematik-Lehrbuch gefunden hatte. Gleichzeitig bat er uns, den Fehler in diesem Trugschluß nachzuweisen.

Jemand schließt wie folgt:

Für alle natürlichen Zahlen n gilt bekanntlich

$$(n+1)^2=n^2+2n+1. \text{ Daraus folgt} \qquad (1)$$

$$(n+1)^2-(2n+1)=n^2, \qquad (2)$$

$$(n+1)^2-(2n+1)-n(2n+1)=n^2-n(2n+1), \qquad (3)$$

$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2=$$

$$=n^2-n(2n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2, \qquad (4)$$

$$\left[n+1-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2=\left[n-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2. \qquad (5)$$

Aus (5) folgt weiter, wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel zieht,

$$n+1-\frac{1}{2}(2n+1)=n-\frac{1}{2}(2n+1), \qquad (6)$$

also

$$n+1=n, \qquad (7)$$

d. h., jede natürliche Zahl ist gleich ihrem Nachfolger.

Wo steckt der Fehler?

1974=M C M L X X I V

M+C $\quad$ =M L X+X · I V

M−C M−L−X=X · I V

M C−M L $\quad$ =X+X · I V

Ing. H. Decker, Köln

Silbenrätsel

al – bel – bra – der – dif – e – ex – fe – fer – ge – in ka – läu – mul – nent – ok – on – pa – pli – po – ra renz – ta ter – ti – ti – vall – yard.

1. Körper
2. Teil des Rechenstabes
3. Längeneinheit
4. Rechenoperation
5. Bezeichnung für den Graph einer quadratischen Funktion
6. Bereich
7. mathematische Disziplin
8. Unterschied zweier Zahlen
9. Begriff aus der Potenzrechnung

Der erste Buchstabe eines jeden Wortes (von oben nach unten gelesen) ergibt eine Form des Wettkampfes. Diese Form hat sich auch in der Mathematik durchgesetzt.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch Meuselwitz

Füllrätsel

In jedes der 49 Felder des nebenstehenden Schemas ist eine der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß in jeder Zeile siebenstellige Zahlen entstehen, die die folgenden Eigenschaften haben:

a) Eine Potenz von 2, deren Quersumme gleich 26 ist.
b) Eine Potenz von 9, deren Quersumme gleich 45 ist.
c) Eine Potenz von 2, deren Quersumme gleich 41 ist.

a						
b						
c						
d						
e						
f						
g						

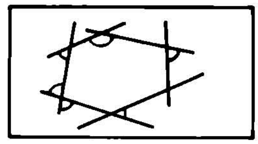
d) Eine siebenstellige Zahl, die aus lauter gleichen Grundziffern besteht.
e) Ein Teiler der Zahl 3 593 970, dessen Quersumme gleich 45 ist.
f) Ein Vielfaches der Zahl 893 615, dessen Quersumme gleich 27 ist.
g) Eine siebenstellige Zahl, bei der jede Grundziffer um 1 größer als die folgende ist und die die Quersumme 42 hat. Ferner sollen die Summe der Zahlen der ersten Spalte, die Summe der Zahlen der letzten Spalte, die Summe der Zahlen der einen Diagonale und die Summe der Zahlen der anderen Diagonale sämtlich gleich 40 sein.

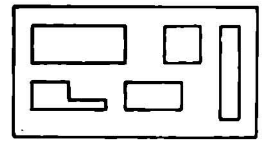
Elfriede Krawietz, EOS „Georgius Agricola“, Glauchau, 12. Klasse

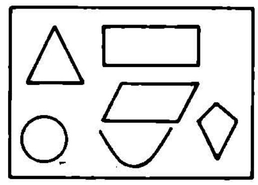
Fremdkörper

In den folgenden Bildern ist jeweils eine Menge von Objekten mit einer gemeinsamen Eigenschaft dargestellt, wobei in jede Menge ein Fremdkörper geraten ist, der eigentlich nicht dort hinein gehört. Suche diesen Fremdkörper, und streiche ihn heraus!

A   5 7 13 25 31 41

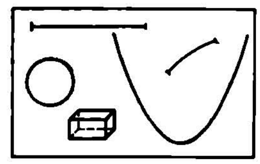
B


C


D


E   N 8 VOGEL

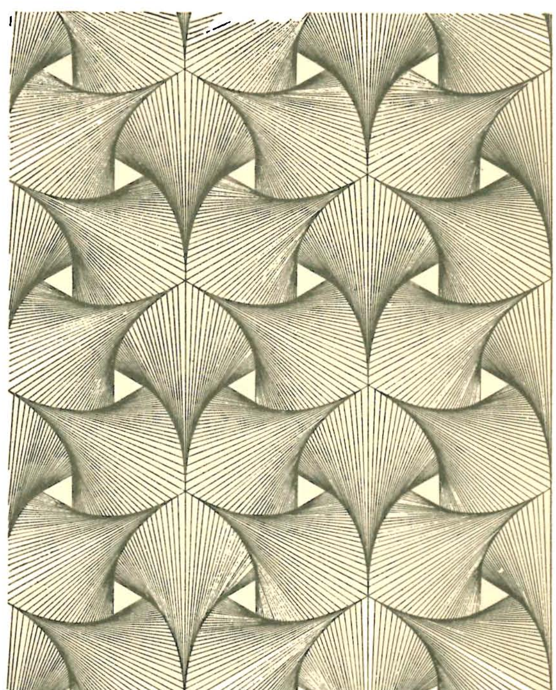
F   {17}; {a}; {-24; 27}; {0}; {m}; {-15}

G


Bezeichne die restlichen Elemente mit einem gemeinsamen Namen! Die Anfangsbuchstaben dieser Begriffe ergeben den Namen einer bestimmten Linie!

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Vom 12er- ins 10er-System



Mathematische Themen, gezeichnet von Rutherford Boyd

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

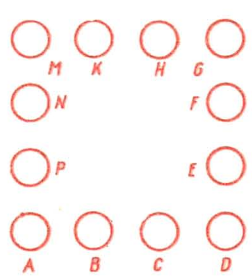
(21. 11. 1973)

Olympiadeklasse 5

1. Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.
Stelle fest, wieviel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

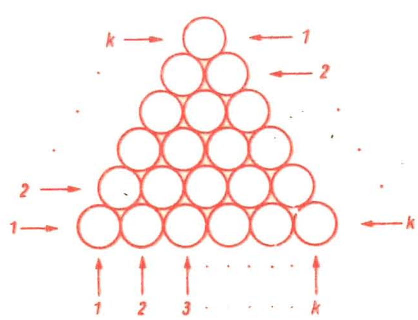
2. Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T, der auf keiner der beiden Geraden liegt! Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g'_1 und g'_2 der beiden Geraden!

3. In die 12 Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P der nebenstehenden Figur sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, daß die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.



a) Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!
b) Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!

4. Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservenbüchsen zu einer „Pyramide" aufgeschichtet worden. In jeder Schicht sind die Büchsen so „im Dreieck" angeordnet, wie die Abb. zeigt. Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden „Seitenkante des Dreiecks" beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.



Ermittle die Anzahl aller in der „Pyramide" enthaltenen Büchsen!

Olympiadeklasse 6

1. Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1:2 dar!

2. Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, daß der größte zuunterst, darauf der nächstgrößere usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

3. Klaus hat gehört, daß in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note „5" bekam. Ein Sechstel der Klasse schrieb eine „1", ein Drittel eine „2" und nur ein Neuntel eine „4". Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wußte Klaus nur, daß sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wieviel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine „3" geschrieben hatten.
Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist!
Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

4. Werner schreibt 50*0*05 an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen * eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, daß eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.
Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

Olympiadeklasse 7

1. Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:
(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.
(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.
(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.
(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt soviele Schüler wie in der Sektion Schach.
(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.
Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

2. Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c für die folgendes gilt:
$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
$(a, c) = 6$, $(b, c) = 14$.
Er behauptet nach einigem Probieren, daß es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.
Ist diese Behauptung richtig?
Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

3. Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:
Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des

gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von 90°, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

4. Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, in dem die Größe β des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.

Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so daß $\sphericalangle \overline{BPA} = 2\gamma$ gilt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

Olympiadeklasse 8

1. In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen * durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{\cdot} & \underline{b} & \underline{a} & \underline{c} \\ & * & * & * & b & & \\ & & & * & * & a & \\ & & & * & * & * & * \\ \hline & * & * & * & * & * & * \end{array}$$

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen * zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

2. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\varrho = 2{,}5$ cm und $\alpha = 50°$! Dabei sei ϱ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

3. Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:
Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

4. Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden. Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, daß g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, daß ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und daß dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.
Beweise, daß dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

Olympiadeklasse 9

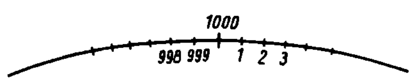
1. Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

2. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkte D.

Beweisen Sie, daß D die Seite BC im Verhältnis 1:2 teilt!

3. Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} > \overline{CD}$) soll folgende Eigenschaften haben:
Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen. Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt, und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

4. Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleichlange Teilbögen zerlegt und jeden der Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchstrichen werden. Dabei sind bei wiederholten „Umläufen“ auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist solange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchstrichen werden müßten, die bereits gestrichen sind.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.
(2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

2. Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab. In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie mit 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz. Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz wurden wie üblich Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen vergeben. Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen betrug dabei 3.
Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedaillen zu ermitteln!

3. Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ϱ.
Man berechne diesen Inkreisradius ϱ.

4. Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$; $q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q_i (i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ gilt.
a) Man beweise, daß die Folgen
$\{b_i\}$ mit $b_i = a_{i+1} - a_i$ und
$\{c_i\}$ mit $c_i = b_{i+1} - b_i$
ebenfalls geometrische Folgen sind.
b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, daß $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

2. Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen. Dabei mußte jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten. Schüler A meint, daß es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte. Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, daß es sogar acht solcher Schüler geben müsse.
Man überprüfe für jede dieser Meinungen, ob sie richtig ist.

3. In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.
Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

4. Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \text{ sind.} \qquad (2)$$

Lösungen

Hinweis für unsere Leser

Ab Heft 1/74 veröffentlichen wir vorrangig die Lösungen des *alpha*-Wettbewerbs (jeweils im übernächsten Heft nach Erscheinen der Aufgaben). Soweit dann noch Platz ist, bauen wir in die fünf Seiten noch weitere Lösungen zu gegebenen Aufgaben, gestellt außerhalb des Wettbewerbs, ein. Die Lösungen zu *alpha*-heiter werden (wie bisher) am Ende des jeweiligen Heftes veröffentlicht.

Red. *alpha*

▲5▲1095 Teller A enthalte 22, Teller B 14 und Teller C 12 Nüsse. Die folgende Tabelle veranschaulicht dann die einzelnen Schritte zur Umverteilung der Nüsse:

A	B	C	
22	14	12	Ausgangssituation
$22-14=8$	$14+14=28$	12	1. Schritt
8	$28-12=16$	$12+12=24$	2. Schritt
$8+\ 8=16$	16	$24-\ 8=16$	3. Schritt

▲5▲1096 Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl.
Unter vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen befinden sich genau zwei gerade und genau zwei ungerade Zahlen. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets gerade. Die Summe zweier gerader Zahlen ist ebenfalls stets gerade. Die kleinstmögliche Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lautet $0+1+2+3=6$, das heißt, sie ist größer als die kleinste Primzahl 2.

W 5■1097 1 ha $=10000\ \text{m}^2$ $=1000000\ \text{dm}^2$; da das Becken $1000000\ \text{l} = 1000000\ \text{dm}^3$ Wasser enthält, beträgt die Wasserhöhe im Becken genau $1\ \text{dm}=10$ cm. Denn $1000000\ \text{dm}^2 \cdot 1\ \text{dm}=1000000\ \text{dm}^3$. Bei einer Wasserhöhe von 10 cm kann kein Schwimmwettkampf ausgetragen werden.

W 5■1098 Die nachfolgende Tabelle gibt Auskunft darüber, wie das Getränk mit Hilfe der beiden Eimer umzufüllen ist:

Faß	Eimer	Eimer
16 l	11 l	6 l
16	0	0
10	0	6
10	6	0
4	6	6
4	11	1
15	0	1
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6

W 5*1099 Die Großmutter habe n Enkel; der Vorrat beträgt dann entweder $(2\cdot n+4)$ Würstchen oder $(3\cdot n-1)$ Würstchen. Die Gleichung $2\cdot n+4=3\cdot n-1$ wird nur für $n=5$ erfüllt. Die Großmutter hat somit 5 Enkel, und es sind $2\cdot 5+4=14$ Würstchen vorrätig.

W 5*1100 Der Arbeitsgemeinschaft gehören m Mädchen, also $3\cdot m$ Jungen an. An dem Tag, als Ursula fehlte, waren $(3\cdot m+1)$ Jungen und $(m-1)$ Mädchen anwesend, und es gilt $4\cdot(m-1)=3\cdot m+1$. Nur für $m=5$ wird diese Gleichung erfüllt.
An der Arbeitsgemeinschaft nehmen somit regelmäßig 5 Mädchen und 15 Jungen teil.

▲6▲1101 Die zu ermittelnde Zahl lautet $z=4\cdot 17\cdot 29+1=1973$.

▲6▲1102 Es seien a und b die Seitenlängen eines Rechtecks (gemessen in cm); entsprechend den gestellten Bedingungen gilt dann

$$2(a+b)=ab,$$
$$2a+2b=ab,$$
$$2a=ab-2b,$$
$$2a=b(a-2),\quad b=\frac{2a}{a-2}=2+\frac{4}{a-2}.$$

b ist nur dann ganzzahlig, wenn 4 ein Vielfaches von $a-2$ ist. Das trifft zu für $a_1=3$ oder $a_2=4$ oder $a_3=6$. Die Aufgabe besitzt genau drei Lösungen, nämlich

$a_1=3$ cm, $b_1=6$ cm;
$a_2=4$ cm, $b_2=4$ cm;
$a_3=6$ cm, $b_3=3$ cm.

W 6■1103 Das Pferd möge x Säcke tragen. Dann trägt das Maultier $(x+2)$ Säcke. Denn würde es einen Sack abgeben, so hätte es noch $(x+1)$ Säcke und das Pferd auch $(x+1)$ Säcke zu tragen. Nimmt aber das Maultier dem Pferd einen Sack ab, so hat das Maultier $(x+3)$ Säcke, das Pferd $(x-1)$ Säcke zu tragen. Nun gilt aber

$$x+3=2\cdot(x-1),$$
$$x+3=2x-2,$$
$$x=5.$$

Das Pferd trug 5 Säcke, das Maultier 7 Säcke.

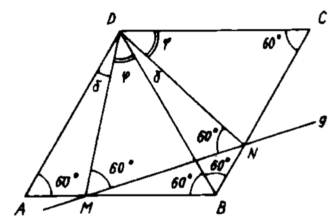
W 6■1104 Es seien $a=5$ cm und $b=2$ cm und c die Längen der Seiten eines Dreiecks; dann gilt

$$a+b>c \text{ und } b+c>a.$$

Aus $5\text{ cm}+2\text{ cm}=7\text{ cm}>c$ und $2\text{ cm}+c>5$ cm, also $c>3$ cm, folgt $c=4$ cm oder $c=5$ cm oder $c=6$ cm.

W 6*1105 Die Zahl 10^{1973} ist eine natürliche Zahl mit 1974 Grundziffern, deren erste Grundziffer von links gerechnet 1 ist und deren übrige Grundziffern sämtlich 0 sind.
Die Zahl $10^{1973}+2$ läßt sich demnach wie folgt schreiben: 1000...0002, wobei die Grundziffer 0 genau 1972 mal vorkommt. Die Quersumme dieser Zahl beträgt 3, d. h. sie ist durch 3 teilbar.

W 6*1106 Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich:
$\triangle AMD \cong \triangle BND$ ($\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{AM}=\overline{BN}$, $\sphericalangle DAM=\sphericalangle DBN=60°$), also $\overline{MD}=\overline{ND}$, $\sphericalangle ADM=\sphericalangle BDN=\delta$.
$\triangle MBD \cong \triangle NCD$ ($\overline{MB}=\overline{NC}$, $\overline{BD}=\overline{CD}$, $\sphericalangle MBD=\sphericalangle NCD=60°$), also $\sphericalangle BDM$ $=\sphericalangle CDN=\varphi$.



Nun gilt aber $\sphericalangle ADC=2\cdot\delta+2\cdot\varphi=120°$, also $\delta+\varphi=60°$, d. h. $\sphericalangle MDN=60°$.
Wegen $\overline{MD}=\overline{ND}$ gilt $\sphericalangle DMN=\sphericalangle DNM$ $=(180°-60°):2=60°$. Dreieck MND ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig, und es gilt $\overline{MN}=\overline{MD}=\overline{ND}$.

▲7▲1107 Es seien x kg Süßwasser mit 80 kg 5‰igem Meerwasser zu mischen, dann gilt

$$(x+80)\cdot\frac{2}{100}=80\cdot\frac{5}{100}$$
$$(x+80)\cdot 2=80\cdot 5,$$
$$2x+160=400,$$
$$2x=240,$$
$$x=120.$$

Es sind 120 kg Süßwasser dem Meerwasser hinzuzufügen, um eine Mischung mit einem Salzgehalt von 2‰ zu erhalten.

▲7▲1108 Es sei x die Eigengeschwindigkeit des Schiffes (in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) und y die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses (in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$). Fährt das Schiff flußabwärts, so addieren sich die Geschwindigkeiten; im anderen Falle ist die tatsächliche Geschwindigkeit gleich der Differenz aus x und y.

Deshalb gilt wegen $v=\frac{s}{t}$

$$x+y=\frac{s}{48} \text{ und } x-y=\frac{s}{72}.$$

Subtrahieren wir die zweite von der ersten

Gleichung, so erhalten wir $2y=\frac{s}{48}-\frac{s}{72}$ $=\frac{3s-2s}{144}=\frac{s}{144}$, also $y=\frac{s}{288}$.
Ein Floß würde also in 288 Stunden von Kiew nach Dnepropetrowsk treiben, d. h. es benötigt sechsmal soviel Zeit wie das Schiff.

W 7 ■ 1109 Es seien x Münzen zu 3 Kopeken; dann sind es $(20-x)$ Münzen zu 1 Kopeke, und es gilt

$$3x+(20-x)\cdot 1=47,$$
$$3x+20-x=47,$$
$$2x+20=47,$$
$$2x=27$$
$$x=\frac{27}{2}.$$

Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die Division 27:2 nicht ausführbar; der Schüler hat sich verzählt.
Diese Feststellung trifft auch für den Betrag von 49 Kopeken (29:2), nicht aber für den Betrag von 48 Kopeken (28:2 = 14) zu. Im letzten Falle besitzt der Schüler 14 Münzen zu 3 Kopeken und 6 Münzen zu 1 Kopeke.
Der Gesamtbetrag sei gleich $2n$ Kopeken, wobei n eine natürliche Zahl ist; dann gilt

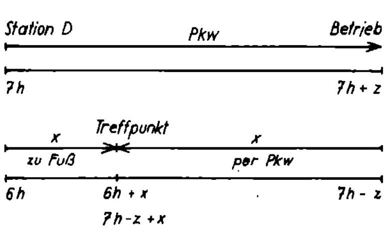
$$3x+(20-x)\cdot 1=2n,$$
$$2x=2n-20,$$
$$x=n-10.$$

Diese Gleichung ist lösbar für alle $n\geqq 10$, also $2n\geqq 20$. Aus $20\cdot 3$ Kopeken $=60$ Kopeken folgt weiter $2n\leqq 60$.
Es lassen sich nur Geldbeträge bilden, die geradzahlig sind und gleich oder größer als 20 Kopeken, aber gleich oder kleiner als 60 Kopeken sind.

W 7 ■ 1110 Der Preis für 1 kg Äpfel möge im Juli x Mark betragen; dann beträgt er im September $\left(x-\frac{1}{5}x\right)=\frac{4}{5}x$ Mark. Im November beträgt der Preis $\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{24}{25}\cdot x$ Mark. Da $\frac{24}{25}x<x$, sind die Äpfel im November billiger als im Juli.
Aus $x-\frac{24}{25}x=\frac{1}{25}x=\frac{4}{100}x$ folgt, daß der Preis für die Äpfel im November um 4% niedriger ist als im Juli.

W 7*1111 Angenommen, der Kraftwagen benötige z Stunden für die Fahrt von D. bis in den Betrieb und der Direktor sei von D. aus x Stunden zu Fuß gegangen, bis er auf den ihm entgegenkommenden Kraftwagen traf, dann gilt, wie aus der Skizze hervorgeht, folgendes:

$$6\text{h}+x=7\text{h}-z+x, \text{ also } z=1\text{h}.$$



Andererseits gilt aber auch

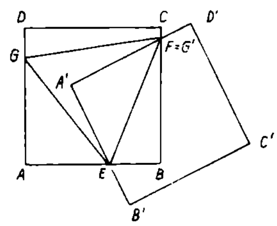
$$6\text{h}+x+x=7\text{h}+z-\frac{12}{60}\text{ h}.$$

Für $z=1$h erhalten wir daraus

$$6\text{h}+2x=8\text{h}-\frac{12}{60}\text{h},$$
$$2x=2\text{h}-\frac{12}{60}\text{h},$$
$$x=\frac{54}{60}\text{h}.$$

Der Direktor begegnete dem Kraftwagen um 6.54 Uhr.
Probe: Von 7.00 Uhr bis 8.00 Uhr sind 60 Minuten vergangen. Von 6.00 Uhr bis 7.48 Uhr (12 Minuten vor 8.00 Uhr) sind 108 Minuten, also $2\cdot 54$ Minuten vergangen.

W 7*1112 Angenommen der innere Punkt G von $\overline{AD}$ sei ein weiterer Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks EFG. Drehen wir $\overline{EG}$ um E als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinn um 60°, so fällt der Bildpunkt G' von G mit dem Eckpunkt F des Dreiecks zusammen. Der Punkt F liegt nun aber entweder auf $\overline{BC}$ oder auf $\overline{CD}$.



Wir drehen deshalb das Quadrat $ABCD$ um E als Drehpunkt im mathematisch negativen Sinn um 60°. Da G' auf dem Bild $\overline{A'D'}$ von $\overline{AD}$ liegt, ist der Schnittpunkt von $\overline{A'D'}$ mit $\overline{BC}$ oder mit $\overline{CD}$ der gesuchte Eckpunkt F des zu konstruierenden gleichseitigen Dreiecks EFG. Aus der Seite $\overline{EF}$ ist die Konstruktion nun möglich.

▲8▲1113 Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, und es sei n die Anzahl der Elemente von M. Da die Zahl 0 durch 7 (und auch durch 11) teilbar ist, gehört sie nicht der Menge M an.
Ferner sei M_5 die Menge aller natürlichen Zahlen a mit $0<a\leqq 1973$, die durch 5 teilbar sind. Wegen $\frac{1973}{5}=394\frac{3}{5}$ enthält die Menge M_5 genau 394 Elemente:
$M_5=\{1\cdot 5, 2\cdot 5, 3\cdot 5, \ldots, 394\cdot 5\}$.
Von den Zahlen der Menge M_5 sind wegen $\frac{394}{7}=56\frac{2}{7}$ genau 56 Zahlen durch 7 teilbar, wegen $\frac{394}{11}=35\frac{9}{11}$ genau 35 Zahlen durch 11 teilbar, wegen $\frac{394}{77}=5\frac{9}{77}$ genau 5 Zahlen durch 7 und 11 teilbar. Also sind von den Zahlen der Menge M_5 genau $56+35-5=86$ Zahlen durch 7 oder durch 11 teilbar.
Nun besteht die Menge M, deren Anzahl der Elemente wir ermitteln wollen, aus allen Zahlen von M_5, die nicht durch 7 oder 11 teilbar sind. Die gesuchte Anzahl der Elemente von M ist daher gleich $n=394-86=308$.

▲8▲1114 Es sei x eine dreistellige Zahl, die die geforderten Eigenschaften hat. Dann gilt

$$x^2=1000a+x,$$

wobei a eine dreistellige natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$x^2-x=1000a,$$
$$x(x-1)=8\cdot 125\cdot a.$$

Daher ist entweder x oder $x-1$ ein Vielfaches von 125; denn wenn x durch 5 teilbar ist, kann nicht $x-1$ durch 5 teilbar sein, daher ist x durch 125 teilbar. Entsprechendes gilt, wenn $x-1$ durch 5 teilbar ist.
Nun sei x ein Vielfaches von 125. Dann ist wegen $x<8\cdot 125=1000$ $x-1$ gerade, also x ungerade. Da x eine dreistellige Zahl ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

$$x=125, 375, 625, 875; \text{ also}$$
$$x-1=124, 374, 624, 874.$$

Von den Zahlen der zweiten Zeile ist aber nur 624 durch 8 teilbar; wir erhalten daher die erste Lösung: $x=625$.
Diese Zahl hat die geforderten Eigenschaften; denn es gilt

$$x^2=625^2=390625.$$

Es sei $x-1$ ein Vielfaches von 125. Dann ist x ein Vielfaches von 8, und wir erhalten die Möglichkeiten:

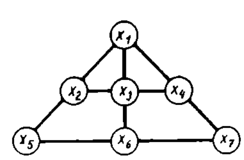
$$x-1=125, 375, 625, 875; \text{ also}$$
$$x=126, 376, 626, 876.$$

Von diesen Zahlen ist aber nur 376 durch 8 teilbar; wir erhalten die zweite Lösung: $x=376$.
Diese Zahl hat die geforderten Eigenschaften; denn es gilt

$$x^2=376^2=141376.$$

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft; es gibt also nur zwei Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, nämlich $x=625$ und $x=376$.

W 8 ■ 1115 Wir bezeichnen die einzutragenden Zahlen wie in der Abbildung 1 mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. Dann gilt $x_1+x_2+x_3$ $+x_4+x_5+x_6+x_7=1+2+3+4+5+6+7$ $=28$. (1)



Ferner gilt
$x_1+x_2+x_5=x_1+x_3+x_6=x_1+x_4+x_7$
$=x_2+x_3+x_4=x_5+x_6+x_7=s,$ (2)
da nach Voraussetzung alle diese Summen gleich sind.
Aus (1) und (2) folgt
$x_1+(x_2+x_3+x_4)+(x_5+x_6+x_7)=28,$
$x_1+2s=28;$ (3)
$3s=(x_1+x_2+x_5)+(x_1+x_3+x_6)$
$+(x_1+x_4+x_7),$
$3s=28+2x_1.$ (4)

Aus (3) folgt

$$4s=56-2x_1. \quad (5)$$

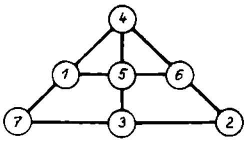
Aus (4) und (5) folgt durch Addition

$$7s=84, \text{ also } s=12.$$

Ferner folgt aus (3)

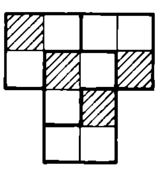
$$x_1=28-2s=28-24=4.$$

Nun können wir für x_2 eine der Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 7 wählen, z. B. $x_2=1$. Dann wird $x_5=7$. Ferner können wir x_3 so wählen, daß $x_3+x_4=11$ ist, z. B. $x_3=5$, $x_4=6$. Dann wird $x_6=3$, $x_7=2$, und es sind alle Gleichungen (2) erfüllt. Damit haben wir eine Lösung gefunden (siehe Abb. 2).



Weitere Lösungen erhalten wir, indem wir für x_2 eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 7 wählen und dann x_3 und x_4 so bestimmen, daß die Gleichung $x_2+x_3+x_4=12$ erfüllt ist.

W 8 ■ 1116 Die Abbildung zeigt die Lösung. Jede der kongruenten Teilfiguren besteht aus drei Quadraten, von denen genau ein Quadrat schraffiert ist.



Wir erhalten diese Lösung leicht durch die folgende Überlegung. Da die Figur 12 Quadrate enthält, enthält jede der vier kongruenten Teilfiguren genau drei Quadrate, von denen genau ein Quadrat schraffiert ist.
Man erhält daher zunächst die Teilfigur oben links, dann die Teilfigur oben rechts, dann die untere Teilfigur und schließlich die zwischen diesen drei Teilfiguren liegende mittlere Teilfigur.

W 8*1117 Wenn mit jedem Lastkraftwagen nicht mehr als 7 Steine befördert würden, so könnten insgesamt höchstens $7\cdot 7=49$ Steine befördert werden. Da aber 50 Steine zu transportieren sind, müssen mit einem der Lastkraftwagen mindestens 8 Steine befördert werden.
Nun haben aber die 8 leichtesten Steine die Massen 370 kg, 372 kg, 374 kg, 376 kg, 378 kg, 380 kg, 382 kg, 384 kg, insgesamt also die Masse 3016 kg, das sind aber mehr als 3000 kg, also mehr als 3 t. Daher kann keiner der Lastkraftwagen mit mehr als 7 Steinen beladen werden.
Aus diesem Grunde ist es nicht möglich, die 50 Steine mit sieben Dreitonnern zu befördern.

W 8*1118 Zunächst erhält jeder der Seeräuber 3 Piaster und 3 Dublonen. Dann hat jeder Seeräuber zu erklären, dem wievielten Teil des Fasses Wein nach seiner Ansicht 1 Piaster entspricht. Derjenige, der den größten Teil nennt (es sei der Anteil a), erhält den letzten Piaster, während jeder der beiden anderen den Anteil a an Wein erhält. Dabei gilt nach Voraussetzung $a<\frac{1}{4}$, also $2a<\frac{1}{2}$.
Nun erklärt jeder Seeräuber, dem wievielten Teil des Fasses Wein nach seiner Ansicht 1 Dublone entspricht. Derjenige, der den größten Teil nennt (es sei der Anteil b), erhält die letzte Dublone, während jeder der beiden anderen den Anteil b an Wein erhält. Dabei gilt wieder $b<\frac{1}{4}$, also $2b<\frac{1}{2}$.
Wegen $2a+2b<1$ bleibt noch ein Rest an Wein übrig, der zu gleichen Teilen an die drei Seeräuber verteilt wird.
Damit wurde die Beute so geteilt, daß jeder einen Anteil erhält, der nach seiner Ansicht keinen geringeren Wert hat als der Anteil der beiden anderen. Denn jeder erhält 3 Piaster, 3 Dublonen und den gleichen Anteil an dem restlichen Wein. Ferner erhält einer der Seeräuber 1 Piaster und jeder der beiden anderen den Anteil a an Wein. Nach Ansicht des ersten hat 1 Piaster denselben Wert wie der Anteil a an Wein, und nach Ansicht der beiden anderen hat der Anteil a an Wein keinen geringeren Wert als 1 Piaster. Entsprechendes gilt für den Wert von 1 Dublone und von dem Anteil b an Wein.

▲9▲1119 Um den Term
$t=(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3$
in Faktoren zu zerlegen, setzen wir $a^2+b^2=x$ und $c^2-a^2=y$. Dann gilt
$b^2+c^2=(a^2+b^2)+(c^2-a^2)=x+y$,
also $t=x^3+y^3-(x+y)^3$.
Wegen $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
und $(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2$
$=(x+y)(x^2+2xy+y^2)$
folgt $t=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$-(x+y)(x^2+2xy+y^2)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2-x^2-2xy-y^2)$
$=(x+y)\,3xy$.
Durch Einsetzen der Terme für x, y, $x+y$ erhalten wir
$t=-3(a^2+b^2)(c^2-a^2)(b^2+c^2)$, womit die Faktorenzerlegung durchgeführt wurde.

▲9▲1120 Es sei $z=10a+b$ eine zweistellige natürliche Zahl, wobei a und b natürliche Zahlen mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ sind. Dann gilt
$z^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$
$=20a(5a+b)+b^2$.
Nach Voraussetzung soll z^2 eine ungerade Anzahl von Zehnern enthalten. Da aber die Zahl $20a(5a+b)$ durch 20 teilbar ist, also eine gerade Anzahl von Zehnern enthält, muß b^2 eine ungerade Anzahl von Zehnern enthalten.
Nun kann aber wegen $0\leqq b\leqq 9$ die Zahl b^2 nur gleich

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 \text{ oder } 81 \text{ sein.}$$

Von diesen Zahlen haben nur die Zahlen 16 und 36 eine ungerade Anzahl von Zehnern, und beide Zahlen enden auf 6. Daher endet auch die Zahl z^2 in jedem Falle auf die Grundziffer 6.

W 9 ■ 1121 Da die Brigaden von Wolodja und Wasja nur 2 m bzw. 1 m lange Holzstämme in $\frac{1}{2}$ m lange Stämme zu zersägen hatten, können sie nur eine gerade Anzahl von Stämmen fertiggestellt haben. Also kann nur die Brigade von Petja (mit Kostja) eine ungerade Anzahl von Stämmen fertiggestellt haben. Da aber nur der Brigadier Galkin mit Komkow eine ungerade Anzahl von $\frac{1}{2}$-m-Stämmen fertiggestellt hat (nämlich 27), lautet der Vorname von Galkin Petja. Daher lautet der Vorname von Komkow *Kostja*.

W 9 ■ 1122 Es seien a und b mit $a>b$ die Längen zweier anliegender Seiten des Rechtecks und damit auch die Längen der Seiten der beiden gleichseitigen Dreiecke. Da der Flächeninhalt des Rechtecks gleich ab ist und der Flächeninhalt der beiden Dreiecke gleich $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ bzw. $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$, folgt

$$ab=2\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3}-\frac{b^2}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}(a^2-b^2). \quad (1)$$

Da der Umfang des Rechtecks gleich $2(a+b)$ und der Umfang des größeren gleichseitigen Dreiecks gleich $3a$ ist, erhalten wir das gesuchte Verhältnis.

$$q=\frac{2(a+b)}{3a}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{b}{a}\right). \quad (2)$$

Um q zu ermitteln, müssen wir also zunächst $x=\frac{b}{a}$ bestimmen.
Nun folgt aus (1)

$$\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ also } \frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Wegen $x=\frac{b}{a}\neq 0$ erhalten wir daher

$$\frac{1}{x}-x=\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$x^2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot x-1=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}+1}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Wegen (2) folgt daher

$$q=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{2}{9}\left(3+\sqrt{3}\right).$$

Das gesuchte Verhältnis der Umfänge beträgt daher

$$q=\frac{2}{9}(3+\sqrt{3})\approx 1{,}052,$$

d. h., der Umfang des Rechtecks ist nur wenig größer als der Umfang des größeren der beiden gleichseitigen Dreiecke.

W 9*1123 Es sei p eine Primzahl, die größer als 3 ist. Dann läßt sich p stets in der Form

$6m+1$ oder $6m-1$ darstellen, wobei m eine natürliche Zahl ist. Wäre nämlich p gleich $6m$, $6m+2$, $6m+3$ oder $6m+4$, so wäre p wegen $p>3$ nicht Primzahl, da alle diese Zahlen durch 2 oder durch 3 teilbar sind.
Es sei nun $p=6m+1$. Dann gilt
$p^2=36m^2+12m+1$. Ist nun $m=2k$
eine gerade Zahl, so erhält man
$p^2=36\cdot 4k^2+12\cdot 2k+1=24(6k^2+k)+1$.
Ist aber $m=2k+1$ eine ungerade Zahl,
so erhält man

$$\begin{aligned}p^2&=36(2k+1)^2+12(2k+1)+1\\&=36(4k^2+4k+1)+24k+12+1\\&=24(6k^2+7k+2)+1.\end{aligned}$$

In beiden Fällen läßt also p^2 bei der Division durch 24 den Rest 1.
Es sei $p=6m-1$.
Dann gilt analog wie oben
für $m=2k$ $p^2=24(6k^2-k)+1$;
für $m=2k+1$ $p^2=24(6k^2+5k+1)+1$,
d. h., auch in diesen beiden Fällen läßt p^2 bei der Division durch 24 den Rest 1.
Die in der Aufgabe formulierte Behauptung ist also für alle Primzahlen, die größer als 3 sind, richtig.

W 9*1124 Die Anzahl der Zuschauer, die mit Autobussen abgefahren sind, sei gleich x. Dann gilt $x>150$. Ferner ist x durch 6 teilbar, weil sich in jedem der 6 Autobusse gleichviel Personen befanden. Aber auch 15% von x, d. s. $0{,}15x=\frac{3}{20}x$, ist eine ganze Zahl, da genau 15% mehr Personen als x zu Fuß gingen. x ist also nicht nur durch 6, sondern auch durch 20 teilbar, daher ist x durch 60 teilbar.
Nun gilt nach Voraussetzung einerseits $x>150$ und andererseits, da die Gesamtzahl der Zuschauer $x+1{,}15x=2{,}15x$ betrug und nicht größer als 400 war,

$$2{,}15x\leqq 400,$$
$$x\leqq\frac{400}{2{,}15}=186\frac{10}{215}.$$

Aus $150<x\leqq 186$ folgt nun, weil x durch 60 teilbar ist, $x=180$. Daraus folgt weiter $2{,}15x=2{,}15\cdot 180=387$. Es waren also genau 387 Zuschauer in dem Kino.
Wir überzeugen uns noch davon, daß damit alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: 180 Zuschauer, das sind mehr als 150, fuhren mit 6 Autobussen nach Hause (30 in jedem Autobus);
$180\cdot 1{,}15=207$ Zuschauer gingen zu Fuß; insgesamt waren also $180+207=387$ Zuschauer in dem Kino, d. s. nicht mehr als 400.

▲10/12▲1125 Wir bezeichnen die zu berechnende Zahl mit x und erhalten

$$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{a}},\qquad(1)$$

wobei $a=2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Nun gilt

$$\sqrt{2+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{a}}=\sqrt{4-a}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\qquad(2)$$

Ferner gilt

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\text{ und}\qquad(3)$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.\qquad(4)$$

Aus (1), (2), (3), (4) folgt $x=1$, und x ist eine rationale Zahl.

▲10/12▲1126 Wegen $x>y$ sind die Ungleichungen

$$\frac{x^4-y^4}{4y^3}>x-y>\frac{x^4-y^4}{4x^3}\qquad(1)$$

genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{x^4-y^4}{4y^3(x-y)}>1>\frac{x^4-y^4}{4x^3(x-y)}.\qquad(2)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}&=\frac{x^4-y^4}{4y^3(x-y)}=\frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{4y^3(x-y)}\\&=\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{4y^3}=\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{4y^3}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1\right)>\frac{1}{4}(1+1+1+1)=1;\qquad(3)$$

denn aus $x>y>0$ folgt $\frac{x}{y}>1$, $\frac{x^2}{y^2}>1$ und $\frac{x^3}{y^3}>1$. Entsprechend gilt

$$\frac{x^4-y^4}{4x^3(x-y)}=\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{4x^3}$$

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}\right)<\frac{1}{4}(1+1+1+1)=1;\qquad(4)$$

denn aus $x>y>0$ folgt $\frac{y}{x}<1$, $\frac{y^2}{x^2}<1$ und $\frac{y^3}{x^3}<1$.
Aus (3) und (4) folgen die Ungleichungen (2), womit gleichzeitig die Ungleichungen (1) bewiesen sind.

W 10/12 ▪ 1127 Wir untersuchen die folgenden Fälle:
1. Fall: $x\geqq 3$.
Dann gilt $|2x-3|=2x-3$,
$|x-3|=x-3$, $|4x-1|=4x-1$,
also

$$\begin{aligned}2x-3+x-3-4x+1&=0,\\-x-5&=0,\\x&=-5,\end{aligned}$$

d. h., in diesem Fall hat die Gleichung wegen $x\geqq 3$ keine Lösung.
2. Fall: $\frac{3}{2}\leqq x<3$.
Dann gilt $|2x-3|=2x-3$,
$|x-3|=3-x$, $|4x-1|=4x-1$,
also

$$\begin{aligned}2x-3+3-x-4x+1&=0,\\-3x+1&=0,\\x&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

d. h., auch in diesem Fall hat die Gleichung wegen $x\geqq\frac{3}{2}$ keine Lösung.
3. Fall: $\frac{1}{4}\leqq x<\frac{3}{2}$.
Dann gilt $|2x-3|=3-2x$,
$|x-3|=3-x$, $|4x-1|=4x-1$,
also

$$\begin{aligned}3-2x+3-x-4x+1&=0,\\-7x+7&=0,\\x&=1.\end{aligned}$$

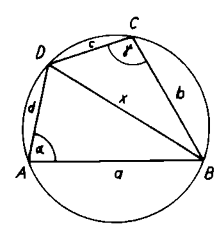
In diesem Falle hat also die Gleichung die Lösung $x=1$.
4. Fall: $x<\frac{1}{4}$.
Dann gilt $|2x-3|=3-2x$,
$|x-3|=3-x$, $|4x-1|=1-4x$,
also

$$\begin{aligned}3-2x+3-x-1+4x&=0,\\x+5&=0,\\x&=-5.\end{aligned}$$

In diesem Falle hat also die Gleichung die Lösung $x=-5$. Die gegebene Gleichung hat also genau zwei Lösungen, nämlich $x=1$ und $x=-5$.
Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß das tatsächlich Lösungen der Gleichung $|2x-3|+|x-3|-|4x-1|=0$ sind;
wir erhalten nämlich
für $x=1$: $|2-3|+|1-3|-|4-1|$
$=1+2-3=0$;
für $x=-5$: $|-10-3|+|-5-3|-|-20-1|$
$=13+8-21=0$.

W 10/12 ▪ 1128
Aus $log_{14}7=a$ folgt $14^a=7$, (1)
aus $log_{14}5=b$ folgt $14^b=5$, (2)
aus $log_{35}28=z$ folgt $35^z=28$. (3)
Aus (1) und (2) folgt weiter
$14^a\cdot 14^b=7\cdot 5$, also $14^{a+b}=35$. (4)
Aus (4) und (3) folgt wegen (1)
$14^{(a+b)z}=28=4\cdot 7=4\cdot 14^a$. (5)
Nun gilt wegen (1)
$2\cdot 14^a=14$, also $2=14^{1-a}$,
daher $4=(14^{1-a})^2=14^{2-2a}$ (6)
Aus (5) und (6) folgt
$14^{(a+b)z}=14^{2-2a}\cdot 14^a=14^{2-a}$,
also $(a+b)z=2-a$ und wegen $a+b\neq 0$
$z=\frac{2-a}{a+b}$.
Daher gilt $log_{35}28=\frac{2-a}{a+b}$.

W 10/12*1129 Wir bezeichnen die zu berechnende Länge der Diagonale $\overline{BD}$ mit x, ferner die Winkel $\sphericalangle DAB=\alpha$ und $\sphericalangle BCD=\gamma$ (vgl. die Abb.).



Dann gilt, weil $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, $\alpha+\gamma=180°$, also $\gamma=180°-\alpha$.
Nach dem Kosinussatz gilt in dem Dreieck ABD

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha\qquad(1)$$

und in dem Dreieck CDB

$$\begin{aligned}x^2&=b^2+c^2-2bc\cos\gamma\\&=b^2+c^2-2bc\cos(180°-\alpha),\\x^2&=b^2+c^2+2bc\cos\alpha.\end{aligned}\qquad(2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun

$$\begin{aligned}a^2+d^2-2ad\cos\alpha&=b^2+c^2+2bc\cos\alpha,\\2(ad+bc)\cos\alpha&=a^2+d^2-b^2-c^2,\\\cos\alpha&=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\end{aligned}\qquad(3)$$

Aus (1) und (3) folgt weiter

$$x^2=a^2+d^2-2ad\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)},$$

$$x^2=\frac{(a^2+d^2)(ad+bc)-(a^2+d^2)ad}{ad+bc}$$

$$+\frac{(b^2+c^2)ad}{ad+bc}$$

$$x^2=\frac{(a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad)ad}{ad+bc},$$

$$x=\sqrt{\frac{(a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad}{ad+bc}}$$

W 10/12*1130 Um zu beweisen, daß $z=(10^{1973}+10^{1972}+\ldots+10+1)(10^{1974}+5)+1$ gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist, setzen wir $x=1+10+10^2+\ldots+10^{1972}+10^{1973}$.

Dann gilt

$10x=10+10^2+\ldots+10^{1972}+10^{1973}+10^{1974}$, also $9x=10^{1974}-1$, d. h.

$$x=\frac{10^{1974}-1}{9}.$$ Daraus folgt

$$z=\frac{10^{1974}-1}{9}(10^{1974}+5)+1,$$

$$z=\frac{1}{9}[(10^{1974})^2+5\cdot 10^{1974}-10^{1974}-5+9],$$

$$z=\frac{1}{9}[(10^{1974})^2+4\cdot 10^{1974}+4]$$

$$=\left(\frac{10^{1974}+2}{3}\right)^2.$$

$10^{1974}+2$ ist durch 3 teilbar, weil die Quersumme 3 beträgt. Daher ist $\frac{10^{1974}+2}{3}$ eine natürliche Zahl, und z ist gleich dem Quadrat dieser natürlichen Zahl, w. z. b. w.

Lösungen zu alpha-heiter

Trugschluß

Bis zur Gleichung (5) sind alle Schlußfolgerungen richtig. Denn in der Gleichung (5) steht in der eckigen Klammer auf der linken Seite der Term

$$n+1-\frac{1}{2}(2n+1)=n+1-n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

und auf der rechten Seite

$$n-\frac{1}{2}(2n+1)=n-n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Tatsächlich gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, weil $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. (8)

Aber aus der Gleichung (8) folgt nicht

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2};$$

denn aus der Gleichheit der Quadrate zweier rationaler Zahlen folgt die Gleichheit dieser Zahlen nicht, wenn sie ein verschiedenes Vorzeichen haben. Daher ist auch der Schluß von (5) auf (6) falsch, und es gilt nicht $n+1=n$.

Dr. R. Lüders, Berlin

Silbenrätsel

1. Oktaeder
2. Läufer
3. Yard
4. Multiplikation
5. Parabel
6. Intervall
7. Algebra
8. Differenz
9. Exponent

Lösungswort: Olympiade

Füllrätsel

Wir bezeichnen die siebenstelligen Zahlen in der 1., 2. usw. Zeile des Schemas der Reihe nach mit a, b, c, d, e, f, g.

Nun gilt wegen $2^{10}=1024$

$2^{20}=2^{10}\cdot 2^{10}=1024\cdot 1024=1\,048\,576$ mit der Quersumme $q=31$,

$2^{21}=2\,097\,152$ mit $q=26$,

$q=25$,

$2^{23}=8\,388\,608$ mit $q=41$,

ferner ist $2^{24}>10^7$ und $2^{19}<10^6$.

Daher erhalten wir $a=2\,097\,152$ und $c=8\,388\,608$. Ferner ist $9^6<10^6$, $9^7=4\,782\,969$, $9^8>10^7$, also $b=4\,782\,969$ mit $2^{22}=4\,194\,304$ mit $q=25$.

Die Zahl 3 593 970 hat nur die folgenden Teiler, die siebenstellige Zahlen sind:

$3\,593\,970:2=1\,796\,985$ mit $q=45$ und

$3\,593\,970:3=1\,197\,990$ mit $q=36$.

Daher ist $e=1\,796\,985$.

Da f ein Vielfaches der nicht durch 9 teilbaren Zahl 893 615 ist und wegen der Quersumme 27 durch 9 teilbar ist, kann nur $f=893\,615\cdot 9=8\,042\,535$ sein; denn $893\,615\cdot 18$ ist bereits eine achtstellige Zahl. Wäre die erste Grundziffer der Zahl g kleiner als 9, so wäre ihre Quersumme kleiner als $9+8+7+6+5+4+3=42$. Das widerspricht aber der Voraussetzung, wonach die Quersumme gleich 42 ist. Daher ist $g=9\,876\,543$.

Nach Voraussetzung besteht die Zahl d aus lauter gleichen Grundziffern. Bezeichnen wir diese mit x, so gilt für die Summe in der ersten Spalte

$$2+4+8+x+1+8+9=40,$$
$$x+32=40,$$
$$x=8.$$

Also ist $d=8\,888\,888$.

a	2	0	9	7	1	5	2
b	4	7	8	2	9	6	9
c	8	3	8	8	6	0	8
d	8	8	8	8	8	8	8
e	1	7	9	6	9	8	5
f	8	0	4	2	5	3	5
g	9	8	7	6	5	4	3

Damit haben wir die vollständige Lösung erhalten (vgl. das Schema!). Wir überzeugen uns noch davon, daß die Summen in der ersten Spalte, in der letzten Spalte und in den beiden Diagonalen jeweils gleich 40 sind.

Fremdkörper

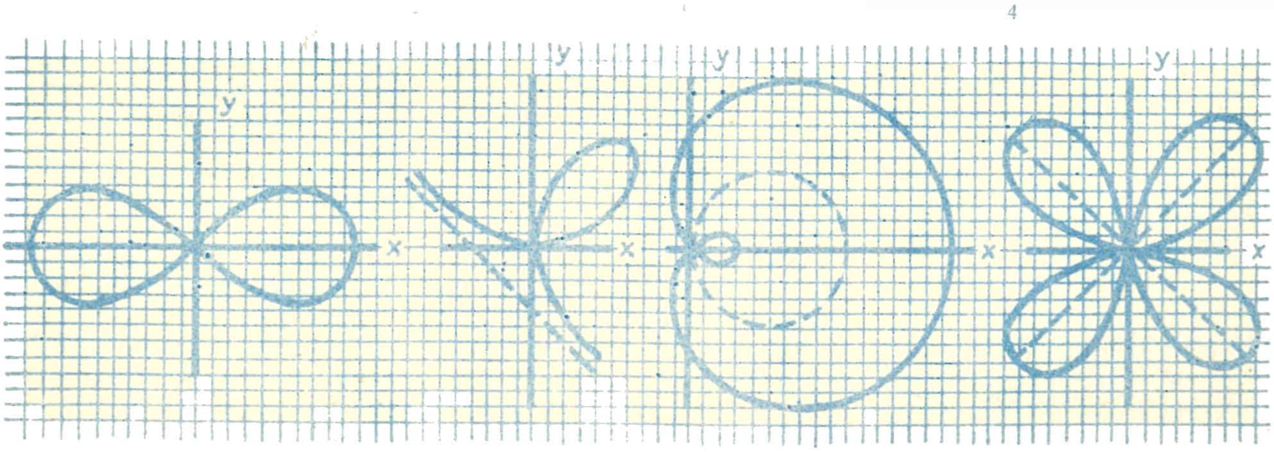
A Primzahlen
B Außenwinkel
C Rechtecke
D axialsymmetrische Figuren
E Buchstaben
F Einermengen
G Linien

P A R A B E L

Schwungvolle Kurven (Titelblatt)

1. *Die Lemniskate* von Bernoulli
   $x^2+y^2=a^2(x^2-y^2)$
2. *Das Folium* von René Descartes (1596 bis 1650)
   $x^2+y^3=3axy$
3. *Die Schnecke* von Étienne Pascal (17. Jh.), Vater von Blaise Pascal
   $(x^2+y^2+ax^2)^2=b^2(x^2+y^2)$
4. *Die Rose* von Guido Grandi, Mönch und Professor in Pisa (1671 bis 1742)
   $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$

4



Inhaltsverzeichnis 1967 bis 1973
(leicht gekürzt)

alpha (Zeitschrift alpha)
2/67, 1/68 Wissen wo (eine Anleitung zum Selbststudium) (H. Herzog/J. Lehmann) ● 6/68, 6/69 *alpha* berichtet (J. Lehmann) ● 5/69 An die Leser der Zeitschrift *alpha* (A. Markuschewitsch) ● 6/71 Wie entsteht die Zeitschrift *alpha*? (H. Jüttner/P. Dreßler, J. Lehmann)

Ähnlichkeitslehre
4/67 Guter Mond, du gehst so stille ... (L. Görke)

Aufgaben
5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR (O. Prinits) ● 6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam (H. Tang/Nguyen lam Son) ● 6/69, 1/70 Prüfungsaufgaben aus Island (G. O. Gestsson) ● 1/70, 4/70 Prüfungsaufgaben aus Tansania (W. Büchel) ● 3/72 Mathematik und Sport (Th. Scholl) ● 5/72 Mathematik und Russisch (OS Döbeln) ● 1/73 Einige Aufgaben aus Abschluß- und Reifeprüfungen (G. Püffeld) Über eine Aufgabe der XII. IMO (H.-D. Gronau/W. Harnau) Probleme - XII. IMO

Berichte
1/67 Internat. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) (D. Ziegler) ● 2/67, 3/69 *alpha* berichtet aus aller Welt ● 5/67 Nowosibirsk (W. Friedrich) ● 5/67 Aus der Sowjetunion berichtet ● 6/68 *Junge Mathematiker* erlebten Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft in Rostock (H. Titze) ● 1/71 Die Mathematik ist schön (R. Peter) ● 1/71 IV. Internat. Physikolympiade ● 1/71 Taugen Mädchen für die Mathematik? ● 2/71 10 Jahre Weltraumflug (W. Träger) ● 2/72 *alpha* international (Red.) ● 3/72 Mathematikstudenten im Forschungsstudium (O. Krötenheerdt) ● 4/72 Technische Universität Dresden (R. Sonnemann) ● 1/73 Festival-Initiative (K. Bachmann) ● 6/73 Solidarität in Aktion (DRV) ● 6/73 Sei stolz auf Deine Organisation, Junger Pionier! ● 6/73 Aus der Zentralschule der Pionierorganisation *E. Thälmann* berichtet (I. Koch)

Berufe
3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium (W. Zill) ● 6/67 Als Diplommathematiker in Dubna (G. Laßner) ● 6/67 Als Mathematiklehrer in Tansania (H. Büchel) ● 2/68 Elektronische Datenverarbeitung - eine Perspektive ● 2/68 Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur (J. Pönisch) ● 3/68 Facharbeiter für Datenverarbeitung (Ch. Papendorf) ● 4/68 Mathematisch-technischer Assistent (G. Paulin) ● 5/68 Ingenieur für Programmierung (W. Leupold) ● 6/68 Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung) (J. Lötzsch/G. Seifert) ● 2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten ● 3/69 *Ulrich Zähle* berichtet (U. Zähle) ● 4/69 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten (H. Ernst) ● 5/69 Hochbauzeichner - ein Beruf für Mädchen ● 6/69 Diplom-Mathematiker (H. Girlich) ● 1/70 Diplomlehrer für Mathematik (R. Mildner) ● 5/70 Bauingenieur (W. Wittig) ● 6/70 Hochschulingenieur (G. Burucker) ● 1/71 Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter ● 5/72 Studienmöglichkeiten an der *Hochschule für Architektur und Bauwesen* Weimar (D. Schwaab) ● 1/73 Geophysiker (R. Rösler) Statistiker (E. Blüher/R. Schröter) ● 4/73 Diplomlehrer für Physik (M. Wurlitzer)

Beweise
2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion (W. Stoye) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 4/69 Mathematikprobleme - selbst gemacht (Nazla H. A. Khedre) ● 4/71 Ein interessanter geometrischer Beweis (E. Schröder)

Biographien
2/67 *Gottfr. Wilh. Leibniz* als Mathematiker (W. Purkert ● 4/67 *Leonhard Euler* 1707 bis 1783 (H. Bernhardt) ● 4/67 *Gaspard Monge* 1746 bis 1818 (E. Schröder) ● 5/67 *A. J. Chintschin* (H. Bernhardt) ● 5/67 Aus der Jugend *A. J. Chintschins* (A. Artisow/Muromzewa) ● 4/68 *August Ferdinand Möbius* 1790 bis 1868 (H. Wußing) ● 1/69 *Lew Danilowitsch Landau* (B. Zimmermann) ● 4/69 *Evariste Galois* (E. Hertel/O. Stamfort) ● 5/69 Prof. Dr. rer. nat. habil. *Frieder Kuhnert* (J. Gronitz) ● 6/69 *Michael Stifel* (J. Schwarz) ● 6/69 *Alexander Ossipowitsch Gelfond* (H. Boll) ● 1/70 Mathematik in der Familie W. I. Lenins (G. N. Wolkow) ● 3/70 *Janos Bolyai* (I. Reimann) ● 4/70 Auf den Spuren *Jakob Steiners* (E. Schröder) ● 5/70 Leninpreisträger *Lew Semjonowitsch Pontrjagin* ● 6/70, 2/71, 4/71 *Albrecht Dürer* (E. Schröder) ● 6/70 Die Leninpreisträger *Jurij Rezanov* und *Jurij Prochorov* ● 1/71, 4/71 Der Weg eines Talents - *Olga A. Ladyschenskaja* (J. Senkjewitsch) ● 5/71, 1/72, 2/72 *Ramanujan* - das mathematische Genie Indiens (V. Lewin) ● 6/71 *Johannes Kepler* (Th. Riedrich) ● 5/72, 6/72, 1/73 *Nicolaus Copernicus* (H. Wußing) ● 5/73 *A. Ljapunow* (L. Boll) ● 6/73 Über den Schöpfer einer neuen Geometrie/*N. J. Lobatschewski* (A. Halameisär/B. A. Rosenfeld)

Funktionen
6/70, 2/71, 4/71 Was ist eine Funktion? (A. N. Kolmogorow) ● 2/73 Funktionen und ihre graphische Darstellung (Leseprobe)

Geometrie, darstellende
6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) ● 1/68 Abstand zweier Punkte im Raum (E. Schröder) ● 2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) ● 4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur (E. Schröder) ● 1/70 Auch ein Schlußlicht hat es in sich (E. Schröder) ● 5/70 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (E. Schröder) ● 5/72, 6/72 Darstellende Geometrie und Architekturausbildung (E. Kühn)

Geschichte der Mathematik
6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike (M. Otto) ● 6/68 *Mathematische Manuskripte* von Karl Marx (R. Sperl) ● 1/69 Was bedeutet eigentlich „x"? (Aus „Po sv'etu" 11/67) ● 1/70 Über die Anfänge der Mathematik aus: *Die Mathematik in der Antike* (H. Wußing) ● 6/69 bis 5/70 Mathematik-Kalender (W. Heinig/J. Lehmann) ● 3/71 Geschichte der Mathematik der Tschechoslowakei (O. Langer) ● 2/73 In alten Mathematikbüchern geblättert (J. Lehmann)

Gleichungen/Ungleichungen
1/68 Eine schwierige Hausaufgabe (R. Lüders) ● 2/68 Der Lucassche Turm (J. Frormann) ● 6/69 Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) ● 4/70 Einige Ungleichungen für Fakultäten (V. I. Lewin) ● 6/70 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) ● 2/72 Zwei Beweise einer Ungleichung von Cauchy (W. Dziadek) ● 5/72 Diophantische Gleichungen (H. Menzer) ● 1/73 Ungleichungen im Bereich der nat. Zahlen (J. Lehmann) ● 4/73 Ein Verfahren zur Abspaltung linearer und quadratischer Polynome (H. Butzke)

Graphentheorie
3/71 Über die Ramseyschen Zahlen (J. Sedláček) ● 4/72 Der Graph (J. I. Churgin) ● 6/72, 1/73, 2/73, 4/73 Aus der Graphentheorie (W. Voß)

Kombinatorik
6/71 Geometrische Kombinatorik (L. Lovasz/J. Pelikan) ● 6/71, 2/72, 3/72 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? (W. Türke)

Literatur
4/68 Formen und Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung (W. Arnold) ● 6/70 *Quant* - eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift ● 6/70 Jugend und Mathematik - eine mathematische Schülerzeitschrift der Demokratischen Republik Vietnam ● 4/72, 5/73 Formeln - was dann? (J. I. Churgin) ● 5/72 Sammelbildserie: Berühmte Mathematiker (Red.) ● 6/72 Menschen messen Zeit und Raum (E. Padelt)

● 5/73 *alpha* zu Gast bei *Quant* ● 5/73 Der Repetitor (aus: Moskauer Komsomolze) ● 6/73 Mathematische Schülerzeitschrift der DRV (H. Chung)

Logik

2/68 Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage (M. Rehm) ● 3/70 Mathematische Logik für Anfänger (Leseprobe) ● 5/70 Achtung Kreuzung – Vorfahrt beachten! (W. Träger) ● 5/72, 6/72, 1/73, 2/73 Kleine Worte – Große Wirkung (L. Flade)

Mengenlehre

1/67 Mit Mengen fängt es an(1) (W. Walsch/H. Lohse) ● 2/67 Wir operieren mit Mengen (2) (W. Walsch) ● 3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) (W. Walsch) ● 4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre (W. Walsch) ● 2/69 Zweiermengen und geordnete Paare (H. Tiede)

Nomographie

2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden – Olympiadeaufgaben

1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha–Neubrandenburg (J. Lehmann) ● 3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb (M. Mäthner/G. Schulze) ● 3/67 Mathematische Wettbewerbe in England ● 4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien (S. Bodurow) ● 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tblissi 1967 (J. Petrakow) ● 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit (R. Höppner) ● 6/67 IX. IMO 1967 (H. Bausch) ● 1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR ● 1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb USA 1967 ● 5/68, 6/68, X. IMO 1968 (H. Bausch/W. Burmeister) ● 6/68 Allunions-Fernolympiade (R. Lüders/J. Lehmann) ● 1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR ● 3/69 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/69, 1/70 XI. IMO 1969 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 (G. Ulbricht) ● 1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR ● 2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR (O. Langer/St. Horák) ● 3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (I. Reimann/M. Walter) ● 4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden ● 5/70 XII. IMO 1970 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR ● 2/71 10 Jahre Olympiade Junger Mathematiker der DDR ● 2/71 Mathematikolympiaden in der MVR ● 2/71 Österreichische Mathematikolympiade ● 5/71 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/71 XIII. IMO 1971 (J. Lehmann) ● 1/72 bis 5/72 XI. OJM der DDR ● 1/72 FDGB-Urlauber-Olympiade 1972 (W. Träger) ● 3/72 Mathematikolympiaden in der VR Polen (S. Straszewicz) ● 3/72 Rückblick auf die XIII. IMO (Red.) ● 3/72 Mathematikolympiade in der Republik Kuba (L. J. Davidson) ● 5/72 XIV. IMO 1972 (J. Lehmann) ● 1/73 bis 5/73 XII. OJM der DDR ● Mathematikolympiaden in den Niederlanden (A. v. Tooren) ● 4/73 II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig ● 5/73 XV. IMO 1973 (J. Lehmann)

Planimetrie

1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat (H. Wiesemann) ● 5/68 Was ist ein Viereck? (L. Görke) ● 6/68, 1/69, 3/69, 5/69, 6/72 Mit Zirkel und Zeichendreieck (J. Lehmann) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 3/69 Mit Bleistift und Lineal (E. Schröder) ● 3/69 Bange machen gilt nicht! Modell eines geom. Extremwertproblems (Th. Scholl) ● 5/69 Übe sinnvoll – überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck (G. Pietzsch) ● 6/69 Kleine geometrische Exkursion (Th. Scholl) ● 2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (H. Titze) ● 3/70, 4/70 Ornamente (R. Bittner) ● 2/72 Arbeitsblatt Geometrie (H. Herzog) ● 3/72 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (E. Schröder) ● 3/73 Spiegelung am Kreis (Ch. Meinel) ● 4/73 Eine interessante, aber schwierige Aufgabe (R. Lüders) ● 6/73 Heronsches Dreieck 1973/74 (F. Klar/H. Decker)

Stereometrie

1/69 Fernsehfußball – reguläre Polyeder (E. Schröder) ● 2/69 Der Eulersche Polyedersatz (H. Günther) ● 5/71 Durch die Welt der Tetraeder (G. Geise)

Unterhaltung

3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel (Th. Scholl) ● 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil (W. Träger) ● 6/68 Schön ist so ein Ring(el)spiel (J. Frormann) ● 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (W. Unze) ● 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (W. Träger) ● 1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie (W. Träger) ● 3/71 Wirklichkeit und Täuschung (J. Sedláček) ● 1/72 Kryptarithmetik (J. Lehmann/R. Lüders) ● 1/72 Geometrisches Kreuzworträtsel aus *Quant* ● 2/72 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (Ch. Riehl) ● 3/72 Mathe-Quiz im Ferienlager (J. Lehmann/W. Träger) ● 3/73 *alpha*-Spiel-Magazin (J. Lehmann) ● 6/73 Mit Zirkel, Pinsel und Schere (J. Lehmann)

Verbindung zur Praxis

3/67 Schwankt der Fernsehturm? (W. Zill) ● 3/67 Der Berliner Fernsehturm (W. Zill) ● 4/67 Auf den Spuren Roald Amundsens (S. Meier) ● 5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) (H. Werner) ● 1/68 50 Jahre Rote Armee ● 1/68 Dresden in Zahlen (W. Weidauer) ● 1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge (A. Hanisch) ● 2/69 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden – Zwinger (H. Grötzsch) ● 3/69 Mathematische Modelle aus der DDR (W. Glaß) ● 4/69 Multicurve (E. Schröder) ● 4/69 Aus der VAR berichtet ● 6/69 Mathematik und Musik (Ch. Lange) ● 6/69 Rund um das Schachbrett (K. Kannenberg) ● 1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (J. Frormann) ● 4/71 Waffen aus Suhl (E. Hoffmann) ● 6/71, 1/72 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (W. Träger) ● 3/72 Fluidkompaß Sport 3 (Red.) ● 4/72 Die Rechenmaschine – ein Souvenir aus der Sowjetunion (A. Mertens) ● 6/72, 2/73 Mathematik im Reich der Töne (E. Schröder) ● 2/73 Über die Bedeutung der Mathematik für den Markscheider (H. Meixner) ● 2/73 Gut gedacht ist halb gelöst (J. Lehmann/W. Unze) ● 3/73 Mit Karte und Kompaß ● 4/73 Herstellung eines Rechenstabes (A. Ewert) ● 5/73, 6/73 Millionen auf der Bleistiftspitze (A. Halameisär)

Zahlenbereiche

5/68 Übe sinnvoll – Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen (G. Pietzsch) ● 1/72 Über zwei Operationen mit Zahlen (K. Tschimow) ● 1/73 Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art (G. Pietzsch) ● 4/73 Mathematik und Physik (E. Mittmann) ● 5/73 Primzahlen (A. D. Bendukidse)

Zahlenfolgen

6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums (A. A. Kolosow) ● 3/68, 4/68, 5/68, 6/68, Elementare Zahlenfolgen (H. Lohse)

Zahlentheorie

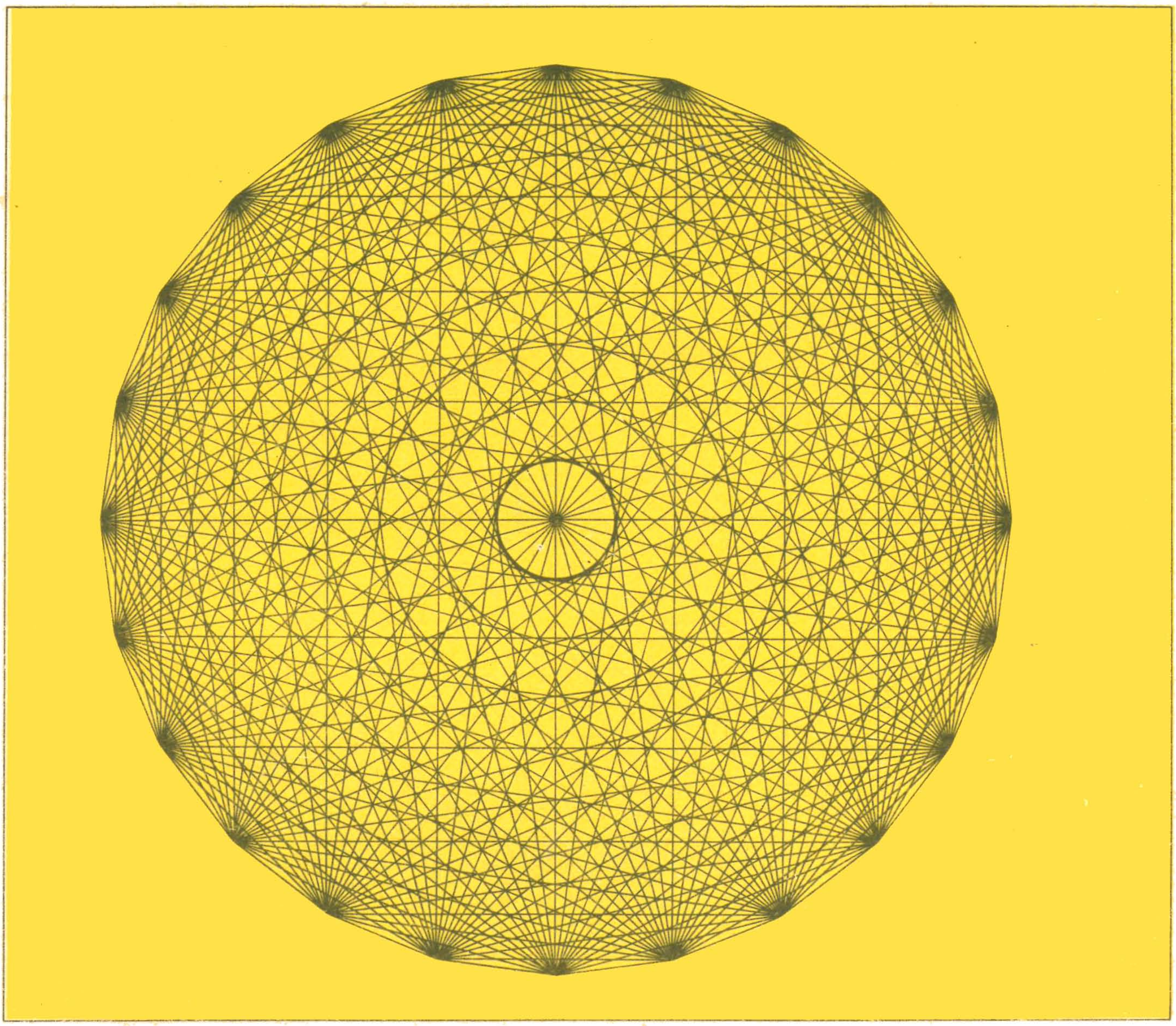
3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten (G. Lorenz) ● 5/70 Freitag der 13. (T. Bailey/G. Hofmann) ● 4/71 Die Teilbarkeit durch 7 (E. Naumann) ● 2/72, 3/72 Die Arithmetik der Binominalkoeffizienten (D. B. Fuchs) ● 3/73 Gitterpunkte (M. Günther)

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

5/67 Mathematischer Wettbewerb (W. Werner) ● 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? (G. Horn) ● 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA" (W. Träger) ● 2/72 Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew (L. A. Kaloujine) ● 4/73 Arbeitspläne Mathematik (Kl. 7/8)/(D. Klöpfel) ● 4/72 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (AG Math. Lübtheen) ● 4/72 Mathematik frei Haus (Korrespondenzzirkel) (R. Bergmann) ● 5/72 Mathematikern über die Schultern geschaut (H. Bode) ● 3/73 Ein Mathematikzentrum in Aktion (W. Henker) ● 5/73 Mathematik im Moskauer Pionierpalast auf den Leninbergen (V. Trostnikow) ● 6/73 Rechenzentrum *alpha* begeisterte in der Berliner Wuhlheide (E. Zschech)

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 30, S. 32, S. 41); ADN-Bilderdienst (S. 25/26); Vignetten aus NBI (S. 25/26); J. Lehmann, Leipzig (S. 35); Handelshochschule Leipzig (S. 35); S. Rosenhain, Leipzig (S. 35);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. Januar 1974

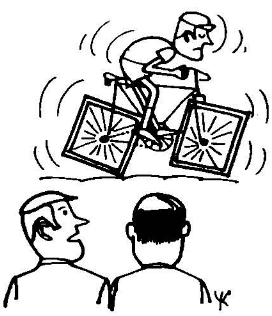
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Aufgaben für Freunde der Friedensfahrt



Er ist ein Individualist!

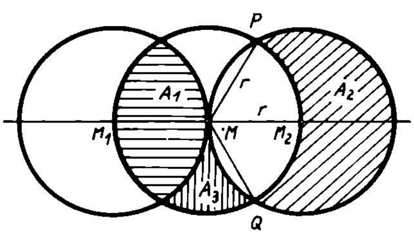
Vignetten: Jósef Kaczmarczyk

Klasse 5

Der Fahrer, der als erster, zweiter oder dritter das Ziel einer Etappe der Friedensfahrt erreicht, erhält eine Zeitgutschrift von 30 s, 20 s oder 10 s. Am Ende einer Friedensfahrt hat ein Fahrer insgesamt 80 s Zeitgutschrift erhalten, weil er wiederholt vordere Plätze an den Etappenzielen belegte.
Welche Möglichkeiten bestehen für seine Erst-, Zweit- und Drittplazierungen bei den einzelnen Etappen?

Klasse 6

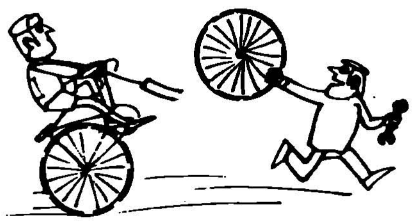
Das Symbol der 25. Friedensfahrt bestand aus drei konzentrischen Kreisen mit dem Radius r, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen und voneinander den Abstand r haben.



Zeige, daß die Figur $\sphericalangle QMP = 120°$ gilt!

Klasse 7

Bei einer Etappe fallen aus der Spitzengruppe, die mit $48\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschwindigkeit fährt, zwei Fahrer infolge Reifenschadens aus. Nach 1 min 15 s Wartezeit ist der Reifenschaden durch Radwechsel behoben, die beiden Fahrer starten wieder und die davongeeilte Spitzengruppe befindet sich in diesem Zeitpunkt bereits 24 km vor dem Etappenziel.
Welche Geschwindigkeit müßten beide Fahrer mindestens vorlegen, um zur Spitzengruppe spätestens am Ziel aufzuschließen?



Radwechsel, ohne anzuhalten

16. Etappe der 26. Internat. Friedensfahrt: Der sprintstarke Waleri Lichetschow siegt in Berlin

Klasse 8

Der bei der Friedensfahrt 1967 auf der 174 km langen Etappe von Kutno nach Poznan aufgestellte Streckenrekord von $48{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ widerstand bei den folgenden fünf Friedensfahrten den Anstürmen. Erst 1973 beim 26. *course de la paix* wurde dieser Rekord innerhalb 48 h gleich zweimal überboten: Auf der 10. Etappe von Nieporet nach Wloclawek legte der Belgier René Dillen durchschnittlich je Stunde 100 m mehr zurück als der Sieger der Rekordetappe von 1967. Bei der 11. — 150 km langen — Etappe von Torun nach Poznan siegte der sowjetische Fahrer *Waleri Lichetschow* mit der phantastischen Durchschnittsgeschwindigkeit von $49{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erzielte bei der 26. Friedensfahrt der Sieger der 10. Etappe?

b) Die voraussichtliche Ankunft der Friedensfahrer am Ziel der 11. Etappe der 26. Friedensfahrt berechnete man durch Zugrundelegen der am Tage vorher erreichten neuen Spitzengeschwindigkeit. Wieviel Minuten früher als erwartet fuhr der Etappensieger im Stadion von Poznan ein?

Klasse 9

Betrachte Text und Abbildung der Aufgabe für Klasse 6!
Zeige, daß die Flächeninhalte der in obiger Figur schraffierten Flächen gegeben sind durch

$$A_1 = r^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}r^2(4\pi - 3\sqrt{3}),$$

$$A_2 = r^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}r^2(2\pi + 3\sqrt{3}) \text{ und}$$

$$A_3 = r^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}r^2(3\sqrt{3} - \pi)\,!$$

Klasse 10

Ein Rennrad ist mit 27er Rädern (27er Räder haben einen Durchmesser von 27 Zoll. 1 Zoll = 25,4 mm) ausgerüstet und besitzt eine Gangschaltung, die vorn aus zwei Kettenblättern mit 46 bzw. 48 Zähnen und am Hinterrad aus einer Zahnkranzkombination mit 14, 16, 18 und 20 Zähnen besteht.

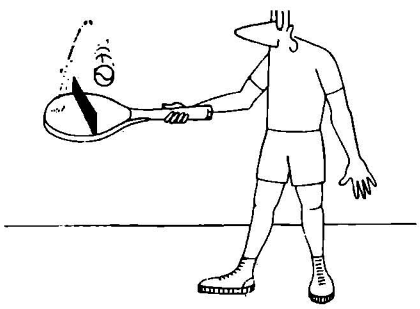
a) Wieviel Umdrehungen macht das Kettenrad in einer Sekunde, wenn der Fahrer mit größtem Gang mit der Geschwindigkeit $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

b) Wie groß ist die Fahrgeschwindigkeit, wenn sich das Kettenrad ebenso schnell wie bei a) dreht und wenn jedoch der kleinste Gang eingeschaltet ist?

W. Träger

Mit 150 km/h übers Netz

Von Klassesportlern geschlagene Pucks, Volleybälle, Tennisbälle, Tischtennisbälle usw. erreichen enorme Geschwindigkeiten. Schauen wir uns den weißen Zelluloidball mit seinem Umfang von 3,5 cm und seinem Gewicht von 2,4 bis 2,53 g etwas genauer an. Bei freiem Fall aus 0,3048 m Höhe auf die Tischtennisplatte muß er wieder zwischen 0,2032 und 0,2286 m hochspringen. Und wie steht es mit seiner Geschwindigkeit?

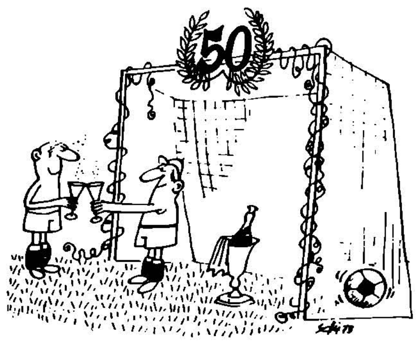


Messungen ergaben folgende Werte: Die Ballgeschwindigkeit bei einem Verteidigungsschlag mit Unterschnitt beträgt etwa 50 km/h nach dem Schlag. Beim Aufprall auf der Platte beträgt sie nur noch etwa 30 km/h. Ein normaler Treibschlag, der den Angriff vorbereitet, gibt dem Ball eine Geschwindigkeit von 70 km/h, beim Aufprall reduziert sie sich auf 50 km/h und danach wird der Ball durch die Eigenrotation wieder schneller und erreicht etwa 55 km/h. Schmetterbälle können nach dem Schlag bis zu 150 km/h erreichen. Noch beim Aufprall hat der Ball eine Geschwindigkeit von 100 km/h. Dem Gegner bleibt bei einem solchen Schmetterball auf die kurze Entfernung nur eine Reaktionszeit von genau $\frac{2}{100}$ Sekunden.

Vergleicht einmal diese Zeit an eurem Fotoapparat mit der Belichtungszeit von $\frac{2}{100}$ Sekunden! Daran werdet ihr erkennen, wie wenig Zeit einem Spieler bleibt, um den Angriffsschlag des Gegners zu kontern. Und das kommt in einem Satz bis zu 350 oder gar 400 mal vor.

Warum gibt es im Sport soviel ausgefallene Maße?

Die Frage, weshalb ein Fußballtor gerade 7,32 statt 7 m breit sein muß, eine Männer-Kugel ausgerechnet 7,257 kg statt 7 kg wiegen soll und ein Hockeystock höchstens 794 g wiegen darf, ist durchaus berechtigt. Der Sport hat hier ganz offensichtlich seine eigenen Gesetze. Da England das Mutterland des modernen Sports und vieler moderner Sportarten ist, so haben sich auch diese in England eingeführten Maße und Gewichte bis in die heutige Zeit überliefert.

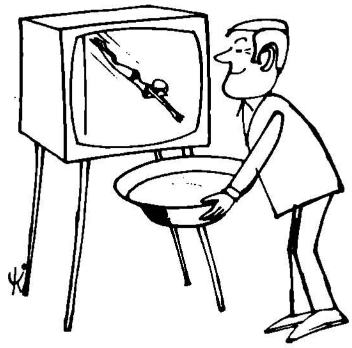


Wolfgang Schubert, aus: NBI

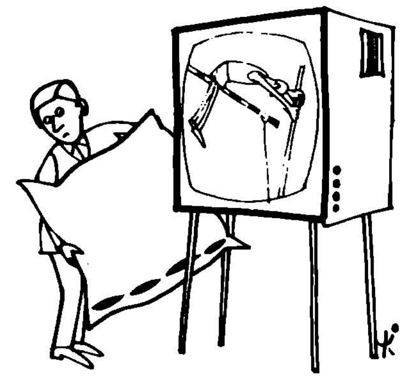
Ein Fußballtor sollte nämlich bei seiner Erfindung genau 24 Fuß breit und 8 Fuß hoch sein, und das sind nun mal bei der Umrechnung in das metrische Maßsystem, das seit 1875, seitdem die internationale Meter-Konvention gilt, genau 7,32 m und 2,44 m. Eine Männer-Kugel wiegt deshalb 7,257 kg, da das genau 16 englische Pfund sind. Der Abstand zwischen den Hürden auf einer 110-m-Hürden-Strecke der Männer beträgt seit eh und je zehn Yards, also umgerechnet 9,14 m, während eine Hürde bei einem 400-m-Hürden-Lauf ein Yard hoch ist, also 91,4 cm.

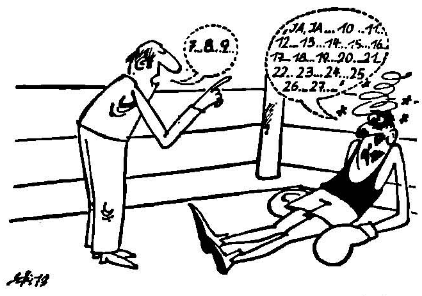
Ähnlich ist es auch in anderen Sportarten. England hat inzwischen das Dezimalsystem eingeführt. Für den Sport ist eine solche Umstellung aber noch nicht zu erwarten.

Volker Kluge (aus JW)



J. Kaczmarczyk, aus: „Polen", 11/73

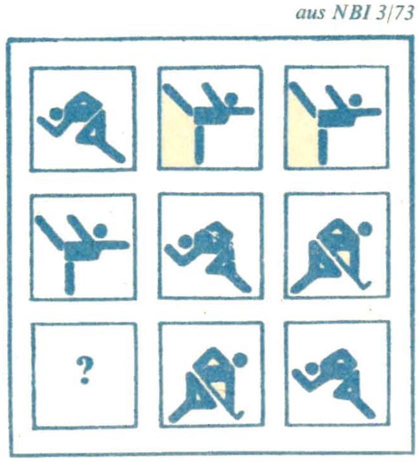


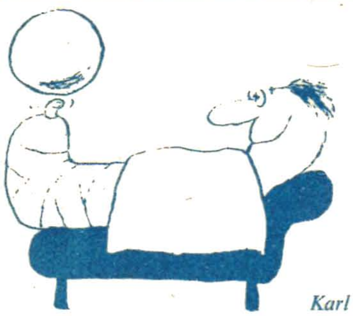


Wolfgang Schubert

aus NBI 3/73

Welche der sechs numerierten Figuren gehört in das Feld mit Fragezeichen? Ihr könnt zwei Minuten versuchen, hinter die Gesetzmäßigkeit zu kommen.

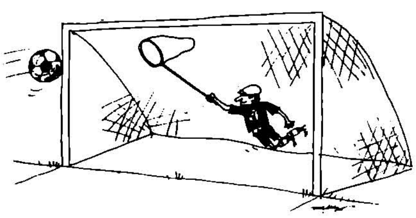




Karl Schrader, aus: NBI

Aufgaben für Freunde des Fußballs

Bei einem Fußballturnier ist das Punktverhältnis einer Mannschaft das Verhältnis der insgesamt erreichten Plus- und Minuspunkte. Ein gewonnenes Spiel bringt einer Mannschaft zwei Pluspunkte, ein verlorenes zwei Minuspunkte und ein unentschiedenes Spiel je einen Plus- und Minuspunkt. Bei der Angabe eines Punktverhältnisses wird der Doppelpunkt lediglich als Trennzeichen zwischen Plus- und Minuspunkten verwendet; $a:b$ ist hierbei eine Schreibweise für das geordnete Paar $[a; b]$, wobei a die Anzahl der Plus-, b die Anzahl der Minuspunkte angibt.



Iwan Milkov, aus: Eulenspiegel 49/73

▲1▲ Vier Fußballmannschaften A, B, C und D tragen ein Turnier aus, wobei jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel austrägt, d. h. Rückspiele sind nicht vorgesehen. Nach Abschluß des Turniers ergibt sich folgender Punktestand:

Mannschaft	Punktverhältnis
B	6 : 0
D	3 : 3
A	2 : 4
C	1 : 5

Welche Aussagen können über den Ausgang der einzelnen Spiele gemacht werden?

Hans Betcke, aus: NBI

▲2▲ Bei einem Fußballturnier wird für jede Mannschaft neben dem Punktverhältnis auch das Torverhältnis angegeben. Dies ist das Verhältnis der erzielten Tore zur Zahl der erhaltenen Gegentore. Am Ende eines Turniers, bei dem jede der fünf Mannschaften A, B, C, D und E gegen jede andere genau ein Spiel austrägt, also keine Rückspiele vorgesehen sind, ergibt sich folgender Tabellenstand:

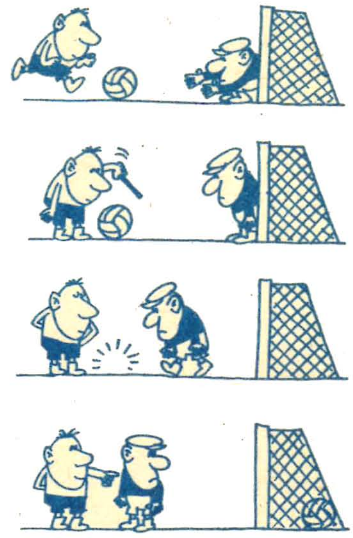
Mannschaft	Punktverh.	Torverh.
A	7 : 1	3 : 0
B	6 : 2	2 : 0
C	5 : 3	5 : 2
D	2 : 6	4 : 3
E	0 : 8	1 : 10

Gib für jedes ausgetragene Spiel das Punkt- und Torverhältnis an!

▲3▲ Bei einem Fußballturnier, an dem n Mannschaften ($n \geqq 2$) teilnehmen, trägt jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus, d. h., Rückspiele finden nicht statt.

a) Wie groß ist die Summe aus allen Plus- und Minuspunkten einer Mannschaft?

b) Wie groß ist die Summe aus den Pluspunkten aller Mannschaften?



Willy Moese, aus: ZB

▲4▲ Bei einem Fußballturnier hatte Mannschaft A genau vier Spiele zu bestreiten; sie erzielte dabei das Punktverhältnis 4 : 4 und das Torverhältnis 4 : 2.

Wieviele Möglichkeiten bestehen für den Ausgang (Punktverhältnis; Torverhältnis) der vier Spiele dieser Mannschaft?

W. Träger

Qualifikationsspiel DDR–Albanien 2:0, unser Bild: *Joachim Streich* (DDR) beim Kopfball auf das albanische Tor.

Der „Euclides Danicus“ von Mohr

(entnommen aus: Közepiskolai Matematikai Lapok, Budapest, 8/9 1972)

Hilfsmittel für geometrische Konstruktionen sind das Lineal und der Zirkel. Das Lineal dient dazu, um durch zwei gegebene Punkte eine Gerade zu legen, der Zirkel, um einen Kreis mit gegebenem Radius um einen gegebenen Punkt zu zeichnen. Von den konstruierten Punkten werden nur die betrachtet, die als Schnittpunkte von Geraden und Kreisen, die auf diese Weise gezeichnet werden, auftreten. Im weiteren Verlauf der Konstruktion werden die bereits konstruierten Punkte als gegeben angesehen.

Die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen lassen sich demnach aus folgenden drei Grundkonstruktionen zusammensetzen:

aus der Konstruktion der Schnittpunkte

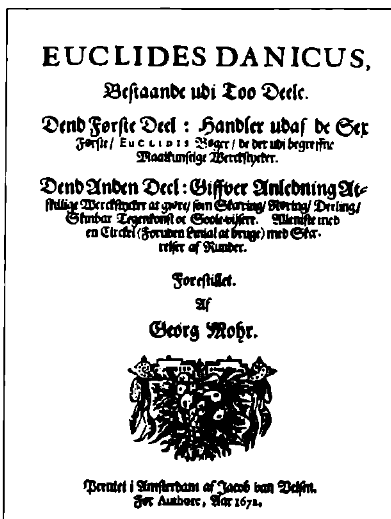
1. zweier Geraden,
2. einer Geraden und eines Kreises und
3. zweier Kreise.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts wies *Lorenzo Mascheroni* (1750 bis 1800, Ordensbruder, lehrte an der Universität von Padua Mathematik) nach, daß sich alle geometrischen Konstruktionen auch mit alleiniger Benutzung des Zirkels durchführen lassen. (Aufgaben, in denen das Ziehen von Geraden gefordert wird, sind als gelöst anzusehen, wenn zwei Punkte der Geraden konstruiert werden können.) *Mascheroni* veröffentlichte seine berühmte Entdeckung 1797 in Padua in seinem Werk „La geometria del compasso“. Diese Arbeit erregte zu damaliger Zeit großes Aufsehen und hat dem Namen des Verfassers in der Geschichte der Wissenschaft ein Denkmal gesetzt.

Weit weniger war in der mathematischen Welt bekannt, daß der dänische Mathematiker *Georg Mohr* bereits 125 Jahre vor *Mascheroni* in seinem Werk mit dem Titel „Euclides Danicus“ zu demselben Ergebnis gelangt ist.

Georg Mohr oder vielmehr *Mohrendal* (*Mohrenthal*) wurde am 1. April 1640 in Kopenhagen geboren. Von Jugend an zog es ihn zur Mathematik. Als 22jähriger ging er nach England, Frankreich und Holland, um sich Grundkenntnisse in Mathematik zu erwerben, und lernte dabei zahlreiche Gelehrte kennen, z. B. *Leibniz* und *Tschirnhaus*. Nach längerer Abwesenheit kehrte er in seine Heimat zurück und lebte ausschließlich von seinen wissenschaftlichen Forschungen. 1687 verlegte er seinen Wohnsitz nach Holland. Ende 1695 übersiedelte er nach Kieslingswalde bei Görlitz und starb dort am 26. Januar 1697.

Mohr hat mehrere Werke geschrieben, seine Manuskripte gingen aber in den Kriegen von 1672 größtenteils verloren. Uns ist nur ein einziges Werk von ihm erhalten geblieben, nämlich der schon oben genannte „Euclides Danicus“, der vor nunmehr über 300 Jahren 1672 in Amsterdam in dänischer und holländischer Sprache erschien, leider ohne die Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen, weil der Titel nicht sehr glücklich gewählt war und zu der Annahme verleitete, es handele sich um einen Auszug oder eine Übersetzung der Elemente von Euklid. Die Arbeit ist in der wissenschaftlichen Literatur vollständig unbekannt geblieben. Erst 1928 wurde man auf sie aufmerksam, als *V. Beck*, damals Hörer an der Universität, bei einem Kopenhagener Buchhändler ein holländischsprachiges Exemplar des Werkes fand; der Kopenhagener Universitätsprofessor *Johannes Hjelmslev*, dem *Beck* das Buch zeigte, studierte es mit großem Interesse und schrieb darüber eine Rezension.


EUCLIDES DANICUS,

Bestaaende udi Too Deele.

Dend Første Deel: Handler udaf de Sex Første / EUCLIDIS Bøger / de der udi begreffne Maalkunstige Werckstycker.

Dend Anden Deel: Giffver Anledning Atskillige Werckstycker at giøre / som Stærring / Rørring / Deeling / Skinbar Tegnekonst og Soole-vissere. Alleniste med en Circkel (Foruden Lineal at bruge) med Ster. trister af Runder.

Forestillet.

Af

Georg Mohr.

Trykt i Amsterdam af Jacob van Velsen.
For Authore, Aar 1672.

A könyv cimlapja

Das Werk von *Mohr* erschien 1928 in einer Ausgabe der Kopenhagener Akademie erneut in Kopenhagen in der ursprünglichen dänischen Sprache.

Im ersten Teil des Buches löst der Autor alle in den ersten sechs Büchern der *Elemente Euklids* vorkommenden Konstruktionsaufgaben unter alleiniger Benutzung des Zirkels, im zweiten und letzten Teil behandelt er verschiedenartige Anwendungen von nur mit Hilfe des Zirkels durchführbaren Konstruktionen.

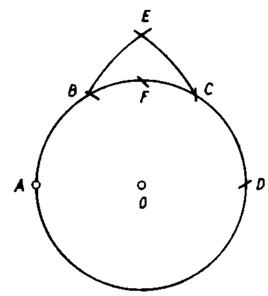
Im folgenden wollen wir unter den Mohrschen Konstruktionen diejenigen kennenlernen, mit deren Hilfe sich alle Konstruktionsaufgaben der Geometrie lösen lassen.

Es handelt sich um die folgenden Aufgaben:

▲1▲ Man verdopple die Strecke $\overline{AO}$.
(Es ist zu beachten, daß hier und in den folgenden Aufgaben unter „Strecke“ stets die Streckenlänge gemeint ist, von der nur die beiden Endpunkte bekannt sind.)

Lösung: Wir schlagen um 0 mit dem Radius $\overline{AO}$ einen Kreis, auf dessen Umfang wir, vom Punkt A ausgehend, dreimal den Radius $\overline{AO}$ als Sehne abtragen; der letzte Teilpunkt ist der dem Punkt A gegenüberliegende Punkt D des Kreises. Daher liegen A, O und D auf einer Geraden, und es ist

$$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AO}.$$



Durch mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens können wir einen Punkt N konstruieren, so daß

$$\overline{AN} = n \cdot \overline{AB}$$

ist, wo n eine positive ganze Zahl ist.

▲2▲ Man teile die Peripherie eines gegebenen Kreises in vier gleiche Teile.

Lösung: Wir tragen, nach Belieben von einem Punkt A des Kreises ausgehend, dreimal den Radius $\overline{AO}$ ab, so daß $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{OA}$ ist. Danach schlagen wir um die Punkte A und D als Mittelpunkte Kreise mit dem Radius $\overline{AC} = \overline{BD}$ und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit E.

Bringen wir jetzt den gegebenen Kreis mit einem um A mit dem Radius $\overline{OE}$ geschlagenen Kreis zum Schnitt und ist F der Schnittpunkt, so ist $\overline{AF}$ eine Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks.

Beweis: Da in dem rechtwinkligen Dreieck ACD $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{CD}$ ist, gilt

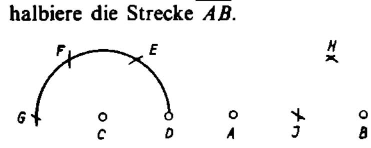
$\overline{AC}^2 = 3 \cdot \overline{CD}^2$, woraus folgt,

daß in dem rechtwinkligen Dreieck AOE

$$\overline{OE}^2 = 2 \cdot \overline{AO}^2$$

gilt, d. h., $\overline{OE} = \overline{AF} = \overline{AO} \cdot \sqrt{2}$ ist die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks.

▲3▲ Gegeben seien zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ von der Art, daß $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$; man halbiere die Strecke $\overline{AB}$.

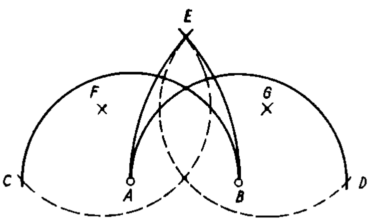


Lösung: Wir schlagen um den Punkt C mit $\overline{CD}$ als Radius einen Halbkreis, auf dem wir den Radius dreimal abtragen, so daß

$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{CD} \text{ ist.}$$

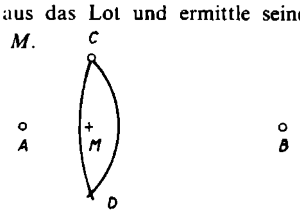
Nun schlagen wir um A mit der Zirkelöffnung $\overline{GE}$ einen Kreis und bringen ihn in H mit einem Kreis zum Schnitt, dessen Radius $\overline{DE}$ und dessen Mittelpunkt B ist. Schließlich zeichnen wir um B und H mit $\overline{CD}$ Kreise, die sich schneiden. Wenn unter den so gewonnenen Punkten J derjenige Punkt ist, dessen Abstand von A gleich $\overline{CD}$ ist, so ist J Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

▲4▲ Man halbiere die Strecke $\overline{AB}$.



Lösung: Zunächst bestimmen wir die Punkte C und D so, daß diese mit $\overline{AB}$ in eine Gerade fallen und $\overline{CA} = \overline{AB} = \overline{BD}$ ist. Danach schlagen wir um die Punkte C und D mit $\overline{BC} = \overline{AD}$ als Radius Kreise und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit E. Nunmehr halbieren wir nach der oben dargelegten Konstruktion die Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{DE}$ in F bzw. G. Schlagen wir schließlich um F und G Kreise durch den Punkt E, die sich noch im Punkt M schneiden, so gewinnen wir in M den gesuchten Halbierungspunkt.

▲5▲ Man fälle auf eine beliebige Gerade AB von einem außerhalb von ihr liegenden Punkt C aus das Lot und ermittle seinen Fußpunkt M.



Lösung: Wir schlagen um A und B durch den Punkt C Kreise, die sich noch in D schneiden. Halbieren wir jetzt gemäß der 4. Aufgabe die Strecke $\overline{CD}$ in M, so ist der Punkt M Fußpunkt des von C aus auf AB gefällten Lots.

▲6▲ Errichte auf einer beliebigen Geraden AB im Punkt A derselben die Senkrechte von der gegebenen Länge $\overline{AC}$!

Lösung: Wir zeichnen über $\overline{AB}$ auf Grund von Aufgabe 4 einen Halbkreis und schlagen um A mit dem gegebenen Abstand als Radius einen Kreis, der den Halbkreis in D schneidet (vorausgesetzt, daß der gegebene Abstand kleiner als $\overline{AB}$ ist). Danach halbieren wir auf Grund von Aufgabe 2 den Halbkreis im Punkt E.

Jetzt beschreiben wir um E als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $\overline{BE}$ und bestimmen den B gegenüberliegenden Punkt F. Danach bringen wir den Kreis um F mit dem Radius $\overline{BD}$ mit dem über $\overline{BF}$ geschlagenen Halbkreis in G zum Schnitt.

Bringen wir schließlich den um B mit dem Radius $\overline{BG}$ geschlagenen Kreis mit dem mit $\overline{AC}$ als Radius um A geschlagenen Kreis zum Schnitt, so ist $\overline{AC}$ die gesuchte Senkrechte.

Beweis: In dem rechtwinkligen Dreieck ABD gilt $\quad \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$,

in dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABE $\; 2 \cdot \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2$

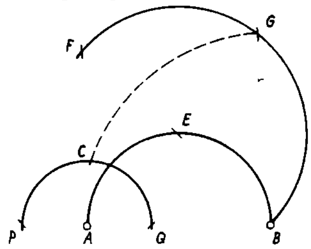
und in dem rechtwinkligen Dreieck BFG

$$\overline{BG}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{FG}^2.$$

Es ist indessen $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{BE}$ und $\overline{FG} = \overline{BD}$, also $\quad \overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$.

In dem Dreieck ABC ist jedoch $\overline{BC} = \overline{BG}$ und $\overline{AC} = \overline{AD}$, woraus folgt, daß $\overline{AC}$ mit $\overline{AB}$ einen rechten Winkel bildet.

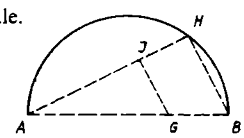
Wir merken an: Sollte die gegebene Strecke nicht kleiner als $\overline{AB}$ sein, d. h., den über $\overline{AB}$ gezeichneten Halbkreis nicht treffen können, so müßten wir das Zweifache, Dreifache, ..., n-fache der Strecke $\overline{AB}$ nehmen und hierüber den Halbkreis zeichnen, um um Ziel zu gelangen.



▲7▲ Auf der durch ihre Punkte A und B bestimmten Geraden trage man von A aus die gegebene Strecke $\overline{MN}$ ab.

Lösung: Zunächst bestimmen wir mit Hilfe der in Aufgabe 6 dargelegten Konstruktion den Punkt C derart, daß $\overline{AC}$ auf der Geraden AB senkrecht steht und gleich $\overline{MN}$ ist. Danach ermitteln wir gemäß der 2. Aufgabe auf dem um A mit dem Radius $\overline{AC}$ beschriebenen Kreis die Punkte P und Q so, daß diese mit AB in eine Gerade fallen. Dann ist $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{MN}$.

▲8▲ Zu drei Strecken ermittle man die vierte Proportionale.



Lösung: Die gegebenen Strecken seien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und es sei eine solche Strecke $\overline{MN}$ zu suchen, daß

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{EF} : \overline{MN}.$$

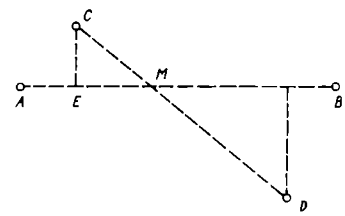
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$\overline{AB} > \overline{EF}$$

ist, weil wir im Falle $\overline{AB} < \overline{EF}$ immer eine solche ganze Zahl n finden können, daß $n \cdot \overline{AB}$ größer als $\overline{EF}$ wird, und dann die vierte Proportionale zu $n \cdot \overline{AB}$, $n \cdot \overline{CD}$ und $\overline{EF}$ zu suchen haben.

Die Konstruktion verläuft folgendermaßen: Wir bestimmen auf der Geraden AB den Punkt G so, daß $\overline{AG} = \overline{CD}$ wird (gemäß 7. Aufgabe). Danach zeichnen wir über $\overline{AB}$ einen Halbkreis (gemäß 4. Aufgabe) und bringen ihn mit dem um A mit dem Radius $\overline{EF}$ geschlagenen Kreis in H zum Schnitt. Schließlich bestimmen wir den Fußpunkt J des vom Punkt G aus auf $\overline{AH}$ gefällten Lotes (gemäß 5. Aufgabe). Dann ist die Strecke $\overline{AJ}$ die gesuchte vierte Proportionale.

▲9▲ Man bestimme den Schnittpunkt der durch die Punkte A und B bzw. C und D gegebenen Geraden.



Lösung: Wir bezeichnen den Fußpunkt des von den Punkten C und D auf AB gefällten Lotes mit E bzw. F. Die Gerade CD schneide die Gerade AB in M.

Wenn C und D auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen, so ist

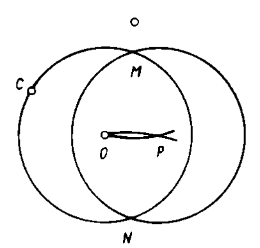
$$(\overline{CE} + \overline{DF}) : \overline{CE} = \overline{EF} : \overline{EM}.$$

Fallen dagegen die Punkte C und D auf dieselbe Seite der Geraden AB, so ist

$$(\overline{CE} - \overline{DF}) : \overline{CE} = \overline{EF} : \overline{EM}.$$

Nun sind $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ bekannt, und es läßt sich daher auf Grund von Aufgabe 7. und 8. $\overline{EM}$ konstruieren. Wenn wir nun schon $\overline{EM}$ kennen, so können wir den Ort von M ermitteln, indem wir von E aus auf $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{EM}$ abtragen.

▲10▲ Man bestimme die Schnittpunkte der durch ihre Punkte A und B vorgegebenen Geraden mit dem Kreis um den Mittelpunkt O und dem Radius $\overline{OC}$.



Lösung:

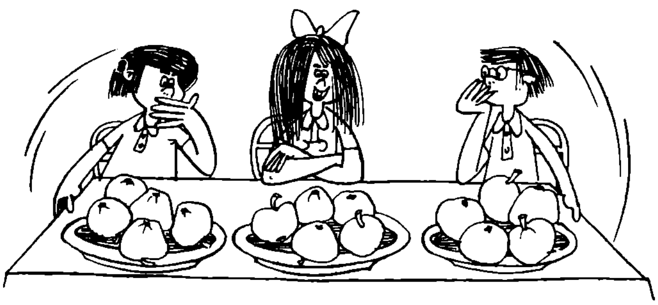
a) O liegt außerhalb der Geraden AB. Wir schlagen um A und B mit dem Radius $\overline{AO}$ bzw. $\overline{BO}$ Kreise, die einander in P schneiden. Nunmehr zeichnen wir um P als Mittelpunkt mit dem Radius $\overline{OC}$ einen Kreis. Die Schnittpunkte M und N der beiden Kreise sind die Schnittpunkte des gegebenen Kreises und der Geraden AB.

b) O liegt auf der Geraden AB. In diesem Falle bestimmen wir auf der Geraden AB die Punkte M und N so, daß $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OC}$ ist (gemäß Aufgabe 7.)

Wir sehen also, daß die 1. und 2. Grundkonstruktion immer auf die 3. zurückführbar ist, die sich unmittelbar mit einem Zirkel ausführen läßt. Hieraus folgt jedoch, daß jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, auch nur mit dem Zirkel durchgeführt werden kann.

Gyula Strommer

Kann man „etwas an niemanden verteilen“?



Überlegungen zu dem alten Thema der Division durch Null.

Immer wieder tauchen gelegentlich Fragen auf, *warum man nicht durch Null dividieren „dürfe“*. Nun sind gewiß in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft kritische Fragen nützlich. Es gibt aber in der Mathematik auch Fragen, von denen man bereits mathematisch (!) bewiesen hat, daß sie zu nichts führen. Wir wollen überlegen, wie es damit bei der Frage „Division durch Null“ steht.

Zuerst wollen wir die Tätigkeit „dividieren“ so erklären, daß über sie keine unterschiedlichen Meinungen mehr möglich sind. (Eine solche Erklärung heißt in der Wissenschaft eine *Definition*.) Eine Zahl a durch eine Zahl b zu dividieren, das soll — so erklären wir — folgendes bedeuten:

Man soll untersuchen, ob es eine Zahl x gibt, für die $b \cdot x = a$ gilt. Gibt es *keine* solche Zahl x, so wird erklärt: Die Division von a durch b ist *nicht* möglich. Gibt es dagegen eine solche Zahl x, so soll man untersuchen, ob es *mehr* als eine solche Zahl x gibt. Wenn das der Fall ist, so wird wieder erklärt: Die Division von a durch b ist *nicht* möglich. *Wenn es aber genau eine Zahl x gibt, für die $b \cdot x = a$ gilt, dann* — und wie die vorangehenden Erklärungen zeigen, auch *nur* dann — *wird erklärt: Diese Zahl x sei das Ergebnis der Division von a durch b.*

In Bild 1 wird diese Erklärung verdeutlicht. Wir müssen sie uns gut einprägen, damit wir nicht in manchen Fällen „aus Versehen“ eine andere Erklärung zugrunde legen. Hätte wohl z. B. jeder Leser erklärt, eine Division von a durch b sei *nicht möglich*, wenn es *mehr als eine Zahl* x gibt, für die $b \cdot x = a$ gilt? Manch einer wäre doch sicher bereit gewesen, zu „erklären“:

Dann soll eben *jede* solche Zahl x als ein mögliches „Divisionsergebnis“ gelten. Wir müssen uns also merken, daß die in der Mathematik zugrunde gelegte Division so eine „Erklärung“ nicht zuläßt! Dafür gibt es in der Mathematik gute Gründe. Das Dividieren, das wir erklären wollen, soll nämlich eine *Rechenoperation $a:b$* werden, und eine Rechenoperation liegt nur dann vor, wenn *ihr Ergebnis allein durch die Angabe der ersten Zahl a und der zweiten Zahl b festgelegt* wird: Eine Rechenoperation hat niemals (d. h. für keine Angabe von a und b) mehr als ein „mögliches Ergebnis“.

Nun einige Beispiele zu unserer Definition!

1. Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Division von 2 durch 0 möglich ist. Wir haben also zu fragen: Gibt es eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 2$ gilt? Die Antwort lautet: Nein, es gibt keine solche Zahl; denn für *jede* Zahl x gilt $0 \cdot x = 0$, also $0 \cdot x < 2$.

Damit haben wir als Ergebnis: *Die Division von 2 durch 0 ist nicht möglich.*

2. Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Division von 0 durch 0 möglich ist. Wir fragen zuerst: Gibt es eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 0$ gilt? Die Antwort lautet: Ja, es gibt eine solche Zahl, z. B. die Zahl 1; denn in der Tat gilt $0 \cdot 1 = 0$. Weiter fragen wir: Gibt es mehr als eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 0$ gilt? Antwort: Ja, z. B. außer der Zahl 1 auch die Zahl 2; denn es gilt auch $0 \cdot 2 = 0$. Als Ergebnis fanden wir damit: *Die Division von 0 durch 0 ist nicht möglich.*

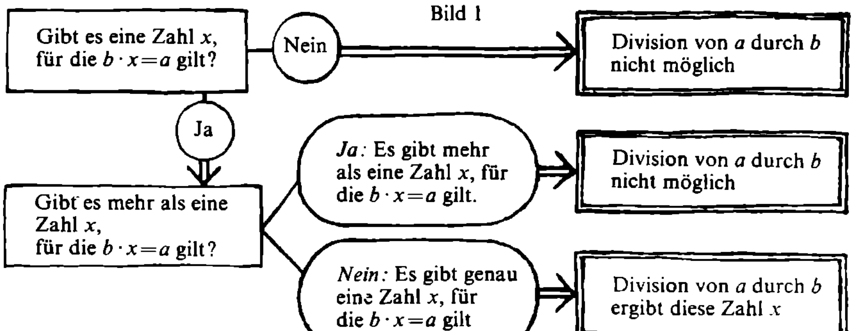
3. Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Division von 15 durch 3 möglich ist. Zuerst fragen wir: Gibt es eine Zahl x, für die $3 \cdot x = 15$ gilt? Die Antwort lautet: Ja, z. B. die Zahl 5; denn es gilt $3 \cdot 5 = 15$. Die nächste Frage lautet: Gibt es mehr als eine Zahl x, für die $3 \cdot x = 15$ gilt? Diesmal lautet die Antwort: Nein; denn für *jede* Zahl x, die *kleiner* als 5 ist, gilt $x < 5$ und daher $3 \cdot x < 3 \cdot 5$, d. h. $3 \cdot x < 15$; für *jede* Zahl x aber, die *größer* als 5 ist, gilt $x > 5$, also $3 \cdot x > 3 \cdot 5$, d. h. $3 \cdot x > 15$; es kann also *nur die eine* Zahl 5 die Eigenschaft haben, daß ihr Produkt mit 3 gleich der Zahl 15 ist. — Diese Ergebnisse besagen: *Die Division von 15 durch 3* (ist möglich und) *ergibt die Zahl 5.*

Mancher Leser hat sich vielleicht gewundert, daß in diesen drei Beispielen so einfache Rechnungen mit vielen Worten vorgeführt werden. Wer unsere Frage aber aufmerksam verfolgt hat, der wird gemerkt haben, daß bei ihr die „Schwierigkeit“ gar nicht im Rechnen besteht, sondern in den logischen Überlegungen, die man während des Rechnens nicht aus den Augen verlieren darf. Zum Beispiel mußten wir im 3. Beispiel auf folgendes achten: Als wir beweisen wollten, daß es *nicht mehr als eine* Zahl x gibt, für die $3 \cdot x = 15$ gilt, durften wir in diesem Beweis nicht etwa schon die Tätigkeit des Dividierens benutzen und kurz sagen:

„Wenn eine Zahl x die Eigenschaft $3 \cdot x = 15$ haben soll, dann muß für sie $x = 15:3$, d. h. $x = 5$ gelten, also gibt es nur die eine Zahl 5 mit dieser Eigenschaft.“ Hätten wir so „bewiesen“, dann hätten wir das, was wir beweisen wollten, im Beweis schon als „bekannt“ benutzt, nämlich das Divisionsergebnis $15:3 = 5$.

Einen solchen *fehlerhaften Beweis*, der das, was er erst zeigen soll, schon benutzt, nennt man einen „Zirkelschluß“. Im 3. Beispiel wurde der Zirkelschluß vermieden; man mußte sich dazu „nur“ ein anderes Hilfsmittel einfallen lassen; das Multiplizieren in Ungleichungen.

Bild 1



Nun wollen wir über einzelne Beispiele hinausgelangen und zu *allgemeinen* Aussagen kommen.

1. Aussage: Ist a eine von 0 verschiedene Zahl, d. h. gilt $a \neq 0$, so gibt es keine Zahl x, für die $0 \cdot x = a$ gilt. *Für jede Zahl $a \neq 0$ ist folglich die Division von a durch 0 nicht möglich.*

2. Aussage: Es gibt mehr als eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 0$ gilt. *Folglich ist die Division von 0 durch 0 nicht möglich.*

3. Aussage: Ist a eine beliebige Zahl und ist b eine von 0 verschiedene Zahl, d. h. gilt $b \neq 0$, so gibt es genau eine Zahl x, für die $b \cdot x = a$ gilt. *Für jede Zahl $b \neq 0$ und für jede Zahl a ist folglich die Division von a durch b möglich.*

Die erste Aussage wird jeder Leser nach dem Muster des 1. Beispiels leicht selbst beweisen können. Die zweite Aussage ist überhaupt dasselbe wie das 2. Beispiel; sie wurde hier nur zur Vollständigkeit nochmals kurz wiederholt. Die dritte Aussage kann erst von Schülern verstanden werden, die schon *gebrochene Zahlen* kennen; würde man das Wort „Zahl" etwa als „natürliche Zahl" verstehen, so wäre die dritte Aussage falsch. Beispielsweise wären zwar $a=2$ und $b=3$ natürliche Zahlen mit $b \neq 0$, aber es gäbe keine *natürliche* Zahl x, für die $3 \cdot x = 2$ gelten würde. — Die dritte Aussage, in dieser Weise von der Kenntnis gebrochener Zahlen an verstanden, kann nun grundsätzlich auf ähnlichem Wege wie beim 3. Beispiel bewiesen werden. Wenn man jedoch auch noch auf das Vorkommen positiver und negativer Zahlen achten muß, wird der Beweis etwas schwieriger. Wer sich beim Umgehen mit positiven und negativen Zahlen in Ungleichungen sicher fühlt und etwas Geduld aufbringt, wird den Beweis aber finden können.

Nun wollen wir noch einige Überlegungen zur *Veranschaulichung des Dividierens* durchführen.

Bekannt sei eine Anzahl b von Personen. Vorgeschrieben sei ferner eine Anzahl a von Gegenständen. *Gefragt wird, ob es genau eine Zahl x mit folgender Eigenschaft gibt:* Erhält jede der b Personen genau x Gegenstände, wobei aber niemals ein Gegenstand an zwei verschiedene Personen zugeteilt wird, so ist die Anzahl aller zugeteilten Gegenstände genau die vorgeschriebene Zahl a. Gibt es *keine* solche Zahl x oder gibt es *mehr als eine* solche Zahl x, so ist (wie wir wissen) die Division von a durch b nicht möglich. *Gibt es* aber *genau eine* solche Zahl x, so ist sie das Divisionsergebnis $a:b$, und wir sagen in diesem Falle und in keinem anderen: „Die Zahl x wurde dadurch ermittelt, daß man a Gegenstände gleichmäßig an b Personen *verteilte*." In diesem Sinne können wir an dem zweiten Bild ablesen, wie man 15 Gegenstände an 3 Personen verteilt, wobei sich *genau eine* Möglichkeit ergibt, nämlich daß jede Person genau $(15:3=)$ 5 Gegenstände erhält. Ebenso zeigt das dritte Bild eine Veranschaulichung von $2:3=\frac{2}{3}$.

Fragen wir nun nach einer solchen Veranschaulichung im Falle $1:0$, so haben wir zu prüfen, ob es möglich ist, genau eine Zahl x anzugeben, so daß folgendes gilt: Erhalten 0 Personen je x Gegenstände, so ist die Gesamtzahl der *an diese 0 Personen* verteilten Gegenstände genau 1. Die Antwort lautet: Man *kann nicht* „etwas an niemanden verteilen", d. h.: *Es gibt keine* Zahl x, so daß beim Verteilen von je x Gegenständen an 0 Personen insgesamt „etwas" (z. B. 1) zugeteilt würde.

Ebenso müssen wir feststellen: Man *kann nicht* „nichts an niemanden verteilen", d. h.: *Es gibt mehr als eine* (und folglich keine eindeutig bestimmte!) Zahl x, so daß beim Verteilen von je x Gegenständen an 0 Personen insgesamt „nichts" (0 Gegenstände) zugeteilt würde.

Die Rechenoperation des Dividierens $a:b$, praktisch angewandt als „Verteilen" von insgesamt a Gegenständen an b Personen, *ist nur für $b \neq 0$ möglich.*

L. Stammler

Bild 2

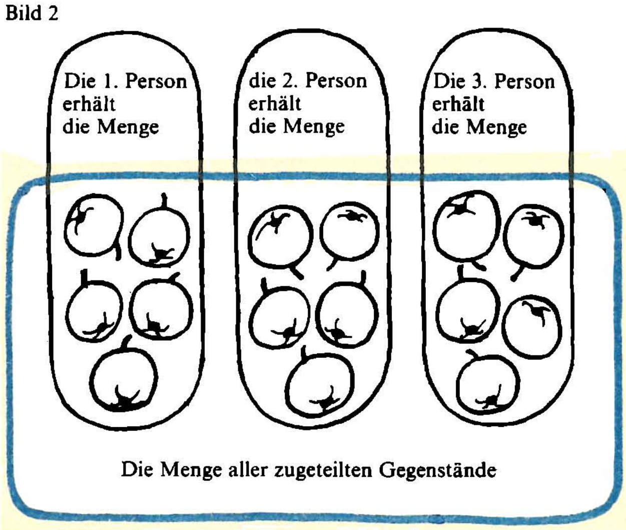
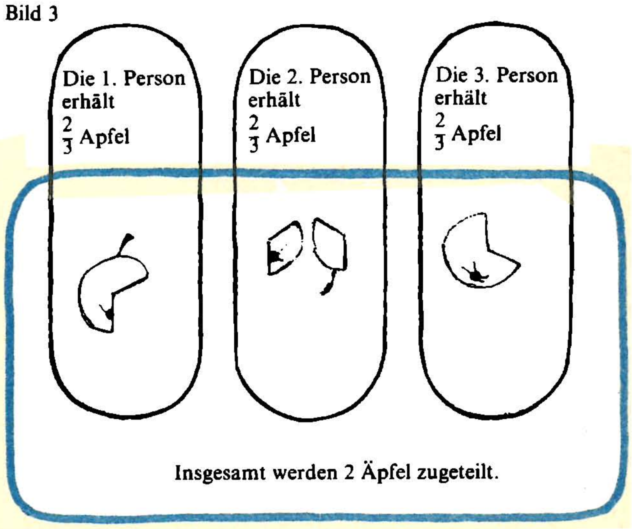
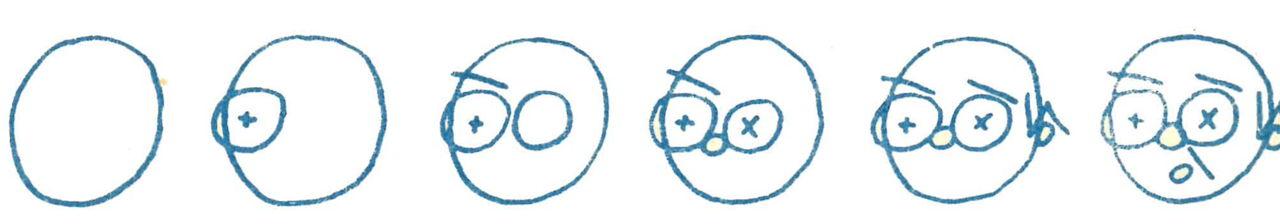


Bild 3





Null ... | plus Null ... | minus Null ... | multipliziert mit Null ... | minus Wurzel aus Null | das Ganze geteilt durch Null

aus: *Jean Effel, Historio-Grafik* (Eulenspiegelverlag)

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1974

▲5▲1195 Welche natürlichen Zahlen n erfüllen zugleich die folgenden Bedingungen?
a) $15<n<85$,
b) n ist Vielfaches von 17,
c) n ist nicht durch 3 teilbar.
Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

▲5▲1196 Es sind zwei natürliche Zahlen zu ermitteln, deren Summe 16 beträgt und deren Differenz gleich dem vierten Teil ihrer Summe ist. *Sch.*

W5▪1197 Einige Schüler teilen 96 Äpfel unter sich zu gleichen Teilen auf. Es wird kein Apfel zerschnitten, und es bleibt kein Apfel übrig. Wären es vier Schüler weniger gewesen, dann hätte jeder von ihnen vier Äpfel mehr erhalten. Wieviel Schüler teilen sich die Äpfel, und wieviel Äpfel erhält jeder von ihnen? *Sch.*

W5▪1198 Ein Rechteck habe die Seitenlängen 10 cm und 16 cm. Welchen Flächeninhalt besitzt ein Quadrat, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat?
Heidi Günther, Sohland, Kl. 7

W5*1199 Ein Quader habe die Kantenlängen 8 cm, 10 cm und 15 cm. Ein zweiter, zum ersten volumengleicher Quader besitzt die Kantenlängen 12 cm und 25 cm. Es ist die Länge seiner dritten Kante zu bestimmen! *Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch Meuselwitz*

W5*1200 Die Summe aus drei natürlichen Zahlen beträgt 63. Die erste dieser Zahlen ist um 3 kleiner als die zweite, die dritte um 3 größer als die zweite. Wie lauten diese drei Zahlen? *Bärbel Eggebrecht, Loitz, Kl. 7*

▲6▲1201 Es sind alle dreistelligen Primzahlen zu bestimmen, für welche das Produkt aus ihren drei Ziffern 252 beträgt. *Sch.*

▲6▲1202 Es ist
a) die kleinste, b) die größte
sechsstellige natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 18 teilbar ist und in der Form 71*84* dargestellt wird, wobei für die Sternchen Grundziffern einzusetzen sind. *Sch.*

W6▪1203 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}=3$ cm und den Schenkeln $\overline{AC}=\overline{BC}=5$ cm. Eine Gerade g, die parallel zur Geraden AC verläuft, schneide $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt D und $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt E so, daß der Umfang des Vierecks $ADEC$ genau 11 cm beträgt. Es ist die Länge der Strecke $\overline{AD}$ zu berechnen. *Sch.*

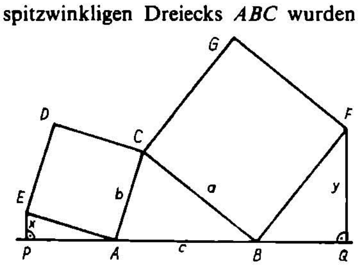
W6▪1204 Gegeben seien drei gebrochene Zahlen a, b und c. Das Produkt aus den beiden ersten Zahlen ist gleich 30,2. Das Produkt aus der ersten und der dritten Zahl ist gleich 19,8. Es ist das Produkt aus der ersten Zahl und aus der Summe der beiden übrigen Zahlen zu berechnen. *Sch.*

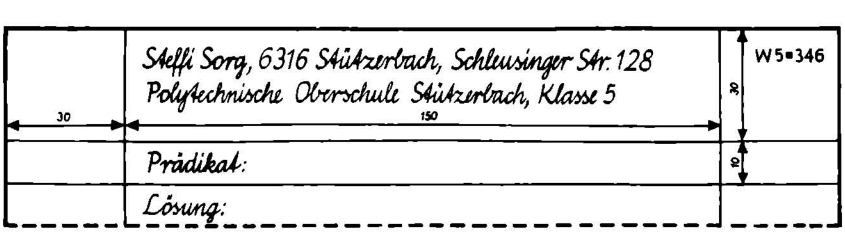
W6*1205 In der Multiplikationsaufgabe

```
**7·**
  5*4
  *2**
  6***
```

ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. *Sch.*

W6*1206 Über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC wurden





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W▪10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

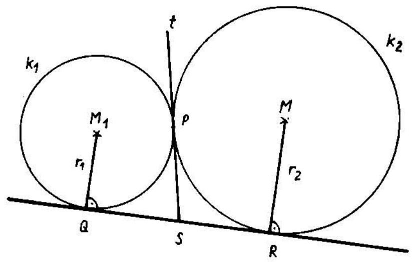
Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha* die Quadrate $ACDE$ und $BFGC$ konstruiert. Von den Eckpunkten E und F dieser Quadrate wurden die Lote $\overline{EP}=x$ und $\overline{FQ}=y$ auf die Gerade AB gefällt. Es sei $\overline{AB}=c$. Es ist zu beweisen, daß $x+y=c$ gilt.

▲7▲1207 Von einem Dreieck ABC sind gegeben $\overline{AB}=c=7$ cm, $\sphericalangle ABC=\beta=40°$, der Abstand $\overline{SD}=e=2$ cm des Schnittpunktes S der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ABC$ mit der Höhe $\overline{CD}=h_c$ von der Seite $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC ist zu konstruieren; die Konstruktion ist zu beschreiben. *Sch.*

▲7▲1208 Die abgebildete Figur stellt zwei sich von außen im Punkte P berührende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 mit $r_1<r_2$ dar. Im Punkte P wurde die beiden Kreisen gemeinsame Tangente t gezogen. Ferner wurde die beiden Kreisen gemeinsame äußere Tangente QR gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß der Schnittpunkt S der beiden Tangenten der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$ ist! *Sch.*



W 7 ■ 1209 Ein Schüler sollte 37 mit einer zweistelligen natürlichen Zahl multiplizieren, in der die Ziffer der Zehnerstelle doppelt so groß ist wie die Ziffer der Einerstelle. Beim Abschreiben dieser Aufgabe vertauschte dieser Schüler versehentlich die beiden Ziffern des Faktors, und er erhielt ein Resultat, das um 666 kleiner ist als das gesuchte. Wie lautet der zweite Faktor?

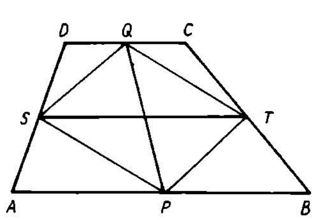
W 7 ■ 1210 Es sind zwei natürliche Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

a) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

b) Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl.

Wie lauten die beiden gesuchten Zahlen?

W 7*1211 In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei P die Mitte von $\overline{AB}$, T die Mitte von $\overline{BC}$, Q die Mitte von $\overline{CD}$ und S die Mitte von $\overline{AD}$. Ein solches Trapez ist aus den Strecken $\overline{PT}=4$ cm, $\overline{TQ}=5$ cm, $\overline{PQ}=6$ cm und dem Winkel $\sphericalangle BAD=50°$ zu konstruieren. *Sch.*



W 7*1212 Unter $n!$ (lies n Fakultät) versteht man das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$. So ist z. B. $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$.

Berechne $7!-6!-5!$, indem du die Differenz zunächst vereinfachst. *Sch.*

▲8▲1213 Es sind alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Summe

$s=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$

gleich einem Vielfachen von 10 ist.

Ch. Lerche, Hähnichen

▲8▲1214 a) Man beweise, daß in einem ebenen konvexen n-Eck ($n\geqq3$) höchstens drei Winkel spitze Winkel sind.

b) Man konstruiere ein spezielles ebenes konvexes Fünfeck, das genau drei spitze Winkel hat.

c) Man konstruiere ein spezielles ebenes *nicht*konvexes Fünfeck, das vier spitze Winkel hat.

Anleitung zur Lösung: Ein ebenes Vieleck ist genau dann konvex, wenn es nur spitze, rechte oder stumpfe Winkel, also keine überstumpfen Winkel, hat.

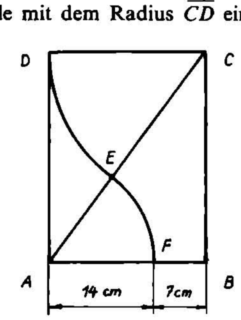
Für die Winkelsumme eines ebenen n-Ecks gilt $s=(n-2)\cdot180°$. *T.*

W 8 ■ 1215 In dem Buch des Georgiers *Suchan-Saba Orbeliani* (1658 bis 1725) „Die Weisheit der Lüge", einer Sammlung von Fabeln und Erzählungen, finden wir die folgende Aufgabe:

Drei Brüder wollten sich voneinander trennen und ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen. Sie sagten: „Zehn Ziegen haben je ein Zicklein, zehn je zwei Zicklein und zehn je drei; wir wollen sie so unter uns teilen, daß kein Bruder mehr erhält als der andere und auch kein Zicklein von seiner Mutter getrennt wird."

Wie konnten die drei Brüder ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen? *L.*

W 8 ■ 1216 Die Figur stellt ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB}<\overline{BC}$ dar. Um den Punkt C wurde mit dem Radius $\overline{CD}$ ein Kreisbogen



beschrieben, der die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkte E schneidet. Um den Punkt A wurde ein weiterer Kreisbogen mit dem Radius $\overline{AE}$ beschrieben, der die Seite $\overline{AB}$ in dem inneren Punkt F so schneidet, daß $\overline{AF}=14$ cm und $\overline{FB}=7$ cm gilt. Es ist die Länge der Rechteckseite $\overline{BC}$ zu berechnen.

Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen

W 8*1217 Man beweise, daß jedes ebene konvexe Viereck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ und $\overline{DA}=d$, in dem

$a+b=c+d$ und $b+c=d+a$

gilt, ein Parallelogramm ist. *Sch.*

W 8*1218 Man berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Rosette und entscheide, ob er größer als, kleiner als oder gleich $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des umbeschriebenen Kreises ist.

Dabei sei der Radius r des umbeschriebenen Kreises gegeben. Die sechs Teile der Rosette seien von Kreisbögen begrenzt, die den Radius r haben. *L.*

W 9 ■ 1219 Der neue Personenkraftwagen *Shiguli WAS 2103* aus dem Automobilwerk in Togliatti an der Wolga erreicht bei einer Fahrt aus dem Stand die Geschwindigkeit von $80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ in nur 10 s. Dabei kann angenommen werden, daß die Beschleunigung konstant ist.

a) Mit welcher Beschleunigung (in $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) fährt der Kraftwagen bis zur Erreichung dieser Geschwindigkeit?

b) Wie lang ist die Strecke, die der Kraftwagen dabei zurücklegt?

c) In welcher Zeit erreicht dieser Kraftwagen bei der Fahrt aus dem Stand seine Höchstgeschwindigkeit von $150\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, wobei wieder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und die gleiche Beschleunigung wie unter a) angenommen sei.

d) Wie lang ist die Strecke, die der Kraftwagen bis zur Erreichung dieser Höchstgeschwindigkeit zurücklegt?

Anleitung zur Lösung: Für eine gleichmäßig beschleunigte Fahrt aus dem Stand gelten die Formeln (vgl. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 74): $v=a\cdot t$, $s=\frac{a\cdot t^2}{2}$.

Dabei ist t die Zeit (in s), bei der Beschleunigung a (in $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) in der die Geschwindigkeit v (in $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) erreicht wird und der Weg s (in m) zurückgelegt wird. *L.*

W 9 ■ 1220 Es sei ABC ein Dreieck mit den Seiten $\overline{BC}=a=9$ cm, $\overline{AC}=b=12$ cm und $\overline{AB}=c=15$ cm.

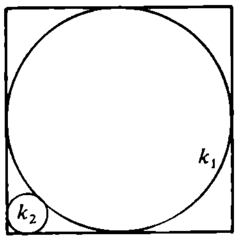
Man beweise, daß sich auf der Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks ein innerer Punkt D so finden läßt, daß die Längen der Strecken $\overline{CD}=x$ cm und $\overline{AD}=y$ cm ganzzahlige Maßzahlen x und y haben. *T.*

W 9*1221 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c mit $a+b+c=0$

$ab+ac+bc\leqq0$ gilt.

H. Gratias, EOS „Ernst Schneller", Sömmerda, Kl. 12

W 9*1222 Einem Quadrat sei ein Kreis k_1 einbeschrieben, der alle vier Seiten dieses Quadrates berührt. Ferner liege innerhalb dieses Quadrates ein zweiter Kreis k_2, der zwei Quadratseiten berührt und außerdem den Kreis k_1 von außen berührt.



a) Es ist der Radius x des Kreises k_2 zu berechnen, wobei die Seitenlänge a des Quadrates gegeben sei.
b) Wievielmal so groß ist der Flächeninhalt des Kreises k_1 wie der Flächeninhalt des Kreises k_2?

I. Kunath, Meißen

W 10/12 ■ 1223 Ein sterbender Vater teilte sein Geldvermögen (das aus lauter gleichartigen Münzen bestand) zu gleichen Teilen unter seinen Söhnen auf und gab dabei dem ersten Sohn eine Münze und $\frac{1}{7}$ des restlichen Geldes, dem zweiten zwei Münzen und $\frac{1}{7}$ des (nun noch verbliebenen) Restes, dem dritten drei Münzen und $\frac{1}{7}$ des (nun noch verbliebenen) Restes usw.; doch in diesem Augenblick starb der Vater, und es soll festgestellt werden, wieviel Söhne er gehabt und wieviel Münzen er besessen hat.

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt von dem byzantinischen Mathematiker *Maximos Planudes* von Nikomedia, der im 13. Jahrhundert gelebt und Bücher über die Arithmetik geschrieben hat. *L.*

W 10/12 ■ 1224 Es sind alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{2}{3}, \quad (1) \qquad \frac{xz}{x+z}=\frac{3}{4}, \quad (2) \qquad \frac{yz}{y+z}=\frac{6}{5} \quad (3)$$

zu ermitteln. *W. Janous, Innsbruck*

W 10/12*1226 Man ermittle alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen, deren Summe $x+y$, deren Produkt xy und deren Differenz der Quadrate x^2-y^2 einander gleich sind.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

W 10/12*1225 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 15 cm. Man beweise, daß sich auf der Seite $\overline{AB}$ dieses Dreiecks ein innerer Punkt D so finden läßt, daß die Längen der Strecken $\overline{AD}=x$ cm und $\overline{CD}=y$ cm ganzzahlige Maßzahlen x und y haben. *T.*

Aufgaben aus Olympiaden der SR Rumänien

Überreicht durch Prof. C. Ottescu, Bukarest

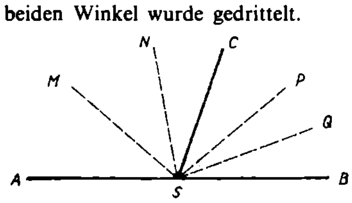
Klasse 5

▲1▲ In einem bestimmten volkseigenen Betrieb sind Facharbeiter und angelernte Arbeiter tätig. Ein Facharbeiter stellt durchschnittlich 20 Werkstücke, ein angelernter Arbeiter 15 Werkstücke je Tag her. Ein Meister soll eine aus 12 Werktätigen bestehende Brigade zusammenstellen, die täglich wenigstens 220 Werkstücke fertigt. Dabei sollen in diese Brigade möglichst viele angelernte Arbeiter aufgenommen werden.
Aus wieviel Facharbeitern bzw. angelernten Arbeitern muß sich diese Brigade zusammensetzen?

▲2▲ In einem Beutel befinden sich genau 10 weiße, 12 schwarze und 16 rote Kugeln von gleicher Größe und gleichem Gewicht. Wieviel Kugeln muß man dem Beutel mit verbundenen Augen entnehmen, um mit Sicherheit 3 Kugeln von der gleichen Farbe zu erhalten?

Klasse 6

▲1▲ Die abgebildete Figur stellt zwei Nebenwinkel $\sphericalangle ASC$ und $\sphericalangle BSC$ dar. Jeder dieser beiden Winkel wurde gedrittelt.



Weise nach, daß der Winkel $\sphericalangle NSP$ konstant ist, d. h., daß er unabhängig von der Größe des Winkels $\sphericalangle ASC$ ist!
Wie groß muß der Winkel $\sphericalangle ASC$ sein, wenn $\sphericalangle ASN = \sphericalangle NSQ$ gelten soll?

▲2▲ Berechne den Wert des Terms $\frac{3b}{2a+3b}$ für $\frac{a}{b}=0{,}6$!

Klasse 7

▲1▲ Drei Schüler *Axel*, *Bernd* und *Dieter* haben zur Finanzierung eines gemeinsamen Ausfluges zusammen 225 Lei gespart. Die Ersparnisse von Axel betrugen $\frac{2}{3}$ der Ersparnisse von Bernd, und die Ersparnisse von Bernd betrugen $\frac{3}{4}$ der Ersparnisse von Dieter.
Die Unkosten für den Ausflug beliefen sich aber nur auf insgesamt 120 Lei, und jeder dieser Schüler hatte den gleichen Anteil zu tragen.
Wieviel Lei verblieben jedem dieser drei Schüler von den Ersparnissen?

▲2▲ Hans sagt zu Bruno: „Denke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl und multipliziere sie mit 2. Addiere zu diesem Produkt 50. Dividiere das so erhaltene Ergebnis durch 2 und subtrahiere danach die von dir gedachte Zahl. Das Endergebnis deiner Rechnung beträgt genau 25."
Begründe, warum Hans das Endergebnis der Rechnung voraussagen konnte!

Klasse 8

▲1▲ Es seien a und b reelle Zahlen, und es sei $E=a^2+b^2-3a-3b$.
a) Man untersuche, ob E einen kleinsten Wert annimmt und gebe bejahendenfalls diesen Wert an.
b) Man weise nach, daß $E>0$ gilt, falls $a>3$ und $b>3$.

▲2▲ Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{CD}=b$, wobei $a>b$ sei.
1. Man drehe dieses Trapez um seine kleinere Grundseite, so daß ein Rotationskörper entsteht.
2. Man drehe dieses Trapez um seine größere Grundseite, so daß wieder ein Rotationskörper entsteht.
Wann hat der entstandene Rotationskörper ein größeres Volumen, im 1. Fall oder im 2. Falle? Können die Volumina einander gleich sein?

Klasse 9

▲1▲ Es sind alle reellen Zahlen a und b anzugeben, für die die Ausdrücke

$$E_1=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{ab(1+ab)}$$

und

$$E_2=\frac{1}{a(b-a)}+\frac{1}{b(a-b)}$$

definiert sind, und es ist zu beweisen, daß für alle diese a und b $E_1=E_2$ gilt.

▲2▲ Eine Balkenwaage muß gleichlange Arme haben, damit die Masse einer Ware richtig ermittelt wird. Auf einem Markt stellt ein Käufer fest, daß die Waage eines Händlers ungleiche Arme hat; daher befindet sich die Waage nicht mehr im Gleichgewicht, wenn die Ware und die Wägestücke vertauscht werden. Der Käufer, der 2 kg einer Ware kaufen will, verlangt daher, daß ihm mit dieser Waage zunächst 1 kg so abgewogen wird, daß die Ware links und das Wägestück rechts liegt, und dann ein weiteres Kilogramm so, daß die Ware rechts und das Wägestück links liegt. Es soll entschieden und begründet werden, ob der Käufer auf diese Weise mehr als 2 kg, weniger als 2 kg oder genau 2 kg der wahren Masse der Ware erhält. (Dabei soll angenommen werden, daß die Waage sich im unbelasteten Zustand im Gleichgewicht befindet.)

Aufgaben Klasse 10 auf S. 39

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil.

Horst Baumann

Leiter des Lehrstuhles Math. f. Ökonomen an der Handelshochschule Leipzig

Die *Handelshochschule* Leipzig bildet in einem vierjährigen Direktstudium Kader für die Tätigkeit in zentralen und bezirklichen wirtschaftsleitenden Organen und Einrichtungen des Binnenhandels, in zentralen und örtlichen staatlichen Organen für Handel und Versorgung sowie in Bildungs- und Forschungseinrichtungen des Binnenhandels aus.

Im Verlauf des Studiums erhalten die Studenten der Hochschule eine umfassende Ausbildung in Marxismus-Leninismus, in Politischer Ökonomie, in der Ökonomie der sozialistischen Warenzirkulation und werden mit den modernen Methoden der Leitung, Planung und Organisation des sozialistischen Binnenhandels vertraut gemacht. Dazu dient auch die in den ersten beiden Studienjahren erfolgende Ausbildung im Fach Mathematik für Ökonomen. Hier werden den Studenten die wichtigsten mathematischen Verfahren für die Modellierung und Optimierung ökonomischer Prozesse einschließlich der dazu notwendigen mathematischen Grundkenntnisse vermittelt. Die mathematische Ausbildung ist in ihrem fachspezifischen und methodischen Aufbau so gestaltet, daß die Bildungs- und Erziehungsmöglichkeiten der Mathematik, besonders die Fähigkeiten und Fertigkeiten zum logischen und schöpferischen Denken und zur Abstraktion bestmöglich genutzt und gefördert werden. Neben den mathematischen Grundlagen, die die Stoffkomplexe

mathematische Logik und Mengenlehre,
lineare Algebra (insbesondere Matrizenrechnung),
Differential- und Integralrechnung,
Wahrscheinlichkeitsrechnung

umfassen, wird besonders in der Ausbildung im Fach Mathematik für Ökonomen die praktische Anwendung mathematischer Verfahren zur Modellierung und Optimierung ökonomischer Prozesse im Handel dargelegt. Einen breiten Raum nehmen dabei die lineare und nichtlineare Optimierung, die Netzplantechnik, die für den Handel außerordentlich wichtigen Fragen der Transport- und Standortmodellierung und -optimierung sowie die Lagerhaltungsmodelle ein.

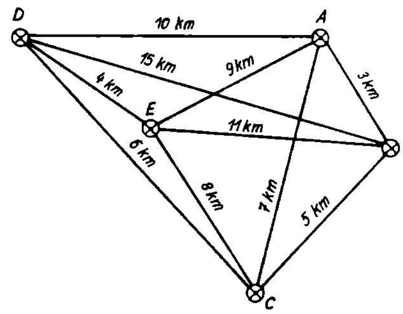
Nach Abschluß der zweijährigen Ausbildung im Fach Mathematik für Ökonomen besitzen dann die Studenten ein anwendungsreifes Wissen, das sie in den Fachdisziplinen der Studienrichtung Binnenhandel anwenden müssen.

Die folgende Aufgabe ist aus dem sehr wichtigen Gebiet der *Transportoptimierung* entnommen und soll die Nutzung des mathematischen Instrumentariums für die Optimierung des Transportprozesses veranschaulichen.

▲1229▲ Die regelmäßige Belieferung der Einzelhandelsverkaufsstellen mit Nahrungs- und Genußmitteln erfordert eine exakte Planung des Einsatzes der Transportfahrzeuge. So wirken sich ungenügende Auslastung der Kapazität der Lieferfahrzeuge, ungünstige Festlegung der Auslieferungstouren nachteilig für die gesamte Volkswirtschaft aus, da unnötige zusätzliche Kosten entstehen und Transportfahrzeuge unnötig gebunden werden, die an anderer Stelle dringend gebraucht werden. Der verantwortliche Einsatzleiter im volkseigenen Handelstransportbetrieb muß daher mit modernen Planungsmethoden den rationellsten Einsatz der ihm zur Verfügung stehenden Transportfahrzeuge sowie deren bestmögliche Auslastung sichern. Dazu bedient er sich spezieller mathematischer Methoden und Modelle der Transportoptimierung. Für die günstigste Gestaltung der Touren für die Belieferung der Einzelhandelsverkaufsstellen durch den sozialistischen Großhandel muß dann das sogenannte Rundfahrtmodell angewandt werden.

Die Problemstellung für dieses Rundfahrtmodell kann man wie folgt formulieren:
Es sollen von *einem* Lager aus die verschiedenen Einzelhandelsverkaufsstellen in einer Reihenfolge (Rundfahrt) derart nacheinander angefahren werden, daß die zurückgelegte Gesamtstrecke zu einem *Minimum* wird. Dabei wird jede Verkaufsstelle innerhalb der Rundfahrt genau einmal berührt. Ferner muß das Fahrzeug am Ende der Rundfahrt wieder in das Lager zurückkehren.

Für unsere zu lösende Aufgabe wollen wir davon ausgehen, daß vier Orte A, B, C und D mit je einer Verkaufsstelle von einem Lager E aus in einer Rundfahrt angefahren werden sollen. Die Entfernungen zwischen diesen Orten sind aus der nachstehenden Skizze zu entnehmen.



Eine Rundfahrt wäre z. B.:

$$E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E$$

mit einer Gesamtentfernung von

$$9+7+6+15+11=48 \text{ (km)}$$

oder

$$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$$

mit einer Gesamtentfernung von

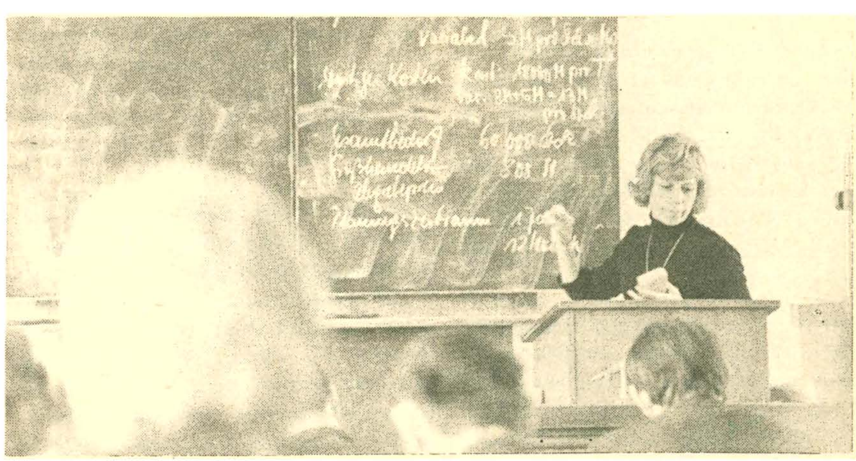
$$10+15+5+8+9=47 \text{ (km)}.$$

Diese Rundfahrten sind allerdings — wie selbst eingeschätzt werden kann — sehr ungünstig.

Berechne nun für diese 5 Orte die optimale Rundfahrt, d. h. die Rundfahrt, für die die zurückgelegte Gesamtentfernung ein Minimum wird.

Als Lösungshinweis sei gegeben, daß es sich hier um eine kombinatorische Aufgabenstellung handelt!

Studenten der HHL im Mathematikseminar



Weiter durch die Welt der Tetraeder

Wer sein räumliches Vorstellungsvermögen trainieren will, der folge der Fortsetzung unseres Streifzuges durch die Welt der Tetraeder. Wir hatten ihn im 5. Jahrgang dieser Zeitschrift, 1971, Heft 5, S. 106—107, begonnen. Zuletzt waren wir den rechtwinkligen Tetraedern begegnet:

Bezeichnung: Ein Tetraeder, das in einer Ecke paarweise senkrecht aufeinander stehende Kanten besitzt, heißt ein *rechtwinkliges Tetraeder.*

Die rechtwinkligen Tetraeder entsprechen in gewisser Weise den rechtwinkligen Dreiecken in der Ebene. Beim Nennen des Begriffs „rechtwinkliges Dreieck" denkt ihr gewiß sofort an die mit den rechtwinkligen Dreiecken verknüpften Sätze: Kathetensatz, Höhensatz, Satz von Pythagoras (manchmal „Satzgruppe Pythagoras" genannt). Es heißt der Satz von Pythagoras gelegentlich auch „ebener Pythagoras", und zwar dann, wenn man ihn kurz und knapp unterscheiden will vom

„räumlichen Pythagoras", der benutzt wird, wenn man etwa die Länge einer Diagonale eines Quaders oder eines Würfels aus den Kantenlängen berechnen will, oder vom

„trigonometrischen Pythagoras", der in der Theorie der trigonometrischen Funktionen die Beziehung „$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ für alle Winkel φ" bedeutet.

Uns geht es nun um einen anderen „räumlichen Pythagoras":

3. Der Pythagoreische Lehrsatz für rechtwinklige Tetraeder

Laßt eure Fantasie einmal spielen, um einen Satz von Pythagoras für rechtwinklige Tetraeder zu formulieren! An die Stelle von Hypotenuse und Katheten einerseits und Hypotenusen- und Kathetenlängen andererseits könnten welche Tetraederstücke treten? ... Das Resultat der Bemühungen ist, daß folgende Behauptung wünschenswerterweise richtig sei:

Satz 1: Es sei $SABC$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S. Wird einmal (der Kürze wegen) der Flächeninhalt der Dreiecke ΔABC, ΔABS, ΔBCS bzw. ΔCAS bezüglich mit (ABC), (ABS), (BCS) bzw. (CAS) bezeichnet, so gilt:

$(ABS)^2+(BCS)^2+(CAS)^2=(ABC)^2$.

Beweis: Zum Beweis dieses und weiterer Sätze benötigen wir

a) bezüglich eines rechtwinkligen Dreiecks den Satz von Pythagoras,
den Höhensatz,
den Kathetensatz sowie

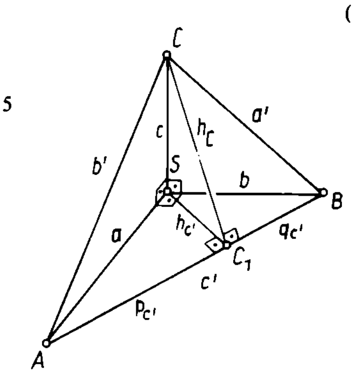
b) aus der darstellenden Geometrie den folgenden Sachverhalt, den ihr euch übrigens auch bequem selber klarmachen könnt:

Es wird die senkrechte Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene π betrachtet. Zwei senkrecht zueinander stehende (sich schneidende oder windschiefe) Geraden, von denen die eine zur Bildebene parallel liegt und die andere nicht auf der Bildebene senkrecht steht, werden dieser Abbildung unterworfen. Sie bilden sich als zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden ab.

Nun zum Beweis des Satzes 1. Die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABS, ΔBCS und ΔCAS erhalten wir natürlich sofort. Mit den aus Bild 5 zu entnehmenden Bezeichnungen ist

$$(ABS)=\frac{1}{2}ab,\quad (BCS)=\frac{1}{2}bc,\quad (CAS)=\frac{1}{2}ca. \tag{1}$$

Bild 5



Von dem Dreieck ΔABC denken wir uns die Höhe h_C durch den Punkt C konstruiert; der Höhenfußpunkt sei C_1. — Stellt die Figur den Sachverhalt richtig dar? Diese Frage bedeutet: Prüfe, ob C_1 tatsächlich zwischen A und B liegt! Das ist gleichwertig mit einem Nachweis der Aussage: Das Dreieck ΔABC unseres rechtwinkligen Tetraeders $SABC$, dessen Kanten bei S senkrecht aufeinander stehen, ist spitzwinklig. — Das Lot $h_{c'}$ aus S auf die Gerade AB hat C_1 als Fußpunkt (Beweis?). Anhand des Bildes 5 ersehen wir:

$h_{c'}^2=p_{c'}\cdot q_{c'}$ (Höhensatz), (*)

$a^2=p_{c'}\cdot(p_{c'}+q_{c'})$ (Kathetensatz), somit

$b^2=q_{c'}\cdot(p_{c'}+q_{c'})$

$a^2b^2=p_{c'}\cdot q_{c'}\cdot(p_{c'}+q_{c'})^2$, wegen (*) und $(p_{c'}+q_{c'})^2=a^2+b^2$:

$=h_{c'}^2\cdot(a^2+b^2)$, daher

$h_{c'}^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; analog: $h_{a'}^2=\dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$,

$h_{b'}^2=\dfrac{c^2a^2}{c^2+a^2}$. Nun ist

$$h_C^2=h_{c'}^2+c^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2, \text{ also} \tag{2}$$

$$h_C^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}; \tag{3}$$

analog: $h_A^2=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}$,

$h_B^2=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{c^2+a^2}$.

Damit ergibt sich wegen $\overline{AB}^2=(p_{c'}+q_{c'})^2=a^2+b^2$ zunächst

$$(ABC)^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2\cdot h_C^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \tag{4}$$

und weiter nach (1):

$(ABC)^2=(ABS)^2\cdot(BCS)^2+(CAS)^2$, (5, Satz 1)

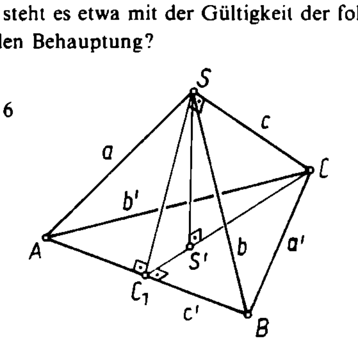
w. z. b. w.

Aufgabe 6: Formuliere die Umkehrung von Satz 1, und beweise die Gültigkeit dieser Umkehrung!

4. Der Kathetensatz für rechtwinklige Tetraeder

Nachdem es gelungen ist, den Satz von Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke aus der Ebene in den Raum für rechtwinklige Tetraeder zu übertragen, ist doch die Frage sicherlich naheliegend: Lassen sich in entsprechender Weise auch der Kathetensatz und der Höhensatz für rechtwinklige Tetraeder aussprechen? Wieder soll sich eure mathematische Fantasie angeregt fühlen! ... Wie steht es etwa mit der Gültigkeit der folgenden Behauptung?

Bild 6



Satz 2: Es sei $SABC$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S. Das Lot von S auf die

gegenüberliegende Seite ΔABC habe den Fußpunkt S'. Dann gilt, wenn Dreiecksflächeninhalte wie in Satz 1 bezeichnet werden:

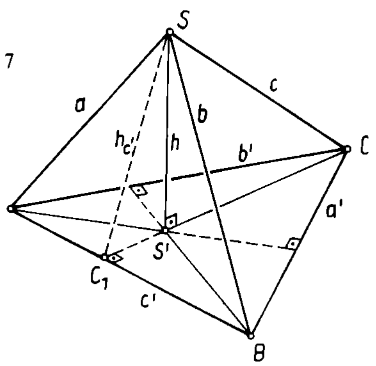
$$\left\{\begin{array}{l}(ABS')\cdot(ABC)=(ABS)^2\\ (BCS')\cdot(ABC)=(BCS)^2 \quad (6, \text{Satz } 2)\\ (CAS')\cdot(ABC)=(CAS)^2\end{array}\right.$$

Aufgabe 7: Beweise den Satz 2!
Anleitung: Schneide die Ebene $SS'C$ mit den Ebenen ABC und ABS; der Schnittpunkt von $SS'C$ mit der Geraden AB ist C_1, der Fußpunkt des Lotes aus S auf AB. Die Ebene $SS'C$ steht auf AB senkrecht. Notiere für das rechtwinklige Dreieck ΔSCC_1 eine geeignete der beiden Aussagen des Kathetensatzes und multipliziere mit $\overline{AB}^2$!

5. Der Höhensatz für rechtwinklige Tetraeder

Noch leichter als der Pythagoreische Lehrsatz aus der Ebene in den Raum ließ sich also der Kathetensatz für rechtwinklige Tetraeder übertragen. Das stimmt uns bezüglich einer Übertragung des Höhensatzes hoffnungsfroh! Konstruieren wir also die Höhe h eines rechtwinkligen Tetraeders $SABC$, das Lot aus S auf ΔABC; der Fußpunkt sei S' (Bild 7). Während ein rechtwinkliges Dreieck durch die Höhe auf die Hypotenuse in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, definiert die Tetraederhöhe h sicher kein einziges rechtwinkliges Tetraeder! Das scheint nun wieder für unser Übertragungsvorhaben weniger günstig zu sein.

Bild 7



Ermitteln wir erst einmal die Länge der Höhe h; Bild 7. Dies ist eine leichte Anwendung der Beziehung (2), die auf das rechtwinklige Dreieck ΔABS bezogen ist. Gemäß (2) gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ΔSCC_1:

$$h^2=\frac{c^2\cdot h_{c'}^2}{c^2+h_{c'}^2}, \text{ also nochmals nach (2):}$$

$$h^2=\frac{c^2\cdot\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}{c^2+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}. \qquad (7)$$

In dem „räumlichen Kathetensatz" (Satz 2) haben die Flächeninhalte (ABS'), (BCS'), (CAS') die Stelle der Hypotenusenabschnitte p, q eines rechtwinkligen Dreiecks eingenommen. Nennen wir
$(BCS')=P$, $(CAS')=Q$, $(ABS')=R$,
dann folgt aus (6) (Satz 2) zusammen mit (1) und (4):

$$P\cdot Q\cdot R=(BCS')\cdot(CAS')\cdot(ABS')=\frac{(BCS)^2\cdot(CAS)^2\cdot(ABS)^2}{(ABC)^3}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}b^2c^2\cdot\frac{1}{4}c^2a^2\cdot\frac{1}{4}a^2b^2}{\frac{1}{8}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^3}}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{a^4b^4c^4}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^3}} \text{ oder}$$

$$P\cdot Q\cdot R=\frac{abc}{8}\cdot h^3 \qquad (8)$$

Daß die Tetraederhöhe h unser Tetraeder $SABC$ nicht in rechtwinklige Tetraeder zu zerlegen vermag, hat anscheinend zur Folge, daß bei der Übertragung des Höhensatzes für rechtwinklige Dreiecke ($p\cdot q=h^2$) in den Raum für rechtwinklige Tetraeder ein Korrekturfaktor ins Spiel gebracht werden muß; solch ein Faktor ist sichtlich auch aus Dimensionsgründen nötig (links steht eine Maßzahl für cm^6, also muß auch rechts eine solche stehen). Insgesamt haben wir damit den

Satz 3: Es sei $SABC$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S der Längen a, b, c. Die senkrechte Projektion der Seitenflächen ΔABS, ΔBCS und ΔCAS auf die Ebene des Dreiecks ΔABC liefert die Dreiecke $\Delta ABS'$, $\Delta BCS'$ und $\Delta CAS'$. Werden die Flächeninhalte $(BCS')=P$, $(CAS')=Q$, $(ABS')=R$ eingeführt und wird die Länge der Höhe SS' mit h bezeichnet, so gilt:

$$P\cdot Q\cdot R=\frac{abc}{8}\cdot h^3.$$

Nun kann aber dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke $h^2=p\cdot q$ mit Hilfe des Kathetensatzes $p\cdot c=a^2$, $q\cdot c=b^2$ auch die Form

$$\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=h^2 \text{ oder wegen } c^2=a^2+b^2$$

$$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad (9)$$

gegeben werden, was schon aus (2) bekannt ist. Diese Form ist mit (7) unmittelbar vergleichbar. Das kann man auf folgende Weise noch offensichtlicher machen:
Aus (9) ergibt sich als Beziehung zwischen den Katheten und der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

und aus (7) erhalten wir als Beziehung zwischen den von S ausgehenden, zueinander senkrechten Kanten a, b, c und der Höhe h eines rechtwinkligen Tetraeders $SABC$:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \qquad (11)$$

Hierin können wir eine genaue Übertragung des Höhensatzes sehen. (Wer die trigonometrischen Funktionen kennt, kann aus (11) folgendes herleiten: Werden die Winkel $\alpha=\sphericalangle ASS'$, $\beta=\sphericalangle BSS'$, $\gamma=\sphericalangle CSS'$ zwischen der Höhe SS' und den ausgezeichneten Kanten SA, SB, SC eingeführt, so gilt: $1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$, eine in der analytischen Geometrie des Raumes wichtige und oft verwendete Beziehung. Kannst du eine entsprechende Beziehung in der Ebene aus (10) herleiten?
Das rechtwinklige Tetraeder birgt noch eine ganze Reihe interessanter Eigenschaften. Es spielt eine wichtige Rolle beispielsweise in der Axonometrie, wie sie in dem Aufsatz von *Kühn, E.:* Darstellende Geometrie und Architekturausbildung II, diese Zeitschrift **6** (1972), H. 6, S. 128—129, auf S. 128 (Satz von Pohlke) angedeutet wird. Eine hübsche Anwendung findet das rechtwinklige Tetraeder im „Katzenauge", vergl. *Schröder, E.:* Auch ein Schlußlicht hat es in sich, diese Zeitschrift **4** (1970), H. 1, S. 8—9. Wir wollen uns mit obigen Darlegungen begnügen, noch eine hübsche Aufgabe stellen und in einer weiteren Fortsetzung andere aufregende Dinge über Tetraeder kennenlernen!

Aufgabe 8: Ist ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck, dessen Höhen sich im Punkte S' schneiden und die Höhenfußpunkte A_1, B_1, C_1 haben, so gilt:

$$AS'\cdot S'A_1=BS'\cdot S'B_1=CS'\cdot S'C_1.$$

Anleitung: Weise zunächst nach, daß es wenigstens ein rechtwinkliges Tetraeder $SABC$ gibt (mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S), dessen Seite ΔABC mit dem gegebenen Dreieck kongruent ist, und nutze geeignete der oben angestellten Betrachtungen aus! — Gilt die Aussage der Aufgabe 8 auch für stumpfwinklige Dreiecke?

G. Geise

Biographie des Autors
Prof. Dr. *G. Geise* ist in Stendal geboren, besuchte in Aschersleben vier Jahre die Grundschule, anschließend sechs Jahre die Mittelschule. Nachdem er den Schlosserberuf erlernt hatte, besuchte er nochmals für eineinhalb Jahre eine Erweiterte Oberschule, um die Reifeprüfung abzulegen. Damit war der Weg frei für ein fünfjähriges Studium der Mathematik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Seit 1956 ist er als wissenschaftlicher Assistent, Oberassistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Hochschule bzw. Technischen Universität Dresden tätig. In den Jahren 1962/63 und 1965/66 wirkte er an der Universität Rostock.
Die Arbeitsgebiete des 1972 zum ordentlichen Professor ernannten Wissenschaftlers sind: Kinematik, Matrizengeometrie, elementare Differentialgeometrie, oftmals im Zusammenhang mit speziellen Problemen aus der Technik. Er wirkt seit Jahren aktiv bei den *Olympiaden Jg. Mathematiker der DDR* mit.

Das Prinzip der kleinsten Zahl hilft uns weiter

1. Von dem bedeutenden Mathematiker *Gauß* wird erzählt, daß er seinen Lehrer mit einer schnellen Lösung folgender Aufgabe überraschte:

● Man bestimme die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100! Während der Lehrer seine Schüler für längere Zeit beschäftigt glaubte, überlegte *Gauß* kurz und summierte wie folgt:

$$1+2+3+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)$$
$$=101\cdot 50$$
$$=5050$$

● Bestimme auf die gleiche Weise die Summe aller natürlichen Zahlen von
a) 1 bis 30 b) 1 bis 31!

Bezeichnen wir die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 mit $S(100)$, so ist

$$S(100)=\frac{(100+1)\cdot 100}{2}.$$ Ebenso ist

$$S(30)=\frac{(30+1)\cdot 30}{2}=465$$ und

$$S(31)=\frac{(31+1)\cdot 31}{2}=496.$$

2. Wir können nun für eine beliebige natürliche Zahl $n>1$ die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n bestimmen und sie mit $S(n)$ bezeichnen. Wenn n jedoch sehr groß ist, so wird das Addieren der n Summanden eine langwierige Angelegenheit. Schneller käme man zum Ziel, wenn man das Addieren der vielen Summanden auf eine Multiplikation zurückführen könnte, so wie es *Gauß* für $n=100$ tat.

Kann man $S(n)$ mit Hilfe der Gleichung

$$S(n)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

berechnen?

Für $n=100$ und $n=30$ und $n=31$ ist die Gleichung richtig. Aber ist sie für *jede* natürliche Zahl n $(n>1)$ richtig?

● Überprüfe die Gleichung für $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$!

Für $n=2$ erhalten wir

$$S(2)=1+2=3$$

und $$\frac{(2+1)\cdot 2}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3.$$

Also ist die Gleichung für $n=2$ richtig.

Wollten wir jedoch die Gleichung für jede einzelne natürliche Zahl überprüfen, würden wir uns eine unlösbare Aufgabe stellen. Es gibt ja zu jeder natürlichen Zahl einen Nachfolger, für den die Gleichung auch wieder geprüft werden muß, so daß wir mit dieser Aufgabe nie zu Ende kämen.

3. Hier kann uns eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen helfen, das

Prinzip der kleinsten Zahl: *Jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl.*

Dieses Prinzip ist eine Grundeigenschaft der natürlichen Zahlen, die wir nicht beweisen. Wir wollen uns mit dem Inhalt des Prinzips jedoch an einigen Beispielen vertraut machen.

Sei M_1 die Menge der Zahlen 17, 10163, 10000000, 623, 11 und 89. Offenbar enthält die Menge M_1 eine kleinste Zahl, nämlich 11. Die Zahl 11 ist kleiner als alle anderen Zahlen, die ebenfalls der Menge M_1 angehören.

M_2 sei die Menge aller Primzahlen. Hier ist 2 die kleinste Zahl. Enthält eine Menge nur eine einzige natürliche Zahl, so ist diese eine Zahl selbstverständlich auch die kleinste Zahl der Menge.

● Bestimme die kleinste Zahl
a) der Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen,
b) der Menge aller natürlichen Zahlen, die größer als 100 und durch 6 teilbar sind!

4. Wir werden nun das Prinzip der kleinsten Zahl anwenden, um den folgenden Satz zu beweisen:

Für jede natürliche Zahl n $(n>1)$ gilt

$$S(n)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}.$$

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl n $(n>1)$, für die die Gleichung falsch ist. Dann ist die Menge der natürlichen Zahlen, für die die Gleichung falsch ist, nicht leer. Nach dem *Prinzip der kleinsten Zahl* enthält diese Menge eine kleinste Zahl, die wir k nennen wollen.

Es ist also

$$S(k)\neq\frac{(k+1)\cdot k}{2}. \qquad \text{(X)}$$

Es muß $k>2$ gelten, denn wir lassen bei unserer Aufgabe nur natürliche Zahlen zu, die größer als 1 sind, und für die natürliche Zahl 2 ist die Gleichung — wie oben gezeigt — richtig. Da k die kleinste Zahl ist, für die die Gleichung falsch sein soll, muß die Gleichung für den Vorgänger von k, d. h. für die Zahl $k-1$, gelten, Es ist also

$$S(k-1)=\frac{((k-1)+1)\cdot(k-1)}{2}$$
$$=\frac{k\cdot(k-1)}{2}. \qquad \text{(XX)}$$

Aus $S(k-1)=1+2+\ldots+(k-1)$
und $S(k)=1+2+\ldots+(k-1)+k$
folgt $S(k)=S(k-1)+k$.

Unter Verwendung der richtigen Gleichung (XX) erhalten wir

$$S(k)=\frac{k\cdot(k-1)}{2}+k$$
$$=\frac{k^2-k}{2}+\frac{2k}{2}$$
$$=\frac{k^2-k+2k}{2}$$
$$=\frac{k^2+k}{2}$$
$$S(k)=\frac{(k+1)\cdot k}{2}$$

im Widerspruch dazu, daß die Gleichung für die Zahl k nicht gelten sollte. Also war die Annahme, daß es eine natürliche Zahl n $(n>1)$ gibt, für die die Gleichung nicht gilt, falsch.

Die Gleichung

$$S(n)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$ gilt

somit für jede natürliche Zahl n $(n>1)$.

5. Wenden wir uns einer anderen Aufgabe zu.

● Gegeben seien zwei Buchstaben a und b.

Gegeben seien zwei Buchstaben a und b. Wir wollen nun Wörter nur unter Verwendung dieser beiden Buchstaben bilden, wobei aber jeder dieser Buchstaben durchaus mehrfach verwendet werden darf.

Betrachten wir zunächst die Wörter, die aus jeweils drei Buchstaben zusammengesetzt sind:

aaa	*abb*
aab	*bab*
aba	*bba*
baa	*bbb*

Man nennt diese Wörter auch Wörter der Länge 3. Es gibt also acht Wörter der Länge 3, wenn man zwei Buchstaben zur Verfügung hat. Daß diese Wörter in der deutschen Sprache ohne Bedeutung sind, soll uns hier nicht interessieren.

● Schreibe alle Wörter der Länge auf, die nur unter Verwendung der Buchstaben a und b gebildet werden können!

Hast du alle Wörter der Länge 4 gefunden? Es müssen insgesamt 16 Wörter sein.

● Wieviel Wörter der Länge 1 und wieviel Wörter der Länge 2 gibt es bei Verwendung von zwei Buchstaben?

Stellen wir die bisher erhaltenen Resultate in einer Tabelle zusammen:

Länge n	Anzahl der verschiedenen Wörter der Länge n
1	2
2	4
3	8
4	16

Für $n=1, 2, 3$ und 4 gilt offenbar: Es gibt genau 2^n Wörter der Länge n.

Gilt die Aussage sogar für alle natürlichen Zahlen n $(n>0)$?

Ja, wir können mit Hilfe des *Prinzips der kleinsten Zahl* beweisen:

Für jede natürliche Zahl n ($n>0$) gilt: Bei Verwendung von zwei Buchstaben gibt es genau 2^n Wörter der Länge n.

Beweis: Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl n ($n>0$), für die die Aussage falsch ist. Dann ist die Menge der natürlichen Zahlen, für die die Aussage falsch ist, nicht leer. Nach dem Prinzip der kleinsten Zahl enthält diese Menge eine kleinste Zahl. Diese Zahl nennen wir k.

Wie wir oben gezeigt haben, ist die Aussage für $n=1, 2, 3$ und 4 richtig, also ist k sicher größer als 4.

Da k die kleinste Zahl ist, für die die Aussage falsch ist, muß die Aussage für $k-1$ richtig sein. Es gibt also 2^{k-1} Wörter der Länge $k-1$.

Betrachten wir nun ein beliebiges Wort der Länge k. Streichen wir den letzten Buchstaben dieses Wortes, so erhalten wir ein Wort der Länge $k-1$. Der letzte Buchstabe, den wir gestrichen haben, war entweder ein a oder ein b. Aus dem *Rest*-Wort der Länge $k-1$ kann man durch Anfügen eines Buchstaben ein Wort der Länge k gewinnen. Jedes Wort der Länge k kann man sich also aus einem Wort der Länge $k-1$ durch Anfügen des Buchstaben a oder des Buchstaben b entstanden denken. Aus jedem Wort der Länge $k-1$ erhält man zwei Wörter der Länge k. Damit gibt es also

$$2^{k-1}\cdot 2$$

Wörter der Länge k. Nun ist aber

$$2^{k-1}\cdot 2=2^k.$$

Folglich gibt es doch 2^k Wörter der Länge k im Widerspruch dazu, daß die Aussage für die Zahl k falsch sein sollte. Unsere Annahme, daß es eine natürliche Zahl n ($n>0$) gibt, für die die Aussage falsch ist, führt zum Widerspruch. Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n ($n>0$).

Aufgaben

Man beweise unter Verwendung des Prinzips der kleinsten Zahl:

▲1▲ Für jede natürliche Zahl n ($n>0$) ist

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

▲2▲ Ist $q\neq 1$, so gilt für jede natürliche Zahl n ($n>0$) die Gleichung

$$1+q^1+q^2+q^3+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

▲3▲ Ist $h\geqq -1$, so gilt für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$(1+h)^n\geqq 1+nh$$

(Bernoullische Ungleichung).

W. Stoye

Aufgaben

speziell für Klasse 9/10

Im September 1973 lösten in einer größeren Anzahl von Schulen in unserer Republik viele Schüler der Klassenstufe 10 zentral gestellte Aufgaben (reine Arbeitszeit: 90 Minuten).

Im folgenden veröffentlichen wir die Aufgaben. Der interessierte alpha-Leser kann anhand dieser Arbeit sein Wissen und Können prüfen.

A. Hopfe

▲1▲ Gegeben ist der Term $\frac{a\cdot b}{c}$ ($a, b, c\in P$; $c\neq 0$).

Setzen Sie $a=4,75$

$b=1,22$ und

$c=25,2$!

Führen Sie schriftlich eine Überschlagsrechnung aus!

Berechnen Sie den Wert des Terms mit Hilfe des Rechenstabes!

▲2▲ Gegeben ist die Ungleichung

$$\frac{2(5x-2)}{3}<2x+6.$$

Geben Sie die Lösungsmenge L dieser Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen an!

(Eine Probe wird nicht verlangt.)

▲3▲ a) Formen Sie die folgende Summe in einen Quotienten um:

$$\frac{5}{4m}+\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}\quad (m, n\in P;\ m\neq 0;\ n\neq 0)$$

b) Berechnen Sie:

$$\left(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}v\right)^2$$

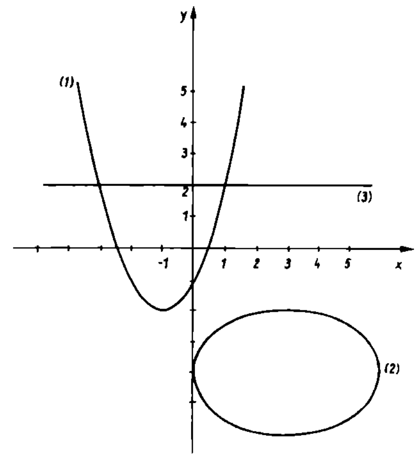
▲4▲ Zwei Lastkraftwagen transportieren insgesamt 143 t Kies. Der eine LKW faßt 1,5mal soviel wie der andere. Insgesamt sind 31 volle Fuhren des kleineren und 27 volle Fuhren des größeren LKW erforderlich.

Berechnen Sie, wieviel Tonnen jeder dieser beiden Wagen faßt!

▲5▲ a) Geben Sie die Definition für eine Funktion an!

b) Entscheiden Sie für jede der Figuren (1), (2) und (3), ob sie Graph einer Funktion der Form $y=f(x)$ ist!

Begründen Sie für alle drei Fälle Ihre Entscheidung!



▲6▲ Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussage nach:

Vergrößert man das Quadrat einer beliebigen ungeraden Zahl um 3, so erhält man immer eine Zahl, die durch 4 teilbar ist!

(Lösungen auf S. 47)

Fortsetzung der Aufgaben von S. 39

Klasse 10

▲1▲ Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt O, dem ein gleichschenkliges Trapez mit $ABCD$ $BC\parallel AD$, $\overline{BC}=2a$, $\overline{AD}=2b$ und $a>b$ umbeschrieben sei. Ferner seien E der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Trapezes und M bzw. N die Berührungspunkte des Kreises k mit den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ des Trapezes. P sei der Schnittpunkt der Parallelen durch den Punkt O zu der Seite $\overline{BC}$ mit der Seite $\overline{AB}$ des Trapezes.

1. Man ermittle den Radius des Kreises k in Abhängigkeit von a und b.

2. Man beweise, daß die Punkte M, E und N auf einer Geraden liegen.

3. Man ermittle die Länge der Strecke $\overline{ME}$ in Abhängigkeit von a und b.

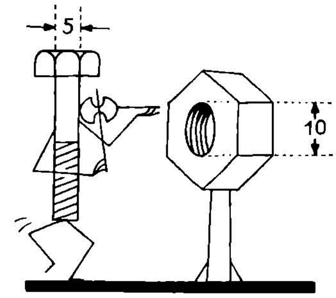
4. Man stelle Ungleichungen zwischen den Strecken $\overline{OP}$, $\overline{OM}$ und $\overline{EM}$ auf und leite daraus Ungleichungen zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und harmonischen Mittel zweier positiver reeller voneinander verschiedener Zahlen a und b her.

(Unter dem harmonischen Mittel zweier positiver reeller Zahlen a und b versteht man diejenige Zahl x, für die $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ gilt.)

▲2▲ Es seien $ABCD$ ein Quadrat und F der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Ferner sei E der Fußpunkt des von dem Punkt A auf die Gerade BF gefällten Lotes.

Man beweise, daß dann $\overline{AD}=\overline{DE}$ gilt.

In freien Stunden alpha heiter



„Bemühen Sie sich nicht,
es hat sowieso keinen Sinn."
Aus: Magazin 11/73

Bruchstücke

Die folgenden Bruchstücke sind so zu ergänzen, daß in jeder Zeile ein sinnvolles Wort entsteht, das du aus dem Mathematikunterricht kennst.
Die eingesetzten Buchstaben ergeben, hintereinander gelesen, einen mathematischen Satz.
Die Bedeutung der Wörter ist unten angegeben. Versuche, zunächst ohne diese Hilfe auszukommen!

		E			Z	I	G	
	Z	W				E	R	
T	A	F				E	R	K
				R	E	I	S	
			L	I	P		E	
	M	I		U	E	N		
	O	M	I		R			
			A		T	O	N	
	N		U			E	R	

1. k. g. V. der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6; 2. fast Erster; 3. Nachschlagewerk; 4 einem Dreieck einbeschriebene Figur; 5. ein Kegelschnitt; 6. Teil einer Subtraktionsaufgabe; 7. ein griechischer Buchstabe; 8. Mittel zur Hervorhebung bestimmter Teile in einer mathematischen Abbildung; 9. eine Ordnungszahl.

OStR K.-H. Lehmann, Berlin

Von 3 zu 3

Auf der Abbildung ist von der Ziffer 3 in der oberen linken Ecke quer durch die Felder bis zur 3 in der unteren rechten Ecke ein Weg zu suchen, der insgesamt — entsprechend der Summe der Zahlen auf den beschrittenen Feldern — die Zahl 110 ergibt. Wie (über welche Zahlen) führt dieser Weg?

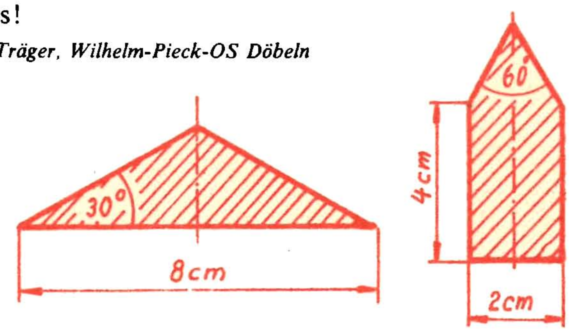
aus: NBI 33/73

3	4	5	4	3	9	7
1		6		5		8
2	3	7	6	9	4	1
4		8		1		3
5	6	9	8	7	2	6
1		1		6		3
3	4	2	8	5	4	3

Legespiel

Schneide aus Pappe sechs Fünfecke, die zu dem abgebildeten Fünfeck kongruent sind sowie sechs Dreiecke, die zum abgebildeten Dreieck kongruent sind, aus!

I. Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln



Lege diese zwölf Flächenstücke so aneinander, daß sie ein regelmäßiges Sechseck bilden!

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & cc \\ + & & + & & + \\ -c & + & a & & b \\ \hline b & + & cc & = & ca \end{array}$$

M. Jütte, 10. OS Greifswald

Eine Frage mit Pfiff

Ein Apotheker hält einem *Jungen Mathematiker* ein Röhrchen mit Tabletten hin und sagt erläuternd: „Eine Tablette enthält 500 mg Vitamin C."
Frage des *Jungen Mathematikers*: „Und die anderen?"

Rund um den Kreis

Im folgenden Text haben sich sieben Begriffe bzw. Namen versteckt, die bei der Behandlung der Kreislehre oft benutzt werden. Finde sie heraus!

Lieber Thomas!
Kurz vor unserer Rückreise aus Thale sende ich Dir herzliche Grüße. Gestern waren wir im Kino und sahen „Tecumseh".
Nebenbei: Ich bitte Dich darum, fang gleich an, unseren Zaunbau vorzubereiten. Du mußt die Stangen teilen und diese Kanten abschrägen. Führe alles gewissenhaft durch. Messer, Säge und Feile liegen im Werkzeugschrank.
Auf bald!
Dein Klaus

OStR K.-H. Lehmann, Berlin

„Eigentlich sollten Sie mir diese Wurzeln ziehen, Herr Doktor!"

alpha-Leser beim Augenarzt

Wurzelziehen

Neulich drückte sich Heike vor der Jugendzahnklinik herum. „Ich habe Angst. Der Doktor will mir eine Wurzel ziehen," erzählte sie ihrer Freundin Angelika. „Laß ihn nur machen," sagte Angelika darauf. „Morgen quadriert unser Mathematiklehrer die Wurzel wieder und die Zahnlücke ist weg . . . ."

Elsemarie Anger, Karl-Liebknecht-OS Oschatz (Kl. 9)

Angewandte Mathematik

Sie können es mir glauben, die Kinder sind heutzutage viel klüger als wir.
Mein *Wowa* ist Schüler der 1. Klasse. Kürzlich lernten sie in der Schule die Addition und Subtraktion. Damit fing es an...
Eines Tages kommt *Wowa* nach Hause, setzt sich an den Tisch und beginnt, auf ein Blatt Papier zwei Zahlenreihen zu schreiben. Er bewegt die Lippen, starrt mit den Augen zur Decke, zählt an den Fingern.
„Was rechnest du da?" frage ich.
„Ich rechne aus, wieviel ich koste", sagt er.
„Wie meinst du das, wieviel du kostest?"
„Ganz einfach", erklärt mein Sohn. „Auf der linken Seite addiere ich alle eure Ausgaben für mich, auf der rechten Seite addiere ich, was ihr mir schuldig seid."
„Aha", staunte ich und schaue interessiert auf seine Rechnung. „Du hast Mama drei Monate vor der Hochzeit kennengelernt. Drei Monate, das sind 90 Tage, das bedeutet 90 Stelldichein, also 90 Blumensträuße. Rechnen wir für jeden Strauß einen Rubel, das macht 90 Rubel. Plus 7 Theater- und 15 Kinobesuche, dazu 18 Portionen Eis und Gebäck, das wären etwa 75 Rubel. Eure Hochzeit war nicht sehr teuer, sagt Oma, weil ihr an einem Feiertag geheiratet habt. Ich setze dafür 200 Rubel ein. Dann die persönlichen Ausgaben für mich: ein Bett, einen Kinderwagen, ein Laufgitter, einige Anzüge und ein Pelzmäntelchen, dazu 7 Jahre täglich 3 Mahlzeiten, das wären rund 3000 Rubel. Ehrenwort, ich habe nichts vergessen.
Nun zur rechten Additionsarbeit: Das ist das Geld, das ihr durch mich gespart habt. Seitdem ich auf der Welt bin, seid ihr kein kinderloses Ehepaar mehr. Folglich bekommt ihr einen Kinderzuschlag plus Wohnungsgeld. Hat man euch nach meiner Geburt eine Wohnung zugewiesen?"
Ich bestätigte es kopfnickend.
„Als kinderloses Ehepaar mußtet ihr monatlich 40 Rubel bezahlen, jetzt nur noch 7. Das ergibt eine Einsparung von 33 Rubel im Monat, das sind 396 im Jahr und 2772 in 7 Jahren. Wenn ich zu diesem Betrag noch das Kindergeld addiere, erhalte ich die Summe von 3365 Rubel und 22 Kopeken. Subtrahiere ich nun die Einnahmen von der Summe eurer Ausgaben, bleibt lediglich eine Differenz von 22 Kopeken, die ihr mir schuldig seid. Du kannst mir das Geld gleich für eine Eiswaffel geben. Meine Freunde haben sich an der Ecke schon für mich angestellt. Und außerdem ist heute ein Feiertag!"

N. Stanilowski (Aus „Litershnaja Gaseta")

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(9./10. Februar 1974)

Klassenstufe 7

1. Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:
(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.
(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.
Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

2. Zeige, daß für jede Primzahl $p \geqq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

3. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \| CD$ aus $a-c=3$ cm, $b=4$ cm, $d=6$ cm, $e=9$ cm!
Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!
Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv.
Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v=0$ oder $w=0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

5. Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $\overline{CM}+\overline{BN}=\overline{MN}$

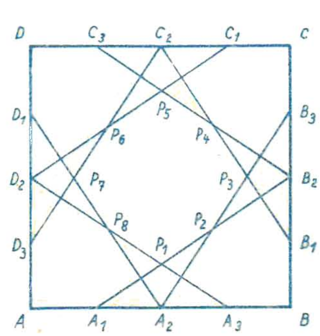
6. Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in 27 sec (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in 9 sec vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

Klassenstufe 8

1. *Anja*, *Brigitte*, *Cathrin*, *Daja* und *Eva* trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus.
In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluß aller Spiele stellte man fest:
(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.
(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.
(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.
Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wieviele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

2. Zeige, daß für jede Primzahl $p>5$ das Produkt
$$(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$$
durch 360 teilbar ist!

3. In dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken



A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet.
Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie im Bild bezeichnet. Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

4. Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung
$$\frac{3a-2}{a+1}<0 \text{ erfüllen!}$$

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ und $\sphericalangle ACB=90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, daß die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesen Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.
Beweise, daß für seinen Radius r dann
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \text{ gilt!}$$

6. Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a:b:c=2:3:4$ und $r=4$ cm genügt!
Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

Klassenstufe 9

1. Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare $(x; y)$, worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:
Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z. B. (25; 61); denn es gilt $52+9=61$ und $16+9=25$.)
Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die „03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel „3").
Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.
a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

2. Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die
$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$$
durch 10 teilbar ist!

3. Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge 6 Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein

Punkt P außerhalb g sei so gelegen, daß $\overline{PC}$ das Lot von P auf g ist. Dabei gelte
$$\overline{PC}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}.$$
Man beweise, daß dann $\sphericalangle APF=135°$ gilt.
Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

4. In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, daß die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

5. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $abc \neq 0$ und $a+b+c \neq 0$ die Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x=-y$ gilt.)

6. Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:
(1) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
(2) $\overline{BD'}=\overline{CD'}=a$,
(3) $\overline{AD'} \neq a$.
Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

Klassenstufe 10

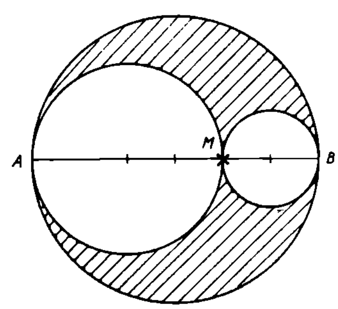
1. Man beweise, daß für alle konvexen Vierecke $ABCD$ $\frac{1}{2}u<e+f<u$ gilt. Dabei seien u der Umfang des Vierecks und e bzw. f die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

2. Man ermittle alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3+xy-7=0$ erfüllen.

3. Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die gleiche Länge a. E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

4. Man beweise:
Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

5. Gegeben sei ein Kreis k mit einem Durchmesser AB der Länge d. In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, daß sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so daß also $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$ gilt. Dabei sei $\overline{AM} \geq \overline{MB}$.
Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.



Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser schaffierten Fläche am größten ist.

6. Man beweise, daß die Ungleichung $|\log_a b|+|\log_b a| \geq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a,b) mit $a \neq 1$, $b \neq 1$ gilt.

Klassenstufe 11/12

1. Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder. Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Tochter und Sohn alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

2. Man beweise, daß die Ungleichung
$$\sqrt[n]{a^n+b^n}<\sqrt[m]{a^m+b^m}$$
für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n>m$ gilt.

3. Es sei $V=ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck.
Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb V.

4. Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln $K_i (i=1, \ldots, 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.
Man beweise, daß die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn
$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}=\overline{P_1P_3}+\overline{P_2P_4}=\overline{P_1P_4}+\overline{P_2P_3}$$ gilt.

5. Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.
Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung
$x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$ als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x; y; z)=(0; 0; 0)$.

6A. Eine Menge G von Elementen u, v, w, ... heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(1) In G ist eine Operation definiert, d. h. jedem Paar (u, v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u \circ v=w$ schreibt.
(2) Diese Operation ist assoziativ, d. h. für alle Elemente
u, v, w aus G gilt $(u \circ v) \circ w=u \circ (v \circ w)$.
(3) Zu jedem Paar von Elementen von u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so daß $u \circ x=v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so daß $y \circ u=v$ gilt.
Es sei P die Menge aller reellen Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus P ist durch $a \circ b =a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, daß die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

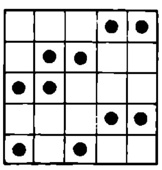
6B. $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt. Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus $\mathfrak{M}$ der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).
Anmerkung: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

Lösungen

Lösungen zu Heft 6/73

▲5▲1132 Aus $2232:9=248$ und $248:31=8$ folgt, daß auf jeden Schüler der Klasse 5a im Durchschnitt ein Pflückergebnis von 8 Körben Äpfel je Nachmittag kommt. Aus $4\cdot 33+4\cdot 32=4\cdot(33+32)=4\cdot 65=260$ und $2210:260=8{,}5$ folgt, daß die Schüler der Klasse 5b eine bessere Leistung erreichten; denn es erreichte jeder Schüler im Durchschnitt ein Pflückergebnis von $8\frac{1}{2}$ Körben Äpfel je Nachmittag.

▲5▲1133 Eine mögliche Anordnung zum Setzen der Spielsteine ist die folgende:



W 5 ■ 1134 Die Anzahl der Noten 5 sei x; dann gilt folgendes:

Noten	5	4	3	2	1
Anzahl	x	$2x$	$4x$	$8x$	$8x$

Nun gilt ferner $23\cdot x<30$. Die Lösung $x=0$ entfällt, da sonst kein Schüler anwesend gewesen wäre. $x=1$ ist die einzige Lösung der Ungleichung.
Der Klasse gehören somit $(23+2)$ Schüler, also 25 Schüler an.

W 5 ■ 1135 Angenommen, die Mutter habe n Kinder; dann läßt sich folgende Tabelle aufstellen, die Auskunft über die Verteilung der Äpfel gibt.

n	$5n$	$6n$	$5n+3$	$6n-1$
2	10	12	13	11
3	15	18	18	17
4	20	24	23	23
5	25	30	28	29

Nur für $n=4$ gilt $5n+3=6n-1$. Da jede Zahl der Zahlenfolge 13, 18, 23, 28, ... um 5 größer als die vorangehende, jede Zahl der Zahlenfolge 11, 17, 23, 29, ... aber um 6 größer ist als die vorangehende, gilt für jede weitere Belegung $n>5$ stets $5n+3<6n-1$. Die Aufgabe besitzt somit genau eine Lösung. Es waren 4 Kinder und 23 Äpfel.

W 5 * 1136 Um die erste und die letzte Murmel jeweils einzeln zum Baum zurückzubringen, muß Hans insgesamt einen Weg von $2\cdot 1\,m+2\cdot 80\,m=162\,m$ zurücklegen. Für die zweite und vorletzte Murmel ergeben sich $2\cdot 2\,m+2\cdot 79\,m=162\,m$. Für das letzte Murmelpaar gilt $2\cdot 40\,m+2\cdot 41\,m=162\,m$. Insgesamt ist eine Strecke von
$40\cdot 162\,m=6480\,m=6{,}480\,km$
in nur 15 Minuten zurückzulegen. Das kann Hans nicht schaffen; folglich hat Peter recht.

W 5 * 1137 Aus a) folgt:
Familie Krause erhielt entweder einen roten oder einen grauen PKW. Da der graue PKW nach b) an Familie Schmidt ging, erhielt Familie Krause einen roten PKW. Somit erhielt die Familie Meier einen blauen PKW.
Aus a) folgt:
Familie Krause erhielt entweder einen „Wartburg" oder einen „Skoda". Da Familie Krause aber einen roten PKW erhielt, kann es nach c) kein „Wartburg" sein. Demnach erhielt Familie Krause einen roten „Skoda".
Aus d) folgt:
Familie Meier erhielt entweder einen „Wartburg" oder einen „Skoda". Da der „Skoda" aber an Familie Krause ging, muß Familie Meier einen blauen „Wartburg" und somit Familie Schmidt einen grauen „Trabant" erhalten haben.

▲6▲1138 Der Fisch sei x kg schwer; nun gilt $\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, d. h. der vierte Teil seines Gewichts ist gleich $\frac{3}{4}$ kg. Der Fisch wiegt somit $4\cdot\frac{3}{4}\,\text{kg}=3\,\text{kg}$.

Oder $x=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$, $\quad \frac{1}{4}x=\frac{3}{4}$, $\quad x=3$.

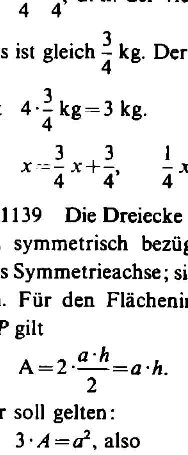
▲6▲1139 Die Dreiecke $\triangle BCP$ und $\triangle CDP$ liegen symmetrisch bezüglich der Geraden AC als Symmetrieachse; sie sind also flächengleich. Für den Flächeninhalt des Vierecks $BCDP$ gilt

$$A=2\cdot\frac{a\cdot h}{2}=a\cdot h.$$

Ferner soll gelten:

$$3\cdot A=a^2,\text{ also}$$
$$3\cdot a\cdot h=a^2,\ (a\neq 0)$$
$$3\cdot h=a,$$
$$h=\frac{1}{3}a.$$

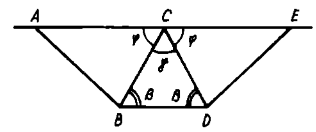
Der Abstand des Punktes P von der Geraden BC ist gleich dem dritten Teil der Länge der Quadratseite $\overline{BC}=a$.



W 6 ■ 1140 Bezeichnet man die erste der fünf Zahlen mit n, so lauten diese Zahlen n, $2n+1$, $4n+3$, $8n+7$ und $16n+15$. Ihre Summe beträgt somit $31n+26=243$. Daraus folgt $31n=217$, also $n=7$.
Die fünf Zahlen lauten somit 7, 15, 31, 63, 127.

W 6 ■ 1141 Der Dezimalbruch von $\frac{1}{7}$ besitzt eine sechsstellige Periode; es gilt $\frac{1}{7}=0{,}\overline{142857}$.
Aus $6\cdot 16+x=100$ folgt $x=4$, d. h. an der 100. Stelle steht die Grundziffer 8.

W 6*1142 Aus $\overline{AC}=\overline{CE}$, $\overline{AB}=\overline{DE}$ und $\overline{BC}=\overline{DC}$ folgt $\Delta ABC\cong\Delta CDE$; demnach gilt auch $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ECD=\varphi$. Aus $\overline{BC}=\overline{DC}$ folgt $\sphericalangle CBD=\sphericalangle CDB=\beta$. Es sei Winkel $BCD=\gamma$; dann gilt $\gamma=180°-\varphi$ und $\gamma=180°-2\beta$, folglich gilt $\varphi=\beta$.



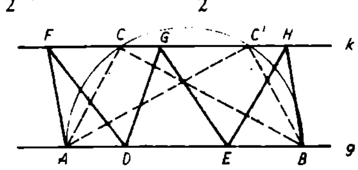
Zu a) Für $45°<\varphi<90°$ folgt aus $\gamma=180°-2\varphi$ stets $\gamma<90°$. Da auch die anderen Winkel des Dreiecks BDC kleiner als 90° sind, ist dieses Dreieck spitzwinklig.
Zu b) Für $\varphi=45°$ erhalten wir aus $\gamma=180°-2\varphi$ genau $\gamma=90°$, also ist das Dreieck BDC rechtwinklig.
Zu c) Für $0°<\varphi<45°$ folgt aus $\gamma=180°-2\varphi$ stets $\gamma>90°$, also ist das Dreieck BDC stumpfwinklig.
Zu d) Das Dreieck BDC ist gleichseitig genau dann, wenn $\gamma=60°$, also $2\varphi=180°-\gamma=120°$, d. h. $\varphi=60°$ ist.

W 6*1143 Da für „ZWEI" die kleinstmögliche Zahl zu ermitteln ist, muß auch die Zahl für „VIER" möglichst klein sein. Deshalb könnte $Z=1$ und $V=2$ sein.
Es sei $V=2$; wegen $W\neq V$ und $W\neq Z$ könnte dann $W=0$ oder $W=3$ sein. Für $W=0$ wäre $I=1$; das widerspricht $Z=1$. Es sei $W=3$; dann könnte $I=6$ oder $I=7$ sein.
Für $I=6$ ergäbe sich wegen $I+I=R$ $(6+6=12)$ somit $R=2$; das widerspricht $V=2$.
Es sei $I=7$; dann gilt $R=4$ $(7+7=14)$.
Daher gilt $1+E+E=10+E$, also $E=9$.
Die gesuchte Lösung lautet somit

$$\begin{array}{r} 1397 \\ +\ 1397 \\ \hline 2794 \end{array}$$

▲7▲1144 Es sei h der Abstand der Parallelen g und k; für den Flächeninhalt des zu konstruierenden Dreiecks ABC gilt dann

$$A_{ABC}=\frac{h}{2}\cdot\overline{AD}+\frac{h}{2}\cdot\overline{DE}+\frac{h}{2}\cdot\overline{EB}=\frac{h}{2}\cdot(\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB})=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\overline{AB}.$$



Demzufolge liegt der Punkt C des zu konstruierenden Dreiecks ABC auf der Geraden

k. Wir zeichnen deshalb über $\overline{AB}$ als Durchmesser den Thaleskreis, der k in den Punkten C und C' schneiden möge und verbinde C mit C' jeweils mit den Punkten A und B. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ erfüllen die geforderten Bedingungen.

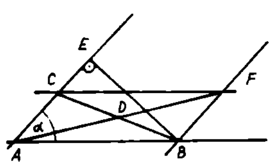
▲7▲1145 Bei der Fahrt stromaufwärts sei $v_1=4{,}5-1{,}5=3$ die Maßzahl der durchschnittlichen Geschwindigkeit, t_1 die Maßzahl der benötigten Zeit und s_1 die Maßzahl des zurückgelegten Weges. Für die Fahrt stromabwärts gilt dann entsprechend $v_2=4{,}5+1{,}5=6$, $t_2=4-t_1$ und $s_2=s_1$. Daraus folgt

$$v_1t_1=v_2t_2,$$
$$3\cdot t_1=6\cdot(4-t_1),$$
$$3\cdot t_1=24-6\cdot t_1,$$
$$9\cdot t_1=24,$$
$$t_1=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Wir erhalten somit $s_1=v_1t_1=3\cdot\frac{8}{3}\text{ km}=8\text{ km}$.

Die Touristen können sich 8 km vom Anlegepunkt entfernen; sie erreichen den Wendepunkt nach $2\frac{2}{3}$ h.

W 7 ■ 1146 Verlängert man $\overline{AD}=s_a$ über D hinaus bis F um sich selbst, so sind $\overline{AF}$ und $\overline{BC}$ Diagonalen des Vierecks $ABFC$. Wegen $\overline{AD}=\overline{DF}$ und $\overline{BD}=\overline{CD}$ halbieren diese Diagonalen einander, d. h. das Viereck $ABFC$ ist ein Parallelogramm. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:



Wir zeichnen das Teildreieck ABE aus den Stücken $\sphericalangle CAB=\alpha=50°$, $\sphericalangle AEB=90°$ und $\overline{BE}=h_b=3$ cm. Durch B ziehen wir eine Parallele zu AE. Der Kreis um A mit dem Radius $2s_a=5$ cm schneidet diese Parallele in F. Die Parallele durch F zu AB schneidet die Gerade AE in C. Verbinden wir B mit C, so erhalten wir das zu konstruierende Dreieck ABC.

W 7 ■ 1147 Von 9.00 Uhr bis 24.00 Uhr sind 15 Stunden vergangen. Es waren an diesem Tage $15\cdot 200$ Gäste, also 3000 Gäste im Turmcafé. Darunter seien x Erwachsene, also $(3000-x)$ Kinder; dann gilt

$$5x+2{,}5(3000-x)=12\,000,$$
$$5x+7\,500-2{,}5x=12\,000.$$
$$2{,}5x=4\,500,$$
$$x=1\,800.$$

An diesem Tage haben 1800 Erwachsene und 1200 Kinder das Turmcafé besucht.

W 7*1148 Die Zahl $z=\overline{abcabc}$ (in dezimaler Darstellung) läßt sich wie folgt schreiben:
$z=1000\cdot x+x=1001\cdot x=7\cdot 11\cdot 13\cdot x$.
Aus $7\cdot 11\cdot 13\cdot x=7\cdot n^2$ folgt $11\cdot 13\cdot x=n^2$, also $x=11\cdot 13=143$.
Probe: $143143=7\cdot 143^2$.

Aus $11\cdot 13\cdot x=n^2$ erhält man noch eine weitere dreistellige Lösung für x, nämlich $x=11\cdot 13\cdot 4=572$, und es gilt $572572=7\cdot 286^2$.

W 7*1149 Wir unterscheiden die Fälle $n=4$ und $n>4$.

1. Fall: $(n=4)$
Wegen $(n-2)\cdot 180°$ gilt für die Winkelsumme eines Vierecks in diesem Falle $(4-2)\cdot 180°=360°$. Da $4\cdot 90°=360°$, kann ein Viereck höchstens vier rechte Winkel besitzen.

2. Fall: $(n>4)$
Jeder Innenwinkel eines konvexen Vielecks ist kleiner als 180°. Würde ein konvexes n-Eck mit $n>4$ vier rechte Winkel enthalten, so würde die Winkelsumme in diesem n-Eck kleiner als $4\cdot 90°+(n-4)\cdot 180°$, d. h. kleiner als $(n-2)\cdot 180°$ sein; denn jeder der übrigen $(n-4)$ Winkel wäre wegen der Konvexität kleiner als 180°. Nach dem Satz über die Winkelsumme im n-Eck kann dieser Fall nicht eintreten. Ein konvexes n-Eck mit mehr als vier Eckpunkten kann also höchstens drei rechte Winkel enthalten.

▲8▲1150 a) Da die Grundfläche aus einem Rechteck mit der Länge $45\text{ m}-2\cdot 10\text{ m}=25\text{m}$ und der Breite 20 m sowie aus zwei Halbkreisen mit dem Radius 10 m besteht, beträgt ihr Flächeninhalt

$$A=(25\cdot 20+100\pi)\text{m}^2\approx 814\text{ m}^2.$$

b) Da die Halle aus einem Halbzylinder mit dem Radius 10 m und der Höhe 25 m sowie zwei Viertelkugeln mit dem Radius 10 m besteht, beträgt ihr Rauminhalt

$$V=(\frac{\pi}{2}\cdot 100\cdot 25+2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 1000)\text{m}^3$$
$$\approx(1\,250\pi+667\pi)\text{m}^3;$$
$$V=1\,917\pi\text{m}^3\approx 6020\text{m}^3.$$

c) Die Oberfläche des Halbzylinderteils ist gleich $0_1=\pi\cdot 10\cdot 25\text{ m}^2\approx 785\text{ m}^2$, die Oberfläche der übrigen Teile ist gleich der Oberfläche einer Halbkugel von Radius 10 m, also gleich $0_2=2\pi\cdot 100\text{ m}^2\approx 628\text{ m}^2$.
Die Gesamtoberfläche beträgt daher

$$0\approx 1413\text{ m}^2.$$

▲8▲1151 a) Da $1\text{a}=365\cdot 24\text{ h}=8760\text{ h}$, fließen in 1 h

$$\frac{90\,000\,000}{8760}\text{t}\approx 10270\text{ t}$$

Erdöl durch den Querschnitt der Leitung.
Ist nun x die Maßzahl der Weglänge (in m), die das Erdöl in 1 h zurücklegt, so gilt, da der Radius des zylindrischen Rohres 0,61 m beträgt,

$$\pi\cdot 0{,}61^2\cdot x=10270,$$
$$x=\frac{10270}{0{,}61^2}\approx 8790.$$

Das Erdöl legt also in 1 h 8790 m = 8,79 km zurück, d. h. die Geschwindigkeit beträgt

$$v=8{,}79\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=2{,}44\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

b) Die Zeit für den Transport von Ust-Balyk bis Almetjewsk beträgt $\frac{2200}{8{,}78}\text{h}=251$ h, d. s. 10 Tage 10 Stunden.

W 8 ■ 1152 Im Falle a) ist keine der sieben Grundziffern gleich Null. Man kann also die erste Stelle auf sieben verschiedene Möglichkeiten besetzen. Dann verbleiben für die Besetzung der zweiten Stelle noch sechs Möglichkeiten usw., bis schließlich für die Besetzung der letzten Stelle nur eine Grundziffer übrigbleibt.
Wir erhalten daher in diesem Falle

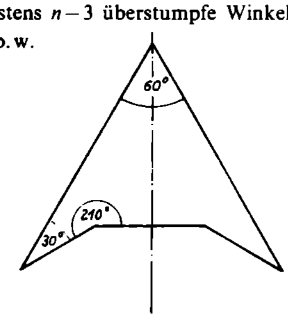
$$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$$

verschiedene siebenstellige Zahlen.
Im Falle b) ist eine der sieben Grundziffern gleich Null; es gibt also für die Besetzung der ersten Stelle nur sechs Möglichkeiten. Dann bleiben sechs Grundziffern übrig, und es gibt für die Besetzung der zweiten Stelle sechs Möglichkeiten, für die Besetzung der dritten Stelle fünf Möglichkeiten usw. wie oben.
Wir erhalten daher in diesem Falle

$$6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4320$$

verschiedene siebenstellige Zahlen.

W 8 ■ 1153 a) Angenommen, für eine natürliche Zahl n mit $n\geqq 3$ gäbe es ein n-Eck, in dem mindestens $n-2$ Winkel überstumpf sind. Da jeder dieser Winkel größer als 180° ist und da ihre Anzahl mindestens $n-2$ beträgt, ist die Summe dieser überstumpfen Winkel größer als $(n-2)180°$. Damit gilt erst recht für die Summe s aller Winkel dieses n-Ecks $s>(n-2)180°$. Also kann das n-Eck nicht $n-2$ überstumpfe Winkel und daher höchstens $n-3$ überstumpfe Winkel haben, w. z. b. w.



b) In der beigefügten Abbildung ist ein Fünfeck gezeichnet, das $n-3=2$ überstumpfe Winkel von je 210° hat. Die übrigen Winkel von 60°, 30° und 30° sind spitz. Die Winkelsumme beträgt

$$210°+210°+60°+30°+30°$$
$$=540°=3\cdot 180°.$$

W 8*1154 Die Figur ist symmetrisch bezüglich der beiden Kreisen gemeinsamen Zentrale M_1M_2 und bezüglich der Geraden PQ als Symmetrieachsen, die sich im Punkt S schneiden (siehe Bild).
Das Viereck $APBQ$ ist demnach ein Rhombus; für seinen Flächeninhalt gilt

$$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PQ}.$$

Wegen $\overline{QM_1}=r=3$ cm und $\overline{SM_1}=\frac{1}{2}\cdot e=2{,}5$ cm gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{SQ}^2=(3^2-2{,}5^2)\text{cm}^2=\frac{11}{4}\text{cm}^2$, also $\overline{SQ}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}$ cm. Aus $\overline{AB}=2r+e=6\text{ cm}+5\text{ cm}=11$ cm und $\overline{PQ}=2\cdot\overline{SQ}=\sqrt{11}$ cm folgt $A=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot\sqrt{11}\text{ cm}^2\approx 18{,}24\text{ cm}^2$.

W 8*1155 Der doppelte Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist einerseits gleich $2A=ab$
und andererseits gleich $2A=ch$.

Daraus folgt $ab=ch$,

$$a^2b^2=c^2h^2,$$
$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{a^2b^2},$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras $c^2=a^2+b^2$, also

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \text{ w.z.b.w.}$$

W 9 ■ 1156 Es seien x und y zwei natürliche Zahlen, für die

$$x^2-y^2=1972 \qquad (1)$$

gilt. Wegen $1972=2\cdot 2\cdot 17\cdot 29$, wobei die Zahlen 2, 17 und 29 Primzahlen sind, gilt dann

$$(x+y)(x-y)=2\cdot 2\cdot 17\cdot 29, \qquad (2)$$

also $x+y=a, \qquad (3)$

$$x-y=b, \qquad (4)$$

wobei a und b natürliche Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $ab=1972$ sind. Aus (3) und (4) folgt durch Addition bzw. Subtraktion

$$2x=a+b,\ x=\frac{a+b}{2}, \qquad (5)$$
$$2y=a-b,\ y=\frac{a-b}{2}. \qquad (6)$$

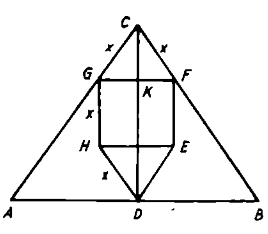
Daraus folgt aber, daß a und b entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen, weil sonst x und y nicht natürliche Zahlen wären. Ferner gilt $a \geqq b$.

Wegen $ab=1972=2\cdot 2\cdot 17\cdot 29$ können nun a und b nicht beide ungerade sein; also müssen sie beide gerade sein. Es gibt daher nur die folgenden beiden Möglichkeiten, da $a \geqq b$:

1. $a=986$, $b=2$;
   dann ist $x=494$, $y=492$,
   also $x^2-y^2=1972$.
2. $a=58$, $b=34$;
   dann ist $x=46$, $y=12$,
   also $x^2-y^2=1972$.

Es gibt also genau zwei geordnete Paare von natürlichen Zahlen, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich (494, 492) und (46, 12).

W 9 ■ 1157 Nach dem Satz des Pythagoras (siehe Bild) gilt $\overline{CD}^2=h^2=\overline{BC}^2-\overline{BD}^2=16$, also $h=4$ cm. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔGFC und ΔABC folgt $\overline{GF}:\overline{AB}=\overline{CG}:\overline{AC}$ bzw. $\overline{GF}:6=x:5$, also $\overline{GF}=\frac{6}{5}x$. Analog dazu erhalten wir $\overline{CK}=\frac{4}{5}x$.

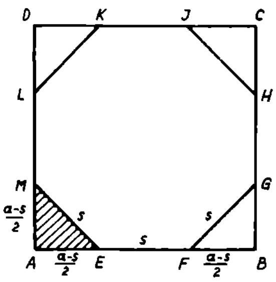


Aus $h=4=2\cdot\frac{4}{5}x+x$ folgt $x=\frac{20}{13}$ cm.

Für den Flächeninhalt des Sechsecks gilt somit, da $\overline{GK}=\frac{1}{2}\overline{GF}=\frac{3}{5}x$,

$$A=2\cdot\frac{\overline{CD}+\overline{GH}}{2}\cdot\overline{GK}=(4+\frac{20}{13})\cdot\frac{3\cdot 20}{5\cdot 13}\,\text{cm}^2=$$
$$=5\frac{19}{169}\,\text{cm}^2\approx 5{,}11\,\text{cm}^2.$$

W 9*1158 Da das Achteck $EFGHIKLM$ regelmäßig ist, sind alle seine Seiten gleichlang und alle seine Winkel gleichgroß. Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke ΔAEM und ΔBGF gleichschenklig und einander kongruent. Wegen $\overline{AB}=a$ und $\overline{EF}=s$ gilt also $\overline{AM}=\overline{AE}=\frac{1}{2}(a-s)$.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt wegen $\overline{EM}=s$ $s^2=2\cdot\frac{1}{4}\cdot(a-s)^2$,

$$2s^2=a^2-2as+s^2,$$
$$s^2+2as-a^2=0,$$
$$s=a(\sqrt{2}-1).$$ Daher gilt
$$a-s=a-a(\sqrt{2}-1)=a(2-\sqrt{2}).$$

Der Flächeninhalt des Achtecks ist also gleich

$$A=a^2-4\cdot\frac{1}{8}\cdot(a-s)^2,$$
$$A=a^2-\frac{1}{2}a^2(2-\sqrt{2})^2,$$
$$A=a^2-\frac{1}{2}a^2(4-4\sqrt{2}+2),$$
$$A=2a^2(\sqrt{2}-1),$$
$$A=32(\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2\approx 13{,}25\,\text{cm}^2.$$

W 9*1159 a) Es sei t_1 die Zeit, die der Triebwagen bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit $v_1=120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}=33{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ benötigt; dann gilt $v_1=a\cdot t_1$, wobei $a=1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, also $t_1=33{,}3$ s. In dieser Zeit legt der Triebwagen einen Weg von

$s_1=\frac{a}{2}\cdot t_1^2=\frac{1}{2}\cdot 33{,}3^2\,\text{m}\approx 555\,\text{m}$ zurück. Die gleiche Weglänge legt der Triebwagen von dem Zeitpunkt, in dem die Höchstgeschwindigkeit vermindert wird, bis zur nächsten Haltestelle zurück. Daher verbleibt eine Strecke von

$$4000\,\text{m}-2\cdot 555\,\text{m}=2890\,\text{m},$$

auf der der Triebwagen mit der konstanten Geschwindigkeit
$v_1=33{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ fährt. Für diese Strecke wird daher die Zeit

$$t_2=\frac{2890}{33{,}3}\text{s}=86{,}8\,\text{s}$$

benötigt. Die gesamte Fahrzeit von einer Haltestelle bis zur nächsten (bei 4 km Entfernung) beträgt daher
$t=2t_1+t_2=66{,}6\,\text{s}+86{,}8\,\text{s}=153{,}4$ s, das sind rund 2 min 33 s.

b) Für jede der fünf Teilstrecken benötigt der Triebwagen 153 s. Dazu kommen noch die Haltezeiten von je 30 s auf den vier Zwischenhaltestellen, das sind zusammen 120 s.
Für die Gesamtstrecke von 20 km benötigt der Triebwagen also einschließlich der Haltezeiten eine Zeit von $5\cdot 153\,\text{s}+120\,\text{s}=885$ s, das sind 14 min 45 s.

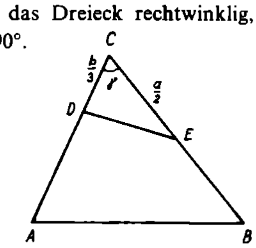
c) Für $a=0{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ und $v_1=90\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}=25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ erhält man analog wie oben

$$t_1=\frac{v_1}{a}=\frac{25}{0{,}6}\,\text{s}=41{,}7\,\text{s},$$
$$s_1=\frac{a}{2}t_1^2=\frac{0{,}6}{2}\cdot 41{,}7^2\,\text{m}=521{,}7\,\text{m},$$
$$t_2=\frac{4000-2\cdot 521{,}7}{25}\,\text{s}=118{,}4\,\text{s}.$$

Daraus folgt
$t=2t_1+t_2=201{,}8$ s, das sind rund 3 min 22 s.
Für die Gesamtstrecke von 20 km einschließlich der Haltezeiten benötigt der Zug also eine Zeit von $5\cdot 202\,\text{s}+120\,\text{s}=1130$ s, das sind 18 min 50 s.
Wir sehen also, daß der Zugverkehr durch den Einsatz der neuen Elektrotriebwagen erheblich beschleunigt werden kann. Bei einer Strecke von 20 km wird die Fahrzeit um 4 min 5 s geringer.

W 10/12 ■ 1160 Wir bezeichnen jeweils die Länge der Schenkel mit $a=b=0{,}5$ und die Länge der Basis mit c.

1. In diesem Falle gilt $c^2=0{,}25$, also $c=0{,}5$. Es ist also $a=b=c=0{,}5$, d. h. das Dreieck ist gleichseitig. Daraus folgt $\gamma=60°$.
2. In diesem Falle gilt $c^2=0{,}5$ und $a^2+b^2=0{,}25+0{,}25=0{,}5$, also $a^2+b^2=c^2$. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist also das Dreieck rechtwinklig, und es gilt $\gamma=90°$.



3. In diesem Falle gilt nach dem Kosinussatz $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$,

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

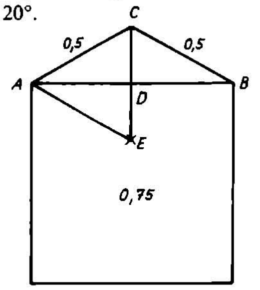
Daraus folgt wegen $a=b=0{,}5$ und $c^2=0{,}75$

$$\cos\gamma=\frac{0{,}25+0{,}25-0{,}75}{2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}$$
$$=-\frac{0{,}25}{2\cdot 0{,}25}=-0{,}5, \text{ also}$$
$$\gamma=120°.$$

Bemerkung: Im 3. Falle können wir die Größe des Winkels γ auch elementargeometrisch ermitteln. Wählen wir die Bezeichnung der Punkte wie in Bild 3, wobei D die Mitte der Basis ist und die Strecke $\overline{CD}$ über sich selbst bis E verlängert wurde, so gilt

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\sqrt{0{,}75},$$
$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2=0{,}25-\frac{1}{4}\cdot 0{,}75=\frac{1}{4}\cdot 0{,}25,$$
$$\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5,\ \overline{CE}=0{,}5.$$

Wegen $\overline{AE}=\overline{AC}=0{,}5$ ist also das Dreieck AEC gleichseitig, d. h. $\sphericalangle ECA=60°$ und $\gamma=120°$.



W 10/12 ■ 1161 Es gilt

$|x-10|= x-10$, falls $x\geqq 10$, (1)

$|x-10|=-x+10$, falls $x\leqq 10$, (2)

$|x-2|= x-2$, falls $x\geqq 2$, (3)

$|x-2|=-x+2$, falls $x\leqq 2$. (4)

Für $f(x)=x^2-10x+16$ erhalten wir

$f(x)=(x^2-10x+25)-9=(x-5)^2-9$, also $f(x)\geqq 0$ genau dann, wenn $(x-5)^2\geqq 9$, also wenn $x-5\geqq 3$, d. h. $x\geqq 8$ oder wenn

$5-x\geqq 3$, d. h. $x\leqq 2$.

Dagegen ist $f(x)\leqq 0$ genau dann, wenn $2\leqq x\leqq 8$. Es gilt also

$|x^2-10x+16|=x^2-10x+16$,

falls $x\geqq 8$

oder $x\leqq 2$ (5)

$|x^2-10x+16|=-x^2+10x-16$,

falls $2\leqq x\leqq 8$. (6)

Wir haben daher die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. $x\leqq 2$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (2), (4) und (5) die Gleichung

$-x+10-x+2=x^2-10x+16$,

$x^2-8x+4=0$; diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $4+\sqrt{16-4}=4+\sqrt{12}=4+2\sqrt{3}$, von denen nur die Lösung

$x_1=4-2\sqrt{3}$

der Bedingung $x\leqq 2$ entspricht.

2. $2\leqq x\leqq 8$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (2), (3) und (6) die Gleichung

$-x+10+x-2=-x^2+10x-16$,

$x^2-10x+24=0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$x_2=6$ und $x_3=4$,

die beide die Bedingung $2\leqq x\leqq 8$ erfüllen.

3. $8\leqq x\leqq 10$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (2), (3) und (5) die Gleichung

$-x+10+x-2=x^2-10x+16$,

$x^2-10x+8=0$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $5+\sqrt{17}$ und $5-\sqrt{17}$, von denen nur die Lösung $x_4=5+\sqrt{17}$

die Bedingung $8\leqq x\leqq 10$ erfüllt.

4. $x\geqq 10$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (1), (3) und (5) die Gleichung

$x-10+x-2=x^2-10x-16$,

$x^2-12x+28=0$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $6+\sqrt{8}$ und $6-\sqrt{8}$, die beide nicht die Bedingung $x\geqq 10$ erfüllen. Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für

$x_1=4-2\sqrt{3}$, $x_2=6$, $x_3=4$,

$x_4=5+\sqrt{17}$

jeweils die gegebene Gleichung erfüllt ist. Daher ist die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung

$L=\{4-2\sqrt{3}, 4, 6, 5+\sqrt{17}\}$.

W 10/12*1162 Da die Punkte P_1 und P_2 auf der zu AC parallelen Gerade EG liegen, liegen die vier Punkte A, C, P_1, P_2 in einer Ebene (vgl. Bild 1). Sie bilden ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $\overline{AC}=a\sqrt{2}$ und $\overline{P_1P_2}=\frac{a}{3}\sqrt{2}$ sowie der Höhe h (vgl. Bild 2). Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist gleich

$$G=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}+\frac{a}{3}\sqrt{2})h=\frac{2}{3}ah\sqrt{2}.$$

Bild 1

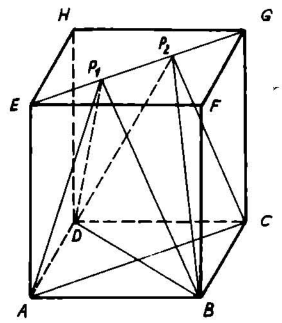
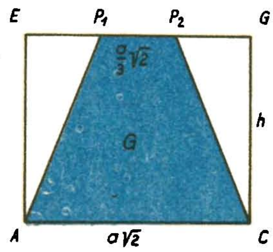


Bild 2



Nun können wir uns den Körper $ABCDP_1P_2$, dessen Volumen wir berechnen wollen, aus zwei Pyramiden mit der gemeinsamen Grundfläche ACP_2P_1 und den Spitzen B bzw. D zusammengesetzt denken. Die Grundfläche dieser beiden Pyramiden ist gleich G, ihre Höhe ist gleich $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, nämlich gleich der halben Diagonale des Quadrates $ABCD$. Daher beträgt das Volumen des Körpers $ABCDP_1P_2$

$$V=\frac{2}{3}G\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}ah\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{4}{9}a^2h.$$

W 10/12*1163 Angenommen, es gibt ein Polynom $f(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^2+a_3x^3$ mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt

$f(0)=a_0=1$, (1)

$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=1$, (2)

$f(2)=a_0+2a_1+4a_2+8a_3=1$, (3)

$f(3)=a_0+3a_1+9a_2+27a_3=100$. (4)

Durch Einsetzen von $a_0=1$ in (2), (3) und (4) erhalten wir das Gleichungssystem

$a_1+a_2+a_3=0$, (5)

$2a_1+4a_2+8a_3=0$, (6)

$3a_1+9a_2+27a_3=99$ (7)

und hieraus, indem wir $a_1=-a_2-a_3$ in (6) und (7) einsetzen,

$2a_2+6a_3=0$, (8)

$6a_2+24a_3=99$,

also $2a_2+8a_3=33$. (9)

Durch Subtraktion erhalten wir aus (9) und (8)

$2a_3=33$, also $a_3=16{,}5$.

Ferner erhalten wir aus (8)

$a_2=-3a_3=-3\cdot 16{,}5=-49{,}5$

und aus (5)

$a_1=-a_2-a_3=49{,}5-16{,}5=33$.

Das Polynom lautet daher

$f(x)=1+33x-49{,}5x^2+16{,}5x^3$.

Durch Einsetzen von $x=0$, 1, 2, 3 erhalten wir, wie gefordert,

$f(0)=f(1)=f(2)=1$ und $f(3)=100$.

Lösungen zu Aufgaben, speziell für Klassen 9/10 (Seite 39)

▲1▲ *Gegeben:* Term $\frac{a\cdot b}{c}$ und die Werte $a=4{,}75$; $b=1{,}22$ und $c=25{,}2$

Gesucht: Wert des gegebenen Terms

Lösung: Der Überschlag lautet $\frac{5\cdot 1}{25}=\frac{1}{5}=0{,}2$

Ergebnis: $\frac{4{,}75\cdot 1{,}22}{25{,}2}=0{,}23$

Ein Vergleich des Ergebnisses mit dem Wert des Überschlages zeigt die richtige Größenordnung.

▲2▲ *Gegeben:* $\frac{2(5x-2)}{3}<2x+6$

Gesucht: Lösungsmenge im Bereich der natürlichen Zahlen

Lösung: Durch äquivalente Umformungen der gegebenen Ungleichung eliminiere ich x.

$\frac{2(5x-2)}{3}<2x+6$	$\cdot 3$
$10x-4<6x+18$	$-6x+4$
$4x<22$	$:4$
$x<5{,}5$	

Die Lösungsmenge ist $L=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

▲3▲ a) Zunächst bestimme ich den Hauptnenner der drei Summanden.

$4\cdot m \quad =2^2\cdot m$

$6\cdot n \quad =2\cdot 3\cdot n$

$8\cdot m\cdot n=2^3\cdot m\cdot n$

k.g.V. $\quad 2^3\cdot 3\cdot m\cdot n$

Durch Erweiterung jedes einzelnen Bruches erhalte ich die Summe

$$\frac{5}{4m}+\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}=\frac{30n}{24mn}+\frac{28n}{24mn}-\frac{27-3m}{24mn}$$

Durch Addition der Summanden ergibt sich der gesuchte Quotient

$$\frac{5}{4m}+\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}=\frac{30n+31m-27}{24mn}.$$

b) Bei der Berechnung des Quadrats benutze ich die binomische Formel

$(a+b)^2$, wobei $a=\frac{2}{3}u$ und $b=-\frac{1}{2}v$ ist.

$$(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}v)^2=\frac{4}{9}u^2-\frac{2}{3}uv+\frac{1}{4}v^2$$

▲4▲ *Ansatz:*

(1) 31 LKW_{klein} + 27 $LKW_{groß}$ = 143

(2) 1,5 LKW_{klein} = $LKW_{groß}$?

Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, ersetze ich $LKW_{klein}=x$ und $LKW_{groß}=y$. Ich erhalte das folgende Gleichungssystem:

Lösung:

$$(1)' \quad 31x + 27y = 143$$
$$\underline{(2)' \quad 1{,}5x \quad = y}$$

(2)' in (1)' eingesetzt ergibt:

$$(1)'' \quad 31x + 27\cdot(1{,}5x) = 143$$
$$71{,}5x = 143 \mid :71{,}5$$
$$x = 2$$

Aus (2)' erhalte ich für $y=3$

Probe: Die Probe führe ich am Text durch. 31 Fuhren des kleineren LKW befördern $2\cdot 31=62$ t Kies. 27 Fuhren des größeren LKW befördern $3\cdot 27=81$ t Kies. Insgesamt werden 62 t + 81 t = 143 t transportiert. Das entspricht der Aufgabenstellung.

Antwortsatz: Der LKW mit der kleineren Ladekapazität faßt 2 Tonnen und der größere LKW 3 Tonnen Kies.

▲5▲ a) Eine Funktion ist eine Menge geordneter Zahlenpaare $[x; y]$ mit $x \in X$ (Definitionsbereich) und $y \in Y$ (Wertebereich), wobei die Menge X eindeutig auf die Menge Y abgebildet wird.

b) Die Figuren (1) und (3) sind Graphen von Funktionen der Form $y=f(x)$, weil jedem x aus dem Definitionsbereich genau ein y aus dem Wertebereich zugeordnet wird. Die Figur (2) ist kein Graph einer Funktion der Form $y=f(x)$, weil es x-Elemente gibt, denen zwei verschiedene y-Elemente zugeordnet sind.

▲6▲ Der Term für eine beliebige ungerade Zahl hat die Gestalt $(2n+1)$, n natürliche Zahl. Das Quadrat dieser beliebigen ungeraden Zahl ist

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1.$$

Dieses Quadrat soll um 3 vergrößert werden. Ich addiere zum Quadrat die Zahl 3 und erhalte

$$(2n+1)^2+3 = 4n^2+4n+4.$$

Dieses Ergebnis ist durch 4 teilbar, da jeder Summand den Faktor 4 enthält.

Bei dieser Aufgabe wählten die Schüler sehr unterschiedliche Darstellungsformen des geforderten Nachweises. Beispielsweise gingen mehrere Schüler folgendermaßen vor:

Behauptung: $4 \mid [(2n+1)^2+3]$, n natürliche Zahl

Nachweis: $(2n+1)^2+3 = 4n^2+4n+4 = 4(n^2+n+1)$

Das Produkt $4(n^2+n+1)$ enthält den Faktor 4, deshalb gilt:

$$4 \mid [(2n+1)^2+3]$$

Dieses Vorgehen ist exakt, vollständig und recht übersichtlich. Bei solchen Nachweisen gibt es stets verschiedene Möglichkeiten der Darstellung. Einige Schüler führten den Nachweis ohne jegliche Erläuterung folgendermaßen:

$$(2x+1)^2+3 = 4x^2+4x+1+3 = 4x^2+4x+4$$
$$y = \frac{4x^2+4x+4}{4}$$
$$y = x^2+x+1$$

Wenn auch eingeschätzt werden kann, daß diese Schüler die Aufgabenstellung und den richtigen Ansatz für den Nachweis erkannt hatten, so ist die Form der Darstellung nicht befriedigend. Die Gedanken, die sich dabei der einzelne Schüler gemacht hat, sind bestenfalls zu erraten.

Lösung zur Aufgabe von Prof. Dr. L. Berg

▲1038▲ Die Aufgabenstellung führt auf die Rekursionsformel $n_{k+1}=2n_k-1$. Von $n_1=2$ ausgehend, findet man sofort die ersten Glieder 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ... der Folge, und man vermutet leicht das Bildungsgesetz $n_k=2^{k-1}+1$. Der Beweis der Vermutung kann folgendermaßen erfolgen.

1. Durch vollständige Induktion.
2. Durch die Substitution $n_{k+1}=2^k x_k$, die zu der Gleichung $x_k-x_{k-1}=-2^{-k}$ und wegen $x_0=2$ zu der Lösung $x_k = 2-\sum_{\nu=1} 2^{-\nu} = 1+2^{-k}$ führt.
3. Durch die Substitution $n_k=x_k+y_k$, mit $y_{k+1}=2y_k-1$ und $x_{k+1}=2x_k$ sowie $x_1+y_1=2$. Es ist naheliegend, $y_k=1$ zu wählen. Dann folgt $x_1=1$ und somit $x_k=2^{k-1}$.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. R. Klötzler

▲1164▲ Zu 1:

$$K(x) = \sum_{j=1}^{n} \{k_1 Min(b_j,x) - k_0(x-b_j)_+\}.$$

Zu 2: $y=K(x)$ stellt im kartesischen (x, y)-Koordinatensystem einen Polygonzug dar, dessen Ecken die Abszissen b_j haben und dessen Anstieg m_j in $[b_j, b_{j+1}]$ $(n-j)\,k_1-jk_0$ beträgt. Das Maximum liegt dann z. B. in einem solchen Eckpunkt der Abszisse b_{i*} für den $m_{i*}<0$ und $m_{i*-1} \geqq 0$ ist. Aus voranstehender Charakterisierung von b_{i*} ergibt sich nach wenigen Rechnungen

i^* = kleinste natürliche Zahl $> \frac{nk_1}{k_1+k_0}$. Also $x_{max}=b_{i*}$.

Zu 3: Ist $b_{i*} \leqq C$, beträgt $x_{max}=b_{i*}$; andernfalls ist $x_{max}=C$. (*Anmerkung:* Die angegebene Lösung braucht übrigens nicht die einzige optimale Lösung zu sein.

Lösungen zu alpha-heiter

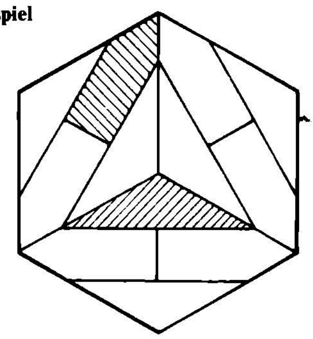
Bruchstücke

neunzig, Zweiter, Tafelwerk, Inkreis, Ellipse, Minuend, Omikron, Grauton, Neunter.

Von 3 zu 3

Der Weg verläuft über folgende Ziffern: 3–4–5–4–3–9–7–8–1–4–9–6–7–8–9–1–2–8–5–4–3.

Legespiel



b+cc=ca

6	+	5	=	11
+		+		+
− 1	·	6	=	5
5	·	11	=	16

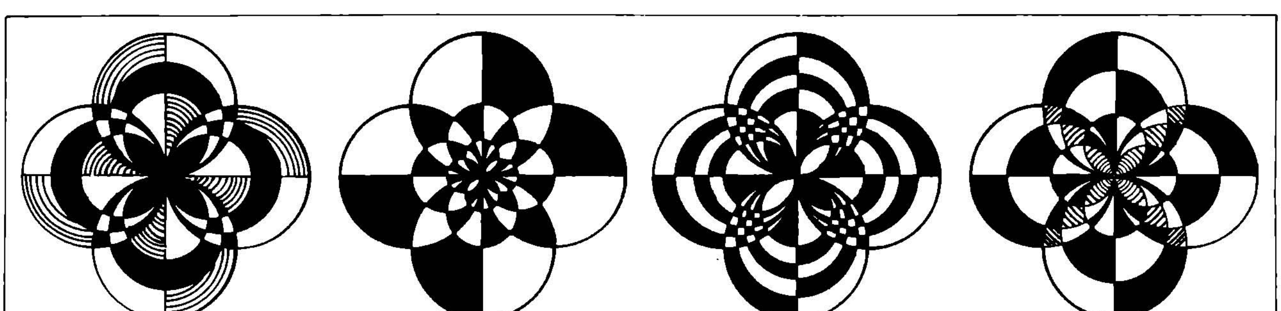
$a=6$; $b=5$; $c=1$

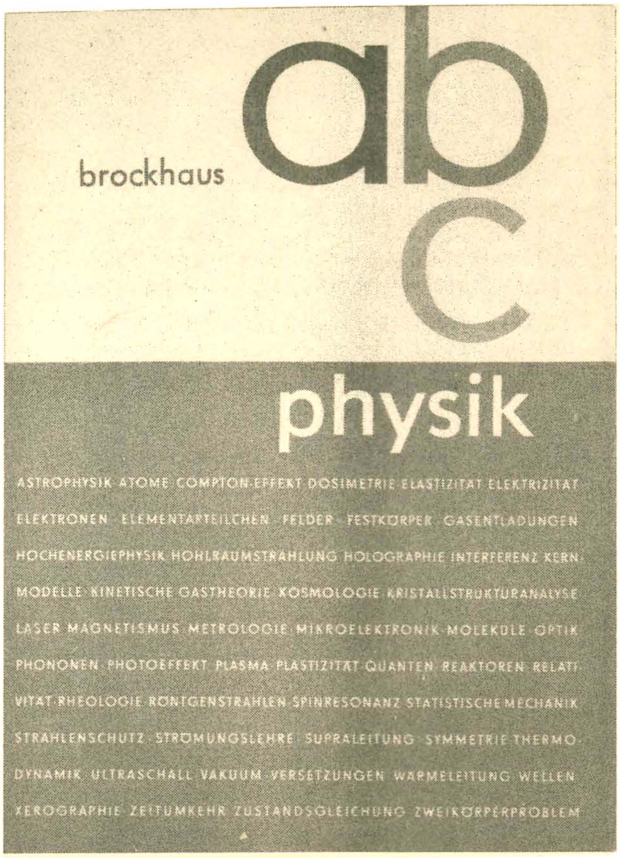
Rund um den Kreis

Rückreise **Thale** sende **Tecumseh** **nebenbei** darum **fang** **Stangen** **teilen** diese **Kanten** **durch** **Messer**

Schüler der Spezialschule für Musik, Halle (Klasse 5/6), zeichneten die vorliegenden Ornamente, Anregung gab das Titelblatt von Heft 2/73.

Mit Zirkel und Zeichendreieck





VEB F. A. Brockhaus Verlag Leipzig 1973
2 Bände, Kunstleder, 62,— M
Band I A—L, Band II M—Z

Brockhaus ABC Physik
Das umfassende Lexikon der Physik enthält auf mehr als 1 700 Seiten rund 12 000 Stichwörter, 2 000 Abbildungen im Text und auf 64 teilweise farbigen Tafeln sowie eine Vielzahl von Tabellen, graphischen Darstellungen und Literaturangaben.

Brockhaus ABC Physik
gibt in alphabetisch geordneten Einzelartikeln einen Überblick über das Gesamtgebiet der gegenwärtigen Physik und ihrer Spezialdisziplinen in der vielfältigen Verflechtung und gegenseitigen Abgrenzung zu den Nachbargebieten. Zusammenhängende Großartikel und kürzere Einzeldarstellungen geben Einblick in moderne physikalische Forschungs- und Arbeitsrichtungen sowie in den weiten technischen Anwendungsbereich der Physik. Die physikalischen Zusammenhänge der den Menschen umgebenden Erscheinungen werden wissenschaftlich einwandfrei und weitgehend allgemeinverständlich erläutert, um einen möglichst großen Benutzerkreis die rasche Orientierung zu erleichtern. Da viele Ergebnisse und Gesetzmäßigkeiten der modernen Physik nur in der Ausdrucksweise der Mathematik präzise zu erklären sind, werden die verwendeten mathematischen Ausdrücke selbst in besonderen Artikeln erläutert.

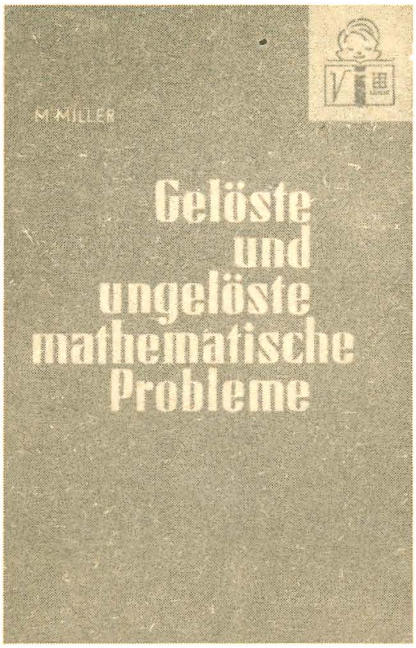
Brockhaus ABC Physik
wendet sich an alle Leser, die zu ihrer fachlichen Qualifizierung und allgemeinen Weiterbildung in und neben dem Beruf an der Erläuterung physikalischer Begriffe interessiert sind, an die Oberschüler, die Studierenden naturwissenschaftlicher und technischer Fachrichtungen in Fach- und Hochschulen, an die Lehrer der Polytechnischen und Erweiterten Oberschule, an interessierte Werktätige in den vielfältigen Einrichtungen der Erwachsenenbildung und schließlich an den wissenschaftlich oder praktisch tätigen Fachmann, um sich auf dem Nachbargebiet schnell und zuverlässig zu orientieren.
Auf 122 Seiten werden z. B. die mit dem *Anfangsbuchstaben A* beginnenden Begriffe erläutert. Die wichtigsten Stichwörter der ersten 50 Seiten seien hier genannt:
Abbesche Zahl; Abbildung (geometrisch-optisch; beugungsoptisch; akustisch); Abbildungsgleichungen; Abberation; Ableiter; Ablenkprisma; Ablese- und Anzeigeeinrichtungen; Abschirmung; absoluter Betrag, absoluter Fehler, absoluter Nullpunkt, absolute Ruhe, absolute Temperatur; Absorption; Adoptation; Additionstheorem der Geschwindigkeit; Adhäsion; Adsorption; Aeromechanik; Affinität; Aggregatzustand; Ähnlichkeitsregeln, -sätze, -theorie, -transformation; Akkommodation; Akustik; Algebra;

Die Spezialklassen Mathematik/Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin
nehmen noch Bewerbungen von besonders begabten und leistungsstarken Schülern der 10. Klassen (EOS und POS) für das Schuljahr 1974/75 entgegen.

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Voraussetzung: Bei vorbildlichem gesellschaftlichem Verhalten hervorragende Leistungen in den Fächern Mathematik und Physik.
Ausbildungsziel: Vertiefte Kenntnisse in den naturwissenschaftlichen Fächern und Abitur nach zwei Jahren (11. und 12. Klasse).
Bei entsprechenden Leistungen ist eine bevorzugte Aufnahme eines Diplomstudiums gesichert.
Soziale Bedingungen: Finanzielle Zuwendungen werden gewährt. Unterkunft im Studentenheim ist möglich.

Bewerbungen sind umgehend an die Spezialschule der Humboldt-Universität, 102 Berlin, Burgstraße 26, zu richten.
Telefon: 422 65 85



Leseprobe

1. Ein landwirtschaftlich-mathematisches Problem Newtons

Isaac Newton sollte nach dem Willen seiner aus einer Bauernfamilie stammenden Mutter den von seinem Vater ererbten kleinen Gutshof in dem nahe der Ostküste Englands liegenden Dorf Wolsthorpe übernehmen. Aber auf Anraten von Verwandten und Freunden, die *Newtons* Begabung erkannten, konnte er studieren und erhielt bereits im Jahre 1669 den *Lehrstuhl für Mathematik* an der *Universität Cambridge* übertragen. Zu seinen Pflichten gehörten auch Vorlesungen über Arithmetik und Algebra. Sein Schüler und späterer Nachfolger *William Whiston* (1667 bis 1752) veröffentlichte 1707 diese Vorlesungen seines Lehrers unter dem Titel „Arithmetica universalis". In diesem Werk findet sich folgendes Problem, das *Newton* wohl in Erinnerung an seine frühere landwirtschaftliche Tätigkeit aufgestellt hatte:

k_1 Kühe weiden w_1 Wiesen in t_1 Tagen ab, k_2 Kühe weiden w_2 Wiesen in t_2 Tagen ab, k_3 Kühe weiden w_3 Wiesen in t_3 Tagen ab. Welche Beziehung besteht zwischen den neun Größen k_1 bis t_3? Es muß vorausgesetzt werden, daß alle Wiesen den gleichen Ertrag an Futter liefern, daß das tägliche Wachstum der Wiesen sich nicht ändert und daß jede Kuh täglich dieselbe Futtermenge frißt.

Newton fand folgende Lösung der Aufgabe: Der anfängliche Grasbestand jeder Wiese sei x, die tägliche Wachstumsmenge jeder Wiese sei y und die täglich von jeder Kuh aufgenommene Futtermenge sei z.

Am Ende des ersten Tages ist die auf allen Wiesen noch vorhandene Futtermenge $w_1x+w_1y-k_1z$; am Ende des dritten Tages ist die auf allen Wiesen noch vorhandene Futtermenge $w_1x+3w_1y-3k_1z$ usw; am Ende des t-ten Tages ist auf allen Wiesen noch die Futtermenge $w_1x+tw_1y-tk_1z$ vorhanden.

Da nach t Tagen sämtliche Wiesen abgefressen sind, ergeben sich die drei homogenen Gleichungen

$$w_1x+t_1w_1y-t_1k_1z=0, \qquad (1)$$
$$w_2x+t_2w_2y-t_2k_2z=0, \qquad (2)$$
$$w_3x+t_3w_3y-t_3k_3z=0. \qquad (3)$$

Newton wußte von den von *Leibniz* gefundenen Determinanten noch nichts; er löste die Aufgabe folgendermaßen:

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben, nach den Unbekannten x und y aufgelöst:

$$x=\frac{t_1t_2\cdot(k_1w_2-k_2w_1)}{w_1w_2(t_2-t_1)}z;$$
$$y=\frac{w_1t_2k_2-w_2t_1k_1}{w_1w_2(t_2-t_1)}z.$$

Wir setzen diese beiden Ausdrücke in (3) ein und erhalten nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner $w_1w_2(t_2-t_1):z$ die gesuchte Beziehung:

$$w_3t_1t_2(k_1w_2-k_2w_1)+t_3w_3(w_1t_2k_2-w_2t_1k_1)$$
$$=k_3t_3w_1w_2(t_2-t_1).$$

In Determinantenform lautet diese Bedingung:

$$\left.\begin{matrix} w_1 & w_1t_1 & -k_1t_1 \\ w_2 & w_2t_2 & -k_2t_2 \\ w_3 & w_3t_3 & -k_3t_3 \end{matrix}\right\} =0.$$

2. Primzahlzwillinge

Abgesehen von dem Primzahlpaar 2 und 3 ist der Mindestabstand von zwei aufeinanderfolgende Primzahlen gleich 2. Primzahlpaare dieser Art bezeichnet man als Primzahlzwillinge, z. B. 3 und 5, 5 und 7, 17 und 19 usw. Auch die Primzahlzwillingspaare werden nach oben hin seltener. Die Abnahme unterliegt jedoch keinem angebbaren Gesetz und ist ziemlich unregelmäßig. So liegen zwischen 1 und 500 genau 24, zwischen 501 und 1000 nur 11 und zwischen 1001 und 1500 merkwürdigerweise 15 Zwillingspaare. Die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge oder ob es ein größtes Zwillingspaar gibt, ist bisher noch ungelöst.

Das Problem der Primzahldrillinge ist sehr einfach zu lösen. Außer den Drillingen 3, 5 und 7 kann es weiter keine Drillinge geben, da von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen stets eine Zahl durch 3 teilbar ist. Daraus folgt, daß es auch keine Vierlinge von Primzahlen, die in den Abständen 2, 2, 2 auftreten, geben kann. Bezeichnet man dagegen Primzahlen mit den Abständen 2, 4, 2 als Primzahlvierlinge, so kann man mit Hilfe einer Primzahltabelle solche Vierlinge ohne weiteres feststellen, z. B. 5, 7, 11, 13 oder 101, 103, 107, 109. Sogar noch zwischen 290000 und 300000 gibt es Primzahlvierlinge:

294311, 294313, 294317, 294319;
295871, 295873, 295877, 295879;
299471, 299473, 299477, 299479.

Ob es unendlich viele Gruppen von Primzahlvierlingen gibt, ist bisher nicht bekannt.

Weitere mathematische Titel des

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Belkner, H.

Determinanten

2. berichtigte und erweiterte Aufl.
96 S. mit 8 Abb., Leipzig 1970,
kartoniert 4,80 M
Mathematische Schülerbücherei 33,
Bestell-Nr. 665 100 1

Lehmann, E.

Lineare Optimierung

für Junge Mathematiker
116 S. mit 36 Abb., Leipzig 1970,
kartoniert 4,85 M
Mathematische Schülerbücherei 47,
Bestell-Nr. 665 564 3

Miller, M.

Rechenvorteile

4. verbesserte und ergänzte Aufl.
92 S. mit 1 Abb., Leipzig 1968,
kartoniert 3,75 M
Mathematische Schülerbücherei 14,
Bestell-Nr. 665 065 8

Übungen für Junge Mathematiker

Herausgegeben von G. Kleinfeld

Teil 1: Zahlentheorie

Von E. Lehmann, 2. Aufl. 159 S.
mit 22 Abb., Leipzig 1970,
kartoniert 6,50 M
Mathematische Schülerbücherei 36,
Bestell-Nr. 665 102 8

Teil 2: Elementargeometrie

Von G. Grosche, 2. Aufl.
93 S. mit 74 Abb., Leipzig 1973,
kartoniert 4,50 M
Mathematische Schülerbücherei 37,
Bestell-Nr. 665 466 7

Teil 3: Ungleichungen

Von G. Kleinfeld, 2. Aufl.
134 S. mit 20 Abb., Leipzig 1973,
kartoniert 5,50 M
Mathematische Schülerbücherei 38,
Bestell-Nr. 665 467 5

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

XVI. INTERNATIONALE MATHEMATIK-OLYMPIADE 1974

OJM DDR

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv: Volkssternwarte Hartha (S. 56); J. Lehmann, Leipzig (S. 53, 59, 62, 63); H. Pelka, Leipzig (S. 72);
Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig;
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 10. März 1974

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik-Olympiaden in der DDR

Für viele Schüler nimmt die Mathematik seit langem einen wichtigen Platz auch in der außerschulischen Tätigkeit ein. Dabei geht es nicht nur um die ständig wachsende Bedeutung dieser Wissenschaft für unsere gesamte Volkswirtschaft, nicht nur darum, daß wir dringend Spitzenleistungen auf diesem Gebiet brauchen, die immer mehr unmittelbar produktionswirksam werden. Für uns geht es auch darum, daß zu einer allseitig entwickelten sozialistischen Persönlichkeit gute, solide Kenntnisse und Fertigkeiten in der Mathematik gehören. Diese tragen dazu bei, das Verständnis der Schüler für die Gesetzmäßigkeiten in Natur und Gesellschaft zu erhöhen. Sie sollen lernen, Definitionen zu erfassen, Beweise zu führen sowie die mathematische Terminologie und Symbolik zu verstehen. Durch die geforderte exakte Ausdrucksweise werden die Lernenden veranlaßt, über den jeweiligen Sachverhalt gründlicher nachzudenken und ihn damit gedanklich besser zu beherrschen.

Ein entscheidender Anstoß auf diesem Gebiet war der Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrats der DDR vom 17. Dezember 1962 *Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR*. Heute gibt es in vielen Schulen, Kreisen und Bezirken eine vielseitige, interessante außerunterrichtliche mathematische Tätigkeit. Charakteristisch ist dabei die sehr enge und fruchtbare Zusammenarbeit von Fachwissenschaftlern – also Mathematikern aus Universitäten, Hoch- und Fachschulen sowie der Akademie der Wissenschaften der DDR – Pädagogen und der FDJ.

Auch die *Mathematische Gesellschaft der DDR* sieht einen nicht unwesentlichen Teil ihrer Aufgaben darin, mathematisch talentierte und interessierte Schüler zu fördern und zu betreuen.

Zahlreiche Mitglieder der *Mathematischen Gesellschaft der DDR* arbeiten daran mit, außerunterrichtliche Veranstaltungen inhaltlich zu gestalten. Die Gesellschaft ist zusammen mit dem Ministerium für Volksbildung und dem Zentralrat der FDJ sowie dem Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen Träger der *Olympiaden Junger Mathematiker*.

Zu den Haupttagungen der Gesellschaft und zu den Tagungen ihrer *Sektion Schulmathematik* werden seit 1968 jeweils etwa 50 Schüler eingeladen, die sich bei der 4. Stufe der Mathematik-Olympiade (Olympiadeklassen 10 bis 12) ausgezeichnet haben. Diese Schüler besuchen sowohl angemessene Vorträge des allgemeinen Tagungsprogramms als auch spezielle, nur für sie durchgeführte Veranstaltungen.

In Berlin hat sich eine *Mathematische Schülergesellschaft* konstituiert, die von Mathematikern der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität geleitet und betreut wird.

Generell kommt es darauf an, viele Schüler anzuregen, sich mit der Mathematik zu beschäftigen. Das muß durchaus nicht immer in festen Organisationsformen, z. B. Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften, geschehen. Mathematische Knobelaufgaben an der Wandzeitung, interessante FDJ- bzw. Pionierveranstaltungen mit mathematischen Aufgaben, Wettbewerbe im Herstellen geeigneter Knobelaufgaben und nicht zuletzt die systematische Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, (vor allem für Schüler der Klassen 5 bis 10) mit der Zeitschrift *Wurzel* (herausgegeben von der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena) sowie mit den Aufgaben von *Wissenschaft und Fortschritt* (die letzten beiden vor allem für Schüler der Erweiterten Oberschulen) sind dafür geeignet. Talente und Leistungsmöglichkeiten auf dem Gebiet der Mathematik werden häufig erst dabei entdeckt. Wenn sich die mathematische Begabung auch bei Olympiaden bestätigt, werden die Schüler in Kreisklubs, Bezirksklubs, auf zentralen Lehrgängen oder individuell weitergefördert.

Die *Olympiaden Junger Mathematiker* zeigen, daß sich diese Formen des Förderns mathematisch besonders talentierter Schüler bewährt haben. Erfolge erzielen in diesem Wettbewerb – besonders in höheren Stufen und höheren Olympiadeklassen – auf die Dauer nur solche Schüler, die fleißig, ausdauernd und zielstrebig ihr mathematisches Wissen und Können festigen, ergänzen und vertiefen, d. h., die sich auch außerhalb des Unterrichts mit der Mathematik befassen. Die Erfahrungen beweisen, daß diese Schüler nicht einseitige Spezialisten sind, sondern sich auch für viele andere Dinge interessieren – z. B. für Naturwissenschaften und Musik. Viele *Junge Mathematiker* vermitteln ihr Wissen ihren Mitschülern, vor allem den jüngeren, und tragen dazu bei, das mathematische Niveau ihrer Schulen zu heben.

Die Olympiade-Aufgaben werden aus den Gebieten der Mathematik entnommen, die auch in der Schule behandelt werden. Besonders beachtet werden die Bereiche, aus denen die Aufgaben der Internationalen Mathematik-Olympiaden gestellt werden. Daher wurden z. B. nur wenige Aufgaben aus der Analytischen Geometrie, der Differentialrechnung und der Integralrechnung ausgegeben. Die Schüler können jedoch beim Lösen der gestellten Aufgaben Methoden der sogenannten *Höheren Mathematik* benutzen, wenn sie richtig begründet werden.

Folgende Themen stehen bei den Aufgaben im Vordergrund: *Arithmetik, Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen (insbesondere trigonometrische Funktionen), logisch-kombinatorische Aufgaben, Geometrie der Ebene, Geometrie des Raumes sowie geometrische Konstruktionen*. Es gibt aber auch Aufgaben aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, über *algebraische Strukturen* u. a., bei denen Begriffe, die nicht zum Schulstoff gehören, in der Aufgabenstellung erläutert werden.

Aus den *Olympiaden Junger Mathematiker* sind zahlreiche Studenten mit ausgezeichneten Leistungen hervorgegangen.

Aus Anlaß der *X. Olympiade Junger Mathematiker* im April 1971 haben erfolgreiche Teilnehmer früherer Internationaler Mathematik-Olympiaden auf einem Kolloquium über ihre gegenwärtigen Arbeiten berichtet. Neun dieser Vorträge sind in den Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR veröffentlicht worden.

Erfolgreichster Teilnehmer aller bisherigen Internationalen Mathematik-Olympiaden ist *Wolfgang Burmeister*. Er errang drei 1. Preise sowie zwei 2. Preise und wurde schon als Schüler der 8. Klasse Preisträger. Im Rahmen der wissenschaftlich-praktischen Arbeit für die Schüler der Abiturstufe verfaßte er eine Arbeit aus dem Gebiet der numerischen Mathematik unter dem Titel *Inversionsfreie Verfahren zur Lösung nichtlinearer Operationsgleichungen*. Diese Arbeit erschien kürzlich in der *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. Zwei weitere Arbeiten, die er als Student schrieb – er legte 1971 das Abitur ab – sind im Druck. Seit Februar dieses Jahres ist er Forschungsstudent.

Durch die Mathematik-Olympiaden und die damit verbundenen Fördermaßnahmen wird erreicht, daß sich mathematisch begabte junge Menschen frühzeitig an die Front der mathematischen Forschung führen lassen. Aus der Geschichte der Mathematik ist bekannt, daß viele bedeutende mathematische Entdeckungen und Erfindungen von den

Mathematikern vorwiegend im dritten Lebensjahrzehnt (oder früher) gemacht wurden. In den späteren Lebensjahren wurden sie von ihnen vor allem weiterentwickelt.
Man muß sich jedoch grundsätzlich darüber im klaren sein, daß bei den Olympiaden jene Schüler hervorgetreten sind, die eine gute Kombinationsfähigkeit besitzen und imstande sind, ein Problem schnell zu lösen. Das sind zwar für den Mathematiker wertvolle Eigenschaften, es wäre aber verfehlt, zu glauben, daß nur der ein guter Mathematiker werden kann, der über diese Eigenschaften verfügt. Es gibt zahlreiche mathematische Probleme, die nur durch ein tiefgründiges Umdenken zu lösen sind. Mathematiker, die solche Probleme gelöst haben, hätten vielleicht niemals zu Preisträgern einer Olympiade gehört. Umgekehrt gibt es unter den Gewinnern der traditionsreichen ungarischen und sowjetischen Wettbewerbe neben international bekannt gewordenen Mathematikern auch solche, die später auf diesem Gebiet nicht hervorgetreten sind.
Ein Prüfstein für die Qualität unserer *Jungen Mathematiker* sind auch die jährlichen Internationalen Mathematik-Olympiaden (Abk IMO). Bei der I. Internationalen Mathematik-Olympiade, die 1959 auf Einladung der Mathematischen Gesellschaft (Societatea de Stiinte Matematice di Republica Socialista Romania) und des Ministeriums für Bildungswesen der Sozialistischen Republik Rumänien in Bukarest durchgeführt wurde, belegte die Mannschaft der DDR unter den sieben Teilnehmerländern den letzten Platz.
In den folgenden Jahren bekundeten weitere Länder ihr Interesse an den Mathematik-Olympiaden, so daß 1973 zur XV. IMO schon 16 Teilnehmerländer zu verzeichnen waren. Wir können stolz darauf, sein, daß sich die Mannschaften unserer Republik allmählich immer weiter nach vorn gekämpft haben und seit 1966 zur Spitzengruppe in der inoffiziellen Länderwertung gehören. Im Jahre 1965 wurde die VII. IMO in der DDR durchgeführt. In der Zeit vom 4. 7. bis 17. 7. 1974 wird die DDR erneut Gastgeber für die Teilnehmer einer IMO sein.

Im folgenden soll am Beispiel dieser XVI. IMO der Ablauf einer solchen Olympiade dargestellt werden:
Der Delegationsleiter der DDR konnte 1973 der Jury der XV. IMO mitteilen, daß die DDR zur XVI. IMO einladen wird. Die Olympiade wird vom Ministerium für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Zusammenarbeit mit dem Ministerium für das Hoch- und Fachschulwesen und dem Zentralrat der FDJ durchgeführt.

Die Einladungen des Ministers für Volksbildung der DDR wurden am Ende des Jahres 1973 an alle Länder gesandt, die bisher an Internationalen Mathematik-Olympiaden teilgenommen haben. Die Länder, die ihre Teilnahme an der XVI. IMO zugesagt haben, wurden aufgefordert, bis zum 1. 4. 1974 drei bis fünf Aufgaben mit Lösungen an den *Präsidenten der Jury* der XVI. IMO einzusenden. Das Gastgeberland reicht traditionsgemäß keine Aufgabe ein. Der Präsident wählt mit drei Beratern (Hochschullehrer, die der Aufgabenkommission des ZKOJM angehören) 6 Aufgaben und 6 Ersatzaufgaben aus, die zusammen mit ihren Lösungen in den vier Verhandlungssprachen deutsch, russisch, englisch und französisch am 4. 7. den *Mitgliedern der Jury* als Vorschlag übergeben werden. Die *Jury* besteht aus den *Delegationsleitern* der Teilnehmerländer und dem vom Veranstalterland berufenen Präsidenten. Sie wird am 5. 7. in Weimar das erste Mal zusammentreten. In den folgenden dreitägigen Verhandlungen legt sie die 6 Wettbewerbsaufgaben und die Bewertungsgrundsätze (ein Punktsystem, bei dem ein Teilnehmer im allgemeinen maximal 40 Punkte erreichen kann) endgültig fest. Dabei muß beachtet werden, daß nur solche Aufgaben gestellt werden, deren Stoffgebiete im Schulunterricht aller Teilnehmerländer grundsätzlich behandelt werden. Weiter prüft die Jury, ob alle Teilnehmer dem *Reglement* entsprechen, d. h., Schüler von allgemeinbildenden Schulen, Berufsschulen oder Spezialschulen sind und das Höchstalter von 20 Jahren nicht überschritten haben. Die festgelegten Aufgaben werden dann von den jeweiligen Delegationsleitern in die Landessprache der Schüler übersetzt und vervielfältigt.

Vom 6. 7. ab versammeln sich die Teilnehmer in Erfurt. Jede Mannschaft besteht aus 8 Schülern, die in den meisten Ländern auf Grund ihrer Ergebnisse bei den nationalen Mathematik-Olympiaden ausgewählt werden. Am 8. 7. findet die offizielle Eröffnung in der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* statt. Danach beginnt die erste Klausur, in der 3 Aufgaben in vier Stunden zu bearbeiten sind. In den ersten 30 Minuten können die Schüler schriftlich Fragen zum Aufgabentext an die Jury stellen. Diese entscheidet, ob bzw. wie eine Frage schriftlich beantwortet wird. Am nächsten Tag (9. 7.) wird die zweite Klausur unter denselben Bedingungen geschrieben.
Die Delegationsleiter nehmen zusammen mit ihren Stellvertretern eine erste Korrektur vor. Danach erfolgt eine zweite Prüfung der Arbeiten durch *Koordinatoren*, die für ein *einheitliche Beurteilung aller Schüler* zu sorgen haben und für jede Aufgabe jedes Schülers zusammen mit dem Delegationsleiter eine Bewertung festsetzen.
Diese Koordinierung für die Teilnehmer aus den Gastländern erfolgt durch Gruppen von je drei sprachkundigen (für russisch, englisch, französisch) Mathematikern aus der DDR. Bei der Koordinierung der Lösungen der Schüler aus der DDR wirken Delegationsleiter aus anderen Ländern (in der Regel diejenigen, die die Aufgaben vorgeschlagen haben) mit. Sollten sich Delegationsleiter und Koordinatoren nicht einigen können, so muß die Jury (mit einfacher Stimmenmehrheit) über die Bewertung entscheiden. Daß alle Personen, die Kenntnis der Wettbewerbsaufgaben haben, verpflichtet sind, diese bis zum Beginn der Klausur geheimzuhalten, versteht sich von selbst. Um die Kontaktmöglichkeiten der Jurymitglieder mit den Schülern bis zum Ende der Korrektur (bewertet wird das, was der Schüler geschrieben hat. Der Korrektor soll sich nicht von ihm erläutern lassen, was der Schüler gemeint hat) einzuschränken, wird die Jury nicht am selben Ort wie die Schüler untergebracht.
Am 11. 7. wird die Bewertung abgeschlossen, und am 12. 7. tritt die Jury zusammen, um über die Verteilung der Preise zu entscheiden. Entsprechend den erreichten Punktzahlen werden (meist mehrere) 1., 2. und 3. *Preise* sowie *Diplome für die ausgezeichnete Lösung von Aufgaben* vergeben. Preise und Diplome sind nicht mit Geld- oder Sachwerten verbunden. Die Übergabe der Urkunden durch den Präsidenten der Jury an die Preisträger erfolgt auf einer festlichen Veranstaltung am 15. 7. 1974 in der *Kongreßhalle* in Berlin. Außer dieser offiziellen Wertung gibt es eine inoffizielle Länderwertung, bei der die von allen Schülern einer Delegation erreichten Punkte zusammengezählt werden (vgl. Tabelle). In ihr spiegeln sich die Güte des mathematischen Schulunterrichts, die Intensität der außerunterrichtlichen Förderung in Mathematik sowie die Qualität und die Möglichkeiten des Auswahlverfahrens für die IMO-Teilnehmer wider.

Vom 6. bis zum 9. 7. werden die Wettbewerbsteilnehmer mit der Stadt Erfurt und ihren Menschen bekannt gemacht. Nach den Klausuren haben sie Gelegenheit, sich bei Sport und Spiel zu erholen. Während die Jury die Schülerarbeiten korrigiert und bewertet, unternehmen die Schüler Exkursionen nach Eisenach, Ruhla, Jena, Ilmenau, Kahla, Oberhof und Suhl. Der 12. 7. dient einer Exkursion nach Weimar und Buchenwald. In der *Nationalen Mahn- und Gedenkstätte* ist eine Ehrung der Opfer des Faschismus vorgesehen.
Am 13. 7. werden die Teilnehmer und die Jury nach Berlin fahren. Die Tage in Berlin sind mit Stadtbesichtigungen, einem Ausflug nach Potsdam (dabei Besichtigung der *Gedenkstätte Cecilienhof*) und der Abschlußfeier ausgefüllt. Für alle Teilnehmer ist eine solche internationale Veranstaltung ein großes Erlebnis. Es gibt ihnen die Möglichkeit, einen Einblick in das Leben in unserem sozialistischen Staat zu bekommen und sich mit den Errungenschaften unseres Bildungssystems vertraut zu machen.

H. Bausch/W. Engel/H. Titze

IMO-Teilnehmer zu Gast an der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“

Als im September 1953 die ersten Studenten am *Pädagogischen Institut Erfurt* immatrikuliert wurden, ahnten wohl nur wenige, daß hier eine der größten Stätten für die Ausbildung von Fachlehrern ihre verantwortungsvolle Tätigkeit aufgenommen hatte. Anstelle des Gebäudekomplexes, der heute die *Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer* repräsentiert, gab es damals lediglich ein Lehrgebäude, anstelle der mehr als 3400 Studierenden, die heute an der Hochschule ausgebildet werden, gab es 1953 460 Studenten. Das ist gewiß eine beeindruckende Bilanz, auf die die 430 Hochschullehrer und wissenschaftlichen Mitarbeiter dieser Hochschule mit Recht stolz sind.
Auf Beschluß des Ministerrates der DDR erhielt das *Pädagogische Institut Erfurt* mit Wirkung vom 1. September 1969 den Status einer *Pädagogischen Hochschule*. Gleichzeitig wurde das *Pädagogische Institut Mühlhausen* mit der neugegründeten Hochschule vereinigt. Das war ein Höhepunkt in der Geschichte dieser jungen Lehrerbildungsstätte, Ergebnis einer zielstrebigen, beharrlichen und erfolgreichen Bildungs- und Erziehungsarbeit.
Heute bildet die *Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer Erfurt/Mühlhausen* in einem vierjährigen Studium Diplomlehrer für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule aus. Die Spezialisierung auf bestimmte Wissenschaftsdisziplinen (in Erfurt sind es Mathematik, Physik, Polytechnik, Deutsch, Russisch, Kunstwissenschaft) hatte u. a. eine Konzentration wissenschaftlicher Kräfte zur Folge, die eine gute wissenschaftliche Ausbildung der Studierenden garantiert und beachtenswerte Forschungsleistungen bringt.
Eine der größten Sektionen der Pädagogischen Hochschule ist die Sektion Mathematik/Physik mit etwa 750 Direktstudenten. Im Fach Mathematik stehen in den ersten beiden Jahren die klassischen Disziplinen Analysis, Algebra und Geometrie im Vordergrund. Sie werden in einem zusammenhängenden Kurs vermittelt.
Für Studenten mit dem Hauptfach Mathematik wird die Ausbildung vom 3. Studienjahr an mit Lehrveranstaltungen zur Numerischen Mathematik und Rechentechnik, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik und zur Geschichte der Mathematik fortgesetzt.
Die Pädagogische Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* ist ein internationaler Treffpunkt. In jedem Jahr werden an dieser Hochschule mehr als 400 Wissenschaftler, Pädagogen und Studenten aus sozialistischen und nichtsozialistischen Ländern begrüßt.
Während Deutschlehrer aus Frankreich, Italien, Großbritannien, Finnland und anderen nichtsozialistischen Ländern schon seit 15 Jahren zu mehrwöchigen internationalen Sommerkursen nach Erfurt kommen, weilten im Studienjahr 1972/73 erstmalig pädagogische Kader aus der Demokratischen Republik Vietnam an unserer Hochschule. Hier eigneten sie sich Wissen an, das dem tapferen vietnamesischen Volk bei der sozialistischen Weiterentwicklung seines Schulwesens zugute kommen wird.
Auch Assessoren, Inspektoren und Fachlehrer aus der Republik Kuba, wo schrittweise die Lehrpläne und Lehrbücher unseres Mathematikunterrichts eingeführt werden, zählen seit einigen Jahren zu gern gesehenen Gästen unserer Hochschule.
Besonders enge Verbindungen bestehen zwischen der *Pädagogischen Hochschule Dr. Theodor Neubauer* und sieben gleichartigen Einrichtungen der Lehrerbildung in der UdSSR und den sozialistischen Bruderländern. Der Austausch von Wissenschaftlern zwischen den Partnerhochschulen und die Durchführung von Studentenpraktika im Ausland sind inzwischen zu guten Traditionen geworden, die eine wesentliche Bereicherung einiger Ausbildungsprogramme darstellen.
So erhalten beispielsweise alle Studenten, die Russisch als Hauptfach studieren, die Möglichkeit, ein Sprachpraktikum in Moskau, Iwanowo, Rjasan oder Vilnius zu absolvieren. Ausgewählte Studenten der Sektion Polytechnik, Mathematik/Physik und Chemie/Biologie fahren nach Katowice (VR Polen), Eger (Ungarische VR), Banska Bystrica und Ostrava (ČSSR), um an befreundeten Einrichtungen spezielle Untersuchungen durchzuführen und den Erfahrungsaustausch mit den Kommilitonen zu pflegen.
Die Mitarbeiter und Studenten der *Pädagogischen Hochschule Dr. Theodor Neubauer* freuen sich, auch die Teilnehmer der XVI. Internationalen Mathematik-Olympiade in Erfurt zu wissen und heißen sie herzlich willkommen.

S. Bär

IMO-Teilnehmer stellen Aufgaben

Alexander Torgasev, Beograd, Teilnehmer der VII. und VIII. IMO

▲1230▲ Ein kluger Mann, der ein Objekt aus der Entfernung kleiner als ein Meter sehen kann, und der eine Schrittlänge von einem Meter hat, machte folgende Wette:
Wenn es ein Objekt in der Entfernung von d Metern gibt ($d>1$) und wenn ihm nach jedem Schritt gesagt wird: „Du kommst näher an das Objekt“ oder: „Du kommst nicht näher an das Objekt“, kann er das Objekt nach einer endlichen Zahl von Schritten erreichen, noch genauer, deren Zahl wird kleiner als $(\frac{3}{2}d+7)$ sein. (Es wird angenommen, daß er das Objekt erreichen wird, wenn er es sieht, d. h. seine Entfernung beträgt weniger als ein Meter von ihm.)
Gewann der kluge Mann die Wette?

Hans-Dieter Gronau, Rostock, Teilnehmer der XI. IMO

▲1231▲ Es seien a und b zwei reelle Zahlen.
a) Man beweise, daß dann stets die Ungleichung

$$a^4+b^4 \geqq a^3b+ab^3 \qquad (1)$$

erfüllt ist.
b) Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Christoph Bandt, Greifswald, Teilnehmer der IX. und X. IMO

▲1232▲ Eine Tafel Schokolade besteht aus 5 Reihen zu je 20 Stück. Wie muß man brechen, um mit möglichst wenig Brüchen die ganze Tafel in einzelne Stücke zu zerlegen?
Dabei darf man jeweils nur einen Teil der Schokolade auf einmal brechen und nur an einer geraden Linie entlang. Ist es günstiger, zuerst in Reihen zu je 20 Stück oder in Spalten zu 5 Stück zu brechen?

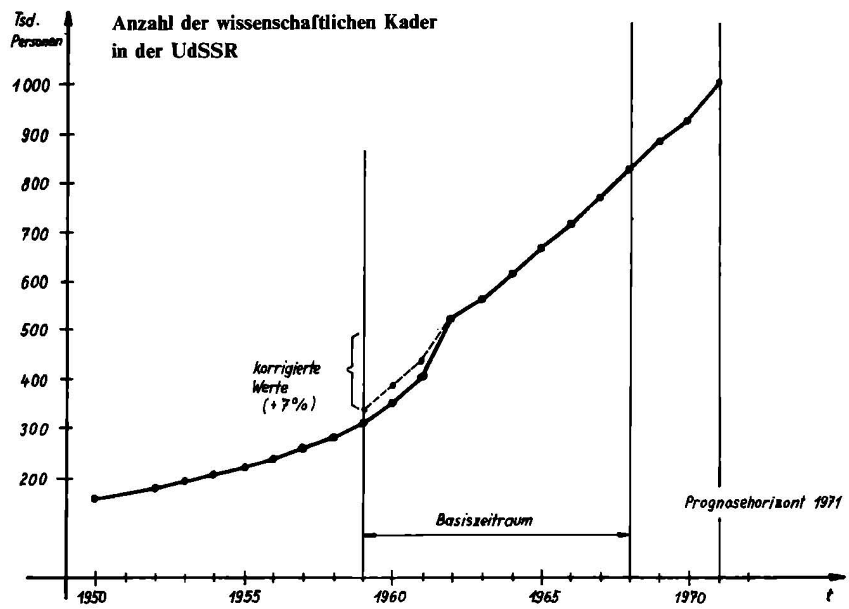
Mathematik in der Gesellschaftsprognostik

Jedem Teilnehmer an Mathematik-Olympiaden – und das kann für *alpha*-Leser fast als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt werden – begegnet früher oder später, bewußt oder unbewußt, der vielzitierte Ausspruch von *Karl Marx:*
Eine Wissenschaft ist erst dann als entwickelt anzusehen, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.

Marx, der sich selbst eingehend mit mathematischen Theorien und ihrer Anwendung vor allem in der Ökonomie befaßte, charakterisierte hier das Verhältnis einzelner Wissenschaften zur Mathematik in allgemeiner Weise. Er spricht davon, daß sich die Wissenschaften „der Mathematik bedienen" und sieht im Grad der Nutzung mathematischer Erkenntnisse ein Kriterium für die Bestimmung des Entwicklungsstandes von Wissenschaften. Nun gibt es viele, die die obige Aussage dahingehend ausgedeutet wissen wollen, daß niedriger Entwicklungsstand einer Wissenschaft gleichbedeutend mit „Unexaktheit" dieser Wissenschaft wäre und man einmal einem Mathematiker die Probleme dieser Wissenschaft vorlegen sollte, wodurch auch diese Wissenschaft auf den Weg „größerer Exaktheit" geführt werden könne.
Als Mathematiker an einem gesellschaftswissenschaftlichen Institut mußte ich mir auf die Frage nach dem Verhältnis der Gesellschaftsprognostik zur Mathematik, ausgehend von obiger allgemeiner Aussage, eine konkrete, spezifische Antwort suchen. Dabei zeigte es sich, daß die eben zitierte Auffassung von der Mathematik als dem Allheilmittel jeglicher Wissenschaftsentwicklung schon oberflächlicher Überprüfung nicht standhielt. Einige wichtige Aspekte der Beziehung von Gesellschaftsprognostik und Mathematik, behandelt am konkreten Beispiel, sollen Gegenstand dieses Artikels sein.
Die *Gesellschaftsprognostik* hat als relativ selbständige Wissenschaftsdisziplin im Marxismus-Leninismus die wissenschaftliche Voraussicht gesellschaftlicher Entwicklungsprozesse zu ihrem Gegenstand. Nun werden einige bei der Verbindung von „Voraussicht" und „wissenschaftlich" bedenklich den Kopf schütteln und fragen, auf welcher Basis ein derartiges Vorwegnehmen gesellschaftlicher Prozesse in wissenschaftlicher Weise möglich sei. Die gesellschaftliche Entwicklung hat im Sozialismus dem Horoskop, der Sterndeuterei und dem Lesen aus dem Kaffeesatz ein Ende bereitet, aber es weckt der Begriff der Voraussicht doch noch zu leicht Erinnerungen an derartige „Informationsquellen". Nun vollzieht sich die gesellschaftliche Entwicklung, wie die Naturprozesse auch, nicht regellos, nicht spontan. Sie vollzieht sich nach objektiven Gesetzen, unabhängig vom Wollen und Wünschen der Menschen. Hierin liegt die Basis der Möglichkeit aber auch gleichzeitig die Ursache der Notwendigkeit wissenschaftlicher Voraussicht im Sozialismus. Derartige Gesetze und die Bedingungen, unter denen sie wirken, können erkannt und im Handeln der Menschen bewußt genutzt werden. Die zukünftige Entwicklung der Gesellschaft basiert auf dem Heute und dem Gestern, wo die Voraussetzungen der morgigen Entwicklung geschaffen werden. Die Analyse der Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung in Vergangenheit und Gegenwart gestattet es, auf Grundzüge und Möglichkeiten künftiger Entwicklung zu schließen und darauf aufbauend den zu beschreitenden Entwicklungsweg zu planen.
In der Prognose- und Planungstätigkeit begegnen uns auf Schritt und Tritt Größenangaben, Mengenbestimmungen, Kapazitäten, kurz verschiedenste Quantitäten. Neben der qualitativen Angabe der Grundrichtung von Produktions- und Gestaltungsprozessen werden ganz konkrete quantitative Ziele bestimmt. So heißt es nicht schlechthin, Wohnhäuser sind zu errichten, sondern es wird ausgewiesen, welche Wohnungstypen in welchem Zeitraum mit wieviel Arbeitskräften und materiellen Mitteln errichtet werden müssen. Für die Planung der Entwicklung von Mechanisierung und Automatisierung muß neben der zukünftigen Struktur auch die Größenordnung des Wachstums der Elektroenergieerzeugung bestimmt werden. Auch für die Entwicklung von Wissenschaft und Technik sind Zahlenangaben notwendig. Welche Leistungsparameter muß ein technologisches Verfahren erreichen, das zu einem zukünftigen Zeitpunkt die heute benutzten Verfahren ablösen wird?
Auf derartige Fragen müssen *Prognostiker* Antwort geben. Zu diesem Zweck entstand im Prozeß des Prognostizierens eine Vielzahl von Prognosemethoden, von denen bis heute in der Literatur schon weit über hundert beschrieben wurden. Diese Vielfalt hat ihre Ursache einerseits darin, daß die verwendeten Methoden dem speziellen, konkret zu untersuchenden Prozeß entsprechen müssen, ihm „auf den Leib geschneidert" werden müssen; andererseits können und müssen gesellschaftliche Prozesse auf Grund ihres komplexen Charakters von verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Solche Verfahrensgruppen sind zum Beispiel die Zeitreihenforschung, die Strukturforschung, die Invarianzenforschung, die Grenz- und Schwellenwertforschung, die Substitutionsanalyse und die Strategische Analyse. Im Rahmen dieser Verfahren, in denen zumeist mehrere spezielle Methoden aus unterschiedlichen Wissenschaftsdisziplinen zusammenwirken, finden bereits heute in starkem Maße mathematische Begriffsbildungen und Theorien ihre Anwendung, vor allem Begriffsbildungen, theoretische Zusammenhänge und Prüf- und Schätzverfahren der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Beispiele für derartige Methoden sind die Regressions- und Korrelationsanalyse, die Theorie der Zufallsprozesse, die Monte-Carlo-Methode und die Methode der kleinsten Quadrate.
Einer dieser Methodenkomplexe, die *Extrapolationsmethoden*, soll hier Gegenstand näherer Betrachtung sein. Die Probleme, die bei der Nutzung dieser Methoden entstehen, werden uns Anhaltspunkte für die Untersuchung des Verhältnisses von Mathematik und Gesellschaftsprognostik liefern.
Das Grundprinzip dieser Methoden steckt schon in ihrem Namen – Extrapolation. Die älteste Hypothese über die Zukunft ist es, sich die Zukunft als eine direkte und geradlinige Fortsetzung der Gegenwart und Vergangenheit vorzustellen. Alle Extrapolationsverfahren basieren auf der Annahme, daß die in einem bestimmten Zeitraum beobachteten Entwicklungstendenzen unveränderlich oder wenigstens relativ stabil sind und also auf einen bestimmten künftigen Zeitraum, den Prognosezeitraum, ausgedehnt, extrapoliert werden können.

Anzahl der wissenschaftlichen Kader in der UdSSR (in Tsd.)

1950	162,5	1958	284,0	1966	712,4	Korrigierte Werte	
1951	—	1959	310,0	1967	770,0	(+7%)	
1952	179,1	1960	354,2	1968	822,9	1959	331,7
1953	191,9	1961	404,1	1969	883,4	1960	379,0
1954	210,2	1962	524,5	1970	927,7	1961	432,4
1955	223,9	1963	566,0	1971	1002,9		
1956	239,9	1964	612,0				
1957	261,6	1965	664,6				



Die Nutzung dieses Methodenkomplexes soll an einem konkreten Beispiel dargestellt werden. Für die Prognose und Planung von Wissenschaft und Technik ist es wichtig, Aussagen über gegenwärtige und zukünftige Entwicklungstendenzen der Struktur und der Anzahl wissenschaftlicher Kader zu erhalten. Ausgangspunkt ist die Messung der zu prognostizierenden Größe, hier der Anzahl der wissenschaftlichen Kader. Nach festgelegten Kriterien wird dieser Wert in jedem Jahr von der *Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik* erfaßt. Für die nachfolgenden Berechnungen wollen wir die Tabelle der Anzahl der wissenschaftlichen Kader in der Sowjetunion für den Zeitraum von 1950 bis 1971 zugrunde legen, s. Seite 52.

Eine solche funktionale Zuordnung von Beobachtungsdaten zu Zeitintervallen wird als *dynamische Reihe* oder *Zeitreihe* bezeichnet. Derartige Zeitreihen werden nun mathematischen Untersuchungs-, Näherungs- und Prüfverfahren unterworfen. Der Gedankengang kann dabei etwa wie folgt umrissen werden: Wir lösen uns vom konkreten Gegenstand und betrachten die Menge der Beobachtungsdaten als Zahlenmenge. Aufgabe ist es nun, innerhalb dieser Zahlenmenge einen Zusammenhang zu finden, der gestattet, auf künftige Beobachtungsdaten zu schließen. Die einfachste Form der mathematischen Behandlung von Zeitreihen ist der Versuch, die Zeitreihenwerte durch eine Funktion der Zeit möglichst gut anzunähern. Dieser so ermittelte funktionale Zusammenhang wird auch für den nachfolgenden Zeitraum als gültig angesehen und gestattet durch die Berechnung von Funktionswerten für zukünftige Werte der Zeitvariablen die Bestimmung von Prognosedaten.

Wir wollen diesen Prozeß an unserem konkreten Beispiel demonstrieren. Um die erhaltenen Ergebnisse überprüfen und bewerten zu können, versetzen wir uns in das Jahr 1969 zurück und legen nur die Werte von 1950 bis 1968 zugrunde. Eine von uns an Hand unserer Berechnungen aufgestellte Prognose für 1971 kann dann an den realen Werten getestet werden.

Die graphische Darstellung läßt erkennen, daß das Wachstumsverhalten der statistischen Reihe etwa ab 1959 trotz des Sprunges von 1961 zu 1962 der Berechnung zugrunde gelegt werden sollte; die früheren Werte beschreiben den Prozeß des Erreichens dieses Wachstumstempos, der 1959 abgeschlossen wurde. Dann fragen wir uns nach den Ursachen des Sprunges von 1961 zu 1962 und stellen fest, daß diesem Sprung in der Zeitreihe kein echter Sprung in der Zunahme der Anzahl der wissenschaftlichen Kader entspricht. Seit 1962 wurde der Berechnung dieser Größe in der UdSSR eine neue Methode zugrunde gelegt, die einen größeren Bereich von Personen erfaßt. Mit einem Korrekturfaktor von 7 % lassen sich die Werte von 1959 bis 1961 vergleichbar machen. Die korrigierte Zeitreihe ist Basis unserer Berechnungen.

Die nächste Frage ist, was wollen wir unter möglichst guter Annäherung einer Funktion an Zeitreihenwerte verstehen? Das in der Praxis meistverwendete Kriterium ist die Summe der Quadrate der Differenzen der berechneten von den gemessenen Werten. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die gegebenen Zeitreihenwerte für die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Als Näherung soll die Funktion $y=f(t)$ verwendet werden. Mit $y_i=f(t_i)$ ergibt sich dann als Summe der Differenzenquadrate

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2.$$

Die Auswahl der günstigsten Funktion aus der Schar der Funktionen eines Typs erfordert die Lösung eines Extremwertproblems. Nehmen wir an, wir wollen unsere Zeitreihe möglichst gut durch eine Gerade annähern. Wir können von der Geradengleichung $y=a+bt$ ausgehen. Es sind Werte a_o und b_o so zu bestimmen, daß die Gerade $y=a_o+b_ot$ beste Näherung im Sinne obigen Kriteriums ist, d. h. daß S als Funktion von a und b ein Minimum annimmt. Notwendige Bedingung dafür ist die Gültigkeit der Gleichungen $\frac{\partial S}{\partial a}=0$; $\frac{\partial S}{\partial b}=0$;

woraus sich das folgende Gleichungssystem für a und b ergibt:

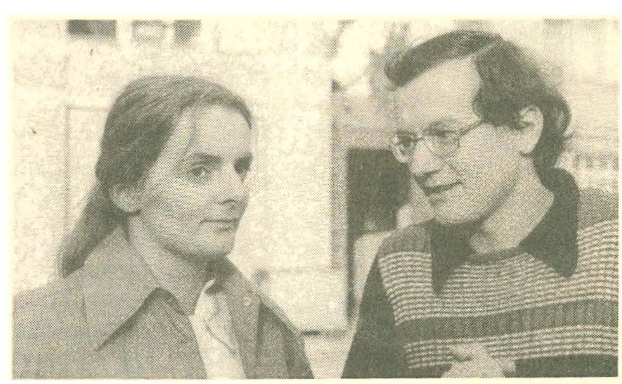
$$\sum_{i=1}^{n}x_i-na-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)b=0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_it_i-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)a-\left(\sum t_i^2\right)b=0.$$

Diese Bedingungen sind zugleich auch hinreichend, denn S kann durch die Wahl genügend entfernt verlaufender Geraden beliebig vergrößert werden, ein endliches Maximum kann also nicht existieren. Die Berechnung des Gleichungssystems (1) liefert für $n=10$ und $t_{1958+i}=i$ $(i=1, \ldots, n)$ als beste Näherung die Gerade $y=280{,}7+54{,}7t$.

Die Abbildung zeigt, daß diese Gerade vor allem die Werte für 1964 bis 1969 sehr gut annähert. Für 1971 erhalten wir einen Prognosewert $y_{1971}=991{,}8$ Tsd, der den realen Wert um 11,1 Tsd verfehlt. Bezogen auf den Zuwachs von 180,0 Tsd Menschen von 1968 bis 1971 ist das ein Fehler von 6,2 %. Für 1975 erhalten wir $y_{1975}=1210{,}6$ Tsd. Analog zur Näherung durch Geraden kann die Zeitreihe durch andere Funktionstypen approximiert werden. *B. Noack*

Dieser Beitrag wird mit einem 2. Teil in Heft 4/74 abgeschlossen.



Monika und Bernd Noack, jetzt beide Dipl.-Mathematiker, sind ehemalige erfolgreiche IMO-Teilnehmer

Wir bestimmen die geografischen Koordinaten unseres Heimatortes

Dieser Beitrag soll vor allem den Schülern der unteren Klassenstufen einen Einblick in die Astronomie geben, er ist aber auch als Ergänzung des Astronomieunterrichts in den 10. Klassen gedacht sowie für Arbeitsgemeinschaften verwendbar.

Die Erde besitzt eine kugelähnliche Gestalt. Wie bereits aus dem Geografieunterricht bekannt ist, kann man jedem Ort auf der Erde Koordinaten zuordnen. Es sind dies die *geografische Länge* (mit dem griechischen Buchstaben λ bezeichnet) und die *geografische Breite* (φ). Das Koordinatensystem der Erde ist aus Längen- und Breitenkreisen aufgebaut: 180 Längenkreise (Meridiane) – jeweils östlicher und westlicher Länge – sowie je 90 Breitenkreisen auf der Nord- und Südhalbkugel. Der Äquator ist der längste Breitenkreis (etwa 40000 km). Die Pole besitzen die geografische Breite 90°. (Bild 1)

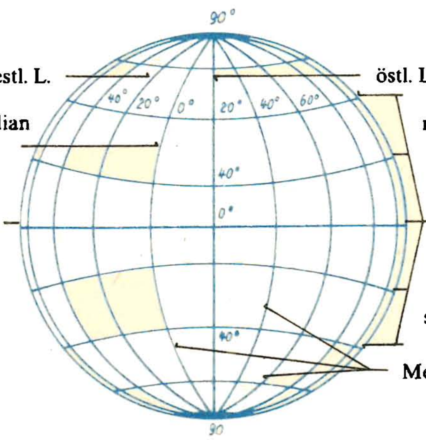


Bild 1

Wenn wir die Sterne, die sich in unterschiedlichen Entfernungen von der Erde befinden, auf eine gedachte Kugel mit der Erde als Mittelpunkt projizieren, erhalten wir die scheinbare Himmelskugel (Bild 2). Das Bild eines Sterns auf der scheinbaren Himmelskugel entsteht an der Stelle, an der der Strahl Erde – Stern die Himmelskugel schneidet.

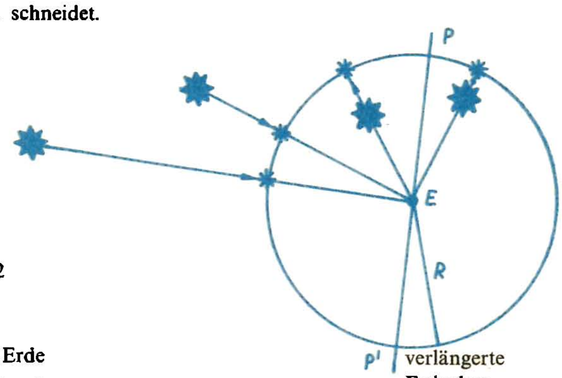


Bild 2

E Erde

R Radius der scheinbaren Himmelskugel

wahre Position des Sterns

Ort des Sterns auf der scheinbaren Himmelskugel

Die Erde rotiert um eine Gerade, *Erdachse* genannt. *Die Erdachse* schneidet die Erdoberfläche im Erdnord- und -südpol, die Himmelskugel ebenfalls in zwei Punkten, dem Himmelsnordpol P und dem -südpol P'. Die Ebene, die durch den Erdmittelpunkt verläuft und auf der Erdachse senkrecht steht, heißt *Äquatorebene.* Sie schneidet die Erdoberfläche im Erdäquator und die Himmelskugel im Himmelsäquator.

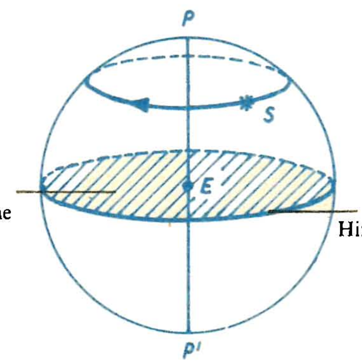
Die Erde dreht sich in 23 h 56 min = 1 Sterntag = 24 Sternstunden einmal um die Erdachse.

Diese Rotationsdauer kann wie folgt ermittelt werden: Ein Fernrohr wird auf einen Fixstern fest eingestellt. Jeweils nach einem Sterntag ist der Stern wiederum im Fernrohr zu sehen. Erstreckt sich die Messung über mehrere Tage, dann läßt sich die Rotationsdauer der Erde recht genau ermitteln.

Die verschiedenen Tageszeiten sind eine Folge der Rotation der Erde. Genau genommen müßte jeder Ort eine eigene Ortszeit besitzen. Zweckmäßigerweise werden aber mehrere Orte zu bestimmten Zeitzonen zusammengefaßt. Wir kennen z. B. die Mitteleuropäische Zeit (MEZ), die Osteuropäische Zeit (OEZ – Moskauer Zeit) und die Weltzeit (Greenwicher Zeit).

Weiterhin ergibt sich aus der Rotation der Erde die scheinbare tägliche Rotation der Himmelskugel. Da die Himmelskugel in Wirklichkeit feststeht, rotiert sie für einen Beobachter auf der Erde, der die Erdrotation nicht wahrnimmt, scheinbar entgegengesetzt zur Drehrichtung der Erde. Jeder Fixstern bewegt sich mit der Himmelskugel in 23 h 56 min scheinbar auf einem Parallelkreis zum Himmelsäquator (Bild 3).

Bild 3



Wählt man auf der Erdoberfläche einen beliebigen Beobachtungspunkt B, so ist die dazugehörige Horizontebene diejenige Ebene, deren sämtlich durch B verlaufende Geraden Tangenten an der Erdkugel sind. Das bedeutet: Eine Gerade, welche senkrecht auf der Horizontebene steht und durch den Punkt B geht, verläuft durch den Erdmittelpunkt. Der Strahl Erdmittelpunkt – Beobachtungspunkt schneidet dann die Himmelskugel in einem Punkt, der *Zenit* genannt wird. Zu jedem Beobachtungsort gehört auf der Himmelskugel weiterhin ein (Himmels-)meridian. Dies ist derjenige Kreis auf der Himmelskugel, der durch Nordpunkt (Himmelsnordpol P), Südpunkt (Himmelssüdpol P') und durch das Zenit Z des Beobachtungsortes verläuft. (Alle Orte der Erde gleicher geografischer Länge haben ein und denselben Himmelsmeridian, jedoch nicht den gleichen Zenit.) Wenn von B aus ein Stern S betrachtet wird, dann schließt der Strahl BS mit der Horizontebene einen Winkel ein, den man Erhebungswinkel bzw. in der Astronomie Höhe (h) nennt. Sie wird von 0 bis 90° gemessen. (Sterne, die sich unter der Horizontebene befinden, also unsichtbar sind, haben negative Höhe.)

Während eines vollen scheinbaren Umlaufes um die Erde, also während 23 h 56 min, durchwandert ein Stern auf der scheinbaren Himmelskugel zweimal den Meridian des Beobachtungsortes. Diese beiden Zeitpunkte sind für alle Orte auf der Erde gleicher geografischer Länge gleich. Der Vorgang selbst wird Meridiandurchgang oder *Kulmination* genannt. Man spricht von oberer bzw. unterer Kulmination (Bild 4). Bei der oberen Kulmination erreicht der Stern seine maximale, bei der unteren Kulmination seine minimale Höhe. Wenn sich die Himmelskugel nach 12 Sternstunden $\left(\frac{1}{2}\text{ Sterntag}\right)$ um die Achse PP' (scheinbar) um 180° gedreht hat, geht der Stern in der Stellung S' abermals durch den Meridian.

Aus Symmetriegründen gilt (Bild 4):

$$\alpha = \sphericalangle SEP = \sphericalangle PES'$$

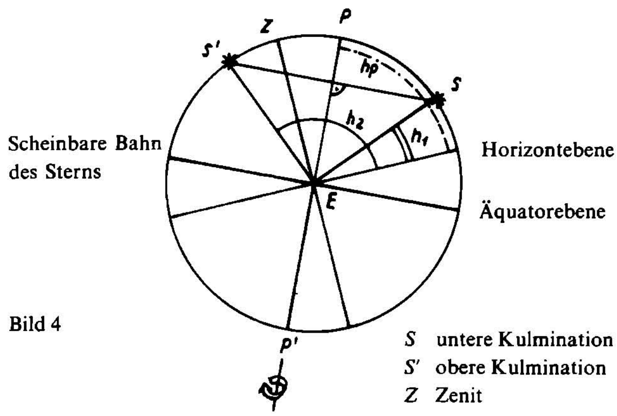


Bild 4

Der geübte Mathematiker kann aus der Zeichnung heraus sofort erkennen, daß sich die Polhöhe h_p, d. h., die Höhe des Himmelspols P, aus dem arithmetischen Mittel der beiden Kulminationshöhen h_1 und h_2 ergibt:

$$h_p = h_1 + \alpha$$
$$h_p = h_2 - \alpha$$
$$2h_p = h_1 + h_2$$
$$h_p = \frac{h_1 + h_2}{2} \qquad (1)$$

Die Formel gilt auch in dem allgemeinen Fall, wenn h_1 und h_2 zwei beliebige Höhen sind, die im Abstand von 12 Sternstunden gemessen werden.

Um nun endlich auf die geografischen Koordinaten zurückzukommen, zeigen wir anhand der nächsten Abbildung, daß die Polhöhe gleich der geografischen Breite ist:

$$\sphericalangle QBP = 90° + \varphi$$
$$\sphericalangle QBP = 90° + h_p$$
$$h_p = \varphi \qquad \text{beide zum Himmelsnordpol} \qquad (2)$$

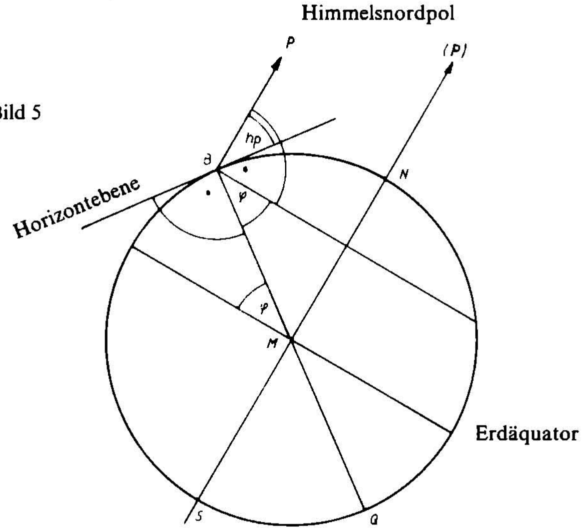


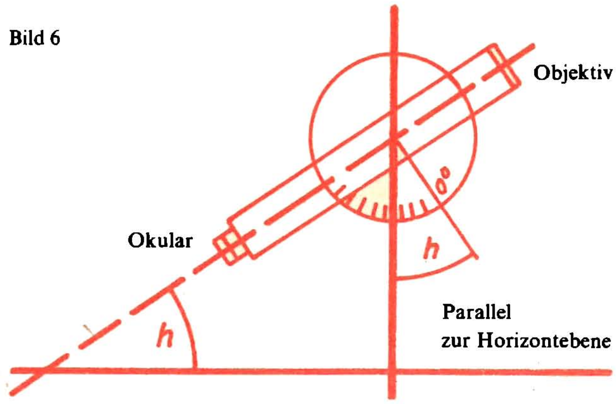
Bild 5

B Beobachtungsort
N Erdnordpol
S Erdsüdpol

Die beiden von *B* und *N* ausgehenden Strahlen sind praktisch parallel, da die Größe der Erde den kosmischen Entfernungen gegenüber verschwindend klein ist.

Aus (1) und (2) folgt, daß wir die geografische Breite aus zwei Höhenmessungen eines beliebigen Sternes im Abstand von 12 Sternstunden ermitteln können. Wir haben der Einfachheit halber die Messung am Polarstern vorgenommen, einem Stern, der in der Nähe des Himmelspols zu finden ist.

Bild 6



Die Höhenmessungen führten wir in der Volkssternwarte Hartha durch. Wir verwendeten dazu einen Theodoliten; das Prinzip eines solchen Gerätes zeigt Bild 6. Die Messungen wurden in einer Nacht in den Wintermonaten durchgeführt, damit der Stern nach 12 Sternstunden $\left(\frac{1}{2}\text{ Sterntag}\right)$ noch sichtbar war. Sie ergab:

15. 12. 1972 17^h30^m MEZ (obere Kulmination des Polarsterns)
$h_1 = 51°42'00''$

16. 12. 1972 05^h28^m MEZ (untere Kulmination des Polarsterns)
$h_2 = 50°30'42''$

Die geografische Breite des Beobachtungsortes Hartha beträgt somit gemäß Formel (1) und (2)

$$h_p = \frac{102°12'42''}{2} = 51°06'21''.$$

Es fehlt nun noch die geografische Länge der Sternwarte Hartha, um den Ort im Koordinatennetz der Erde genau festlegen zu können. Für die Schüler der unteren Klassenstufen wollen wir hier eine vereinfachte Darstellung geben:

Wir haben für einen bestimmten Stern die Kulminationszeit t_1 in Hartha ermittelt. Wir nehmen nun an, daß eine Schülergruppe in Greenwich (Nullmeridian) denselben Stern beobachtet und uns dessen Kulminationszeit t_2 am gleichen Tag für Greenwich mitteilt. (Dieser Wert kann auch aus einem Sternkalender entnommen werden.) Um die Zeitdifferenz zwischen Greenwicher Zeit und MEZ auszuschalten, haben wir vorher unsere Uhr nach Greenwicher Zeit umgestellt, d. h., nach unserem Zeitzeichen eine Stunde zurück. Die Berechnung der Länge beruht auf der Beziehung:

23 h 56 min $\triangleq$ 360° (Rotationsdauer der Erde) (eine volle Umdrehung)

$$t_2 - t_1 \triangleq \lambda$$

Nun können wir die geografische Länge aus folgender Proportion berechnen:

$$\frac{\lambda}{360°} = \frac{t_2 - t_1}{23\text{ h }56\text{ min}},$$

also $$\lambda = \frac{360°\,(t_2 - t_1)}{23\text{ h }56\text{ min}}.$$

Die Messung führten wir wie folgt aus: Zuerst stellten wir den Theodoliten genau auf die Nord-Süd-Richtung ein. Wir suchten den Stern α Andromedae (Bild 7) auf, dessen Kulminationszeit vorher von uns abgeschätzt wurde, und ermittelten nun die genaue Zeit seines Meridiandurchgangs. Wir erhielten somit für t_1 den Zeitpunkt $16^h37^m07^s$ (Greenwicher Zeit). Die Zeit t_2 für Greenwich ermittelten wir nach dem Sternkalender für diesen Tag zu $17^h28^m57^s$ Greenwicher Zeit. Demnach ergibt sich eine Zeitdifferenz von

51min 50s. Diesen Wert können wir in die obige Gleichung einsetzen:

$$\lambda = \frac{360° \cdot (51\text{min } 50\text{s})}{23\text{h } 56\text{min}}$$

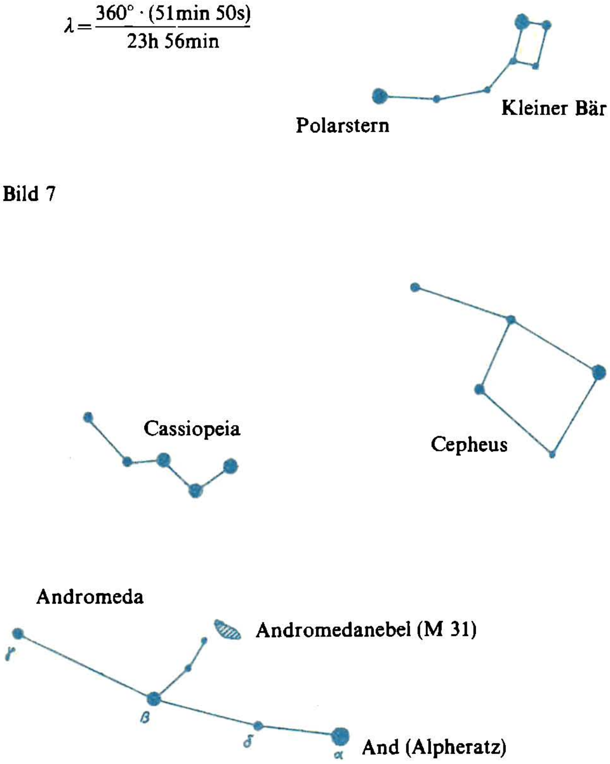


Bild 7

Das Sternbild Andromeda mit Nachbarsternbildern. – Sterngruppen, die sich auf begrenzten Flächen der scheinbaren Himmelskugel befinden, werden willkürlich und ohne Berücksichtigung der wahren Entfernungen der Sterne zu Sternbildern zusammengefaßt. Die Sterne eines Sternbildes werden – meistens nach ihrer Helligkeit – mit α, β, γ, ... bezeichnet.

Bevor wir weiterrechnen, müssen wir die Zeitangabe ins Dezimalsystem übertragen (Tafelwerk S. 31):

$$\lambda = \frac{360° \cdot 0{,}8639\text{h}}{23{,}9333\text{h}} = 12{,}99°.$$

Durch Umrechnen erhielten wir für die geografische Länge von Hartha

$$\lambda = 12°59'24''.$$

Schüler der 10. Klasse werden wissen, wie man auf einem einfacheren Wege zum Ergebnis gelangen kann, den wir hier der Vollständigkeit halber mit anführen.

Mit Hilfe eines Sternzeitchronometers* ermittelten wir die Sternzeit Greenwich zum Zeitpunkt der Kulmination von α Andromedae in Hartha. Sie betrug $23^h15^m00^s$ Sternzeit. Aus dem Kalender entnahmen wir die Sternzeit für die Kulmination in Greenwich: $00^h06^m59^s$ Sternzeit. Die Zeitdifferenz beträgt somit 51 min 59 s Sternzeit. Für die Rotationsdauer der Erde müssen wir jetzt 24 Sternstunden ansetzen. Es ergibt sich damit

$\lambda = \frac{360° \cdot 0{,}86639\text{h}}{24\text{h}}$. Dies führt zum gleichen Ergebnis wie oben. Nun kennen wir die geografischen Koordinaten:

$\varphi = 51°06'21''$ n. Br.

$\lambda = 12°59'24''$ ö. L. unseres Beobachtungsortes Hartha.

Wir empfehlen den Lesern, die im Anhang angegebenen Aufgaben zu lösen.

Zum Abschluß möchten wir uns bei Herrn *Busch*, V. L. d. V., Leiter der Bruno-H. Bürgel Sternwarte Hartha und Herrn *Träger*, Mathematikfachlehrer an der Schloßberg-OS Döbeln, für ihre Hilfe und Unterstützung bedanken.

Lutz Müller, Dieter Neumann, Holger Pietzsch

Aufgaben (ab Kl. 7):

▲1▲ a) Berechne den Abstand a zweier benachbarter Längenkreise mit der Längendifferenz 1° auf der Erdoberfläche am Äquator, wenn der Erdradius in Äquatornähe 6 378,4 km beträgt.

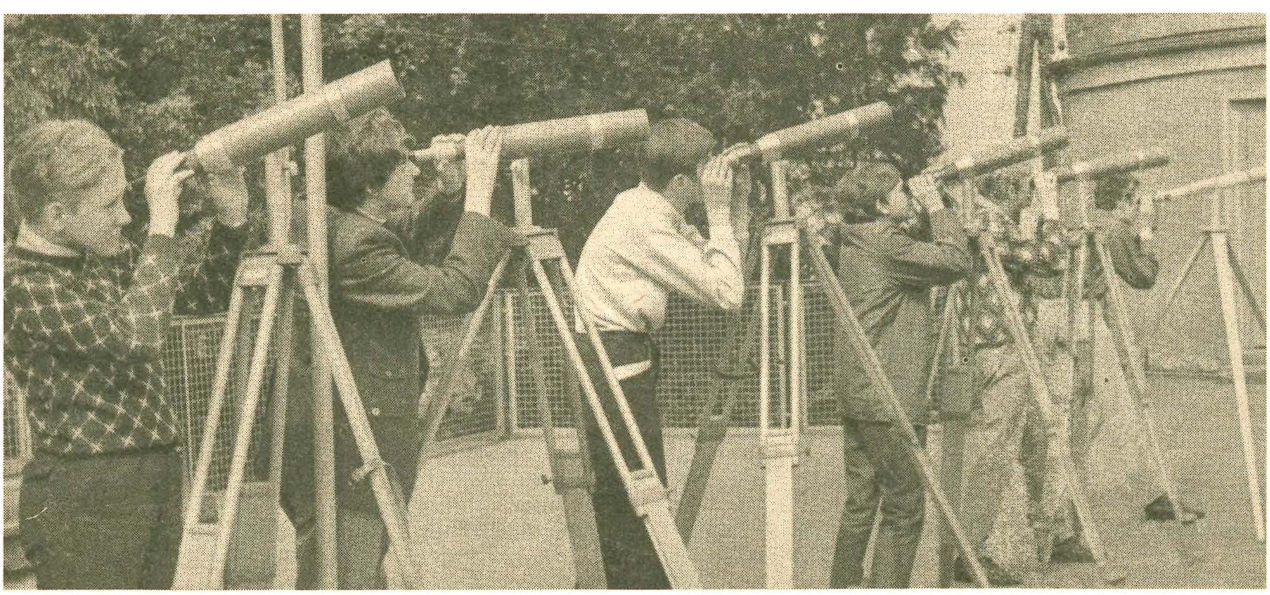
b) Für Kl. 10: Man gebe eine Formel zur Berechnung des Abstandes zweier benachbarter Längenkreise, gemessen längs eines Breitenkreises, in Abhängigkeit von der geografischen Breite an. Für die Erde wird Kugelgestalt angenommen ($R = 6\,371$ km).

c) Für 10. Kl.: Die Differenz zur wahren geografischen Länge der Sternwarte Hartha (12°57'52") betrug bei unserer Messung 1'32". Wieviel km Entfernung macht dieser Fehler auf der Erdoberfläche aus? ($\varphi = 51°06'21''$)

▲2▲ Die MEZ geht vom 15. Längenkreis (Görlitz) als Bezugsmeridian aus. Ermittle die Ortszeiten für Leipzig, Döbeln, Berlin und Dresden, wenn es in Görlitz 12^h00^m ist. Beachte: Eine Längendifferenz von 15° entspricht einer Zeitdifferenz von 1 h.

Leipzig	$\lambda = 12{,}4°$	Berlin	$\lambda = 13{,}4°$
Döbeln	$\lambda = 13{,}1°$	Dresden	$\lambda = 13{,}7°$
Bratislava	$\lambda = 17{,}1°$	Warschau	$\lambda = 21{,}1°$
Krakow	$\lambda = 19{,}9°$		

* Def. der Sternzeit s. Brockhaus abc Astronomie o. ä.



20

3	+	2	−	4	=1
×		×		−	
5	×	1	+	3	=8
−		+		+	
6	+	3	−	4	=5
=9		=5		=5	

Zusammenstellung dieses Ferienheftes: Studienrat J. Lehmann, Verd. Lehrer des Volkes, Leipzig

12

Mathematik-Quiz im Ferienlager

3. Ist die gedachte Zahl größer als 896? – Nein.
Wir merken, daß die gesuchte Zahl zum Intervall 768 bis 896 gehört. Wir fügen zu 768 die Hälfte dieses Intervalls, d. h. 64 und fragen:
4. Ist sie größer als 832. – Ja.
Die gesuchte Zahl gehört zum Intervall 832 bis 896. Wir fragen jetzt:
5. Ist sie größer als 864? – Nein.
Die gesuchte Zahl gehört also zum Intervall 832 bis 864.
6. Ist sie größer als 848? – Ja.
7. Ist sie größer als 856? – Ja.
8. Ist sie größer als 860? – Nein.
9. Ist sie größer als 858? – Ja.
Folglich kann die gesuchte Zahl nur 859 oder 860 sein. Wir fragen:
10. Ist sie größer als 859? – Ja.
Die gedachte Zahl ist 860.

12 Man legt zwei Scheiben Brot in den Brotröster und röstet in 30 s ihre eine Seite. Dann dreht man die eine Scheibe um, die zweite nimmt man aber heraus und legt an ihrer Stelle eine dritte ein. So wird in der zweiten halben Minute die erste Scheibe vollständig geröstet und die dritte zur Hälfte. Jetzt nimmt man die erste Scheibe heraus, legt die zweite halbfertige ein und wendet die dritte. Sie werden in der folgenden halben Minute fertig.

10

7 Von neun Münzen, die auf den ersten Blick nicht zu unterscheiden sind, weiß man, daß sich unter ihnen eine falsche befindet, die leichter als die anderen ist.
Wie kann man mit Hilfe von nicht mehr als zwei Wägungen auf einer Tafelwaage ohne Wägestücke die falsche Münze herausfinden?

8 Sagt, wieviel Katzen sind im Zimmer, wenn in jeder der vier Ecken eine Katze sitzt, jeder Katze gegenüber 3 Katzen sitzen und auf dem Schwanz jeder Katze eine Katze sitzt?

9 In einem quadratischen Klubraum sollen
3 10 Sessel so an den Wänden aufgestellt werden, daß an jeder Wand dieselbe Anzahl Sessel steht.

10 Rolf und Monika gehen angeln. Gemeinsam angeln sie 14 Fische. Rolf angelt zwei Fische mehr als Monika.
Wieviel Fische fängt jeder?

11 Marie-Luise hat sich irgendeine natürliche Zahl zwischen 1 und 1 000 ausgedacht. Um die gedachte Zahl zu erraten, stellt Knut Fragen. Marie-Luise antwortet ihrem Bruder auf alle Fragen nur mit „ja“ oder „nein“. Nur zehn Fragen genügen, um die von ihr gedachte Zahl zu ermitteln.
Überlegt, welche Fragen Knut stellen muß!

Lösungen

1 Man nimmt zwei beliebige Ringe und legt auf jede Schale einen Ring. Wenn Gleichgewicht eintritt, ist der dritte Ring der gesuchte.

2 Die Zahlen heißen 24 und 1.

3 2 m (Nach 3 Schnitten ist der Balken in 4 Teile zersägt.)

4 20mal (Im Zehner 50 bis 59 erscheint die Ziffer 5 elfmal, in den übrigen 9 Zehnern je einmal.)

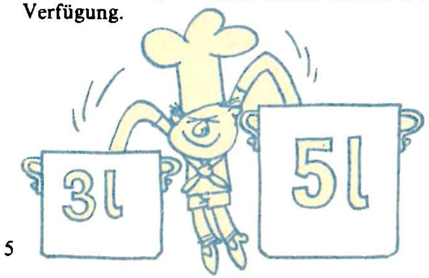
5 4 Partien

6 Es genügen zwei Träger. Der erste kehrte nach dem ersten Tag um und der zweite nach dem zweiten Tag. Dann hatte der Forscher für vier übrige Tage gerade einen Nahrungsvorrat und Wasser für vier Tage.

7 Wir legen je drei Münzen auf die Waagschalen. Tritt Gleichgewicht ein, dann befindet sich die falsche Münze unter den drei übrigen. Tritt kein Gleichgewicht ein, dann 8

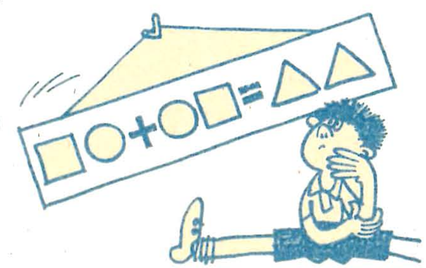
vor lauter Freude ihrer kleinen Schwester eine Tüte Bonbons.

17 Der Lehrling soll 4 Liter abmessen. Es stehen ihm aber nur diese beiden Gefäße zur Verfügung.



5

18 Ersetze die geometrischen Figuren durch Ziffern. Gleiche Figuren bedeuten immer gleiche Ziffern.
Wieviel Lösungen gibt es?



1 Von drei Ringen, die äußerlich gleich aussehen, möge ein Ring schwerer sein als die beiden anderen.
Wie findet man diesen mit Hilfe einer einzigen Wägung auf einer gewöhnlichen doppelschaligen Waage?

2 Zwei Zahlen sollen multipliziert das Produkt 24 ergeben. Dividiert man die größere Zahl durch die kleinere, so erhält man ebenfalls 24. Wie heißen die beiden Zahlen?

3 Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte. Wie lang war der Balken?

4 Es werden nacheinander alle Zahlen von 1 bis 99 aufgeschrieben.
Wie oft wird die Ziffer 5 geschrieben?

5 Drei Schüler trugen ein Schachturnier aus, wobei insgesamt 6 Spiele durchgeführt wurden.
Wieviel Partien spielte jeder einzelne?

6 Wieviel Gepäckträger muß ein Forscher, der einen sechstägigen Marsch durch die Wüste antreten will, bei sich haben, wenn jeder von ihnen nur einen Nahrungsvorrat und Wasser für vier Tage für eine Person mitführen kann?

2

13 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$ (6 Fahrer)

14 Der Abstand zwischen zwei Bäumen beträgt jeweils 20 m.

15 Wenn der Ball das letzte Mal einen Meter hoch springt, so sprang er das vorletzte Mal zwei Meter und davor vier Meter hoch. Damit er aber vier Meter hoch springt, muß er von acht Metern herunterfallen.

16 $\frac{6}{0{,}8}=\frac{6}{\frac{8}{10}}=\frac{60}{8}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$

Annerose erhält ab sofort 7,50 M Taschengeld.

11

17 Erst drei Liter in den 5-Liter-Topf, dann nochmals 3 Liter hinzu. Da der Topf aber nur 5 Liter faßt, bleibt 1 Liter im 3-Liter-Topf übrig. Den Inhalt des 5-Liter-Topfes ausgießen, den verbleibenden 1 Liter hinein und nun 3 Liter dazu.

18 Es gibt 16 Lösungen, z. B. 15 ÷ 51 = 66, …

19

12 In einem Brotröster können gleichzeitig zwei Scheiben Brot einseitig geröstet werden. Das Rösten jeder Seite dauert 30 Sekunden. Drei Scheiben beiderseitig zu rösten dauert danach 2 Minuten.
Überlegt, wie man diese Menge in nur $1\frac{1}{2}$ Minuten rösten kann!

13 Auf einer Radrennbahn findet ein Rennen statt. Ein Fahrer fährt so, daß ein Drittel des Feldes vor ihm und die Hälfte der Teilnehmer hinter ihm ist.
Wieviel Fahrer nehmen am Rennen teil?

14 Längs eines Feldweges von 400 m Länge wollen Junge Pioniere an beiden Seiten Obstbäume anpflanzen. Von der GPG erhalten sie kostenlos 42 Stück.
In welchen Abständen werden die Bäume gepflanzt?

15 Wenn ich einen Ball fallen lasse (ohne zu werfen), springt er nur bis zur halben Fallhöhe. Ich lasse einen Ball zur Erde fallen und dreimal springen. Das dritte Mal springt er einen Meter hoch.
Von welcher Höhe habe ich den Ball fallen lassen?

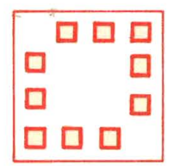
16 Bisher hast du 6 Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst du nur noch den 0,8. Teil deines Taschengeldes. Annerose ärgert sich zunächst, dann aber schenkte sie

4

befindet sich die falsche Münze unter den drei Münzen, die weniger wiegen. Auf diesem Wege finden wir drei Münzen heraus, unter denen sich die falsche Münze befindet. Nun arbeiten wir wie in Aufgabe 1.

8 4 Katzen.

9



9

10 Rolf angelt 8 Fische, Monika 6.

11 1. Wir nehmen an, Marie-Luise hat sich 860 gedacht. Wir fragen:
Ist die gedachte Zahl größer als 512 ($2^9 = 512$)? – Ja.
Folglich gehört die gesuchte Zahl zu dem Intervall 512 bis 1 024 (2^{10}). Wir nehmen die Hälfte dieses Intervalls, fügen sie zu 512 hinzu und fragen:
2. Ist die gedachte Zahl größer als 768? – Ja.
Wir merken uns, daß die gesuchte Zahl zum Intervall 768 bis 1 024 gehört. Wir fügen zu 768 die Hälfte des Intervalls, d. h. 128, hinzu und fragen:

19 Wie müssen die Figuren im letzten Quadrat angeordnet werden?

20 Kryptarithmetische Aufgabe

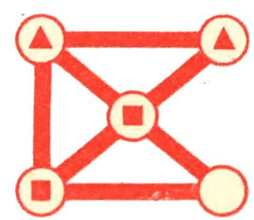
3	+		−		= 1
×		×		−	
	×		+		= 8
−		+		+	
	+		−		= 5
= 9		= 5		= 5	

6

7

Ein feines Spiel

Jeder der zwei Spieler erhält zwei gleiche Steine. Sie werden abwechselnd gesetzt. Beim Ziehen versuchen die beiden Spieler, ihre Steine in solche Stellung zu bringen, daß der andere seine Steine nicht mehr bewegen kann. Auf unserer Zeichnung kann der Spieler mit den dreieckigen Steinen nicht mehr weiter. Versucht es auch einmal!



XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (8. bis 10. 4. 1974)

Klassenstufe 10 **Aufgaben**

1. In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, daß sie den folgenden Bedingungen genügen:
(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,
(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,
(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.
Man zeige, daß $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.

2. Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm! Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die der Seitenhalbierenden von AC.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

3A. a) Beweisen Sie, daß man zu gegebenem reellem x_o die Zahl $x_o^2 + x_o + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann: Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten (1; 1) hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen. Auf q zeichnet man einen Punkt X so, daß die gerichtete Strecke EX die Länge x_o hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_o. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_o^2 + x_o + 1$ als Ordinate.
b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, daß die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!

3B. Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare (x, y), die die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen.

4. Man untersuche, ob die Zahl
$x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$
positiv, negativ oder gleich Null ist.

5. Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare (x, y), die die folgende Gleichung erfüllen!
$\big|\,|x| + \big||y| - 3\big| - 3\,\big| = 1.$

6. Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.
a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?
b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a!

Klassenstufe 11/12

1. Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben. Dann wird durch
$c_n = |\mathfrak{x} - n\mathfrak{y}|$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ (1)
eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß die Folge (1)
a) streng monoton steigend,
b) streng monoton fallend ist.
c) Für den Fall, daß die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_o gibt, so daß die Folge (1) die Monotonieintervalle
$1 \leqq n \leqq n_o$ und $n_o < n$ besitzt.

2. Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.
(So ist z. B. $[\pi] = 3$; $[0{,}7] = 0$; $[5] = 5$; $[-0{,}7] = -1$)
a) Man zeige, daß es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, daß die Zahlen $c_n = an + b - [an+b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und daß alle $c_n \neq 0$ sind.
b) Man beweise, daß für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

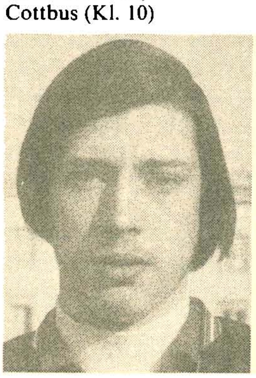
3. Es seien n_1, n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, daß es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.
Man beweise, daß dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:
Zerlegt g die Ebene in die Halbebene H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Die Aufgaben 4, 5, 6A und 6B siehe Heft 4/74, S. I

(Von den Aufgaben 10/3A und 10/3B bzw. 12/6A und 12/6B war jeweils genau eine auszuwählen und zu lösen.)

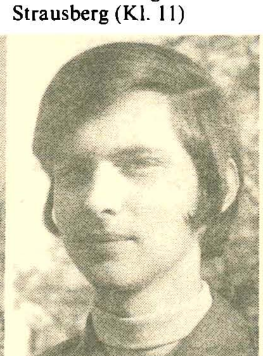
Preisträger · Einen ersten Preis erhielten

Reiner Lindemann,
C.-Blechen-OS,
Cottbus (Kl. 10)



Thomas Hoffmann,
EOS Geschwister Scholl
Apolda (Kl. 10)

Ralph Lehmann,
EOS Diesterweg
Strausberg (Kl. 11)



Reinhard Schuster,
Thomas-EOS Leipzig,
volle Punktzahl (Kl. 12)

Hans-Gert Gräbe,
ABF Walter Ulbricht,
Halle (Kl. 12)

Rückblick auf die XV. IMO

Die Teilnehmerländer der XV. IMO überreichten der DDR-Mannschaft in Moskau für die *alpha*-Leser je eine Aufgabe. *Albrecht Heß* (IMO-Teilnehmer der XV. IMO) und *Wolfgang Burmeister* (Forschungsstudent an der TU Dresden, erfolgreichster IMO-Teilnehmer der DDR) übernahmen die Bearbeitung.

VR Bulgarien

Es ist zu beweisen, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}(2k+1)} = n^2$$ gilt für alle natürlichen n mit $n \geq 1$.

CSSR

Gegeben sind ein Kreis k um S mit dem Radius r und zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q, die nicht auf dem Kreis liegen.
Konstruiere zwei parallele Geraden p und q durch P bzw. Q, die k in X bzw. Y so schneiden, daß $\sphericalangle YSX = 90°$!

DDR

Für kein natürliches $n = 1, 2, \dots$ und natürliches m mit $m > n$ gilt:
$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}$ ist eine natürliche Zahl.

Republik Finnland

Gegeben sei die Umfangslinie einer Ellipse. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal die Brennpunkte.

Frankreich

Es sei p eine ungerade Primzahl. Man zeige, daß die Aussagen

(A) $1^p + 2^p + \dots + q^p$ ist durch p^2 teilbar
(B) q oder $q+1$ ist durch p teilbar
äquivalent sind.

Großbritannien

Zwei feste Kreise werden von einem variablen Kreis in P und Q berührt, man zeige, daß zwei Punkte R_1 und R_2 existieren, so daß die Gerade PQ stets durch R_1 oder R_2 verläuft.

SFR Jugoslawien

Es seien p und q ungerade teilerfremde Zahlen und es sei

$$\frac{p-1}{2} = p^* \text{ und } \frac{q-1}{2} = q^*.$$

Man zeige:

$$p^*q^* = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \dots + \left[\frac{p^*q}{p}\right] + \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \dots + \left[\frac{q^*p}{q}\right],$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner als x ist.

Republik Kuba

Man ermittle drei reelle Zahlen, die die folgenden Eigenschaften haben:
a) Ihre Summe ist gleich 35.
b) Die Summe ihrer Quadrate ist gleich 525.
c) Diese drei Zahlen bilden eine geometrische Folge, d. h., sie sind von der Form a, aq, aq^2, wobei a und q von Null verschiedene reelle Zahlen sind.
Hinweis zur Lösung: Man beachte, daß das

Bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden von Schülern der DDR errungene Preise

IMO	1959 I.	1960 II.	1961 III.	1962 IV.	1963 V.	1964 VI.	1965 VII.	1966 VIII.	1967 IX.	1968 X.	1969 XI.	1970 XII.	1971 XIII.	1972 XIV.	1973 XV.
1. Preis	—	—	—	—	—	—	—	3	3	5	—	1	1	1	—
2. Preis	—	—	—	1	—	1	2	3	3	3	4	2	1	3	3
3. Preis	—	—	1	—	3	2	3	—	1	—	4	4	4	4	4

Bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden von den teilnehmenden Mannschaften erzielte Gesamtpunktzahlen

IMO	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
VR Bulgarien	131	175	108	196	145	198	93	238	159	204	189	145	39	120	96
ČSSR	192	257	159	212	151	194	159	215	159	248	170	150	55	130	149
DDR	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188
SFR Jugoslawien	—	—	—	—	162	155	137	224	136	179	181	209	71	136	137
Mongolische VR	—	—	—	—	—	169	63	88	87	74	120	78	26	48	64
VR Polen	122	—	230	212	134	209	178	269	101	262	119	105	118	160	174
SR Rumänien	249	248	197	257	191	213	222	257	214	208	219	208	110	206	131
UdSSR	(111)	—	—	263	271	269	281	293	275	298	231	221	205	270	254
Ungarische VR	233	248	270	289	234	253	244	281	251	291	247	233	255	263	215
Republik Finnland	—	—	—	—	—	—	62	—	—	—	—	—	—	—	86
Frankreich	—	—	—	—	—	—	—	—	(41)	—	119	141	38	—	153
Großbritannien	—	—	—	—	—	—	—	—	231	263	193	180	110	179	164
Italien	—	—	—	—	—	—	—	—	(110)	132	—	—	—	—	—
Schweden	—	—	—	—	—	—	—	—	135	256	104	110	(43)	60	99
Belgien	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57	—	—	—	—
Niederlande	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	51	87	48	51	96
Österreich	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	104	(82)	136	144
Kuba	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(9)	(14)	(42)

Zahlen in Klammern: Mannschaft hatte weniger als 8 Teilnehmer oder hatte nicht am gesamten Wettbewerb teilgenommen.

Polynom q^4+q^2+1 sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, von denen der eine gleich q^2+q+1 ist.

Mongolische Volksrepublik

Drei parallel geschaltete Widerstände haben einen Gesamtwiderstand von $\frac{1}{7}\,\Omega$. Der erste Widerstand ist doppelt so groß wie der zweite, dieser wiederum ist doppelt so groß wie der dritte.
Wie groß sind die drei Widerstände?

Niederlande

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck A, B, C. Man zeige, daß es drei Punkte A_1, B_1, C_1 mit der Eigenschaft gibt, daß
(1) $A_1 \in AB;\ B_1 \in BC;\ C_1 \in CA$
(2) $A_1B_1 \perp AB;\ B_1C_1 \perp BC;\ C_1A_1 \perp CA$
gilt.

Österreich

Es seien a und b zwei teilerfremde natürliche Zahlen, und t sei Teiler von a^2+b^2. Man beweise, daß sich t in der Form x^2+y^2 mit natürlichen Zahlen x, y darstellen läßt.

VR Polen

Es sei $p_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades und es gelte
$p_n(1)=r^1$
$p_n(2)=r^2$
$p_n(n)=r^n$, dabei sei r eine reelle Zahl.
Es ist $p_n(n+1)$ zu berechnen.

SR Rumänien

Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. ε_1 seien reelle Zahlen aus dem Intervall $[-1;1]$ $(i=1, \ldots, n)$.
Für welche ε_i $(i=1, \ldots, n)$ nimmt der Ausdruck

$$E=\left|\varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}\right|+\left|\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n}{n}\right|+\ldots+\left|\varepsilon_n-\frac{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1}}{n}\right|$$

sein Maximum an?

Schweden

Es seien a, b, c paarweise teilerfremde natürliche Zahlen.
Man gebe eine Lösung der Gleichung $x^a+y^b=z^c$ in natürlichen Zahlen an!

Sowjetunion

Es seien n und m natürliche Zahlen, die beide nicht kleiner als 2 sind. Es ist zu beweisen, daß n^m nicht in Form einer Summe

$$\frac{n^m-1}{k_1}+\frac{n^m-1}{k_2}+\ldots+\frac{n^m-1}{k_p}$$

darstellbar ist,
wobei $k_i | m$ und $k_i < m$ gelten soll.

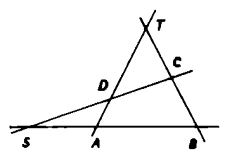
Ungarische VR

Es sei $\{a_n\}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft $a_{m-n} \leqq a_m + a_n$. Dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Werner Mögling

Sektion Mathematik/Physik
der Pädagogischen Hochschule Erfurt/Mühlhausen

▲1228▲ Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$ so, daß sich die durch die gegenüberliegenden Seiten AB und CD bestimmten Geraden im Punkt S, die durch die gegenüberliegenden Seiten BC und DA bestimmten Geraden im Punkt T schneiden (siehe Bild).



Es ist zu beweisen, daß die Umkreise der Dreiecke ADS, BCS, ABT, CDT durch einen gemeinsamen Punkt P verlaufen.
Danach ist zu untersuchen, ob dieser Sachverhalt auch für nichtkonvexe Vierecke gilt (für Schüler ab Klasse 7).
Außerdem wird nach der geometrischen Bedeutung von P gefragt, die man erkennt, wenn zum Beweis ähnliche Dreiecke und damit Ähnlichkeitstransformationen verwendet werden (für Schüler ab Klasse 9).

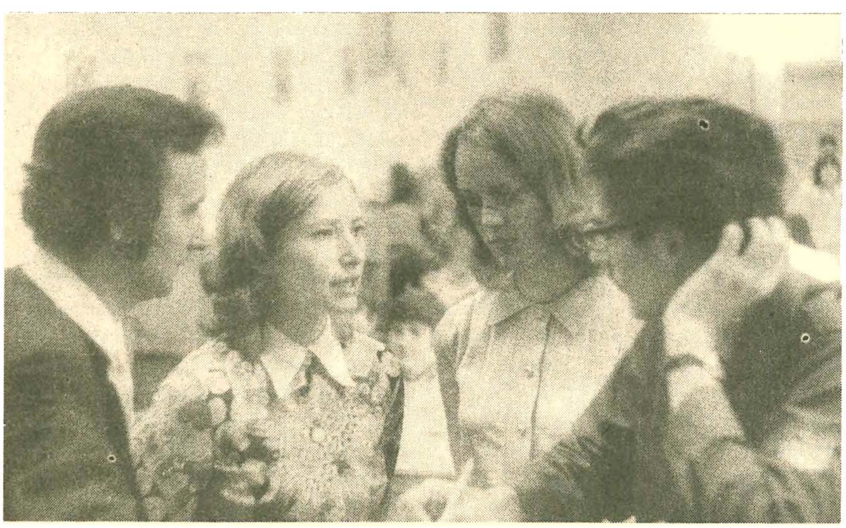
Mathematik in Erfurt

Mit der Gründung des Lehrstuhls Mathematik im Jahre 1957 begann am damaligen *Pädagogischen Institut* in Erfurt die Ausbildung von Lehrern für das Fach Mathematik. Seitdem haben mehr als 2000 Absolventen das Mathematikstudium in Erfurt erfolgreich beendet.
An unserer Hochschule werden jährlich etwa 600 Studenten immatrikuliert, die in vier Jahren als Lehrer in zwei Unterrichtsfächern, einem Haupt- und einem Nebenfach, ausgebildet werden. Mathematik als Hauptfach ist mit Physik oder Kunsterziehung, Mathematik als Nebenfach mit Physik oder Chemie gekoppelt.
In den ersten beiden Studienjahren, dem sogenannten *Grundstudium*, erfolgt in Mathematik eine Ausbildung in den Disziplinen Analysis, Algebra, Geometrie und numerische Mathematik, die in einem zusammenhängenden Kurs vermittelt werden. Hier erwirbt der Student die für einen guten Mathematikunterricht notwendigen Fachkenntnisse und die Voraussetzungen zur selbständigen Beschäftigung mit mathematischen Problemen. Während die Ausbildung im Nebenfach im wesentlichen nach den ersten beiden Studienjahren abgeschlossen ist, beginnt für Studenten mit dem Hauptfach Mathematik nach dem Grundstudium das sogenannte *Fachstudium*.
Hier wird der Unterricht in numerischer Mathematik, verbunden mit einer Ausbildung an Rechenautomaten, fortgesetzt; daneben werden Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundlagen und Geschichte der Mathematik gelehrt. Außerdem erhält der Student eine vertiefte Ausbildung nach Wahl in Algebra, Analysis oder Geometrie, die ihn speziell auf die Anfertigung der Diplomarbeit vorbereitet. Die Thematik wird so gewählt, daß der Student die Möglichkeit hat, mit seiner Arbeit einen Beitrag zur mathematischen Forschung zu leisten. Außer Haupt- und Nebenfach umfaßt das Studium noch die Fächer Marxismus-Leninismus, Pädagogik, Psychologie und Methodik. Auch Sport und Fremdsprachen sind Bestandteile der Ausbildung.

Wegen des hohen Bedarfs sind vor allem in den Kombinationen Mathematik/Physik und Physik/Mathematik die Voraussetzungen für die Zulassung zum Studium günstig.
Für Absolventen der 10. Klasse der Oberschule besteht die Möglichkeit, unmittelbar nach Beendigung der Schulzeit einen einjährigen Vorbereitungslehrgang in der Fachkombination Physik/Mathematik zu besuchen und daran anschließend mit dem Studium zu beginnen.
Oft wird von Schülern die Frage nach der Vorbereitung auf das Mathematikstudium an unserer Hochschule gestellt. Die Voraussetzung dazu ist die sichere Beherrschung des im Schulunterricht vermittelten Wissens nicht nur der Abiturstufe, sondern aller Klassen, und die Fähigkeit zur selbständigen Bearbeitung angemessener Aufgaben und Probleme des Schulunterrichts, wie sie bei den mathematischen Olympiaden und in der Zeitschrift *alpha* gestellt werden. Auch auf die bereits jetzt in ansehnlicher Zahl vorliegenden Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* sei in diesem Zusammenhang hingewiesen (siehe 4. Umschlagseite, d. Red.). *W. Mögling*

Mathematische Schülergesellschaft

Am 5. Juli 1973 lud die *Mathematische Schülergesellschaft* (MSG) der Humboldt-Universität zu einem Kolloquium ein. Zwei Ziele hatte die von über 100 Jugendlichen sowie zahlreichen Wissenschaftlern und Vertretern der demokratischen Öffentlichkeit besuchte Veranstaltung im *Weierstraß*-Saal der Universität:
Die *Jungen Mathematiker* legten Rechenschaft ab über die in den letzten drei Jahren geleistete außerunterrichtliche Arbeit. Zum zweiten wollten sie die in den Zirkeln diskutierten Probleme, die besonders interessant waren, vor einem großen Kreis durch ihre besten Vertreter vortragen, zur Diskussion stellen, verteidigen.



Leitungskollektiv der MSG

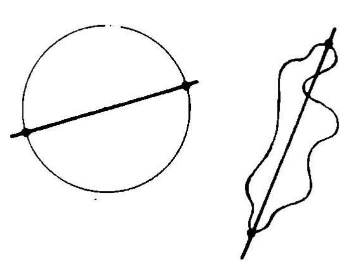
Stellvertretend für die zahlreichen Beiträge wollen wir unseren Lesern zwei vorstellen. Zum ersten schreibt Dipl.-Math. *Manfred Brandt*, ehemaliger Teilnehmer der VI. und VII. IMO, jetzt Assistent an der Humboldt-Universität: „Ich betreue eine Gruppe von Schülern der EOS *Heinrich Hertz*. Wir treffen uns alle zwei Wochen und lösen gemeinsam mathematische Probleme. Zu den *Jungen Mathematikern* gehört auch *Christian*, der in der AG wie im Kolloquium mit seinen Problemen eine ungewohnte geometrische Fragestellung anreißt.

Christian Horn

Über die Zerlegung von Figuren

Bei einem Kreis spricht man ganz selbstverständlich von seinem Durchmesser. Es ist der maximale Abstand, den zwei Punkte des Kreises miteinander haben können. Beim Kreis gibt es aber beliebig viele solcher Punktpaare: auf jeder Geraden durch den Mittelpunkt befinden sich zwei solcher, diametral gegenüber liegender Punkte. Der Begriff Durchmesser läßt sich jedoch auf beliebige Figuren erweitern, und sogar sinnvoll! Auch hier gibt es ja wenigstens zwei Punkte, die maximalen Abstand voneinander haben.
Um mit dem Begriff des Durchmessers besser

Bild 1



arbeiten zu können, wollen wir ihn schnell noch exakt definieren. (*Hinweis:* unter φ $[A, B]$ versteht man den Abstand der Punkte A und B, also eine [reelle] Zahl.)
Definition: Der Durchmesser d einer Figur F ist eine solche reelle Zahl, daß für alle Punkte $M, N \in F$ gilt:

$$\varrho\,(M, N) \leqq d$$

und (mindestens) zwei Punkte A und B in F existieren mit $\varrho(A, B) = d$. Wir wollen jetzt Zerlegungen von Figuren betrachten. Nehmen wir zum Beispiel den Kreis. Wie man sich auch anstellt, bei jeder Zerlegung des Kreises in zwei Teile befinden sich in wenigstens einem dieser Teile zwei gegenüberliegende Punkte mit dem Abstand d. Dieser Teil hat dann offensichtlich den Durchmesser d. Wenn man sich ungeschickt anstellt, haben sogar beide Teile den Durchmesser d.

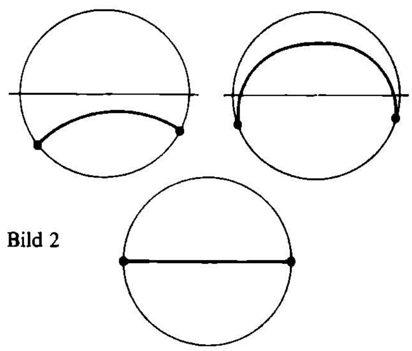


Bild 2

Der Ungeschicklichkeit sind aber dadurch Grenzen gesetzt, daß der Durchmesser einer Figur durch Zerlegung nicht größer werden kann. Wir wollen daher nur solche Zerlegungen betrachten, bei denen alle Teilfiguren einen Durchmesser kleiner als d haben.
Beim Kreis reicht offensichtlich eine Zerlegung in drei Teile schon aus. Bei Rechteck und Quadrat klappt es sogar mit einer Zerlegung in zwei Teilfiguren.

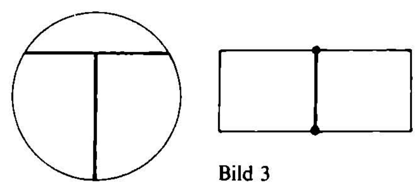
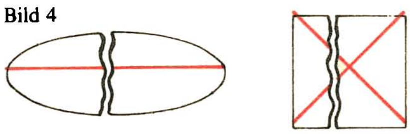


Bild 3

Man schreibt dafür $a(\text{Quadrat}) = 2$.
$a(F)$ gibt allgemein die minimale Anzahl von Teilfiguren an, in die man eine Figur F vom Durchmesser d zerlegen muß, damit alle Teilfiguren einen Durchmesser kleiner als d haben.
Wie durch die Schreibweise angedeutet, ist diese Anzahl eine Funktion der Figur (zu jeder Figur gibt es eben genau eine minimale Anzahl von Teilfiguren); genauer gesagt eine Funktion von charakteristischen Parametern dieser Figur, denn $a(F)$ ist z. B. völlig unabhängig von der Größe der Figur F.
Jetzt möchte man $a(F)$ für möglichst umfassende Klassen von Figuren bestimmen oder abschätzen.

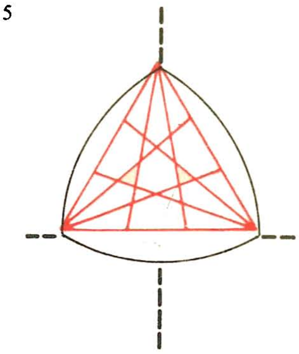
Wir hatten vorhin schon mit derartigen Überlegungen angefangen. Für Quadrate gilt ebenso wie z. B. für Rechtecke, Drachenvierecke, Parallelogramme, Ellipsen $a(F)=2$. Alle diese Figuren haben eins gemeinsam, sie besitzen jeweils nur ein bis zwei innere Strecken (d. h., Strecken, die zwei Punkte aus F – in diesem Falle Randpunkte – verbinden, wobei diese Strecken jedoch nicht vollständig in F verlaufen müssen, da wir nicht die Konvexität von F gefordert haben) von der Länge des Durchmessers dieser Figur. Unter diesen Umständen ist es einfach, alle diese Strecken der Länge d durch eine Zerlegungslinie zu schneiden, wodurch automatisch die beiden Teilfiguren dann einen kleineren Durchmesser haben.

Bild 4



Nun kann die Zerlegungslinie bei komplizierteren Figuren auch etwas krumm werden (muß sie aber nicht!).
Zerteilt man solch eine innere Strecke von der Länge des Durchmessers jedoch zweimal (oder allgemein: in gerader Anzahl) durch eine Zerlegungslinie, so liegen Anfangs- und Endpunkt dieser inneren Strecke in ein und derselben Teilfigur. Diese Teilfigur hat dann wieder den Durchmesser d. Das wollen wir aber nicht. So muß man also versuchen, alle inneren Strecken von der Länge d des Durchmessers der Gesamtfigur durch eine Zerlegungslinie so zu schneiden, daß die Anzahl der Schnittpunkte ungerade wird. So kann man sehr leicht alle n-Ecke zerlegen. Komplizierter wird es schon bei Figuren, die unendlich viele solcher inneren Strecken besitzen. Das sind Figuren wie der Kreis oder solche, deren Rand zumindest teilweise einem Kreisbogen entspricht.
Hier kommt man meist mit einer Zerlegung in zwei Teile nicht mehr aus.
Aber gibt es auch noch Figuren, die man selbst mit einer Zerlegung in drei Teile nicht dazu bringen kann, daß alle Teilfiguren einen kleineren Durchmesser haben? Man möchte meinen nein. Doch ein richtiger Mathematiker verläßt sich in solchen Fragen nicht auf sein Gefühl. Man müßte die Vermutung also beweisen. Vielleicht ist dazu der unten abgedruckte Satz eine Hilfe. Aus dem Bild ist ersichtlich, daß man ein regelmäßiges Sechseck, bei dem der Abstand der jeweils parallelen Geraden gleich d ist, in Teilfiguren mit einem Durchmesser jeweils kleiner als d (wegen der Dreiecksungleichung) zerlegen kann.

Bild 5



Renteaux-Dreieck
drei Bögen von Kreisen mit dem Radius d

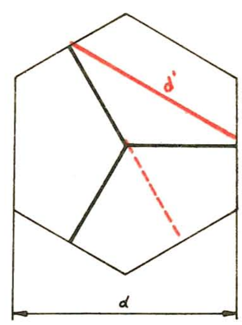


Bild 6

Es genügt also folgenden Satz zu beweisen (für Leute, die nachschlagen wollen: er wurde 1920 von *Pal* aufgestellt: Über ein elementares Variationsproblem, Danske Videnskab, Selkab., Math,-Fy. Meddel. 3, No. 2 (1920); allerdings ungarisch):
Satz: Jede ebene Figur mit dem Durchmesser d kann in ein regelmäßiges Sechseck eingeschlossen werden, bei dem der Abstand der gegenüberliegenden Seiten gleich d ist.
Der Beweis läßt sich aber auch führen, ohne die Bibliotheken unnötig zu strapazieren.

Christian Horn beim Vortrag

Michael Happ/Gerd Arnold

Eine Aufgabe mit verschiedenen Lösungen

Aufgabe: Auf einer 300 m langen kreisförmigen Aschenbahn laufen zwei Läufer (A und B) vom selben Punkt ab. Laufen sie in gleicher Richtung, kommt der eine (B) eine halbe Minute später beim Start an als der andere (A); laufen sie in entgegengesetzter Richtung, begegnen sie einander nach 20 Sekunden.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Läufer!

1. Lösung: Es seien mit v_A, v_B die Geschwindigkeiten der Läufer und mit t_A, t_B die Zeiten für je eine Umrundung der Aschenbahn durch die Läufer bezeichnet. Dann folgt unmittelbar

$v_A + v_B = \frac{300}{20} = 15$ bzw. $v_B = 15 - v_A$

denn sie begegnen einander nach 20 Sekunden, und weiter $t_B = t_A + 30$; denn B benötigt 30 Sekunden mehr als A. Weiter erhalten wir

$t_A = \frac{300}{v_A}$ und $t_B = t_A + 30 = \frac{300}{v_B}$ woraus sofort

$t_A = \frac{300}{15 - v_A} - 30$ folgt.

Wir müssen also folgende Gleichung lösen:

$$\frac{300}{v_A} = \frac{300}{15 - v_A} - 30$$

Es ergibt sich

$$v_A^2 + 5v_A - 150 = 0$$ woraus wir die Werte

$v_{A1} = -30$ (entfällt, da $v < 0$ nicht sinnvoll) und $v_{A2} = 10$ erhalten.
Mit $v_A = 10$ ergibt sich für $v_B = 5$.
Antwort: Die Geschwindigkeiten der beiden Läufer betragen

$$10\frac{m}{s}(A) \text{ und } 5\frac{m}{s}(B).$$

2. Lösung: Laut Aufgabenstellung ist A der schnellere Läufer. Wenn A die 300 m gelaufen ist, dann muß B in 30 s noch eine bestimmte Strecke x zurücklegen, um ebenfalls 300 m gelaufen zu sein. Beide Läufer legen in 20 s zusammen 300 m zurück. Daraus folgt, daß sie in 30 s genau 450 m zurücklegen. Davon läuft B x Meter; A läuft in dieser Zeit $(450 - x)$ Meter.
Nun gilt für den Weg von A: $450 - x = 300 + (150 - x)$ und für den Weg von B: $x = (300 - x) - 2(150 - x)$.
Betrachten wir den Term $150 - x$.
Fall 1: $150 - x > 0$
Es gilt $\frac{300 + y}{v_A} = \frac{(300 - x) - 2y}{v_B}$,
wobei zur Vereinfachung $y = 150 - x$ gesetzt wurde. Daraus ergibt sich ein Widerspruch, da A nicht mehr als 300 m gelaufen sein kann, wenn B in der gleichen Zeit weniger als $(300 - x)$ m läuft; denn laut Voraussetzung laufen A 300 m und B $(300 - x)$ m in der gleichen Zeit, d. h. Fall 1 ist nicht zutreffend.
Fall 2: $150 - x < 0$
Auch hier ergibt sich ein Widerspruch, analog Fall 1. Dann ist nur noch $150 - x = 0$ möglich, also $x = 150$. Daraus folgt für

$$v_B = \frac{150}{30} = 5$$
$$v_B = 5$$

Und für v_A dann $\frac{300}{30} = v_A = 10$

Antwort: Die Geschwindigkeiten der beiden Läufer betragen

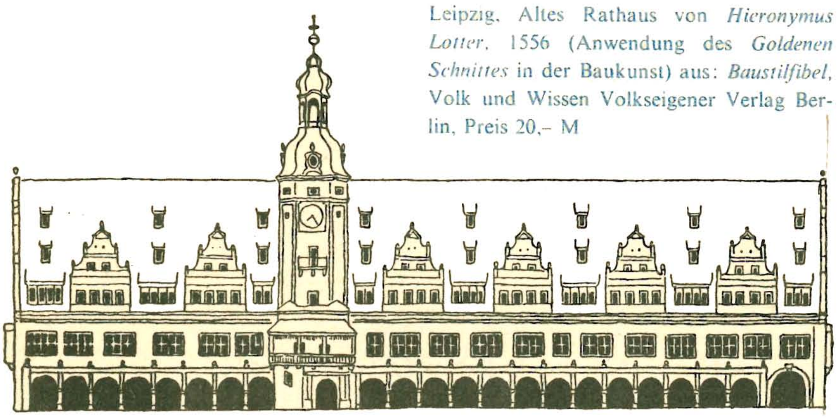
$$5\frac{m}{s}(B) \text{ und } 10\frac{m}{s}(A).$$

Der Goldene Schnitt und die Zahl τ

In diesem Beitrag will ich euch mit einer sehr interessanten Zahl oder besser mit einem Teilungsverhältnis, das vielfältige und verblüffende Eigenschaften besitzt, bekannt machen. Schon der bekannte Astronom und Mathematiker *Johannes Kepler* (1541 bis 1630) beschrieb es mit Worten großer Begeisterung: „Unter den stetigen Proportionen existiert eine einzige ausgezeichnete Art, die göttliche Proportion, wobei von den drei Größen die zwei kleineren zusammen die größere ergeben, oder wo ein Ganzes so in zwei Teile zerlegt wird, daß zwischen den Teilen und dem Ganzen eine stetige Proportion entsteht.

Eine Eigentümlichkeit dieser Proportion besteht darin, daß aus dem größeren Teil und dem Ganzen wieder eine gleiche Proportion gebildet werden kann; was vorher der größere Teil war, wird dabei der kleinere; was vorher das Ganze war, wird der größere Teil, und die Summe beider spielt nun die Rolle des Ganzen. Das geht unendlich weiter, immer bleibt die göttliche Proportion bestehen."

Vielleicht wird seine Begeisterung und die vieler anderer Mathematiker für die Problematik des *Goldenen Schnittes* auch uns ergreifen, wenn wir uns etwas mit einigen Eigenschaften dieser Teilung bekannt machen. So will ich in Form kurzer Denkanstöße einige Eigenschaften der stetigen Teilung und der Zahl τ aufzeigen, die euch zu selbständigem Nachdenken und Weitersuchen anregen sollen.



Leipzig, Altes Rathaus von *Hieronymus Lotter*, 1556 (Anwendung des *Goldenen Schnittes* in der Baukunst) aus: *Baustilfibel*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, Preis 20,– M

Eine Strecke a heißt nach dem *Goldenen Schnitt* – oder stetig – geteilt, wenn ihr großer Abschnitt x mittlere Proportionale der Gesamtstrecke und des verbleibenden Abschnittes ist.

$$a : x = x : (a - x) \qquad (1)$$

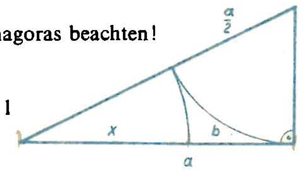
Für $b = (a - x)$ gilt:

$$a : x = x : b. \qquad (2)$$

Die nachfolgenden Konstruktionen beschreibt und beweist ihr bitte selbst!

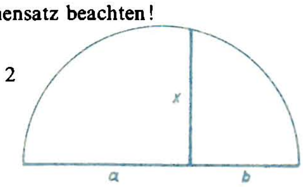
Pythagoras beachten!

Bild 1



Höhensatz beachten!

Bild 2



Beim *Goldenen Schnitt* sind a, x und b Glieder einer geometrischen Folge, wobei x geometrisches Mittel von a und b ist. Wir wollen nun die Länge der Strecke x aus Gleichung (1) gleich eins setzen, und die Größe von a ermitteln. Es gilt:

$$a : 1 = 1 : (a - 1) \qquad (3)$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Uns soll aber nur der positive Wert $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ interessieren. Mit ihm haben wir eine wichtige algebraische Zahl mit erstaunlichen Eigenschaften gefunden. Sie wird τ (nach dem griechischen Wort $\tau o \mu \eta$ – „Schnitt") genannt.

Die erste Eigenschaft finden wir, wenn wir Gleichung (3) mit $a = \tau$ durch τ dividieren. Es bleibt:

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}. \qquad (4)$$

Für das τ im Nenner können wir nach Beziehung (4) die ganze linke Seite einsetzen:

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\tau}}.$$

Wenn wir das fortführen, erkennen wir, daß wir einen Kettenbruch gefunden haben, in dem nur die Zahl 1 periodisch wiederkehrt.

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Die Näherungswerte dieses Kettenbruches haben überraschende Eigenschaften. So erhalten wir:

$$\tau_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2; \quad \tau_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2};$$

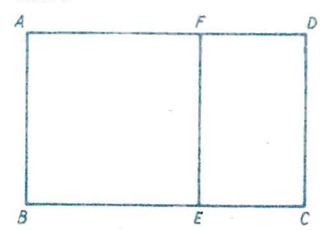
$$\tau_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1}} = \frac{5}{3}$$

Wenn ihr genau hinseht und mit der Folge der *Fibonaccischen Zahlen* vertraut seid, erkennt ihr, daß jeder Näherungswert der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonaccischer Zahlen ist. Für die geschulteren Leser unter euch können wir auf dieser Erkenntnis aufbauend die Zahl τ auch definieren als:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \tau; \quad f(i) \text{ – Fibonaccische Zahlen.} \qquad (5)$$

Weiterhin sei kurz erwähnt, daß in expliziten Formeln für die Fibonaccischen Zahlen die Zahl τ eine wesentliche Rolle spielt. Doch nun wieder zu anschaulicheren geometrischen Sachverhalten zurück. Als erstes sei ein Rechteck gegeben, in dem sich die Seiten wie $\tau : 1$ verhalten (goldenes Rechteck).

Bild 3



Zeichnet das Quadrat *ABEF* ein, und untersucht das verbleibende Rechteck *FECD*! Wir stellen fest:

Wird von einem goldenen Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge der kürzeren Rechteckseite abgetrennt, so verbleibt wieder ein goldenes Rechteck (die Seiten verhalten sich wie $\tau : 1$). Der Beweis ergibt sich aus Gleichung (4).

Damit sind aber die bemerkenswerten Eigenschaften des stetigen Teilungsverhältnisses noch keineswegs erschöpft. Vielleicht habt ihr schon einmal etwas über die Konstruktion eines regelmäßigen Zehn- oder Fünfecks allein mit Zirkel und Lineal gehört. Dabei nutzt man die Tatsache aus, daß die Seite eines regelmäßigen Zehnecks gleich dem großen Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius ist. Um diesen Sachverhalt zu beweisen, betrachten wir das Bestimmungsdreieck ΔAMB eines Zehnecks:

Der Winkel $\sphericalangle BMA$ ist $\frac{360°}{10} = 36°$ groß. Aus dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck und der Tatsache, daß es sich bei den Winkeln $\sphericalangle MBA$ und $\sphericalangle MAB$ um Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks handelt, folgt weiter, daß $\sphericalangle MAB$ und $\sphericalangle ABM$ beide 72° groß sind. Zeichnet nun die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle MAB$. Sie teilt $\sphericalangle MAB$ in zwei Winkel mit einer Größe von je 36° und hat mit der Seite MB den Punkt D gemeinsam. Daß es sich bei den Dreiecken $\triangle ABM$ und $\triangle ABD$ um zwei ähnliche Dreiecke handelt, habt ihr sicher schon erkannt. (Führt bitte den Beweis selbständig!) Es gilt darum:

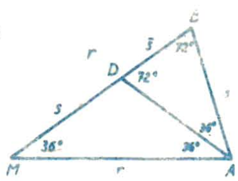
$$\overline{MA} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{BD}$$

oder anders geschrieben:

$$r : s = s : \bar{s} \qquad (6)$$

s ist dabei der größere Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius. $\bar{s}$ ist die Differenz von r und s.

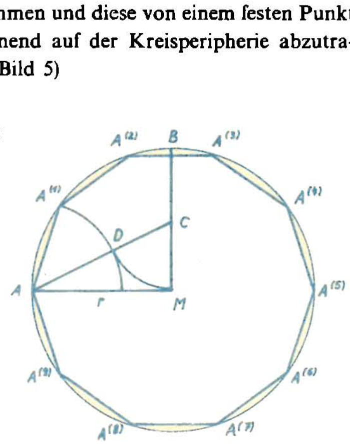
Bild 4



Da wir die Konstruktion des *Goldenen Schnittes* bereits kennen, kann jetzt jeder von euch ein regelmäßiges Zehneck in einem Kreis konstruieren:

Zeichnet einen Kreis mit dem Radius r um M und teilt r stetig! (Errichtet auf dem Radius AM im Punkt M die Senkrechte BM!) Halbiert BM und verbindet den entstandenen Punkt C mit A. Auf dieser Strecke AC tragt ihr schließlich die Länge der Strecke MC ab. Die auf AC verbleibende Strecke AD ist dann der größere Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius und ist damit die gesuchte Länge einer Zehneckseite mit dem Umkreisradius r. Den Beweis dieser Konstruktion habt ihr sicher schon selbst geführt, als ihr die Konstruktion von Bild 1 bewiesen habt.) Zur Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks braucht ihr nun nur die Länge des größeren Abstandes des nach dem *Goldenen Schnitt* geteilten Umkreisradius in den Zirkel zu nehmen und diese von einem festen Punkt beginnend auf der Kreisperipherie abzutragen. (Bild 5)

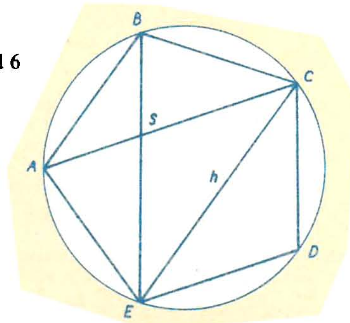
Bild 5



Mit dieser Konstruktion haben wir auch eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks gefunden. Dazu verbinden wir nur jeden zweiten der 10 auf der Kreisperipherie konstruierten Punkte (Bild 6). Doch betrachten wir das konstruierte Fünfeck etwas näher. Durch die Anwendung der Ähnlichkeitssätze erhalten wir:

$$\overline{EC} : \overline{AB} = \overline{ES} : \overline{SB} \qquad (7)$$

Bild 6



Da weiter gilt:

$$\overline{ES} = \overline{DC} \text{ (Gegenseiten eines Rhombus)} \qquad (7a)$$

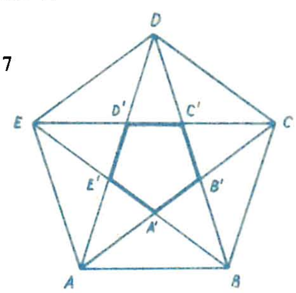
und $\overline{DC} = \overline{AB}$ (Seiten eines regelmäßigen Fünfecks), können wir die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\overline{EC} : \overline{ES} = \overline{ES} : \overline{SB} = \tau : 1 \qquad (8)$$

Im regelmäßigen Fünfeck teilen sich also die Diagonalen stetig. Betrachten wir noch die Beziehung (7a), so stellen wir fest, daß die Seite eines Fünfecks gleich dem größeren Abschnitt einer nach dem *Goldenen Schnitt* geteilten Diagonale dieses Fünfecks ist.

Untersucht nun das Seitenverhältnis der beiden Fünfecke *ABCDE* und *A'B'C'D'E'* im Bild 7!

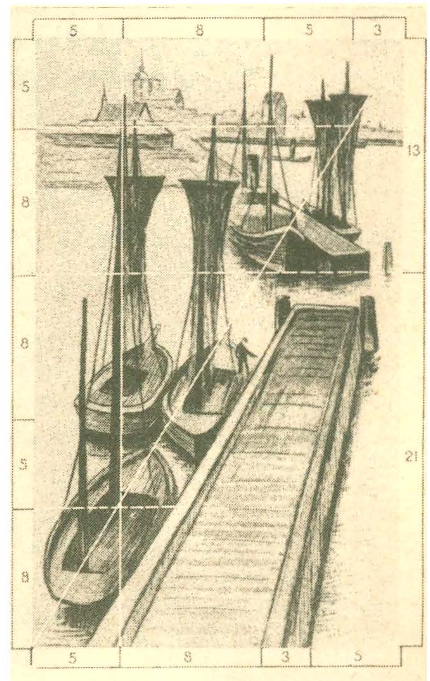
Bild 7



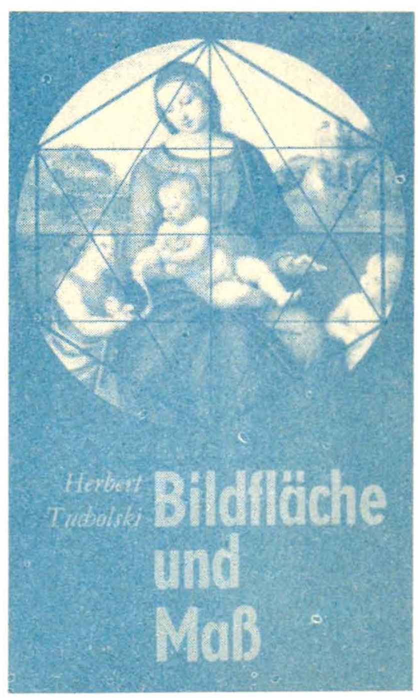
Wird der *Goldene Schnitt* in der bildenden Kunst oder in der Gestaltung unserer Umwelt angewandt, so vermittelt er ein ästhetisches Gefühl der Ausgewogenheit und der Vollkommenheit. Darum finden wir seine praktische Anwendung sehr häufig im täglichen Leben. So stehen die Seiten von vielen, besonders älteren Tischen, Türen, Bilderrahmen und Büchern im Verhältnis $\tau : 1$. Die stetige Teilung fand schon im Altertum vor allem in der Kunst und in der Ästhetik ihre Anwendung. Sie galt als Ideal, das es anzustreben galt (finden sich in alten Bildern Horizontalen, so teilen diese die eine Bildseite häufig stetig). So wurde im Mittelalter versucht, das Verhältnis des *Goldenen Schnittes* auch in den Proportionen des menschlichen Körpers und in denen der Natur überhaupt wiederzufinden.

Zum Schluß sei nur noch erwähnt, daß unsere kleine Aufzählung der Eigenschaften des *Goldenen Schnittes* nicht vollständig ist und nur die einfachsten dieser Eigenschaften enthält. So werdet ihr beim selbständigen Weitersuchen sicher noch andere interessante Sachverhalte erkennen und untersuchen können.

Ch. Meinel

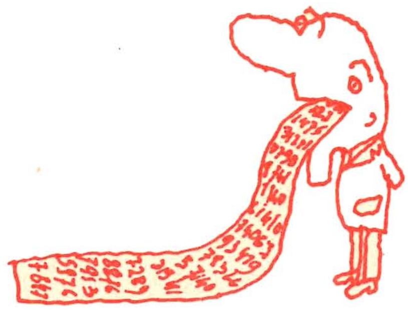


Radierung von *Herbert Tucholski: Stralsund* (Anwendung des *Goldenen Schnittes* in der bildenden Kunst) aus: *Bildfläche und Maß*, VEB Verlag die Kunst, Dresden Preis 4,50 M



In freien Stunden alpha heiter

international



Avoine, Paris

логическая задача

Das Damespiel

Zwei Schüler, A und B, beschließen, unter folgenden Bedingungen einen Wettkampf im Damespiel auszutragen.

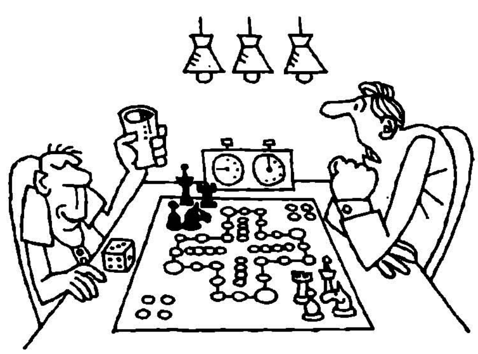
a) Es sollen zehn Partien gespielt werden (die unentschiedenen sollen nicht gezählt werden).

b) Nach jeder Partie soll dem Sieger ein Punkt zuerkannt werden, und wenn er dabei mehr als eine Dame „weggenommen hat", bekommt er nicht einen, sondern zwei Punkte.

c) Sieger ist derjenige, der die meisten Punkte hat.

Wann war das Turnier zu Ende, wenn man weiß, daß die Schüler zusammen 13 Punkte erworben haben? Der Sieger war B, obwohl er weniger Partien gewonnen hatte als A. Wieviel Partien gewann jeder Teilnehmer des Damespiels?

K. A. Rupassow, Tamtow (UdSSR)



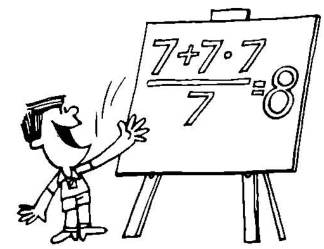
Wer löst diese anspruchsvolle kryptarithmetische Aufgabe?

```
5OPHAO  | TET
 HPOA   | VUI
  UPUO
   O
```

Toán học và tuổi trẻ, 7/8/1972, Hanoi (DRV)

Aritmetica

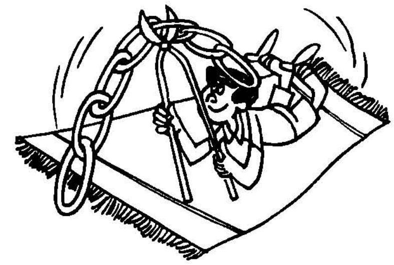
Stellt die Zahlen 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10 zusammen, indem ihr für jede 4mal die Ziffer 7 verwendet! Zum Beispiel



Eugen Rusu, Bukarest

Third eastern african regional contest

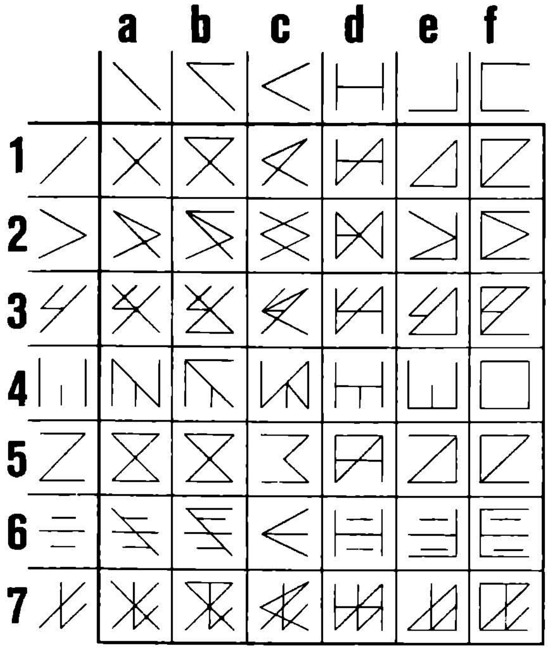
Wenn von einer aus sieben Gliedern bestehenden offenen Kette das dritte Glied genau in der Mitte durchgezwickt wird, verbleiben zwei einzelne halbe Glieder, zwei zusammenhängende und nochmals vier zusammenhängende Glieder. Nun ist es möglich, ein Kettenglied (die beiden Hälften des geteilten Gliedes), zwei Kettenglieder, drei $(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ oder vier oder fünf $(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ oder sechs $(2+4)$ oder sieben (aller) Kettenglieder als Wägestücke zu benutzen.



Welche zwei Glieder einer aus 23 Gliedern bestehenden offenen Kette sind in der Mitte durchzuzwicken, damit 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder ... 22 oder 23 Glieder dieser Kette als Wägestücke benutzt werden können?

H. Bartel, Mbeya, Tansania

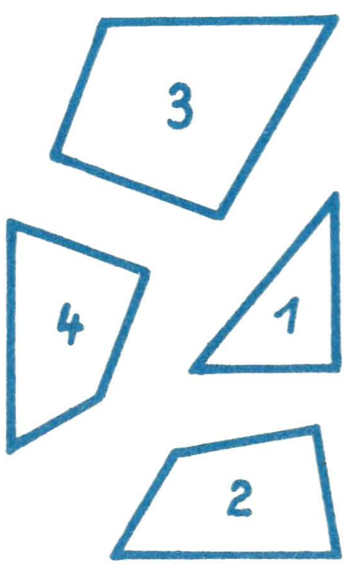
Neun falsche Felder



Auf der vorliegenden Verknüpfungstabelle wird jeweils ein Zeichen der ersten Spalte (senkrecht) mit der ersten Zeile zusammengesetzt (waagerecht). Bei der Verknüpfung von Zeichen sind dem Zeichner 9 Fehler unterlaufen. So ist z. B. die Figur 3 b falsch. Findest du die Fehler?

Pi, 1/72, Wien

Twee legpuzzles in een

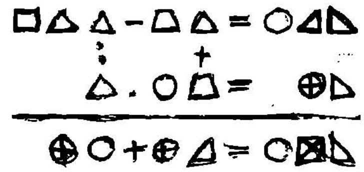


Übertrage die vier vorgegebenen Figuren auf ein Stück Papier und schneide sie aus! Es ist möglich, aus den vier Figuren ein Quadrat zu legen. Man kann aber auch aus ihnen ein gleichseitiges Dreieck zusammensetzen.

Pythagoras-Festival, Groningen (Niederlande)

Занимателна МАТЕМАТИКА

Ersetze die geometrischen Figuren durch Ziffern so, daß wahre Aussagen entstehen!

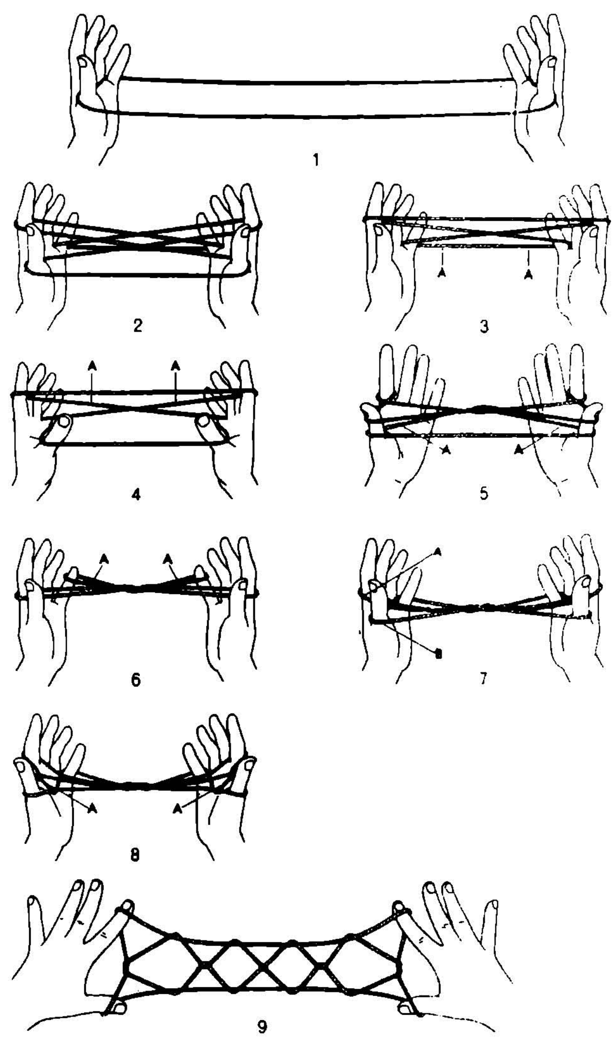


Математика, 4/71, Sofia

String figures and how to make them

Der Leser möge ein zwei Meter langes Stück weiche Schnur nehmen, die Enden verknoten und sehen, ob er die Figur, die sogenannte *Jakobsleiter*, meistern kann.

Caroline Furness Jayne, London



Lösungen

▲5▲1165 a) Es ist eine rechteckige Bodenfläche von 234 m Länge und 1,5 m + 1,5 m = 3 m Breite mit Platten auszulegen.

3 m = 300 cm; 234 m = 23 400 cm.

Aus 300:25 = 12 und 23 400:25 = 936 und $12 \cdot 936 = 11\,232$ folgt, daß 11 232 Platten benötigt werden.

b) In einer Arbeitsstunde verlegen die sechs Arbeiter zusammen $6 \cdot 24$ Platten, also 144 Platten. Aus 11 232:144 = 78 folgt, daß die Arbeit von den sechs Arbeitern in 78 Arbeitsstunden geschafft wird.

▲5▲1166 Aus 80 Pf + 20 Pf = 100 Pf = 1 M und 10 M − 1 M = 9 M folgt, daß für den Tuschkasten und den Zirkel zusammen 9 M zu zahlen sind. Der Tuschkasten möge x M kosten; dann gilt

$x + 2x = 9,\ 3x = 9,\ x = 3.$

Der Tuschkasten kostet 3 M, der Zirkel $2 \cdot 3$ M = 6 M.

W 5■1167 Es seien x Lehrer in der Unterstufe tätig; dann unterrichten $2 \cdot x$ Lehrer in der Mittelstufe und $2 \cdot x$ Lehrer in der Oberstufe. Insgesamt sind an der Schule $x + 2 \cdot x + 2 \cdot x = 5 \cdot x$ Lehrer tätig. Aus $20 < 5 \cdot x < 30$ folgt $x = 5$. In der Unterstufe sind somit 5, in der Mittel- und Oberstufe jeweils 10 Lehrer tätig, d. h., an der Schule unterrichten insgesamt 25 Lehrer.

W 5■1168 Aus 1974 − 46 = 1927 folgt, daß der Kollege Müller im Jahre 1927 geboren wurde. Es sei x die Tageszahl seines Geburtstages; dann gilt

$x \cdot 3x = 27,\ 3x^2 = 27$

$x^2 = 9,\ x = 3.$

Die Geburt fiel auf den 3. September 1927.

W 5*1169 Es sei z die ursprüngliche zweistellige natürliche Zahl. Da ihre Quersumme 12 betragen soll, gibt es genau sieben solcher Zahlen.

z	$2 \cdot z$	$2 \cdot z - 12$
39	78	66
48	96	84
57	114	102
66	132	120
75	150	138
84	168	156
93	186	174

Es entfallen alle Zahlen $z > 48$, da in diesen Fällen $2 \cdot z - 12$ eine dreistellige Zahl ergibt. Auch $z = 39$ erfüllt nicht die Bedingungen der Aufgabe, da $66 \neq 93$ ist. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, und zwar $z = 48$ und somit $2 \cdot z - 12 = 84$.

W 5*1170 Aus b) und d) folgt:
Holger und Klaus errangen den 2. Platz.
Aus c) und f) folgt:
Das Tandem mit den Fahrern Dirk und Manfred war schneller als das Tandem mit den Fahrern Bernd und Norbert. Für Lutz verbleibt nur noch Steffen als Partner.
Aus a) folgt:
Lutz und Steffen errangen den 1. Platz.
Somit kamen Dirk und Manfred auf den 3. Platz, Bernd und Norbert auf den 4. Platz.

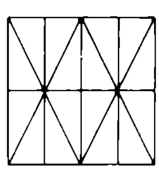
▲6▲1171 Es sei z eine dreistellige natürliche Zahl, deren Hunderterstelle um 4 kleiner ist als deren Einerstelle; diese Zahl läßt sich darstellen durch $z = 100 \cdot a + 10 \cdot b + (a+4)$. Durch Anordnung der Grundziffern in umgekehrter Reihenfolge erhält man die Zahl $z' = 100 \cdot (a+4) + 10 \cdot b + a$. Nun soll gelten $z' - z = 396$, also

$101a + 10b + 400 - (101a + 10b + 4) = 396.$

Das trifft stets zu, womit der geforderte Nachweis erbracht ist.

▲6▲1172 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl; dann gilt $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) = 7n + 21 = 7(n+3)$. Dieses Produkt ist stets durch 7 teilbar; daher ist auch die Summe von sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 7 teilbar.

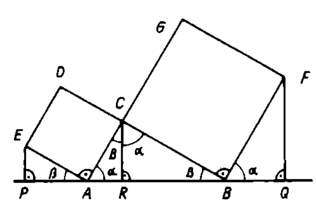
W 6■1173 Die Geraden HF znd EG sind Symmetrieachsen des Quadrats $ABCD$. Wir zeichnen durch H und F weiterhin je eine Parallele zu EG. Auf diese Weise wird das Quadrat in 16 flächengleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks beträgt somit $A_1 = \frac{1}{16}a^2$.
Für den Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ gilt deshalb $A_2 = 4 \cdot A_1 = \frac{1}{4}a^2$.



W 6■1174 Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ die Grundziffern, die an der ersten Stelle der zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen stehen. Aus a) folgt dann $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 3$, $a_7 = 3$, $a_8 = 3$, $a_9 = 3$, $a_{10} = 4$, $a_{11} = 4$ und $a_{12} = 5$.
Da alle zu ermittelnden zweistelligen Zahlen sämtlich verschieden voneinander sein sollen und da an ihrer zweiten Stelle nur fünf verschiedene Grundziffern (2, 3. 4, 5, 6) auftreten, lauten fünf der gesuchten Zahlen 32, 33, 34, 35, 36. Da an der ersten Stelle die Grundziffer 2 genau viermal auftritt und da in den restlichen sieben gesuchten Zahlen an der zweiten Stelle die Grundziffer 3 nur noch genau einmal, die Grundziffer 4 nur noch genau einmal vorkommt, lauten vier weitere der gesuchten Zahlen 23, 24, 25, 26. In den drei noch zu bestimmenden Zahlen kommt an der zweiten Stelle die Grundziffer 5 noch genau einmal, die Grundziffer 6 noch genau zweimal vor. Da unter den ermittelten Zahlen bereits die Zahlen 32 und 33 sind und für genau zehn der gesuchten Zahlen die Ziffer der ersten Stelle kleiner ist als die der zweiten, lauten die restlichen drei Zahlen 45, 46, 56. Als Lösung erhält man die zweistelligen Zahlen 23, 24, 25, 26, 32, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

W 6*1175 Aus $1\frac{1}{2}$ h = 90 min und 90 min − 10 min = 80 min folgt, daß auf jeden Autobus für die Fahrt von A nach B bzw. von B nach A eine reine Fahrzeit von 80 min kommt. Aus $\overline{AC} = \frac{4}{5}\,\overline{BC}$ folgt $\overline{AC} = \frac{4}{9} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \frac{5}{9} \cdot \overline{AB}$. Der Autobus, der von A nach B fährt, erreicht den Ort C nach einer Zeit von $\frac{4}{9} \cdot 80$ min $= 35\frac{5}{9}$ min; er fährt in C nach $35\frac{5}{9}$ min + 10 min $= 45\frac{5}{9}$ min wieder ab. Der Autobus, der von B nach A fährt, erreicht den Ort C nach $\frac{5}{9} \cdot 80$ min $= 44\frac{4}{9}$ min; er kommt in C also $44\frac{4}{9}$ min $- 35\frac{5}{9}$ min $= 8\frac{8}{9}$ min später an, als der andere Autobus (Gegenbus). Da der Aufenthalt in C aber 10 min, also länger als $8\frac{8}{9}$ min dauert, treffen sich beide Autobusse in C.

W 6*1176 Wir fällen von C das Lot $\overline{CR}$ auf die Gerade AB.



Aus $\sphericalangle ACR = 90° - \alpha$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 90° - \alpha$ folgt $\sphericalangle ACR = \beta$. Aus $\sphericalangle BCR = 90° - \beta$ und $\sphericalangle BAC = \alpha = 90° - \beta$ folgt $\sphericalangle BCR = \alpha$. Ferner gilt $\sphericalangle PAE = 90° - \alpha = \beta$ und $\sphericalangle QBF = 90° - \beta = \alpha$, $\overline{AE} = \overline{AC}$ und $\overline{BC} = \overline{BF}$. Daraus folgt $\triangle PAE \cong \triangle ARC$ und $\triangle BQF \cong \triangle RBC$ und somit $\overline{PA} = \overline{RC}$ bzw. $\overline{BQ} = \overline{RC}$, also auch $\overline{PA} = \overline{BQ}$.

▲7▲1177 Aus 100 % − 45 % = 55 % folgt, daß in diesem Betrieb 55 % aller Beschäftigten Männer sind. Der Betrieb beschäftigt also 10 % mehr Männer als Frauen. Nun gilt $P : p = G : 100$ bzw. $82 : 10 = G : 100$, also

$G=820$. Die Zahl aller Betriebsangehörigen beträgt 820 Personen.

▲7▲1178 Es seien a, b und c die von Null verschiedenen Grundziffern. Für die Summe der möglichen dreistelligen Zahlen gilt

dann
$$\begin{aligned} &100a+10b+c\\ +&100a+10c+b\\ +&100b+10a+c\\ +&100b+10c+a\\ +&100c+10a+b\\ +&100c+10b+a \end{aligned}$$

$$s=222a+222b+222c=$$
$=2\cdot 3\cdot 37(a+b+c)$, d. h. alle derart gebildeten Summen sind stets durch 37 teilbar.

W 7 ■ 1179 Angela sei n Jahre alt; in x Jahren sei ihre Mutter viermal, ihre Großmutter achtmal so alt wie Angela; dann gilt

$$n+x=(30+x):4$$
und $$n+x=(62+x):8.$$
Durch Gleichsetzen erhalten wir daraus
$$\frac{30+x}{4}=\frac{62+x}{8},$$
$$8(30+x)=4(62+x),$$
$$2(30+x)=62+x,$$
$$60+2x=62+x,$$
$$x=2.$$
Aus $n+2=(30+2):4$ folgt $n=6$

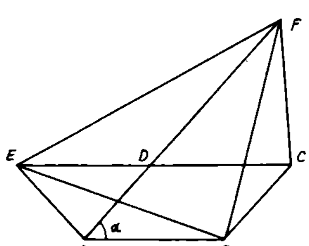
Angela ist 6 Jahre alt; in zwei Jahren wird sie 8 Jahre, ihre Mutter 32 Jahre und ihre Großmutter 64 Jahre alt sein.

W 7 ■ 1180 Wir betrachten zunächst die Zehnerstellen. Es könnte gelten $E+N=N$ oder $1+E+N=10+N$, also $E=0$ *oder* $E=9$. Wegen $V+E=F$ schneidet $E=9$ aus; denn für $V=1$ wäre $F\geqq 10$.

Das widerspricht $0<F<10$.

Auch $E=0$ scheidet aus, weil in „EINS" die Grundziffer 0 nicht am Anfang stehen darf. Also hat die Aufgabe keine Lösung.

W 7*1181 Die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ADE$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also gilt $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ADE=\alpha$. Wegen $\overline{AD}=\overline{AE}$ gilt ferner $\sphericalangle AED=\alpha$. Daraus folgt $\sphericalangle EAD=180°-2\alpha$ und somit $\sphericalangle EAB=$ $=180°-\alpha$.



Aus $\overline{CD}=\overline{CF}$ folgt $\sphericalangle CDF=\sphericalangle CFD$. Nun gilt $\sphericalangle ADE=\sphericalangle CDF=\alpha$ als Scheitelwinkel, folglich $\sphericalangle DCF=180°-2\alpha$. Wegen $\sphericalangle BCD=\alpha$ gilt schließlich $\sphericalangle BCF=180°-\alpha$. Ferner gilt $\overline{AE}=\overline{AD}=\overline{BC}$ und $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{CF}$. Die Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle CFB$ sind somit kongruent, und es gilt $\overline{BE}=\overline{BF}$, *d. h.*, das Dreieck BFE ist gleichschenklig.

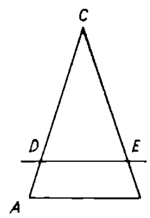
W 7*1182 Die Zahl z läßt sich darstellen durch $z=4\cdot 10^k+x$, wobei k eine natürliche Zahl mit $k\geqq 1$ und x eine natürliche Zahl mit $x<10^k$ ist.

Für die Zahl z' gilt dann $z'=10\cdot x+4$. Wegen $4\cdot z'=z$ *gilt ferner*
$$4(10x+4)=4\cdot 10^k+x,$$
$$40x+16=4\cdot 10^k+x,$$
$$39x=4\cdot 10^k-16,$$
$$3\cdot 13\cdot x=4(10^k-4).$$
Folglich muß 10^k-4 durch 39 teilbar sein. Nun ist $k=5$ die kleinste Zahl, für die 10^k-4 $=10^5-4=99996=2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 641$ durch 39 teilbar ist.

Aus $39x=4\cdot 2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 641$ folgt
$x=4\cdot 2^2\cdot 641=10256$ und somit $z=410256$.

W 8 ■ 1183 Aus $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=3$ cm und $\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=13$ cm folgt $2\cdot\overline{AC}=10$ cm, also $\overline{AC}=5$ cm (vgl. die Abb.).

Nun sei $\overline{CD}=x$ cm, also $\overline{AD}=\overline{BE}=(5-x)$ cm. Nach dem Strahlensatz gilt
$$\overline{DE}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{AC},$$
also $$\overline{DE}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{3\cdot x}{5}\text{ cm}=0{,}6x\text{ cm}.$$

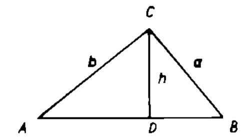


Da der Umfang des Vierecks $ABED$ gleich 7,4 cm ist, folgt
$$3+(5-x)+(5-x)+0{,}6x=7{,}4,$$
$$13-1{,}4x=7{,}4,$$
$$1{,}4x=5{,}6,$$
$x=4$. Daraus folgt
$$\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=(5-4)\text{ cm}=1\text{ cm}.$$
Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ beträgt also 1 cm.

W 8 ■ 1184 Die Anzahl der Tauben, die sich auf den Baum setzen, sei x. Fliegt jetzt eine Taube hinab, so verbleiben auf dem Baum $x-1$ Tauben, und nach Voraussetzung befindet sich jetzt die gleiche Anzahl unter dem Baum, das sind $x-1$. Ursprünglich saßen also unter dem Baum $x-2$ Tauben, und die Gesamtzahl der Tauben betrug $x+x-2=2x-2$.

Wenn aber von den $x-2$ Tauben unter dem Baum eine auf den Baum fliegt, so verbleiben unter dem Baum $x-3$ Tauben, das sind nach Voraussetzung $\frac{1}{3}$ der insgesamt $2x-2$ Tauben. Daher gilt
$$x-3=\frac{1}{3}(2x-2),$$
$$3x-9=2x-2,$$
$$x=7.$$
Es setzten sich also 7 Tauben auf den Baum und $x-2=5$ Tauben darunter.

W 8*1185 Es sei ABC ein Dreieck, für das die gestellten Bedingungen erfüllt sind. Wir bezeichnen die Maßzahlen der Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ mit a, b, c und die Maßzahl der Höhe CD mit h (vgl. die Abb.).



Wegen $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$ gilt dann
$$a=3k, b=4k, c=5k, \tag{1}$$
wobei k der zugehörige Ähnlichkeitsfaktor ist. Da nach Voraussetzung a, b, c natürliche von Null verschiedene Zahlen sind und da die Faktoren 3, 4 und 5 einander teilerfremd sind, ist auch k eine natürliche Zahl mit $k\neq 0$. Nun ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC einerseits gleich ch und andererseits gleich ab. Daraus folgt
$$ch=ab,$$
also $$h=\frac{ab}{c}=\frac{3k\cdot 4k}{5k}=\frac{12k}{5}. \tag{2}$$
Da nach Voraussetzung h eine natürliche Zahl ist, gilt das auch für $\frac{12k}{5}$. Also ist k durch 5 teilbar, und es gilt $k=5n$, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Die Maßzahlen der Längen der Seiten aller Dreiecke ABC, die die verlangten Eigenschaften haben, sind daher wegen (1)
$a=15n$, $b=20n$, $c=25n$ mit $n=1, 2, 3, \ldots$.

W 8*1186 a) Der 1. Ruderer legt auf der Hinfahrt (stromabwärts) den 1 km langen Weg mit einer Geschwindigkeit von $(12+3)\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=15\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ zurück, da die Eigengeschwindigkeit sich um die Strömungsgeschwindigkeit erhöht. Er benötigt für diesen Weg eine Zeit von $\frac{1}{15}\text{ h}=4$ min.

Auf der Rückfahrt (stromaufwärts) legt er den 1 km langen Weg mit einer Geschwindigkeit von $(12-3)\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=9\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ zurück, da die Eigengeschwindigkeit sich um die Strömungsgeschwindigkeit vermindert. Er benötigt für die Rückfahrt eine Zeit von $\frac{1}{9}\text{ h}=6$ min 40 s.

Insgesamt benötigt er also die Zeit
$$t_1=10\text{ min }40\text{ s}.$$
Der 2. Ruderer benötigt für die Hinfahrt (stromaufwärts) eine Zeit von 6 min 40 s und für die Rückfahrt (stromabwärts) eine Zeit von 4 min, insgesamt also die Zeit
$t_2=10$ min 40 s, das ist die gleiche Zeit wie der 1. Ruderer.

Der 3. Ruderer fährt in einem stehenden Gewässer auf der Hinfahrt und auf der Rückfahrt mit derselben Geschwindigkeit von $12\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Er benötigt also die Gesamtzeit
$$t_3=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)\text{ h}=10\text{ min}.$$
Der 3. Ruderer, der in einem stehenden Gewässer fährt, kehrt also zuerst zurück, es folgen dann 40 s später der 1. und der 2. Ruderer gleichzeitig.

b) Im allgemeinen Fall erhält man, wenn

die Länge des Weges für die Hinfahrt gleich a ist, die Gesamtheit des 1. Ruderers

$$t_1=\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}, \qquad (1)$$

da die Geschwindigkeit stromabwärts $v+u$ und die Geschwindigkeit stromaufwärts $v-u$ beträgt. Die Gesamtzeit des 2. Ruderers beträgt

$$t_2=\frac{a}{v-u}+\frac{a}{v+u}. \qquad (2)$$

Es gilt also wieder $t_1=t_2$.
Die Gesamtzeit des 3. Ruderers beträgt

$$t_3=\frac{a}{v}+\frac{a}{v}=\frac{2a}{v}. \text{ Nun gilt} \qquad (3)$$

$$t_1=\frac{av-au+av+au}{v^2-u^2}=\frac{2av}{v^2-u^2}=\frac{2a}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{u^2}{v^2}}.$$

Nach Voraussetzung gilt $0<u<v$, also

$0<\frac{u^2}{v^2}<1$, *d. h.* $0<1-\frac{u^2}{v^2}<1$, also $\frac{1}{1-\frac{u^2}{v^2}}>1$.

Daraus folgt $t_1>\frac{2a}{v}$. Wegen (3) erhalten wir daher $t_1=t_2>t_3$.
Daher kehrt auch im allgemeinen Fall der 3. Ruderer zuerst zurück, und es folgen dann später der 1. und der 2. Ruderer gleichzeitig.

W 9 ■ 1187 Angenommen, die Legierung besteht aus x Teilen Silber und y Teilen Kupfer (bezogen auf die Masse 1000). Dann gilt

$$x+y=1000. \qquad (1)$$

Ferner beträgt die Maßzahl der Masse (in g) des Silbers $\frac{20{,}9x}{1000}$, also die Maßzahl des Volumens (in cm³) $\frac{20{,}9x}{1000\cdot 10{,}5}$, und die Maßzahl der Masse des Kupfers $\frac{20{,}9y}{1000}$, also die Maßzahl des Volumens $\frac{20{,}9y}{1000\cdot 8{,}92}$. Also gilt, da das Gesamtvolumen 2,123 cm³ beträgt

$$\frac{20{,}9x}{1000\cdot 10{,}5}+\frac{20{,}9y}{1000\cdot 8{,}92}=2{,}123 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $y=1000-x$, also (3)

$$\frac{20{,}9}{10{,}5}x+\frac{20{,}9}{8{,}92}(1000-x)=2123, \qquad (4)$$

$$1{,}9905x+2{,}3430(1000-x)=2123,$$
$$1{,}9905x+2343-2{,}3430x=2123,$$
$$0{,}3525x=220,$$
$$x=624{,}1.$$

Ferner erhält man wegen (3)

$$y=1000-624{,}1=375{,}9.$$

Rundet man nun diese Ergebnisse auf volle 5 Einheiten, so erhält man

$$x\approx 625 \quad\text{und}\quad y\approx 375.$$

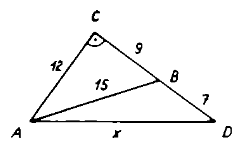
Die Legierung der Gedenkmünze besteht aus rund 625 Teilen Silber und rund 375 Teilen Kupfer.

W 9 ■ 1188 Es sei ABC das erste Dreieck mit den Seiten $\overline{AB}=15$ cm, $\overline{AC}=12$ cm und $\overline{BC}=9$ cm (vgl. die Abb.). Wegen $9^2+12^2=15^2$ ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras dieses Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C.

Verlängert man jetzt die Seite $\overline{CB}$ des Dreiecks ABC um 7 cm über B hinaus bis zum Punkt D, so erhält man das ebenfalls rechtwinklige Dreieck ADC. Bezeichnet man die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AD}$ mit x, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2=(7+9)^2+12^2=16^2+12^2=256+144=400.$$

Daraus folgt $x=20$. Das Dreieck ADB hat also die geforderten Seitenlängen des zweiten Dreiecks, nämlich $\overline{BD}=7$ cm, $\overline{AB}=15$ cm, $\overline{AD}=20$ cm, und die Dreiecke ABC und ADB wurden, wie verlangt, zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammengelegt.



W 9*1189 Wir setzen

$$f(x)=x^{x-2}+x^{x-3}+x^{x-4}$$

und untersuchen, für welche von Null verschiedene natürlichen Werte von x $f(x)=21$ ist.
Wir erhalten

$f(1)=1+1+1=3,$

$f(2)=2^0+2^{-1}+2^{-2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},$

$f(3)=3^1+3^0+3^{-1}=3+1+\frac{1}{3}=\frac{13}{3},$

$f(4)=4^2+4^1+4^0=16+4+1=21.$

Für alle weiteren natürlichen Zahlen x mit $x>4$ erhalten wir

$f(x)=x^{x-4}(x^2+x+1).$

Dabei gilt wegen $x>4$ und $x-4>0$

$x^{x-4}>1$ *und* $x^2+x+1>16+4+1=21,$

also $f(x)>21.$

Daher hat die Gleichung

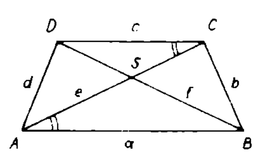
$x^{x-2}+x^{x-3}+x^{x-4}=21$

nur eine natürliche Zahl als Lösung, nämlich $x=4$.

W 9*1190 Aus $c+d+e=c+d+f$ folgt $e=f$; aus $b+c+f=c+d+f$ folgt $b=d$. Daher gilt

$\triangle ACD\cong\triangle BCD$ $(\overline{BC}=\overline{AD}, \overline{AC}=\overline{BD}, \overline{CD}=\overline{CD})$.

Aus der Kongruenz dieser beiden Dreiecke folgt $\sphericalangle CDA=\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ACD=\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DBC$.



Aus der vorletzten Gleichung folgt, daß das Dreieck CDS gleichschenklig ist und $\overline{CS}=\overline{DS}$ gilt. Wegen $\overline{AC}=\overline{BD}$ gilt daher auch $\overline{AS}=\overline{BS}$, d. h. auch das Dreieck ABS ist gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle SAB=\sphericalangle SBA$. Wegen $\sphericalangle BSA=\sphericalangle CSD$ (Scheitelwinkel) gilt daher

$$2\cdot\sphericalangle SAB+\sphericalangle BSA=180°,$$
$$2\cdot\sphericalangle SCD+\sphericalangle BSA=180°,$$

also $\sphericalangle SAB=\sphericalangle SCD.$

Da diese Winkel Wechselwinkel an den geschnittenen Geraden AB und CD sind, folgt $AB\parallel CD$. Das Viereck $ABCD$ ist also ein Trapez und wegen $\overline{BC}=\overline{AD}$ ein gleichschenkliges Trapez, w. z. b. w.

W 10/12 ■ 1191 Es sei (x, y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{x+y}{1-xy}=3, \qquad (1)$$

$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}. \text{ Dann gilt} \qquad (2)$$

$$x+y=3-3xy, \qquad (3)$$

$$3x-3y=1+xy. \text{ Aus (3) folgt} \qquad (4)$$

$$y+3xy=3-x,$$
$$y(1+3x)=3-x.$$

Wäre nun $1+3x=0$, d. h. $x=-\frac{1}{3}$, *so müßte* auch $3-x=0$, also $x=3$ sein, was zu einem Widerspruch führt. Daher gilt $1+3x\neq 0$, und wir erhalten

$$y=\frac{3-x}{1+3x}. \text{ Aus (4) folgt} \qquad (5)$$

$$3y+xy=3x-1,$$
$$y(3+x)=3x-1.$$

Auch hier gilt $3+x\neq 0$, da sonst ein Widerspruch entstehen würde. Daher erhalten wir

$$y=\frac{3x-1}{3+x}. \text{ Aus (5) und (6) folgt} \qquad (6)$$

$$\frac{3-x}{1+3x}=\frac{3x-1}{3+x},$$
$$9-x^2=3x-1+9x^2-3x,$$
$$10x^2=10,$$
$$x^2=1.$$

Diese Gleichung hat genau zwei Lösungen, nämlich $x_1=1$; wegen (5) ist dann $y_1=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$; und $x_2=-1$; wegen (5) ist dann $y_2=\frac{3+1}{1-3}=-2$.

Das sind aber gleichzeitig auch Lösungen des Gleichungssystems (1), (2); denn es gilt

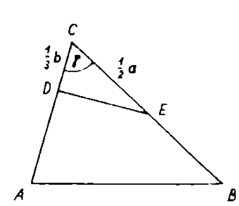
$$\frac{x_1+y_1}{1-x_1y_1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3; \quad \frac{x_1-y_1}{1+x_1y_1}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Ferner gilt

$$\frac{x_2+y_2}{1-x_2y_2}=\frac{-1-2}{1-2}=3; \quad \frac{x_2-y_2}{1+x_2y_2}=\frac{-1+2}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau zwei reelle Lösungspaare, nämlich $(1, \frac{1}{2})$ und $(-1, -2)$.

W 10/12 ■ 1192 Es seien $\overline{AC}=b$ und damit $\overline{DC}=\frac{1}{3}\cdot b$, $\overline{BC}=a$ *und damit* $\overline{EC}=\frac{1}{2}\cdot a$, $\sphericalangle ACB=\gamma$. Dann gilt



$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot \sin\gamma \text{ und}$$

$$A_{DEC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}b\cdot\sin\gamma=\frac{1}{12}\cdot ab\cdot\sin\gamma,$$

also $6\cdot A_{DEC}=A_{ABC}$. w. z. b. w.

W 10/12*1193 1. Zunächst schätzen wir die Zahl 2^{100} nach unten ab. Wegen $2^{10}=1024$ erhalten wir

$2^{100}=(2^{10})^{10}=1024^{10}>1000^{10}=10^{30}$.

Die Zahl 2^{100} hat also mindestens 31 Stellen, da sie größer als 10^{30} ist und diese Zahl bereits 31 Stellen hat.

2. Nun schätzen wir die Zahl 2^{100} nach oben ab und erhalten

$2^{100}=1024^{10}<1100^{10}=11^{10}\cdot 100^{10}$
$=11^{10}\cdot 10^{20}$.

Wegen $11^4=14641<15000=15\cdot 10^3$
gilt $11^8<225\cdot 10^6$,
$11^{10}<225\cdot 10^6\cdot 121=27225\cdot 10^6<2{,}8\cdot 10^{10}$.

Daraus folgt
$2^{100}<2{,}8\cdot 10^{10}\cdot 10^{20}=2{,}8\cdot 10^{30}$.

Die Zahl 2^{100} ist also kleiner als eine 31stellige Zahl, sie hat also höchstens 31 Stellen. Da die Zahl 2^{100} höchstens 31 Stellen und wie oben nachgewiesen wurde auch mindestens 31 Stellen hat, hat sie genau 31 Stellen.

W 10/12*1194 Wir versuchen zunächst, die Polynome n^7+n^2+1 und n^8+n+1 in Faktoren zu zerlegen, um festzustellen, ob sie einen gemeinsamen Teiler haben. Zu diesem Zwecke addieren wir zu dem ersten Polynom die Differenzen $n^6-n^6, n^5-n^5, n^4-n^4, n^3-n^3$ n^2-n^2, $n-n$, die sämtlich gleich Null sind, und erhalten

$$\begin{aligned} n^7+n^2+1 &= n^7+n^6-n^6+n^5-n^5+n^4-n^4\\ &\quad +n^3-n^3+n^2-n^2+n-n+n^2+1\\ &= n^5(n^2+n+1)-n^4(n^2+n+1)\\ &\quad +n^2(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)\\ &\quad +(n^2+n+1)\\ &=(n^2+n+1)(n^5-n^4+n^2-n+1). \end{aligned} \quad (1)$$

Zu dem zweiten Polynom addieren wir die Differenzen n^7-n^7, n^6-n^6, n^5-n^5, n^4-n^4, n^3-n^3, n^2-n^2, die sämtlich gleich Null sind, und erhalten

$$\begin{aligned} n^8+n+1 &= n^8+n^7-n^7+n^6-n^6+n^5-n^5\\ &\quad +n^4-n^4+n^3-n^3+n^2-n^2+n+1\\ &= n^6(n^2+n+1)-n^5(n^2+n+1)\\ &\quad +n^3(n^2+n+1)-n^2(n^2+n+1)\\ &\quad +(n^2+n+1)\\ &=(n^2+n+1)(n^6-n^5+n^3-n^2+1). \end{aligned} \quad (2)$$

Wegen (1) und (2) ist also der Bruch

$$\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}$$

stets durch n^2+n+1 kürzbar. Wegen $n\geqq 1$ gilt dabei $n^2+n+1>1$.

Man erhält z. B. für $n=1$

$$\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}=\frac{3}{3}=\frac{1}{1} \text{ und für } n=2$$

$$\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}=\frac{1+4+128}{1+2+256}=\frac{133}{259}$$

$$=\frac{7\cdot 19}{7\cdot 37}=\frac{19}{37} \text{ usw.}$$

Lösungen zu „Mathematik und Sport“ (Heft 2/74)

Fußball

▲1▲ Die Mannschaft B erhält keinen Minuspunkt; somit gewinnt sie ihre Spiele gegen die Mannschaften D, A und C. Diese drei Mannschaften erhalten je zwei Minuspunkte aus ihren Spielen gegen die Mannschaft B. Die Mannschaft D erhält insgesamt drei Minuspunkte; deshalb muß sie bei genau einem ihrer Spiele gegen A und C ein Unentschieden erreichen und das andere gewinnen.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

1. *Fall:* D spielt gegen C unentschieden. Dann gewinnt D gegen A. Damit hat A aus den Spielen gegen B und D keinen Pluspunkt erzielt. Da A laut Punktestand insgesamt aber zwei Pluspunkte erhält, gewinnt A in diesem Fall das Spiel gegen C. Damit erhält C aus seinen drei Spielen genau einen Pluspunkt, und zwar aus dem Spiel gegen D.

2. *Fall:* D spielt gegen A unentschieden. Dann gewinnt D gegen C. Da A aus den beiden Spielen gegen B und D nur einen Pluspunkt erhält, laut Punktestand aber insgesamt zwei Pluspunkte erhält, spielt in diesem Fall A auch gegen C unentschieden. Damit erhält C aus seinen drei Spielen genau einen Pluspunkt.

In beiden untersuchten Fällen werden die gestellten Bedingungen erfüllt, d. h. es können beide Fälle eintreten.

▲2▲ Jede der angeführten Mannschaften bestreitet genau vier Spiele. Aus dem Punktverhältnis 7 : 1 folgt, daß Mannschaft A einmal unentschieden spielt und drei Spiele gewinnt. Das Torverhältnis 3 : 0 von Mannschaft A besagt dann, daß die gewonnenen Spiele jeweils mit dem Torverhältnis 1 : 0 enden und das unentschiedene Spiel mit dem Torverhältnis 0 : 0 endet. Da B die einzige Mannschaft neben A ist, die kein Gegentor hinnimmt, spielten die Mannschaften A und B mit dem Torverhältnis 0 : 0 gegeneinander unentschieden.

Damit lautet der Ausgang der vier Spiele von Mannschaft A wie folgt:

Spiel	Punkte	Tore
A gegen B	1 : 1	0 : 0
A gegen C	2 : 0	1 : 0
A gegen D	2 : 0	1 : 0
A gegen E	2 : 0	1 : 0

Aus dem unentschiedenen Spiel gegen A erhält Mannschaft B einen Minuspunkt. Aus dem Punktverhältnis 6 : 2 von B folgt dann, daß B von den übrigen drei Spielen gegen C, D bzw. E zwei Spiele gewinnt und ein Spiel unentschieden spielt. Aus dem Torverhältnis 2 : 0 von B folgt schließlich, daß die gewonnenen Spiele jeweils 1 : 0 enden und das unentschiedene 0 : 0 ausfällt. Da C insgesamt nur drei Minuspunkte erhält, davon zwei aus dem Spiel gegen A, spielt B gegen C unentschieden. Damit ergibt sich weiterhin:

Spiel	Punkte	Tore
B gegen C	1 : 1	0 : 0
B gegen D	2 : 0	1 : 0
B gegen E	2 : 0	1 : 0

Aus den restlichen Punktverhältnissen der in der Aufgabe gegebenen Tabelle folgt, daß C gegen D und E, und daß auch D gegen E gewinnt. Da D insgesamt drei Gegentore erhält und in den Spielen gegen A und B bereits je ein Gegentor hinnehmen muß, kann das dritte Gegentor nur aus dem verlorenen Spiel gegen C stammen.

Das Torverhältnis des Spieles C gegen D ist also 1 : 0. Damit sich für C das Gesamttorverhältnis 5 : 2 ergibt, muß das Spiel C gegen E mit dem Torverhältnis 4 : 1 enden.

Wir erhalten deshalb:

Spiel	Punkte	Tore
C gegen D	2 : 0	1 : 0
C gegen E	2 : 0	4 : 1

Wegen des Gesamttorverhältnisses 4 : 3 für D muß das Spiel D gegen E mit 4 : 0 Toren enden:

Spiel	Punkte	Tore
D gegen E	2 : 0	4 : 0

▲3▲ Angenommen, zwei Mannschaften A und B tragen ein Spiel aus. Siegt Mannschaft A, so erhält sie aus diesem Spiel die Punktgutschrift 2 : 0, die Mannschaft B hingegen 0 : 2. Geht das Spiel unentschieden aus, erhält jede der beiden Mannschaften die Punktgutschrift 1 : 1, beide Mannschaften zusammen also 2 : 2. Jedes Spiel bringt also zur Summe der Plus- und Minuspunkte einer Mannschaft den Beitrag 2 und zur Summe der Pluspunkte aller Mannschaften ebenfalls den Beitrag 2. Da jede der Mannschaften $(n-1)$ Spiele austrägt, beträgt die Summe der Plus- und Minuspunkte jeder Mannschaft $2\cdot(n-1)$.

Es werden insgesamt $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)$ Spiele ausgetragen; deshalb beträgt die Summe der Pluspunkte aller Mannschaften

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)=n\cdot(n-1)$.

Hinweis: Die Summe der Minuspunkte aller Mannschaften beträgt ebenfalls $n\cdot(n-1)$.

▲4▲ Entsprechend dem Punktverhältnis 4 : 4 könnte Mannschaft A

a) zwei Spiele gewonnen haben (4 Pluspunkte); dann hat sie die beiden übrigen Spiele verloren (4 Minuspunkte);

b) ein Spiel gewonnen haben (2 Pluspunkte); in diesem Falle gehen zwei weitere Spiele unentschieden aus (2 Pluspunkte, 2 Minuspunkte), und das vierte Spiel wird verloren (2 Minuspunkte);

c) keines der Spiele gewonnen haben; dann enden alle vier Spiele unentschieden (4 Pluspunkte und 4 Minuspunkte).

Auf Grund des Torverhältnisses 4 : 2 kann Fall c) nicht eintreten. Da Mannschaft A

nur zwei Gegentore erhält, können im Falle a) die beiden verlorenen Spiele jeweils nur mit dem Torverhältnis 0 : 1 enden. Die beiden gewonnenen Spiele müssen dann entweder beide 2 : 0 oder ein Spiel 3 : 0 und das andere 1 : 0 enden. Im Falle a) ergeben sich somit zwei mögliche Spielausgänge (2 : 0, 2 : 0, 0 : 1, 0 : 1), (3 : 0, 1 : 0, 0 : 1, 0 : 1).

Im Falle b) muß Mannschaft A in dem verlorenen Spiel mindestens ein Gegentor hinnehmen. Dann könnte sie in den beiden unentschiedenen Spielen insgesamt höchstens ein Gegentor erhalten. Aus diesen Überlegungen ergeben sich vier weitere mögliche Spielausgänge, nämlich (3 : 0, 0 : 0, 1 : 1, 0 : 1), (4 : 1, 0 : 0, 0 : 0, 0 : 1), (4 : 0, 0 : 0, 0 : 0, 0 : 2), (3 : 0, 0 : 0, 0 : 0, 1 : 2).

Insgesamt ergeben sich somit sechs Möglichkeiten für den Ausgang der Spiele der Mannschaft A.

Friedensfahrt

Klasse 5

Zahl der Plazierungen

1. Platz	2. Pl.	3. Pl.	1. Pl.	2. Pl.	3. Pl.
2	1	0	0	4	0
2	0	2	0	3	2
1	2	1	0	2	4
1	1	3	0	1	6
1	0	5	0	0	8

Für die Plazierung dieses Fahrers auf den ersten drei Plätzen gibt es 10 Möglichkeiten.

Klasse 6

Die Dreiecke MM_2P und MQM_2 sind gleichseitig. Mithin gilt $\sphericalangle QMM_2 = \sphericalangle M_2MP = 60°$. Hieraus folgt $\sphericalangle QMP = 120°$.

Klasse 7

Die letzten 24 km legt die Spitzengruppe in $\frac{1}{2}$ h zurück. Da die Spitzengruppe in 1 min 15 s den Vorsprung 1 km herausgefahren hat, dürften die zurückgefallenen Fahrer für 25 km höchstens $\frac{1}{2}$ h Zeit brauchen, d. h., sie müßten mindestens die Geschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ vorlegen.

Klasse 8

a) $48{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 0{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 48{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

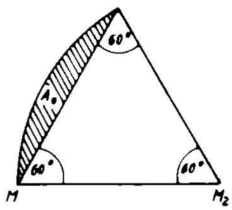
b) *W. Lichetschow* fährt nach 150 km: $49{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 3{,}012$ h ins Ziel. Ein Fahrer mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $48{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte das Ziel nach 150 km: $48{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 3{,}106$ h erreicht. Mithin kam der Sieger $3{,}106\text{ h} - 3{,}012\text{ h} = 0{,}094\text{ h} = \frac{94}{1\,000} \cdot 60\text{ min} \approx 5{,}6\text{ min}$ früher ins Ziel als erwartet.

Klasse 9

Aus $\overline{PM} = \overline{PM_2} = \overline{MM_2} = r$ folgt, daß das Dreieck PMM_2 gleichseitig und damit auch gleichwinklig ist. Deshalb gilt $\sphericalangle PMM_2 = 60°$, also $\sphericalangle PMQ = 120°$.

Für den Flächeninhalt des Kreisabschnittes mit $\overline{PM}$ als Sehne gilt

$$A_0 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} = \frac{1}{12} r^2 (2\pi - 3\sqrt{3}).$$



Deshalb gilt für die Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 folgendes:

$$A_1 = 2 \cdot A_{PMM_2} + 4 \cdot A_0 = 2 \cdot \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} + \frac{4}{6}\pi r^2 - r^2\sqrt{3} = \frac{1}{6} r^2 (4\pi - 3\sqrt{3}),$$

$$A_2 = \pi \cdot r^2 - A_1 = \pi r^2 - \frac{1}{6} r^2 (4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{1}{6} r^2 (2\pi + 3\sqrt{3}),$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\pi r^2 - A_1 = \frac{1}{6} r^2 (3\sqrt{3} - \pi).$$

Klasse 10

a) Beim Fahren mit der Geschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ wird in 1 s der Weg 13,89 m zurückgelegt. Da der Umfang des Hinterrades $\pi \cdot 27 \cdot 25{,}4\text{ mm} \approx 165\text{ cm}$ beträgt, dreht sich bei dieser Geschwindigkeit das Hinterrad in 1 s rund 8,4 mal. Fahren mit größtem Gang bedeutet, daß die Kette über das Kettenblatt mit 48 Zähnen und über das Zahnrad mit 14 Zähnen am Hinterrad läuft. Das Kettenrad dreht sich also rund $8{,}4 \cdot \frac{14}{48} = 2{,}45 \approx 2{,}4$ mal in der Sekunde.

b) Jetzt macht das Hinterrad $2{,}45 \cdot \frac{46}{20} \approx 5{,}6$ Umdrehungen in der Sekunde. Die Fahrgeschwindigkeit beträgt rund

$$\frac{5{,}6}{8{,}4} \cdot 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 33\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Lösungen zu
alpha-heiter — international

логическая задача

B gewann nicht mehr als 4 Partien. Konnte er weniger als 4 Partien gewinnen? Nein. Nehmen wir einmal an, daß er nur drei Partien gewann, so hatte er im günstigsten Fall 6 Punkte. Das ist weniger als die Hälfte von 13 Punkten. Daher gewann B vier und A sechs Partien.

Kryptarithmetik aus der DRV

In unserer mathematischen Schreibweise:

```
504210 : 686 = 735        504210 | 686
4802                             |-----
 2401                       2401 | 735
 2058                       3430
  3430                       000
  3430
```

Aritmetica

$\frac{77}{77} = 1$; $\frac{7}{7} + \frac{7}{7} = 2$; $\frac{7+7+7}{7} = 3$;

$\frac{77}{7} - 7 = 4$; $7 - \frac{7+7}{7} = 5$; $\frac{7 \cdot 7 - 7}{7} = 6$;

$7 + \frac{7-7}{7} = 7$; $7 + \frac{7+7}{7} = 9$; $\frac{77-7}{7} = 10$.

Third eastern african regional contest

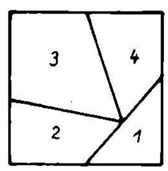
Von der aus 23 Gliedern bestehenden offenen Kette sind das vierte und das elfte Glied in der Mitte durchzuzwicken. Die beiden halben Glieder bilden dann jeweils ein Glied. Wir erhalten ferner drei zusammenhängende, sechs zusammenhängende und weitere zwölf zusammenhängende Glieder. Nun gilt $1 = 1$; $2 = 1 + 1$; $3 = 3$; $4 = 3 + 1$; $5 = 3 + 2 \cdot 1$; $6 = 6$; $7 = 6 + 1$; $8 = 6 + 2 \cdot 1$; $9 = 6 + 3$; $10 = 6 + 3 + 1$; $11 = 6 + 3 + 2 \cdot 1$; $12 = 12$; $13 = 12 + 1$; $14 = 12 + 2 \cdot 1$; $15 = 12 + 3$; $16 = 12 + 3 + 1$; $17 = 12 + 3 + 2 \cdot 1$; $18 = 12 + 6$; $19 = 12 + 6 + 1$; $20 = 12 + 6 + 2 \cdot 1$; $21 = 12 + 6 + 3$; $22 = 12 + 6 + 3 + 1$; $23 = 12 + 6 + 3 + 2 \cdot 1$.

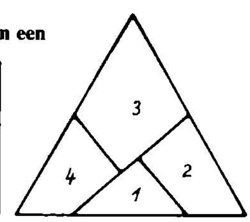
Es können also 1 bis 23 Glieder dieser Kette als Wägestücke benutzt werden.

Neun falsche Felder

2d, 3b, 3e, 4b, 4c, 4f, 5c, 5d und 6c.

Twee legpuzzles in een





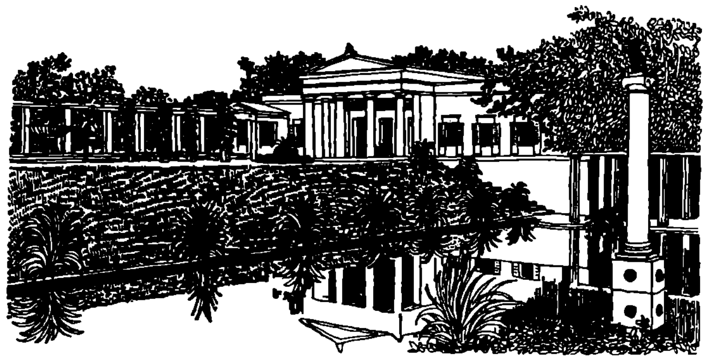
Занимательна МАТЕМАТИКА

$244 - 54 = 190$
$: \quad + \quad -$
$4 \cdot 15 = 60$

$61 + 69 = 130$

Mathias Müller, Schüler der Klasse 9 der Friedrich-Engels-OS, Leipzig, Mitglied der Kulturgruppe dieser Schule, komponierte zu Ehren der XVI. IMO ein Klavierstück und trug es anläßlich der Abschlußfeier der Bezirksolympiade Leipzig vor (unser Foto).

Aus dem Bezirksklub Junger Mathematiker berichtet



Potsdam
Schloß Charlottenhof

Im Bezirk Potsdam gibt es einen *Klub Junger Mathematiker*. In jedem Jahr werden nach der DDR-Mathematik-Olympiade die Schüler der 12. Klassen aus dem Klub verabschiedet und neue talentierte Schüler ab Klasse 7 (zunächst als Kandidaten) aufgenommen. Wissenschaftliche Mitarbeiter der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht* Potsdam und Lehrer arbeiten mit den Schülern in drei Klubklassen. Da der Klub nur an etwa zehn Tagen im Jahr zusammenkommt, ist natürlich eine Beschränkung auf zwei (höchstens drei) Themen sinnvoll. Seit zwei Jahren schon heißt z. B. eines der Themen in der oberen Klubklasse: *Funktionen.*

Zur Zeit beschäftigen wir uns mit speziellen Eigenschaften von Funktionen, z. B. der Periodizität:

Wir betrachten Funktionen, deren Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind und verwenden als symbolische Schreibweise $y = f(x)$

Eine solche Funktion heißt periodisch, wenn eine Zahl $p_i \neq 0$ so existiert, daß für alle x des Definitionsbereiches

$$f(x+p_i) = f(x) \text{ gilt.} \qquad (1)$$

Gibt es eine Zahl p_i, so gibt es offensichtlich unendlich viele Zahlen p_i, für die (1) gilt. Jede solche Zahl p_i heißt eine Periode der Funktion; die kleinste dieser Zahlen nennen wir die kleinste oder primitive Periode p.

Wir lösen eine Aufgabe. (Sie hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der 5. Aufgabe der X. IMO siehe *alpha* 5/6/1968):

Es seien an und A positive reelle Zahlen und $f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte stetige Funktion, die für jedes reelle x der Bedingung

$$f(x+a) = \sqrt{A-[f(x)]^2} \text{ genügt.} \qquad (2)$$

a) Man beweise: Die Funktion $f(x)$ ist periodisch.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion an.

(Wenn einem Schüler der Begriff der Stetigkeit nicht bekannt ist, so kann er sich doch mit dieser Aufgabe beschäftigen. Es genügt dann im vorliegenden Fall, sich vorzustellen, daß die grafische Darstellung der Funktion $f(x)$ eine zusammenhängende Kurve ist.)

Wir beweisen zunächst die Periodizität:

Aus (2) kann man zunächst ablesen, daß $\sqrt{A} \geqq f(x) \geqq 0$ für alle x gelten muß. Beweist das!

Weiterhin erhält man aus (2) durch Quadrierung

$$[f(x+a)]^2 = A - [f(x)]^2. \qquad (3)$$

Setzt man für x den Wert $x+a$ ein, so erhält man aus (3)

$$[f(x+2a)]^2 = A - [f(x+a)]^2. \qquad (4)$$

Subtrahiert man die Gleichung (4) von der Gleichung (3), so ergibt sich

$$[f(x+2a)]^2 = [f(x)]^2,$$

woraus wegen $f(x) > 0$ für alle x

$$f(x+2a) = f(x) \text{ folgt.} \qquad (5)$$

Aus (5) ist ersichtlich, daß ein $p_i = 2a$ existiert, damit ist die Periodizität gezeigt. (Man beachte, daß nicht gefordert war, die kleinste Periode zu ermitteln).

Bei der Lösung des Teiles b) kann man nun viel allgemeiner vorgehen, als mancher vielleicht glauben mag: Wir setzen zunächst $f(x)$ durch eine stetige Funktion $g(x)$ im Intervall $[0, a]$ fest. Daraus ergibt sich wegen (2) zwangsläufig, daß im Intervall $[a, 2a]$ die Funktion $f(x)$ die Funktionswerte $\sqrt{A-[g(x-a)]^2}$ haben muß. Damit ist $f(x)$ eine in jedem der Teilintervalle stetige Funktion, es muß noch die Stetigkeit an der Stelle $x_0 = a$ gewährleistet sein, es muß also gelten

$$g(a) = \sqrt{A-[g(0)]^2},$$
$$[g(0)]^2 + [g(a)]^2 = A.$$

Wir fassen zusammen:

Für jede stetige Funktion $g(x)$, die für $0 \leqq x \leqq a$ den Bedingungen

$$0 \leqq g(x) \leqq \sqrt{A} \qquad (6)$$

und $\quad [g(0)]^2 + [g(a)]^2 = A \qquad (7)$

genügt, ist die Funktion $f(x)$ mit der Periode $2a$ und mit

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq a \\ \sqrt{A-[g(x-a)]^2} & \text{für } a \leqq x \leqq 2a, \end{cases}$$

eine Lösung des Aufgabenteiles b).

Zum Abschluß eine Aufgabe für unsere Leser:

▲1▲ Man setze in den obigen Ausführungen $g(x)$ zunächst als lineare Funktion $g(x) = mx$ an, ermittle $f(x)$ und zeichne das Bild der Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, 4a]$.

H.-J. Sprengel

Engel/Pirl

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (Eine Auswahl), Band 1

Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin
173 Seiten · Bestell-Nr. 00 21 70
Preis 6,– Mark

Mit dieser Auswahl wird eine Sammlung von Aufgaben zur Verfügung gestellt, die besonders zur Förderung begabter Schüler aber auch zur Bereicherung des Unterrichts und für Arbeitsgemeinschaften eingesetzt werden kann.

Der Band enthält Aufgaben aus den Olympiadeklassen 9 bis 12 zu den Stoffgebieten Arithmetik, Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen und zu logisch-kombinatorischen Übungen (Auswahl aus den Olympiaden der DDR 1961/62 bis 1967/68 und aus den Vorolympiaden 1960 und 1961). Aufgabentexte und Lösungen wurden sorgfältig überarbeitet und im Hinblick auf den erreichten Stand in der Lehrplanentwicklung vereinheitlicht.

Mathematische Schülerbücherei

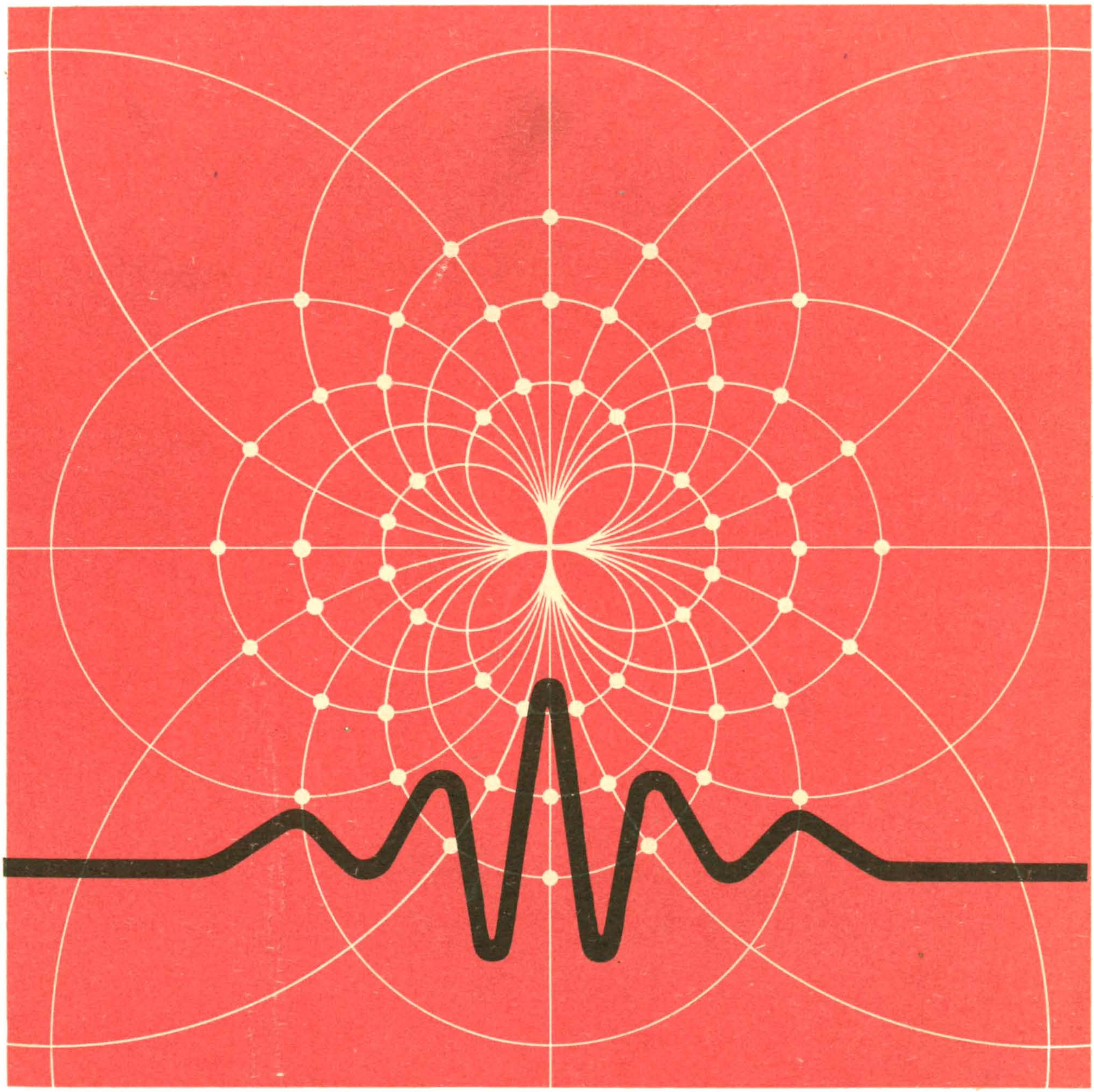
Gesamtverzeichnis

- ■ Band 1 Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie
- * Band 2 Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik
- ● Band 3 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I
- * Band 4 Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene
- * Band 5 Vysin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben
- * Band 6 Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz
- ▲ Band 7 Varga, Mathematische Logik für Anfänger
- ■ Band 8 Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion
- ■ Band 9 Korowkin, Ungleichungen
- ■ Band 10 Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
- * Band 11 Lietzmann, Wo steckt der Fehler?
- * Band 12 Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis
- * Band 13 Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich
- * Band 14 Miller, Rechenvorteile
- ■ Band 15 Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben
- ■ Band 16 Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen
- ■ Band 17 Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen
- ■ Band 18 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I
- ■ Band 19 Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen
- ■ Band 20 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II
- ■ Band 21 Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades
- ■ Band 22 Gelfand, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen
- ■ Band 23 Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades
- ● Band 24 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II
- ■ Band 25 Markuschewitsch, Rekursive Folgen
- ■ Band 26 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III
- ● Band 27 Steinhaus, 100 Aufgaben
- ▲ Band 28 Perelman, Unterhaltsame Geometrie
- ▲ Band 29 Perelman, Unterhaltsame Algebra
- ▲ Band 30 Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik
- ▲ Band 31 Teplow, Grundriß der Kybernetik
- ■ Band 32 Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren
- * Band 33 Belkner, Determinanten
- ○ Band 34 Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik
- ○ Band 35 Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra
- * Band 36 Lehmann/Grosche/Kleinfeld, Übungen für junge Mathematiker I
- * Band 37 Lehmann/Grosche/Kleinfeld, Übungen für junge Mathematiker II
- * Band 38 Lehmann/Grosche/Kleinfeld, Übungen für junge Mathematiker III
- * Band 39 Krysicke, Zahlen und Rechnen einst und jetzt
- : Band 40 Sedláček, Einführung in die Graphentheorie
- * Band 41 Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode
- ■ Band 42 Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen
- ■ Band 43 Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen
- ■ Band 44 Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks
- ■ Band 45 Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder
- ▲ Band 46 Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik
- * Band 47 Lehmann, Lineare Optimierung für junge Mathematiker
- * Band 48 Belkner, Matrizen
- * Band 49 May, Differentialgleichungen
- ■ Band 50 Sobol, Die Monte-Carlo-Methode
- * Band 51 Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik
- ■ Band 52 Worobjow, Teilbarkeitskriterien
- ● Band 53 Freyer-Gaebler-Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst
- ● Band 54 Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung?
- ○ Band 55 Cendrowski, Bande der unsichtbaren Hand
- ● Band 56 Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung?
- ○ Band 57 Dege, EDV Maschinelles Rechnen
- * Band 58 Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen
- ■ Band 59 Kaloujnine, Primzahlzerlegung
- ■ Band 60 Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen?
- ■ Band 61 Boltjanski/Gochberg, Kombinatorische Geometrie
- ▲ Band 62 Varga, Mathematische Logik für Anfänger II
- ▲ Band 63 Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung
- * Band 64 Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre
- * Band 65 Belkner, Metrische Räume
- ● Band 66 Jäckel, Mathematik heute
- : Band 67 Sedláček, Keine Angst vor Mathematik
- ▲ Band 68 Stahl, Elektronische Datenverarbeitung
- ▲ Band 69 Gronitz, Praktische Mathematik
- ▲ Band 70 Hilbert, Matrizen in der Elektrotechnik und Ökonomie
- ▲ Band 71 Wissenspeicher Mathematik
- ● Band 72 Steinhaus, 100 neue Aufgaben
- * Band 73 Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme
- ■ Band 74 Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme
- ■ Band 75 Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie
- ○ Band 76 Rehm, Zahl, Menge, Gleichung
- ○ Band 77 Wundervolle Welt der Mathematik
- ● Band 78 Kordemski, Köpfchen, Köpfchen
- ● Band 79 Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus
- ■ Band 80 Baschmakowa, Diophant und diophantische Gleichungen
- ■ Band 81 Pieper, Zahlen aus Primzahlen
- ● Band 82 Lehmann, Mathe mit Pfiff
- ● Band 83 Jäckel, Das Bild der modernen Mathematik
- * Band 84 Belkner, Reelle Vektorräume
- ▲ Band 85 Schweizer, Elektronische Datenverarbeitung
- ▲ Band 86 Göttner, Fischer, Krieg, Was ist, was kann Statistik?

■ Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
* BSB B. G. Teubner, Leipzig
● Urania-Verlag, Leipzig
▲ Volk und Wissen, Volkseigener Verlag Berlin
○ Kinderbuchverlag Berlin
: VEB Fachbuchverlag Leipzig

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

4

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M. Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann (S. 77); K. Jäntsch, Osternienburg (S. 85); Zentralbild (S. 96; S. VIII); *Vignetten:* H. Büttner, L. Rauwolf (1), aus: Eulenspiegel (S. 84/85); Loriot, aus: Aus dem Diogenesfaß (Eulenspiegelverlag) (S. 84); Lengren, aus: 100 neue Scherze (Eulenspiegelverlag (S. 84); K.-H. Guckuck, Leipzig (S. 86); Zeitschrift π, Wien (S. 88/89)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 1. Juni 1974

Die stereographische Projektion

Mit der Problemstellung, eine Kugelfläche auf ein ebenes Flächenstück abzubilden, haben sich die Menschen bereits in der Antike befaßt. Einerseits ging es darum, die scheinbare Himmelskugel mit ihren Sternbildern anschaulich in einer Ebene darzustellen. Andererseits erwachte mit Ausbreitung der Erkenntnis, daß die Erde in erster Näherung die Gestalt einer Kugel besitzt, immer stärker das Verlangen, Abbildungsmöglichkeiten von der Kugel auf die Ebene zu erfinden und wissenschaftlich zu untersuchen. Diese Aufgabenstellung ist sehr problematisch, da sich eine Kugelfläche oder auch nur kleine Ausschnitte davon niemals exakt längentreu auf die Ebene abbilden lassen. Hierbei ist zu beachten, daß die Abstandsbestimmung zwischen zwei Punkten der Ebene längs der Geraden durch diese Punkte erfolgt. Hingegen wird der Abstand zweier auf einer Kugelfläche liegender Punkte längs des Großkreises durch diese Punkte gemessen. Sind auf einem Globus die Küstenlinien eines Kontinents (etwa Australien) mit einigen Städten genau eingetragen, so läßt sich kein Abbildungsverfahren auf die Ebene angeben, nach dem sich die wahren Entfernungen zweier beliebiger Punkte (z. B. Städte) aus dem Bild durch Anlegen eines geeigneten Maßstabes gewinnen lassen. Stets wird die ebene Figur Verzerrungen gegenüber der ursprünglichen sphärischen Figur aufweisen. Den exakten Beweis dafür, daß es in keiner Weise möglich ist, eine Kugelfläche – oder nur Ausschnitte davon – längentreu auf eine Ebene abzubilden, lieferte zuerst Leonhard Euler 1777. Bis dahin gehörte der hier beschriebene Sachverhalt zum unbewiesenen Erfahrungswissen von Geometern und Kartographen. Auch auf anderen Gebieten, zum Beispiel für die Anfertigung von Stoff- oder Lederbällen, läßt sich kein Zuschnittmuster derart finden, daß das Material ohne Längenverzerrungen genau passend auf die Kugel aufgezogen werden kann. Für die Abbildung einer Kugelfläche auf die Ebene existiert nach Euler keine Patentlösung, die die Forderung der globalen Ähnlichkeit von Original und Bild erfüllt.

Im Laufe von Jahrhunderten – vor allem seit der Zeit der Entdeckungen – sind von Geometern und Kartographen eine Fülle von Abbildungsverfahren entwickelt worden, die spezielle Anforderungen optimal befriedigen. Von diesen soll hier ein Verfahren vorgestellt werden, das bereits im Altertum zur Abbildung der scheinbaren Himmelskugel Verwendung fand. Die abzubildende Kugelfläche κ wird auf die in horizontaler Lage befindliche Bildebene π gelegt. Der Berührungspunkt ist der tiefste Punkt von κ und wird mit W bezeichnet. Der auf κ diametral gegenüberliegende höchste Punkt Z ist das Projektionszentrum. Die Abbildung eines Punktes $P\in\kappa$, $P\neq Z$ ist wie folgt erklärt: Die Verbindungsgerade $g=g(PZ)$ schneidet die Bildebene π in einem Punkt P'. P' ist der Bildpunkt von P. Die Eigenschaften dieser Abbildung – man bezeichnet sie als stereographische Projektion – sollen im folgenden mit den Mitteln der Darstellenden Geometrie untersucht werden. (Bild 1)

1. Die Abbildung $P\rightarrow P'$ mit $P\in\kappa$ und $P\neq Z$ ist umkehrbar eineindeutig

Beweis: Nimmt man auf κ einen von Z verschiedenen Punkt P an, so gibt es genau eine Gerade $g=g(ZP)$. Diese schneidet die Ebene π in genau einem eigentlichen Punkt P', da der erste Tafelabstand von Z stets größer ist als der erste Tafelabstand von P. Gibt man einen Punkt $P'\in\pi$ willkürlich vor, so existiert genau eine Gerade $g=g(ZP')$. Diese hat mit κ außer Z genau einen Punkt $P\neq Z$ gemeinsam. Dies ist der Originalpunkt von P'. Damit ist die Eineindeutigkeit der stereographischen Projektion für jeden Punkt $P\in\kappa$ und $P\neq Z$ gesichert. Der Punkt Z ist von der Betrachtung auszuschließen, da für diesen kein Bildpunkt existiert.

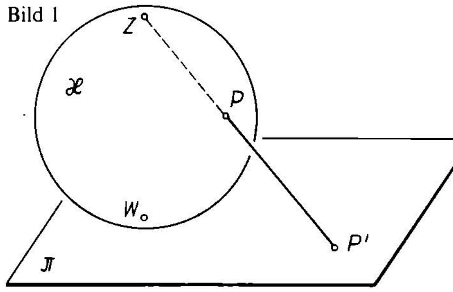
2. Die stereographische Projektion ist winkeltreu

Die Abbildung einer Fläche Φ auf eine Ebene π ist für den Punkt P winkeltreu, wenn folgendes gilt: $P\in\Phi$ sei der Schnittpunkt zweier auf Φ liegender Kurven c und k, denen ein Durchlaufungssinn gemäß der eingetragenen Pfeile in Bild 2 aufgeprägt ist. Ferner lassen sich wenigstens in P an c und k die als orientierte Geraden aufgefaßten Tangenten s bzw. t legen. Von s und t wird die Tangentialebene τ an Φ in P aufgespannt. In τ liegt auch der durch die orientierten Geraden s und t eingeschlossene Winkel α. Dies ist der Schnittwinkel von c und k in P. Die Abbildung führt P in P', c in c', k in k' sowie s in s' und t in t' über. Wegen der Erhaltung der Berührung von Kurve und Gerade sind s' und t' Tangenten an c' bzw. k' in P'. Die Übertragung des Durchlaufungssinnes von Kurven und Tangenten auf die Bilder erlaubt die eindeutige Auswahl des Bildwinkels α'. Gilt $\alpha=\alpha'$ unabhängig von der Wahl des sich in P schneidenden Kurvenpaares $\{c, k\}$, so ist die Abbildung von Φ auf π in P winkeltreu. Läßt sich dies für jedes Punktepaar $\{P, P'\}$ nachweisen, so ist die gesamte Abbildung winkeltreu.

Zum Beweis der Winkeltreue der stereographischen Projektion werden κ und π im Aufriß dargestellt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Schnittpunkt P von c und k auf dem scheinbaren Umriß von κ liegt. Dann ist die von s und t aufgespannte Tangentialebene τ an κ zweitprojizierend. Es wird nun gezeigt, daß die Abbildung $P\rightarrow P'$ äquivalent ist mit der Umklappung der Tangentialebene τ um ihre erste Spur e nach π. (Bild 3)

Ist 2γ die Größe des Neigungswinkels von τ gegen π (κ liegt außerhalb des betrachteten Neigungswinkels), so gilt auch $\sphericalangle\, WMP=2\gamma$. Folglich treten in dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ZMP$ Basiswinkel der Größe γ auf. Da der Berührungsradius MP (M Kugelmittelpunkt) senkrecht auf τ steht, gilt weiterhin $\sphericalangle\, EPP'=90^\circ-\gamma$. Nach dem Satz über

Bild 1



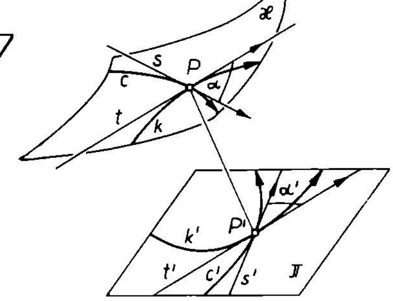


Bild 2

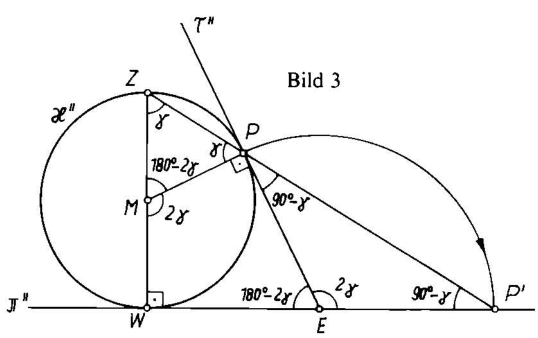


Bild 3

die Winkelsumme im ebenen Dreieck ist außerdem $\sphericalangle\, EP'P=90^\circ-\gamma$. Aus der Gleichheit $\sphericalangle\, EPP' = \sphericalangle\, EP'P$ folgt endlich, daß das Dreieck $\triangle PEP'$ gleichschenklig ist und somit $\overline{EP}=\overline{EP'}$ gilt. Die Abbildung $P\rightarrow P'$ kann daher als Umklappung von τ um e nach π interpretiert werden. Sind S und T die Spurpunkte von s und t, so ändern diese ihre Lage bei der Umklappung nicht. Es gilt also $s=s(PS)$, $t=t(PT)$ sowie $s'=s'(P'S)$, $t'=t'(P'T)$. Damit sind auch die Abbildungen $s\rightarrow s'$ und $t\rightarrow t'$ der Tangenten als Umlegungen erklärbar. Wegen der Rückführung der Abbildung auf eine Bewegung gilt $\alpha=\alpha'$. Da für jeden Punkt $P\in\kappa$ und $P\neq Z$ die stereographische Projektion als Umklappung der zugehörigen Tangentialebene aufgefaßt werden kann, ist die Winkeltreue dieser Abbildung bewiesen. (Bild 4)

3. Die stereographische Projektion ist kreistreu; d. h., Kugelkreise gehen in Kreise der Bildebene über

Zunächst ist festzuhalten, daß jede Ebene, die mit der Kugelfläche κ wenigstens zwei getrennt liegende Punkte gemeinsam hat, diese nach einem Kreis schneidet. Entstünde eine andere Kurve zweiter Ordnung, etwa eine Ellipse, so ließe sich diese Annahme sofort auf einen Widerspruch zu Eigenschaften der Kugelfläche bringen. Wir fragen nach dem Bild eines Kugelkreises c, von dem wir zunächst voraussetzen, daß er nicht durch Z geht. Hierzu legen wir an κ jenen Tangentialkegel, der die Kugelfläche längs des Kreises c berührt. Der Tangentialkegel ist ein Drehkegel mit dem Punkt C als Spitze. Seine Erzeugenden schneiden den Kugelkreis c senkrecht. Nun wird c samt der Kegelspitze und den Kegelerzeugenden aus Z auf die Ebene π projiziert. Dabei gehen die Erzeugenden in ein Geradenbüschel mit dem Bild C^* von $C\notin\kappa$ als Träger über. Wegen der nachgewiesenen Winkeltreue muß das Bild c' von c jede Gerade des Büschels senkrecht schneiden. Diese Forderung erfüllt nur eine Kreislinie mit C^* als Mittelpunkt. Ist c ein Großkreis, so sind die Erzeugenden des κ längs c berührenden Zylinders zu betrachten. Auch diese gehen bei der Abbildung in ein Geradenbüschel über, das von c' senkrecht durchsetzt wird. Damit ist die Kreistreue für alle nicht durch Z gehenden Kugelkreise nachgewiesen. Umgekehrt läßt sich auch jedem in π liegenden Kreis c' genau ein Kreis c auf κ zuordnen. (Bild 5)

Es werde noch der Fall betrachtet, daß der Kugelkreis durch Z geht. Die Spitze C des zugehörigen Tangentialkegels liegt dann in einer zu π parallelen Ebene durch Z. Die Projektion dieser Kegelspitze (Mittelpunkt des Bildkreises c') ist demnach ein unendlich ferner Punkt. Der Bildkreis entartet daher zu einer Geraden. Diese ist identisch mit der Spur der den Kugelkreis c enthaltenden Ebene. Auch hier ist eine eineindeutige Zuordnung von Geraden in π und Kugelkreisen durch Z gesichert. In dem vorliegenden Zusammenhang können Geraden als entartete Kreise angesehen werden, deren Mittelpunkte unendlich ferne Punkte sind.

4. Abbildung spezieller Kugelkreise und Kurven

Für die folgenden Betrachtungen identifizieren wir Z mit dem Nordpol N, W mit dem Südpol S von κ. Ferner denke man sich die Kugelfläche κ mit einem Netz von Längen- und Breitenkreisen überzogen. Die Längenkreise werden bei der Abbildung, da sie sämtlich durch den Nord- und Südpol gehen, in ein Geradenbüschel mit S als Träger übergeführt. Die Breitenkreise gehen auf Grund der Axialsymmetrie in ein Büschel konzentrischer Kreise mit S als gemeinsamen Mittelpunkt über. In der Kartographie ordnet man diese Abbildung unter den polständigen perspektivischen Azimutalentwürfen ein. Für die Seefahrt spielen sphärische Kurven eine besondere Rolle, die man als Loxodromen bezeichnet. Eine Loxodrome hat die Eigenschaft, daß sie jeden Längenkreis unter einem konstanten Winkel schneidet. Fährt ein Schiff auf einer Loxodromen über ein Weltmeer, so hat dies für die Navigation den Vorteil, daß der Kurs – bezogen auf die Nord-Süd-Richtung – bei der Fahrt unverändert bleibt. (Bild 6)

Nun fragen wir nach der stereographischen Projektion einer Loxodromen. Die Meridiane gehen in ein Geradenbüschel mit S als Träger über. Wegen der Winkeltreue der Abbildung muß die Bildkurve der Loxodromen jede Gerade des Büschels unter konstantem Winkel schneiden. Eine ebene Kurve mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als logarithmische Spirale. Aus der geometrischen Besonderheit dieser Kurve resultieren viele praktische Anwendungsmöglichkeiten. Um z. B. mittels eines Schneidemessers mit festem Drehpunkt einen gleichmäßigen Schnitt zu führen, ist es wichtig, daß die schneidende Fläche in das zu trennende Material unter konstantem Winkel eindringt. Dies leistet eine Schneide von der Form einer logarithmischen Spirale. Die Anwendungen dieser Kurve sind älter als die Logarithmen selbst. Schon Albrecht Dürer beschreibt in seinem Geometrie-Lehrbuch „UNderweysung der messung/mit dem zirckel un richtscheyt in Linien, ebnen und gantzen corporen/...“ aus dem Jahre 1525 eine

Bild 4

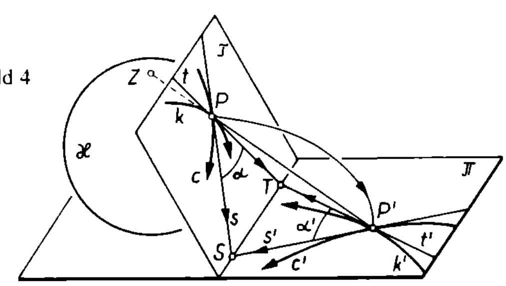
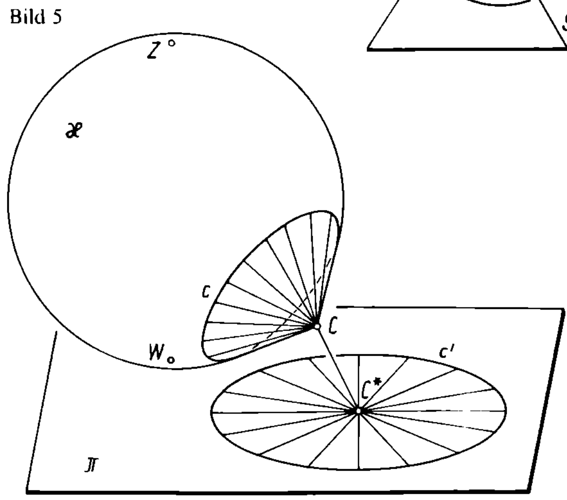


Bild 5



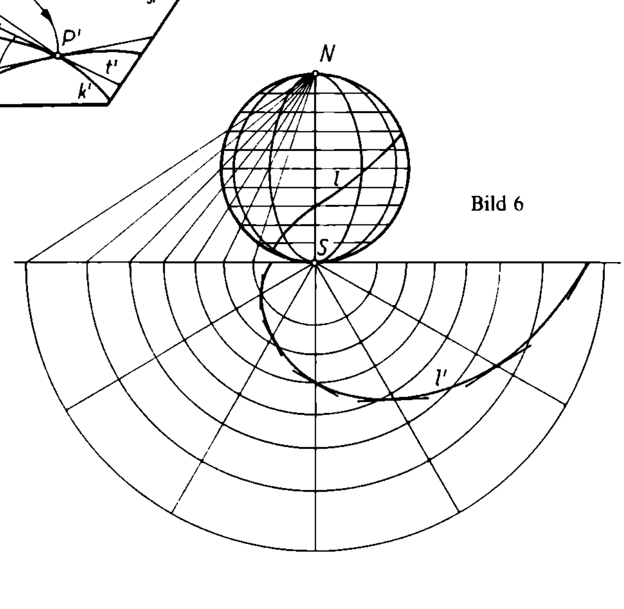


Bild 6

Spirale, die sich auf Grund der gegebenen Konstruktionsvorschrift als logarithmische Spirale identifizieren läßt. Als Bemerkung zu ihrem Bild schreibt er:

„Diese Linie kann man der unendlichen Größe und Kleinheit halber nicht machen; ihr Anfang und ihr Ende sind nicht zu finden. Das faßt allein der Verstand."

Geht die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugelfläche, so entsteht ein Großkreis. Der Radius eines Großkreises ist gleich dem Kugelradius. Der Äquator und sämtliche Meridiane sind Großkreise. Ein vom Äquatorkreis verschiedener Großkreis schneidet den Äquator nach zwei diametral gegenüberliegenden Punkten. Ihre Bilder liegen auf dem Bild des Äquatorkreises gleichfalls diametral gegenüber. Schneidet umgekehrt ein Bildkreis k' das Bild des Äquators in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten, so ist der zugehörige Kugelkreis ein Großkreis von κ.

Großkreise spielen in der sphärischen Trigonometrie die gleiche Rolle wie Geraden in der ebenen Trigonometrie. Zum Beispiel wird die Entfernung zweier Punkte auf der Kugelfläche definitionsgemäß auf dem durch diese Punkte gehenden Großkreis gemessen. Ein durch zwei Punkte gelegter Großkreis stellt auch die kürzeste Verbindung dieser beiden Punkte auf der Kugelfläche dar. Die Sätze der ebenen Trigonometrie lassen sich auch als Grenzfälle von Sätzen (und Formeln) der sphärischen Trigonometrie auffassen, wobei der Radius der Kugelfläche als eine über alle Grenzen wachsende Größe einzusetzen ist.

5. Punktspiegelung an Ebene und Kreis

Wir gehen von einem Punktepaar $\{P,\tilde{P}\} \in \kappa$ aus, das spiegelbildlich zur Äquatorebene von κ liegt, und fragen nach der Lagebeziehung der Bildpunkte $\{P', \tilde{P}'\}$ in π bezüglich des Bildes des Äquatorkreises. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Kugelfläche um ihre lotrechte Achse wieder so gedreht werden, daß P und $\tilde{P}$ im Aufriß auf dem scheinbaren Umriß von κ liegen. Zusätzlich wird der auf dem Umriß liegende Äquatorpunkt A in die Konstruktion einbezogen. Durch Einzeichnen der Verbindungsgeraden NP, $N\tilde{P}$ und NA findet man die Aufrisse der Bildpunkte P', $\tilde{P}'$ und A'. Nun gilt nach dem Satz vom Peripheriewinkel im Kreis:

$\sphericalangle SNA = 45°$ (Peripheriewinkel über einem Viertel des Vollkreises)

$\sphericalangle \tilde{P}NA = \sphericalangle ANP = \delta$ (Bild 7)

Aus Bild 7 ist ferner abzulesen, daß $\sphericalangle SN\tilde{P}' = \sphericalangle SP'N = 45° - \delta$ gilt. Daraus folgt, daß die Dreiecke $\triangle S\tilde{P}'N$ und $\triangle SNP'$ ähnlich sind, und es besteht die Proportion

$$\overline{S\tilde{P}'} : \overline{SN} = \overline{SN} : \overline{SP'}.$$

Wegen $\overline{SN} = \overline{SA'}$ kann weiterhin geschrieben werden

$$\overline{S\tilde{P}'} : \overline{SA'} = \overline{SA'} : \overline{SP'}$$

oder $$\overline{S\tilde{P}'} \cdot \overline{SP'} = \overline{SA'}^2. \qquad (1)$$

Setzt man $\overline{SP'} = \rho$, $\overline{S\tilde{P}'} = \tilde{\rho}$ und $\overline{SA'} = a$, so nimmt Gleichung (1) die Form an

$$\rho \cdot \tilde{\rho} = a^2. \qquad (2)$$

Liegen zwei Punkte P' und $\tilde{P}'$ auf dem Durchmesser eines Kreises k'_a und ist dabei die Gleichung (2) erfüllt, so sagt man, P' und $\tilde{P}'$ liegen invers bezüglich des Kreises k'_a. Ist umgekehrt in π ein Punktepaar $\{Q', \tilde{Q}'\}$ gegeben, das invers bezüglich des Bildes des Äquatorkreises liegt, so sind deren Originale $\{Q, \tilde{Q}\}$ Spiegelpunkte bezüglich der Äquatorebene.

Planimetrisch kann die Spiegelung eines Punktes P an einem Kreis i (Inversionskreis) wie folgt konstruiert werden. Zunächst ist P mit dem Mittelpunkt M von i zu verbinden, da der zu P inverse Punkt auf dem Durchmesser von i durch P liegt. Ist P außerhalb i vorgegeben, sind die Tangenten t_1 und t_2 aus P an i zu legen. Die Verbindungsgerade $p = p(T_1 T_2)$ der Berührungspunkte T_1 und T_2 steht senkrecht auf dem Kreisdurchmesser und schneidet diesen in dem Punkt $\tilde{P}$. Setzt man in Analogie zur oben gewählten Bezeichnungsweise $\overline{MP} = \rho$, $\overline{M\tilde{P}} = \tilde{\rho}$ und $\overline{MT_1} = a$, so zeigt sich, daß nach dem Lehrsatz des Euklid (Im rechtwinkligen Dreieck ist das Produkt aus Hypotenuse und Kathetenprojektion gleich dem Quadrat über der zugehörigen Kathete) die Beziehung $\rho \cdot \tilde{\rho} = a^2$ erfüllt ist; d. h. P und $\tilde{P}$ liegen invers bezüglich i. Ist P innerhalb i vorgegeben, hat man die Konstruktion sinngemäß umzukehren. Spiegelt man $\tilde{P}$ an i, erhält man P. Die Kreisinversion ist eine involutorische Punktverwandtschaft. (Bild 8)

Aufgaben: Begründe die folgenden Aussagen über die Inversion an einem Kreis i durch Rückführung auf die stereographische Abbildung der Kugel κ:

▲5.1. Ein außerhalb des Inversionskreises i liegender Punkt geht bei der Inversion in einen innerhalb i liegenden Punkt über und umgekehrt.

▲5.2. Ein Durchmesser d von i geht bei der Inversion in sich über, wobei genau die Schnittpunkte von d mit i Fixpunkte der Geraden sind.

▲5.3. Ein Kreis k durch den Mittelpunkt M von i geht bei der Inversion in eine Gerade $\tilde{k}$ über. Schneiden sich k und i, so geht $\tilde{k}$ durch die Schnittpunkte von k und i. Berühren sich k und i, so ist $\tilde{k}$ Tangente an i im Berührungspunkt von k und i.

▲5.4. Eine den Inversionskreis i schneidende Gerade k geht in einen Kreis $\tilde{k}$ über. Dieser geht durch den Mittelpunkt M von i und die Schnittpunkte von k und i.

▲5.5. Ein Kreis k, der den Inversionskreis i senkrecht schneidet, geht bei der Inversion in sich über.

▲5.6. Ein Kreis k, der den Inversionskreis i in einem diametral gegenüberliegenden Punktepaar von i schneidet, geht bei der Inversion in das Spiegelbild von k bezüglich des durch die Schnittpunkte festgelegten Durchmessers von i über.

▲5.7. Der Durchmesser von i durch ein bezüglich i invers liegendes Punktepaar $\{P, \tilde{P}\}$ schneidet den Inversionskreis in den Punkten Q und R. Zeige, daß für das Doppelverhältnis Δ der vier Punkte P, $\tilde{P}$, Q und R gilt: $\Delta(P\ \tilde{P}\ Q\ R) = -1$.

Definition für das Doppelverhältnis Δ:

$$\Delta(P\tilde{P}QR) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} : \frac{\overline{\tilde{P}Q}}{\overline{\tilde{P}R}}. \qquad (3)$$

Bemerkung: In der Formel (3) sind die Längen der Strecken als vorzeichenbehaftete Größen zu verstehen. Vier auf einer Geraden liegende Punkte mit der hier vorausgesetzten Besonderheit bezüglich ihrer gegenseitigen Lage bezeichnet man als harmonisches Punktequadrupel.

E. Schröder

Bild 7

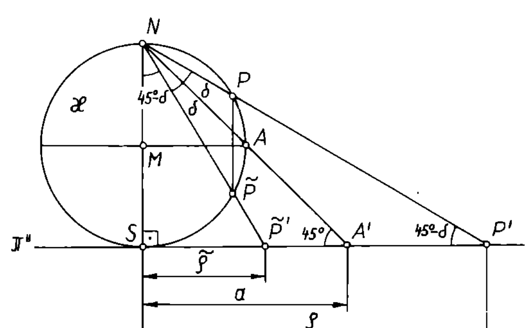


Bild 8

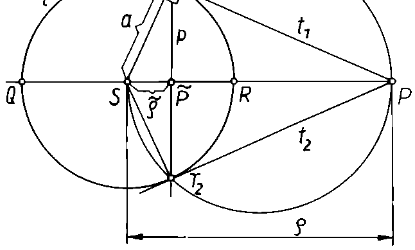
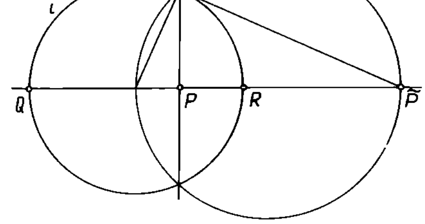


Bild 9



Noch ein Stück durch die Welt der Tetraeder*

In Fortsetzung unseres Streifzuges durch die Welt der Tetraeder** ist heute eine besondere Trainingsstrecke für unser räumliches Vorstellungsvermögen vorgesehen:

6. Die Höhen eines Tetraeders

Bekanntlich schneiden sich die Höhen eines beliebigen Dreiecks in einem Punkt. Von den Höhen eines regelmäßigen oder eines rechtwinkligen Tetraeders kann offenbar das gleiche gesagt werden. Dabei ist wie beim Dreieck so auch beim Tetraeder eine Höhe durch einen Eckpunkt und den Fußpunkt des Lotes aus diesem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seitenfläche definiert; je nach Zweck ist die durch diese beiden Punkte definierte Gerade, Strecke oder Länge dieser Strecke gemeint (vgl. Bemerkung in „Tetraeder I“, Seite 107, linke Spalte).

Nachdem sich die mit den rechtwinkligen Dreiecken verknüpften Sätze recht gut in entsprechende Aussagen für rechtwinklige Tetraeder übertragen ließen (vgl. „Tetraeder II“), dürfte das Schnittverhalten von Tetraederhöhen ein lohnender Untersuchungsgegenstand sein. Überraschenderweise ergibt sich zunächst aber der

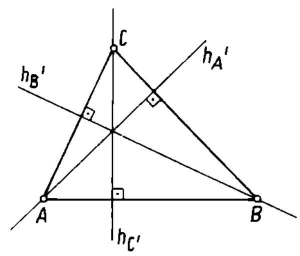
Satz 4: Es gibt Tetraeder, deren vier Höhen nicht durch einen Punkt gehen.

Beweis: Zum Beweis genügt die Angabe eines einzigen Beispiels: wir werden zeigen, wie man beliebig viele Tetraeder konstruieren kann, deren Höhen nicht durch einen Punkt gehen. Zu dem Zweck verwenden wir den schon in „Tetraeder II“ zitierten Sachverhalt aus der darstellenden Geometrie:

Ist s die Spur einer Ebene (die somit zur Bildebene nicht parallel ist) und n eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade, dann geht bei senkrechter Parallelprojektion die Gerade n in eine zu s senkrechte Gerade n' über.

Wir wählen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ als eine Seitenfläche des zu konstruierenden Tetraeders $ABCD$. Die Ebene des Dreiecks $\triangle ABC$ werde mit π_1 bezeichnet und sei unsere Zeichenebene. Wo nun auch immer der Punkt D im Raum gewählt wird (natürlich nicht in der Ebene π_1), die senkrechten

Bild 8



Projektionen h_A', h_B', h_C' der Tetraederhöhen h_A, h_B, h_C durch A, B und C auf π_1 bilden sich stets als die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ ab; Bild 8. Wir wählen nun den Punkt D solcherart, daß seine senkrechte Projektion D' auf π_1 nicht in den Höhenschnittpunkt H und auch auf keine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ fällt, und unterscheiden zwei Fälle:

a) D' ist Punkt einer der Höhen von $\triangle ABC$, etwa der Höhe h_B'; Bild 9a. Der Abstand des Punktes D von π_1 kann beliebig festgelegt werden. Dann schneiden sich sicher die Höhen h_B und h_D im Raum (es ist $h_D' = D'$), aber es gehen nicht alle vier Höhen des so konstruierten Tetraeders $ABCD$ durch einen Punkt.

Bild 9a

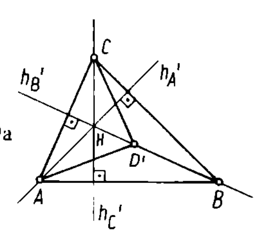
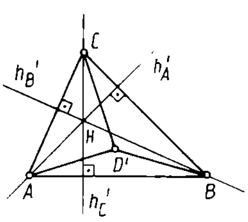


Bild 9b



b) D' ist kein Punkt irgendeiner Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$; Bild 9b. Der Abstand des Punktes D von π_1 kann beliebig festgelegt werden. Dann trifft die Höhe h_D keine andere Tetraederhöhe, so daß es auch in diesem Fall keinen gemeinsamen Punkt der Tetraederhöhen gibt.

▲9▲ Können weitere Beispiele als Beweis des Satzes 4 angegeben werden, wenn D' eine der ausgeschlossenen Lagen einnehmen darf?

▲10▲ Ermittle durch einen geeigneten Seitenriß die gegenseitige Lage der Höhen eines Tetraeders gemäß Bild 9b.

Mit der Erkenntnis, daß die Höhen eines Tetraeders im allgemeinen nicht durch einen Punkt gehen, ergibt sich die Frage, welche Lage die Tetraederhöhen zueinander haben können.

▲11▲ Notiere alle *denkbaren* Möglichkeiten für die Lagen der Höhen eines Tetraeders zueinander!

Licht in diese Angelegenheit wird im wesentlichen schon durch die folgende Aussage gebracht:

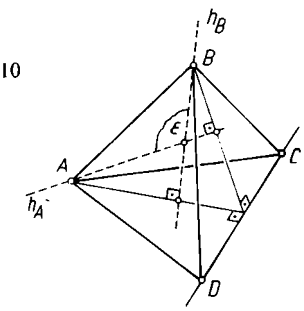
Satz 5: Es sei $ABCD$ ein Tetraeder.
Genau dann schneiden sich die Höhen h_A und h_B in einem Punkt, wenn die Kante AB zur Kante CD senkrecht steht.

Beweis: Er ist in zwei Schritten zu führen.

Behauptung 5.1.: Wenn sich die Höhen h_A und h_B in dem Punkt S schneiden, dann gilt $AB \perp CD$.

Beweis: Die Höhen h_A und h_B spannen eine Ebene ε auf (Bild 10).

Bild 10



Es steht ε senkrecht auf der Ebene BCD (denn ε enthält die Höhe h_A, die senkrecht zur Ebene BCD steht) und auch senkrecht auf der Ebene ACD (denn ε enthält die Höhe h_B, die senkrecht zu ACD steht). Infolgedessen schneiden sich die Ebenen BCD und ACD in einer zu ε senkrechten Geraden s. Diese Gerade s enthält aber die Kante CD, so daß in der Tat $AB \perp CD$ gilt (denn die Kante AB liegt in ε), w. z. b. w.

Behauptung 5.2.: Stehen die Kanten AB und CD senkrecht zueinander, dann schneiden sich die Höhen h_A und h_B in einem Punkt.

Beweis: Aus der Voraussetzung $AB \perp CD$ folgt, daß es eine Ebene ε durch die Gerade AB gibt, die zu CD senkrecht steht, und zwar genau eine. Infolgedessen steht ε auf der

* Während des VI. Zentralen Ferienlehrgangs Junger Mathematiker in Güstrow am 10. 5. 1973 vorgetragen.

** Teile 1 und 2, im Folgenden als „Tetraeder I“ und „Tetraeder II“ zitiert, siehe diese Zeitschrift: Durch die Welt der Tetraeder. 5 (1971), H. 5, S. 106 bis 107; Weiter durch die Welt der Tetraeder, 3 (1974), H. 2, S. 36.

Ebene ACD senkrecht und enthält daher die Höhe h_B, und ε steht senkrecht auf der Ebene BCD und enthält daher die Höhe h_A. Somit schneiden sich die in der Ebene ε gelegenen Höhen h_A und h_B in einem Punkt, w. z. b. w. (Warum können h_A und h_B nicht parallel zueinander sein?)

Die notwendige und hinreichende Bedingung des Satzes 5 für das Schneiden der Höhen h_A und h_B verknüpft die gleichberechtigten Geraden AB und CD durch eine symmetrische Relation miteinander:

$AB\perp CD$. Daher ist sie zugleich auch genaue Bedingung dafür, daß sich h_C und h_D schneiden; kurzschriftlich kann man dies so notieren:

$(h_A\cap h_B \neq \emptyset)\leftrightarrow(AB\perp CD)\leftrightarrow(CD\perp AB)$
$\leftrightarrow(h_C\cap h_D \neq \emptyset)$.

Somit haben wir eine

Folgerung 1 aus Satz 5: Schneiden sich zwei der vier Höhen eines Tetraeders, so auch die beiden übrigen Höhen.

Damit können wir sofort schließen:

Folgerung 2 aus Satz 5: Gehen drei der vier Höhen durch einen Punkt, so geht auch die vierte Höhe durch diesen Punkt. Demnach haben die vier Höhen eines Tetraeders genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn alle drei Paare gegenüberliegender Kanten auf senkrecht zueinander stehenden Geraden liegen.

Diese Aussage ist gleichwertig mit der

Folgerung 2' aus Satz 5: Gilt von zwei der drei Paare windschiefer Kanten eines Tetraeders, daß sie auf senkrecht zueinander stehenden Geraden liegen, dann gilt dies auch für das dritte Paar; kurzschriftlich:

$((AB\perp CD)\wedge(AC\perp BD))\rightarrow(AD\perp BC)$.

Endlich ist noch zu notieren als

Folgerung 3 aus Satz 5: Besitzt ein Tetraeder kein Paar sich schneidender Höhen, gibt es also kein Paar senkrecht zueinander stehender Gegenkanten, dann liegen die Höhen paarweise windschief zueinander.

Zusammenfassend erkennen wir damit die Gültigkeit von

Satz 6: Die Höhen eines Tetraeders haben folgende Lagemöglichkeiten:

1. Keine zwei Höhen treffen sich, sie liegen alle paarweise windschief zueinander. (Keine zwei zueinander windschiefe Tetraederkanten stehen senkrecht zueinander.)
2. Keine drei Höhen treffen sich, aber zwei Höhen gehen durch einen Punkt. Dann treffen sich auch die beiden übrigen Höhen **in einem (notwendig von jenem** verschiedenen) Punkt. (Genau zwei zueinander windschiefe Kanten stehen senkrecht zueinander.)
3. Drei Höhen gehen durch einen Punkt, dann treffen sich alle Höhen in diesem Punkt. (Irgend zwei zueinander windschiefe Kanten stehen senkrecht zueinander.)

Nach der Ermittlung dieser Möglichkeiten, für deren jede eine notwendige und hinreichende Bedingung (in Klammern) angegeben werden konnte, bleibt noch die Frage zu klären, ob es auch wirklich zu jedem Fall Tetraeder gibt, deren Höhen das angeführte Schnittverhalten zeigen! (Existenzsatz). Aus Bild 9b (Bewältigung der Aufgabe 10) resultieren Beispiele zur Lagemöglichkeit 1, aus Bild 9a Beispiele zur Lagemöglichkeit 2, und Lagemöglichkeit 3 wird bei regelmäßigen, bei rechtwinkligen und bei weiteren Tetraedern, die der angegebenen Kantenbedingung genügen, realisiert.

Es mag bedauerlich erscheinen, daß sich die Höhen eines Tetraeders nicht so einfach verhalten wie die Höhen eines Dreiecks. Und doch gibt es eine besondere Eigenheit der Höhen eines jeden Tetraeders, die der Eigenschaft der Höhen eines Dreiecks, nämlich einen gemeinsamen Punkt zu besitzen, an die Seite gestellt werden kann. Gilt in der Ebene der

Satz: Liegt ein Punkt auf zwei
der drei Höhen eines Dreiecks, so liegt
er auch auf der dritten Höhe, so gilt im Raum der bemerkenswerte und durchaus tiefliegende

Satz: Trifft eine Gerade drei
der vier Höhen eines Tetraeders, dann trifft sie auch die vierte Höhe.

Dieser Satz ist bei den Lagemöglichkeiten 2 und 3 sehr schnell zu beweisen bzw. trivial. Aber bei der Lagemöglichkeit 1? Damit habt ihr zum Schluß ein schwieriges **Problem** vorgelegt bekommen!

G. Geise

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Gustav Burosch

Sektion Mathematik der Universität Rostock

▲1233▲ Jedes Produkt einer gewissen Erzeugnisgruppe wird bezüglich n fixierten Parametern mit dem Prädikat „gut" (Wert 1) oder „schlecht" (Wert 0) ausgezeichnet und daher bezüglich seines Qualitätsverhaltens durch ein n-Tupel $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i\in\{0, 1\}$ charakterisiert. Jedem derartigen n-Tupel wird im Sinne einer qualitativen Gesamtcharakterisierung eines Erzeugnisses das Prädikat „gut" (Wert 1) oder „schlecht" (Wert 0) zugeordnet. Dabei erscheinen folgende Bedingungen an diese Zuordnung als sinnvoll.

1. Wenn ein Erzeugnis E_1 bezüglich aller n Einzelparameter nicht schlechter abschneidet als ein Erzeugnis E_2, so darf E_1 auch nicht mit einem schlechteren Gesamtprädikat als E_2 bewertet werden.

2. Wenn ein Erzeugnis E_1 bezüglich aller n Einzelparameter entgegengesetzt wie das Erzeugnis E_2 bewertet wird, so muß auch das Gesamtprädikat für E_1 entgegengesetzt zu dem für E_2 sein. Interpretationen ähnlicher Art führen zur Betrachtung folgender Abbildungen (Funktionen).

Sei E_n die Menge $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \alpha_i\in\{0, 1\}$.
Mit $\bar{\alpha}_i=0$ (bzw. 1) falls $\alpha_i=1$ (bzw. 0) ist, sei für $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in E_n$ $\bar{\underline{\alpha}}$ das n-Tupel $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$. Für $0<1$ bedeute für zwei n-Tupel $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\underline{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ aus E_n $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$, daß $\alpha_i\leqq\beta_i$ für $i=1, \ldots, n$ gilt.

Problem: Wie groß ist für $n=2, 3, 4, 5$ die Anzahl der voneinander verschiedenen eindeutigen Abbildungen von E_n in die Menge $\{0, 1\}$, die folgenden Bedingungen genügen:

1. Für alle $\underline{\alpha}\in E_n$ gilt $f(\bar{\underline{\alpha}})=\overline{f(\underline{\alpha})}$,
2. für alle $\underline{\alpha}, \underline{\beta}\in E_n$ mit $\underline{\alpha}\leqq\underline{\beta}$ gilt $f(\underline{\alpha})\leqq f(\underline{\beta})$?

Kurzbiographie

Prof. Dr. G. Burosch, geb. 1938 in Rostock; Vater: Bauhilfsarbeiter, Mutter: Buchhalterin; Besuch der Oberschule; Abitur 1956 „Mit Auszeichnung bestanden"; Mathematikstudium 1956 bis 1961 (Karl-Marx-Stipendium); während des Studiums: zwei Monate Besuch der Universität Debrecen; 1961 bis 1974 Tätigkeit an der Sektion Mathematik der Universität Rostock, seit 1971 ord. Professor; 1962 bis 1964 Zusatzstudium an der Moskauer Lomonossow-Universität; 1968 kurze Studienaufenthalte in der Republik Österreich und der SR Rumänien; 1970 ein halbes Jahr Gastprofessur in der Republik Finnland; 1973 ein halbes Jahr Gastprofessur an der Akademie der Wissenschaften der UdSSR; Fachgebiet: Algebra und Geometrie.

Mathematik in der Gesellschaftsprognostik

Teil 2

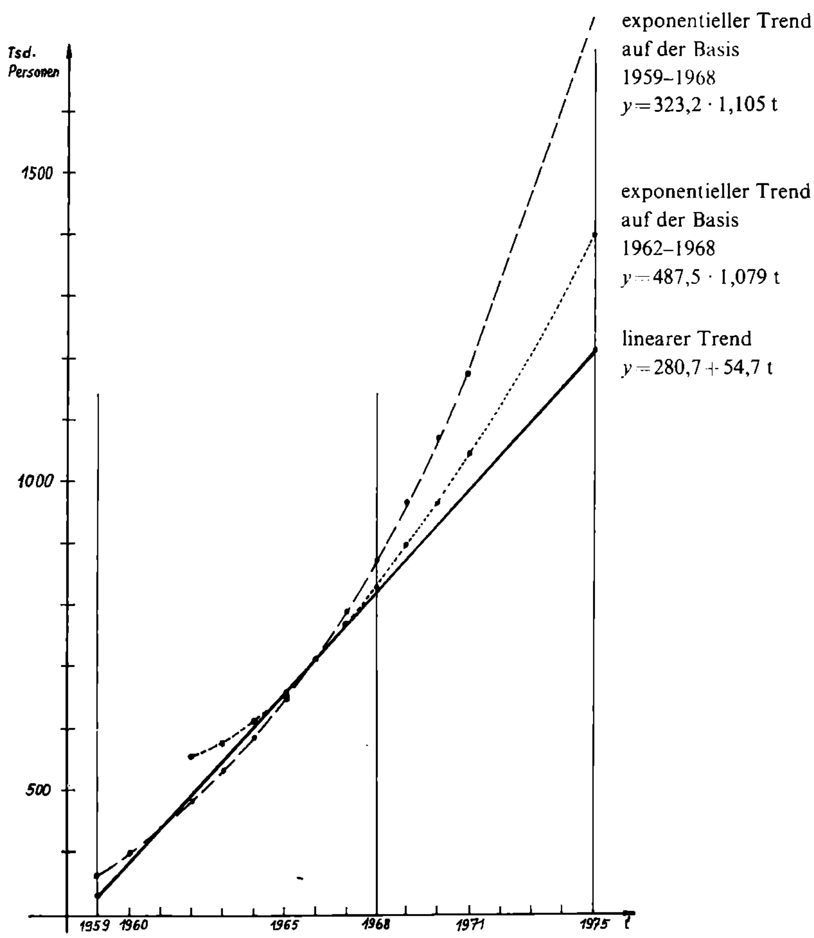
Es ist bereits ein ganzes Arsenal von Funktionstypen bei der mathematischen Behandlung von Zeitreihen erprobt worden, die sich hinsichtlich ihres Wachstumsverhaltens unterscheiden. Beispiele für derartige Standardtypen sind neben der Geraden und der Parabel die Exponentialfunktionen, Funktionen vom Typ der logistischen Funktion, die Gompertz-Funktion, die Törnquist-Funktion, die ökologische Funktion und andere mehr.

Die Bestimmungsgleichungen für log a und log b lauten dann analog zu (1):

$$\sum_{i=1}^{n} \log x_i - n \cdot \log a - \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big) \log b = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \log x_i - \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big) \log a - \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\Big) \log b = 0$$

Es wurden zwei Näherungsfunktionen berechnet, eine auf der Grundlage des Zeitraumes 1959–1968, eine zweite für den Zeitraum 1962–1968.



Die graphische Darstellung unserer Zeitreihe legt nahe zu versuchen, die Zeitreihenwerte durch eine Exponentialfunktion $y = ab^t$ anzunähern. Wenn wir die Funktionsgleichung logarithmieren, erhalten wir wie oben ein lineares Problem,

$$\log y = \log a + t \cdot \log b.$$

Wir erhalten

1959–1968: $y = 323{,}2 \cdot 1{,}105^t$ (2)

1962–1968: $y = 487{,}5 \cdot 1{,}079^t$ (3)

Die graphische Darstellung zeigt, daß die Zeitreihenwerte 1959–1961 die Berechnungsergebnisse so verzerren, daß die erste Näherungsfunktion bereits für 1968 nur eine wenig befriedigende Näherung darstellt. Die Näherungsfunktion auf der Basis 1962–1968 nähert die Basiswerte außerordentlich gut an, besser als die Gerade.

Wir berechnen die Prognosewerte für 1971 und 1975:

(2): $y_{1971} = 1177 \quad y_{1975} = 1753$

(3): $y_{1971} = 1040 \quad y_{1975} = 1395$

Die eben dargestellten Berechnungsmethoden kann jeder selbst leicht anwenden. Man nehme sich ein Statistisches Jahrbuch, wähle eine Zeitreihe aus und berechne die beste Näherung für unterschiedliche Funktionstypen.

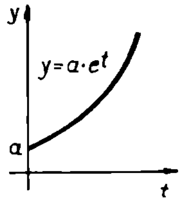
Die mathematische Theorie der Auswertung von Zeitreihen wurde ständig weiterentwickelt. Der meines Erachtens wichtigste Schritt bei der Erweiterung der mathematischen Problemstellung war die Einführung wahrscheinlichkeitstheoretischer und statistischer Betrachtungsweisen bei der Behandlung von Zeitreihen. Gesellschaftlichen Prozessen liegen gesellschaftliche Gesetzmäßigkeiten zugrunde, die die Grundrichtung dieser Prozesse, aber nicht ihren Verlauf im einzelnen bestimmen. So ist auch jeder einzelne Wert unserer Zeitreihe mit vielen Zufällen behaftet, z. B. der Gründung neuer Institute und Ausbildungsstätten, der Höhe der möglichen materiellen Aufwendungen im konkreten Zeitraum für die Ausbildung und den Einsatz neuer Kader, der raschen Entwick-

Wertetabelle der verwendeten Näherungsfunktionen

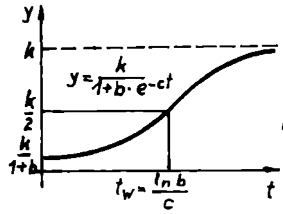
$y_1 = 323{,}2 \cdot 1{,}105^t$

$y_2 = 487{,}5 \cdot 1{,}079^t$

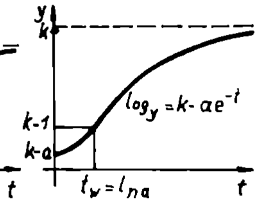
Jahr	t_1	y_1	y_2	t_2
1959	1	357,0	—	—
1960	2	394,1	—	—
1961	3	435,5	—	—
1962	4	481,0	526	1
1963	5	531,4	567	2
1964	6	587,0	612	3
1965	7	648,5	660	4
1966	8	716,0	712	5
1967	9	791,0	768	6
1968	10	874,0	828,5	7
1969	11	965,0	894	8
1970	12	1066,0	964	9
1971	13	1177,0	1040	10
1975	17	1753,0	1395	14



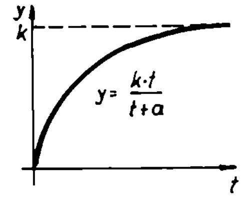
Exponentialfunktion



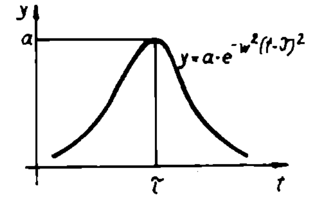
Logistische Funktion



Gompertzfunktion



1. Törnquistfunktion



Ökologische Funktion

lung neuer Wissenschaftsdisziplinen, dem Grad der Automatisierung der materiellen Produktion und vielem anderen mehr. Im einzelnen Institut, das nicht auf Hauptentwicklungsgebieten der Wissenschaften arbeitet, kann die Mitarbeiterzahl sogar rückläufig sein. Diesen Zufallscharakter und die Abhängigkeit der zu prognostizierenden Entwicklungsprozesse von bestimmten Ursachekomplexen versucht die Regressions- und Korrelationsanalyse zu erfassen. Dabei werden die Zeitreihenwerte als zufällige Stichprobe aus einer größeren Gesamtheit aufgefaßt. Die durchschnittlichen Werte derartiger zufälliger Wertverteilungen werden wieder mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch mathematische Funktionen abgeschätzt. Mit Hilfe von aus der mathematischen Statistik entlehnten Schätzverfahren werden die Fehler um die Regressionsfunktion abgeschätzt. Man erhält Aussagen derart, daß die prognostizierte Größe mit einer gewissen Sicherheit in einem bestimmten Intervall liegt.

Die Analyse und Prognose der Anzahl der wissenschaftlichen Kader wurde in der UdSSR mit Hilfe der Regressionsanalyse durchgeführt. Es wurden die Koeffizienten einer linearen und einer exponentiellen Schätzfunktion berechnet. In der veröffentlichten Untersuchung heißt es zu den Ergebnissen: „Im Falle der linearen Prognose mit der Basis 1959–1968 kann behauptet werden, daß die Zahl der wissenschaftlichen Kader mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in den Grenzen

1969: 881,3 ± 39,6
1970: 936,1 ± 42,1

und für die exponentielle Prognose auf der Basis 1962–1968 in den Grenzen

1969: 888,9 ± 13,9
1970: 968,2 ± 15,3

liegen wird. Bei Gegenüberstellung mit den realen Werten sehen wir, daß die lineare Entwicklungstendenz bis 1970 anhält, während das exponentielle Wachstum, das seit 1962 mit sehr geringen Abweichungen beobachtet wurde, 1969 beendet wurde."

Eine weitere Koeffizientenverbesserung, die den zeitlich letzten Werten der Zeitreihe ein größeres Gewicht beimißt, führte zu einer Korrektur der linearen Extrapolation. Der korrigierte Wert für 1970 wurde mit 922,8 bestimmt, womit der reale Wert nur um 0,5% verfehlt wurde.

Dieses Beispiel zeigt, in welcher Art und Weise bestimmte mathematische Theorien für die Bestimmung quantitativer Beziehungen gesellschaftlicher Prozesse herangezogen werden können. Es gibt eine Reihe guter Erfahrungen und Beispiele für die Nutzung von Extrapolationsmethoden in der Prognostik. Für viele kurz- und mittelfristige Prognosen liefert das hier vorgestellte Instrumentarium gute Ergebnisse. So ist auch die von H. Frühauf im Jahre 1957 durchgeführte Analyse und Prognose wissenschaftlich-technischer Daten der historischen Entwicklung der in der Nachrichtentechnik benutzten Wellenbereiche ein solches gutes Beispiel. Er sagte für 1965–1970 „die Ausnutzung des Bereiches kontinuierlich und gebündelt schwingender Lichtwellen mittels elektronischer Mittel sowie ihre Reproduktion und Verstärkung" voraus. Diese Prognosen sowie seine Vorstellungen über die wissenschaftlich-technischen Mittel des Eindringens in das erwähnte Gebiet wurden in der Folge ziemlich gut durch die Praxis der Entwicklung von optischen Quantengeneratoren (Laser) bestätigt.

Es gibt aber weit mehr schlechte Beispiele, Beispiele der formalen Anwendung dieser Methoden. So konnte man vor einigen Jahren in der Prognose der volkswirtschaftlichen Entwicklung eines Bezirkes der DDR Teilprognosen der Entwicklung des Getränkekonsums finden. Die Brauereien extrapolierten den Bierverbrauch, die Molkereien den Milchkonsum, es wurde extrapoliert, wie sich der Brause- und Seltersverbrauch entwickeln wird usw., jeder extrapolierte unabhängig von den anderen. Zusammengefaßt und auf den einzelnen Einwohner aufgeschlüsselt ergaben diese Prognosen für das Ende des Prognosezeitraumes eine täglich zu konsumierende Getränkemenge, an der nicht mehr viel zum täglichen Bad fehlte. Nun gut, ein solches Beispiel erheitert, auf volkswirtschaftlich bedeutsameren Gebieten können derartige Fehlvoraussagen aber sehr schwerwiegende Konsequenzen nach sich ziehen.

Wir konstatieren, es gibt also gute und schlechte Beispiele der Nutzung von Extrapolationsmethoden. Der mathematische Ansatz läßt sich nicht mit gut oder schlecht bewerten, und daß schlechte Beispiele auf Rechenfehler zurückgeführt werden könnten, muß ebenfalls ausgeschlossen werden. Wir sind mit unserer Frage wieder an den Ausgangspunkt, zur Frage nach dem Verhältnis von Gesellschaftsprognostik und Mathematik zurückgekehrt. Gut oder schlecht, das wird entschieden, je nachdem, wie sich die auf den untersuchten gesellschaftlichen Prozeß übertragenen Ergebnisse der mathematischen Berechnungen bewähren. Jede der beiden von uns durchgeführten Prognoserechnungen, die lineare und die exponentielle, sind mathematisch richtig, keine kann der anderen vorgezogen werden. Erst im Vergleich mit dem realen Entwicklungsprozeß zeigt sich, daß die lineare Prognose den Gesetzmäßigkeiten der dem Basiszeitraum nachfolgenden Jahre besser entspricht.

Im Verlauf und bei der Vorbereitung unserer Berechnungen waren Entscheidungen und Bewertungen zu treffen, die die Art und Weise der Nutzung des mathematischen Instrumentariums betrafen, die aber nicht aus der mathematischen Struktur der Zeitreihe selbst ableitbar waren. Wir wollen einige nennen. Der Mathematiker nimmt die Zeitreihe als gegeben an. Ob die aufgeführten Daten vergleichbar sind (wir haben einen Teil unserer Daten korrigieren müssen), das ist nicht aus den Daten selbst ablesbar und erfordert zusätzliche Untersuchungen. Eine zweite Frage; kann man nicht aus der Art und Weise der Annäherung der Basisdaten entscheiden, welche der verwendeten Funktionen die für die Extrapolation geeignetste ist. Die Näherungen im Basiszeitraum unterscheiden sich oft nur geringfügig und klaffen wie in unserem Beispiel erst bei der Extrapolation weit auseinander. Das einzig denkbare mathematische Kriterium, die möglichst gute Anpassung der Basisdaten, führt in unserem Beispiel sogar in die Irre. Es muß das Wachstumsverhalten in seiner Grundtendenz geklärt sein, um die Entscheidung über eine geeignete Auswahl der Näherungsfunktion treffen zu können, und das ist eine gesellschaftswissenschaftliche Fragestellung.

Wir können unseren Exkurs über die Nutzung von Extrapolationsmethoden in der Gesellschaftsprognostik mit der Feststellung schließen, daß die Nutzung mathematischer Methoden der weiteren Entwicklung dieser Wissenschaft dient, daß aber die Anwendung mathematischer Methoden nur bei einer engen Verknüpfung von inhaltlichen, qualitativen Aussagen mit der Nutzung des mathematischen Instrumentariums effektiv werden kann.

B. Noack

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 13. Oktober 1974

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden ab 13. Oktober 1974 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

1. Ermittle die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, von denen folgendes bekannt ist:
(1) a ist die Hälfte von b.
(2) b ist die Summe von c und d.
(3) c ist die Differenz von d und e.
(4) d ist das Dreifache von e.
(5) e ist der vierte Teil von 56.

2. Ein Quader von der Länge $a = 1{,}50$ m, der Breite b und der Höhe c hat eine Grundfläche von $12\,600\ \text{cm}^2$ und ein Volumen von $1323\ \text{dm}^3$.
Ermittle b und c (in Zentimetern)!

3. Die Schüler Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja beteiligten sich an der Kreisolympiade *Junger Mathematiker*. Dabei erzielte Bernd mehr Punkte als Erich. Lutz bekam zwar mehr Punkte als Dora, aber weniger als Erich. Nina erhielt eine kleinere Punktzahl als Dora. Manjas Punktzahl war größer als die Punktzahl Bernds.
Ermittle die Reihenfolge der Punktzahlen der genannten Schüler; schreibe sie mit der größten beginnend auf!

4. Einige Schüler einer Klasse 5 trugen ein Schachturnier aus. Jeder Teilnehmer spielte gegen jeden anderen genau zwei Partien. Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an diesem Turnier!

Olympiadeklasse 6

1. In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, daß die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

Beweise, daß es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

2. Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft *Junger Mathematiker*, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen. Bernd meint, daß bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten. Monika entgegnet nach einigem Überlegen, daß das nicht stimmen könne.
Wer von den beiden hat recht?

3. Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.
a) Um wieviel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?
b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

4. Jemand schreibt 3*6*5 und möchte dann die Sternchen * so durch Ziffern ersetzen, daß eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.
Ermittle alle fünfstelligen durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

Olympiadeklasse 7

1. Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, daß nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR in Betracht kommen.

2. Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, daß seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt. Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, daß eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.
Ermittle, um wieviel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muß!

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3{,}2$ cm, $a = 5{,}6$ cm und $h_a = 4{,}4$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

4. Beweise folgende Sätze:
a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.
b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms, d. h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & DE & = & AFG \\ : & & - & & - \\ H & \cdot & HA & = & CH \\ \hline BJ & + & AJ & = & AAC \end{array}$$

(*Hinweis:* Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.)

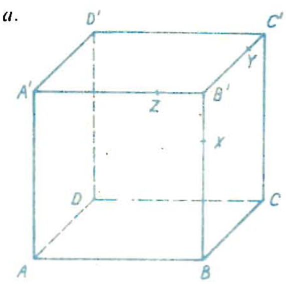
2. Ermittle alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen x, y, für die die Gleichung $13x + 5y = 82$ gilt!

3. Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, daß die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.
Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

4. Für zwei Sehnen AB und BC ($A \neq C$) eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt, wie B.
Es ist zu beweisen, daß die Gerade durch D und B den Winkel $\sphericalangle ADC$ halbiert!

Olympiadeklasse 9

1. Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und der Kantenlänge a.



Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.
Wir betrachten dann für jede solche Wahl X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.
a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!
b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!
c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge! (Bild 9/1)

2. Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.
Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

3. An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:
(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.
(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.
(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.
Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

4. Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor: Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen, (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert. Ist die so entstandene Zahl kleiner als drei, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt, in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln durchdacht hat, sagt sie zu Axel, daß dieses Spiel keinen Zweck hätte.
Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, daß er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, daß keiner vom anderen eine Marke nehmen würde.
Ist diese Meinung Bettinas richtig?

Olympiadeklasse 10

1. Jemand wählt eine natürliche Zahl n; addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1 + 2 + \ldots + n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z. B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.
Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft.

2. Ein VEB hat für das Jahr 1975 die Produktion von 10000 Stück seines Haupterzeugnisses vorgesehen. Weiterhin ist geplant, die für die Jahre 1976, 1977, 1978, 1979 vorgesehenen Produktionszahlen so zu steigern, daß die für 1979 vorgesehene Zahl den vierfachen Wert der Zahl für 1975 erreicht. Dabei soll die prozentuale Steigerung von Jahr zu Jahr alle vier Male gleich sein.
a) Wieviel Prozent beträgt bei gerundeter Rechnung, d. h. ohne Berücksichtigung der Stellen nach dem Komma, dieser jährliche Zuwachs?
b) Geben Sie die (entsprechend gerundeten) Produktionsziffern für die Jahre 1976, 1977, 1978 und 1979 an!

3. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ und $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ gegeben.
a) Beweisen Sie, daß es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) so anzugeben, daß für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.
(2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.
b) Beweisen Sie, daß es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1), (2) gibt!

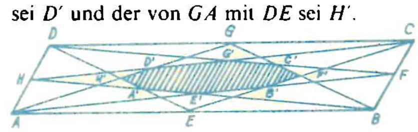
4. In einem konvexen n-Eck $A_1A_2 \ldots A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120 haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, ..., A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also 125°, 130, ... betragen.
Man zeige, daß für $n \neq 9$ ein solches n-Eck nicht existieren kann.

Olympiadeklasse 11/12

1. Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, daß keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z. B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)
a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahlen der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.
b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

2. Man beweise: Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

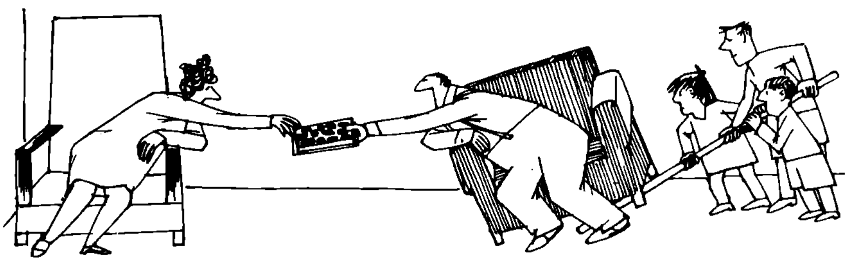
3. In einem beliebigen Parallelogramm $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA. Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A', der von HB mit AF sei E', der von AF mit EC sei B', der von EC mit GB sei F', der von GB mit FD sei C', der von FD mit CH sei G', der von CH mit GA sei D' und der von GA mit DE sei H'.



Man beweise, daß der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.

4. Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem
$xy^2z^3 = a$ (1) $x^2y^3z = b$ (2) $x^3yz^2 = c$ (3)
1) keine, 2) genau eine, 3) genau zwei, 4) mehr als zwei, jedoch endlich viele, 5) unendlich viele
reelle Lösungen (x, y, z) hat.
Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

alpha-Wettbewerb Physik



Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1974

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet Ihr genau wie im Vorjahr Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden (Richtlinie: Schuljahr 73/74). Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit P 10/12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Name des Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1973/74 unterrichtete. Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiiert. Die Namen der aktivsten Teilnehmer werden veröffentlicht. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1974/75 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an:

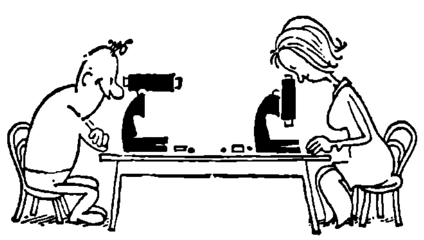
Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14
Kennwort auf Briefumschlag:
Physik-Wettbewerb 1974

P6 ■ 1234 Das Gewicht einer Metallkugel dehnt eine Schraubenfeder um 13,5 cm. Hängt man an die gleiche Feder ein mit Wasser gefülltes Überlaufgefäß, dann beträgt die Längenänderung 12,5 cm. Legt man die Kugel in das Wasser und hängt das Überlaufgefäß an die Feder, nachdem das verdrängte Wasser abgeflossen ist, dann wird die Feder um 21 cm gedehnt. Aus welchem Stoff könnte die Kugel bestehen?

P6 ■ 1235 Ein Kraftfahrer durchfährt den ersten Teil, $\overline{AC}$, einer Strecke $\overline{AB}$ mit der Geschwindigkeit $v_1 = 50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, den zweiten Teil, $\overline{CB}$, mit $v_2 = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die gesamte Fahrzeit beträgt 3 Stunden. Das Ziel könnte in der gleichen Zeit erreicht werden, wenn die ganze Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_3 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren würde. Wie lang sind die Teilstrecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$?

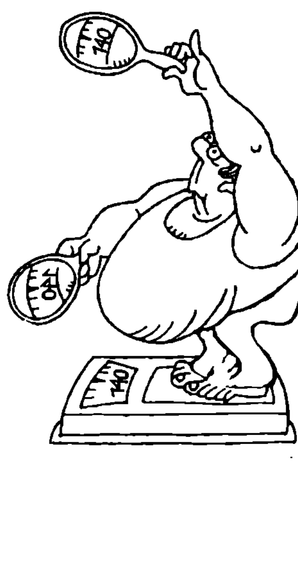
P7 ■ 1236 Wie dick müssen die Wände eines stählernen Hohlzylinders mit der äußeren Länge 50 cm und dem Durchmesser 20 cm sein, damit er in Wasser schwebt? Welche Arbeit muß verrichtet werden, um den Zylinder aufrecht vollständig aus dem Wasser zu heben? (Das Volumen des Stahls läßt sich näherungsweise aus der Zylinderoberfläche und der Wanddicke berechnen.)

P7 ■ 1237 Durch ein Kellerfenster sollen Kohlen in einen Keller geschüttet werden. Die Fensteröffnung verläuft schräg nach unten durch die dicke Mauer und ist 1,5 m lang. Wie groß muß die Höhe dieser geneigten Ebene mindestens sein, damit die Kohlen rutschen? ($\mu = 0{,}5$)

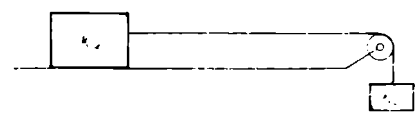


P8 ■ 1238 Das Gewicht eines an eine Feder gehängten Körpers dehnt diese um 2 cm. Taucht man den Körper in Wasser, dann beträgt die Dehnung nur noch 1,2 cm. Wie groß ist die Wichte des Stoffes, aus dem der Körper besteht?

P8 ■ 1239 Zwei Wassermengen mit den Temperaturen $\vartheta_1 = 20\,°\text{C}$ und $\vartheta_2 = 80\,°\text{C}$ haben die zugehörigen Rauminhalte $V_1 = 200\ \text{cm}^3$ und $V_2 = 300\ \text{cm}^3$. Wie groß ist das Gesamtvolumen nach dem Mischen, wenn keine Wärme nach außen abgegeben wird?



P9 ■ Ein Körper K_1 mit dem Gewicht $G = 100$ N befindet sich auf einer waagerechten Fläche. Er ist über eine Rolle mit einem zweiten Körper K_2 verbunden, dessen Masse 20 g beträgt.



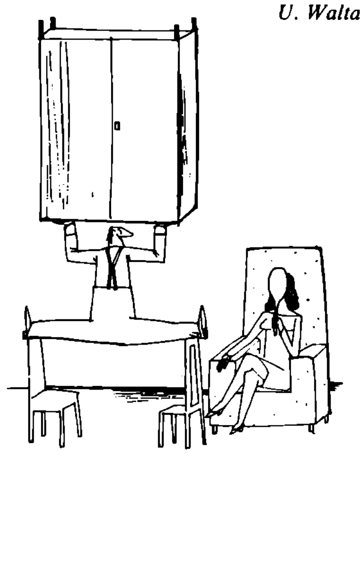
Das System wird zunächst in Ruhe gehalten. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Körper zwei Sekunden nach dem Loslassen
a) ohne Reibung?
b) bei Berücksichtigung der Reibung zwischen dem Körper K_1 und der Platte? ($\mu = 0{,}1$)

P9 ■ 1241 Die Kanten eines Würfels bestehen aus Draht mit einem Widerstand von je 1 Ohm. Wie groß ist der Widerstand zwischen zwei gegenüberliegenden Ecken des Würfels?

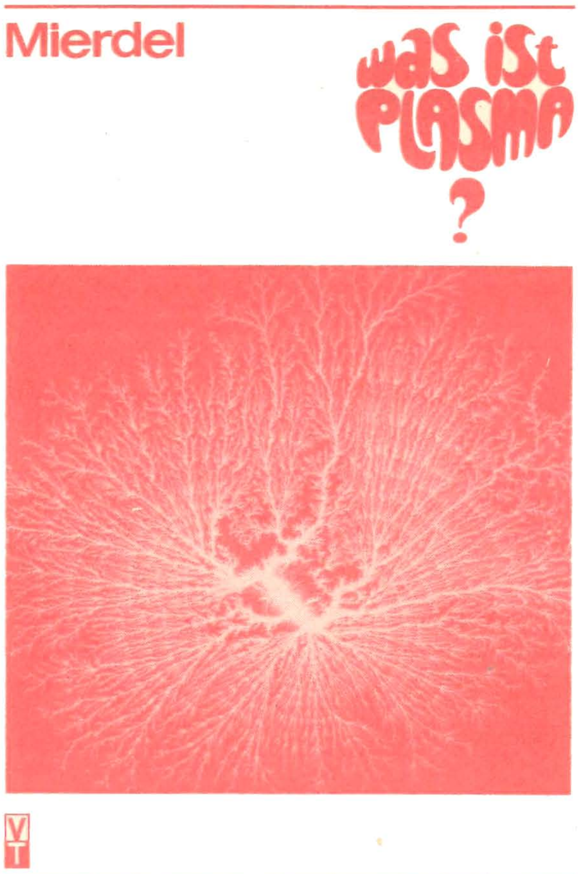
P10/12 ■ 1242 Wie weit läßt sich eine Schraubenfeder der Länge 18 cm bei einer Spannarbeit von 2 Nm auseinanderziehen, wenn beim Anhängen eines Körpers der Masse $m = 0{,}1$ kg die Schwingungszeit $T = 0{,}1$ s beträgt?

P10/12 ■ 1243 Ein Widerstand von 10 Ω wird mit einem zweiten zuerst in Reihe dann parallel an die gleiche Spannungsquelle geschaltet. Die Leistung wächst beim Umschalten auf das Achtfache.
a) Wie groß ist der zweite Widerstand?
b) Auf das Wievielfache wächst die Leistung mindestens, wenn man zwei vorher in Reihe geschaltete Widerstände parallel schaltet?

U. Walta



Unser Buchtip



152 Seiten, Leineneinband, zahlreiche farbige Abb. und graphische Darstellungen
Preis 9,50 M
VEB Verlag Technik Berlin

Aus dem Physikunterricht ist uns bekannt, daß alle uns umgebenden Stoffe in die drei bekannten Aggregatzustände eingeteilt werden.
Seit knapp zwei Jahrzehnten aber kennt die moderne Physik einen vierten Aggregatzustand, den sie auf Grund seines eigentümlichen Verhaltens als *Plasma* bezeichnet. Das *Plasma* begründet sogar einen selbständigen Zweig innerhalb der Physik.
Schon im Altertum war man der Auffassung gewesen, daß die Welt aus den vier Elementen Erde, Wasser, Luft und Feuer besteht. Heute, da die Menschheit das kosmische Zeitalter zu betreten begonnen hat, können wir sagen, den ersten der drei genannten „Elemente" entsprechen der feste, flüssige und gasförmige Zustand der Stoffe, und dem vierten, dem Feuer, entspricht das im kosmischen Raum vorherrschende *Plasma*.
Der Verfasser des Buches führt den Leser in zahlreichen bildhaften Darstellungen aus dem täglichen Leben bis zu den komplizierten Vorgängen im ionisierten Gas.
Ehe man jedoch das Plasma technisch nutzen kann, müssen die Gesetzmäßigkeiten seiner Natur erklärt sein. Deshalb muß sich der Leser zuerst mit den theoretischen Grundlagen auseinandersetzen. Erst dann kann er die Anwendungsgebiete wie Lichttechnik, Schweißen und Schneiden, Schmelzen, Umformen und Steuern elektrischer Leistungen, Energieerzeugung, populär dargestellt, kennenlernen.
Die exakte Beweisführung erfolgt mit Hilfe der Mathematik. Wie bedeutungsvoll für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt die theoretischen und praktischen Arbeiten mit dem *Plasma* sind, beweist allein schon die Tatsache, daß sich um die Beherrschung und Nutzbarmachung der thermonuklearen Reaktion im MHD-Generator (besonders in der Sowjetunion) Physiker, Chemiker, Energetiker, Ingenieure und Mathematiker gemeinsam bemühen.

Prof. Dr. phil. habil. *Georg Mierdel*, 1899 in Rathenow geboren, beschäftigte sich zeit seines Lebens mit Theorie und Praxis der Elektrotechnik, mit der Atomtheorie, Hochvakuumtechnik und Plasmaphysik.

In den fünfziger Jahren war er als Stellv. Direktor des Instituts für Gasentladung der DAW in Greifswald und zuletzt als Professor mit Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Dresden tätig.
Für sein wissenschaftliches Gesamtwerk, das auch außerhalb der Grenzen der Deutschen Demokratischen Republik bekannt ist, und für sein verdienstvolles Wirken als Hochschullehrer wurde Prof. Dr. Mierdel mit dem Nationalpreis sowie mit dem Vaterländischen Verdienstorden geehrt.

alpha-Wettbewerb 1973/74

Nachtrag

Folgende Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs erhielten das

Abzeichen in Gold

für

5-jährige Teilnahme
Rita Koch, Schmalkalden

4-jährige Teilnahme
Gisbert Schultz, Dessau

3-jährige Teilnahme
Heiko Tennert, Döbeln; Ursula Garnitz, Zeuthen; Doris Jeschner, Eisleben; Bernhard Tschada, Sondershausen; Michael Lätsch, Reichenbach (O/L); Kornelia Poike, Neukirch; Bianca-Andrea Herrmann, Zahna; Jutta Scharfenberg, Breitungen; Gabriele Schmalz, Breitungen; Norbert Heymel, Volkmar Ilgen, Thomas Fuchs, alle Fambach; Marina Nattermann, Mittelstille; Thomas Storandt, Joachim Bickel, Susanne Schmidt, Bettina Göbel, Marina Peter, alle Schmalkalden; Frank Holland-Moritz, Harald Bickel, Hendrik Martius, alle Oberschönau; Christine Hense, Potsdam; Karin Kusche, Kerstin Menz, Andrea Sänger, Bettina Hoffmann, Waldemar Olk, Claudia Beyer, Eva Baumann, Gerhard Gießler, Angelika Horn, Michael Recknagel, Ulli Kiehm, Petra Rothämel, Eberhard Usbeck, Gabi Huhn, Marina Wahl, Edith Franke, Heiko Vaupel, Inge Pfannschmidt, Hans-Dieter Arends, Rainer König, Kerstin Müller, Martina Henkel, Blanka Paul, Ursula Thomas, Margit Mangold, Silvia Wolff, Brigitte Holland-Moritz, Andrea Recknagel, Carola Voigt, alle Steinbach-Hallenberg; Bernd Haase, Andreas Heller, Sybille Baumgart, alle Löderburg; Hubert Steinmetz, Eva Marx, Sabine Range, Silke Kranhold, Arnd Halecker, Karl-Heinz Wiesemann, Elke Halecker, Astrid Surber, Silke Zimmermann, Karin Bernd, Jörg Wachsmann, alle Clingen.

alpha-Wettbewerb Chemie

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1974

Liebe *alpha*-Leser!

In diesem Heft findet Ihr zum ersten Mal mathematikintensive Wettbewerbsaufgaben zur Chemie. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen und einzusenden (Richtlinie: Schuljahr 1973/74). Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, die mit Ch 10/12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm).

Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule, Klasse und Name des Chemielehrers, der im Schuljahr 1973/74 unterrichtete. Die besten Lösungen werden prämiert. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1974/75 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an

Redaktion alpha
7027 Leipzig
PSF 14
Kennwort auf Briefumschlag:
Chemie-Wettbewerb 1974

Ch 7 ■ 1244 Ein Kohlenzug, bestehend aus 36 Waggons, die mit jeweils 25 t Braunkohlenbriketts beladen sind, transportiert in diesen Briketts 12 % Wasser. Wieviel m^3 Wasser sind das?

Ch 7 ■ 1245 Zwei verschiedene Salze werden in jeweils 100 g Wasser gelöst. Die Versuche ergeben, daß ihre Löslichkeit unterschiedlich von der Temperatur abhängig ist. Verdeutliche die Meßergebnisse als Diagramm!

Bei 0 °C lösen sich	20 °C	50 °C	100 °C
Salz 1 28,15 g (KCl)	34,35 g	43,1 g	56,2 g
Salz 2 35,5 g (Kochsalz)	35,85 g	36,72 g	39,2 g

Ch 8 ■ 1246 Im Kalkschachtofen wird kontinuierlich aus Kalkstein Branntkalk gewonnen. Der Kalkstein besteht zu 80 % aus $CaCO_3$. Wieviel Branntkalk kann aus jeder Tonne Kalkstein maximal gewonnen werden? Wieviel m^3 CO_2 entstehen beim Brennprozeß aus dem Kalkstein? (Normzustand)

Ch 8 ■ 1247 Bei einer Exkursion in eine chemische Anlage wurde unter anderem ein zylindrischer Turm besichtigt. Der Betreuer sagte scherzhaft, als die Frage nach dem Rauminhalt gestellt wurde:
„Ich bin mit 20 Schritten von 0,628 m Länge um den Behälter geschritten und hielt dabei mit dem Arm einen Abstand von 0,5 m. Die Anlage hat eine Höhe von 12 m und eine Wandstärke von 10 cm".

Ch 9 ■ 1248 Bei Experimenten an Tieren wurde das ausgeatmete CO_2 durch Kalkwasser gebunden. Wieviel l CO_2 wurden ausgeatmet, wenn 15 g $CaCO_3$ abgeschieden wurden?

Ch 9 ■ 1249 Als fotografisches Unterbrecherbad soll 1 l 2%ige Essiglösung aus 80%iger Essigessenz hergestellt werden. Wieviel H_2O und wieviel Essenz sind abzumessen?

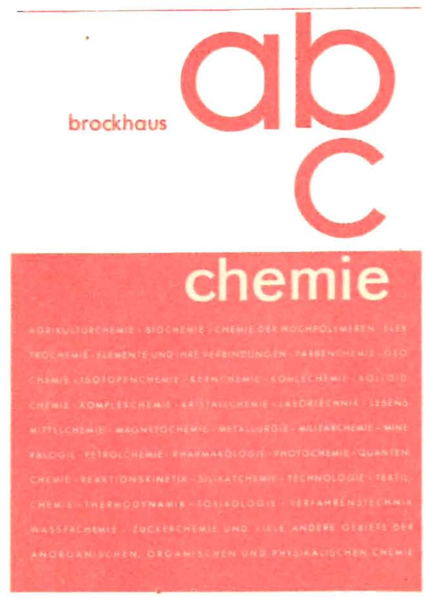
Ch 10/12 ■ 1250 Wieviel t SO_3 können theoretisch aus 1360 t Anhydrid gewonnen werden?

Ch 10/12 ■ 1251 Wieviel m^3 CO (unter Normalbedingungen) werden bei vollständiger Umsetzung für die Gewinnung von 32 t Methanol benötigt? *H. Pelka*

Brockhaus ABC Chemie

VEB F. A. Brockhaus Verlag Leipzig
2 Bände *Preis: 36,– M*

Das umfassende Nachschlagewerk enthält in zwei Bänden auf etwa 1600 Seiten rund 12000 Stichwörter aus den Gebieten der organischen, anorganischen und physikalischen Chemie mit allen Spezial- und Nebengebieten. Das Werk behandelt ausführlich das allgemeine chemische Grundwissen, daneben vermittelt es die neuesten Erkenntnisse auf theoretischem Gebiet und gibt Auskunft über die modernsten technologischen Verfahren. Zahlreiche Strukturformeln, Tabellen und Übersichten dienen einer raschen Orientierung. 800 Abbildungen im Text und auf 40 schwarzweißen und farbigen Kunsttafeln veranschaulichen die Ausführungen.



„Aus Ihrem Wagen tropft Benzin!"

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

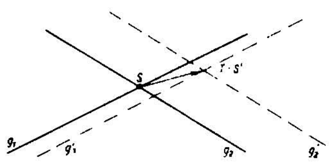
Lösungen

Kreisolympiade

Klassenstufe 5

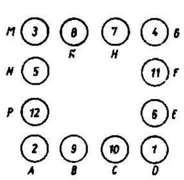
1. Da die Anzahl der Hechte ein Fünftel der Anzahl der Plötzen betrug, wurden genau 25 Hechte gefangen. Laut Aufgabe waren im Fang doppelt soviel Barsche wie Hechte, also genau 50 Barsche. Wegen $125+25+50=200$ wurden mithin insgesamt 200 Fische der genannten Arten gefangen.

2. Als vollständige Lösung gilt jede Zeichnung mit einer möglichen Lage der beiden Geraden g_1, g_2, der Punkte S und T sowie der beiden Bildgeraden $g_1' \parallel g_1$ und $g_2' \parallel g_2$, die einander im Punkt T schneiden.



3. a) Die Abb. zeigt ein Beispiel dafür, wie die geforderte Eintragung lauten kann.

b) Es liege eine Eintragung vor und es seien $a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p$ die in dieser Reihenfolge in den Feldern $A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P$ stehenden Zahlen. Ferner sei
$s_1=a+b+c+d$, $s_2=d+e+f+g$,
$s_3=g+h+k+m$, $s_4=m+n+p+a$.
Dann gilt laut Aufgabe $s_1=s_2=s_3=s_4=22$. Daraus folgt $s_1+s_2+s_3+s_4=88$.



Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 beträgt 78. Sie ist also um 10 kleiner als die Summe $s_1+s_2+s_3+s_4$. Nun werden aber die in den Eckfeldern A, D, G, M stehenden Zahlen bei der Bildung der vier Summen s_1, s_2, s_3, s_4 je zweimal berücksichtigt. Daher muß die Summe dieser Zahlen 10 betragen. Wären nun a, g, d, m nicht die Zahlen 1, 2, 3, 4, so wäre mindestens eine von ihnen größer als 4, und die anderen drei wären nicht kleiner als 1, 2 bzw. 3, also wäre ihre Summe größer als 10. Daher müssen bei jeder richtigen Eintragung der genannten Art in den Eckfeldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 und keine anderen stehen.

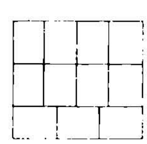
4. Die unterste Schicht besteht aus 9 Reihen, von denen die erste genau 1 Büchse und jede weitere genau eine Büchse mehr als die unmittelbar vorhergehende hat. Die neunte Reihe enthält danach genau 9 Büchsen. Folglich ist die Zahl aller Büchsen dieser Schicht gleich der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 9, also gleich 45. Die unmittelbar darüberstehende Schicht von Konservenbüchsen enthält genau eine Reihe, nämlich die mit 9 Büchsen, weniger. Entsprechendes gilt auch für alle übrigen Schichten. Somit erhält man:

Erste Schicht:	45
zweite Schicht:	$36=45-9$
dritte Schicht:	$28=36-8$
vierte Schicht:	$21=28-7$
fünfte Schicht:	$15=21-6$
sechste Schicht:	$10=15-5$
siebente Schicht:	$6=10-4$
achte Schicht:	$3=6-3$
neunte Schicht:	$1=3-2$
insgesamt	165

Für den Bau der „Pyramide" wurden insgesamt 165 Konservenbüchsen verwendet.

Klassenstufe 6

1. Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22=528$ einen Flächeninhalt von 528 cm². Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8=48$ einen Flächeninhalt von 48 cm². Wegen $528:48=11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.
Daß dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abb. (Der Schüler braucht in seiner Zeichnung keine Bemaßung anzugeben.)



2. Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.
Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.
Wegen $5(24^2+12^2+6^2+3^2)-(12^2+6^2+3^2)=3\,636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3 636 cm².

3. Es sei x die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist x durch 9 teilbar, also wegen $10<x<40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist x auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27. Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Note „3". Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

Klassenstärke	Anz. d. Schüler m. d. Note			
	1	2	4	3
18	3	6	2	7
36	6	12	4	14

4. Die Summe der für die Zeichen einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18. Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.
Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.
Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:
5 000 805, 5 010 705, 5 020 605, 5 030 505, 5 040 405, 5 050 305, 5 060 205, 5 070 105, 5 080 005, 5 080 905, 5 090 805.

Klassenstufe 7

1. Aus (3) folgt, daß die Summe aus der Anzahl der Schachspieler und der Anzahl der Judosportler 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei ganzzahlige Summanden erfüllt nur diejenige (5), nach der die Anzahl der Schachspieler 3 und die der Judosportler 1 ist. Daraus folgt nach (4) daß genau 6 Schüler Mitglied der Sektion Tischtennis sind. Nach (1) betreiben mindestens 19 Schüler Leichtathletik und nach (2) mindestens 7 Schüler Schwimmen. Da

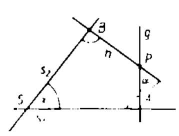
für diese beiden Sportarten nur noch genau 26 Schüler in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen Anzahlen. Von den 36 Schülern betreiben mithin genau 19 Leichtathletik, genau 7 Schwimmen, genau 6 Tischtennis, genau 3 Schach, und genau 1 Schüler betreibt Judo.

2. Erfüllen a, b, c die drei genannten Bedingungen über den ggT, so ist a durch 4 und durch 6, also durch das kgV dieser Zahlen d. h. durch 12 teilbar. Ferner ist dann b durch 4 und durch 14, also durch das kgV dieser Zahlen, d. h. durch 28 teilbar. Ebenso ist c durch 6 und 14, also durch 42 teilbar.
Andererseits erfüllt die Wahl von (1) $a=12$, $b=28$, $c=42$ alle drei ggT-Bedingungen. Daher ist die zweite Frage der Aufgabe mit Ja und der Angabe (1) zu beantworten.
Multipliziert man a in (1) mit einer zu b und c teilerfremden Zahl $z>1$ (z. B. mit $z=5$), so erhält man eine andere Wahl dreier Zahlen (im Beispiel 60, 28, 42), die ebenfalls alle drei ggT-Bedingungen erfüllt. Daher ist auch die erste Frage der Aufgabe mit Ja zu beantworten.

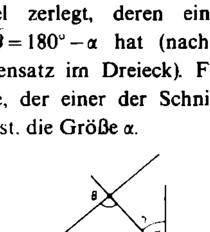
3. Es sei A der Schnittpunkt von g mit dem einen Schenkel s_1 des gegebenen Winkels, und es sei B der Schnittpunkt von h mit dem anderen Schenkel s_2 des gegebenen Winkels, derart, daß sich g, s_1 in A und ebenso h, s_2 in B jeweils unter 90° schneiden. Dann ist $g \nparallel h$. Folglich existiert ein Schnittpunkt P von g und h. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:
Fall 1: P liegt innerhalb des gegebenen Winkels. Dann ist $SAPB$ ein konvexes Viereck. Folglich gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck sowie wegen

$$\overline{\sphericalangle SBP} = \overline{\sphericalangle SAP} = 90^\circ:$$
$$\overline{\sphericalangle BPA} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle ASB} = 180^\circ - \alpha,$$

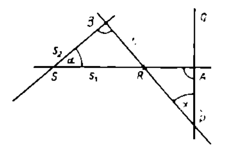
und demnach hat jeder seiner Nebenwinkel, also einer der Schnittwinkel von g und h, die Größe α.



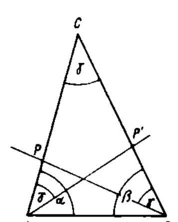
Fall 2: P fällt mit einem der Punkte A, B zusammen, etwa mit A. Dann wird der rechte Winkel, den g mit s_1 bildet, durch h in zwei Winkel zerlegt, deren einer die Größe $\overline{\sphericalangle SAB} = 180^\circ - \alpha$ hat (nach dem Winkelsummensatz im Dreieck). Folglich hat der andere, der einer der Schnittwinkel von g mit h ist, die Größe α.



Fall 3: P liege außerhalb des gegebenen Winkels, o. B. d. A. nicht auf derselben Seite von s_1 wie B. Der Schnittpunkt von h mit s_1 sei R. Dann gilt:
$\overline{\sphericalangle SRB} = 180^\circ - \alpha$ (Winkelsummensatz im Dreieck) sowie $\overline{\sphericalangle SRB} = \overline{\sphericalangle PRA}$ (Scheitelwinkel) und damit
$\overline{\sphericalangle RPA} = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$.
Da es keine weiteren Fälle gibt, ist der Satz damit bewiesen!



4. (I) Angenommen, ein Punkt P auf AC habe die verlangte Eigenschaft. Nach dem Außenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt dann
$\overline{\sphericalangle CBP} = \overline{\sphericalangle BPA} - \overline{\sphericalangle BCP} = \gamma$.
(II) Daher entspricht ein Punkt P auf AC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der A liegt, den Winkel der Größe γ an.
(2) Schneidet sein freier Schenkel die Seite AC, so sei P der Schnittpunkt.
(III) Beweis, daß jeder so konstruierter Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion (2) liegt P auf AC. Ferner ist nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion (1) auch
$\overline{\sphericalangle BPA} = \overline{\sphericalangle BCP} + \overline{\sphericalangle CBP} = 2\gamma$.
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Wegen $\gamma < \beta$ hat der freie Schenkel des in (1) konstruierten Winkels gemeinsame Punkte mit dem Innern des Dreiecks ABC und schneidet die Seite AC zwischen A und C;
Konstruktionsschritt (2) ergibt folglich genau einen Punkt P auf AC, der die verlangte Eigenschaft hat.
Vertauscht man in den Überlegungen (I) bis (IV) überall A mit B, so erhält man: Es gibt genau einen (weiteren) Punkt P' auf BC, der die verlangte Eigenschaft hat. Somit gibt es stets genau 2 derartige Punkte.



Klassenstufe 8

1. Angenommen, es liege eine Eintragung der verlangten Art vor. Dann folgt: Das Produkt aus abc und a ist dreistellig, das aus abc und b vierstellig. Also gilt $a<b$. Wäre nun $a \geqq 3$, so wäre daher $b \geqq 4$ und somit das Produkt aus abc und a vierstellig, im Widerspruch zur Aufgabe. Das Produkt aus abc und a endigt auf a. Wäre $a=1$, so folgte, daß dieses Produkt auf c endigen würde, im Widerspruch zu $a \neq c$. Daher und weil a als Anfangsziffer von abc nicht 0 ist, gilt $a=2$.
Da somit das Doppelte der Zahl abc auf 2 endigt, muß auch das Doppelte von c auf 2 endigen. Das gilt nur für $c=1$ oder $c=6$. Da das Produkt aus abc und c vierstellig ist, ist $c \neq 1$. Also gilt $c=6$.
Da $246 \cdot 4 = 984$ dreistellig ist, das Produkt aus abc und b aber vierstellig sein soll, gilt $b \neq 4$. Unter den hiernach für b verbleibenden Möglichkeiten 1, 3, 5, 7, 8, 9 erfüllt nur die Zahl 8 die Bedingung, daß das Produkt der auf 6 endenden Zahl mit b auf b endigt. Daher gilt $b=8$.
Somit kann nur die Eintragung

$$\begin{array}{r} \underline{286 \cdot 826} \\ 2288 \\ 572 \\ \underline{1716} \\ 236236 \end{array}$$

den Anforderungen genügen. Da sie eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe darstellt und da $a=2$, $b=8$, $c=6$ paarweise verschieden sind, erfüllt sie die Bedingungen der Aufgabe.

2. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden, d. h. der Mittelpunkt seines Inkreises, und E, F seien die Fußpunkte der Lote von M auf die Seiten BC, CD. Dann hat das Viereck $CFME$ rechte Winkel bei E, C und F und ist daher wegen $\overline{ME} = \overline{MF} = \varrho$ ein Quadrat mit der Seitenlänge ϱ.
Die Halbierende des Winkels BAC geht durch M; es gilt $\overline{\sphericalangle FMA} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch F und zweitens auf dem freien Schenkel eines in M an MF nach der Seite der Geraden durch M und E, auf der C nicht liegt, angetragenen Winkels der Größe $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Punkt B liegt erstens auf dem Strahl aus C durch E und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, angetragenen Winkels der Größe α.
(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren das Quadrat $CFME$ mit der Seitenlänge ϱ.
(2) Wir zeichnen den Strahl C durch F.
(3) Wir tragen in M an MF einen Winkel der Größe $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ nach der Seite der Geraden durch M und F an, auf der C nicht liegt. Schneidet sein freier Schenkel den Strahl aus C durch F, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(4) Wir tragen in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, einen Winkel der Größe α an.

(5) Wir zeichnen den Strahl aus C durch E. Schneidet er den freien Schenkel des in (4) konstruierten Winkels, so sei der Schnittpunkt B genannt.

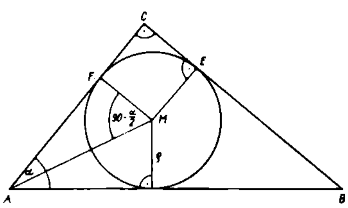
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion der Winkel bei C ein Rechter. Ebenso hat laut Konstruktion der Winkel BAC die Größe α. M hat laut Konstruktion von AC und BC den Abstand ϱ. Da ferner nach Konstruktion

$\overline{\sphericalangle CAM} = \overline{\sphericalangle FAM} = \frac{\alpha}{2}$ und

$\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle CAB} - \overline{\sphericalangle CAM} = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ist, ist AB ebenso wie AC Tangente an den Kreis mit ϱ um M. Folglich ist M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar. Ferner ist wegen $0^\circ < 90^\circ - \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ auch (3) eindeutig ausführbar. Danach ist dann (4) und wegen $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ schließlich auch (5) eindeutig ausführbar. Das Dreieck ABC ist also durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



3. Angenommen, es gibt eine rationale Zahl r, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt: $\frac{3-r}{4+r} = \frac{3}{8}$.

Daraus folgt $24 - 8r = 12 + 3r$. Also kann höchstens $r = \frac{12}{11}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

$\frac{3 - \frac{12}{11}}{4 + \frac{12}{11}} = \frac{\frac{21}{11}}{\frac{56}{11}} = \frac{3}{8}$, d. h. $r = \frac{12}{11}$ erfüllt die Bedingungen.

4 Die Vierecke $EBAC$ und $BFDA$ sind Sehnenvierecke. Daher gilt: $\overline{\sphericalangle ACE} + \overline{\sphericalangle ABE} = 180^\circ$ sowie $\overline{\sphericalangle ADF} + \overline{\sphericalangle ABF} = 180^\circ$. Ferner gilt:

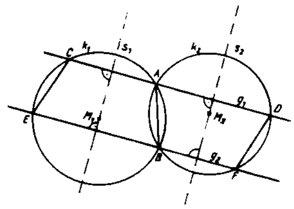
$\overline{\sphericalangle ABE} + \overline{\sphericalangle ABF} = 180^\circ$ (Nebenwinkel).

Daraus folgt

$\overline{\sphericalangle ACE} + \overline{\sphericalangle ADF} = 180^\circ$ und somit $CE \parallel DF$. Also ist $CEFD$ ein Parallelogramm. und es gilt $\overline{CD} = \overline{DF}$, w. z. b. w.

Anderer Lösungsweg:

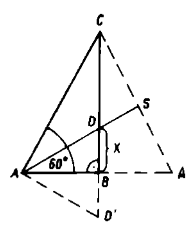
Die zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden aus den Kreisen k_1 und k_2 je zueinander parallele Sehnen aus. Nun seien s_1 bzw. s_2 die Symmetrieachse dieser beiden Sehnenpaare. Dann gilt $s_1 \parallel s_2$ (wegen $s_1 \perp g_1$ und $s_2 \perp g_1$). Durch Spiegelung an s_2 geht AB in DF über, so daß $CE \parallel DF$ folgt. Somit ist $CEFD$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{CD} = \overline{EF}$, w. z. b. w.



Klassenstufe 9

1. In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet. Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

2. Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'. Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt. Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1:2$ schneiden, ist die Behauptung bewiesen.



Oder: Spiegelt man D an AB und wird der Bildpunkt D' genannt, so ist das Dreieck $D'AD$ gleichseitig. Sei nun $\overline{BD} = x$. so gilt $\overline{AD} = 2x$. Ferner ist das Dreieck ADC wegen der Kongruenz der Winkel bei A bzw. C (je 30°) gleichschenklig, also gilt $\overline{AD} = \overline{CD}$ und somit $\overline{CD} = 2x$, womit die Behauptung bewiesen ist.

3. (I) Angenommen, ein Trapez $ABCD$ habe die geforderten Eigenschaften. Es seien E, F, G, H die (in dieser Reihenfolge) auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA gelegenen Berührungspunkte der Seiten des Trapezes mit dem Inkreis, also die Fußpunkte der vom Inkreismittelpunkt M auf die Seiten gefällten Lote. Ferner sei $\overline{DG} = x$ und $\overline{AE} = y$. Da GE Symmetrieachse des Trapezes ist, gilt $\overline{CG} = \overline{DG} = x$ und $\overline{AE} = \overline{BE} = y$. Da die Abschnitte der Tangenten, die von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt an den Kreis gezogen werden, gleichlang sind, gilt $\overline{CF} = \overline{DH} = x$ und $\overline{AH} = \overline{BF} = y$. Somit folgt $u = 4x + 4y$, also (1) $x + y = 25$ cm. Fällt man das Lot von C auf AB, so liegt sein Fußpunkt K wegen $\overline{GC} < \overline{EB}$ zwischen A und B.

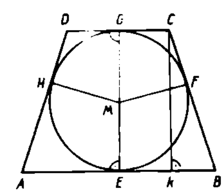
Nach dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck KBC, folgt (2) $y - x = \overline{KB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{KC}^2} = \sqrt{(x+y)^2 - (2r)^2} = 7$ cm.

Aus (1) und (2) ergibt sich $x = 9$ cm, $y = 16$ cm. Daher kann ein Trapez nur dann den gestellten Forderungen genügen, wenn seine Seitenlängen $\overline{AB} = 2y = 32$ cm, $\overline{CD} = 2x = 18$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = x + y = 25$ cm betragen.

(II) Hat ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ diese Seitenlängen, so hat es die Eigenschaften $\overline{AD} = \overline{BC}$. $\overline{AB} > \overline{CD}$,

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 100$ cm.

Ferner ist es wegen $\overline{AB} + \overline{CD} = 50\text{ cm} = \overline{BC} + \overline{AD}$ ein Tangentenviereck, es besitzt also einen Inkreis; dieser hat die Strecke EG als Durchmesser, wobei E, G die Mittelpunkte von AB, CD sind. Ist K der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, so gilt $\overline{BK} = \overline{BE} - \overline{CG} = 7$ cm, also $\overline{GE} = \overline{CK} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2} = 24$ cm.



Daher hat der Inkreis den geforderten Radius 12 cm.

Es gibt somit Trapeze der verlangten Art; jedes solche Trapez hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 32$ cm, $\overline{CD} = 18$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 25$ cm.

4. Beim 1. Umlauf werden alle Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte derartige Zahl ist 991. Beim 2. Umlauf wird wegen $991 + 15 - 1000 = 6$ die Zahl 6 als erste gestrichen, und weiter alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen, also 6, 21, 36, 51, ... Die letzte derartige Zahl ist 996.

Beim 3. Umlauf streicht man wegen $996 + 15 - 1000 = 11$ als erste Zahl die 11, und anschließend alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, also 11, 26, 41. 56, ... Die letzte derartige Zahl ist 986.

Beim 4. Umlauf müßte man wegen $986 + 15 - 1000 = 1$ als erste Zahl die 1 streichen, die aber bereits gestrichen ist. Beim Fortsetzen des Verfahrens trifft man deshalb nur auf Zahlen, die bereits beim 1. Umlauf gestrichen worden sind.

Bei allen Umläufen wurden somit insgesamt die Zahlen 1, 6, 11, 21, 26, ..., 986, 991. 996 gestrichen, also alle Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, mithin in der Form $5n + 1$ geschrieben werden können. Da hierbei n alle natürlichen Zahlen von 0 bis 199 durchläuft, gibt es genau 200 Zahlen, die bei dem angegebenen Verfahren durchgestrichen, also genau 800 Zahlen, die nicht durchgestrichen werden.

Klassenstufe 10

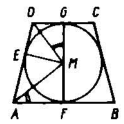
1. Wegen (1) können nur drei der Ziffern 2, 3, 5, 7 vorkommen. Aus diesen vier Ziffern kann man genau die zweistelligen Primzahlen 23, 37, 53, 73 bilden.
Aus ihnen lassen sich in der in der Aufgabe angegebenen Weise (2) genau folgende dreistellige Zahlen bilden:

237, 373, 537, 737.

Nun sind 237 und 537 durch 3 teilbar und 737 ist durch 11 teilbar. Die Zahl 373 dagegen ist weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 oder 19 teilbar. Wegen $373<20^2$ ist sie (dann auch durch keine größere Primzahl teilbar und) somit selbst Primzahl. Folglich ist 373 die einzige dreistellige Primzahl, die (1) und (2) erfüllt.

2. Für die 22 vierten, die 22 fünften und die 23 sechsten Plätze erhielt die DDR-Mannschaft laut Aufgabe
$22\cdot 3+22\cdot 2+23=133$ Punkte. Da sie insgesamt 480 Punkte erzielte, bekam sie wegen $480-133=347$ für die ersten, zweiten und dritten Plätze zusammen genau 347 Punkte.
Es sei nun g die Anzahl der errungenen Gold-, s die der Silber- und b die der Bronzemedaillen. Dann gilt (1) $7g+5s+4b=347$. Ist k die kleinste der Zahlen g, s, b, so ist mit ganzzahligen x, y, z (2) $g=k+x$, $s=k+y$, $b=k+z$, wobei (3) mindestens eine der Zahlen x, y, z gleich 0 und (4) mindestens eine der Zahlen x, y, z gleich 3 ist und (5) $0=x, y, z=3$ gilt.
Aus (1), (2) folgt (6) $16k+7x+5y+4z=347$.
Wegen (3), (4), (5) gilt $7\cdot 3+5\cdot 3\geqq 7+5y+4z\geqq 4\cdot 3$, hieraus und aus (6) folgt (7) $16k+36\geqq 347\geqq 16k+12$.
Aus der linken Ungleichung in (7) folgt $16k\geqq 311>304$, also (8) $k>19$. Aus der rechten Ungleichung in (7) folgt $16k\leqq 335<336$, also (9) $k<21$. Wegen (8), (9) gilt (10) $k=20$.
Hieraus und aus (6) folgt $7x+5y+4z=27$.
Wäre $z=0$, so müßte $7x=27-5y$ durch 7 teilbar sein, was für alle $y=0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Wäre $y=0$, so müßte $7x=27-4z$ durch 7 teilbar sein, was für alle $z=0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Also ist (11) $x=0$, und $5y=27-4z$ muß durch 5 teilbar sein, was unter den Möglichkeiten $z=0, 1, 2, 3$ nur für (12) $z=3$ zutrifft und auf (13) $y=3$ führt.
Aus (2), (10), (11), (12), (13) folgt die zu beweisende Behauptung, daß g, s, b durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt sind (nämlich als $g=20$, $s=b=23$).
Hinweis: Eine „Probe", d. h. der Nachweis, daß diese Zahlen alle angegebenen Bedingungen erfüllen, ist zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da in der Aufgabenstellung nur der Nachweis der Einzigkeit der Lösung verlangt wird.

3. Da das Trapez gleichschenklig ist, liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmetrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB und CD.
Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel CDE und EAF. Wegen $\sphericalangle GDE+\sphericalangle EAF=180°$ gilt daher (1) $\sphericalangle MDG+\sphericalangle MAF=90°$. Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklig sind, gilt (2) $\sphericalangle MDG+\sphericalangle DMG=90°$. Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle MAF=\sphericalangle DMG$. Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich.



Wegen $\overline{DG}=1$ cm, $\overline{AF}=4$ cm und $\overline{MG}=\overline{MF}=\varrho$ folgt daraus $\overline{DG}:\overline{MG}=\overline{MF}:\overline{AF}$ bzw. 1 cm $:\varrho=\varrho:4$ cm, woraus man

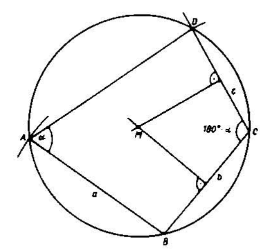
$\varrho^2=4$ cm^2 und wegen $\varrho>0$ schließlich $\varrho=2$ cm erhält.

Der Inkreisradius ϱ hat die Länge 2 cm.

4. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Nach dem Satz über die Summe der Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt:

$\sphericalangle DCB=180°-\alpha$.

Das Dreieck BCD läßt sich damit aus b, c und einem Winkel von $180°-\alpha$ konstruieren.
Der Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvierecks liegt auf den Mittelsenkrechten der Seiten BC und CD. Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MB}$ und zweitens auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
(II) Daraus ergibt sich, daß ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.
(1) Wir zeichnen eine Strecke BC der Länge b.
(2) Wir tragen in C an BC einen Winkel von $180°-\alpha=110°$ an.
(3) Wir schlagen um C einen Kreis mit dem Radius c. Schneidet dieser Kreis den freien Schenkel des angetragenen Winkels in einem Punkt, so sei dieser D genannt.
(4) Auf BC und CD errichten wir die Mittelsenkrechten; schneiden sie sich, so sei ihr Schnittpunkt M genannt.
(5) Wir schlagen den Kreis um M mit dem Radius $\overline{MB}$.
(6) Wir schlagen den Kreis um B mit dem Radius a. Schneiden sich die beiden Kreise auf derjenigen Seite von BD, auf der C nicht liegt, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion (4), (5), (6) geht der in (5) konstruierte Kreis durch, A, B, C, D, also ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Ferner folgt aus der in (6) getroffenen Auswahl von A, daß $ABCD$ konvex ist. Nach den Konstruktionsschritten (1), (3), (6) gilt $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$ und $\overline{CD}=c$. Weiterhin gilt nach Konstruktion $\sphericalangle DCB=110°=180°-\alpha$; damit ist nach dem Satz über das Sehnenviereck $\overline{\sphericalangle BAD}=180°-\sphericalangle DCB=\alpha$.



(IV) Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar; hieraus ist (3) dann eindeutig ausführbar. Auch Konstruktionsschritt (4) ist eindeutig ausführbar, da BC und CD nicht parallel zueinander sind. Damit ist auch (5) eindeutig ausführbar. Da mit den gegebenen Größen, wie man der Abb. entnehmen kann, $\overline{BD}>a$ ausfällt, ist auch (6) eindeutig ausführbar.
Das konvexe Sehnenviereck $ABCD$ ist also bis auf Kongruenz durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt.

Bezirksolympiade

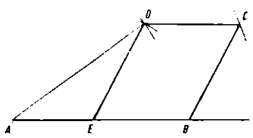
Klassenstufe 7

1. Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen $2\cdot 17>33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre.
Daraus folgt:
Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere 15 Jahre alt.

2. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ist stets eine durch 3 teilbar. Wegen $p\geqq 3$ ist die Primzahl p ungerade. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p-1$ und $p+1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Somit ist $(p-1)p(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar, w. z. b. w.

3. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Punkt E liege zwischen A und B auf AB, und es gelte $\overline{AE} = a - c$.
Dann ist $\overline{EB} = \overline{CD} = c$, und $EBCD$ ist ein Parallelogramm. Nun läßt sich $\triangle AED$ aus $\overline{AE}, \overline{ED}\,(=\overline{BC})$ und $\overline{DA}$ konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.



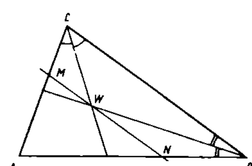
Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.
(II) Daher entspricht ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $\overline{AE} = 3$ cm, $\overline{ED} = 4$ cm und $\overline{AD} = 6$ cm.
(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.
(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.
(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.
(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Nach Konstruktion ist $\overline{AD} = d$.
Weiter ist nach Konstruktion $\overline{AC} = e$. Da $EBCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich $\overline{BC}\,(=\overline{ED}) = b$ und, da E zwischen A und B liegt, auch $\overline{AB} - \overline{DC}$ $(= \overline{AB} - \overline{EB} = \overline{AE}) = a - c$.
(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s, s, s) eindeutig ausführbar.
Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $\overline{AC} > \overline{AD}$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar. Daher ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist
$a = 100x + 10y + z$ gleich der Hälfte der Summe von
$b = 100y + 10z + x$ und
$c = 100z + 10x + y$. Demnach gilt:
$200x + 20y + 2z = 2a = b + c =$
$= 101y + 110z + 11x$, also $189x = 81y + 108z$
und daher (1) $7x = 3y + 4z$.
Folglich ist 7 ein Teiler von $3y + 4z$ und daher auch von $3y + 4z - 7z = 3(y - z)$, also von $y - z$.
Wegen $0 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq z \leqq 9$ folgt hieraus, daß entweder $y = z$ und nach (1) dann $y = z = x \geqq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.
Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

y	z	x	y	z	x
1	1	1	8	1	4
2	2	2	7	0	3
	·	·	0	7	4
			1	8	5
			2	9	6
9	9	9			

Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein. Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt
$\frac{1}{2}(925 + 259) = 1\,184 : 2 = 592$; $\frac{1}{2}(814 + 148)$
$= 962 : 2 = 481$, $\frac{1}{2}(703 + 37) = 740 : 2 = 370$,
$\frac{1}{2}(74 + 740) = 814 : 2 = 407$, $\frac{1}{2}(185 + 851)$
$= 1\,036 : 2 = 518$, $\frac{1}{2}(296 + 962)$
$= 1\,258 : 2 = 629$.
Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

5. Aus $\overline{\sphericalangle CBW} = \overline{\sphericalangle WBN}$ (lt. Voraussetzung) und $\overline{\sphericalangle CBW} = \overline{\sphericalangle NBW}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)
folgt $\overline{\sphericalangle WBN} = \overline{\sphericalangle NWB}$.



Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt
$$\overline{BN} = \overline{NW} \qquad (1)$$
Analog beweist man (2) $\overline{CM} = \overline{MW}$.
Aus (1) und (2) folgt $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MW} + \overline{NW}$, also $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MN}$, w. z. b. w.

6. Man könnte sich vorstellen, daß der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verläßt, in dem die Lok auf die Brücke fährt.
Wenn der Fußgänger nach 9 sec 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen $27 - 9 = 18$ noch 18 sec. In dieser Zeit legt er wegen $225 + 9 = 234$ genau 234 m zurück. Folglich betrug wegen $234 : 18 = 13$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges $13\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, das sind wegen $13 \cdot \frac{3\,600}{1\,000} = 46{,}8$ genau $46{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Da der Zug zur Brückenfahrt 27 sec benötigte, legte die Lok wegen $13 \cdot 27 = 351$ in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen. Wegen $352 - 225 = 126$ hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.

Klassenstufe 8

1. Sei z die Gesamtzahl aller Spiele. Da jedes der Mädchen von jeweils 5 Spielen genau 4 mitspielte, spielte jedes Mädchen in $\frac{4}{5}z$ aller Spiele mit. Diese Anzahl ist nach (1) durch 3 und 4, also durch 12 teilbar. Daher gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{4}{5}z = 12n$; hieraus folgt $z = 15n$. Von den $15n$ Spielen gewann nach (1) Cathrin genau $6n$, Daja genau $4n$, Eva genau $3n$ Spiele.
Somit gewannen Anja und Brigitte zusammen genau $2n$ aller Spiele. Daraus folgt, daß Eva wegen $6n > 4n > 3n > 2n$ das drittbeste Ergebnis erzielte. Da die Anzahl $3n$ von Evas Siegen nach (2) eine Primzahl war, gilt $n = 1$.
Es wurden mithin genau 15 Spiele ausgetragen; Cathrin gewann genau 6, Daja genau 4, Eva genau 3 dieser Spiele, und Anja und Brigitte gewannen nach (3) jeweils genau 1 Spiel.

2. Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p - 2$, $p - 1$, $p + 1$, $p + 2$ ist eine durch 5 teilbar. Da p Primzahl ist und $p > 5$ gilt, ist p nicht durch 5 teilbar. Folglich ist eine der Zahlen $p - 2$, $p - 1$, $p + 1$, $p + 2$ durch 4 teilbar.
Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade. Daher ist jede der beiden Zahlen $p - 1$ und $p + 1$ gerade und eine von beiden ist wenigstens durch 4 teilbar. Folglich ist ihr Produkt durch 8 teilbar.
Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Mithin sind entweder die beiden Zahlen $p - 2$ und $p + 1$ oder die beiden Zahlen $p - 1$ und $p + 2$ jeweils durch 3 teilbar. Also ist ihr Produkt durch 9 teilbar. Aus all dem folgt, daß das Produkt $(p-1)(p-1)(p+1)(p+2)$ durch 5, 8 und 9 und, da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, auch durch $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ teilbar ist, w. z. b. w.

3. Man kann den Flächeninhalt A_8 des Achtecks berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ den vierfachen Flächeninhalt des Sechsecks $A_2BB_2P_3P_2P_1$ subtrahiert.
Die Fußpunkte der Lote von P_2 auf AB bzw. BC seien E bzw. F. Dann ist $EBFP_2$ ein Quadrat. Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, so gilt nach einem Teil des Strahlensatzes
$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \left(\frac{3}{4}a - x\right) : x$, woraus man
$\frac{3}{2}x = \frac{3}{4}a - x$ und mithin
$\frac{5}{2}x = \frac{3}{4}a$ bzw. $x = \frac{3}{10}a$ erhält.

Setzt man weiter $P_1A_2 = y$, so gilt nach dem Strahlensatz

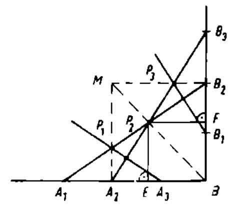
$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a : y$, also

$\frac{2}{3}y = \frac{1}{4}a$ bzw.

$y = \frac{1}{6}a$. Folglich gilt für den Flächeninhalt A_8 des Achtecks

$$A_8 = a^2 - 4\left(\frac{\frac{1}{6}a + \frac{3}{10}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{10}a\right) \cdot 2 + \frac{9}{100}a^2\right)$$

bzw. $A_8 = a^2 - \frac{28}{75}a^2 - \frac{9}{25}a^2 = \frac{4}{15}a^2$. Der gesuchte Flächeninhalt des Achtecks beträgt $\frac{4}{15}a^2$.

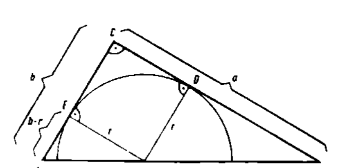


4. Ein Bruch ist genau dann negativ, wenn entweder sein Zähler positiv und sein Nenner negativ oder wenn sein Zähler negativ und sein Nenner positiv ist.

Angenommen, es gäbe eine rationale a mit $3a-2>0$ und $a+1<0$. Dann folgt aus $3a-2>0$ einerseits $a>\frac{2}{3}$ und aus $a+1<0$ andererseits $a<-1$. Da es keine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig größer als $\frac{2}{3}$ und kleiner als -1 ist, war unsere Annahme falsch.

Daher ist die gegebene Ungleichung genau für diejenigen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $3a-2<0$ und $a+1>0$ gilt. Nun ist $3a-2<0$ gleichbedeutend mit $a<\frac{2}{3}$ und $a+1>0$ mit $a>-1$. Diese beiden Bedingungen werden genau von allen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $-1<a<\frac{2}{3}$ gilt. Folglich sind alle rationalen Zahlen a mit $-1<a<\frac{2}{3}$ und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichung.

5. Der Mittelpunkt des Halbkreises sei M, die Seite BC berühre den Halbkreis in D, die Seite AC berühre ihn in E. Dann gilt: $\overline{MD}=r$ und $MD \| AC$ (rechte Winkel bei D bzw. C) und $\overline{ME}=r$ und $ME \| BC$ (rechte Winkel bei E bzw. C).



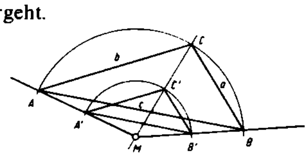
Folglich ist $MDCE$ ein Quadrat mit der Seitenlänge r. Nach dem Strahlensatz gilt nun:

$\frac{a}{r} = \frac{b}{b-r}$, also $ab - ar = br$ bzw. $ab = br + ar$.

Daraus erhält man durch Division mit abr

$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, w. z. b. w.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Mittelpunkt seines Umkreises sei M. Dann gibt es ein Dreieck $A'B'C'$, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M entsteht (A' Bild von A, B' Bild von B, C' Bild von C) und bei dem $\overline{A'B'} = 4$ cm beträgt. Dabei gilt weiter $\overline{A'C'} = 3$ cm, $\overline{B'C'} = 2$ cm. Folglich ist $\triangle ABC$ ähnlich einem Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a' = 2$ cm, $b' = 3$ cm, $c' = 4$ cm, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.



(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $\overline{B'C'} = 2$ cm, $\overline{C'A'} = 3$ cm, $\overline{A'B'} = 4$ cm, sowie dessen Umkreismittelpunkt M.

(2) Man zeichnet die Strahlen aus M durch A' bzw. B' bzw. C'.

(3) Man schlägt um M den Kreis mit dem Radius r. Schneidet er die in (2) gezeichneten Strahlen, so seien die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge mit A, B, C bezeichnet.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $\triangle A'B'C'$ hervorgegangen. Daher sind beide Dreiecke ähnlich. Das Dreieck ABC hat also ebenfalls das Verhältnis der Seitenlängen $2:3:4$. Ebenso gilt laut Konstruktion $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$, d. h., das Dreieck ABC hat einen Umkreis vom Radius r.

(IV) Da wegen $2+3>4$; $2+4>3$ und $3+4>2$ ein Dreieck $A'B'C'$ mit den angegebenen Seitenlängen existiert, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktionsschritte (2) und (3) sind ebenfalls eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 9

1.a) Sind a, b die Ziffern einer der gesuchten Zahlen, die also $10a+b$ lautet, so entsteht aus ihr durch die genannten Operationen die Zahl $10b+a+9$. Da auch diese zweistellig ist und da $a \geqq 1$ gilt, folgt $100 > 10b+a+9 \geqq 10b+10$, also $b<9$. Daher können nur zweistellige Zahlen, die nicht auf 9 enden, die verlangte Eigenschaft haben.

In der Tat hat jede nicht auf 9 endende zweistellige Zahl diese Eigenschaft; denn sind a und b ihre Ziffern, so hat die aus ihr entstehende Zahl $10b+a+9$ wegen $a \geqq 1$ und $b<9$ die Ziffern $b+1$ und $a-1$, und aus dieser Zahl entsteht, da für sie auch $b+1 \geqq 1$ und $a-1<9$ gilt, ebenso die Zahl mit den Ziffern $(a-1)+1$ und $(b+1)-1$, d. h. die Ausgangszahl, wie es gefordert war.

b) Genau dann ist eine der in a) ermittelten Zahlen sich selbst zugeordnet, wenn $b+1=a$ gilt. Diese Bedingung wird genau von den Zahlen 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98 erfüllt.

2. Genau dann ist $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$ durch 10 teilbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $10 \mid n$

(2) $10 \mid (n^2+2)$

(3) $5 \mid n$ und $2 \mid (n^2+2)$

(4) $2 \mid n$ und $5 \mid (n^2+2)$.

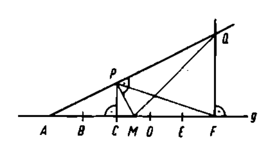
Die Bedingung (1) wird von allen durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n erfüllt. Die Bedingung (2) könnte nur von solchen natürlichen Zahlen n erfüllt werden, deren Quadrat auf 8 endet.

Derartige Zahlen gibt es nicht.

Angenommen, es gabe natürliche Zahlen n, die (3) oder (4), aber nicht (1) erfüllen. Eine solche Zahl müßte entweder wegen (3) auf 5 enden oder ihr Quadrat müßte wegen (4) auf 3 oder 8 enden. Natürliche Zahlen, deren Quadrat auf 3 oder 8 endet, gibt es nicht. Endet n auf 5, so ist n^2 und damit auch n^2+2 ungerade, also nicht durch 2 teilbar. Folglich erfüllen genau alle durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

3. Die in P auf der Geraden durch A und P errichtete Senkrechte schneide g in M; die in F auf g errichtete Senkrechte schneide die Gerade durch A und P in Q. Nach dem Höhensatz für das bei P rechtwinklige Dreieck AMP ist:

$$\overline{CM} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}\overline{CP}, \text{ also } \overline{MF} = \frac{5}{2}\overline{CP}.$$



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\overline{FQ} = \frac{\overline{CP} \cdot \overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{5}{2}\overline{CP}.$$

Daher ist das bei P rechtwinklige Dreieck MQF gleichschenklig mit $\sphericalangle FMQ = 45°$. Das Viereck $FMPQ$ hat bei F und P rechte Winkel, ist also ein Sehnenviereck; folglich gilt (Peripheriewinkelsatz)

$$\sphericalangle FPQ = \sphericalangle FMQ = 45°.$$

Daraus folgt die Behauptung.

4. Jedes regelmäßige n-Eck $(n=3)$ läßt sich in n gleichschenklige Dreiecke zerlegen, indem man seinen Mittelpunkt mit den Eckpunkten verbindet. Die Summe der Winkelgrößen dieser n Dreiecke beträgt $n \cdot 180°$. Die Summe der Größen aller Basiswinkel und damit die Summe der Größen der Innenwinkel des n-Ecks beträgt folglich $(n-2)\cdot 180°$. Daher hat jeder Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck eine Größe von $\frac{(n-2)\,180°}{n}$. Also hat n genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn eine natürliche Zahl m mit $\frac{n-2}{n}\,180° \cdot m = 360°$, d. h. mit (1) $m = \frac{2n}{n-2}$ existiert. Ist dies der Fall, so ist $n-2\,(=1)$ Teiler von $2n = 2(n-2)+4$, also auch von 4, also eine der Zahlen 1, 2, 4; somit ist dann n eine der Zahlen 3, 4, 6. Umgekehrt existiert zu diesen Zahlen n je genau ein m mit (1), nämlich der Reihe nach 6, 4, 3. Daher sind diese n und die zugehöringen m alle gesuchten Angaben, d. h., es lassen sich genau 6 regelmäßige Dreiecke bzw. genau 4 regelmäßige Vierecke bzw. genau 3 regelmäßige Sechsecke in der beschriebenen Weise aneinanderlegen. Bei allen anderen regelmäßigen Vielecken ist das Entsprechende nicht möglich.

5. Aus der Voraussetzung folgt durch Multiplikation mit $abc(a+b+c)$:

$(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc$,

also

$(a+b)(bc+ac+ab)+bc^2+ac^2+abc = abc$

$(a+b)(bc+ac+ab)+(a+b)c^2 = 0$

$(a+b)(bc+ac+ab+c^2) = 0$

$(a+b)[b(c+a)+c(c+a)] = 0$

$(a+b)(a+c)(b+c) = 0.$

Hieraus folgt, daß mindestens eine der Gleichungen

$a=-b$, $a=-c$, $b=-c$ gilt, w. z. b. w.

6. Wenn ein Punkt D' die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, so liegt er nach (2) in der zu BC mittelsenkrechten Ebene η. Diese geht durch A, D und den Mittelpunkt F von BC. In η liegen auch die Lote DE, $D'E'$ von D, D' auf die Ebene durch A, B, C. Ihre Fußpunkte E, E' liegen also auf der Geraden durch A und F; nach (1) gilt außerdem

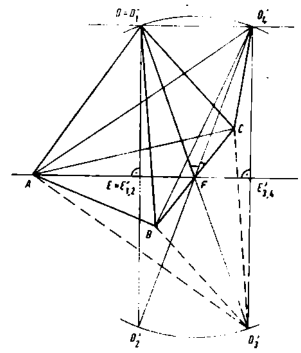
(4) $\overline{DE} = \overline{D'E'}$.

Nach (2) ist ferner $\triangle BCD' \cong \triangle BCD$, also

(5) $\overline{DF} = \overline{D'F}$.

Wegen (4), (5) sind die rechtwinkligen Dreiecke DEF und $D'E'F'$ kongruent, was in η für genau vier Lagemöglichkeiten von D' gilt, nämlich erstens für $D_1' = D$, zweitens für das Spiegelbild D_2' von D_1' bei Spiegelung an der Geraden durch A und F, drittens für das Spiegelbild D_3' von D_1' bei Spiegelung an F, viertens für das Spiegelbild D_4' von D_2' bei Spiegelung an F.

Von diesen Punkten erfüllen genau D_3' und D_4' die Bedingung (3). Da sie auch (2) und wegen (4) auch (1) erfüllen, sind sie alle Punkte der gesuchten Art.



Nun gilt $\overline{AF} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; ferner liegt E ebenso wie auf AF auch auf den anderen Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, also ist

$\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AF} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $\overline{EF} = \overline{E'F} = \frac{1}{3}\overline{AF}$, $\overline{AE'}_{3,4} = \frac{4}{3}\overline{AF} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Somit ergibt sich

$DE = D'_{3,4}E'_{3,4} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$,

$AD'_{3,4} = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2} = a\sqrt{2}$.

Klassenstufe 10

1. Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS:

$$\begin{array}{lcl} \overline{AS}+\overline{BS} & > & \overline{AB}, \\ \overline{BS}+\overline{CS} & > & \overline{BC}, \\ \overline{CS}+\overline{DS} & > & \overline{CD}, \\ \overline{AS}+\overline{DS} & > & \overline{DA}, \end{array}$$

also

$2(\overline{AS}+\overline{BS}+\overline{CS}+\overline{DS}) > \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} = u$.

Da wegen der Konvexität von $ABCD$ der Punkt S sowohl auf AC als auch auf BD liegt, gilt $\overline{AS}+\overline{CS} = e$ und $\overline{BS}+\overline{DS} = f$, so daß man

$e+f > \frac{1}{2}u$ erhält. Analog erhält man für die Dreiecke ABC, DAC, ABD, BCD:

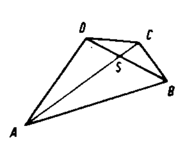
$$\begin{array}{lcl} \overline{AB}+\overline{BC} & > & \overline{AC}, \\ \overline{CD}+\overline{DA} & > & \overline{AC}, \\ \overline{AB}+\overline{DA} & > & \overline{BD}, \\ \overline{BC}+\overline{CD} & > & \overline{BD}, \end{array}$$

also $2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}) > 2(\overline{AC}+\overline{BD})$

bzw. $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} > \overline{AC}+\overline{BD}$

bzw. $u > e+f$

Aus beiden folgt die Behauptung.



2. Angenommen, $(x; y)$ sei eine Lösung der gegebenen Gleichung mit ganzen Zahlen x, y, dann gilt: $x(2x^2+y) = 7$.

Da 7 Primzahl ist, folgt, daß nur einer der Fälle

$x = 1$, $2x^2+y = 7$ und damit $y = 5$;

$x = 7$, $2x^2+y = 1$ und damit $y = -97$;

$x = -1$, $2x^2+y = -7$ und damit $y = -9$;

$x = -7$, $2x^2+y = -1$ und damit $y = -99$

vorliegen kann. Also können höchstens die Zahlenpaare (1; 5), (7; −97), (−1; −9), (−7; −99) Lösungen sein.

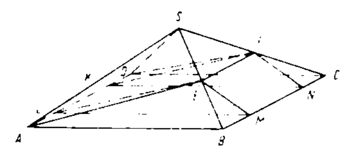
Tatsächlich gilt

$2+5-7=0$, $686-679-7=0$,

$-2+9-7=0$, $-686+693-7=0$;

jedes der genannten Zahlenpaare ist also Lösung.

3. Den Teilkörper $ABCDEF$ (mit dem Volumen V_2) zerlegen wir mit einem ebenen Schnitt durch A, C, E in eine Pyramide mit der Grundfläche $AEFD$ und der Spitze C (ihr Volumen sei V_{21}) und in eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze E (ihr Volumen sei V_{22}). Die Volumina der



vorgegebenen Pyramide und des oberen Teilkörpers $AEFDS$ seien V und V_1. Dann gilt

$V_3 = \frac{1}{4}V$ (da neben der Grundfläche auch die Höhe wegen $\overline{EB} = \frac{1}{2}\,SB$ halb so groß ist),

$V_1 = V_{21}$ (da sie gemeinsame Grundfläche und wegen $\overline{SF} = \overline{CF}$ gleiche Höhe haben) und damit $V_1 = \frac{1}{2}(V - V_3) = \frac{3}{8}V$, d. h. $V_1 : V_2 = 3:5$ w. z. b. w.

4. Es sei — dann ist

$a \equiv 0 \pmod 7$ — $a^3 \equiv 0 \pmod 7$

$a \equiv 1 \pmod 7$ — $a^3 \equiv 1 \pmod 7$

$a \equiv 2 \pmod 7$ — $a^3 \equiv 1 \pmod 7$

$a \equiv 3 \pmod 7$ — $a^3 \equiv -1 \pmod 7$

$a \equiv 4 \pmod 7$ — $a^3 \equiv 1 \pmod 7$

$a \equiv 5 \pmod 7$ — $a^3 \equiv -1 \pmod 7$

$a \equiv 6 \pmod 7$ — $a^3 \equiv -1 \pmod 7$

Eine Kubikzahl a^3 kann bei Division durch 7 also nur einen der Reste 0, 1, −1 haben.

(Anmerkung: Von Schülern, die das Rechnen mit Restklassen nicht beherrschen, läßt sich dieser Satz wie folgt beweisen:

Es sei $a = 7g+1$ (g natürliche Zahl).

Dann ist $a^3 = 7^3g^3 + 3\cdot 7^2g^2 + 3\cdot 7g + 1$ $= 7(7^2g^3 + 3\cdot 7g^2 + 3g) + 1$, d. h. a^3 läßt bei Division durch 7 den Rest 1. Entsprechend kann der Nachweis für alle anderen Fälle geführt werden.)

Angenommen keine der drei Kubikzahlen wäre durch 7 teilbar. Dann könnte die Summe der drei Kubikzahlen nur einen der folgenden Reste bei Division durch 7 haben und keinen anderen:

$1+1+1=3$ — $1-1-1=-1$

$1+1-1=1$ — $-1-1-1=-3$

In keinem dieser Fälle wäre aber die Summe der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß wenigstens eine der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar sein, w. z. b. w.

5. Offensichtlich ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche genau dann am größten, wenn die Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2 am kleinsten ist. Bezeichnet x den Abstand zwischen M und dem Mittelpunkt von k, so gilt, da dieser Mittelpunkt auf AM liegt,

$\overline{AM}=\frac{d}{2}+x$ und $\overline{MB}=\frac{d}{2}-x$ sowie $0 \leqq x < \frac{d}{2}$.

Für die Summe F_S der Flächeninhalte der Kreise k_1 und k_2 gilt nun

$$F_S=\frac{\pi}{4}((\frac{d}{2}+x)^2+(\frac{d}{2}-x)^2)=\frac{\pi}{4}(\frac{d^2}{2}+2x^2).$$

F_S wird also genau dann am kleinsten, wenn $2x^2=0$, also $x=0$ gilt, d. h. genau für $\overline{AM}=\frac{d}{2}$.

6. Es gilt $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ und folglich auch

$|\log_a b|=\frac{1}{|\log_b a|}$ Weiter gilt $(x-1)^2 \geqq 0$, für jedes reelle x, also

$x^2-2x+1 \geqq 0$, woraus man für $x=0$

$x \quad -2 \quad +\frac{1}{x} \geqq$ *und weiter*

$x+\frac{1}{2} \geqq 2$ (2) *erhält.*

Ferner gilt für $x=|\log_a b|$ wegen (1)

$\frac{1}{x}=\frac{1}{|log_a b|}=|\log_b a|$. Daraus und aus (2) folgt

$|\log_a b|+|\log_b a| \geqq 2$, w. z. b. w.

DDR-Olympiade: Aufgaben (Fortsetzung)

4. Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von -1; 0 und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen

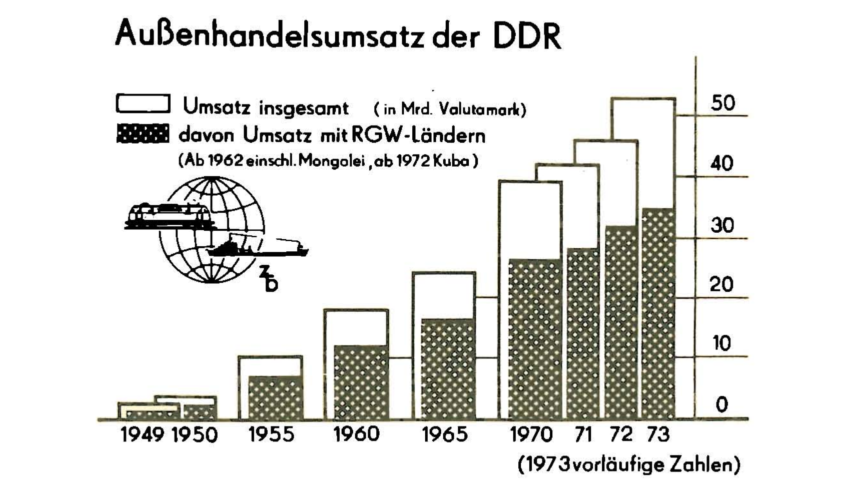
$x \cdot f(x)-\frac{1}{x} \cdot g(\frac{1}{x})=1$ (1) und

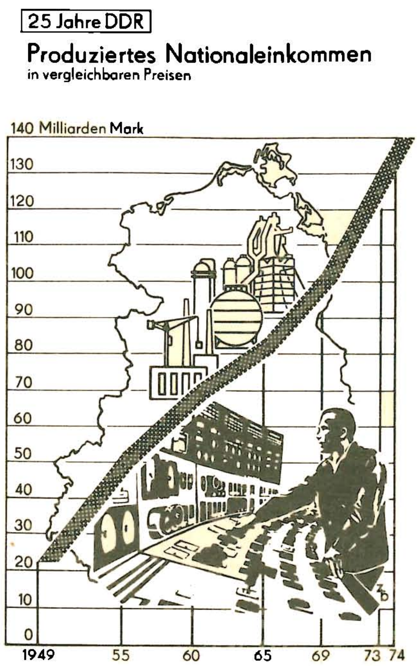
$\frac{1}{x^2} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \cdot g(x)$ (2) erfüllen.

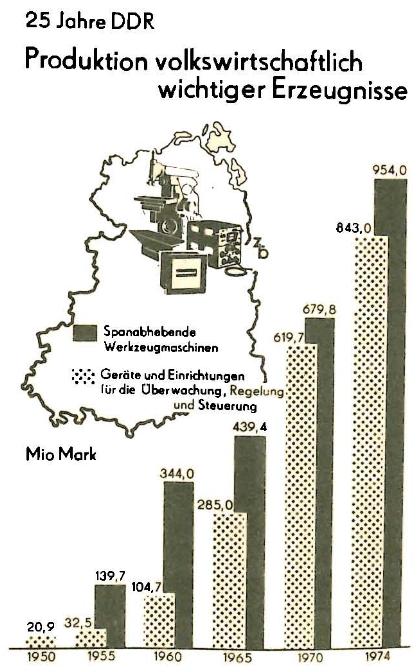
5. a) In einer Ebene sei $P_1P_2 \ldots P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1 \ldots Q_n$ so im Innern oder auf dem Rande von E gelegen, daß $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.
b) Gibt es nicht konvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?
c) Ist für jedes nicht konvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

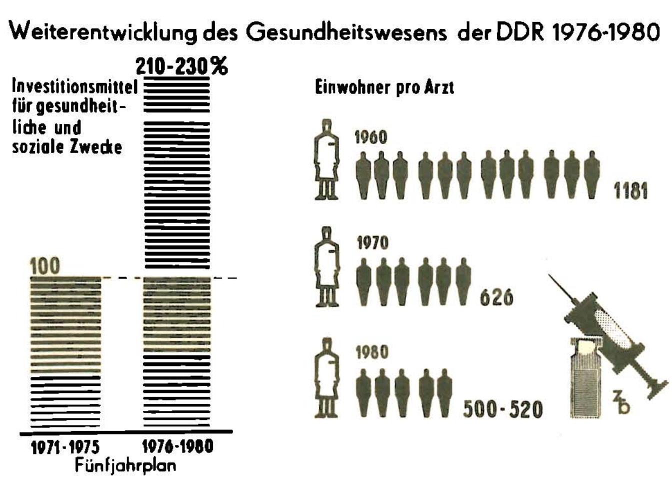
6A. Siehe Heft 4/74, Seite 1

6B. a) Man beweise folgende Behauptung:
Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen
(1) $f(x)>f''(x)$,
(2) $f'(x)>f''(x)$ gelten.
b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch
(3) $f(x)>f'(x)$ ersetzt?









Wir sind 25 Jahre jung!

Von Tag zu Tag wächst die Zahl der Kollektive, die mit neuen, wohlbedachten Wettbewerbsinitiativen an die Öffentlichkeit treten.
Zu Ehren des 25. Jahrestages der Gründung der Deutschen Demokratischen Republik übernehmen sie hohe Verpflichtungen, um die dynamische Entwicklung unserer Volkswirtschaft nach dem VIII. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands fortsetzen zu helfen. Aus der Vielzahl an Ideen und Vorhaben von Bürgern der DDR im Jubiläumsjahr unseres sozialistischen Arbeiter- und Bauernstaates haben wir einige ausgewählt und dabei Fakten und Zahlen in Form von Aufgaben zusammengestellt.

Es ist nun schon zu einer guten Tradition geworden, daß der *alpha*-Club der 29. OS zum Pressefest der Leipziger Volkszeitung im Rahmen einer Pionierbastel- und Wissensstraße jährlich an den zwei Tagen dieses Volksfestes rund 2000 Pioniere, Jugendfreunde und interessierte Erwachsene betreut. Die vorliegenden Aufgaben wurden zu einem Leporello (Faltblatt) zusammengestellt und von der LVZ gedruckt. Nun steht es auch für Wissensstraßen, Wandzeitungsarbeit, den Internationalen Tag des Kindes, die Ferienbetreuung, aber auch für den Unterricht zur Verfügung.
Mit Eifer gingen die Pioniere daran, die ihrer Klassenstufe gestellten Probleme zu lösen. Besondere Freude bereitete es ihnen, in Klasse 1 zu beginnen und zu prüfen, wie weit und wie sicher sie bis hinauf zu ihrer Klassenstufe gelangten.
Wir wünschen unseren *alpha*-Lesern genausoviel Freude und Erfolg wie den *Jungen Mathematikern* der 29. OS, die durch jährlich neu zusammengestelltes Material ihren Beitrag zu einer aktiven Freizeitgestaltung leisten.

Klassenstufe 1

- Die *Jungen Pioniere* einer 1. Klasse haben sich vorgenommen, bei der Betreuung der Rentner mitzuhelfen. Sie wollen den alten Leuten die Kohlen aus dem Keller holen und für sie einkaufen gehen. Von je zwei Schülern der Klassen 1a und 1b wird jeweils ein Rentner betreut. Zur Klasse 1a gehören 28, zur Klasse 1b gehören 26 Schüler.
Wieviel Rentner werden von den *Jungen Pionieren* dieser beiden Klassen betreut?
- Axel, Beate und Christine bereiten sich langfristig darauf vor, ihr Wohnhaus zum 25. Jahrestag der Gründung der DDR festlich zu schmücken.
Christine will 5 Wimpelketten anfertigen.
Axel will 2 Wimpelketten mehr als Beate anfertigen. Christine will 1 Wimpelkette mehr als Beate anfertigen.
Wieviel Wimpelketten wollen diese drei Jungen Pioniere gemeinsam anfertigen?

Klassenstufe 2

- Im Stadtbezirk *Dresden-Nord* sollen im Jahre 1974 zwei neue Schulen mit je 26 Klassenräumen fertiggestellt werden.
Wieviel Schüler werden es mindestens, wie viele höchstens sein, die diese neuen Schulen besuchen können, wenn eine Klasse nicht weniger als 25 und nicht mehr als 30 Schüler umfassen soll?
- Indem *Junge Pioniere* Altpapier in den Haushalten sammeln und den Erfassungsstellen zuführen, tragen sie zur Stärkung der DDR bei, und sie erfüllen zugleich einen Teil ihres Pionierauftrages. Je höher das Altpapieraufkommen ist, desto weniger Holz muß in unseren Wäldern geschlagen werden. (1 Tonne Altpapier entspricht einer Kiefer im Alter von etwa 80 Jahren.) Die Jungen Pioniere einer 2. Klasse sammeln jede Woche durchschnittlich 25 kg Altpapier.
Wieviel Wochen lang müßten sie dieselbe Menge Altpapier der Erfassungsstelle zuführen, um eine Kiefer vor dem Einschlag zu bewahren?

Klassenstufe 3

- Das Wettbewerbsprogramm des *VEB Bekleidungswerke Steppke* in Görlitz für das Jahr 1974 sieht vor, daß im Werk IV zusätzlich zum Staatsplan 5000 Hosen gefertigt werden. Im Werk II soll die Anzahl an zusätzlich gefertigten Knabenhosen 2000 Stück mehr betragen als die doppelte Anzahl der im Werk IV zusätzlich gefertigten Hosen.
Wieviel Knabenhosen werden zur besseren Versorgung der Bevölkerung zusätzlich an den sozialistischen Handel ausgeliefert?
- Jedes der beiden *Braunkohlenkombinate Senftenberg und Lauchhammer* will zu Ehren des 25. Jahrestages der Gründung der DDR 125000 Tonnen Briketts mehr erzeugen als geplant.

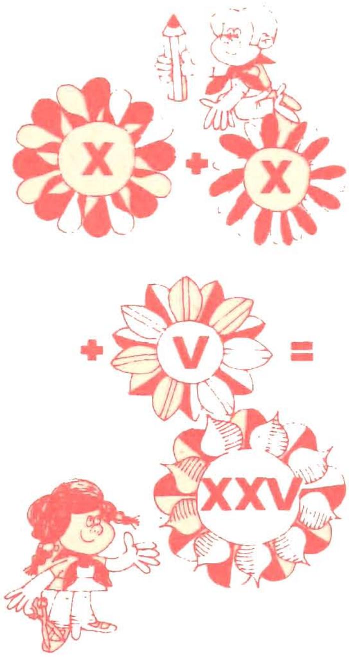
Zu Ehren des *25. Jahrestages der DDR* nehmen sich die Schüler der *OS Osternienburg* vor, ihre Leistungen noch weiter zu verbessern. Die Hälfte aller Schüler dieser Schule (Kl. 5 bis 10) nehmen am *alpha*-Wettbewerb teil. *Unser Bild:* Ausschnitt aus der Demonstration am 1. Mai.

Für wieviel 3-Personen-Haushalte würde diese zusätzliche Produktion an Briketts reichen, wenn die jährliche Zuweisung für einen 3-Personen-Haushalt 1 050 kg Brikett beträgt?

Klassenstufe 4

● Die Werkstattleiter und Ingenieure des *Kreisbetriebes für Landtechnik Strasburg*, Bezirk Neubrandenburg, haben sich im Wettbewerbsprogramm für das Jahr 1974 vorgenommen, im Vergleich zum Jahre 1973 bei jedem von den 855 zur Generalüberholung vorgesehenen Mähdreschern vom Typ E 512 für 170 Mark Material einzusparen und den Höchstpreis der Instandsetzung um 290 Mark zu unterbieten.
Welchen finanziellen Nutzen erwirtschaften diese Werktätigen, wenn für jede Generalüberholung der Höchstpreis zugrunde gelegt wird?

● Die 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte sollen im Jahre 1974 eine Transportleistung von 10,8 Millionen Tonnen erreichen. Welche Länge würde ein Güterzug mit der gleichen Transportleistung haben, der aus gedeckten Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t und einer Länge von je 12 m besteht?



Klassenstufe 5

● Das Wohnschiff *Kuhle Wampe*, das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt seit Anfang des Jahres 1974 FDGB-Urlaubsgäste. Es bietet 41 Plätze in 2- und 3-Bett-Kabinen.
Wieviel 2- und 3-Bett-Kabinen könnten auf dem Wohnschiff vorhanden sein?
Wieviel Feriengäste werden im Jahre 1974 bei einem einwöchigen Aufenthalt und einer ganzjährigen Belegung auf dem Wohnschiff erwartet?

● Im Jahre 1974 wollen die Berliner Bauschaffenden der Bevölkerung neben zahlreichen Wohnungen weitere 42 Objekte übergeben. Es handelt sich um eine Schwimmhalle, zwei Feierabendheime, fünfmal soviel Kindergärten wie Feierabendheime, vier Turnhallen mehr als Kindergärten und viermal soviel Schulen wie Kaufhallen. Wieviel neue Schulen erhält unsere Hauptstadt Berlin im Jahre 1974?

Klassenstufe 6

● Seit dem Jahre 1972 wird in Gladau, Kreis Genthin, industriemäßig Schweinefleisch produziert. Die Anlage, ein 20-Millionen-Objekt, wurde von zehn LPG und einem Volksgut als zwischenbetriebliche Einrichtung (ZBE) geschaffen. Das Kollektiv dieser Anlage beschloß im Jahre 1974 soviel Schweinefleisch zu produzieren, wie die Bevölkerung der DDR an einem Tag verbraucht. Oder anders gesagt: Die 30 000 Schweine, die hier gemästet werden, reichen aus, um 70 000 Bürger ein Jahr lang zu versorgen.
Wieviel Mastschweine werden benötigt, um eine Stadt mit 100 000 Einwohnern einen Monat (30 Tage) lang zu versorgen?

● Die Werktätigen des *Flachglaskombinates Torgau* beschlossen, im Jahre 1974 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm 140 000 m^2 Glas über den Plan hinaus zu produzieren. Die Glasmenge reicht aus für 4 500 Neubauwohnungen.
Wieviel Quadratmeter Glasscheiben werden für 10 000 Neubauwohnungen benötigt?

Klassenstufe 7

● Die *PGH Gas/Wasser* in *Berlin-Lichtenberg* wird den Anteil der Reparaturen für die Bevölkerung an den Gesamtleistungen von 69,5 % im Jahre 1972 auf 80 % im Jahre 1974 erhöhen.
Wieviel Prozent beträgt die absolute Steigerung bei den Reparaturen für die Bevölkerung im Jahre 1974 gegenüber dem Jahre 1972?

● Zur Fortsetzung der dynamischen Entwicklung unserer Volkswirtschaft nach dem VIII. Parteitag der SED sieht der Volkswirtschaftsplan 1974 vor, das Nationaleinkommen auf 105,4 % zu erhöhen. Es wird damit 133 Milliarden Mark erreichen. Das ist fast ein Drittel mehr, als es im Jahre 1969, dem 20. Jahrestag unserer Deutschen Demokratischen Republik, betrug.
Wieviel Mark betrug das Nationaleinkommen in den Jahren 1973 und 1969?

Klassenstufe 8

● Ebenso wie die Werktätigen in Industrie und Landwirtschaft stellen sich die Angehörigen der *Nationalen Volksarmee* anspruchsvolle Ziele im Jahre 1974. Im sozialistischen Wettbewerb *Soldatenauftrag XXV – Wie Thälmann kampfentschlossen – jederzeit gefechtsbereit!* kämpfen Angehörige der NVA um die Erhöhung der Kampfkraft und Gefechtsbereitschaft ihrer Einheiten.
So haben sich die Soldaten einer 200 Mann starken Einheit vorgenommen, daß 85 % von ihnen Träger der Schützenschnur werden. Um das gesteckte Ziel zu erreichen, müßten noch doppelt soviel Schützenschnüre wie bereits getragen werden und weitere 14 Schützenschnüre erkämpft werden.
Wieviel Soldaten dieser Einheit sind bereits Träger der Schützenschnur?

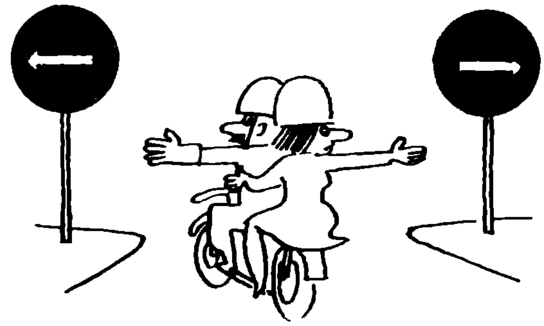
● Der Gegenplan der Werktätigen des *Stahl- und Walzwerkes Brandenburg* sieht vor, den erhöhten Staatsplan des Jahres 1974 noch um 16 000 t Rohstahl zu überbieten. Diese Menge Rohstahl, zu Grobblech ausgewalzt, ergibt rund 30 km Rohr von einem Meter Außendurchmesser. Diese Rohre werden beispielsweise im *Pumpspeicherwerk Merkersbach* gebraucht. Die *Brandenburger Stahlwerker* ersparen uns damit teuer zu bezahlende Importe.
Welche Wandstärke haben diese Rohre bei einer Dichte des Stahls von 7,85 $\frac{g}{cm^3}$?

Klassenstufe 9/10

● Im Staatshaushaltsplan der DDR für das Jahr 1974 sind Ausgaben in Höhe von 99,5 Milliarden Mark vorgesehen. Davon entfallen an Ausgaben für das materielle und kulturelle Lebensniveau des Volkes 26,7 Milliarden Mark, die sich wie folgt aufschlüsseln:
Für den Wohnungsbau (einschließlich der Zuschüsse zur Sicherung der gesetzlich festgelegten Mietpreise) werden 3,7 Milliarden Mark verwendet. Für das Bildungswesen und den Wohnungsbau (einschließlich der Zuschüsse zur Sicherung der gesetzlich festgelegten Mietpreise) sind zusammen 0,3 Milliarden Mark mehr vorgesehen als für Subventionen zur Sicherung stabiler Verbraucherpreise. Für das Bildungswesen und für Subventionen zur Sicherung stabiler Verbraucherpreise werden zusammen 17,6 Milliarden Mark ausgegeben. Die restliche Geldsumme entfällt auf sonstige Ausgaben.
Wieviel Milliarden Mark sind für sonstige Ausgaben vorgesehen?

● Die Schülerinnen einer 9. Klasse beteiligen sich an der militärpolitischen und wehrsportlichen Massenaktion *Signal DDR – 25*. Beim letzten Training der Schülerinnen dieser Klasse im Luftgewehrschießen belegte Monika den dritten Platz; die Siegerin, Bärbel, erzielte vier Ringe mehr als Monika und zwei Ringe mehr als Margit, die auf den zweiten Platz kam. Monika erreichte $\frac{4}{5}$ der Anzahl aller möglichen Ringe. Addiert man die von diesen drei Schülerinnen erreichten Ringzahlen, so erhält man das $2\frac{1}{2}$fache der Anzahl der möglichen Ringe.
Wie groß ist diese Anzahl? Welche Ringzahlen erhielten die drei Mädchen?

Teilbarkeitsbeziehungen



dargestellt für Schüler ab der sechsten Klasse

In diesem Artikel möchten wir Euch einige über den Schulstoff hinausgehende Teilbarkeitssätze erläutern. Dabei werden alle Betrachtungen im Bereich der natürlichen Zahlen ausschließlich der Null geführt, und mit einer Zahl ist daher stets eine natürliche Zahl ungleich Null gemeint.

Gehen wir von einem Beispiel aus. Wenn 1 728 von 36 geteilt wird, dann teilt 36 auch $2 \cdot 1728 = 3456$, $3 \cdot 1728 = 5184$ usw. Diese Überlegung läßt uns folgendenden Satz vermuten: Wenn die Zahl a die Zahl b teilt, dann teilt a auch jedes Vielfache (c-fache) von b.

Aus $a|b$ folgt $a|b \cdot c$.

Beim Beweis dieser Aussage stützen wir uns auf die Definition des Teilers. Ihr findet sie im Mathematikbuch der sechsten Klasse. Nach dieser Definition ist $a|b$ gleichbedeutend mit $b = a \cdot x$. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit c, so erhalten wir $b \cdot c = a \cdot x \cdot c$. Da $x \cdot c$ eine natürliche Zahl ist, folgt aus $b \cdot c = a \cdot (x \cdot c)$, daß $b \cdot c$ das $(x \cdot c)$-fache von a ist, oder anders ausgedrückt $a|b \cdot c$, was zu beweisen war.

▲1▲ Für jedes c gilt:
Aus $a|b$ folgt $ac|bc$.

Beweist diesen Satz! Auch bei diesem Beweis geht man von der Definitionsgleichung $b = a \cdot x$ aus.

▲2▲ Aus $a|b$ und $c|d$ folgt $ac|bd$.

Wählt einige Zahlenpaare $(a;\ b)$ und $(c;\ d)$ mit $a|b$ bzw. $c|d$ und prüft, ob für diese Paare die Aussage wahr ist! Beweist anschließend das Gesetz!

Betrachten wir jetzt das Zahlenpaar (12; 276). Es gilt $12|276$. Ferner wissen wir, daß 1 380 ein Vielfaches von 276 ist. Was läßt sich dann über die Zahlen 12 und 1 380 aussagen? Bestimmt habt Ihr festgestellt, daß dann 12 auch ein Teiler von 1 380 ist. Allgemein:

Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$.

Die in der Voraussetzung des Satzes enthaltenen Teilbarkeitsbeziehungen lassen sich als $b = ax_1$ und $c = bx_2$ schreiben. Setzen wir die erste dieser beiden Gleichungen in die zweite ein, so erhalten wir $c = ax_1x_2$. Damit ist c das (x_1x_2)-fache von b, also $b|c$, was bewiesen werden sollte.

Wir kommen jetzt zu einem häufig gebrauchten Satz:

Ist b teilerfremd zu a, und ist bc durch a teilbar, so ist c durch a teilbar. Zwei teilerfremde Zahlen a und b haben den größten gemeinschaftlichen Teiler 1. Schreiben wir dafür $(a, b) = 1$, so erhält man folgende Formulierung des Satzes:

Aus $a|bc$ und $(a, b) = 1$ folgt $a|c$.

Macht Euch auch den Inhalt dieses Satzes an einigen Beispielen klar! Wegen der Voraussetzung $(a, b) = 1$ ist c der größte gemeinschaftliche Teiler der Produkte bc und ac, also $(bc, ac) = c$. Ferner ist a gemeinschaftlicher Teiler von bc und ac. Da aber jeder gemeinschaftliche Teiler im größten gemeinschaftlichen Teiler enthalten ist, ist c durch a teilbar. Damit ist unser Satz bewiesen.

▲3▲ Welcher Satz läßt sich hieraus für $a = p$ folgern, wenn p eine Primzahl ist?

Da 14 ein Teiler von 882 ist und 18 ebenfalls 882 teilt, ist das Produkt $14 \cdot 18$ auch ein Teiler von ... Halt! So darf man nicht schließen. Unter welcher zusätzlichen Bedingung wird ein solcher Trugschluß vermieden? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Teiler 7 und 18 von 882. Ihr Produkt $7 \cdot 18 = 126$ teilt in der Tat auch 882. Offensichtlich liegt das daran, daß 7 und 18 zueinander tielerfremd sind. Der entsprechende Satz lautet:

Aus $a|c$ und $b|c$ mit $(a, b) = 1$ folgt $ab|c$.

Wegen $a|c$ und $b|c$ ist c ein gemeinschaftliches Vielfache von a und b. Ferner teilt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen jedes gemeinsame Vielfache dieser Zahlen. Schreiben wir das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen a und b als $[a, b]$, so gilt $[a, b]|c$, also $c = [a, b] \cdot x$. Da nach Voraussetzung a und b teilerfremd sind, ist ihr kleinstes gemeinschaftliche Vielfache gleich ihrem Produkt ab. Somit folgt $c = ab \cdot x$, was gleichbedeutend mit der zu beweisenden Behauptung $ab|c$ ist.

In allen besprochenen Gesetzen waren die Zahlen multiplikativ verknüpft. Wenden wir uns jetzt noch zwei Teilbarkeitssätzen zu, in denen die Zahlen additiv verbunden sind.

Für beliebige m und n gilt:

Aus $a|b_1$ und $a|b_2$ folgt $a|(mb_1 + nb_2)$.

Zum Beweis schreiben wir $a|b_1$ und $a|b_2$ wiederum als Gleichungen:

$$b_1 = ax_1 \text{ und } b_2 = ax_2.$$

Multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen auf beiden Seiten mit m und entsprechend die zweite mit n und addieren anschließend seitenweise, so erhält man:

$$mb_1 + nb_2 = max_1 + nax_2.$$

Wird auf der rechten Seite a ausgeklammert, also $a(mx_1 + nx_2)$, so folgt unmittelbar, daß a ein Teiler von $mb_1 + nb_2$ ist, w. z. b. w. Für $m = n = 1$ liegt ein Sonderfall des Satzes vor:

Aus $a|b_1$ und $a|b_2$ folgt $a|(b_1 + b_2)$.

▲4▲ Bildet zu dem eben bewiesenen Satz die Umkehrung! Ist diese allgemeingültig?

Der obige Satz läßt sich auch für eine Differenz aussprechen. Für beliebige m und n gilt dann:

Aus $a|b_1$ und $a|b_2$ folgt $a|(mb_1 - nb_2)$, falls $mb_1 > nb_2$,
bzw. $a|(nb_2 - mb_1)$, falls $mb_1 < nb_2$.

Während wir bei der Übung 4 die Umkehrung des Satzes gewannen, indem die gesamte Voraussetzung mit der Behauptung ausgetauscht wurde, können wir aber auch so vorgehen, daß nur ein Teil der Voraussetzung in die Umkehrung einbezogen wird. Das führt zu folgendem Satz:

Aus $a|(mb_1 + nb_2)$ und $a|b_1$ folgt $a|nb_2$.

Wenn b_1 von a geteilt wird, so ist a auch Teiler von mb_1. Nach dem eben besprochenen Satz ergibt sich dann $a|[(mb_1 + nb_2) - mb_1]$, also $a|nb_2$, w. z. b. w.

Speziell gilt auch hier wieder:

Aus $a|(b_1 + b_2)$ und $a|b_1$ folgt $a|b_2$.

▲5▲ In der XI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR, I. Stufe (Schulolympiade) wurde in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe gestellt:

Ermittelt alle natürlichen Zahlen a, für die der Term $t = \frac{a+11}{a-9}$ eine natürliche Zahl ist!

Wollt Ihr prüfen, ob Ihr alle Aufgaben richtig gelöst habt, so lest auf Seite 93 nach.

K. Becker

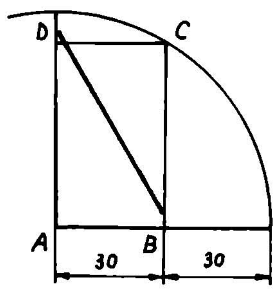
In freien Stunden alpha heiter

Unterhaltungsmathematik aus Österreich

„Und jetzt bitte die Acht üben...“

Schnell nachgedacht

In der Abbildung ist ein Rechteck einem Kreisquadranten einbeschrieben.
Ein guter Denker erkennt in weniger als zwei Minuten, wie lang die farbig gekennzeichnete Strecke $\overline{BD}$ ist.



Sonderbare Additionen

In den folgenden Additionsaufgaben, Summen zweier dreistelliger Zahlen, treten alle Ziffern von 1 bis 9 auf und jede nur einmal:

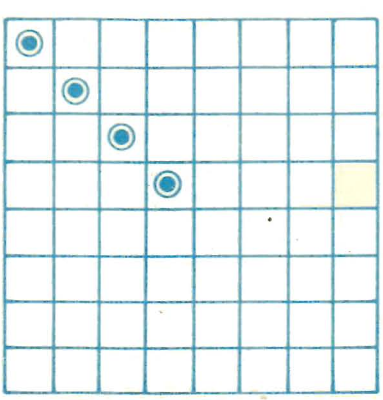
$286 + 173 = 459$

$784 + 152 = 936$

Es gibt noch weitere 19 solcher Additionen. Wer findet noch einige?

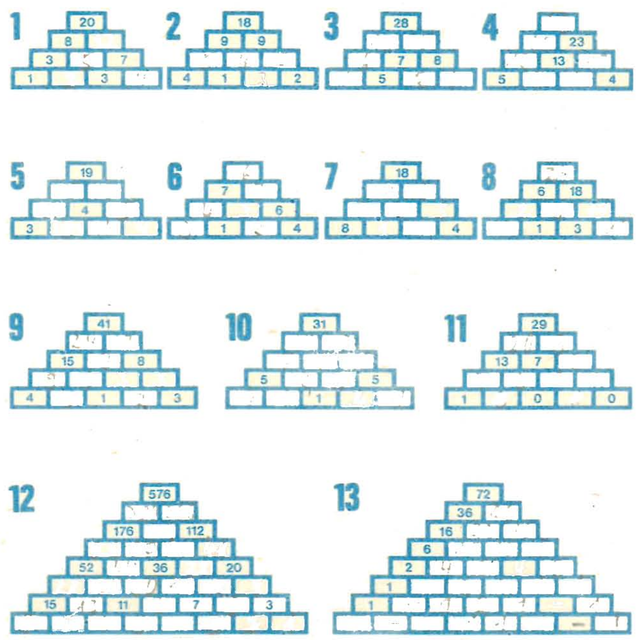
Rund um das Schachbrett

Auf einem 64-feldrigen Schachbrett stehen vier Bauern nebeneinander. Jedem Bauern soll ein gleichgroßes Feld (d. h. eine gleichgroße Fläche) zugeordnet werden. Die vier Felder sind zueinander kongruent.



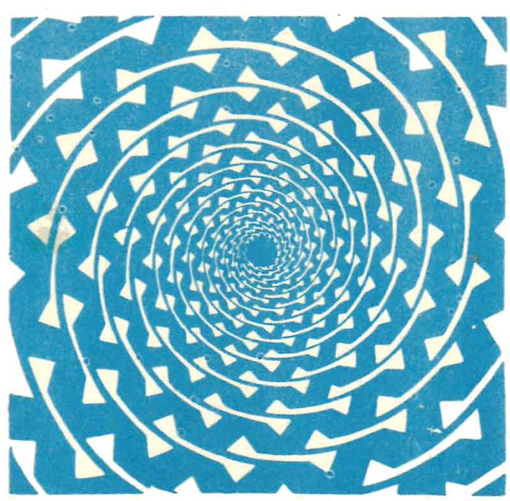
Die mathematische Ziegelmauer

Jeder Ziegel soll so mit einer Zahl versehen werden, daß sie gleich der Summe der links und rechts unter ihr liegenden Zahlen ist. *Beispiel:* Bei Mauer 1 fehlen, von unten beginnend, die Zahlen 2, 4, 5, 12.



Magische Figur

Beschreibe mit einem Satz, was du hier siehst!

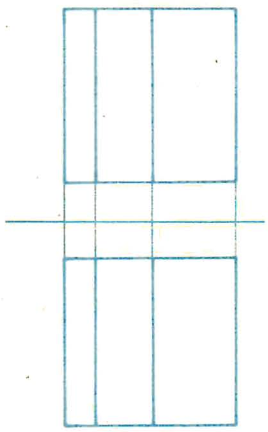


Brüder und Schwestern

Wie viele Söhne und wie viele Töchter hat die Familie? Peter hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern; Sigrid hat fünfmal so viele Brüder wie Schwestern.

Schrägbild gesucht

Von einem (nicht notwendig) konvexen Körper sind Grund- und Aufriß gegeben.
Wie sieht das Schrägbild aus?



Kryptarithmetik

■ In $a5b$ sollen a und b durch solche Ziffern ersetzt werden, daß die entstehende Zahl durch 6 teilbar ist ($a \neq 0$).
Wieviel derartige natürliche Zahlen gibt es?

$\boxed{a5b}$

● Die Buchstaben a, b, c, d und e sind so durch rationale Zahlen zu ersetzen, daß in den Reihen, Spalten und Diagonalen jeweils gleiche Summen entstehen.

a	b	13
c	−2	−22
−17	d	e

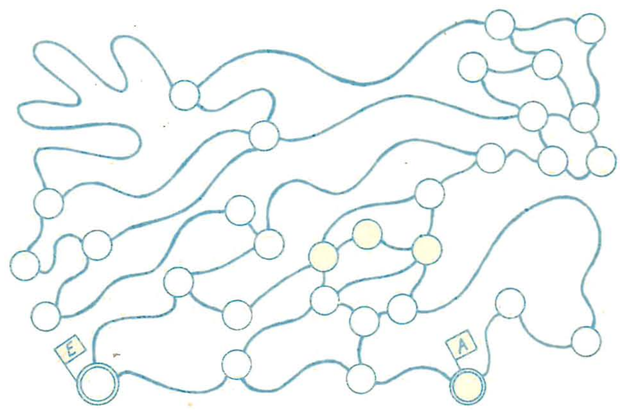
Ersetze die Buchstaben durch Ziffern! (Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern!)

$$\frac{EVE}{DID} = 0{,}\dot{T}\dot{A}\dot{L}\dot{K}TALK$$

$$z * 17 * d = dddd\ldots$$

Gut versteckt und leicht zu finden

Folgen wir den Spuren des schlauen Maulwurfs. Er hat sich zwischen seiner Schlafhöhle (A) und seinem Ausguck (dem Hügel E) ein verwirrendes System aus Röhren und Höhlen angelegt. Jeden Morgen läuft er von A nach E und passiert dabei sein Vorratslager. Merkwürdig ist nur, daß er es nur nach einem bestimmten Gesetz findet. Erreicht er den Maulwurfshügel nach drei, fünf, sieben, neun oder elf Zwischenhöhlen, hat er das Lager nicht passiert. Erreicht er dagegen E in einer geraden Anzahl von Stationen, hat er sein Lager gefunden.
Zwischen welchen beiden Höhlen liegt das Vorratslager?

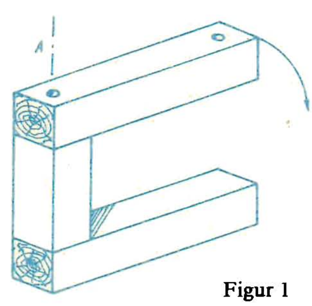


Ordne!

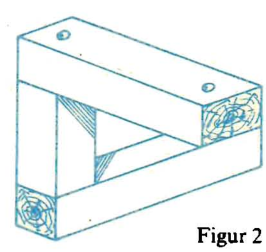
Ordne die Zahlen a, b, c, d, e, f und g nach der Größe!
a ist die drittkleinste Zahl;
b ist größer als c, aber kleiner als d;
e ist kleiner als c, aber nicht die kleinste Zahl;
f ist größer als g.

Paradox

Zu Figur 1: Der obere Balken ist um die Achse A drehbar angeordnet.



Figur 1



Figur 2

Zu Figur 2: Drehen wir den Balken im Pfeilsinn nach vorn und befestigen ihn an dem unteren Balken, so erhalten wir „einen Körper, den es nicht gibt".

Wir danken den österreichischen *alpha*-Lesern, die das vorliegende Material zur Verfügung stellten:
Dr. M. Skalicky, Wien; Dr. H. Scholz, Wien (Zeitschrift π); Prof. Th. Mühlgassner, Eisenstadt; Prof. W. Ratzinger, Linz; E. Kaltofen, Haid

Lösungen

Lösung der Aufgabe von Pawel Kröger

▲1050▲ Wir nehmen an, daß alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt sind, und daß es keine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat, daß also jede Person mindestens n Bekannte hat. Es sei nun A eine beliebige Person, die genau k Bekannte $B_1, B_2, \ldots, B_k$ hat. Dann gilt, weil A mindestens n Bekannte hat, $k \geqq n$. Von den Personen $B_1, B_2, \ldots, B_k$ können dann keine zwei miteinander bekannt sein, da vorausgesetzt war, daß es keine drei Personen gibt, von denen jede mit jeder bekannt ist.
Nun möge die Person B_i genau m Bekannte haben, wobei $m \geqq n$. Unter den Bekannten von B_i können nicht die Personen $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sein, wohl aber alle anderen Personen (und in jedem Falle die Person A).
Es gilt daher $m \geqq 2n-k$.
Wegen $n \geqq m$ folgt hieraus
Es gilt daher $m \leqq 2n-k$.
Wegen $n \leqq m$ folgt hieraus
$2n-k \geqq n$, also $n \geqq k$.
Andererseits gilt aber auch $n \leqq k$,
woraus $k=n$ folgt, d.h. die Person A hat genau n Bekannte. Das gilt aber auch für jede andere Person; denn wir haben die Person A beliebig angenommen. Jede Person hat also genau n Bekannte im Widerspruch zu der Voraussetzung, wonach nicht alle Personen die gleiche Anzahl von Bekannten haben. Aus diesem Widerspruch folgt, daß unsere Annahme, wonach es keine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat, falsch ist. Damit ist bewiesen, daß es mindestens eine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat.

Lösungen zu Heft 2/74

▲5▲1195 Aus $15 < n < 85$ folgt, da n ein Vielfaches von 17 ist, $n=17$ oder $n=34$ oder $n=51$ oder $n=68$. Da 51 durch 3 teilbar ist, entfällt 51. Die Zahlen 17, 34 und 68 erfüllen die gestellten Bedingungen.

▲5▲1196 Die gesuchten Zahlen seien a und b. Da die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen nur für $a \geqq b$ ausführbar ist, ergeben sich folgende, in der nachstehenden Tabelle angeführten Möglichkeiten.

a	b	$a+b$	$a-b$
8	8	16	0
9	7	16	2
10	6	16	4
11	5	16	6
12	4	16	8
13	3	16	10
14	2	16	12
15	1	16	14
16	0	16	16

Nur die Zahlen $a=10$ und $b=6$ erfüllen die Gleichung $(a+b)=4\cdot(a-b)$;
es gilt $10+6=4\cdot(10-6)$.

W 5 ■ 1197 Es müssen wenigstens 5 Schüler sein. Die Teiler von 96, die gleich oder größer als 5 sind, lauten 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. Wir stellen eine Tabelle auf.

Anzahl d. Schüler n	Anzahl der Äpfel je Schüler $96:n$	$n-4$	$96:(n-4)$
6	16	2	48
8	12	4	24
12	8	8	12
16	6	12	8
24	4	20	n. l.
32	3	28	n. l.
48	2	44	n. l.
96	1	92	n. l.

Nur die Zahlen in der 3. Zeile der Tabelle erfüllen die gestellten Bedingungen. Genau 12 Schüler teilen sich die Äpfel; jeder von ihnen erhält 8 Äpfel. Wären es nur 8 Schüler gewesen, so hätte jeder von ihnen 12 Äpfel erhalten.

W 5 ■ 1198 Der Umfang des Rechtecks beträgt $u=2\cdot(a+b)=2\cdot(10+16)$ cm $=52$ cm. Ein umfanggleiches Quadrat hat dann die Seitenlänge 52 cm : 4 = 13 cm; sein Flächeninhalt beträgt somit $A = 13 \cdot 13\,\text{cm}^2 = 169\,\text{cm}^2$.

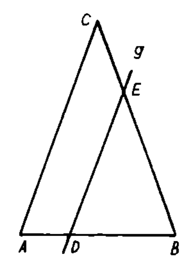
W 5*1199 Aus $V_1 = 8\cdot 10\cdot 15$ cm^3 und $V_2 = x\cdot 12\cdot 25$ cm^3 und $V_1 = V_2$ folgt $300\cdot x = 1\,200$, also $x=4$.
Die Länge der dritten Kante des zweiten Quaders beträgt 4 cm.

W 5*1200 Die zweite Zahl sei x, dann ist die erste Zahl $(x-3)$ und die dritte Zahl $(x+3)$, und ihre Summe beträgt $3\cdot x$. Aus $3\cdot x = 63$ folgt $x=21$. Die gesuchten Zahlen lauten 18, 21 und 24.

▲6▲1201 Wegen $252 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 4\cdot 9\cdot 7 = 6\cdot 6\cdot 7$ lassen sich folgende dreistellige Zahlen bilden, für die das Produkt aus ihren Ziffern 252 beträgt: 479, 497, 749, 794, 947, 974, 667, 676 und 766. Davon sind die Zahlen 794, 974, 676 und 766 durch 2 teilbar, also keine Primzahlen.
Wegen $7\cdot 71 = 497$, $7\cdot 107 = 749$ und $23\cdot 29 = 667$ sind auch die Zahlen 497, 749 und 667 keine Primzahlen.
Dagegen sind die Zahlen 497 und 947 Primzahlen, und es gilt $4\cdot 7\cdot 9 = 9\cdot 4\cdot 7 = 252$.
Daher gibt es genau zwei Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

▲6▲1202 Die gesuchte Zahl z hat die Quersumme $7+1+8+4+x = 20+x$.
Dabei ist x gleich der Summe der beiden Zahlen, die den einzusetzenden Grundziffern entsprechen, also $0 \leqq x \leqq 18$. Da z durch 18 teilbar ist, ist z durch 9 und durch 2 teilbar. Die Zahl z ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme 27 oder 36 beträgt, d. h., wenn $x=7$ oder $x=16$ beträgt. Wegen der notwendigen Teilbarkeit durch 2 muß die letzte Ziffer von z gerade sein.
a) Aus $1+6=7$ folgt, daß die kleinste dieser durch 18 teilbaren Zahlen 711 846 lautet.
b) Aus $8+8=16$ folgt, daß die größte dieser Zahlen 718 848 lautet.

W 6 ■ 1203 Aus $AC \| DE$ folgt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB$. Wegen $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ gilt somit $\sphericalangle EDB = \sphericalangle EBD$ und folglich auch $\overline{DE} = \overline{BE}$, d. h., das Dreieck DBE ist ebenfalls gleichschenklig. Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt $\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} = 13$ cm, also auch $\overline{AC} + (\overline{AD} + \overline{DB}) + (\overline{BE} + \overline{EC}) = 13$ cm. Wegen $\overline{DE} = \overline{BE}$ erhalten wir daraus durch Einsetzen $(\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EC}) + \overline{DB} = 13$ cm. Der Klammerausdruck ist gleich dem Umfang des Vierecks $ADEC$; deshalb gilt 11 cm + $\overline{DB}$ = 13 cm bzw. $\overline{DB} = 2$ cm und somit $\overline{AD} = 3$ cm $-$ 2 cm $=$ 1 cm.



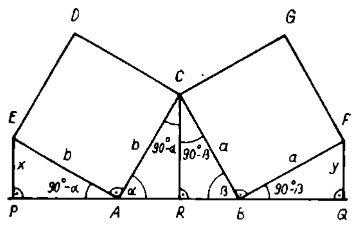
W 6 ■ 1204 Aus $a\cdot b = 30{,}2$ und $a\cdot c = 19{,}8$ folgt $a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c) = 30{,}2 + 19{,}8 = 50$.

W 6*1205 Die erste Ziffer des zweiten Faktors muß eine 2 sein; denn nur das Produkt $7\cdot 2$ endet auf die Ziffer 4. Die erste Ziffer des zweiten Summanden muß eine 1 sein; denn $5+1=6$. Die erste Ziffer des ersten Faktors muß eine 2 sein; denn nur dann kann der erste Summand mit der Ziffer 5 beginnen. Die zweite Ziffer des ersten Faktors muß 5, 6, 7, 8 oder 9 sein; nur dann wird die Aufgabe $2{*}7\cdot 2 = 5{*}4$ sinnvoll. Der erste Faktor der Aufgabe sei x. Setzt man für x die Zahlen 257, 267, 277, 287, 297 ein, so gilt $x < 300$, also $4x < 1\,200$. Daher kann die zweite Ziffer des zweiten Faktors nicht 4 oder nicht kleiner als 4 sein. Setzt man $x=257$, so gilt $5x = 1\,285$, und wir erhalten die Lösung

257 · 25 = 6 425
514
1 285
6 425.

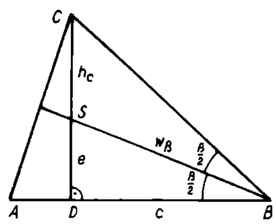
Ist $x \geqq 267$, so wird $5x \geqq 1\,335$, also entfallen die Möglichkeiten, daß die zweite Ziffer des ersten Faktors 6, 7, 8 oder 9 beträgt.

W 6*1206 Wir fällen von C das Lot CR auf die Gerade AB. Für das Dreieck ARC gilt dann $\sphericalangle ACR = 90° - \alpha$, für das Dreieck RBC gilt $\sphericalangle RCB = 90° - \beta$. Aus $\overline{AE} = \overline{AC} = b$, $\sphericalangle EPA = \sphericalangle ARC = 90°$ und $\sphericalangle EAP = \sphericalangle ACR = 90° - \alpha$ folgt $\triangle PAE \cong \triangle ARC$ und somit $\overline{AR} = x$.

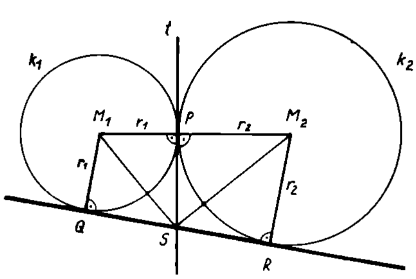


Aus $\overline{BC} = \overline{BF} = a$, $\sphericalangle BQF = \sphericalangle CRB = 90°$ und $\sphericalangle FBQ = \sphericalangle RCB = 90° - \beta$ folgt $\triangle RBC \cong \triangle BQF$ und somit $\overline{RB} = y$. Wegen $\overline{AC} = c$ und $\overline{AC} = \overline{AR} + \overline{RB}$ gilt $x + y = c$.

▲7▲1207 Wir konstruieren zunächst das Teildreieck DBS aus $\sphericalangle SDB = 90°$, $\sphericalangle DBS = \frac{\beta}{2} = 20°$ und $\overline{DS} = e = 2$ cm; dies ist eine bekannte Grundkonstruktion. Danach tragen wir in B an $\overline{BA}$ den Winkel $\beta = 40°$ an; sein freier Schenkel schneidet die über S hinaus verlängerte Strecke $\overline{DS}$ in C. Nun schlagen wir um B mit $c = 7$ cm einen Kreis, der die über D hinaus verlängerte Strecke $\overline{BD}$ in A schneidet und verbinden A mit C.



▲7▲1208 Der Abbildung ist folgendes zu entnehmen:
$\triangle QSM_1 \cong \triangle SPM_1$ ($\sphericalangle SQM_1 = \sphericalangle SPM_1 = 90°$, $\overline{PM_1} = \overline{QM_1} = r_1$, $\overline{SM_1} = \overline{SM_1}$), folglich $\overline{QS} = \overline{PS}$.
$\triangle SRM_2 = \triangle PSM_2$ ($\sphericalangle SPM_2 = \sphericalangle SRM_2 = 90°$, $\overline{PM_2} = \overline{RM_2} = r_2$, $\overline{SM_2} = \overline{SM_2}$), folglich $\overline{SR} = \overline{PS}$.
Aus $\overline{QS} = \overline{PS}$ und $\overline{SR} = \overline{PS}$ folgt $\overline{QS} = \overline{SR}$, d. h. der Punkt S halbiert die Strecke $\overline{QR}$.



W 7 ■ 1209 Der zweite Faktor sei $10a + b$. Wegen $a = 2b$ lautet der zweite Faktor $10 \cdot 2b + b = 21b$. Durch Vertauschen der Ziffern erhalten wir daraus $10 \cdot b + 2b = 12b$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 37 \cdot 21b &= 37 \cdot 12b + 666, \\ 21b &= 12b + 18, \\ 9b &= 18, \\ b &= 2. \end{aligned}$$

Probe: $37 \cdot 42 = 1\,554$, $37 \cdot 24 = 888$, $1\,554 - 888 = 666$.

W 7 ■ 1210 Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen seien a und $b = 3a - 1$. Dann gilt $6a \cdot 4b = 1680$, also $a \cdot b = 70$. Durch Einsetzung erhalten wir daraus $a \cdot (3a - 1) = 5 \cdot 14$, d. h., es gilt $a = 5$ und $b = 14$.
Es ist dies die einzige Lösung; denn jede andere Zerlegung von 70 in ein Produkt von zwei Faktoren ($1 \cdot 70 = 2 \cdot 35 = 7 \cdot 10$) erfüllt nicht die gestellten Bedingungen.

W 7*1211 Wir stützen uns auf folgenden Satz: „Die Mittelpunkte der Seiten eines konvexen Vierecks sind Eckpunkte eines Parallelogramms". Wir konstruieren zunächst das Dreieck PTQ, dessen Seiten sämtlich gegeben sind. Die Parallele zu $\overline{PT}$ durch Q schneidet die Parallele zu $\overline{QT}$ durch P im Punkte S, der Mitte der Seite $\overline{AD}$ des Trapezes. Die Mittellinie $\overline{ST}$ ist parallel zur Seite $\overline{AB}$. Wir tragen in S an $\overline{ST}$ einen Winkel von 50° an; sein freier Schenkel schneidet die Parallele zu $\overline{ST}$ durch Q im Punkte D. Die Gerade SD schneidet die Parallele zu $\overline{ST}$ durch P in A. Der Kreis um P mit $\overline{AP}$ als Radius schneidet die Gerade AP in B, die Gerade BT schneidet die Gerade DQ in C.

W 7*1212

$$\begin{aligned} 7! - 6! - 5! &= 5! \cdot 6 \cdot 7 - 5! \cdot 6 - 5! \\ &= 5!(6 \cdot 7 - 6 - 1) \\ &= 5! \cdot 35 \\ &= 120 \cdot 35 = 4200 \end{aligned}$$

▲8▲1213 Wir berechnen zunächst die Summe s und erhalten

$$\begin{aligned} s &= n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) \\ &\quad + (n^2 + 6n + 9) \\ &= 4n^2 + 12n + 14 \\ &= (2n)^2 + 2 \cdot 2n \cdot 3 + 3^2 + 5 \\ &= (2n + 3)^2 + 5. \end{aligned}$$

Die Summe s ist also genau dann ein Vielfaches von 10, wenn die Zahl $(2n + 3)^2$ auf die Grundziffer 5 endet. Das trifft nur zu, wenn die Zahl $2n + 3$ ebenfalls auf die Grundziffer 5 endet. Ist nun $n = 5k + 1$, wobei k eine natürliche Zahl ist, so gilt

$$2n + 3 = 2(5k + 1) + 3 = 10k + 5,$$

d. h., die Zahl $2n + 3$ endet auf die Grundziffer 5. Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen n, die die verlangte Eigenschaft haben, nämlich die Zahlen

$$n = 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots,\ 5k + 1,\ \ldots.$$

▲8▲1214 a) Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß es ein ebenes konvexes n-Eck gibt, das vier spitze Winkel hat. Da jeder dieser spitzen Winkel kleiner als 90° ist, ist ihre Summe kleiner als $4 \cdot 90° = 2 \cdot 180°$. Da das n-Eck konvex ist, ist jeder der restlichen $n - 4$ Winkel kleiner als 180°; ihre Summe ist also kleiner als $(n - 4) \cdot 180°$.
Für die Summe aller Winkel dieses n-Ecks gilt daher die Ungleichung:
$s < 2 \cdot 180° + (n - 4) \cdot 180° = (n - 2) \cdot 180°$.
Diese Ungleichung steht aber im Widerspruch zu der Gleichung für die Winkelsumme des n-Ecks:

$$s = (n - 2) \cdot 180°.$$

Daher ist die obige Annahme falsch, womit bewiesen ist, daß ein ebenes konvexes n-Eck höchstens drei spitze Winkel hat.
b) Die Abbildung zeigt ein konvexes Fünfeck, das die Winkel 60°, 75°, 165°, 165°, 75°, also genau drei spitze Winkel hat.

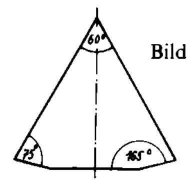


Bild 1

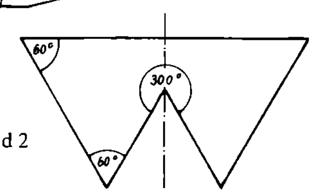


Bild 2

c) Die Abbildung zeigt ein ebenes nichtkonvexes Fünfeck, das die Winkel 60°, 60°, 300°, 60°, 60°, also vier spitze Winkel hat. Dieses Fünfeck ist aber nichtkonvex, da ein Winkel ein überstumpfter Winkel (300°) ist.

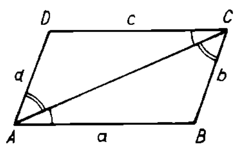
W 8 ■ 1215 Die drei Brüder besaßen zusammen $10 + 10 + 10 = 30$ Ziegen und $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 60$ Zicklein. Jeder der drei Brüder sollte also 10 Ziegen und 20 Zicklein erhalten, also jeweils doppelt soviel Zicklein wie Ziegen.
Da nun die Zicklein nicht von ihren Müttern getrennt werden sollten, mußte jeder der Brüder entweder zusammen mit einer Ziege, die zwei Zicklein hat, diese beiden Zicklein erhalten oder zusammen mit zwei Ziegen, von denen die eine ein Zicklein und die andere drei Zicklein hat, diese vier Zicklein erhalten. Daraus ergibt sich bereits eine der möglichen Aufteilungen, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Der erste Bruder erhält 10 Ziegen, die je zwei Zicklein haben, also dazu $10 \cdot 2 = 20$ Zicklein. Der zweite Bruder erhält 5 Ziegen, die je ein Zicklein haben, und außerdem 5 Ziegen, die je drei Zicklein haben, zusammen also 10 Ziegen und $5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 20$ Zicklein. Der dritte Bruder erhält die übrig bleibenden 5 Ziegen, die je ein Zicklein haben, und außerdem die übrig bleibenden 5 Ziegen, die je drei Zicklein haben, zusammen also 10 Ziegen und $5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 20$ Zicklein.

W 8 ■ 1216 Aus $\overline{AF} = 14$ cm und $\overline{AF} = \overline{AE}$ folgt $\overline{AE} = 14$ cm. Aus $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = 14$ cm $+ 7$ cm $= 21$ cm und $\overline{DC} = \overline{AB}$ folgt $\overline{DC} = 21$ cm. Aus $\overline{DC} = \overline{CE}$ folgt $\overline{CE} = 21$ cm und somit $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE} = 14$ cm $+ 21$ cm

35 cm. Nach dem *Satz des Pythagoras* gilt $\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$, also $\overline{BC}^2=(35^2-21^2)\,\text{cm}^2$ $=(1225-441)\,\text{cm}^2=784\,\text{cm}^2$. Daraus folgt $\overline{BC}=28$ cm, d. h., die Rechteckseite $\overline{BC}$ hat eine Länge von 28 cm.

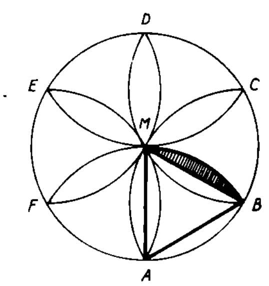
W 8*1217 Aus $d+a=b+c$ folgt $a-b=c-d$. Wegen $a+b=c+d$ folgt weiter durch Addition $2a=2c$, also $a=c$. Ferner folgt durch Subtraktion $2b=2d$, also $b=d$.
Daher gilt wegen $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$, $\overline{AC}=\overline{AC}$

$$\triangle ABC\cong\triangle ACD.$$



Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ACD$ und, da diese Winkel Wechselwinkel an den von AC geschnittenen Geraden AB und CD sind, $AB\parallel CD$. Ferner folgt $\sphericalangle BCA=\sphericalangle CAD$, also $BC\parallel AD$. Also ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, w. z. b. w.

W 8*1218 Es seien A, B, C, D, E, F die Spitzen der Rosette und M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, der den Radius r hat. Dann sind wegen $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{AB}=\overline{MC}=\overline{BC}$ usw. die Dreiecke MAB, MBC usw. gleichseitig, und alle sechs Teile der Rosette sind kongruent.



Wegen $\sphericalangle MAB=60$ ist der Flächeninhalt des durch die Radien $\overline{AM}$ und $\overline{AB}$ sowie durch den Kreisbogen $\widehat{MB}$ begrenzten Sektors gleich $\frac{\pi}{6}r^2$. Andererseits ist der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MAB gleich $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Daher ist der Flächeninhalt des durch die Sehne $\overline{MB}$ und durch den Bogen $\widehat{MB}$ begrenzten Kreisabschnitts gleich $\frac{\pi}{6}r^2-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.
Da die Rosette aus 12 kongruenten Kreisabschnitten besteht, ist der Flächeninhalt der Rosette gleich

$$A_1=12\left(\frac{\pi}{6}r^2-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}\right)=r^2(2\pi-3\sqrt{3})$$
$$\approx 1{,}087\,r^2.$$

Nun ist der Flächeninhalt des umschriebenen Kreises gleich

$$A_2=\pi r^2\approx 3{,}1416r^2.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{A_1}{A_2}\approx\frac{1{,}087r^2}{3{,}1416r}\approx 0{,}346>\frac{1}{3}.$$

Der Flächeninhalt der Rosette ist also nur etwas größer als $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des umbeschriebenen Kreises.

W 9 ■ 1220 a) Es sei $t_1=10$s die Zeit, in der die Geschwindigkeit

$v_1=80\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}=\frac{80\,000}{3\,600}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$=\frac{200}{9}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ erreicht wird. Ferner sei a die Beschleunigung. Dann gilt $v_1=a\cdot t_1$, also

$a=\frac{v_1}{t_1}=\frac{200}{9\cdot 10}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}=\frac{20}{9}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$\approx 2{,}222\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Die Beschleunigung beträgt also rund $2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

b) Dabei hat der Kraftwagen eine Strecke von

$s_1=\frac{a\cdot t_1^2}{2}=\frac{20\cdot 100}{9\cdot 2}\,\text{m}=\frac{1000}{9}\,\text{m}\approx 111{,}11$ m,

d. s. rund 111 m, zurückgelegt.

c) Es sei t_2 die Zeit, in der die Geschwindigkeit

$v_2=150\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}=\frac{150\,000}{3\,600}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$=\frac{125}{3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ erreicht wird. Dann gilt wegen

$a=\frac{20}{9}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ und $v_2=a\cdot t_2$

$t_2=\frac{v_2}{a}=\frac{125\cdot 9}{3\cdot 20}\,\text{s}=\frac{75}{4}\,\text{s}=18{,}75$ s.

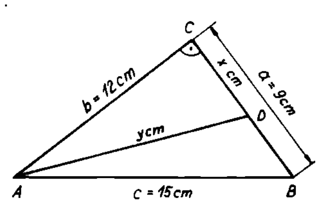
Der Kraftwagen erreicht also seine Höchstgeschwindigkeit von $150\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ in 18,75 s, d. s. rund 19 s.

d) Die dabei zurückgelegte Strecke beträgt

$s_2=\frac{a\cdot t_2^2}{2}=\frac{20\cdot 18{,}75^2}{9\cdot 2}\,\text{m}=10\cdot 6{,}25^2$ m

≈ 391 m.

W 9 ■ 1221 Wegen $9^2+12^2=15^2$ ist nach der Umkehrung des *Satzes des Pythagoras* das Dreieck ABC rechtwinklig, und es gilt $\gamma=90°$.



Da auch das Dreieck ADC rechtwinklig ist, gilt nach dem *Satz des Pythagoras*
$y^2=x^2+144$, also $x^2=y^2-144$.
Da x ganzzahlig sein soll, muß y^2-144 eine Quadratzahl sein. Weil D ein innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$ sein soll, muß ferner $12<y<15$ gelten. Da auch y ganzzahlig sein soll, kann nur $y=13$ oder $y=14$ sein.
Für $y=13$ erhält man $x^2=169-144=25=5^2$, also $x=5$.
Für $y=14$ erhält man $x^2=196-144=52$; in diesem Falle ist also x nicht ganzzahlig.
Daher läßt sich auf der Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC genau ein Punkt D so finden, daß die Maßzahlen der Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ ganzzahlig sind. Es gilt $\overline{CD}=x\,\text{cm}=5$ cm und $\overline{AD}=y\,\text{cm}=13$ cm.

W 9*1222 Wegen $a+b+c=0$ gilt $(a+b+c)^2=0$, also

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0,$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0,$$
$$ab+ac+bc=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \qquad (1)$$

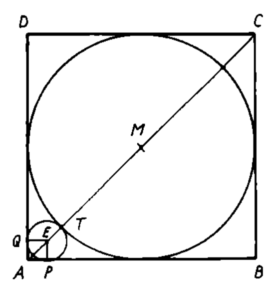
Nun gilt aber für alle reellen Zahlen a, b, c $a^2\geqq 0$, $b^2\geqq 0$, $c^2\geqq 0$, also $a^2+b^2+c^2\geqq 0$.
Daraus folgt

$$-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\leqq 0. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt daher

$$ab+ac+bc\leqq 0,\ \text{w. z. b. w.}$$

W 9*1223 Es seien $ABCD$ das gegebene Quadrat mit der Seitenlänge a und k_1 der einbeschriebene Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{a}{2}$. Dann gibt es vier Möglichkeiten für die Lage des Kreises k_2, der aus Symmetriegründen in allen Fällen den gleichen Radius x hat. Wir nehmen an, daß der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt E so liegt, daß er die Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ des Quadrats in den Punkten P bzw. Q sowie den Kreis k_1 in dem Punkt T berührt.



a) Dann gilt $\overline{ET}=x$;
$\overline{AE}=x\sqrt{2}$, da AE Diagonale des Quadrates $APEQ$ ist;
$\overline{AM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, da $\overline{AM}$ halbe Diagonale des Quadrates $ABCD$ ist; $\overline{MT}=\frac{a}{2}$.
Daraus folgt
$\overline{AE}+\overline{ET}+\overline{MT}=\overline{AM}$,

$$x\sqrt{2}+x+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{2},\ x(\sqrt{2}+1)=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1),$$
$$x=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{a}{2}\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{a}{2}(3-2\sqrt{2})\approx 0{,}0858\,a.$$

b) Der Flächeninhalt des Kreises k_1 ist gleich $A_1=\frac{\pi}{4}a^2=0{,}25\,\pi a^2$. Der Flächeninhalt des Kreises k_2 ist gleich $A_2=\pi x^2\approx 0.0858\pi a^2$ $\approx 0{,}00736\,\pi a^2$. Daraus folgt

$$\frac{A_1}{A_2}\approx\frac{0{,}25}{0{,}00736}\approx 34{,}0.$$

Der Flächeninhalt des Kreises k_1 ist also rund 34 mal so groß wie der des Kreises k_2.

W 10/12 ■ 1224 Es sei n die Anzahl der Münzen, die der Vater zu gleichen Teilen an seine Söhne verteilen wollte.

Dann erhielt der 1. Sohn 1 Münze und $\frac{1}{7}$

des Restes, das sind $\frac{n-1}{7}$; insgesamt erhielt also der 1. Sohn

$$s_1 = 1+\frac{n-1}{7}. \qquad (1)$$

Der 2. Sohn erhielt 2 Münzen und dazu $\frac{1}{7}$ des Restes. Dieser Rest beträgt jetzt, nachdem der 1. Sohn s_1 Münzen erhalten hat,
$n-s_1-2=n-1-\frac{n-1}{7}-2$; also erhielt der 2. Sohn

$$s_2 = 2+\frac{n-1-\frac{n-1}{7}-2}{7}. \qquad (2)$$

Da jeder Sohn den gleichen Anteil erhielt, gilt $s_1=s_2$, also wegen (1) und (2)

$$1+\frac{n-1}{7}=2+\frac{n-1-\frac{n-1}{7}-2}{7}.$$

Daraus folgt

$$7+n-1=14+n-1-\frac{n-1}{7}-2,$$
$$\frac{n-1}{7} = 5,$$
$$n-1 = 35,$$
$$n = 36.$$

Der Vater besaß also insgesamt 36 Münzen. Der 1. Sohn erhielt $s_1=1+\frac{35}{7}=1+5=6$ 6 Münzen, der 2. Sohn $s_2=2+\frac{28}{7}=6$ Münzen, der 3. Sohn $s_3=3+\frac{21}{7}=6$ Münzen, der 4. Sohn $s_4=4+\frac{14}{7}=6$ Münzen, der 5. Sohn $s_5=5+\frac{7}{7}=6$ Münzen und der 6. Sohn $6+\frac{0}{7}=6$ Münzen. Damit waren alle Münzen verteilt.

Der Vater hatte also genau 6 Söhne.

W 10/12 ■ 1225 Es sei (x, y, z) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Dann sind $x, y, z, x+y, x+z$ und $y+z$ sämtlich von Null verschieden, da sonst die Gleichungen (1), (2) oder (3) nicht erfüllt wären. Daher sind auch die folgenden drei Gleichungen erfüllt, die man erhält, wenn man jeweils auf beiden Seiten die reziproken Werte einsetzt:

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{2} \;(4) \qquad \frac{x+z}{xz}=\frac{4}{3} \;(5) \qquad \frac{y+z}{yz}=\frac{5}{6} \;(6)$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \;(7) \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3} \;(8) \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \;(9)$$

Durch Subtraktion erhält man aus (7) und (8)

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}; \qquad (10)$$

Weiter folgt durch Addition aus (9) und (10)

$$\frac{2}{y}=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1, \text{ also } y=2. \qquad (11)$$

Ferner folgt aus (7)

$\frac{1}{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$, also $x=1$ und aus (8) (12)

$$\frac{1}{z}=\frac{4}{3}-\frac{1}{x}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}, \text{ also } z=3. \qquad (13)$$

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2), (3) überhaupt eine Lösung hat, so kann es nur die Lösung (1, 2, 3) sein. Nun gilt für $x=1$, $y=2$, $z=3$

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1\cdot 2}{1+2}=\frac{2}{3}, \quad \frac{xz}{x+z}=\frac{1\cdot 3}{1+3}=\frac{3}{4},$$
$$\frac{yz}{y+z}=\frac{2\cdot 3}{2+3}=\frac{6}{5};$$

d. h. die Gleichungen (1), (2), (3) sind erfüllt, und dieses Gleichungssystem hat genau eine Lösung, nämlich (1, 2, 3).

W 10/12*1226 Es seien x und y zwei reelle Zahlen, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Dann gilt

$$x+y=xy=x^2-y^2. \qquad (1)$$

Aus (1) folgt

$$x+y=x^2-y^2,$$
$$x+y=(x+y)(x-y). \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) ist erfüllt, wenn $x+y=0$ oder wenn $x-y=1$.

1. Ist $x+y=0$, so ist $y=-x$, (3)
also wegen (1)

$$x+y=xy,$$
$$x-x=-x^2,$$
$$x^2=0,$$

also $x=0$ und wegen (3) $y=0$. (4)

Wir haben damit die erste Lösung des Gleichungssystems (1) erhalten; denn für $x_1=0$, $y_1=0$ ist dieses Gleichungssystem erfüllt.

2. Ist $x-y=1$, so ist $y=x-1$. (5)
Wegen (1) folgt dann

$$x+y=xy,$$
$$x+x-1=x(x-1),$$
$$x^2-3x+1=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei Lösungen, nämlich

$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; wegen (5) ist dann

$y_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; und $x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$;

wegen (5) ist dann $y_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

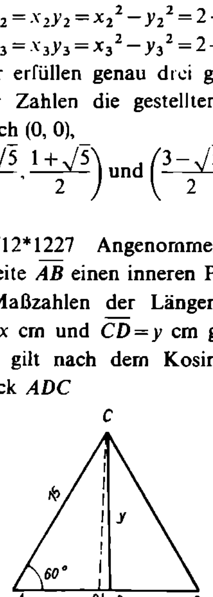
Das sind aber auch Lösungen von (1); denn es gilt

$$x_2+y_2=x_2y_2=x_2^2-y_2^2=2+\sqrt{5},$$
$$x_3+y_3=x_3y_3=x_3^2-y_3^2=2-\sqrt{5}.$$

Daher erfüllen genau drei geordnete Paare reeller Zahlen die gestellten Bedingungen, nämlich (0, 0),

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ und } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

W 10/12*1227 Angenommen, es gibt auf der Seite $\overline{AB}$ einen inneren Punkt D so, daß die Maßzahlen der Längen der Strecken $\overline{AD}=x$ cm und $\overline{CD}=y$ cm ganzzahlig sind. Dann gilt nach dem Kosinussatz für das Dreieck ADC



$$y^2=15^2+x^2-2\cdot 15\cdot x\cdot\cos 60°, \qquad (1)$$

also wegen $\cos 60°=\frac{1}{2}$

$$y^2=225+x^2-15x,$$
$$x^2-15x+225-y^2=0. \qquad (2)$$

Da der Punkt D ein innerer Punkt der Seite $\overline{AB}$ ist, ist y kleiner als 15 und größer oder gleich der Maßzahl der Höhe h des gleichseitigen Dreiecks ABC. Nun gilt

$h=\frac{15}{2}\sqrt{3}>\frac{15}{2}\cdot 1{,}7>12$, also $12<y<15$.

Da aber y ganzzahlig ist, kann nur $y=13$ oder $y=14$ sein. Für $y=13$ erhalten wir aus (2) die quadratische Gleichung

$$x^2-15x+225-169=0,$$
$$x^2-15x+56=0,$$

die die beiden Lösungen

$x_1=\frac{15}{2}+\sqrt{\frac{225}{4}-56}=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$ und

$x_2=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}=7$ hat. Für $y=14$ erhalten wir aus (2) die quadratische Gleichung

$$x^2-15x+29=0,$$

die die beiden nicht ganzzahligen Lösungen

$x_1=\frac{15+\sqrt{109}}{2}$ und $x_2=\frac{15-\sqrt{109}}{2}$ hat.

Die Gleichung (1) hat also nur zwei Lösungen, nämlich

$x_1=8$, $y_1=13$ und $x_2=7$, $y_2=13$,

die den gestellten Bedingungen entsprechen. Daher gibt es auf der Seite $\overline{AB}$ genau zwei innere Punkte D und D' mit $\overline{AD}=8$ cm und $\overline{AD'}=7$ cm, die die geforderten Eigenschaften haben.

Lösungen zu: Teilbarkeitsregeln

▲1▲ $a|b$, das heißt $b=ax$. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit c und erhalten $bc=axc$. Wegen der Kommutativität der Multiplikation folgt $bc=ac\cdot x$, also $ac|bc$. w. z. b. w.

▲2▲ $a|b$, das heißt $b=ax_1$,
$c|d$, das heißt $d=cx_2$. Beide Seiten der Gleichungen werden multipliziert:

$$bd=ax_1cx_2=ac\cdot x_1x_2.$$

Damit ist bd das (x_1x_2)-fache von ac, woraus unsere Behauptung $ac|bd$ folgt.

▲3▲ Für jede Primzahl p folgt aus $(p, b)=1$ sofort $p \nmid b$. Somit
aus $p|bc$ und $p|b$ folgt $p|c$.

Eine Primzahl p geht in einem Produkt dann und nur dann auf, wenn sie in mindestens einem Faktor aufgeht.

▲4▲ Umkehrung:
Aus $a|(xb_1+yb_2)$ folgt $a|b_1$ und $a|b_2$.

Ein Gegenbeispiel zeigt unmittelbar, daß dieser Satz nicht allgemeingültig ist. Betrachten wir dazu die Zahl 21, die sich durch 3 teilen läßt. Zwar gibt es additive Zerlegungen von 21, bei denen jeder Summand ein Vielfaches von 3 ist (etwa $15+6$), daneben treten aber auch solche auf, in deren Summanden die Zahl 3 nicht enthalten ist (beispielsweise $17+4$).

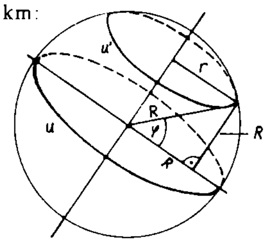
▲5▲ Wegen $t\in N$ und $a\in N$ folgt für den Nenner $a-9\geqq 1$, also $a\geqq 10$.

Ferner muß $(a-9)|(a+11)$ gelten. Aus $(a-9)|[(a-9)+20]$ und $(a-9)|(a-9)$ folgt $(a-9)|20$. Ersichtlich muß $a \leqq 29$ sein. Die gesuchten Zahlen a liegen somit im Intervall $10 \leqq a \leqq 29$. Die Teilbarkeitsbedingung $(a-9)|20$ wird erfüllt von den Zahlen $a \in \{10, 11, 13, 14, 19, 29\}$.
Diese Zahlen bilden die Lösungsmenge.

Lösungen zu:
Wir bestimmen die geographischen Koordinaten unseres Heimatortes

1. a) Die Äquatorlänge beträgt
$$u = 2\pi R = 40\,077 \text{ km}.$$
Da es auf jeder Erdhalbkugel 180 Längenkreise gibt, dividieren wir durch 360 und erhalten
$$a = \frac{u}{360} = 111 \text{ km}.$$
b)
$$r^2 + R^2 \sin^2\phi = R^2$$
$$r^2 = R^2(1-\sin^2\phi) = R^2\cos^2$$
$$r = R\cos\phi$$
$$a = \frac{u'}{360} = \frac{2\pi R}{360}\cos\phi$$
c) 1. Ermitteln des Abstandes zweier Längenkreise in der geografischen Breite:
$$a = \frac{2\pi R}{360°} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1'32''}{1°} \approx 1{,}9 \text{ km}$$

2. Proportion zur Berechnung des Fehlers Δa in km:



$$\frac{\Delta a}{\Delta\lambda} = \frac{a}{1}, \quad \Delta a = \frac{a \cdot \Delta\lambda}{1°} = 1.78 \text{ km}$$

Die Differenz der MEZ zur wahren Ortszeit können wir mit folgender Proportion berechnen:
$$\frac{1\text{ h}}{15°} = \frac{\Delta t}{\Delta\lambda}, \quad \Delta t = \frac{1\text{ h} \cdot \Delta\lambda}{15°} = \frac{60\text{ min}\,(15° - \lambda)}{15°}$$
Für die Orte mit $\lambda < 15°$ erhalten wir aus der Proportion positive, für die Orte jenseits des 15. Längenkreises negative Zeitdifferenzen:

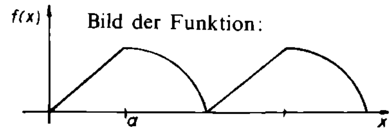
Leipzig	+10,4 min	Bratislava	− 8,4 min
Döbeln	+ 7,6 min	Kraków	−19,6 min
Berlin	+ 6,4 min	Warschau	−24,4 min
Dresden	+5,2 min		

Da sich die Sonne auf ihrer scheinbaren täglichen Bahn von Ost nach West bewegt, ist es in Leipzig 12.10, in Döbeln 12.08, in Berlin 12.06, in Dresden 12.05, in Bratislava 11.52, in Kraków 11.40 und in Warschau 11.36 Uhr wahre Ortszeit.

Lösung der Aufgabe zu:
Ein Brief aus Potsdam

$$g(x) = mx, \; g(0) = 0, \; g(a) = ma.$$
Aus (7) folgt dann $m = \frac{\sqrt{A}}{a}$, d. h. $g(x) = \frac{\sqrt{A}}{a}x$.
$$\sqrt{A - [g(x-a)]^2} = \sqrt{A - \frac{A}{a^2}(x-a)^2}$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{Ax(2a-x)}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{A}}{a}x & \text{für } 0 \leqq x \leqq a \\ \frac{1}{a}\sqrt{Ax(2a-x)} & \text{für } a \leqq x \leqq 2a. \end{cases}$$



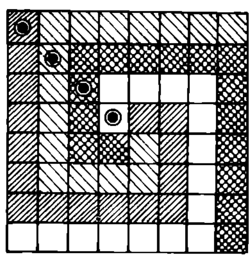
Lösungen zu alpha-heiter 4/74
(Unterhaltungsmathematik aus Österreich)

Schnell nachgedacht

Die Strecke $\overline{BD}$ ist Diagonale des Rechtecks $ABCD$. Sie ist genausolang wie die Diagonale $\overline{AC}$; diese ist, wie aus der Abbildung leicht zu entnehmen ist, gleich dem Radius des Kreises, d. h. 6 cm lang.

Sonderbare Additionen

387 + 162 = 549; 295 + 173 = 468;
394 + 281 = 675; 394 + 182 = 576;
467 + 352 = 819; 397 + 251 = 648;
487 + 152 = 639; 493 + 182 = 675;
576 + 342 = 918; 576 + 243 = 819;
586 + 341 = 927; 586 + 143 = 729;
596 + 142 = 738; 593 + 271 = 864;
675 + 243 = 918; 596 + 241 = 837;
695 + 142 = 837; 683 + 271 = 954;
783 + 162 = 945



Rund um das Schachbrett

Die mathematische Ziegelmauer

12. Ziegelpyramide: 320, 256, 144, 16, 80, 64, 48, 44, 28, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 13, 9, 5, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;
13. Ziegelpyramide: 36, 20, 16, 10, 10, 6, 4, 6, 4, 2, 1, 3, 3, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1.

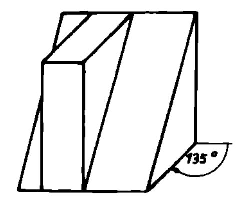
Brüder und Schwestern

In der Familie sind 5 Brüder und 2 Schwestern.

Magische Figur

Man sieht keine Spirale, sondern konzentrische Kreise!

Schrägbild gesucht



Kryptarithmetik

150, 156, 252, 258, 354, 450, 456, 552, 558, 654, 750, 756, 852, 858, 954

DID	303	EVE	242
$TALK$	7986		
Z	65359477124183...		
$Z \cdot 17$	111111111		
d	1 oder 2, 3, ..., 9		

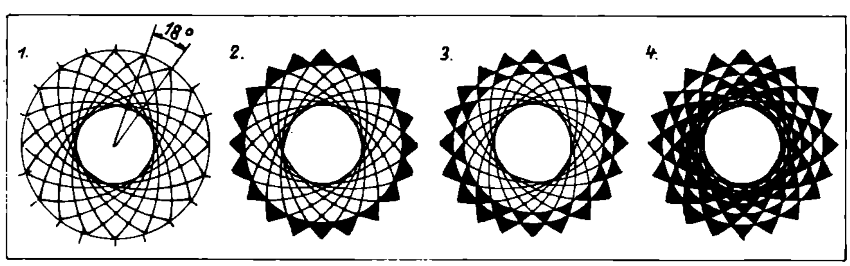
Gut versteckt und leicht zu finden

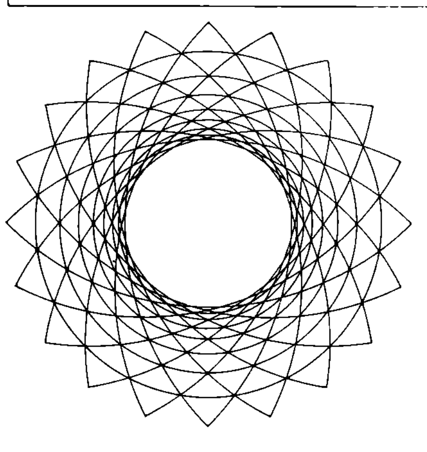
Das Vorratslager liegt zwischen der 10. und 11. Höhle.

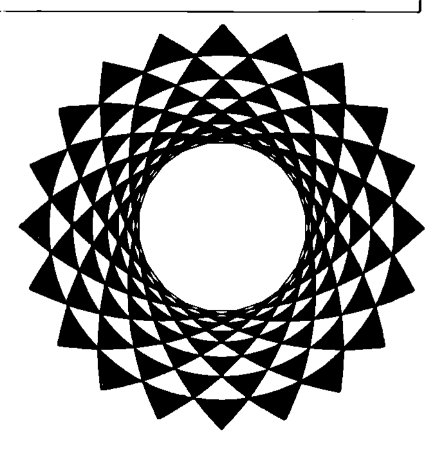
Ordne!

Es gibt mehrere Lösungen, eine davon: $g < e < a < c < b < d < f$

Mit Zirkel und Winkelmesser







Vom Jakobstab zum Sextanten

Der Jakobstab

Bis ins 18. Jahrhundert hin wurde der nach seinem Erfinder genannte „Jakobstab" verwendet, bevor er von dem handlicheren und genaueren *Sextanten* verdrängt wurde.

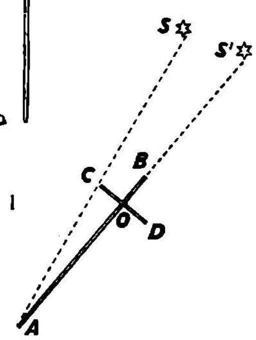
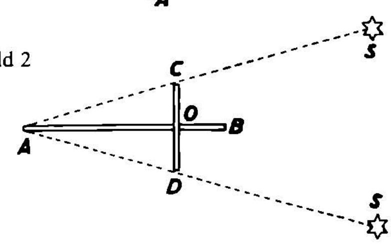


Bild 1

Bild 2



Der *Jakobstab* besteht aus einem etwa 70 bis 100 cm langen Lineal oder einer Latte $\overline{AB}$, an der die Schubleiste $\overline{CD}$ entlanggleitet. Die beiden Arme $\overline{CO}$ und $\overline{OD}$ der Schubleiste sind einander gleich. Will man mit Hilfe dieses Winkelmessers die Winkelentfernung zwischen zwei Sternen S und S' (siehe Bild 1) bestimmen, so hält man das Ende A des Lineals dicht an das Auge (am Ende des Lineals ist zum besseren Sehen ein mit einem Schauloch versehenes Brett angebracht) und peilt den Stern mit dem Stab so an, daß der Stern S' am Ende B des Lineals erscheint.

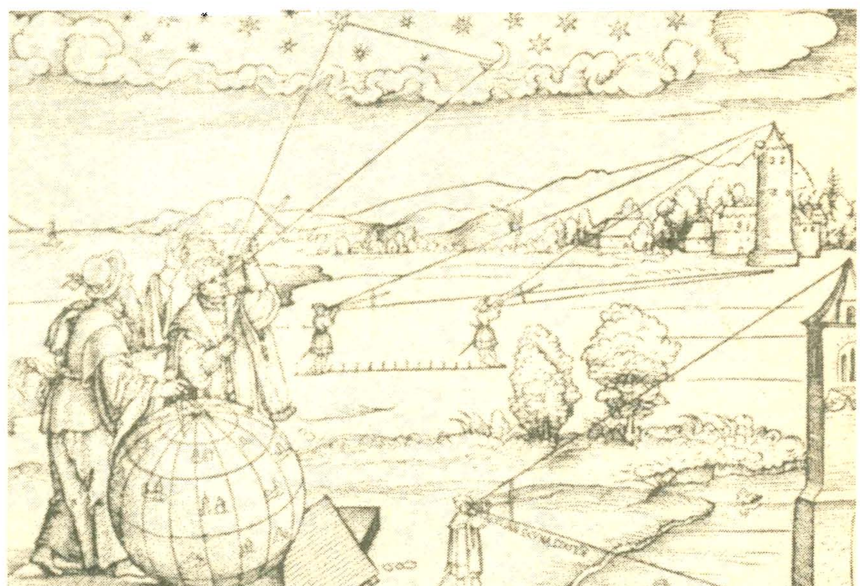
Dann schiebt man die Querleiste $\overline{CD}$ am Lineal entlang, bis der Stern S gerade am Ende C erscheint. Jetzt braucht man nur noch die Entfernung $\overline{AO}$ zu messen, damit die Größe des Winkels SAS' bestimmt werden kann. Die Länge $\overline{CO}$ ist bekannt. Der Tangens des gesuchten Winkels ist gleich dem Verhältnis $\frac{\overline{CO}}{\overline{AO}}$. Die Länge $\overline{AC}$ wird nach dem Lehrsatz des Pythagoras berechnet, worauf der Winkel aus dem Sinus $\frac{\overline{CO}}{\overline{AC}}$ bestimmt wird. Der gesuchte Winkel läßt sich auch graphisch ermitteln. Nachdem man das Dreieck ACO in einem beliebigen Maßstab auf dem Papier konstruiert hat, kann der Winkel CAO mit dem Winkelmesser gemessen werden.

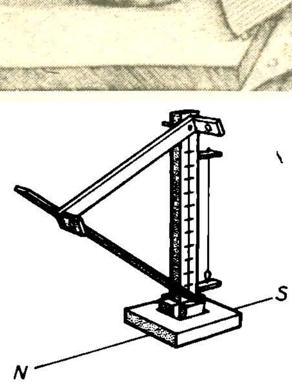
Wozu brauchen wir den zweiten Querleisten von $\overline{OD}$? Er ist für die Fälle vorgesehen, in denen der gesuchte Winkel so groß ist, daß er nach der beschriebenen Methode nicht gemessen werden kann. In diesem Falle wird nicht das Lineal $\overline{AD}$, sondern die Gerade $\overline{AD}$ auf den Stern S' gerichtet, indem man die Querleiste so weit schiebt, daß ihr Ende C mit dem Stern S zusammenfällt. Der Winkel SAS' kann nach einem der oben beschriebenen Verfahren ermittelt werden. (Bild 2)

Der Sextant einst

Vor 250 Jahren, in einer Zeit, da sich in den bürgerlichen Nationalstaaten Handel und Hochseefischerei entfalteten, wurde die Bestimmung genauer geographischer Positionen für die Seefahrt ebenso zu einer Notwendigkeit wie die Herstellung genauer Karten, die nicht nur auf den bis dahin nachlässig angefertigten Landaufnahmen der Feldmesser beruhten. Unzureichende Orientierung auf See hatten schon zahlreiche Schiffsverluste zur Folge gehabt und Tausenden von Seeleuten das Leben gekostet. Noch im Jahre 1752 waren auf der gesamten Erde nur etwa 150 Orte mit hinreichender Genauigkeit hinsichtlich geographischer Länge und Breite bekannt.

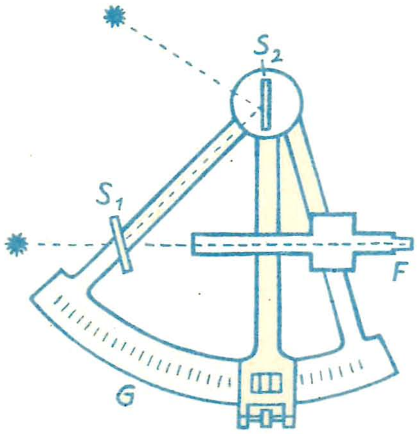
Sowohl einzelne Herrscher als auch Parlamente bekundeten höchstes Interesse am Einsatz der Wissenschaft im Dienste der Lösung dieser Probleme und erteilten gutbezahlte Aufträge an Gelehrte oder wissenschaftliche Institutionen. So bot z. B. das englische Parlament im Jahre 1714 demjenigen 20000 Pfund, der eine Methode vorweisen konnte, Längenbestimmungen auf See mit einer Genauigkeit von 0,5 Grad durchführen zu können. Den Preis erhielten gemeinsam: der Astronom (und Theoretiker) *Tobias Mayer*, der Instrumentebauer *Harrison* und der Mathematiker *Leonhard Euler*. Die Genauigkeit dieser Berechnungen setzte voraus: die theoretische Beherrschung der Mond- und Planetenbewegungen, genaue mathematische Rechenverfahren, präzis arbeitende Zeitmeß- und Winkelmeßinstrumente. Handelte es sich um Längenbestimmungen auf See, so ist es zudem notwendig, daß diese Geräte ungeachtet der hohen Genauigkeitsansprüche transportabel und unkompliziert in der Handhabung sind.



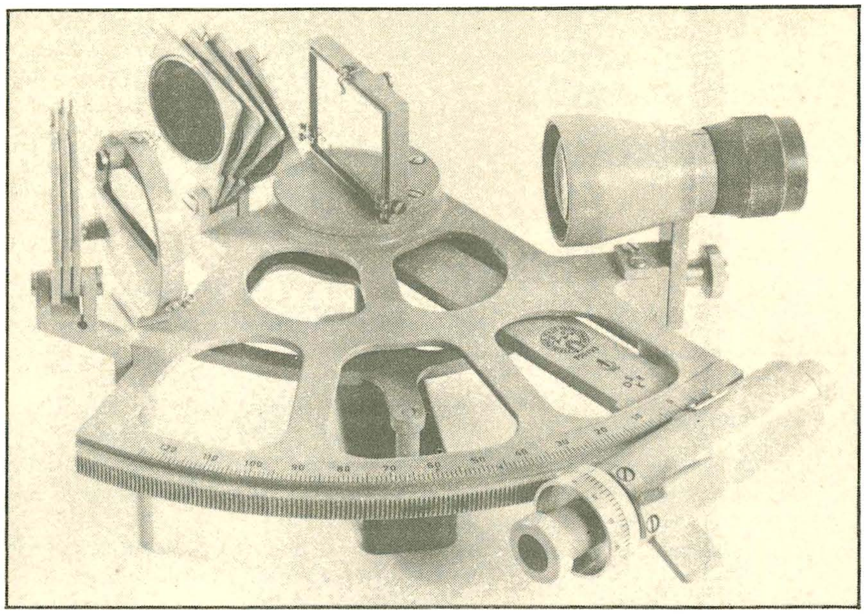


Astronomisches Beobachtungsgerät, ein *Triquetrum* (Dreistab).

Die im 18. Jahrhundert entwickelten Aktivitäten brachten ständig neue Erkenntnisse, Methoden und Verfahren. Die Berechnungen und Messungen zur Ortsbestimmung wurden immer perfekter.



Ein einfaches Winkelmeßinstrument ist der in der Nautik zur Ortsbestimmung viel benutzte *Sextant*. Hier werden die Bilder zweier Sterne (oder eines Sterns und des Horizonts) mit einem festen (S_1) und einem drehbaren Spiegel (S_2) in einem kleinen Fernrohr (F) zur Deckung gebracht. Der Winkelunterschied zwischen beiden Objekten kann an einem geteilten Sechstelkreis (G) abgelesen werden.



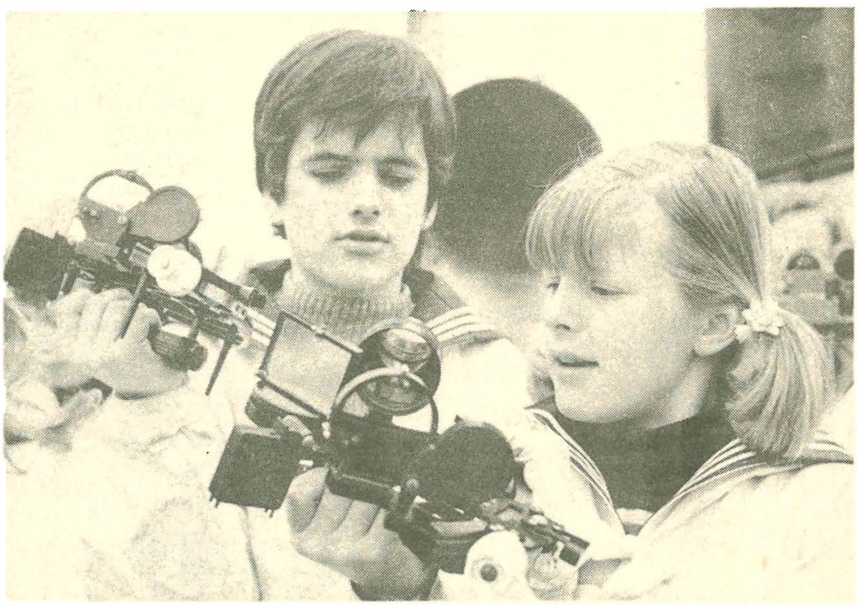
Der Sextant heute - Trommelsextant

Der Trommelsextant des *VEB Freiberger Präzisionsmechanik* dient im Zusammenwirken mit anderen nautischen Geräten zur astronomischen Ortsbestimmung auf See. Durch Messung des Winkels zwischen einem festen und einem beweglichen Spiegel bestimmt man die Kimmabstände von Gestirnen. In Küstennähe kann der Schiffsort auch durch Horizontalwinkelmessung – Einschneiden nach bekannten Punkten – ermittelt werden.

Das Gerät zeichnet sich durch seine schnelle und mühelose Ablesemöglichkeit aus, die ohne jedes optische Hilfsmittel möglich ist. Gute Fernrohroptik, geringes Gewicht und bequeme Handhabung verbürgen zuverlässige Meßergebnisse. Mehrere in den Strahlengang klappbare Filtergläser verschiedener Durchlässigkeit ermöglichen insbesondere bei Sonnenbetrachtungen den erforderlichen Helligkeitsausgleich.

Technische Daten:

Halbmesser des Gradbogens	17 cm
Gradteilung von	5 bis +125°
Skalenwert	1′
Schätzung	0,1
Fernrohröffnung	40 mm
Fernrohrvergrößerung	3,5 ×
Masse des Instruments	1,4 kg
Masse des Instruments mit Kasten	4,5 kg
Preis	550,– M



Rund 500 Mädchen und Jungen, die sich für den Seemansberuf interessieren, verlebten ihre Winterferien auf dem Rostocker Pionierschiff „Vorwärts“. Die *Jungen Matrosen* im Alter von 10 bis 16 Jahren eignen sich an Bord nicht nur das ABC der Seefahrt an, sondern sind auch in Zirkeln der Nautiker, Maschinisten, Elektrotechniker, Funker und Elektroniker.

Voraussetzung für eine erfolgreiche Arbeit sind sehr gute Leistungen in Mathematik und den naturwissenschaftlichen Fächern.

Zwei Pioniere lernen die Handhabung eines Sextanten kennen, um damit den Standort des Schiffes zu bestimmen. In diesen Ferien fuhren die besten von ihnen auf dem Pionierschiff nach Leningrad, um mit ihren sowjetischen Freunden zusammenzutreffen und die seit Jahren bestehende Freundschaft zu vertiefen.

Arbeitspläne Mathematik

für die außerunterrichtliche Tätigkeit der Klassen 9/10

In den Nummern 4/72 und 4/73 der Zeitschrift *alpha* wurden Vorschläge für die außerunterrichtliche Tätigkeit in Mathematik für die Klassenstufen 5/6 und 7/8 vorgelegt. Nachfolgend angegebene Stoffgebiete für die Klassenstufen 9/10 bauen organisch auf den in den genannten Artikeln vorgeschlagenen Stoffgebieten und Stoffinhalten auf. Voraussetzung für die Durchführung von außerunterrichtlichen Zirkeln auf der Grundlage des hier unterbreiteten Planvorschlages ist daher, daß die Schüler bereits über grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten insbesondere in den Stoffgebieten Logik, Mengenlehre, Algebra, Zahlentheorie, Analysis und Geometrie verfügen. Wir möchten wiederholt betonen, daß es sich bei unseren Vorschlägen stets um ein Auswahlprogramm handelt. Es ist kaum möglich – und entspricht auch nicht unserer Absicht – alle angebotenen Stoffe im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft zu behandeln. Unsere Vorschläge sollen lediglich Anregungen geben und eine Grundlage dafür sein, unter Berücksichtigung der jeweiligen Bedingungen, Voraussetzungen und Möglichkeiten die inhaltliche Gestaltung einer AG-Tätigkeit zu bestimmen.

Es kommt nicht in erster Linie darauf an, die Schüler mit einer Vielzahl mehr oder weniger abstrakter Begriffe, Definitionen, Sätze und Beweise zu überschütten. Vielmehr sollte angestrebt werden, die Schüler anhand der hier angegebenen Stoffinhalte zu klaren Begriffsbildungen, zum Definieren, zum Umgang mit Definitionen zum Verstehen von Beweisen und zum Beweisen zu befähigen. Daher sollten zum Beispiel Begriffsbildungen nicht vorschnell vorgenommen werden, sondern – wenn auch nicht ausschließlich – anhand einer aus Beispielen und Übungen bestehenden sorgfältigen Vorbereitung erfolgen. Es ist auch nicht erstrebenswert, Begriffsbildungen um ihrer selbst willen vorzunehmen, mit neu eingeführten Begriffen muß weiter gearbeitet werden. Daher sollte man hinsichtlich des Einführens und Definierens von Begriffen eine gewisse Sparsamkeit walten lassen und nur auf solche Begriffe und Definitionen eingegangen werden, für die ein Bedürfnis hinsichtlich weiterführender Anwendungen innerhalb des Zirkels besteht. Andererseits sollte wohl stets noch bedacht werden, daß Mathematik selbstverständlich mehr ist als ein System von Schlüssen aus Definitionen, Axiomen und Sätzen und sich das mathematische Denken nicht nur auf die Deduktion beschränkt, sondern auch andere Methoden nutzt.

Die Grundlage für das hier vorgelegte Auswahlprogramm bildet eine von uns durchgeführte gründliche Analyse des Lehrplanes für das Fach Mathematik. Einige der nachfolgend aufgeführten Stoffinhalte sind Vorgriffe (z. B. Vollständige Induktion). Das wird damit begründet, daß diese Stoffinhalte möglichst frühzeitig an Schüler herangetragen werden sollen, um einerseits eine längere Zeit des Übens zu erreichen, andererseits um darauf aufbauend systematische Olympiadevorbereitungen zu betreiben; insbesondere sind diese Stoffinhalte nützlich bei der Behandlung neuer Stoffe, die zunehmend in Olympiaden an Bedeutung gewinnen, aber nicht Gegenstand des Lehrplanes Mathematik sind (z. B. Funktionalgleichungen). Außerdem wird bei der vorzeitigen Einbeziehung dieser Lehrstoffe in die außerunterrichtliche Tätigkeit von verschiedenen Arbeiten ausgegangen, die die Möglichkeit einer Vorverlegung dieser Lehrstoffe aufzeigten.

Als wesentliche Schwerpunkte in unserem Vorschlag kämen für die Klassenstufe 9 neben der Einführung in das Beweisverfahren der vollständigen Induktion die Erweiterung und Vertiefung der bis zur 8. Klasse erworbenen geometrischen Kenntnisse, da in Klassenstufe 9 laut Lehrplan für das Fach Mathematik an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen kein Geometrieunterricht vorgesehen ist. Hierzu dienen die *Sätze des Ceva und Menelaos* sowie Konstruktionen in beschränkter Ebene, da hierdurch die Übertragbarkeit und Verallgemeinerungsfähigkeit erworbener geometrischer Kenntnisse und Fertigkeiten erhöht wird. Aber es wird noch in konsequenter Fortsetzung der 8. Klassenstufe die Vermittlung von Grundlagen der Matrizenrechnung vorgeschlagen, wobei insbesondere Anwendungen in der Geometrie aufbauend auf dem Abbildungsbegriff von Bedeutung sind. Von zentraler Bedeutung sind die Begriffe *reelle Zahl* und *Variable*, mit denen vertiefend gearbeitet werden soll.

Als wesentliche Schwerpunkte in unserem Vorschlag können für die Klassenstufe 10 neben der Einführung in das Arbeiten mit Funktionalgleichungen (um die Fertigkeiten im Arbeiten mit Funktionen zu vervollkommnen und auf komplizierte Aufgabenstellungen vorzubereiten) die Anwendung der Gruppentheorie auf die räumliche Geometrie (um das räumliche Vorstellungsvermögen weiter zu entwickeln) angesehen werden. Darüber hinaus wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch axiomatische Betrachtungen vertieft. Von zentraler Bedeutung sind die Begriffe *Funktionalgleichung, Mengenalgebra, Axiomatik*.

Im Zusammenhang mit unseren Vorschlägen sei darauf hingewiesen, daß gruppentheoretische Überlegungen und Funktionalgleichungen zunehmend an Bedeutung auch in den Mathematikolypiaden gewinnen.

K. D. Klöpfel/M. Rehm

Klassenstufe 9

1. Logik

1. Vollständige Induktion (in Verbindung damit induktive und implizierte Definitionen sowie Rekursionen)

2. Normalformentheorie, Anwendungen zur Konstruktion logischer Terme

2. Mengenlehre

1. Mächtigkeiten, Kardinalzahlen (insbesondere transfinite), Abbildungen der gesamten Menge auf Teilmengen bei unendlichen Mengen, Ordnungsbeziehungen zwischen Kardinalzahlen, Beziehungen zwischen der Mächtigkeit einer Menge und ihrer Potenzmenge, Operationen mit Kardinalzahlen, insbesondere transfiniten

2. Abzählbarkeit, Nachweis bei verschiedenen Mengen (rat. Zahl u. a.) Diagonalverfahren, Vereinigung abzählbarer Mengen, Überabzählbarkeit des Kontinuums, Mengen höherer Mächtigkeit als Kontinuum (z. B. Menge der Funktionen)

3. Algebra

1. Systeme linearer Gleichungen, Gaußscher Algorithmus

2. Matrizen und Determinanten (Rechenoperationen, Rang, Umkehrung), spezielle Matrizen (Vektoren, Einheitsmatrix, Nullmatrix, symmetrische Matrizen, Dreiecksmatrix), Cramersche Regel

3. Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades mit einer Variablen

4. Zahlentheorie

1. Kettenbrüche und ihre Anwendung zur Lösung Diophantischer Gleichungen

2. Quadratische Diophantische Gleichungen, Pythagoräische Zahlen als Lösung Diophantischer Gleichungen zweiten Grades ($x^2+y^2=z^2$, x, y, z ganze Zahlen)

3. Kleiner Fermatscher Satz – Beweis durch gruppentheoretische Hilfsmittel und Kongruenzen

5. Analysis

1. Operationen mit Funktionen (z. B. Substitutionen, umformen impliziter Vorstellungen), Bestimmung des Definitions- und Wertebereiches, Umkehrungen

2. Algebraische Funktionen (Polynome), Hornersches Schema, Satz von Steiner über Nullstellen, Bestimmung der Funktionen aus vorgegebenen Punkten.

3. Komplexe Zahlen (Rechenoperationen, Betrag, Darstellung in der Ebene, Anwendung bei der Bestimmung der Nullstellen von Polynomen).

4. Lineare Ungleichungssysteme

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Wiederholung Kreislehre, Dreieckslehre, Ähnlichkeitslehre, Satzgruppe des Pythagoras, hierbei Anwendung der Vektoren bei Beweisen aus der ebenen Geometrie

b) Dreieckslehre (Sätze des Ceva, Menelaos, Schnittpunktsätze, Eulersche Gerade, Feuerbachscher Kreis)

c) Satz von Desargues (in der Ebene), Satz von Pappos, Kreis des Appolonius

2. Konstruktionen

a) Konstruktionen in beschränkter Ebene (Komplizierte Konstruktion, Dreiecke u. a.)

b) Konstruktion algebraischer Ausdrücke (z. B. aus a, b zu konstruieren $x=\sqrt{a^2+b^2}$, $x=ab$, $x=\sqrt{ab}$)

c) Dreieckskonstruktionen auf der Grundlage der Ähnlichkeit (z. B. Dreieck aus drei Höhen)

3. Berechnungen

a) Extremaprobleme (z. B. Figur maximaler Fläche zu vorgegebenem Umfang)

b) Problem der Parkettierungen (Muster aus regelmäßigen Vielecken) durch Diophantische Gleichungen lösen

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung/ Kombinatorik

1. Exakte Formeln zu Kombinationen, Permutationen, Variationen, Anwenden der vollständigen Induktion

2. Ereignissysteme mit unendlicher Menge von Elementarereignissen (Anwendung der Mengenalgebra), Vereinigung und Durchschnitt abzählbarer vieler Ereignisse, geometrische Wahrscheinlichkeit

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit, abhängige und unabhängige Ereignisse, Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten, totale Wahrscheinlichkeit, BAYES-Theorem mit Anwendungen

8. Operationsforschung

1. Einfache Optimierung (ohne Simplexalgorithmus), die in der Ebene graphisch darstellbar und lösbar sind, graphische Lösungen, Zuschneide- und Transportprobleme, Anwendungen in der Spieltheorie (gemischte Strategien)

2. Planung mit Hilfe von Matrizen, Anwendung der Matrizenrechnung in der Ökonomie

9. Graphentheorie/Topologie

1. Ungerichtete Graphen, Klassifizierung der Knoten, vollständige Graphen, endliche Graphen, reguläre Graphen, Teilgraphen, Faktoren

2. Grad eines Knotens, Sätze über Knotensumme, Zusammenhang von Graphen, Eulersche Linien

Klassenstufe 10

1. Logik

1. Überblick über die Grundbegriffe der Aussagenlogik, insbesondere Ausdruck, Ausdrucksstufen, Aussage, aussagenlogische Variable und Konstanten, aussagenlogische Funktionen, allgemeingültige Aussagen, Semantische Äquivalenz, Normalformen, Zusammenstellung von aussagenlogischen Identitäten, Schlußregeln, Prüfen von Schlußregeln

2. Einsatzregel, Abtrennungsregel, Ersetzbarkeitstheorem

3. Ableitbarkeit, Hülleneigenschaften der Ableitbarkeit, das Problem der Axiomatisierbarkeit

2. Mengenlehre

1. Axiome der Mengenbildung, das Problem der Antinomien, Stufenaufbau der Mengen, wichtige Mengen

2. Mengenalgebra (Operationen, Gesetze der Operationen, Dualität)

3. Ordnungstypen, Ordnung, Ordnungszahlen, Wohlordnung, transfinite Induktion

3. Algebra

1. Axiome der Gruppenbildung, Untergruppen, Links- und Rechts-Nebenklassen, Normalteiler, Faktorgruppe, Isomorphie und Homomorphie (Wiederholung der Ergänzung)

2. Ringe, Modul, Restklassenringe, Ideale, Hauptideale, Eulersche Ringe, Teilbarkeit

4. Zahlentheorie

1. Gaußsche Zahlen, Primfaktoren, Faktorzerlegungen, Einheiten, Eindeutigkeiten

2. Struktureigenschaften der Zahlen, Gesetzmäßigkeiten der Struktur von Dezimalbrüchen (Länge der Perioden – Bezug zu Restklassenmodulo einer Zahl)

3. Eulersche Funktionen, Erweiterung des Fermatschen Satzes, Satz von Wilson

5. Analysis

1. Spezielle Funktionsklassen (periodische Funktionen), homogene Funktionen, gerade, ungerade Funktionen

2. Einfache Funktionalgleichungen zu vorgegebenen Funktionen aufstellen

3. Transzendente Gleichungen mit Potenzen. Logarithmen und Exponentialfunktionen

z. B. $\lg(2x+6)-\lg(x-5)=1$

$e^{2x}-e^x+1=0$

4. Goniometrische Gleichungen

a) Umformen, so daß nur noch eine Trigonomie-Funktion auftritt

$2\sin x+\cos x=0$

$\cos 2x \quad =\sin^2 x$

b) Zerlegen in Faktoren

$\sin 5x-\cos 3x=\sin x$

c) $A\cos x+B\sin x=c$, Umformen, indem

$\sin\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\cos\alpha=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ gesetzt wird.

Weitere Lösungsmethoden (Substitution, Einführung von Hilfswinkeln, Produktdarstellung, grafische Lösungen)

5. Einfache Funktionalgleichungen

a) $f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)=a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\ldots+a_nf(x_n)$

b) $f(ax) \quad =a^nf(x)$

c) $f(x+y)=F(f(x),y)$

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Axiome des Euklid, Problematik des Parallelenaxioms, Kleinsches Modell der Hyperbolischen Geometrie (Hilbertsche Axiome, Erlanger Programm)

b) Vektorprodukt (Skalar), Anwendung auf Trigonometrie (Herleitung von Formeln der Dreiecksberechnung)

c) Räumliche Geometrie – Transformationsgruppe, Ebenenbüschel, Satz von Desargues räumlich, Tetraedergeometrie, Tetraedergleichungen, Berechnungen: Volumen, Oberfläche; Besondere Linien und Schnittebenen des Tetraeders, Satz über die Winkelsumme, Beziehungen zwischen Tetraeder und Kugel, äußere Kugel, innere Kugel u. a., Kongruenzsätze

2. Konstruktionen

a) Konstruktion regelmäßiger Vielecke

b) Konstruktionen, die aus Berechnungen abgeleitet werden

3. Berechnungen

a) Stereometrie (Prisma, Zylinder, Kugel, Kegel, Pyramide, Quader, Stümpfe), Eulerscher Polyedersatz, regelmäßiges Polyeder, Darstellung der Körper, Simpsonsche Regel, Cavalierisches Prinzip, Schnittkörper

b) Kombinatorische Geometrie räumlicher Gebilde

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Axiomatik von Kolmogoroff, Operation mit Wahrscheinlichkeiten, klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff als Spezialfall des allgemeinen

2. Zufällige Größe, Zufallsvariante, diskrete Verteilungsgesetze, Erwartungswerte, Streuungen, Binomialverteilung, Poisson-Verteilung. Tschebyschewsche Ungleichung

3. Markowsche Ketten (diskrete Verteilungen)

8. Operationsforschung

1. Lineare Optimierung mit zwei bis vier Variablen, Simplexalgorithmus

2. Transportoptimierung

9. Kybernetik

1. Numerische Algorithmen, Ableiten der Grundeigenschaften von Algorithmen (Determiniertheit, Allgemeinverwendbarkeit), Beispiele

2. Algorithmische Lösung logischer Probleme (Fünfzehnerspiel, Labyrinth-Problem)

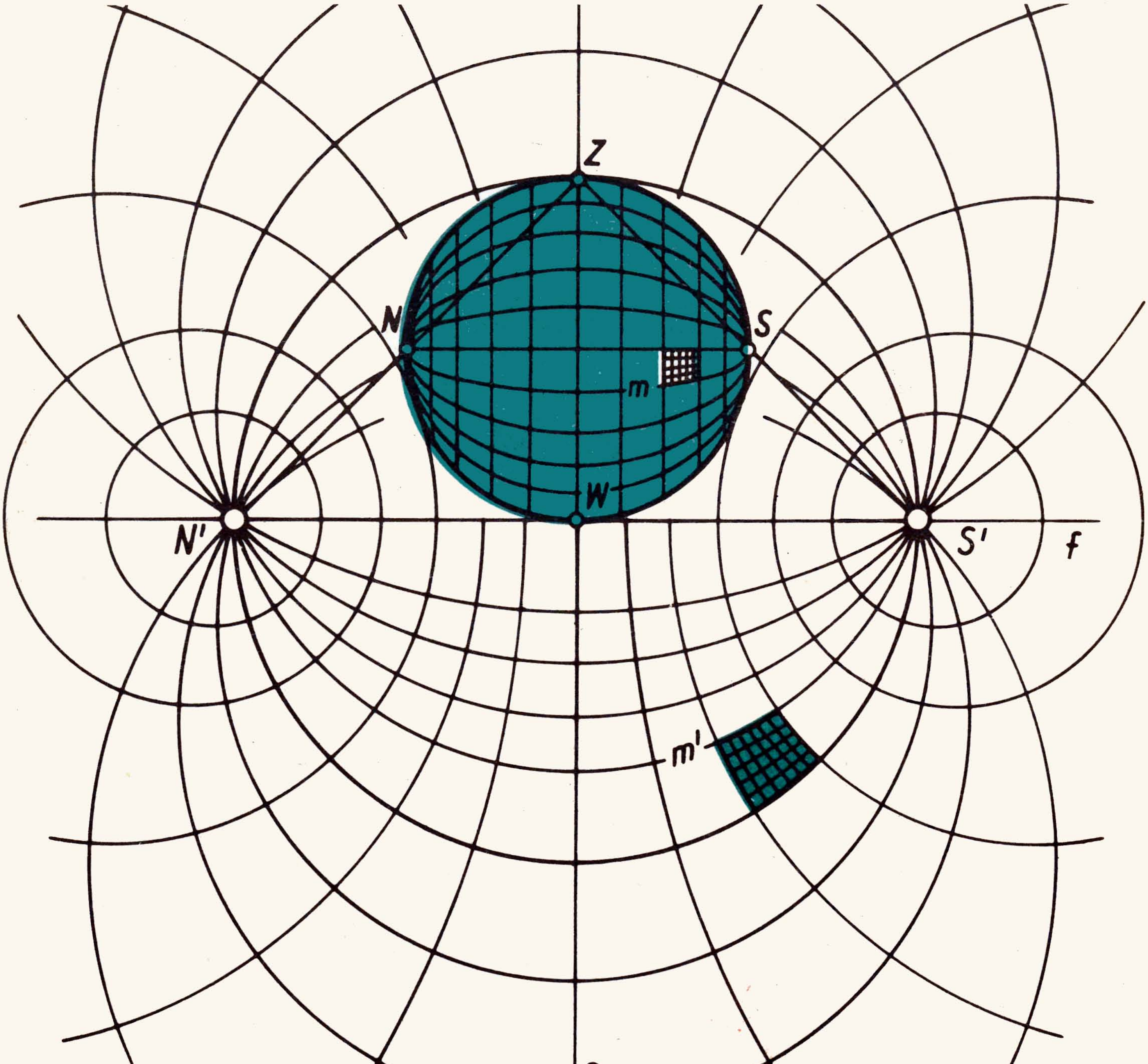
10. Graphentheorie/Topologie

1. Zusammenfassung und Wiederholung ungerichteter Graphen (Definition), Knotengerade, Teilgraphen, Eulersche Linien, Hamiltonsche Kreise, Kantenzusammenhang, Faktoren, reguläre Graphen und Teilgraphen), Ergänzung: Knotenbasen

2. Gerichtete Graphen (Definition, spezielle Typen, Komponenten, reduzierte Graphen) kürzeste Bahnen, kritische Bahnen

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Zentralbild (Steinberg), Berlin (S. 97); Jürgen Ludwig, Arnstadt (6 Fotos); J. Lehmann, Leipzig (10 Fotos); DLZ-Graphik (S. 120); Vignetten: W. Tilman, Moskau (S. 114), K. Moschkin, Moskau (S. 110); Ornament aus: Matematički List, Beograd (S. 115); Utschitelskaja gaseta, Moskau (S. 115)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 9. August 1974

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

XVI. Internationale Mathematikolympiade 1974 in Erfurt/Berlin

Aufgaben 1. Tag

1. Drei Spieler A, B, C spielen folgendes Spiel: auf genau drei Spielkarten ist je eine ganze Zahl geschrieben. Für diese drei Zahlan p, q, r gilt $0<p<q<r$. Diese drei Karten werden gemischt und so verteilt, daß jeder der drei Spieler eine Karte erhält. Jeder bekommt dann genau so viele Kugeln zugeteilt, wie die Zahl auf der erhaltenen Karte angibt. Danach werden die Karten wieder eingesammelt; die zugeteilten Kugeln bleiben bei den Spielern. Dieser Spielverlauf (Mischen und Verteilen der Karten, Zuteilen von Kugeln, Einsammeln der Karten) wird mindestens zweimal durchgeführt. Nach dem letzten Mal hat insgesamt

A	B	C
20	10	9

Kugeln. B weiß noch, daß er beim letzten Mal r Kugeln bekommen hat. Wer hatte beim ersten Mal q Kugeln erhalten?

(USA, 5 Punkte)

2. Es seien A, B, C die Ecken eines Dreiecks. Die Größen seiner Innenwinkel bei A, B bzw. C seien α, β bzw. γ. Man zeige, daß es dann und nur dann auf der Strecke $\overline{AB}$ einen Punkt D gibt, für den $\overline{CD}$ das geometrische Mittel von $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ ist, wenn

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqq\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

gilt. (Finnland, 6 Punkte)

3. Man zeige, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$$

durch 5 teilbar ist.

(SR Rumänien, 8 Punkte)

2. Tag

4. Wir zerschneiden ein Schachbrett von 8×8 Feldern so in p Rechtecke, daß kein Feld zerstört wird. Für jede solche Zerschneidung sollen folgende Bedingungen gelten:

(1) Jedes Rechteck enthält ebenso viele weiße wie schwarze Felder.

(2) Ist a_i die Anzahl der weißen Felder im i-ten Rechteck, so gelte $a_1<a_2<\ldots<a_p$.

Es ist der maximale Wert von p zu finden, für den eine solche Zerschneidung möglich ist und für diesen Wert p sollen alle Folgen a_1, a_2, ..., a_p ermittelt werden, für die eine derartige Zerlegung existiert.

(VR Bulgarien, 6 Punkte)

5. Es seien a, b, c, d beliebige positive reelle Variable. Welchen Wertebereich hat dann die Summe

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}?$$

(Niederlande, 7 Punkte)

6. Es sei $P(x)$ ein nicht konstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, und es gebe genau $n(P)$ ganze Zahlen k, für die

$$[P(k)]^2=1 \text{ ausfällt.}$$

Man zeige, daß dann

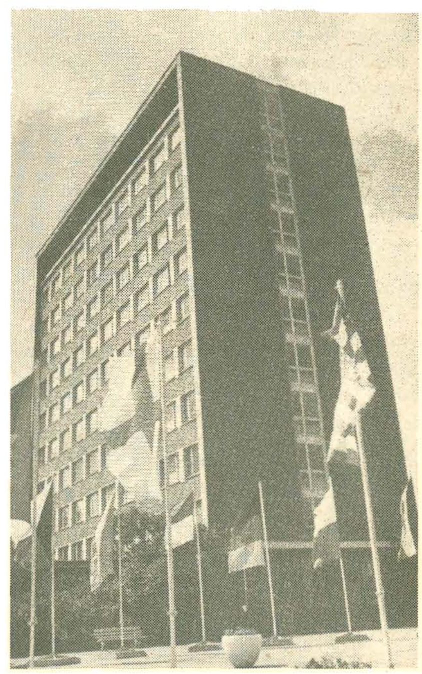
$$n(P)-\deg(P)\leqq2$$

gilt, wenn $\deg(P)$ den Grad des Polynoms $P(x)$ bezeichnet. (Schweden, 8 Punkte)

Prof. Dr. W. Engel eröffnete am 7. Juli die XVI. IMO

Eröffnung der XVI. IMO in der Päd. Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ in Erfurt

Das Studentenwohnhochhaus der PH Erfurt



Präsident der Internationalen Jury:
Prof. Dr. Wolfgang Engel
Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der DDR;

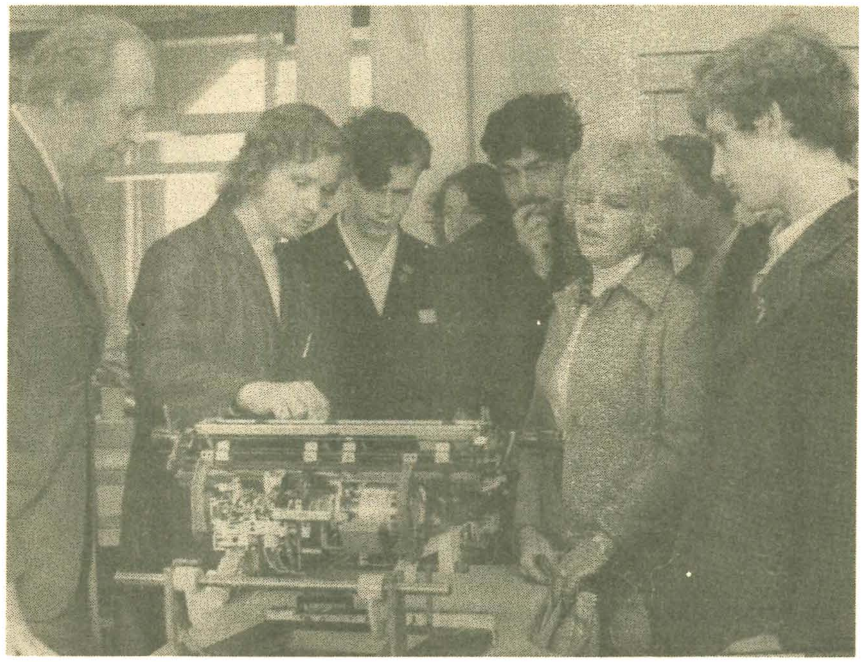
Stellvertreter des Präsidenten:
Prof. Dr. Helmut Bausch
Vorsitzender des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR;

Leiter des Organisationskomitees:
Oberstudienrat Herbert Titze
Sekretär des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR;

Mitarbeiter der Jury: Prof. Dr. Gerhard Geise, Prof. Dr. Udo Pirl, Dozent Dr. Ludwig Stammler;

Dolmetscher der Jury und Koordinatoren: Prof. Dr. Georg Wintgen, Dozent Dr. Kurt Rosenbaum, Helmut Schreiber;

Koordinatoren: Dr. Ingeborg Bartsch, Dr. Klaus-Dieter Drews, Diplommathematiker Karl Germer, Dr. Walter Harnau, Dr. Uwe Küchler, Dr. Rolf Lüders, Diplommathematiker Bernd Kummer, Dr. Monika Noack, Dr. Manfred Rehm, Dr. Günter Riedewald, Diplommathematiker Peter Rudolph, Diplommathematiker Günter Schiemann, Dozent Dr. Eberhard Schröder, Dr. Hans-Ulrich Schwarz, Dr. Gottfried Seifert, Dr. Gerhard Sommerfeld, Dr. Klaus Zacharias.



Während die Jury die Schülerlösungen korrigierte, unternahmen die Mannschaften Exkursionen durch das Thüringer Land. Es wurden u. a. besucht: Erfurt, Weimar, Eisenach, Suhl, Oberhof, Ilmenau: Unser Foto: sowj. Teilnehmer besuchten einen Produktionsbereich des VEB Kombinat Büromaschinenwerk Sömmerda (links: Chefredakteur *alpha*)

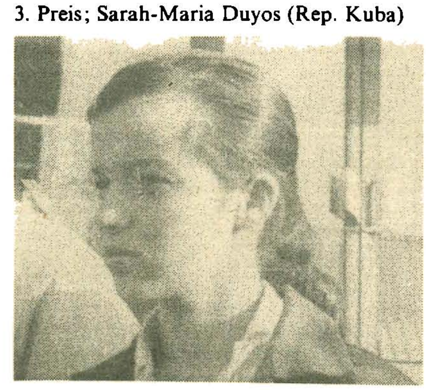
Wettbewerbsatmosphäre

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	erreichte Gesamtpunktzahl	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom
Volksrepublik Bulgarien	171	–	1	4	
Republik Finnland	111	–	–	1	
Republik Frankreich	194	1	1	3	
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	188	–	1	3	
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	216	2	1	2	
Republik Kuba	65*	–	–	–	
Mongolische Volksrepublik	60	–	–	–	
Königreich der Niederlande	112	–	–	1	
Republik Österreich	212	1	1	4	
Volksrepublik Polen	138	–	–	2	
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	158	–	–	2	
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	256	2	3	2	
Sozialistische Republik Rumänien	199	1	1	3	
Königreich Schweden	187	1	1	–	1
Ungarische Volksrepublik	237	1	3	3	1
Vereinigte Staaten von Amerika	243	–	5	3	1
Demokratische Republik Vietnam	146*	1	1	2	
Deutsche Demokratische Republik	236	–	5	2	
		10	24	37	3

* Die Republik Kuba delegierte 7 Schüler, die Demokratische Republik Vietnam 5 Schüler

Die beiden einzigen Mädchen der XVI. IMO: Alena Vencovcká (ČSSR) – sie erhielt einen 3. Preis; Sarah-Maria Duyos (Rep. Kuba)



Alle Teilnehmer der XVI. IMO besuchten Weimar. Feierlichen Abschluß bildete der gemeinsame Besuch der *Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald. Unser Foto:* amerikanische und britische Teilnehmer im Gespräch mit einem ehemaligen Buchenwaldhäftling, der aus seinem Erleben berichtet.

Die Teilnehmer der XVI. IMO waren vier Tage Gast der Hauptstadt der DDR. *Aus dem Programm:* Seenrundfahrt gemeinsam mit Berliner FDJlern; Besuch von Potsdam; Stadtrundfahrt. Ihren feierlichen Abschluß fand die IMO am 15. Juli in der Kongreßhalle. *Unser Foto:* Staatssekretär *W. Lorenz* (Min. für Volksbildung) zeichnet mit einem 1. Preis aus: Michael Steiner (links) und Alexander Grigorjan

Einen 1. Preis erhielten:

1 Herbert Sinwel (Linz), Republik Österreich
2 Jean-Christophe Yoccoz (Gif sur Yvette), Republik Frankreich
3 János Kollár (Budapest), Ungarische Volksrepublik
4 Adrian Ocneanu (Bukarest), Sozialistische Republik Rumänien
5 Michael Steiner (Solna), Königreich Schweden
6 Alexander Grigorjan (Baku), Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken
7 Dmitri Tjukawkin (Irkutsk), Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken
8 Jožef B. Varga (Novi Itebej), Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien
9 Hoàng-Lê Minh (Hanoi), Demokratische Republik Vietnam
10 Miodrag Žiwković (Kovin), Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien

5 6

1 

2 

3 

4 

7 

8 

9 

10 

Mathematikolympiaden in der DRV

Seit dem Jahre 1962 werden in unserem Lande Mathematikolympiaden durchgeführt. Zweck dieser Wettbewerbe ist, die Schüler für die Mathematik – nicht nur für die Schulmathematik – zu interessieren, mathematische Begabungen zu finden und weiterzuentwickeln. Für die Klassen 4, 5, 6, 8 und 9 gibt es nur Kreis- und Bezirksolympiaden.*
Für die Klassen 7 und 10 wird die Endstufe auf Landesebene durchgeführt.
Der Wettbewerb für Klasse 10 findet in einer Bezirks- und einer Landesstufe statt; für Olympiadeklasse 7 gibt es eine Kreis- und Bezirksstufe. Die Endstufe (Landesausscheid) bestreitet je eine Mannschaft (10 bis 15 Schüler) aus jedem Bezirk.
Die Endrunde wird im April eines jeden Jahres durchgeführt.
Klassenstufe 7:
1. Klausur – 2 Aufgaben – Arithmetik/Algebra – 2 Stunden Arbeitszeit
2. Klausur – 2 Aufgaben – Geometrie – 2 Stunden Arbeitszeit

Klassenstufe 10: wie Klasse 7 (3 Aufgaben – 3 Stunden Arbeitszeit). Zahlreiche der gestellten Aufgaben unterscheiden sich von denen der Lehrbücher der Schule. Eine zentrale Kommission bewertet die Lösungen, vergibt Preise an Schüler und Mannschaften. Die besten Lösungen sowie eine Analyse der Ergebnisse des Landeswettbewerbs werden in der Zeitschrift „Mathematik und Jugend“ sowie in der Zeitschrift des Ministeriums für Volksbildung „Die 3. Stufe“ veröffentlicht.

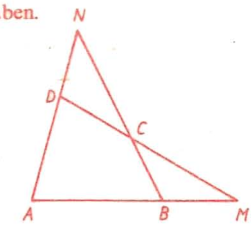
Für die *alpha*-Leser haben wir einige Aufgaben der Klassenstufe 7 ausgewählt:

▲1▲ In dem abgebildeten Schema für das schriftliche Verfahren der Division sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht.

```
* * * * * * * * : * * = *080*
* * *
-----
  0 * *
    * *
    -----
      * * *
      * * *
      -----
          0
```

▲2▲ a) Die algebraische Summe $(x^2-yz)(y-xyz)-(y^2-xz)(x-xyz)$ ist als Produkt darzustellen.
b) Es ist zu beweisen, daß sich die Gleichung
$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$$
in die äquivalente Gleichung $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ überführen läßt, wenn $x \neq y$, $yz \neq 1$, $xz \neq 1$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$ gilt.

▲3▲ Die abgebildete Figur stellt ein konvexes Viereck $ABCD$ dar. Die Geraden AB und CD schneiden einander im Punkte M, die Geraden BC und AD schneiden einander im Punkte N. Es ist zu beweisen, daß die Umkreise der Dreiecke $\triangle AMD$, $\triangle BMC$, $\triangle ABN$ und $\triangle DCN$ einen Punkt P gemeinsam haben.



▲4▲ Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 mit $r_1 < r_2$. Die Schnittpunkte dieser Kreise seien A und B und der Schnittpunkt der Geraden M_1M_2 und AB liege zwischen M_1 und M_2. Eine durch A gehende Gerade g schneide k_1 in P und k_2 in Q. Wie muß die Gerade g verlaufen, damit
a) Q zwischen A und P oder P zwischen A und Q liegt,
b) $\overline{AP}=\overline{AQ}$ gilt,
c) die Strecke $\overline{PQ}$ zu einer gegebenen Strecke $\overline{CD}=m$ kongruent ist,
d) die Strecke $\overline{PQ}$ eine maximale Länge besitzt?

Hoang Chung

* In der DRV hat die allgemeinbildende Schule drei Stufen:
die erste Stufe (Klasse 1 bis 4), die zweite Stufe (Klasse 5 bis 7) und die dritte Stufe (Klasse 8 bis 10).

Aus der Arbeit eines Diplommathematikers

von M. Peregudow

Ich absolvierte die *Fakultät für Rechentechnik und Kybernetik an der Lomonossow-Universität* Moskau und bin jetzt 25 Jahre alt. Nach dem Grundstudium (zwei Studienjahre) stand ich vor der Frage, mich für eine spezielle Fachrichtung zu entscheiden. Die moderne Mathematik ist so breit, daß man die Wahl für die engere Fachrichtung erst dann treffen kann, wenn man sich einen Überblick über das Ganze verschafft hat. Dafür stehen die beiden ersten Studienjahre zur Verfügung.
Ich wurde mit den Gesellschaftswissenschaften vertraut gemacht, studierte die wichtigsten Gegenstände der klassischen Mathematik und erhielt einen Einblick in eine Vielzahl mathematischer Methoden als hauptsächliches Forschungsinstrument verschiedenster Gebiete von Wissenschaft und Technik.
Nach dem Erklimmen dieser ersten Stufe der langen Treppe des Wissens war es mir möglich, mich für das Fachgebiet Rechentechnik und in diesem für die spezielle Fachrichtung *Systemprogrammierung für EDVA* zu entscheiden.
Schon während meiner Mittelschulzeit wurde ich im Rahmen der praktischen Tätigkeit in einem Rechenzentrum ausgebildet. Die dort stationierte EDVA wurde für wissenschaftliche Analysen verwendet. Eine derartige Anlage ersetzt mehrere hundert mit Rechen-

Mannschaft der DRV zur XVI. IMO

stäben ausgerüstete Mitarbeiter. Später erfuhr ich, daß man die EDVA nicht nur einsetzen kann, um schneller zu rechnen, sondern auch zur Bewältigung von Aufgaben höherer Qualität mit einem so großen Informationsgehalt, daß er vom Hirn des Menschen nicht erfaßt werden kann. Die Elektronische Datenverarbeitung hilft Betriebspläne zu optimieren, technologische Prozesse zu leiten, Überschall-Düsenflugzeuge zu steuern, günstige Standortbedingungen für Kaufhallen oder Eisenbahnstationen ausfindig zu machen usw. Um noch ein kleines Beispiel anzufügen:

An einem der großen Moskauer Plätze, auf dem acht Straßen zusammenstoßen, schaltet eine EDVA die Ampeln so, daß die Summe der Wartezeiten für alle Kraftfahrzeuge minimiert wird. Nicht allen ist bekannt, daß eine gerade vom Werk gelieferte EDVA nur eine große Menge besonders komplizierter, besonders exakter, besonders zuverlässiger Geräte ist, die von sich aus auch nicht die allereinfachsten Aufgaben lösen kann. Um die Anlage arbeiten zu lassen, muß man zunächst das Programm zur Lösung der vorliegenden Aufgaben aufstellen. Das Programm muß in der Sprache der Maschine verfaßt sein, deren Alphabet aus nur zwei Zeichen besteht, aus O und L. So sieht das Maschinenwort zum Lösen der *Aufgabe* $2+2$ beim Elektronenrechner MINSK 32 folgendermaßen aus:

OOOLLOLOOOOLOLOOLLOOLLOLLO
LOOLLOOLLOL (1)

Der langsamste Schüler wird diese *Aufgabe* schneller lösen, als man einen solchen Maschinenbefehl aufschreiben kann.

Um ein Programm für eine Aufgabe aus dem Ingenieurwesen in Maschinensprache aufzuschreiben, benötigt ein Programmierer Monate oder sogar Jahre; ein solches Programm besteht gewöhnlich aus mehreren zehntausend Maschinenworten.

Man braucht allerdings jetzt keine kilometerlangen Reihen aus Nullen und Einsen: Viele Nutzer der EDV kennen den Code der Maschinensprache gar nicht, d. h., die Befehlstabelle für diese oder jene konkrete Anlage. Der Systemprogrammierer hat für den betreffenden Maschinentyp ein Übersetzungsprogramm, welches die Daten und Voraussetzungen der gestellten Aufgabe aus der natürlichen Sprache (des Menschen) in die Maschinensprache überträgt.

In der natürlichen Sprache sieht der Befehl zur Lösung der oben erwähnten Aufgabe so aus: $X:=2+2$ (2)

Um aber ein derartiges Übersetzungsprogramm (zur Übertragung der Worte der Form (2) in Maschinenworte der Form (1)) herzustellen, müßte der Systemprogrammierer Zehntausende von Maschinenworten zusammenstellen, und dabei darf ihm nicht ein einziger Fehler unterlaufen! Das ist aber für einen Menschen kaum möglich.

Man kann das Programm auch zunächst für eine andere EDVA, die bereits *das Übersetzen gelernt hat*, erarbeiten. Dieser Weg ist aber langwierig und schwer; schwierig ist dabei vor allem das Feststellen und Beseitigen der unvermeidlich auftretenden Fehler.

In der Praxis verfährt man folgendermaßen: Man verfaßt das Programm in einer Symbolsprache (Programmiersprache), die nach ihren Vorteilen und Möglichkeiten zwischen den Formen (1) und (2) steht. In dieser Sprache sieht die Aufgabe, 2 und 2 zu addieren, so aus: $AD\ +2;\ +2$ (3)

Die Sprache der Form (1) ist die *Maschinensprache*, die Sprache der Form (2) – die *algorithmische Sprache*. Natürlich gibt es davon verschiedene Arten, die der Sprache der gewöhnlichen Mathematik mehr oder weniger nahestehen. Alle, die die EDV anwenden, z. B. Ingenieure, Operateure, Wissenschaftler, verwenden derartige algorithmische Sprachen.

Für uns Systemprogrammierer genügt das allerdings nicht: Wir entwickeln und vervollkommnen neue Sprachen und sichern das Verständnis zwischen Mensch und Computer.

Bereits während meines Studiums begann ich, in einem Rechenzentrum zu arbeiten. Parallel zum Studium der theoretischen Grundlagen an der Universität, erwarb ich dort praktische Fähigkeiten und Fertigkeiten. Je weiter ich vorankam, mit um so verantwortungsvolleren Aufgaben wurde ich vertraut gemacht. Nach vierjähriger Arbeit im Rechenzentrum (also ein Jahr nach Abschluß meines Studiums) verdreifachte sich mein Gehalt. In der gleichen Zeit erhöhte sich die Zahl der Mitarbeiter im Rechenzentrum von 30 auf 60, und eine neue MINSK 32 kam zum Einsatz. In ein bis zwei Jahren werden wir eine moderne Anlage ES 1040, die in der DDR entwickelt wird, erhalten.

Über diese Anlage und damit über ESER (*E*inheitliches *S*ystem *E*lektronischer *R*echenanlagen) insgesamt gibt es einiges hinzuzufügen. Während es früher viele verschiedene Typen und Größen von Rechenanlagen gab, schafft die sozialistische Staatengemeinschaft jetzt diese einheitlich aufgebaute Reihe. Sie besteht aus Anlagen verschiedener Größenordnung (und damit unterschiedlicher Kosten), von der kleinen ES 1010 bis zur Riesenanlage (nicht der Ausdehnung, sondern der Leistung nach) ES 1050. Darüber hinaus werden noch weitere Varianten entwickelt mit einer Leistung von Millionen Operationen pro Sekunde.

Das *Einheitliche System Elektronischer Rechenanlagen* sichert jedem Programm einen größeren Wert: nach einem solchen Programm kann jetzt nicht nur ein einzelner Typ, sondern jeder Vertreter der gesamten Reihe arbeiten. Damit ist auch eine größere ökonomische Effektivität der EDVA gewährleistet. So wird z. B. beim Anfall großer, die Leistung der Maschine übersteigender Datenmengen, nicht mehr die Anlage als Ganzes unbrauchbar, sondern es ist möglich, die Zentraleinheit, das Herz der Rechenanlage, auszutauschen. Beispielsweise kann an Stelle der Zentraleinheit von ES 1020 die von ES 1040 treten, die etwa 100mal schneller arbeitet. Die Peripheriegeräte (Speicher, Drucker usw.) können weiterverwendet werden, müssen nötigenfalls nur ergänzt werden. Bisher mußte man mit der Zentraleinheit auch alle anderen Geräte ersetzen, jetzt dagegen ist das nicht mehr notwendig.

Der Einsatz des Einheitlichen Systems ist auch für die Programmierer von Vorteil: statt einer ganzen Anzahl von Maschinensprachen haben sie dieselbe Befehlstafel (und damit die gleiche Maschinensprache); es kann natürlich sein, daß beim Übergang zu einer größeren Anlage einige ergänzende Elemente der Maschinensprache zu erlernen sind.

Ich arbeite im Rechenzentrum mit einigen jungen Spezialisten der Rechentechnik zusammen. Sie nutzen die Möglichkeit der algorithmischen Sprachen, die von uns Systemprogrammierern vorbereitet werden. Unser Rechenzentrum bedient ein großes Bauprojektierungsbüro, das Tausende von Mitarbeitern beschäftigt, die viele der in Moskau zu bauenden Gebäude entwerfen. Meine Kollegen Programmierer erleichtern die Arbeit der Projektanten sehr. Jetzt kann eine EDVA Zeichnungen mit den verschiedenen Ansichten des zukünftigen Bauwerks in einigen Minuten herstellen, die Festigkeit der Elemente der Baukonstruktion berechnen und die optimale Reihenfolge und Verteilung der Arbeiten an die einzelnen Projektanten-Kollektive feststellen.

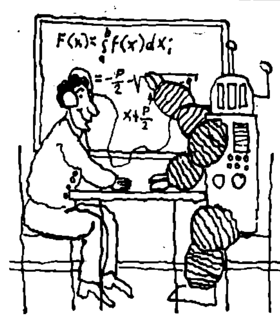
Für die modernen Computer ist es nicht unbedingt erforderlich, daß ein Bauingenieur immer am Bedienpult steht: Es gibt sehr große EDVA, die mit Tausenden (!) gewöhnlicher elektrischer Schreibmaschinen verbunden sind, mit deren Hilfe eine Aufgabe gestellt werden kann, deren Lösung nach kurzer Zeit von der gleichen Maschine ausgedruckt wird.

Des weiteren kann ein Bauingenieur an einem Bildschirmanzeigegerät mit einem Lichtstift eine Zeichnung anfertigen, wonach die EDVA sofort beispielsweise die schwächsten Teile der Konstruktion oder die größte Tragfähigkeit einzelner Bauelemente berechnet.

Mir gefällt meine Arbeit. Ich meine, daß in 10 bis 20 Jahren jeder Diplomingenieur die EDV täglich bei seiner Tätigkeit benutzen wird. Und obwohl die EDV niemals einen Menschen voll wird ersetzen können, ist sie doch in der Lage, ihn von monotoner, zeitraubender Arbeit zu entlasten, und sie wird auf den verschiedensten Gebieten ein nicht mehr wegzudenkendes Instrument menschlicher Tätigkeit sein. *M. Peregudow*

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 5. Januar 1975

▲5▲1252 In einer Gesellschaft von 23 Personen sind 15 Erwachsene mehr als Kinder und fünf Männer mehr als Frauen anwesend. Wieviel Frauen, Männer und Kinder sind es? *Sch.*

▲5▲1253 Ein Aquarium besitzt folgende Innenmaße: Länge 4,8 dm, Breite 25 cm, Höhe 220 mm. Es ist bis zur inneren Höhe von 17 cm mit Wasser gefüllt. Prüfe und begründe, ob man einen Ziegelstein mit den Kantenlängen 3 dm, 20 cm, 100 mm in das Aquarium legen kann, ohne daß Wasser überläuft! *Claudia Steiber, (Kl. 7), Lienz (Österreich)*

W 5 ▪ 1254 Die Zahlen 100 und 90 wurden durch dieselbe natürliche Zahl dividiert. Im ersten Falle erhielt man 4, im zweiten Falle 18 als Rest. Wie lautet der Divisor? *Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen*

W 5 ▪ 1255 Eine Hausfrau hat für die Wintermonate vorgesorgt und Obst eingeweckt. Ein Regal in ihrem Keller ist gefüllt mit Weckgläsern. Wir finden dort Gläser mit Pflaumen, mit Birnen und mit Kirschen. Es sind zusammen mehr als 40, aber weniger als 60 Gläser. Die Anzahl der Gläser mit Pflaumen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Gläser mit Birnen, aber nur halb so groß wie die Anzahl der Gläser mit Kirschen. Wieviel Gläser jeder Sorte sind es? *Sch.*

W 5*1256 Von vier Schülern mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe ist folgendes bekannt:

a) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.

b) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.

c) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.

d) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

e) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Nachname.

Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Nachnamen? Ordne die Schüler nach ihrem Alter; beginne dabei mit dem jüngsten Schüler!

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden, Mathematikfachlehrer

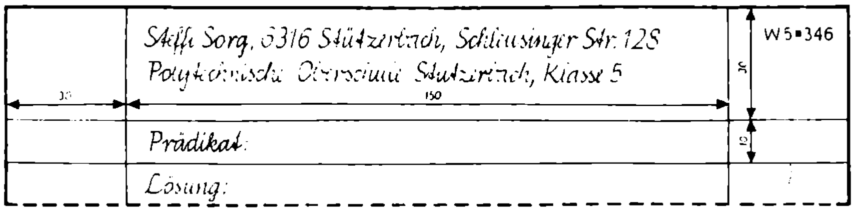
W 5*1257 Die Schüler einer 5. Klasse wollen die Kosten für die Ausschmückung ihres Klassenraumes selbst aufbringen. Wenn jeder Schüler dieser Klasse 80 Pf gibt, dann fehlen 1,50 M am notwendigen Gesamtbetrag. Gibt hingegen jeder 90 Pf, so bleiben 1,50 M übrig. Welcher Geldbetrag wurde für die Ausschmückung des Klassenraumes ausgegeben? *Sch.*

▲6▲1258 Der Schulgarten muß gejätet werden. Peter meint: „Wenn ich den Schulgarten allein jäte, brauche ich dafür 4 Stunden.“ Sein jüngerer Bruder Klaus erwidert: „Ich würde für diese Arbeit 6 Stunden benötigen.“ Ihre Schwester Gerda sagt daraufhin: „Ich schaffe es bereits in 3 Stunden.“ Nach wieviel Stunden würde der Schulgarten gejätet sein, wenn die drei Geschwister diese Arbeit gemeinsam verrichten? *Angela Graizarek, Kl. 8, Erfurt*

▲6▲1259 Es ist der folgende Satz zu beweisen: „Wenn in einem Trapez $ABCD$ der Schenkel $\overline{AD}$ gleich der kleineren Grundseite $\overline{CD}$ ist, dann halbiert die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\sphericalangle BAD = \alpha$.“ *Sch.*

W 6 ▪ 1260 Auf einem Päckchen des Waschmittels *Spee* findet man den Aufdruck „Jetzt 278 g/1,45 M“. Wieviel Gramm dieses Waschmittels würde ein Päckchen zum Preise von 2,00 M enthalten, wenn die Verpackungskosten nicht teurer werden?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg, Clara-Zetkin-OS



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ▪ 10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

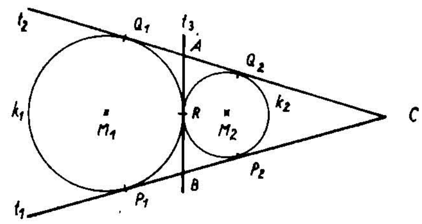
W 6 ■ 1261 Eine Klassenarbeit im Fach Mathematik hatte in einer 6. Klasse folgendes Ergebnis:
Die Hälfte der Anzahl der Schüler dieser Klasse löste nur einen Teil der gestellten Aufgaben, genau 12 Schüler lösten alle Aufgaben, der 14. Teil der Anzahl der Schüler löste keine der gestellten Aufgaben. Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an? *Sch.*

W 6*1262 Herr Anton Amsel, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellte an seinem Geburtstag im Jahre 1974 folgendes fest:
a) Die beiden letzten Ziffern des Geburtsjahres seiner Schwester Berta bilden eine Zahl, die das Alter von Herrn Anton Amsel in vollen Jahren angibt.
b) Herr Anton Amsel ist 8 Jahre älter als seine Schwester.
In welchem Jahre wurde Herr Anton Amsel geboren, in welchem seine Schwester Berta? Wie alt sind beide an ihrem Geburtstag im Jahre 1974? *Oberlehrer Ing. Karl Koch, Schmalkalden, Mathematikfachlehrer*

W 6*1263 Vier Freunde mit den Vornamen Bernd, Dieter, Frank, Lutz und den Familiennamen Bär, Dachs, Fuchs, Löwe unterhalten sich. Der Schüler mit dem Familiennamen Bär stellt fest:
„Unsere Vornamen haben die gleichen Anfangsbuchstaben wie unsere Familiennamen. Aber bei keinem von uns stimmt der Anfangsbuchstabe des Vornamens mit dem Anfangsbuchstaben des Familiennamens überein."
Frank erwidert: „Tatsächlich, du hast recht. Das ist mir noch gar nicht aufgefallen." Der Schüler mit dem Familiennamen Dachs ergänzt die Bemerkungen seiner beiden Freunde: „Die Feststellung unseres Freundes Bär wäre nicht richtig, wenn ich den Vornamen unseres Freundes Fuchs erhalten hätte, was meine Eltern ursprünglich beabsichtigten." Wie heißen die vier Freunde mit Vor- und Familiennamen?
Oberlehrer Ing. Karl Koch, Schmalkalden, Mathematikfachlehrer

▲7▲1264 Gegeben sei folgende Aussage: „Jedes konvexe Viereck, das drei rechte Winkel hat, ist ein Sehnenviereck."
Prüfe und begründe, ob diese Aussage wahr oder falsch ist! Bilde die Umkehrung zur gegebenen Aussage, und prüfe, ob diese Umkehrung wahr oder falsch ist! *T.*
▲7▲1265 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinen Höhen $\overline{AQ}=h_a$ und $\overline{BR}=h_b$; verbinde den Mittelpunkt P der Seite $\overline{AB}$ mit den Fußpunkten Q und R der beiden Höhen, und verbinde R mit Q! Beweise, daß das Dreieck PQR gleichschenklig ist!

W 7 ■ 1266 Die abgebildete Figur stellt zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 dar, wobei $r_1 > r_2$ ist. Die beiden Kreise berühren sich von außen in dem Punkte R. Von den Tangenten t_1, t_2 und t_3, die beiden Kreisen gemeinsam sind, wird ein Dreieck ABC bestimmt. Es ist nachzuweisen, daß dieses Dreieck gleichschenklig ist. *T.*



W 7 ■ 1267 Die Teilnehmer an einem Keramik-Zirkel stellten Figuren, Teller, Schüsseln und Vasen her, insgesamt 120 Gegenstände. Es wurden sechsmal soviel Gegenstände wie Teller hergestellt. Die Summe aus den Anzahlen der hergestellten Figuren und Teller ist gleich der Summe aus den Anzahlen der hergestellten Schüsseln und Vasen. Es wurden zehn Vasen mehr als Schüsseln hergestellt. Wieviel Figuren, Teller, Schüsseln und Vasen wurden von den Zirkelteilnehmern hergestellt?
Schülerin Karin Eickhoff, Berlin

W 7*1268 Es sind alle durch 19 teilbaren vierstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die um 4653 größer sind als ihre Quersummen. *Schüler Dittmar Kurtz, Kl. 9 Friedrichsrode*

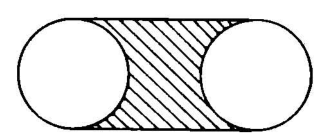
W 7*1269 Zeichne drei Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 und dem gleichen Radius r, die sich in einem Punkt P schneiden! Bezeichne die übrigen Schnittpunkte, in denen sich die Kreise paarweise schneiden, mit A, B und C. Es ist nachzuweisen, daß der Umkreis des Dreiecks ABC ebenfalls den Radius r hat! *Sch.*

▲8▲1270 Man beweise, daß, wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen gleich einer geraden Zahl ist, die Differenz ihrer Quadrate durch 4 teilbar ist. *Sch.*

▲8▲1271 Es sind die Längen der Schenkel $\overline{AC}$ aller stumpfwinkligen, gleichschenkligen Dreiecke ABC mit der Basis $\overline{AB}=10$ cm anzugeben, deren Schenkel ganzzahlig sind.
Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen

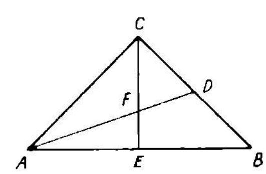
W 8 ■ 1272 Durch einen 134 m langen Tunnel der Sebnitztal-Bahn fährt ein 80 m langer Eisenbahnzug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 40 km · h^{-1}. Wie lange dauert die Durchfahrt des Zuges durch den Tunnel, d. h., wieviel Zeit vergeht von dem Zeitpunkt an, in dem die Lokomotive des Zuges in den Tunnel einfährt, bis zu dem Zeitpunkt, in dem der letzte Wagen des Zuges den Tunnel verläßt?
Oberlehrer B. Hille, Lichtenhain

W 8 ■ 1273 Die Abbildung zeigt zwei kongruente Kreisscheiben, deren Mittelpunkte einen Abstand haben, der genau gleich dem halben Umfang einer der Kreisscheiben ist. Man entscheide, ob der Flächeninhalt des schraffierten Flächenstückes größer, kleiner oder gleich dem Flächeninhalt einer der Kreisscheiben ist.
H. Eichelbaum, Kreiskabinett f. Weiterbildung, Sebnitz



W 8*1274 Ein Fahrzeug legt die erste Hälfte einer Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 zurück, dagegen die zweite Hälfte dieser Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1 \neq v_2$ sei. Man beweise, daß dann die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Strecke stets kleiner als das arithmetische Mittel $\frac{v_1+v_2}{2}$ der beiden Geschwindigkeiten ist.
Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

W 8*1275 Es sei ABC ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ die Länge a haben. Ferner sei F der Schnittpunkt der von dem Punkt C ausgehenden Höhe $\overline{CE}$ mit der von dem Punkt A ausgehenden Seitenhalbierenden $\overline{AD}$. Man berechne die Länge der Strecke $\overline{FD}$ (vgl. die Abb.). *Dittmar Kurtz, OS Keula, Kl. 9*



▲9▲1276 Man untersuche, ob es eine positive reelle Zahl a gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung
$$a^n + a^n = a^{n+1}$$
erfüllt ist. Bejahendenfalls gebe man alle diese positiven reellen Zahlen a an.
Volker Zillmann, Dresden

▲9▲1277 Es sind alle natürlichen Zahlen x, y, z zu ermitteln, für die das Gleichungssystem
$$xy^2z^3 = 384, \quad (1)$$
$$x^2y^3z = 1\,152 \quad (2)$$
erfüllt ist. *Herwig Gratias, EOS „Ernst Schneller", Sömmerda, Kl. 12*

W 9 ■ 1278 Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die die beiden Gleichungen
$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0 \quad (1)$$
und
$$3x^4 - x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0 \quad (2)$$
erfüllt sind.
Manfred Freitag, Schwarzheide

W 9 ■ 1279 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge $a=6$ cm, wobei die Eckpunkte E, F, G, H senkrecht über den Punkten A, B, C bzw. D liegen. Man ermittle den Abstand des Eckpunktes B von der Raumdiagonale $\overline{AG}$.
Anleitung zur Lösung: Man beachte, daß das aus der Kante $\overline{AB}$, der Flächendiagonale $\overline{BG}$ und aus der Raumdiagonale $\overline{AG}$ gebildete Dreieck rechtwinklig ist, und ermittle die Länge der von B ausgehenden Höhe dieses Dreieckes. *Volker Zillmann, Dresden*

W 9*1280 Man beweise, ohne dies zu berechnen, daß die Zahl
$z=5^7\cdot 7^5+1$ nicht gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.
U. Möckel, Techn. Rechnerin, Dresden

W 9*1281 Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n reelle Zahlen ($n\geqq 2$) und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ n positive reelle Zahlen mit

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=1.$$

Man beweise, daß dann stets

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqq 1 \text{ gilt.}$$

Peter Surján, Budapest, UVR

▲10/12▲1282 Man beweise, daß man durch die Multiplikation einer beliebigen von Null verschiedenen natürlichen Zahl, die kleiner als 100 ist, mit der Zahl 99 stets eine natürliche Zahl erhält, deren Quersumme gleich 18 ist.
Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

▲10/12▲1283 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen x und y zu ermitteln, für die die Gleichung
$1!+2!+3!+\ldots+x!=1^3+2^3+3^3+\ldots+y^3$
erfüllt ist. *Anleitung zur Lösung:*
Es gilt $1!=1$ und $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ für alle natürlichen Zahlen n mit $n>1$.
Ferner gilt

$$1^3+2^3+\ldots+y^3=\left[\frac{y(y+1)}{2}\right]^2.$$

A. D. Osmanow, Demurlo, Georgische SSR, UdSSR

W 10/12 ■ 1284 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2+y^2=1, \qquad (1)$$
$$x^6+y^6=1 \qquad (2)$$

zu ermitteln. *L.*

W 10/12 ■ 1285 Am 26. März 1974 wurde in der UdSSR der Satellit *Kosmos 637* gestartet, der eine Kreisbahn mit einem konstanten Abstand von 35600 km von der Erdoberfläche beschreibt.
Man berechne mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes die Umlaufzeit (in h und min) dieses Satelliten, wobei die Umlaufzeit des Mondes mit 27,32 d und der Radius seiner kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde mit 384400 km gegeben sind.
Anleitung: Nach dem 3. Keplerschen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten von Satelliten auf Kreisbahnen wie die dritten Potenzen ihrer Bahnradien. Bei der Ermittlung des Radius der Umlaufbahn von *Kosmos 637* ist zu beachten, daß der Erdradius rund 6370 km beträgt. *L.*

W 10/12*1286 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung
$(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-8)(x-10)\cdot(x-11)(x-12)=14400$ zu ermitteln.
Ralph Lehmann, EOS „Diesterweg", Strausberg
Träger eines 1. Preises bei der DDR-Olympiade und eines 2. Preises bei der XVI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1974

W 10/12*1287 Man beweise den folgenden Satz: In jedem konvexen Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen je zweier Gegenseiten.
Es gilt also für ein Sehnenviereck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$; $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ und den Längen der Diagonalen $\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ stets

$$ef=ac+bd.$$

Bemerkung: Dieser Satz wird auch der *Ptolemäische Satz* genannt, nach dem griechischen Mathematiker und Astronomen *Klaudios Ptolemaios von Alexandria*, um 125 u. Z.
Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Helmut Bausch

▲1219▲ Es hat sich erwiesen, daß sich viele biologische Wachstumsprozesse näherungsweise durch Funktionen der Gestalt

$$y=\alpha x^{\beta}e^{-\gamma x}, \quad x>0 \qquad (1)$$

bzw. $\ln y=\bar{\alpha}+\beta\ln x-\gamma x \quad (\bar{\alpha}=\ln\alpha)$ (2)

beschreiben lassen. Dabei sind α, β, γ gewisse positive Konstanten; z. B. kann durch (1) die Abhängigkeit eines landwirtschaftlichen Ertrags y von der dem Boden zugeführten Menge x einer bestimmten Düngersorte dargestellt werden. Die Kenntnis einer solchen funktionalen Abhängigkeit bietet viele Vorteile, vor allem für Optimierungsprobleme. Damit man mit der Funktion (1) arbeiten kann, muß man zunächst die Werte der Konstanten α, β, γ bzw. $\bar{\alpha}$, β, γ ermitteln.

Man geht dabei von Versuchsergebnissen aus, die eine Wertetabelle (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots n)$ liefern ($x_i>0$, $y_i>0$). n ist die Anzahl der durchgeführten Messungen. Die Differenzen

$$\bar{\alpha}+\beta\ln x_i-\gamma x_i-\ln y_i$$

sind im allgemeinen verschieden von Null, denn sonst würden sich die Meßergebnisse durch (2) und damit (1) exakt darstellen lassen. Man bildet nun die Summe S der Quadrate dieser Differenzen, d. h.

$$S(\bar{\alpha},\beta,\gamma)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{\alpha}+\beta\ln x_i-\gamma x_i-\ln y_i)^2 \qquad (3)$$

und errechnet $\bar{\alpha}$, β, γ so, daß die Summe S minimal wird (das ist die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate). S ist eine Funktion von drei unabhängigen Variablen ($\bar{\alpha}$, β, γ), denn die x_i und y_i haben ja fest vorgegebene Werte. Wir haben damit ein Extremwertproblem für eine Funktion von drei unabhängigen Variablen erhalten, das wir hier nicht weiter behandeln wollen. Es sei nur noch folgendes erwähnt:
Für die Existenz genau eines Minimums der Funktion (3) ist notwendig, daß die Determinante dritter Ordnung

$$D=\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}\ln x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i \\ \sum_{i=1}^{n}\ln x_i & \sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\ln x_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\ln x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

verschieden von Null ist.

Daraus abgeleitet möchte ich folgende Aufgabe stellen:
Aufgabe: Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ positive reelle Zahlen, von denen mindestens drei paarweise verschieden sind. Man beweise, daß die Determinante (4) einen positiven Wert hat.
Für die Beweisführung wünsche ich viel Erfolg!

Unser Foto oben: Prof. Dr. Bausch, seit 1967 Delegationsleiter der DDR-Mannschaft an Internationalen Mathematikolympiaden, wurde im April 1974 zum Vorsitzenden des *Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker* berufen.

Kerstin Bachmann berichtet aus dem Leben einer AG

Unsere AG Mathematik der *EOS August-Hermann-Francke* Halle behandelt das Rechnen mit Resten. Alle haben sich gut vorbereitet und die Artikel in *alpha* (3/69 bis 2/70) studiert.

Anfangs erörtert jemand die Ringstruktur (s. *alpha* 5/69) und wiederholt deren Eigenschaft an den Beispielen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge der Restklassen modulo m. Danach erhalten wir die *Aufgabe des Tages*:

Beim Verkauf von Weihnachtsstollen zu 12 M oder 17 M je Stück wurden innerhalb kurzer Zeit für mehr als 10 Stollen je Sorte 478 M eingenommen. Ermittle die Anzahl der verkauften Stollen je Sorte!

Selbständig versucht jeder, eine Lösung zu finden. Dabei ergeben sich mehrere Lösungswege, die wir anschließend diskutieren:

a) Offenbar gilt für die Einnahme von 478 M, wenn x und y die Anzahl der Stollen je Sorte bedeuten

$$17x+12y=478, \quad x\in N,\ y\in N. \quad (1)$$

Man kann eine Tabelle aufstellen, wobei $x>10$, $y>10$ beachtet wird. Beginnend mit $x=11$ ergibt sich

x	$17x$	y	$12y$	$17x+12y$	
11	187	24	288	475	
12	204	23	276	480	
13	221	21	252	473	
14	238	20	240	478	(Lösung).

Setzt man die Tabelle weiter fort, so erkennt man, daß es keine weitere Lösung gibt.

b) Ich erinnere mich an eine Aufgabe aus *alpha* 1/69, bei der auch das Problem auftritt, ganzzahlige Lösungen einer linearen Gleichung mit mehreren Variablen zu ermitteln. Ähnlich gehe ich hier vor und versuche, durch geeignete Teilbarkeitsbeziehungen eine Lösung zu erhalten:

Aus (1) folgt

$$12y=478-17x$$
$$=12\cdot 39+10-12x-5x$$

und daraus

$$y=39-x+\frac{5(2-x)}{12}. \quad (2)$$

Wenn wir annehmen, daß die Aufgabe eine Lösung hat, so ist y ganzzahlig. Daher gilt

$$12/(2-x),$$

also $2-x=12t, \quad t\in G,$

$$x=2-12t, \quad t\in G,$$

und (nach Einsetzen in (2))

$$y=37+17t, \quad t\in G.$$

Wegen der Forderung $x>10$, $y>10$ muß $t=-1$, also $x=14$, $y=20$ sein. Diese (einzige) Lösung der Aufgabe bestätigt sich durch Einsetzen in (1).

Bei der Besprechung ergeben sich weitere Lösungswege. Vielleicht findet ihr noch andere Vorschläge zur Behandlung der Aufgabe?

Der AG-Leiter, Herr Kermer, faßt die Diskussion zusammen und zeigt einen neuen Lösungsweg. Wir erfahren hierbei, daß die lineare Gleichung

$ax+my=b$ mit der zusätzlichen Forderung $x\in G$, $y\in G$ (3)

als diophantische Gleichung bezeichnet wird.

Betrachtet man die diophantische Gleichung (3) nach dem Modul m, so entsteht die lineare Kongruenz

$$ax\equiv b\ (m). \quad (4)$$

Falls nun (3) überhaupt eine Lösung (x_0, y_0) besitzt, so ist x_0 offenbar Lösung von (4). Sogleich ergibt sich die Frage: Wie kann man die Existenz von Lösungen für (3) oder auch (4) feststellen?

Gemeinsam behandeln wir den nachstehenden Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (3) angibt.

Satz: Die lineare Kongruenz $ax\equiv b\ (m)$ ist lösbar genau dann, wenn $(a, m)/b$.

Beweis: 1) Wenn $ax\equiv b\ (m)$ lösbar ist, so gilt $(a, m)/b$. Denn für die (n. V. existierende) Lösung x_0 von (4) gilt notwendig

$ax_0-t_0m=b$ für ein gewisses $t_0\in G$. (5)

Ist nun $d=(a, m)$, so folgt $d/(ax_0-t_0m)$ und somit aus (5) d/b.

2) Wenn $(a, m)/b$, so ist $ax\equiv b\ (m)$ lösbar.

Wegen $d=(a, m)$ gelten die Beziehungen $a=da_0$, $m=dm_0$, $b=db_0$ mit a_0, m_0, $b_0\in N$, $(a_0, m_0)=1$.

Mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus kann man ganze Zahlen x', y' finden, für die gilt

$$a_0x'+m_0y'=1.$$

Nach Multiplikation mit b_0 folgt

$$a_0(x'b_0)+m_0(y'b_0)=b_0.$$

Somit ist $x_0=x'b_0$, $y=y'b_0$ eine (ganzzahlige) Lösung der Gleichung

$a_0x+m_0y=b_0$ (und damit von $a_0x\equiv b(m_0)$)

oder $(da_0)x+(dm_0)y=db_0$, d. h. von $ax+my=b$ und damit von $ax\equiv b(m)$, w. z. b. w.

Nun lösen wir die diophantische Gleichung (1) mit Hilfe einer Zahlenkongruenz. Zunächst überprüfen wir, ob (1) eine (ganzzahlige) Lösung besitzt.

Wegen $(12, 17)=1$ und $1/478$ finden wir die Existenz einer Lösung von (1) bestätigt.

Wir betrachten nun (1) nach dem Modul 12 und erhalten $5x\equiv 10\ (12)$ bzw. $x\equiv 2\ (12)$ oder $x=2+12t$, $t\in G$. (6a)

Setzen wir (6a) in (1) ein, so ergibt sich

$$y=37-17t, \quad t\in G. \quad (6b)$$

Wegen der Positivität von x und y muß $t\in\{0, 1, 2\}$ sein. Von diesen Werten für t kommt jedoch wegen der Forderung $x>10$, $y>10$ nur $t=1$ (mit $x=14$, $y=20$) in Frage.

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in (1) überzeugen wir uns von der Richtigkeit der erhaltenen Lösung.

Es sind also 20 Stollen zu 12 M und 14 Stollen zu 17 M verkauft worden.

Wir lösen noch einige Kongruenzen nach diesem Verfahren. Dann besprechen wir die *Hausaufgabe*. Sie besteht im Kennenlernen der Bruchdarstellung von Kongruenzen und fordert das Studium von Abschnitt 4.7. in *Lehmann, E.*: Übungen für Junge Mathematiker (Mathematische Schülerbücherei, Nr. 36).

Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen

Wir wiederholen

Im Mathematikunterricht der Klasse 6 erarbeiteten wir uns die Begriffe „ist Teiler von", Primzahl und Primfaktorzerlegung:

Definition 1: Die von 0 verschiedene natürliche Zahl t heißt Teiler der natürlichen Zahl n, falls mit einer geeigneten natürlichen Zahl k die Gleichung $n=kt$ gilt.
Wir erinnern uns, daß für „t ist Teiler von n" das Zeichen t/n und für „t ist nicht Teiler von n" das Zeichen $t \nmid n$ verwendet wird.

Definition 2: Besitzt die natürliche Zahl p genau zwei Teiler, so heißt p Primzahl.
Die Menge der Teiler einer Primzahl p ist $\{1; p\}$. Wir wissen, daß mittels des „Siebes des Eratosthenes" die Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen bestimmt werden können. Der Größe nach geordnet, beginnt die Folge der Primzahlen mit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Wie bereits Euklid beweisen konnte, gibt es unendlich viele Primzahlen. Weiterhin lernten wir im Unterricht den folgenden Satz kennen:

Satz 1' (Existenzsatz der Primfaktorzerlegung): Jede natürliche Zahl $n>1$ läßt sich auf mindestens eine Weise als Produkt von Primfaktoren darstellen: $n=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$.
Hierbei sind $p_1, p_2, \ldots$ und p_r r nicht notwendig voneinander verschiedene Primzahlen. Für $r=1$ soll insbesondere die angegebene Formel $n=p_1$ bedeuten.
Mittels des Potenzbegriffes lassen sich die Teilprodukte gleicher Primfaktoren in einer Primfaktorzerlegung jeweils zu einer Potenz zusammenfassen:

Definition 3: Die Potenz a^n (gelesen „a hoch n") ist für jede reelle Zahl a und für jede natürliche Zahl n erklärt durch

$$a^0=1 \quad \text{und}$$
$$a^n=a^{n-1} \cdot a \text{ für } n>0.$$

a heißt Basis und n Exponent der Potenz a^n.
Aus Definition 3 ergibt sich schrittweise:

$$a^0=1$$
$$a^1=a^0 \cdot a=1 \cdot a=a$$
$$a^2=a^1 \cdot a=a \cdot a$$
$$a^3=a^2 \cdot a=(a \cdot a) \cdot a=a \cdot a \cdot a$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mittels Definition 3 kann dem Satz 1' die folgende Fassung gegeben werden:

Satz 1'' (Existenzsatz der Primfaktorzerlegung): Jede natürliche Zahl $n>1$ läßt sich auf mindestens eine Weise als Produkt von Potenzen, deren Basen paarweise voneinander verschiedene Primzahlen sind, darstellen:

$$n=q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}.$$

Dabei sind $q_1, q_2, \ldots$ und q_s s paarweise voneinander verschiedene Primzahlen und $n_1, n_2 \ldots$ und n_s sind s von 0 verschiedene natürliche Zahlen.
Bei manchen Betrachtungen, bei denen die Primfaktorzerlegungen mehrerer natürlicher Zahlen eine Rolle spielen, ist es von Vorteil, für die in der Darstellung $n=q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}$ von Satz 1'' vorkommenden Exponenten $n_1, n_2, \ldots$ und n_s die Forderung $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_s \neq 0$ fallen zu lassen. Solche Darstellungen wollen wir „Primfaktorzerlegung im erweiterten Sinne" nennen. Man kann ja für mehrere natürliche Zahlen stets Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn angeben, in denen durchweg formal dieselben Primfaktoren auftreten. Dies sei am Beispiel von Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn von 12 und 50 gezeigt:

$$12=2^2 \cdot 3^1=2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0$$
$$50=2^1 \cdot 5^2=2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2$$

Wir betrachten Primfaktorzerlegungen der natürlichen Zahl 700. Um eine Primfaktorzerlegung von 700 zu erhalten, prüfen wir zunächst, ob die kleinste Primzahl 2 Teiler von 700 ist. Wenn $700=2 \cdot 350$ ist dies der Fall. Der andere Faktor gestattet wiederum, die kleinste Primzahl 2 als Faktor abzuspalten:
$700=2 \cdot 2 \cdot 175$. Für den Faktor 175 als ungerade Zahl gilt jedoch $2 \nmid 175$. Auch für die auf 2 folgende Primzahl 3 gilt $3 \nmid 175$, denn die Quersumme $1+7+5=13$ von 175 ist nicht durch 3 teilbar. Hingegen gilt für die auf 3 folgende Primzahl: $5/175$. Damit ergibt sich $700=2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35$. Der Faktor 35 kann natürlich die Primzahlen 2 und 3 nicht zu Teilern haben, denn sonst müßte wegen $5 \cdot 35=175$ im Gegensatz zu unseren obigen Feststellungen $2/175$ oder $3/175$ gelten. Jedoch gilt $5/35$. Damit ergibt sich $700=2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Der Faktor 7 ist selbst Primzahl. Also ist

(1) $\quad 700=2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7=2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

eine Primfaktorzerlegung von 700. Durch das eben angewandte systematische Verfahren wird für jede natürliche Zahl $n>1$ eine besondere Primfaktorzerlegung, eine normierte Primfaktorzerlegung erhalten. Für das Definieren des Begriffes „normierte Primfaktorzerlegung" bieten sich zwei Möglichkeiten an:

Definition 4': Eine Primfaktorzerlegung $n=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ der natürlichen Zahl $n>1$, in der $p_1, p_2, \ldots$ und p_r den Ungleichungen $p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots \leqq p_r$ genügende Primzahlen sind, heißt normierte Primfaktorzerlegung von n.

Definition 4'': Eine Primfaktorzerlegung $n=q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}$ der natürlichen Zahl n, in der $n_1, n_2, \ldots$ und n_s von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind und $q_1, q_2, \ldots$ und q_r den Ungleichungen $q_1<q_2<\ldots<q_s$ genügende Primzahlen sind, heißt normierte Primfaktorzerlegung.
Unter Beachtung von Definition 3 sind die Definitionen 4' und 4'' äquivalent, d. h. aus jeder von beiden folgt die andere. Durch ein zweckmäßigeres Vorgehen als das oben angewandte erhält man u. U. wesentlich schneller eine Primfaktorzerlegung:
So überblickt man sofort, daß 700 als Produkt $7 \cdot 10 \cdot 10$ darstellbar ist. Mit $10=2 \cdot 5$ ergibt sich damit schließlich:

(2) $\quad 700=7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

Die jetzt für 700 erhaltene Primfaktorzerlegung (2) unterscheidet sich von der Zerlegung (1). Allerdings kommen in beiden Zerlegungen die gleichen Primfaktoren vor, und jeder Primfaktor kommt jeweils gleich oft vor. Auf Grund dieser Feststellung können wir durch Umordnen (Anwenden des Kommutations- und Assoziationsgesetzes der Multiplikation) die Zerlegung (2) in die Zerlegung (1) überführen: $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Das Betrachten weiterer analoger Beispiele läßt uns die Gültigkeit des folgenden Satzes vermuten:

Satz 2 (Eindeutigkeitssatz der Primfaktorzerlegung): Jede natürliche Zahl $n>1$ besitzt höchstens eine normierte Primfaktorzerlegung.
Dieser Unitätssatz der Primfaktorzerlegung ist eine wahre Aussage. Doch wollen wir den Beweis des Unitätssatzes 2 zunächst zurückstellen. Vorerst wollen wir zeigen, welche wertvollen Erkenntnisse aus dem Unitätssatz der Primfaktorzerlegung erschlossen werden können.
Daß sich übrigens Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Primfaktorzerlegung zu einem Satz zusammenfassen lassen, überblicken wir sofort:

Satz 3 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Primfaktorzerlegung):
Jede natürliche Zahl $n>1$ besitzt genau eine normierte Primfaktorzerlegung.
Wir betrachten Primfaktorzerlegungen des Produktes zweier natürlicher Zahlen.
Um die normierte Primfaktorzerlegung von

$108 \cdot 126$ anzugeben, ist es nicht nötig, dieses Produkt zu berechnen. Vielmehr ist es einfacher, zunächst die normierten Primfaktorzerlegungen der Faktoren aufzustellen:

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Durch Multiplizieren der rechten und linken Seiten beider Gleichungen ergibt sich eine Primfaktorzerlegung von $108 \cdot 126$:

$$108 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Durch Umordnen erhalten wir die normierte Primfaktorzerlegung von $108 \cdot 126$:

$$108 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^1 \tag{3}$$

Um zu erkennen, wie diese Primfaktorzerlegung aus den Primfaktorzerlegungen von 108 und 126 entsteht, stützen wir uns auf geeignete normierte Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn:

$$108 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^0$$
$$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Aus diesen beiden Darstellungen folgt die Formel (3) auf Grund des folgenden, mittels Definition 3 leicht zu beweisenden Satzes:

Satz 4: Ist a eine reelle Zahl und sind m und n natürliche Zahlen, so gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Allgemein gilt:

Satz 5: Haben die natürlichen Zahlen m und n die normierten Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn
$m = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{m_s}$ und
$n = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots q_s^{n_s}$
mit $m_1 + n_1 > 0$, $m_2 + n_2 > 0$, ... und $m_s + n_s > 0$, so besitzt das Produkt mn die normierte Primfaktorzerlegung
$mn = q_1^{m_1+n_1} \cdot q_2^{m_2+n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{m_s+n_s}$.

Mittels der bereitgestellten Sätze lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

Aufgabe 1: Zeige, daß in der normierten Primfaktorzerlegung von $217 \cdot 1342$ der Primfaktor 3 nicht vorkommt!

Aufgabe 2: Zeige, daß die normierte Primfaktorzerlegung von $1324 \cdot 5114$ den Primfaktor 2 genau dreimal enthält!

Wir betrachten die normierte Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl.

Die Zahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... sind laut folgender Definition die Quadratzahlen.

Definition 5: Eine natürliche Zahl n heißt Quadratzahl, falls es eine natürliche Zahl m gibt, so daß $n = m^2$ gilt. Wir wollen zunächst die normierte Primfaktorzerlegung der Quadratzahl 509^2 ermitteln. Wegen $509 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ ergibt sich nach Definition 3 und Satz 5:
$509^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1)^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1)$
$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2$

Die Exponenten 6, 4 und 2 der normierten Primfaktorzerlegung von 509^2 sind sämtlich gerade Zahlen. Dies gilt allgemein:

Satz 6: Die Exponenten der normierten Primfaktorzerlegung einer von 0 und 1 verschiedenen Quadratzahl sind sämtlich gerade Zahlen.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist wahr:

Satz 7: Besitzt die normierte Primfaktorzerlegung einer von 0 und 1 verschiedenen natürlichen Zahl nur gerade Exponenten, so ist die natürliche Zahl Quadratzahl.

Dieser Satz wird durch die Feststellung bewiesen, daß $n = q_1^{2n_1} \cdot q_2^{2n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{2n_s}$, wobei $n_1, n_2, \ldots$ und n_s sämtlich von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind und $q_1, q_2, \ldots$ und q_s den Ungleichungen $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$ genügende Primzahlen sind, das Quadrat der natürlichen Zahl $m = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}$ ist.

Wir wollen unsere Kenntnisse anwenden, indem wir die folgende Aussage beweisen:
Es gibt keine gebrochene Zahl x, die der Gleichung $x^2 = 11$ genügt.

Indirekter Beweis: Angenommen, es gäbe eine gebrochene Zahl x, für die $x^2 = 11$ gilt. Da x eine gebrochene Zahl ist, gibt es zwei geeignete natürliche Zahlen m und n mit $n \neq 0$, so daß gilt

$x = \frac{m}{n}$. Durch Einsetzen von $x = \frac{m}{n}$

in $x^2 = 11$ ergibt sich: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 11$

Hieraus folgt schrittweise

$\frac{m^2}{n^2} = 11$ und $m^2 = 11n^2$.

Da n^2 Quadratzahl ist, enthält n^2 den Primfaktor 11 entweder überhaupt nicht oder in einer geraden Anzahl. Die natürliche Zahl $11n^2$ enthält demnach den Primfaktor 11 in einer ungeraden Anzahl und kann also nach Satz 6 keine Quadratzahl sein. Also kann die Gleichung $m^2 = 11n^2$ nicht gelten. Da sich ein Widerspruch ergeben hat, ist die Annahme, die zu beweisende Aussage sei falsch, selbst falsch.

Wiederum lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

Aufgabe 3: Beweise indirekt; Es gibt keine gebrochene Zahl x, die der Gleichung $x^2 = \frac{25}{8}$ genügt.

Aufgabe 4: Beweise: Die normierte Primfaktorzerlegung einer von 0 und 1 verschiedenen Kubikzahl (darstellbar als Potenz mit Exponent 3, deren Basis eine natürliche Zahl ist) besitzt nur durch 3 teilbare Exponenten.

Aufgabe 5: Beweise indirekt: Es gibt keine gebrochene Zahl x, die der Gleichung $x^3 = 4$ genügt.

Aufgabe 6: Gib die normierte Primfaktorzerlegung von 10^n an, wobei n eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist!

Wir betrachten die sämtlichen Teiler einer natürlichen Zahl und ihre normierten Primfaktorzerlegungen.

Als Beispiel orientieren wir uns an der natürlichen Zahl $n = 540$. Diese besitzt die normierte Primfaktorzerlegung $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$. Gemäß Definition 1 heißt eine natürliche Zahl $t \neq 0$ genau dann Teiler der natürlichen Zahl n, falls mit einer geeigneten natürlichen Zahl k $tk = n = 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ gilt. Nach Satz 5 ergibt sich für die nach Satz 3 vorhandene und eindeutig bestimmte normierte Primfaktorzerlegung jedes von 1 verschiedenen Teilers t von n, daß erstens in dieser Primfaktorzerlegung höchstens die Primfaktoren 2, 3 und 5 vorkommen, und daß zweitens diese Primfaktoren in der angegebenen Reihenfolge höchstens zwei-, drei- oder einmal vorkommen. Als Teiler von $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ kommen damit höchstens die folgenden Zahlen in Frage:

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1$	$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$
$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5$	$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10$
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6$
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$
$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9$	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 18$
$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 45$	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$
$2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 27$	$2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 54$
$2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 135$	$2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 270$
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$	
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$	
$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$	
$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 60$	
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 36$	
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$	
$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 108$	
$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540$	

Hiernach besitzt die natürliche Zahl 540 höchstens 24 Teiler. Die normierten Primfaktorenzerlegungen (im erweiterten Sinn) der als Teiler von 540 in Frage kommenden Zahlen haben die Gestalt $t = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, wobei x, y und z den Ungleichungen $x \leqq 2$, $y \leqq 3$ und $z \leqq 1$ genügende natürliche Zahlen sind. Da unabhängig voneinander für die Wahl der Zahl x drei Möglichkeiten, nämlich 0, 1 und 2, für die Wahl der Zahl y vier Möglichkeiten und für die Wahl von z zwei Möglichkeiten bestehen, ergibt sich 24 als das Produkt $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

Da diese als Teiler von 540 in Frage kommenden 24 Zahlen voneinander verschiedene Primfaktorzerlegungen (im nichterweiterten Sinn) besitzen, müssen diese 24 Zahlen nach Satz 2 (Unitätssatz der Primfaktorzerlegung) voneinander verschieden sein.

Daß umgekehrt diese 24 Zahlen auch Teiler von 540 sind, folgt daraus, daß in jedem Falle gemäß $tk = n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ zum jeweiligen $t = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ das zugehörige k als $k = 2^{2-x} \cdot 3^{3-y} \cdot 5^{1-z}$ angegeben werden kann. Denn dann gilt gemäß Satz 5:
$tk = (2^x \cdot 3^y \cdot 5^z)(2^{2-x} \cdot 3^{3-y} \cdot 5^{1-z})$
$= 2^{x+2-x} \cdot 3^{y+3-y} \cdot 5^{z+1-z} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$

(In Heft 6/74 erscheint Teil 2, d. Red.)

W. Träger

Über Ungleichungen

Ungleichungen stellen ein interessantes Gebiet der Mathematik dar, das mathematischen Arbeitsgemeinschaften ein breites Betätigungsfeld bietet. Dieser Bericht soll einige Anregungen zur Beschäftigung mit Ungleichungen geben.

Wir wollen folgende bekannte Tatsache zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen:

Das Quadrat einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ. Somit gilt für jede reelle Zahl x die Ungleichung

$$x^2 \geqq 0.$$

Wir können $x=\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}$ setzen, wobei a_1 und a_2 nichtnegative reelle Zahlen sind, und erhalten so die Ungleichungen

$$a_1-2\sqrt{a_1a_2}+a_2 \geqq 0,$$

$$a_1+a_2 \geqq 2\sqrt{a_1a_2} \qquad (1)$$

und

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2},$$

wobei Gleichheit jeweils genau dann eintritt, wenn $a_1=a_2$ ist. Die letztere Ungleichung wird Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel genannt, da man allgemein einen Ausdruck A der Form $A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ *als arithmetisches* und einen Ausdruck G der Form

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

als *geometrisches* Mittel bezeichnet, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nichtnegative reelle Zahlen sind.

Wir wollen nun unsere grundlegende Ungleichung (1) verallgemeinern und formulieren deshalb folgenden Satz:

Ist $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl und sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nichtnegative reelle Zahlen, so gilt stets die Ungleichung

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (2)$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$ ist.

Den Beweis werden wir durch vollständige Induktion führen. (Über vollst. Induktion siehe u. a. „alpha" 1967 Heft 2 und 3) Für $n=2$ ist die zu beweisende Ungleichung gerade (1), die wir bereits bewiesen haben. Wir werden nun den Induktionsschritt von n auf $n+1$ durchführen. Der Einfachheit halber setzen wir $g=\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_{n+1}}$. Der Ausdruck

$$B=(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$
$$+(a_{n+1}+[n-1]g)$$

hat genau $2n$ Summanden, wenn wir für $(n-1)g$ die Darstellung $g+g+\ldots+g$ wählen. Wir können zweimal unsere Induktionsannahme und anschließend die Ungleichung (1) anwenden und erhalten

$$B \geqq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+n\sqrt[n]{a_{n+1}g^{n-1}}$$
$$\geqq 2n\sqrt[2n]{a_1a_2\ldots a_{n+1}g^{n-1}},$$

d. h. $\quad B \geqq 2n\sqrt[2n]{g^{n+1}g^{n-1}}=2ng.$

Subtrahieren wir beiderseits $(n-1)g$, so bekommen wir schließlich

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}=B-(n-1)g \geqq 2ng$$
$$-(n-1)g=(n+1)g.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Gleichheit tritt sicher genau dann ein, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$ und $a_{n+1}=g$, d. h. wenn $a_1=\ldots=a_n=a_{n+1}$ ist.

Wir werden nun einige ehemalige Olympiade-Aufgaben unter Verwendung der Ungleichung (2) elegant lösen.

Aufgabe (2. Olympiade/12. Klasse/2. Stufe)

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2 \text{ ist.}$$

Da auch $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ positiv sind, ist nach (1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2\sqrt{\frac{ab}{ba}}=2$. Diese Aufgabe können wir leicht verallgemeinern:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, so ist stets

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geqq n.$$

Dieses Ergebnis kann man auch so formulieren: Ist das Produkt von n positiven Zahlen gleich 1, so ist ihre Summe nicht kleiner als n.

Der Beweis verläuft analog zu obigem, nur wird hier die Ungleichung (2) angewandt.

Oftmals muß man vor der Anwendung der Ungleichung (2) den zu beweisenden Ausdruck umformen, wie etwa in folgendem Beispiel.

Aufgabe (4/12/2): Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung

$$a^4-4ac^3+3c^4 \geqq 0 \text{ richtig ist.}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Zum Beweis verwenden wir wieder (2) und erhalten

$$a^4+3c^4=|a|^4+|c|^4+|c|^4+|c|^4 \geqq 4\sqrt[4]{|a|^4|c|^{12}}$$
$$=4|a||c|^3 \geqq 4ac^3.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $|a|=|c|$ ist und a und c gleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn $a=c$ ist. Diese Aufgabe können wir etwa wie folgt verallgemeinern:

Man beweise für nichtnegative Zahlen a und b und natürliche Zahlen m und n die Ungleichung:

$$ma^{m+n}-(m+n)a^mb^n+nb^{m+n} \geqq 0 \;!$$

Aus (2) folgt sofort die Behauptung

$$ma^{m+n}+nb^{m+n} \geqq (m+n)\sqrt[m+n]{a^{m(m+n)}b^{n(m+n)}}$$
$$=(m+n)a^mb^n.$$

Aufgabe (7/12/2): Beweisen Sie, daß für alle nichtnegativen Zahlen a, b, c:

$$a^3+b^3+c^3 \geqq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$$

gilt! Zunächst ist

$$a^3+b^3+c^3=\frac{1}{6}(4a^3+b^3+c^3)+$$
$$+\frac{1}{6}(a^3+4b^3+c^3)+\frac{1}{6}(a^3+b^3+4c^3).$$

Wendet man auf jede der drei Klammern (2) an, erhält man:

$$a^3+b^3+c^3 \geqq \sqrt[6]{a^{12}b^3c^3}+\sqrt[6]{a^3b^{12}c^3}$$
$$+\sqrt[6]{a^3b^3c^{12}}=a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$$

und damit ist die Behauptung bereits bewiesen. Gleichheit tritt dabei genau dann ein, wenn $a=b=c$ ist.

Mit dem gleichen Beweisverfahren können wir folgende Verallgemeinerung beweisen:

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n \geqq a_1^{n-1}\sqrt[n-1]{a_2a_3\ldots a_n}$$
$$+a_n^{n-1}\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$

seien dabei nichtnegative reelle Zahlen.

Bei einer Reihe von Aufgaben muß neben der Anwendung von (2) noch eine Hilfsungleichung bewiesen werden, wie etwa in folgendem Beispiel:

Aufgabe (3/12/4): Beweisen Sie, daß für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt[a+b]{a^bb^a} \text{ ist!}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Nach (1) ist $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$. Wenn wir gezeigt haben, daß

$$\sqrt{ab} \geqq \sqrt[a+b]{a^bb^a}$$ ist, haben wir den geforderten Beweis erbracht.

O. B. d. A. sei $a \geqq b$ und somit ist $a^{a-b} \geqq b^{a-b}$, d. h. $a^{a-b}b^{b-a} \geqq 1$. Schließlich ist $a^{a+b}b^{a+b}$ $=a^{2b}a^{a-b}b^{2a}b^{b-a} \geqq a^{2b}b^{2a}$ und damit ist auch die Behauptung bewiesen.

Mittels der Ungleichung (2) kann man auch Unmöglichkeitsbeweise erbringen, wie etwa in folgendem Beispiel.

Aufgabe (Vorolympiade 1960 Berlin/Leipzig): Man beweise, daß die Gleichung

$$x^3+y^3+z^3=2xyz$$

keine positiven Lösungen haben kann!

Den Beweis führen wir indirekt, d. h. wir nehmen an, daß die gegebene Gleichung positive Lösungen hat. Dann ist aber nach (2)

$$x^3+y^3+z^3 \geqq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3xyz,$$

und damit $2xyz \geqq 3xyz$.

Wegen $x>0$, $y>0$ und $z>0$ ist auch $xyz>0$ und somit würde folgen $2\geqq 3$, was den gesuchten Widerspruch darstellt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe (1/12/4): Es seien u, v und w beliebige gewählte positive Zahlen, kleiner als 1. Man soll zeigen, daß unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$ und $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

Den Beweis führen wir ebenfalls indirekt, d. h. wir nehmen an, es sei $u(1-v)>\frac{1}{4}$, $v(1-w)>\frac{1}{4}$ und $w(1-u)>\frac{1}{4}$.

Wegen $0<u<1$, $0<v<1$ und $0<w<1$ ist nach (1)

$$\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}<\sqrt{u(1-v)}=\frac{u+1-v}{2}$$

und analog

$$\frac{1}{2}<\frac{v+1-w}{2} \text{ und } \frac{1}{2}<\frac{w+1-u}{2}.$$

Addieren wir diese drei Ungleichungen, so erhalten wir den Widerspruch $\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$.

Wir wollen nun einige einfache Extremalaufgaben betrachten, die wir mit der Ungleichung (2) lösen werden.

Aufgabe: Unter allen Quadern mit dem Volumen V bestimme man denjenigen, der die kleinste Oberfläche O hat.

Lösung: Die Längen der drei senkrecht aufeinanderstehenden Kanten seien a, b und c. Dann ist $V=abc$ und $O=2(ab+bc+ca)$.

Nach (2) gilt $\frac{0}{2}=ab+bc+ca\geqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ $=3\sqrt[3]{V^2}$, d. h. $0\geqq 6\sqrt[3]{V^2}$. V ist eine Konstante, d. h. O wird minimal, wenn Gleichheit eintritt. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $ab=bc=ca$, d. h. $a=b=c$ ist. Der Würfel ist also der gesuchte Quader. Ganz analog könnte man sich eine Oberfläche oder eine Kantensumme vorgeben und den Quader mit maximalem Volumen suchen.

Etwas komplizierter wird die Lösung, wenn wir unter alle Quadern mit der Kantensumme k denjenigen bestimmen wollen, der die kleinste Oberfläche hat.

Es ist $k=4(a+b+c)$ und $0=2(ab+bc+ca)$ und ferner $\left(\frac{k}{4}\right)^2=a^2+b^2+c^2$ $+2ab+2bc+2ca$.

Nach (1) folgt

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqq\sqrt{a^2b^2}=ab,\ \frac{a^2+c^2}{2}\geqq ac,\ \frac{b^2+c^2}{2}\geqq bc.$$

Somit erhalten wir:

$$\left(\frac{k}{4}\right)^2\geqq 3(ab+bc+ca)=3\frac{0}{2},$$

d. h. $0\leqq\frac{k^2}{24}$.

Die Oberfläche O wird also maximal, wenn $0=\frac{k^2}{24}$ ist, d. h. wenn $a=b=c$ ist.

Natürlich brauchen wir uns nicht auf einen Quader zu beschränken.

Aufgabe: Man bestimme unter allen Dreiecken mit dem Umfang u dasjenige mit dem größten Flächeninhalt A.

Lösung: Die Seiten des Dreiecks seien a, b und c. Dann ist $u=a+b+c$ und nach der Heronischen Dreiecksformel

$$A=\sqrt{\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2}-a\right)\left(\frac{u}{2}-b\right)\left(\frac{u}{2}-c\right)}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung ist

$$\frac{u}{2}-a>0,\ \frac{u}{2}-b>0 \text{ und } \frac{u}{2}-c>0.$$

Nach (2) folgt somit

$$\sqrt[3]{\left(\frac{u}{2}-a\right)\left(\frac{u}{2}-b\right)\left(\frac{u}{2}-c\right)}\leqq\frac{\frac{u}{2}-a+\frac{u}{2}-b+\frac{u}{2}-c}{3}=\frac{u}{6} \text{ und weiter}$$

$$A\leqq\sqrt{\frac{u}{2}\cdot\frac{u^3}{6^3}}=\frac{u^2}{36}\sqrt{3}.$$

A wird also maximal, wenn $a=b=c$ ist.

Wir wollen nunmehr eine weitere wichtige Ungleichung betrachten. Ist $n\geqq 2$ eine natürliche Zahl und sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, so wird der Ausdruck

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

als harmonisches Mittel bezeichnet.

Das harmonische Mittel von n positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist stets nicht größer als ihr geometrisches Mittel, d. h.

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\geqq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \qquad (3)$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$ ist. Wenden wir die Ungleichung (2) auf die positiven Zahlen $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$ an, so erhalten wir sofort (3), wovon sich der Leser überzeugen kann.

Es sei noch bemerkt, daß natürlich auch das harmonische Mittel stets nicht größer als das arithmetische ist. Auch hier tritt genau dann Gleichheit ein, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$ ist. Die Ungleichung

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \qquad (4)$$

folgt aus den Ungleichungen (2) und (3) wegen der Transitivität. Mit der Ungleichung (4) läßt sich die

Aufgabe (6/10/3): Man beweise für positive reelle a, b, c die Ungleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{9}{a+b+c},$$

recht kurz lösen, denn nach (4) ist

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

woraus wir sofort die gewünschte Beziehung erhalten. Formen wir die Ungleichung (4) um, so bekommen wir folgende interessante Ungleichung

$(a_1+a_2+\ldots a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$. Ist uns eine der beiden Summen bekannt, so erhalten wir sofort eine Abschätzung für die andere.

Wählen wir eine reelle Zahl x mit $x\neq\frac{\pi}{2}m$, wobei m eine ganze Zahl ist, dann ist $\sin^2x+\cos^2x=1$ und $\sin^2x>0$ und $\cos^2x>0$ und somit folgt aus

$$(\sin^2x+\cos^2x)\left(\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\right)\geqq 2^2$$

schließlich

$$\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\geqq 4.$$

Die Reihe der Aufgaben, zu deren Lösung man die Ungleichung (2) anwenden kann, könnte man beliebig fortsetzen, aber sicher reichen schon diese wenigen Beispiele aus. um Nützlichkeit und Vielfalt der Anwendungsbereiche zu demonstrieren.

H.-D. Gronau (Kurzbiographie siehe S. 118)

Die stereographische Projektion

Teil 2

E. Schröder

6. Erzeugung von Paaren sich ergänzender Kreisbüschel durch stereographische Projektion

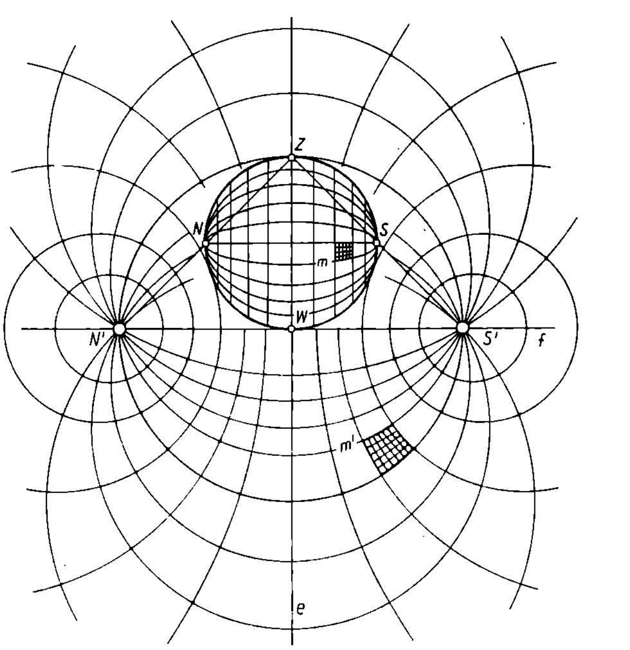
Für die folgenden Untersuchungen stellen wir uns die Kugelfläche κ mit einem Netz von Längen- und Breitenkreisen überzogen vor. Ferner wird κ so auf π gelegt, daß sich κ und π in einem Punkt W des Äquators berühren. Der diametral gegenüberliegende Äquatorpunkt Z ist das Projektionszentrum. Damit ist die stereographische Projektion von κ auf π festgelegt. In der Kartographie bezeichnet man den hier vorliegenden Abbildungsvorgang als einen querachsigen, transversalen oder äquatorständigen Kartenentwurf. (siehe Titelblatt)

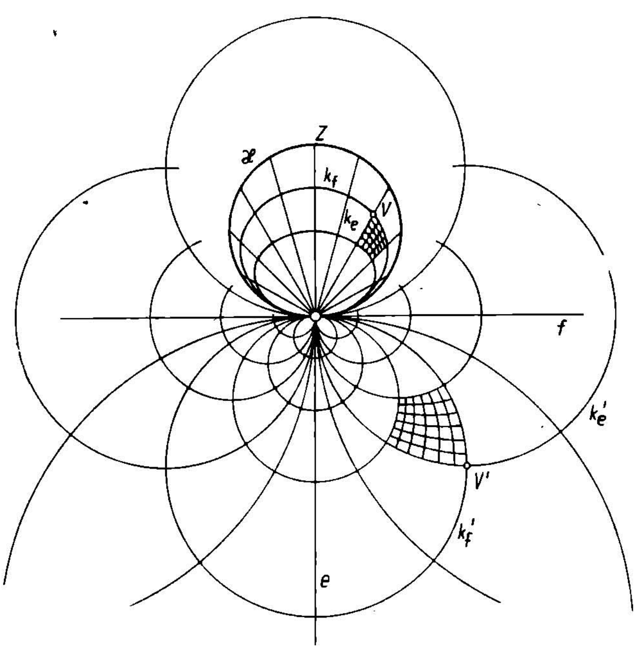
Zunächst fragen wir nach dem Bild der Meridiankreise. Sie stellen auf κ eine Schar von Großkreisen dar, die sich sämtlich in N und S schneiden. Folglich gehen die Bildkreise der Meridiane durch die Bildpunkte N' und S'. Ein Sonderfall ist der durch Z (und W) gehende Meridian. Dieser bildet sich auf die Verbindungsgerade $f=f(N'S')$ ab. Aus Gründen der Symmetrie liegen die Mitten der Bildkreise auf der Symmetralen e der Strecke $\overline{N'S'}$. Die Menge der den Meridianen zugeordneten Bildkreise bilden in π ein elliptisches Kreisbüschel. Zu dem Bild m' eines Meridiankreises m allgemeiner Lage findet man den Mittelpunkt, indem man das Lot von Z auf die Ebene durch m fällt und dieses Lot mit der Bildebene π schneidet. Dieser auf e liegende Schnittpunkt ist der Mittelpunkt von m'. Nun sind noch die Bilder der Schar von Breitenkreisen zu ermitteln. Auf Grund der Kreistreue der Abbildung müssen diese eine zweite Schar von Kreisen in π ergeben. Wegen der Winkeltreue schneidet das Bild jedes Breitenkreises jeden Kreis des vorliegenden elliptischen Büschels senkrecht, denn das Gradnetz auf κ bildet ein orthogonales Netz. Da ferner je zwei Breitenkreise auf κ keinen Punkt gemeinsam haben, dürfen sich auch je zwei Bildkreise der zweiten Schar in π nicht schneiden.

Die Mittelpunkte der Kreise dieser Schar liegen auf der Verbindungsgeraden $f=f(N'S')$. Sie ergeben sich wieder als Bilder der zu den Breitenkreisen gehörigen Spitzen von Tangentialkegeln. Man kann sich also konstruktiv sehr leicht den Mittelpunkt und einen weiteren auf f liegenden Kreispunkt zur Konstruktion eines Kreises aus dem zweiten Büschel verschaffen. Die Menge der so konstruierten Kreise bildet ein hyperbolisches Kreisbüschel. Diesem gehören auch die Bilder der Punkte N und S an. Dies sind die Nullkreise des hyperbolischen Büschels. Da sie zugleich auch die Trägerpunkte des vorliegenden elliptischen Büschels darstellen, liegt hier ein Paar sich ergänzender Kreisbüschel vor. Der Äquator bildet sich auf die Symmetrale e ab. Dies ist die Zentrale des elliptischen Kreisbüschels.

Das Bild dieses Paares sich ergänzender Kreisbüschel läßt auch eine physikalische Interpretation zu. Bringt man in N' und S' je eine elektrische Punktladung an, die dem Betrag nach gleich sind und entgegengesetzes Vorzeichen besitzen, so entsteht in einer Ebene durch N' und S' ein Netz von Linien. Die Kraftlinien decken sich mit den Kreislinien des elliptischen, die Äquipotentiallinien mit den Kreislinien des hyperbolischen Büschels. Aus der Dichte der Feldlinien kann auf die relative Stärke des Feldes in einem Punkt geschlossen werden.

Die stereographische Projektion soll den Zugang zu einem weiteren Paar sich ergänzender Kreisbüschel öffnen, das gleichfalls wegen der physikalischen Anwendbarkeit von Interesse ist. Die sich in W senkrecht schneidenden Geraden e und f machen wir zu Trägern von je einem Ebenenbüschel $\{\varepsilon\}$ und $\{\varphi\}$. Diese schneiden die Kugelfläche κ nach je einer Schar von Kreisen $\{k_e\}$ und $\{k_f\}$. Die Kreise der Schar $\{k_e\}$ besitzen e als gemeinsame Tangente in W. Die Kreise der Schar $\{k_f\}$ besitzen f als gemeinsame Tangente in W. Da sich e und f senkrecht schneiden, schneidet auch jeder Kreis der einen Schar jeden der anderen senkrecht in W. Offenbar schneidet auch jeder Kreis der einen Schar jeden Kreis der anderen auf κ in einem von W verschiedenen Punkt. Uns interessiert der Schnittwinkel von je einem Kreis aus $\{k_e\}$ und $\{k_f\}$ in dem von W verschiedenen Punkt V. Die Spitze E des





Tangentialkegels an κ in k_e liegt auf f. Die Spitze F des Tangentialkegels an κ in k_f liegt auf e. Legt man durch E, F und den Mittelpunkt von κ eine Ebene σ, so muß der zweite Schnittpunkt V von k_e und k_f symmetrisch zu W bezüglich σ liegen. Wegen der bestehenden Symmetrie müssen sich k_e und k_f in V gleichfalls senkrecht schneiden. (s. Abb.).

Diese Feststellungen helfen weiter zur Beschreibung der in π liegenden Bilder von $\{k_e\}$ und $\{k_f\}$. Wegen der Kreistreue der Projektion stellt $\{k'_e\}$ ein Büschel von Kreisen dar, die e in W berühren. Entsprechendes gilt für $\{k'_f\}$. Wegen der Winkeltreue der Abbildung schneidet jeder Kreis des einen Büschels jeden Kreis des anderen Büschels in W und in je einem von W verschiedenen Punkt V' senkrecht. Jedes Kreisbüschel stellt für sich ein parabolisches dar. Auf Grund der besonderen Lageverhältnisse handelt es sich hier um ein Paar sich ergänzender parabolischer Kreisbüschel. Bei einem Dipol bilden die Scharen von Kraftlinien und Äquipotentiallinien ein Paar sich ergänzender parabolischer Kreisbüschel.

Die hier unter völligem Verzicht auf Mittel der Analysis abgehandelte stereographische Projektion wurde bereits von dem griechischen Astronomen Hipparch von Nikaia (190–125 v. Ztr.) zur bildhaften Darstellung der Himmelskugel angewandt. Um 160 n. Ztr. übernahm sie Claudius Ptolemäus bei Aufstellung von Erd- und Himmelskarten für seinen berühmten Almagest. Als Entdecker der Kreistreue ist Jordanus Nemorarius (um 1250) zu nennen. Die Bezeichnung „stereographische Projektion" geht auf den Franzosen François d'Aiguillon (1613) zurück.

Abbildungen, bei denen die Schnittwinkel von Kurven erhalten bleiben, bezeichnet man als „konforme Abbildungen". Diese spielen in der Funktionentheorie eine wichtige Rolle und lassen vielfältige Anwendungen zu. Konforme Abbildungen haben die Eigenschaft, im Kleinen ähnlich zu sein. Die stereographische Projektion findet – unter günstiger Anpassung des Punktes W an die Lage des abzubildenden Kugelausschnittes – in den amtlichen Kartenwerken der Niederlande sowie der Volksrepubliken Polen, Ungarn und Rumänien Anwendung. Auch in der Kristallographie bedient man sich dieser Abbildungsart.

Die Mehrzahl der gebräuchlichsten kartographischen Abbildungen lassen sich nicht, wie hier, auf eine Zentral- oder Parallelprojektion zurückführen. Man kann dafür lediglich Abbildungsgleichungen angeben. Eigenschaften solcher Abbildungen können nur mit den Mitteln der Analysis erschlossen werden. Man spricht dann auch von einem Kartenentwurf und nicht von einer Projektion. Am bekanntesten ist wohl der Mercator-Entwurf, benannt nach dem Geographen Gerhard Mercator, 1512–1594. Dieser besitzt gleichfalls die Eigenschaft der Winkeltreue und führt Kugelloxodromen (Linien fester Himmelsrichtung) in Geraden über. Karten dieser Art finden in der Seefahrt vielfältig Anwendung und werden deshalb auch Seekarten genannt.

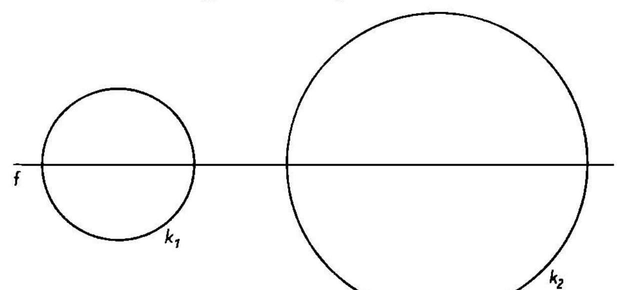
Eine andere für Anwendungen wichtige und auch exakt erfüllbare Forderung ist die der Flächentreue. Als Beispiele dafür sind der Lambertsche Zylinderentwurf, der Entwurf von Mollweide und der Entwurf von Stab-Werner zu nennen. Nach dem flächentreuen Entwurf des Franzosen Rigobert Bonne sind die amtlichen Kartenwerke Frankreichs, der Schweiz, Belgiens, Schottlands und Irlands angelegt. Eine gleichzeitige globale Erfüllung der Forderungen von Flächentreue und Winkeltreue ist jedoch nicht möglich, da dies äquivalent mit der Forderung einer längentreuen Abbildung ist.

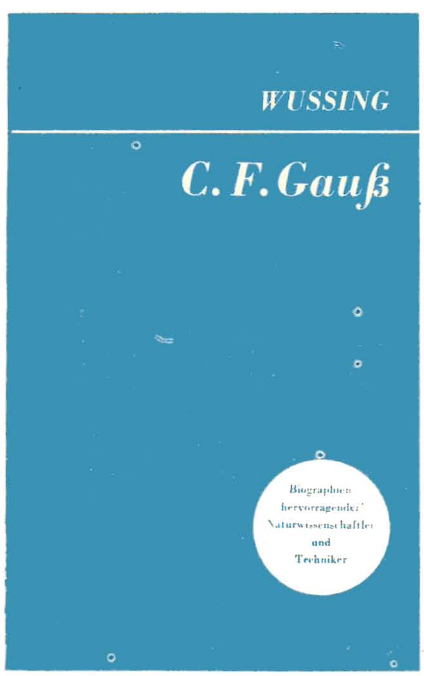
Eine Aufgabe von Dozent Dr. Eberhard Schröder

▲1288▲ Gegeben sind zwei sich nicht schneidende Kreise k_1 und k_2 derart, daß kein Kreis den anderen umschließt.

Man konstruiere zwei sich senkrecht schneidende Kreise c_1 und c_2, so daß sich die Kreispaare c_1 und k_1, c_1 und k_2, c_2 und k_1 sowie c_2 und k_2 senkrecht schneiden.

Anleitung: Man betrachte die gegebenen Kreise k_1 und k_2 als Elemente eines hyberbolischen Kreisbüschels und die gesuchten Kreise c_1 und c_2 als Elemente des dazu ergänzenden elliptischen Kreisbüschels.





LEIPZIG
BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1974

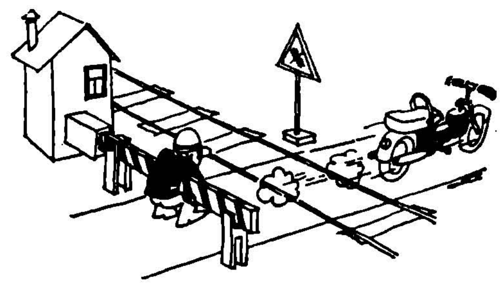
Mit Carl Friedrich Gauß tritt uns einer der bedeutendsten Naturforscher und Mathematiker entgegen, den die Menschheit je hervorgebracht hat. Sein Wirken hat die von ihm berührten mathematischen und naturwissenschaftlichen Fachrichtungen weitgehend geformt. Vieles, was er erforscht und publiziert hat, ist erst lange nach seinem Tode in voller Tragweite deutlich geworden.

Das von *Prof. Dr. H. Wußing* verfaßte Büchlein stellt sich die Aufgabe, Leben und Wirken von *Gauß* einem möglichst großen Kreis von Schülern, Studenten, Lehrern, Ingenieuren, Naturwissenschaftlern und Mathematikern nahezubringen.

Am 4. Mai 1977 feiern wir den 200. Geburtstag des großen Wissenschaftlers. Mitte dieses Jahres wurde aus diesem Anlaß vom Teubner-Verlag ein Heft in der Reihe „Biographien hervorragender Naturwissenschaftler und Techniker" herausgegeben. Jetzt sollten die interessierten *alpha*-Leser dieses Buch kaufen, um sich langfristig und intensiv, sei es für die Arbeit in den Arbeitsgemeinschaften, Spezialistenlagern oder für Wandzeitungen vorzubereiten. (Preis 4,70 M, Bestell-Nr. 665 700 8)

Vorfahrt beachten!

Teil 1



Noch immer verlieren täglich in unserer Republik im Durchschnitt 6 Menschen an den Folgen eines Verkehrsunfalles ihr Leben, werden 126 Menschen zum Teil erheblich verletzt und verursachen 139 Verkehrsunfälle einen hohen volkswirtschaftlichen Schaden.

Aufgabe 1:
Ein Motorrollerfahrer beachtete an einer Straßenkreuzung in Berlin nicht die Vorfahrt eines Pkw und stieß mit diesem zusammen. Die Folgen: Fahrer und Beifahrer des Motorrollers mußten mit Knochenbrüchen in einem Krankenhaus stationär behandelt werden. An den Fahrzeugen entstand Sachschaden. Und dies waren die Kosten:

Schadenskosten an den Fahrzeugen	1 290 M
Krankengeld, Lohnausgleich, Schmerzensgeld, Schadenersatz für Lohnausgleich	28 620 M
bis zum Zeitpunkt der Kostenuntersuchung an den Soziusfahrer gezahlte Rente	3 840 M
Kosten für medizinische Hilfe und Betreuung	4 620 M
volkswirtschaftlicher Verlust durch Ausfall im Produktionsprozeß	38 500 M

Berechne den Gesamtschaden dieses Unfalles!

Oft ist der volkswirtschaftliche Schaden eines Verkehrsunfalles um ein Vielfaches größer als in dem betrachteten Beispiel. Denken wir hier etwa an einen Verkehrsunfall in der morgendlichen Berufsspitzenzeit, durch den Hunderte Werktätige verspätet ihren Arbeitsplatz erreichen.

Selbstverständlich kann ein Verkehrsunfall nicht nur an dem Faktor Geld gemessen werden, denn es geht hier vor allem um Leben und Gesundheit der von Verkehrsunfällen betroffenen Menschen.

Die hauptsächlichen Unfallursachen können wir der folgenden Aufgabe entnehmen:

Aufgabe 2:
1971 ereigneten sich in der DDR 50 861 Verkehrsunfälle, bei denen folgende Ursachen besonders häufig auftraten:

Ursache	Verkehrsunfälle
überhöhte bzw. unangemessene Geschwindigkeit	13 500
Nichtbeachten der Vorfahrt	7 300
Fahren unter Alkoholeinfluß	3 900
falsches Verhalten beim Überholen	3 500
von Fußgängern verursacht	7 800

Veranschauliche diesen Sachverhalt durch ein Streckendiagramm!

Bei einem Verkehrsunfall ist jeder zur Leistung der Ersten Hilfe bei Verletzten und gegebenenfalls zur Einleitung weiterer Maßnahmen verpflichtet (Benachrichtigung des DRK; Benachrichtigung der VP außer bei Verkehrsunfällen ohne Personenschaden und mit Sachschaden unter 300 M).

Kenntnisse in der Ersten Hilfe sollte man schon als Schüler in einem DRK-Lehrgang erwerben.

Die Verhütung von Verkehrsunfällen ist eine bedeutende gesellschaftliche Aufgabe. Um trotz des ständig wachsenden Straßenverkehrs Ordnung und Sicherheit auf unseren Straßen zu erhöhen, sind Maßnahmen zum Neu- und Ausbau des Straßennetzes und zur Verbesserung der Verkehrsorganisation und Verkehrstechnik erforderlich.

Doch der entscheidende Faktor bei der Gewährleistung einer Ordnung und Sicherheit im Straßenverkehr ist und bleibt der Verkehrsteilnehmer selbst mit seinem bewußten, disziplinierten, verkehrsgerechten und vorschriftsgemäßen Verhalten.

An 11 % der 50 861 Verkehrsunfälle des Jahres 1971 waren Bürger im Alter von über 60 Jahren ursächlich beteiligt. Bei einem Teil der älteren Bürger hat die Leistungsfähigkeit so nachgelassen, daß ihre Straßenverkehrstauglichkeit sogar als Fußgänger sehr ernst in Frage gestellt sein kann. Ältere Bürger, die sich dem Überqueren einer verkehrsreichen Straße allein nicht mehr gewachsen fühlen, sollten einen anderen Bürger um Hilfeleistung bitten. Jedoch auch an 9,7 % der Verkehrsunfälle des Jahres 1971 waren Kinder ursächlich beteiligt. Im Kindesalter liegen die meisten Fußgängerunfälle bei den 5- und 6jährigen, die meisten Fahrradunfälle bei den 10- bis 15jährigen.

Wir schützen unsere eigene Gesundheit und helfen Verkehrsunfälle vermeiden, wenn wir die Verkehrsvorschriften und die sich aus ihrem Nichteinhalten ergebenden Gefahren kennen, wenn wir uns Fertigkeiten im verkehrsgerechten Verhalten anerziehen und wenn wir uns stets bewußt verkehrsgerecht verhalten.

Im Beitrag „Achtung Kreuzung – Vorfahrt beachten!“ (alpha 5/70) wurden die Regeln der Vorfahrt an Kreuzungen und Einmündungen durch vorfahrtregelnde Verkehrsschilder erläutert. Im jetzigen Beitrag sollen die Begriffe Reaktionszeit, Bremsweg, Anhalteweg, Sicherheitsabstand u. a. erläutert und ihre Bedeutung für das Einschätzen von Verkehrssituationen betrachtet werden.

Das Tachometer eines Autos oder Motorrades gestattet die Maßzahl der in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (gelesen: Kilometer pro Stunde) gemessenen Fahrzeuggeschwindigkeit v abzulesen. Bei konstanter *Geschwindigkeit* v besteht zwischen Fahrzeit t, Fahrweg s und v die Beziehung: I. $s = v \cdot t$

Aufgabe 3:
Auf der Autobahn beträgt für einen Lkw die zulässige Höchstgeschwindigkeit 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein Lkw passiert 8.15 Uhr auf der Autobahn das abgebildete Hinweiszeichen:

Wann kann dieser Lkw bei Weiterfahrt auf der Autobahn und Einhalten der Autobahnordnung frühestens die erste Dresdener Autobahnabfahrt erreichen?

So wie Längen mit Maßeinheiten wie Kilometer (km), Meter (m), Millimeter (mm) u. a. angegeben werden können, lassen sich auch Geschwindigkeiten in verschiedenen Einheiten angeben! Zur Übung wollen wir die folgende Aufgabe gemeinsam lösen.

Aufgabe 4:

Rechne die gemäß abgebildetem Verbotszeichen zulässige Höchstgeschwindigkeit um in die Maßeinheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde)!

Lösung: $30\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{30}{1} \cdot \frac{1000\,\text{m}}{60 \cdot 60\,\text{s}} = \frac{25}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 8\frac{1}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

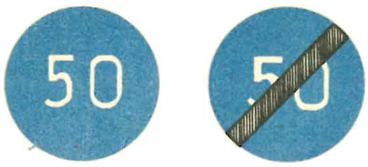
$\approx 8{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

In der Tabelle (rechts) sind in den beiden ersten Spalten verschiedene Geschwindigkeiten jeweils in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ angegeben. Die folgende Aufgabe sollst du unter Verwendung der Tabelle I und der Formel I lösen!

Tabelle I: Bremsweg s_B in m

v in		a in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$										
$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1	1,3	2	2,5	2,9	3,9	4,7	5	5,4	5,9	6,4
10	2,78	3,9	3,0	1,9	1,6	1,3	1,0	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6
20	5,56	15	12	7,7	6,2	5,3	4,0	3,3	3,1	2,9	2,6	2,4
30	8,33	35	27	17	14	12	8,9	7,4	6,9	6,4	5,9	5,4
40	11,1	62	47	31	25	21	16	13	12	11	10	9,6
50	13,9	97	74	48	39	33	25	21	19	18	16	15
60	16,7	140	110	69	56	48	36	30	28	26	24	22
70	19,4	190	140	94	76	65	48	40	38	35	32	29
80	22,2	250	190	120	99	85	62	52	49	46	42	39
90	25	310	240	160	120	110	80	66	62	58	53	49
100	27,8	390	300	190	150	130	99	82	77	72	65	60

Aufgabe 5:
Die beiden abgebildeten Gebotszeichen stehen an einer Straße in einem gewissen Abstand s. Kraftfahrzeuge, die nicht verkehrswidrig gefahren werden und keine Panne haben, benötigen zum Durchfahren dieses Streckenabschnittes höchstens 41 s. Wie groß ist der Abstand beider Verkehrszeichen?



Im Interesse der Verkehrssicherheit ist es für jeden Verkehrsteilnehmer, ganz gleich ob Kraftfahrer, Radfahrer oder Fußgänger, wichtig, über das Zumhaltenbringen eines Kraftfahrzeuges Bescheid zu wissen.

Bei jedem Fahrer verstreicht eine gewisse Zeit vom Wahrnehmen eines optischen, akustischen oder taktilen Signals, also der Aufforderung zu einer Reaktion, bis zum Beginn der Antworthandlung. Im Durchschnitt beträgt diese Zeitspanne 0,78 s. An diese erste Zeitspanne schließt sich eine zweite an, nach der erst die gewünschte Reaktion erreicht wird. In dieser zweiten Zeitspanne kann z. B. bei einem Autofahrer das Umsetzen des rechten Fußes vom Gas- auf das Bremspedal und das Betätigen des Bremspedals bis zum Eintritt der gewünschten Bremswirkung erfolgen. Beide Zeitspannen wollen wir (vereinfachend) unter dem Begriff *Reaktionszeit* t_R zusammenfassen. Der normale Mittelwert der Reaktionszeit beträgt etwa 1 s. Die normale durchschnittliche Reaktionszeit kann bei Schreck- und Störreizen unterboten, ja aber auch erheblich, nämlich bis zu 40 s überschritten werden. Es gibt auch Beispiele dafür, daß es infolge Schreckstarre zu überhaupt keiner reaktiven Bewegung kommt. Während der Reaktionszeit rollt das Fahrzeug mit der gleichen Geschwindigkeit weiter! Den Weg, den das Fahrzeug in der Reaktionszeit zurücklegt, wollen wir als *Reaktionsweg* s_R bezeichnen. Gemäß Formel I gilt:

II. $s_R = v \cdot t_R$

Aufgabe 6:
a) Gib mittels Tabelle I den Reaktionsweg für $v = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (zulässige Höchstgeschwindigkeit für Pkw und Kräder außerhalb geschlossener Ortschaften) und $t_R = 1$ s an!
b) Ein Fahrer fährt entgegen den Bestimmungen des § 5 StVO (Straßenverkehrsordnung) nach Alkoholgenuß mit seinem Pkw. Wie groß ist der Reaktionsweg für $v = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $t_R = 3$ s?

Als *Bremsweg* s_B wird die Strecke bezeichnet, die ein Fahrzeug vom Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand durchfährt. Der Bremsweg ist abhängig von der Fahrgeschwindigkeit v (bei Einleiten des Bremsvorganges) und von der Bremsverzögerung a. Unter der Annahme, daß das Abbremsen mit der konstanten Bremsverzögerung a geschieht, gilt die Formel:

III. $s_B = \frac{v^2}{2a}$

Aufgabe 7:
Berechne mittels Formel III und Tabelle I den Bremsweg eines Fahrzeuges für $v = 70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $a = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$!

Die schon mehrfach benutzte Tabelle I gestattet auch, für bestimmte Geschwindigkeiten und Bremsverzögerungen den zugehörigen Bremsweg abzulesen.

Aufgabe 8:
Ergänze so, daß wahre Aussagen entstehen!
a) Bei gleicher Bremsverzögerung a gilt: Je größer die Fahrgeschwindigkeit v ist, desto .... ist der Bremsweg s_B.
b) Bei gleicher Geschwindigkeit v gilt: Je größer die Bremsverzögerung a ist, desto .... ist der Bremsweg s_B.

Der *Anhalteweg* s_A eines Fahrzeuges setzt sich additiv aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B zusammen:

IV $s_A = s_R + s_B$

Aufgabe 9:
Ermittle unter Benutzung von Tabelle I den Anhalteweg eines Fahrzeuges, dessen Fahrer mit der Reaktionszeit $t_R = 1$ s reagiert, das mit der Geschwindigkeit $v = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt und das mit der Bremsverzögerung $a = 5{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ abgebremst wird!

Ein Fahrer kann nur dann einen Zusammenstoß mit einem Hindernis vermeiden, wenn er dies in einem Abstand ausmacht, der nicht kleiner als sein Anhalteweg ist; z. B. begrenzen parkende Fahrzeuge, Nebel, starker Regen und Schneetreiben gegebenenfalls erheblich die Sichtweite.

Aufgabe 10:
Bei Antritt einer Fahrt hat der Fahrer eines Kraftfahrzeuges die vorgeschriebene Bremsprobe durchzuführen, um u. a. festzustellen, ob die Betriebsbremse die nach § 47 StVZO (Straßenverkehrszulassungsordnung) vorgeschriebene Bremsverzögerung zu erreichen gestattet. Diese beträgt für einen Pkw mit Höchstgeschwindigkeit über $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Bei einer Bremsprobe bringt ein Fahrer seinen Pkw (mit der Höchstgeschwindigkeit $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$) beim Fahren auf trockener normalgriffiger Straße mit der Geschwindigkeit $v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bei maximaler Betätigung des Bremspedals nach 8 m Bremsweg zum Stehen. Prüfe mittels Tabelle I, ob dieser Pkw verkehrssicher ist!

Jedem Fahrradfahrer sei empfohlen, auch mit seinem Fahrrad Bremsproben durchzuführen, und zwar einerseits mit der Betriebsbremse (Rücktrittbremse) sowie auch mit der Handbremse.

Mutet man den Reifen zu, das Fahrzeug stärker zu beschleunigen oder stärker durch Bremsen zu verzögern, als es die Haftreibung zwischen Reifen und Straßendecke zuläßt, so tritt in zunehmendem Maße ein Gleiten auf. Dabei bricht das Fahrzeug häufig aus der Spur aus, und seine Lenkfähigkeit ist zumindest stark begrenzt. Zwei Extremfälle seien hier besonders genannt:
a) Beim Anfahren auf vereister Fahrbahn mit zu großer Beschleunigung drehen sich die Antriebsräder, und das Fahrzeug bleibt auf der Stelle stehen.
b) Wird ein Fahrzeug auf schlüpfrig nasser oder vereister Fahrbahn mit zu großer Verzögerung abgebremst, so blockieren die Räder, und das Fahrzeug rutscht als Schlitten weiter.

In Heft 6/74 bieten wir eine Reihe von Aufgaben zur Übung und Vertiefung.

W. Träger

In freien Stunden alpha heiter

Bildungslücke

W. Tilman, Moskau

Fremdkörper

Olaf sollte eine Menge von Brüchen in echte und unechte einteilen. Er schrieb als Lösung:

A (echte Brüche) $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{17}{36}$

B (unechte Brüche) $\frac{19}{3}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{28}{5}$

Wie man sieht, hatte er in jede der beiden Teilmengen einen Bruch eingeordnet, der eigentlich in die andere gehörte. In den folgenden Fällen ist eine Menge natürlicher Zahlen nach einem bestimmten Merkmal in zwei Teilmengen A und B zerlegt worden. Auch hier ist jeweils ein Element in die falsche Menge geraten.

Finde bei den folgenden drei Aufgaben diese *Fremdkörper* heraus! Überlege dazu, nach welchem Merkmal die Einteilung erfolgt sein könnte! Als Hilfe und zur Kontrolle sei hinzugefügt, daß die Summe der sechs falschen eingeordneten Zahlen 80 beträgt.

▲1▲	A	2	3	5	9	11
	B	4	8	28	47	60
▲2▲	A	2	3	5	9	11
	B	7	8	22	36	45
▲3▲	A	2	3	5	9	11
	B	4	16	17	23	44

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV Berlin

Rätselpyramide

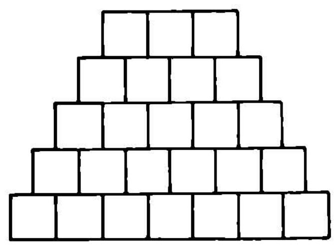
In jedes Feld der Figur ist ein Buchstabe so einzusetzen, daß in den Zeilen Wortbilder mit folgender Bedeutung entstehen:

1. Zeile: Operationszeichen
2. Zeile: Seite einer Gleichung
3. Zeile: Gesamtheit von Objekten
4. Zeile: Geometrischer Grundbegriff
5. Zeile: Spezielle Abbildung

Zwischen den Buchstaben der Zeilen besteht folgender Zusammenhang:

Werden von den Buchstaben einer Zeile zwei geeignete Buchstaben weggelassen und werden drei geeignete andere Buchstaben hinzugenommen, so werden die Buchstaben in der darunterstehenden Zeile erhalten.

Werden von den insgesamt weggelassenen acht Buchstaben wiederum zwei geeignete Buchstaben gestrichen, so bilden die sechs verbleibenden Buchstaben bei geeigneter Anordnung das Wortbild eines mathematischen Begriffes. Welcher Begriff ist das?



Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln

Kilogramm oder Meter?

In der Molkerei verlangte Hagen ein halbes Kilo Milch.

„Mein Junge", belehrte ihn die Verkäuferin, „die Milch wird nicht gewogen, sie wird gemessen!"

„So", überlegte der Kleine, „dann geben Sie mir bitte einen halben Meter!"

Bedeutende Mathematiker gesucht!

Trage in das obige Schema die Namen von acht bedeutenden Mathematikern ein. Zur Erleichterung können die Lebensdaten dieser Mathematiker dienen. Reiht man die Buchstaben auf der gestrichelten Linie aneinander, so erhält man einen Begriff, mit dem jeder alpha-Leser bereits gearbeitet hat.

(ei ein Buchstabe, ü = ue)

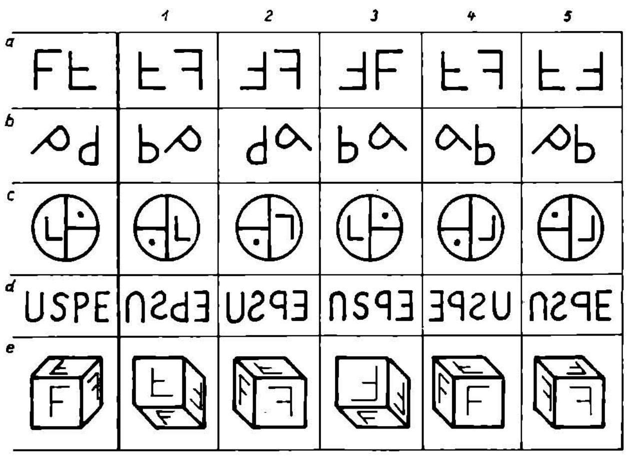
Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

1						1646 bis 1716
2						1643 bis 1727
3						1839 bis 1873
4						1704 bis 1752
5						1552 bis 1632
6						1471 bis 1528
7						1845 bis 1918
8						um 624 bis 547 v. u. Z.

Gespiegeltes!

Das links stehende Gebilde ist rechts unter den fünf Vertretern einmal gespiegelt vorhanden. Welches ist es?

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

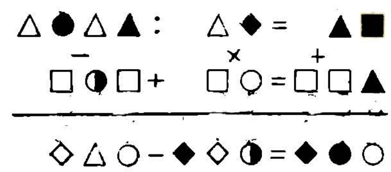


Gastronomisches Rätsel

Stellt der Koch auf jeden Tisch
eine Portion leckren Fisch,
so fehlt einer Portion Fisch
ein Tisch.
Stellt der Koch auf jeden Tisch
zwei Portionen Fisch,
so bleibt ein Tisch
ohne Fisch.
Wieviel Tische?
Wieviel Fische?

Mathematikfachlehrer Bottke, Cölpin

Kryptarithmetik



aus: Matematički List, Beograd

Die Zahl 10000 gesucht

Jede Ziffer soll neunmal verwendet werden! Ergänze das folgende Schema!

1	$1111+1-(111+1)$
2	
3	
4	$4^4 \cdot 4-4 \cdot 4+4+4+4-4 \cdot 4$
5	
6	$6!+6 \cdot 6 \cdot 6+66-\frac{6+6}{6}$
7	
8	
9	$999\frac{999}{999}$

Dr. Ch. Lange, Fachlehrer für Musik, IfL Leipzig

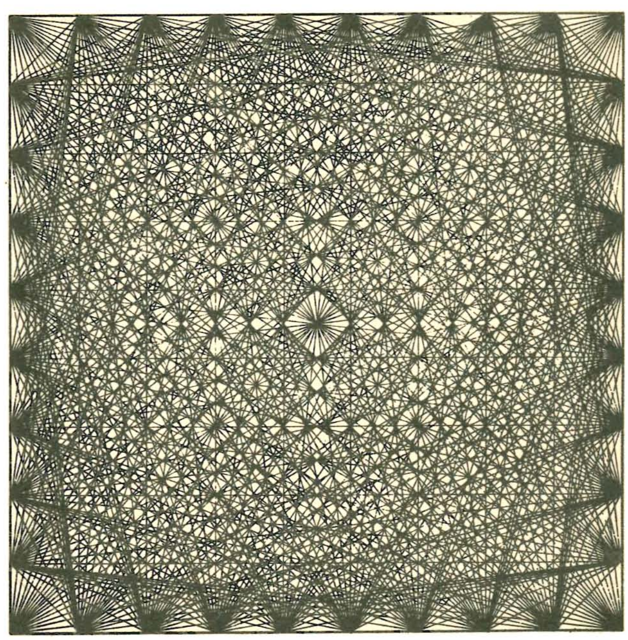
„Tierische" Mathematik

```
E B E R
E N T E
G A N S
R A B E
-------
T I E R E
```

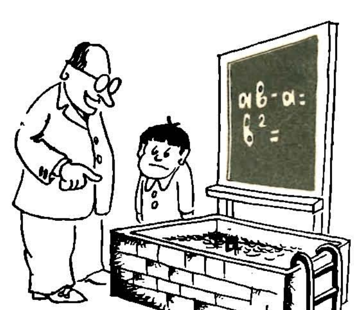
Gleichen Buchstaben entsprechen gleiche Ziffern. Jedoch beachte:
Die Ziffer „3", die fehlt, na ja! Dafür sind all die andern da!

O. Splett, Fachlehrer für Russisch, OS Regis-Breitingen

Geometrisches Ornament



Dušan V. Slavič, Beograd



Wenn du die Aufgabe nicht löst, gehst du baden

Utschitelskaja gaseta, Moskau

Lösungen

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade

Olympiadeklasse 10

1. Lösung des Schülers *Norbert Schieweck*, Magdeburg (bearbeitet):

Der Halbkreis k_1 erfüllt genau dann Bedingung (2), wenn sein Mittelpunkt M_1 auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$ liegt. Wegen (1) ist M_1 dann der Mittelpunkt der Strecke AB. Wir berechnen nun r_1:

Es gilt $\sphericalangle ACM_1 = 30^\circ$ und damit $r_1 : \overline{M_1C} = \sin 30^\circ$, d. h.

(4) $\quad 2r_1 = \overline{M_1C}$. Da M_1C Höhe im gleichseitigen Dreieck ABC ist, gilt

(5) $\quad \overline{M_1C} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ mit $a = \overline{AB}$.

Aus (4) und (5) folgt

(6) $\quad r_1 = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.

Wegen (3) muß auch der Mittelpunkt des Kreises k_2 auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$ liegen. Da der Kreis k_2 den Halbkreis k_1 von außen berührt, gilt $\overline{CM_2} = \overline{CM_1} - r_1 - r_2$ und wegen (4) und (5)

(7) $\quad \overline{CM_2} = \frac{a}{4}\sqrt{3} - r^2$.

Es folgt nun wie oben $2r_2 = \overline{CM_2}$ und mit (7)

(8) $\quad r_2 = \frac{a}{12}\sqrt{3}$. Aus (6) und (8) folgt

$r_1 : r_2 = 3 : 1$ und $r_1 > r_2$.

Anmerkung: Auch ohne Anwendung der Trigonometrie war diese Aufgabe sehr leicht zu lösen. Das spiegelt sich auch in den erreichten Punktzahlen wider:

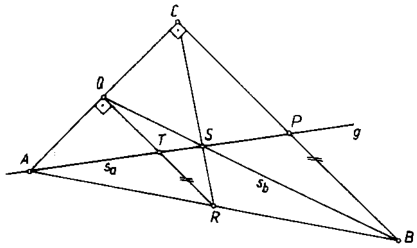
0	1	2	3	4	5	6	Punkte
1	1	0	1	7	36	53	Anzahl

Aber obwohl – oder vielleicht sogar gerade weil – diese Aufgabe so leicht war, zeigte sie besonders deutlich eine Schwäche unserer Schüler auf: Ungenaue Formulierungen und umständliche Lösungswege. Das war bei etwa der Hälfte aller Schüler zu verzeichnen!

Dr. H.-Jürgen Sprengel, Pädagogische Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam

2. (I) Es werde angenommen, daß das in Bild 1 dargestellte Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. P, Q und R sind die Halbierungspunkte der Dreieckseiten BC bzw. CA bzw. AB. S ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden. Es gilt $\overline{SA} : \overline{SP} = \overline{SB} : \overline{SQ} = 2 : 1$.

Nach den Strahlensätzen ist QR parallel BC. Ferner schneiden sich QR und die Seitenhalbierende AP im gemeinsamen Halbierungspunkt T. Wegen $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ und $BC \| QR$ gilt auch $\sphericalangle AQT = 90^\circ$.



(II) Ein Dreieck ABC genügt den Bedingungen der Aufgabe, wenn es in folgender Weise konstruiert werden kann:

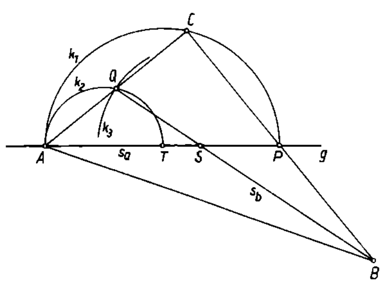
(1) Man konstruiert auf einer Geraden g vier Punkte A, T, S, P in dieser Anordnung, so daß $\overline{AT} = \frac{1}{2}s_a$, $\overline{TS} = \frac{1}{6}s_a$, $\overline{SP} = \frac{1}{3}s_a$ gibt.

(2) Man schlägt je einen Halbkreis k_1 über $\overline{AP}$ und k_2 über $\overline{AT}$ derart, daß k_1 und k_2 der gleichen Halbebene bezüglich g angehören.

(3) Man schlägt den Kreis k_3 um S mit $\frac{1}{3}s_b$ als Radius. Dieser schneidet k_2 in Q.

(4) Man verbindet A mit Q und verlängert AQ über Q hinaus bis zum Schnitt mit k_1. Man erhält C.

(5) Man verbindet C mit P und verlängert CP über P hinaus. Man verbindet Q mit S und verlängert QS über S hinaus. Die Geraden (CP) und (QS) schneiden sich in B.



(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist AP die von A ausgehende Seitenhalbierende in $\triangle ABC$ mit der vorgegebenen Länge s_a. Wegen $\overline{AS} = \frac{2}{3}s_a$ ist S der Schwerpunkt von $\triangle ABC$. Wegen $BC \| QT$, $2\overline{AT} = \overline{AP}$ und $\gamma = 90^\circ$ liegen C auf dem Halbkreis k_1 über $\overline{AP}$, Q auf dem Halbkreis k_2 über $\overline{AT}$, und Q ist Halbierungspunkt der Seite AC. Auf Grund der Umkehrbarkeit des Satzes über das Teilungsverhältnis von Seitenhalbierenden im Dreieck schneiden sich die Geraden (QS) und (CP) in B derart, daß $\overline{PC} = \overline{PB}$ und $\overline{BS} = 2\overline{SQ}$ gilt. Also stellen AP und BQ die Seitenhalbierenden bezüglich der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC dar.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) und (2) ergeben bis auf Kongruenz eindeutig A, T, S, P, k_1, k_2. Unter (3) ergibt sich der Punkt Q genau dann, wenn die Ungleichungen

$\frac{2}{3}s_a < \frac{1}{2}s_a + \frac{1}{3}s_b$ und $\frac{1}{3}s_b < \frac{2}{3}s_a$

erfüllt sind.

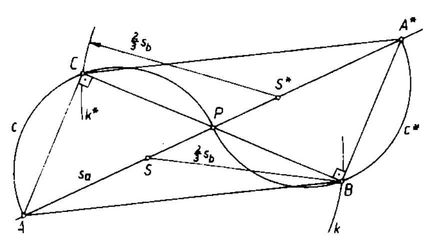
Es muß also $s_a < 2s_b$ und $s_b < 2s_a$ $\qquad$ (*)

gelten. Mit $s_a = 6$ cm und $s_b = 8$ cm wird (*) befriedigt. Daher existiert auch der Schnittpunkt Q. Damit führt (4) auf C. Wegen $PC \neq QS$ liefert (5) den dritten Eckpunkt B des Dreiecks ABC.

Aufgabe 2 war 99 Schülern der Klassenstufe 10 zur DDR-Mathematikolympiade gestellt worden. Hierbei konnten maximal 7 Punkte erreicht werden. Es ergab sich der folgende Punktespiegel:

0	1	2	3	4	5	6	7	Punkte
31	11	6	7	11	11	14	8	Schüler

Etwa ein Drittel der Schüler wußte mit der Aufgabe so gut wie nichts anzufangen. Bei Lösungsansätzen wurden vielfach arithmetische Hilfsmittel herangezogen. Dies führte in der Regel auf umständliche algebraische Ausdrücke, deren konstruktive Umsetzung wegen der damit verbundenen Zeichenungenauigkeiten (schleifende Schnitte, Verbindung dicht benachbart liegender Punkte) unbefriedigende Lösungen ergab. Zum Beispiel besaßen die mit den errechneten Größen konstruierten Dreiecke auf Grund der Zeichenungenauigkeiten bei C keinen rechten Winkel, wodurch beim Schüler Zweifel über die Richtigkeit seiner Lösung entstanden. Auch die Existenzaussage fanden die Schüler nach dieser Methode nicht. Zu guten Lösungen führte vorwiegend die Grundidee, das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm zu ergänzen; z. B. ergeben sich durch zentrische Spiegelung des Dreiecks ABC samt Schwerpunkt S an P die Punkte A^* und S^*.

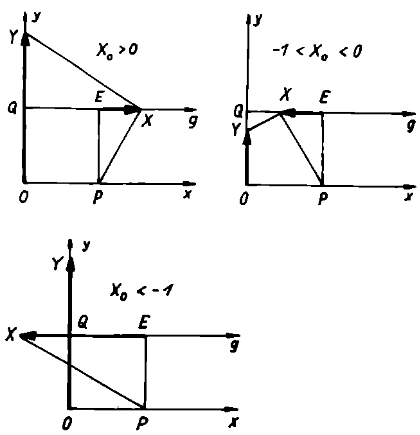


An der Figur wurde dann richtig erkannt, daß der Punkt C einerseits auf dem Halbkreis des Thales über $\overline{AP}$ liegt. Andererseits muß $\overline{CS^*} = \frac{2s_b}{3}$ gelten. B erhält man dann durch Spiegelung von C an P. Auch die an P zentrisch gespiegelte Konstruktion findet sich bei einigen Teilnehmern. Die volle Punktzahl wurde nur an jene Teilnehmer vergeben, die auch die Existenzaussage richtig gefunden und formuliert hatten.

Dozent Dr. E. Schröder, TU Dresden

3 A. 1. *Lösung* (Vorschlag der Aufgabenkommission)

a) Nach Konstruktion haben die gerichteten Strecken QE, EX die Längen 1 bzw. x_0; also hat die gerichtete Strecke QX die Länge $1+x_0$. Für $x_0 \neq 0, -1$ zeigen wir, daß das Dreieck EPX zum Dreieck QXY gleichsinnig ähnlich ist. Ist nämlich $x_0>0$ oder $x_0<-1$,



so liegt E zwischen Q und X oder Q zwischen X und E, also in beiden Fällen Q zwischen O und Y; es gilt $\overline{\sphericalangle EPX}=90°-\overline{\sphericalangle EXP}=\overline{\sphericalangle QXY}$; die Dreiecke stimmen also in den rechten Winkeln bei E bzw. Q und in den spitzen Winkeln bei P bzw. X überein; beim Umlauf der Dreiecke EPX und QXY in der angegebenen Reihenfolge der Ecken werden die Strecken QE und QX in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf verschiedenen Seiten von q, woraus die gleichsinnige Ähnlichkeit folgt. Ist aber $-1<x_0<0$, so liegt X zwischen Q und E und daher Y auf dem Strahl aus Q durch O; es gilt $\overline{\sphericalangle EPX}=90°-\overline{\sphericalangle EXP}=180°-90°-\overline{\sphericalangle EXP}=\overline{\sphericalangle QXY}$; die Dreiecke stimmen also wieder in den oben erwähnten Winkeln überein.

Bei dem angegebenen Umlaufsinn werden QE und QX in gleicher Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf derselben Seite von q. Somit gilt, wenn $x_0 \neq 0, -1$ ist, für die Länge q_0 der gerichteten Strecke QY die Proportion $1 : x_0=(1+x_0) : q_0$, also ist (1) $q_0=(x_0+1)x_0$. Für $x_0=0$ oder $x_0=-1$ gilt $X=E$ oder $X=Q$ und daher in beiden Fällen $Y=Q$, also $q_0=0$, d. h. ebenfalls (1). Daher hat in jedem Falle Y die Ordinate $1+q_0=x_0^2+x_0+1$, w. z. b. w.

b) Angenommen, x_0 wäre eine reelle Nullstelle von f. Dann führte das mit dem entsprechenden Punkt X ausgeführte Verfahren auf $Y=O$, also $\overline{\sphericalangle PXO}=90°$. Daher läge nach der Umkehrung des Satzes von Thales X auf dem Kreis mit OP als Durchmesser. Das ist aber ein Widerspruch, da dieser Kreis keinen Punkt mit q gemeinsam hat.

2. *Lösung:* a) Nach Konstruktion hat die Strecke QE die Länge 1 und die Strecke EX die Länge $|x_0|$. – Fallunterscheidung:

(1) $x_0>0$. Dann hat die Strecke QX die Länge $1+|x_0|$, d. h. $1+x_0$. Wegen $\overline{\sphericalangle EPX}=90°-\overline{\sphericalangle EXP}=\overline{\sphericalangle QXY}$ und $\overline{\sphericalangle XEP}=\overline{\sphericalangle YQX}=90°$ sind die Dreiecke EPX und QXY einander ähnlich. Hieraus ergibt sich die Proportion $\overline{EP}:\overline{EX}=\overline{QX}:\overline{QY}$ und wegen $\overline{EX}=|x_0|=x_0$ daher $1 : x_0=(1+x_0):\overline{QY}$. Also ist $\overline{QY}=(1+x_0)x_0=x_0^2+x_0$. Für die Ordinate des Punktes Y ergibt sich folglich $x_0^2+x_0+1$.

(2) $x_0<-1$. Dann hat die Strecke QX die Länge $|x_0|-1$, d. h. $-x_0-1$. Aus den gleichen Gründen wie im Fall (1) sind die Dreiecke EPX und QXY einander ähnlich. Hieraus ergibt sich die Proportion $\overline{EP}:\overline{EX}=\overline{QX}:\overline{QY}$ und wegen $\overline{EX}=|x_0|=-x_0$ daher $1:(-x_0-1)=-x_0:\overline{QY}$. Also ist $\overline{QY}=(-x_0-1)(-x_0)=x_0^2+x_0$. Für die Ordinate des Punktes Y ergibt sich folglich $x_0^2+x_0+1$.

(3) $-1<x_0<0$. Dann hat die Strecke QX die Länge $1-|x_0|$, d. h. $1+x_0$. Aus den gleichen Gründen wie im Fall (1) sind die Dreiecke EPX und QXY einander ähnlich. Hieraus ergibt sich die Proportion $\overline{EP}:\overline{EX}=\overline{QX}:\overline{QY}$ und wegen $\overline{EX}=|x_0|=-x_0$ daher $1:(-x_0)=(1+x_0):\overline{QY}$. Also ist $\overline{QY}=(1+x_0)\cdot(-x_0)=-x_0^2-x_0$. Für die Ordinate des Punktes Y ergibt sich folglich $1-(-x_0^2-x_0)=x_0^2+x_0+1$.

(4) Für $x_0=0$ oder $x_0=-1$ gilt $X=E$ oder $X=Q$ und daher in beiden Fällen $Y=Q$, also $\overline{YQ}=0$. Die Ordinate von Y ist also in beiden Fällen gleich 1. Andererseits ergibt $x_0^2+x_0+1$ sowohl für $x_0=0$ als auch für auch für $x_0=-1$ gleich 1.

b) Wie bei 1. Lösung.

Bemerkungen: Der Schwierigkeitsgrad dieser von 48 % der Schüler bearbeiteten Wahlaufgabe war der DDR-Stufe durchaus angemessen. Obwohl den Schülern der Begriff „Länge einer gerichteten Strecke“ nicht bekannt war, wurde der Aufgabentext von kaum einem Schüler mißverstanden. Die Hauptschwierigkeit bestand vor allem darin, eine vollständige Fallunterscheidung vorzunehmen, d. h. alle Fälle zu erkennen und jeden dieser Fälle zu diskutieren. Viele Schüler erkannten nicht, daß der „Fall“ $x_0<0$ nicht „mit einem Schlag“ erledigt werden kann, sondern in drei Teilfälle (die Fälle (2), (3), (4) entsprechend der 2. Lösung) zerfällt. Eine weitere Schwierigkeit bestand für viele Schüler in der Verwendung von Bezeichnungen. Sie arbeiteten zwar im allgemeinen mit den Beträgen von x_0, beachteten dies jedoch in der Schreibweise nicht. Eine Lösung entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission wurde von keinem Schüler geliefert, da den Schülern ein Operieren mit negativen Längen gerichteter Strecken völlig ungewohnt war und ihnen auch nicht bekannt sein konnte, daß die (den Schülern bekannten) Ähnlichkeitssätze im Falle gleichsinniger Ähnlichkeit von Dreiecken auch hinsichtlich der Längen gewisser gerichteter Strecken als Dreiecksseiten gelten. Beim Teil b) hatten die meisten Schüler Schwierigkeiten bei der Führung und Formulierung des indirekten Beweises. Eine recht elegante vektorielle Lösung lieferte der Schüler Thomas Hoffmann (Erfurt). Fast ebenso elegant waren die Lösungen der Schüler Friedhelm und Norbert Schieweck (Magdeburg), die sich auf den Kalkül der Analytischen Geometrie stützten. Eine sehr übersichtliche und vollständige Lösung im Sinne des zweiten Lösungsweges legte der Schüler Karl-Heinz Wenzlaff (Neubrandenburg) vor.

Verteilung der Punktstufen:

0	1	2	3	4	5	6	7	Punkte
2	3	6	9	13	4	5	5	Anzahl

Dr. M. Rehm, Humboldt-Universität Berlin

3 B *1. Lösung:* Sei (x, y) ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^3 &= (x+2)^4 - x^4 = \\ &= x^4+8x^3+24x^2+32x+16-x^4 \\ &= 8(x^3+3x^2+4x+2) \\ &= 8[(x+1)^3+(x+1)]. \end{aligned}$$

Folglich ist y eine gerade Zahl, und mit

$$y=2u, \quad x+1=v$$

erhalten wir für die ganzen Zahlen u und v

$$u^3=v^3+v. \tag{1}$$

Wäre $v>0$, so folgte aus (1) zunächst $u^3>v^3$, also $u>v$, und hieraus wegen der Ganzzahligkeit von u und v

$$u \geqq v+1, \text{ und hieraus}$$

$u^3 \geqq (v+1)^3=v^3+3v^2+3v+1>v^3+v$ im Widerspruch zu (1).

Wäre $v<0$, so folgte aus (1) zunächst $u^3<v^3$, also $u<v$. Wegen der Ganzzahligkeit von u und v wäre also $u \leqq v-1$, und damit $u^3 \leqq (v-1)^3=v^3-3v^2+3v-1<v^3+v$ im Widerspruch zu (1).

Daher kann nur für $v=0$, d. h. $x=-1$ ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften existieren. Aus (1) folgt hierfür $u=0$, also $y=0$.

Die Probe zeigt, daß das Zahlenpaar $(-1, 0)$ tatsächlich die Gleichung

$$(x+2)^4-x^4=y^3$$

erfüllt. Also hat genau dieses Zahlenpaar die verlangten Eigenschaften.

2. Lösung: Wie in der 1. Lösung finden wir

$$y^3=8x^3+24x^2+32x+16.$$

Wegen $(2x+2)^3=8x^3+24x^2+24x+8$
$=y^3-8x-8$

und $(2x+3)^3=8x^3+36x^2+54x+27$
$=y^3+12x^2+18x+11$ erhalten wir

$$(2x+2)^3<y^3<(2x+3)^3$$

für alle ganzzahligen x mit $x>-1$.

Entsprechend erhalten wir für alle ganzzahligen x mit $x<-1$

$$(2x+1)^3<y^3<(2x+2)^3.$$

Folglich gibt es für $x \neq -1$ kein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Weiter schließen wir wie in der 1. Lösung.

Bemerkungen: Von 52 Schülern, die die Wahlaufgabe bearbeitet haben, konnten nur 2 keinen Punkt erreichen. Das zeigt, daß die Aufgabe verständlich war. Dennoch konnten nur 6 Schüler die volle Punktzahl erreichen.

Folgende Fehler traten gehäuft auf:

1. Unzulässige Verallgemeinerungen. Aus der Tatsache, daß es für $x=0$ und $x=1$ jeweils kein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften gibt, wird geschlossen, daß es für alle ganzen Zahlen x mit $x \geqq 0$ kein geeignetes Zahlenpaar gibt. Wir bemerken, daß zwei oder mehrere Beispiele nicht die allgemeine Tatsache beweisen, daß

$$8x^3+24x^2+32x+16$$

für ganzzahlige x mit $x \geqq 0$ keine Kubikzahl ist. In der 2. Lösung haben wir den Beweis dafür geliefert. Entsprechendes gilt für alle ganzen Zahlen x mit $x \leqq -2$.

2. Vorzeichenfehler. Einige Schüler begannen die Lösung unter Verwendung der binomischen Formel $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ mit

$$\begin{aligned}(x+2)^4-x^4 &= [(x+2)^2+x^2]\\ &\cdot[(x+2)^2-x^2]\\ &= [(x+2)^2+x^2]\\ &\cdot[(x+2)+x]\\ &\cdot[(x+2)-x].\end{aligned}$$

Dabei traten Unsicherheiten in der Anwendung auf.

3. Keine ausdrückliche Kennzeichnung der Probe. Viele Schüler fanden durch systematisches Probieren oder (wie in der ersten und zweiten Lösung dargestellt) durch zwingende Überlegungen, daß $(-1, 0)$ ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften ist. Aber es fehlte die Probe oder wenigstens der Hinweis darauf, daß dieses Zahlenpaar der Ausgangsgleichung

$$y^3=(x+2)^4-x^4 \text{ genügt.}$$

Ergebnisspiegel

0	1	2	3	4	5	6	7	Punkte
2	5	1	12	16	6	4	6	Schüler

Dr. K. Rosenbaum, Päd. Hochschule
Dr. Theodor Neubauer, Erfurt

4. *1. Lösung:* (Vorschlag der Aufgabenkommission): Für die gesuchte Zahl x gilt $(x+\sqrt{2})^2=4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-2\sqrt{16-7}=2$, also (1) $x(x+2\sqrt{2})=0$. Wegen $\sqrt{4+\sqrt{7}} > \sqrt{4-\sqrt{7}}$, also $x+2\sqrt{2}=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{2}>\sqrt{2}>0$, folgt aus (1), daß $x=0$ ist.

2. Lösung: Für die gesuchte Zahl x gilt $(x+\sqrt{2})^2=2$. (Siehe 1. Lösung.) Durch Radizieren erhält man als dazu äquivalente Gleichung (2) $|x+\sqrt{2}|=\sqrt{2}$. Wegen $\sqrt{4+\sqrt{7}} > \sqrt{4-\sqrt{7}}$ gilt $x+\sqrt{2}>0$. Also ist $|x+\sqrt{2}|=x+\sqrt{2}$. Mithin ist die Gleichung (2) äquivalent mit $x+\sqrt{2}=\sqrt{2}$ bzw. mit $x=0$. Die gesuchte Zahl x ist also gleich Null.

3. Lösung: Die gesuchte Zahl x ist genau dann positiv, negativ oder gleich Null, wenn $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ größer, kleiner oder gleich $\sqrt{2}$ ist. Wegen $\sqrt{4+\sqrt{7}}>\sqrt{4-\sqrt{7}}$, d. h. wegen $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}>0$ ist x genau dann positiv, negativ oder gleich Null, wenn $(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$ größer, kleiner oder gleich 2 ist. Es ist $(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}})^2=2$. (Siehe 1. Lösung.) Also ist $x=0$.

4. Lösung: Die Zahl x ist entweder positiv, negativ oder gleich Null. Angenommen, die Zahl x sei positiv. Dann gilt $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}>\sqrt{2}$. Daraus folgt durch Quadrieren $4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-2\sqrt{16-7}>2$, d. h. $2>2$. Widerspruch. Entsprechend führt auch die Annahme, die Zahl x sei negativ, auf einen Widerspruch. Also ist $x=0$.

Bemerkungen: Die Aufgabe ist für die DDR-Stufe als leicht zu bezeichnen. Fast die Hälfte aller Schüler erreichte die volle Punktzahl. Die einzige Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand in dem exakten Begründen der Äquivalenz von Gleichungen im Zusammenhang mit dem Umformen durch Potenzieren bzw. Radizieren. Der Lösungsweg der Aufgabenkommission wurde von nur wenigen Schülern beschritten, wobei hier einige dieser Schüler zu untersuchen vergaßen, daß $x=-2\sqrt{2}$ keine Lösung ist. Am häufigsten wurde mit den Wurzeln ohne Benutzung der Variablen x gearbeitet (etwa im Sinne der 3. Lösung), wobei allerdings zum Teil der Fehler gemacht wurde, aus der Wahrheit einer aus einer Behauptung abgeleiteten Aussage auf die Wahrheit der Behauptung zu schließen. Die meisten derjenigen Schüler, die eine Lösung etwa im Sinne der 4. Lösung lieferten, hatten erhebliche Schwierigkeiten bei der Formulierung des Widerspruchsbeweises. – Eine sehr rationell formulierte Lösung legte der Schüler Klaus Göring (Schwerin) vor.

Verteilung der Punktstufen:

0	1	2	3	4	5	6
7	7	7	12	15	6	45

Dr. M. Rehm, Humboldt-Universität Berlin

Die Lösungen zu Aufgabe 5 und 6 folgen in Heft 6/74; die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufe 11/12 erscheinen in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“.

alpha stellt vor: H.-D. Gronau

1957 wurde ich in die 3. Oberschule Neustrelitz eingeschult, die ich 8 Jahre lang besuchte. Während der 6. Klasse hatte ich die erste Berührung mit den Mathematik-Olympiaden. Der dritte Platz im Kreismaßstab war mir Ansporn, mich mehr mit der Mathematik zu beschäftigen. Von 1965 bis zum Abitur 1969 besuchte ich die EOS „Friedrich Engels“ Neubrandenburg. Während dieser Zeit konnte ich bei Mathematik-Olympiaden gute Ergebnisse erzielen, deren Höhepunkt ein 3. Preis bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1969 in der SR Rumänien war.

Im gleichen Jahr begann ich ein Mathematik-Studium an der Universität Rostock, das ich 1973 erfolgreich abschloß. Seitdem bin ich hier an der Sektion Mathematik als wissenschaftlicher Assistent tätig.

Auch heute noch bin ich eng mit den Mathematik-Olympiaden verbunden. So betreue ich einige Schüler durch Korrespondenz, leite eine Arbeitsgemeinschaft im *Pionierhaus Rostock* und korrigiere bei den Olympiaden mit.

Lösungen zu Mathematikolympiaden in der DRV

▲1▲ Aus $** : ** = 8$ folgt, daß der Divisor 10, 11 oder 12 sein könnte, denn $8 \cdot 13 = 104$ ist bereits dreistellig. Aus $*** : ** = *$ folgt, daß die erste und die letzte Stelle des Quotienten 9 sein muß.
Wegen $9 \cdot 10 = 90 < 100$ und $9 \cdot 11 = 99 < 100$ ist der Divisor somit gleich 12, denn $9 \cdot 12 = 108$. Aus $12 \cdot 90\,809 = 1\,089\,708$ folgt die vollständige Lösung:

1 089 708 : 12 = 90 809
108
‾‾097
‾‾‾96
‾‾‾‾108
‾‾‾‾108
‾‾‾‾‾‾0

▲2▲ a) $(x^2-yz)(y-xyz)-(y^2-xz)(x-xyz)=x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2-xy^2+xy^3z+x^2z-x^2yz^2$.

Wir addieren zu diesem Term $x^2y^2z-x^2y^2z$ und $xyz-xyz$ und erhalten

$$\begin{aligned}&x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2-xy^2+xy^3z-x^2z-\\&-x^2yz^2+x^2y^2z-x^2y^2z+xyz-xyz\\&=x(xy-x^2yz-xy^2z+xz+yz-xyz^2)-\\&-y(xy-x^2yz-xy^2z+xz+yz-xyz^2)\\&=(x-y)(xy-x^2yz-xy^2z+xz+yz-xyz^2)\cdot\\&=(x-y)\,[xy+xz+yz-xyz(x+y+z)].\end{aligned}$$

b) $\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\dfrac{y^2-xz}{y(1-xz)}$,

$y(1-xz)(x^2-yz)=x(1-yz)(y^2-xz)$,

$(x^2-yz)(y-xyz)-(y^2-xz)(x-xyz)=0$.

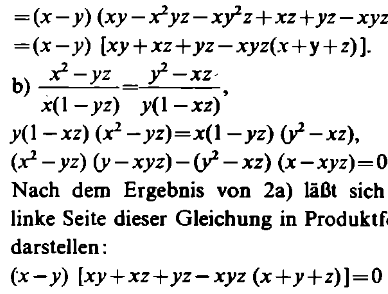
Nach dem Ergebnis von 2a) läßt sich die linke Seite dieser Gleichung in Produktform darstellen:

$(x-y)\,[xy+xz+yz-xyz\,(x+y+z)]=0$

Wegen der Bedingung $x \neq y$, also $x-y \neq 0$, kann $x-y=0$ nicht zutreffen. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}xy+xz+yz-xyz(x+y+z)&=0,\\ xy+xz+yz&=xyz(x+y+z),\\ x+y+z&=\frac{xy+xz+yz}{xyz},\\ x+y+z&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

▲3▲ Die Umkreise der Dreiecke $\triangle DCN$ und $\triangle BMC$ haben die Punkte C und P gemeinsam. Wir verbinden P mit D, C und M. Der Abbildung ist nun folgendes zu entnehmen:



Das Viereck $BMPC$ ist ein Sehnenviereck; deshalb gilt $\beta_1+\varphi_1=180°$. Ferner gilt $\beta_1+\beta_2=180°$ als Nebenwinkel. Daraus folgt

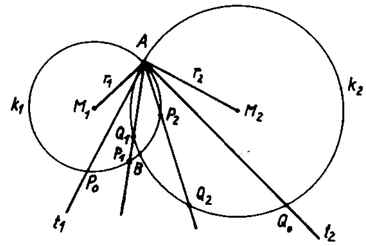
$\varphi_1=\beta_2$. Zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent; deshalb gilt $\varphi_2=\eta$. Aus $\varphi_1=\beta_2$ und $\varphi_2=\eta$ folgt durch Addition

$\varphi_1+\varphi_2=\beta_2+\eta$, $\varphi_1+\varphi_2+\alpha=\beta_2+\eta+\alpha$.

Für die Summe der Innenwinkel des Dreiecks ABN gilt $\alpha+\beta_2+\eta=180°$. Somit gilt auch $\varphi_1+\varphi_2+\alpha=180°$, d. h. Viereck $AMPD$ ist ein Sehnenviereck. Der Punkt P liegt somit auf dem Umkreis des Dreiecks AMD.

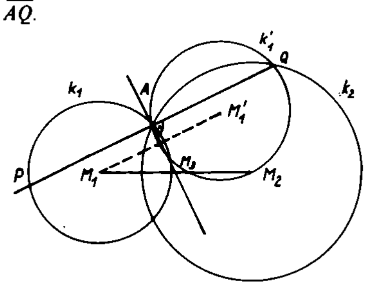
Der Beweis, daß der Umkreis des Dreiecks ABN ebenfalls durch P geht, erfolgt in analoger Weise.

▲4▲ a) Es sei t_1 die in A an k_1 und t_2 die in A an k_2 gezogene Tangente. Alle Geraden P_iQ_i, die durch A und durch das Innere des Winkels $\sphericalangle P_0AQ_0$ gehen, erfüllen die gestellte Bedingung.

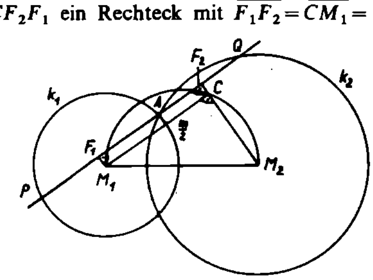


b) Es sei M_3 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$. Die Senkrechte zu AM_3 durch A schneide k_1 in P und k_2 in Q. Dann gilt $\overline{AP}=\overline{AQ}$.

Beweis: Spiegeln wir k_1 an AM_3 als Symmetrieachse, dann schneidet das Bild k_1' von k_1 den Kreis k_2 in A und Q. Die Gerade AQ möge k_1 in P schneiden. Aus den vorliegenden Symmetrieeigenschaften folgt dann $\overline{AP}=\overline{AQ}$.



c) Wir zeichnen über dem Durchmesser $\overline{M_1M_2}$ einen Halbkreis. Der Kreis um M_1 mit dem Radius $\frac{m}{2}$ schneide diesen Halbkreis in C. Die durch A parallel zu CM_1 verlaufende Gerade schneide k_1 in P und k_2 in Q. Die Gerade CM_2 schneide PQ in F_2, die Parallele zu CF_2 durch M_1 schneide PQ in F_1. Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck $M_1CF_2F_1$ ein Rechteck mit $\overline{F_1F_2}=\overline{CM_1}=$



$=\frac{m}{2}$. Da F_1 die Strecke $\overline{AP}$ und F_2 die Strecke $\overline{AQ}$ halbiert, gilt $\overline{PQ}=m$. Die Aufgabe ist nur lösbar für $m<2\cdot\overline{M_1M_2}$.

d) Aus der Abbildung zu 4c) folgt $\overline{F_1F_2}=\overline{CM_1}<\overline{M_1M_2}$. Gilt nun $PQ \parallel M_1M_2$, so fällt C mit M_2 zusammen, und die Strecke $\overline{PQ}$ besitzt maximale Länge.

Lösungen zu: 25 Jahre RGW

▲1▲ Angenommen im Jahre 1975 werden x Autobusse hergestellt; dann gilt

$$(x-5000)+x=19000,$$
$$2x=24000,$$
$$x=12000.$$

Im Jahre 1975 sollen bereits 12000 Autobusse produziert werden.

▲2▲ Es sei x die Anzahl der von der UdSSR zur Verfügung gestellten Dokumentationen; dann gilt

$$x+(x-20000)=62000,$$
$$2x=82000,$$
$$x=41000.$$

Die UdSSR stellte den sozialistischen Bruderländern in den letzten 20 Jahren 41000 wissenschaftlich-technische Dokumentationen zur Verfügung.

▲3▲ $\frac{8{,}5\cdot 1{,}5\cdot 10^9}{10^3}=85\cdot 15\cdot 10^4$
$=12750000$

Durch diese Menge Erdgas könnten 12750000 t Steinkohle ersetzt werden.

▲4▲ $600000\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=3000000$

Die Jahresproduktion an Zement wird im Jahre 1975 in Kuba voraussichtlich 3 Millionen Tonnen betragen.

▲5▲

$$(100+25):100=(x+100):(100+30),$$
$$125:100=(x+100):130,$$
$$100\cdot(x+100)=125\cdot 130,$$
$$x+100=125\cdot 1{,}3,$$
$$x=125\cdot 1{,}3-100$$
$$x=62{,}5.$$

In den RGW-Ländern nahm die Arbeitsproduktivität von 1961 bis 1970 durchschnittlich um 62,5 % zu.

▲6▲ $\frac{150000\cdot 4}{75\cdot 120}\approx 67$

Bis zum Jahre 1975 werden im Containerverkehr Gütertransporte erreicht, die einer Transportleistung von 67 Güterzügen entsprechen, die aus vierachsigen Großgüterwagen bei einer Zuglänge von 120 Achsen zusammengestellt sind.

▲7▲ $m=V\cdot\varrho;\ V=\pi R^2h-\pi r^2h$

$$=\pi h\cdot(R^2-r^2);$$
$$m=\pi h\varrho\cdot(R^2-r^2);$$
$$m=3{,}14\cdot 230\cdot 10^5\cdot(46^2-44{,}5^2)$$
$$\cdot 7{,}85\cdot 10^{-6}\,\mathrm{t};$$
$$m\approx 77000\ \mathrm{t}$$

Beim Bau des in der DDR befindlichen Leitungsabschnittes der Erdgasleitung Nordlicht mußten rund 77000 Tonnen Stahlrohre befördert werden.

Lösungen zu alpha-heiter 5/74

Fremdkörper

▲1▲ Einteilung in gerade und ungerade Zahlen; 2 und 47

▲2▲ Einteilung in Primzahlen und zusammenges. Z.; 9 und 7

▲3▲ Einteilung in einstellige und zweistellige Z.; 11 und 4

Rätselpyramide

Die weggelassenen Buchstaben sind:

a, l, t, r, m, n, a, e,

werden von diesen wiederum die Buchstaben „*a*“ und „*r*“ gestrichen, so kommen die restlichen in „Mantel“ vor.

m a l
t e r m
m e n g e
g e r a d e
d r e h u n g

Bedeutende Mathematiker gesucht

1 Leibniz	5 Buergi
2 Newton	6 Duerer
3 Hankel	7 Cantor
4 Cramer	8 Thales

Lösungswort: LEHRBUCH

Gespiegeltes

a) 2; b) 3; c) 5; d) 4; e) 5.

Die Zahl 10000 gesucht

$22^2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot$

$333\cdot 3-\frac{3}{3}+3-\frac{3}{3}$

$\frac{(5+5)^5\cdot 5}{(5+5)(5+5)\cdot 5}$

$7!:7+7\cdot 7\cdot 7-7\cdot 7-(7+7)$

$8888:8-\frac{888}{8}$

(Es gibt z. T. mehrere Lösungen, wir bieten nur eine.)

„Tierische“ Mathematik

```
 4846
 4124
 9710
 6784
25464
```

Gastronomisches Rätsel

I. $2(y-1)=x$
II. $y+1=x$
$y=3$ (Tische)

Wird dieser Wert in eine Gleichung eingesetzt, so folgt: $x=4$ (Fische)

Kryptarithmetik

```
1218 :  14 =  87
   -     x    +
 303 +  35 = 338
 915 - 490 = 425
```

25 Jahre RGW

Die sozialistischen Länder begingen den 25. Jahrestag der erfolgreichen Tätigkeit des *Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe* – der ersten internationalen Wirtschaftsorganisation sozialistischen Typs. Das Komplexprogramm für die weitere Vertiefung und Vervollkommnung der Zusammenarbeit und Entwicklung der sozialistischen ökonomischen Integration der Mitgliedländer des RGW, das gegenwärtig realisiert wird, legte das Fundament für die gemeinsame Lösung der volkswirtschaftlichen Probleme des Aufbaus des Sozialismus und Kommunismus.

In der 25jährigen Arbeitsperiode des RGW hat sich die große Lebenskraft der neuen Gesellschaftsordnung, des sozialistischen Internationalismus bewiesen. In dieser Zeit übertrafen die RGW-Mitgliedländer die entwickelten kapitalistischen Staaten beispielsweise im Tempo des Zuwachses der Industrieproduktion um das Dreifache.

Mit jedem Jahr wächst die internationale Autorität der sozialistischen Staatengemeinschaft und damit ihr vielfältiger Einfluß auf die heutige Welt.

Die Länder, die den RGW bilden, entwickeln ihre gegenseitigen Beziehungen im Geiste des sozialistischen Internationalismus und stärken die ökonomische Macht des Sozialismus insgesamt und jedes einzelnen sozialistischen Staates, sie fördern das Bestreben, die Überlegenheit über den Kapitalismus auf allen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens zu erreichen. Dabei ist der Sinn der Tätigkeit der kommunistischen und Arbeiterparteien der RGW-Länder von dem Grundsatz bestimmt: *Alles für den Menschen, alles zum Wohle des Menschen.*

Die folgenden Aufgaben sollen dazu beitragen, Einsichten in das Wesen der sozialistischen ökonomischen Integration zu vertiefen und die Überlegenheit gegenüber imperialistischen Wirtschaftsblöcken zu belegen.

▲1▲ Entsprechend dem RGW-Komplexprogramm werden die *Ikarus-Werke* in der Ungarischen Volksrepublik zu einer der größten Autobusfabriken der Welt ausgebaut.
Wieviel Autobusse sollen im Jahre 1975 von den *Ikarus-Werken* hergestellt werden, wenn die Produktion gegenüber dem Jahr 1972 um 5000 Autobusse erhöht wird und in den beiden Jahren 1972 und 1975 zusammen 19000 Autobusse produziert werden?

▲2▲ Angesichts des raschen wissenschaftlich-technischen Fortschritts erlangt der Austausch von Dokumentationen als eine wichtige Form der gegenseitigen Hilfe steigende Bedeutung. In den vergangenen 20 Jahren übergab die Sowjetunion den sozialistischen Bruderstaaten Dokumentationen; ihrerseits erhielt die Sowjetunion von ihren Partnern ebenfalls Dokumentationen. Insgesamt wurden 62000 wissenschaftlich-technische Dokumentationen ausgetauscht. Die Anzahl der von der UdSSR zur Verfügung gestellten Dokumentationen war um 20000 größer als die Anzahl der Dokumentationen, die an die UdSSR übergeben wurden.
Wieviel Dokumentationen stellte die Sowjetunion den Bruderländern zur Verfügung?

▲3 Bis zum 31. Dezember 1975 werden über die Erdgasleitung *Nordlicht* 8,5 Milliarden Kubikmeter Erdgas in die DDR gelangen. Wieviel Tonnen Steinkohle könnten durch diese Menge Erdgas ersetzt werden, wenn ein Kubikmeter Erdgas im Heizwert 1,5 kg Steinkohle entspricht?

▲4▲ Einen bedeutenden Beitrag leisteten die RGW-Länder beim Ausbau der kubanischen Zementindustrie. Im Vorrevolutionsjahr 1958 produzierten die Zementfabriken Kubas nur 600000 t Zement pro Jahr. Dank dem von der ČSSR gelieferten Zementwerk *Siguaney* sowie dem mit Hilfe der DDR errichteten Werk von *Nuevitas* konnten im Jahre 1971 in Kuba bereits $\frac{5}{3}$ der Zementproduktion des Jahres 1958 erreicht werden. Die Produktion von Zement konnte im Jahre 1972 gegenüber dem Jahre 1971 um die Hälfte erhöht werden. Im Jahre 1973 konnten $\frac{4}{3}$ der Produktion des Jahres 1972 erreicht werden. Für das Jahr 1975 rechnet man mit einer Steigerung der Zementproduktion auf das $1\frac{1}{2}$fache gegenüber dem Jahre 1973.
Wieviel Tonnen Zement wird die Jahresproduktion 1975 in Kuba voraussichtlich betragen?

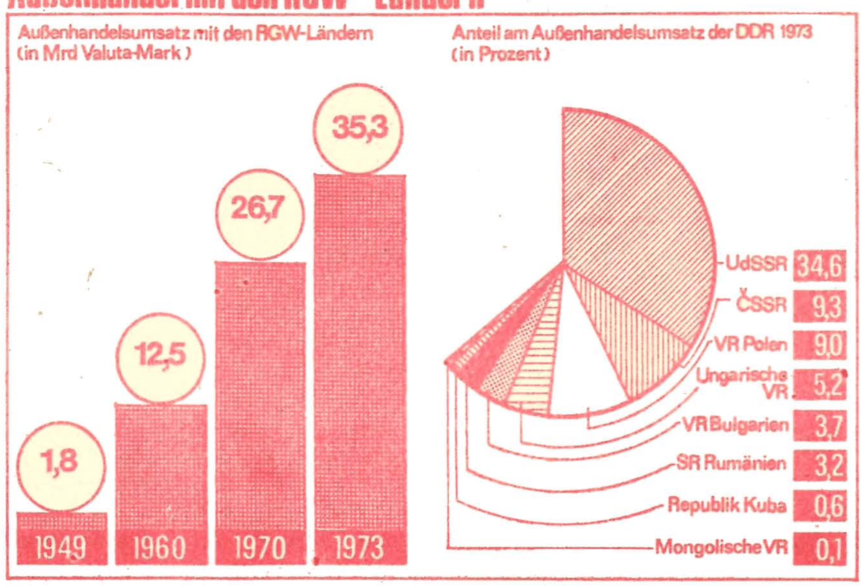
▲5▲ Eine wichtige Kennziffer für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt ist die Steigerung der Arbeitsproduktivität. Sie erhöhte sich in den RGW-Ländern von 1961 bis 1965 um 25 Prozent und von 1966 bis 1970 um 30 Prozent.
Um wieviel Prozent nahm die Arbeitsproduktivität von 1961 bis 1970 in den RGW-Ländern durchschnittlich zu?

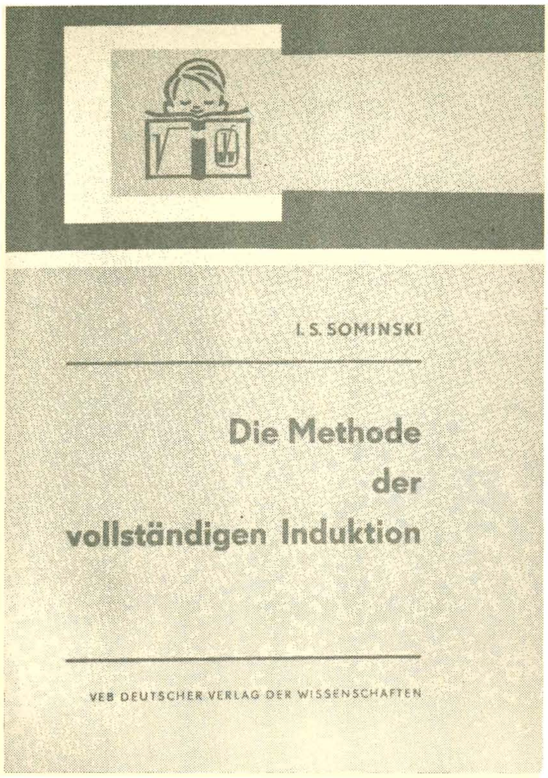
▲6▲ Bis zum Jahre 1975 werden die Mitgliederländer des RGW den Containerverkehr einführen. Dabei sollen die Gütertransporte in Containern im Eisenbahn- und Seeverkehr zwischen den RGW-Ländern einen Umfang von etwa 150000 Tonnen jährlich erreichen. Wieviel Güterzüge aus vierachsigen Großgüterwagen mit einer Tragfähigkeit von 75 t wären zur Beförderung der jährlich im Containerverkehr vorgesehenen Güter erforderlich, wenn die Zuglänge eines Güterzuges auf 120 Achsen beschränkt ist?

▲7▲ Das in der DDR befindliche Teilstück der Erdgasleitung *Nordlicht* hat eine Länge von 230 km. Die Erdgasleitung besteht aus Stahlrohren mit einem Außendurchmesser von 920 mm und einer Wandstärke von 1,5 cm.
Wieviel Tonnen Rohre müssen beim Bau dieses Leitungsabschnittes befördert werden?

Th. Scholl

Außenhandel mit den RGW-Ländern





Leseprobe

§ 3. Es entsteht folgende Frage: *Eine Aussage sei in einigen speziellen Fällen richtig; alle Fälle können jedoch unmöglich untersucht werden; wie kann man erkennen, ob diese Aussage allgemein richtig ist?*

Diese Frage kann mit Hilfe einer besonderen Methode, der sogenannten *Methode der vollständigen Induktion* (Schluß von n auf $n+1$) manchmal gelöst werden.

Diese Methode beruht auf dem *Prinzip der vollständigen Induktion*, das in folgendem besteht:

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl n richtig, wenn sie

1. für $n=1$ richtig ist und wenn
2. aus der Richtigkeit der Aussage für eine willkürliche natürliche Zahl $n=k$ die Richtigkeit für $n=k+1$ folgt.

Beweis: Wir nehmen an, die Aussage sei nicht für jede natürliche Zahl n richtig. Es würde dann eine natürliche Zahl m existieren mit der Eigenschaft, daß 1) die Aussage für $n=m$ falsch, 2) für jedes n, das kleiner als m ist, die Aussage richtig ist. (Mit anderen Worten: m wäre die erste natürliche Zahl, für welche die Aussage falsch ist.)

Offenbar wäre $m>1$, da für $n=1$ die Aussage richtig ist (Bedingung 1). Folglich wäre $m-1$ eine natürliche Zahl. Daraus ergäbe sich weiter, daß für die natürliche Zahl $m-1$ die Aussage richtig, aber für die nachfolgende natürliche Zahl m falsch wäre. Dies widerspräche der Bedingung 2.

Bemerkung. Beim Beweis des Prinzips der vollständigen Induktion haben wir benutzt, daß in jeder Menge natürlicher Zahlen eine kleinste enthalten ist. Es ist leicht zu sehen, daß diese Eigenschaft ihrerseits als Folgerung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion abgeleitet werden kann. Somit sind beide Aussagen äquivalent. Jede von ihnen kann man als Axiom ansehen, welches die Folge der natürlichen Zahlen definiert; die andere ist dann ein Satz. Gewöhnlich nimmt man als Axiom das Prinzip der vollständigen Induktion selbst.

§ 4. Einen auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruhenden Beweis nennt man *Beweis durch vollständige Induktion.* Ein derartiger Beweis muß notwendigerweise aus zwei Teilen bestehen, aus dem Beweis der beiden voneinander unabhängigen Sätze:

Satz 1. Die Aussage ist für $n=1$ richtig.

Satz 2. Die Aussage ist für $n=k+1$ richtig, wenn sie für $n=k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist. Sind diese beiden Sätze bewiesen, so ist auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion die Aussage für jedes natürliche n richtig.

Beispiel 1. Man berechne die Summe

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Wir wissen, daß

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5}\text{ ist.}$$

Jetzt wollen wir den Fehler, den wir im Beispiel 1 zuließen, nicht wiederholen und nicht gleich behaupten, für jedes natürliche n sei

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

Wir sind vorsichtig und sagen, die betrachteten S_1, S_2, S_3, S_4 würden die Vermutung nahelegen, daß die Beziehung $S_n=\frac{n}{n+1}$ für jedes natürliche n gilt. Gleichzeitig wissen wir, daß diese Vermutung für $n=1, 2, 3, 4$ richtig ist. Zum Beweis der Allgemeingültigkeit jener Vermutung wollen wir nun die Methode der vollständigen Induktion benutzen.

Satz 1. Für $n=1$ ist die Vermutung richtig, da $S_1=\frac{1}{2}$ ist.

Satz 2. Wir nehmen an, die Vermutung sei für $n=k$ richtig, d. h., es sei

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

wobei k eine natürliche Zahl ist. Wir zeigen, daß dann die Vermutung auch für $n=k+1$ richtig ist, d. h., daß

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}\text{ gilt.}$$

In der Tat ist

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

und folglich nach Induktionsannahme

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Damit sind beide Sätze bewiesen. Auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion gilt also, daß für jede natürliche Zahl n

$$S_n=\frac{n}{n+1}\text{ ist.}$$

Bemerkung 1. Es ist notwendig, zu betonen, daß ein Beweis durch vollständige Induktion unbedingt den Beweis der beiden Sätze 1 und 2 verlangt.

Wir sahen schon, zu welchem Ergebnis die Nichtbeachtung des Satzes 2 führt. Nunmehr zeigen wir, daß auch Satz 1 niemals weggelassen werden darf. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 2. Behauptung. Jede natürliche Zahl ist der ihr folgenden natürlichen Zahl gleich. Wir „beweisen" dies durch vollständige Induktion. Wir nehmen dazu an, es sei

$$k=k+1, \tag{1}$$

und beweisen, daß dann

$$k+1=k+2\text{ gilt.} \tag{2}$$

In der Tat erhalten wir, wenn wir auf jeder Seite der Gleichung (1) eine 1 addieren, die Gleichung (2). Hieraus folgt: Ist die Aussage für $n=k$ richtig, so ist sie auch für $n=k+1$ richtig, und die Behauptung wäre bewiesen.

Folgerung. Alle natürlichen Zahlen sind einander gleich. Wo ist hier aber der Fehler? Der Fehler liegt darin, daß der erste der für die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion notwendigen Sätze hier nicht bewiesen wurde und auch gar nicht richtig ist, daß vielmehr nur der zweite Satz bewiesen wurde.

Die Sätze 1 und 2 haben beide ihre spezielle Bedeutung. Satz 1 schafft sozusagen die Basis für die Durchführung der vollständigen Induktion. Satz 2 liefert die Berechtigung der automatischen Ausdehnung (Verbreiterung) dieser Basis, die Berechtigung für den

Übergang von dem gegebenen speziellen Fall zu dem folgenden, von n auf $n+1$ (daher die Bezeichnung „Schluß von n auf $n+1$"; d. Red.).

Ist Satz 1 nicht bewiesen, wohl aber Satz 2 (siehe Beispiel 2), so ist die Basis für die Anwendung der Induktion nicht geschaffen; daher ist es sinnlos, Satz 2 anwenden zu wollen, da eigentlich nichts zum Verbreitern vorhanden ist.

Wurde aber Satz 2 nicht bewiesen, sondern nur Satz 1 gezeigt, so fehlt die Berechtigung für eine Verallgemeinerung, obgleich die Basis für die Anwendung der Induktion vorhanden ist.

Bemerkung 2. Die vollständige Induktion wurde im vorstehenden für einfachste Fälle untersucht. In komplizierteren Fällen müssen die Formulierungen der Sätze 1 und 2 entsprechend geändert werden.

Bisweilen stützt sich der zweite Teil des Beweises auf die Richtigkeit der Aussage nicht nur für $n=k$, sondern auch für $n=k-1$. In diesem Falle muß die Aussage im ersten Teil für zwei aufeinanderfolgende Werte von n bewiesen werden (siehe später Aufgabe 18).

Manchmal kann man eine Aussage nicht für alle natürlichen n, wohl aber für alle ganzen n, die oberhalb einer gewissen ganzen Zahl m liegen, beweisen. In diesem Fall verifiziert man im ersten Teil des Beweises die Aussage für $n=m+1$ und, wenn dies notwendig ist, auch für gewisse nachfolgende Werte von n (vgl. Aufgabe 24).

§ 5. Zum Schluß dieses Kapifels wollen wir zur Klärung einer wesentlichen Seite der vollständigen Induktion noch einmal auf Beispiel 1 zurückkommen.

Als wir die Summe

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

für verschiedene Werte von n untersuchten, berechneten wir

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5},\ \dots$$

Dies führte uns zu der Vermutung, daß für jedes n

$$S_n=\frac{n}{n+1}\text{ gilt.}$$

Zum Beweis dieser Vermutung benutzten wir die vollständige Induktion.

Wir hatten Glück und sprachen eine Vermutung aus, die sich dann auch bestätigte. Hätten wir eine sich als falsch erweisende Vermutung aufgestellt, so hätte sich der Fehler beim Beweis des Satzes 2 gezeigt.

Beispiel 3. Wir wissen, daß

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

ist. Nehmen wir an, wir hätten

$$S_n=\frac{n+1}{3n+1}\text{ vermutet.} \qquad (2)$$

Für $n=1$ ist die Formel (2) richtig, da $S_1=\frac{1}{2}$ ist. Nehmen wir an, die Formel (2) sei für $n=k$ richtig, d. h., es gelte

$$S_k=\frac{k+1}{3k+1}.$$

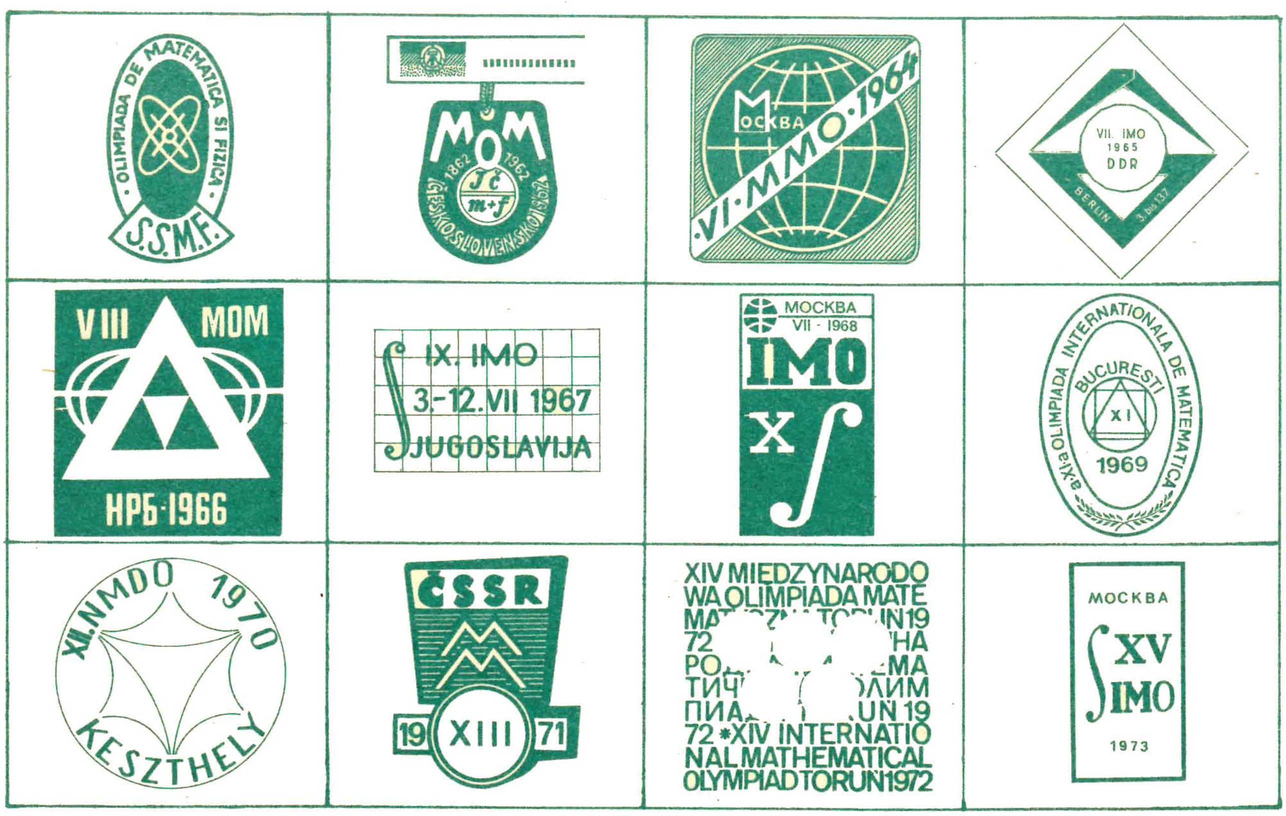
Wir versuchen nun zu zeigen, daß die Formel (2) dann auch für $n=k+1$ richtig ist, d. h., daß

$$S_{k+1}=\frac{k+2}{3k+4}\text{ gilt. Nun ist aber}$$

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^3+4k^2+8k+3}{(k+1)(k+2)(3k+1)}$$

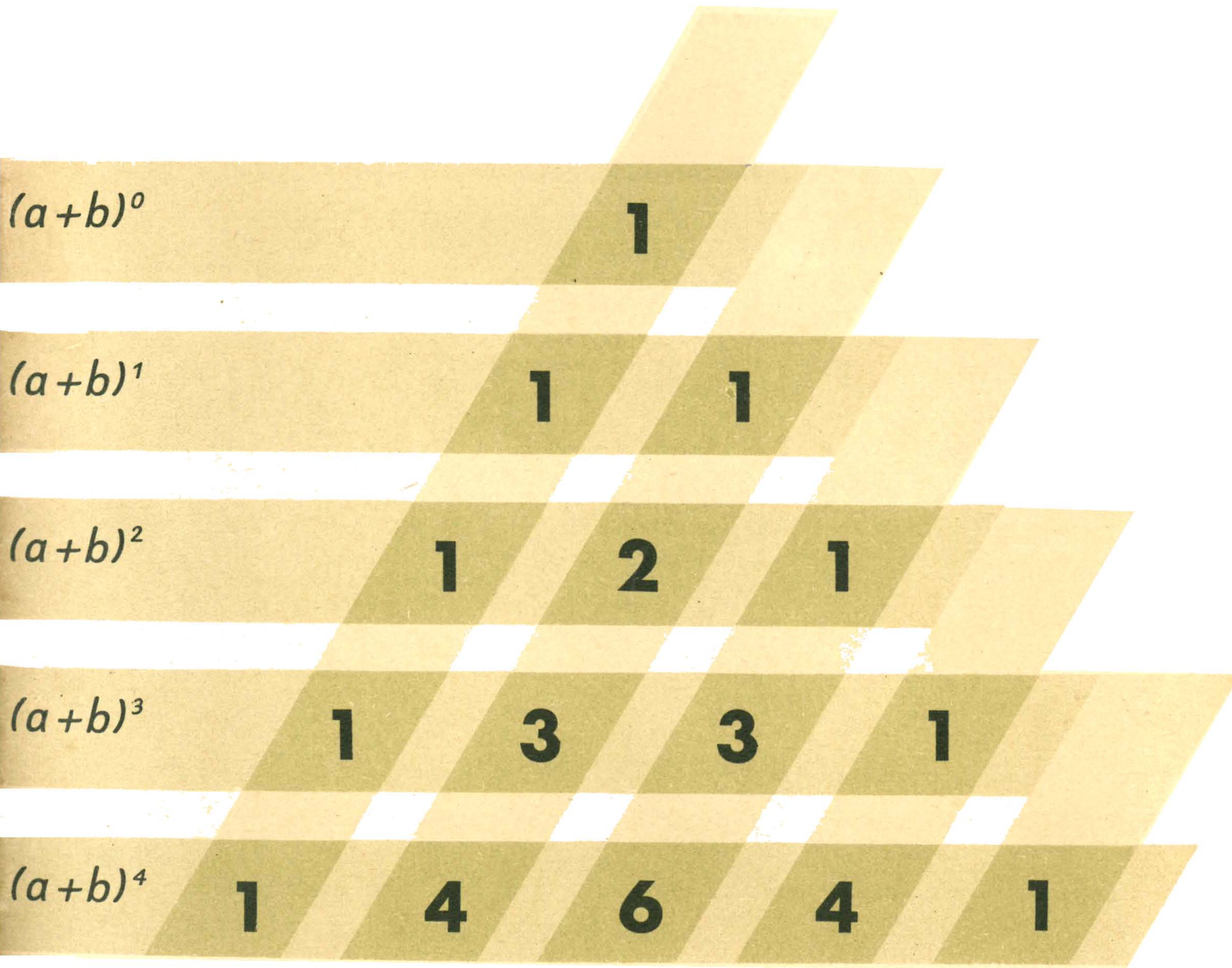
d. h., wir finden ein anderes als das erwartete Resultat. (Die beiden Ausdrücke für S_{k+1} sind nicht identisch; setzt man sie gleich, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für k, die keine reellen Lösungen hat; d. Red.). Also folgt aus der Richtigkeit der Formel (2) für $n=k$ nicht die für $n=k+1$. Wir haben vielmehr gefunden, daß die Formel (2) falsch ist.

Daher gestattet die vollständige Induktion, die bei der Suche nach einem allgemeinen Gesetz entstehenden Vermutungen zu prüfen, falsche zu verwerfen und richtige zu bestätigen.



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Zentralbild (Steinberg), Berlin (S. 97); Jürgen Ludwig, Arnstadt (6 Fotos); J. Lehmann, Leipzig (10 Fotos); DLZ-Graphik (S. 120); Vignetten: W. Tilman, Moskau (S. 114), K. Moschkin, Moskau (S. 110); Ornament aus: Matematički List, Beograd (S. 115); Utschitelskaja gaseta, Moskau (S. 115)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)

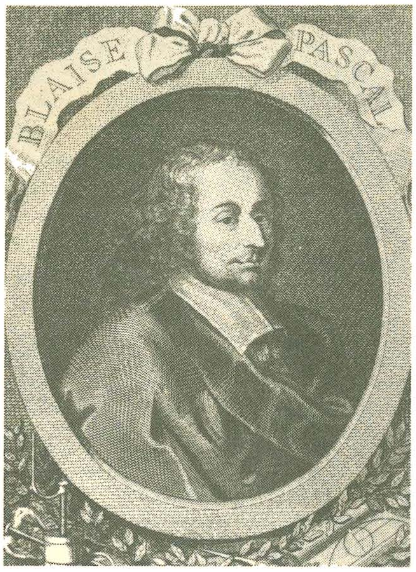
Redaktionsschluß: 1. Oktober 1974

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

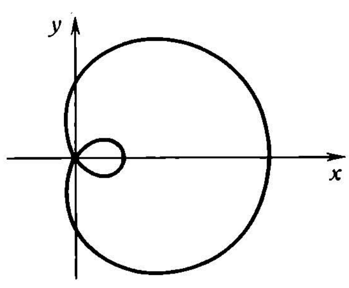


Am 19. Juni 1973 jährte sich der Geburtstag von *BLAISE PASCAL*, einer der bedeutendsten Erscheinungen in der Geschichte der Menschheit, zum 250. Male. Wir verehren *Pascal* als großen Philosophen und Schriftsteller, Physiker und Mathematiker. Es ist aber wahrscheinlich nicht überflüssig, daran zu erinnern, daß er auch die ganz gewöhnliche Schubkarre erfunden hat und daß auf ihn die Idee der Omnibusse zurückgeht – allgemeinerschwinglicher Kutschen (für 5 Sou) mit fester Linienführung –, der ersten Form eines regelmäßigen städtischen Transportmittels. Wir wollen hier von einigen Seiten aus dem Leben *Pascals* berichten.

1. Stäbchen und kleine Münzen

Wenn wir lernen, graphische Darstellungen anzufertigen, so begegnen uns neben zahllosen namenlosen Kurven manchmal Kurven, die eine gewisse Bezeichnung tragen oder nach jemandem benannt sind:
Archimedische Spirale, Newtons Tridens, Konchoide von Nikomedes, Cartesisches Blatt (Bild 1), *Locke der Agnesi* (Versiera), *Pascalsche Schnecke* ... Es wird kaum einer daran zweifeln, daß dies ebenderselbe *Pascal* ist, auf den das *Pascalsche Gesetz* zurückgeht.

Bild 1



Mit der Benennung der bemerkenswerten Kurven vierter Ordnung wird jedoch der Name von *Étienne Pascal* (1588 bis 1651) verewigt, des Vaters des zukünftigen Gelehrten. *É. Pascal* diente, wie es im Geschlecht *Pascals* üblich war, am Obersteueramt (cour des aides) der Stadt Clermont-Ferrand. Es war in der Tat nicht selten, daß eine juristische Tätigkeit mit der Beschäftigung mit einer von der Jurisprudenz weitab liegenden Wissenschaft einherging. Etwa um dieselbe Zeit widmete der Steuerrat von Toulouse *Pierre Fermat* (1601 bis 1665) seine Freizeit der Mathematik. Obgleich *É. Pascal* nur bescheidene eigene Erfolge aufzuweisen hatte, war er auf Grund seiner soliden Kenntnisse in der Lage, mit den meisten der großen französischen Mathematiker Kontakte zu unterhalten. Mit *Fermat* tauschte er schwierige Aufgaben über Dreieckskonstruktionen aus; in dessen Streit mit *Descartes* (1596 bis 1650) über Maximum- und Minimumprobleme nahm er aktiven Anteil auf der Seite *Fermats*.

Frühzeitig verwitwet, widmete sich *É. Pascal* hauptsächlich der Erziehung seiner Kinder (außer einem Sohn hatte er zwei Töchter, Gilberte und Jaqueline). Bei dem kleinen *Blaise* ließ sich sehr zeitig eine erstaunliche Begabung beobachten; sie ging aber, wie dies häufig zu geschehen pflegt, mit einer sehr schlechten Gesundheit einher. *É. Pascal* ging in der Erziehung seiner Kinder nach einem sorgfältig durchdachten System vor. In der ersten Zeit schloß er aus der Reihe der Gegenstände, die er seinen Sohn lehrte, die Mathematik kategorisch aus, denn er befürchtete, daß seine Entwicklung durch die Begeisterung für die Mathematik gestört würde und seine schwache Gesundheit durch das angespannte Nachdenken, ohne daß es nun einmal nicht geht, Schaden nehmen könnte.

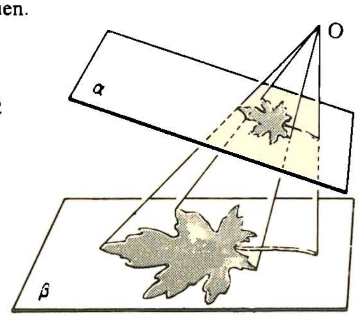
Der 12jährige *Blaise*, der von der Existenz der geheimnisvollen Geometrie wußte, mit der sich der Vater beschäftigte, überredete ihn jedoch, etwas über die *verbotene Wissenschaft* zu erzählen. Die Informationen, die er dabei erhielt, reichten aus, um ein spannendes „Spiel in Geometrie" zu beginnen: Satz um Satz zu beweisen. In diesem Spiel waren „kleine Münzen" (Kreise), „Dreispitze" (Dreiecke), „Tische" (Rechtecke) und „Stäbchen" (Strecken) beteiligt. Der Knabe wurde vom Vater in dem Moment ertappt, als er entdeckte, daß die drei Winkel eines „Dreispitzes" zusammen ebensoviel ausmachen wie zwei Winkel eines „Tisches". *É. Pascal* erkannte mühelos den berühmten 32. Satz des ersten Buchs des *Euklid* wieder, den Satz über die Winkelsumme im Dreieck. Das Resultat waren Tränen in den Augen des Vaters und der Zugang zu den Schränken mit mathematischen Büchern.

Mit etwa 10 Jahren fertigte *B. Pascal* seine erste physikalische Arbeit an. Er interessierte sich nämlich dafür, warum ein Fayenceteller tönte, führte daraufhin eine Serie wohldurchdachter Experimente mit einer Reihe von Hilfsmitteln durch und erklärte schließlich die ihn interessierende Erscheinung durch das Schwingen der Luftteilchen.

2. „Mystisches Hexagramm" oder „Großer Pascalscher Satz"

Mit 13 Jahren hatte *B. Pascal* bereits zu dem Mathematischen Kreis um *Mersenne* (1588 bis 1648) Zugang, in dem die meisten Pariser Mathematiker ein- und ausgingen, darunter *É. Pascal* (*Pascal* lebte seit 1631 in Paris). Hier fand er einen Lehrer, der seiner würdig war. Es handelte sich um den Ingenieur und Architekten *Gerard Desargues* (1593 bis 1663) den Schöpfer einer originellen Theorie der Perspektive. Sein Hauptwerk „Erste Niederschrift des Entwurfs eines Versuchs über die Tatsachen, zu welchen der Schnitt eines Kegels durch eine Ebene Veranlassung gibt" (1639) fand nur wenige Leser; unter ihnen nimmt *B. Pascal*, der es wesentlich weiterentwickeln konnte, einen besonderen Platz ein. Es muß an dieser Stelle gesagt werden, daß die Geometrie zu jener Zeit, von der wir hier sprechen, trotz der völlig neuen Wege, die ihr *Descartes* bahnte, indem er die analytische Geometrie schuf, im wesentlichen kaum das Niveau erreichte, auf dem sie sich im alten Griechenland befand. Vieles aus dem Erbe der griechischen Geometrie blieb unklar. Das bezieht sich vor allem auf die Theorie der Kegelschnitte. Das hervorragendste Werk zu diesem Thema – die acht Bücher „Konika" von Apollonius – war nur bruchstückhaft bekannt. *Desargues* bemerkte, daß es durch eine systematische Anwendung der Methode der Perspektive möglich würde, eine Theorie der Kegelschnitte von einem völlig neuen Standpunkt aus aufzubauen.

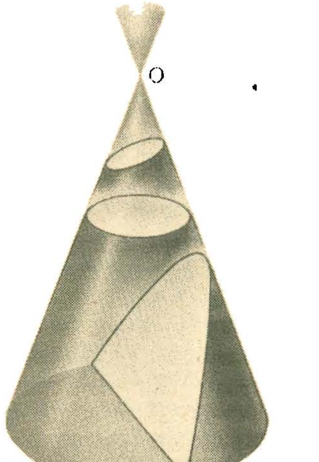
Bild 2



Wir wollen die Zentralprojektion vom Punkte 0 aus von Bildern auf der Ebene α auf die Ebene β betrachten. (Bild 2) Es liegt nahe, in der Theorie der Kegelschnitte eine solche Transformation zu verwenden, weil sich ihre Definition selbst – als Schnitte eines geraden Kreiskegels (Bild 3) – folgendermaßen umformulieren läßt: sie werden alle dadurch gewonnen, daß man einen von ihnen (etwa einen Kreis) durch Zentralprojektion von der Spitze eines Kegels aus auf verschiedene Ebenen abbildet. Da wir weiter bemerken, daß sich schneidende Geraden bei Zentralprojektion entweder in einander schneidende Geraden oder in parallele Geraden übergehen können, fassen wir die beiden letzteren Eigenschaften in eine zusammen, indem wir verabreden, daß sich alle zueinander parallelen Geraden in einem „unendlichfernen

Punkt" schneiden sollen; daß verschiedene Büschel paralleler Geraden verschiedene unendlichferne Punkte ergeben; und daß alle unendlichfernen Punkte der Ebene die „unendlichferne Gerade" erfüllen. Nimmt man diese Vereinbarungen an, so werden sich zwei beliebige verschiedene Geraden (selbst Parallelität nicht ausgeschlossen) stets in einem einzigen Punkt schneiden.

Bild 3



Die Aussage, daß man durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden m genau eine zu m parallele Gerade ziehen kann, läßt sich folgendermaßen umformulieren: Durch einen gewöhnlichen Punkt A und einen unendlichfernen Punkt (der zu der Schar der zu m parallelen Geraden gehört) geht genau eine Gerade. Damit gilt unter den neuen Bedingungen ohne jegliche Einschränkungen der Satz, daß durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade hindurchgeht (die unendlichferne Gerade, wenn beide Punkte unendlichfern sind). Wir sehen, daß sich damit eine sehr elegante Theorie ergibt. Für uns ist aber das eine wichtig, daß bei einer Zentralprojektion der Schnittpunkt von Geraden (im verallgemeinerten Sinne) in den Schnittpunkt der Bildgeraden übergeht. Es ist wichtig zu durchdenken, welche Rolle in dieser Aussage die Einführung unendlichferner Elemente spielt (unter welchen Bedingungen der Schnittpunkt in einen unendlichfernen Punkt übergeht, wann die Gerade in die unendlichferne Gerade übergeht und umgekehrt). Ohne uns mit der Ausnutzung dieser einfachen Überlegung durch *Desargues* aufzuhalten, wollen wir darüber berichten, in welch bemerkenswerter Weise sie von *Pascal* verwendet worden ist.

1640 druckte *Pascal* seinen „Essai über Kegelschnitte". Nicht uninteressant sind einige Informationen über diese Ausgabe: Auflage 50 Stück, 53 Zeilen Text wurden auf ein Plakat gedruckt, das zum Ankleben an Häuserecken vorgesehen war (was das Plakat *Pascals* betrifft, so ist das nicht zuverlässig bekannt. *Desargues* hat jedoch bewußt auf solche Weise für seine Resultate Reklame gemacht). Auf dem mit den Initialen des Autors (*B. P.*) unterschriebenen Plakat wird ohne Beweis der folgende Satz mitgeteilt, der jetzt Satz von *Pascal* heißt. Auf einem Kegelschnitt L (in Bild 4 ist L eine Parabel, in Bild 5 eine Ellipse) seien 6 Punkte beliebig ausgewählt und durchnumeriert. Die Schnittpunkte der drei Geradenpaare (1, 2) und (4, 5); (2, 3) und (5, 6); (3, 4) und (6, 1) bezeichnen wir mit P, Q, R. Bei der einfachsten Numerierung („der Reihenfolge nach") (Bild 5) liegen diese Schnittpunkte auf gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks. Der Satz sagt aus, daß die Punkte P, Q, R auf einer Geraden liegen.*

Bild 4

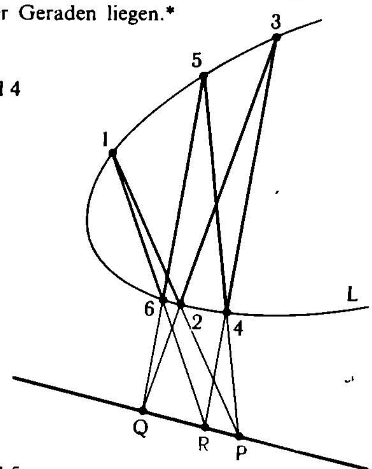
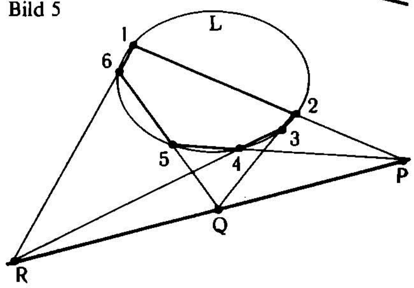


Bild 5



Pascal formuliert den Satz zunächst für einen Kreis und beschränkt sich auf die einfachste Numerierung der Punkte. In diesem Falle ist das eine elementare, wenn auch nicht gar zu einfache Aufgabe. Dann vollzieht sich der Übergang vom Kreis zu einem beliebigen Kegelschnitt sehr einfach. Man braucht nur einen solchen Kegelschnitt mittels einer Zentralprojektion in einen Kreis zu transformieren und auszunutzen, daß bei einer Zentralprojektion Geraden in Geraden und Schnittpunkte (im verallgemeinerten Sinne) in Schnittpunkte übergehen. Da dann, wie bereits bewiesen, die Bilder der Punkte P, Q, R bei der Projektion auf einer Geraden liegen, folgt hieraus, daß auch die Punkte P, Q, R selbst diese Eigenschaft besitzen.

Der Satz, den *Pascal* Satz über das „mystische Hexagramm" nannte, war kein Eigenwerk; *Pascal* betrachtete ihn als Schlüssel für den Aufbau einer allgemeinen *Theorie der Kegelschnitte*, die die *Theorie von Apollonius* umfaßt. Bereits auf dem Plakat werden Verallgemeinerungen wichtiger Sätze von *Apollonius* genannt, die herzuleiten *Desargues* nicht gelungen war. *Desargues* schätzte den Satz von *Pascal* hoch ein und nannte ihn den „großen Satz von *Pascal*"; er behauptete, daß in ihm die ersten vier Bücher von *Apollonius* enthalten sind.

Pascal beginnt die Arbeit an seinem „Vollständigen Werk über Kegelschnitte", die 1654 in den Nachrichten der „Berühmtesten Pariser Mathematischen Akademie" als vollendet vermeldet wird. Von *Mersenne* ist bekannt, daß *Pascal* etwa 400 Folgerungen aus seinem Satz gezogen hat. *Leibnitz* (1646 bis 1716) war der letzte, der das *Traktat von Pascal* in den Jahren 1675 bis 1676 (nach dem Tode Pascals) gesehen hat. Trotz der Empfehlung von *Leibniz* wurde die Handschrift von den Verwandten nicht veröffentlicht und ist seitdem verschollen.

3. „Pascaline"

Am 2. Januar 1640 verzieht die Familie der *Pascals* nach Rouen, wo *É. Pascal* die Stelle eines Intendanten der Provinz erhält und faktisch beim Gouverneur alle Dinge verwaltet. Jetzt hatte *É. Pascal* sehr viel Rechenarbeit zu leisten, bei der ihm der Sohn ständig half. Ende 1640 kommt *Blaise* auf die Idee, eine Maschine zu konstruieren, um den Geist von den Rechnungen „mit Feder und Rechenmarken" zu befreien. Der grundlegende Plan fiel ihm schnell ein, und er blieb im Verlauf seiner Arbeit ungeändert: Durch die Weiterbewegung jedes Rades (oder jeder Stange), das zu einer gewissen Dezimalstelle gehört, um zehn Einheiten wird das nächste um nur eine Ziffer fortbewegt. Die glänzende Idee ist jedoch nur ein erster Schritt: Unvergleichlich mehr Kräfte erforderte ihre Verwirklichung. Fünf Jahre angespannter Arbeit führten zur Schaffung einer Maschine („Pascaline", wie sie von den Zeitgenossen genannt wurde), die die vier Grundrechenarten mit fünfstelligen Zahlen ausführte, wenn auch ziemlich langsam.

4. Der „horror vacui" und das „große Experiment über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten"

Ende 1646 erreichte die Kunde von den wunderbaren „italienischen Versuchen mit dem Vakuum" auch Rouen. Die Frage, ob das Vakuum in der Natur existiert, hatte schon die alten Griechen bewegt; in ihren Anschauungen zu dieser Frage kam die der altgriechischen Philosophie eigentümliche Vielfältigkeit von Gesichtspunkten zum Ausdruck: *Epikur* nahm an, daß es Vakuum geben kann und daß es wirklich existiert; *Heron*, daß es künstlich gewonnen werden kann; *Emedokles*, daß es nicht existiert und

* Formuliert selbständig die Folgerungen, die sich aus diesem Satz ergeben, wenn von den betrachteten Punkten einige unendlichfern sind.

es nirgendwo herkommen kann; *Aristoteles* behauptete, daß „sich die Natur vor dem Vakuum fürchtet". In der Mitte des Jahrhunderts „vereinfachte" sich die Situation, da die Wahrheit der Lehre des *Aristoteles* praktisch in der gesetzgebenden Ordnung festgelegt war (noch im 17. Jahrhundert konnte man, wenn man gegen Aristoteles auftrat, in Frankreich ins Zuchthaus geworfen werden). Das klassische Beispiel der „Furcht vor der Leere" (horror vacui) lieferte das Wasser, das sich hinter dem Kolben hebt und auf diese Weise keinen leeren Raum entstehen läßt. Plötzlich trat jedoch mit diesem Beispiel ein ungewöhnlicher Vorfall ein. Beim Bau der Springbrunnen in Florenz wurde beobachtet, daß Wasser „nicht wünscht", über 34 Fuß (10,3 Meter) hoch gehoben zu werden. Die verdutzten Bauleute wandten sich an den hochbetagten *G. Galilei* (1564 bis 1642) um Hilfe, der witzelte, daß die Natur in einer Höhe von über 34 Fuß wahrscheinlich aufhört, sich vor der Leere zu fürchten, und seinen Schülern *E. Torricelli* (1608 bis 1647) und *V. Viviani* (1622 bis 1703) vorschlug, die seltsame Erscheinung zu untersuchen.

Wahrscheinlich geht auf *Torricelli* (und eventuell auch auf *Galilei* selbst) der Gedanke zurück, daß die Höhe, auf die eine Flüssigkeit in einer Pumpe gehoben werden kann, umgekehrt zu ihrem spezifischen Gewicht ist. Insbesondere muß sich Quecksilber nur auf eine Höhe heben lassen, die 13,2 mal so klein wie die im Falle von Wasser ist, d. h., um 76 cm. Damit wurde der Versuch auch für Laborbedingungen geeignet und wurde 1643 ausgeführt. Er ist in die Geschichte als *Torricellischer Versuch* eingegangen. Dieser Versuch ist gut bekannt; immerhin wollen wir aber erwähnen, daß eine an einem Ende zugeschmolzene Röhre aus Glas von einem Meter Länge mit Quecksilber gefüllt wird, das offene Ende mit dem Finger zugehalten und danach das Rohr umgedreht und in eine Tasse mit Quecksilber gesenkt wird. Wenn man den Finger wegnimmt, so fällt der Quecksilberspiegel im Rohr auf 76 cm. *Torricelli* stellte zwei Behauptungen auf: 1) der Raum über dem Quecksilber im Rohr ist leer (später wird er „Torricellische Leere" genannt); 2) das Quecksilber aus dem Rohr fließt nicht vollständig aus, da es von der Luftsäule daran gehindert wird, die auf der Quecksilberoberfläche in der Tasse lastet. Nimmt man diese Hypothesen an, so kann man alles erklären, man kann aber auch dadurch zu einer Erklärung gelangen, indem man spezielle, ziemlich kompliziert wirkende Kräfte annimmt, die die Entstehung eines Vakuums verhindern.

Pascal wiederholt mit Begeisterung die italienischen Versuche, indem er sich viele scharfsinnige Verbesserungen ausdenkt. Acht solcher Versuche sind in einem 1647 veröffentlichten Traktat beschrieben. Er beschränkt sich nicht auf Versuche mit Quecksilber, sondern experimentiert mit Wasser, Öl, Rotwein, wofür er Fässer anstatt Tassen und Rohre von ungefähr 15 m Länge benötigte. Die eindrucksvollen Versuche wurden auf einer Straße von Rouen durchgeführt und erfreuten seine Bewohner (bis heute reproduziert man in den Physiklehrbüchern gern Stiche mit einem Weinbarometer).

In der Heimat *Pascals*, in Clermont, lebte zu dieser Zeit die ältere Schwester B. Pascals, *Gilberte*; ihr Mann *Florin Périer* diente am Gericht und widmete die Freizeit den Wissenschaften. Am 15. November 1647 richtete *Pascal* an *Périer* einen Brief, in dem er darum bittet, die Quecksilberspiegel im *Torricellischen Rohr* am Fuße und auf dem Gipfel des Berges *Puy de Dome* zu vergleichen:

„Ihr versteht, daß man, wenn sich die Höhe des Quecksilbers auf dem Gipfel des Berges als geringer als am Fuße erweisen würde (ich denke aus vielen Gründen, daß dem so sein wird, obgleich alle, die über diesen Gegenstand geschrieben haben, eine andere Meinung vertreten), hieraus schließen könnte, daß der einzige Grund für diese Erscheinung die Schwere der Luft und nicht der berüchtigte *horror vacui* (Furcht vor der Leere) ist. Es ist in der Tat klar, daß die Luft am Fuße des Berges verdichteter sein muß als oben, während es unsinnig ist anzunehmen, daß die Furcht vor der Leere am Fuße größer als auf dem Gipfel ist." Das Experiment wurde aus verschiedenen Gründen verschoben, und erst am 19. September 1648 fand das „große Experiment über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten" in Gegenwart von fünf „hochverehrten Bürgern" von Clermont statt. Am Ende des Jahres kam eine Broschüre heraus, die den Brief *Pascals* und die Antwort von *Périer* mit peinlich genauer Beschreibung des Versuchs enthielt. Bei einer Höhe des Berges von etwa 1,5 km betrug der Unterschied des Quecksilberniveaus 82,5 mm; das „versetzte die Teilnehmer des Experiments in Entzückung und Verwunderung" und war wahrscheinlich auch für *Pascal* unerwartet. Es kann nicht angenommen werden, daß vorherige Abschätzungen existiert haben, während die Illusion von der Leichtigkeit der Luft sehr groß war.

Wir können uns nicht mit den anderen Ergebnissen *Pascals* über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten und Gasen aufhalten, die ihn neben *Galilei* und *Stevin* (1548 bis 1620) in die Reihe der Schöpfer der klassischen Hydrostatik stellen. Hierzu gehören auch das berühmte *Pascalsche Gesetz* und die Idee der hydraulischen Presse sowie die wesentliche Herausbildung des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

5. „Mathematik des Zufalls"

Im Januar 1646 verrenkte sich *É. Pascal* bei Glatteis den Schenkel, und dies kostete ihn beinahe das Leben. Der Gedanke daran, seinen Vater zu verlieren, machte auf den Sohn einen furchtbaren Eindruck, was sich vor allem auf seine Gesundheit niederschlug: die Kopfschmerzen wurden unerträglich, er konnte sich nur auf Krücken bewegen und vermochte nur einige Tropfen warme Flüssigkeiten hinterzuschlucken. Von dem Arzt und Knocheneinrenker, der den Vater behandelt hatte, erfuhr *B. Pascal* von der Lehre von *Cornelius Jansen* (1585 bis 1638), die sich zu dieser Zeit in Frankreich ausbreitete und sich gegen das Jesuitentum stellte (dieses existierte zu der Zeit etwa hundert Jahre lang). Auf *Pascal* machte ein Nebenbestandteil in der Lehre von *Jansen* den größten Eindruck:

ob die unkontrollierte Beschäftigung mit der Wissenschaft zulässig sei, das Streben, alles zu erkennen, alles zu enträtseln, das vor allem mit der unbegrenzten Forscherbegierde des menschlichen Geistes verbunden ist oder, wie *Jansen* schrieb, mit der „Wollust des Geistes". *Pascal* sieht seine wissenschaftliche Tätigkeit als sündhaft und den auf ihn gekommenen Anteil Unheil als Strafe für diese Sünde auf. Dieses Ereignis nannte *Pascal* selbst „seine erste Bekehrung". Er beschließt, sich der Dinge zu entsagen, die „sündhaft und gottwidrig" sind. Dies gelingt ihm jedoch nicht: wir haben bereits einen Sprung nach vorn gemacht und wissen, daß er bald darauf jede Minute, die ihm die Krankheit läßt, der Physik widmet.

Die Gesundheit bessert sich etwas, und mit *Pascal* gehen Dinge vor, die für seine nahen Verwandten wenig verständlich sind. Männlich erträgt er 1651 den Tod des Vaters, und seine rationalistischen, äußerlich kalten Überlegungen über die Rolle des Vaters in seinem Leben heben sich scharf von seiner Reaktion in den letzten fünf Jahren ab. Und danach treten bei *Pascal* Bekannte in Erscheinung, die zu einem Jansenisten wenig passen. Er reist im Gefolge des *Duc de Roannez* und wird dort mit *Chevalier de Méré* bekannt, einem hochgebildeten und geistvollen, aber etwas selbstbewußten und oberflächlichen Menschen.

Wir gehen zur Geschichte dessen über, wie „eine dem strengen Janseisten durch einen weltlichen Menschen gestellte Aufgabe zur Quelle der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde" (*Poisson*). Eigentlich handelte es sich um zwei Aufgaben, und wie die Mathematikhistoriker erklärt haben, waren sie lange vor *de Méré* bekannt. Die erste Frage besteht darin, wie oft man zwei Spielwürfel werfen muß, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens einmal zwei Sechser fallen, größer als die Wahrscheinlichkeit dafür wird, daß kein einziges Mal zwei Sechser fallen. *De Méré* hat auch selbst diese Aufgabe gelöst, aber leider ... nach zwei Verfahren, die verschiedene Antworten ergeben haben: 24 und 25 Würfe. Von der gleichen Zuverlässigkeit beider Methoden überzeugt, fällt *de Méré* über die „Unzuverlässigkeit" der Mathematik her. *Pascal*, der sich davon überzeugt hatte, daß das richtige Resultat 25 lautet, führt nicht einmal eine Entscheidung herbei. Seine Hauptbemühungen waren auf die Lösung der zweiten Aufgabe gerichtet, des Problems der „gerechten Verteilung der Einsätze". Es wird ein Spiel durchgeführt, alle Teilnehmer (ihre Anzahl kann größer als Zwei sein) machen zunächst in die „Bank" Einsätze; das Spiel zerfällt in mehrere Partien, und um zu gewinnen, muß die Bank eine gewisse feste Anzahl von Partien gewinnen. Die Frage besteht darin, wie die Bank in Abhängigkeit von der Anzahl der von den Spielern gewonnenen Partien gerecht unter ihnen aufzuteilen ist, wenn das Spiel nicht bis zu Ende durchgeführt wird (niemand hat so viel Partien gewonnen, wie ausreichen, um die Bank zu erhalten).

Mit den Worten *Pascals* „war *de Méré* ... überhaupt nicht fähig, dieser Frage beizukommen ...". Niemand aus dem Kreis um *Pascal* vermochte die von ihm vorgeschlagene Lösung zu begreifen, immerhin fand sich aber ein Gesprächspartner, der seiner würdig war. Zwischen dem 29. Juni und dem 27. Oktober stand *Pascal* mit *Fermat* im Briefwechsel. Man nimmt häufig an, daß im Verlauf dieses Briefwechsels die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstanden ist. *Fermat* löst die Aufgabe über die Einsätze anders als *Pascal*, und erstmalig kommt es zu gewissen Meinungsverschiedenheiten. Im letzten Brief stellt jedoch *Pascal* fest: „unser Einvernehmen ist vollständig wiederhergestellt" und weiter „wie ich sehe, ist die Wahrheit in Toulouse und Paris ein und dieselbe". Er ist glücklich darüber, daß er einen großen Gesinnungsgenossen gefunden hat:

„Auch ich möchte künftig meine Gedanken nach Maßgabe der Möglichkeiten mit Ihnen teilen".

6. Louis de Montalte

Bald nach dem Tode des Vaters geht *Jaqueline Pascal* ins Kloster, und *Blaise Pascal* wird der Gegenwart eines sehr nahen Menschen beraubt. Zu gewisser Zeit zieht ihn die Möglichkeit an, so zu leben, wie die meisten Leute leben: er trägt sich mit dem Gedanken, ein Amt am Gericht zu erkaufen und zu heiraten. Aber diese Pläne gingen nicht in Erfüllung. Mitte November 1654, als *Pascal* eine Brücke überschritt, riß sich das vordere Paar Pferde los, und der Wagen wurde wie durch ein Wunder am Rande des Abgrunds aufgehalten. Am 23. November erfolgt ein ungewöhnlicher Nervenanfall.

Fortsetzung auf Seite 143

Was braucht man zum Lösen einer Aufgabe?

Einige Bemerkungen zum Prozeß des Problemlösens, illustriert am Beispiel einer IMO-Aufgabe dieses Jahres

Viele Leser unserer Zeitschrift sind oder waren Teilnehmer von Mathematikolympiaden und standen öfter vor Problemen, die sich nicht schematisch mit Methoden aus dem Schulstoff lösen ließen. Zu jeder solchen Aufgabe war eine Idee, etwas Originelles, Unschematisches notwendig. Daher kann man kein Rezept zur Lösung von Aufgaben aufstellen, ebenso wie die mathematischen Probleme in Ökonomie und Technik, Transport- und Nachrichtenwesen, Physik, Chemie und Biologie stets Ideen und Schöpferkraft verlangen. Dennoch lohnt es sich, einige Dinge aufzuzählen, die für die erfolgreiche Lösung eines Problems grundlegend sind.

In jedem Abschnitt unseres Artikels wollen wir dazu einen kleinen Beitrag leisten, und wenn es dem Leser gelingt, die in dieser Zeitschrift und anderswo abgedruckten Lösungen (besonders solche, die kurz sind), künftig besser zu verstehen und Zusammenhänge zwischen mathematischen Problemen der verschiedensten Art zu erkennen, ist der Sinn dieses Artikel erfüllt.

Aufstellung der wichtigen Voraussetzungen

Es kommt darauf an, den wesentlichen Inhalt einer Aufgabe mathematisch zu formulieren, das kann durch Gleichungen (z. B. $a^2+b^2=c^2$), Elementbeziehungen (z. B. $A\in g$), Beziehungen zwischen Mengen (z. B. $Z=X\cap Y$, $M\subset N$) oder durch eine Beschreibung in Worten geschehen (z. B. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich). Dabei ist die Bedeutung der vorkommenden Größen die Hauptsache. Es ist nicht richtig, wenn wir sagen:

„Der Satz des Pythagoras lautet $a^2+b^2=c^2$."

Wie formuliere ich nun die Voraussetzungen eines Problems?

Läßt man sehr viele Größen dabei vorkommen, so wird die Beschreibung sehr schwierig; im entgegengesetzten Fall können wesentliche Seiten des Problems verlorengehen. Also wird man meist so vorgehen:

Schritt 1: Finde möglichst wenig Größen, die das Problem hinreichend vollständig beschreiben!

Schritt 2: Gib alle wesentlichen Beziehungen zwischen diesen Größen an!

Ist von einem Kreis die Rede, so reicht es, wenn man seinen Radius kennt, die Angabe des Durchmessers ist dann überflüssig; ein Rhombus ist durch seine beiden Diagonalen bestimmt usw. Zu den wesentlichen Beziehungen zwischen den Größen gehören auch Einschränkungen wie „x ist eine positive reelle Zahl" oder „a ist ganzzahlig".

Es sei noch erwähnt, daß man die Größen in gegebene, gesuchte und Hilfsgrößen einteilen kann. Bei der Lösung einer Aufgabe strebt man danach, daß die Hilfsgrößen aus der Betrachtung verschwinden und daß eine direkte Beziehung zwischen gegebenen und gesuchten Größen übrigbleibt. Wir führen als Beispiel die 1. Aufgabe der 1. Stufe der diesjährigen OJM an; vgl. „alpha" Heft 4/74:

In dieser Aufgabe ist von einem Tanzabend die Rede, auf dem für jeden Herrn die Anzahl der Damen, mit denen er tanzte, nicht kleiner als 10 und nicht größer als 12 ist und für jede Dame die Anzahl der Herren, mit denen sie tanzte, nicht kleiner als 12 und nicht größer als 14 ist. Wollte jeder Herr mit jeder Dame tanzen, so hätten nacheinander 480 Paare gebildet werden müssen.

Bezeichnet man mit d, h und t die Anzahl der Damen, Herren bzw. der durchgeführten Tänze, so kommt die Beziehung zwischen diesen Größen in folgendem zum Ausdruck: d, h, t sind positive ganze Zahlen mit

(1) $10h\leqq t\leqq 12h,\ 12d\leqq t\leqq 14d,\ dh=480$

Gefragt ist in der Aufgabe nach den Anzahlen d, h. Als Hilfsgröße tritt t in Erscheinung, während uns die Beziehungen (1) gegeben sind. Wir weisen besonders darauf hin, daß die Beziehungen (1) das Problem nicht vollständig beschreiben. Es könnte nämlich sein, daß zwischen den Größen d, h und t noch weitere, verborgene Beziehungen bestehen, die die Anzahl der Lösungen einschränken. Darum genügt es nicht, die Probe für eine gefundene Lösung mit (1) durchzuführen, sondern man muß zur ursprünglichen Aufgabe (Tanzabend mit d Damen und h Herren) zurückkehren und die Paarzuordnung direkt festlegen. (Dies ist auch in Teil b) der Aufgabe gefordert, und es ist eigentlich nicht richtig, die Aufgaben a) und b) zu trennen; überlege selbst noch einmal warum!).

Im vorigen Beispiel lag ein Problem vor, dessen Bedingungen nicht vollständig in Formeln angegeben werden konnten. Dort, wo es geht, muß man aber nach vollständiger Beschreibung streben.

Ein mathematischer Sachverhalt ist vollständig beschrieben, wenn sich beweisen läßt, daß alle Ergebnisse, die mit der Beschreibung in Einklang stehen, auch dem betrachteten Sachverhalt entsprechen.

Als Beispiel nennen wir eine Aufgabe aus der Olympiade in der SR Rumänien aus dem Jahre 1967:

Drei Gruppen von Fischern fingen insgesamt 113 Fische. In der ersten Gruppe entfielen auf jeden Fischer 13, in der zweiten 5 und in der dritten 4 Fische. Wie groß war die Anzahl der Fischer in jeder Gruppe, wenn es insgesamt 16 waren?

Der Inhalt dieser Aufgabe wird durch das Gleichungssystem
$13x+5y+4z=113$, $x+y+z=16$,
x, y, z positive ganze Zahlen
vollständig beschrieben.
Nun wollen wir sehen, wie man von der Beschreibung einer Aufgabe zu ihrer Lösung gelangen kann.

Analyse eines Problems

Das Ziel der Analyse ist, einen möglichst großen Überblick über die Folgerungen zu gewinnen, die man aus den Voraussetzungen ziehen kann. Dazu kann man etwa Ungleichungen addieren, Gleichungen addieren, subtrahieren, multiplizieren usw. Je zielgerichteter man solche Umformungen durchführt (man überlege: was will ich mit der Umformung bezwecken?) und je gründlicher die Analyse ist, desto besser ist man für die Lösung einer Aufgabe gerüstet. Mitunter trifft man auch Aufgaben, die einen Widerspruch in sich enthalten. Soll eine Analyse vollständig sein, muß festgestellt werden, ob ein solcher Widerspruch vorliegt. Ein typisches Beispiel ist die folgende Aussage.

Von 1000 bestimmten Personen essen 811 Schokolade, 752 Konfekt, 418 Bonbons gern. 570 Personen essen gerne Schokolade und Konfekt, 356 Schokolade und Bonbons, 348 Konfekt und Bonbons. 297 der 1000 befragten Personen essen alle drei Süßigkeiten gern.

Weise selbst nach, daß diese Information fehlerhaft ist! Sehen wir nun einmal, wie weit wir mit der Lösung der Aufgabe vom Tanzabend (s. o.) kommen!
Die Beziehungen (1) verlangen, daß die Intervalle $[10h; 12h]$ und $[12d; 14d]$ auf der Zahlengeraden einen gemeinsamen Punkt, nämlich t, enthalten. Zwei Intervalle haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn die rechte Grenze jedes Intervalls rechts von der linken Grenze des anderen Intervalls liegt oder mit ihr identisch ist. (Wir sprechen hier von abgeschlossenen Intervallen. In welchem Falle haben zwei Intervalle keinen Punkt gemeinsam? Formuliere genau!).
Wir erhalten so
(2) $10h \leqq 14d$, $12h \geqq 12d$, $dh=480$.
Unser Ziel, die Hilfsgröße t zu beseitigen, ist erreicht. Die beiden Ungleichungen schreiben wir nun als
$$\frac{5}{7}h \leqq d \leqq h$$
und nach Einsetzen von $d=\frac{480}{h}$ erhalten wir schließlich
$$\frac{5}{7}h \leqq \frac{480}{h} \leqq h,\ h^2 \leqq 672 \text{ und } h^2 \geqq 480.$$
Von den Möglichkeiten $h=22, 23, 24, 25$ ist nur $h=24$ ein Teiler von 480, und es wird $d=20$. Daß die Aufgabe damit noch nicht völlig gelöst ist, haben wir schon oben erwähnt, der Rest sei dem Leser überlassen.

Über die erste Aufgabe der diesjährigen IMO

Am Beispiel einer Aufgabe von der XVI. Internationalen Mathematikolympiade in Erfurt sollen unsere Bemerkungen noch einmal ausführlich illustriert werden. Die Aufgabe lautet so:

Drei Spieler A, B, C spielen folgendes Spiel: Auf genau drei Spielkarten ist je eine ganze Zahl geschrieben. Für diese drei Zahlen p, q, r gilt $0<p<q<r$. Diese drei Karten werden gemischt und so verteilt, daß jeder der drei Spieler eine Karte erhält. Jeder bekommt dann genauso viele Kugeln zugeteilt, wie die Zahl auf der erhaltenen Karte angibt. Danach werden die Karten wieder eingesammelt; die zugeteilten Kugeln bleiben bei den Spielern. Dieser Spielverlauf (Mischen und Verteilen der Karten, Zuteilen von Kugeln, Einsammeln der Karten) wird mindestens zweimal durchgeführt. Nach dem letzten Mal hat insgesamt

A	B	C
20	10	9

Kugeln. B weiß noch, daß er beim letzten Mal r Kugeln bekommen hat. Wer hatte beim ersten Mal q Kugeln erhalten?

Die Größen, die wir aus der Aufgabenstellung ableiten können, sind die Anzahl n der durchgeführten Spiele sowie die Anzahlen a_i, b_i, c_i der Kugeln, die A, B, C in der i-ten Runde (für $i=1, 2, \ldots, n$) erhalten haben. Die Spielregeln und die Bedingungen der Aufgabe kommen in den folgenden Gleichungen vollständig zum Ausdruck:
(3) Für jedes $i=1, 2, \ldots, n$ gilt $\{a_i, b_i, c_i\}=\{p, q, r\}$ (Gleichheit zweier Mengen; beschreibe diese Beziehung ausführlicher!),
(4) $a_1+a_2+\ldots+a_n=20$,
(5) $b_1+b_2+\ldots+b_n=10$, $b_n=r$
(6) $c_1+c_2+\ldots+c_n=9$,
(7) p, q, r, n sind ganze Zahlen mit $0<p<q<r$, $n\geqq 2$.
Die Beziehungen (3)–(7) umfassen zwar die gesamte Aufgabe, aber insbesondere die Gleichungen (4)–(6) sind für eine Analyse zu kompliziert. Wir beginnen also am besten damit, eine Gleichung für die Anzahl aller verteilten Kugeln aufzustellen, diese lautet
$$n(p+q+r)=39.$$
Für die Faktoren n und $p+q+r$ des Produkts besteht die Einschränkung, daß sie ganzzahlig sind. Welche weiteren Einschränkungen gelten noch? Wegen $p\geqq 1$ muß $q\geqq 2$ und $r\geqq 3$ und damit $p+q+r\geqq 6$, $n=\frac{39}{p+q+r}<7$ sein. Von den Zahlen $n=2, 3, 4, 5, 6$ ist aber nur $n=3$ ein Teiler von 39; weiter gilt $p+q+r=13$. Unser weiterer Lösungsplan sieht nun folgendes vor:
1. Ausnutzung der Voraussetzung „B erhielt beim letzten Mal r Kugeln".
2. Untersuchung, welcher der Fälle „A erhielt beim ersten Mal q Kugeln", ..., „C erhielt beim ersten Mal q Kugeln" möglich oder unmöglich ist.
Wir haben bisher gesehen, daß (angenommen, daß der angegebene Ausgang des Spiels überhaupt möglich ist) bei dem Spiel drei Runden stattfanden. Da B in der letzten Runde r Kugeln und in den ersten beiden Runden mindestens je eine Kugel erhielt, ist die Anzahl seiner Kugeln nicht kleiner als $r+2$. Es gilt also $10\geqq r+2$ und damit $r\leqq 8$.
Nehmen wir nun an, daß A beim ersten Mal q Kugeln erhielt. Dann erhielt er beim zweiten Mal höchstens r und beim dritten Mal höchstens q Kugeln, und insgesamt ist seine Kugelanzahl nicht größer als
$q+r+q=13-p+q\leqq 12+q\leqq 11+r\leqq 19$.
In dieser Ungleichungskette benutzten wir im ersten Schritt die Gleichung $p+q+r=13$, anschließend die Ungleichung $p\geqq 1$,
dann die Ungleichung $q<r$ oder, anders geschrieben, $q\leqq r-1$
(welche Voraussetzung ist notwendig, um aus $q<r$ auf $q\leqq r-1$ schließen zu können?)
und schließlich die Ungleichung $r\leqq 8$.
Wir sind zu einem Widerspruch gekommen, denn A erhielt 20 Kugeln. Dieser Widerspruch beruhte auf unserer Annahme, A habe beim ersten Mal q Kugeln erhalten.
Hätte B beim ersten Mal q Kugeln erhalten, so müßte seine Kugelanzahl mindestens
$$q+1+r=14-p$$
betragen, also würde $10\geqq 14-p$, $p\geqq 4$ gelten. In diesem Falle hätte jeder der Spieler, insbesondere auch C, mindestens $3p=12$ Kugeln zu erhalten. Wir haben erneut einen Widerspruch erhalten. Wir können damit schon auf die gestellte Frage antworten. Die Antwort lautet:
Falls der angegebene Ausgang des Spiels überhaupt möglich ist, so erhielt C beim ersten Mal q Kugeln.
Überzeugen wir uns nun noch davon, daß das Spiel wirklich diesen Ausgang haben kann! Dazu betrachten wir den Fall $p=1$, $q=4$ und $r=8$. Wenn A 8,8 und 4, B 1,1 und 8 sowie C 4,4 und 1 Kugel in dieser Reihenfolge erhalten, so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Eine vollständige Analyse, die hier nicht verlangt war, würde zeigen, daß dies der einzig mögliche Fall ist, in dem alle in der Aufgabe gemachten Aussagen wahr sind.

W. Burmeister

Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen

Teil 2

Allgemein gilt:

Satz 8: Besitzt die natürliche Zahl n die normierte Primfaktorzerlegung $n=q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}$, so sind die sämtlichen Teiler t von n gegeben durch $t=q_1^{x_1} \cdot q_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{x_s}$, wobei die natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ und x_s den Ungleichungen $x_1 \leqq n_1$, $x_2 \leqq n_2$, ... und $x_s \leqq n_s$ genügen. Die Anzahl Z der sämtlichen Teiler von n ist

$$Z=(n_1+1)(n_2+1) \ldots (n_s+1).$$

Nach Satz 8 hat jede natürliche Zahl n, deren Primfaktorzerlegung die Struktur $n=p^5 \cdot q^7$ hat, in der p und q voneinander verschiedene Primzahlen sind, genau $(5+1)(7+1)=48$ Teiler. Über zwei natürliche Zahlen wird im Satz 8 keine Aussage gemacht, über die Zahlen 0 und 1. Während die Zahl 1 genau einen Teiler besitzt, hat die Zahl 0 jede von 0 verschiedene natürliche Zahl zum Teiler.

Wiederum lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

Aufgabe 7: Eine natürliche Zahl n besitzt genau 10 Teiler. Gib sämtliche mögliche Strukturen der normierten Primfaktorzerlegung von n an! Gib die kleinste natürliche Zahl n mit genau 10 Teilern an!

Aufgabe 8: Die von 0 verschiedene natürliche Zahl t heißt echter Teiler der natürlichen Zahl n, wenn t/n und $t<n$ gilt. Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen, wenn die Summe ihrer echten Teiler gleich n ist. Zum Beispiel ist 6 eine vollkommene Zahl, weil $6=3+2+1$ gilt.
Zeige: Von allen natürlichen Zahlen n, deren normierte Primfaktorzerlegung die Struktur $n=p^1 \cdot q^1$ (p, q Primzahlen; $p<q$) haben, ist 6 die einzige vollkommene Zahl.

Aufgabe 9: Als gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen m und n werden alle von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen t bezeichnet, für die gleichzeitig t/m und t/n gilt.

a) Bestimme die Menge T der gemeinsamen Teiler t der natürlichen Zahlen m und n, wenn m und n die normierten Primfaktorenzerlegungen

$m=p^5 \cdot q^3 \cdot r^2 \cdot s^4 \cdot t^1$ und
$n=p^4 \cdot r^{11} \cdot t^3$ (p, q, r, s, t Primzahlen; $p<q<r<s<t$) haben.

b) Die Menge T enthält als endliche Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen eine größte Zahl t_{max}. Gib die normierte Primfaktorzerlegung von t_{max} an!

c) Zwei natürliche Zahlen, die nur den gemeinsamen Teiler 1 haben, heißen teilerfremd.
Zeige: Die natürlichen Zahlen $\frac{m}{t_{max}}$ und $\frac{n}{t_{max}}$ sind teilerfremd.

Aufgabe 10: Beweise: Sind m und n natürliche Zahlen mit $m, n>1$ und ist p Primzahl, so folgt aus $p/(mn)$ und $p \nmid m$ stets p/n.

Aufgabe 11: Beweise: Sind m, n und s natürliche Zahlen mit m, $n>1$ und $s>0$, so folgt aus $p^s/(mn)$ und $p \nmid m$ stets p^s/n.

Aufgabe 12: Gib sämtliche natürliche Zahlen n an, für die gleichzeitig $12/n$, $50/n$ und $21/n$ gelten! Gib die größte natürliche Zahl v an, so daß für jedes derartige n v/n gilt!

Aufgabe 13: Beweise: Sind z und x teilerfremde, natürliche Zahlen, gilt $z>x$ und ist p eine von 2 verschiedene Primzahl, so gilt nie gleichzeitig $p/(z-x)$ und $p/(z+x)$.

Aufgabe 14: Beweise: Sind je zwei der natürlichen Zahlen x, y und z teilerfremd, ist y ungerade und gilt $x^2+y^2=z^2$, so läßt sich die Zahl y so als Produkt teilerfremder natürlicher Zahlen m und n ($y=mn$) darstellen, daß für x und z gilt:

$$x=\frac{m^2-n^2}{2}; \quad z=\frac{m^2+n^2}{2}$$

Anleitung: Forme die Gleichung $x^2+y^2=z^2$ zunächst in $y^2=(z-x)(z+x)$ um! Beachte weiterhin die Aufgaben 13 und 11!

Aufgabe 15: Beweise: Sind m und n teilerfremde ungerade natürliche Zahlen, mit $m>n$, so sind

$$x=\frac{m^2-n^2}{2}, \quad y=mn \text{ und } z=\frac{m^2+n^2}{2}$$

ebenfalls natürliche Zahlen, die paarweise teilerfremd sind und der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ genügen.

Aufgabe 16: Wähle fünf geordnete Paare $(m; n)$ teilerfremder ungerader natürlicher Zahlen m und n mit $m>n$! Berechne für jedes geordnete Paar jeweils

$$x=\frac{m^2-n^2}{2}, \quad y=mn \text{ und } z=\frac{m^2+n^2}{2}!$$

Hinweis: Die so ermittelten Zahlentripel $(x; y; z)$ heißen pythagoreische Zahlen.

Wir beweisen den Unitätssatz der Primfaktorzerlegung.

Als Abschluß dieses Beitrages soll der Satz 3 indirekt bewiesen werden, und zwar auf dem Wege, der erstmals von dem Mathematiker *Zermelo* (1871 bis 1953) angegeben wurde.*
Indirekter Beweis: Angenommen, Satz 2 sei falsch. Dann gäbe es mindestens eine natürliche Zahl m mit $m>1$, für die mindestens zwei voneinander verschiedene normierte Primfaktorzerlegungen vorhanden sind. Die Menge derjenigen natürlichen Zahlen, für die es mindestens zwei voneinander verschiedene normierte Primfaktorzerlegungen gibt, ist also nicht leer und enthält folglich (als nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen) eine kleinste Zahl, die wir m_* nennen wollen.
Zwei verschiedene normierte Primfaktorzerlegungen von m_* seien $m_*=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ und $m_*=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Dabei sind nach Definition 4' $p_1, p_2, \ldots p_2, q_1, q_2, \ldots$ und q_s den Ungleichungen $p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots \leqq p_r$ und $q_1 \leqq q_2 \leqq \ldots \leqq q_s$ genügende Primzahlen.
Da beide Primfaktorzerlegungen voneinander verschieden sind, muß $s=r$ oder im Falle $s \neq r$ mindestens eine der Beziehungen $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$, ... und $p_r \neq q_s$ gelten.
Wir wollen die Fälle $p_1=q_1$, $p_1<q_1$ und $p_1>q_1$ unterscheiden.
1. Fall: Es sei $p_1=q_1$.
Aus $m_*=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ folgt durch Division aller Seiten durch p_1

(4) $$\frac{m_*}{p_1}=p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r=q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$$

Wegen $\frac{m_*}{p_1}<m_*$ und der obigen Minimalauswahl von m_* gibt es für die natürliche Zahl $\frac{m_*}{p_1}$ nur eine normierte Primfaktorzerlegung.
Also folgt aus (4) $s-1=r-1$ und damit $s=r$ sowie $p_2=q_2$, $p_3=q_3$, ... und $p_r=q_r$.
Da im jetzigen Falle zusätzlich $p_1=q_1$ gilt, müßten im Widerspruch zur möglichen Wahl beider normierter Primfaktorzerlegungen für m_* doch beide Zerlegungen übereinstimmen.
Also kann der erste Fall nicht eintreten.
2. Fall: Es sei $p_1<q_1$.
Als $p_1<q_1$ folgt durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit der natürlichen Zahl $q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$: $p_1 \cdot (q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots q_s) < q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s)$. Mittels $m_*=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ kann hierfür $p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s < m_*$ geschrieben werden. Wegen dieser letzten Ungleichung ist die Differenz

(5) $$d=m_*-p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$$

positiv, also eine von 0 verschiedene natür-

* Dieser Beweis ist abgedruckt in E. Lehmann: Übungen für Junge Mathematiker, Teil I Zahlentheorie, BG Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968.

liche Zahl. d genügt darüber hinaus der Bedingung $d<m_*$. Da laut getroffener Auswahl m_* die kleinste natürliche Zahl ist, die mehr als eine normierte Primfaktorzerlegung besitzt, kann d höchstens eine normierte Primfaktorzerlegung besitzen.

Nach Satz 1' (Existenzsatz der Primfaktorzerlegung) muß für $d>1$ d mindestens eine Primfaktorzerlegung besitzen, die sich dann auch nachträglich noch normieren läßt. Also gilt entweder $d=1$ oder d besitzt genau eine normierte Primfaktorzerlegung.

Mittels $m_* = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ folgt aus (5) $d = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$ und hieraus weiterhin $d=p_1 (p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r - q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s)$. Hiernach muß $d>1$ gelten und in der normierten Primfaktorzerlegung von d kommt der Primfaktor p_1 vor. Mittels $m_* = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ folgt wiederum aus (5) $d = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$ und hieraus weiterhin

(6) $d = (q_1 - p_1) q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$.

Indem der Faktor $q_1 - p_1$ in Primfaktoren zerlegt wird, entsteht aus (5) eine Primfaktorzerlegung von d, die sich nachträglich durch Umordnen noch normieren läßt. In der so erhaltenen eindeutig bestimmten normierten Primfaktorzerlegung von d muß, wie oben erkannt, der Primfaktor p_1 vorkommen. Da im jetzigen Falle $p_1 < q_1$ gilt und damit wegen der Normierung ebenfalls $p_1 < q_2, q_3, \ldots, q_s$, folgt aus (6) $p_1 \mid (q_1 - p_1)$. Mit einer geeigneten natürlichen Zahl k, für die wegen $p_1 < q_1$ $k>0$ gilt, muß $p_1 k = q_1 - p_1$ gelten. Durch Umstellen nach q_1 folgt hieraus

(7) $q_1 = (k+1) p_1$

Da für die natürliche Zahl $k+1 \geq 2$ gilt, könnte wegen (7) im Gegensatz zur Annahme q_1 keine Primzahl sein. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

3. Fall: Es sei $p_1 > q_1$.

Durch das Vertauschen der Indices r und s und gleichzeitiges Vertauschen der Symbole p und q geht die Betrachtung des 2. Falles in die des 3. Falles über. Also kann auch der dritte Fall nicht eintreten.

Da keiner der überhaupt möglichen Fälle $p_1 = q_1$, $p_1 < q_1$ und $p_1 > q_1$ eintreten kann, ist die Annahme, der Satz 2 sei falsch, selbst falsch. Der Satz 2 ist also wahr.

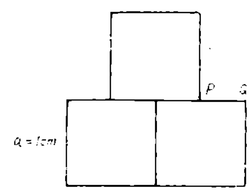
W. Träger

Zum siebten Male fand im vergangenen Jahr in Tansania ein Mathematikwettbewerb statt. Mathematikfachlehrer *H. Bartël*, zur Zeit Mbega/Tansania, stellte uns freundlicherweise das Material zur Verfügung. Studienrat *Th. Scholl*, Berlin, wählte aus den zehn gestellten Problemen sieben für die *alpha*-Leser aus. Die Lösungen geben wir in Heft 1/75 wieder.

7th Tanzanian Mathematics Contest

3rd Eastern African Regional Contest

▲1▲ Die nachstehende Abbildung stellt drei kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $a=1$ cm dar. Die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ beträgt $\frac{1}{2}$ cm. Berechne den Radius r der kleinstmöglichen Kreisscheibe, welche die drei Quadrate vollständig bedeckt!



▲2▲ Es ist die kleinste natürliche Zahl zu bestimmen, die bei Division durch 10 den Rest 9, bei Division durch 9 den Rest 8, bei Division durch 8 den Rest 7 – und so fort – und schließlich bei Division durch 2 den Rest 1 läßt.

▲3▲ In dem Schema

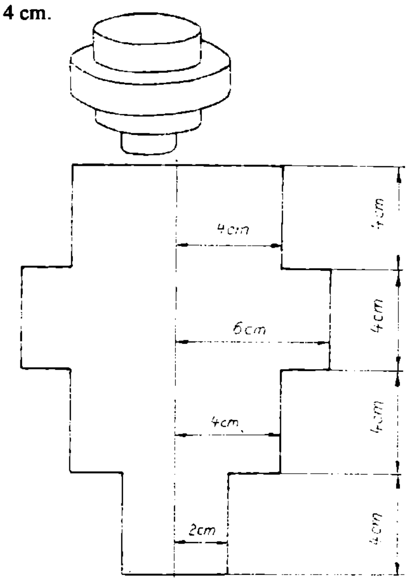
$$\begin{array}{r} \text{s e t} \\ \text{s o m e} \\ +\ \text{m o r e} \\ +\ \text{s u m s} \\ \hline \text{t e s t s} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Grundziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Für den Buchstaben „s" ist die Ziffer 9, für den Buchstaben „o" die Ziffer 0 zu setzen.

▲4▲ Wenn von einer aus sieben Gliedern bestehenden offenen Kette das dritte Glied genau in der Mitte durchgezwickt wird, verbleiben zwei einzelne halbe Glieder, zwei zusammenhängende und nochmals vier zusammenhängende Glieder. Nun ist es möglich, ein Kettenglied (die beiden Hälften des geteilten Gliedes), zwei Kettenglieder, drei $(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ oder vier oder fünf $(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ oder sechs $(2+4)$ oder sieben (alle) Kettenglieder als Wägestücke zu benutzen.

Welche zwei Glieder einer aus 23 Gliedern bestehenden offenen Kette sind in der Mitte durchzuzwicken, damit 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder ... oder 22 oder 23 Glieder dieser Kette als Wägestücke benutzt werden können?

▲5▲ Die beiden nachstehenden Abbildungen zeigen das Schrägbild sowie den Längsschnitt eines Regenmessers, der so konstruiert wurde, daß er sowohl bei leichten als auch bei schweren Regenfällen verwendbar ist. Jeder Teilabschnitt des oben offenen Regenmessers hat die Form eines 4 cm hohen Kreiszylinders. Die inneren Radien der einzelnen Zylinder betragen (siehe Abb.) von unten beginnend 2 cm, 4 cm, 6 cm und 4 cm.



Wenn der gefallene Regen in einem beliebigen anderen Auffanggefäß mit durchgehend lotrechter Innenwand eine Höhe von x cm erreicht hat, so möge die Höhe des im Regenmesser aufgefangenen Regens y cm betragen. Stelle die Höhe y des aufgefangenen Regens in Abhängigkeit von x in einem rechtwinkligen Koordinatensystems für $0 \leq x \leq 14$ graphisch dar!

▲6▲ Die Zahlen 2, 9 und 12 lassen sich durch Terme, in denen die Ziffer 7 jeweils genau viermal vorkommt, wie folgt darstellen:

$2=(7+7):\sqrt{7\cdot 7}$, $9=(7+7):7+7$, $12=(77+7):7$. Die Zahlen 7, 8, 11 und 14 sind auf ähnliche Weise durch Terme darzustellen, in denen die Ziffer 7 jeweils genau viermal vorkommt.

▲7▲ Im *Chiu-Fußball-Klub* haben die aktiven Fußballspieler einen Mitgliedsbeitrag von je 5 Shs, die gewöhnlichen Mitglieder von nur je 2 Shs zu entrichten. Der Kassierer, der für Beiträge insgesamt 476 Shs vereinnahmt hat, weiß, daß die Anzahl der aktiven Spieler 60 nicht überschreitet und die Anzahl der gewöhnlichen Mitglieder kleiner als 100 ist. Es sind die möglichen Anzahlen an aktiven Spielern und gewöhnlichen Mitgliedern dieses Klubs zu berechnen.

Angenommen, im folgenden Jahr werden 42 neue Mitglieder in den Klub aufgenommen und zugleich scheiden 25 alte Mitglieder aus. Welchen Maximalbetrag aus den Mitgliedsbeiträgen könnte der Kassierer dann einnehmen?

Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen?

Leseprobe

Die gesamte Geometrie kann man analytisch darlegen, beginnend damit, daß man einem Punkt der Geraden eine Zahl (x) zuordnet, einem Punkt der Ebene ein Zahlenpaar (x, y) und einem Punkt im Raum drei Zahlen (x, y, z). Eine Kreisfläche vom Radius 5 mit dem Mittelpunkt im Punkt (2, 3) ist dann nichts anderes als die Menge der Zahlen (x, y), die der Ungleichung

$$(x-2)^2+(y-3)^2 \leq 5^2$$

genügen. Eine Ebene im Raum, die durch den Koordinatenursprung geht, ist einfach die Menge der Zahlentripel (x, y, z), die der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

genügen, wobei a, b und c bestimmte konstante Zahlen sind. Wichtig ist die völlige Äquivalenz des geometrischen und des analytischen Standpunktes: Geometrische Gebilde lassen sich analytisch durch Gleichungen oder Ungleichungen beschreiben, während sich analytische Beziehungen in Form von Kurven, Flächen oder Figuren darstellen lassen. Das analytische Herangehen an geometrische Aufgaben gibt z. B. dem Arzt die Möglichkeit, verschiedene Daten eines Menschen anschaulich darzustellen. So kann beispielsweise die Körpergröße auf einer Geraden abgetragen werden.

Bei Messung der Körpergröße h und des Gewichts p entspricht jedem Menschen ein Punkt in der Ebene mit den Koordinaten (h, p). Wird noch zusätzlich das Alter t angegeben, so erfolgt die Kennzeichnung im Raum durch einen Punkt mit den Koordinaten (h, p, t).

Doch wie kann man verfahren, wenn der Mensch durch viele Parameter charakterisiert wird: Körpergröße h, Gewicht p, Alter t, Brustumfang Q, Druckkraft der linken und rechten Hand f_1 und f_2, Sehschärfe r? Vorstehend sind sieben Größen vorgegeben worden. Eine anschauliche geometrische Darstellung scheint nicht mehr möglich zu sein.

Tatsächlich ist jedoch eine analoge geometrische Betrachtung weit verbreitet: Man faßt die Menge der Kombinationen von vier Zahlen (x, y, z, t) als Koordinaten von Punkten im vierdimensionalen Raum auf; die Kombinationen von sieben Zahlen (x, y, z, t, u, v, w) werden als Koordinaten von Punkten im siebendimensionalen Raum aufgefaßt. Derart kann man alle Kombinationen von n Zahlen (x_1, x_2, ..., x_n) als Punkte im n-dimensionalen Raum ansehen.

Solch eine Auffassung wird bei jedem, der erstmalig damit in Berührung kommt, auf Befremden stoßen: Was bedeutet vierdimensionaler Raum? Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen? Wir nehmen ein dünnes Glasrohr, dessen Durchmesser gerade so groß ist, daß eine Ameise hindurchpaßt, und lassen das Insekt hinein. Wenn die Ameise zurück will, muß sie rückwärts kriechen. Lassen wir von der anderen Seite noch eine zweite Ameise hinein, so können die beiden Ameisen nicht aneinander vorbei (Bild 1). So traurig ist das Leben im eindimensionalen Raum – auf einer Linie!

Bild 1

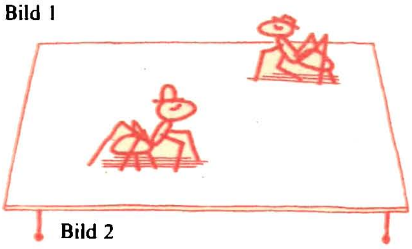


Bild 2

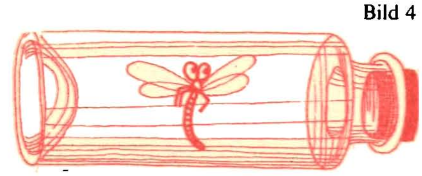
Nun lassen wir die zwei Ameisen auf dem Tisch oder der Oberfläche eines Kürbis umherspazieren. Sie können sich in beliebiger Richtung bewegen, Hindernisse umgehen usw. (Bild 2). Für sie bedeutet das Leben auf einer Fläche – im zweidimensionalen Raum – bereits die große Freiheit. Allerdings gibt es auch hier gewisse Schwierigkeiten: Zwei Ameisen, die z. B. durch einen Bach voneinander getrennt sind, können niemals zusammenkommen. Man sagt, daß ein Hahn, den man in einen mit weißer Farbe gezogenen Kreis stellt, unentschlossen darin herumlaufen würde und nicht darauf käme, die Kreislinie einfach zu überschreiten. (Bild 3)

Bild 3

Wenn man sich in die Lage des Hahnes hineindenkt, kann man sich vorstellen, daß tatsächlich allerhand Auffassungsgabe und Mut dazugehören, um aus dem zweidimensionalen Raum in den dreidimensionalen zu gehen.

Eine Libelle hat es schon besser als eine Ameise – sie kann einen Bach einfach überfliegen. Die Libelle lebt im dreidimensionalen Raum, und eine geschlossene Linie auf einer Fläche stellt für sie kein Hindernis dar. Setzt man die Libelle jedoch in ein Glas und deckt es zu, so sitzt auch sie in der Klemme: Sie kann nicht herausfliegen (Bild 4). Eine geschlossene Fläche (die Oberfläche des Glasgefäßes) teilt ihren dreidimensionalen Lebensraum in zwei Teile – ein Inneres und ein Äußeres –, ähnlich wie eine geschlossene Kurve den Lebensraum der Ameise – die Fläche – in zwei Teile zerlegt.

Bild 4



Übrigens wird eine Fläche nicht durch jede daraufgezeichnete geschlossene Kurve in zwei Teile zerlegt, so daß die Ameise nicht von einem Teil in den anderen käme, ohne die Kurve zu überschreiten. Als Beispiel kann der Kringel im Bild 5 dienen: Die gestrichelte Linie zerlegt seine Oberfläche in zwei Teile, die ausgezogene Linie jedoch nicht.

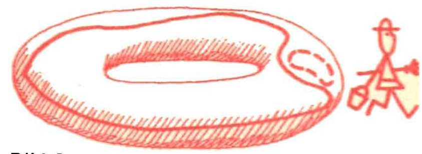


Bild 5

Überlege selbst einmal: Wie sieht es auf der Kugel mit drei Griffen im Bild 6 oder auf dem *Möbiusschen Band* aus? Allerdings gibt es auf jeder Fläche geschlossene Kurven, die sie in zwei Teile, ein Äußeres und ein Inneres zerlegen. Das ist für uns hier wesentlich.

Bild 6

Stelle dir nun ein Wesen vor, das im vierdimensionalen Raum lebt. Für ein solches Tier ist das geschlossene Glas kein Hindernis, es zerlegt seinen Lebensraum nicht in zwei Teile. Das Wesen „überfliegt" das Glas einfach, indem es sich der vierten Dimension bedient.

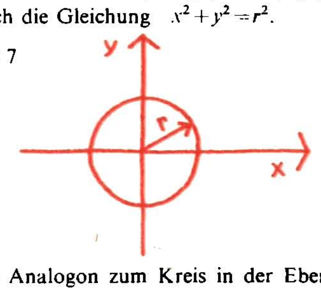
Beachtet, liebe Leser, daß wir selbst nicht im dreidimensionalen, sondern im vierdimensionalen Raum leben; seine Koordinaten sind die drei Ortskoordinaten x, y, z und die Zeit t. Diese Koordinaten sind allerdings nicht gleichwertig: Während für x, y und z beliebige Werte zulässig sind, können wir uns in der Zeit t nur vorwärts bewegen. In diesem vierdimensionalen Raum gelangen wir aus einem geschlossenen Zimmer heraus, ohne die Tür oder die Fenster zu benutzen, wenn wir die vierte Koordinate – die Zeit – benutzen. Bewegen wir uns nur in dieser vierten Koordinate und lassen wir die drei andern unverändert, so können wir uns irgendwann in einer anderen Situation befinden und aus dem Zimmer heraustreten, z. B. wenn das Haus auseinanderbröckelt und die Zimmerwände für uns keine Grenze mehr sind.

Dieser Zustand braucht nicht sehr bald einzutreten, uns geht es nur um die prinzipielle Möglichkeit.

Die Situation wird noch deutlicher, wenn wir zulassen, daß wir uns auf der Zeitachse auch nach der anderen Seite, rückwärts, bewegen können. Denselben Punkt (x, y, z) innerhalb des verschlossenen Zimmers haben früher nicht die Wände, der Fußboden und die Decke eingeschlossen, sie waren noch gar nicht da. Bewegen wir uns also zunächst nur auf der Zeitachse zurück, so können wir zu einem gewissen Zeitpunkt aus dem verschlossenen Zimmer heraustreten.

Wir wollen noch etwas bei den mehrdimensionalen Welten verbleiben. In der Ebene (im zweidimensionalen Raum) ist eine Kreislinie mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung (Bild 7) gegeben durch die Gleichung $x^2+y^2=r^2$.

Bild 7



Das Analogon zum Kreis in der Ebene ist die Kugelfläche im dreidimensionalen Raum. Liegt der Mittelpunkt im Koordinatenursprung und wird der Radius mit r bezeichnet (Bild 8), so lautet die Gleichung der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=r^2$.

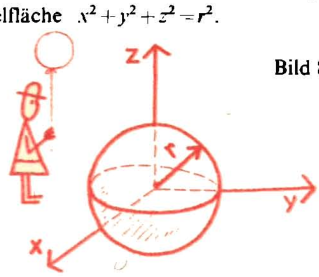


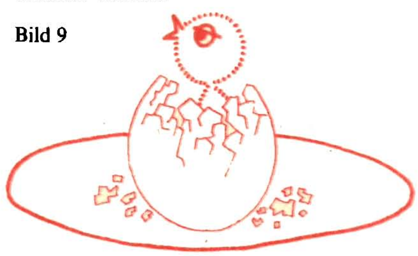
Bild 8

Geht man vom dreidimensionalen zum vierdimensionalen Raum über, so liegt es nahe, als Kugelfläche mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung die „dreidimensionale Fläche" zu bezeichnen, die der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2+t^2=r^2$$ genügt.

Ein Küken, das im dreidimensionalen Raum lebt, kann nicht aus dem Ei schlüpfen, ohne die Schale aufzupicken. Genausowenig kann ein vierdimensionales Küken aus einer vierdimensionalen Kugel einfach heraustreten. Um aus der vierdimensionalen Kugel herauszukommen, muß sie das Küken aufpicken. Kann es sich jedoch im fünfdimensionalen Raum bewegen, so könnte es aus einer vierdimensionalen Kugel einfach heraustreten (Bild 9). Die Eierschale müßte aber in diesem Falle eine fünfdimensionale Kugelfläche sein und keine vierdimensionale, denn die letztere könnte das Embryo nicht von allen Seiten bedecken. (Genausowenig wie eine zweidimensionale Kreislinie ein dreidimensionales Küken einhüllen kann.) Das fünfdimensionale Embryo in einer vierdimensionalen Eierschale würde von seinen fünfdimensionalen Feinden aufgefressen sein, bevor es überhaupt zum Küken heranwachsen könnte.

Bild 9



Natürlich bereitet es Schwierigkeiten, sich eine vierdimensionale Kugel praktisch vorzustellen oder diese aufzuzeichnen, wenn man nicht eine Darstellung durch eine Gleichung benutzt. Wenn man es genau nimmt, zeichnest du aber auch eine dreidimensionale Kugel nicht in den dreidimensionalen Raum, sondern nur die Projektion dieser Kugel in die Ebene des zweidimensionalen Zeichenpapiers. Ein beliebiges dreidimensionales Gebilde kannst du durch Grundriß, Aufriß und Seitenriß, also in drei Projektionen eindeutig im Zweidimensionalen darstellen. Wer hindert dich daran, ein vierdimensionales Gebilde in den dreidimensionalen Raum oder in die Ebene zu projizieren?

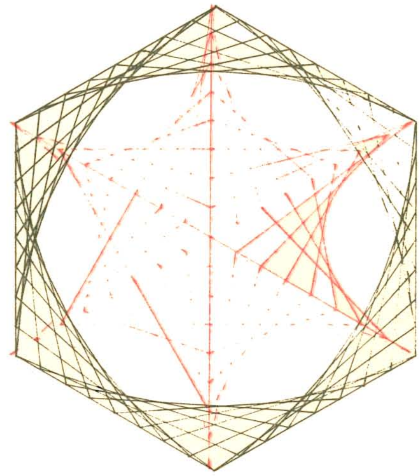
Grund-, Auf- und Seitenriß einer dreidimensionalen Kugel sind Kreise auf dem Zeichenpapier. Die entsprechenden senkrechten Parallelprojektionen einer vierdimensionalen Kugel sind vier dreidimensionale Kugeln, die man dann nochmals auf Zeichenpapier projizieren kann. Und wer Lust hat, noch mehr aus diesem interessanten Buch zu erfahren, der greife zu:

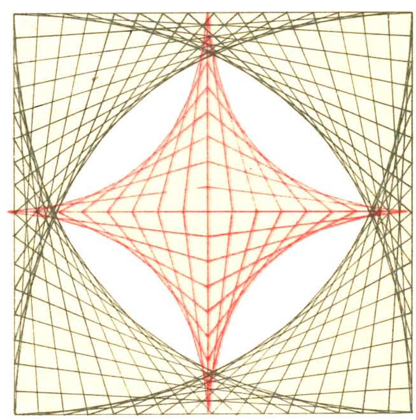
J. CHURGIN

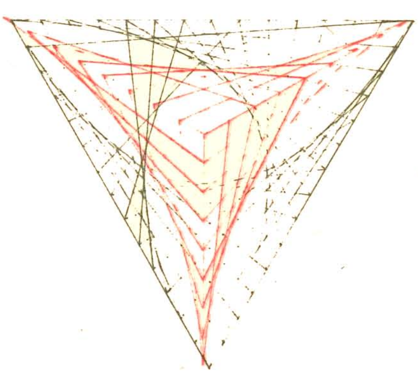
Formeln – und was dann?

251 S., zahlreiche Bilder Preis: 9,00 M
VEB Verlag Technik Berlin

Mit Zirkel und Zeichendreieck







Diese formschönen Korbbogenfiguren stellte das *Institut für Lehrerbildung Quedlinburg* zur Verfügung.

Über das Falten einer Landkarte

Das Problem

Auf wieviel Arten kann man eine Landkarte falten?

Unsere *pxq-Karte* ist ein sehr dünner elastischer Bogen Papier, der durch $p-1$ senkrechte und $q-1$ waagerechte Falten in $p \cdot q$ gleichgroße Felder eingeteilt ist.

Eine *pxq-Faltung* ist irgendeine Anordnung der Karte, in der alle Felder genau übereinander liegen. Dies wird durch Knicken an den Falten, Verbiegen und Glattstreichen (um die Felder ineinander zu schachteln), aber nicht durch Zerreißen, erreicht.

Das *Deckblatt* ist eine Seite – etwa die Oberseite – eines speziellen Feldes (Feld 1, in den Diagrammen mit einem Punkt bezeichnet): Es ist immer im Raum festgehalten, um zu sichern, daß wir nicht zwei verschiedene Diagramme für dieselbe Faltung erhalten. Uns interessiert die Gesamtzahl der möglichen Faltungen einer gegebenen *pxq-Kante* und wir nennen diese Gesamtzahl $G(p, q)$.

Man betrachte als Beispiel den Londoner U-Bahn-Streckenplan – dieser besteht nur aus drei hintereinanderliegenden Feldern – für den $p = 3$ und $q = 1$ ist. Es gibt sechs Möglichkeiten, ihn zu falten; diese sind hier von der Karte aus gesehen dargestellt (Bild 1)

Nun, diese Karte ist 1dimensional: Wir nennen sie eine *p-Karte* ($p = 3$) und sprechen von der Gesamtzahl $G(p)$ der *p-Faltungen* ($G(3) = 6$). $G(p)$ ist recht schwierig zu bestimmen – keine Formel ist dafür bekannt – und so wollen wir dieser Zahl in unserem Artikel näherkommen. Wir werden sehen, wie $G(p)$ durch Abzählen der Faltungen bestimmt werden kann.

Das Programm

Um das Landkartenfalten für den Rechenautomaten aufzubereiten, müssen wir es erstens in eine abstrakte Form bringen (denn ein Computer kann nur mit Symbolen arbeiten) und zweitens die Zählmethode in einfache Schritte, die nicht schwieriger als die Grundrechenarten sind, zerlegen.

Es ist klar, daß eine p-Faltung durch die Anordnung der Felder der Karte vollständig bestimmt ist. Wenn wir die Felder in natürlicher Reihenfolge mit $1, 2, \ldots, p$ numerieren, so kann eine abstrakte Beschreibung einer p-Faltung einfach eine Liste der Feldnummern sein, die die Reihenfolge der Felder in der Faltung beschreibt: Dies ist eine Permutation von $1, 2, \ldots, p$. Es gibt jedoch viele Möglichkeiten, eine Permutation zu erzeugen, und wir werden sehen, daß der auf der Hand liegende Weg nicht immer der für unseren Zweck beste ist.

Wir werden die Menge aller p-Faltungen durch *Induktion* konstruieren, d. h., wir werden sagen, was eine 1-Faltung ist und unter der Annahme, daß irgendein Genie für uns die Menge aller $(r-1)$-Faltungen bestimmt hat, die Menge aller r-Faltungen konstruieren und diesen Induktionsschritt dann für $r = 2, 3, \ldots, p$ ausführen. Die Idee des Induktionsschrittes ist einfach, ein neues Feld r an das Ende des Feldes $r-1$ anzubauen und dieses neue Feld der Reihe nach in jede Lücke, die in derselben Falte wie Feld $r-1$ liegt, einzufügen. (Eine Lücke ist der Raum zwischen zwei in der Faltung aufeinanderliegenden Feldern, eine Falte ist der Raum zwischen zwei Feldern mit gemeinsamer Kante.) Man betrachtet Bild 2a, wo wir eine Faltung halbiert und eine Falte herausgegriffen haben. Auf diese Art entstehen aus der 7-Faltung in Bild 2b vier neue 8-Faltungen.

Der Computer kann diese Diagramme natürlich nicht sehen, aber man kann mittels unserer Gedankengänge ein recht schönes und einfaches ALGOL-Programm schreiben, das dann für den Rechenautomaten verständlich ist. Dieses kann durch technische Maßnahmen, wie Handprogrammierung in der Maschinensprache eines speziellen Computers, wesentlich verbessert werden. Zu einer weiteren Verbesserung des Programms gelangt man, wenn man nur die subnormalen Faltungen zählt.

Eine *normale* Faltung liegt vor, wenn das Deckblatt oben liegt. In diesem Fall muß das erste Falten (zwischen Feld 1 und Feld 2) nach unten geschehen. Falls das darauffolgende Falten (zwischen Feld 2 und Feld 3) ebenfalls nach unten geschieht, nennen wir die Faltung *subnormal*. In der Aufstellung der 3-Faltungen am Anfang des Artikels sind die ersten beiden Faltungen normal und die erste ist subnormal. Es zeigt sich, daß dann genau jede p-te p-Faltung normal ist und genau jede $2p$-te subnormal.

Könnt ihr diese Feststellung beweisen?

Wenn wir nun das Programm so gestalten, daß es nur subnormale Faltungen konstruiert, werden Schritte eingespart und die Rechenzeit verringert sich auf den $2p$-ten Teil der ursprünglichen Rechenzeit.

Eine Reihe von Ergebnissen, die mit unserem Programm errechnet wurden, sind in der linken Spalte von Tabelle 1 zu finden. Das Programm ist bis $p = 24$ gelaufen: Es gibt

$G(24) = 258\,360\,586\,368$ Faltungen einer 1-dimensionalen Karte mit 24 Feldern.

Die Größe von $G(p)$

Da es keine Formel zur Berechnung von $G(p)$ gibt, fragen wir als nächstes nach einer groben Abschätzung für große Werte von p. Dazu benötigen wie einen Satz aus der Analysis, genannt *Theorem von Pólya-Szegö*.

Wir nehmen an, daß eine Funktion $f(p)$ mit positiven Werten vorliegt und daß für alle p und q gilt $f(p+q) \geqq f(p) f(q)$. Dann sagt dieses Theorem aus, daß mit wachsendem p die p-te Wurzel aus $f(p)$ sich einer Zahl l beliebig annähert, dabei jedoch nie größer als diese wird:

$$\sqrt[p]{f(p)} \to l \text{ und } \sqrt[p]{f(p)} \leqq l.$$

Für große Werte von p ist demnach $f(p) \approx l^p$. (Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f(p) = 2^p$, da $2^{p+q} = 2^p 2^q$ ist. Für diese Funktion ist offensichtlich $l = 2$.)

Da $G(p)$ selbst nicht die geforderten Eigenschaften hat, definieren wir $G'(p)$ als Gesamtzahl der normalen p-Faltungen: $G'(p) = \frac{G(p)}{p}$. Wenn nun irgendein Paar von normalen p- und q-Faltungen gegeben ist, so können wir eine normale $(p+q)$-Faltung herstellen, indem wir einfach die eine an das Ende der anderen anhängen; z. B. können wir für $p = 4$, $q = 3$ eine normale 4- und eine normale 3-Faltung aneinandersetzen und somit eine normale 7-Faltung erhalten:

Es gibt also mindestens $G'(p) G'(q)$ normale $(p+q)$-Faltungen:

$G'(p+q) \geqq G'(p) G'(q)$. Im *Theorem von Pólya-Szegö* können wir deshalb $f = G'$ setzen und folgern, daß $G'(p) \approx l^p$ für eine gewisse Zahl l ist. Da $G(p) = pG'(p)$ ist, wird auch $G(p) \approx l^p$ – der Faktor p ist zu klein, um uns zu interessieren.

Bild 2a

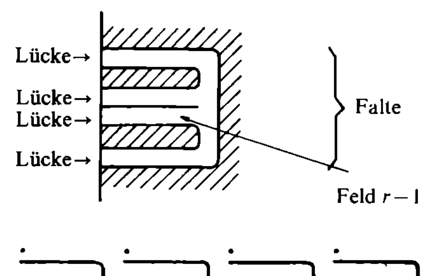
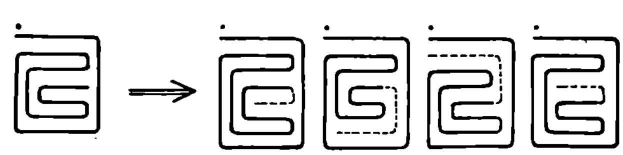


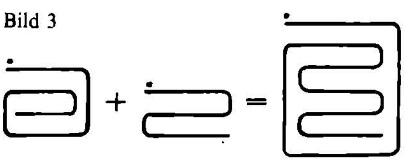
Bild 1

Bild 2b



Wir wissen jetzt, daß l existiert und wollen nun seinen Wert finden. Wir werden zunächst versuchen, l von unten einzuschränken. Man sieht leicht, daß $l \geqq 2$ ist; zu einer gegebenen p-Faltung können wir zwei verschiedene $(p+1)$-Faltungen herstellen, indem wir das Feld $p+1$ direkt über bzw. unter dem Feld p einfügen.

Bild 3



Eine bessere Abschätzung erhalten wir, wenn wir das Theorem von Pólya-Szegö anwenden, das ja besagt, daß die p-te Wurzel aus $G(p)$ kleiner oder gleich l ist. Für $p=24$ finden wir

$$l \geqq \sqrt[24]{10\,765\,024\,432} = 2{,}618\ldots$$

Nun wollen wir versuchen, l von oben einzuschränken. Dafür benötigen wir die Catalanischen Zahlen C_n, die definiert sind als Anzahl der Möglichkeiten, n Paare von Klammern zu setzen; z. B. gibt es für $n=3$ $C_3=5$ Möglichkeiten:

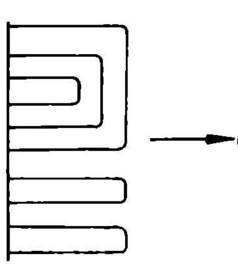
((())), (()()), (())(), ()(()), ()()()

Die ersten Werte von C_n sind in der Tabelle angegeben:

n	0	1	2	3	4	5	6
C_n	1	1	2	5	14	42	132

Unter Benutzung von Hilfsmitteln aus der Analysis, speziell der Theorie der unendlichen Reihen, erhält man $C_n \approx 4^n$.

Nun wenden wir unsere Kenntnisse über C_n bei der Einschränkung von l und $G(p)$ an. Wenn eine Faltung von p Feldern gegeben ist, schneiden wir sie in der Mitte durch und betrachten nur eine Hälfte. Unter Vernachlässigung des eventuellen freien Endes entspricht diese Seite einer Klammerung von $\frac{1}{2}p$ Paaren, wobei jedes Klammerpaar einem Paar von Feldern mit gemeinsamer Falte entspricht:



((())) ( ) ( )

Bild 4

Folglich gibt es höchstens $C_{p/2}$ rechte Seiten und eine gleiche Anzahl linker Seiten für eine Faltung, demnach ist

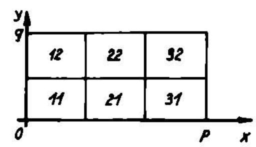
$$G(p) \leq (C_{p/2})^2 \approx 4^p, \text{ also } l \leq 4.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, daß $2{,}618^p \leq G(p) \leq 4^p$, was noch nicht sonderlich gut ist. Durch weitere Untersuchungen erhält man $l=3{,}5018 \pm 0{,}0001$ oder rund $3\frac{1}{2}$.

Zweidimensionale Karten

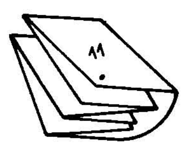
Das ursprüngliche Problem, das darin bestand, eine $p \times q$-Karte zu falten, war eigentlich zweidimensional, d. h. p und q konnten beide größer als 1 sein. Als Beispiel diene die hier abgebildete 3×2-Karte:

Bild 5



Wir nehmen an, es wäre eine Faltung dieser Karte gegeben:

Bild 6



p \ q	1	2	3	4	5
1	1				
2	2	8			
3	6	60	1368		
4	16	320	15552	300608	
5	50	1980	201240	6139920	18608660(
6	144	10512	2016432		–
7	462	60788	21582624		
8	1392	320896	–		–
9	4536	1787904	–		–
10	14060	9381840	–	–	–

Wir können sie in zwei Richtungen parallel zur x- bzw. y-Achse zerschneiden. Der Schnitt parallel zur x-Achse besteht aus q ineinandergeschachtelten p-Faltungen und der Schnitt parallel zur y-Achse aus p ineinandergeschachtelten q-Faltungen:

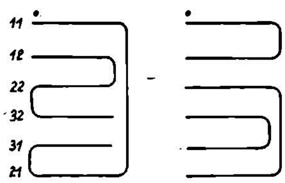


Bild 7

Schnitt parallel zur x-Achse — Schnitt parallel zur y-Achse

Solch ein Paar von eindimensionalen Schnitten bestimmt eindeutig die zweidimensionale Faltung. Darüber hinaus entspricht *jedes* solches Paar von Schnitten (in denen die Falten an den richtigen Stellen liegen) einer $p \times q$-Faltung.

Wenn wir dies wissen, können wir das eindimensionale Programm auf das zweidimensionale Problem ausdehnen: Wir falten gleichzeitig ein Paar von $p \times q$-Karten, von denen die eine in q und die andere in p Stücke zerschnitten ist. Wenn wir ein neues Feld in einer speziellen Faltung einsetzen, setzen wir es nur in die Lücken ein, die in *beiden* Schnitten zu derselben Falte gehören. Dabei kann es natürlich passieren, daß wir keine neue $p \times q$-Faltung konstruiert haben.

Wir geben die Ergebnisse in Tabelle 3 an. Für die 3×2-Karte gibt es 60 Faltungen, von denen $10 = \frac{60}{3 \cdot 2}$ normal sind. Die ermittelten Zahlen wachsen sehr schnell.

H. F. Lunnon

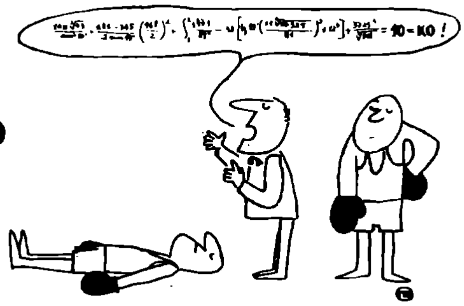
(aus: Mathematical Spectrum 2/72)

Übersetzt und bearbeitet von Dipl.-Math. Claus-Peter Helmholz, Leipzig

Dietrich Bauer, ZB 4/67

100 Jahre metrisches System

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. März 1975

▲5▲1289 *Kerstin* erhält von ihrer Mutter 10 Mark. Sie soll Brot, Kuchen, Fleisch und Wurst einkaufen. Für Brot und Kuchen bezahlte *Kerstin* zusammen 2,54 M. Wieviel Mark hatte sie für Fleisch und Wurst zu bezahlen, wenn sie der Mutter nach dem Einkauf 60 Pf zurückgab?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch Altenburg

▲5▲1290 Eine Arbeitsgemeinschaft *Junge Gärtner* verkaufte im Monat April 70 Narzissen zu je 15 Pf und 55 Tulpen zu je 20 Pf das Stück. Von den Einnahmen sollte eine Heckenschere gekauft werden. Reichten die Einnahmen aus, wenn eine Heckenschere 22,20 M kostet? *Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg*

W 5■1291 *Wolfgangs* Eltern kauften für das Wohnzimmer neue Gardinen. Sie bezahlten für Stores und Dekostoff zusammen 463,35 Mark. Der Dekostoff kostete 174,55 M. Wieviel Meter Stores kauften sie, wenn 1 m Store 36,10 M kostete?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5■1292 Ein Zirkus gab im Verlaufe der letzten Saison 200 Vorstellungen, die stets ausverkauft waren. Die Anzahl der Sitzplätze im Zirkuszelt ist dreimal so groß wie der vierte Teil der Anzahl der gegebenen Vorstellungen.

a) Wieviel Programmzettel wurden während dieser Saison verkauft, wenn der vierte Teil der Zirkusgäste einen Programmzettel erwarb?

b) Wieviel Mark wurden während dieser Saison aus den Eintrittspreisen für die Tierschau zusätzlich eingenommen, wenn sie von der Hälfte der Zirkusgäste besucht wurde und der Eintrittspreis 30 Pf. betrug?

Brigitte Weyh, OS Fambach, Kl. 7

W 5*1293 In dem Schema

$$\begin{array}{r} U\ W\ E \\ U\ T\ E \\ \hline T\ R\ E\ U \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Sch.

W 5*1294 Ein *magisches Quadrat* ist ein quadratisch angeordnetes Schema aus natürlichen Zahlen, deren Summe für jede Zeile, Spalte und Diagonale den gleichen Wert hat.

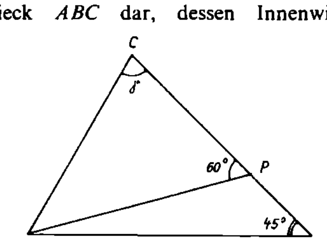
Albrecht Dürer stellte auf seinem Kupferstich „Melancholie" ein magisches Quadrat dar, das in den beiden mittleren Feldern der unteren Zeile die Jahreszahl 1514 der Entstehung dieses Kunstwerkes enthält.

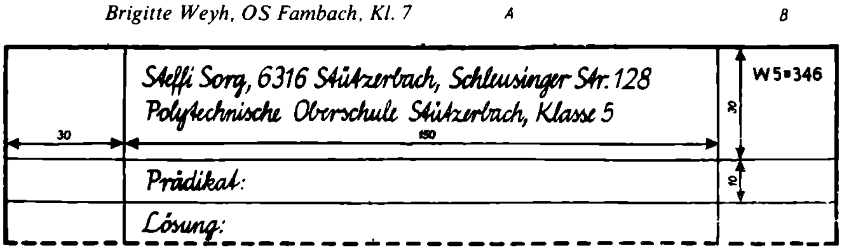
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Wie läßt sich durch Veränderung von höchstens sieben Zahlen ein solches magisches Quadrat herstellen, das in den beiden mittleren Feldern der unteren Zeile an Stelle von 1514 die Jahreszahl 1974 enthält? In diesem Falle darf die konstante Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonale einen anderen Wert als im abgebildeten Schema haben.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

▲6▲1295 Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck *ABC* dar, dessen Innenwinkel





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W■10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

$\sphericalangle ABC = \beta = 45^\circ$ beträgt und auf dessen Seite $\overline{BC}$ ein innerer Punkt P so festliegt, daß $3 \cdot \overline{BP} = \overline{BC}$ und $\sphericalangle APC = \delta = 60^\circ$ gilt. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$ zu berechnen *Ch. Lerche, Hähnichen*

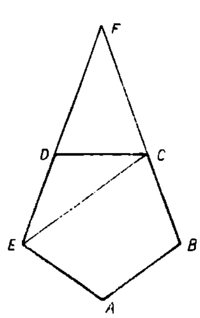
▲6▲1296 Zur Vorbereitung auf die nächste Mathematik-Olympiade wurden den Teilnehmern einer Arbeitsgemeinschaft *Junge Mathematiker* 30 Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Mathematik gestellt. Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen war um 5 größer als die Anzahl der gestellten Knobelaufgaben. Die Anzahl der Geometrieaufgaben war um 2 kleiner als die Anzahl der Knobelaufgaben. Wieviel Knobelaufgaben, Geometrieaufgaben und Gleichungen waren zu lösen? *Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg*

W 6 ■ 1297 Das Produkt aus drei natürlichen Zahlen beträgt 1120. Dabei ist der zweite Faktor um 2 größer als die Hälfte des ersten Faktors und der dritte Faktor um 2 größer als die Hälfte des zweiten Faktors. Wie lauten diese drei Zahlen? *H. Wallner, Bergen*

W 6 ■ 1298 Großmutter hat Geburtstag. Fünf Enkelkinder kommen zu Besuch. Die Geburtstagstorte wurde in 24 gleichgroße Stücke geteilt. *Axel* verzehrte $\frac{1}{8}$, *Bernd* $\frac{1}{4}$, *Christian* $\frac{5}{48}$, *Dieter* $\frac{1}{6}$ und *Ernst* $\frac{3}{16}$ der Torte. Die Großmutter aß zwei von den eingeteilten 24 Stücken. Wieviel eingeteilte Stücke Torte blieben übrig? *M. Hanke, Kl. 6, Karl-Marx-Stadt*

W 6*1299 Es sind alle geordneten Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen mit $m<n$ zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
a) Jede Zahl eines solchen geordneten Zahlenpaares soll zweistellig sein.
b) Die zweite Zahl eines solchen geordneten Zahlenpaares geht aus der ersten Zahl durch Vertauschen ihrer Ziffern hervor.
c) Die Summe der beiden Zahlen jedes geordneten Paares soll bei Division durch 5 den Rest 3 ergeben. *Sch.*

W 6*1300 Die abgebildete Figur stellt ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ dar. Der Schnittpunkt der Geraden BC und ED wurde mit F bezeichnet, und es wurden die Punkte E und C miteinander verbunden.

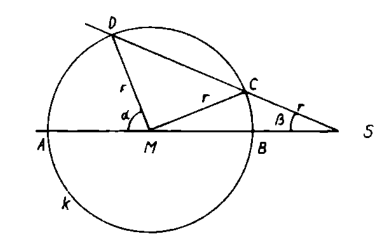


Untersuche, ob $\overline{EC}$ kürzer oder länger als $\overline{DF}$ oder genau so lang wie $\overline{DF}$ ist. Begründe deine Feststellung! *Sch.*

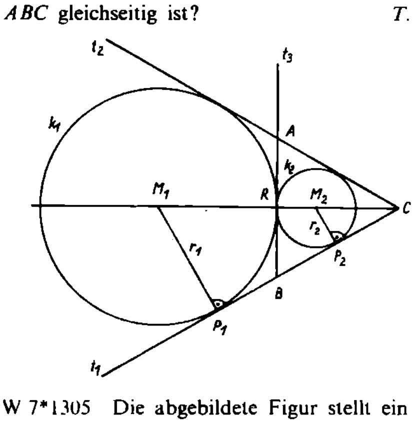
▲7▲1301 Es sollen m Gegenstände in n gleichartigen Kartons verpackt werden. Legt man jeweils fünf dieser Gegenstände in je einen dieser Kartons, so verbleiben für den letzten Karton nur noch zwei Gegenstände. Werden hingegen in jedem vorhandenen Karton jeweils vier Gegenstände verpackt, so bleibt ein Gegenstand übrig, der nicht mehr in einem Karton verpackt werden kann. Wieviel Gegenstände und wieviel Kartons sind vorhanden? *Oberlehrer Mathematikfachlehrer K. Becker, Lübtheen*

▲7▲1302 In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei E die Mitte von $\overline{AB}$ und F die Mitte von $\overline{CD}$. Das Trapez ist aus den Diagonalen $\overline{AC} = e = 7$ cm, $\overline{BD} = f = 11$ cm, der Strecke $\overline{EF} = 5{,}5$ cm und der Seite $\overline{AB} = a = 10{,}5$ cm zu konstruieren. *Sch.*

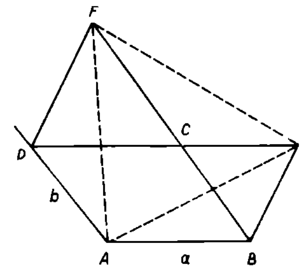
W 7 ■ 1303 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dar. Die Sekante CD schneidet die Zentrale AB im Punkt S so, daß $\overline{CS} = r$ gilt. Der Winkel $\sphericalangle BSC = \beta$ ist durch den Winkel $\sphericalangle AMD = \alpha$ auszudrücken. *Sch.*



W 7 ■ 1304 Die abgebildete Figur stellt zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 dar, wobei $r_1 > r_2$ ist. Die beiden Kreise berühren sich von außen in dem Punkt R. Von den Tangenten t_1, t_2 und t_3, die beiden Kreisen gemeinsam sind, wird ein Dreieck ABC bestimmt. Wieviel mal so lang wie der Radius r_2 muß der Radius r_1 sein, wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist? *T.*



W 7*1305 Die abgebildete Figur stellt ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = \alpha > 90^\circ$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$ dar. Es wurden um B ein Kreis mit dem Radius $\overline{BC} = b$ geschlagen, der CD in E schneidet, um D ein Kreis mit dem Radius $\overline{CD} = a$ geschlagen, der BC in F schneidet. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck AEF gleichschenklig ist. *Sch.*

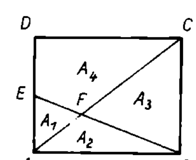


W 7*1306 Es sind alle natürlichen Zahlen a, b, c, d, e mit $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e < 10$ zu ermitteln, welche die Gleichung $a+b+c+d+e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ erfüllen. *B. Herrmann, Alt-Töplitz*

▲8▲1307 Nach dem Verfahren des sowjetischen Wissenschaftlers und Leninpreisträgers Prof. *A. W. Ulitowski* können Mikrodrähte in Hochfrequenzgeneratoren unmittelbar durch Gießen hergestellt werden. So erhält man z. B. aus 1 g Kupferschmelze einen Mikrodraht von 1000 m Länge.
a) Wie groß ist der Durchmesser dieses Drahtes, wenn er einen kreisförmigen Querschnitt hat und die Dichte des Kupfers $8{,}92\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ beträgt?
b) Wie groß ist der elektrische Widerstand dieses 1000 m langen Drahtes, wenn der spezifische Widerstand des Kupfers $0{,}016 \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ beträgt? *L.*

W 8 ■ 1308 In einer Bakterienkolonie möge sich die Anzahl der Bakterien im Verlauf von jeweils 30 Minuten verdoppeln. In Abständen von 30 Minuten soll viermal für Versuchszwecke die gleiche Anzahl von Bakterien entnommen werden. Wie groß kann diese Anzahl höchstens sein, wenn sich zum Zeitpunkt der ersten Entnahme vor der Entnahme genau 3000 Bakterien in der Kolonie befanden? *Wolfgang Burmeister Forschungsstudent an der TU Dresden*

W 8 ■ 1309 Es seien $ABCD$ ein Rechteck, E der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$ und F der Schnittpunkt der Diagonale $\overline{AC}$ mit der Verbindungsstrecke $\overline{BE}$ (vgl. die Abb.).



In welchem Verhältnis zueinander stehen die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Dreiecke AFE, ABF, BCF und des Vierecks $FCDE$? *Reinhard Schulz, Rotta Fachlehrer für Mathematik*

W 8*1310 Es sind alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x und y zu ermitteln, für die die Gleichung

$$x^2+y-37=0$$

erfüllt ist. *T.*

W 8*1311 a) Man beweise, daß die Aussage „Jedes Drachenviereck ist ein Tangentenviereck." wahr ist. (1)

b) Man formuliere die Negation (Verneinung) der Aussage (1). Ist die dann entstehende Aussage wahr oder falsch?

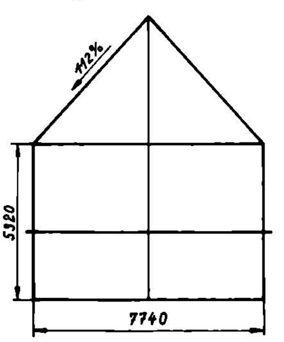
c) Man formuliere die Aussage (1) als Implikation in der Form: „Für alle ... gilt: Wenn, ..., so ... ." *T.*

W 9 ■ 1312 Man untersuche, ob es ein geordnetes Paar (x, y) natürlicher Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung

$$x^2-5y+8=0$$

erfüllt ist. *T.*

W 9 ■ 1313 Das Einzelwohnhaus *EW 71 B*, eines der Projekte für den Eigenheimbau, die besonders geeignet sind, unter Nutzung vorhandener Rohstoffe und Baumaterialien kostengünstige Eigenheime zu errichten, hat einen rechteckigen Grundriß mit einer Länge von 10,48 m und einer Breite von 7,74 m. Aus der Skizze der Seitenansicht (vgl. die Abb.) ist zu entnehmen, daß Kellergeschoß und Erdgeschoß dieses Hauses eine Höhe von zusammen 5,32 m haben und daß das Dach um 112% geneigt ist, d. h. der Quotient aus der Höhe des Dachgeschosses und der halben Grundlinie ist gleich 1,12.



a) Man berechne die bebaute Fläche des Hauses.

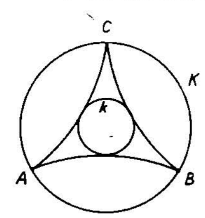
b) Man berechne den umbauten Raum des Hauses, d. h., das Volumen des Hauses (einschl. des Kellergeschosses). *L.*

W 9*1314 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Zahl

$$z=448^n+57\cdot 332^n$$

durch 29 teilbar ist. *Oberlehrer K. Becker, Lübtheen, Diplom-Mathematiklehrer*

W 9*1315 Es sei ABC ein regelmäßiges Kreisbogendreieck, d. h., die Menge aller Punkte, die auf den drei durch A, B bzw. B, C bzw. C, A begrenzten, im Innern des gleichseitigen Dreiecks ABC verlaufenden Kreisbogen von gleichem Radius liegen (vgl. die Abb.). Ferner seien K mit dem Radius R und k mit dem Radius r zwei konzentrische Kreise, von denen der Kreis K durch die Punkte A, B, C geht und der Kreis k die drei Kreisbogen berührt. Man berechne den Radius der drei Kreisbogen. *Dittmar Kurtz, Friedrichsrode, POS Keula, Kl. 9*



W 10/12 ■ 1316 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$x^{11}-4x^9+x^8-4x^6-x^5-4x^3-x^2+4=0$$

erfüllt ist. *Thomas Jentsch, Halle*

W 10/12 ■ 1317 Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen

$\overline{BC}=a=15$ cm, $\overline{CA}=b=13$ cm,
$\overline{AB}=c=14$ cm.

Man berechne

1. den Flächeninhalt dieses Dreiecks;
2. die Länge der von C ausgehenden Höhe $\overline{CF}=h_c$;
3. die Längen der Abschnitte $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$;
4. den Radius ϱ des Inkreises dieses Dreiecks;
5. die Abstände der Berührungspunkte P_1, P_2, P_3 des Inkreises mit den Seiten des Dreiecks von den Eckpunkten.

Hinweise zur Lösung:

1. Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\varrho\cdot s$, wobei $s=\dfrac{a+b+c}{2}$.
2. „Hier kommt keiner in die Brüche", sagt der Verfasser dieser Aufgabe; denn die zu berechnenden Werte sind sämtlich ganzzahlig. *Dr. W. Bennewitz, Radebeul*

W 10/12*1318 Die am 25. Juni 1974 auf eine Erdumlaufbahn beförderte sowjetische wissenschaftliche Orbitalstation *Salut 3* hat einen mittleren Abstand von 270 km von der Erdoberfläche.

a) Man berechne die Höhe der Kugelzone, deren Oberfläche bei einem vollen Umlauf von der Station überblickt werden kann.

b) Man stelle fest, wieviel Prozent der Erdoberfläche bei einem vollen Umlauf von der Orbitalstation Salut 3 überblickt werden können.

Anleitung zur Lösung: Legt man von einem Bahnpunkt P der Station die Tangenten an die Erdkugel, so wird das Gebiet, das von Punkt P aus zu überblicken ist, durch die Berührungspunkte dieser Tangenten begrenzt. Bringt man nun die Erdkugel mit einer Ebene, die durch den Punkt P und den Mittelpunkt M der Erdkugel geht, zum Schnitt und sind A, B die Berührungspunkte der von P an den Schnittkreis gelegten Tangenten, so ist $\overline{AB}=z$ die Höhe der Kugelzone, deren Gebiet bei einem vollen Umlauf überblickt werden kann. Für den Oberflächeninhalt der Kugelzone gilt

$$A_1=2\pi R\cdot z,$$ wobei $R=6370$ km der Radius der Erdkugel ist. *L.*

W 10/12*1319 Es sei a eine positive reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die die Gleichung

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$$

erfüllt ist. *Oberlehrer Lew Dimenstein, Leningrad, UdSSR*

Eine Aufgabe von stud. math. János Kollár

Universität Budapest
I. Preisträger der XV. und XVI. IMO

▲1320▲ Es sei $M=\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ eine endliche Punktmenge in der Ebene mit $n\geqq 3$, wobei jeweils zwei dieser Punkte einen von Null verschiedenen Abstand haben. Der größte dieser Abstände sei mit d bezeichnet. Ferner werde die Verbindungsstrecke zweier Punkte P_i, P_j Durchmesser genannt genau dann, wenn $\overline{P_iP_j}=d$ gilt, wenn also diese Punkte einen größtmöglichen Abstand voneinander haben.

a) Man beweise, daß es zu einer solchen Punktmenge höchstens n Durchmesser gibt.

b) Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n\geqq 3$ an, für die es solche Punktmengen mit genau n Durchmessern gibt.

alpha-Wettbewerb 1973/74
Preisträger

Jürgen Wage, Mittelstille; **Volkmar Türke**, Auerbach; **Ines und Heike Grigoleit, Stefan Gondlach, Karin Bischoff**, alle Zittau; **Haiko Müller**, Schmalkalden; **Dirk Herrmann**, Alt-Töplitz; **Torsten Löwe, Gunter Ender**, beide Lössau; **Gerald Manske, Almut Beckmann**, beide Steinbach-Hallenberg; **Martina Schmidt**, Rotta; **Cornelia Werner**, Clingen; **Sabine Moldauer**, Sondershausen; **Ute Schilling**, Hoyerswerda; **Andrea Herrmann**, Hammerunterwiesenthal; **Roland Schlesinger**, Saßnitz; **Holger Bensch**, Berlin; **Uwe Bergmann**, Stolpen; **Manuela Wilke**, Rüdnitz; **Stefan Berchardt**, Worbis; **Barbara Höpfner**, Wolgast; **Volker Thiele, Uwe Wiegel**, beide Neuenhofe; **Aloys Werner**, Wingerode; **Dietmar Müller**, Schmalkalden; **Barbara Gehb**, Fambach; **Torsten Busch**, Klausdorf; **Carsten Hocke, Gabriele Klötzke**, beide Clingen; **Arndt Gläßer**, Altenbeuthen; **Katrin Günther**, Pfaffroda; **Alois Weninger**, Knittelfeld (Österreich); **Rolf Busch**, Lobenstein (Kl. 3); **Klaus Baumgart**, Dresden; **Diether Pickel**, Brieselang; **Peter Fleischer**, Eisenhüttenstadt; **Andreas Gude**, Berlin; **Christa Blümlinger**, Linz (Österreich); **Ulf Brüstel**, Ziegelheim; **Jörg Hutschenreiter**, Dresden; **Ruth Jacobs**, Halle-Neustadt; **Éva Kertész**, Kecskemét (Ungarische VR); **Hans-D. Schwabe**, Sondershausen; **Ing. Armin Körner**, Leipzig; **Eva Gerstner**, Dresden; **Michael Weicker**, Mügeln; **Thomas Müller**, Krems (Österreich); **Peter Fuchs**, Bad Saarow; **Gudrun Billig**, Coswig; **Sigrun Below**, Seelow; **Roger Labahn**, Anklam; **Josef Hofbauer**, Traismauer (Österreich); **Andrea Wolter**, Uebigau; **Annette Lasar**, Erfurt; **Andrea Hönemann**, Stützerbach; **Ellen Krüger**, Übigau; **Matthias Bernstein**, Wernshausen; **Klaus Reichardt**, Magdeburg; **Wilfried Röhnert**, Radebeul; **Katrin Wahn**, Uebigau; **Christiane Jordan**, Kietz (Kl. 3); **Bernadette Damaschke**, Seifhennersdorf; **Henry Ribbe**, Tholdorf.

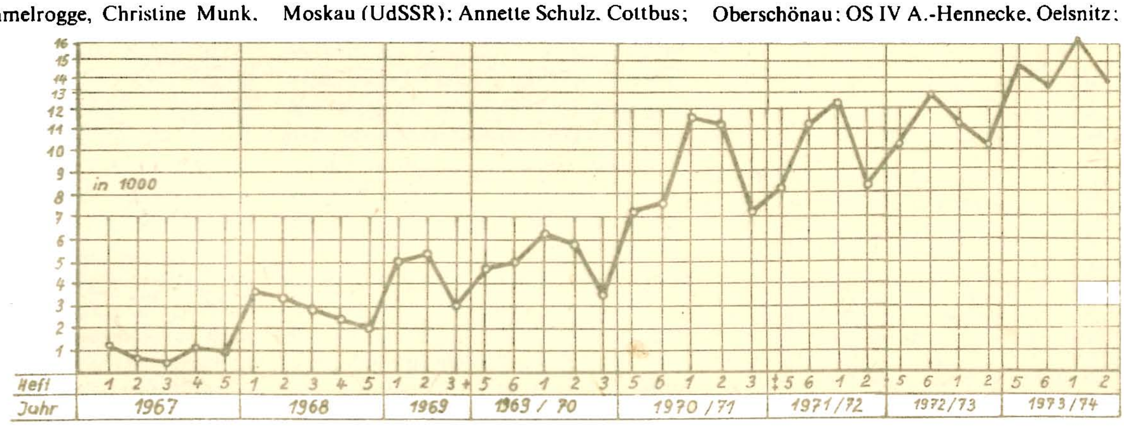
Vorbildliche Leistungen

Anke Müller, Sabine Klotzsche, beide Wolgast; Petra Recknagel, Cornelia Horn, Reinhold Beckmann, Jens Hoffmann, Sabine Menz, Ines Semmelrogge, Christine Munk, Bernd Endter, alle Steinbach-Hallenberg; Ingbert de Weert, Sabine Könnecke, Liane Krümmling, Ines Pahl, Dagmar Krümmling, alle Neuenhofe; Sylvia Hoth, Helmut Tanke, Dagmar Koch, Anita Seromin, Andrea Jost, Haidrun Tesch, alle Altentreptow; Birgit Baldauf, Rotta; Thomas Diegmann, Teistungen; Michael Wiegand, Teistungen; Angelika Rode, Wingerode; Ines Baumann, Bahratal; Christiane Bloch Wernikow; Sylvia Czarnetzki, Zaatzke; Andreas Kundt, M. Thamm, beide Ribnitz-Damgarten; Sieglinde Marx, Heinz Olaf Müller (Kl. 3), Kathrin Bauer, Kati Vietsch, Petra Bohn, alle Schmalkalden; Gerd Ullrich, Anke Illgen, Monika Müller, Thomas Wingeß, Lutz Mittelsdorf, Marita Heß, alle Fambach; Ellen Hille, Zörnigall; Petra Hansche, Steffen Apel, Frauke Apel, alle Klausdorf; Stephan Fischer, Bendeleben; Rosemarie Mausehund, Birgit Schnarr, beide Clingen; Hiltrud Müller, Birgit Demme, Gabriele Vaterrodt, alle Deuna; Uta Pfeifer, Ramona Willfahrt, Heike Hohnstein, alle Sondershausen; Torsten Flade, Beierfeld; Beate Floeter, Sachsendorf; Frank Jeschek, Kloster; Birgit Oelschlegel, Altenbeuthen; Petra Biehain, Horka; Beate Gramsch, Großenhain; Angela Friedemann, Pfaffroda; Claudia Steiber, Lienz (Österreich); Frank Geißler, Lobenstein; Andrea Martin, Pfaffroda; Dietmar Glanz, Kefferhausen; Michael Rehm, Torgau; Michael Hanft, Teuchern; Ralf Kretschmer, Dresden; Hans-Uwe Simon, Apolda; Lutz Gärtner, Wismar; Monika Schultz, Berlin; Jürgen Prestin, Waren; Martina Menge, Bernburg; Gudrun Tappert, Guben; Reinhard Pohl, Dresden; Michael Thränhardt, Oranienbaum; Wolfhart Umlauft, Freital; Jörg Pöhland, Klingenthal; Sylvia Schmidt, Buchholz; Steffen Pankow, Zittau; Aldo und Jörg Bojarski, Saßnitz; Franka Wölfel, Greifswald; AG Mathematik Kl. 6–7, Aschersleben; Kirsten Wettchstein, Bad Salzungen; Frank Lohmeyer, Zittau; Michael Winks, Berlin; Birgit Lehmann, Rostock; Gerd Birnbaum, Spitzkunnersdorf; Bettina Dähn, Güstrow; Mario Binkowski, Demmin; Falk Bachmann, Halle; Steffi Voigt, Wilkau-Haßlau; Ulrike Baumann, Radebeul; Simone Kühn, Leuna; Margrit Weibrecht, Bad Salzungen; Cordula Becker, Moskau (UdSSR); Annette Schulz, Cottbus; Thomas Kruppa, Eilenburg; Thomas Bienek, Schwepnitz; Karsten Breuer, Radebeul; Jana Michaelis, Bad Salzungen; Hans-D. Gröger, Hecklingen; Joe Hederich, Bad Salzungen; Uwe Haberland, Leipzig; Astrid Pflaum, Berlin; Silvia Marr, Henri Hofmann, beide Oberschönau; Annegret Wolf, Trusetal.

Kollektive Beteiligung von Schulen am alpha-Wettbewerb

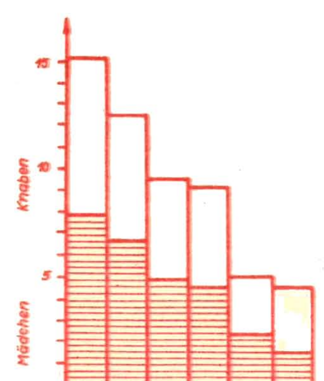
OS Ahlbeck; OS I Altentreptow; OS Alt-Töplitz; OS Asbach; AG Jg. Math. Aschersleben; OS Th. Neubauer, Bad Salzungen; alpha-Zirkel OS Bahratal; OS Beierfeld; AG Math. 27. OS Berlin; OS Berlingerode; OS Beuren; OS Birkungen; OS Blumberg; OS II Breitungen; OS Brehme; OS Brodersdorf; AG Math. OS Brohm; K.-Kollwitz-OS Bützow; OS Burkau; OS Clingen; H.-Grundig-OS Cossebaude; St. Jg. Techniker und Naturforscher, Cottbus; Klub Jg. Math., Cottbus; OS Culitzsch; OS Deuna; K.-Kollwitz-OS Dingelstädt; OS Dörnthal/Pfaffroda; EOS Dresden-Süd; OS Magnus Poser, Drognitz; OS Effelder; AG Math. OS Eilenburg; OS Alexander Schulgin, Eisenhüttenstadt; OS Fambach; Kreis AG Freiberg; OS Friedeburg; E.-Hartsch-OS Gersdorf; H.-Günther-OS Fürstenwalde; OS I Gnoin; J.-Brinckmann-OS Goldberg; OS Otto Drews, Greifswald; OS J.-Gagarin, Greußen; OS Großbodungen; Haus der JP und Jugend Großenhain; OS Großschwarzlosen; OS Grüna; Diesterweg-OS I, Halle; OS II Hainichen; F.-Engels-OS Herzberg; Kreisklub Math., Hettstedt; Goethe-OS Hohenleipisch; Alpha-Club OS Horka; E.-Schneller-OS Hoyerswerda; OS Jördenstorf; A.-Becker-OS Kamsdorf; C.-Zetkin-OS Kandelin; E.-Thälmann-OS, Karl-Marx-Stadt; Pionierhaus J. Gagarin, Karl-Marx-Stadt; OS Klausdorf; OS Könitz; OS Küllstedt; AG Math. OS Kuhfelde; K.-Liebknecht-OS, Leinefelde; Bezirksklub Math. Leipzig; A.-Bebel-OS, Leuna; AG Math. OS Lichte; OS Lichtenhain; OS W. Wallstab, Löderburg; OS Lössau; OS Markersbach; OS Mittel-Springstille; TOS Neuenhofe; 3. OS Neustrelitz; Th.-Neubauer-OS Niederorschel; G.-Hauptmann-OS Obercunewalde; E.-Weinert-OS Oberschönau; OS IV A.-Hennecke, Oelsnitz;

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs 1967/74



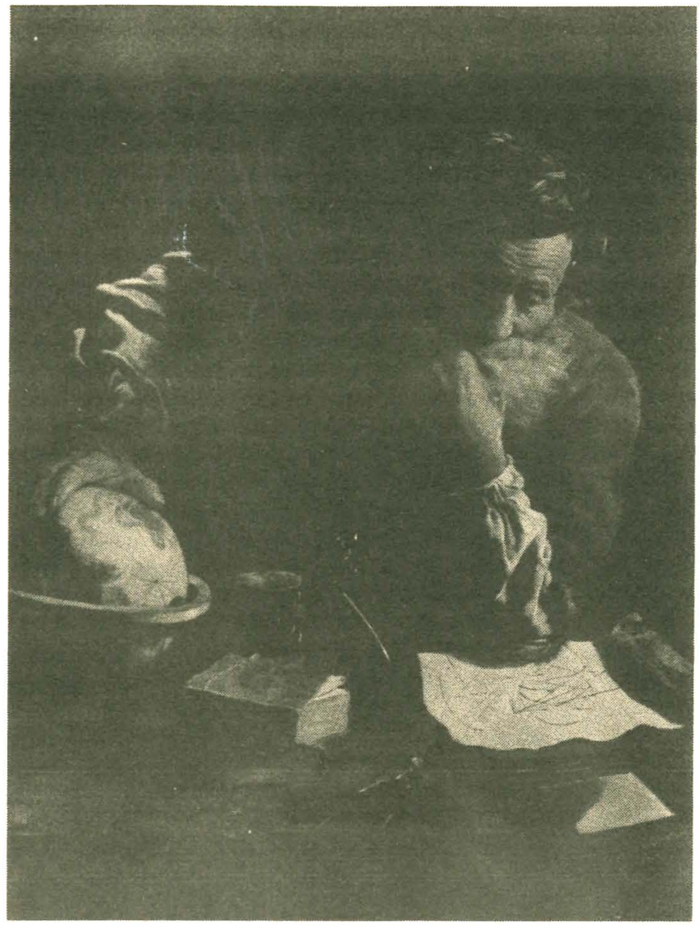
OS Olbersdorf; Comenius-OS Oranienburg; OS Osternienburg; OS Pfaffroda; AG Math. EOS Rainer Fetscher, Pirna; OS Rackwitz; OS Radis; AG Math. Th.-Neubauer-OS Ranis; OS Rheinsberg; J.-Gagarin-OS Ribnitz-Damgarten; E.-Thälmann-OS Riesa; Herder-OS Rostock; OS Rotta; F.-Weinert-OS Rottleben; OS Ründnitz; St. Jg. Naturforscher und Techniker Sanitz; OS Schernberg; H.-Danz-OS Schmalkalden; EOS Schmalkalden; J.-Gagarin-OS Schmalkalden; K.-Marx-OS Schmalkalden; J.-R.-Becher-OS Schneeberg; EOS B.-Brecht, Schwarzenberg; OS Schwepnitz; OS Sachsendorf; F.-Reuter-OS, Siedenbollentin; AG Geschw.-Scholl-OS Sondershausen; A.-Becker-OS Spremberg; E.-Thälmann-OS Spremberg; A.-Diesterweg-OS Spremberg; OS Steinbach-Hallenberg; OS Stolpen; Diesterweg-OS Stralsund; W.-Heinze-OS Stralsund; OS Struth-Helmershof; EOS Karl-Marx-OS Tangerhütte; OS Teistungen; OS I und OS II Teterow; OS Treben; W.-Pieck-OS Trusetal; OS Viernau; OS Vitte; OS Wedendorf; OS Werneuchen; OS Wernshausen; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; K.-Marx-OS Wilkau-Haßlau; OS Wingerode; Lenin-OS Wolgast; EOS Worbis; OS Wurzbach; H.-Eisler-OS Wusterhausen; Grete-Walter-OS Wustrow; Geschw.-Scholl-OS Zaatzke; H.-Jacobi-OS Zella-Mehlis; F.-Schiller-OS Zella-Mehlis; OS Ziegelheim; 5. OS Zittau; Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS Zittau; OS Zörnigall; OS Zschornewitz; OS Zurow

- Die Korrektur der 58000 eingegangenen Lösungen erfolgte durch OStR *G. Schulze* (EOS Herzberg) und StR *J. Lehmann*, VLdV (29. OS Leipzig/Chefred. *alpha*).
- Unser besonderer Dank gilt unseren beiden langjährigen ehrenamtlichen Mitarbeitern NPT OStR Dr. *R. Lüders* und StR *Th. Scholl* (beide Berlin). Sie sichteten und bearbeiteten die eingegangenen Aufgaben, fügten zahlreiche selbst hinzu und erstellten die oft nicht leichten Lösungen (1300 Aufgaben in 8 Jahren).



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn.in %	47	48	49	51	56	65
Mä.in %	53	52	51	49	44	35

Domenico Fetti: Archimedes



D. Fetti (um 1589 bis 1624) ist ein Wegbereiter der italienischen Barockmalerei. Zwei Städte haben sein Schaffen beeinflußt: Rom, der Geburtsort, und Venedig, wo er starb. Ist es in Rom der Naturalismus der *Caravaggio-Schule* mit den starken Licht- und Schatteneffekten, so wird seine Kunst durch Venedig malerischer. In der mittleren Schaffenszeit, in Mantua, scheint unser Bild entstanden zu sein.

Archimedes (um 287 bis 212 v. u. Z.), der griechische Physiker und Mathematiker, sitzt nachdenklich an einem Tisch, auf dem sich Arbeitsutensilien befinden – sogar ein Globus, eine für diese Epoche seltene Wiedergabe. Es ist die Zeit der Gegenreformation, in der die klerikalen Kräfte zusammen mit dem Absolutismus ihre während der Renaissance und der Reformation geschwächte Macht durch den Kampf gegen das aufstrebende Bürgertum wiederzugewinnen versuchten. Nachdem der Humanismus in der Renaissance einen Triumph gefeiert hat, werden jetzt freie Meinung und Geist als gefährliche antikirchliche Regungen angegriffen. Religionskriege verwüsten die Länder. All das, was das herrschende kirchliche Weltbild untergräbt, wird zu beseitigen versucht. 1592 verbrennt man *Giordano Bruno*, einen Verfechter des kopernikanischen Weltsystems, als Ketzer. Auch *Fettis* Zeitgenosse, der italienische Philosoph *Thomas Campanella*, Autor des „Sonnenstaates“, eines sozial-utopischen Romans, wird wegen seiner freiheitlichen Gesinnung und des Widerstands gegen die spanische Fremdherrschaft 27 Jahre eingekerkert. Der Katholizismus muß jedoch der Entwicklung der Wissenschaften Rechnung tragen. Kontinente waren inzwischen entdeckt und neue Handelswege entstanden. Man vervollkommnete die Technik, besonders im Schiffbau. Die ersten einfachen Hochöfen wurden errichtet.

Italien, obwohl seit der zweiten Hälfte des 16. Jh. wirtschaftlich und politisch ruiniert, behält trotz allem für lange Zeit die geistige Vorrangstellung. Es ist deshalb auch Italien, das den Naturwissenschaftler Archimedes erstmalig würdigt. 1543 gibt man sein Werk heraus, auf das sich die Wissenschaftler des Barocks stützen.

Fetti mag durch seine römische Heimat, die ihn zu einem nüchternen Realismus erzog, vielleicht aber auch durch das Amt als Hofmaler beim Fürsten von Mantua, der sich mit der Pflege von Kultur und Kunst über seinen eigenen Machtniedergang hinwegtäuschen wollte, zu dem Gemälde angeregt worden

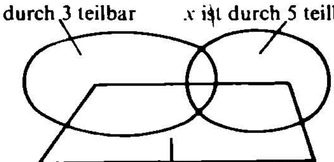
sein. Die Art der Darstellung ist barock. *Archimedes* ist kräftig und muskulös dargestellt. Der nach vorn geneigte, leicht gedrehte Oberkörper deutet – verstärkt durch den nach hinten gerichteten Ellbogen – den Raum an. Die Komposition des Bildes, die Verschiebung des Schwergewichtes nach der Seite, ist typisch für die Auffassung des Barocks. Man liebt nicht mehr die Ruhe und die harmonische Ausgewogenheit. Doch das Gleichgewicht fehlt in den Werken des Barocks nur scheinbar. So ist z. B. als Gegengewicht zum beleuchteten Kopf, dem geistigen Mittelpunkt des Bildes, der ebenfalls beleuchtete Globus zu betrachten. Das weißlich-gelbe Licht, das auf das Wichtigste konzentriert ist, durchbricht hart den graubraunen Gesamtton. Der Maler gibt keinen Idealmenschen, sondern einen einfachen alten Mann wieder, wenn auch die Darstellung nicht frei von barockem Pathos, von der großen Gebärde ist. Trotz der Wuchtigkeit wirkt das Gemälde außerordentlich dynamisch (durch Modellierung der Falten, des Körpers, durch die gesetzten Lichtakzente). Worüber denkt der Alte nach? Natürlich über seine Forschungen, die mathematischen Lehrsätze, den Bau von Maschinen.
Jedoch liest man in dem Bild noch mehr: das Lob auf die Wissenschaft, die sich auch in Zeiten der Unterdrückung behauptet. Deshalb wird *Archimedes* mit einem Lorbeerkranz dargestellt. Das Werk des von roher Soldateska erschlagenen Gelehrten lebte weiter, so wie das Werk der gefolterten Verfechter des Humanismus und der Wissenschaften in jener Zeit bestehen blieb.

Ruth Richter

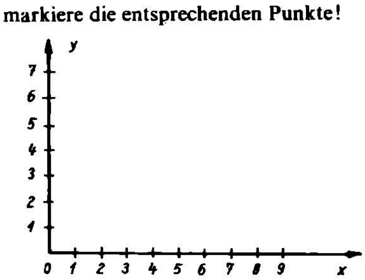
Linolschnitt, erarbeitet im Kunsterziehungsunterricht. Neben dem Selbstporträt stellte unser langjähriger *alpha*-Leser, erfolgreicher Olympiade-Teilnehmer, diese mit „sehr gut" bewertete und einem ausführlichen Text versehene Arbeit zur Verfügung. *Wolfram Ulrici*, ehem. Schüler der *Thomas-EOS* Leipzig (Kl. 12) beginnt jetzt das Medizinstudium und schreibt: „*alpha* wird mir stets eine Brücke zu einem meiner Lieblingsfächer sein."

Im vergangenen Jahr nahm *Dipl.-Ing. M. Walter*, Meiningen, durch die *Urania* an einer zweiwöchigen Studienreise durch die Ungarische Volksrepublik teil. Die dortige Gesellschaft zur Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse (T. I. T.) führt in den Schulen von der 3. Klasse an Mathematikzirkel durch. Viele tausend Schüler werden so auf die Olympiaden vorbereitet.
Unseren jüngsten Lesern geben wir mit diesem Arbeitsblatt einen kleinen Einblick in die gestellten Aufgaben und wünschen beim Knobeln viel Freude und Erfolg.

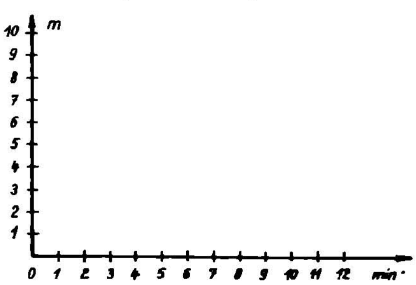
1 Ermittle alle Lösungen von $6<(x+2):2<30$, und trage sie in die entsprechenden Felder ein ($x \in N$)!



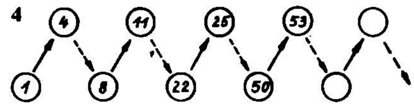
2 Gib alle Zahlenpaare x, y an, für die gilt $x+y=7$ $(x, y \in N)$
und markiere die entsprechenden Punkte!



3 Zwei Spinnen – eine grüne Spinne und eine Kreuzspinne – krabbeln eine 10 m hohe Burgmauer empor. Die grüne Spinne stieg 1 m in einer Minute. Die Kreuzspinne startete 3 Minuten später; sie stieg in einer Minute 2 m. Sie erhöhten ihr Tempo nicht und stiegen so lange, bis sie oben waren.
a) Welche von ihnen ist eher oben?
b) Nach wieviel Minuten erreicht die Kreuzspinne die kleinere grüne Spinne?



4

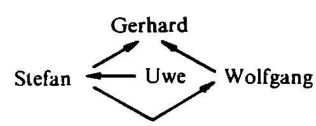


Was bedeutet hier der Pfeil ⟶ ?
Was bedeutet hier der Pfeil - - → ?

5 Ulla hat mehrere Spielgeld-Münzen zu
1 Pf, 3 Pf, 9 Pf, 27 Pf
Wie kann sie die folgenden Beträge mit möglichst wenig Münzen bezahlen? Schreibe es in der Tabelle auf!

	27 Pf	9 Pf	3 Pf	1 Pf
2				
3				
4				
8				
25				
33				
52				
80				
91				

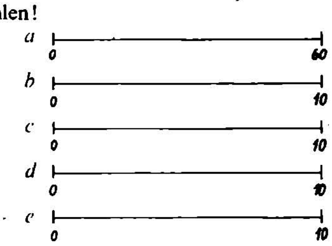
6 Vier Schüler – Gerhard, Stefan, Uwe und Wolfgang – liefen bei einem Wettkampf durchs Ziel. Jeder von ihnen hat dem schnelleren Läufer gratuliert. In welcher Reihenfolge liefen sie durchs Ziel, wenn die Pfeile in der Abbildung auf den Namen des Schülers zeigen, dem gratuliert wurde? Trage die noch fehlenden Pfeile ein!



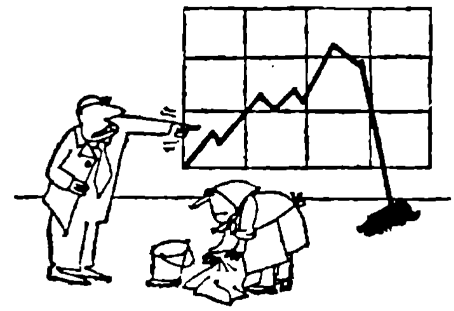
7 Für welche natürlichen Zahlen erhältst du wahre Aussagen?
Schreibe sie zwischen die Klammern!

a	$5<a<60$	{ }
b	$(x+3)\cdot 4=4\cdot x+12$	{ }
c	$(5\cdot y)+y\cdot 4=y\cdot 9$	{ }
d	$30-(z\cdot z)=z$	{ }
e	$3\cdot(b+1)<10$	{ }

Markiere die Lösungen auf den Zahlenstrahlen!



In freien Stunden alpha heiter



Sofort nehmen Sie
den Besen da weg!
Aus LVZ

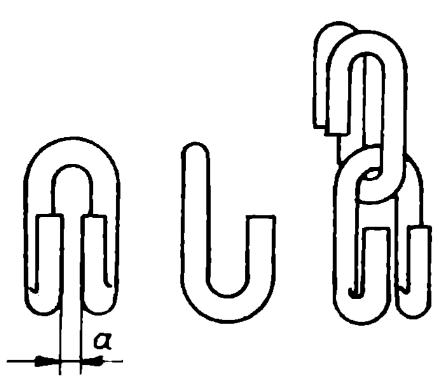
Mathemagisches

Der weltberühmte Zauberkünstler *Alphabino* fordert mich auf, eine Zahl zu nennen, die größer als zehn, aber kleiner als zwanzig ist.
Ich sage ihm, was mir gerade einfällt: „Dreizehn".
Er nimmt sein Skatspiel und zählt davon dreizehn Karten einzeln übereinander auf den Tisch. Die restlichen neunzehn Karten steckt er ein. Er fragt mich nach der Quersumme meiner Zahl. Ich antworte: „Vier".
Er nimmt das Kartenpäckchen auf und wirft drei Karten auf den Tisch. Die vierte darf ich mir ansehen.
Alphabino hebt theatralisch die Arme und blickt mich durchdringend an. „Denke konzentriert an die Karte! Es ist Herz As, stimmt's?"
Ich nicke verblüfft. Ich möchte gern wissen, ob er Gedanken erraten kann. „Gedankenleserei?" Er schüttelt lächelnd den Kopf. „Das gibt es nicht. Ich weiß immer im voraus, welche Karte mir genannt wird. Mehr will ich aber nicht verraten." *Alphabino* verabschiedet sich von mir mit einem herzlichen *Simsalabim* und schreitet stolz davon.
Nun frage ich euch, wie hat er das Zauberkunststück zustande gebracht?

Nachrichtening. Bottke, Lölpin

Die Teufelsklammern

Mit ein wenig Geschick könnt ihr euch aus 3 bis 5 mm starkem Draht leicht folgendes Spiel herstellen!
Die Abbildung zeigt die Klammern von vorn, von der Seite und zwei, die zusammengehängt wurden.



Der Abstand a zwischen den Drahtenden soll weniger betragen als der Durchmesser d des Drahtes. Wir empfehlen $a=\frac{d}{2}$.
Das Problem besteht nun darin, zwei solche Klammern zusammenzuhängen und wieder voneinander zu trennen. Da $a<d$ ist, können die Klammern nicht ohne weiteres vereinigt bzw. getrennt werden. Die Lösung des Problems soll ohne jede Anwendung von Gewalt, also ohne Auseinanderbiegen der Drahtenden, lediglich durch geeignete Drehungen und Wendungen erfolgen!
Wir wünschen euch viel Erfolg bei dieser Knobelei und stellen anschließend folgende Aufgabe:
Wie klein kann man bei gegebenem Durchmesser d den Abstand a wählen, damit sich die Klammern gerade noch vereinigen bzw. trennen lassen?

Diplomlehrer für Mathematik U. Sonnemann, Grabow

W. P. Rosanzew, Moskau

„Ich liebe Dich!"

Was passiert, wenn ein Mann seiner Frau, die Mathematiklehrerin ist, sagt: „Ich liebe Dich!"?
Die Frau geht zum Gericht und klagt auf Scheidung wegen Untreue. Er hätte nämlich sagen müssen: „Ich liebe Dich und nur Dich!".

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

alpha – sehr heiter

Aus den Silben
be – ber – chen – e – flucht – ga – gel – grund – haupt – ke – kel – klas – kung – li – man – mes – ne – ni – o – on – pe – ra – re – reich – rest – riß – schlag – schräg – se – ser – strek – tel – ti – tiv – ü – wert – win
sind 11 mathematische Begriffe zu bilden, deren Bedeutung im folgenden scherzhaft umschrieben ist. Reiht man die jeweils zweiten Buchstaben dieser Wörter (bei 1. und 9. die ersten Buchstaben) aneinander, wobei „ch" als ein Buchstabe gilt, so erhält man *ein Teilgebiet der Mathematik*, das sich mit einer Bewegung befaßt.

1. gymnastische Übung
2. schiefe Trennungslinie
3. ungerades Schneidewerkzeug
4. chirurgischer Eingriff an einer Harke
5. Salto
6. Umkehrbild
7. Rückzugsweg
8. zurückgebliebene Schülergruppe
9. Kopfpreis
10. Gebiet des Meeresbodens
11. Bekleidung eines Sportgeräts

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

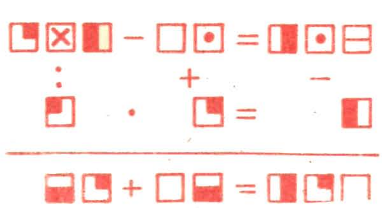
Hast Du genug Phantasie?

Versuche, in den Symbolen eine Gesetzmäßigkeit zu finden und die Reihe entsprechend fortzusetzen!

Aus: „Wurzel" 1/74, Jena

Kryptarithmetik

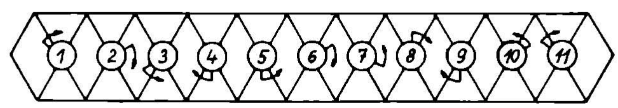
Setze die Ziffern 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7 und 8 so ein, daß eine sinnvolle Aufgabe entsteht. (Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern.)



Sabine Wieczorek, OS Wörmlitz (Kl. 9)

Wabenrätsel

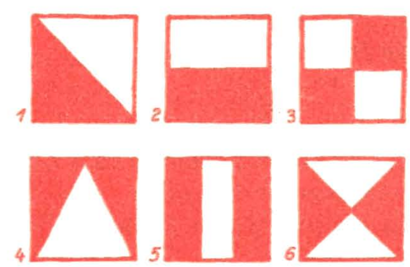
1. Größenangabe, die Flächen wie Quadraten, Kreisen usw. zugeordnet ist
2. bestimmte Menge von Punkten, die auf einer Geraden liegen
3. griechischer Mathematiker, nach dem ein Satz über rechte Winkel benannt ist
4. einer der Wahrheitswerte einer Aussage
5. eine der Beziehungen, die zwischen zwei Zahlen oder Größenangaben bestehen kann
6. Name für eine natürliche Zahl in bezug auf eine zweite, falls die zweite ein Vielfaches der ersten ist
7. bestimmter Teil der Oberfläche gewisser Körper
8. spezieller Körper
9. kennzeichnende Eigenschaft einer der beiden Arten von Proportionalität
10. eine der beiden Zahlen, durch die ein Produkt bestimmt ist
11. Differenz zwischen geschätztem Wert und richtigem Wert



Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln

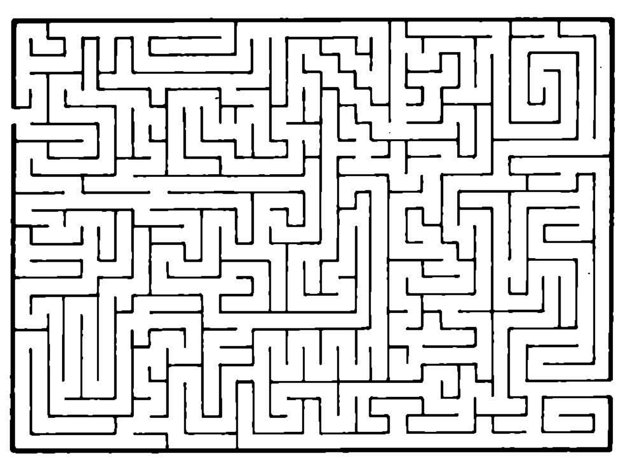
Logik

Welche der sechs Figuren gehört nicht in diese Gruppe?
Warum?



Aus: Kniffel/Knobel

Irrgarten



Aus: Füles, Budapest

30 Jahre VR Polen

Zu Ehren des 30. Jahrestages der Gründung der VR Polen laden wir unsere Leser zu einem **alpha-Sonderwettbewerb** ein. Das Polnische Informationszentrum Leipzig, mit dem die Redaktion *alpha* seit Jahren eng zusammenarbeitet, stellte eine große Zahl von Preisen, insbesondere Bücher, zur Verfügung. Wir wünschen allen Teilnehmern viel Freude und Erfolg!

Wettbewerb für Schüler der Klassen 5, 6 und 7

Auf dieser Seite haben wir Zahlen und Fakten aus dem Statistischen Jahrbuch der VR Polen (1973) zusammengestellt.

Ihr sollt Euch ein Problem (oder mehrere Probleme) herausgreifen, eine Aufgabe dazu formulieren und die Lösung dazu erarbeiten. (Ihr könnt Euch auch am Wettbewerb der Klassen 8 bis 12 beteiligen.)

Wettbewerb für Schüler der Klassen 8 bis 12 sowie Erwachsene

Sucht aus Zeitungen, Zeitschriften und Büchern Material heraus, und stellt Aufgaben (dazu Lösungen) zusammen, welche

a) den Aufbau der VR Polen in den letzten 30 Jahren oder
b) die Leistungen der polnischen Werktätigen in den letzten Jahren auf wirtschaftlichem, industriellem, landwirtschaftlichem Gebiet oder
c) die Wechselbeziehungen zwischen der VR Polen und der DDR darstellt.

Zu jeder Aufgabe ist der Lösungsweg mit einzusenden.

Beispiel: Bei Zawiercie in der Wojewodschaft Katowice entsteht eine Baumwollspinnerei, deren Baukosten von der DDR und der Volksrepublik Polen zu gleichen Teilen getragen werden. Diese Baumwollspinnerei, die den Namen „Freundschaft – Przyjazn" trägt, ist mit einer Jahresproduktion von 12500 Tonnen Baumwollgarn projektiert. Jedes der beiden Länder wird die Hälfte der Produktion erhalten. Wieviel Blusen mit langen Ärmeln lassen sich aus dem Jahresanteil der DDR an Baumwollgarn in jedem Monat herstellen, wenn die Auslieferung kontinuierlich erfolgt, wenn für eine Bluse 1,40 m Stoff von 130 cm Breite benötigt wird und wenn aus einer Tonne Baumwollgarn 2400 m² Baumwollgewebe hergestellt werden können?

Die Namen der Preisträger und vorbildlichen Aufgaben werden in Heft 2/75 veröffentlicht.

Alle Einsendungen sind unter dem Kennwort: 30 Jahre VR Polen einzusenden unter Angabe von Name, Vorname, Schule, Klasse, Privatanschrift
an Redaktion alpha
7027 Leipzig
PSF 14

Letzter Einsendetermin: 30. Januar 1975

Die VR Polen liegt im Zentrum des europäischen Kontinents.

Fläche	312700 km²
Bevölkerung	33,2 Mill.
davon Frauen	17,1 Mill.
Anteil der Stadtbevölkerung	53 %
Anteil der von der Landwirtschaft lebenden Bevölkerung	30 %
Länge der Grenzen	3538 km
Länge der Grenze zur DDR	1912 km
höchster Berg (Karpaten)	Rysy 2499 m

Hinsichtlich der Bevölkerungszahl nimmt Polen den 7. Platz in Europa, den 21. Platz in der Welt ein. Die Bevölkerungsdichte pro km² ist größer als der Durchschnitt in Europa.
Die Zahl der Städte mit mehr als 100000 Einwohnern beträgt 24.
Die größten Städte sind (der Reihenfolge nach):

Warszawa	1355900	Poznań	485800
Łódź	774200	Gdańsk	378300
Kraków	610000	Szczecin	350100
Wrocław	541600	Katowice	308700

Das durchschnittliche Lebensalter beträgt für Männer 66,8 Jahre und für Frauen 72,8 Jahre.
Polen ist ein verhältnismäßig junges Volk:
2,6 Mill. Kinder im Alter bis zu 4 Jahren,
7,9 Mill. Jugendliche im Alter von 5 bis 17 Jahre,
18,3 Mill. Einwohner im Arbeitsalter (d. h. Frauen im Alter von 18 bis 59 und Männer im Alter von 18 bis 64 Jahren)
3,6 Mill. Einwohner im Rentenalter.

Das Polen des Jahres 1971 gehört hinsichtlich des Produktionsvolumens bei den wichtigsten Industrieerzeugnissen zu den ersten 15 Ländern der Welt. Das wird durch folgende Angaben klar:

	Produktion 1965	1970	1972	Platz Europa	Welt
Elektroenergie in Mrd. KWh	43,8	64,5	76,5	7	11
Steinkohle in Mio t	119	140	151	3	5
Rohstahl in Mio t	9,1	11,8	13,5	7	10
Zink- und Bleierze in Mio t	2,7	3,6	4,0	2	8
Schwefelsäure (100 %) in Mio t	1,1	1,9	2,6	7	10
Zement in Mio t	9,6	12,2	14,0	7	10
Baumwollgarn u. ä. in 1000 t	187	208	212	4 (1969)	9 (1969)
Wollgarn u. ä. in 1000 t	65,5	84,4	87,7	6 (1969)	8 (1969)
Kunststoffe in Mio Zl	–	9,3	13,0	9	12
Zellulose	351	470	534	8	12
Rohzucker in Mio t	1,4	1,4	1,7	4	13
Stickstoffdünger in 1000 t	394	1030	1147	5	8
Weizen in Mio t	2,4	4,6	5,2	8	16
Roggen in Mio t	7,7	5,4	8,2	2	2
Hafer in Mio t	2,5	3,2	3,2	3	4
Kartoffeln in Mio t	42,7	50,3	48,7	2	2
Zuckerrüben in Mio t	12,3	12,7	14,3	3	4
Raps in 1000 t	504	566	427	1	4
Fleisch in 1000 t	2015	2207	2477	5	10
Milch in Mrd. l	12,9	14,5	15,3	4	6
Eier in Mrd. St.	6,3	6,9	7,5	7	11

Lösungen

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Lösungen der DDR-Olympiade

5. Wegen $|x| = |-x|$ und $|y| = |-y|$ ist die zur Veranschaulichung gesuchte Punktmenge achsensymmetrisch bezüglich beider Koordinatenachsen. Daher nehmen wir zunächst $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ an. Für diese Punkte hat die gegebene Gleichung die Form

$$|x + |y-3| - 3| = 1.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$x + |y-3| - 3 = 1 \qquad (1)$$

oder $x + |y-3| - 3 = -1$ gilt. (2)

Gleichung (1) gilt genau dann, wenn

$$x + y - 3 - 3 = 1 \qquad (1.1)$$

oder $x - (y-3) - 3 = 1$ ist. (1.2)

Gleichung (2) gilt genau dann, wenn

$$x + y - 3 - 3 = -1 \qquad (2.1)$$

oder $x - (y-3) - 3 = -1$ ist. (2.2)

Von allen Punkten (x, y) mit $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ erfüllen genau diejenigen die Bedingung (1.1), für die $y = -x + 7$ und $0 \geqq x \geqq 4$ ist.

Die Bedingung (1.2) wird erfüllt von allen Punkten (x, y) mit

$$y = x - 1 \text{ und } 1 \leqq x \leqq 4.$$

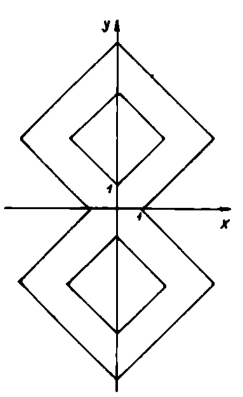
Die Bedingung (2.1) erfüllt genau die Punkte (x, y), für die

$$y = -x + 5 \text{ und } 0 \leqq x \leqq 2 \text{ ist.}$$

Schließlich wird die Bedingung (2.2) erfüllt von allen Punkten (x, y) mit

$$y = x + 1 \text{ und } 0 \leqq x \leqq 2.$$

Die Abbildung stellt für jede der durch (1.1), (1.2), (2.1) und (2.2) definierten Funktionen den Graphen in den angegebenen Intervallen dar. Die Vereinigungsmenge M dieser Graphen spiegeln wir zunächst an der x-Achse und erhalten die Menge M'. Spiegelung von $M \cup M'$ an der y-Achse liefert M''. Die Menge $M \cup M' \cup M''$ ist die gesuchte Veranschaulichung.



Bemerkung: Alle 99 in Klassenstufe 10 gestarteten Schüler bearbeiteten diese Aufgabe und nur 2 konnten keinen Punkt erreichen. 34 Schüler erreichten die volle Punktzahl, die Aufgabe war also relativ leicht. Dennoch traten einige Unkorrektheiten häufig auf:

1. *Unvollständige Fallunterscheidung:* Bei der Untersuchung von $|x|$ wird $x > 0$ und $x < 0$ angenommen, während $x = 0$ nicht betrachtet wird. Dadurch gehen in der gesuchten Veranschaulichung die Punkte auf der y-Achse verloren.

2. *Definitionsbereich.* Zu den in (1.1), (1.2), (1.3) und (1.4) gefundenen linearen Funktionen werden die Graphen gezeichnet, ohne dabei auf die einschränkenden Bedingungen für den Definitionsbereich zu achten.

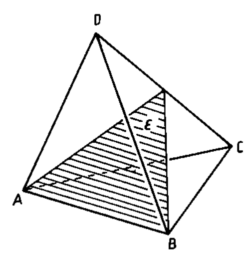
Mitunter treten auch andere als die oben angegebenen Intervalle als Definitionsbereiche auf. Eine Ursache dafür ist darin zu suchen, daß die Symmetrie des absoluten Betrages nicht erkannt wurde. Dann konnte keine Spiegelung an den Achsen durchgeführt werden. Statt dessen mußten die 4 Fälle $x \geqq 0, y \geqq 0$; $x \geqq 0, y \leqq 0$; $x \leqq 0, y \geqq 0$; $x \leqq 0, y \leqq 0$ behandelt werden. Das führte insgesamt auf 16 lineare Funktionen. Diese Fülle gereichte öfters der Übersichtlichkeit zum Nachteil.

Ergebnisspiegel

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Schüler	2	2	8	8	13	18	14	34

Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische Hochschule
Dr. Theodor Neubauer, Erfurt, Mühlhausen

6. Es sei ε die mittelsenkrechte Ebene von CD. (vgl. die Abb.)



Diese Ebene besteht aus allen Punkten P, die von C und von D gleich weit entfernt sind, für die also $\overline{PC} = \overline{PD}$ gilt. Wegen $\overline{AC} = \overline{AD}$ und $\overline{BD} = \overline{BD}$ gehören demnach A und B zu ε. Also ist ε diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.

Als regelmäßiges Tetraeder hat $ABCD$ einen Umkugelmittelpunkt S mit $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$; dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d. h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit Verbindungsebenen von je einer Tetraederkante und S überein. Jede der an S angrenzenden Seitenflächen der Pyramide $ABCS$ liegt somit in einer der Schnittebenen. Entsprechendes gilt für die Pyramiden $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Die gesuchte Zerlegung von $ABCD$ kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Pyramiden $ABCS$, $ACDS$, $ABDS$, $BCDS$ (in die man $ABCD$ zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

Zum weiteren Zerlegen von $ABCS$ geben genau diejenigen Schnittebenen Anlaß, die (außer durch S) durch innere Punkte von $ABCS$ gehen. Das sind genau diejenigen, die durch D, eine der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen. Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in 6 flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen. Demnach wird die Pyramide $ABCS$ in genau 6 volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu $ABCS$ kongruenten Pyramiden $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Teilkörper. Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_K = \frac{1}{24} V_T$, wobei V_T das Volumen des Tetraeders $ABCD$ ist. Wegen $V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ gilt also $V_K = \frac{a^3}{288}\sqrt{2}$.

Bemerkungen: Ein entscheidender Schritt bei der Lösung der Aufgabe, der häufig Ursache für unvollständige Beweise und damit für Punktabzüge war, ist der Nachweis, daß sich alle Schnittebenen in einem Punkt schneiden und somit kein „in der Mitte liegender Hohlraum" entsteht. Dieser Nachweis ist hier geführt mit Hilfe des Umkugelmittelpunktes. Viele Schüler bewiesen den genannten Sachverhalt, indem sie zeigten, daß sich je zwei der Schnittebenen in einer Höhe des Tetraeders schneiden und daß somit der Höhenschnittpunkt (der hier natürlich gleich dem Umkugelmittelpunkt ist) in jeder Schnittebene liegt.

Einige Schüler versuchten die Aufgabe zu lösen, indem sie die Schnittebenen gedanklich nacheinander mit dem Tetraeder zum Schnitt brachten. Sie betrachteten zunächst die drei Schnittebenen, die D enthalten. Diese zerlegen das Tetraeder in sechs kongruente Teilkörper. Jede weitere Schnittebene, z. B. die, die durch A und B verläuft, zerlegt diese Teilkörper in zwei neue Teile. Bei der Einführung der letzten beiden Schnittebenen verloren die meisten dieser Schüler jedoch die Übersicht über die entstehenden Teile und gelangten zu falschen Anzahlen. Wesentlich andere Lösungsversuche traten nicht auf.

Erreichte Punktzahlen:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Schüler	15	6	12	6	11	11	14	23

Keinerlei Lösungsversuche: 2

Dr. Uwe Küchler,
Technische Universität, Dresden

Lösung der Aufgabe von
Prof. Dr. Mögling, PH Erfurt

▲1228▲ Elementargeometrischer Beweis: Die Umkreise der Dreiecke SAD und TCD schneiden außer in D in einem weiteren Punkt P (Bild 2). (Es ist stets $P \neq D$, denn $P = D$ führt zur Parallelität von SA und TC und damit zur Verletzung der Voraussetzung, wie etwa mit Hilfe einer zentralen Streckung gezeigt werden kann.) Der Beweis ist erbracht, wenn gezeigt wird, daß die Vierecke $SBCP$ und $TBAP$ Sehnenvierecke sind, d. h. wenn $\sphericalangle SPC + \beta = 2R$ bzw. $\sphericalangle TPA + \beta = 2R$ gilt.
Berechnet wird zunächst der Winkel SPC.

$$\sphericalangle SPC = \sphericalangle SPD + \sphericalangle DPC$$

Nach dem Satz über Sehnenvierecke ist

$$\sphericalangle SPD = 2R - \sphericalangle SAD = \alpha,$$

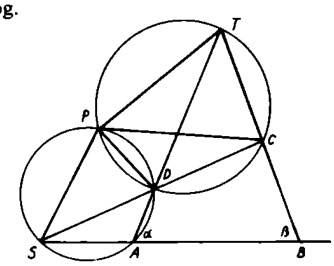
und wegen des Peripheriewinkelsatzes und des Winkelsummensatzes für Dreiecke gilt

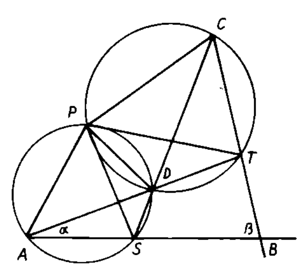
$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle DTC = 2R - \alpha - \beta.$$

Demnach ist

$$\sphericalangle SPC + \beta = \alpha + 2R - \alpha - \beta + \beta = 2R,$$

und damit ist Viereck $SBCP$ ein Sehnenviereck.
Für das Viereck $TBAP$ verläuft der Beweis analog.





Jetzt soll untersucht werden, ob der Sachverhalt auch für das nichtkonvexe Viereck $ABCD$ gilt, in dem $\sphericalangle ADC = \delta$ der überstumpfe Winkel sei (Bild 3).
P ist wiederum der zweite Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke SAD und TCD, und auch hier ist zu zeigen, daß die Vierecke $SBCP$ und $TBAP$ Sehnenvierecke sind.
Auch hier gilt

$$\sphericalangle SPC = \sphericalangle SPD + \sphericalangle DPC.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist

$$\sphericalangle SPD = \alpha,$$

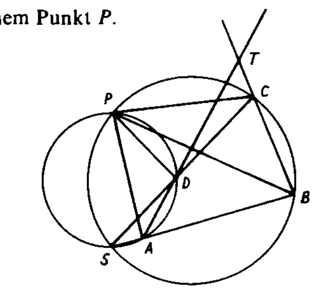
und nach dem Satz über Sehnenvierecke und dem Winkelsummensatz für Dreiecke gilt

$$\sphericalangle DPC = 2R - \sphericalangle DTC = 2R - \alpha - \beta.$$

Somit ist

$$\sphericalangle SPC + \beta = \alpha + 2R - \alpha - \beta + \beta = 2R,$$

und damit ist das Viereck $SBCP$ ein Sehnenviereck.
Analog beweist man, daß auch das Viereck $TBAP$ ein Sehnenviereck ist. Damit schneiden sich auch in diesem Fall die vier Umkreise in einem Punkt P.



Ein anderer Beweis kann unter Verwendung von ähnlichen Dreiecken von Schülern ab Klasse 9 geführt werden (Bild 4):
Die Umkreise der Dreiecke SAD und SBC schneiden einander außer in S im Punkt P. Dann sind die Dreiecke ABP und CDP gleichsinnig ähnlich, denn es ist nach dem Peripheriewinkelsatz

$\sphericalangle SBP = \sphericalangle SCP$ und $\sphericalangle SAP = \sphericalangle SDP$,

und damit sind auch die Winkel BAP und CDP als Nebenwinkel der beiden letzten Winkel gleich.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABP und CDP folgt, daß auch die Dreiecke ADP und BCP ähnlich sind, denn es gilt

$\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PB} : \overline{PC}$ sowie nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = \sphericalangle BPC.$$

Die Dreiecke ADP und BCP stimmen demnach im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind daher ähnlich. Hieraus folgt, daß $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBC$ bzw. $\sphericalangle PAT = \sphericalangle PBT$ ist, d. h. P, A, B und T liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis. Weiterhin folgt $\quad \sphericalangle ADP = \sphericalangle BCP$

und demnach gilt auch für die Nebenwinkel

$$\sphericalangle TDP = \sphericalangle TCP.$$

Damit liegen auch die Punkte P, D, C, T nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis, und die Behauptung ist bewiesen. Durch den letzten Beweis kann der auf den ersten Anblick merkwürdig erscheinende Sachverhalt, der durch die Aufgabe gegeben wurde, mit Hilfe von Transformationen näher erklärt werden.
P ist nämlich Fixpunkt sowohl derjenigen gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation (Drehstreckung), durch die A auf D und B auf C abgebildet wird, als auch derjenigen Drehstreckung, durch die A auf B und D auf C abgebildet wird. Eine Drehstreckung ist bekanntlich eindeutig durch die Vorgabe zweier Originalpunkte A und B und der ihnen zugeordneten Bildpunkte D und C gegeben. Ihren Fixpunkt P erhält man nach den vorangegangenen Überlegungen als Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke SAD und SBC. Die durch A und D als Originalpunkte und B und C als zugeordnete Bildpunkte gegebene Drehstreckung besitzt damit denselben Fixpunkt P, der sich in diesem Fall als Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke ABT und DCT ergibt.
Die durch die Vorgabe eines Vierecks $ABCD$ auf die beschriebene Weise einander zugeordneten Drehstreckungen besitzen demnach den gleichen Fixpunkt.

Lösung der Aufgabe von
stud. math. W. Burmeister

▲1075▲ Wir nehmen zuerst an, daß uns nur die Seitenlängen a und b des Parallelogramms gegeben sind und überlegen, zwischen welchen größten und kleinsten Werten die Längen e und f der Diagonalen liegen können. Die Diagonale AC bildet mit den Seiten AB und BC des Parallelogramms ein Dreieck, daher gilt nach der Dreiecksungleichung

$$a - b < e < a + b,$$

d. h. die Länge der Diagonalen AC ist stets zwischen $a - b$ und $a + b$ eingeschlossen. Dieselbe Ungleichung gilt für die Diagonale f, und daher haben wir die Ungleichung

$$(a - b)^2 < ef < (a + b)^2.$$

Man überlegt sich leicht, daß aus dieser Ungleichung nichts über die Gültigkeit der Ausgangsungleichung $(a + b)(a - b) < ef$ gefolgert werden kann. Wir versuchen daher, die Dreiecksungleichung auf andere Weise anzuwenden. Dazu nehmen wir an, daß uns die Längen der Diagonalen e und f gegeben sind. Die Diagonalen mögen sich im Punkt S schneiden. Nach einem bekannten Satz werden durch den Punkt S beide Diagonalen halbiert, es gilt also

$$\overline{AS} = \overline{SC} = \frac{e}{2}, \quad \overline{DS} = \overline{SB} = \frac{f}{2}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung können wir nun Schranken für die Seitenlängen a und b ableiten. Nach der Dreiecksungleichung im Dreieck ABC gilt

$$\frac{|e - f|}{2} < a < \frac{e + f}{2}, \qquad (1)$$

ebenso gilt im Dreieck ASD

$$\frac{|e - f|}{2} < b < \frac{e + f}{2}. \qquad (2)$$

Wir haben zu zeigen, daß gilt:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 < ef.$$

Für a^2 gilt wegen (1) $a^2 < \frac{(e + f)^2}{4}$,

analog ist nach (2)

$$b^2 > \frac{(e - f)^2}{4}; \quad -b^2 < \frac{(e - f)^2}{4}.$$

Durch Addition der entsprechenden Ungleichungen ergibt sich nun

$$a^2 - b^2 < \frac{(e + f)^2}{4} - \frac{(e - f)^2}{4} = \frac{e^2 + 2ef + f^2 - e^2 + 2ef - f^2}{4} = ef.$$

Das ist die zu beweisende Ungleichung.

Lösung der Aufgabe von
Prof. Dr. E. Trost, Zürich

▲810▲ Wir betrachten eine feste Parabel mit dem Brennpunkt F und der Leitlinie l. C sei der Schnittpunkt des Durchmessers durch B mit l. Nach einer bekannten Parabeleigenschaft liegt S auf l. $SCBF$ ist ein Sehnenviereck, dessen Umkreis den Durchmesser $t = SB$ hat. Es sei $\alpha = \sphericalangle SCF = \sphericalangle CFS$. Aus dem Sinussatz folgt jetzt $t = FC/\sin 2\alpha$. Ferner ist $FC = p/\sin\alpha$. Wir haben also das Maximum von $y = \sin\alpha \sin 2\alpha$ zu bestimmen.

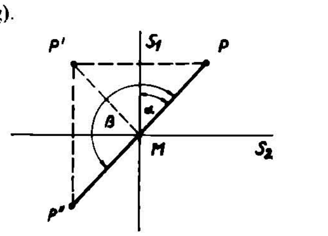
Der in der Aufgabe erwähnte Zusammenhang mit einem kubischen Polynom ergibt sich durch Betrachtung eines dem Einheitskreis einbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks. Es sei h die Höhe, a eine Kathete, α der Gegenwinkel und x der zugehörige Hypotenusenabschnitt.

Man hat $a = 2 \sin\alpha$, $h = \sin 2\alpha$, $a^2 = 2x$, $h^2 = x(2-x)$. Hieraus folgt $2y^2 = x^2(2-x)$. Das Maximum wird für $x = 4/3$ erreicht. Eine einfache Rechnung ergibt jetzt $t_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{4}p$.

Bemerkung: Die analoge Aufgabe für die Ellipse, bei der es neben der kleinsten auch eine größte Distanz gibt, wurde früher behandelt.

Lösung der Aufgabe von
Prof. Dr. Matzke, Weimar

▲929▲ a) Die Kurve möge zwei orthogonale Symmetrieachsen besitzen. Sie seien S_1 und S_2. Spiegelt man einen Punkt P der Kurve an S_1, so erhält man einen Punkt P' der Kurve, wobei $\overline{MP} = \overline{MP'}$ ist (wegen der Invarianz der Streckenlängen bei Spiegelung).

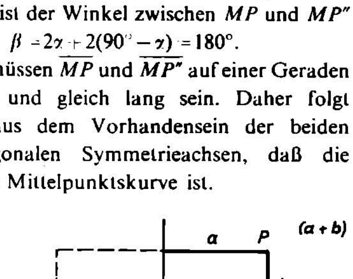


Spiegelt man P' an S_2, so erhält man einen Punkt P'' der Kurve, wobei $\overline{MP''} = \overline{MP'} = \overline{MP}$ ist. Der Winkel zwischen $\overline{MP}$ und S_1 sei α.

Dann ist der Winkel zwischen MP und MP''

$$\beta = 2\alpha + 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ.$$

Also müssen $\overline{MP}$ und $\overline{MP''}$ auf einer Geraden liegen und gleich lang sein. Daher folgt also aus dem Vorhandensein der beiden orthogonalen Symmetrieachsen, daß die Kurve Mittelpunktskurve ist.



b) Die Eigenschaft „Mittelpunktskurve sein" ist äquivalent mit der Eigenschaft, „Bei Drehung um 180° in sich selbst überzugehen". Man kann nun leicht Kurven angeben, die bei Drehung um 180° in sich selbst übergehen und keine Symmetrieachse besitzen. Zum Beispiel läßt man bei einem Rechteck je zwei „halbe Seiten" so weg, wie es die Abbildung zeigt, so ist die übriggebliebene Figur eine Mittelpunktskurve, da sie offensichtlich bei Drehung um 180° in sich selbst geht. Diese Kurve besitzt nicht zwei orthogonale Symmetrieachsen, die sich in M schneiden.

Begründung: Beide Symmetrieachsen können nicht so verlaufen, daß sie keinen Schnittpunkt mit der Kurve haben, da dann der Winkel zwischen beiden Symmetrieachsen kleiner als 90° sein müßte. Wenn aber eine Symmetrieachse die Kurve schneidet, muß sie sie senkrecht schneiden.

Sollte die Gerade durch P und Q Symmetrieachse sein, müßte sie die Winkel bei diesen Punkten halbieren. Das ist jedoch nicht der Fall. Außer den eingezeichneten Geraden, die keine Symmetrieachsen sind, gibt es jedoch keine Gerade durch M, die die Kurve senkrecht schneidet. Daher besitzt die Kurve keine zwei orthogonalen Symmetrieachsen.

Gesamtergebnis: Wenn eine Kurve zwei orthogonale Symmetrieachsen besitzt, ist sie Mittelpunktskurve. M ist daher der Schnittpunkt der Symmetrieachsen. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da es Mittelpunktskurven gibt, die nicht zwei sich in M schneidende orthogonale Symmetrieachsen besitzen.

Blaise Pascal – Fortsetzung

Im Zustand der Ekstase schreibt *Pascal* auf einen Fetzen Papier die Gedanken nieder, die in seinem Kopf herumgehen. Später überträgt er diese Aufzeichnungen auf Pergament; nach seinem Tode hat man diese und andere in sein Wams eingenäht entdeckt. Dieses Ereignis heißt die „zweite Bekehrung" *Pascals*.

Von diesem Tag an fühlt *Pascal* nach den Worten *Jaquelines* „eine gewaltige Verachtung der Welt und eine fast unüberwindliche Abwendung von allen zu ihr gehörenden Dingen". Er hört mit dem Studium auf, läßt sich von Anfang 1655 an im Kloster Port-Royal nieder und führt freiwillig ein

Leben wie ein Mönch. Zu dieser Zeit schreibt *Pascal* seine „Lettres à un Provincial", eines der größten Erzeugnisse der französischen Literatur. Die „Briefe" enthielten eine Kritik der Jesuiten. Sie wurden in einzelnen Heften – „Briefen" – vom 23. Januar 1656 an bis zum 23. März 1657 herausgegeben (insgesamt 18 Briefe). Der Autor – „ein Freund in der Provinz" – wurde *Louis de Montalte* genannt. Das Wort „Berg" in diesem Pseudonym (la montagne) hängt sicherlich mit der Erinnerung an die Versuche auf dem Puy de Dôme zusammen.

7. Amos Dettonville

„Ich habe viel Zeit mit dem Studium abstrakter Wissenschaften zugebracht; die Mängel der durch sie vermittelten Kenntnisse haben mir die Lust an ihnen verdorben. Als ich mit dem Studium des Menschen begann, erkannte ich, daß ihm diese Abstraktionen fremd sind und daß ich, indem ich mich in sie vertiefte, noch mehr verwirrt wurde als andere, die sie nicht kennen". Diese Worte *Pascals* charakterisieren seine Stimmung in den letzten Jahren seines Lebens. Und dabei hat er sich anderthalb Jahre von ihnen mit Mathematik beschäftigt ... Dies begann im Frühjahr 1658 zu einer Nacht, als sich *Pascal* während eines schrecklich tobenden Zahnschmerzes an eine ungelöste Aufgabe von *Mersenne* über die Zykloide erinnerte. Er bemerkt, daß er durch das angespannte Nachdenken von dem Schmerz abgelenkt worden ist. Gegen Morgen hatte er bereits eine ganze Reihe von Resultaten über die Zykloide bewiesen und ... war von dem Zahnschmerz geheilt. Anfangs sieht sich *Pascal* von der Sünde getroffen an und ist nicht bereit, die erhaltenen Ergebnisse aufzuschreiben. Später änderte er unter dem Einfluß des *Duc de Roannez* seine Entscheidung ab; im Verlauf von acht Tagen „tat er nichts anderes als schreiben, solange die Hand schreiben konnte" (*Gilberte Périer*). Und danach im Juni 1658 veranstaltete *Pascal*, wie dies damals häufig geschah, ein Preisausschreiben, in dem er den größten Mathematikern sechs Aufgaben über die Zykloide zur Lösung vorschlug. Die größten Erfolge erzielten *Huygens* (1629 bis 1695), der vier Aufgaben löste, und *Wallis* (1616 bis 1703), von dem mit gewissen Lücken zwei Aufgaben gelöst wurden. Als beste Arbeit wurde aber die des unbekannten *Amos Dettonville* anerkannt. Wir bemerken, daß „Amos Dettonville" aus denselben Buchstaben besteht wie „Louis de Montalte". So wurde ein neues Pseudonym *Pascals* ersonnen. Mit dem Preis von 60 Pistolen wurden die Werke von *Dettonville* herausgegeben.

Nach Mitte 1653 kehrte *Pascal* nicht mehr zur Physik oder zur Mathematik zurück. Er verbrachte die letzten Jahre seines Lebens mit dem Versuch, den höchsten Kardinalfragen des menschlichen Lebens auf den Grund zu gehen. An der Titanenarbeit zerbrach *Pascal*. Er starb am 19. August 1662; so blieb das Hauptbuch seines Lebens ungeschrieben. Die verbliebenen Materialien wurden posthum unter der Bezeichnung „Pensées" (Gedanken) herausgegeben.

S. G. Gindikin

Lösungen zu alpha-heiter *6/74*

Mathemagisches

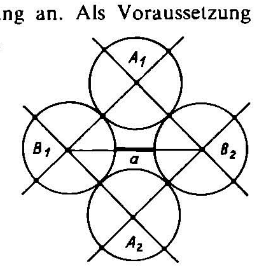
Die Lösung ist einfach. Betrachtet die folgende Tabelle!

Zahl, die der Zuschauer nennt	Quersumme der Zahl	Genannte Zahl Quersumme
11	2	9
12	3	9
13	4	9
.		
.		
19	10	9

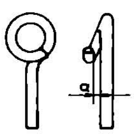
Aus der Tabelle und dem Text der Aufgabe können wir logisch schlußfolgern, daß Alphabino schon vor dem Zaubern die zehnte Karte von oben kannte. Er zählt dreizehn Karten einzeln übereinander zu einem Päckchen auf den Tisch. In diesem Päckchen lag die gemerkte Karte an vierter Stelle von oben. Diese vierte Karte erhielt ich.

Die Teufelsklammern

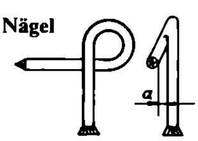
Für alle, die Freude an den *Teufelsklammern* gefunden haben, geben wir noch zwei weitere interessante Spiele mit gleicher Problemstellung an. Als Voraussetzung gilt wieder $a<d$.



Die Hexenschlüssel



Die verflixten Nägel

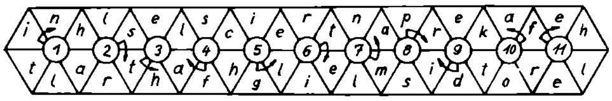


Um die Teufelsklammern vereinigen oder trennen zu können, müssen die Drahtenden der Klammer A und der Klammer B folgende Lage zueinander haben.

In dem rechtwinkligen Dreieck $A_1B_1B_2$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1B_2}^2=\overline{B_1B_2}^2$$
$$(2r)^2+(2r)^2=(2r+a)^2$$
$$4r^2+4r^2=(2r+a)^2$$
$$8r^2=(2r+a)^2$$
$$2r\cdot 2=2r+a$$

Wabenrätsel



$$a=2r\cdot\sqrt{2}-2r$$
$$a=2r\cdot(\sqrt{2}-1)$$
$$a=d\cdot(\sqrt{2}-1)$$
$$a\approx d\cdot 0{,}414$$

Hieraus ergibt sich als Bedingung $a>d\cdot(\sqrt{2}-1)$.

alpha – sehr heiter

1. Streckung, 2. Schrägriß, 3. Winkelmesser, 4. Rechenoperation, 5. Überschlag, 6. Negativ, 7. Fluchtlinie, 8. Restklasse, 9. Hauptwert, 10. Grundbereich, 11. Kegelmantel

Schiebelehre

Hast Du genug Phantasie?

Es sind die Ziffern 1, 2, 3, ... spiegelbildlich gezeichnet und aneinandergestellt.

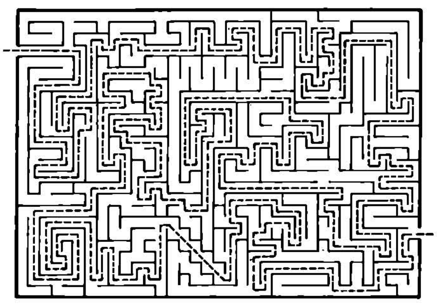
Kryptarithmetik

$$\begin{array}{ccccc} 208 & - & 73 & = & 135 \\ : & & + & & - \\ 4 & \cdot & 2 & & 8 \\ \hline 52 & + & 75 & = & 127 \end{array}$$

Logik

Figur 5 gehört nicht in diese Reihe. Sie wird zu Zweidrittel mit schwarz bedeckt, alle anderen Figuren je zur Hälfte.

Irrgarten



WEGGEFÄHRTE BUCH

M. Rehm
Zahl, Menge, Gleichung
ein kleines Lexikon für Schüler ab Kl. 4,
96 S., zahlreiche Illustrationen
v. R. Schultz-Debowski, kartoniert,
Preis: 5,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

T. Varga
Mathematische Logik für Anfänger
Band 2 – Prädikatenlogik
256 S. mit 209 Abb., Pappeinband mit
Folie, Preis: 9,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag,
Berlin

Solodownikow
Lineare Ungleichungssysteme
99 S., 51 Abb., Broschur, Preis: 5,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin

L. I. Golowina/I. M. Jaglow
Vollständige Induktion in der Geometrie
144 S. mit 82 Abb., Broschur,
Preis: 6,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin

J. Vysin
Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben
(Übersetzung aus dem Tschechischen)
146 S., mit 41 Abb., kartoniert,
Preis: 9,60 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft,
Leipzig

Lohse/Ludwig
Statistik für Forschung und Beruf
Erfassung, Aufbereitung und Darstellung
statistischer Daten
327 S., 185 z. T. farbige Bilder, 3 Selbstleistungskontrollen und mit einem 40seitigen
Beiheft als Wissensspeicher, Halbgewebe,
Preis: 22,00 M
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Autorenkollektiv
Lehrgang der Elementarmathematik
zur Vorbereitung auf die Fachschulreife
583 S. mit 523 Bildern und 856 Aufgaben
mit Lösungen, Halbleinen, Preis 12,50 M
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

G. Maibaum
Wahrscheinlichkeitsrechnung
224 S., 48 Abb., Pappeinband,
Preis: 7,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag,
Berlin

Stahl/Wenzel
Elektronische Datenverarbeitung für Arbeitsgemeinschaften
etwa 96 S., etwa 65 Abb., broschiert,
Preis: 2,70 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag,
Berlin

Autorenkollektiv
Tabellenbuch Chemie
485 S., 2 Bilder, Halbleinen, Preis: 16,20 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

Autorenkollektiv
Kleine Enzyklopädie – Natur
780 S., 1 000 Textabb. und Tabellen,
96 Tafeln, davon 34 in Farbe, Festeinband,
Preis: 12,00 M
VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig

Autorenkollektiv
Schiffe und Schiffahrt von morgen
240 S., 205 Bilder, 7 Tafeln, Halbleinen,
Preis: 25,00 M
VEB Verlag Technik, Berlin

G. Trost
Die Modelleisenbahn
158 S., zahlreiche techn. Zeichnungen und
Abb., zellophaniert, Preis: 19,80 M
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen,
Berlin

U. Becher
Auf kleinen Spuren
Die Anfänge der Modelleisenbahn
254 S., zahlreiche techn. Zeichnungen und
Abb., zellophaniert, Preis: 18,80 M
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen,
Berlin

Autorenkollektiv
Zukunft im Blickfeld
Perspektiven – Hypothesen – Probleme
240 S., 4 Grafiken, Ganzgewebe,
Preis: 9,80 M
Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin

H. Fiedler
Chemisches Rechnen
auf elementarer Grundlage in Form
einer Aufgabensammlung
367 S., 27 Bilder, 400 Aufgaben mit
entwickeltem Lösungsgang, 218 Aufgaben
zum Selbststudium, Halbleinen,
Preis: 13,00 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

I. Wisliceng
Grundbegriffe der Mathematik
II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen,
mit einem historischen Anhang von
H. Wussing
170 S., 19 Abb., Broschur, Preis: 10,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin

Heinz A. F. Schmidt
Flugzeuge aus aller Welt (IV)
196 S., zahlr. Abb. mit techn. Daten,
Halbleinen, Preis: 12,00 M
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen,
Berlin

H. Schnera
Keine Angst vor Langeweile
zahlreiche Spiele für die Freizeit
186 S., zahlr. Abb., Pappband mit Folie,
Preis: 4,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Autorenkollektiv
Brockhaus ABC Chemie
VEB F. A. Brockhaus Verlag Leipzig
2 Bände Preis: 72,00 M

Arndt
Kleines Formellexikon
560 S., 270 Abb., Plasteinband,
Preis: 8,20 M
VEB Verlag Technik Berlin

Klaus/Liebscher
Systeme – Informationen – Strategien
etwa 400 S., 84 Abb., 32 Tafeln, Leinen,
Preis: etwa 22,50 M
VEB Verlag Technik Berlin

J. Churgin
Formeln – und was dann?
Gespräche eines Mathematikers mit Biologen und Nachrichtentechnikern, Ärzten und Technologen, Geologen und Ökonomen, mit Menschen verschiedener Fachgebiete und Interessen über die Mathematik und ihre Beziehungen zu anderen Wissenschaften.
251 S., zahlreiche Bilder Preis: 9,00 M
VEB Verlag Technik Berlin

GLÆDELIG JUL OG GODT NYTÅR

HYVÄÄ JOULUA JA ONNELLISTA UUTTA VUOTTA

A PEACEFUL AND PROSPEROUS NEW YEAR!

MEILLEURS VOEUX DE NOUVEL AN

PLEJ FELIĈAN NOVJARON

- كل عام وانتم بخير -

MIT DEN BESTEN NEUJAHRSWÜNSCHEN

FELIZ AÑO NUEVO

ŠŤASTLIVÝ NOVÝ ROK!

ŠŤASTNÝ NOVÝ ROK!

С НОВЫМ ГОДОМ!

GOD JUL OCH GOTT NYTT ÅR

FELICE ANNO NUOVO

Mit dieser Seite grüßen wir all unsere 54 000 Leser aus der DDR und unsere 4 000 ausländischen Leser.
Wir stellen die mathematischen Schülerzeitschriften der sozialistischen Länder vor, mit denen wir im Sinne einer umfassenden Integration seit Jahren zusammenarbeiten.

Allen ein erfolgreiches 1975!