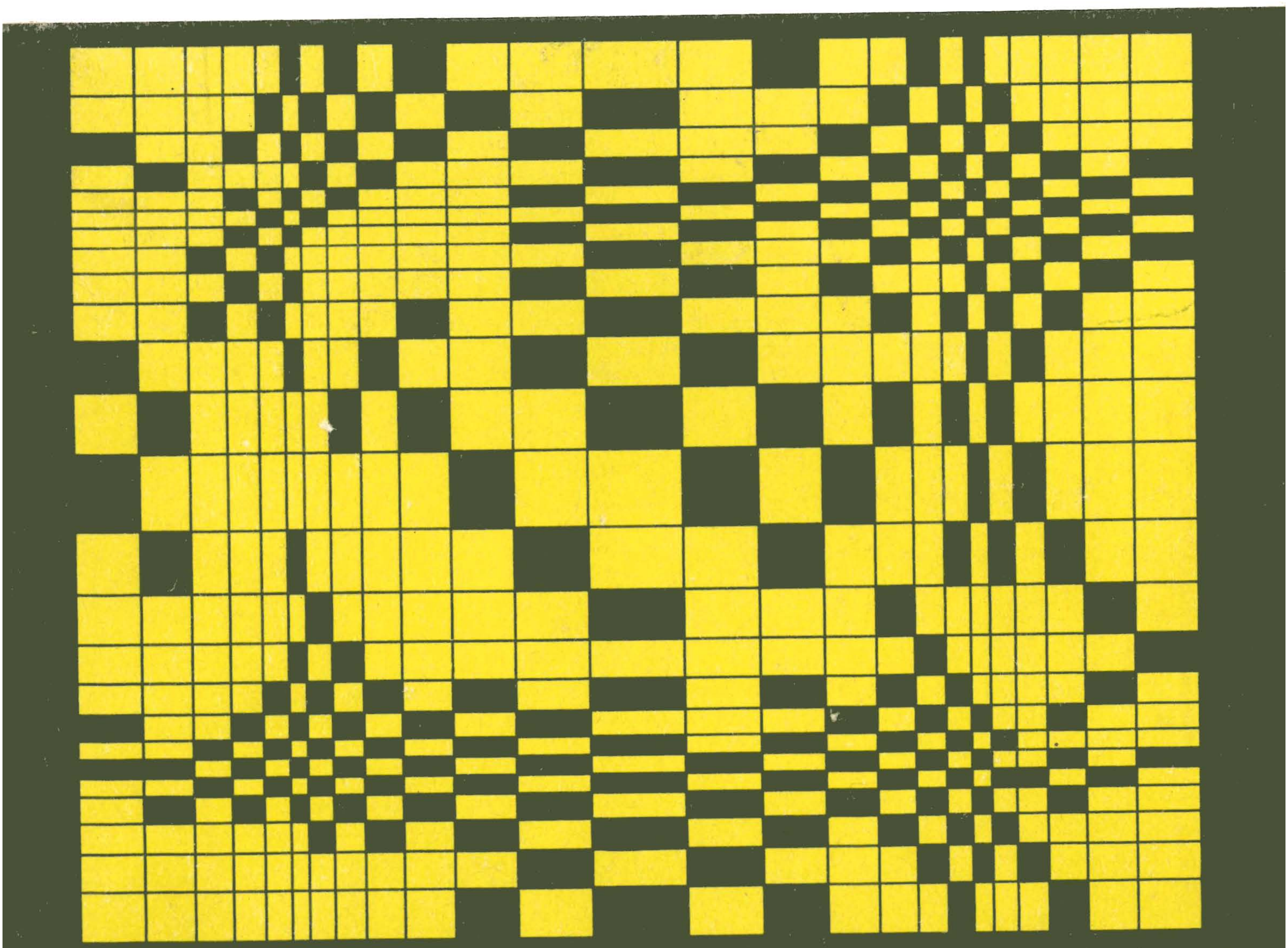
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 1,50 M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H.J. Sprengel, Potsdam (S. 3); J. Lehmann, Leipzig (S. 3, 4, 5); *Vignetten:* K. Mozolewski, Warschau (S. 6); H. Gabbert, LVZ, (S. 10, 13); A. Nekrassow, Moskau (S. 10); NBI 27/69 (S. 12); W. Schubert, Berlin (S. 12); H. Jankofsky, Berlin (S. 12); M. Vorbeck, Berlin (S. 12); M. Bofinger, Berlin (S. 12, 13); E. Eichholz, Berlin (S. 12); K. Vonderwerth, Berlin (S. 13); G. Hilliger, Berlin (S. 13)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 27. November 1974

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und der wissenschaftlich-technische Fortschritt

Die Menschheit befindet sich jetzt in einer Phase ihrer Entwicklung, in der wissenschaftliche Erfolge sehr schnell praktische Anwendung finden, und die Bedürfnisse der Praxis drängen die Wissenschaft, sich neuen Problemen zuzuwenden, neue Forschungsmethoden zu entwickeln. Die Wissenschaft unserer Tage ist untrennbar mit dem täglichen Leben der Gesellschaft verbunden, und von ihr hängt im bedeutenden Maße der weitere gesellschaftliche Fortschritt ab. Ein charakteristischer Zug unserer Zeit ist es ferner, daß mathematische Methoden weite praktische Anwendungen erhalten haben und zu einem der wesentlichen Hilfsmittel des wissenschaftlichen, technischen und ökonomischen Fortschritts geworden sind. Dabei erwarb die mathematische Wissenschaft von den zufälligen Erscheinungen eine besondere Rolle. Es stellte sich klar heraus, daß die Ideen und Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie unentbehrlich sind, um bestimmte physikalische und chemische Theorien aufzustellen, gewisse technische Systeme zu berechnen und medizinische Diagnosen zu stellen, Experimente zu planen und die Daten zu verarbeiten, die sich dabei ergeben. Die Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik wurden in unseren Tagen zu fundamentalen Begriffen der Wissenschaft und Praxis. Über die Ursache dafür und über gewisse allgemeine Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie geht es im vorliegenden Artikel.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelte sich unter dem Einfluß der beharrlichen Forderungen der Praxis, in der unvermeidliche zufällige Meßfehler auftreten, und auch in Verbindung mit Aufgaben der Demographie und Versicherungen. Das Anfangsstadium der Wahrscheinlichkeitstheorie ist mit den Namen bedeutender Wissenschaftler verbunden: B. Pascal, P. Fermat, C. Huygens, J. Bernoulli u. a. Sie entstand aus dem Streben, die Natur der Dinge zu verstehen und neue Naturgesetze zu finden, und zugleich ein Mittel in die Hand zu bekommen, um das Verhalten von wichtigen Naturerscheinungen und technischen Prozessen vorauszuberechnen. Experimente erhielten in jener Zeit eine entscheidende Bedeutung, und daher spielte die Notwendigkeit, eine Theorie der Meßfehler zu schaffen, eine besondere Rolle. Die ersten Schritte in dieser Richtung wurden von dem großen italienischen Wissenschaftler Galileo Galilei schon im 16.–17. Jahrhundert getan; aber die Entwicklung der Theorie, die bis auf unsere Tage bedeutsam ist, geht auf ein anderes Genie zurück, nämlich den deutschen Gelehrten Karl Gauß.

Im 17. und 18. Jahrhundert richteten die Wissenschaftler wesentlich ihre Aufmerksamkeit auf das Studium der zufälligen Ereignisse und ihrer Wahrscheinlichkeiten; dagegen standen im 19. Jahrhundert die Eigenschaften von Zufallsgrößen im Mittelpunkt des Interesses auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In dieser Periode sind wohl die meisten Erfolge in der Wahrscheinlichkeitstheorie mit den Namen französischer und russischer Wissenschaftler verbunden, z. B. mit P. Laplace, S. Poisson, P. L. Tschebyschev, A. M. Ljapunov und A. A. Markov. Es verdient dabei erwähnt zu werden, daß während des ganzen vergangenen Jahrhunderts fundamentale mathematische Resultate erhalten wurden, obwohl die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ungenau waren und strenge Definitionen fehlten.

Im ersten Viertel unseres Jahrhunderts, zeigte sich mit völliger Klarheit, daß der Begriff Wahrscheinlichkeit ein Grundbegriff der modernen Physik ist und es ohne ihn nicht möglich war, weitere physikalische Gesetze zu formulieren. So entstand die Notwendigkeit, die Wahrscheinlichkeitstheorie logisch aufzubauen. Ohne dies wäre das bedeutende Gebäude der statistischen und Quantenphysik ständigem Angriff ausgesetzt. Außerdem hatte man in dieser Zeit endgültig die fundamentale Rolle der Wahrscheinlichkeitstheorie für die Biologie und Ingenieurwissenschaften, für die Organisation der Produktion und für eine Anzahl anderer Gebiete der Praxis (z. B. der Theorie und Praxis der Nachrichtenverbindungen, Fragen des Transports, der Ökonomie usw.) verstanden. So entstand ein echtes Bedürfnis nach logischer Vervollkommnung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dies wurde auch deutlich in dem berühmten Vortrage von D. Hilbert auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Paris, in dem er 23 Probleme von fundamentaler Bedeutung aufstellte. Unter der Nummer 6 in dieser Liste stand die Ausarbeitung des axiomatischen Aufbaus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dieses Problem wurde von dem sowjetischen Mathematiker A. N. Kolmogorov auf der Grundlage der Mengentheorie gelöst. Das von ihm vorgeschlagene Axiomensystem ist in der ganzen Welt anerkannt. Auf der Grundlage der Ideen A. N. Kolmogorovs erhielten alle Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie einen klaren Sinn.

Aber nicht nur die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie war die Aufgabe der Wissenschaft des 20. Jahrhunderts. Aktuelle Fragen der Physik, Biologie und anderer naturwissenschaftlicher Gebiete und auch der Technik und Ökonomie forderten mit voller Stimme den Aufbau eines Begriffs, der das Wesen vieler realer Erscheinungen widerspiegelt. Es besteht darin, daß sie sich zeitlich verändern und daß ihre Charakteristiken in jedem Zeitpunkt nicht durch die vorhergehende Entwicklung eindeutig bestimmt sind, sondern vom Zufall abhängen. So entstand ein Begriff, der gegenwärtig eine fundamentale Rolle in Wissenschaft und Praxis spielt – der Begriff des zufälligen (oder stochastischen) Prozesses. Mit diesem Begriff sind nicht nur Erfolge der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematik im ganzen verbunden, sondern durch ihn ist die Naturwissenschaft unmittelbar mit der Praxis verbunden.

Betrachten wir jetzt einige Beispiele praktischer Situationen, die uns hinführen in die Welt der zufälligen Ereignisse, der Zufallsgrößen und der Zufallsprozesse, d. h. zu den Grundbegriffen der Wissenschaft vom Zufall, nämlich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Beispiele machen zugleich die Breite und Wichtigkeit der Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie sichtbar und lassen ihre Bedeutung für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt erkennen.

Telefonverbindungen gehören zu einem unerläßlichen Bestandteil unseres täglichen Lebens. Würde man der modernen Menschheit die Möglichkeit zu telefonieren entziehen, so hätte das eine völlige Desorganisation des Lebens der Gesellschaft zur Folge. Werfen wir einen Blick auf Telefonverbindungen von der technischen oder ökonomischen Seite, die uns hier interessiert. Wählen wir irgendein Zeitintervall, etwa von 10 Uhr bis 10.10 Uhr. Wieviel Anrufe von Teilnehmern gehen in dieser Zeitspanne beim Fernamt ein? Wieviel Absagen erhalten die Teilnehmer von ihm, weil die Leitungen besetzt sind oder die Vermittlungen nicht besetzt sind? Diese Fragen sind nicht unnütz, da sie eng mit der Qualität der Telefonverbindungen verbunden sind. Auf diese Fragen zu antworten ist schwierig, weil niemandem bekannt ist, wieviel Teilnehmer in diesem Zeitintervall das Fernamt in Anspruch nehmen. Vielleicht beträgt die Anzahl der Anrufe 0, 1, 2, 3, usw., aber mehr wissen wir nicht über sie. Uns ist aber auch nicht bekannt, wie lange ein begonnenes Gespräch dauern wird. Bekanntlich wird zuweilen eine Telefonverbindung nur für ganz kurze Mitteilungen hergestellt, etwa „ich komme". Aber man kennt auch den Fall, in dem ein Telefonapparat durch ein ununterbrochenes Gespräch von 10, 15, 20 und mehr Minuten besetzt ist. Die Länge des Gesprächs im voraus festzusetzen ist nicht möglich, sie ist zufällig. Folglich ist auch die Anzahl der besetzten Leitungen in der Zentrale zufällig. Sie verändert sich auf zufällige Weise in der Zeit und kann als Beispiel für einen zufälligen Prozeß angesehen werden. Wie wir aus dem eben Gesagten ersehen, führt uns schon die oberflächliche Betrachtung der Naturerscheinungen, denen man bei der Analyse der Arbeit von Telefonzentralen begegnet, dazu, zufällige Prozesse zu betrachten. In einem gegebenen Zeitintervall I können in der Zentrale $k = 0, 1, 2, \ldots$ Anrufe eingehen. Ereignisse der Gestalt „k Anrufe in I" heißen zufällig. Dagegen nennt man die Anzahl der wirklich in I eintreffenden Anrufe eine Zufallsgröße. Sie ist eine Zufallsgröße, die nur ganze, nichtnegative Werte annehmen kann. Die Dauer eines Gespräches ist auch eine Zufallsgröße, aber sie kann einen beliebigen nichtnegativen, auch irrationalen Wert annehmen.

Betrachten wir jetzt ein physikalisches Beispiel. Wir beschäftigen uns mit der Erforschung der Radioaktivität einiger Stoffe. Uns interessiert die Energiemenge, die aus einem bestimmten Präparat in einem gegebenen Zeitintervall t austritt. Bekanntlich ist die Zahl der Atome, die in t zerfallen, zufällig; sie nimmt einen der Werte 0, 1, 2, ... an. Wir haben es abermals mit Zufallsgrößen zu tun, nämlich mit der Zahl der zerfallenden Atome und der dabei frei werdenden Energie. Für die Messung der Zahl der zerfallenden Atome gibt es besondere Geräte, z. B. den weithin bekannten Geiger-Müller-Zähler. Aber jetzt fragen wir uns: Gibt es absolut genaue Aussagen dieser Zähler? Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns an den Aufbau eines solchen Gerätes. Jedes Teilchen, das in den Zähler einfällt, ruft in ihm eine Entladung hervor. Der Zähler bleibt unempfindlich für neue Teilchen bis die nächste Aufladung beendet ist. Somit ist der Zähler ein nicht völlig genaues Gerät. Also entsteht die Frage: Wieviel Teilchen registriert der Zähler in einem vorgeschriebenen Zeitintervall nicht? Offensichtlich ist auch diese Zahl zufällig. Von neuem begegnen wir hier der Notwendigkeit, die Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung heranzuziehen, die sich jetzt nicht auf technische, sondern physikalische Erscheinungen beziehen. Und das Heranziehen der Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ist keine Ausnahme, sondern eine Regel. Darüber hinaus kam die moderne Physik zu der Schlußfolgerung, daß alle physikalischen Gesetzmäßigkeiten wahrscheinlichkeitstheoretischen Charakter tragen und daß man wahrscheinlichkeitstheoretische Ideen und Begriffe benötigt, um sie zu formulieren. In der Physik zieht man es aber gewöhnlich vor; von statistischen Gesetzmäßigkeiten zu sprechen. Nicht ohne Grund schließt ein so hervorragender Physiker wie Max Born sein neuestes Buch mit den Worten: „Wir wissen, wie vergeblich die klassische Physik kämpfte und sich bemühte, immer neue quantitative Beobachtungen mit vorgefaßten Ideen über die Kausalität in Übereinstimmung zu bringen ... und wie sie gegen das Eindringen des Zufalls einen aussichtslosen Krieg führte. Heute ist die Rangordnung der Ideen umgekehrt: der Zufall wurde zu einem Grundbegriff".

Etwas später schreibt er: „... Ich glaube, daß der Begriff Zufälligkeit wichtiger ist als der der Kausalität. Übrigens kann man in jedem konkreten Fall über die Beziehung Ursache–Wirkung nur urteilen, wenn man die Gesetze des Zufalls auf die Beobachtungen anwendet."

Aber vielleicht findet man eine solche Situation nur in der Physik, die so eng mit der Mathematik verbunden ist, daß man schwer unterscheiden kann, wo die Physik beginnt und die Mathematik endet? Verliert vielleicht der Begriff der Zufälligkeit seine Bedeutung in der Medizin, die lange und stolz ihre Unabhängigkeit von der Mathematik aufrechterhalten hat? Wie sich erweist, verhalten sich die Dinge nicht so; und die wahrscheinlichkeitstheoretischen Ideen dringen in die Medizin ein und erhalten eine ernsthafte Bedeutung in Fragen der Diagnostik, Differentialdiagnostik, bei der Auswahl von Symptomkomplexen für die verschiedenen Erkrankungen usw. Wir wollen hier nur auf eine Frage der Organisation des Gesundheitsschutzes eingehen; hier wird offensichtlich, daß man mit den Hauptfragen auf diesem Gebiet nicht fertig wird ohne wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden zu nutzen. Wir betrachten die Arbeitsorganisation einer Klinik, die einen bestimmten Bezirk einer großen Stadt betreut. Wieviel Ärzte und Sanitätswagen sind nötig, damit die Patienten mit akuten Erkrankungen nicht länger als eine im voraus gegebene Frist warten müssen, ehe ein Arzt bei ihnen eintrifft? Bei der Antwort auf diese Frage stoßen wir auf eine Reihe von Schwierigkeiten, und zwar: Zunächst, wieviel Forderungen wird es geben und wie verteilen sie sich auf die Zeit einer Schicht? Niemand kann dies voraussagen, weil die Zahl der Forderungen und die Augenblicke ihres Eintreffens zufällig sind. Überdies hängt die Zeit, die der Arzt an einem Krankenbett verbringt, auch vom Zufall ab. Zufällig

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc.
Boris Gnedenko

Lomonossow-Universität Moskau
Mitgl. der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR

▲1351▲ Gesucht sind alle Werte des reellen Parameters α, für die die Ungleichung

$$\alpha \cdot 9^x + 4(\alpha - 1)3^x + \alpha > 1$$

für alle x besteht.

ist auch die Zeit, die der Arzt aufwenden muß, um von der Klinik zur Wohnung des Kranken zu gelangen. Aber hierin ist der Einfluß des Zufalls nicht erschöpft. Wir weisen nur auf eine weitere Möglichkeit hin. Es wird von Zeit zu Zeit vorkommen, daß der Anruf eines Kranken an ein besetztes Telefon der Klinik gerät. Dadurch wird natürlich die Wartezeit dieses Patienten bis zum Eintreffen des Arztes vergrößert.

Wir verweilen nur noch bei einer Frage. In den letzten Jahren entstand in Verbindung mit der Vergrößerung der Rolle der technischen Systeme und mit der Konstruktion von modernen Flugzeugen, Nachrichtenübermittlungssystemen, Elektrizitätswerken, landwirtschaftlichen Maschinen und medizinischen Apparaturen eine neue Forschungsrichtung, die die Bezeichnung Zuverlässigkeitstheorie erhielt. In dieser Theorie befaßt man sich u. a. mit Maßnahmen, die die Zeit erhöhen, in der die Maschinen störungsfrei arbeiten. Besondere Bedeutung für die Praxis haben zwei Aufgaben, die man bis jetzt nicht als gelöst ansehen kann. Eine von ihnen besteht in der Prognose von Versagern, die andere in der Ausarbeitung von Methoden zur Beschleunigung von Versuchen. Der Sinn der ersten Aufgabe besteht darin, ein System von Kriterien auszuarbeiten, nach denen man im voraus beurteilen kann, ob sich bei einer technischen Anlage während der Arbeit ein gefährlicher Zustand herausbildet, der geeignet ist, das plötzliche Versagen der ganzen Anlage herbeizuführen. Die zweite Aufgabe beruht darauf, daß technische Geräte bei gewöhnlichen Belastungen in der Lage sind, mehrere Jahre einwandfrei zu arbeiten. Versuche zur Prüfung der Qualität solcher Geräte kann man oft nur über kürzere Zeiträume, Monate oder Wochen, erstrecken. Wie kann man bei verhältnismäßig kurzen Versuchen darüber urteilen, wie sich eine große Zahl von Geräten im Verlaufe normaler Arbeitszeiten verhalten wird?

Fortsetzung auf Seite 24

Junge Mathematiker ehren die Opfer des Faschismus

Standhaftigkeit, Kampfgeist und Tatkraft der Millionen aufrechter Antifaschisten seien uns Vorbild in dem Kampf, den wir führen zur Erhaltung und Sicherung des Friedens auf der Welt.

In den Konzentrationslagern, den grauenhaftesten Stätten der Massenvernichtung wurden von den Nazis über 11 Millionen Menschen, Angehörige fast aller europäischen Länder, vergast, erschlagen oder zu Tode gequält.
Auschwitz, Dachau, Maidanek, Mauthausen, Buchenwald, Ravensbrück, Sachsenhausen sind nur einige der vielen KZ-Lager, die in Deutschland und in den von den Nazis okkupierten Ländern Europas errichtet wurden. Für immer werden diese Stätten Anklage erheben gegen die Unmenschlichkeit des Faschismus. Wir gedenken gleichzeitig derer, die im Kampf für die Befreiung des deutschen Volkes ihr Leben ließen.

Die Teilnehmer der XVI. *Internationalen Mathematikolympiade* (Erfurt/Berlin 1974) beim Besuch der *Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald*

Teilnehmer der ersten *Olympiade Junger Mathematiker der DDR* (DDR-Stufe 1962) beim Besuch der *Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald*

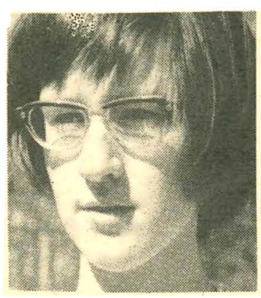
Teilnehmer der VII. *Internationalen Mathematikolympiade* (Berlin 1965) besuchen das sowjetische Ehrenmal in Berlin-Treptow

Mädchen meistern Mathematik

Im *Internationalen Jahr für die Frau:* *alpha* stellt die 17 Teilnehmerinnen der XVI. *Olympiade Junger Mathematiker* der DDR (DDR-Ausscheid) vor.



Bezirk	Neubrandenburg	Neubrandenburg	Potsdam
Name	**Sybille Stolzenburg**	**Ute Kuffner**	**Rita Wernsdorf**
Schule	EOS Richard Wossidlo Waren, Kl. 10	EOS „Artur Becker" Strasburg, Kl. 10	EOS Helmholtz Potsdam, Kl. 11
Beruf des Vaters	Reichsbahn-ingenieur	Lehrer	Dipl.-Wirtschaftler
Tätigkeit des Vaters	Produktions-mechaniker	Lehrer	Sekretär für Sozialpolitik
Beruf der Mutter	Angestellte	Erzieherin	Sekretärin
Tätigkeit der Mutter	Schwangerenberatung	Erzieherin	Sekretärin
Berufswunsch	Chemie	Medizin	Mathematik
Bes. Interessen	Reiten	Sport	Musik
Ges. Funktion	Förderzirkel Mathematik	FDJ-Gruppen-sekretär	Gruppenleitungs-mitglied, Mitglied des Klubaktivs (BKJM)
Auszeichnungen	Abzeichen für gutes Wissen	Abzeichen für gutes Wissen	Lessing-Med. in Silber, Herder-Med. in Silber und Gold
Erfolge in Bez.-Olympiade	72 1. Preis 74 1. Preis	71 1. Pr., 73 3. Pr. 74 1. Preis, 73 Teiln. DDR	72/74 gute Plätze 73 Teiln. DDR
Förderung in Mathematik	Kreisklub Bezirksklub	Kreisklub Bezirksklub	Bezirksklub Korrespondenz-zirkel (DDR)




Bezirk	Dresden	Halle	Karl-Marx-Stadt	Karl-Marx-Stadt
Name	**Almute Mende**	**Kerstin Bachmann**	**Ulrike Glaser**	**Barbara Kilias**
Schule	Pestalozzi-OS Riesa, Kl. 10	A.-H.-Francke EOS, Halle, Kl. 10	Diesterweg OS Karl-Marx-Stadt, Kl. 10	BBS Spinnerei-maschinenbau, Kl. 10
Beruf des Vaters	Dipl.-Physiker	Mathematiker (Prof.)	Lehrer	—
Tätigkeit des Vaters	Fachschuldozent	Hochschullehrer	Lehrer	—
Beruf der Mutter	Berufsschullehrer	Lehrerin	Lehrer	Dipl.-Ing.
Tätigkeit der Mutter	Hausfrau	Invaliden-rentnerin	Lehrer	Abt.-Ltr. für Kader u. Bildung
Berufswunsch	Mathematik	Mathematik	Mathematik	Dipl.-Ing. Maschb.
Bes. Interessen	Musik	Musik, Ru, Zei	Sport, Musik	Musik
Ges. Funktion	Mitgl. der FDJ-Leitung d. Klasse	Funkt. f. Agit. u. Prop.	Schriftführer der FDJ-Gruppe	Kulturobmann
Auszeichnungen	Abz. f. gutes Wissen (Silber), Für hohe L.z. E. d. DDR	mehrere Auszg.	Abzeichen für gutes Wissen (Silber)	Herder-Med. in Bronze, Abz. für gutes Wissen (Bronze, Silber)
Erfolge in Bez.-Olympiade	74 2. Preis	72 1. Preis 73 1. Preis 74 3. Preis	74 1. Preis	74 1. Preis
Förderung in Mathematik	AG Mathematik	Selbststudium	Mathe Zirkel i. Pionierhaus KMSt. Korrespondenzzirkel	Korrespondenz-zirkel

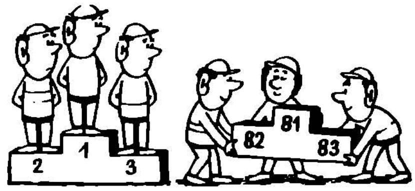
    

Potsdam	Schwerin	Schwerin	Suhl	Cottbus
Petra Beck Spezial-EOS Kleinmachnow, Kl. 10	**Ilona Drews** EOS Ludwigslust Kl. 9	**Ute Lehmann** EOS J. Brinckmann Güstrow, Kl. 10	**Bärbel Hamm** EOS Artur Becker Suhl, Kl. 11	**Sabine Anders** A.-Becker-OS Cottbus, Kl. 10
Dipl.-Lebens- mittelchemiker	Lehrer	Ing. für Wasser- wirtschaft	Lehrer	Elektriker
Abteilungsleiter	Lehrer	Bereichsingenieur	Päd. Mitarbeiter	Prüffeldleiter
med.-techn. Assistentin	Sekretärin	Reisebürokaufmann	Lehrer	—
Hausfrau	Schulsachbearbeiter	Zweigstellenleiter Reisebüro	Lehrer	pflegerische Hilfskraft
Medizin Bio, Ch, Zeichn. Mitgl. der GOL Mitgl. des Klubaktivs	Mathematik Ph, Rezitation Mitgl. der Lernkommission	— Bio, Ch Mitgl. des Agitationsstabes	Dipl.-Lehrer Ma./Ph. Musik FDJ-Klassengruppen- ltg., Pionier- gruppenleiter	Mathematik Musik Lehrverantwortlicher
		Abzeichen f. gutes Wissen	Abz. f. gutes Wissen (Silber), Abz. f. hohe Leistg. DDR	Abzeichen für gutes Wissen (Silber)
72/74 gute Plätze	73 2. Preis 74 3. Preis	72 2. Pr., 73 2. Pr. 74 3. Preis 73 Teiln. DDR	72 1. Preis 73 3. Preis 74 1. Preis	72 2. Preis 73 2. Preis 74 1. Preis
Kreisklub Bezirksklub	Kreisklub Bezirksklub	Kreisklub Bezirksklub	Schul-AG, Spezialistenlager Math. d. Bez.	Kreisklub Bezirksklub

Rostock	Rostock	Gera	Magdeburg	Magdeburg
Margit Birnbaum F.-L. Jahn EOS Greifswald, Kl. 10	**Angela Rohrbeck** EOS Franzburg Kl. 12	**Heidrun Wabnitz** Spezialschule VEB Carl Zeiss Jena, Kl. 12	**Adriane Ulrich** EOS Wanzleben Kl. 11	**Astrid Kammel** EOS J. Pestalozzi Havelberg, Kl. 10
Dipl.-Biologe	Lehrer	Dipl.-Landwirt	Finanzwirtschaftler	Ing. f. Lebens- mittelindustrie
Parteisekretär	Lehrer	Fachlehrer	Ltr. Abt. Rechnungswesen	Werkleiter
Dipl.-Biologe	Lehrer	Sekretärin	Sparkassen- angestellte	Industriekaufmann
med.-techn. Assistentin	Lehrer	Sekretärin	Sparkassen- angestellte	Planungsleiter
Mathematik Seminargr. Theat. Verantwortl. f. Lernzirkel	Mathematik Theater, Lyrik Lernfunktionär der Klasse	Dipl.-Physiker Ph, Sport, Fremdspr. FDJ-Ltg. (BKJM) stellv. Klassen- gruppenleiter	Mathematik Literatur, Musik FDJ-Sekretär der Klasse	Mathematik Handball, Musik stellv. GOL-Sekretär
Abzeichen für gutes Wissen (Bronze)	Abzeichen für gutes Wissen (Gold), Herder-Med. in Bronze	Herder-Med. in Silber, Abz. für gutes Wissen (Gold)	Abzeichen für gutes Wissen (Silber)	Herder-Med., Abz. für gutes Wissen (Silber)
72 2. Preis 73 2. Preis 74 1. Preis	72 2. Pr., 73 2. Pr. 74 1. Preis 72/73 Teiln. DDR	72 1. Pr., 73 4. Pr. 74 3. Preis Teiln. DDR 72/73	71 1. Pr., 72 3. Pr. 74 2. Preis Teiln. 72/73 DDR	72 2. Preis 73 1. Preis 74 1. Preis
Kreisklub Bezirksklub	Bezirkslager Mathematik	AG Mathematik Korrespondenzzirkel (BKJM)	Bezirksklub	Schul-AG Bezirksklub

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 30. April 1975

aus: „Polen" 5/68, Kazimierz Mozolewski

▲5▲1321 Der 1,35 m breite und 3,45 m lange Fußboden des Badezimmers einer Wohnung soll mit quadratischen Fliesen ausgelegt werden, die eine Seitenlänge von 15 cm besitzen und 6 mm stark sind. Es sollen alle dafür benötigten Fliesen übereinander gestapelt werden. Wie hoch wird dieser Stapel?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

▲5▲1322 In einer Schule sollen in allen Klassenräumen sämtliche Stühle erneuert werden. Dazu wurden 540 Stühle bestellt. Durch eine Teillieferung konnten in fünf Klassenräumen mit je 28 Sitzplätzen und in fünf Klassenräumen mit je 30 Sitzplätzen die Stühle bereits ausgewechselt werden. Es bleiben nur noch Klassenräume mit je 25 Sitzplätzen übrig. Wieviel Klassenräume mit je 25 Sitzplätzen gibt es an dieser Schule?

Sch.

W 5 ■ 1323 In einem volkseigenen Betrieb kämpfen 27 Brigaden um den Titel „Kollektiv der sozialistischen Arbeit". Das sind 11 Brigaden mehr als der vierte Teil der Anzahl aller Brigaden dieses Betriebes. Wieviel Brigaden arbeiten in diesem Betrieb?

W 5 ■ 1324 Von Zimmern eines Studentenwohnheimes sind neun als 4-Bett-Zimmer und drei mehr als 2-Bett-Zimmer eingerichtet. Die restlichen Räume sind 6-Bett-Zimmer. Wieviel Zimmer mit je 6 Betten gibt es in diesem Studentenwohnheim, wenn es insgesamt über 126 Betten verfügt?* *Sch.*

W 5*1325 Zu unserer Hortgruppe gehören drei Pioniere mit den Familiennamen Hofmann, Hoschke und Meisel. Ihre Vornamen lauten Dirk, Andrea bzw. Mario. Sie sind entweder neun oder zehn Jahre alt, und sie besuchen die Klasse 4a bzw. 4b. Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Familiennamen, wie alt ist jeder von ihnen und welche Klasse wird von ihnen besucht? Von ihnen ist uns folgendes bekannt:

a) Die Pioniere mit dem Vornamen Dirk und dem Familiennamen Hofmann sind Schüler verschiedener Klassen.
b) Dirk ist genau so alt wie der Pionier mit dem Familiennamen Hoschke.
c) Andrea und der Pionier mit dem Familiennamen Hofmann, der der jüngste von den dreien ist, gehen in dieselbe Klasse.
d) Das Mädchen besucht die Klasse 4b.

Hortgruppe 4a/4b, 5. Oberschule Zittau

W 5*1326 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 145. Eine dieser beiden Zahlen wird durch eine Ziffer dargestellt, die auf die Grundziffer 2 endet. Streicht man diese Grundziffer 2, so erhält man die Ziffer, durch die die zweite Zahl dargestellt wird. Wie lauten die beiden natürlichen Zahlen?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

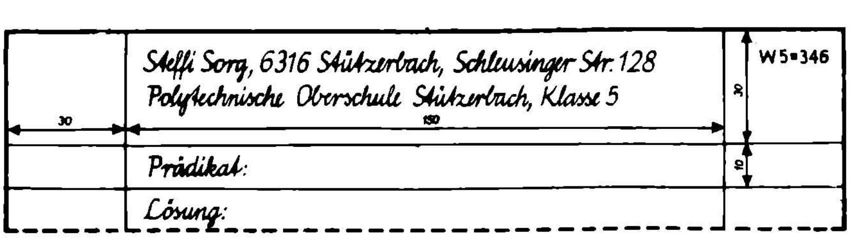
▲6▲1327 Es sind alle natürlichen Zahlen n mit $1000 \leqq n \leqq 9999$ zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) Die Ziffern dieser Zahlen beginnen und enden mit der gleichen Grundziffer.
b) Die Zahl, die der zweiten Grundziffer entspricht, ist dreimal so groß wie die Zahl, die der ersten Grundziffer entspricht.
c) Die Zahl, die der dritten Grundziffer entspricht, ist um 5 kleiner als die Zahl, die der zweiten Grundziffer entspricht.

Ute Möllhoff, Piesau

▲6▲1328 Kann die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine Primzahl sein? *Sch.*

W 6 ■ 1329 Wieviel Grad beträgt die Summe der Innenwinkel eines konvexen Vielecks (n-Ecks)? *Sch.*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

W 6 ■ 1330 Im Kreis Seelow nehmen 126 Lehrerinnen und Lehrer an der Weiterbildung teil. Die Hälfte der Anzahl der Lehrer ist gleich dem fünften Teil der Anzahl der Lehrerinnen. Wieviel Lehrerinnen und wieviel Lehrer beteiligen sich an der Weiterbildung? *Helmut Engelmann, Sachsendorf*

W 6*1331 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie die Kathete $\overline{AC}$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ schneide die Gerade BC im Punkt D, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ADB$ schneide die Gerade AB im Punkte E. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck AEC gleichseitig ist.

Sch.

W 6*1332 Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Winkel $\sphericalangle ABC=\beta=50°$, in welchem der Abstand des Schnittpunktes H seiner Höhe n von der Geraden AB $m=3$ cm, von der Geraden BC $n=2$ cm beträgt! Begründe die Konstruktion! *Sch.*

▲7▲1333 Es ist der Rauminhalt eines Spielwürfels von 18 mm Kantenlänge zu berechnen, dessen halbkugelförmige Augen einen Durchmesser von 2 mm besitzen. (Volumen einer Kugel: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$)

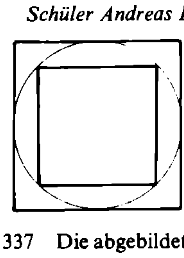
Klaus Göthling, Thaldorf

▲7▲1334 Eine Holzfällerbrigade stellte in drei Tagen 184 m^3 Holz bereit. Dabei wurde von der Brigade der Tagesplan am ersten Tag mit 14 m^3 übererfüllt. Am zweiten Tag lag die Brigade mit 2 m^3 unter der Planaufgabe. Am dritten Tag stellte sie 16 m^3 über den Plan bereit. Wieviel Kubikmeter Holz mußte die Brigade täglich nach dem Plan bereitstellen?

W 7 ■ 1335 Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB}>\overline{BC}$! Konstruiere auf $\overline{AB}$ einen inneren Punkt E, auf $\overline{BC}$ einen inneren Punkt F, auf $\overline{CD}$ einen inneren Punkt G und auf $\overline{DA}$ einen inneren Punkt H so, daß $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=m<\overline{BC}$ gilt! Weise nach, daß das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist! *Sch.*

W 7 ■ 1336 Das Touristenschiff MS „Spree" verfügt über 29 Kabinen mit zwei, drei oder vier Betten und kann 86 Fahrgäste aufnehmen. Ein Fahrgast behauptet, daß es 11 oder 13 Dreibettkabinen gebe. Weise nach, daß diese Behauptung falsch ist!

Schüler Andreas Fittke, Berlin, Kl. 7



W 7*1337 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dar, dem ein Quadrat einbeschrieben und ein weiteres Quadrat umbeschrieben wurde. Jemand behauptet, daß

a) die Maßzahl des Flächeninhalts des Kreises gleich dem arithmetischen Mittel aus den Maßzahlen der Flächeninhalte der beiden Quadrate ist,

b) die Maßzahl des Umfangs des Kreises gleich dem arithmetischen Mittel aus den Maßzahlen der Umfänge der beiden Quadrate ist. Es ist zu überprüfen, ob diese Behauptungen zutreffen!

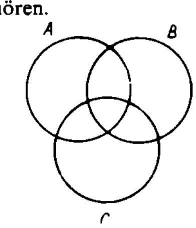
Mathematikfachlehrer Werner König, Berlingerode

W 7*1338 Gegeben seien die folgenden Mengen von natürlichen Zahlen:

$M_1=\{1; 10\}$, $M_2=\{1; 9\}$,
$M_3=\{6;\ 7\}$, $M_4=\{2; 8\}$,
$M_5=\{1;\ 5\}$, $C=\{1; 3; 4; 5; 9\}$.

Ferner seien A und B zwei Mengen, die nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10 als Elemente enthalten können, mit folgenden Eigenschaften:

a) Zur Menge M_1 gehören genau diejenigen Elemente, die der Menge A und der Menge B angehören.



b) Zur Menge M_2 gehören genau diejenigen Elemente, die der Menge B und der Menge C angehören.

c) Zur Menge M_3 gehören nur diejenigen Elemente der Menge A, die weder der Menge B noch der Menge C angehören.

d) Zur Menge M_4 gehören diejenigen Elemente der Menge B, die weder der Menge A noch der Menge C angehören.

e) Zur Menge M_5 gehören genau diejenigen Elemente, die der Menge A und der Menge C angehören.

f) Alle Elemente der Mengen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sind mindestens einer der Mengen A, B oder C enthalten.

Es sind alle Elemente der Menge A sowie alle Elemente der Menge B anzugeben und in das abgebildete Diagramm einzutragen. *Sch.*

W 8 ■ 1339 Bei den Bahnradsport-Weltmeisterschaften 1974 in Montreal wurde *Eduard Rapp* (UdSSR) im 1000-m-Zeitfahren Weltmeister. Er legte die Strecke von 1000 m in 1 min 7,61 s zurück. Den zweiten Platz belegte *Ferrucio Ferro* (Italien) mit 1 min 7,66 s.

a) Man berechne die durchschnittlichen Geschwindigkeiten (in $m \cdot s^{-1}$ und in $km \cdot h^{-1}$), die die beiden Fahrer auf der Bahn erzielten.

b) Wieviel Meter betrug der Vorsprung, den *Rapp* bei der Fahrt durch das Ziel vor *Ferro* hatte? (Dabei soll eine konstante Geschwindigkeit vorausgesetzt werden; eine etwaige Erhöhung der Geschwindigkeit beim Endspurt wird also nicht berücksichtigt.) *L.*

W 8 ■ 1340 Es ist zu untersuchen, ob es ein gleichseitiges Dreieck gibt, bei dem die Maßzahl des Flächeninhalts gleich der Maßzahl des Umfangs ist.
Wenn ja, sind die Maßzahlen der Höhe und der Seitenlänge eines solchen gleichseitigen Dreiecks zu ermitteln.

Matthias Rogall, Dresden

W 8*1341 In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis ebenso lang wie die Winkelhalbierende eines der Basiswinkel. Wie groß ist der Winkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks?

H.-J. Schmidt, stud. math., Greifswald

W 8*1342 Es seien a und b zwei gerade natürliche Zahlen mit $a \geqq b$. Man beweise, daß dann stets wenigstens eine der drei Zahlen $a+b$ $\quad a-b \quad$ ab
durch 6 teilbar ist. *Sch.*

W 9 ■ 1343 Jemand stellte bei vier aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen fest, daß das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl um 8 größer als das Produkt aus der ersten und vierten Zahl ist. Um welche Zahlen handelte es sich? *Sch.*

W 9 ■ 1344 Ein gerades Prisma habe eine quadratische Grundfläche mit der Maßzahl a der Seitenlänge, die Länge seiner Höhe habe die Maßzahl h, wobei a und h von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Man gebe alle Möglichkeiten für die Maßzahlen a und h an, so daß die Maßzahl des Volumens dieses Prismas gleich der Maßzahl seiner Oberfläche ist. *Volker Zillmann, Dresden*

W 9*1345 Es seien n eine von Null verschiedene natürliche Zahl und N die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis $2n$:

$N=\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$.

Ferner sei M eine Menge von $n+1$ natürlichen Zahlen, die aus der Menge N ausgewählt wurden. Man beweise, daß es dann in der Menge M stets zwei Zahlen gibt, von denen die eine durch die andere teilbar ist.

Steffen Thiel, OS Schulzendorf, Kl. 8

W 9*1346 Es sei ABC ein Dreieck, dessen Seitenlängen $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$ gegeben sind.

a) Man ermittle die Länge der von dem Punkt C ausgehenden Höhe $h=\overline{CD}$ und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Man berechne diese Größen, wenn $a=12$ cm, $b=10$ cm, $c=8$ cm.

Harald Friesel, Clara-Zetkin-OS Hohenstein-Ernstthal, Kl. 10

W 10/12 ■ 1347 Die Rohstahlproduktion (in Mill. t) der Sowjetunion entwickelte sich im Vergleich zu derjenigen der USA wie folgt:

folgt:	UdSSR	USA
1955	45,3	106,2
1965	91,0	119,3

Infolge des hohen Wachstumstempos der Produktion in der UdSSR war daher bereits im Jahre 1965 zu erwarten, daß die UdSSR die USA in der Rohstahlproduktion überholen wird.
In welchem Jahr war damit zu rechnen, wenn man auch für die Jahre nach 1965 jeweils den gleichen jährlichen Steigerungsfaktor wie im Zeitraum von 1955 bis 1965 annimmt?
Anleitung zur Lösung: Man erhält den jährlichen Steigerungsfaktor q aus der Formel

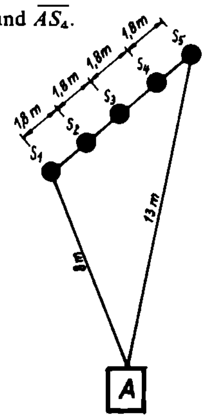
$$A_1 \cdot q^{10} = A_2, \qquad (1)$$

wobei A_1 die Produktion im Jahre 1955 und A_2 die Produktion im Jahre 1965 ist. Sind q bzw. r die jährlichen Steigerungsfaktoren für die UdSSR bzw. die USA und x die Anzahl der Jahre, die von 1965 bis zum Zeitpunkt des Überholens vergehen, so gilt

$$91{,}0 \cdot q^x = 119{,}3 \cdot r^x. \quad (2)$$

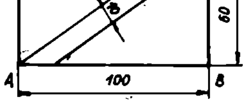
L.

W 10/12 ■ 1348 Bei der XIII. Weltmeisterschaft 1974 im Turnierangeln belegte die erst 17jährige *Andrea Eichorn* (DDR) in der Disziplin *Fliege Skish* den ersten Platz. Bei dieser Disziplin hat der Angler von einem Standort A aus zehn Würfe in vorgeschriebener Reihenfolge in fünf Platikschalen auszuführen, deren Mittelpunkte mit S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 bezeichnet seien (vgl. die Abb.). Bekannt sind die Abstände $\overline{AS_1} = a = 8$ m, $\overline{AS_5} = b = 13$ m, $\overline{S_1S_2} = \overline{S_2S_3} = \overline{S_3S_4} = \overline{S_4S_5} = 1{,}8$ m. Man berechne die Abstände $\overline{AS_2}$, $\overline{AS_3}$ und $\overline{AS_4}$. *L.*



W 10/12*1349 Durch ein rechteckiges Grundstück $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 100$ m und $\overline{BC} = 60$ m soll ein 10 m breiter Weg angelegt werden, der, wie in der Abbildung gezeigt wird, von A nach C verläuft. Wie groß ist der Flächeninhalt des von dem Weg eingenommenen Teils des Grundstücks?

Mathematikfachl. Reinhard Schulz, Rotta



W 10/12*1350 Es sei x eine reelle Zahl, die größer als 1 ist.

a) Wie kann man den Ausdruck

$$z = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{15}$$

so umformen, daß bei der Berechnung von z nicht mehr als fünfmal multipliziert oder dividiert werden muß?
(Die Anzahl der auszuführenden Additionen und Subtraktionen ist dabei nicht vorgeschrieben; die Gesamtzahl der Multiplikationen und Divisionen darf jedoch nicht größer als 5 sein. Ferner ist zu beachten, daß z. B. die Berechnung der Potenz $x^2 = x \cdot x$ eine Multiplikation erfordert, und die Berechnung der Potenz $x^4 = x^2 \cdot x^2$ eine weitere Multiplikation.)
b) Man untersuche, ob man den obigen Ausdruck auch so umformen kann, daß bei der Berechnung von z nicht mehr als fünfmal multipliziert (und überhaupt nicht dividiert) werden muß, wobei wieder die Anzahl der auszuführenden Additionen und Subtraktionen nicht vorgeschrieben ist.
Bemerkung: Die Aufgabe b) ist schwieriger; ihre Lösung wird bei der Einsendung für den Wettbewerb nicht verlangt.

W. Burmeister, Dresden

Übung macht den Meister

Um allen Absolventen der 10. Klasse unserer Oberschulen, die die Absicht haben, das Studium an einer Ingenieur- bzw. Fachschule der DDR aufzunehmen, einen Einblick in die Anforderungen in Mathematik zu geben, veröffentlichen wir eine Auswahl von Aufgaben, die der Vorbereitung auf das Studium dienen. Aus diesen Aufgaben geht hervor, daß der Lehrstoff der Klassen 6 bis 10 sicher beherrscht und daß das erworbene Wissen anwendungsbereit sein muß.

▲1▲ Addieren Sie: $\frac{3}{28} - \frac{5}{8} + \frac{17}{21} - \frac{5}{6} + 1$

▲2▲ Berechnen Sie: $\frac{6}{35} \cdot 7$; $\frac{6}{35} : 3$; $18 : \frac{6}{35}$

▲3▲ Berechnen Sie mit Rechenstab:
$\frac{34{,}7 \cdot 0{,}684}{250}$; $\sqrt{17 \cdot 3{,}8}$

▲4▲ Berechnen Sie:
$(-5) + (-3) - (-4)$; $-\frac{+abx}{-ax}$;
$\frac{-0{,}3a^2b}{-0{,}12ab}$;
$(3a+2b)(4a-2b) + (3a+4b)(3a-4b) - (a-3b)^2$

▲5▲ Berechnen Sie durch Partialdivision:
$(21n^3 - 34n^2v + 25v^3) : (7n + 5v)$

▲6▲ Kürzen Sie:
a) $\frac{ab+a}{ab-a}$ b) $\frac{3n-3}{5-5n}$ c) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$

▲7▲ Bringen Sie den Bruch $\frac{a-2}{a+2}$ *auf den* Nenner $a^2 - 4$

▲8▲ Ermitteln Sie das kgV von:
a) $3a^2b^4$, $4a^3c$, $12b^5c^3$
b) x^2-1, x^2-x, $x-x^2$

▲9▲ Berechnen Sie:
$\frac{2u+1}{2u+2} - \frac{3u-1}{3u-3} + \frac{14u+2}{12u^2-12}$

▲10▲ Vereinfachen Sie:
a) $x^{3m-6} \cdot 3x^{n-3m+2} \cdot 5x^{2-n}$
b) $\left(\frac{u^3v^5}{x^4y^6}\right)^9 : \left(\frac{u^3v^5}{x^2y^6}\right)^9$
c) $\sqrt[3]{125x^6}$; $\sqrt{(ab)^2}$;
$2\sqrt{8} + 9\sqrt{18} - 5\sqrt{72}$
d) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{32}}$
e) $\frac{\sqrt[5]{u^2v} \cdot \sqrt[3]{uv^4}}{\sqrt[15]{u^{11}v^8}}$

▲11▲ Berechnen Sie logarithmisch:
$\sqrt[5]{0{,}0004}$; $\sqrt[4]{\frac{0{,}0673 \cdot 6{,}42^3}{12{,}35^2}}$

▲12▲ Lösen Sie:
a) $\frac{4x-7}{6x+18} + \frac{11}{45} = \frac{7x+2}{10x+30}$
b) $\sqrt{x+1} - 7 = 0$
c) $4 : 3 = (63 - x) : x$
d) $7x - 3y = 13$
$3y = 25 - 45x$
e) $x + 2y + 3z = 32$
$2x + y + 3z = 31$
$3x + 2y + 2 = 28$
f) $(x+5)^2 + (x-2)^2 + (x-7)(x+7) = 11x + 30$
g) $4x - 3\sqrt{7x-6} = 6$

▲13▲ Für welche Werte von x gelten die Ungleichungen:
$2x - 4 > 5 - x$ $\quad 3x + 10 > 7x - 10$?

▲14▲ Welche von den Punkten $P_1(0; 4)$, $P_2(-2; 12)$ und $P_3(6; 16)$ liegen auf den Kurven mit den Gleichungen
a) $y = 2x + 4$ b) $y = x^2 - 2x + 4$
c) $y = \sqrt{14x + 172}$?

▲15▲ Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:
a) sin 15,3° b) tan 52,6°
c) cot 8,7° d) sin 212,3°
e) tan 322,6° f) cot 200,3°

▲16▲ Bestimmen Sie die beiden Winkel, die zwischen 0° und 360° liegen:
a) $\sin\alpha = 0{,}1736$ b) $\cos\alpha = 0{,}5721$
c) $\cos\alpha = -0{,}9291$ d) $\cot\alpha = -6{,}17$

▲17▲ Berechnen Sie im folgenden rechtwinkligen Dreieck die fehlenden Stücke:
$c = 20$ cm, $\alpha = 65°$

▲18▲ Berechnen Sie im folgenden allgemeinen Dreieck die fehlenden Stücke sowie den Flächeninhalt:
$b = 42$ cm, $c = 35$ cm, $\alpha = 130°$

Der „Dirichletsche Schubfachschluß“

Wir möchten unsere *alpha*-Leser mit einem Beweisverfahren bekannt machen, das unter dem Namen „Dirichletscher Schubfachschluß“ bekannt ist und nach dem deutschen Mathematiker *Dirichlet* (sprich: diriklé) (1805 bis 1859) benannt wurde. Der Schubfachschluß ist unmittelbar einleuchtend, er lautet:

„Wenn $n+1$ Gegenstände auf n Schubladen verteilt sind, dann müssen sich in wenigstens einer Schublade mindestens zwei Gegenstände befinden“. In diesem Satz wird nichts darüber ausgesagt, auf welche Weise die $n+1$ Gegenstände auf n Schubladen verteilt wurden, das heißt, es könnten auch Schubladen leer geblieben sein. Wurde in jede der n Schubladen genau je ein Gegenstand gelegt, dann verbleibt noch genau ein Gegenstand, der in eine der n Schubladen zu legen ist. Diese Schublade enthält dann genau zwei Gegenstände. Blieben bei der Verteilung einige Schubladen leer, so kann es Schubladen geben, die sogar mehr als zwei Gegenstände enthalten, also wenigstens zwei Gegenstände.

Wir wollen den „Dirichletschen Schubfachschluß“ etwas abstrakter formulieren: „Besitzt jedes von $n+1$ Objekten eine von n Eigenschaften, so haben mindestens zwei der Objekte die gleiche Eigenschaft“. Wir wollen nun gemeinsam einige Aufgaben lösen, deren Lösungsweg auf dem „Dirichletschen Schubfachschluß“ beruht.

1. Aufgabe: Es ist zu beweisen, daß man unter 18 beliebig gewählten natürlichen Zahlen stets zwei finden kann, deren Differenz durch 17 *ohne Rest* teilbar ist!

Lösung: Bei der Teilung einer beliebigen natürlichen Zahl durch 17 können die Reste 0, 1, 2, 3, ..., 15, 16 auftreten, das heißt, es gibt insgesamt 17 voneinander verschiedene Reste. Da aber 18 Zahlen vorhanden sind, müssen wenigstens zwei von ihnen bei der Teilung durch 17 den gleichen Rest haben. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist dann durch 17 teilbar, denn aus $z_1=17k+r$ und $z_2=17i+r$ folgt $z_1-z_2=17(k-i)$.

2. Aufgabe: Es ist zu beweisen, daß man unter 100 beliebig gewählten natürlichen Zahlen stets solche Zahlen finden kann, deren Summe durch 100 *restlos* teilbar ist!

Lösung: Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{99}, a_{100}$ die beliebig gewählten natürlichen Zahlen. Mit ihnen lassen sich folgende 100 Summen bilden:

$s_1=a_1$; $s_2=a_1+a_2$; $s_3=a_1+a_2+a_3$;...;
${}_{100}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

Bei der Division der Summen $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ durch 100 können nur die Reste 0, 1, 2, 3, ..., 99 auftreten. Unter den Resten der Summen kommt entweder 0 vor, oder es gibt wenigstens zwei Summen mit gleichem Rest. Im ersten Fall ist s_i durch 100 teilbar, also auch $a_1+a_2+\ldots+a_i$. Im zweiten Fall gilt

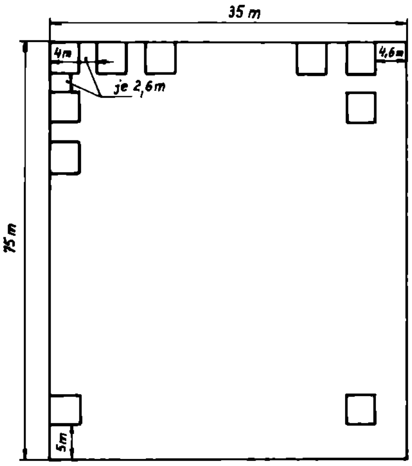
$$s_k=100x+r$$
$$s_j=100y+r \text{ und damit}$$
$$s_k-s_j=100(x-y).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit können wir $k>j$ annehmen. Deshalb gilt weiter

$$(a_1+a_2+\ldots+a_j+a_{j+1}+\ldots+a_k)-$$
$$-(a_1+a_2+\ldots+a_j) \quad =100(x-y),$$
$$a_{j+1}+a_{j+2}+\ldots+a_k \quad =100(x-y).$$

3. Aufgabe: Auf einem rechteckigen Zeltplatz, der 75 m lang und 35 m breit ist, stehen ungeordnet 52 Fünfeckzelte, die eine maximale Breite von 2,6 m besitzen. Ist es möglich, für ein weiteres Zelt einen freien Platz zu finden, der die Form eines Quadrates mit der Seitenlänge von 4 m hat?

Lösung: Wir denken uns den Zeltplatz (wie aus der Zeichnung ersichtlich) mit Quadraten von 4 m Seitenlänge bedeckt, wobei zwischen benachbarten Quadraten jeweils ein Streifen von 2,6 m Breite frei gelassen wird.



Angenommen, es lassen sich m Quadrate an der Längsseite und n Quadrate an der Breitseite des Zeltplatzes in der gewünschten Weise anordnen. Dann gilt

$4m+2{,}6(m-1)\leq 75$ und $4n+2{,}6(n-1)\leq 35$,
also $m\leq 11$ und $n\leq 5$.

Der Zeltplatz kann demnach mit maximal $11\cdot 5=55$ Quadraten bedeckt werden. Da auf dem Zeltplatz nur 52 Zelte stehen, ist mindestens noch für 3 Zelte je eine quadratische Fläche von 4 m Seitenlänge frei.

Warum haben wir in unseren Überlegungen zwischen benachbarten Quadraten jeweils einen 2,6 m breiten Streifen frei gelassen? Würde man die Quadrate ohne Zwischenstreifen aneinander reihen, so könnte es vorkommen, daß ein Zelt zwei, drei oder gar vier Quadrate teilweise überdeckt. Durch die Trennstreifen ist gewährleistet, daß jedem Zelt genau ein Quadrat zugeordnet wird. Nur dadurch ist der Schubfachschluß anwendbar.

Der Leser beachte folgenden Unterschied zwischen den beiden ersten Aufgaben einerseits und der 3. Aufgabe andererseits. Während es bei der 1. und 2. Aufgabe auf eine zweifache Belegung eines Schubfaches ankommt, ist in der 3. Aufgabe gerade die Existenz wenigstens eines leeren Schubfaches nachzuweisen. Zum Abschluß eine Aufgabe, die der interessierte Leser selbständig lösen möge, und deren Lösung in einem späteren Heft veröffentlicht wird.

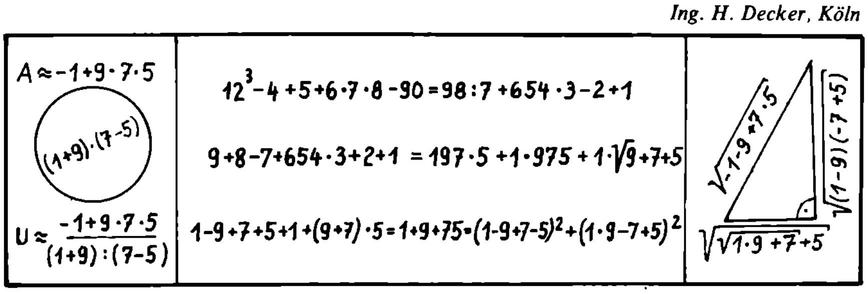
4. Aufgabe: Man zeige, daß es in der unendlichen Zahlenfolge $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^n, \ldots$ der Potenzen von 7

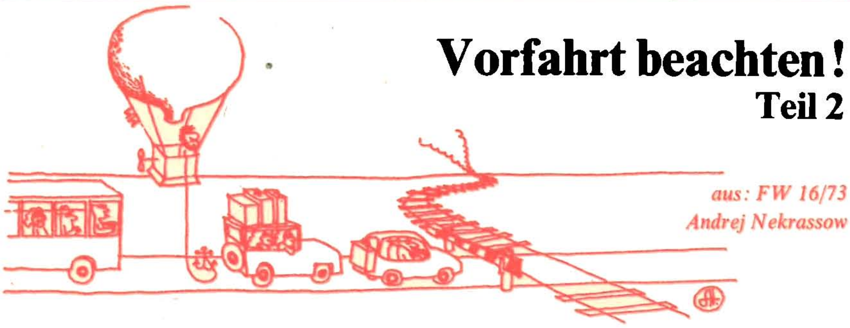
a) wenigstens eine Potenz gibt, die auf die Ziffern 001 endet,

b) unendlich viele Potenzen mit der genannten Eigenschaft gibt!

G. Hesse/Th Scholl

Ing. H. Decker, Köln





Vorfahrt beachten!
Teil 2

aus: FW 16/73
Andrej Nekrassow

Um die folgenden Aufgaben lösen zu können, benutzen wir die folgenden beiden Tabellen:

Tabelle I: Bremsweg s_B in m

v in $\frac{km}{h}$	$\frac{m}{s}$	a in $\frac{m}{s^2}$: 1	1,3	2	2,5	2,9	3,9	4,7	5	5,4	5,9	6,4
10	2,78	3,9	3,0	1,9	1,6	1,3	1,0	0,8	0,8	00,7	0,7	0,6
20	5,56	15	12	7,7	6,2	5,3	4,0	3,3	3,1	2,9	2,6	2,4
30	8,33	35	27	17	14	12	8,9	7,4	6,9	6,4	5,9	5,4
40	11,1	62	47	31	25	21	16	13	12	11	10	9,6
50	13,9	97	74	48	39	33	25	21	19	18	16	15
60	16,7	140	110	69	56	48	36	30	28	26	24	22
70	19,4	190	140	94	76	65	48	40	38	35	32	29
80	22,2	250	190	120	99	85	62	52	49	46	42	39
90	25	310	240	160	120	110	80	66	62	58	53	49
100	27,8	390	300	190	150	130	99	82	77	72	65	60

Tabelle II: Maximal mögliche Bremsverzögerungen a_{max} in $\frac{m}{s^2}$

Luftreifen auf Straßenbelag	Straßenzustand trocken	naß sauber	schmierig	festgefahr. Schneed.	Eisdecke
Beton	6,4	5,4	2,9	1,3	1,0
Kopfsteinpflaster Schwarzdecke	5,9	3,9	2,9	1,3	1,0
Kleinpflaster (Granit)	5,4	2,9	2,0	1,3	1,0
Kleinpflaster (Basalt)	4,7	2,5	2,0	1,3	1,0

Nun können wir die im Heft 5/74 erworbenen Kenntnisse anwenden:

▲1▲ Wie lang ist mindestens der Bremsweg eines Kraftfahrzeuges aus der Geschwindigkeit $50\frac{km}{h}$

a) auf trockener Betonstraße und

b) auf Betonstraße mit festgefahrener Schneedecke?

Vergleiche die beiden Bremswege miteinander!

▲2▲ Warum ist es nicht sinnvoll, Kraftfahrzeuge mit einer Betriebsbremse auszustatten, die größere Bremsverzögerungen als $6{,}4\frac{m}{s^2}$ bewirken könnte?

▲3▲ a) Ermittle mittels Längenmaß und Uhr mit Sekundenzeiger durch einen Versuch deine normale Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$!

b) Du willst die abgebildete 6,50 m breite Straße überqueren, um vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen.

Wieviel Zeit würdest du hierzu benötigen, wenn du dies verkehrswidrig auf dem geradlinigen Weg von A nach B tun würdest? Welche Zeit würdest du dich dabei auf der Straße befinden? Wieviel Zeit benötigst du, wenn du den Verkehrsvorschriften (§ 33 StVO) entsprechend erst geradlinig von A nach C und dann weiter von C nach B läufst? Wieviel Zeit befindest du dich jetzt nur auf der Straße (Bild 1)

Löse diese Aufgabe mittels einer maßstäblichen Zeichnung, der du die benötigten Weglängen entnimmst und benutze weiterhin das Ergebnis der Aufgabe a)!

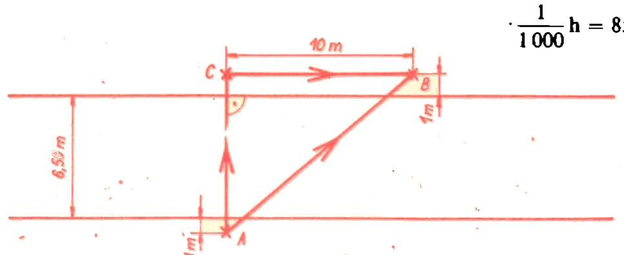


Bild 1

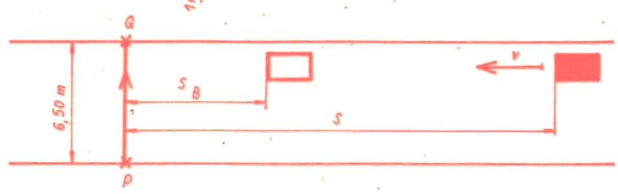


Bild 2

▲4▲ Du willst die gleiche trockene Straße mit Schwarzdecke nochmals vorschriftsgemäß vom Punkt P zum Punkt Q überqueren. (Bild 2) Welchen Abstand s muß zu Beginn des Überquerens ein Fahrzeug F mindestens noch von deinem Weg haben, wenn folgende Bedingungen gelten:

Das Fahrzeug F fährt mit der Geschwindigkeit $v = 50\frac{km}{h}$ (zulässige Höchstgeschwindigkeit in geschlossenen Ortschaften mit gelbem Ortsschild). Das Fahrzeug kann mit der Bremsverzögerung $a = 5\frac{m}{s^2}$ abgebremst werden. Das Fahrzeug soll in dem Moment, in dem du den Punkt Q erreichst, von deinem Wege noch einen Abstand besitzen, der mindestens gleich dem Bremsweg des Fahrzeuges ist.

Bei Aufgabe 4 ließen wir den Reaktionsweg unberücksichtigt, weil der Fahrer den Fußgänger rechtzeitig sieht und deshalb mit einer Komplikation rechnet.

Wenn zwei Fahrzeuge hintereinander mit gleicher konstanter Geschwindigkeit fahren, so muß das nachfolgende Fahrzeug einen Sicherheitsabstand s_S zum Vorausfahrenden einhalten. Als Sicherheitszeit t_S soll die Zeit bezeichnet werden, um die das zweite Fahrzeug eine bestimmte Stelle der Straße später passiert als das erste. Laut Formel gilt:

$$Vs_S = v \cdot t_S$$

Als Faustregel gilt: Bei normalgriffiger Straße ist die Sicherheitszeit $t_S = \frac{1}{1000}$ h einzuhalten! Bei dieser Sicherheitszeit wäre z. B. bei der Fahrgeschwindigkeit $v = 85\frac{km}{h}$ der Sicherheitsabstand gleich

$$s_S = 85\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{1000}h = 85 \cdot \frac{1\,000\ m}{h} \cdot \frac{1}{1\,000}h = 85\ m.$$

Bei dieser Faustregel gibt der Tachometerausschlag die Maßzahl des Sicherheitsabstandes in Meter an.

▲5▲ Prüfe, in welchen Fällen bei Fahren auf trockenen Straßen das nachfolgende Fahrzeug, das bei entsprechenden Fahrbahnverhältnissen mit der maximalen Bremsverzögerung $5{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ abgebremst werden kann, noch rechtzeitig zum Halten gebracht werden kann, wenn es den der Sicherheitszeit $t_S = \frac{1}{1000}\,\mathrm{h}$ entsprechenden Sicherheitsabstand einhält, wenn das vorausfahrende Fahrzeug wegen eines Frontalzusammenstoßes (Auffahrunfall) plötzlich auf der Stelle liegen bleibt und wenn der Fahrer des zweiten Fahrzeuges mit der Reaktionszeit $t_R = 1\,\mathrm{s}$ reagiert! (Bild 3)

Beim Fahren auf nicht normalgriffigen Straßen muß der Sicherheitsabstand zum Teil sehr erheblich vergrößert werden! Fußgänger sollten bei ungünstigen Witterungsverhältnissen beim Betreten der Straße berücksichtigen, daß dann nicht nur die Bremswege der Fahrzeuge länger sind, sondern daß jedes Bremsen eines Fahrzeuges eine zusätzliche Gefahrenquelle darstellt!

In geschlossenen Ortschaften (mit gelbem Ortsschild) beträgt im allgemeinen die zulässige Höchstgeschwindigkeit $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Doch wie die folgende Aufgabe zeigt, würde es dem § 1 StVO (... Jeder Teilnehmer am öffentlichen Straßenverkehr hat sich so zu verhalten, daß Personen oder Sachwerte nicht gefährdet oder geschädigt werden können ...) widersprechen, an eine Kreuzung mit begrenzter Sicht mit dieser Geschwindigkeit heranzufahren.

▲6▲ Die Abbildung stellt die Kreuzung zweier gleichrangiger Straßen dar, die von 2 m breiten Bürgersteigen begrenzt sind, an die sich ihrerseits wieder die Sicht behindernde Häuserblöcke H anschließen. Aus den Straßen A und B wollen zwei Motorradfahrer F_A und F_B, die wir zur Vereinfachung zusammen mit ihren Maschinen als punktförmig betrachten, mit gleicher Geschwindigkeit die Kreuzung in gerader Richtung passieren. Sie fahren beide in 1 m Abstand von der Bordsteinkante. Bei unverändertem Weiterfahren würden sie gerade im Punkt P zusammenstoßen. (Bild 4)

Mit welchen der in Tabelle I angegebenen Geschwindigkeiten dürfen beide nur fahren, damit der Fahrer F_A, der gemäß § 13 StVO keine Vorfahrt hat, sein Fahrzeug vom Moment des Erkennens der Gefahr an noch vor Erreichen des Punktes Q zum Stehen bringen kann? Dabei sollen $t_R = 1\,\mathrm{s}$ und $a = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (Für Betriebs- und Handbremse sind für Krafträder je $3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erreichbare Bremsverzögerung vorgeschrieben.) angenommen werden.

Laut Aufgabe 2 wissen wir, daß auch Fehler beim Überholen in hohem Maße zu Verkehrsunfällen führen. Als Überholen wird das Vorbeifahren eines schnelleren Fahrzeuges an einem sich in gleicher Richtung bewegenden langsameren bezeichnet.

▲7▲ Ein PKW F_1, der mit der Geschwindigkeit $v_1 = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fährt, überholt einen PKW F_2, der mit der Geschwindigkeit $v_2 = 70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fährt. Der Überholvorgang, d. h. der Spurwechsel, beginnt, wenn F_1 sich F_2 auf den seiner Geschwindigkeit und der Sicherheitszeit $t_S = 1\,\mathrm{s}$ entsprechenden Sicherheitsabstand s_{S_1} genähert hat. Der Überholvorgang ist beendet, d. h., F_1 fährt wieder längs des rechten Fahrbahnrandes, wenn F_1 sich um s_{S_2}, den der Geschwindigkeit v_2 und $t_s = \frac{1}{1000}\,\mathrm{h}$ entsprechenden Sicherheitsabstand, vor dem Fahrzeug F_2 befindet. Für alle Fahrzeuge soll die Bremsverzögerung $a = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ zur Anwendung kommen und alle Fahrzeuge sollen die Länge $l = 4\,\mathrm{m}$ haben. (Bild 5)

a) Welche Zeit dauert der Überholvorgang? *Anleitung*: Beachte, daß während dieser Zeit F_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 - v_2$ die Strecke $s_{S_1} + s_{S_2} + l$ mehr als F_2 zurücklegen muß!

b) Wie lang ist die Überholstrecke, d. h., welchen Weg legt F_1 während des Überholvorganges zurück?

c) Während des Überholens benutze F_1 auch die linke Fahrbahnseite. Am Ende des Überholvorganges muß ein mit der Geschwindigkeit $v_3 = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ entgegenkommendes Fahrzeug F_3 von F_1 mindestens noch den Abstand $s_{S_1} + s_{S_3}$ haben. Bis zu welcher Entfernung von F_1 aus muß zu Beginn des Überholvorganges die Fahrbahn einzusehen und frei von entgegenkommenden Fahrzeugen sein?

▲8▲ Ein PKW mit der Masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$ prallt mit der Geschwindigkeit $v = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gegen ein festes Hindernis. Dabei wird die Bugpartie um $s = 0{,}5\,\mathrm{m}$ zusammengeschoben.

Berechne nach der Formel $\frac{m}{2} v^2 = Fs$ die Kraft F, die während des Auffahrunfalles auf den PKW einwirkt!

Vergleiche diese Kraft mit der Stemmleistung eines Weltklassegewichthebers! *W. Träger*

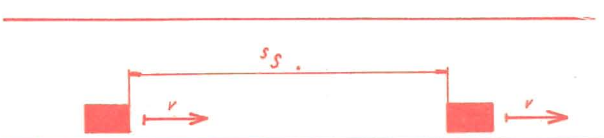


Bild 3

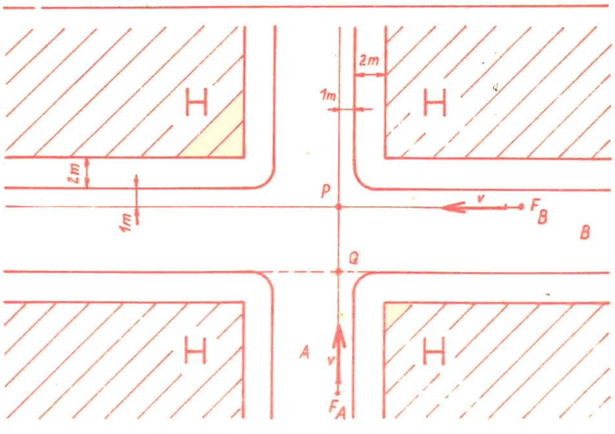


Bild 4

Bild 5

„Meine Güte, sechzig schafft der doch nie!“

aus: LVZ, 1. 6. 74

Helmut Gabbert

Was sonst noch passierte

Statistiker haben festgestellt, daß ein Fiaker anno 1900 durch die Pariser Straßen mit einer Stundengeschwindigkeit von 9 km fuhr. Leichter für sie war es allerdings, die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Autos im heutigen Paris zu ermitteln: Es erreicht in den Nachmittagsstunden nicht mehr als 7 km/h.

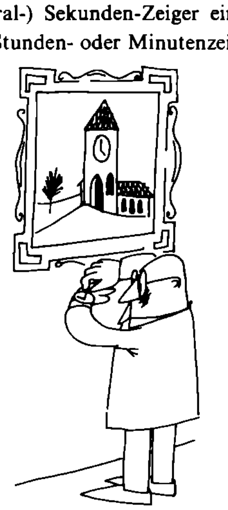
aus: ND, 6. 7. 69

Jetzt schlägt's 13! oder: Rund um die Uhr

▲1▲ „Wie spät ist es?“ wurde Marie-Luise gefragt.
Der *Junge Mathematiker* antwortete scherzhaft: „Bis zum Ende des Tages bleiben zweimal zwei Fünftel von dem, was seit seinem Beginn bereits verflossen ist.“
Wie spät war es in diesem Augenblick?

„Und warum funktioniert sie nicht mehr?“
„Tja – es sieht so aus, als wäre Sand hineingekommen!“

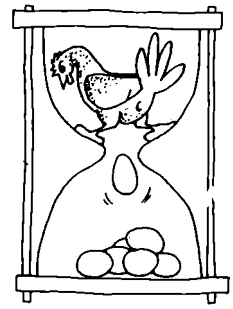
▲2▲ a) Wie oft stehen Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr innerhalb von 12 Stunden übereinander?
b) Wie oft steht in der gleichen Zeit der (Zentral-) Sekunden-Zeiger einer Uhr über dem Stunden- oder Minutenzeiger?



▲3▲ Der Minutenzeiger einer Uhr ist 2 cm lang, der Stundenzeiger 1,5 cm. Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers im Vergleich zur Geschwindigkeit der Spitze des Stundenzeigers?

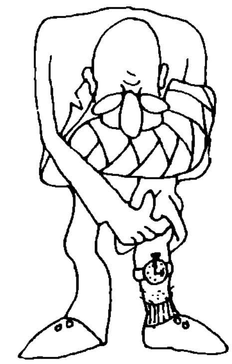
„Wie spät ist es jetzt, Adalbert?“ –
„In zehn Minuten elf Uhr.“ –
„Ja – in zehn Minuten! Aber wie spät ist es jetzt?“

▲4▲ Heinz bekommt jeden Morgen zum Frühstück drei Scheiben Röstbrot. Da der Röstvorgang im Brotröster für eine Seite jeweils 30 Sekunden dauert, gleichzeitig aber zwei Brotscheiben eingelegt werden können, ergibt sich für das Rösten eine Gesamtzeit von zwei Minuten. Dabei ist der Brotröster allerdings nicht voll ausgelastet.
Heinz überlegt, wie er den Röstvorgang beschleunigen kann, ohne jedoch dabei die für eine Seite erforderliche Zeit zu verkürzen. Was hat Heinz gemacht, und wie lange dauert jetzt die Röstzeit für drei Brotscheiben?

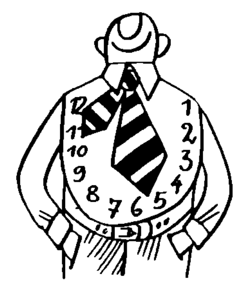


Eieruhr

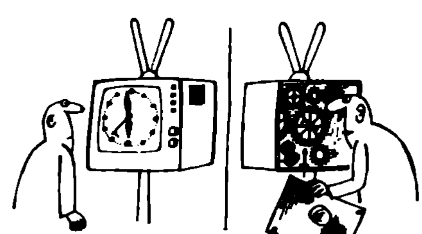
▲5▲ Um 5 Uhr schlägt eine Turmuhr 5 mal. Das dauert 5 Sekunden.
Um 10 Uhr schlägt dieselbe Uhr 10 mal. Wieviel Sekunden dauert das?



▲6▲ Wievielmal in 24 Stunden bilden der große und der kleine Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

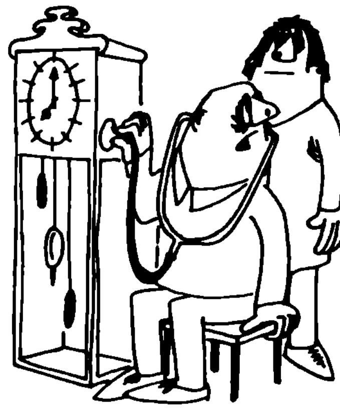


▲7▲ Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.
Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)



▲8▲ Petra spielt mit Werner eine Partie Schach. Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“ Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, daß die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“
Wie lange haben Petra und Werner gespielt, wenn die Bahn alle 20 Minuten fährt?

▲9▲ Die Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft *Junge Naturforscher* haben sich für eine Wanderung verabredet, mit dem Treffpunkt Bahnhof, 10 Minuten vor Abgang des Zuges um 7.00 Uhr.
Leider gehen die Uhren von Gerd und Heinz falsch. Gerd richtet sich nach seiner Uhr, von der er annimmt, daß sie 20 Minuten vorgeht. In Wirklichkeit geht sie jedoch 10 Minuten nach. Heinz glaubt, daß seine Uhr 10 Minuten nachgeht. In Wirklichkeit geht sie aber 5 Minuten vor.
Wann treffen beide am Bahnhof ein?

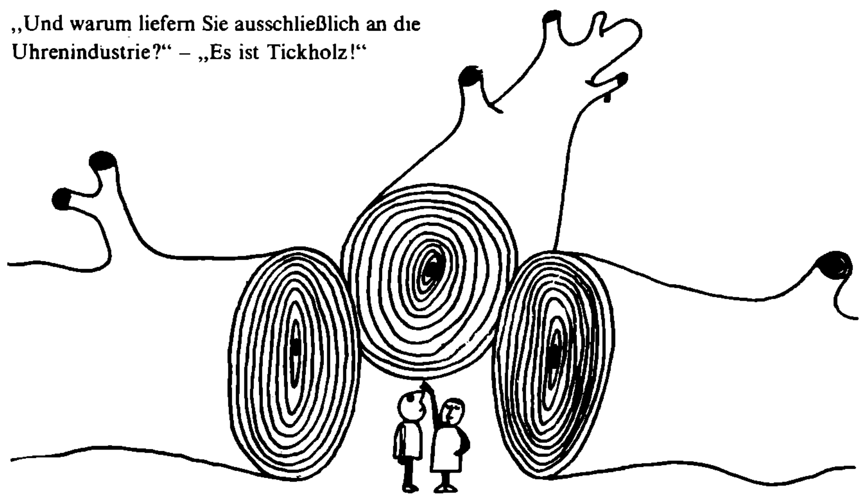


„Du hast recht, sie steht.“

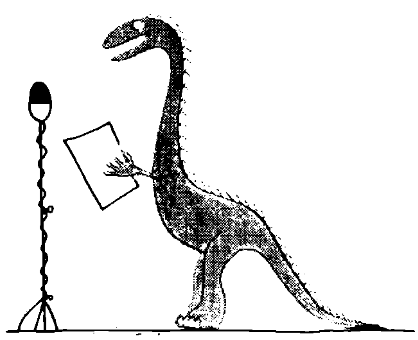
▲10▲ Welchen Weg legen in 24 Stunden zurück:
a) Die Spitze des Minutenzeigers einer Taschenuhr (Länge des Zeigers 4 mm),
b) die Spitze des Minutenzeigers einer Wanduhr (Länge des Zeigers 9,5 cm),
c) die Spitze des Minutenzeigers einer Turmuhr (Länge des Zeigers 2,25 m).

▲11▲ „Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen“, sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

„Und warum liefern Sie ausschließlich an die Uhrenindustrie?“ – „Es ist Tickholz!“

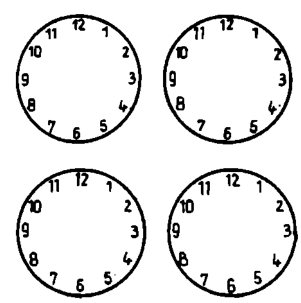


▲12▲ Auf der Westminster-Abbey in London befindet sich eine Turmuhr mit einem besonderen Schlagwerk. Zum Viertel jeder Stunde ertönt es viermal, zum Halb achtmal und zum Dreiviertel zwölfmal.
Jede volle Stunde sind 16 Schläge und zusätzlich so viele Schläge zu hören, wie es die Tageszeit gerade angibt. Zum Beispiel sind es um 6 (bzw. 18) Uhr $16+6=22$ Schläge. Wie viele Schläge kann man an dieser Turmuhr innerhalb von 12 Stunden zählen?

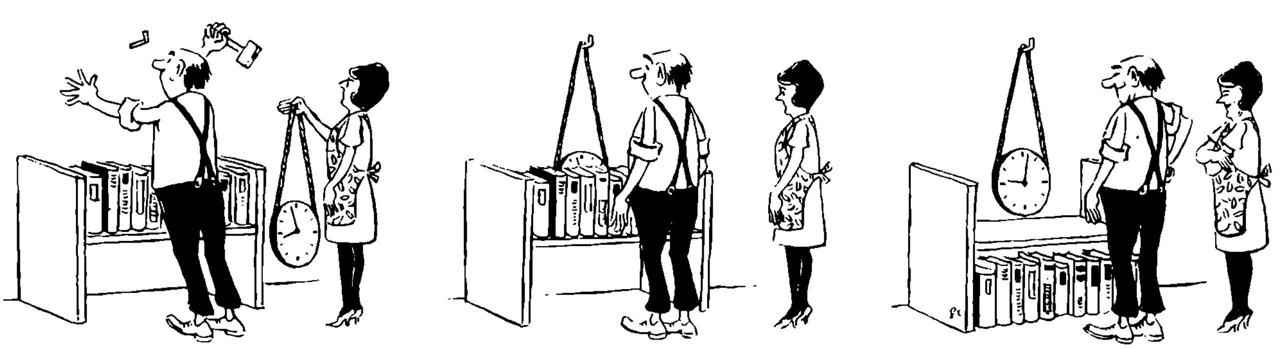


„... Zum Abschluß die genaue Urzeit...“

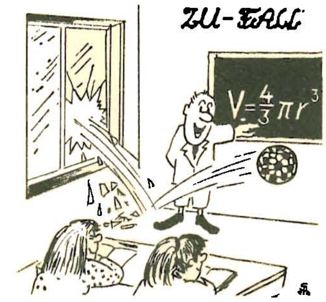
▲13▲ Auf der Abbildung sind wie auf dem Zifferblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summe der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahl jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



alpha-Wandzeitung



In freien Stunden alpha heiter



aus: DLZ 44/74; G. Sprengel, Dessau

Wortpaare gesucht

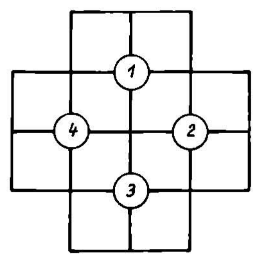
Es sind 11 Paare von Wörtern zu bilden, von denen das jeweils erste mit der gleichen Silbe endet, mit der das zweite beginnt.
Die Anfangsbuchstaben der gemeinsamen Silben ergeben hintereinander gelesen eine beliebte Seite einer beliebten Zeitschrift.

1. Zeichengerät – Teilgebiet der Mathematik
2. Vorsilbe bei Einheiten (tausend) – Name eines Symbols, das beim Auflösen einer Gleichung nach dem Exponenten gebraucht wird
3. Teil eines Winkels und einer Parabel – Oberbegriff zu Linie und Fläche
4. besondere Linie im Dreieck – griechischer Mathematiker (um 100 v. u. Z.)
5. Einheit der Fläche – griechischer Mathematiker (+ 212 v. u. Z.)
6. Ergebnis der Aufgabe 3 : 2 – Fläche, durch deren Rotation eine Halbkugel entsteht
7. besondere Linie im Trapez – Bestandteil einer Menge
8. italienischer Mathematiker und Physiker (1564 bis 1642) – platonischer Körper (Zwanzigflächner)
9. Einheit der Zeit – dreiseitige Pyramide
10. Bestandteil einer Subtraktionsaufgabe – abschließendes Resultat einer Aufgabe
11. gegenseitige Lage der Schenkel eines Winkels von 90° – besonderes Viereck

Und wer's nicht schafft, dem seien die Silben gegeben: al – ar – bra – chi – der – der – des – e – e – e – eck – ein – ein – end – er – halb – he – hekt – hö – i – ki – ko – kreis – le – le – li – li – li – lo – me – men – ment – mi – mi – mit – mus – ne – ni – nis – nu – nu – punkt – recht – rith – ron – sa – schei – senk – te – tel – tel – tra.
(Dabei ist die jeweils gemeinsame Silbe nur einmal aufgeführt.) *OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin*

Kombinatorik am Wabenrätsel

In jedes der zwölf quadratischen Felder dieser Figur ist derart ein Buchstabe einzusetzen, daß beim Lesen in zyklischer Reihenfolge der in den vier Feldern, die an einen Kreis anstoßen, stehenden Buchstaben sich die Wortbilder „Satz", „Stab", „Term" und „zehn" ergeben.
Gib eine Lösung an, und zeige, daß diese Aufgabe genau acht Lösungen hat! *Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln*



Legespiel mit Dreiecken

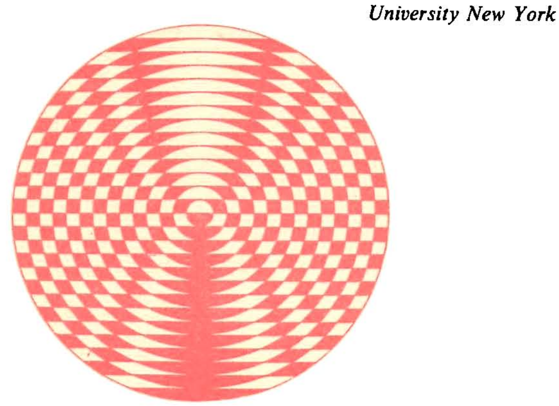
Konstruiere vier Dreiecke mit folgenden Seiten auf Pappe!

1. Dreieck: 1 cm, 13 cm, 13 cm
2. Dreieck: 5 cm, 7 cm, 8 cm
3. Dreieck: 7 cm, 10 cm, 13 cm
4. Dreieck: 7 cm, 13 cm, 15 cm

Schneide danach diese Dreiecke aus, und lege sie zu einem Parallelogramm aneinander!
Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

Dynamische Schönheit

To obtain the above design draw a series of concentric circles with radii r, $2r$, $3r$, ..., nr, and a series of parallel tangents terminating on the circumference of the largest circle. *H. Baravalle, scripta matematica, University New York*



Kryptarithmetik

Setze für alle auftretenden Figuren Ziffern ein! Gleiche Figuren bedeuten gleiche Ziffern.

Carola Ribbe, Kreisarbeitsgemeinschaft Aschersleben

$$\begin{array}{ccccc} abb & - & c & = & abd \\ : & & + & & - \\ ce & \cdot & fc & = & agh \\ \hline fa & + & fg & = & cb \end{array}$$

Ein Würfelspiel

Es war bei einem Würfelspiel,
ein Würfel in das Wasser fiel.
Der Würfel stand – ja kann das sein? –
wie eine Gans auf einem Bein.
Das Wasser bis zum Schwerpunkt ging
und somit sein Gewicht auffing.
Ein Spieler hat ihn dann gerettet,
des Würfels Mantel hingebettet.
Da sah er – es war sonnenklar –
daß noch die Hälfte trocken war.
Er teilt' mit sehnurgeradem Schnitt
und nahm die trockene Hälfte mit.
Nun frag' ich, ob sich das verträgt.
Wie war der Mantel hingelegt?

Verlangt wird eine Zeichnung des Würfelnetzes mit Angabe des Schnittes und ein Schrägbild des halben Würfels.

Dr. W. Bennewitz, Radebeul

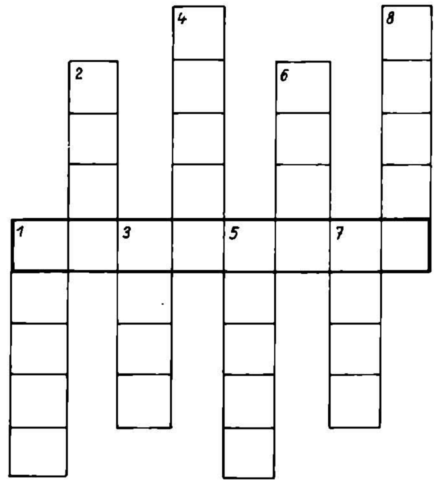
Man sollte ...

Es sind mathematische Begriffe so einzusetzen, daß vollständige Sätze entstehen. Die Anfangsbuchstaben dieser Begriffe nennen einen geometrischen Körper.

Man sollte $\frac{12}{24}, \frac{6}{9}, \frac{32}{64}$ ...	☐☐☐☐☐☐
Die Brüche $\frac{999}{998}, \frac{27}{5}, \frac{9}{8}$, sind ...	☐☐☐☐☐☐
Die nat. Zahlen 9314, 198, 24 sind ...	☐☐☐☐☐☐
$\frac{3}{4}$ gehört zur Klasse der ... Brüche.	☐☐☐☐☐☐
12 + 8 = 30. Diese ... ist falsch, denn 12 + 8 = 20	☐☐☐☐☐☐

Schüler G. Schwarze, Schwarzheide (Kl. 7)

Kreuzworträtsel



Alle Wörter sind senkrecht einzutragen.

1. Französischer Mathematiker
2. Ein Werk von Euklid
3. Dreidimensionale Ausdehnung
4. Vorsatz bei gesetzlichen Einheiten (der hundertste Teil der Einheit)
5. Name einer Stadt, die in der Antike ein wissenschaftliches Zentrum war
6. „Methode“ von *Eratosthenes* zur Bestimmung von Primzahlen
7. Name eines Mathematikers, der in der Antike die verlorengegangenen „Elemente“ zusammenstellte
8. Linie am Kreis

Die stark umrandeten Felder ergeben einen mathematischen Begriff, den alle Schüler bereits in der 1. Klasse verwenden.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W. P. Rosanzew

alpha-Wettbewerb
Abzeichen in Gold

Für siebenjährige Teilnahme

Annegret Kirsten, Leuna; **Ute Winkler**, Teltow; **Ralph Lehmann**, Petershagen; **Kerstin Bachmann**, Halle; **Christoph Scheurer**, Glauchau-Gesau; **Lutz Püffeld**, Hennigsdorf; **Uwe Lewandorski**, Leipzig; **Peter Linhart**, Waldheim; **Henrik Frank**, Greifswald; **Karin Fischer**, Dresden; **Eckhard Schadow**, Oranienburg; **Christina Feige**, Mühlhausen; **Dagmar Rißmann**, Dresden

Für sechsjährige Teilnahme

Kirsten Helbig, Frankfurt; **Guido Blosfeld**, Halle; **Detlef Poppe**, Mühlhausen; **Karl-Heinz Hering**, Erfurt; **Andreas Schlosser**, Zwickau; **Regina Hildenbrandt**, Stützerbach; **Wolfgang Kögler**, Wiesenburg; **Hans-Peter Tams**, Ribnitz-D.; **Gerlinde Koch**, Schmalkalden; **Regina Rau**, Schneeberg; **Bernd Hanke**, Großschweidnitz; **Reiner Lindemann**, Cottbus; **Marina Schulz**, Görlitz; **Martin Ermrich**, Elbingerode; **Michael Schnelle**, Calau; **Bärbel Rahnefeld**, Karl-Marx-Stadt; **Sibylle Rohrbeck**, Franzburg; **Brigitte Hildenbrandt**, Stützerbach; **Ullrich Bittner**, Greifswald; **Wolfgang Herrmann**, Elterlein; **Roswitha Leyh**, Eisenach; **Rüdiger Blach**, Calau; **Astrid Rösel**, Zittau

Für fünfjährige Teilnahme

Angelika Müller, Greifswald; **Hermann Tenor**, Dessau; **Rainer Gutsche**, Herzberg; **Andreas Näther**, Mittweida; **Heiner Schulz**, Strausberg; **Falk Bachmann**, Halle; **Ilona Drews**, Wöbbelin; **Olaf Richter**, Pirna; **Lars Luther**, Güstrow; **Jens-Uwe Richter**, Kemtau; **Hiltrud Manske**, Steinbach-Hallenberg; **Birgit Krötenheerdt**, Halle; **Bernd Redlich**, Wernburg; **Birgit Kühnstedt**, Erfurt; **Dirk Sprengel**, Potsdam; **Ulf Hutschenreiter**, Dresden; **Kerstin Müller**, Brandis; **Ralf Weber**, Bischofswerda; **Horst Kohlschmidt**, Dresden; **Irene Hanske**, Putzkau; **Ulrike Bandemer**, Freiberg; **Frank Richter**, Herzberg; **Sven-Thorsten Freitag**, Zwickau; **Angela Bagola**, Spremberg; **Wilfried Carl**, Halle; **Ulli Riedel**, Flöha; **Thomas Rehm**, Bernau; **Birgit Weiß**, Bernau; **Michael Huhn**, Teterow; **Jens Walther**, Bennsdorf; **Jörg Päßler**, Marienberg; **Manfred Seidler**, Cottbus; **Arndt Petzold**, Karl-Marx-Stadt; **Astrid Binder**, Halle; **Gisbert Schultz**, Dessau, **Manfred Zmeck**, Rüdnitz; **Birgit Lorenz**, Pirna; **Gerd Reif**, Silbach; **Werner Wehr**, Dingelstädt; **Wolfram Ulrici**, Leipzig; **Andreas Neubert**, Schwarzenberg; **Bettina Zimmermann**, Schmalkalden; **Heike Anders**, Dahlewitz; **Bernd Derlich**, Teterow; **Beate Brandtner**, Schildau; **Heidrun Weichler**, Schmalkalden; **Torsten Waldeck**, Karl-Marx-Stadt; **Lutz Dopheide**, Leipzig; **Stephan Fleischmann**, Zella-Mehlis; **Holger Jurack**, Burkau; **Jörg Schubert**, Pfaffroda; **Falk Bahner, Hans-Jürgen Kiehm, Sabine Kämpf, Elke Genath, Gabriele Reumschüssel**, alle Steinberg-Hallenberg

Für vierjährige Teilnahme

Marid Helbig, Frankfurt; **Frank Schulze**, Himmelsberg; **Uwe Szyszka**, Brohm; **Jan Müller**, Berlin; **Thies Luther**, Güstrow; **Ulv Krabisch**, Leipzig; **Lew Dimenstein**, Leningrad (UdSSR); **Rainer Seifert**, Pinnau; **Manuela Lehmert**, Worbis; **Sabine Schröder**, Bernau; **Thomas Maiwald**, Olbersdorf; **Volker Lerche**, Schmalkalden; **Uwe Heiber**, Ilmenau; **Jörg Wachsmann, Astrid Surber, Silke Zimmermann, Elke Halecker**, alle Clingen; **Andreas Illing**, Gersdorf; **Bernd Kreußler**, Leipzig; **Volker Ludley**, Bergwitz; **Gudrun Drews**, Wöbbelin; **Elke Witt**, Uthausen; **Uwe Rieckert**, Cottbus; **Kornelia Poike**, Neukirch; **Lutz Thorwarth**, Schmalkalden; **Ingo Fietze**, Cottbus; **Meinhard Mende**, Lunzenau; **Gundula Hanke**, Frankenheim; **Heiko Tennert**, Döbeln; **Karl Krause**, Mansfeld (Rentner); **Reinhold Müller**, Leipzig; **Jürgen Sommerschuh**, Bischofswerda; **Frank Burghardt**, Frankfurt; **Ingolf Buttig**, Großharthau; **Frank Müller**; Cottbus; **Jörg Brüstel**, Ziegelheim; **Wolfgang Huschmann**, Oelsnitz; **Elke Seidel**, Dresden; **Sylvana Kühn**, Gräfenhain; **Sigrun Below**, Seelow; Klaus Schulze, Brandis; Silvia König, Forst; Thomas Fuchs, Fambach; Ulrike Zinke, Lützen; Birgit Schönfelder, Schwedt; Uwe Beck, Falkensee; Wolfgang Baier, Pfaffendorf; Birgit Genz, Anklam; Bernd Grünler, Zeulenroda; Borwin Wegener, Berlin; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Norbert Siedow, Neuruppin; Carla Bergd, Dittersdorf; Thomas Fiedler, Greifswald; Annette Schulze, Döbeln; Gerhild Hanke, Frankenheim; Ralf Hörtling, Berlin; Christine Hense, Potsdam; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Bernhard Tschada, Sondershausen; Regina Kupfer, Dresden; Andreas Fischer, Radebeul; Carola Fechtner, Neubrandenburg; Volker Fritzsche, Radebeul; Andreas Wenzel, Dorfchemnitz; Cornelia Linz, Cottbus; Thomas Jarosch, Berlin; Siegfried Sonnenschein, Wittenberge; Heidi Günther, Sohland; Birgit Graizarek, Erfurt; Jens Schönfelder, Schwedt; Reinhard Koeppe, Loburg; Uta Stopp, Dresden; Rita Rempel, Cottbus; Karla Eberlein, Niederfrauendorf; Volker Manusch, Dittersbach; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Uwe Prochno, Berlin; Thomas Jakob, Gera; Uwe Krüger, Greifswald; Susanne Schmidt, Schmalkalden; Ulrich Palmer, Neuburg; Petra Scharf, Döbeln; Volker Lippoldt, Leipzig; Klaus Schlegel, Dresden; Uwe Bormann, Magdeburg; Carola Zimmermann, Döbeln; Kirsten Liebmann, Karl-Marx-Stadt; Isolde Kehr, Gospenroda; Jens Erb, Glauchau-Gesau; Joachim Ernst, Döbeln; Frank Aßmus, Oranienburg; Siegmar Reckenbeil, Fambach; Monika Kurch, Cottbus; Cornelia Güntzel, Cottbus; Gabriele Schröter, Ilmenau; Holger Harz, Weimar; Elke Zießler, Erfurt; Dagmar Schüppel, Karl-Marx-Stadt; Jürgen Scheller, Cottbus; Karsten König, Zeuthen; Ulf Meißner, Herzberg; Heidi Hendzlik, Guben; Wolfgang Seeber, Gehren; Sigrun Herbst, Halberstadt; Peter Hahn, Nauendorf; Elke Fiedler, Dresden; Herbert Pranner, Stützerbach; Roland Kaschner, Lauchhammer; Hans Peter Delius, Halle; Stefan Kaiser, Niederschmalkalden; Wulf Henze, Milow; Wolfgang Henkel, Erfurt; Doris Jeschner, Eisleben; Wolfgang Flänig, Dresden; Uwe König, Bautzen; Sabine Pohl, Jena; Astrid Richter, Zerpenschleuse; Frank Mulsow, Parchim; Heinz-Peter Müller, Bischofferode; Helga Schuster, Cottbus; Silvia Glatzel, Güstrow; Marianne Prignitz, Güstrow; Lothar Eimecke, Fermerswalde; Cornelia Drechsler, Karl-Marx-Stadt; Rita Klingl, Schleusingerneundorf; Rainer Hecht, Döbeln; Gerald Nahrstedt, Neuenhofe; Steffen Gündel, Gersdorf; Thomas Brückner, Stefan Petzl, Steffen Richter, Steffen Kley, Volkmar Fichtner, alle Karl-Marx-Stadt; Heike Kuschel, Rotta; Christina Schneider, Harald Berger, Monika Künstler, Simone Sauer, Angela Lange, Regina Schwarz, Anke Tutschke, Dagmar Hentsche, Ingolf Wiedermann, alle Burkau; Hubert Steinmetz, Eva Marx, Sabine Range, alle Clingen; Sybille Baumgart, Löderburg; Karin Kusche, Kerstin Menz, Bettina Hoffmann, Martina Henkel, Kerstin Müller, Margit Mangold, Ursula Thomas, Jens Schmidt, Edith Franke, Ingeburg Pfannschmidt, Waldemar Olk, Gabi Huhn, Steffi Faßler, Bettina Zimmermann, Marina Wahl, Brigitte Holland-Moritz, Carola Voigt, Jens König, Angela Gotthelf, Karin Holland-Cunz, Steffi Holland-Merten, Martina Wahl, Armin Endter, alle Steinbach-Hallenberg; Ursula Garnitz, Zeuthen; Kathrin Benedix, Döbeln; Andreas Fischer, Lobetal; Bianca Herrmann, Zahna.

Für dreijährige Teilnahme

Andreas Kasparek, Gräfenhainichen; **Dittmar Kurtz**, Friedrichsrode; **Iris Schulz**, Rotta; **Andrea Nießen**, Berlin; **Wolfgang Taubert**, Meiningen; **Martin Blümlinger**, Linz (Österreich); **Stefan Krötenheerdt**, Halle; **Ulf Ritschel**, Booßen; **Eckhard Liebscher**, Ilmenau; **Rüdiger Schultz**, Bergen; **Thomas Luschtinetz**, Stralsund; **Audrey Hoffmann**, Berlin; **Andreas Fittke**, Berlin; **Arnhild Lorenz**, Görlitz; **Petra Henkel**, Alt-Töplitz; **Carola Totzauer**, Güstrow; **Heinz Ernst**, Linz (Österreich); **Andreas Mempel, Uwe Lumm**, beide Clingen; **Sabine Schoof**, Neuenhofe; **Gerald Werner**, Meiningen; **Thomas Kaatz**, Gräfenhainichen; **Cornelia Thiel**, Güstrow; **Ute Busch**, Lobenstein; **Bernd Bräutigam**, Bernsbach; **Michael Reissig**, Halle; **Jens-Peter Mönch**, Berlin; **Clemens Jaunich**, Cottbus; **Gunter Gerbeth**, Greiz; **Lothar Gruber**, Linz

(Östereich); **Karin Schmidt,** Bernsbach; **Volker Barop,** Torgau; **Michael Marczinek,** Berlin; **Viktor Chaschtschansk,** Dzerschinsk (UdSSR); **Klaus Hering,** Halle; **Axel Müller,** Oberlungwitz; **Stefan Kasper,** Leipzig; **Michael Kaufmann,** Linz (Österreich); **Dagmar Lorenz,** Görlitz; **Cornelia Thannhausser,** Linz (Österreich); **Hans-Reinhard Berger,** Hohenstein-E.; **Franz Sander,** Görlsdorf; **Gerhard Neumüller,** Linz (Österreich); Manfred Häußler, Jörg Keitel, Frank Billert, Gudrun Bertram, alle Clingen; Matthias Fritzsche, Stolpen; Berthold Möbius, Dresden; Monika Schöbe, Rotta; Angela Gebhardt, Bernsbach; Birgit Rosenberger, Suhl; Ralf Buschko, Berlin; Brigitte Urban, Strausberg; Dieter Kratsch, Göhren; Frank Ringel, Alt-Töplitz; Jörg Kunzmann, Bernsbach; Horst Lange, Olbersdorf; Claudia Riemer, Ponickau; Jürgen Gäbel, Stolpen; Michael Minx, Berlin; Andreas Bernert, Grünbach; Elke Gräfe, Oberlichtenau; Christine und Mathias Kuhnt, Zug; Karsta 'ahl, Uwe Trautvetter, beide Neuenhofe; Andreas Goldhahn, Bernsbach; Dietmar Wendlik, Cottbus; Kunt Oertel, Zschornewitz; Falk Pankau, Wildpark; Uwe Reimann, Görlitz; Lutz Teichler, Rennersdorf; Ines Kircheis, Bernsbach; Beate Weisheit, Fambach; Pamela Teubner, Leipzig; Michael Wünsche, Stolpen; Wulf Dettmer, Dresden; Harry Scholich, Berlin; Ralf Lübs, Schönbeck; Petra Mittelstedt, Halle; Holger Büchler, Feldberg; Ilona Wünsche, Rodewitz; Manuela Ufer, Stolpen; Steffen Krebs, Radebeul; Katrin Richter, Wittenberg; Marlies Kolbatz, Groß-Quassow; Rolf Weidlich, Bernsbach; Sabine Jahn, Reuden; Andreas Helmke, Brandenburg; Uta Gutsche, Herzberg; Michael Sack, Leipzig; Irmhild Bittner, Greifswald; Irmtraud Karnetzke, Wilhelmsburg; Bettina Büchel, Ute Grünbeck, Christina Wurst, Klaus Pabst, Birgit Herdmann, Bernd Linß, Heidi Pabst, Heiko Rosenbusch, alle Springstille; Klaus Rehm, Bernau; Volker Schulz, Nauen; Heidrun Leisker, Böhla; Sabine Seyfried, Cottbus; Peter Röhl, Cottbus; Uta Weidauer, Bernsbach; Jörg Kaiser, Cottbus; Hardy Eich, Glasin; Lutz Hoffmann, Güstrow; Ingrid Strickfaden, Annaburg; Werner Gundlach, Schwarz; Ulrich Berger, Flöha; Jens Stahlberg, Zwickau; Petra Stuhr, Güstrow; Gerold Bruntsch, Gröbern; Thomas Friebus, Magdeburg; Andreas Brand, Leinefelde; Erika Krüger, Sangerhausen; Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Kopf, Berlin; Gerald Hauck, Erfurt; Ute Lehmann, Güstrow; Christian Kolliwer, Berlin; Kerstin Utke, Stralsund; Marlies Gräser, Werlitzsch; Antje Lorenz, Alt-Töplitz; Jörg Gabriel, Freist; Karl-Heinz Jünger, Dresden; Uta Müller, Mittelherwigsdorf; Rainer Michael, Berlin; Thomas Hoffmann, Apolda; Sibylle Strempel, Petersdorf; Kai Schmidt, Leipzig; Uwe Klaus, Eilenburg; Karin Kramer, Görlitz; Beate Rost, Neuendorf; Manfred Zimmer, Volkstedt; Dagmar Pohle, Mühlberg; Gabriele Hoffmann, Berlin; Roland Löffler, Weida; Andrea Weigel, Bernsbach; Steffen Döring, Olbersdorf; Thomas Richter, Schwerin; Hendrik Glaßmann, Karl-Marx-Stadt; Thomas Berg, Berlin; Petra Herzog, Wolgast; Marita Figas, Berlin; Frank Hasse, Warbelow; Marina Krause, Golm; Ralf Vogt, Werder; Martina Knospe, Görlitz; Jörg Schmelnig, Berlin; Petra Straube, Schernberg; Bengt und Sylke Nölting, Greifswald; Manuela Boy, Hoyerswerda; Kornelia Rasch, Zeitz; Petra Beck; Potsdam; Birgit Päschel, Magdeburg; Frank Tischer, Spremberg; Angelika Anspichler, Gr. Molzahn; Michael Groth, Cottbus; Karlemann Timm, Schwerin; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Reiner Gaulke, Krien; Monika Kössel, Fambach; Axel Schurath, Gnoien; Steffen Nies, Leipzig; Frank Wilde, Berlin; Claudia Naumann, Görlitz; Bernd Stiehler, Bernsbach; Astrid Bärenklau, Ruhla; Frank Kressin, Güstrow; Lutz Schuffenhauer, Bernsbach; Winfried Glöde, Neubrandenburg; Julius, Karl und Friedrich Heymann, Berlin; Kerstin Otto, Alt-Töplitz; Uwe Hösel, Lobenstein; Petra Maeder, Berlin; Lutz Wübbenhorst, Magdeburg; Jan-Joachim Rückmann, Berlin; Marina Lehmann, Söllichau; Thomas Wegner, Pirna; Ingrid Escher, Bernsbach; Gerhard Heger Bärenstein; Erhard Pfeil, Greiz; Rainer Grünert, Dresden; Wolfram Ortweiler, Apolda; Kerstin Grüger, Halle; Ilona Flögel, Berlin; Michael Schilling, Berlin; Kerstin Brückner, Karl-Marx-Stadt; Hartmut Simmchen, Zittau; Wiete Schirmer, Karl-Marx-Stadt; Tanja Hellak, Eisenhüttenstadt; Birgit Haeske, Görlitz; Uwe Börner, Brand-Erbisdorf; Ulrike Ketelhut, Gotha; Martin Winkler, Berlin; Knut Ullmann, Bernsbach; Rolf Kuhn, Wintringerode; Detlef Kohn, Weimar; Betty Schönherr, Großröhrsdorf; Frank Pfeiffer, Warbelow; Claudia Kubo, Daubitz: Jürgen Schmidt, Meiningen; Frank Mosler, Weimar; Wolfgang Patzer, Erfurt; Uwe Gätzschmann, Cottbus; Ralph Scharf, Döbeln; Marina Badorrek, Sondershausen; Hendrike Meyer, Carmen Hildebrandt, Kerstin Tamm, alle Schmalkalden; Matthias Breitbarth, Mühlhausen; Birgit Mann, Berlin; Michael Schalle, Drognitz; Ilona Nolte, Kirchgandern; Elke Köhler, Staßfurt; Cornelia Berger, Döbeln; Klaus Harms, Bobzin; Andrej Jendrusch, Glienicke; Horst Krätzschmar, Gröditz; Christine Gutschmidt, Friedland; Axel Kühne, Blankenfelde; Volker Dabow, Naundorf; Jens Börner, Berlin; Gerd Helmert, Karl-Marx-Stadt; Uwe Stöhr, Bernsbach; Dieter Hornawsky, Silbach; Barbara Schneider, Stützerbach; Gernot Beske, Janow; Michael Schuster, Leipzig; Bert Carlsen, Titschendorf; Thomas Göpfert, Karl-Marx-Stadt; Ingo Lenz, Hagenow; Sabine Block, Großenhain; Andrea Schröder, Zeitz; Ramona Grobleben, Dresden; Bärbel Otto, Pirna; Ines Appelt, Eisenhüttenstadt; Günther Bartholmé, Triebs; Barbara Lutter, Güstrow; Silke Schmiedtke, Golm; Jörg Vollrath, Karl-Marx-Stadt; Christian Heymann, Karl-Marx-Stadt; Walter Rempel, Sonneberg; Olaf Hetze, Adorf; Marita Rentsch, Dresden; Lothar Demelius, Ilmenau; Siegbert Scharf, Dresden; Thomas Jeske, Berlin; Bernd Schäfer, Gotha; Norbert Samland, Teterow; Matthias Ott, Sonneberg; Petra Krohn, Reinberg; Elke Henkel, Berlin; Gudrun Fuchs, Neukloster; Petra Gothé, Cottbus; Claudia Bom, Breitenbach; Karsten Beldekow, Krien; Bernhard Krempelt, Cottbus; Marion Werner, Rietschen; Ramona Ulbricht, Hermsdorf; Thomas Richter, Neuhausen; Frank Nachtigall, Eberswalde; Andrea Hadlich, Zwickau; Iris Ostwald, Grimmen; Harald Geick, Suckow; Claudia Endtricht, Görlitz; Bärbel Hamm, Suhl; Matthias Weber, Meiningen; Andreas Neumann, Berlin; Helmut Jacob, Jena; Kerstin Hinrichs, Allerstedt; Rita Heinevetter, Großbodungen; Roland. Zabel, Wettin; Holger Wegner, Pirna; Björn Noack, Lübbenau; Klaus Grützmann, Samtens; Christina Seidel, Bernterode; Ines Spyrka, Bergen; Marion Unverricht, Dresden; Kerstin Käckenmeister, Wildberg; Manuela Krahnefeld, Zörbig; Sabine Pfützner, Seeligstadt; Manfred Goldenbogen, Stralsund; Hartmut Fäller, Bucha; Ronald Hartung, Tissa; Susanne Schlegel, Großbodungen; Rolf Krämer, Petra Franz, Jörg Busch, Hans Busch, Marina Morgenstern, alle Lobenstein; Gunter Krause, Lutz Schade, Uwe Fischer, Marlies Gerlach, Christine Kretzschmar, Iris Seeberg, Lutz Fuchs, alle Hainichen; Norbert Ziegler, Ilona Winkler, beide Cunnersdorf; Rolf Schmid, Schlegel; Bettina Billig, Jana Riedel, Andrea Tippner, Barbara Jander, Angela Hartewig, Sabine Schmidt, Ute Selle, Ralph Meichsner, Heike Richter, Leonore Weise, Ronald Müller, alle Karl-Marx-Stadt; Doris Güldenzopf, Himmelsberg; Jörg Kuß, Heike Gericke, Evelyn Hönicke, Kerstin Töpfer, alle Reuden; Achmed Kuschel, Klaus-Dieter Holzwig, Bernd Saxenberger, Harry Schröter, alle Rotta; Andreas Erler, Hellendorf; Martina Albrecht, Klenz; Elke Ahrendt, Remlin; Isolde Fail, Cornelia Wiede, beide Jördenstorf; Rita Kellermann, Remlin; Ramona Barz, Schlieben; Jörg Hentschel, Siedenlangenbeck; Rüdiger Tanzke, Sigrid Eve, Petra Prondzinski, Andreas Erben, Bettina Voigt, Cordula Schmidt, Hardo Burkhardt, Hans-Joachim Berger, alle Löderburg; Barbara Zeiß, Frank Häfner, Marina Nothnagel, Kerstin Scheerschmidt, Stefan Usbeck, Jens Willnig, Stefan Meingst, Andreas Günnel, Christine Ciesla, Barbara Hössel, Regina Kusche, Evelyne Recknagel, Kerstin Schubert, Petra Thomzik, Monika Kaufmann, Harald Bauroth, Fortsetzung S. 22.

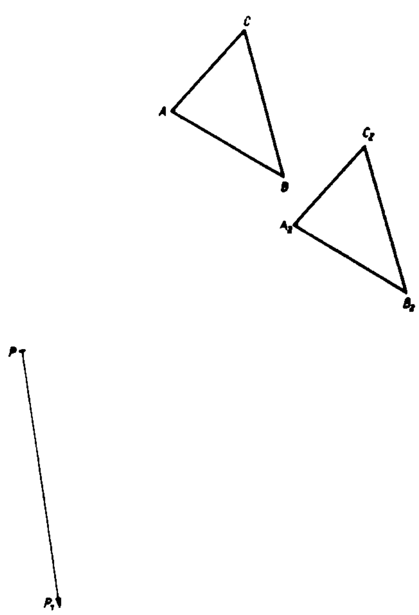
XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

(20. 11. 1974)

Olympiadeklasse 5

1. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist dadurch entstanden, daß auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann eine zweite Verschiebung angewendet wurde.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck denjenigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$, der diese zweite Verschiebung angibt!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

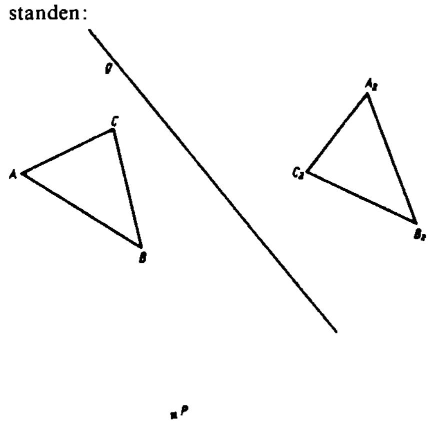
2. Anita und Peter sollten für ihre Gruppe aus dem Konsum 7 Flaschen Selterswasser holen. Sie hatten eine Geldsumme bei sich, die genau hierfür gereicht hätte. Sie konnten aber nur Brause bekommen, von der jede Flasche 15 Pfennige mehr kostete als eine Flasche Selterswasser. Für ihr gesamtes Geld erhielten sie nunmehr 4 Flaschen Brause.
Ermittle den Preis für eine Flasche Selterswasser und den Preis für eine Flasche Brause. Wieviel kosteten die 4 Flaschen Brause?

3. Uwe fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Als der Zug genau die Hälfte seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Uwe ein und erwachte erst, als der Zug noch eine Strecke von genau 25 km bis zum Reiseziel zurückzulegen hatte. Diese Strecke war halb so lang wie die Strecke, die der Zug zurückgelegt hatte, während Uwe schlief.
Wieviel Kilometer betrug Uwes Reisestrecke?

4. Schülerinnen und Schüler einer Klasse 5 trugen ein 14tägiges Schachturnier aus. Dabei wurden an jedem der 14 Tage genau 6 Spiele ausgetragen. Die Anzahl der teilnehmenden Jungen war größer als die der teilnehmenden Mädchen. Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen und jeder Junge gegen jeden anderen Jungen genau zweimal. Keines der Mädchen spielte gegen einen Jungen. Ermittle die Anzahl der Mädchen und die der Jungen, die an diesem Turnier teilnahmen!

Olympiadeklasse 6

1. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet. Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:



Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ ebtstand.
Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, daß $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.
Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung.
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

2. Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl a habe folgende Eigenschaften:
(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z.
(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13 776.
Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

3. Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:
(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz. Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Plazierung richtig und eine falsch angegeben.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

4. Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.
Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.
Um wieviel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von A nach B?

Olympiadeklasse 7

1. Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am *alpha*-Wettbewerb.
Folgendes ist über sie bekannt:
(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.
(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.
(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniertes Papier.
(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.
(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das *alpha*-Abzeichen erhalten.
(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniertes Papier.
Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

2. Beweise folgende Aussage:
Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat,

daß für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung

(1) $\overline{DB}=\overline{BC}=\overline{CD}$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha=60°$, $\beta=35°$ und $w_\alpha=5{,}5$ cm. Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

4. Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages: „Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muß ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
Wieviel Seiten hat das Buch insgesamt?"
Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, daß alle Angaben von Fritz zutreffen!

Olympiadeklasse 8

1. Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.
Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

2. Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $56\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und B mit $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müßte C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit $35\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:
Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.
a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD}=\overline{AC}$ gilt!
b) Beweise, daß für jeden derartigen Punkt $\overline{DB}=\overline{DC}$ gilt!

4. Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:
Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, daß $\overline{BQ}=6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ}=3$ cm gilt.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

Olympiadeklasse 9

1. An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.
Es ist zu beweisen, daß es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

2. Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.
Man beweise, daß dann $\overline{AH}\cdot\overline{HD}=\overline{BH}\cdot\overline{HE}=\overline{CH}\cdot\overline{HF}$ gilt!

3. Es ist die kleinste positive ganze Zahl z zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

4. AB sei eine in der Ebene ε gegebene Strecke der Länge a. In ε sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist. In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Man beweise, daß es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.
b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, daß $\overline{CA}=a\sqrt{2}$ und $\overline{BD}=a\sqrt{3}$ gilt.

Olympiadeklasse 10

1. Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Russisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, daß $z_1>z_2$ ist und daß er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.
Man ermittle z_1 und z_2.

2. Geben Sie alle (geordneten) Tripel (x, y, z) an, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) $x-y=96$,
(2) $y-z=96$,
(3) x, y und z sind Quadrate natürlicher Zahlen.

3. Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels. Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkels so gelegen, daß der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A, B zwischen A und B liegt.
Man beweise, daß dann $\overline{DE}=\overline{AB}+\overline{BC}$ gilt.

4. Gegeben seien positive Streckenlängen h, r, x mit $x<2r$. Es bezeichne ε eine Ebene und k einen in ε gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$. Auf der Senkrechten zu ε durch A sei C ein Punkt mit $\overline{AC}=h$. Auf k sei D ein Punkt mit $\overline{BD}=x$.
a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C, D, A, B.
b) Man beweise, daß $BD\perp CD$ gilt.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sei $\{x_n\}$ $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ diejenige Zahlenfolge, für die

$$x_0=1 \text{ und } x_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$$
$(n=1, 2, 3, \ldots)$ gilt.

Man gebe die Glieder x_1, $_2$ und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft

$$f(n)=x_n \quad (n=0, 1, 2, 3, \ldots) \text{ an.} \qquad (1)$$

2. Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, daß
(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,
(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleichgroß sind,
(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleichgroß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

3. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so daß sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden. Die Gerade g halbiere den Winkel $\sphericalangle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\sphericalangle AFB$.
Man beweise, daß dann $g\|h$ ist.

4. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x+y+z=0, \qquad (1)$$
$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad (2)$$
$$x^4+y^4+z^4=a \qquad (3)$$

1. keine reellen Lösungen (x, y, z)
2. genau eine reelle Lösung,
3. mehr als eine reelle Lösung hat.

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/74

▲5▲1252 Angenommen, es seien x Kinder anwesend; dann waren $(x+15)$ Erwachsene, also $(2x+15)$ Personen anwesend. Nun gilt $2x+15=23$, $2x=8$, $x=4$. Demnach gehörten zu dieser Gesellschaft 4 Kinder und 19 Erwachsene. Unter den Erwachsenen seien y Frauen, also $(y+5)$ Männer, dann gilt $2y+5=19$, $2y=14$, $y=7$. Demnach setzten sich die Erwachsenen aus 7 Frauen und 12 Männern zusammen.

▲5▲1253 Das Aquarium besitzt ein Fassungsvermögen von $48 \cdot 25 \cdot 22\ \mathrm{cm}^3 = 26\,400\ \mathrm{cm}^3$. Das eingefüllte Wasser besitzt einen Rauminhalt von $48 \cdot 25 \cdot 17\ \mathrm{cm}^3 = 20\,400\ \mathrm{cm}^3$. Der Ziegelstein würde $30 \cdot 20 \cdot 10\ \mathrm{cm}^3 = 6\,000\ \mathrm{cm}^3$ Wasser verdrängen.
Aus $20\,400\ \mathrm{cm}^3 + 6\,000\ \mathrm{cm}^3 = 26\,400\ \mathrm{cm}^3$ folgt, daß das Aquarium nach dem Eintauchen des Ziegelsteines die vorhandene Wassermenge gerade noch fassen kann, also bis zum Rand gefüllt ist.

W 5 ■ 1254 Wir rechnen $100-4=96$, $90-18=72$. Die Zahl 96 besitzt folgende Teiler, die größer als 18 sind: 24, 32, 48, 96. Die Zahl 72 besitzt folgende Teiler, die größer als 18 sind: 24, 36, 72.
Die Zahlen 96 und 72 haben den gemeinsamen Teiler 24. Der gesuchte Divisor lautet somit 24, und es gilt
$100=4 \cdot 24+4$ bzw. $90=3 \cdot 24+18$.

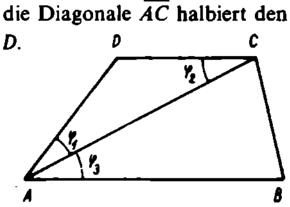
W 5 ■ 1255 Angenommen, es befinden sich x Gläser mit Birnen im Regal; dann sind dort noch $3 \cdot x$ Gläser mit Pflaumen und $2 \cdot 3 \cdot x = 6 \cdot x$ Gläser mit Kirschen. Insgesamt befinden sich im Regal $x+3x+6x=10x$ Gläser mit Obst. Nun gilt $40<10x<60$, also $4<x<6$. Nur $x=5$ erfüllt diese Ungleichungen. Im Regal befinden sich demnach 5 Gläser mit Birnen, 15 Gläser mit Pflaumen und 30 Gläser mit Kirschen.

W 5*1256 Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon (in ganzen Zahlen) sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.
Aus a) folgt: $a<e<b$. (1)
Aus b) folgt: $a<d<b$. (2)
Aus c) folgt: $E<D<A$. (3)
Aus d) folgt: $D<B<b$. (4)
Aus (1) und (2) folgt: Alfred ist der jüngste, Benno der älteste.
Aus (3) und (4) folgt: Erbe ist der jüngste, Dürer der zweitjüngste, Benno muß den Nachnamen Ampler haben. Folglich heißt ein weiterer Schüler Alfred Erbe.
Aus e) folgt: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Der vierte Schüler heißt somit Egon Baumbach.
Hieraus ergeben sich die Ungleichungen $a<d<e<b$ und $E<D<B<A$. Dem Alter nach geordnet, mit dem jüngsten beginnend, heißen die vier Schüler Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach, Benno Ampler.

W 5*1257 Dieser Klasse mögen x Schüler angehören. Dann belaufen sich die Ausgaben auf $(80 \cdot x+150)$ Pf bzw. $(90 \cdot x-150)$ Pf.
Deshalb gilt $90x-150=80x+150$,
$$10x=300,$$
$$x=30.$$
Der Klasse gehören 30 Schüler an.
Aus $80 \cdot 30\ \mathrm{Pf}+150\ \mathrm{Pf}=2\,550\ \mathrm{Pf}=25{,}50\ \mathrm{M}$ bzw. $90 \cdot 30\ \mathrm{Pf}-150\ \mathrm{Pf}=2\,550\ \mathrm{Pf}=25{,}50\ \mathrm{M}$ folgt, daß für die Ausschmückung des Klassenraumes 25,50 M ausgegeben wurden.

▲6▲1258 Angenommen nach x Stunden sei die Arbeit gemeinsam geschafft. In einer Stunde schafft Peter den vierten, Klaus den sechsten und Gerda den dritten Teil der zu verrichtenden Arbeit.
Für x Stunden gilt dann
$$\frac{1}{4} \cdot x+\frac{1}{6} \cdot x+\frac{1}{3} \cdot x = 1,$$
$$\frac{3}{12} \cdot x+\frac{1}{12} \cdot x+\frac{4}{12} \cdot x=1,$$
$$\frac{9}{12} \cdot x=1,$$
$$x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$
Der Schulgarten würde bei gemeinsamer Arbeit nach $\frac{4}{3}$ Stunden, also nach 1 Stunde und 20 Minuten gejätet sein.

▲6▲1259 Es seien $\sphericalangle DAC=\varphi_1$, $\sphericalangle DCA=\varphi_2$ und $\sphericalangle BAC=\varphi_3$. Aus $\overline{AD}=\overline{CD}$ folgt $\varphi_1=\varphi_2$. Da die Winkel φ_2 znd φ_3 Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt ferner $\varphi_2=\varphi_3$ und somit auch $\varphi_1=\varphi_3$, d. h., die Diagonale $\overline{AC}$ halbiert den Winkel $\sphericalangle BAD$.



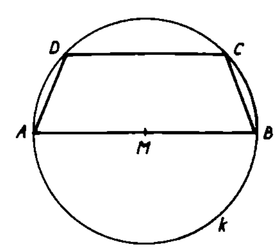
W 6 ■ 1260 Für einen Pfennig würde man $\frac{278}{145}$ g Waschpulver, für 200 Pf würde man $\frac{278 \cdot 200}{145}$ g, also rund 383 g dieses Waschpulvers erhalten.

W 6 ■ 1261 Aus $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{4}{7}$ und $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$ und $12:\frac{3}{7}=28$ folgt, daß dieser Klasse 28 Schüler angehören.
Oder mit Hilfe einer Gleichung:
Es sei x die Anzahl der Schüler dieser Klasse, dann gilt
$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{14}x+12=x,$$
$$\frac{4}{7}x+12=x,$$
$$12=\frac{3}{7}x,$$
$$x=28.$$

W 6*1262 Aus der Bemerkung des Schülers mit dem Familiennamen Dachs folgt: Einer der vier Freunde heißt Dieter Fuchs.
Aus dem Aufgabentext geht hervor, daß es sich bei den Schülern Bär, Frank und Dachs um drei verschiedene Personen handelt. Deshalb können weder der Schüler Bär noch der Schüler Dachs den Vornamen Frank haben. Folglich heißt ein weiterer dieser Schüler Frank Löwe.
Es verbleiben nunmehr die Vornamen Bernd und Lutz sowie die Familiennamen Bär und Dachs.
Aus der Aussage des Schülers Bär folgt:
Die anderen Freunde heißen Bernd Dachs und Lutz Bär.

W 6*1263 Es sei a das im Jahre 1974 von Herrn Anton Amsel und b das von seiner Schwester Berta erreichte Lebensalter.
Dann gilt $74-a=b$,
$$8+b=a.$$
Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $a=41$, $b=33$.
Herr Anton Amsel wurde 1933 geboren und ist 41 Jahre alt. Seine Schwester Berta wurde 1941 geboren und ist 33 Jahre alt.

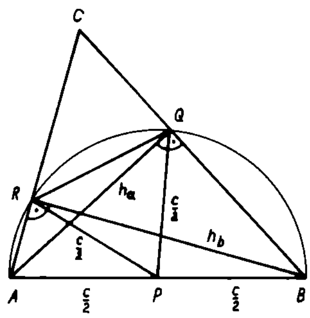
▲7▲1264 In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel 360°. Sind drei der Winkel rechte, so ist auch der vierte ein rechter, d. h., das Viereck ist ein Rechteck. Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang und sie halbieren einander. Folglich läßt sich um den Schnittpunkt der Diagonalen ein Kreis beschreiben, der durch die vier Eckpunkte des Rechtecks geht, d. h., das Rechteck ist ein Sehnenviereck. Die gegebene Aussage ist somit wahr.



Die Umkehrung der gegebenen Aussage lautet: „Jedes Sehnenviereck hat drei rechte Winkel."

Diese Aussage ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:
Einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $\overline{AB}$ wurde eine Sehne $\overline{CD}$ so eingezeichnet, daß $AB \parallel CD$ gilt. Wegen $\overline{CD} < \overline{AB}$ ist das Sehnenviereck $ABCD$ kein Rechteck, und es besitzt folglich nicht drei Innenwinkel, die rechte Winkel sind.

▲7▲1265 Wir konstruieren über $\overline{AB}$ als Durchmesser den Thaleskreis, der P zum Mittelpunkt hat und den Radius $\frac{c}{2}$ besitzt. Da die Winkel $\sphericalangle ARB$ und $\sphericalangle BQA$ beides rechte Winkel sind, deren Schenkel durch A und B gehen, liegen deren Scheitel R und Q beide auf dem gezeichneten Thaleskreis, und es gilt $\overline{PA} = \overline{PR} = \overline{PQ} = \overline{PB} = \frac{c}{2}$. Das Dreieck PQR ist somit gleichschenklig.



W 7 ▪ 1266 Wir stützen uns auf folgenden bekannten Satz: „Werden von einem Punkt außerhalb eines Kreises die beiden Tangenten an den Kreis gelegt, dann sind die Abschnitte der Tangenten von diesem Punkt bis zu den Berührungspunkten gleich lang."
Wegen $\overline{CP_1} = \overline{CQ_1}$ und $\overline{CP_2} = \overline{CQ_2}$ gilt $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$. Wegen $\overline{BP_1} = \overline{BR} = \overline{BP_2}$ gilt $\overline{BP_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_1P_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_1Q_2}$. Wegen $\overline{AQ_1} = \overline{AR} = \overline{AQ_2}$ gilt $\overline{AQ_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_1Q_2}$ und folglich auch $\overline{AC} = \overline{BC}$.

W 7 ▪ 1267 Die Anzahlen der hergestellten Figuren, Teller, Schüsseln und Vasen seien in dieser Reihenfolge mit f, t, s und v bezeichnet. Dann gilt

$$f + t + s + v = 120, \quad (1)$$
$$6 \cdot t = 120, \quad (2)$$
$$f + t = s + v, \quad (3)$$
$$10 + s = v. \quad (4)$$

Aus (2) folgt $t = \frac{120}{6} = 20$.
Aus (1) und (3) folgt

$$(f+t) + (f+t) = 120,$$
$$2 \cdot (f+t) = 120,$$
$$f + t = 60,$$
$$f + 20 = 60,$$
$$f = 40.$$

Aus (4) erhalten wir durch Einsetzen wegen $s + v = f + t = 60$ schließlich $10 + s = 60 - s$, also $2s = 50$ und somit $s = 25$ und $v = 35$. Von den Zirkelteilnehmern wurden 40 Figuren, 20 Teller, 25 Schüsseln und 35 Vasen hergestellt.

W 7*1268 Für die gesuchten vierstelligen natürlichen Zahlen gilt

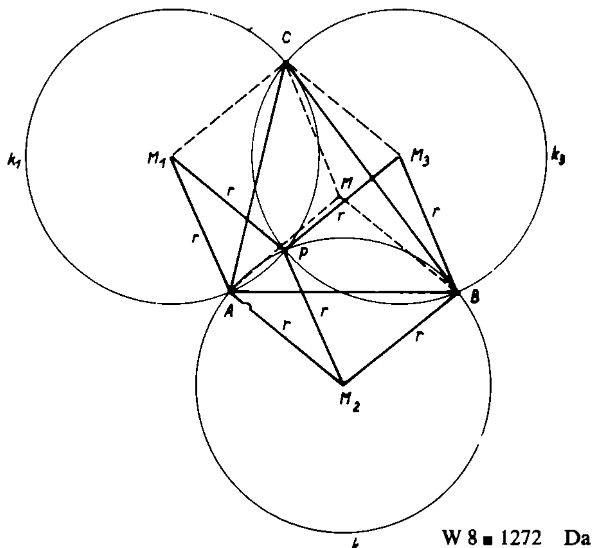
$$1000a + 100b + 10c + d = 19k \text{ und}$$
$$1000a + 100b + 10c + d = a + b + c + d + 4653.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir daraus $a + b + c + d + 4653 = 19k$; dabei ist k eine natürliche Zahl. Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b, c, d \leqq 9$ gilt ferner

$$1 \leqq a + b + c + d \leqq 36, \text{ also}$$
$$4654 \leqq 19k \leqq 4689.$$

Nur die Zahlen $k = 245$ und $k = 246$ erfüllen die Ungleichungen. Wegen $19 \cdot 245 = 4655$ und $4653 + 20 = 4673 \neq 4655$ entfällt $k = 245$ als Lösung.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung; es gilt $k = 246$ und $19 \cdot 246 = 4674$ sowie $4653 + 21 = 4674$. Die einzige vierstellige natürliche Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt, lautet daher 4674.

W 7*1269 Wegen $\overline{AM_1} = \overline{AM_2} = \overline{PM_1} = \overline{PM_2} = r$ und $\overline{BM_2} = \overline{BM_3} = \overline{PM_2} = \overline{PM_3} = r$ sind die Vierecke AM_2PM_1 und BM_3PM_2 Rhomben, und es gilt $AM_1 \parallel PM_2 \parallel BM_3$. Die Kreise um A und C mit dem Radius r mögen sich in M schneiden. Dann ist auch Viereck $AMCM_1$ ein Rhombus, und es gilt $AM_1 \parallel MC$ und somit auch $BM_3 \parallel MC$. Demnach ist auch das Viereck $CMBM_3$ ein Rhombus. Wegen $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$ hat der Umkreis des Dreiecks ABC den Radius r.



▲8▲1270 Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen gleich einer geraden Zahl ist, so sind entweder beide Zahlen gerade oder beide Zahlen ungerade. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:
a) Die beiden natürlichen Zahlen seien gerade Zahlen, wir bezeichnen sie mit $2m$ bzw. $2n$. Dann gilt
$(2m)^2 - (2n)^2 = 4m^2 - 4n^2 = 4(m^2 - n^2)$,
d. h., die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen ist durch 4 teilbar.
b) Die beiden natürlichen Zahlen seien ungerade Zahlen, wir bezeichnen sie mit $2m + 1$ bzw. $2n + 1$. Dann gilt

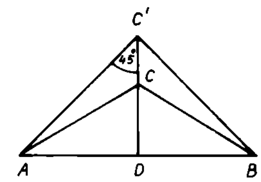
$$(2m+1)^2 - (2n+1)^2$$
$$= 4m^2 + 4m + 1 - 4n^2 - 4n - 1$$
$$= 4(m^2 + m - n^2 - n),$$

d. h., auch in diesem Falle ist die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen durch 4 teilbar, w. z. b. w.

▲8▲1271 Es sei ABC ein stumpfwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB} = 10$ cm und $\sphericalangle BCA > 90°$. CD sei die von dem Punkt C ausgehende Höhe dieses Dreiecks (vgl. die Abb.). Ferner sei ABC' ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, dessen Spitze C' auf derselben Seite der Geraden AB wie der Punkt C liegt.
Dann gilt $\sphericalangle DC'A = 45°$ und $\sphericalangle DCA > 45°$; also ist C ein innerer Punkt der Strecke $\overline{C'D}$, und es gilt $\overline{AD} < \overline{AC} < \overline{AC'}$.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt wegen $\overline{AD} = \overline{C'D} = 5$ cm $\overline{AC'}^2 = (5^2 + 5^2)\,\text{cm}^2 = 50\,\text{cm}^2$, also $\overline{AC'} = \sqrt{50}$ cm.
Wegen $\overline{AD} = 5$ cm folgt daher

$5\,\text{cm} < \overline{AC} < \sqrt{50}$ cm und hieraus wegen $7 < \sqrt{50} < 8$, weil $\overline{AC}$ ganzzahlig ist,

$5\,\text{cm} < \overline{AC} \leqq 7$ cm. Daher kann $\overline{AC}$ nur gleich 6 cm oder 7 cm sein.
Es gibt daher genau zwei stumpfwinklige, gleichschenklige Dreiecke, die den gestellten Bedingungen entsprechen, nämlich Dreiecke, deren Schenkel die Längen 6 cm bzw. 7 cm haben.



W 8 ▪ 1272 Da zu Beginn der Durchfahrt die Lokomotive die Tunneleinfahrt passiert und am Ende der Durchfahrt (wenn der letzte Wagen die Tunnelausfahrt passiert) die Lokomotive sich bereits 80 m von der Tunnelausfahrt entfernt befindet, legt der Zug während der Durchfahrtszeit t eine Entfernung von
$s = 134\text{ m} + 80\text{ m} = 214\text{ m} = 0{,}214$ km zurück.
Nun gilt für die Durchfahrtszeit t (in h) $t = \frac{s}{v}$, wobei $s = 0{,}214$ km und $v = 40\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ist. Man erhält daher

$$t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}214}{40}\,\text{h} = \frac{0{,}214 \cdot 90}{3600}\,\text{h} = 19{,}26\text{ s}.$$

Die Durchfahrtszeit beträgt daher rund 19 s.

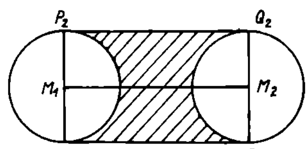
W 8 ■ 1273 Es seien M_1, M_2 die Mittelpunkte der Kreisscheiben, r ihr Radius, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{Q_1Q_2}$ je ein auf $\overline{M_1M_2}$ senkrecht stehender Durchmesser der Kreise (vgl. die Abb.). Dann ist das Viereck $P_1Q_1Q_2P_2$ ein Rechteck, das wegen

$$\overline{P_1Q_1}=\overline{M_1M_2}=\pi r,\quad \overline{Q_1Q_2}=2r$$

den Flächeninhalt $A_1=\pi r\cdot 2r=2\pi r^2$ hat.
Den Flächeninhalt des schraffierten, durch die Strecken $\overline{P_1Q_2}$, $\overline{P_2Q_2}$ und die Halbkreise zwischen P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2 begrenzten Flächenstücks erhält man daher, indem man von A_1 den Flächeninhalt zweier Halbkreisscheiben vom Radius r subtrahiert:

$$A_2=A_1-2\cdot\frac{\pi}{2}r^2=2\pi r^2-\pi r^2=\pi r^2$$

Er ist also genau gleich dem Flächeninhalt πr^2 einer der Kreisscheiben.



W 8*1274 Es sei $\frac{s}{2}$ die Länge der ersten Halbstrecke, dann ist $\frac{s}{2}$ auch die Länge der zweiten Halbstrecke. Das Fahrzeug legt die erste Halbstrecke in der Zeit $\frac{s}{2v_1}$ und die zweite Halbstrecke in der Zeit $\frac{s}{2v_2}$ zurück, also die Gesamtstrecke in der Zeit

$$v_0=\frac{s}{t_0}=\frac{s\cdot 2v_1v_2}{s\cdot(v_1+v_2)}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Andererseits beträgt das arithmetische Mittel der beiden Geschwindigkeiten

$$\bar{v}=\frac{v_1+v_2}{2}.$$

Man erhält daher die Differenz

$$\bar{v}-v_0=\frac{v_1+v_2}{2}-\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}=\frac{(v_1+v_2)^2-4v_1v_2}{2(v_1+v_2)}=$$

$$=\frac{v_1^2+2v_1v_2+v_2^2-4v_1v_2}{2(v_1+v_2)},$$

$$\bar{v}-v_0=\frac{v_1^2-2v_1v_2+v_2^2}{2(v_1+v_2)}=\frac{(v_1-v_2)^2}{2(v_1+v_2)}>0.$$

Daraus folgt

$$\bar{v}-v_0>0,\text{ also } v_0<\bar{v},$$

d. h., die Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 für die gesamte Strecke ist stets kleiner als das arithmetische Mittel $\bar{v}$ der beiden Geschwindigkeiten.

W 8*1275 Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$\overline{AB}^2=a^2+a^2=2a^2$, also $\overline{AB}=a\sqrt{2}$,
$\overline{AE}=\overline{EB}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Ferner gilt wegen $\overline{CD}=\frac{a}{2}$

$$\overline{AD}^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5}{4}a^2,\qquad \overline{AD}=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Ist nun Q der Fußpunkt des von D auf AB gefällten Lotes, so gilt $DQ \parallel CE$, also nach dem Strahlensatz

$$\overline{EQ}:\overline{QB}=\frac{a}{2}:\frac{a}{2}=1:1,\quad\text{und}$$
$$\overline{DQ}:\overline{CE}=1:2,$$
$$\text{d. h. } \overline{DQ}=\overline{QB}=\overline{EQ}=\frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

Bezeichnen wir die gesuchte Länge der Strecke $\overline{FD}$ mit x, so gilt nach dem Strahlensatz ferner

$$x:\overline{AD}=\overline{EQ}:\overline{AQ},$$

$$x=\frac{\overline{AD}\ \overline{EQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}a\sqrt{2}}=\frac{a}{6}\sqrt{5}.$$

▲9▲1276 Es sei a eine positive reelle Zahl, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n

$$a^n+a^n=a^{n+1},\qquad (1)$$

also

$$2a^n=a^n\cdot a.\qquad (2)$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch a^n, was wegen $a\neq 0$ zulässig ist, so erhält man $a=2$.
Also kann es höchstens eine reelle Zahl a, nämlich $a=2$, geben, so daß die Gleichung (1) für alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist. Andererseits gilt aber für $a=2$ und für alle natürlichen Zahlen n (einschließlich $n=0$)

$$2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1},$$

also ist auch die Gleichung (1) für $a=2$ stets erfüllt. Damit wurde gezeigt, daß es genau eine positive reelle Zahl a, nämlich $a=2$ gibt, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

▲9▲1277 Es sei (x, y, z) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), wobei x, y, z natürliche Zahlen sind. Dann gilt $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, weil sonst die Gleichung (1) nicht erfüllt wäre. Ferner gilt wegen $384=2^7\cdot 3$ und $1152=2^7\cdot 9$

$$xy^2z^3=2^7\cdot 3,\qquad (3)$$
$$x^2y^3z=2^7\cdot 9.\qquad (4)$$

Aus (3) erhält man durch Quadrieren

$$x^2y^4z^6=2^{14}\cdot 9,\qquad (5)$$

also aus (5) und (4) durch Division

$$yz^5=2^7.\qquad (6)$$

Da y und z natürliche Zahlen sind, kann z nur gleich 1 oder 2 sein.
a) Es sei $z=1$. Dann ist $y=2^7=128$ und wegen (1)

$$x=\frac{384}{y^2\cdot z^3}=\frac{384}{128^2},$$

also nicht gleich einer natürlichen Zahl, so daß dieser Fall ausscheidet.

b) Es sei $z=2$. Dann ist $y=\frac{128}{2^5}=4$, also wegen (1)

$$x=\frac{384}{4^2\cdot 2^3}=\frac{384}{128}=3.$$

Das gegebene Gleichungssystem kann also höchstens die Lösung

$$x=3,\ y=4,\ z=2$$

haben. Die Probe bestätigt, daß das tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) ist; denn wir erhalten

$$xy^2z^3=3\cdot 4^2\cdot 2^3=384,$$
$$x^2y^3z=3^2\cdot 4^3\cdot 2=1152.$$

Abzeichen in Gold

Fortsetzung von Seite 17

Petro Göbel, Rainer Jorzik, Heidi Huhn, Andreas Möller, Reiner Usbeck, Bernd Marr, Antje König, Angela Recknagel, Carola Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Heiko Marr, Pia Marr, Jens Scheerschmidt, Hendrik Büchel, alle Oberschönau; Sabine Peter, Schmalkalden; Heidi Storch, Breitungen; Marlene Ilgen, Fambach; Ullrich Scherf, Eisenach; Jürgen Sägenschnitter, Cottbus

Vorbildliche Hilfe

● Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 3000,– M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Uraniaverlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig.

W 9 ■ 1279 Die Punkte A, B und G bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AG}$, weil die Kante $\overline{AB}$ auf der Seitenfläche $BCGF$ und damit auch auf der Geraden $\overline{BG}$ senkrecht steht (vgl. Abb. 1). Daher ist der Abstand des Punktes B von der Raumdiagonale $\overline{AG}$ gleich der Länge der Höhe $\overline{BQ}=h$ dieses rechtwinkligen Dreiecks. Nun gilt $\overline{AB}=a$, $\overline{BG}=a\sqrt{2}$ (da $\overline{BG}$ Diagonale des Quadrats $BCGF$ ist), also nach dem Satz des Pythagoras (vgl. Abb. 2)

$$\overline{AG}^2=a^2+(a\sqrt{2})^2=3a^2,\quad \overline{AG}=a\sqrt{3}.$$

Bild 1

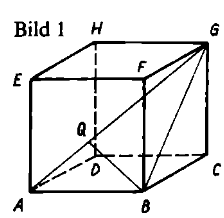
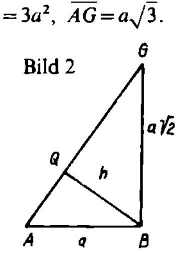


Bild 2



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABQ und ABG folgt ferner

$$h:a=a\sqrt{2}:a\sqrt{3},$$
$$h=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Der Abstand des Eckpunktes B von der Raumdiagonale $\overline{AG}$ ist daher wegen $a=6$ cm gleich $h=\frac{a}{3}\sqrt{6}=2\sqrt{6}\text{ cm}\approx 4{,}90\text{ cm}$.

W 9*1280 Es ist zu beweisen, daß nicht $z=n^2$ gilt, wobei n eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gelte $z=n^2$. Wenn nun z durch 3 teilbar ist, dann ist auch n^2 durch 3 teilbar. Daraus folgt aber, daß auch n durch 3 teilbar ist (weil 3 eine Primzahl ist). Wegen $z=n\cdot n$ folgt weiter, daß z durch 9 teilbar ist. Wie wir sehen werden, ist z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, was zu einem Widerspruch führt.

Durch Umformungen erhalten wir nämlich

$$z=5^7\cdot 7^5+1=(5\cdot 7)^5\cdot 5^2+1$$
$$=35^5\cdot 25+1.$$

Nun gilt (vgl. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 57)

$$35^5=(36-1)^5=36^5-5\cdot 36^4$$
$$+10\cdot 36^3-10\cdot 36^2+5\cdot 36-1,$$
$$35^5=a-1,$$

wobei a eine natürliche Zahl ist, die durch 36, also auch durch 9 teilbar ist.

Wir erhalten daher

$$z=(a-1)\cdot 25+1=25a-25+1$$
$$=25a-24.$$

Nun ist $25a$ durch 9 teilbar, weil a durch 9 teilbar ist; 24 hingegen ist zwar durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Also ist auch z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar.

Damit ist bewiesen, daß z nicht gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt noch schneller zum Ziel. Man erhält nämlich

$$5^2=\ 25\equiv 7 \pmod 9,$$
$$5^3\equiv\ 5\cdot 7\equiv 8 \pmod 9,$$
$$5^4\equiv\ 8\cdot 5\equiv 4 \pmod 9,$$
$$5^7\equiv\ 8\cdot 4\equiv 5 \pmod 9.$$
$$7^2=49\equiv 4 \pmod 9,$$
$$7^4\equiv\ 4\cdot 4\equiv 7 \pmod 9,$$
$$7^5\equiv\ 7\cdot 7\equiv 4 \pmod 9.$$

Daher gilt $z=5^7\cdot 7^5+1\equiv 5\cdot 4+1\equiv 21\equiv 3$ (mod 9), d. h., z ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, woraus wie oben folgt, daß z nicht eine Quadratzahl ist.

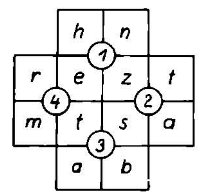
Lösungen zu alpha-heiter 1/75

Wortpaare gesucht

1. Lineal – Algebra; 2. Kilo – Logarithmus; 3. Scheitelpunkt – Punktmenge; 4. Höhe – Heron; 5. Hektar – Archimedes; 6. eineinhalb – Halbkreis; 7. Mittellinie – Element; 8. Galilei – Ikosaeder; 9. Minute – Tetraeder; 10. senkrecht – Rechteck – alpha heiter

Kombinatorik am Wabenrätsel

Da die Buchstaben h und n des Wortes „zehn“ nur in diesem Wort vorkommen, müssen diese beiden Buchstaben in den Außenfeldern eines Zyklus stehen. Da es vier Zyklen mit je zwei Außenfeldern gibt, kann das Wort „zehn“ auf acht verschiedene Weisen eingesetzt werden. Da der Buchstabe z außer in „zehn“ nur noch in „Satz“ vorkommt, müssen die Buchstaben von „Satz“ in den Zyklus eingetragen werden, in dem bereits das z von „zehn“ steht. Das Wort „Satz“ kann auf zweifache Weise eingetragen werden: entweder trägt das neu besetzte Innenfeld den Buchstaben t oder s. Da der Buchstabe e außer in „zehn“ nur noch in „Term“ vorkommt, muß in den Zyklus, in dem bereits das e von „*zehn*“ steht, das Wort „Term“ eingetragen werden. Das Wort „Term“ kann wiederum auf zwei Weisen eingetragen werden: entweder trägt das jetzt neu besetzte Innenfeld den Buchstaben t oder r. Da in den noch nicht vollbesetzten Zyklus nur das Wort „Stab“ einzutragen ist und da in diesem Wort der Buchstabe r nicht vorkommt, durfte das Wort „Term“ nur so eingetragen werden, daß von ihm die Buchstaben e und t in den Innenfeldern stehen. Da schließlich in „Stab“ der Buchstabe t nur einmal vorkommt, muß das Wort „Satz“ so eingetragen worden sein, daß von ihm in den Innenfeldern die Buchstaben z und s stehen. Das Wort „Stab“ läßt sich noch auf genau eine Weise eintragen. Da jede der acht Möglichkeiten des Eintragens von „zehn“ sich zu genau einer Lösung fortsetzen läßt, gibt es genau acht Lösungen. Eine Lösung ist:



Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 1

Fundamentale Relationszeichen

= (ist) gleich
= ра́вен, равна́, равно́, равны́ или: равня́ется......
= (is) equal to *or:* equals
= (est) égal à

$p=q$ p (ist) gleich q
$p=q$ p равно́ q или: p равня́ется q
$p=q$ p equals q *or:* p (is) equal to q
$p=q$ p égale q *ou:* p (est) égal à q

= wie (in Verhältnisgleichungen)
= как (в пропо́рциях)
= as (in proportions)
= comme

$p:q=s:t$ p (verhält sich) zu q wie s zu t
$p:q=s:t$ p отно́сится к q как s отно́сится к t
$p:q::s:t$ p (is) to q as s (is) to t
$p:q::s:t$ rapport de p sur q égale s sur t

< (ist) kleiner als
< ме́ньше
< (is) less than
< inférieur à

> (ist) größer als
> бо́льше
> (is) greater than
> supérieur à

≦ (ist) höchstens gleich *od.:* (ist) kleiner oder gleich
≦ ме́ньше или равно́ (или: не превосхо́дит)
≦ (is) not greater than *or:* (is) less than *or* equal to
≦ pas supérieur à *ou:* inférieur à ou égal à

≠ (ist) nicht gleich *od.:* (ist) ungleich
≠ неравно́
≠ (is) not equal to *or:* does not equal
≠ différent de

≈ (ist) angenähert gleich *od.:* (ist) nahezu gleich
≈ приближённо равно́
≈, =, ≃ (is) approximately equal to
≅ *or:* approximately equals
≈ égal environ à

Fundamentale Symbole und Ausdrücke aus der Mengenlehre

$a\in M$ a ist Element von M
a явля́ется элеме́нтом мно́жества M
a is an element of M
a appartient à M

$b\notin M$ b ist nicht Element von M
b не явля́ется элеме́нтом мно́жества M
b is not an element of M
b n' appartient pas à M

$M=\{2, 4, 6\}$
M ist die Menge mit den Elementen 2. 4. 6
M явля́ется мно́жеством, содержа́щим элеме́нты 2, 4, 6
M is the set with the elements 2, 4, 6
M est l'ensemble contenant les éléments deux, quatre, six

$M=\varnothing$
M ist eine leere Menge
M явля́ется пусты́м мно́жеством
M is an empty set (*or:* a null set)
M est ensemble vide (nul)

$A\subseteq B$
A ist Untermenge (*od.:* Teilmenge) von B
A явля́ется подмно́жеством от B
A is a subset of B
A inclus dans B

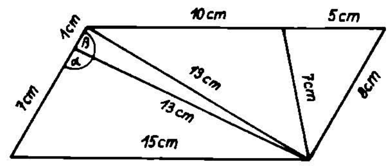
$A\subset B$
A ist echte Untermenge von B
A явля́ется пра́вильным подмно́жеством от B
A is a proper subset of B
A inclus dans B

Legespiel mit Dreiecken

Nach dem Kosinussatz gilt für die beiden in obiger Zeichnung markierten Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{-225+49+169}{2\cdot 7\cdot 13} = -\frac{1}{26},$$

$$\cos\beta = \frac{-169+169+1}{2\cdot 1\cdot 13} = \frac{1}{26}$$

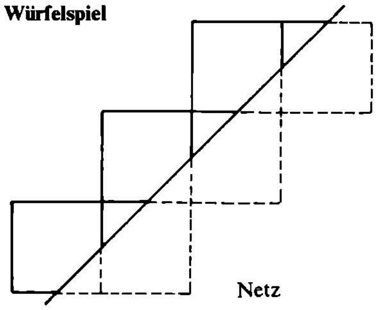


Hieraus folgt $\alpha+\beta=180°$. Also lassen sich die Dreiecke mit den Seiten 1 cm, 13 cm und 13 cm, sowie 7 cm, 13 cm und 15 cm zu einem Dreieck mit den Seiten 8 cm, 13 cm und 15 cm aneinanderlegen. Die beiden anderen gegebenen Dreiecke lassen sich ebenfalls zu einem Dreieck mit den Seiten 8 cm, 13 cm und 15 cm aneinanderlegen. Die beiden so erhaltenen kongruenten Dreiecke lassen sich auf dreifache Weise wiederum zu einem Parallelogramm aneinanderlegen.

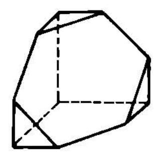
Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rcrcr} 377 & - & 2 & = & 375 \\ : & & + & & - \\ 29 & \cdot & 12 & = & 348 \\ \hline 13 & + & 14 & = & 27 \end{array}$$

Ein Würfelspiel



Netz



Schrägbild

Man sollte...

kürzen, unecht, gerade, echten, Lösung – KUGEL

Kreuzworträtsel

1. Vieta, 2. Data, 3. Raum, 4. Zenti, 5. Athen, 6. Sieb, 7. Leon, 8. Sehne – VARIABLE

Fortsetzung von Seite 2

Zu diesem Zweck nimmt man seine Zuflucht zu verschärften Versuchsbedingungen, bei denen das Gerät bei erhöhter Geschwindigkeit, Temperatur oder elektrischer Spannung arbeitet. Auch hier muß man mit zufälligen Streuungen der Eigenschaften der Materialien rechnen; so ist auch die Lebensdauer technischer Geräte eine zufällige Größe, denn sie werden unter verschiedenen Bedingungen und aus wechselnden Materialien hergestellt. Dies rührt in besonderem Maße von dem molekularen Aufbau der Stoffe und von den beträchtlichen Schwankungen der Bedingungen her, unter denen die Materialien bearbeitet werden, ferner von lokalen Veränderungen der Wechselwirkungen zwischen den Molekülen. Daher ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Grundlage für Theorie und Praxis der Zuverlässigkeit.

Ich habe bis jetzt darüber gesprochen, warum für die moderne Entwicklung der Wissenschaft und Praxis die Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtig ist, warum sie ein Fundament ist für den Fortschritt in Wissenschaft, Technik und Produktion. Indessen habe ich nichts gesagt über wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe wie zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit, zufällige Größen und ihre Verteilungsfunktionen, zufällige Prozesse und über zufällige Felder und über ihre mathematischen Charakteristiken. Ohne sie ist die ganze vorangegangene Betrachtung unvollständig und unzureichend. Jedoch erfordert die Darlegung dieser Begriffe eine spezielle Erörterung.

B. Gnedenko

$A \cup B$
die Vereinigungsmenge von A und B
сýмма (или: объединéние) мнóжества A и B
the union of A and B
A union B

$A \times B$
das Mengenprodukt (*od.*: die Kreuzmenge) von A und B
Декáртово произведéние мнóжества A и B
the Cartesian product (*or*: the cross product set) of A and B
intersection des ensembles A et B
(*ou*: produit cartésien ou produit extérieur)

$A \sim B$
A und B sind gleichmächtig
(A kann auf B eindeutig abgebildet werden)
A и B являются эквивалéнтными (A мóжет быть изображенó на B взаимно — однознáчно)
A and B are equivalent to each other
(A can be mapped on B biuniquely)
A et B sont de même puissance

Operationszeichen

Addition – сложéние – addition – addition
a_1, a_2 Summanden – слагáемые – addends – nombres à ajouter
s Summe – сýмма – sum – somme
$+$ plus – плюс – plus – plus
Beispiel:
$a_1+a_2=as$
a eins plus a zwei gleich s
a оди́н плюс a два равнó s
a one plus a two is equal to s
a un plus a deux égale s

Subtraktion – вычитáние – subtraction – soustraction
L Minuend – уменьшáемое – minuend – minuende –
l Subtrahend – вычитáемое – subtrahend – nombre à soustraire
d Differenz – рáзность – difference – différence – minus – ми́нус – minus – moins
Beispiel:
$L-l=d$
Groß-Lminus Klein-l gleich d
эль большóе ми́нус эль мáлое равнó дэ
capital Lminus small l is equal to d
majuscule L moins minuscule l égale d

Multiplikation – умножéние – multiplication – multiplication
$\cdot$, $\times$ mal – $\times$, $\cdot$, X умнóжить на или: умнóженное на $\cdot$ multiplied by or: times – $\times$, $\cdot$ fois
a, b Faktoren – сомнóжители – factors – facteurs
c Produkt – произведéние – product – produit
Beispiel:
$a\cdot b=ab=c$
a mal b gleich c (*od.*: ab gleich c)
$a\times b=a\cdot b=ab=c$
a умнóженное на b равнó c
или: a умнóжить на b равняется c
a times b is equal to c
or: a multiplied by b is *equal to c*
or: ab is equal to c
$a\cdot b=ab=c$
a fois b égale c (*ou*: a multiplié par b égale c)

Division – делéние – division – division
a Dividend – дели́мое или: числи́тель – dividend or: numerator – dividende ou: numérateur
b Divisor od.: Nenner – дели́тель или: знаменáтель – divisor *or*: denominator – diviseur ou: dénominateur
c Quotient – чáстное — quotient – quotient
$\frac{a}{b}$ Bruch – дробь — fraction – fraction –
:, –, / geteilt durch *od.*: durch
:, — дели́ть на или: делённое на
÷, :, –, / divided by *or*: over
:, –, / divisé par *ou*: sur
Beispiel hierzu in Teil 2, α 2/75

1967 bis 1974

Nomographie: 2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden – Olympiadeaufgaben: 1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha–Neubrandenburg (J. Lehmann) ● 3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb (M. Mäthner/G. Schulze) ● 3/67 Mathematische Wettbewerbe in England ● 4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien (S. Bodurow) ● 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tbilissi 1967 (J. Petrakow) ● 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit (R. Höppner) ● 6/67 IX. IMO 1967 (H. Bausch) ● 1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR ● 1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb USA 1967 ● 5/58, 6/68 X. IMO 1968 (H. Bausch/W. Burmeister) ● 6/68 Allunions-Fernolympiade (R. Lüders/J. Lehmann) ● 1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR ● 3/69 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/69, 1/70, XI. IMO 1969 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 (G. Ulbricht) ● 1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR ● 2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR (O. Langer/St. Horák) ● 3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (I. Reimann/M. Walter) ● 4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden ● 5/70 XII. IMO 1970 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR ● 2/71 10 Jahre Olympiade Junger Mathematiker der DDR ● 2/71 Mathematikolympiaden in der MVR ● 2/71 Österreichische Mathematikolympiade ● 5/71 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/71 XIII. IMO 1971 (J. Lehmann) ● 1/72 bis 5/72 XI. OJM der DDR ● 1/72 FDGB-Urlauber-Olympiade 1972 (W. Träger) ● 3/72 Mathematikolympiaden in der VR Polen (S. Straszewicz) ● 3/72 Rückblick auf die XIII. IMO (Red.) ● 3/72 Mathematikolympiade in der Republik Kuba (L. J. Davidson) ● 5/72 XIV. IMO 1972 (J. Lehmann) ● 1/73 bis 5/73 XII. OJM der DDR ● Mathematikolympiaden in den Niederlanden (A. v. Tooren) ● 4/73 II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig ● 5/73 XV. IMO 1973 (J. Lehmann) ● 1/74 bis 6/74 XIII. OJM der DDR ● 3/74 Mathematikolympiaden in der DDR (H. Bausch/W. Engel/H. Titze) ● 2/74 Aufgaben aus Olympiaden der SR Rumänien (C. Ottescu) ● 5/74 XVI. IMO 1974 (J. Lehmann) ● 5/74 Mathematikolympiaden in der DRV (Hoang Chung) ● 6/74 7th Tanzanian Mathematics Contest (H. Bartel)

Planimetrie: 1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat (H. Wiesemann) ● 5/68 Was ist ein Viereck? (L. Görke) ● 6/68, 1/69, 3/69, 5/69, 6/72 Mit Zirkel und Zeichendreieck (J. Lehmann) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 3/69 Mit Bleistift und Lineal (E. Schröder) ● 3/69 Bange machen gilt nicht! Modell eines geom. Extremwertproblems (Th. Scholl) ● 5/69 Übe sinnvoll – überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck (G. Pietzsch) ● 6/69 Kleine geometrische Exkursion (Th. Scholl) ● 2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (H. Titze) ● 3/70, 4/70 Ornamente (R. Bittner) ● 2/72 Arbeitsblatt Geometrie (H. Herzog) ● 3/72 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (E. Schröder) ● 3/73 Spiegelung am Kreis (Ch. Meinel) ● 4/73 Eine interessante, aber schwierige Aufgabe (R. Lüders) ● 3/74 Der goldene Schnitt und die Zahl τ (Ch. Meinel) ● 6/74 Über das Falten einer Landkarte (H. F. Lumon)

Stereometrie: 1/69 Fernsehfußball – reguläre Polyeder (E. Schröder) ● 2/69 Der Eulersche Polyedersatz (H. Günther) ● 5/71, 2/74, 4/74 Durch die Welt der Tetraeder (G. Geise) ● 1/74 Wir bauen eine Unruhe mit regelmäßigen Polyedern (B. Krötenheerdt) ● 4/74, 5/74 Stereographische Projektion (E. Schröder) ● 6/74 Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen? (J. Churgin)

Unterhaltung: 3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel (Th. Scholl) ● 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil (W. Träger) ● 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (W. Unze) ● 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (W. Träger) ● 1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie (W. Träger) ● 3/71 Wirklichkeit und Täuschung (J. Sedláček) ● 1/72 Kryptarithmetik (J. Lehmann/R. Lüders) ● 2/72 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (Ch. Riehl) ● 3/72, 3/74 Mathe-Quiz im Ferienlager (J. Lehmann/W. Träger) ● 3/73 *alpha*-Spiel-Magazin (J. Lehmann) ● 6/73 Mit Zirkel, Pinsel und Schere (J. Lehmann)

Verbindung zur Praxis: 3/67 Schwankt der Fernsehturm? (W. Zill) ● 3/67 Der Berliner Fernsehturm (W. Zill) ● 4/67 Auf den Spuren *Roald Amundsens* (S. Meier) ● 5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) (H. Werner) ● 1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge (A. Hanisch) ● 2/69 *Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon* Dresden-Zwinger (H. Grötzsch) ● 3/69 Mathematische Modelle aus der DDR (W. Glaß) ● 4/69 Multicurve (E. Schröder) ● 4/69 Aus der VAR berichtet ● 6/69 Mathematik und Musik (Ch. Lange) ● 6/69 Rund um das Schachbrett (K. Kannenberg) ● 1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (J. Frormann) 4/71 Waffen aus Suhl (E. Hoffmann) ● 6/71, 1/72 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (W. Träger) ● 3/72 Fluidkompaß *Sport 3* (Red.) ● 4/72 Die Rechenmaschine – ein Souvenir aus der Sowjetunion (A. Mertens) ● 6/72, 2/73 Mathematik im Reich der Töne (E. Schröder) ● 2/73 Über die Bedeutung der Mathematik für den Markscheider (H. Meixner) ● 2/73 Gut gedacht ist halb gelöst (J. Lehmann/W. Unze) ● 3/73 Mit Karte und Kompaß (J. Lehmann) ● 4/73 Herstellung eines Rechenstabes (A. Ewert) 5/73, 6/73 Millionen auf der Bleistiftspitze (A. Halameisär) ● 4/73 Mathematik und Physik (E. Mittmann) ● 1/74 Ist eine Landkarte eine mathematisch genau verkleinerte Abbildung eines Teils der Erdoberfläche? (K. Sandner) ● 1/74 Mathematik und Chemie H. Pichler; ● 2/74 Aufgaben für Freunde der Friedensfahrt und des Fußballs (W. Träger) ● 3/74, 4/74 Mathematik in der Gesellschaftsprognostik (B. Noack) ● 3/74 Wir bestimmen die Koordinaten unseres Heimatortes (Schülerkollektiv) ● 2/74 Kann man „etwas an niemanden verteilen"? (L. Stammler ● 4/74 Mathematik und Chemie (H. Pelka) ● 4/74 Vom Jakobstab zum Sextanten (J. Lehmann) ● 5/74 Vorfahrt beachten! (W. Träger)

Zahlenbereiche: 5/68 Übe sinnvoll – Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen (G. Pietzsch) ● 1/72 Über zwei Operationen mit Zahlen (K. Tschimow) ● 1/73 Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art (G. Pietzsch) ● 5/73 Primzahlen (A. D. Bendukidse) ● 5/74 Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen (W. Träger)

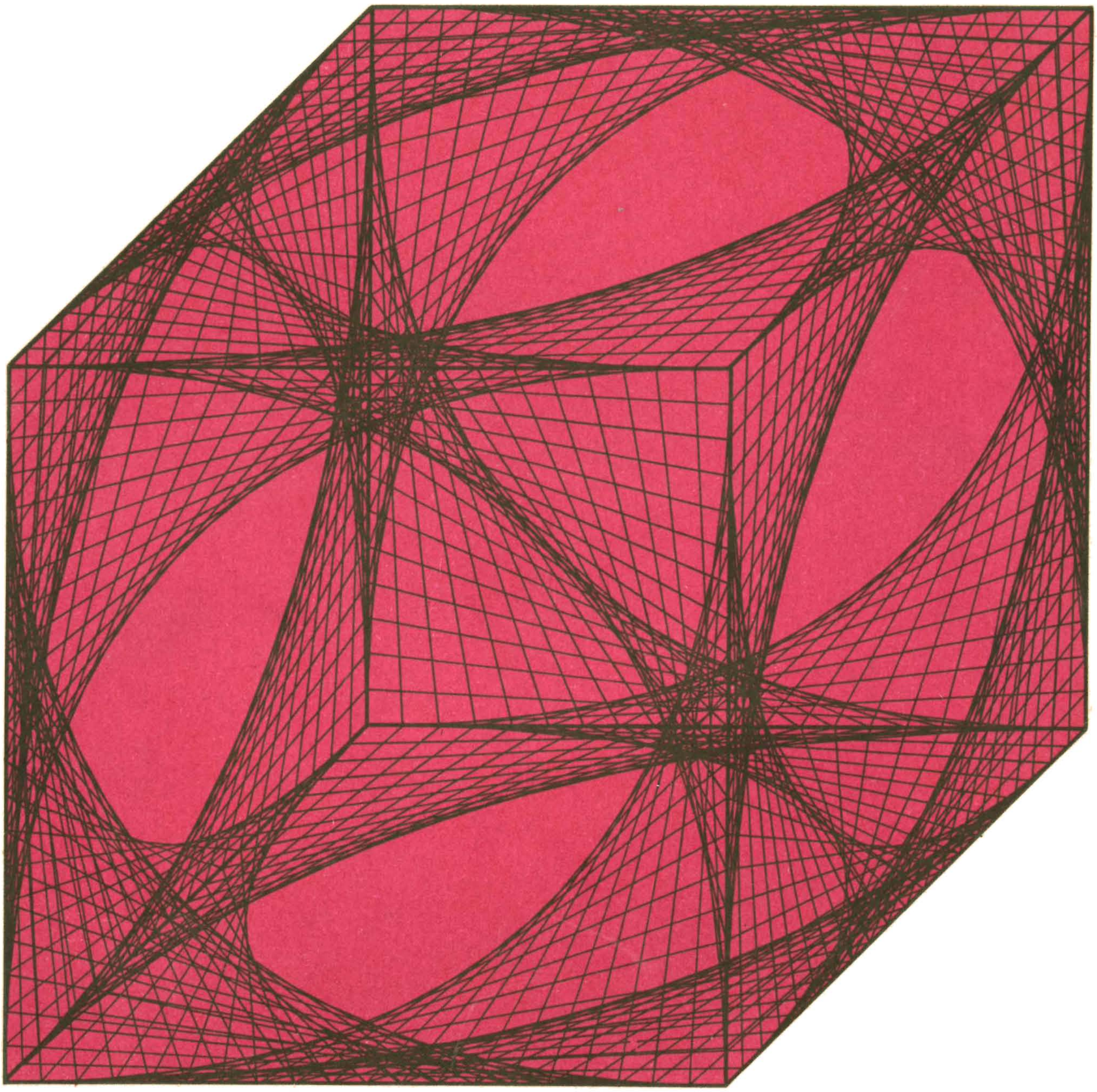
Zahlenfolgen: 6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums (A. A. Kolosow) ● 3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen (H. Lohse)

Zahlentheorie: 3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten (G. Lorenz) ● 5/70 Freitag der 13. (T. Bailey/G. Hofmann) ● 4/71 Die Teilbarkeit durch 7 (E. Naumann) ● 2/72, 3/72 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten (D. B. Fuchs) ● 3/73 Gitterpunkte (M. Günther) ● 4/74 Teilbarkeitsbeziehungen (K. Becker)

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften): 5/67 Mathematischer Wettbewerb (W. Werner) ● 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? (G. Horn) ● 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA" (W. Träger) ● 2/72 Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew (L. A. Kaloujnine) 4/73, 4/74 Arbeitspläne Mathematik (Kl. 7/10) (D. Klöpfel/M. Rehm) ● 4/72 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (AG Math. Lübtheen) ● 4/72 Mathematik frei Haus (Korrespondenzzirkel) (R. Bergmann) ● 5/72 Mathematikern über die Schulter geschaut (H. Bode) ● 3/73 Ein Mathematikzentrum in Aktion (W. Henker) ● 5/73 Mathematik im Moskauer *Pionierpalast auf den Leninbergen* (V. Trostnikow) ● 1/74 Inhalt einer Übung des Mathematikzirkels des Moskauer Palastes der Pioniere und Schüler (V. Trostnikow) ● 5/74 *K. Bachmann* berichtet aus dem Leben einer AG

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 1,50 M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Möller, Mittweida – Eigenfoto (S. 27); ADN (S. 30); J. Lehmann, Leipzig (S. 31); Tran hun Minh, z. Z. Leipzig (S. 42); Vignetten IV. U-Seite: H. Teske, Leipzig; *Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 27. Januar 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik und Sprachwissenschaft

Es gibt heute immer mehr Wissenschaften, in denen man mathematische Methoden als Hilfsmittel zur Forschung benutzt. Auch in der Sprachwissenschaft geschieht dies seit einigen Jahrzehnten.

Man kann dabei im großen und ganzen zwei Richtungen unterscheiden: In der einen werden *statistische* Gesetzmäßigkeiten der Sprache untersucht (z. B. Häufigkeiten von Wörtern), in der anderen bemüht man sich, die *Strukturen* darzustellen, die sprachlichen Äußerungen innewohnen.

Die erste Richtung heißt *Sprachstatistik*. Mit ihr wollen wir uns hier nicht beschäftigen. Wer an ihr Interesse hat, dem kann ich empfehlen, sich in einer geeigneten Bibliothek das Buch „Einführung in die Sprachstatistik" von Charles Muller auszuleihen. (Erschienen im Akademie-Verlag, Berlin 1972.) Wir wollen uns jetzt ein wenig in der zweiten Richtung umsehen. Sie wird meist *mathematische Linguistik* genannt, obwohl diese Bezeichnung eigentlich die Sprachstatistik mit einschließt.

Zuvor ein paar Bemerkungen über unsere Sprache.

Alle sprachlichen Äußerungen sind strukturiert, d. h. nach gewissen Regeln aufgebaut. Während wir sprechen oder schreiben, wenden wir diese Regeln an, ohne uns jedesmal über sie Gedanken zu machen. Mit großer Geschwindigkeit läuft im Gehirn ein komplizierter Prozeß ab, der zum Beispiel bewirkt, daß wir für das Subjekt eines Satzes die Nominativform wählen, daß wir also sagen

Die kleinen Kinder spielen im Zimmer, (1)

aber nicht

Den kleinen Kindern spielen im Zimmer.

Auch wenn wir Gesprochenes hören oder Geschriebenes lesen, wenden wir Regeln des Satzbaus an. Wenn uns jemand sagt:

Dem Vater gibt das Kind ein Buch,

so erkennen wir an der Wahl der Kasus – *Kind* im Nomitativ, *Vater* im Dativ –, wer der Geber und wer der Empfänger des Buches ist.

Über die Struktur von Sätzen erfahren wir einiges in den Grammatikstunden des Deutschunterrichts. Wir lernen z. B. die Satzglieder unterscheiden. Unser Beispielsatz (1) hat folgende Satzglieder:

Subjekt: *die kleinen Kinder,*
Prädikat: *spielen,*
Lokalbestimmung: *im Zimmer.*

Zwischen diesen Satzgliedern bestehen viele Beziehungen, z. B. diese:

(2) Das Subjekt steht im Plural, deshalb muß auch das Verb, aus dem hier das Prädikat besteht, im Plural stehen.

(3) Die Lokalbestimmung zu *spielen* kann nur einen Ort, nicht eine Richtung angeben. Daher heißt es *im Zimmer* (Dativ) und nicht *ins Zimmer* (Akkusativ).

Zwischen den drei Wörtern, die das Subjekt bilden, gibt es u. a. folgende Beziehungen:

(4) Der Artikel *die* und das Adjektiv *kleinen* richten sich in Kasus (Fall), Numerus (Zahl) und Genus (Geschlecht) nach dem Substantiv, auf das sie sich beziehen *Kinder.*

(5) Das Adjektiv *kleinen* wird außerdem vom davor stehenden Artikel beeinflußt: Wäre er nicht vorhanden, so müßte es *kleine* heißen.

Bisher haben wir von der Struktur der Sätze nur die formale Seite betrachtet, nämlich die *grammatische* Struktur. Ein Satz hat aber nicht nur eine bestimmte Form, sondern auch einen *Inhalt.* Dieser besitzt ebenfalls eine Struktur, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen. Sie steht mit der grammatischen Struktur in engem Zusammenhang.

Für die Wissenschaftler, die in der mathematischen Linguistik tätig sind, besteht gegenwärtig eine sehr wichtige Aufgabe darin, eine mathematische Beschreibung der grammatischen Struktur von Sätzen zu finden. Diese Aufgabe soll nun kurz erläutert werden.

Zunächst wollen wir einiges über ihren Zweck sagen. Es wäre sehr nützlich, wenn man ein Programm zur automatischen grammatischen Analyse von Sätzen hätte, ein Programm, mit dessen Hilfe für jeden beliebigen Satz einer Sprache durch einen Elektronenrechner eine Beschreibung der grammatischen Struktur ermittelt werden kann. Dies wäre ein wichtiger Schritt zu mehreren Zielen, die von großer praktischer Bedeutung sind, wie z. B. der automatischen Sprachübersetzung und der automatischen Sammlung von Fakten über irgendein Wissensgebiet.

Um aber ein automatisches Verfahren zur grammatischen Analyse aufzustellen, muß man erst die Grammatik „mathematisieren". Das heißt, man muß das, was über die Struktur von Sätzen zu sagen ist, so präzise, einheitlich und vollständig darstellen, wie es in der Mathematik üblich ist. Wie das geschieht, soll jetzt ein wenig geschildert werden.

Eines muß gleich gesagt werden: Es wird hier nicht von Zahlen und Berechnungsverfahren die Rede sein. Die hauptsächlichen mathematischen Werkzeuge, die wir für unsere Aufgabe brauchen, sind Mengen, Relationen und algebraische Strukturen. Man kann es auch so ausdrücken: Es werden keine Quantitäten, sondern Qualitäten untersucht; in der Grammatik will man nicht die Länge oder die Häufigkeit eines Wortes wissen (dies wären quantitative Merkmale), sondern man will z. B. wissen, ob das Wort ein Verb, Adjektiv usw. ist.

Wenden wir uns nun wieder der grammatischen Struktur von Sätzen zu. Anstatt zu sagen, ein Satz hat eine bestimmte Struktur, kann man auch sagen: Zwischen seinen Teilen bestehen bestimmte Beziehungen. Für unseren Beispielsatz (1) haben wir einige angegeben ((2) bis (5)). Indem wir solche Beziehungen kennenlernen, lernen wir unsere Sprache besser verstehen und gebrauchen. Die Grammatik hilft uns dabei.

Wir sind keine Computer, sondern lebendige Wesen. Wir erfassen, wenn wir einen Satz hören, so viele Beziehungen gleichzeitig, wie sie kein Computer erfassen kann. Und für solchen lebendigen Umgang mit der Sprache ist die Grammatik gemacht, die wir in der Schule lernen. Gerade weil sie *nicht* mit mathematischer Strenge formuliert ist, ist sie für uns leichter verständlich. Wie sieht nun eine Grammatik aus, mit der nicht Menschen, sondern Computer arbeiten sollen?

Im *Zentralinstitut für Sprachwissenschaft* an der *Akademie der Wissenschaften der DDR* ist eine Gruppe von Mathematikern und Sprachwissenschaftlern dabei, eine solche Grammatik für die deutsche Sprache in allen Einzelheiten auszuarbeiten.

Der wichtigste Grundbegriff, von dem wir ausgehen, ist der Begriff *Abhängigkeitsbaum.* Ein Abhängigkeitsbaum ist ein spezieller Graph. (Wer die Definition des Graphen nachlesen möchte, schlage in „alpha", Heft 4/72 und 6/72ff. nach.)

Definition: Ein Graph G heißt genau dann *Abhängigkeitsbaum,* wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B_1) Die Kanten von G sind gerichtet.

(B_2) Es gibt genau einen Knotenpunkt S von G, in dem keine Kante ihren Anfang nimmt. (S heißt *Spitze* von G.)

(B_3) In jedem Knotenpunkt K von G mit $K \neq S$ beginnt genau eine Kante.

(B_4) Von jedem Knotenpunkt führt ein Weg zur Spitze, wobei jede Kante des Weges entsprechend ihrer Richtung durchlaufen wird.

Bild 1 zeigt zwei Beispiele für Abhängigkeitsbäume. In Bild 2 seht ihr gerichtete Graphen, die keine Abhängigkeitsbäume sind:

Beim ersten ist B_2 verletzt, er hat zwei Spitzen. Beim zweiten ist B_3 verletzt, B_2 und B_4 aber sind erfüllt. Beim dritten sind alle Bedingungen außer B_4 erfüllt; die Kante zwischen A und B ist „falsch" gerichtet.

▲ Aufgabe ▲ Man beweise, daß jeder Abhängigkeitsbaum ein *Baum* ist, d. h., daß er zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält. Jedem Satz der deutschen Sprache wird nun nach bestimmten Regeln ein Abhängigkeitsbaum zugeordnet. Zum Beispielsatz (1) gehört der in Bild 3 dargestellte Baum.

Die kleinen Kinder spielen im Zimmer.

Den Wörtern des Satzes entsprechen umkehrbar eindeutig Knotenpunkte des Abhängigkeitsbaumes. Verläuft eine gerichtete Kante von einem Knotenpunkt K_1 nach einem Knotenpunkt K_2, so bedeutet das, daß zwischen den entsprechenden beiden Wörtern eine grammatische Beziehung besteht oder, wie wir sagen, eine *Abhängigkeit*. Umgekehrt wird aber nicht jede Abhängigkeit zwischen Wörtern durch eine Kante zwischen den entsprechenden Knotenpunkten dargestellt. Zum Beispiel besteht im Satz (1) eine Abhängigkeit zwischen *die* und *kleinen*. Wir haben sie vorhin unter (5) erläutert. Sie wird nicht durch eine Kante dargestellt, denn sonst sähe der Graph so aus wie im Bild 4.

Dieser Graph ist offensichtlich kein Baum mehr, also erst recht kein Abhängigkeitsbaum. Auf Abhängigkeitsbäume als Strukturbeschreibungen wollen wir aber nicht verzichten, da sie viele Vorteile bieten. Würden wir Graphen mit Kreisen zulassen, so wäre unser Vorhaben, die automatische Analyse von Sätzen, sehr viel schwerer zu lösen. Wir statten deshalb die Abhängigkeitsbäume mit zusätzlichen Informationen aus, jedoch so, daß die Baumstruktur erhalten bleibt.

Jedem Knotenpunkt eines Abhängigkeitsbaumes wird eine *Merkmalkombination* (MK) zugeordnet. Das ist eine Liste, die nach einem *für alle Knotenpunkte einheitlichen* Schema in fünf Teile gegliedert ist. In jedem der fünf Teile stehen an festen Plätzen bestimmte Angaben über das Wort, dem der betreffende Knotenpunkt zugeordnet ist. Zum Beispiel gibt es im ersten Teil jeder MK unter anderem die Plätze „Kasus“ (Fall), „Numerus“ (Zahl), „Person“, „Tempus“ (Zeit). S. Tabelle 1

Nehmen wir aus unserem Beispielsatz (1) die Wörter *Kinder* und *spielen*. An den eben genannten Plätzen in der MK müßten folgende Eintragungen stehen:

Kinder S. Tabelle 2

spielen S. Tabelle 3

Erläuterung: Pl = Plural, Präs = Präsens. Der Stern bedeutet, daß das betreffende Merkmal für das jeweilige Wort keine Bedeutung hat: Bei Substantiven ist es sinnlos, zu sagen, sie stehen im Präsens oder im Perfekt. Bei Verben dagegen unterscheidet man keine Kasus (Fälle), wohl aber Tempora (Zeiten). Erinnern wir uns nun an die Beziehung, die unter (2) genannt wurde: Wenn das Subjekt im Plural steht, so muß auch das Verb des Prädikats im Plural stehen. Für unser Schema der Merkmalkombinationen bedeutet das: Im Abhängigkeitsbaum zu Satz (1) (vgl. Bild 3) muß die MK für *spielen* an der Stelle „Numerus“ die gleiche Eintragung haben wie die MK für *Kinder*.

Die Beziehung (5), also die Beeinflussung des Adjektivs *kleinen* durch den Artikel *die*, läßt sich nun ebenfalls ausdrücken durch gewisse Eintragungen in den MK der beiden Wörter.

Außer den Merkmalkombinationen enthalten die Abhängigkeitsbäume noch andere Zusatzinformationen, die aber ebenfalls exakt festgelegt sind.

Durch alle diese Angaben werden die Abhängigkeitsbäume zu einem Beschreibungsmittel, das sehr anpassungsfähig und doch streng formal ist. Es wird sowohl den Erfordernissen der Sprache als auch der Mathematik gerecht.

Damit Ihr keinen falschen Eindruck gewinnt, muß noch folgendes gesagt werden: In diesem Artikel haben wir über Abhängigkeitsbäume nur anhand einiger ausgewählter Begriffe und Beispiele gesprochen. So wie die Spitze des Eisberges, die aus dem Meer aufragt, nur ein kleiner Teil des Eisberges ist, so ist das, was hier dargestellt wurde, nur der Anfang einer umfangreichen mathematischen Theorie. In ihr wird u. a. ausgesagt und bewiesen,

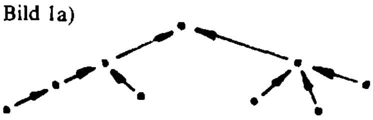
- welche Zusammenhänge zwischen den Merkmalkombinationen und den anderen Zusatzinformationen bestehen,
- warum sich mit den Abhängigkeitsbäumen und den Zusatzinformationen alle grammatischen Erscheinungen, die man braucht, beschreiben lassen,
- wie bei der automatischen Satzanalyse zu einem gegebenen Satz der Abhängigkeitsbaum konstruiert wird.

Wir haben hier keinen Platz, die Resultate zu erläutern, sondern müssen uns mit den Grundbegriffen begnügen, die wir schon dargestellt haben.

Ich hoffe, Ihr konntet trotzdem einen Eindruck davon gewinnen, daß sich auch über die Sprache, diese lebendige und vielgestaltige Erscheinung, mit Hilfe der Mathematik nützliche Erkenntnisse gewinnen lassen.

H. Küstner

Bild 1a)



b)

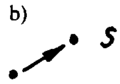
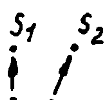
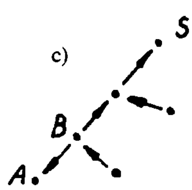


Bild 2a)



b)

c)



Die kleinen Kinder spielen im Zimmer

Bild 3

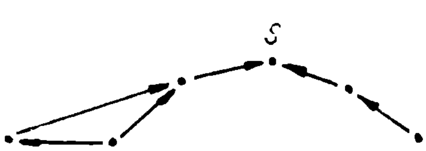


Bild 4

Tabelle 1

Teil 1						Teile 2 bis 5
Kasus		Num.	Pers.	Tempus		

Tabelle 2

Teil 1						Teile 2 bis 5
Kasus		Num.	Pers.	Tempus		
1		Pl	3	*		

Tabelle 3

Teil 1						Teile 2 bis 5
Kasus		Num.	Pers.	Tempus		
*		Pl	3	Präs		

Es ist die 11. Karte

Ein altes Kartenkunststück mathematisch beleuchtet

21 gemischte Karten werden der Reihe nach offen vor dem Mitspieler auf drei Stöße verteilt. Dabei hat dieser still für sich eine Karte zu merken. Er gibt den Stoß an, in welchem sich die gemerkte Karte befindet. Beim Aufnehmen der Karten wird dieser Stoß in die Mitte zwischen die beiden unbezeichneten Stöße genommen.

Die Karten werden zum 2. Mal wie oben ausgelegt. Der Mitspieler gibt wieder den Stoß an, in dem sich die Karte befindet. Die Karten werden wie oben aufgenommen und der Vorgang wird noch einmal wiederholt. Nun befindet sich die gemerkte Karte genau in der Mitte der 21 Karten. Sie ist also die 11. Karte.

Durch Rechnung läßt sich der Sachverhalt bestätigen. Der Mitspieler habe sich die c-te Karte gemerkt. c kann jeden Wert von 1 bis 21 haben.

Beim 1. Auslegen liegen $s_1=\left[\frac{c-1}{3}\right]$ Karten unter der gewählten Karte. $\left[\frac{c-1}{3}\right]$ bedeutet das größte Ganze von $\frac{c-1}{3}$, z. B. für $c=17$ ist es 5.

Beim 1. Aufnehmen kommt die Karte an die $(7+s_1+1)$-*te* Stelle von unten. Legt man die Karten, mit der untersten anfangend, aus, so liegen beim 2. Auslegen unter der Karte $s_2=\left[\frac{7+s_1}{3}\right]$ Karten.

Beim 2. Aufnehmen ist die Karte an die $(7+s_2+1)$-te Stelle gekommen.

Beim 3. Auslegen liegen unter der Karte $s_3=\left[\frac{7+s_2}{3}\right]$ Karten. Beim 3. Aufnehmen ist sie nun an der $(7+s_3+1=11)$-ten Stelle. Das ist auch der Fall. Für

c = 1, 2, 3/4, 5, 6/7,8,9/10, 11, 12/13, 14, 15/16, 17, 18/19, 20, 21 ist
s_1 = 0 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6
s_2 = 2 / 3 / 4
s_3 = 3
also $7+s_3+1=11$.

Dieser Scherz, d. h. die Möglichkeit, durch eine endliche Anzahl solcher Umlegungen eine Karte in die Mitte des Spiels zu bekommen, beruht keineswegs auf einer besonderen „Heiligkeit" der Zahlen 3 und 7. Es genügt anzunehmen, daß ein Kartenspiel $a\cdot b$ Karten habe, worin a und b ungerade Zahlen sind. Es befindet sich dann in der Mitte, also an der Stelle $\frac{a\cdot b+1}{2}$ wirklich eine Karte.

Beim Zusammennehmen kommen unter bzw. über den bezeichneten Stoß $\frac{a-1}{2}$ Stöße zu b Karten. Die Karten werden nämlich in a Stößen zu b Karten ausgelegt.

Es soll nun untersucht werden, welche Beziehung zwischen a und b bestehen muß, damit die Aufgabe nach dem n-ten Schritt gelöst ist. Es soll beim Auslegen wieder mit der untersten Karte begonnen werden.

Es befinden sich unter der c-ten Karte

beim 1. Auslegen $s_1=\left[\frac{c-1}{a}\right]$ Karten,

beim 2. Auslegen $s_2=\left[\frac{\left(\frac{a-1}{2}\right)\cdot b+s_1}{a}\right]$ K.,

beim n. Auslegen $s_n=\left[\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-1}}{a}\right]$ K.

Soll beim n-ten Aufnehmen die Karte in der Mitte des Spiels sein, so muß sie beim n-ten Auslegen in der Mitte ihres Stoßes liegen. Unter ihr müssen also $\frac{b-1}{2}$ Karten liegen.

$$s_n=\left[\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-1}}{a}\right]=\frac{b-1}{2}.$$

Hieraus läßt sich die größte Zahl b in Abhängigkeit von a bestimmen, für die die Aufgabe in n Schritten gelöst ist.

Der kleinste Wert für s_{n-1} ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{b-1}{2}=\left[\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-1}}{a}\right];\ s_{n-1_{\min}}=\frac{b-a}{2}.$$

Den größten Wert für s_{n-1} errechnet man aus der Gleichung

$$\frac{b+1}{2}=\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-1}+1}{a};\ s_{n-1_{\max}}=\frac{b+a-2}{2}.$$

Das sind a aufeinanderfolgende Werte.

Der kleinste Wert für s_{n-2} ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{b-a}{2}=\left[\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-2}}{a}\right]=\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-2_{\min}}}{a};$$

$$s_{n-2_{\min}}=\frac{b-a^2}{2}.$$

Den größten Wert für s_{n-2} ergibt die Gleichung

$$\frac{b+a}{2}=\left[\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-2_{\max}}}{a}\right]=\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-2_{\max}}+1}{a};\ s_{n-2_{\max}}=\frac{b+a^2-2}{2}.$$

Das sind im ganzen a^2 Werte.

Es sei $s_{n-m_{\min}}=\frac{b-a^m}{2}$ und $s_{n-m_{\max}}=\frac{b+a^m-2}{2}$. Dann ist $s_{n-(m+1)_{\min}}=\frac{b-a^{m+1}}{2}$ aus der Gleichung

$$\frac{b-a^m}{2}=\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-(m+1)_{\min}}}{a}$$ und

$s_{n-(m+1)_{\max}}=\frac{b+a^{m+1}-2}{2}$ aus der Gleichung

$$\frac{b+a^m}{2}=\frac{\frac{a-1}{2}\cdot b+s_{n-(m+1)_{\max}}+1}{a}.$$

Das sind a^{m+1} Werte, die von $s_{n-(m+1)}$ angenommen werden.

Schließlich sind $s_{1_{\min}}=\frac{b-a^{n-1}}{2}$ bis $s_{1_{\max}}=\frac{b+a^{n-1}-2}{2}$ a^{n-1} Werte.

Ist die Aufgabe gelöst, so muß die Anzahl der s_1-Werte $b=a^{n-1}$ sein, da $\left[\frac{c-1}{a}\right]$ b Werte annimmt.

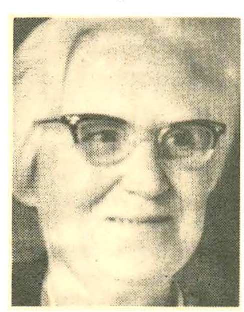
$s_{1_{\min}}=\frac{b-a^{n-1}}{2}=0;\ s_{1_{\max}}=\frac{b+a^{n-1}-2}{2}$ $=b-1$. Es ergibt sich:

Für $b=a^0=1$ ist die Aufgabe in einem Schritt gelöst; für $b=a^0+2$ bis a^1 ist die Aufgabe in zwei Schritten gelöst; für $b=a^1+2$ bis a^2 ist die Aufgabe in drei Schritten gelöst usw. Für $b=a^m+2$ bis a^{m+1} ist die Aufgabe in $m+2$ Schritten gelöst.

Ist $b=c_m a^m+c_{m-1}a^{m-1}+\ldots+c_0$, so ist die Aufgabe in $n=m+2$ Schritten gelöst.

Für unser Beispiel $a=3$, $b=7$, $c_1=2$, $c_0=1$, $m=1$ ist die Aufgabe in $n=3$ Schritten gelöst.

Hildegund Möller, Mittweida



Wir bauen Polyeder

Herstellung von Polyedern aus allen Teilflächen eines Quadrates

Aufgabenstellung:
Ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist so in n-Ecke aufzuteilen, daß sich aus *genau allen Teilflächen* ein Polyeder zusammensetzen läßt. Jedes n-Eck bildet eine Begrenzungsfläche des Polyeders.
$A_0 = a^2$
a) Versuche, möglichst viele Polyeder mit den genannten Eigenschaften zu finden!
b) Stelle jedes Polyeder im Grund-Aufrißverfahren und im Schrägriß dar!
c) Leite für jedes Polyeder die Volumenformel in Abhängigkeit von a her! $V=f(a)$
d) Stelle Modelle her!

1. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche

Kanten des Körpers: $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}$

Volumen des Körpers: $V=f(a)=\frac{a^3}{16}$

2. Ein Dreikantprisma

Zur Konstruktion der Teilflächen ist die Kathete des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks $\overline{HJ}=x$ zu berechnen.
Wegen $\overline{HG}=\overline{JF}$ gilt:

$$x\sqrt{2}=a-x$$
$$x(\sqrt{2}+1)=a$$
$$x=\frac{a}{\sqrt{2}+1}=a(\sqrt{2}-1)$$

Mit $a\sqrt{2}-a$ ist die Konstruktion der Teilflächen leicht ausführbar. Berechnung des Volumens aus:

$$V=\frac{\overline{HJ}\cdot\overline{JG}}{2}\cdot\overline{JF}$$
$$\overline{HJ}=\overline{JG}=x=a(\sqrt{2}-1)$$
$$\overline{JF}=\overline{HG}=x\sqrt{2}=a(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}$$
$$V=f(a)=\frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{2}\cdot a(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}$$
$$V=f(a)=\frac{a^3}{2}(10-7\sqrt{2})$$

3. Ein Tetraeder

Verbindet man die Halbierungspunkte zweier anliegenden Seiten und diese mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Quadrats, so erhält man das Netz eines Tetraeders.

Die Werte zur Berechnung der Grundfläche lassen sich unschwer aus der Skizze herleiten. Die Höhe h ist zu berechnen.
Winkel $E''D''C''$ ist die Projektion des Winkels $EDC=90°$. Weil Schenkel $\overline{CD}$ parallel zur Rißebene, folgt Winkel $E''D''C''=90°$.
Kombination von Höhen- und Kathetensatz ergibt für h:

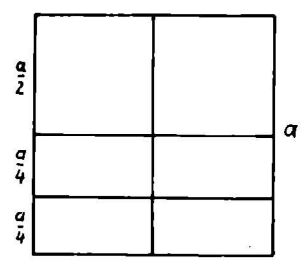
$$h=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-a^2}$$

mit $a=a$, $c=\frac{3}{4}a\sqrt{2}$.

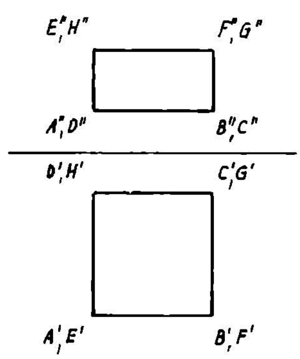
Daraus ergibt sich $h=\frac{a}{3}$

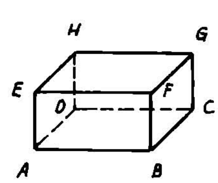
Berechnung des Volumens:

$$V=\frac{1}{3}Ag\cdot h$$



Zu 1.





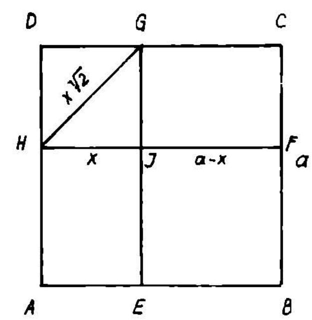
$$V=f(a)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{3}$$
$$V=f(a)=\frac{a^3}{24}$$

4. Ein Oktaeder aus 8 gleichschenkligrechtwinkligen Dreiecken.

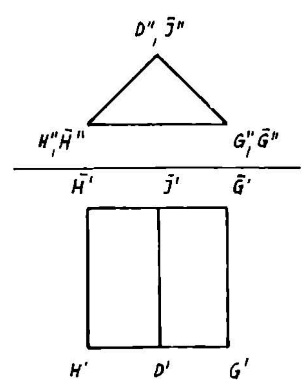
Zur Konstruktion des Grund-Aufrißbildes und weiteren Berechnung des Volumens wird zunächst der Winkel β'' berechnet.
$\sphericalangle AEJ=90°$, $\sphericalangle A''E''J''=90°$, weil $\overline{AE}$ parallel zur Rißebene.
So gilt im $\triangle A''B''E''$

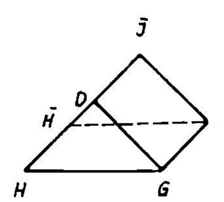
$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin\beta''}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\sin\alpha''}\qquad \alpha''+\beta''+90°+\beta''=180°$$
$$\alpha''=90-2\beta''$$
$$\frac{1}{\sin\beta''}=\frac{\sqrt{2}}{\sin(90-2\beta'')}=\frac{\sqrt{2}}{\cos 2\beta''}$$
$$\cos 2\beta''=\sqrt{2}\sin\beta''$$
$$1-2\sin^2\beta''=\sqrt{2}\sin\beta''$$
$$0=2\sin^2\beta''+\sqrt{2}\sin\beta''-1$$
$$\sin\beta''_{1;2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2+8}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1\mp\sqrt{5})$$
$$\sin\beta''=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$\sin\beta''_2$ entfällt.
$\beta''=25{,}9°$, $2\beta''=51{,}8°$, $\alpha''=38{,}2°$



Zu 2.





Zur Volumenberechnung zerlegt man das Tetraeder in 2 kongruente Pyramiden mit gemeinsamer drachenviereckförmiger Grundfläche $AJBF$ und wendet die trigonometrische Dreiecksformel an.

$$A_G = 2\left(\frac{1}{2}\right) \overline{AF} \cdot \overline{FB} \cdot \sin(90° + \beta'') =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\beta'' = \frac{a^2}{4}\sqrt{2}\cos\beta''$$

$$\cos\beta'' = \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5}-1)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{8}(6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}$$

$$A_G = \frac{a^2}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}} = \frac{a^2}{8}\sqrt{2(1+\sqrt{5})}$$

$$V = 2\left(\frac{1}{3} A_G \cdot h\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{2(1+\sqrt{5})} \cdot h =$$

$$= \frac{a^2}{12}\sqrt{2(1+\sqrt{5})} \cdot h$$

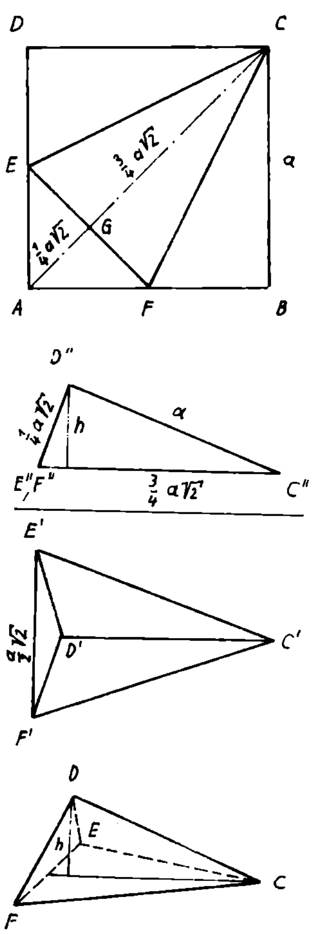
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}\sin\beta'' = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5}-1) =$$

$$= \frac{a}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$V = f(a) = \frac{a^2}{12}\sqrt{2(1+\sqrt{5})} \cdot \frac{a}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$V = f(a) = \frac{a^3}{24}\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$$

Zu 3.



5. Ein Zwölfflächner aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und 4 Rechtecken, von denen je 2 kongruent sind.

Hinweise zur Konstruktion:

a auf $\overline{OQ}$ abtragen ergibt N. Parallelen durch N zu $\overline{RQ}$ ergeben, L, K und zu $\overline{PK}$ ergeben T. Mittelsenkrechten auf $\overline{LN}$ und $\overline{LO}$ ergeben W, V, J, M, Y, X.

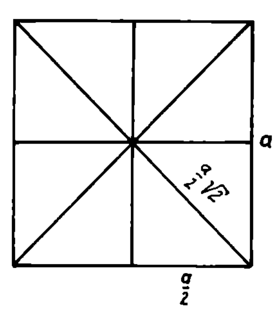
Mittelsenkrechte auf $\overline{RQ}$ ergibt Z, U.

Der Körper wird von einem vierseitigen Prisma gebildet, dem an die Grund- und Deckfläche je eine vierseitige Pyramide angesetzt ist. Die beiden Pyramiden stellen zu dem unter „4. Oktaeder" behandelten ähnliche Körper das.

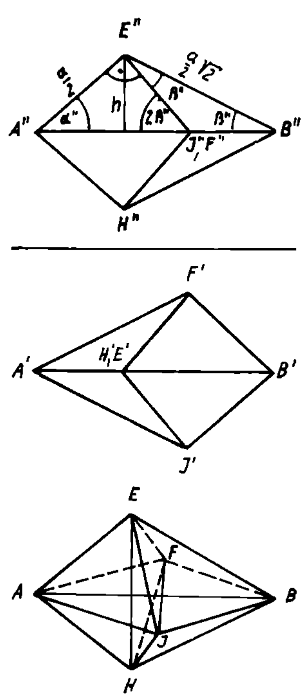
Die Berechnung des Volumens kann daher mit den bereits hergeleiteten Formeln erfolgen, nur ist jetzt für a $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ zu setzen. Ebenso gilt das für die Grundfläche des Prismas.

$$V_1 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3}{24}\sqrt{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{a^3}{48}\sqrt{\sqrt{5}-1}$$

$$V_{Pr} = A_G \cdot h = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}{8}$$



Zu 4.



$$\sqrt{2(1+\sqrt{5})} \cdot \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$$

$$= \frac{a^3}{32}\sqrt{2(1+\sqrt{5})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{a^3}{16}\sqrt{(1+\sqrt{5})(3-2\sqrt{2})}$$

$$V_{ges} = V_1 + V_{Pr} = \frac{a^3}{48}\sqrt{\sqrt{5}-1} + \frac{a^3}{16}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{5})(3-2\sqrt{2})}$$

$$V_{ges} = \frac{a^3}{48}\left[\sqrt{\sqrt{5}-1} + 3\sqrt{(1+\sqrt{5})(3-2\sqrt{2})}\right]$$

6. Ein konkaver 30-Flächner

Die Oberfläche des Körpers besteht aus 6 Quadraten mit der Seitenlänge $\frac{1}{6}a$ und 24 Rechtecken mit den Seitenlängen $\frac{1}{6}a$, $\frac{5}{24}a$.

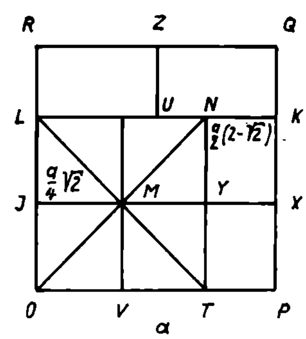
Das Volumen des Körpers ist zusammengesetzt aus:

6 Quadern, Kantenlängen $\frac{a}{6}$, $\frac{a}{6}$, $\frac{5a}{24}$

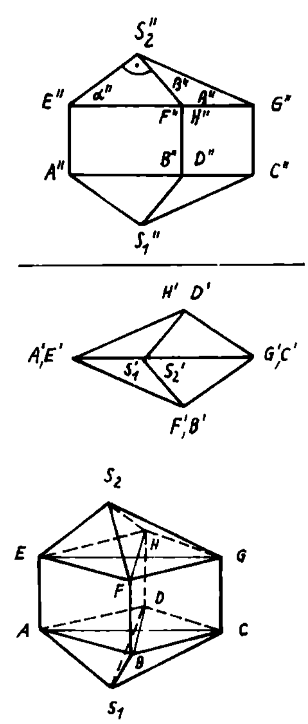
1 Würfel, Kantenlänge $\frac{a}{6}$

Berechnung des Volumens

$$V = f(a) = 6\left(\frac{a}{6}\right)^2 \frac{5a}{24} + \left(\frac{a}{6}\right)^3 \quad V = f(a) = \frac{17}{432}a^3$$



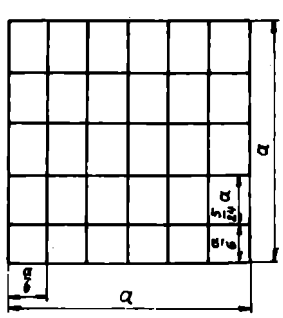
Zu 5.

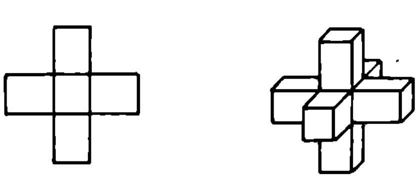


Die Beschäftigung mit diesem Beitrag führt schließlich auf die Frage nach der Existenz weiterer solcher Körper und ob ihre Anzahl bestimmbar ist.
Die Antwort fällt überraschend aus und sei als Behauptung vorweggenommen:
Es existieren n-Flächner, deren Begrenzungsflächen zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können mit 4, 5, 6, ... n-Flächen.
$n \geqq 4$
Beweis: Die Existenz des 4-, 5- und 6-Flächners ist bewiesen. Bei jedem dieser Körper läßt sich eine Dreikant-Pyramide so abtrennen, daß diese an den Schnittkanten nach innen so angesetzt wird, so daß diese nicht den Kreis durchstößt.
So entstehen aus dem 4- ein 7-Flächner, aus dem 5- ein 8-Flächner und aus dem 6- ein 9-Flächner.
Nun kann die nach innen angesetzte Pyramide weiter unterteilt werden. Es entstehen Stümpfe und die Spitze, die an den Schnittkanten nach innen, nach außen, ... angesetzt werden. Dabei wird die vorgegebene Oberfläche nicht verändert, die Anzahl der Begrenzungsflächen nimmt jedoch bei jeder Knickung um drei zu. So entstehen folgende Mengen:
Aus 4-Flächnern: $M_1 = (4+3n)\text{-}Fl$
$= 4$-, 7-, 10-, 13-, ... Flächner
Aus 5-Flächnern: $M_2 = (5+3n)$-Fl
$= 5$-, 8-, 11-, 14-, ... Flächner
Aus 6-Flächnern: $M_3 = (6+3n)$-Fl
$= 6$-, 9-, 12-, 15-, ... Flächner
Die Vereinigungsmenge
$M_1 \cup M_2 \cup M_3$
$= 4$-, 5-, 6-, 7-, ...n-Flächner, q. e. d. Auf weitere interessante Polyeder dieser Art sei hingewiesen. So existiert u. a. ein konvexer Zehnflächner, ein sog. Antiprisma.

W. Zehrer

Zu 6.





Grundrißbild
≅ Aufrißbild

Mathe in der Mokotowska

Wissenschaftler der RGW-Länder in Warschau

In den zwanziger Jahren war das „Schottische Café" im polnischen Lwow häufig Zeuge mathematischer Diskussionen, wie wir in *alpha* 1/74 berichteten. Initiator war der polnische Mathematiker *Stefan Banach*.

Vom Schottencafé ins Schloß

Knapp fünfzig Jahre später trafen sich im Dezember 1971 in Moskau Vertreter der Akademien der Wissenschaften sozialistischer Länder und beschlossen ein Grundsatzabkommen über die künftige multilaterale Zusammenarbeit in der Forschung.
Die Mathematiker schritten als erste zur Realisierung dieser Abmachungen: Schon einen Monat später, im Januar 1972, trafen sich Wissenschaftler Bulgariens, der ČSSR, der DDR, Rumäniens, Ungarns und der UdSSR mit ihren polnischen Gastgebern in Warschau und gründeten das „Internationale Zentrum für Mathematik". Sitz dieser Einrichtung wurde das entsprechende *Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften*, ein ehemaliges Schloß in der Mokotowskastraße. Zum ersten Direktor wurde Prof. Dr. *Olech* berufen, und als das damals jüngste Kind der sozialistischen Wissenschaftskooperation aus der Taufe gehoben wurde, gab es einhellige Zustimmung für den Namen „Stefan Banach". Die Namensgebung war eine doppelte Verbeugung vor einem bedeutenden Gelehrten: vor einem glänzenden Mathematiker und vor einem Mann, der es verstanden hatte, den mathematischen Meinungsstreit in einer bis dahin noch nicht gekannten Form zu organisieren – im kleinen Kreise, frei und offen.

Angewandte Mathematik – Theoretische Mathematik

Wer war *Stefan Banach?* Was ist Funktionalanalysis, ein Gebiet, auf dem er Weltruhm erreichte?
In der Tatsache, daß nur wenige Menschen diese Frage ohne Zögern beantworten können, liegt das bedauerliche Geschick einer Wissenschaft, die unserer Welt von heute mehr gibt, als diese Welt sich träumen läßt.
Daß die Mathematik allseitig unser Leben durchdringt, wird oft gesagt. Meist stehen dabei sehr realistische, handgreifliche Beispiele vor Augen: ihr Mitwirken bei der Konstruktion von Maschinen und Bauwerken, bei der Optimierung industrieller Fertigungsprogramme, in der volkswirtschaftlichen Planung, in der Statistik aller Schattierungen. Die mathematischen Verfahren sind hier bereits verhältnismäßig hoch entwickelt, das Hilfsmittel „Computertechnik" geht mit Ausklang dieses Jahrzehnts seiner „vierten Generation" entgegen.
Die mathematischen Methoden reichen aber wesentlich weiter. Mit ihrer Hilfe lassen sich Prozesse in unserer Umwelt und in der Technik beschreiben – verkürzt, überschaubarer, immer vollständiger und konkreter, als es Worte vermögen. Die Bemühungen reichen von einem Standardmodell der Hochatmosphäre bis zur mathematischen Darstellung ozeanischer Prozesse oder der Erdbebenmechanismen. Da haben aber auch estnische Wissenschaftler ein Modell des lebenden Waldes erarbeitet, und Studenten der Universität Greifswald senkten auf gleiche Weise die Materialverluste bei der Benzolvordestillation (ein Exponat der 5. Zentralen Leistungsschau in Leipzig). In der Moldauischen SSR wurde die Zuckerrübenernte „mathematisiert": Nutzeffekt jährlich 3 Millionen Rubel.
Damit ist es bereits gesagt, daß – so Professor *Olech* – „es die Mathematik nicht nur vermag, Probleme der Wirklichkeit zu beschreiben, sondern daß sie sie auch lösen kann".
All das ist *angewandte Mathematik*. Mit ihr wird auch der Außenstehende konfrontiert. Er spürt Wirkungen.

Die angewandte Mathematik benötigt jedoch ihr Handwerkszeug. Das sind nicht die Computer, sie stellen nur ein Sekundär-Hilfsmittel dar; auch nicht das Vokabular oder die Symbolik von den Zeichen der vier Grundrechenarten über „kleiner", „größer" und „identisch" bis zum verwirrenden Wald der Differentiale, Integrale, Matrizen, Determinanten, Vektoren und Operatoren. Es sind vielmehr die Gesetze, die diese mathematischen Elemente miteinander verknüpfen, damit sie in der Anwendung die Wirklichkeit wahrheitsgetreu widerspiegeln. Sie zu finden und weiterzuentwickeln ist Aufgabe der *theoretischen Mathematik*. Von den Wissenschaftlern, den „Theoretikern", hören wir sehr wenig. Ihre Arbeit erfordert einen derartig hohen Grad an Abstraktion und Spezialisierung, daß sich der Nutzen ihrer „Produkte" nicht in die Sprache des Alltags übersetzen läßt. Trotzdem bleibt eine Tatsache bestehen: *Der Nutzen der angewandten Mathematik ist um so höher, je größer der Vorlauf der theoretischen Mathematik ist.*

Integrierte Integrale

Diese fundamentale Erkenntnis wird immer stärker zum Leitmotiv der Wissenschaftspolitik in den sozialistischen Staaten. Sie äußert sich in der tiefgreifenden Mathematisierung im Bildungswesen von der Oberschule bis zur Universität, in der Liebe und Freude junger Menschen zum Fach, bei den Mathematik-Olympiaden, deren Aufgabenstellungen nur staunende Bewunderung entlocken können. Der virtuosen Handhabung dieses Instruments „theoretische Mathematik" verdankt z. B. die sowjetische Wissenschaft zu einem guten Teil ihre Spitzenstellung in der Welt.

Der Anstoß zur Gründung des Internationalen Zentrums in Warschau kam von der *Polnischen Akademie der Wissenschaften*; alle anderen Beteiligten waren schnell zur Mitarbeit entschlossen. Da ein Tisch, eine Tafel, Papier und Bleistift sowie eine gutbestückte Bibliothek die wichtigsten Arbeitsmittel des theoretischen Mathematikers darstellen, waren in diesem Fall auch keine langfristigen Mittel-Planungen erforderlich, um zur Tat zu schreiten. So sind bis heute bereits drei Spezialisierungskurse von je einem Semester Dauer absolviert, zu denen sowohl Spezialisten als auch Nachwuchswissenschaftler eingeladen wurden. Im ersten Semester standen die *Theorie der Modelle, spezielle Zahlenfolgen* und *Anwendungsfragen der mathematischen Logik* auf der Tagesordnung, in den beiden folgenden die *Theorie der Optimalen Steuerung*, d. h., technische und ökonomische Systeme so zu gestalten, daß ein vorgegebenes Ziel mit minimalem Aufwand erreicht wird.

Die Arbeit vollzieht sich in Vorlesungen und Kolloquien, daneben aber werden auch Gespräche und Diskussionen im kleineren Kreise bevorzugt. Die jungen Nachwuchswissenschaftler können ihre Probleme vortragen und mit allen beraten. Die persönlichen Kontakte tragen dazu bei, eine Überspezialisierung und Abgrenzung zu vermeiden, das gegenseitige Verständnis zu erleichtern im Interesse der Integration, im Sinne des Mannes, der dem Schloß in der Mokotowska seinen Namen gab.

Ch. Heermann,
gekürzt aus „Wochenpost" 48/74

Prof. Dr. Klötzler berichtet

Der voranstehende informative Beitrag von Ch. Heermann über das Banachzentrum in Warschau veranlaßt mich, aus meiner eigenen Erfahrung heraus die große wissenschaftliche Bedeutung dieser internationalen mathematischen Weiterbildungs- und Forschungsstätte nochmals hervorzuheben. Neben weiteren Fachkollegen aus der DDR hatte ich Gelegenheit, 1973/74 mehrwöchig als Lektor und natürlich auch als Hörer am zweiten Lehrprogramm „Theorie optimaler Prozesse" in Warschau und zum Abschlußsymposium in Zakopane aktiv mitwirken zu können. Dabei zeigte ich insbesondere einige Aspekte auf, die sich heute aus der Weiterentwicklung der Variationsrechnung (vgl. alpha 1/74) für die optimale Prozeßsteuerung ergeben. Die dort gepflegte intensive Zusammenarbeit der Lehrgangsteilnehmer hat zu dauerhaften persönlichen und wissenschaftlichen Kontakten beteiligter Einrichtungen der sozialistischen Länder geführt und nicht zuletzt zu einer hohen internationalen Anerkennung der mathematischen Forschung in der DDR.

Kurzbiographie

Prof. Dr. sc. nat. R. Klötzler, geb. 1931 in Chemnitz; Vater: Posthelfer, Mutter: Hausfrau; 1937 bis 1945 Besuch der Grundschule, 1945 bis 1949 Besuch der Oberschule, Abitur; 1949 bis 1953 Mathematikstudium an der KMU Leipzig, Diplom; 1954 bis 1956 planmäßige Aspirantur an der KMU, Promotion; 1956 bis 1959 Assistent am Forschungsinstitut für reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mitarbeit am „Mathematischen Wörterbuch";
1963 bis 1965 Professor mit Lehrauftrag für Mathematik und Darstellende Geometrie an der Hochschule für Bauwesen Leipzig; 1965 bis 1971 Professor mit vollem Lehrauftrag, seit 1969 ordentlicher Professor an der MLU Halle-Wittenberg und 1968 bis 1971 Direktor deren Sektion Mathematik; 1971 Gastprofessor in Jyväskylä (Finnland); 1972 Umberufung an die KMU Leipzig – Fachgebiet Analysis und Mathematische Methoden der Operationsforschung; 1973 Lektor im Banachzentrum Warschau;
seit 1969 Mitglied des Vorstandes der Mathematischen Gesellschaft der DDR und seit 1971 Stellvertreter des Vorsitzenden.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. math. István Fenyö

Lehrstuhl für Mathematik an der Fakultät für Elektronik der Technischen Universität Budapest

▲1352▲ *Es sei zu beweisen:* Falls das Quadrat einer natürlichen Zahl x als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar ist (d. h., es existieren zwei natürliche Zahlen, deren Quadratsumme x^2 ist), dann gibt es zwei natürliche Zahlen a und b derart, daß

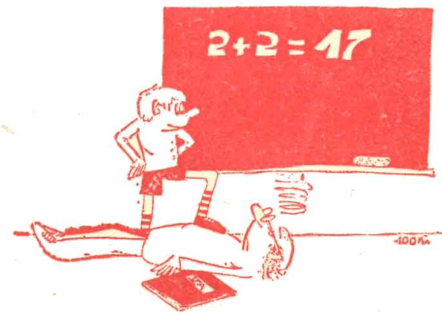
$$x=a+b+\sqrt{2ab} \qquad (*)$$

gilt. *Auch die Umkehrung ist richtig:* Sind a und b natürliche Zahlen, für welche $\sqrt{2ab}$ eine natürliche Zahl ist, so ist das Quadrat der unter (*) definierten Zahl als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar.

Kurzbiographie:

geb. 1917 in Budapest, Abitur, Mathematik/Physikstudium an der Universität Budapest, anschließend Lehrer dieser Fächer an einem Gymnasium (entspricht unserer EOS), Aufnahme des Chemiestudiums mit Abschluß Dipl.-Chemiker, Arbeit (bis Ende des 2. Weltkrieges) als Diplomchemiker in verschiedenen Betrieben. Prof. F. promovierte 1945 und habilitierte 1950 an der TU Budapest. Nach Einführung der neuen wissenschaftlichen Grade erwarb er den Grad „Kandidat der Math. Wissenschaften" (Dr. sci math). Er ist seit 1945 an der TU Budapest tätig, von 1960 an als ord. Prof., 1962/63 Gastprofessur in Rom, anschließend Studienaufenthalte in Paris und der BRD, 1964/66 Gastprofessur in Rostock. Einladungen zu Vorlesungen an Universitäten und Hochschulen in der DDR, UdSSR, SR Rumänien, VR Polen, ČSSR, SFR Jugoslawien, Italien, Holland, Frankreich, BRD, Großbritannien, Finnland, Schweden, USA, Kanada. Prof. F. ist Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Gesellschaften.

In freien Stunden alpha heiter



Ohne Worte
G. Nauczycielski, Warschau

Wir wägen

An einer symmetrischen Tafelwaage sind beide Tafeln zum Auflegen von „Gewichten“ zugelassen. An den bereitzustellenden „Gewichtssatz“ werden folgende Forderungen gestellt:

1. Die Feststellung der Masse eines Gegenstandes soll auf das Gramm genau möglich sein.
2. Es sollen Massen bis zu 1 000 g wägbar sein.
3. Die Anzahl der „Gewichte“ soll minimal sein.

Man zeige, daß ein aus sieben „Gewichten“ bestehender Satz Wägungen bis zu 1 093 g unter den oben gestellten Nebenbedingungen erlaubt.
Man zeige, daß für die bereitzustellenden „Gewichte“ P_k das Bildungsgesetz $P_k = 3^k$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ besteht.
Erläuterung: „Gewicht“ ist eine Bezeichnung für Wägestücke oder Massenstücke zur Bestimmung von Massen mit der Waage.

Doz. Dr. E. Schröder, TU Dresden

Die Primzahl

Die Buchstaben sind so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

PRIMZAHL · L · P = PPPPPPPPP
PRIMZAHL · L · R = RRRRRRRRR
PRIMZAHL · L · I = IIIIIIIII
PRIMZAHL · L · M = MMMMMMMMM
PRIMZAHL · L · Z = ZZZZZZZZZ
PRIMZAHL · L · A = AAAAAAAAA
PRIMZAHL · L · H = HHHHHHHHH
PRIMZAHL · L · L = LLLLLLLLL

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kryptarithmetik

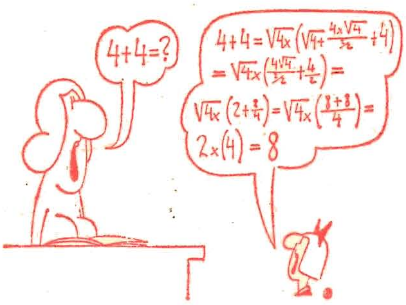
$$\begin{array}{ccccc} abc & - & dae & = & ff \\ : & & + & & + \\ bc & \cdot & ba & = & bge \\ \hline db & + & dcb & = & dfd \end{array}$$

$(0<d)$; $(b<3)$

Schüler Th. Weiß, Weimar

Geometrie in der Praxis

Freundliche Kreuzung: Ein Durchlaßvermögen von 250 000 Autos in 24 Stunden wird ein Autoknotenpunkt bei Moskau haben, der sich durch den Bau einer neuen Straße Moskau–Riga ergibt.
„Turbine“ heißt das Projekt, nach dem die Autos über die Auf- und Abfahrten strömen werden wie Wasser über eine Turbine. Soweit der Verkehr geregelt werden muß, übernehmen Fernsehkameras in Verbindung mit einem elektronischen Rechner diese Aufgabe. Die Vorbereitungsarbeiten für den Bau haben bereits begonnen.



Ohne Worte
G. Nauczycielski, Warschau

Silbenrätsel

a – a – abs – ar – bi – ble – chi – chung – des – drei – drei – durch – e – eck – glei – he – hen – hö – hö – le – les – me – mes – ment – nom – ri – ri – se – sech – ser – sub – sto – satz – te – tion – trak – und – va – zehn – zis – zwei – ßig

1. Teil des Kreises; 2. Grundbestandteil; 3. Mathematiker aus Hellas (287 bis 212 v. u. Z.); 4. Satz über Flächenbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck; 5. Teil der Algebra; 6. zweigliedriger Ausdruck ($a+b$ oder $a-b$); 7. Teil des Koordinatensystems; 8. Zahl; 9. Teil des Dreiecks; 10. griech. Philosoph (384 bis 322 v. u. Z.); 11. Fläche; 12. Rechenoperation; 13. Zahl; 14. Veränderliche
Der 3. Buchstabe jedes Wortes (von oben nach unten gelesen) ergibt ein Unterrichtsmittel für das Fach Mathematik.

Schülerin A. Broschmann, Berlin

Viermal die gleiche Ziffer

Wie kann man die Zahl 89 durch vier gleiche Ziffern darstellen?

Schülerin Uta Eimecke, Domersleben (Kl. 7)

Legespiel

Schneide je vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke aus Pappe mit folgender Kathete aus:

a) 7 cm b) 3 cm.

Schneide weiterhin vier kongruente Dreiecke mit den Seiten 3 cm, 4 cm und 5 cm aus! Lege alle zwölf Dreiecke zu einem Rechteck zusammen!

Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln

Mathematische Begriffe gesucht

In jeder Zeile soll ein mathematischer Begriff zusammengesetzt werden. Dabei sollen alle in den Ausgangswörtern vorkommenden Buchstaben (unabhängig von ihrer Reihenfolge) benutzt werden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter ergeben den Namen eines indischen Mathematikers, der ein im Mittelalter berühmt gewordenes Lehrbuch der Mathematik veröffentlichte.

1. BREIT	LUCH	
2. LIEDER	HABEN	
3. DREI	ADEN	
4. BECKEN	EIS	
5. EHRE	KISSEN	
6. TEIL	FRAU	FASS
7. BART	SCHNEE	
8. SCHERZEN	KAUZ	

Versuche, diese Wörter zu finden!
Falls du nicht weiterkommst, kannst du die folgenden Erklärungen zu Hilfe nehmen:

1. Teil eines Ganzen
2. Linie, die etwas in zwei gleiche Teile zerlegt
3. Grundrechenart
4. spezielles Viereck
5. Verbindungsstrecke zweier Punkte eines Kreises
6. Grundbegriff aus der darstellenden Geometrie
7. Rechenhilfsmittel
8. Teil eines Koordinatensystems

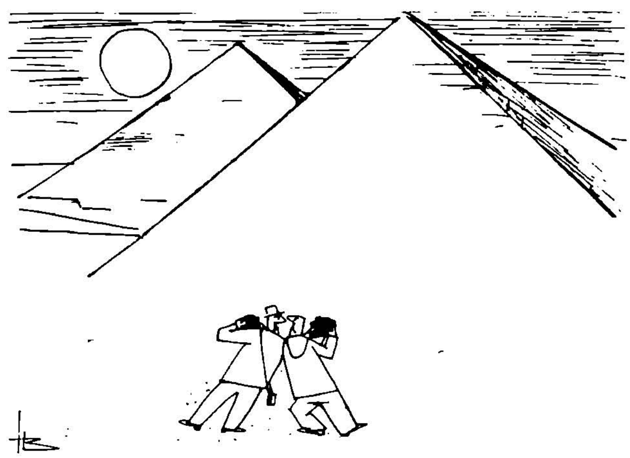
OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Logischer Schluß

Das Tafelbild war sauber und übersichtlich. Die bisherige Erarbeitung der Vertauschbarkeit der Summanden verlief logisch. Nun galt es nur noch, die Gesetzmäßigkeit zu formulieren. Antworten schwirrten durch den Raum: „Man kann sie umwechseln." – „Es kommt nicht auf die Reihenfolge an."

Niemand spricht das erlösende Wort und bringt die gewünschte Formulierung für die immer verzweifelter blickende Kollegin. Da meldet sich Norbert. Er hat schon oft geholfen, warum nicht auch jetzt?
„Na, Norbert!"
„Man kann es auch bleibenlassen – das Ergebnis ist das gleiche."

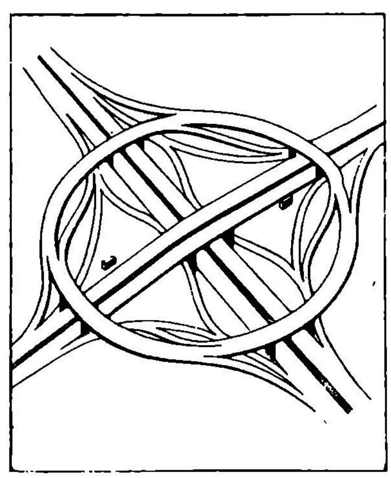
Aufgeschrieben von Horst Schneider (aus DLZ 3/75)



Henry Büttner

Freundliche Kreuzung

Ein Durchlaßvermögen von 250 000 Autos in 24 Stunden wird ein Autobahnknotenpunkt bei Moskau haben, der sich durch den Bau einer neuen Straße Moskau–Riga ergibt.



„Turbine" heißt das Projekt, nach dem die Autos über die Auf- und Abfahrten strömen werden, wie Wasser über eine Turbine. Soweit der Verkehr geregelt werden muß, übernehmen Fernsehkameras in Verbindung mit einem elektronischen Rechner diese Aufgabe. Die Vorbereitungsarbeiten für den Bau haben bereits begonnen.

Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage

Frank hatte sich schon lange eine Eisenbahn gewünscht. Nun endlich war es soweit. Auf seinem Geburtstagstisch lagen Schienen, Weichen, ein Transformator und eine E-Lok mit vier Wagen. Auch ein Bahnhofsgebäude war dabei. Gleich nach der Schule lud Frank seinen Freund Michael zu einem Bastelnachmittag ein. Immer wieder wurden die Schienen und Weichen neu zusammengesetzt. So entstanden u. a. folgende Schienenführungen (siehe Bild 1, 2, 3).

Frank regelte die Geschwindigkeit des Zuges am Transformator und war verantwortlich für die Stellung der Weiche (W_1). Michael bediente indessen alle anderen Weichen. Während des Spiels konnte man nun beobachten, welchen Einfluß die Stellung der Weiche (W_1) auf die Bahnhofsdurchfahrt des Zuges hatte.

Betrachten wir zunächst Bild 1.

Die Stellung der Weiche (W_1) nach links (bezüglich der vorgegebenen Fahrtrichtung des Zuges) ist ganz sicher *hinreichend* dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert, d. h., es ist nicht möglich, daß die Weiche (W_1) nach links gestellt ist und der Zug nicht den Bahnhof passiert. Einen solchen Zusammenhang kann man auch in einem Satz mit der Wendung „wenn-, so“ ausdrücken:

a) *Wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, *so* passiert der Zug den Bahnhof.

Gleichbedeutend mit dem Satz a) ist der Satz:

b) *Immer wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, *so* passiert der Zug den Bahnhof.

Überlegen wir einmal, ob die Stellung der Weiche (W_1) nach links auch *notwendig* für eine Bahnhofsdurchfahrt des Zuges ist. Das ist sicher nicht der Fall, denn auch bei einer

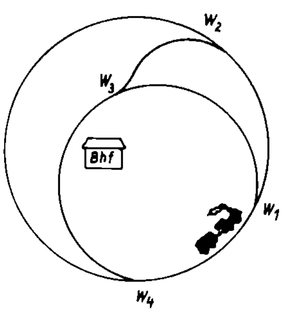
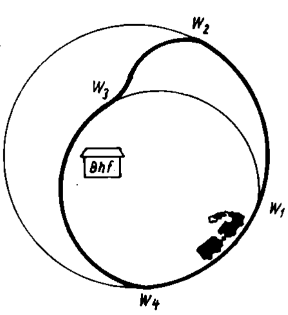


Bild 1

Bild 1a



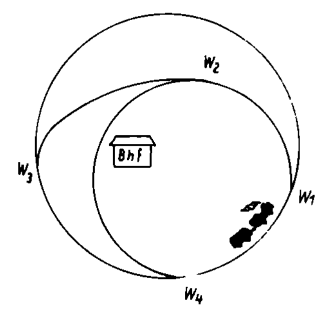
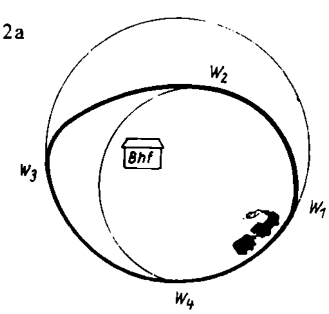


Bild 2

Bild 2a



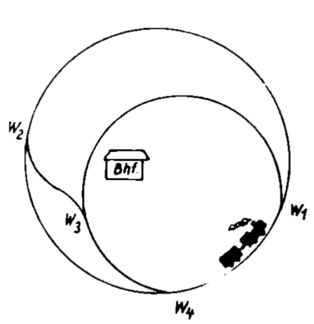


Bild 3

Stellung der Weiche (W_1) nach rechts besteht bei entsprechender Einstellung der anderen Weichen die Möglichkeit, daß der Zug den Bahnhof passiert (siehe Bild 1a).

Wenden wir uns den Schienensträngen des Bildes 2 zu:

Die Stellung der Weiche (W_1) nach links ist jetzt *nicht hinreichend* dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert (siehe Bild 2a). Es kann nämlich sein, daß der Zug bei Weiche (W_1) zwar nach *links*, bei der Weiche (W_2) aber nach rechts geleitet wird. Dann kommt der Zug ganz sicher *nicht* am Bahnhof vorbei. Ist die Weiche (W_1) nach *links* gestellt und wird der Zug bei Weiche (W_2) nach links geleitet, so *passiert* er den Bahnhof. Wenn aber die Weiche (W_1) nach *rechts* gestellt ist, kommt der Zug sicher *nicht* am Bahnhof vorbei. Die Stellung der Weiche (W_1) nach links ist also *notwendig* dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert. Es ist somit nicht möglich, daß der Zug den Bahnhof passiert und die Weiche (W_1) nicht nach links gestellt ist, d. h.:

c) *Nur wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, passiert der Zug den Bahnhof.

Anders ausgedrückt:

d) Der Zug passiert *nur dann* den Bahnhof, wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist.

Gleichbedeutend damit ist der Satz:

e) *Immer, wenn* der Zug den Bahnhof passiert, so ist die Weiche (W_1) nach links gestellt. (Gemeint ist: Die Weiche (W_1) ist nach links gestellt, wenn sie vom Zug befahren wird.)

Aus dem Mathematikunterricht ist uns bekannt, daß mit der Wendung „wenn-, so“ *Voraussetzung* und *Behauptung* eines Satzes verknüpft werden können. (Voraussetzungen sind solche Teile des Satzes, deren Erfülltsein die Gültigkeit des übrigen Satzteils (der Behauptung) nach sich zieht.)

- Überlegt einmal, welches jeweils die Voraussetzung und welches jeweils die Behauptung in den Sätzen c), d), e) ist! Sicher habt Ihr bemerkt, daß in den Sätzen c), d), e) jeweils die Voraussetzungen übereinstimmen.
  Die Voraussetzung lautet: Der Zug passiert den Bahnhof. Die Behauptung aller drei Sätze heißt dann:
  Die Weiche (W_1) ist nach links gestellt.
- Bestimmt nun in folgenden Sätzen jeweils die Voraussetzung!

– Nur wenn eine Zahl a durch 5 teilbar ist, so ist sie auch durch 10 teilbar.
– Wenn eine natürliche Zahl n durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 5 teilbar.
– Ein Dreieck ABC ist nur dann gleichseitig, wenn es spitzwinklig ist.
– Nur wenn ein Rhombus einen rechten Winkel hat, ist er ein Quadrat.
– Eine Zahl ist nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 3 teilbar ist.

- Setzt jeweils in die Leerstellen folgender Sätze das Wort „notwendig“ bzw. „hinreichend“ so ein, daß wahre Aussagen entstehen!

– Die Teilbarkeit einer Zahl durch 4 ist ... dafür, daß die Zahl durch 8 teilbar ist.
– Die Teilbarkeit einer Zahl durch 8 ist ... dafür, daß die Zahl durch 2^2 teilbar ist.
– Die Eigenschaft eines Dreiecks, spitzwinklig zu sein, ist ... dafür, daß das Dreieck gleichseitig ist.
– $a<2$ und $b<15$ ist ... für $a+b<17$.
– $a\cdot b=0$ ist ... für $a=0$ und $b=0$.
– $a>3^3$ und $7<t<10$ ist ... für $s\cdot t>3^4$.

Wenden wir uns jetzt dem Bild 3 zu und überlegen abermals, ob die Stellung der Weiche (W_1) nach links hinreichend oder notwendig für eine Bahnhofsdurchfahrt des Zuges ist.

Sicher ist die Stellung der Weiche (W_1) nach links hinreichend dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert, d. h., der Satz

„Wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, dann passiert der Zug den Bahnhof“

ist wahr.

Ist die Stellung der Weiche (W_1) nach links auch eine notwendige Bedingung für die Bahnhofsdurchfahrt des Zuges?

Natürlich, denn es gilt:

„Nur wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, passiert der Zug den Bahnhof“

oder anders ausgedrückt

„Wenn der Zug den Bahnhof passiert, so ist die Weiche (W_1) nach links gestellt“.

In Bild 3 ist die Stellung der Weiche (W_1) nach links also hinreichend und gleichzeitig notwendig für eine Bahnhofsdurchfahrt des Zuges.

Einen solchen Zusammenhang kann man mit der Wendung „dann und nur dann, wenn“ bzw. „genau dann, wenn“ ausdrücken: Der Zug passiert *dann und nur dann* den Bahnhof, wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist.

Der Zug passiert *genau dann* den Bahnhof, *wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist.

Um zu entscheiden, ob ein Satz der Form „A genau dann, wenn B“ bzw. „A dann und nur dann, wenn B“ wahr ist, muß man nachweisen, daß A sowohl eine hinreichende als auch eine notwendige Bedingung für B ist. Ist A keine hinreichende oder keine notwendige Bedingung für B, so ist der entsprechende „genau dann, wenn“-Satz bzw. „dann und nur dann, wenn“-Satz falsch.

● Stelle fest, welche der angegebenen Sätze falsch sind!

- Genau dann, wenn ein Dreieck gleichseitig ist, ist es auch gleichschenklig.
- Eine Zahl ist dann und nur dann durch 3^2 teilbar, wenn die Quersumme dieser Zahl durch 4^2-5 teilbar ist.
- $x<2^2$ ist notwendig und hinreichend für $2x<2^3$.
- Die Diagonalen stehen dann und nur dann senkrecht in einem Viereck $ABCD$, wenn das Viereck ein Drachenviereck ist.
- Zwei Parallelogramme besitzen genau dann einen gleichen Flächeninhalt, wenn sie in ihren Höhen und Grundseiten übereinstimmen.

Bei Betrachtung der Schienenstränge, Weichenstellungen und Zugdurchfahrten konnten wir uns mit wichtigen mathematischen Redeweisen vertraut machen. Wir lernten die Worte *„hinreichend“* und *„notwendig“* kennen und wissen nun, welche Zusammenhänge man mit ihnen beschreiben kann.

Beim genauen Lesen ist Euch sicher das Wort *„nur“* aufgefallen. Welche große Wirkung dieses kleine Wort besitzt, wollen wir uns nochmals an folgendem Beispiel verdeutlichen:

(1) Wenn das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck ist, stehen seine Diagonalen senkrecht aufeinander.

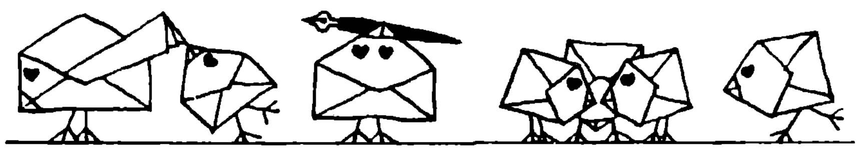
(2) *Nur* wenn das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck ist, stehen seine Diagonalen senkrecht aufeinander.

Die Sätze (1) und (2) unterscheiden sich lediglich durch das Wort *„nur“*. Aber gerade das Hinzufügen von „nur“ zu Satz (1) bewirkt, daß eine ganz andere Aussage entsteht. Der Satz (1) ist wahr, der Satz (2) dagegen falsch. (Der Satz (2) ist die Umkehrung von Satz (1).)

● Stellt nun zum Abschluß fest, welche der folgenden Aussagen falsch sind!

- Hat ein Viereck $ABCD$ mindestens einen rechten Winkel, so ist es ein Quadrat.
- Ein Viereck $ABCD$ ist nur dann ein Quadrat, wenn es mindestens einen rechten Winkel hat.
- Nur flächengleiche Figuren sind zueinander kongruent.
- Wenn Figuren zueinander kongruent sind, so sind sie flächengleich.
- Nur zueinander kongruente Figuren sind flächengleich.
- Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: Wenn $a=b$, so ist $a^b=b^a$.
- Für natürliche Zahlen gilt: Nur wenn $a=b$ ist, so ist auch $a^b=b^a$.

L. Flade



Leser schreiben an alpha

■ ... Der Wettbewerb hat uns Spaß gemacht und viele Anregungen gegeben. Unsere AG hatte nie Langeweile, sondern immer alle Hände voll zu tun ...

AG Mathematik, OS Kuhfelde

■ ... „*alpha* ist einfach Klasse!“ Vor allem regt *alpha* zum Nachdenken, Knobeln und Mitmachen an, was ich an ihr besonders schätze. Ich habe nicht viel Zeit für Nebenbeschäftigungen, aber trotzdem versuche ich, die Aufgaben des Wettbewerbs zu lösen und freue mich dann natürlich doppelt, wenn ich eine Antwortkarte mit dem Prädikat „gut“ erhalte ... Sylvia Schwenke, Dohna

■ ... Obwohl ich kein Schüler mehr bin, habe nämlich inzwischen meine Facharbeiterprüfung als Wirtschaftskaufmann (Statistik) mit gutem Erfolg abgelegt, werde ich trotzdem die *alpha* weiterhin lesen und mich auch am Wettbewerb beteiligen. Übrigens, in Wirtschaftsmathematik habe ich die Note „sehr gut“ erhalten. Das langjährige Studium der *alpha* ist an diesem Erfolg nicht unbeteiligt. ... Sybille Koch, Schmalkalden

■ ... Das Lösen der interessanten Aufgaben hat mir großen Spaß gemacht. Ich habe viel dabei gelernt. Durch diese Beschäftigung, die ich im kommenden Schuljahr fortsetzen werde, fülle ich manche freie Stunde sinnvoll aus. ... Henri Koch, Arnstadt

■ ... Inzwischen habe ich die 12. Klasse beendet und bin seit November in der NVA. Anschließend möchte ich in Jena Physik studieren. Zum Zeichen, daß ich trotzdem noch Anhänger der *alpha* bin, sende ich einige neue Aufgaben für den Wettbewerb. Das Entwerfen von Aufgaben bereitet mir sehr viel Freude. Ich möchte dieses Hobby auch in Zukunft beibehalten, um in Form zu bleiben. Herwig Gratias, Sömmerda, z. Z. NVA

■ ... Mir hat der Wettbewerb für den Unterricht sehr geholfen. Ich konnte meine Mathe-Zensur im zweiten Halbjahr auf Note 1 verbessern....

Sylvia Rosochatius, Hermsdorf

■ ... Besonders gefällt mir auch, daß in letzter Zeit auch Wettbewerbe in Physik und Chemie durchgeführt werden....

Lutz Hübschmann, Raschau

■ ... *Mein Vorschlag:* Man sollte die inneren beiden Seiten so gestalten, daß sie unmittelbar zur Veröffentlichung an einer Wandzeitung geeignet sind. ...

Gerhard Hornbogen, Weimar

■ ... Von Eurer Zeitschrift kann man einfach nur begeistert sein. Es ist nur schade, daß ich erst so spät mit *alpha* in Kontakt kam.

Michael Vowe, Therwil (Schweiz)

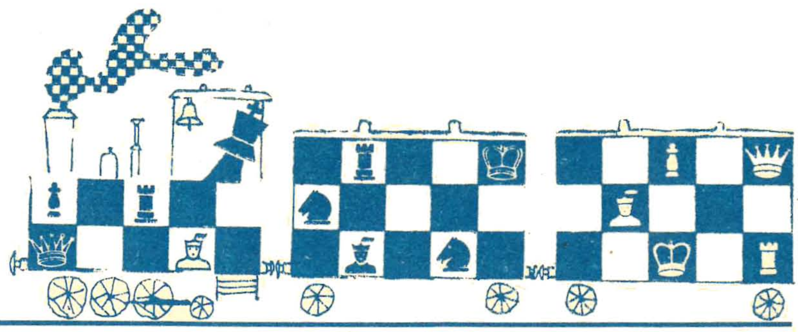
■ ... *Meine Frage:* ... Wer korrigiert die vielen Lösungen? ...

Astrid Lehmann, Rostock

Unsere Antwort:

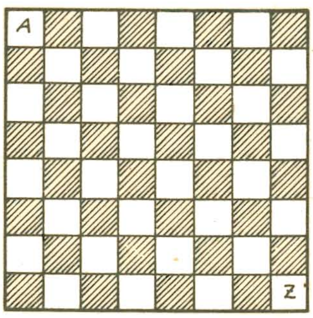
Die Zusammenstellung und Bearbeitung aller Aufgaben des Wettbewerbs liegt seit Gründung der Zeitschrift in den bewährten Händen von NPT OStR Dr. *R. Lüders* und StR *Th. Scholl*, beide Berlin; die jährlich über 50000 eingehenden Lösungen korrigieren StR *J. Lehmann*, VLdV, Leipzig, und OStR *G. Schulze*, Herzberg; die Auswertung des Wettbewerbs (Sept./Okt. jedes Jahres) wird von der Redaktionsmitarbeiterin *R. Schubert* und StR *J. Lehmann* vorgenommen (Bearbeitung von ca. 4000 Urkunden und 300 Päckchen mit Buchpreisen usw.).

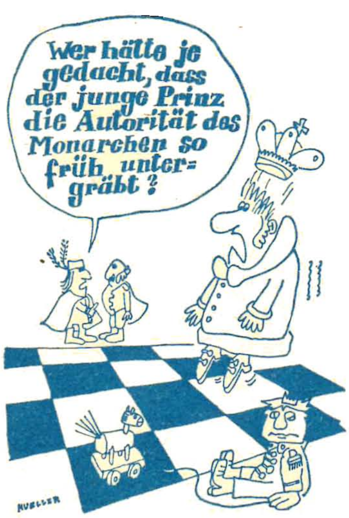
Rund um das Schachbrett



Der König

Wieviel Könige sind mindestens nötig, um alle Felder eines Schachbretts zu beherrschen. Es wird dabei angenommen, daß das Standfeld eines Königs auch als beherrscht gelten soll.



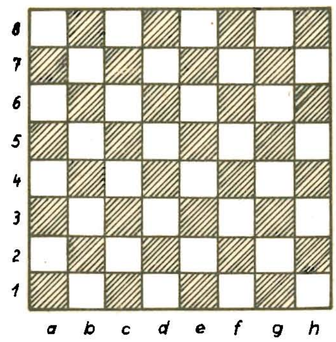


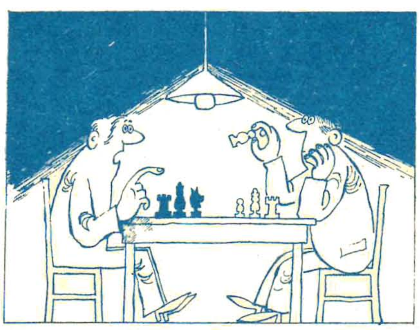
Damen auf dem Schachbrett

a) Auf ein Schachbrett sind vier Damesteine so zu stellen, daß sie alle nichtbesetzten Felder mit Ausnahme von *a*1, *a*2, *b*1, *b*2 decken.

b) Auf das Brett sind fünf Damesteine so aufzustellen, daß sie alle nichtbesetzten Felder decken.

c) Wieviel Züge kann man auf einem leeren Schachbrett mit einem Damestein ausführen? (Der Damestein kann sich bei jedem Zug beliebig weit vor oder zurück, parallel zu den Seiten des Brettes oder zu den beiden Diagonalen des Brettes bewegen.)

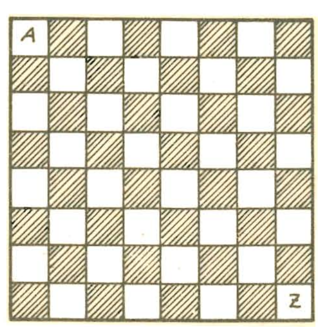




Von A bis Z

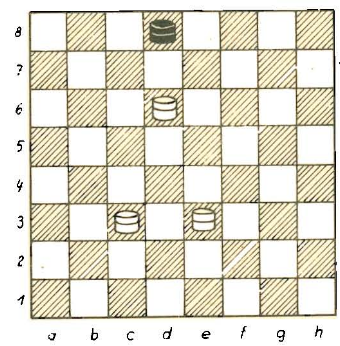
a) Stelle in die obere linke Ecke *A* des Schachbretts einen Stein. Er soll senkrecht oder waagerecht (nicht diagonal) zum gegenüberliegenden Eckfeld (*Z*) ziehen und dabei jedes Feld einmal durchlaufen.

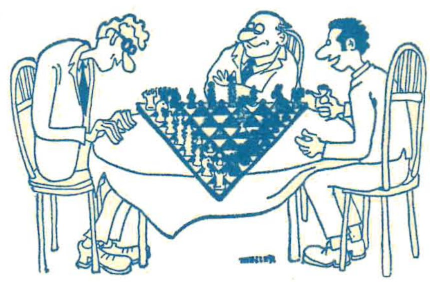
b) Setze auf das mit *A* gekennzeichnete Feld einen Läufer.
Er soll so auf das mit *Z* bezeichnete Feld gezogen werden und zwar so, daß dabei alle weißen (also keine schwarzen) Felder des Brettes berührt werden. Die Kreuzung von Zuglinien ist gestattet. Kein Weg darf zweimal beschritten werden.



Das Petrow-Dreieck

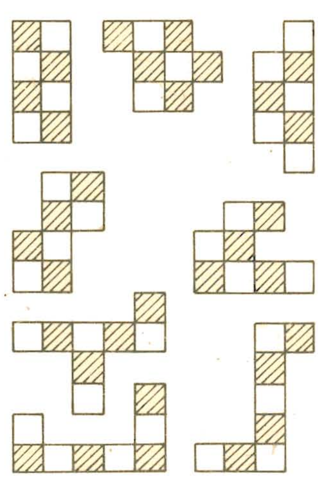
Das Bild zeigt das sogenannte *Petrow-Dreieck* (beim Damespiel). Es soll uns gleich als Aufgabe dienen: Schwarz zieht und – verliert. Wie?





Das zersprungene Schachbrett

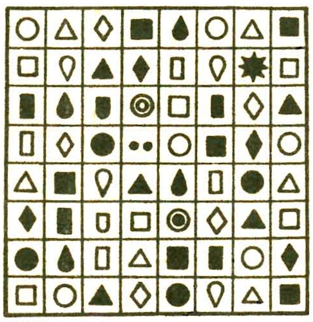
Man versuche, möglichst rasch, die acht Einzelteile zu einem Schachbrett zusammenzusetzen. Wer ist der Schnellste?

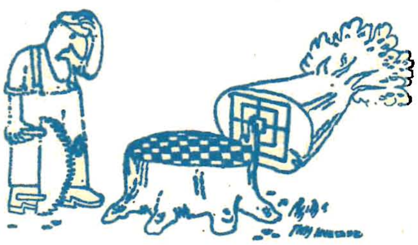


Kommt ihr jetzt endlich zum Essen – oder ...?

Magisches Quadrat

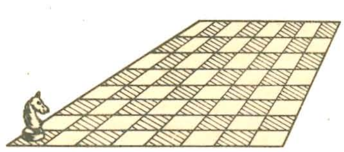
Welche beiden gleichartigen Symbolpaare liegen am dichtesten beieinander?





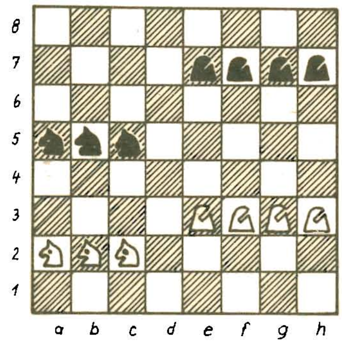
Er kommt niemals zum Ziel

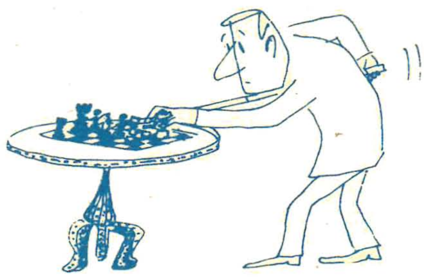
Jemand bemüht sich, den Springer auf dem Schachbrett von der linken unteren Ecke (Feld *a*1) nach der rechten oberen (Feld *h*8) zu bringen, wobei der Springer jedes Feld einmal berühren sollte.
Beweist, daß die Aufgabe unlösbar ist!



Rössel und Läufer

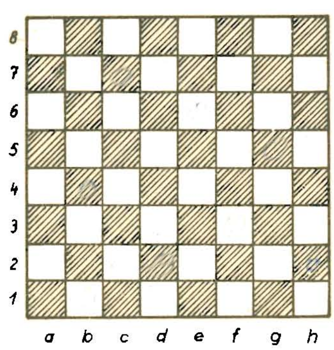
Die schwarzen und weißen Rössel sowie Läufer sollen die Plätze tauschen, und zwar in elf bzw. achtzehn Zügen!
Wer schafft's zuerst?



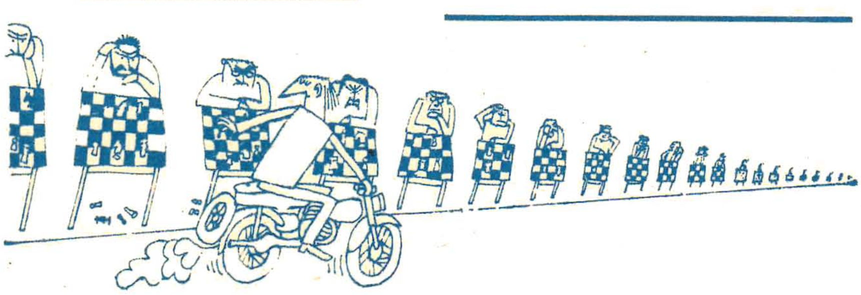


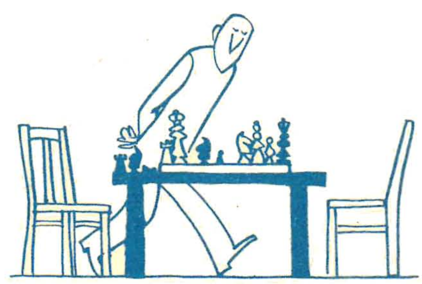
Acht-Königinnen-Problem

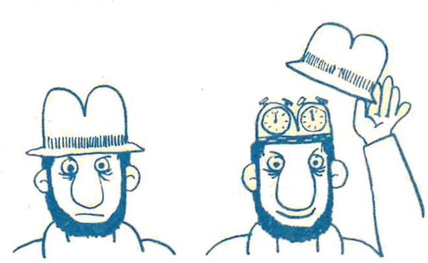
Es sind acht Königinnen so auf dem Schachbrett aufzustellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.
oder: 8 Münzen sollen auf dem Schachbrett verteilt werden, daß auf jeder Reihe, Spalte und Diagonalen nur eine liegt.



alpha-Wandzeitung







Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 23. Juni 1975

5▲1353 Inge sammelt ausländische Ansichtskarten. Sie besitzt bereits 120 Ansichtskarten aus vier verschiedenen Ländern. Davon stammen 24 Ansichtskarten aus Finnland und dreimal soviel aus der Sowjetunion. Die Anzahl der Ansichtskarten aus der ČSSR ist gleich dem vierten Teil der Anzahl der Ansichtskarten aus der Sowjetunion. Die restlichen Ansichtskarten stammen aus der Volksrepublik Bulgarien. Wieviel Ansichtskarten aus jedem dieser vier Länder besitzt Inge? *Anne Schmückling, Bischofferode*

5▲1354 Um ein Grundstück wurde vor Jahren ein Zaun mit 32 gleichartigen Zaunfeldern zu je 22 Latten gezogen. Der reparaturbedürftige Zaun soll ausgebessert werden. Einige Zaunfelder haben überhaupt keine Latten mehr. Ebensoviele Zaunfelder besitzen noch alle Latten. Bei den restlichen Zaunfeldern ist jeweils noch genau die Hälfte der Latten vorhanden. Wieviel Latten sind insgesamt zu erneuern?

Mathematikfachlehrer G. Friedel, Choren

W 5 ■ 1355 Drei Stoffballen der Farben rot, grün und weiß enthalten zusammen Stoffbahnen mit einer Gesamtlänge von 3,250 km. Der rote Stoff ist um 200 m länger als der grüne, der weiße um 150 m kürzer als der rote. Wie lang sind die Bahnen des roten, grünen und weißen Stoffes?

Ramona Flügel, Wiederstedt, Kl. 7

W 5 ■ 1356 Eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ heißt Primzahl genau dann, wenn sie nur durch n und durch 1 teilbar ist. Es sind alle natürlichen Zahlen k zu ermitteln, die kleiner als 10 sind und folgende Bedingung erfüllen: Multipliziert man eine solche Zahl k mit 5 und subtrahiert vom erhaltenen Produkt 2, so erhält man als Differenz eine Primzahl.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5*1357 Welche und wie viele ein-, zwei- und dreistellige Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2 und 3 bilden, wenn sich diese Grundziffern wiederholen dürfen? Es ist die Summe aller Zahlen zu bestimmen, die den ermittelten Ziffern entsprechen.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5*1358 In einer 5. Klasse fiel die letzte Klassenarbeit im Fach Mathematik wie folgt aus:

a) Der sechste Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 1.

b) Die Noten 2 und 3 erhielten zusammen 16 Schüler.

c) Die Anzahl der Schüler, die die Note 4 erhielten, war doppelt so groß wie die Anzahl der Schüler, die die Note 5 erhielten.

d) Die Anzahl der Schüler, die die Note 3 erhielten, war größer als die Anzahl der Schüler, die die Note 5 erhielten, aber kleiner als die Anzahl der Schüler, die die Note 4 erhielten.

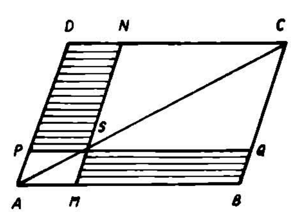
e) Die Anzahl der Schüler, die die Note 1 erhielten, war verschieden von der Anzahl der Schüler, die die Note 3 erhielten. Wie viele der 30 Schüler dieser Klasse erhielten die Noten 1, 2, 3, 4 und 5?

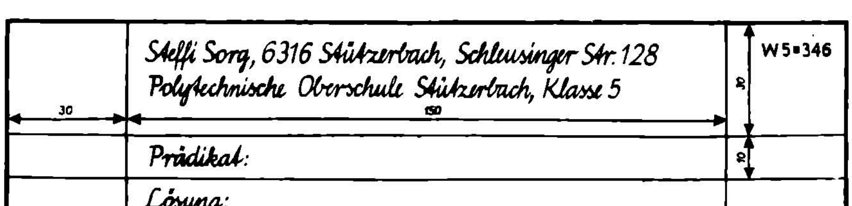
Rita Hellmann, Großschönau, Kl. 7

6▲1359 Es sind alle natürlichen Zahlen zwischen 100 und 200 zu bestimmen, die durch 7 teilbar sind und deren Quersumme 11 beträgt.

Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich)

6▲1360 Die abgebildete Figur stellt ein Parallelogramm $ABCD$ dar. Durch einen





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha* inneren Punkt S der Diagonale $\overline{AC}$ wurden die Parallele zur Geraden AB und die Parallele zur Geraden BC gezeichnet. Es ist nachzuweisen, daß die Flächeninhalte der Vierecke $MBQS$ und $PSND$ gleich sind. *Sch.*

W 6 ■ 1361 Zeichne ein Dreieck ABC aus den Stücken $\overline{AB}=c=5$ cm, $\overline{BC}=a=6$ cm und $\overline{AC}=b=4$ cm! Dem Dreieck ABC ist ein Rhombus $DEFG$ so einzubeschreiben, daß D auf AB, E auf BC, G auf AC liegt und die Punkte F und C zusammenfallen. Die Konstruktion des Rhombus ist zu begründen. *Sch.*

W 6 ■ 1362 Eine Mathematikarbeit hatte in einer 6. Klasse folgendes Ergebnis:
Ein Neuntel der Schüler erhielt die Note 1, ein Drittel die Note 3. Von den restlichen Schülern erhielten zwei Fünftel die Note 2 und die Hälfte die Note 4. Die Note 5 erhielten genau zwei Schüler. Wieviel Schüler haben diese Mathematikarbeit mitgeschrieben? Wieviel Schüler entfallen auf die einzelnen Noten?
Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich)

W 6*1363 Alfred sagt: „Das Lebensalter meiner Schwester Berta (in ganzen Zahlen) ist doppelt so groß wie die Summe aus den Lebensaltern meiner Schwestern Christa und Dorit. Ich bin der Älteste und doppelt so alt wie mein Bruder Ernst. Dorit ist die Jüngste. Addiert man das jeweilige Alter von uns Geschwistern, so erhält man als Summe 33. Unsere Geburtsjahre liegen sämtlich wenigstens um 2 Jahre auseinander.“ Wie alt ist jedes dieser Geschwister?
Burkhard Maeß, Bad Doberan

W 6*1364 Eine durchgeführte Altstoffsammlung brachte folgendes Ergebnis:
a) Die Schüler der 7. Klasse sammelten 20 kg Altstoffe mehr als die Schüler der 5. Klasse.
b) Das Sammelergebnis der Schüler der 10. Klasse lag um 20 kg über dem doppelten Sammelergebnis der 5. Klasse.
c) Die Schüler der 8. Klasse erreichten drei Viertel des Sammelergebnisses der Schüler der 10. Klasse.
d) Das Sammelergebnis der Schüler der 9. Klasse war gleich dem arithmetischen Mittel aus den Sammelergebnissen der Klassen 8 und 10.
e) Die Schüler der 6. und 7. Klasse erzielten gleiche Sammelergebnisse.
Wieviel Kilogramm Altstoffe wurden von den Schülern der einzelnen Klassen gesammelt, wenn insgesamt 1759 kg aufgebracht wurden? *Dirk Dalisada, 36. OS Rostock*

7 ▲ 1365 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 32760. Wie heißen diese vier Zahlen?
Andreas Fittke, Berlin

7 ▲ 1366 Jemand errechnet 35^2 auf folgende Weise:
Er multipliziert die der Anzahl der Zehner entsprechende natürliche Zahl 3 mit ihrem Nachfolger 4 und erhält das Produkt $3\cdot 4=12$. Dann multipliziert er dieses Produkt mit 100 und erhält $12\cdot 100=1200$. Nun bildet er das Quadrat aus der Anzahl der Einer, also $5^2=25$. Schließlich werden beide Teilergebnisse addiert, also $1200+25=1225$.
Es ist zu untersuchen, ob dieses Verfahren für die Berechnung des Quadrats aller zweistelligen natürlichen Zahlen gilt, die auf die Ziffer 5 enden!
Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich)

W 7 ■ 1367 Auf einer Familienfeier waren ein Drittel weniger Frauen als Männer anwesend. Nachdem sich sechs Ehepaare verabschiedet hatten, verblieben noch dreimal so viele Männer als Frauen im Festkreise. Wieviel Männer und Frauen waren ursprünglich anwesend? *Sch.*

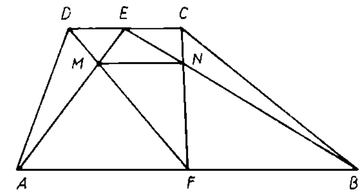
W 7 ■ 1368 Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB}=a=8$ cm und $\overline{BC}=b=5$ cm! Konstruiere die vier Winkelhalbierenden der Innenwinkel dieses Rechtecks und bezeichne ihre Schnittpunkte mit E, F, G und H! Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$! *Sch.*

W 7*1369 Welche Oberfläche besitzt ein Spielwürfel von 15 mm Kantenlänge, dessen halbkugelförmige Augen einen Durchmesser von 2 mm haben? *Klaus Göthling, Thaldorf*

W 7*1370 Ein Fußgänger und ein Radfahrer brechen zum gleichen Zeitpunkt in A auf, um nach B zu gelangen. Der Fußgänger marschiert mit einer konstanten Geschwindigkeit von $5\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, der Radfahrer fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $15\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Nachdem der Radfahrer die Hälfte des Weges zurückgelegt hatte, mußte er auf Grund einer Umleitung vom direkten Weg abweichen, während der Fußgänger den direkten Weg fortsetzen konnte. Beide erreichten B zum gleichen Zeitpunkt. Hätte der Radfahrer keinen Umweg gehabt, so wäre er zwei Stunden früher als der Fußgänger in B angekommen. Wie groß ist die Entfernung, die der Radfahrer von der Abzweigung bis zum Ort B zurücklegen mußte?
Andreas Fittke, Berlin

W 8 ■ 1371 An einem internationalen Ferienlager nehmen 70 Freunde teil, von denen jeder außer seiner Muttersprache genau eine der Fremdsprachen Russisch, Deutsch, Englisch, Französisch, Polnisch und Arabisch beherrscht. Man beweise, daß es dann wenigstens eine Fremdsprache gibt, die von mindestens 12 Teilnehmern dieses Ferienlagers beherrscht wird. *L.*

W 8 ■ 1372 Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, wobei die Länge der Seite AB dreimal so groß wie die Länge der Seite $\overline{CD}$ ist (vgl. das Bild). Die Mitte F der Seite $\overline{AB}$ sei mit den Punkten C und D, die Mitte E der Seite $\overline{CD}$ mit den Punkten A und B verbunden. Die Geraden AE und DF schneiden sich in dem Punkt M; die Geraden BE und CF schneiden sich in dem Punkt N. Man berechne die Länge der Strecke $\overline{MN}$ wenn die Länge der Seite $\overline{AB}=a$ gegeben ist. *Sch.*



W 8*1373 Der Expreßzug „Aurora“ von Moskau nach Leningrad fährt um 13.43 Uhr in Moskau ab, hält nur in Bologoje (331 km von Moskau entfernt) von 16.11 bis 16.19 Uhr und trifft in Leningrad (650 km von Moskau entfernt) um 18.42 Uhr ein.
a) Man berechne die mittlere Geschwindigkeit (in $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$) dieses Expreßzuges auf der Strecke Moskau–Bologoje und auf der Strecke Bologoje–Leningrad.
b) Wann und in welcher Entfernung von Moskau begegnet dieser Zug dem Gegenzug, der um 13.00 Uhr in Leningrad abfährt, von 15.48 bis 15.58 Uhr in Bologoje hält und um 18.53 Uhr in Moskau eintrifft?
(Die Aufgabe b) kann rechnerisch oder graphisch gelöst werden. Ferner kann bei der Lösung eine jeweils konstante Geschwindigkeit angenommen werden.) *L.*

W 8*1374 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$. Ferner sei E der Fußpunkt des von dem Eckpunkt A auf die Diagonale $\overline{BD}$ gefällten Lotes.
a) Man berechne die Länge der Strecke $\overline{AE}$ aus den gegebenen Seitenlängen a, b des Rechtecks.
b) Man gebe ein Zahlenbeispiel an, bei dem a, b und $\overline{AE}$ ganzzahlige Werte haben.
Roland Schlesinger, Saßnitz, POS III, Kl. 8

W 9 ■ 1375 Man beweise, daß die Summe von vier Potenzen, deren Basis jeweils gleich 2 ist und deren Exponenten vier aufeinanderfolgende von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, stets durch 30 teilbar ist.
Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

W 9 ■ 1376 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n>1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

gilt. *Peter Surján, Budapest, UVR*

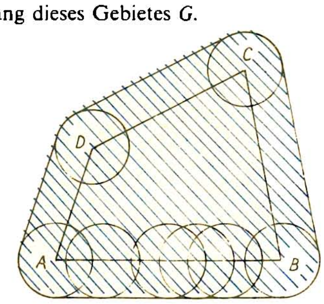
W 9*1377 In dem Schema

```
*********:***=*****9
 ***
   ****
    ***
      ***
      ***
```

ist für die Sternchen jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einzusetzen, so daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. Dabei darf aber am Anfang einer der drei- oder mehrstelligen Zahlen des Schemas niemals die Grundziffer 0 stehen.

Anleitung zur Lösung: Man bezeichne den neunstelligen Dividenden mit x, den dreistelligen Divisor mit y und den sechsstelligen Quotienten mit z, wobei an der zweiten, dritten und fünften Stelle von z jeweils die Grundziffer 0 und an der siebenten Stelle die Grundziffer 9 steht. Dann stelle man Ungleichungen für y und danach für z auf. *L.*

W 9*1378 Es sei $ABCD$ ein ebenes konvexes Viereck mit dem Flächeninhalt A_0 und dem Umfang u_0. Um jeden Punkt der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ (einschließlich der Punkte A, B, C, D) seien Kreise mit dem gleichen Radius r geschlagen (vgl. das Bild in dem nur einige dieser Kreise gezeichnet sind). Es sei nun G das im Bild schraffierte Gebiet, das aus der Vereinigungsmenge der Mengen aller inneren und Randpunkte dieser Kreise sowie der Menge aller inneren und Randpunkte des Vierecks $ABCD$ besteht. Man berechne den Flächeninhalt und den Umfang dieses Gebietes G. *T.*



W 10/12 ■ 1379 Eine positive reelle Zahl a soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß die Summe der dritten Potenzen dieser Summanden möglichst klein, also ein Minimum, wird. Man stelle fest, ob es eine solche Zerlegung gibt und gebe bejahendenfalls die beiden Summanden an.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

W 10/12 ■ 1380 Einem Winkel von der Größe α mit $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ seien zwei Kreise k_1 und k_2 so einbeschrieben, daß diese beiden Kreise einander von außen berühren und jeder der Kreise die Schenkel des Winkels berührt. Dabei sei k_1 der kleinere der beiden Kreise.

a) Es soll das Verhältnis $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ der Radien der beiden Kreise als Funktion von α dargestellt werden.

b) Es ist dieses Verhältnis λ für die Fälle $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ zu berechnen.

Michael Marczinek, Berlin

W 10/12*1381 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{x-4}+\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^{x-4}=2x$$

zu ermitteln. *A. D. Osmanow, Demurlo, Georgische SSR, UdSSR*

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(7./8. Februar 1975)

OJM DDR

Klassenstufe 7

1. Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7 und 8.
Sie gingen Pilze sammeln.
Folgendes ist bekannt:
(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze, der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.
(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.
(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte. Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

2. *Beweise:* Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist.

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b-c = 3$ cm, $\alpha = 55^\circ$ und $\beta = 85^\circ$!
Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A_1 und danach in der Abteilung A_2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.
Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A_1 ihre Produktion auf 159% und die 62 Arbeiter der Abteilung A_2 ihre Produktion auf 124% erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein mußte, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten. Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, daß der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?
Auf wieviel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?
Bemerkungen: Es sei angenommen, daß der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

5. Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a:b = 3:8$ und $b:c = 4:3$. Ermittle die Seitenlängen!

6. Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ geht. Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben

W 10/12*1382 Es seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ zwei aufeinander senkrecht stehende Radien dieses Kreises; es gilt also $\overline{MA} = \overline{MB} = r$. An den Kreis k soll eine Tangente konstruiert werden, die die von M ausgehenden Strahlen MA und MB in den Punkten C und D schneidet. Wie muß der Berührungspunkt dieser Tangente gewählt werden, damit die Länge der Strecke $\overline{CD}$ möglichst klein wird? Wie lang ist in diesem Fall die Strecke $\overline{CD}$? *L.*

W 10/12 ■ 1383 Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die die beiden Gleichungen

$$3x^4+13x^3+20x^2+17x+7=0 \quad (1)$$

und

$$3x^4+x^3-8x^2+11x-7=0 \quad (2)$$

erfüllt sind. *Manfred Freitag, Schwarzheide*

Bemerkung: Diese Aufgabe hat eine große Ähnlichkeit mit der Aufgabe 1278 (vgl. alpha, Heft 5, 1974, S. 103). Sie unterscheidet sich von der Aufgabe 1278 nur dadurch, daß in der Gleichung (2) der zweite Summand $+x^3$ (und nicht $-x^3$) lautet. Während aber das Gleichungssystem der Aufgabe 1278 keine Lösung hatte, hat das Gleichungssystem der hier gestellten Aufgabe genau eine reelle Lösung.

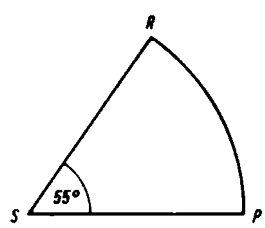
könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ ermitteln.
Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\sphericalangle ABC$!

Klassenstufe 8

1. Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Schüler dem Alter nach ordnen.
Die Aussagen lauten:
(1) Anton ist älter als Elvira.
(2) Berta ist jünger als Christine.
(3) Dieter ist jünger als Anton.
(4) Elvira ist älter als Christine.
(5) Anton ist jünger als Christine.
(6) Elvira ist älter als Dieter.
(7) Christine ist jünger als Dieter.
Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Schüler dem Alter nach! Beginne mit dem jüngsten!

2. Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:
a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.
Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

3. Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP}=\overline{SR}=8{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $\sphericalangle PSR$ der Größe 55° (siehe Bild).



Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d. h. der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, daß k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

4. Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden 1 Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.
Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:
Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen. Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte. Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.
Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt.
Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

5. *Beweise folgenden Satz:*
Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der beiden parallelen Seiten.

6. Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0<p_1<p<p_2<100$.
Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d. h. einer Lösung, die p_1% dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.
a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d. h. die Zahl $x:y$, zunächst speziell für die Werte $p_1=25$, $p_2=60$ und $p=35$!
b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!
Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

Klassenstufe 9

1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaften hat: Die Zahl $83\cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernsolge $3\,x\,8$ (d. h. vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

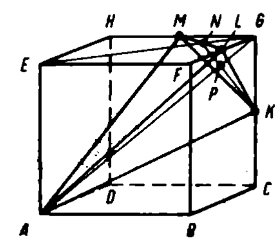
2. Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1<a_2<a_3<a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:
Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

3. Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a=\overline{AB}$, $c=\overline{CD}$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese Parallelseiten enthaltenden Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.
Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

4. Man beweise, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt:
$$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+xz+yz.$$
Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, daß in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\widehat{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P. Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.
a) Man beweise, daß C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
b) Man beweise, daß g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

6. In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Bild) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG.

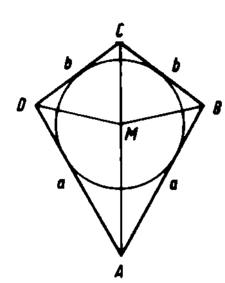


Man ermittle das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, K, L, M.

Klassenstufe 10

1. In
$$\begin{array}{r} \text{A R Z T} \\ +\ \text{A R Z T} \\ \hline \text{Ä R Z T E} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

2. Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit



$\overline{AB}=\overline{AD}=a$, $\overline{BC}=\overline{DC}=b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt

$$\frac{a}{b}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}}.$$

3. Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$x^{\log_a x}=a^2x \text{ erfüllen.}$$

4. Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung

$$f(n)=a^n+b^n+(a+b)^n$$

definierte Funktion. Beweisen Sie, daß dann $(f(2))^2=2\cdot f(4)$ gilt!

5. Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n<40$ an, für die die Zahl

$$n^2+6n-187$$

ohne Rest durch 19 teilbar ist.

6. Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben: Schneidet die Parallele durch O zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$.
Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren. Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt.

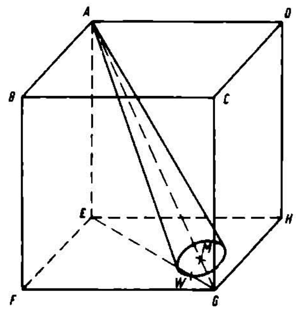
Klassenstufe 11/12

1. In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, daß in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8 in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 usw. in dieser Reihenfolge stehen. Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können. Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen.
Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.
Anmerkung: Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen.

2. Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a, b) aus rationalen Zahlen a, b, für die $a+b=c$ gilt.
Beweise, daß unter allen Produkten $a\cdot b$ mit $(a, b)\in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a, b) mit $a=b$ gebildet wurde!

3. Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:

a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.
b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.
c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.



Man beweise:
Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha+\sqrt{2}}.$$

4. Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion $y=\log_a(bx+c)$ mit a, b, c reell; $a>1$ gibt, deren Graph in einem x, y-Koordinatensystem durch die Punkte (2; 2), (−1; 0) und (0; 1) verläuft.
Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a, b, c) an, für die das zutrifft.

5. Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Man begründe und beschreibe die Konstruktion eines Fünfecks $ABCDE$ für das F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind.
Man untersuche, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, daß das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, daß Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.

6. A. Ein in einem industriellen Prozeß eingebauter Meßkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eines der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird. Jede Übertragungseinheit A_i $(i=1, 2, 3)$ kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.
Es sei nun bekannt, daß am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?
Hinweis: Wenn sich unter Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p=\frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V. Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden:
Das Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe p_1+p_2 der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.
Das Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p\cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, daß unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

6. B. Es seien p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

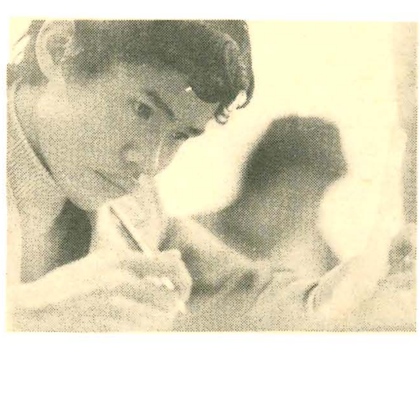
$$f(x+p)=\frac{f(x)}{3f(x)-1} \qquad (1)$$

für alle reellen x.
a) Man beweise, daß jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d. h., daß es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so daß

$$f(x+q)=f(x) \text{ für alle reellen } x \qquad (2)$$

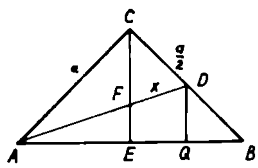
gilt.
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f konkret an.
Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ $f(x)=\frac{a+b\sin^2 x}{c+d\sin^2 x}$ bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.

Sowjetische Schüler und vietnamesische Studenten der Univ. Leipzig nahmen an der Bez.-Oly. teil.



Lösungen

Abbildung zur Lösung W 8*1275



Lösungen zu: Übung macht den Meister Heft 1/75

1. $\frac{11}{24}$ 2. $1\frac{1}{5}$; $\frac{2}{35}$; 105 3. 0,095; 8,03

4. 2; b; $-\frac{5}{2}a$; $20a^2-8ab-29b^2$

5. $(21n^3-34n^2v+25v^3):(7n+5v)$
$= 3n^2-7nv+5v^2$
$(21n^3+15n^2v)$
$\overline{49n^2v+25v^3}$
$-(-49n^2v+35nv^2)$
$\overline{25v^3+35nv^2}$
$-(25v^3+35nv^2)$

6. a) $\frac{ab+a}{ab-a}=\frac{a(b+1)}{a(b-1)}=\frac{b+1}{b-1}$

b) $\frac{3n-3}{5-5n}=\frac{3(n-1)}{-5(n-1)}=-\frac{3}{5}$

c) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{a-b}$

7. $\frac{a-2}{a+2}=\frac{(a-2)(a-2)}{(a+2)(a-2)}=\frac{(a-2)^2}{a^2-4}$

8. a) $12a^3b^5c^3$

b) $x^2-1=(x+1)(x-1)$, $x^2-x=x(x-1)$, $x-x^2=-x(x-1)$
kgV: $-x(x+1)(x-1)$

9. $\frac{2u+1}{2u+2}-\frac{3u-1}{3u-3}+\frac{14u+2}{12u^2-12}$
$=\frac{2u+1}{2(u+1)}-\frac{3u-1}{3(u+1)}+\frac{1(7u+1)}{6(u+1)(u-1)}$
$=\frac{3(u-1)(2u+1)-2(u+1)(3u-1)+7u+1}{6(u+1)(u-1)}$
$=\frac{0}{6(u+1)(u-1)}=0$

10. a) $15x^{-2}=\frac{15}{x^2}$; b) $\left(\frac{v^4}{x^2}\right)^9$
c) $5x^2$; ab;
$2\sqrt{8}+9\sqrt{18}-5\sqrt{72}=4\sqrt{2}+27\sqrt{2}-30\sqrt{2}$
$=\sqrt{2}$
d) $6\sqrt{2}$ e) v

11. 0,20913; 0,5856

12. a) $\frac{4x-7}{6x+18}+\frac{11}{45}=\frac{7x+2}{10x+30}$
$\frac{4x-7}{6(x+3)}+\frac{11}{45}=\frac{7x+2}{10(x+3)}$ HN: $90(x+3)$
$15(4x-7)+22(x+3)=9(7x+2)$
$x=3$

b) $\sqrt{x+1}-7=0$
$\sqrt{x+1}=7$
$x+1=49$
$x=48$

c) $x=27$; d) $x=4$; $y=5$;
e) $x=4$, $y=5$, $z=6$;
f) $x_1=5$, $x_2=-\frac{10}{3}$
g) $4x-3\sqrt{7x-6}=6$
$4x-6=3\sqrt{7x-6}$
$(4x-6)^2=9(7x-6)$
$x=6$

13. $x>3$; $x<5$
14. a) P_1; P_3 b) P_1; P_2 c) P_2; P_3
15. a) 0,2639 b) 1,308 c) 6,54
d) −0,5344 e) −0,7646 f) 2,703
16. a) 10°; 170° b) 55,1°; 304,9°
c) 158,3°; 201,7° d) 170,8°; 350,8°
17. $a=18{,}12$ cm; $b=8{,}45$ cm; $\beta=25°$
18. $a=69{,}8$ cm; $\beta=27{,}4°$; $\gamma=22{,}6°$;
$A=563\ \text{cm}^2$

Lösungen zu: Rund um die Uhr Heft 1/75

▲1▲ Der Tag hat 24 Stunden, d. s. 1440 Minuten. Zweimal zwei Fünftel sind vier Fünftel, die schon seit Beginn des Tages verflossen sind.
Wenn x die Anzahl der seit Tagesanfang (null Uhr) verflossenen Minuten ist, so ergibt:

$$x+\frac{4}{5}x=1440$$

bzw. $x=800$.
Es sind also 800 Minuten seit Tagesbeginn verflossen. Es ist 13.20 Uhr.

▲2▲ a) 11mal stehen die Zeiger in 12 Stunden übereinander.
b) In einer Stunde wird der Minutenzeiger vom Sekundenzeiger 59mal überholt, innerhalb von 12 Stunden auch der Stundenzeiger $(60\cdot 12-1)$mal:
$12(60-1)+12\cdot 60-1=1427$, d. h. 1427mal steht der Sekundenzeiger über dem Minutenzeiger oder dem Stundenzeiger innerhalb von 12 Stunden.

▲3▲ Die Geschwindigkeit des Minutenzeigers sei v_1, die des Stundenzeigers v_2; dann gilt:

$$v_1=\frac{s_1}{t_1}=\frac{2\pi r_1}{t_1}=\frac{2\pi\cdot 2}{1}=4\pi;$$
$$v_2=\frac{s_2}{t_2}=\frac{2\pi r_2}{t_2}=\frac{2\pi\cdot 1{,}5}{12}=\frac{1}{4}\pi;$$
$$v_1:v_2=(4\pi):\left(\frac{1}{4}\pi\right)=16:1.$$

Die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers ist 16mal so groß wie die der Spitze des Sekundenzeigers.

▲4▲ Heinz legt zwei Scheiben Brot in den Brotröster. Nach 30 Sekunden dreht er die erste Scheibe um, nimmt die zweite heraus und legt an ihre Stelle die dritte Scheibe. Nach weiteren 30 Sekunden ist die erste Scheibe von beiden Seiten geröstet und kann herausgenommen werden. Nun wird die bereits einseitig geröstete zweite Scheibe wieder eingelegt und die dritte Scheibe umgedreht. Bis zu Beendigung des Röstvorgangs für diese Scheiben werden nun nochmals 30 Sekunden benötigt.
Die Gesamtzeit des Röstvorgangs für die drei Brotscheiben beträgt somit nur noch 90 Sekunden bzw. $1\frac{1}{2}$ Minuten.

▲5▲ Der 1. Schlag beginnt mit 0 Sekunden, d. h. die Zwischenräume zwischen den Schlägen betragen 5 Sekunden. Daraus folgt: $5:4=1\frac{1}{4}$, d. h. zwischen jedem Schlag der Uhr liegen $1\frac{1}{4}$ Sekunden. Um 10 Uhr gibt es 9 Zwischenräume zwischen den Schlägen bzw. $9\cdot 1\frac{1}{4}=11\frac{1}{4}$, d. h. um 10 Uhr dauert das Schlagen $11\frac{1}{4}$ Sekunden.

▲6▲ $(12-1)\cdot 2=22$mal im Laufe eines Umlaufs des großen Zeigers auf dem Zifferblatt, d. h., in 24 Stunden bilden die beiden Uhrzeiger 44mal einen rechten Winkel.

▲7▲ Für die Hälfte des Schulweges brauchten bei konstanter Geschwindigkeit Jürgen genau 10 Minuten und Elke genau 15 Minuten. Da Elke genau 5 Minuten Vorsprung hat, holt Jürgen sie in genau 10 Minuten ein oder: $\frac{x}{20}=\frac{x}{30}+\frac{5}{30}$; $x=10$

▲8▲ Petra und Werner spielten 180 Minuten, d. s. 3 Stunden.

▲9▲ Heinz ist eine Viertelstunde vor der Zeit, Gerd dagegen 30 Minuten später am Bahnhof.

▲10▲ Zu allen Berechnungen verwenden wir die Formel zur Berechnung des Kreisumfangs $u=2r\pi$ und $\pi=3{,}14$.
a) $2\cdot 4\ \text{mm}\cdot 3{,}14=25{,}12$ mm in der Minute, $25{,}12\ \text{mm}\cdot 60\cdot 24=36\,172{,}8\ \text{mm}\approx 36$ m in 24 Stunden.

▲11▲ $1\,209\,600\ \text{s}=20\,160\ \text{min}=336\ \text{h}=$ 14 Tage. Das Treffen findet am 24. Mai um 12.00 Uhr statt.

▲12▲ Viertelschläge:
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$
$4+8+12+16=$ 40 Schläge in 1 Stunde bzw. 480 Schläge in 12 Stunden.
Stundenschläge: $(1+2+3+\ldots+12)=$ 78 Schläge. $480+78=558$ Schläge in 12 Stunden. Oder eine andere Lösung.
$(41+42+43+\ldots+52)=93\cdot 6$
$=558$ Schläge.

▲13▲ Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78. Die Kreisscheibe läßt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist.
Das gilt für 2; 3 und 6, für 4 dagegen nicht. Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der

geforderten Weise zerlegen. Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich. Wie wir sehen, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, daß für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$$1+12=2+11=3+10=4+9=5+8$$
$$=6+7=13$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 6/74

▲5▲1289 Wir rechnen 10,00 M − 2,54 M − 0,60 M = 6,86 M. Kerstin bezahlte für Fleisch und Wurst zusammen 6,86 M.
und Wurst zusammen 6,86 M.

▲5▲1290 Aus $70\cdot 15=1050$ und $55\cdot 20=1100$ und $1050+1100=2150$ folgt, daß die Einnahmen 2150 Pf, also 21,50 M betrugen. Für den Kauf der Heckenschere fehlten noch 70 Pf.

W 5 ■ 1291 Aus 463,35 − 174,55 = 288,80 folgt, daß der Preis für die Stores 288,80 M beträgt. Aus $8\cdot 36{,}10=288{,}80$ folgt, daß 8 m Stores gekauft wurden.

W 5 ■ 1292 Aus $(200:4)\cdot 3=150$ folgt, daß der Zirkus über 150 Sitzplätze verfügt.
a) Aus $(200\cdot 150):4=7500$ folgt, daß während der Saison insgesamt 7500 Programmzettel verkauft wurden.
b) Aus $(200\cdot 150):2=15000$ und $30\cdot 15000=450000$ folgt, daß aus der Tierschau 450000 Pf, also 4500 M eingenommen wurden.

W 5*1293 Wegen $E+E=U$ muß U eine gerade Zahl sein. Wegen $U+U=10T+R$ bzw. $U+U=10T+R-1$ gilt $T=1$ und $U\geq 5$, also $U=6$ oder $U=8$.
Wenn $U=6$, so $E=3$ oder $E=8$. Für $E=3$ gilt $W=2$ und $R=2$. Das führt zu einem Widerspruch, denn es muß $W\neq R$ sein.
Für $E=8$ erhalten wir $1+W+T=E$, also $1+W+1=8$ und somit $W=6$. Das führt ebenfalls zum Widerspruch; es muß $W\neq U$ sein.
Wenn $U=8$, so $E=4$ oder $E=9$. Für $E=4$ erhalten wir $W+T=E$, also $W+1=4$ und somit $W=3$. Wegen $T=1$ folgt aus $U+U=10T+R$ schließlich $R=6$ und wir erhalten die richtig gelöste Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} 834 \\ +\ 814 \\ \hline 1648. \end{array}$$

Für $E=9$ erhalten wir $1+W+T=E$, also $1+W+1=9$ und somit $W=7$. Aus $U+U=10T+R$ folgt wegen $T=1$ somit $R=6$, und wir erhalten eine zweite Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 879 \\ +\ 819 \\ \hline 1698. \end{array}$$

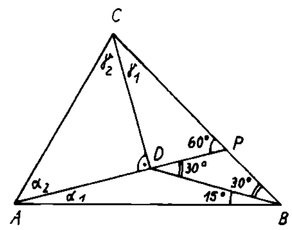
Diese Aufgabe hat also zwei Lösungen.

W 5*1294 Wegen $19=15+4$ und $74=14+60$ und $4+60=64$ müssen zu jeder der zehn Summen (waagerecht, senkrecht, diagonal) jeweils 64 addiert werden. Wir geben nachstehend eine mögliche Lösung.

64			
		4	60
	60		4
	4	60	

80	3	2	13
5	10	15	68
9	66	7	16
4	19	74	1

▲6▲1295 Wir zeichnen durch C eine Senkrechte zur Geraden AP und bezeichnen deren Fußpunkt mit D, und wir verbinden B mit D.



Aus $\delta=60°$ und $\sphericalangle CDP=90°$ folgt $\sphericalangle DCP=\gamma_1=30°$ und somit $2\cdot\overline{DP}=\overline{CP}$. Wegen $2\cdot\overline{BP}=\overline{CP}$ gilt $\overline{BP}=\overline{DP}$, d. h., Dreieck DBP ist gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle PBD=\sphericalangle PDB=30°$. Wegen $\sphericalangle PCD=\sphericalangle PBD$ ist auch das Dreieck BCD gleichschenklig, und es gilt $\overline{BD}=\overline{CD}$. Aus $\sphericalangle ABD=45°-30°=15°$ und $\sphericalangle DAB=\delta-\beta=15°$ folgt, daß das Dreieck ABD ebenfalls gleichschenklig ist und somit $\overline{AD}=\overline{BD}$ gilt. Aus $\overline{AD}=\overline{BD}$ und $\overline{BD}=\overline{CD}$ folgt $\overline{AD}=\overline{CD}$. Deshalb gilt $\alpha_2=\gamma_2$. Wegen $\alpha_2+\gamma_2=90°$ gilt somit $\gamma_2=45°$, also

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2=75°.$$

▲6▲1296 Es sei x die Anzahl der Knobelaufgaben; dann waren $(x+5)$ Gleichungen und $(x-2)$ Geometrieaufgaben zu lösen. Daher gilt

$$x+(x+5)+(x-2)=30,$$
$$3x+3=30,$$
$$3x=27,$$
$$x=9.$$

Die Teilnehmer dieser Arbeitsgemeinschaft hatten 9 Knobelaufgaben, 7 Geometrieaufgaben und 14 Gleichungen zu lösen.

W 6 ■ 1297 Der erste Faktor sei n. Dann lautet der zweite Faktor $\frac{n}{2}+2=\frac{n+4}{2}$. Für den dritten Faktor gilt somit $\frac{n+4}{4}+2=\frac{n+12}{4}$.

Nun gilt $n\cdot\frac{n+4}{2}\cdot\frac{n+12}{4}=1120$. Für $n>0$ ist der Faktor $\frac{n+12}{4}$ genau dann eine von Null verschiedene natürliche Zahl, wenn $n=4, 8, 12, 16, 20 \ldots$, gilt. Wir stellen eine Tabelle auf.

n	$\frac{n+4}{n}$	$\frac{n+12}{4}$	p
4	4	4	64
8	6	5	240
12	8	6	576
16	10	7	1120
20	12	8	1920

Für $n>20$ wird $p>1920$. Daher sind nur für $n=16$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die drei Zahlen lauten somit 16, 10 und 7, und es gilt $16\cdot 10\cdot 7=1120$.

W 6 ■ 1298 Die Großmutter verzehrte $2\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$ der Torte. Wir rechnen $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{48}+\frac{1}{6}+\frac{3}{16}+\frac{1}{12}=\frac{6+12+5+8+9+4}{48}=\frac{44}{48}=\frac{22}{24}$ und $\frac{24}{24}-\frac{22}{24}=\frac{2}{24}$. Somit blieben zwei der eingeteilten Stückchen Torte übrig.

W 6*1299 Die erste Zahl dieser geordneten Paare sei $10a+b$ mit $a\neq 0$; dann lautet die zweite Zahl $10b+a$, d. h., es muß also auch $b\neq 0$ sein. Für die Summe beider Zahlen gilt $s=(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$.
Bei Division durch 5 läßt $11(a+b)$ nur dann den Rest 3, wenn $a+b=3$ oder $a+b=13$ oder $a+b=8$ oder $a+b=18$ gilt. Die geordneten Zahlenpaare lauten demnach (12; 21), (17; 71), (26; 62), (35; 53), (49; 94), (58; 85), (67; 76).

W 6*1300 Jeder Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ beträgt $(5\cdot 180°-360°):5=108°$. Deshalb gilt $\sphericalangle CDF=\sphericalangle DCF=72°$, da jeder dieser beiden Winkel Nebenwinkel zu einem Fünfeckswinkel ist. Wegen $\sphericalangle CDF=\sphericalangle DCF$ ist das Dreieck DCF gleichschenklig, und es gilt $\overline{CF}=\overline{DF}$ und $\sphericalangle CFD=180°-2\cdot 72°=36°$. Aus $\overline{CD}=\overline{ED}$ folgt $\sphericalangle DEC=\sphericalangle DCE=(180°-108°):2=36°$. Wegen $\sphericalangle FEC=\sphericalangle EFC$ gilt schließlich $\overline{EC}=\overline{FC}$. Aus $\overline{DF}=\overline{FC}$ und $\overline{EC}=\overline{FC}$ folgt $\overline{EC}=\overline{DF}$. Die Strecke $\overline{EC}$ ist genau so lang wie die Strecke $\overline{DF}$.

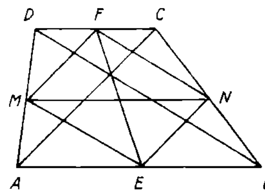
▲7▲1301 Auf Grund der Aufgabenstellung gilt

$$5\cdot(n-1)+2=4\cdot n+1,$$
$$5n-5+2=4n+1,$$
$$n=4.$$

Es sind somit 4 Kartons vorhanden.
Weiterhin gilt
$m=5\cdot(n-1)+2=5\cdot 3+2=17.$
Somit sind 17 Gegenstände zu verpacken.

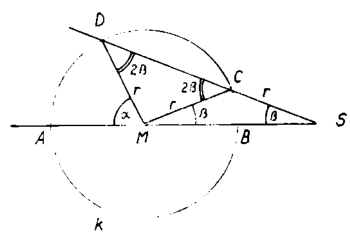
▲7▲1302 Es sei M die Mitte von $\overline{AD}$ und N die Mitte von $\overline{BD}$, dann ist das Viereck $ENFM$ ein Parallelogramm, denn es gilt $ME \parallel BD \parallel FN$ bzw. $EN \parallel AC \parallel MF$.
Weiterhin gilt $\overline{ME}=\overline{FN}=\frac{f}{2}=5{,}5$ cm und $\overline{EN}=\overline{MF}=\frac{e}{2}=3{,}5$ cm. Schließlich gilt noch $MN \parallel AB \parallel CD$. Wir konstruieren zunächst das Teildreieck ENF aus $\overline{EN}=3{,}5$ cm, $\overline{FN}=5{,}5$ cm und $\overline{EF}=5{,}5$ cm. Danach schlagen wir um E einen Kreis mit $\overline{FN}$ als Radius und um F einen Kreis mit $\overline{EN}$ als Radius; die Kreise schneiden sich im Punkte M. Durch die Punkte E und F ziehen wir je eine Parallele zur Geraden MN. Nun schlagen wir um E mit $\frac{a}{2}=5{,}25$ cm einen Kreis, der die durch E zu MN gezogene Parallele in den Punkten A und B schneidet. Die Gerade AM

schneidet die durch F zu $\overline{MN}$ gezogene Parallele in D, die Gerade BN schneidet diese Parallele in C.



W 7 ■ 1303 Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel. Wegen $\overline{CM}=\overline{CS}=r$ gilt $\sphericalangle CSM=\sphericalangle CMS=\beta$ und somit auch $\sphericalangle MCD=2\beta$. Wegen $\overline{CM}=\overline{DM}=r$ gilt ferner $\sphericalangle MDC=\sphericalangle MCD=2\beta$ und somit

$$\alpha=2\beta+\beta=3\beta.$$



W 7 ■ 1304 Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle ACB=60°$. Die Symmetrieachse CM_1 halbiert den Winkel $\sphericalangle ACB$, folglich gilt $\sphericalangle BCR=30°$.
In einem rechtwinkligen Dreieck, das einen Innenwinkel von 30° hat, ist die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete halb so lang wie die Hypotenuse.
Deshalb gilt $\overline{CM_1}=2r_1$ und $\overline{CM_2}=2r_2$.
Wegen $\overline{M_1M_2}=r_1+r_2$ gilt schließlich $\overline{CM_1}=\overline{CM_2}+\overline{M_1M_2}$,

$$2r_1=2r_2+(r_1+r_2),$$
$$r_1=3r_2.$$

W 7*1305 Nach Konstruktion gilt $\overline{BE}=\overline{BC}=\overline{AD}=b$, $\overline{DF}=\overline{CD}=\overline{AB}=a$. Aus $\overline{BC}=\overline{BE}$ folgt $\sphericalangle BCE=\sphericalangle BEC=\varphi$, also $\sphericalangle EBC=180°-2\varphi$. Wegen $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCE$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) gilt somit $\sphericalangle ABE=\varphi+(180°-2\varphi)=180°-\varphi$.
Ferner gilt $\sphericalangle ABC=\sphericalangle DCF=\varphi$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus $\overline{DC}=\overline{DF}=a$ folgt $\sphericalangle DCF=\sphericalangle DFC=\varphi$, also $\sphericalangle CDF=180°-2\varphi$. Aus den Parallelogrammeigenschaften folgt $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=\varphi$. Somit gilt $\sphericalangle ADF=\varphi+(180°-2\varphi)=180°-\varphi$.
Aus den bisherigen Überlegungen folgt $\triangle ABE\cong\triangle FDA$. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\overline{AE}=\overline{AF}$. Das Dreieck AEF ist somit gleichschenklig.

W 7*1306 a) Es sei $a=b=c=d=e=1$. Wegen $5\neq 1$ wird die gegebene Gleichung nicht erfüllt.
b) Es seien $a=b=c=d=1$ und $e\neq 1$. Dann gilt $4+e=e$. Es gibt keine natürliche Zahl e, die diese Gleichung erfüllt.
c) Es seien $a=b=c=1$, $d\neq 1$ und $d\leqq e<10$. Dann gilt

$$3+d+e=d\cdot e,$$
$$d+3=de-e,$$
$$d+3=e(d-1),$$
$$e=\frac{d+3}{d-1}=1+\frac{4}{d-1}.$$

Nur für $d=2$ bzw. $d=3$ erhält man natürliche Zahlen $e=5$ bzw. $e=3$, die die gestellten Bedingungen erfüllen.
d) Es seien $a=b=1$, $c=2$ und $2\leqq d\leqq e<10$. Dann gilt $4+d+e=2de$. Wegen $d\leqq e<10$ erhält man daraus $22\geqq 2de$, also $d\cdot e\leqq 11$. Nur die geordneten Zahlenpaare (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5) und (3; 3) erfüllen diese Ungleichung. Nun gilt $1+1+2+2+2=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=8$. Alle übrigen Zahlenpaare $(d; e)$ erfüllen nicht die Gleichung $a+b+c+d+e=abcde$.
Deshalb gilt nur $d=2$ und $e=2$.
e) Es seien $a=b=1$, $c=3$ und $3\leqq d\leqq e<10$. Dann gilt $5+d+e=3de$. Wegen $d\leqq e<10$ erhalten wir daraus $23\geqq 3de$, also $de\leqq 7\frac{2}{3}<8$.
Es gibt keine natürlichen Zahlen d und e, die gleich oder größer als 3 sind und die diese Ungleichung erfüllen. Damit gibt es auch keine weitere Lösung für $c>3$. Die Aufgabe besitzt somit genau drei Lösungen; sie lauten

$$a_1=b_1=c_1=1,\ d_1=2,\ e_1=5;$$
$$a_2=b_2=c_2=1,\ d_2=e_2=3;$$
$$a_3=b_3=1,\ c_3=d_3=e_3=2.$$

Probe:

$$1+1+1+2+5=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 5=10,$$
$$1+1+1+3+3=1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3=\ 9,$$
$$1+1+2+2+2=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\ 8.$$

▲8▲1307 a) Ist x die Maßzahl (in cm) des Durchmessers des Drahtes, so gilt, da die Länge des Drahtes gleich 100 000 cm und seine Masse gleich 1 g ist,

$$\frac{\pi}{4}x^2\cdot 100\,000\cdot 8{,}92=1,$$

$$\frac{\pi}{4}x^2=\frac{1}{100\,000\cdot 8{,}92}=\frac{10^{-6}}{0{,}892}=1{,}121\cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm}^2$$

$x\approx 1{,}2\cdot 10^{-3}$. Der Durchmesser des Drahtes ist also gleich rund

$$0{,}0012\ \mathrm{cm}=0{,}012\ \mathrm{mm}=12\ \mu\mathrm{m}.$$

b) Da die Länge des Drahtes 1000 m beträgt und sein Querschnitt $112{,}1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{mm}^2$, ist der elektrische Widerstand gleich

$$R=\frac{0{,}016\cdot 1000\cdot 10^6}{112{,}1}\Omega=0{,}143\cdot 10^6\Omega$$
$$=0{,}143\ \mathrm{M\Omega}.$$

W 8 ■ 1308 Es sei x die Anzahl der Bakterien, die jeweils entnommen wurden. Dabei darf x höchstens so groß sein, daß auch bei der 4. Entnahme noch x Bakterien entnommen werden können. Nun verbleibt nach der 1. Entnahme, da 3000 Bakterien vorhanden sind und x entnommen werden, der Rest $r_1=3000-x$.
Nach der 2. Entnahme verbleibt, da inzwischen sich die Anzahl verdoppelt hat, der Rest
$r_2=2(3000-x)-x=6000-3x$.
Nach der 3. Entnahme verbleibt der Rest $r_3=2(6000-3x)-x=12\,000-7x$
und nach der 4. Entnahme
$r_4=2(12\,000-7x)-x=24\,000-15x$.
Dabei gilt

$$24\,000-15x\geqq 0,$$

also

$$15x\leqq 24\,000,$$
$$x\leqq 1\,600.$$

Daher können bei jeder Entnahme höchstens 1600 Bakterien entnommen werden.

W 8 ■ 1309 Es sei $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$; dann gilt $\overline{AE}=\frac{b}{2}$. Ferner sei G der Fußpunkt des von F auf $\overline{AB}$ gefällten Lotes (Abb. folgt in Heft 3/75). Ferner sei $\overline{AG}=x$; dann gilt $\overline{GB}=a-x$.
Aus den Strahlensätzen folgt nun

$$y:\frac{b}{2}=(a-x):a,\quad y=\frac{b(a-x)}{2a};\qquad (1)$$

$$y:b=x:a,\quad y=\frac{bx}{a}.\qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man durch Gleichsetzung

$\frac{bx}{a}=\frac{b(a-x)}{2a}$, also $2x=a-x$, $3x=a$,

$x=\frac{a}{3}$. Daraus folgt wegen (2) (3)

$$y=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{3}=\frac{b}{3}.\qquad (4)$$

Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Dreiecke AFE, ABF, BCF und des Vierecks $FCDE$ erhält man daher

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot x=\frac{ab}{12},$$

$$A_2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot y=\frac{ab}{6}=\frac{2ab}{12},$$

$$A_3=\frac{1}{2}\cdot b\cdot(a-x)=\frac{1}{2}b\cdot\frac{2}{3}a=\frac{4ab}{12},$$

$$A_4=ab-(A_1+A_2+A_3)=ab-ab\cdot\frac{1+2+4}{12}$$
$$=\frac{5ab}{12}.$$

Daraus ergibt sich das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte
$A_1:A_2:A_3:A_4=1:2:4:5$.

W 8*1310 Es sei $(x; y)$ ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen x und y, für die die Gleichung $x^2+y-37=0$ erfüllt ist.
Dann gilt, da y eine natürliche Zahl ist,

$$y=37-x^2\geqq 0,$$

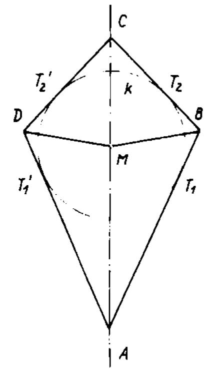
also $x^2\leqq 37$.
Daher kann die natürliche Zahl x nur die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen, und wir erhalten

$$y=37, 36, 33, 28, 21, 12, 1,$$

also die geordneten Paare
(0; 37), (1; 36), (2; 33), (3; 28), (4; 21), (5; 12), (6; 1).
Andererseits sind, wie die Probe zeigt, diese geordneten Paare aber auch sämtlich Lösungen der gegebenen Gleichung.

W 8*1311 a) Es sei $ABCD$ ein beliebiges Drachenviereck, wobei wir o. B. d. A. annehmen können, daß die Gerade AC Symmetrieachse ist (vgl. die Abb.). Diese Symmetrieachse halbiert die Winkel $\sphericalangle DAB$ und

$\sphericalangle BCD$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ möge die Symmetrieachse AC in dem Punkt M schneiden. Dann ist M der Mittelpunkt des Kreises k, der die Seite $\overline{AB}$ in T_1 und die Seite $\overline{BC}$ in T_2 berührt.



Bei der Spiegelung an der Symmetrieachse AC werden nun die Punkte A, C und M auf sich selbst abgebildet, und auch der Kreis k mit dem Mittelpunkt M wird auf sich selbst abgebildet. Da ferner der Punkt B auf den Punkt D abgebildet wird, werden die Gerade AB auf die Gerade AD und die Gerade CB auf die Gerade CD abgebildet. Daher berühren die Geraden AD und CD den Kreis k in den Punkten T_1' bzw. T_2', die Bildpunkte von T_1 bzw. T_2 sind.

Das Viereck $ABCD$ ist also ein Tangentenviereck, womit bewiesen ist, daß die Aussage (1) wahr ist.

b) Die Negation der Aussage (1) lautet:

Nicht jedes Drachenviereck ist ein Tangentenviereck. (2)

Man kann das auch wie folgt formulieren:

Es gibt (mindestens) ein Drachenviereck, das nicht Tangentenviereck ist. (3)

Da die Aussage (1) wahr ist, ist ihre Negation, also die Aussage (3), falsch.

c) Man kann die Aussage (1) auch als Implikation formulieren:

Für alle konvexen Vierecke ABCD gilt: Wenn ABCD ein Drachenviereck ist, so ist es ein Tangentenviereck.

W 9 ■ 1312 Angenommen, es gäbe zwei natürliche Zahlen x und y, für die die Gleichung

$$x^2-5y+8=0 \qquad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$-5y=-x^2-8,$$
$$y=\frac{x^2+8}{5},$$
$$y=1+\frac{x^2+3}{5}. \qquad (2)$$

Da y eine natürliche Zahl ist, ist x^2+3 durch 5 teilbar, d. h. x^2 kann nur auf die Grundziffern 2 oder 7 enden.

Nun endet aber das Quadrat einer einstelligen natürlichen Zahl niemals auf diese Grundziffern; denn die Quadrate von 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enden auf die Grundziffern 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, also niemals auf 2 oder 7. Wegen

$$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$$
$$=10(10a^2+2ab)+b^2$$

enden aber auch die Quadrate mehrstelliger natürlicher Zahlen niemals auf 2 oder 7.

Unsere Annahme, daß die Gleichung (1) eine Lösung in natürlichen Zahlen hat, führt also zu einem Widerspruch. Es gibt daher kein geordnetes Paar $(x; y)$ natürlicher Zahlen, so daß die Gleichung (1) erfüllt ist.

W 9 ■ 1313 a) Die bebaute Fläche beträgt

$$F=10{,}48\cdot 7{,}74\ \mathrm{m}^2=81{,}12\ \mathrm{m}^2.$$

b) Der geometrische Körper, der dem umbauten Raum des Hauses entspricht, ist ein gerades Prisma, dessen Grundfläche als Seitenansicht in der Abbildung dargestellt ist und dessen Höhe 10,48 m beträgt.

Die Seitenansicht besteht aus einem Rechteck mit den Seitenlängen 7,74 m und 5,32 m mit einem aufgesetzten gleichschenkligen Dreieck, dessen halbe Basis gleich $\frac{1}{2}\cdot 7{,}74\ \mathrm{m}=3{,}87\ \mathrm{m}$ ist und dessen Höhe gleich $3{,}87\cdot 1{,}12\ \mathrm{m}=4{,}33\ \mathrm{m}$ ist. Der Flächeninhalt dieser Figur ist daher gleich

$A=(7{,}74\cdot 5{,}32+3{,}87\cdot 4{,}33)\mathrm{m}^2=57{,}9\ \mathrm{m}^2$.

Daraus ergibt sich der Rauminhalt

$$V=57{,}9\cdot 10{,}48\ \mathrm{m}^3=606{,}8\ \mathrm{m}^3.$$

Der umbaute Raum beträgt also rund 607 m^3.

W 9*1314 Für $n=0$ erhält man $z=1+57\cdot 1=58=2\cdot 29$, z ist also in diesem Falle durch 29 teilbar.

Nun sei $n\geqq 1$. Wegen

$$448=15\cdot 29+13 \text{ gilt dann}$$
$$448^n=(15\cdot 29+13)^n=29a+13^n,$$

wobei a eine natürliche Zahl ist. Denn multipliziert man die Faktoren $15\cdot 29+13$ miteinander, so entsteht eine Summe, bei der alle Summanden Vielfache von 29 sind mit Ausnahme des letzten Summanden, der gleich 13^n ist. Ferner erhält man

$$332^n=(11\cdot 29+13)^n=29b+13^n,$$

wobei b eine natürliche Zahl ist.

Daraus folgt

$$z=29a+13^n+57(29b+13^n),$$
$$z=29(a+57b)+13^n(1+57)$$
$$=29(a+57b)+13^n\cdot 58,$$
$$z=29(a+57b+2\cdot 13^n).$$

Damit wurde bewiesen, daß die Zahl z durch 29 teilbar ist. Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt noch schneller zum Ziel. Aus

$$448\equiv 13 \pmod{29}$$

und $332\equiv 13 \pmod{29}$ folgt nämlich

$$z=448^n+57\cdot 332^n\equiv 13^n+57\cdot 13^n,$$
$$z\equiv 58\cdot 13^n\equiv 0 \pmod{29},$$

da $58=2\cdot 29\equiv 0 \pmod{29}$.

z ist also durch 29 teilbar.

W 9*1315 Es seien M der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise K und k, D der Punkt, in dem der Kreis k den durch die Punkte A und B gehenden Kreisbogen berührt,

E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$,

F der Mittelpunkt des durch die Punkte A und B gehenden Kreisbogens (Abb. folgt in Heft 3/75).

Dann gilt $\sphericalangle MAE=30°$, da die Winkelhalbierenden des gleichseitigen Dreiecks ABC durch den Punkt M gehen. Man kann also das rechtwinklige Dreieck MAE zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe $\overline{AE}$ ergänzen. Daher gilt

$$\overline{AM}=R,\quad \overline{ME}=\frac{R}{2},\quad \overline{AE}=\frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Bezeichnet man den Radius des durch die Punkte A, B gehenden Kreisbogens mit x, so gilt $\overline{FA}=\overline{FD}=x$,

$$\overline{FE}=\sqrt{x^2-\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{x^2-\frac{3}{4}R^2},$$
$$\overline{MD}=r,\quad \overline{DE}=\frac{R}{2}-r,$$

also wegen $\overline{FE}+\overline{DE}=\overline{FD}$

$$\sqrt{x^2-\frac{3}{4}R^2}+\frac{R}{2}-r=x,$$
$$\sqrt{x^2-\frac{3}{4}R^2}=x+r-\frac{R}{2}.$$

Durch Quadrieren erhält man hieraus

$$x^2-\frac{3}{4}R^2=x^2+2rx+r^2-Rx-rR+\frac{R^2}{4},$$
$$Rx-2rx=R^2+r^2-rR,$$
$$x(R-2r)=R^2+r^2-rR.$$

Wegen $\frac{R}{2}>r$ gilt $R-2r>0$.

Daher kann man durch $R-2r$ dividieren und erhält den Radius der drei Kreisbogen

$$x=\frac{R^2+r^2-rR}{R-2r}.$$

W 10/12 ■ 1316 Wir versuchen zunächst, das Polynom

$$f(x)=x^{11}-4x^9+x^8-4x^6-x^5+4x^3-x^2+4 \qquad (1)$$

in Faktoren zu zerlegen. Das ist möglich; denn wir können jeweils zwei aufeinander folgende Summanden zusammenfassen und erhalten

$$f(x)=(x^{11}-4x^9)+(x^8-4x^6)-(x^5-4x^3)$$
$$-(x^2-4).$$

Nun können wir x^9, x^6 bzw. x^3 ausklammern und erhalten weiter

$$f(x)=x^9(x^2-4)+x^6(x^2-4)-x^3(x^2-4)$$
$$-(x^2-4),$$
$$f(x)=(x^2-4)\left[x^9+x^6-x^3-1\right],$$
$$f(x)=(x^2-4)\left[x^6(x^3+1)-(x^3+1)\right],$$
$$f(x)=(x^2-4)(x^3+1)(x^6-1),$$
$$f(x)=(x+2)(x-2)(x^3+1)^2(x^3-1). \qquad (2)$$

Daher hat die Gleichung $f(x)=0$ die folgenden reellen Lösungen:

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2, \qquad (3)$$

weil in diesen Fällen jeweils einer der Faktoren in (2) gleich Null ist. Nun gilt

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \text{ und}$$
$$x^2-x+1=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0;\ \text{daher ist}$$
$$x^3+1=0 \text{ nur für } x=-1. \text{ Ferner}$$

gilt

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \text{ und}$$
$$x^2+x+1=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0;\ \text{daher ist}$$
$$x^3-1=0 \text{ nur für } x=1.$$

Daher hat die Gleichung $f(x)=0$ und damit auch die gegebene Gleichung außer den in (3) angegebenen Lösungen
$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2$
keine weiteren reellen Lösungen.

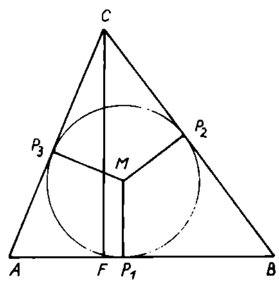
W 10/12 ■ 1317 1. Wegen $s=\frac{15+13+14}{2}$ cm $=21$ cm ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich
$A=\sqrt{21\cdot 6\cdot 8\cdot 7}\ \text{cm}^2=3\cdot 4\cdot 7\ \text{cm}^2=84\ \text{cm}^2$.

2. Wegen $\frac{c\cdot h_c}{2}=A$ gilt $h_c=\frac{84\cdot 2}{14}$ cm $=12$ cm.

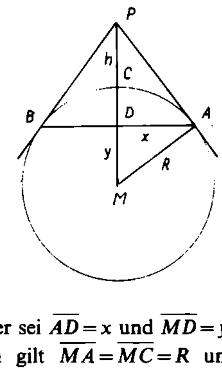
3. Aus $\overline{AF}=\sqrt{b^2-h_c^2}$ (vgl. die Abb.) folgt
$\overline{AF}=\sqrt{13^2-12^2}$ cm $=5$ cm,
$\overline{FB}=c-\overline{AF}=9$ cm.

4. Aus $\varrho\cdot s=A$ folgt $\varrho=\frac{A}{s}=\frac{84}{21}$ cm $=4$ cm.

5. Es gilt
$\overline{AP_1}=\overline{AP_3}=s-a=6$ cm,
$\overline{BP_1}=\overline{BP_2}=s-b=8$ cm,
$\overline{CP_2}=\overline{CP_3}=s-c=7$ cm.



W 10/12*1318 a) Es seien
$R=6\,370\ km$ der Radius der Erdkugel und daher auch der Radius des Schnittkreises mit dem Mittelpunkt M,
$h=270\ km$ der Abstand des Punktes P der Umlaufbahn von der Erdoberfläche und daher auch von dem Punkt C des Schnittkreises,
A *und* B die Berührungspunkte der von P an den Schnittkreis gelegten Tangenten,
D der Fußpunkt des von A auf MP gefällten Lotes (vgl. die Abb.).



Ferner sei $\overline{AD}=x$ und $\overline{MD}=y$.
Dann gilt $\overline{MA}=\overline{MC}=R$ und $\overline{MP}=R+h$, und das Dreieck PMA ist rechtwinklig, weil der Radius $\overline{MA}$ auf der Tangente PA senkrecht steht. Daher gilt nach dem Kathetensatz
$$R^2=y(R+h),$$
$$y=\frac{R^2}{R+h}.$$ Ferner gilt
$$x^2=R^2-y^2=R^2-\frac{R^4}{(R+h)^2}$$
$$=\frac{R^2(R^2+2hR+h^2-R^2)}{(R+h)^2},$$
$$x^2=\frac{R^2h(2R+h)}{(R+h)^2},$$
$$x=\frac{R}{R+h}\sqrt{2R+h}.$$
Setzt man die Werte $R=6370$ km und $h=270$ km ein, so erhält man
$$x=\frac{6370}{6640}\sqrt{270\cdot 13010\ \text{km}}=1798\ \text{km}$$
$$\approx 1800\ \text{km}.$$
Die Höhe der Kugelzone beträgt also rund 3600 km, da $\overline{AB}=2x$.
b) Der Oberflächeninhalt der Kugelzone ist gleich $A_1=2\pi Rz=4\pi Rx$.
Der Oberflächeninhalt der Erdkugel beträgt
$$A_0=4\pi R^2.$$
Daraus folgt
$$\frac{A_1}{A_0}=\frac{4\pi Rx}{4\pi R^2}=\frac{x}{R}\approx\frac{1800}{6370}\approx 0{,}283.$$
Man kann also bei einem vollen Umlauf rund 28 % der Erdoberfläche von der Station Salut 3 aus überblicken.

W 10/12*1319 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung
$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x \qquad (1)$$
Dann gilt $x\geq 0$, da die Wurzel aus einer reellen Zahl niemals negativ ist. Ferner gilt

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 2

Rechnen mit gebrochenen Zahlen
Действия над дробя́ми
Operating with fractions
Calcul des fractions

$$\frac{ar}{br}=\frac{a}{b}$$
ar durch *br* gleich *ab*-tel.[1]
ar over *br* equals *a* over *b*.[1]
ar sur *br* égale *a* sur *b*.[1]

[1] Man kürze den gegebenen Bruch durch *r*
[1] Сократи́ть да́нную дробь на *r*
[1] Cancel *r* out of the given fraction
[1] Simplifiez la fraction donnée par *r*.

Regel: Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler dividiert.

Дробь сокраща́ется путём деле́ния числи́теля и знамена́теля на их наибо́льший о́бщий дели́тель.

To reduce a fraction to its lowest terms, divide the numerator and the denominator by their highest common factor (or: measure or: divisor).

Pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun.

$$\frac{a}{b}=\frac{ar}{br}$$
ab-tel gleich *ar* durch *br*.
a делённое на *b* равно́ *ar* делённое на *br*.
a over *b* equals *ar* over *br*.
a sur *b* égale *ar* sur *br*.

Regel: Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

Дробь превраща́ется путём умноже́ния числи́теля и знамена́теля на одно́ и то же число́.

To reduce a fraction to higher terms, multiply the numerator and the denominator by the same number.

Pour amplifier une fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$
ab-tel plus oder minus *cd*-tel ist gleich dem Quotienten aus *ad* plus oder minus *bc* und *bd*.
Дробь *a* на *b* плюс или минус дробь *c* на *d* равно́ дроби *ad* плюс или минус *bc* делённое на *bd*.
a over *b*, this fraction followed by plus or minus *c* over *d* equals *ad* plus or minus *bc*, this sum or difference over *bd*.
a sur *b*, cette fraction plus ou moins *c* sur *d*, égale *ad* plus ou moins *bc*, cette somme ou différence sur *bd*.

Regel: Man bildet die Summe (bzw. Differenz) zweier ungleichnamiger Brüche, indem man sie gleichnamig macht – die Brüche haben dann den Hauptnenner – und die Zähler zusammenfaßt.

Что́бы найти́ су́мму (или ра́зность) двух дробе́й на́до привести́ их к о́бщему знамена́телю, произвести́ сложе́ние (или вычита́ние) числи́телей и подписа́ть о́бщий знамена́тель.

To find the sum (the difference resp.) of two unlike fractions, change them to like fractions (fractions having their least common denominator) and combine the numerators.

Pour faire la somme (respectivement la différence) de deux fractions n'ayant pas le même dénominateur, on fait d'abord la réduction au même dénominateur – en ce cas les fractions ont le dénominateur commun – et ensuite on réunit les numérateurs.

(Oder auch: Pour additionner ou soustraire deux fractions n'ayant pas ...)

$$(\sqrt{a-\sqrt{a+x}})^2=x^2,$$

also $$a-\sqrt{a+x}=x^2, \qquad (2)$$
$$a-x^2=\sqrt{a+x}, \qquad (3)$$
$$(a-x^2)^2=a+x,$$
$$(a-x^2)^2-a-x=0. \qquad (4)$$

Diese Gleichung 4. Grades können wir lösen, indem wir die linke Seite in Faktoren zerlegen. Wir erhalten nämlich

$$(a-x^2)^2-(a-x^2)+\frac{1}{4}-x^2-x-\frac{1}{4}=0,$$
$$\left(a-x^2-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0;$$

hieraus folgt nach der sogenannten 3. Binomischen Formel

$$\left(a-x^2-\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}\right)\left(a-x^2-\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$(a-x^2-x-1)(a-x^2+x)=0. \qquad (5)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

1. $a-x^2-x-1=0$ oder (6)
2. $a-x^2+x \quad =0.$ (7)

1. In diesem Fall gilt

$x^2+x+1-a=0$, also

$$x_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-1+a}=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}. \qquad (8)$$

Wegen $x \geqq 0$ erfüllt die zweite Lösung dieser quadratischen Gleichung nicht die Gleichung (1).

Wegen (1) gilt nun $a-\sqrt{a+x} \geqq 0$, also $\sqrt{a+x} \leqq a$, wegen $x \geqq 0$ also $\sqrt{a} \leqq a$, d. h. $a \geqq 1$. Die Gleichung (1) kann daher nur für $a \geqq 1$ eine reelle Lösung haben.

Es sei jetzt $a \geqq 1$; dann ist x_1 eine reelle Zahl, und für x_1 sind die Gleichungen (8), (6), (5) und (4) erfüllt. Ferner gilt

$$a-x_1^2=a-\left(\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}>0.$$

Lösungen zu alpha-heiter

Wir wägen

$P_0=1$ g, $P_1=3$ g, $P_2=9$ g, $P_3=27$ g, $P_4=81$ g, $P_5=243$ g, $P_6=729$ g.

Die Primzahl

$P=1$; $R=2$; $I=3$; $M=4$; $Z=5$; $A=6$; $H=7$; $L=9$.

Kryptarithmetik

Da $0<d$, $b<3$, muß $b=1$ und $d=2$ sein (letzte Zeile, $db+dcb=dfd$). Aus der ersten Zeile geht nun hervor, daß $a=3$ (1 und 2 schon vergeben, 3stellige Zahl mit Hunderter 2 + 2stellige Zahl kann im Höchstfall 398 ergeben (299 + 99)).

Damit muß $c=5$ sein (mittlere Spalte $2+3=5$). f muß dann 7 sein, denn $21+251=272$. e muß jetzt 8 ($315-238=77$) und g muß 9 sein ($77+195=272$).

$$\begin{array}{ccccc} 315 & - & 238 & = & 77 \\ : & & + & & + \\ 15 & \cdot & 13 & = & 195 \\ \hline 21 & + & 251 & = & 272 \end{array}$$

Silbenrätsel

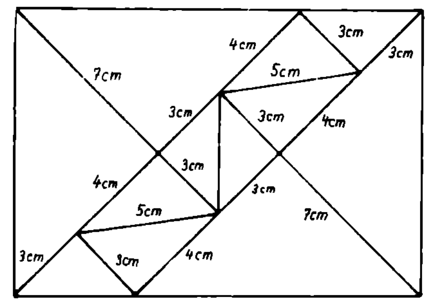
1. Durchmesser, 2. Element, 3. Archimedes, 4. Höhensatz, 5. Gleichung, 6. Binom, 7. Abszisse, 8. Sechzehn, 9. Höhe, 10. Aristoteles, 11. Dreieck, 12. Subtraktion, 13. Zweiundreißig, 14. Variable – Rechenschieber

Viermal die gleiche Ziffer

$$89=88+\frac{8}{8}$$

Legespiel

Eine mögliche Lösung stellt die folgende Figur dar:



Mathematische Begriffe gesucht

1. Bruchteil, 2. Halbierende, 3. Addieren, 4. Siebeneck, 5. Kreissehne, 6. Aufrißtafel, 7. Rechenstab, 8. Achsenkreuz – BHASKARA

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

ab-tel mal *cd*-tel gleich *ac* durch *bd*.

Дробь *a* на *b* умно́женная на дробь *c* на *d* равно́ дро́би *ac* на *bd*.

a over *b*, this fraction multiplied by *c* over *d* equals *ac* over *bd*.

a sur *b*, cette fraction multipliée par *c* sur *d*, égale *ac* sur *bd*.

Regel: Man bildet das Produkt zweier Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Что́бы найти́ произведе́ние двух дробе́й на́до умно́жить числи́тель на числи́тель и знамена́тель на знамена́тель.

To find the product of two fractions, multiply the numerators together and the denominators together.

Pour faire le produit de deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

(Oder auch: Pour multiplier une fraction par une fraction, on ...)

$$\frac{5}{6}:\frac{1}{2}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3} \qquad \frac{5}{6}:\frac{1}{2}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3} \qquad \frac{5}{6}:\frac{1}{2}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

Fünf Sechstel durch ein halb gleich fünf Drittel gleich ein zwei Drittel.

Пять шесты́х делённое на одну́ втору́ю равно́ пяти́ тре́тьим или равно́ одно́й це́лой и двум тре́тьим.

Five sixths divided by one (or: *a*) half equals five thirds equals one and two thirds.

Cinq sixièmes divisés par un demi égalent cinq tiers égalent un et deux tiers.

Regel: Man bildet den Quotienten zweier Brüche, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

Что́бы найти́ ча́стное двух дробе́й на́до умно́жить дели́мое на обра́тное значе́ние дели́теля.

To find the quotient of two fractions, multiply the dividend by the inverted divisor.

Pour faire le quotient de deux fractions, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

(*Oder auch:* Pour diviser une fraction par une fraction, on ...)

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

ab-tel durch *cd*-tel gleich *ad* durch *bc*.

Дробь *a* на *b* делённая на дробь *c* на *d* равно́ дро́би *ad* на *bc*.

a over *b*, this fraction divided by *c* over *d* equals *ad* over *bc*.

a sur *b*, cette fraction divisée par *c* sur *d*, égale *ad* sur *bc*.

Regel: Man verwandelt einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl, indem man ihn in die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch aufspaltet:

$$\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}.$$

Непра́вильная дробь превраща́ется в сме́шанное число́ путём расщепле́ния его́ на су́мму це́лого числа́ и пра́вильной дро́би:

$$\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}.$$

To convert an improper fractions into a mixed number, break it up into the sum of an integer and a proper fraction:

$$\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}.$$

Pour transformer une expression fractionnaire en un nombre fractionnaire, on extrait les entiers de l'expression, ainsi on obtient un nombre entier suivi d'une fraction ordinaire:

$$\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}.$$

WEGGEFÄHRTE BUCH

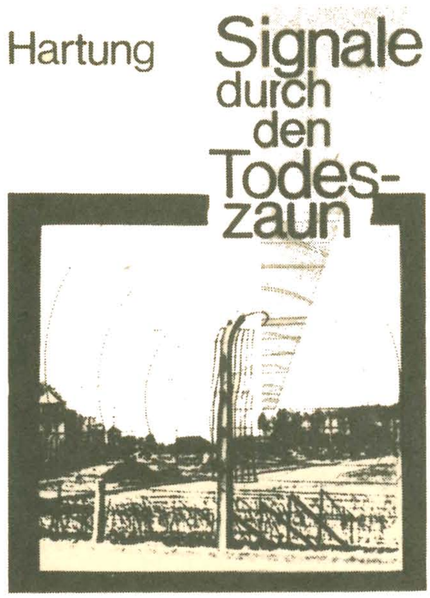
Entwicklung der Mathematik in der DDR

1974, etwa 750 Seiten, 25 Abb.,
16,7 cm × 24 cm,
Leinen etwa 75,– M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Dieser Sammelband wurde von einem Kollektiv von 60 Autoren gestaltet.

Insbesondere soll deutlich gemacht werden, welchen Platz die Arbeiten der Mathematiker der DDR einnehmen. Erarbeitet wurde dieses Werk von den auf ihren Gebieten führenden Wissenschaftlern, und außer den bei den einzelnen Beiträgen genannten haben zahlreiche andere Mathematiker am Entstehen des Festbandes mitgewirkt.

Ein ausführliches Vorwort vermittelt einen Eindruck von der hohen Wertschätzung, die die Wissenschaft und Forschung in der DDR erfahren, seit die ersten Schritte zur Förderung von Wissenschaft und Bildung in unserem von Faschismus und Krieg zerstörten Land getan wurden, und geht darüber hinaus kurz auf Gebiete ein, denen kein besonderer Beitrag gewidmet ist, wie z. B. die Schulmathematik und die mathematisch-historische Forschungsarbeit. Ein Artikel berichtet über die Aktivitäten der Mathematischen Gesellschaft der DDR.



Bau, Einsatz und Tarnung illegaler Rundfunkempfänger und -sender im Konzentrationslager Buchenwald

Ein Buch für unsere mathematisch/naturwissenschaftlich/technisch interessierten Leser

Seiten: 207, Abbildungen: 67
Einband: Leinen mit Schutzumschlag
Preis: 9,50 M
VEB Verlag Technik, Berlin

Inhalt: Brücken in die Freiheit – Selbstgebaute illegale Rundfunkempfänger – Das verwandelte Vorsatzgerät – Geheimnisse der Kellerwerkstatt – Der russisch sprechende Schuhfetteimer – Signale nach draußen – Selbstgebaute illegale Sender – Erste Sendeversuche – Unterm Dach der Kinohalle – Ein Entschluß wird gefaßt – Der Blitzableiter als Sendeantenne...
Dokumentation
Der Arm des Führers – Angepeilter Sendeempfang – ... wird mit dem Tode bestraft – Eine Stätte des Grauens, aber auch der Solidarität – Zeittafel – Das Audion-Vorsatzgerät als illegaler Kurzwellenempfänger – Die Elektrikerkommandos – Die NKFD, echte nationale Alternative – Der Akku-Empfänger – Der Eimer-Empfänger – Mit Gesetzeskraft gegen „Schwarzsender" – Schwierigkeiten und Gefahren – Der Meßgenerator als erster illegaler Kurzwellensender – Das Prinzipschaltbild gibt Auskunft – Wertetafel der wichtigsten Bauteile – Deckname Dora – Konstruktive Details – Sendeversuche

Leseprobe

Zehn Ampere...
Sie werkten ohne Verschnauf, nur hin und wieder fiel ein Wort, ein leiser Zuruf. Enger als eng war es in der kleinen Kabine. Manchmal stießen sie mit den Schultern zusammen, mit den Köpfen. Hinzu kam, daß sich der drei eine fieberhafte Spannung bemächtigte.
Zehn Ampere ...
Um die Sendeanlage betriebsbereit zu machen, mußte ein Stück der Asbestverkleidung der Kabinenwand entfernt, der Gegentaktendverstärker aus seinem Versteck genommen, aufgebaut und angeschlossen werden. Im Verstärkerblock der Kinoapparatur, in dem die Steuerstufe untergebracht war, mußte die Netzstromversorgung angelegt und überprüft werden. Für die Röhrenheizung waren die Akkumulatoren bereitzustellen und zu schalten. Der Umformer mußte betriebsklar gemacht werden.
Zehn Ampere...
Neunuhrdreißig, eine halbe Stunde vor der Zeit, konnte Gwidon Damazyn den Sender bei Leerlauf einschalten, um ihn dann bei Dauertontastung nach Maximum der Leistungswerte induktiv an den Antenneneingang anzukoppeln.
Fertig, alles klar!
Einer von Gwidons Gefährten bekreuzigte sich.
Damazyn riß an dem Seil, das mit den Klappen des Lüftungsschachtes verbunden war: Luft, Luft! Die sendebereiten Geräte strahlten Wärme aus, es war eine infernalische Hitze in der engen Kabine. Die Männer, zu denen als vierter noch der sowjetische Armeefunker gekommen war, lehnten an der Kabinenwand oder hockten auf den Klappbrettern, die zu anderer Zeit den beiden Filmvorführern als provisorische Sitze dienten.
Die Männer atmeten schwer, der eine glaubte das Herz des anderen wummern zu hören. Die kleine Lampe über ihren Köpfen verzerrt die angespannten Mienen ihrer aschfahlen, ausgezehrten Gesichter, in denen die Backenknochen scharf hervortraten. Dunkel und unheimlich gähnte unter ihnen die Leere des Kinosaales. Die Stille vervielfachte jedes Geräusch in der engen Kabine und machte das harmlose Brummen der Sendeanlage zum Dröhnen.
Endlich: Leise schürfende Schritte auf der Stiege, die steil aufwärts führte.
Otto Roths Atem rasselte, keuchend schob sich der Hüne in die Himmelfahrtsgondel. Sein Gesicht war ernst, widernatürlich ernst. „Das Lager ...", keuchte er, „soll alles evakuiert werden. Heute noch. Befehl des Kommandanten."
„Njet. Machen wir eigene Befehle", flüsterte Leonow, der Armeefunker. „Sprechen wird Stimme von Buchenwald, charascho?"
„Fangen wir an!" sagte Otto Roth.
Damazyns Hände wirbelten hoch, hastig, fahrig, erregt. Vielleicht ein wenig zu erregt. Mit gekonnten Griffen schalteten sie das Gerät, dann legte sich die Rechte auf die Taste. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger umgriffen den Tasterknopf, begannen ihn niederzudrücken in kurzen und langen Intervallen. Dadidaditt, Pause. Dadaditta.

Volksbildung in der DDR

Bilanz in Zahlen und Fakten

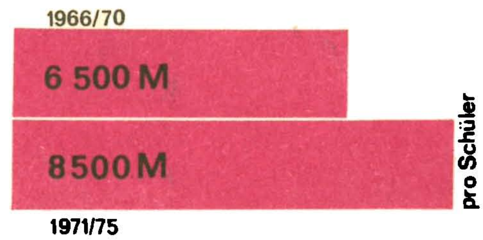
„Die Schule muß der jungen Generation in einem wissenschaftlichen und parteilichen Unterricht hohe Allgemeinbildung vermitteln und eine hohe Wirksamkeit der sozialistischen Erziehung erreichen. Sie soll die Jugend auf das Leben und die Arbeit in der sozialistischen Gesellschaft vorbereiten."

VIII. Parteitag der SED

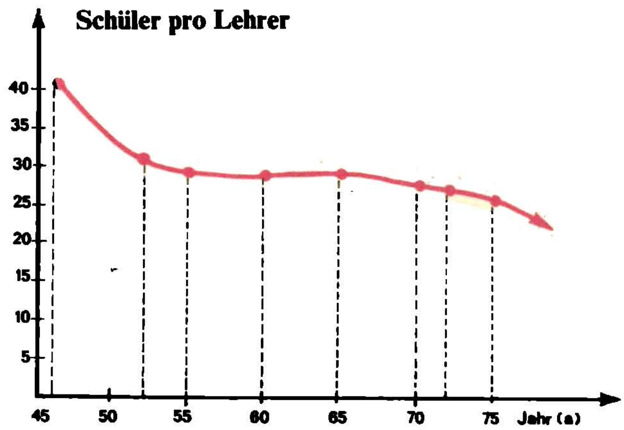
In der DDR hat jeder Bürger das Recht auf Bildung. Das sozialistische Bildungswesen ist eine der größten Errungenschaften unseres Staates und von großer Bedeutung für die Heranbildung allseitig entwickelter Persönlichkeiten.

Mit der Schulreform 1945 wurde der Grundstein für eine demokratische Entwicklung des Schulwesens gelegt. Es entstand ein organisch gegliedertes Schulsystem mit einer 8jährigen Grundschulpflicht. Besondere Aufmerksamkeit galt der Ausbildung von Lehrern und den Landschulen. 1945 gab es in den Dörfern 4 114 einklassige Schulen, 1949 waren es noch 668. Die letzte Einklassenschule wurde 1959 aufgelöst. Seit 1959 wird die 10jährige Schulpflicht an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen schrittweise verwirklicht. Das *Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem* aus dem Jahre 1965 leitete eine neue Periode ein. Es umfaßt alle Bildungsstufen vom Kindergarten über die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bis zur Hochschule und Erwachsenenqualifizierung. Das Ziel, bis 1975 etwa 90 Prozent der Schüler der allgemeinbildenden Schulen, die die 8. Klasse mit Erfolg beendet haben, in die 9. Klasse aufzunehmen, wurde bereits 1973 insgesamt erreicht.

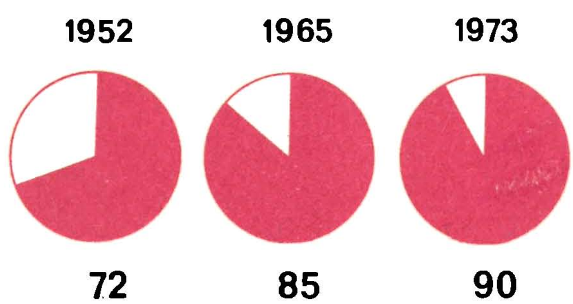
Pro-Kopf-Ausgaben für das Bildungswesen



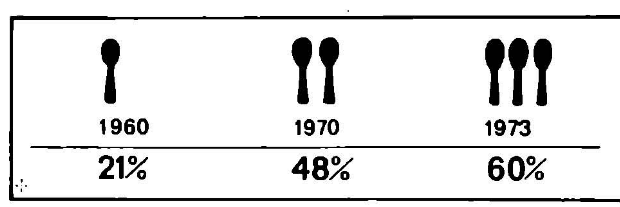
Schüler pro Lehrer



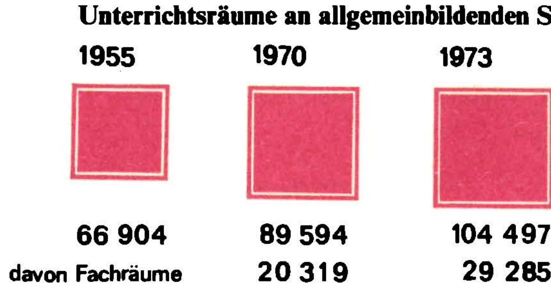
Anteil der Schüler, die in die 9. Klasse aufgenommen wurden (in Prozent)



Teilnehmer an der Schulspeisung

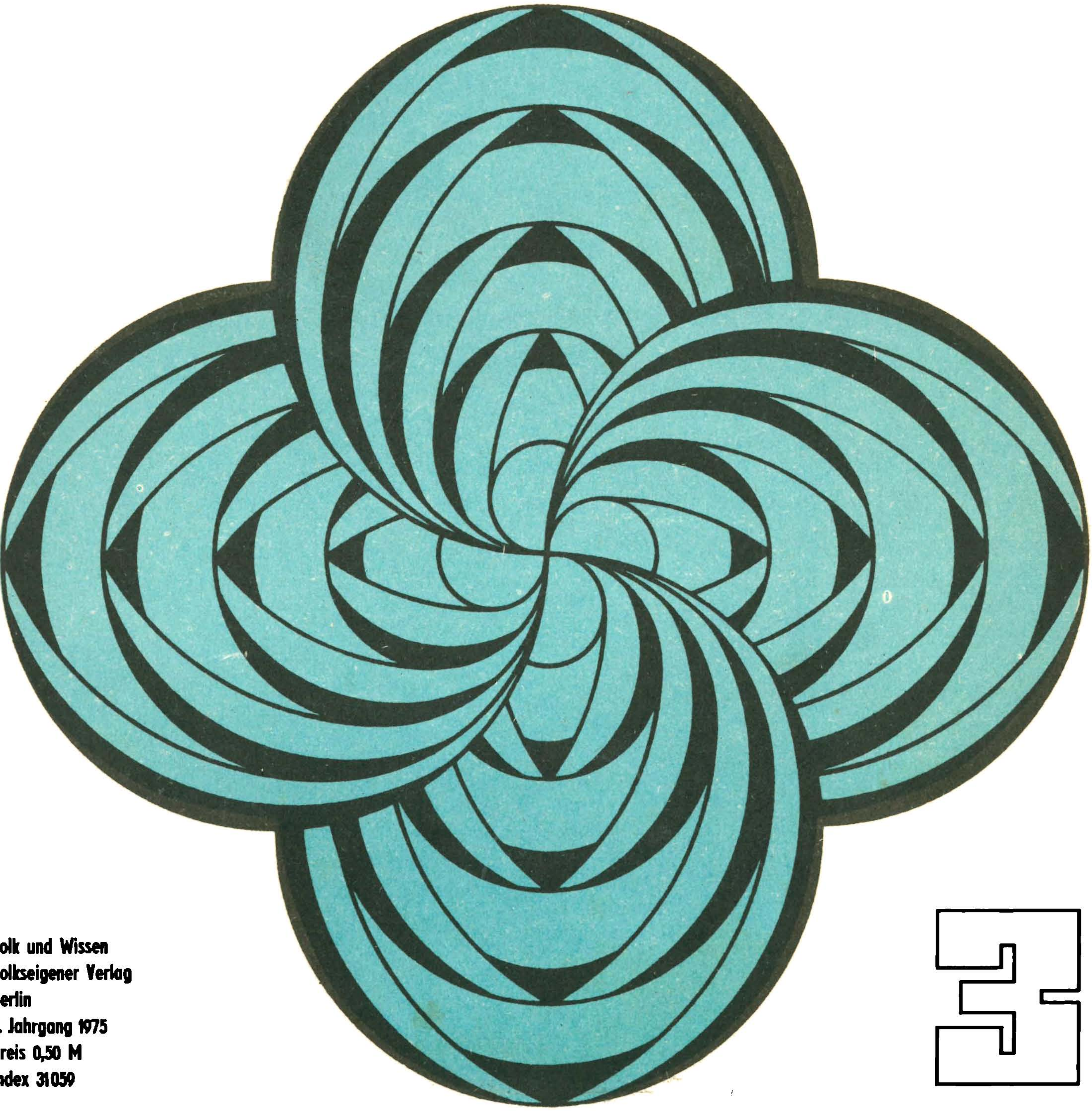


Unterrichtsräume an allgemeinbildenden Schulen



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 51); *Elemente der Mathematik*, Basel/Stuttgart (S. 52); J. Lehmann, Leipzig (S. 57); Zentralinstitut für Metallurgie, Leipzig (S. 60/61); PH Güstrow (S. 62); *Vignetten:* Heinz Jankofsky, Berlin (S. 54); Matthias Vorbeck, Berlin (S. 62); K.-H. Guckuck, Leipzig (S. 63/64); R. Schulz, Rotta (III. US); PH Dresden, Just (III. US); Tran hun Minh, Leipzig (III. US)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 8. März 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren

Die Wissenschaft entwickelt sich ständig weiter. Besonders der Schüler von heute, d. h., der Facharbeiter, Spezialist und Leiter von morgen, muß sich die Frage vorlegen, wie er den ständig steigenden Anforderungen gerecht werden und die anfallenden Aufgaben meistern kann. Aber so wie *Friedrich Engels* von der Renaissance sagte, „eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte", hat auch die Gegenwart die Hilfsmittel für die Lösung heutiger Probleme bereitgestellt.
Von einem dieser Hilfsmittel, der Systemtheorie und ihren mathematischen Methoden, soll im folgenden die Rede sein, wobei wir uns natürlich mit der Andeutung einiger elementarer Teilaspekte begnügen müssen.

1. Systeme

Zur Bewältigung vielschichtiger komplexer Probleme sind im Rahmen der *Systemtheorie* wissenschaftliche Methoden entwickelt worden, die sich in der Praxis bewährt haben. Ein *System* ist nichts anderes als ein geschlossenes Ganzes, das mit seiner Umwelt in Kontakt steht wie ein Radioapparat, eine Fabrik, eine Datenverarbeitungsanlage, ein Mondauto oder ein Sonnensystem.
Kontakt mit der Umwelt soll bedeuten, daß auf das System *Eingangssignale* wirken, die das System zu ganz bestimmten *Ausgangssignalen* veranlassen (Bild 1), wobei das Wort Signal in einem sehr allgemeinen Sinn verwendet wird. Beispielsweise handelt es sich beim Radio um elektromagnetische bzw. akustische Wellen, die die Rolle der Signale spielen, bei der Fabrik um Rohstoffe bzw. Waren, bei der Rechenmaschine um Ein- bzw. Ausgangsdaten, beim Sonnensystem um Gravitationskräfte bzw. Geschwindigkeitsänderungen des Massenmittelpunktes usw. Das klassische Beispiel für ein System ist ein Sender, der eine Nachricht überträgt.

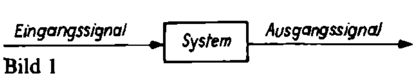


Bild 1

Die Erfolge der Systemtheorie beruhen darauf, daß man über das Verhalten eines Systems als Ganzes Aussagen machen kann, ohne *alle* Einzelheiten, aus denen das System sich zusammensetzt, genauer zu kennen. Jeder, der ein Radio- oder Fernsehgerät einschaltet, aber keine Ahnung von der Arbeitsweise dieser Systeme besitzt, nutzt jenen Sachverhalt unbewußt aus.
Das Geheimnis dieses Erfolges beim Aufbau immer umfassenderer und komplizierterer Systeme beruht darin, daß man letztere aus in ihrem Verhalten bekannten Systemen zusammensetzt, so wie ein Haus aus einzelnen Bauelementen entsteht. Dieses *Baukastenprinzip* ermöglicht es, den Überblick zu behalten bzw. zu gewinnen. Dabei beantwortet die Systemtheorie auch die Frage, *wie* gegebene Bauelemente prinzipiell zusammenzusetzen sind, um ein System mit vorgegebenen Eigenschaften zu erhalten. Bei mehreren denkbaren Möglichkeiten liefert sie darüber hinaus die günstigste Möglichkeit hinsichtlich der Erreichung zusätzlicher Eigenschaften wie niedrige Herstellungskosten, erhöhte Betriebssicherheit usw. Bei sich widersprechenden Anforderungen liefert sie einen geeigneten Kompromiß.
Es sei noch bemerkt, daß sich die Anwendung der Systemtheorie keineswegs auf die Technik und die Ökonomie beschränkt, sondern daß sie sich auch in der Biologie und der Medizin erfolgreich bewährt hat, indem man beispielsweise den Menschen als ein biologisches System auffaßt und sein Verhalten im gesunden und krankhaften Zustand untersucht, um Rückschlüsse der verschiedensten Art daraus zu ziehen.

2. Operatoren

Nach den einleitenden Bemerkungen über die Bedeutung und über einige Anwendungsmöglichkeiten der Systemtheorie soll jetzt versucht werden, einige einfache mathematische Grundlagen der Systemtheorie zu skizzieren. Zu diesem Zweck beschreiben wir das Eingangssignal durch eine Funktion $x=x(t)$ mit der Zeit t als unabhängige Veränderliche und das Ausgangssignal ebenfalls durch eine *Zeitfunktion* $f=f(t)$. Beim Beispiel des Radios stellen diese Funktionen die erwähnten Wellenschwingungen dar (Bild 2). Vier Beispiele für einfache Bauelemente sind den nächsten Bildern zu entnehmen (Bild 3 bis 6).

Bild 2

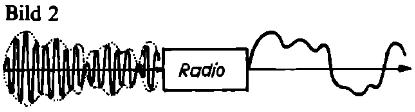


Bild 3

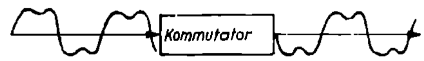


Bild 4

Bild 5

Bild 6

Zur Beschreibung der Arbeitsweise von Systemen benutzen wir sogenannte *Operatoren*, die im folgenden durch halbfette lateinische Buchstaben bezeichnet werden wie **A**, **B** usw. Der Kürze wegen sprechen wir von einem System **A**, wenn ein System mit dem Operator **A** gemeint ist. Bewirkt ein System **A** die Umwandlung eines Eingangssignals $x(t)$ in das Ausgangssignal $f(t)$, so schreiben wir

$$\mathbf{A}x(t)=f(t) \text{ oder kurz } \mathbf{A}x=f$$

und lesen: **A** angewandt auf $x(t)$ ergibt $f(t)$. Zwei Operatoren **A**, **B** heißen *gleich*, geschrieben $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, wenn $\mathbf{A}x(t)=\mathbf{B}x(t)$ für alle nur möglichen Eingangssignale gilt. Die Stellung der Operatoren in diesen Gleichungen erinnert bewußt an eine Multiplikation, und in der Technik wird der Operator eines Systems auch *Übertragungsfaktor* genannt. Mit den soeben eingeführten Bezeichnungen läßt sich Bild 1 durch die Kurzfassung des Bildes 7 ersetzen.

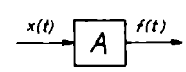


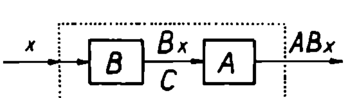
Bild 7

3. Produkte von Operatoren

Ein Beispiel für den einleitend erwähnten Aufbau neuer Systeme aus gegebenen Bauelementen erhalten wir, wenn wir das System **C** betrachten, das durch *Reihenschaltung* aus den Systemen **A** und **B** entsteht (Bild 8). Dabei hängt das Ergebnis im allgemeinen von der *Reihenfolge* der auftretenden Teilsysteme ab, und stillschweigend wird vorausgesetzt, daß das Ausgangssignal des Systems **B** ein mögliches Eingangssignal für das System **A** ist. Bei der Reihenschaltung können wir das Ausgangssignal $f(t)$ durch $f(t)=\mathbf{C}x(t)$ oder auch durch $f(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}x(t))$ ausdrücken, so daß wir die Gleichung

$$\mathbf{C}x(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}x(t)) \text{ erhalten.}$$

Bild 8

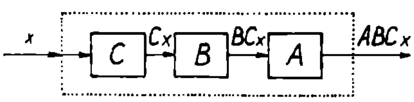


Die zusätzlichen Klammern legen dabei die Reihenfolge der Anwendung der einzelnen Operatoren fest. Es ist üblich, den Operator C der Reihenschaltung als *Produkt* der Operatoren A und **B** (in dieser Reihenfolge) zu bezeichnen und $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ zu schreiben,
d. h. $(\mathbf{AB})x(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}x(t))$.
Entsprechend ist ein Produkt von drei Operatoren (in bestimmter Reihenfolge) durch

$$(\mathbf{ABC})x(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}x(t)))$$

erklärt (Bild 9).

Bild 9



▲1▲ Dieses Produkt ist *assoziativ*, d. h., es gilt $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (Beweis!).
Bei gleichen Faktoren benutzt man auch die *Potenzschreibweise*
$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}=\mathbf{AA}^2=\mathbf{AAA}$ usw.

4. Summen von Operatoren

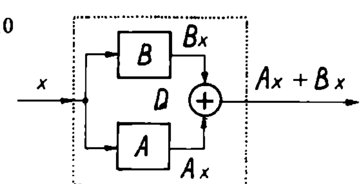
Eine weitere Möglichkeit für eine Verknüpfung gegebener Systeme bietet uns die *Parallelschaltung* (Bild 10). Hierbei wird zusätzlich ein sogenannter *Addierer* benutzt, d. h., ein System mit zwei Eingängen, das als Ausgangssignal die Summe der Eingangssignale liefert. Außerdem tritt auf der linken Seite des Schaltbildes ein *Verzweigungspunkt* auf, der angibt, daß das Eingangssignal $x(t)$ sowohl zum System **A** als auch (in Form eines Duplikats) zum System **B** geführt wird. Für den Übertragungsfaktor **D** des gesamten Systems gilt

$$\mathbf{D}x(t)=\mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}x(t).$$

Es ist üblich, **D** als *Summe* der Operatoren **A** und **B** zu bezeichnen und $\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ zu schreiben, d. h.,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})x(t)=\mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}x(t).$$

Bild 10

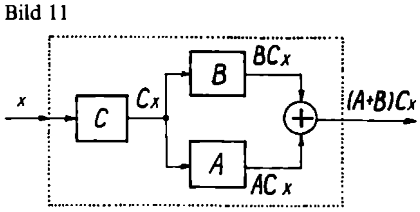


▲2▲ Die so definierte Addition von Operatoren ist *kommutativ*, d. h. für zwei Summanden gilt

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},$$

für drei Summanden ist sie auch assoziativ,
d. h., $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$,
und die Benutzung der Klammern ist hier überflüssig (warum?).
Da die in den Bildern 11 und 12 dargestellten Systeme offenbar *äquivalente* Systeme dar-

Bild 11



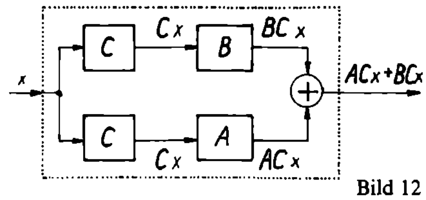


Bild 12

stellen, d. h. Systeme, die gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen beantworten, erkennen wir die Gültigkeit des *rechtsseitigen Distributivgesetzes*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}.$$

Nebenbei haben wir hierdurch ein Beispiel für *unterschiedliche Realisierungsmöglichkeiten* eines Systems mit bestimmten Übertragungseigenschaften durch unterschiedliche innere Anordnung kennengelernt. Da man bei der ersten Variante mit einem Bauelement weniger auskommt, ist sie in ihrer Herstellung billiger und somit in der Praxis zu bevorzugen.

5. Lineare Operatoren

Triviale Beispiele für Operatoren sind die bereits durch Bild 3 eingeführten *Verstärker*, d. h., Operatoren A mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A}x(t)=ax(t),$$

wobei a eine feste (von A abhängende) Zahl und die Multiplikation auf der rechten Seite der Gleichung die gewöhnliche Multiplikation ist. Für Verstärker sind alle Gleichungen der vorhergehenden Abschnitte leicht nachprüfbar (Probe!). Eine Verstärkung im eigentlichen Sinne des Wortes liegt natürlich nur im Fall $a>1$, vor, im Fall $a=1$ läßt das System das Eingangssignal *unverändert*, im Fall $0<a<1$ liegt eine *Abschwächung* vor und im Fall $a=0$ eine *Annullierung*, d. h., das System reagiert auf kein Eingangssignal und sendet stets das Ausgangssignal $f(t)\equiv 0$. Im Fall $a=-1$ ist das System ein *Kommutator* (Bild 4), d. h., das Ausgangssignal ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Eingangssignal, und die noch verbleibenden Fälle $a<-1$ und $-1<a<0$ lassen sich wegen $a=(-1)|a|$ auf die vorhergehenden durch Reihenschaltung zurückführen. Sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir im folgenden bei einem Verstärker den Operator A einfach durch die zugehörige *Zahl a* ersetzen.
Für beliebige Zahlen a, a_1, a_2 und beliebige Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ gilt nach bekannten Klammerregeln
$a(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))=a_1ax_1(t)+a_2ax_2(t)$.
Operatoren A mit der analogen Eigenschaft
$\mathbf{A}(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))=a_1\mathbf{A}x(t)+a_2\mathbf{A}x_2(t)$
heißen *lineare Operatoren* und die zugehörigen Systeme *lineare Systeme*. Speziell sind also Verstärker lineare Systeme. Die Linearität eines Systems bedeutet nichts anderes als die Gültigkeit des aus der Physik (Klasse 10) bekannten *Überlagerungsprinzips*, daß sich nämlich zwei unabhängige Ursachen (unter bestimmten Bedingungen) nicht gegenseitig beeinflussen, sondern in ihren Wirkungen additiv überlagern.
Ein linearer Operator läßt sich auch noch anders charakterisieren. Ein Operator heißt additiv, wenn er für beliebige Eingangsfunktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ die Eigenschaft

$$\mathbf{A}(x_1(t)+x_2(t))=\mathbf{A}x_1(t)+\mathbf{A}x_2(t)$$

besitzt, und er heißt *homogen*, wenn er für beliebige Zahlen a und beliebige Eingangsfunktionen $x(t)$ die Eigenschaft

$\mathbf{A}(ax(t))=a\mathbf{A}x(t)$ besitzt.

▲3▲ *Ein Operator, der sowohl additiv als auch homogen ist, ist zugleich auch linear und umgekehrt.* Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht nachprüfbar, und dem Leser sei ihr Beweis zur Einübung der Begriffe ausdrücklich empfohlen.
Aus der Definitionsgleichung für additive Operatoren folgt, wenn wir $x_1(t)=\mathbf{B}x(t)$, $x_2(t)=\mathbf{C}x(t)$ wählen, daß lineare Operatoren A auch das *linksseitige Distributivgesetz*

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

erfüllen. Aus der Definitionsgleichung für homogene Operatoren folgt für $a=-1$, daß diese stets *ungerade* Operatoren sind, d. h. die Eigenschaft

$$\mathbf{A}(-x(t))=-\mathbf{A}x(t)$$

besitzen. Es gibt auch *gerade* Operatoren, d. h., solche mit der Eigenschaft $\mathbf{A}(-x(t))$ $=\mathbf{A}x(t)$, wie beispielsweise der *Gleichrichter* (Bild 5)

$$\mathbf{A}x(t)=|x(t)|.$$

Gerade Operatoren können natürlich nicht linear sein. Ist **A** der Gleichrichter und **B** der Kommutator, so gilt $\mathbf{AB}x(t)=|x(t)|$ und $\mathbf{BA}x(t)=-|x(t)|$, so daß wir hiermit auch ein Beispiel für zwei Operatoren mit $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ kennengelernt haben, die also *nicht vertauschbar* sind.
▲4▲ Die Bedeutung linearer Systeme liegt darin, daß sie sich besonders leicht übersehen und handhaben lassen. Beispielsweise ergeben sich durch Reihen- und Parallelschaltung aus linearen Systemen stets wieder lineare Systeme oder, anders ausgedrückt, *Produkt und Summe linearer Operatoren ergeben stets wieder lineare Operatoren* (Beweis!).

6. Der Verschiebungsoperator

Um auch ein nichttriviales Beispiel für einen Operator kennenzulernen, betrachten wir den durch

$$\mathbf{V}x(t)=x(t-1)$$

definierten *Verschiebungsoperator*. Sein Name kommt daher, daß bei Anwendung dieses Operators jede Eingangsfunktion um eine Zeiteinheit nach „rechts" verschoben wird (Bild 13). Der Verschiebungsoperator beschreibt ein System, das auf Grund vorhandener Trägheit ein ankommendes Signal erst nach einer „Schrecksekunde" weiterleitet. Beispiele für die Anwendung des Verschiebungsoperators auf spezielle Eingangsfunktionen $x(t)$ sind $\mathbf{V}1=1$, $\mathbf{V}t=t-1$,

$V t^2 = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1,$
$V(2t^3) = 2(t-1)^3 = 2t^3 - 6t^2 + 6t - 2,$
$V(t^2 - 1) = V((t+1)(t-1)) = t(t-2) = t^2 - 2t,$
$V 2^t = 2^{t-1} = \frac{1}{2} 2^t.$

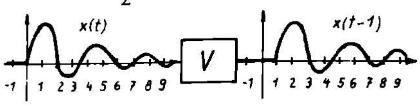


Bild 13

Wegen
$V(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) = a_1 x_1(t-1) + a_2 x_2(t-1)$
$= a_1 V x_1(t) + a_2 V x_2(t)$
für beliebige a_1, a_2 und $x_1(t)$, $x_2(t)$ ist der Verschiebungsoperator ein linearer Operator. Nach einer vorhergehenden Feststellung (welcher?) sind dann auch die durch mehrmalige Anwendung von V entstehenden *Potenzen*

$$V^2 x(t) = x(t-2),\quad V^3 x(t) = x(t-3)$$

und allgemein für beliebige natürliche Zahlen $n \geqq 2$

$$V^n x(t) = x(t-n)$$

lineare Operatoren, die die Weitergabe eines Eingangssignals um 2, 3 bzw. *n* Zeiteinheiten verzögern.

Durch Zusammensetzung von Verstärkern und Verschiebungsoperatoren kann man leicht weitere Beispiele für lineare Operatoren bilden, etwa $A = 1 - 2V$ mit

$$Ax(t) = x(t) - 2x(t-1).$$

Wählen wir $x(t) = t$, so erhalten wir hierbei $At = 2 - t$, und für $x(t) = 2^t$ folgt

$$A 2^t = 2^t - 2 \cdot 2^{t-1} = 0$$

für alle *t*. Dieses Beispiel zeigt, daß es Systeme gibt, die auf gewisse Eingangssignale nicht (mit einem von 0 verschiedenen Ausgangssignal) reagieren, obwohl der Operator nicht der annullierende Operator ist. Systeme mit dieser Eigenschaft heißen *singulär*.

7. Operatoren als verallgemeinerte Funktionen

Im Lehrbuch Mathematik der 8. Klasse wird eine Funktion als eine *eindeutige Abbildung x von einer Menge D auf eine Menge W* erklärt (Bild 14), allerdings mit der ausdrücklichen Einschränkung, daß es sich bei den Mengen *D* und *W* um *Zahlenmengen* handelt. Obwohl bei der Wiederholung des Funktionsbegriffs in Klasse 9 auf diese Einschränkung *verzichtet* wird, beziehen sich auch dort alle Beispiele nur auf solche

Bild 14

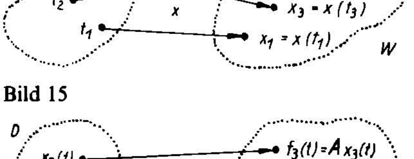
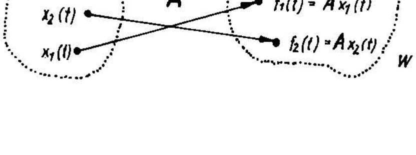


Bild 15



spezielle Funktionen. Echte Beispiele für den verallgemeinerten Funktionsbegriff sind die zuvor betrachteten Operatoren. Diese sind ja nichts anderes als *eindeutige Abbildungen, bei denen die Elemente des Definitionsbereiches D die Eingangssignale und die Elemente des Wertebereiches W die Ausgangssignale* sind (Bild 15).

Diese Elemente sind also hier keine Zahlen, sondern selbst Funktionen (im engeren Sinne als Abbildungen zwischen Zahlenmengen). Der einzige äußere Unterschied besteht darin, daß es bei den Funktionen im engeren Sinne üblich ist, die Argumente in Klammern zu setzen, während die Argumente bei den Operatoren ohne Klammern direkt hinter das Symbol für den Operator gesetzt werden, sofern die Benutzung der Klammern nicht dadurch erforderlich wird, daß das Argument sich aus mehreren Teilen zusammensetzt.

Die Beispiele für Operatoren, die wir hier behandelt haben, waren im Grunde genommen alle sehr einfach. In den Anwendungen treten natürlich wesentlich kompliziertere Operatoren auf. Wegen des elementaren Charakters dieses Beitrages können wir darauf aber nicht weiter eingehen.

Aufgaben

▲5▲ Man weise nach, daß die Systeme der Bilder 16 und 17, bei denen die dreieckigen Bauelemente Verstärker bedeuten, äquivalent sind, d. h., den gleichen Übertragungsfaktor besitzen.

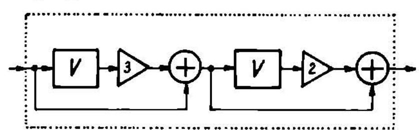


Bild 16

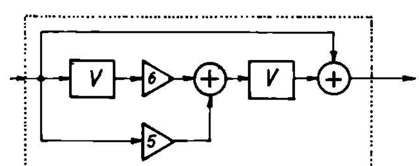
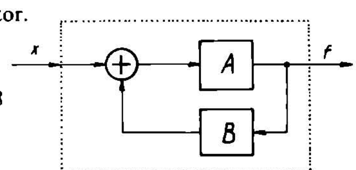


Bild 17

▲6▲ Man stelle bei dem System des Bildes 18, das eine Rückkopplung enthält, die Gleichung auf, die zwischen Ein- und Ausgangssignal besteht. A sei ein linearer Operator.

Bild 18



▲7▲ Man berechne für den Operator $A = 1 + a_1 V + a_2 V^2$ das Ausgangssignal $f(t)$ für das Eingangssignal $x(t) = t$ und überprüfe, unter welchen Bedingungen für die auftretenden Parameter $f(t) \equiv 0$ wird.

▲8▲ Man löse Aufgabe 7 im Fall $x(t) = z^t$, wobei *z* eine von Null verschiedene (unbekannte) Zahl sei.

L. Berg

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat.
Hans-Joachim Roßberg

▲1382▲ Auf welcher Kurve $\mathfrak{C}$ liegen die Schnittpunkte der folgenden Geradenpaare $(0 < \varphi < 2\pi,\ \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi)$?

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = 1 \cos\varphi \sin\varphi \qquad (1)$$
$$x \cos^3\varphi = y \sin^3\varphi \qquad (2)$$

Verschaffe dir eine Vorstellung vom Verlauf dieser Kurve durch Wertetabelle und durch Überlegung!

Man kann folgende Eigenschaften elementar erschließen:

a) Es gibt vier Symmetrieachsen.

b) $\mathfrak{C}$ liegt im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$ um 0 mit Radius 1.

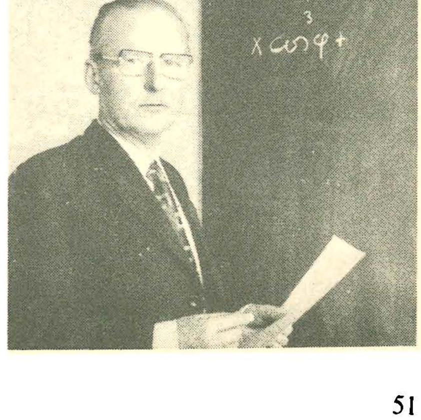
c) Die Kurvenpunkte mit minimalem Abstand von 0 liegen auf den Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes.

d) In jedem Quadranten ist $\mathfrak{C}$ streng monoton.

e) Wer mit der Differentialrechnung vertraut ist, kann zeigen: Die Ableitung ist in jedem Quadranten monoton. Was folgt aus den Grenzwerten dieser Ableitung?

Kurzbiographie: Prof. Dr. rer. nat. habil. H.-J. Roßberg wurde 1927 in Döbeln als Sohn eines Mathematiklehrers geboren. Er besuchte von 1932 bis 1935 die Volksschule. Im Jahre 1946 schloß er seine Schulzeit mit dem Abitur ab, studierte fünf Jahre an der Karl-Marx-Universität Mathematik.

Nachdem er als Assistent und Oberassistent am *Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften* (1956 bis 1969, Berlin) tätig war, wurde er als ordentlicher Professor für mathematische Methoden der Operationsforschung berufen.



Emmy Noether

(1882 bis 1935)

Leseprobe

Emmy Noether hat die Algebra des 20. Jahrhunderts durchgreifend neugestaltet. Diese Leistung reiht sie ein unter die bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts überhaupt. Allen, die noch das Glück persönlicher Begegnung mit ihr hatten, ist sie in unvergeßlicher Erinnerung als Mensch voller Herzensgüte, Selbstlosigkeit, Lebensfreude und ursprünglicher Vitalität. Als sie mitten aus voller mathematischer Produktivität heraus am 14. April 1935 ganz unerwartet an den Folgen einer Tumor-Operation verstarb, herrschte unter ihren zahlreichen Freunden, Schülern und Kollegen aus aller Welt tiefe Bestürzung und Trauer.

Emmy Noether wurde als erstes Kind von *Max Noether* und seiner Frau *Ida*, geb. *Kaufmann*, am 23. März 1882 in Erlangen geboren. Beide Elternteile stammten aus vermögenden Familien von Kaufleuten und Gelehrten jüdischen Glaubens.

Der Vater *Max Noether* war seit 1875 Professor der Mathematik in Erlangen und hatte mit einer Vielzahl hervorragender Arbeiten zur *Invariantentheorie* und zum Aufbau der *algebraischen Geometrie* als selbständiger mathematischer Disziplin beigetragen. Erlangen besaß – nicht zuletzt durch das Wirken von *Max Noether* u. a. – seit der Mitte des 19. Jahrhunderts – einen guten Ruf als Pflegestätte der Mathematik. In diesem, allerdings etwas kleinstädtisch gefärbten Milieu des Studienbetriebes wuchs *Emmy Noether* heran, zusammen mit drei jüngeren Brüdern.

Ein Mädchen aber war damals, im Deutschen Kaiserreich, nicht für die Wissenschaft bestimmt, schon gar nicht für Mathematik. So durchlief *Emmy*, ein kluges und freundliches Kind, von 1889 bis 1897 nur die Klassen der *Städtischen Höheren Töchterschule* in Erlangen und meisterte mühelos die fast ausschließlich sprachlich und hauswirtschaftlich orientierte Ausbildung. Lediglich in der Klavierausbildung kam *Emmy* nicht über die Anfangsgründe hinaus.

Sogar noch der nächste Schritt ihrer Ausbildung, eine im Jahre 1900 abgeschlossene Staatsprüfung als *Lehrerin der französischen und englischen Sprache*, deutet in nichts auf die spätere, schrittmachende mathematische Leistung hin.

Dann aber erwachte in *Emmy* der Wunsch zum Universitätsstudium, zunächst als Hospitantin in Erlangen. Sie mußte das Abitur nachholen; dies geschah 1903 in Nürnberg. Danach ließ sich *Emmy Noether* in Göttingen für das Wintersemester 1903/04 immatrikulieren, darauf in Erlangen im Oktober 1904.

Für ein junges Mädchen erforderte der Entschluß zum Studium damals, unter den Bedingungen weitverbreiteter Voreingenommenheit gegen das Frauenstudium, einigen persönlichen Mut: Unter den 986 um diese Zeit in Erlangen Studierenden gab es außer *Emmy* noch insgesamt ein einziges weiteres Mädchen; im Bereich der Sektion II der Philosophischen Fakultät (dem der Naturwissenschaften) blieb *Emmy* ständige alleinige Ausnahme. Noch kurz vor dem 1. Weltkrieg gab es in Deutschland Professoren, die, obwohl das Frauenstudium gesetzlich erlaubt war, sich weigerten, mit ihren Vorlesungen zu beginnen, solange eine Frau im Hörsaal anwesend war.

Unter dem Einfluß *P. Gordans* beschäftigte sich *Emmy Noether* zunächst mit Invariantentheorie und promovierte mit einer entsprechenden Dissertation „Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form" im Jahre 1907.

Im Jahre 1915 übersiedelte *Emmy Noether* nach Göttingen, an das damals unstreitig führende mathematische Zentrum Deutschlands und eines der mathematischen Hauptzentren der Erde. Hier forschten und lehrten *Felix Klein* und *David Hilbert*. Um diese Zeit, nach den Publikationen von *A. Einstein* zur Relativitätstheorie, waren die Differentialinvarianten bevorzugter Forschungsgegenstand.

E. Noether beteiligte sich eifrig, ging *Hilbert* bei der Forschung zur Hand und führte *Hilberts* Seminar zur Invariantentheorie durch. Trotz einer ganzen Reihe von bedeutenden Arbeiten über Differentialinvarianten und trotz der Vorstöße von *Hilbert* und *Klein* scheiterte *Emmy Noether* beim ersten Versuch der Habilitation, und zwar an der Habilitationsordnung in Deutschland, die ausdrücklich nur Männer zur Habilitation zuließ. *Hilbert* soll, wie eine fast sicher verbürgte Anekdote berichtet, damit für die weibliche Kandidatin argumentiert haben, daß er nicht einsehe, wieso das Geschlecht ein Gegenargument darstelle. Schließlich, so fügte *Hilbert* hinzu, nach allem was er wisse, seien sie eine Universität und nicht eine Badeanstalt. Aber auch *Hilbert* drang nicht durch; die Habilitation *E. Noethers* konnte erst im Frühsommer 1919 erfolgen, als nach dem Zusammenbruch des Kaiserreiches die antiquierte Habilitationsordnung in diesem Punkte aufgehoben wurde.

Doch wirkten reaktionäre und antisemitische Auffassungen fort. Zwar erhielt *E. Noether* am 6. April 1922 die Berechtigung zur Führung der Dienstbezeichnung „außerordentlicher Professor" ausdrücklich ohne Besoldung und Änderung ihrer juristischen Stellung, endlich 1923 auf nochmalige Intervention einen *Lehrauftrag für Algebra* mit einem minimalen Einkommen; aber eine ordentliche Berufung an eine deutsche Universität hat *E. Noether* ebensowenig erhalten wie die Ernennung zum Mitglied einer deutschen Akademie. Mit dem Anfang der 20er Jahre begann *E. Noether* eine Reihe grundlegender Publikationen, die das Gesicht der Algebra grundsätzlich neu formen sollten.

Seit der Mitte der 20er Jahre fand *Emmy Noether* eine Reihe von hochbegabten Schülern aus aller Welt, die sich in Göttingen um sie scharten, darunter Schüler aus Frankreich, den USA, aus China, aus der Sowjetunion. Zu Anfang der 30er Jahre war ihr Ruf als einer der bedeutendsten Neugestalter der Mathematik im internationalen Maßstab unbestritten, auch wenn sich damals noch nicht alle ihrer Auffassung anzuschließen vermochten.

Die Göttinger Zeit wurde nur durch zwei kurze Gastprofessuren in Moskau (1928/29) und Frankfurt/Main (1930) unterbrochen. Über die Moskauer Zeit, die sie im Kreise ihres ehemaligen Göttinger Schülers *P. S. Alexandrow* und seiner Freunde verbrachte, hat sich *Emmy Noether* stets sehr lobend geäußert, trotz der damals noch schwierigen Lebensbedingungen nach Krieg und Konterrevolution. Im engsten Kontakt stand sie seitdem ferner mit *O. J. Schmidt*, dem bedeutenden Mathematiker, Polarforscher und Stammvater der sowjetischen algebraischen Schule, mit dem hochbegabten Algebraiker *N. G. Tschebotarjew* und *L. S. Pontrjagin* (geb. 1908). Die Göttinger Zeit war für *Emmy Noether* ausgefüllt mit Forschung und Vorlesungen, vor allem mit temperamentvollen Diskussionen über Mathematik im Kreise ihrer Schüler, die von ihr selbstironisch als „Trabanten", von anderen im liebevollen Scherz als „Noether-Knaben" bezeichnet wurden. Dies wenigstens, die relative Unabhängigkeit von Vorlesungstätigkeit und anderen Verpflichtungen, war die

Folge des Umstandes, daß sie keine Berufung erhalten hatte. Bei bescheidenem Lebensstil und großer Genügsamkeit lebte sie von ererbtem Vermögen.

Die Forderungen an ihre Schüler waren außergewöhnlich hoch; sie selbst war uneigennützig auf den Fortschritt ihrer Schüler bedacht. *Van der Waerden* sprach im Nachruf für alle ihre Schüler, wenn er so urteilt:

„Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler. Sie schrieb für uns alle immer die Einleitungen, in denen die Leitgedanken unserer Arbeit erklärt wurden, die wir selbst anfangs niemals in solcher Klarheit bewußt machen und aussprechen konnten. Sie war uns eine treue Freundin und gleichzeitig eine strenge, unbestechliche Richterin."

Ganz zweifellos machte diese Art ständiger, intensiver Diskussion mit ihren „Trabanten" eines der „Geheimnisse" der Fruchtbarkeit der *Noetherschen Schule* aus. Durch ihre Schüler wurde die moderne Auffassung an fast alle deutschen Universitäten verpflanzt; ausländische Studierende und Schüler *Emmy Noethers* trugen das strukturelle Denken in die Zentren mathematischer Forschung nach Frankreich, der Sowjetunion, Japan und den USA.

Kurz nach *Emmy Noethers* Tode urteilten zwei führende Mathematiker, *H. Hopf* und *P. S. Alexandrow,* über ihre Wirkung auf den Gang der Mathematik: „Die allgemeine mathematische Einsicht *Emmy Noethers* beschränkte sich nicht auf ihr spezielles Wirkungsgebiet, die Algebra, sondern übte einen lebhaften Einfluß auf jeden aus, der zu ihr in mathematische Berührung kam." Sie selbst sah vielleicht noch klarer ihre eigene Leistung. In einem Brief urteilt sie folgendermaßen: „Meine Methoden sind Arbeits- und Auffassungsmethoden und daher anonym überall eingedrungen."

Viele noch heute lebende führende Mathematiker rechnen es sich zur Ehre an, Schüler, „Trabanten" oder Diskussionspartner von *Emmy Noether* gewesen zu sein. Sie rühmten ihre Güte und ihre Gastfreundlichkeit, die sie trotz eines gelegentlichen Ungeschicks zu entwickeln pflegte. Berühmt, geradezu sprichwörtlich waren gewaltige Schüsseln von Pudding, bei dessen Verzehr höchste Mathematik in einer Mansardenwohnung getrieben wurde. Beliebt waren auch die ausgedehnten Spaziergänge, Baden und Schwimmen im Göttinger Stadtbad. *Emmy Noether* war eine vorzügliche, leidenschaftliche Schwimmerin und Taucherin.

Als Frau war *E. Noether* wenig attraktiv, ihre Stimme war rauh. Im Umgang war sie nie sentimental, eher burschikos. Und doch ging von ihr eine spezifische Art von Anziehungskraft, eine unwiderstehliche geistige Ausstrahlung aus.

Alles in allem verlief die Göttinger Zeit für *Emmy Noether* glücklich. Sie war erfolgreich in der Forschung, sie war fröhlich im Kreise ihrer Schüler und Freunde, sie erfreute sich zunehmender Anerkennung in aller Welt. Höchstens die Tatsache, daß ihre aufwendige Mitarbeit an den „Mathematischen Annalen" keine offizielle Anerkennung fand, kränkte sie ein wenig. Mit bewundernswerter Standhaftigkeit hatte sie die traurigen Pflichten erfüllt, die sich aus dem Tode der Mutter (1915), des einen Bruders *Alfred* (1918), des Vaters (1921) und des jüngsten Bruders (1928) ergaben. Sonst aber schien sich alles harmonisch zu entwickeln. Da brach die Nacht des Faschismus über Deutschland herein. Als ehemaligem Mitglied der Sozialdemokratischen Partei Deutschlands, als überzeugter Pazifistin, vor allem aber ihrer jüdischen Herkunft wegen entzog ihr das faschistische Deutschland die Lehrbefugnis. Die gleiche, verbrecherische Verfügung traf den Mathematiker *R. Courant* und den theoretischen Physiker und Nobelpreisträger *Max Born.* Andere, zum Beispiel *O. Neugebauer, F. Landau, O. Blumenthal, P. Bernays* wurden aufgefordert, ihre Vorlesungstätigkeit einzustellen. *H. Weyl* übernahm vorübergehend das Direktorat des Mathematischen Institutes, emigrierte aber auch bald.

Helmut Hasse unternahm einige, aber sinnlose Anstrengungen, von der durch den Eingriff der Nazis zerstörten weltberühmten Göttinger mathematisch-physikalischen Schule an Substanz zu retten, was sich noch retten ließ. Aber auch ein Gutachten über *Emmy Noether* konnte keine Abhilfe schaffen; das Lehrverbot für sie blieb bestehen. Inzwischen hatte *H. Weyl* für sie in den USA die Fühler ausgestreckt; Ende Oktober 1933 fuhr sie nach den USA und übernahm eine Gastprofessur an einer Frauenhochschule, am *Bryn Mawr College* (Pennsylvanien), in relativer Nähe zu Princeton (New Jersey), wo inzwischen auch *A. Einstein* und *H. Weyl* als Professoren aufgenommen worden waren und sich ihrerseits nach Kräften für andere vertriebene Kollegen aus Deutschland bemühten.

Gegenüber Göttingen, wo *Emmy Noether* sich im Kreise anspruchsvollster und hochbegabter Schüler in ihrem Element hatte bewegen können, bedeutete das College eine gewaltige Umstellung. Mit dem ihr eigenen frohgemuten Naturell hat *Emmy Noether* diese Veränderung gemeistert. Bald fand sie sogar echte Schülerinnen im College; im nahegelegenen Princeton bildete sich ein vielversprechender Ansatz einer neuen Noether-Schule.

Kein Brief, keine private Mitteilung, nichts deutete auf eine Erkrankung *Emmy Noethers* hin, nichts auf die Absicht, sich einer Operation zu unterziehen. Die Freunde traf die Nachricht vom plötzlichen Tode an den Folgen eines chirurgischen Eingriffs wie ein Blitz aus heiterem Himmel.

Eine kleine Gruppe von Freunden aus der alten Heimat und der neuen Wirkungsstätte nahm von ihr Abschied.

Sehr poetisch ist ein südamerikanischer Nachruf auf *Emmy Noether,* deren Leistung für die Entwicklung der modernen Algebra nicht hoch genug veranschlagt werden kann. Am Schluß heißt es: „Die Verehrung, die diese bewundernswerte Frau wegen ihres Verstandes erweckt, steht an Intensität der Hochachtung und Liebe ihrer Schüler nicht nach, die sie wegen ihrer Charaktereigenschaften für sie empfinden. Ein schönes Beispiel, das man jenen vorhalten soll, die mit mittelalterlichen Kriterien heute noch von der intellektuellen und psychologischen Inferiorität der Frau sprechen."

H. Wußing

1882 23. März, Emmy Noether in Erlangen geboren

1900 April, Prüfung als Lehrerin für französische und englische Sprache

1907 13. Dezember, Promotion zum Dr. phil. in Erlangen

1915 April, Übersiedlung nach Göttingen

1919 4. Juni, Habilitation in Göttingen

1922 6. April, Dienstbezeichnung *Außerordentlicher Professor*

1923 Sommer, Lehrauftrag für Algebra

1925 August, Abschluß des schrittmachenden Manuskriptes „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern"

1928/29 Gastprofessor in Moskau

1930 Gastprofessor in Frankfurt/Main

1932 Juni, Abschluß des Manuskriptes „Nichtkommutative Algebren"

1932 Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis

1932 7. September, Bedeutender Vortrag „Hyperkomplexe Größen und ihre Beziehung zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie" auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich

1933 April, Entzug der Lehrbefugnis durch die faschistischen Behörden

1933 Oktober, als Gastprofessor in den USA am Bryn Mawr College, Pennsylvanien

1934 Sommer, endgültige Übersiedlung nach den USA

1935 14. April, unerwarteter Tod Emmy Noethers nach einer Operation

„Notwendig und hinreichend“ ist hier zu beweisen

In alpha 5/1974 wurde ein Bericht über die XVI. Internationale Mathematikolympiade 1974 in Erfurt/Berlin gegeben. Darin fanden auch die sechs von den Teilnehmern zu lösenden Aufgaben einen Abdruck. Sicher hat dies viele alpha-Leser dazu angeregt, sich Gedanken über die Lösung einer oder mehrerer Aufgaben zu machen. Außerdem interessiert hierbei, welche Lösungsvarianten von den Teilnehmern der verschiedenen Länder geboten wurden. Im folgenden soll für Aufgabe 2 des ersten Arbeitstages einmal eine mögliche Lösung demonstriert und weitere Betrachtungen sollen daran angeknüpft werden.

Aufgabe: Es seien A, B, C die Ecken eines Dreiecks. Die Größen seiner Innenwinkel bei A, B bzw. C seien α, β bzw. γ.
Man zeige, daß es dann und nur dann auf der Strecke AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{CD}$ das geometrische Mittel von $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ ist, wenn

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta \leqq \sin^2\frac{\gamma}{2} \text{ gilt.}$$ [1]

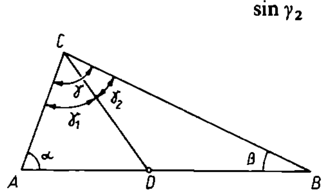
Lösung: Der Beweis ist in zwei Richtungen zu führen.
I. Im Dreieck $\triangle ABC$ ist auf der offenen Strecke AB ein Punkt D derart vorgegeben, daß die Gleichung

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD} \qquad (1)$$

gilt (Voraussetzung).
Mit den in Abbildung 1 eingeführten Bezeichnungen lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

a) aus Dreieck $\triangle ADC$ $\quad \overline{CD}=\overline{AD}\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}$ (2)

b) aus Dreieck $\triangle BCD$ $\quad \overline{CD}=\overline{BD}\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}$ (3)



Durch Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt sich nach Kürzen mit dem Faktor $k=\overline{AD}\cdot\overline{BD}\neq 0$.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}=1$$

oder $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin\gamma_1\cdot\sin\gamma_2$. Wegen

$$\sin\gamma_1\cdot\sin\gamma_2=\frac{1}{2}\left[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)\right]$$
$$\leqq\frac{1}{2}\left[1-\cos\gamma\right]=\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (5)$$

folgt aus (4) unter Berücksichtigung von (5)

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqq\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (6)$$

II. In dem vorgelegten Dreieck $\triangle ABC$ besteht die Beziehung

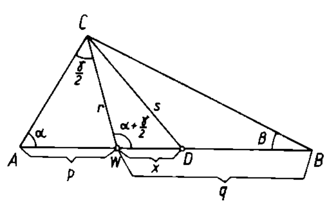
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqq\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (7)$$

Die Winkelhalbierende von γ schneidet die Seite AB in W.
Für die weitere Rechnung werde gesetzt:

$$\overline{AW}=p,\ \overline{BW}=q,\ \overline{CW}=r \qquad (8)$$

Aus Abbildung 2 lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$$\sin\alpha=\frac{r}{p}\sin\frac{\gamma}{2},\ \sin\beta=\frac{r}{q}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad (9)$$



Durch Einsetzen von (9) in (7) findet man die zu (7) äquivalente Relation

$$r^2\leqq p\cdot q \qquad (10)$$

In diesem Teil des Beweises ist zu untersuchen, ob bei Gültigkeit der Voraussetzung (10) auf der offenen Strecke AB ein Punkt D derart existiert, daß die Gleichung

$$\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}^2 \qquad (11)$$

erfüllt ist. Setzt man

$$\overline{WD}=x,\ \overline{CD}=s\cdot \qquad (12)$$

so lautet Gleichung (11)

$$s^2=(p+x)\cdot(q-x). \qquad (13)$$

Durch Anwendung des Cosinus-Satzes der ebenen Trigonometrie auf das Dreieck $\triangle CWD$ findet man

$$s^2=r^2+x^2-2rx\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)^{2)} \qquad (14)$$

Aus (13) und (14) resultiert für x die quadratische Gleichung

$$2x^2+Mx+N=0 \quad\text{mit} \qquad (15)$$
$$M=p-q-2r\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) \text{ und } N=r^2-pq.$$

Nun wird gezeigt, daß (15) eine reelle Lösung x_0 mit $x_0\geqq 0$ und $x_0<q$ besitzt. Dies gilt offenbar für

$$x_0=\frac{-M+\sqrt{M^2-8N}}{4}. \qquad (16)$$

Wegen $M^2\geqq 0$ und $r^2-pq\leqq 0$ entsprechend der Voraussetzung (10) ist gesichert, daß der Radikand $M^2-8N\geqq M^2\geqq 0$ ist.
Die Lösung (16) von (15) ist daher eine nichtnegative reelle Zahl.
Nun ist noch zu zeigen, daß $x_0<q$ gilt. Dies beweisen wir indirekt.
Man geht von der Annahme aus

$$x_0\geqq q \qquad (17)$$

und führt dies auf einen Widerspruch. Unter Verwendung von (16) folgt aus (17)

$$-M+\sqrt{M^2-8N}\geqq 4q$$

und $\quad \sqrt{M^2-8N}\geqq 4q+M \qquad (18)$

Durch Quadrieren beider Seiten von (18) ändert sich nichts an der Orientierung dieser Ordnungsrelation, also

$$M^2-8N\geqq 16q^2+8qM+M^2$$

oder $\quad 0\geqq 8\left[q^2+r^2-2qr\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\right]^{3)} \qquad (19)$

Die Anwendung des Cosinus-Satzes auf das Dreieck $\triangle BCW$ liefert weiter

$$0\geqq 8\,\overline{BC}^2. \qquad (20)$$

Ausgehend von (17) wurde der Widerspruch in (20) hergeleitet. Das Gleichheitszeichen in (20) ist durch Zulassung des Gleichheitszeichens in (17) bedingt. Folglich kann auch D nicht mit B zusammenfallen. Damit ist die Existenz eines Punktes D auf der links abgeschlossenen, rechts offenen Strecke WB und damit auf der offenen Strecke AB derart gesichert, daß die Forderung (11) unter der Voraussetzung (7) erfüllt ist. Wie aus (10) und (16) weiterhin abzulesen ist, fällt D genau dann mit W zusammen, wenn in (7) das Gleichheitszeichen gilt.

Beim Korrigieren der Arbeiten zeigte sich, daß sehr verschiedenartige Lösungsvarianten geboten wurden, von denen einige skizziert werden sollen. Zum Beispiel fand von mehreren Teilnehmern der Sekantensatz Anwendung. Hierzu wurde der Umkreis k zum Dreieck $\triangle ABC$ eingezeichnet und eine Parallele g zu $e=e(AB)$ durch C gelegt. Durch Spiegelung von g an e ergibt sich die Gerade h. Schneidet diese den Umkreis k in den Punkten C_1 und C_2, so gilt nach dem Sekantensatz

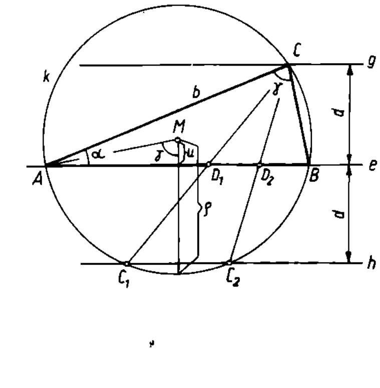
$$\overline{AD_i}\cdot\overline{D_iB}=\overline{CD_i}\cdot\overline{D_iC_i}, \quad (i=1{,}2)$$

wie dies aus Abbildung 3 abzulesen ist. Ferner folgt nach Konstruktion

$$\overline{CD_i}=\overline{D_iC_i}. \quad (i=1{,}2)$$

Daher besteht die Gleichung

$$\overline{AD_i}\cdot\overline{D_iB}=\overline{CD_i}^2.$$



Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Punktes D_i auf der offenen Strecke AB mit der geforderten Eigenschaft (1) ist also, daß die Gerade h den Kreis k reell schneidet oder in einem Punkt berührt. Eine analytische Fassung dieser Bedingung ist aus Abbildung 3 abzulesen.

Es gilt

$h_c = d = b \sin\alpha$ (Distanz der Parallelen)

$\varrho = \dfrac{c}{2\sin\gamma}$ (Umkreisradius)

$u = \dfrac{c}{2}\cot\gamma$ (Länge des Lotes von M auf e im Sinne einer orientierten Größe)

Notwendig und hinreichend für den Schnitt bzw. die Berührung von h und k ist das Bestehen der Relation

$$d \leqq \varrho - u$$

oder $b \sin\alpha \leqq \dfrac{c}{2\sin\gamma}(1-\cos\gamma)$.

Wegen $\frac{b}{c}\sin\gamma = \sin\beta$ und $(1-\cos\gamma) = 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ folgt die Ungleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \leqq \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Punktes D auf der offenen Strecke AB mit der geforderten Eigenschaft.

Verschiedentlich fanden auch Mittel der Analysis Verwendung. So wurde zunächst gezeigt, daß die Forderung

$$\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{CD}^2$$

äquivalent ist mit der Gleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)$$

mit $-\frac{\gamma}{2} < \varphi < \frac{\gamma}{2}$.

Dabei ist φ der von w_γ und (CD) eingeschlossene orientierte Winkel. Die Funktion $f(\varphi) = \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)$ hat die Eigenschaften $f\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = f\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0$, $f(\varphi) > 0$ für $-\frac{\gamma}{2} < \varphi < \frac{\gamma}{2}$ und $f'(0) = 0$.

Ferner wurde nachgewiesen, daß $f(\varphi)$ an der Stelle $\varphi = 0$ ein absolutes Maximum bezüglich des betrachteten Intervalls besitzt. Damit folgt weiter

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right),$$

womit die Beweiskette geschlossen ist.

Bemerkenswert waren auch einige von den Teilnehmern der französischen Delegation gebotenen Lösungen. Trotz der durch den Lehrplan bedingten Unkenntnis über trigonometrische Funktionen und Lehrsätze der ebenen Trigonometrie wurden vollständige Beweisführungen mittels Zerlegungen in rechtwinklige Dreiecke und Diskussionen von Diskriminanten quadratischer Gleichungen vorgelegt. Fallunterscheidungen und langwierige Rechnungen machten die Lösungswege vielfach sehr schwer überschaubar. Diese hier besprochene, von der finnischen Delegationsleitung vorgeschlagene Aufgabe war von der Jury mit 6 Punkten ausgezeichnet worden. Für den Nachweis der Richtigkeit einer Implikation wurden drei Punkte ausgegeben. Für den Nachweis der Äquivalenz beider Aussagen gab es die volle Punktzahl. Lösungsansätze wurden anteilmäßig bewertet. Für die 140 Teilnehmer ergab sich der folgende Punktespiegel:

Punkte	Teilnehmer gesamt	Teilnehmer DDR
0	25	0
1	14	1
2	5	0
3	4	1
4	20	0
5	8	1
6	64	5

Eberhard Schröder

[1]) bezüglich der Bezeichnungen von Strecken, Längen von Strecken und Winkeln wurde die in den Aufgabenstellungen angewandte Bezeichnungsweise übernommen.

[2]) x wird hier im Sinne einer orientierten Größe eingeführt.

[3]) Das beiderseitige Quadrieren der Ungleichung (18) ist erlaubt wegen

$$4q + M = 3q + p - 2r\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{q}\left[3q^2 + pq - 2rq\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right]$$
$$> \frac{1}{q}\left[q^2 + r^2 - 2qr\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right] > 0.$$

Kombinatorische Probleme beim Aufstellen einer Fußballmannschaft

Der Trainer einer Fußballmannschaft hat sich für das Aufstellen seiner Mannschaft nach folgendem Schema entschieden:

			1				Torwart
	2		3		4		Verteidiger
5		6		7		8	Läufer
	9		10		11		Stürmer

▲1▲ Zur Verfügung stehen dem Trainer 14 Spieler $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M$ und N. Dabei können A nur als Torwart, B, C, D und E nur als Verteidiger, F, G, H, I, J und K nur als Läufer und L, M und N nur als Stürmer eingesetzt werden. Insbesondere darf der Stürmer N nur als „Linksaußen", also mit der Rückennummer 11 eingesetzt werden.

Wieviel Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft gibt es?

Dabei ist eine Mannschaftsaufstellung eine Menge von 11 geordneten Paaren $(X; n)$, wobei X der Name des Spielers (A, B, ..., N) ist, und n die ihm zugeordnete Rückennummer ist. Natürlich muß in einer solchen Menge von 11 geordneten Paaren $(X; n)$ jede der Rückennummern 1, 2,..., 10 und 11 genau einmal vorkommen und kein Name eines Spielers darf zweimal vorkommen.

▲2▲ Für das Aufstellen der Läuferreihe stehen dem Trainer 6 Spieler A, B, C, D, E und F zur Verfügung. Für den Einsatz dieser 6 Spieler gibt es folgende Beschränkung: A darf höchstens auf den Positionen 6 und 7 spielen.

Wieviel Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe gibt es?

▲3▲ Für das Aufstellen der Läuferreihe stehen dem Trainer 5 Spieler A, B, C, D und E zur Verfügung. Dabei sollen A und B unbedingt zum Einsatz kommen und sogar auf benachbarten Positionen spielen.

Wieviel Möglichkeiten zum Aufstellen der Läuferreihe gibt es?

▲4▲ Zum Einsatz stehen dem Trainer 13 Spieler $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$ und M zur Verfügung. A und B können nur als Torwart aufgestellt werden, C, D und E nur als Verteidiger, F, G, H und I nur als Läufer und J, K und L nur als Stürmer. Der Spieler M kann sowohl als Läufer als auch als Stürmer eingesetzt werden.

Wieviel Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft gibt es?

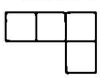
W. Träger

Rückblick auf die XVI. IMO

Es ist nun schon zu einer guten Tradition geworden, daß die DDR-Mannschaft während der IMO von jeder teilnehmenden Mannschaft eine Aufgabe für unsere *alpha*-Leser erhält. Wir danken stud. math. *Wolfgang Burmeister*, Forschungsstudent an der TU Dresden, für die Bearbeitung der gestellten Probleme.

Volksrepublik Bulgarien

Gegeben sei ein Schachbrett der Größe $m \times n$ Felder. Für welche m und n kann es in „Tetraminos" zerlegt werden?



Republik Finnland

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Die Eckpunkte bewegen sich mit gegebenen konstanten Geschwindigkeiten v_A, v_B, v_C so, daß in jedem Augenblick gilt:

$$\vec{v_A} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB},\ \vec{v_B} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC} \text{ und } \vec{v_C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CA}.$$

Es ist der Weg zu ermitteln, den die Punkte A, B, C beschreiben.

Republik Frankreich

Gegeben sei eine Primzahl p mit folgender Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl a besitzt die Zahl $(a+1)^p - a^p$ nur Teiler der Form $2kp+1$ ($k \in N$).

Man zeige, daß es für eine solche Zahl p unendlich viele Primzahlen von der Form $2kp+1$ ($k \in N$) gibt.

(*Hinweis:* Wenn es nur endlich viele Primzahlen $P_1, \ldots, P_n$ dieser Form gäbe, könnte man $a = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$ setzen und einen Widerspruch herleiten. Schwieriger ist zu beweisen, daß Voraussetzung und Behauptung dieser Aufgabe für alle ungeraden Primzahlen p gelten.)

Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland

Die Bilder der Funktionen $y = bx + c$ und $y = x^3$ mögen sich in genau drei Punkten mit den Abszissen x_1, x_2, x_3 schneiden. Man zeige, daß durch die Gleichungen

$$x_1 = px_2^2 + qx_2 + r$$
$$x_2 = px_3^2 + qx_3 + r$$
$$x_3 = px_1^2 + qx_1 + r$$

drei reelle Zahlen p, q, r eindeutig bestimmt werden und gebe diese in Abhängigkeit von b und c an.

Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien

Auf einem Schachbrett der Größe $n \times n$ steht in jeder waagerechten und senkrechten Reihe genau ein Turm.

Um wieviel Felder müssen alle n Türme im Höchstfalle insgesamt rücken, damit sie auf eine vorgegebene lange Diagonale des Brettes zu stehen kommen?

Republik Kuba

Gegeben seien fünf Punkte in einer Ebene. Man zeige, daß unter allen Dreiecken, die drei dieser Punkte als Eckpunkte haben, höchstens sieben spitzwinklige vorkommen.

Mongolische Volksrepublik

Welches ist der größtmögliche Flächeninhalt für alle Dreiecke, deren Seiten a, b, c der folgenden Bedingung genügen:

$$0 < a \leqq 1 \leqq b = 2 \leqq c \leqq 3?$$

Königreich der Niederlande

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 40°$. P sei ein Punkt im Innern dieses Dreiecks, für den $\sphericalangle PAB = 30°$ und $\sphericalangle PBA = 20°$ gilt.

Man soll den Winkel $\sphericalangle PCA$ ermitteln.

Republik Österreich

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen, die dem Intervall $\langle m, M \rangle$ der Zahlengeraden angehören. Die Summe dieser Zahlen sei Null. Man beweise die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq -n \cdot m \cdot M.$$

Volksrepublik Polen

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n > 3$. Für jedes Paar a, b von natürlichen Zahlen mit $1 \leqq a < b \leqq n$ bilden wir die Differenz $\sqrt[b]{b} - \sqrt[a]{a}$.

Zu bestimmen ist das Produkt

$$P = \prod_{1 \leqq a < b \leqq n} (\sqrt[b]{b} - \sqrt[a]{a})$$

aller derartigen Differenzen.

Hinweis: Die Aufgabe besitzt eine überraschend einfache Lösung.

Tschechoslowakische Sozialistische Republik

Es ist die Menge aller Polynome $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d reell) mit folgender Eigenschaft gegeben:

Für alle $x \in \langle -1, 1 \rangle$ gilt $P(x) \in \langle -1, 1 \rangle$.

Man zeige, daß man eine Zahl K so angeben kann, daß $|a| \leqq K$ für alle Polynome aus dieser Menge gilt. Ferner bestimme man das kleinstmögliche K dieser Art.

Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken

Es seien a, b, c, d vier positive Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist.

Es ist zu beweisen, daß

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + da + ac + bd \geqq 10$ gilt.

Sozialistische Republik Rumänien

Gegeben sei eine Zahl $\alpha > 1$.

Man beweise, daß keine für alle reellen x definierte Funktion $f(x)$ existiert, so daß $f(x) \not\equiv$ const. und

$$|f(a) - f(b)| \leqq |a - b|^\alpha$$

für alle reellen Zahlen a und b gilt.

Königreich Schweden

Gegeben sind zwei Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ positiver reeller Zahlen. Dabei gilt für jedes $n \in N$

$$a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \text{ und } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Man beweise, daß beide Folgen einen Grenzwert besitzen und daß gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \sqrt{a_0 b_0}.$$

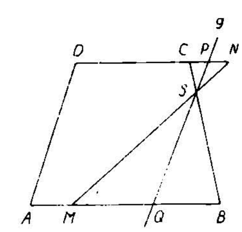
Ungarische Volksrepublik

Auf der Höhe h_c eines Dreiecks ABC sei ein Punkt P gegeben. Die Geraden AP, BP, CP schneiden die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1. Man beweise:

$$\sphericalangle B_1C_1P = \sphericalangle PC_1A_1.$$

Vereinigte Staaten von Amerika

Die abgebildete Figur stellt ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{CD} = 3$ cm dar. Ein innerer Punkt M von $\overline{AB}$, der 1 cm von A entfernt ist, wurde mit einem Punkt N der Geraden DC verbunden, wobei $\overline{DN} = 4$ cm und $\overline{CN} = 1$cm beträgt. Durch den Schnittpunkt S der Geraden BC und MN wurde eine Gerade g gezeichnet, die $\overline{CN}$ in einem inneren Punkt P und $\overline{MB}$ in einem inneren Punkt Q schneidet.



Wie lang ist die Summe $x + y$ aus den Strecken $\overline{DP} = x$ und $\overline{AQ} = y$?

Demokratische Republik Vietnam

Es sei ein Polyeder gegeben, dessen Seitenflächen schwarz und weiß gefärbt wurden derart, daß je zwei weiße Seitenflächen weder eine gemeinsame Kante noch eine gemeinsame Ecke haben. Außerdem gibt es mehr weiße als schwarze Flächen.

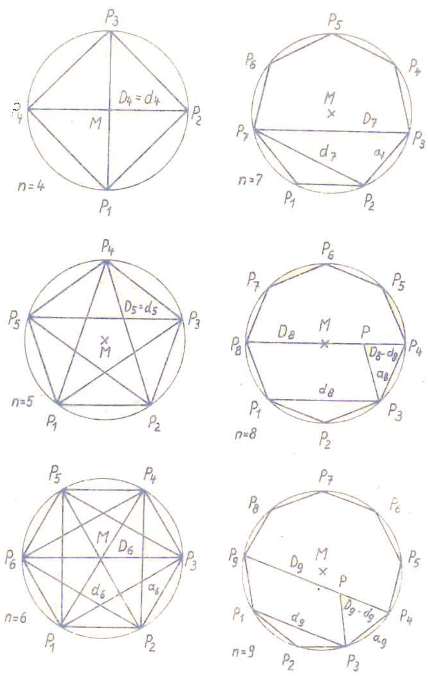
Es ist zu beweisen, daß ein solches Polyeder keine Inkugel (d. h. eine Kugel, die sich innerhalb des Polyeders befindet und sämtliche Seitenflächen berührt) hat.

Deutsche Demokratische Republik

Jeder Teilnehmer der XVI. IMO erhielt eine Urkunde. Sie enthielt u. a. eine elegante geometrische Aufgabe aus einer DDR-Olympiade (in den vier IMO-Verhandlungssprachen) und als Randleiste den Lösungsweg (siehe Abb.).

Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist.

Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen $n (n \geq 4)$ an, für die das gilt.



Ich war 1966 dabei

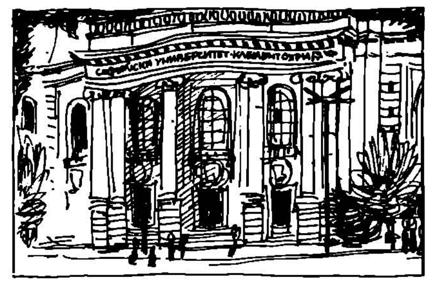
In diesem Jahr ist die VR Bulgarien zum 2. Male Gastgeber einer IMO. Im Jahre 1966 war ich als Chefredakteur der *alpha* Gast der VIII. IMO. Mit diesem Bildbericht geben wir einen Einblick in die VIII. IMO und grüßen unsere bulgarischen Freunde aufs herzlichste.

So wurden die Preise verteilt:

Die internationale Jury vergab bei der VIII. IMO in Sofia insgesamt 40 Preise. Und das sind die Preisträger:

Sowjetunion (fünf erste Preise, ein zweiter Preis, ein dritter Preis)

DDR	(3/3/–)
Ungarische VR	(3/2/1)
VR Polen	(1/4/2)
VR Bulgarien	(1/–/3)
SR Rumänien	(1/1/2)
SFR Jugoslawien	(–/2/1)
ČSSR	(–/1/2)
MVR	(ein Sonderpreis)



Die erste der gestellten Aufgaben der VIII. IMO

Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden insgesamt drei Aufgaben, A, B, C, gestellt. Unter allen Teilnehmern gab es (genau) 25 Schüler, von denen jeder wenigstens eine Aufgabe gelöst hatte. Unter den Schülern, welche die Aufgabe A nicht gelöst hatten, war die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe B gelöst hatten, zweimal so groß wie die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe C gelöst hatten. Die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A gelöst hatten, war um 1 größer als die Anzahl der übrigen Schüler, welche die Aufgabe A gelöst hatten. Von den Schülern, die nur eine Aufgabe gelöst hatten, hatte die Hälfte die Aufgabe A nicht gelöst. Wieviel Schüler hatten nur die Aufgabe B gelöst?

Die Universität Sofia, Austragungsort der Klausuren (Bild rechts oben)

Während die Delegationsleiter korrigierten, besuchten die Teilnehmer das Hüttenwerk Kremikowski

Die siegreiche sowjetische Mannschaft bei einem Stadtbummel durch Sofia

Auf der 1200 km langen Rundfahrt der Freundschaft (am Schwarzen Meer)

In freien Stunden alpha heiter

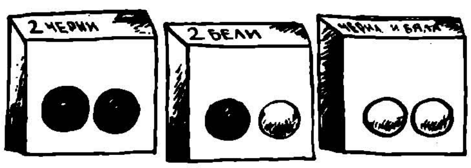
Unterhaltungsmathematik aus der VR Bulgarien

Wie viele sind es?

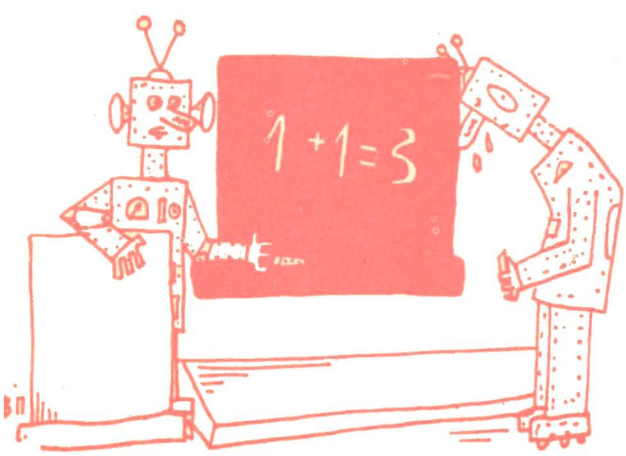
Zwölf Personen tragen insgesamt 12 Brote. Die Männer tragen je zwei Brote, die Frauen je ein halbes, die Kinder je ein viertel Brot.
Wie viele Männer, Frauen und Kinder sind es?

Drei Kästchen

Vor uns liegen drei gleiche Kästchen. In einem sind zwei weiße, in dem anderen zwei schwarze und im dritten eine schwarze und eine weiße Kugel. Auf den Deckeln sind sie gekennzeichnet.



Das Problem besteht darin – ohne hineinzuschauen – eine Kugel aus einem Kästchen herauszunehmen und zu erkennen, welche Kugeln in welchem Kästchen liegen, wenn bekannt ist, daß die Beschriftung auf keinen Fall der Wahrheit entspricht.



„Sage deinem Konstrukteur, daß ich gern einmal mit ihm reden möchte!"

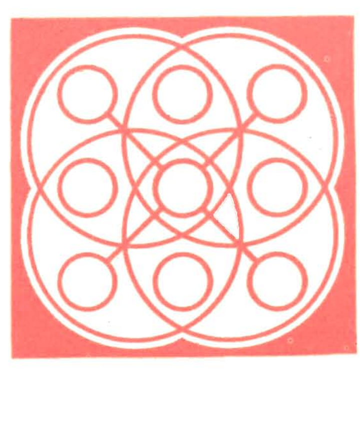
Utschitelsko delo, Sofia

Angeln mit vielen Unbekannten

Vater Nikolai mit Sohn und Vater Peter mit Sohn gehen angeln. Die Zahl der Fische, die Nikolai geangelt hat, endet mit der Ziffer 2, die seines Sohnes mit der Ziffer 3, die von Peter ebenfalls mit 3 und die seines Sohnes mit 4.
Die Summe aller Fische, die sie insgesamt geangelt haben, ist die Quadratzahl einer natürlichen Zahl.
Wie heißt der Sohn vom Vater Nikolai?

Arithmetisches Rätsel

In die Kreisfiguren sind die Zahlen 11 bis 19 so einzusetzen, daß die Summe aller vier Zahlen, die sich in einem großen Kreis befinden, die Zahl 59 ergibt, gleichzeitig soll die Summe der drei Zahlen, welche sich in den Kreisfiguren auf den Diagonalen befinden, jeweils die Zahl 39 ergeben.



Beim Einkauf

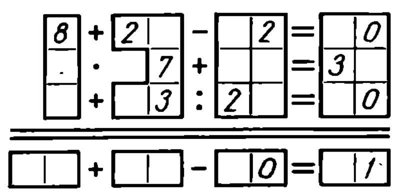
In fünf Minuten war die Hälfte meines Geldes weg, erzählte ein Mann seiner Frau, als er aus dem Geschäft kam. Dabei betragen meine Lewas jetzt genau die Hälfte der Stotinkis, die ich anfangs hatte, und die Stotinkis genauso viele wie die Lewas, welche ich am Anfang hatte.
Wieviel Geld hatte der Mann, und wieviel ist ihm nach dem Einkauf geblieben? (1 Lew = 100 Stotinki)

Das Lotterielos

Ich habe mir ein Lotterielos, auf dem die Summe der Ziffern (Quersumme) der fünfstelligen Zahl dem Alter meines Vaters entspricht, gekauft. Als ich ihm das sagte, wußte er sofort, welche Zahl mein Lotterielos trägt. Weißt du es?

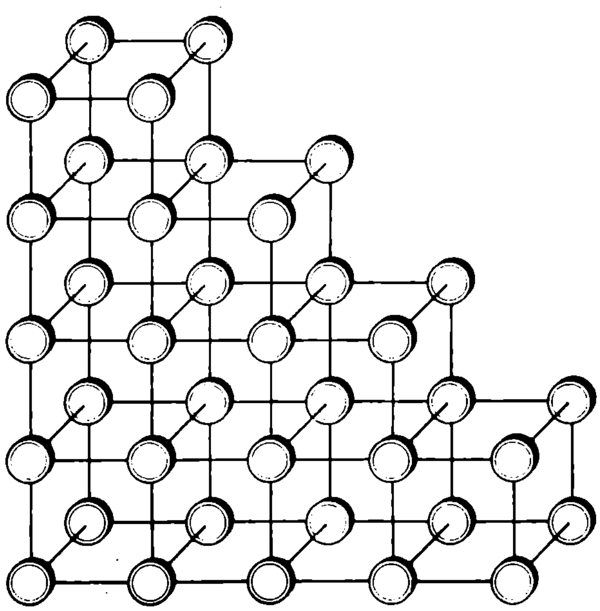
Kryptarithmetik

```
* * * · * 8 *        * * * · * * *
-------------        -------------
      * * * *                * 0 *
      * * *              * 5 * *
    * 0 *                * * 5
-------------        -------------
    * * * * 0        1 * * * * 8
```

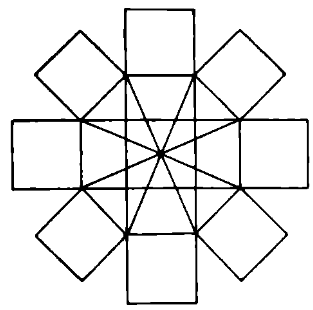


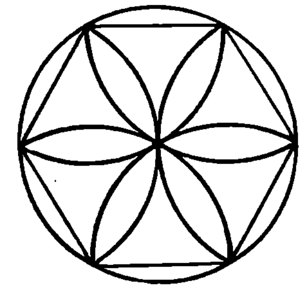
Die Treppe

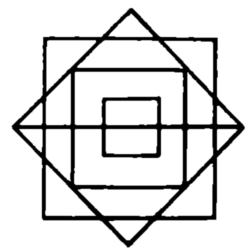
Fülle die Treppe mit den Zahlen 1 bis 38 so, daß die Summe an jeder Wand jedes Würfels 78 beträgt!

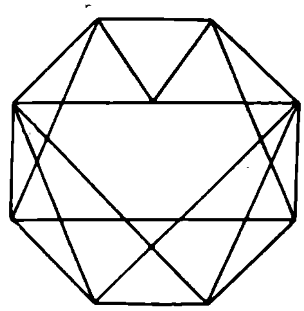


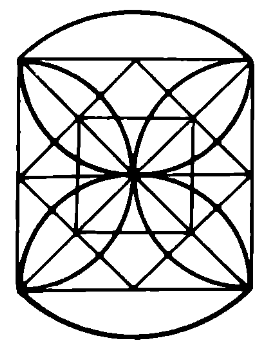
In einem Zug

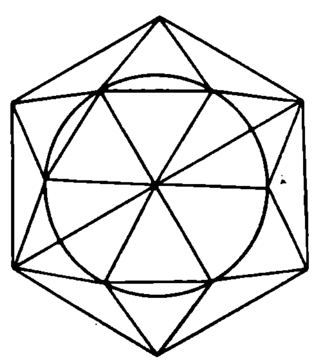












Die auf diesen beiden Seiten gestellten Probleme übernahmen wir aus der bulgarischen mathematischen Schülerzeitschrift

Herausgeber: ZK des Komsomol und des Ministeriums für Volksbildung der VR Bulgarien.

Patenschaft in Aktion

alpha-Wandzeitung

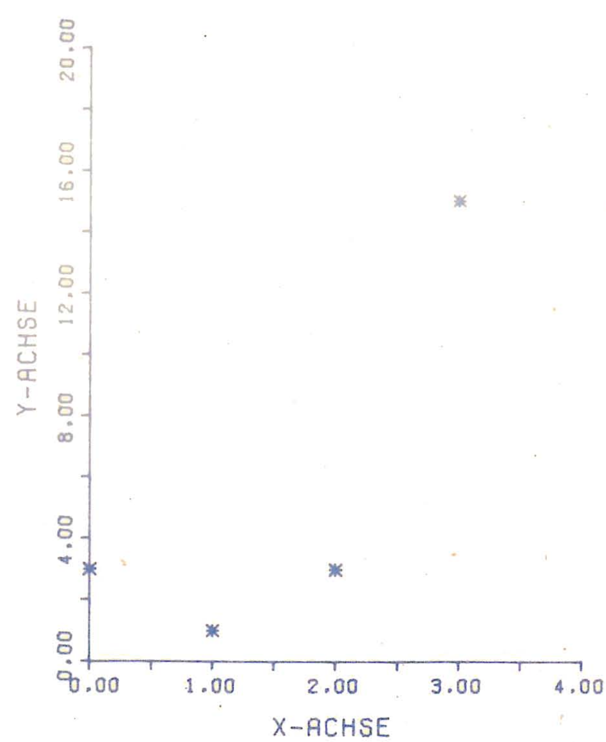
Seit 1969 besteht ein Patenschaftsvertrag zwischen dem *alpha*-Club der 29. Oberschule und dem *Wartungskollektiv der EDV-Anlage des Zentralinstituts der Metallurgie* in Leipzig. Von dieser Zusammenarbeit wurde in dieser Zeitschrift schon berichtet. Höhepunkte waren 1974 – wie alljährlich – der Besuch einer Gruppe des *alpha*-Clubs bei der Patenbrigade und erstmals auch der Sieger der Kreisolympiade des Stadtbezirks Südost. Ihre Auszeichnung fand in den Räumen des ZIM unter Mitwirkung der Patenbrigade statt. Den *Jungen Mathematikern* wurde die Arbeitsweise einer modernen EDVA erläutert und vorgeführt. Alle interessierten sich besonders für das neu aufgebaute elektromechanische Zeichengerät, in der Fachsprache als *Plotter* bezeichnet. Mit diesem Gerät werden mathematische Ergebnisse, die sich graphisch darstellen lassen, in relativ kurzer Zeit und sehr genau gezeichnet. Als Überraschung hatte ein Mitarbeiter des ZIM – ehemaliger Teilnehmer an Mathematikolympiaden – eine Urkunde mit Hilfe des Rechners angefertigt, auf der die Patenbrigade die Sieger zu ihrem Erfolg beglückwünschte. Diese Urkunde wurde in Anwesenheit der *Jungen Mathematiker* vom Plotter gezeichnet und jedem Sieger überreicht.
Da der Plotter, wie schon erwähnt, große Aufmerksamkeit erregte, möchten wir hier etwas mehr von seiner Funktion und Anwendung bringen.

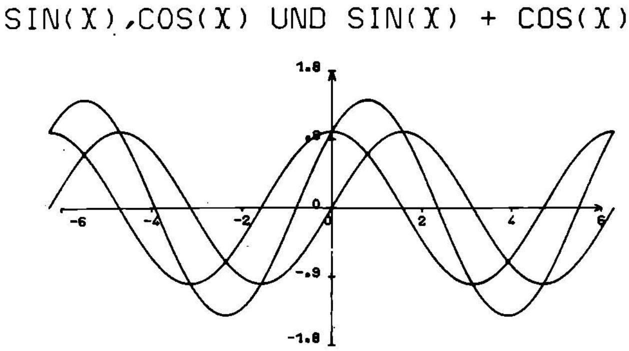
Zeichnerische Darstellung von Ergebnissen der EDV

Mit Hilfe des Plotters können die Ergebnisse der elektronischen Datenverarbeitung automatisch in grafische Form umgesetzt werden. Je ein Schrittmotor mit angebautem Getriebe bewirkt den Antrieb in der x-Achse und der y-Achse. Den Motoren ist eine Elektronik vorgeschaltet, welche die ankommenden Steuersignale umwandelt und verstärkt. Die Steuerung erfolgt durch Signale, die die EDV-Anlage zunächst auf Magnetband aufzeichnet und die später durch eine besondere Magnetbandeinheit gelesen und dem Plotter zugeführt werden.
Bei jedem ankommenden Steuersignal dreht sich der Rotor des einen oder anderen Schrittmotors um einen festliegenden Drehwinkel, woraus eine genau definierte lineare Bewegung des Zeichenstiftes um eine Schrittlänge von 0,03175 mm in positiver oder negativer x-Richtung oder y-Richtung resultiert. Ein Elektromagnet bewirkt durch ankommende Signale ein Heben oder Senken des Zeichenstiftes.
Erhalten beide Schrittmotoren gleichzeitig ein Steuersignal, so wird ein Schritt in Richtung einer Diagonalen ausgelöst. Jede Zeichnung wird aus einer geeigneten Aufeinanderfolge von einzelnen Schritten zusammengesetzt. Durch geeignete Grundprogramme für die EDVA werden solche Steuersignale an den Plotter gegeben, daß eine ideale Annäherung an den gewünschten Kurvenzug erreicht wird. Die kleinen Grundschritte lassen sich in der fertigen Zeichnung nicht mehr mit dem bloßen Auge erkennen, die deshalb aus Linien und Kurven sowie Beschriftungen beliebiger Art bestehen kann.

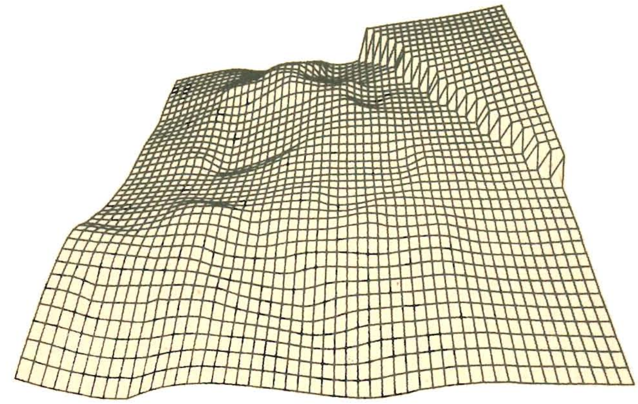
▲1383▲

```
MIT EINEM EDV-PROGRAMM KANN MAN DURCH EINE
GEGEBENE ANZAHL VON PUNKTEN IM KOORDINATENSYSTEM
EINE AUSGLEICHSKURVE LEGEN. DIE AUSGLEICHS-
KURVEN WERDEN DURCH POLYNOME N-TEN GRADES
GEBILDET. DAS PROGRAMM ERRECHNET DAS POLYNOM.
ZEICHNET DIE KURVE UND DIE FORMEL DES POLYNOMS.
DER RECHNER BENOETIGT DAZU CA. 30 SEKUNDEN.

WIE LANGE BRAUCHST DU DAZU --

IM NAECHSTEN HEFT FINDEST DU DIE LOESUNG DES
RECHNERS.
BESTIMME EIN POLYNOM 3-TEN GRADES DURCH DIE IM
KOORDINATENSYSTEM ANGEGEBENEN 4 PUNKTE.
GEGEBEN SIND  P1-(0.3)
              P2-(1.1)
              P3-(2.3)
              P4-(3.15)
GESUCHT IST  AX**3+BX**2+CX+D=Y
```



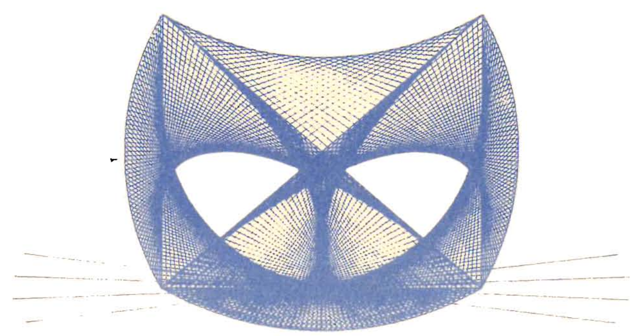


Kurven im Achsenkreuz

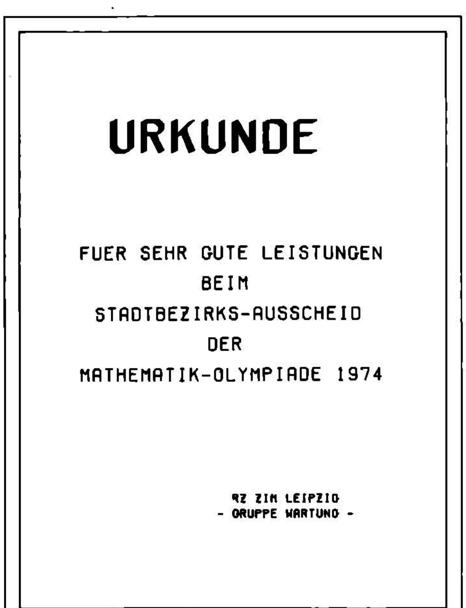


Dreidimensionale Darstellung einer Oberflächenstruktur

Ein Teil der Erdkugel, vom Plotter gezeichnet.



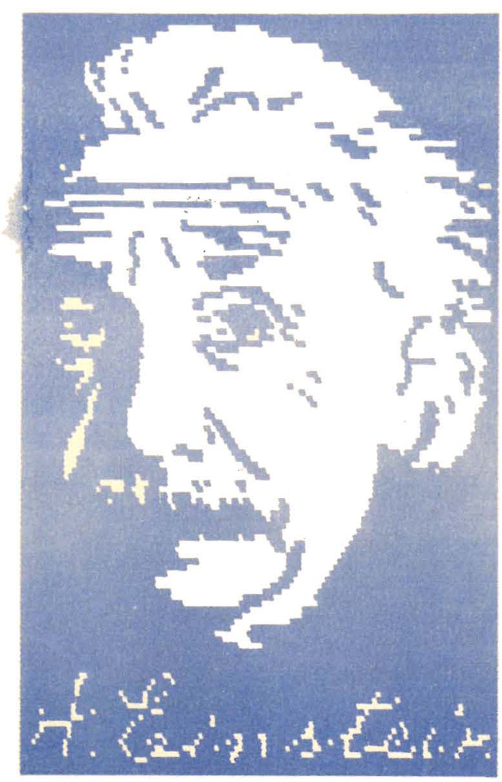
Computergraphik



URKUNDE

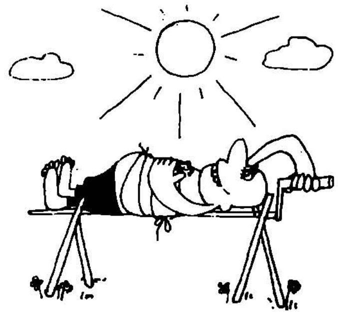
FUER SEHR GUTE LEISTUNGEN
BEIM
STADTBEZIRKS-AUSSCHEID
DER
MATHEMATIK-OLYMPIADE 1974

RZ ZIM LEIPZIG
- GRUPPE WARTUNG -



Das Titelblatt des Heftes 2/75 zeigt einen Würfel in isometrischer Darstellung. Durch Rotation von Vierecken pro Würfelfläche entstand dieser schöne Effekt.

Preisträger



Preisträger des Physikwettbewerbs 1974

Zu unserem Physikwettbewerb gingen ein:

Klassenstufe 6	108 Lösungen
7	65 Lösungen
8	67 Lösungen
9	59 Lösungen
10/12	138 Lösungen
zus.	437 Lösungen

Alle Teilnehmer erhielten im Februar eine Antwortkarte, die Preisträger eine Urkunde und eine Buchprämie.

Preisträger: Thomas Bienek, Schwepnitz; Lutz Möller, Schmiedeberg; Frank Regensburger, Dresden; Frank Hadamik, Radebeul; Ulv Krabisch, Leipzig; Volker Lerche, Schmalkalden; Torsten Waldeck, Karl-Marx-Stadt; Annelie Meyer, Silberstraße; Josef Hofbauer, Traismauer (Österreich); Karl Krause, Mansfeld; Wolfgang Huschmann, Oelsnitz; Petra Maeder, Berlin.

„Heute behandeln wir in der Schule die Atomzertrümmerung.“
Aus: Učitelské noviny, Prag

Preisträger des Chemie-Wettbewerbs 1974

Zu unserem Chemie-Wettbewerb gingen ein:

Klassenstufe 7	365 Lösungen
8	260 Lösungen
9	311 Lösungen
10/12	455 Lösungen
zus.	1391 Lösungen

Alle Teilnehmer erhielten im Februar eine Antwortkarte, die Preisträger eine Urkunde und eine Buchprämie.

Preisträger: Dietmar Schröter, Dresden (Kl. 6); Olaf Heese, Berlin; Heike Brünig, Saalfeld; Elke Weiß, Merseburg; Friedbert Rode, Wingerode; Steffen Roch, Annaberg; Michael Weicker, Mügeln; Heidemarie Probst, Bad Frankenhausen; Josef Hofbauer, Traismauer (Österreich); Lutz Krukowska, Böhlitz-Ehrenberg; Daniel E. Hersberger, Reinach (Schweiz); Ulrich Kirchhübel, Flöha; Martin Ermrich, Elbingerode; Birgit Baldauf, Zschornewitz; Wiete Schirmer, Karl-Marx-Stadt.

Preisträger des Wettbewerbs 30 Jahre VR Polen

Zu unserem Sonderwettbewerb 1974 gingen 418 Lösungen ein. Alle Teilnehmer erhielten im Februar eine Antwortkarte, die Preisträger eine Urkunde und eine Buchprämie.

Preisträger: Das Kollektiv der OS Döllnitz/Saalkreis; AG Mathematik (Kl. 9), OS Kleinberndten; Klasse 7b der OS Karl Marx, Schmalkalden; Bernd Müller, Stralsund; Ulrike Baumann, Radebeul; Dorothea Möller, Gerbstedt; Annegret Kirsten, Leuna; Norbert Fuchs, Meiningen; Mario Steller Lichtenstein; Gudrun Tappert, Wilh.-Pieck-Stadt Guben; Elvira Klingebiel, Bischofferode; Karin Sukowski, Neukloster; Michael Menzel, Greifswald; Holger Brodmann, Hettstedt; Heidrun Vorsprecher und Greta Böhmisch, Berlin; Christel Mitzenheim, Jena.

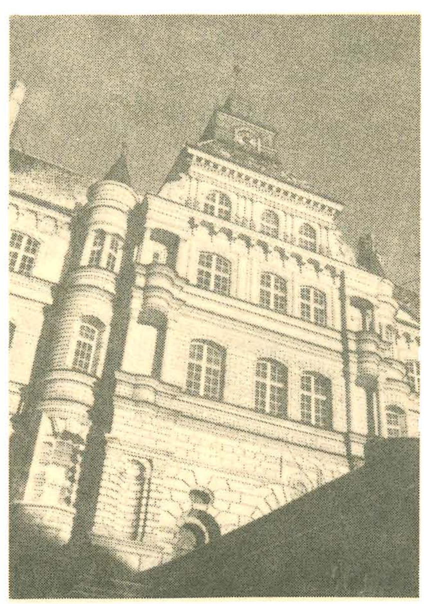
Der VIII. Internationalen Physikolympiade entgegen

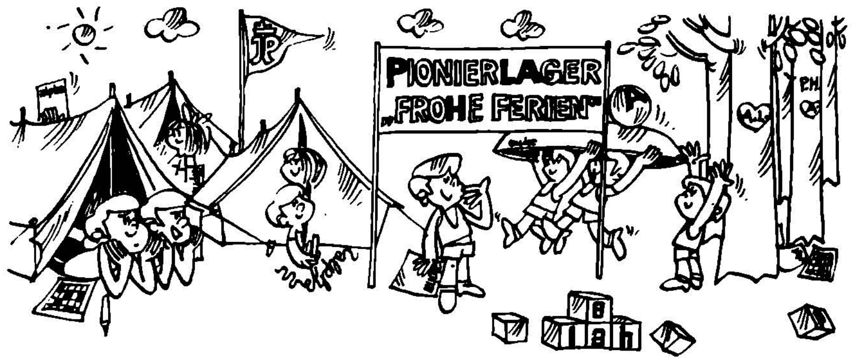
Die DDR ist in diesem Jahr der Gastgeber der VIII. IPO. *alpha* wird ausführlich darüber berichten.

Aus dem Programm:
6./7. Juli – Anreise der Delegationen, Freundschaftstreffen mit FDJlern der PH Güstrow, Empfang der Jury durch den Rektor der Pädagogischen Hochschule und Vertreter des Ministeriums für Volksbildung
8. 7. – Exkursion nach Schwerin, am Abend: Eröffnungsfeier in der PH Güstrow
9. 7. – 1. Klausur (theoretische Probleme)
10. 7. – Exkursion nach Schwerin
11. 7. – 2. Klausur (Experimente)
12./13. 7. – Exkursion nach Rostock
14. 7. – Feierlicher Abschluß der VIII. IPO
15./16. 7. – Exkursion nach Potsdam und Berlin
17. 7. – Abreise der Delegationen

VIII. INTERNATIONALE PHYSIK OLYMPIADE DDR 1975 GÜSTROW

Päd. Hochschule Güstrow

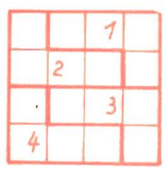




Unterhaltsame Logik

speziell für Klassen 5/6

6

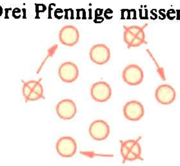


7 Die Punkte 3, 12, 14, 23, 25 und 34 werden besetzt.

8 $5-3=2$, $2+1=3$, $6-2=4$, $6-1=5$, $4+2=6$, $3+4=7$, $6+2=8$, $3+6=9$, $4+6=10$

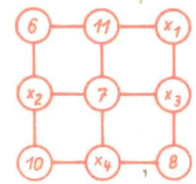
9 Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5 \cdot 7=35$. Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat die Augenzahl 6. Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35+6=41$.

10 Drei Pfennige müssen umgelegt werden.



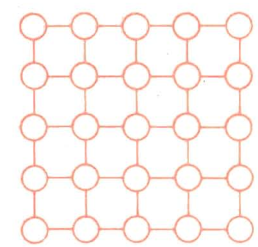
10

3 Die waagerechten, senkrechten und die in den Diagonalen liegenden 3 Zahlen ergeben stets die gleiche Summe.
Wie groß ist die Summe? Welche Werte müssen für x_1, x_2, x_3 und x_4 eingesetzt werden?



3

4 Streicht von den 25 Punkten 5! Es müssen aber auf jeder Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen 4 Punkte zu zählen sein.

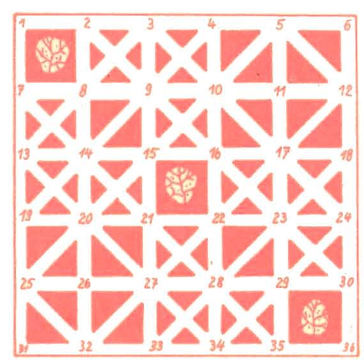


14 Gegeben

1 2	= 3
1 2 3	= 4
1 2 3 4	= 5
1 2 3 4 5	= 6
1 2 3 4 5 6	= 7
1 2 3 4 5 6 7	= 8
1 2 3 4 5 6 7 8	= 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	= 10

Setze auf der linken Seite Rechenzeichen derart, daß wahre Aussagen in Form von Gleichungen entstehen. (Nebeneinanderstehende Ziffern dürfen als eine Zahl betrachtet, doch die Reihenfolge darf nicht geändert werden. Du darfst auch Klammern verwenden.)

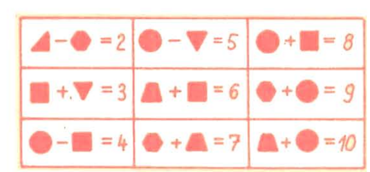
8



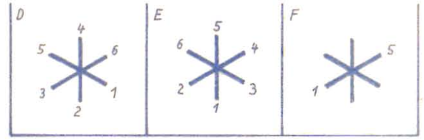
5

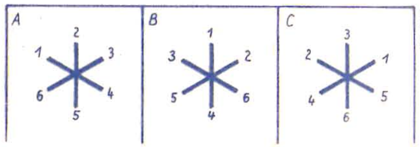
7 Inspektor Leclerc stellt 6 Polizisten auf die Wege des Stadtparkes, daß sie sämtliche Wege übersehen können. Einer steht auf 34. Wo müssen die anderen aufgestellt werden?

8 Welche Zeichen müssen anstelle der geometrischen Figuren gesetzt werden?

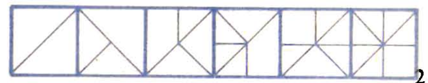


1 Jede der Zahlen 1 bis 6 werden in die Felder *A* bis *E* so eingesetzt, daß jede der Zahlen einmal um den Mittelpunkt jeden Platz einnimmt.
Wie müssen nach diesem Schema die fehlenden Zahlen in das Feld *F* geschrieben werden?





2 Sind diese Quadrate tatsächlich jeweils nur durch eine Strecke erweitert worden?



2

11 1, 5, 9, 3, 7; 3, 7, 1, 5, 9; 5, 9, 3, 7, 1; 7, 1, 5, 9, 3; 9, 3, 7, 1, 5

12

$$\begin{array}{rcl} 253 & : & 23 = 11 \\ - & \cdot & + \\ 13 & & 9 = 22 \\ \hline 240 & - & 207 = 33 \end{array}$$

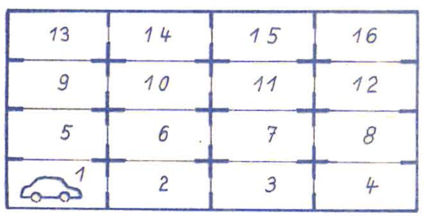
13 Man kann die Wörter „Junge Welt" ohne Überspringen genau 56mal lesen.

11

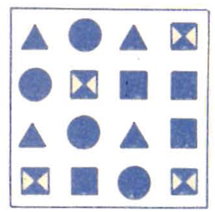
14 Beispiele für mögliche Lösungen:

$1+2$	$= 3$
$12:3$	$= 4$
$(1+2)\cdot 3-4$	$= 5$
$12-3-4$	$= 5$
$12+3-4-5$	$= 6$
$12:3+4+5-6$	$= 7$
$(1+2)\cdot 3-4:5+6$	$= 7$
$1\cdot 2\cdot 3-5+5-6+7$	$= 8$
$(12:3)\cdot 4+5-6-7$	$= 8$
$1-2-3+4-5+6+7$	$= 8$
$(1+2)\cdot(3+4)-5-6+7-8$	$= 9$
$1+2\cdot 3+4+5-6+7-8$	$= 9$
$1\cdot 2+3+4+5+6+7-8-9$	$= 10$
$(1\cdot 2\cdot 3-4)\cdot 5-6+7+8-9$	$= 10$

5 Das Auto soll alle Felder durchfahren. Außer Feld 1 darf jedes nur einmal durchfahren werden. Das Ziel ist die 16.
Wer schafft es in kürzester Zeit?



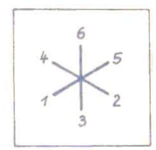
6 Teile das Quadrat in vier gleiche Teile. In jedem der Teile darf jedes Muster nur einmal vorkommen.



4

Lösungen

1



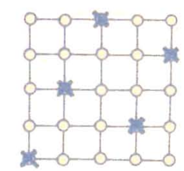
2 Jedes der Quadrate ist jeweils nur um eine Strecke erweitert worden. Das sieht man nicht sofort, da einzelne Quadrate gedreht wurden.

9

3

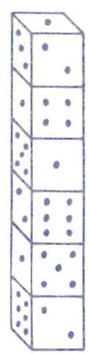
6	11	4
5	7	9
10	3	8

4

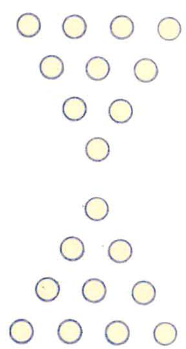


5 1-2-1-5-6-7-3-4-8-12-
-11-10-9-13-14-15-16

9 Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abb. zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen.
Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel.

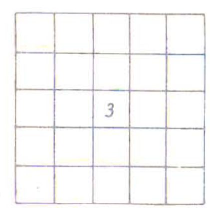


10 Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, wie es Bild a) zeigt. Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, daß die auf dem Bild 2 dargestellte Anordnung entsteht.
a) Wie viele Pfennige muß man mindestens umlegen?
b) Welche Pfennige sind das? Kreuze an!



6

11 Die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 sind so in die Figur einzusetzen, daß sich aus der Waagerechten, der Senkrechten und den beiden Diagonalen jeweils die Summe 25 ergibt.



7

12 Frisch gewagt ist halb gelöst

$$\begin{array}{rcl} FHR & : & FR = CC \\ - & \cdot & + \\ CR & + & T = FF \\ \hline FBE & - & FES = RR \end{array}$$

13

J U N G E W
U N G E W E
N G E W E L
G E W E L T

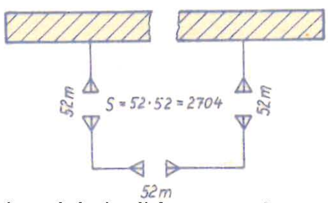
Auf wieviel verschiedene Weisen kann man in der abgebildeten Tabelle die Wörter „Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

Ein Zaun und ... eine quadratische Funktion

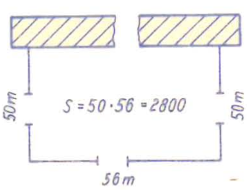
Im Kontor der Brigade saß der Leiter des Maschinenhofs, *Alexej Chromov,* über ein Blatt Papier gebeugt und zeichnete etwas: er hatte vor, den Maschinenhof mit einer Umzäunung mit drei Toren zu versehen.

„*Kostja*“, wandte er sich an den Bautechniker, der gerade das Kontor betreten hatte, „ich plane hier eine Umzäunung und habe 120 Meter Maschenzaun. Wie werde ich das am besten machen?“

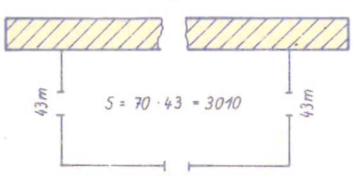
„Auf der einen Seite sind die Garage und die Werkstätten“, sagte der Techniker, „wir werden ihre Wände ausnutzen. Du hast 120 Meter Zaun, dazu kommen die drei Tore, jedes zu 12 Meter, das heißt, die ganze Umzäunung mißt 156 Meter.“ Und er zeichnete einen Plan: .



„Bitte, das wird ziemlich eng werden, nur etwa 2700 Quadratmeter“ bemerkte *Alexej*, nachdem er den Plan angeschaut hatte. „Moment mal, kann man nicht die eine Seite länger machen? Etwa so“:



„Richtig, so sind es fast hundert Quadratmeter mehr“, pflichtete der Techniker bei. „Wie wäre es, könnten wir nicht auf dieser Seite auch noch etwas zugeben?“



„Sieh einmal an, noch über zweihundert Quadratmeter gewonnen“, rief *Alexej* erfreut, „doch der Zaun ist nicht länger geworden! Höre, *Kostja,* können wir nicht noch mehr gewinnen?“

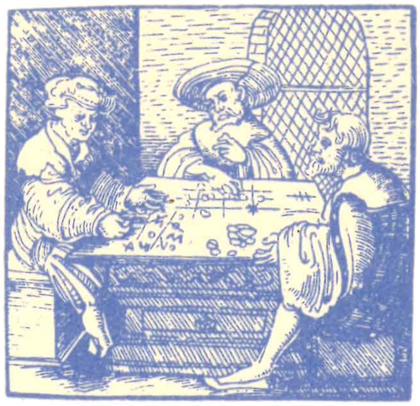
„Möglich“, ließ sich der Lehrer *Semjon Petrovitsch* vernehmen, der gerade das Kontor betrat, „zunächst wollen wir die Aufgabe scharf formulieren und dann lösen“.

Aufgabe

Es sind Länge und Breite eines Rechtecks von maximalem Flächeninhalt zu ermitteln, wenn die Summe der Längen dreier seiner Seiten 156 Meter beträgt. *A. Halameisär*

(Lösung siehe S. 71).

Die Rechnung ohne den Wirt machen ...



Mathematisches und Zahlen in sprichwörtlichen Redensarten

Wenn man heute in eine Gaststätte geht, kann man sich anhand der Speisenkarte das ausrechnen, was man zu bezahlen hat – das heißt aber noch lange nicht, daß man **die Rechnung ohne den Wirt macht.** Diese Redensart drückt vielmehr aus, daß man sich gewaltig verrechnen oder verplanen kann, wenn man wesentliche Faktoren nicht berücksichtigt – und der Wirt war früher in seiner Eigenmächtigkeit schon ein wesentlicher Faktor. Das sagt auch eine Überlieferung aus dem Jahre 1639: „Wer die Zech ohn den Wirth macht, muß zweymahl rechnen“.

Man mußte also genau aufpassen, daß man nicht betrogen wurde, daß einem nicht **ein X für ein U vorgemacht** wurde. Bei den im Mittelalter fast ausschließlich verwendeten römischen Zahlzeichen bedeutet ja X zehn und V – das zugleich auch für U stand – fünf. Der ursprüngliche Sinn dieser Redewendung ist also der, daß man zehn („ein X“) statt fünf („ein V = U“) angeschrieben bekommt, demnach tüchtig betrogen wird.

Sei es wie es sei – entweder hat man sein Geld nicht richtig gezählt oder der Wirt bzw. Ober hat uns **mit doppelter Kreide angeschrieben** (d. h. einen Posten zweimal gerechnet), jedenfalls, wenn das Geld zum Begleichen der Rechnung nicht reicht, drücken wir unsere Bestürzung durch den Ruf **„Ach du grüne Neune!“** aus, auch wenn der Ober vielleicht keinen grünen Kugelschreiber verwendet oder gar keine Neun geschrieben hat. Die Deutung ist in diesem Fall sehr umstritten. Über das Schlesische wurde es als verhüllende Form für „krumme Not“, die Epilepsie (= Fallsucht), ausgelegt.

Die einfachste Lösung, aus unserer Misere herauszukommen, wäre, **einen Strich durch die Rechnung zu machen.** Einmal ist das möglich im wahrsten Sinne des Wortes und zum anderen so, wie man die Redensart anwendet: Man durchkreuzt die Absichten des anderen, verhält sich anders, als der andere annimmt, und geht z. B. einfach aus der Gaststätte.

Was dann passiert, kann man **sich an den fünf Fingern abzählen,** d. h. sich ohne große Mühe im voraus überlegen: Weil man **etwas auf dem Kerbholz hat,** wird die Gaststätte entsprechende gerichtliche Maßnahmen einleiten.

Die letzte Redensart benutzen wir heute für „ein Vergehen begangen, etwas ausgefressen haben“. Ausgangspunkt dafür ist die Benutzung des Kerbholzes als Abrechnungsmittel für Handelsleistungen oder Schulden (daher der oben aufgeführte Sinn).

Das Kerbholz (oder auch Kerbstock genannt) ist seit vorgeschichtlicher Zeit in Europa bekannt als wichtigstes Gerät zur Aufzeichnung von Arbeitsleistungen oder Handelsmengen, bevor die schriftliche Rechnungsführung aufkam. Es besteht aus zwei durch Spalten eines Holzstabes gewonnenen Teilen; diese beiden Teile wurden genau aneinandergehalten und Kerben als Ausdruck gewisser Mengen darauf eingeschnitten (die man damit auf dem Kerbholz hatte!). Die Partner erhielten dann je einen Teil des Kerbholzes und konnten bei der Abrechnung die Übereinstimmung der Kerben durch Aneinanderhalten der Teile prüfen.

Ein Verfahren, bei dem bestimmt nicht mehr Holz verbraucht wurde, als heute in allem zur Durchführung des Handels notwendigen Papier steckt. Womit **in die Kerbe** der Gegner des „Papierkrieges“ **gehauen** werden soll, d. h. deren Kerbe wird vertieft, was auf dem Kerbholz eine Vergrößerung der Menge bedeutete und heute im Sinne von „Verstärkung des Standpunktes“, „Unterstützung in einer bestimmten Meinung“ verwendet wird.

Ch. Pollmer

Vor 200 Jahren

...am 29. Oktober 1675 hat *Leibniz* zum ersten Male die beiden Symbole *d* und ∫ benutzt:

„Utile erit scribi ∫ pro „omnia“ et ∫ l pro „omnia l“. ∫ significat summam, *d* differentiam“ ...

zu deutsch:

„Vorteilhaft schreibt man ∫ für „alles“ und ∫ l für „alle l“. ∫ bezeichnet eine Summe, *d* ein Differenz.“

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade, 24. bis 27. März 1975

Aufgaben · Olympiadeklasse 10

1. Es sei $z=(1-\frac{4}{1^2})(1-\frac{4}{3^2})(1-\frac{4}{5^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{4}{199^2})$

(wobei die Nenner der Subtrahenden in den Faktoren die Folge der ungeraden Quadratzahlen von 1^2 bis 199^2 durchlaufen).

Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z=\frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q>0$ ist.

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{AD}=d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt

$$\frac{a}{c}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}}.$$

Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3A. Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche $ABCD$.

Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen φ ($0°<\varphi<90°$), für die folgendes gilt: Hat der Winkel $\sphericalangle ASB$ die Größe φ, so existiert unter den auf der Pyramide $ABCDS$ betrachteten Streckenzüge $PQRTP$ ein kürzester.

3B. Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining: Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände: Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, daß jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: „Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."

Monika: „Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."

Peter: „Ich habe den Zirkel oder Klaus hat das Lineal nicht."

Klaus: „Ich habe das Lineal nicht oder Uwe hat den Bleistift."

Ilona: „Ich habe den Füller oder ich habe den Bleistift."

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen. Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

4. Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^r+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^r=4.$$

5. In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, daß beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst und daß die Gleichung $g(x)^2-f(x)^2=1$ für alle x erfüllt ist. Annemarie folgert nun daraus:

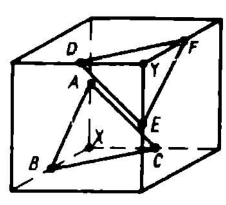
„Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion." Brigitte widerspricht: „Es läßt sich nur schließen, daß g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."

Christa meint: „Ihr habt beide nicht recht."

Wer von diesen Schülerinnen hat nun recht?

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann als streng monoton $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$ in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1<x_2$ gilt, die Ungleichung $\left\{\begin{matrix}f(x_1)<f(x_2)\\ f(x_1)>f(x_2)\end{matrix}\right\}$ gilt.

6. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y. Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, sie Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, daß A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D.



a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, daß folgendes gilt: Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (d. i. ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.

b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen.

Einen ersten Preis erhielten:

Olympiadeklasse 10: Uwe Schäfer, EOS „Dr. Th. Neubauer", Cottbus (Kl. 9); Werner Hoffmann, EOS Mühlhausen; Thomas Maiwald, EOS Zittau (Kl. 9)

Olympiadeklasse 12: Harry Reimann, EOS „Heinrich Hertz", Berlin; Ralph Lehmann, EOS Diesterweg, Strausberg; Bernd Zaddach, Spezialklasse Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin; Helmut Roßmann, EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg

Einen zweiten Preis erhielten:

Olympiadeklasse 10: Thomas Kischel, Lenin-OS Greifswald; Stefan Geiß, EOS Humboldt, Erfurt; Thomas Kaatz, EOS Gräfenhainichen; Roger Labahn, EOS „Geschw. Scholl", Anklam; Harald Katzberg, EOS Kyritz; Joachim Heinitz, Käthe-Kollwitz-OS Zwickau; Torsten Beseniuk, EOS Brühl (Schwerin); Hans-Diettmar Gröger, EOS Staßfurt

Olympiadeklasse 11: Uwe Risch, EOS „Geschw. Scholl", Burg; Uwe Löbus, EOS „R. Rolland" Dresden; Michael Marozinek, EOS „Heinrich Hertz", Berlin (Kl. 10); In Olympiadeklasse 12: Udo Matte und Uwe Quasthoff, beide Spezialklasse Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle; Klaus Altmann, Alexander Wilczok und Martin Hanke, alle EOS „Heinrich Hertz", Berlin

Einen dritten Preis erhielten:

Olympiadeklasse 10: Hartmut Walter, EOS „J. W. Goethe", Bischofswerda; Dirk Bothmann, EOS „F. Schiller", Bautzen; Rüdiger Schultz, EOS „Ernst-Moritz-Arndt", Bergen; Uwe Baumbach, EOS „Heinrich Hertz", Berlin; Lutz Gärtner, Pestalozzi-OS Wismar; Michael Zwicke, EOS „Friedrich Engels", Riesa; Roland Kaschner, EOS „J. R. Becher", Lacuhammer; Thomas Luschtinetz, Hansa-OS Stralsund; Stefan Vogel, Ernst-Thälmann-OS Plauen (Kl. 9). In Olympiadeklasse 11: Friedhelm Schieweck, EOS „Otto v. Guericke", Magdeburg; Hans-Georg Martin, Spezialschule VEB Zeiß, Jena; Reiner Lindemann, Spezialkl. der Humboldt-Universität zu Berlin; Uwe Ebert, EOS Altenberg; Marcus Kasner, EOS „Hermann Matern", Templin; Frank Burghardt, Spezialschule techn. Richtung Frankfurt/O.; Peter Szyler, EOS „Geschw. Scholl", Gardelegen; Frank Richter, EOS Herzberg (Kl. 10)

Olympiadeklasse 12: Andreas Engel, Spezialklasse der Humboldt-Universität zu Berlin; Thomas Schmitt und Jürgen Helbig, beide Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle; Kurt Frischmuth, ABF „Walter Ulbricht", Halle

Anerkennungsurkunden für gute Leistungen wurden an weitere 51 Schüler vergeben.

Lösungen

Hinweis: Zu Aufgabe 1260 (5/74) ist uns ein Formulierungsfehler unterlaufen. Es muß heißen „... wenn die Verpackungskosten unberücksichtigt bleiben sollen?"

Abbildung zur Lösung 1309

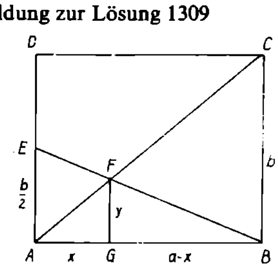
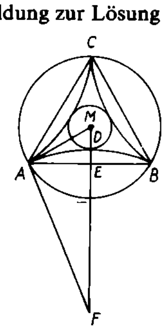


Abbildung zur Lösung 1315



Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 1/1975

5▲1321 1,35 m = 135 cm; 3,45 m = 345 cm; 135 : 15 = 9; 345 : 15 = 23. Für dieses Badezimmer benötigt man für 9 Reihen je 23 Fliesen, insgesamt also $9 \cdot 23 = 207$ Fliesen. $207 \cdot 6$ mm = 1 242 mm = 124,2 cm ≈ 1,24 m. Der Stapel Fliesen ist rund 1,24 m hoch.

5▲1322 Wir rechnen $5 \cdot (28+30) = 50 \cdot 58 = 290$, $540 - 290 = 250$ und $250 : 25 = 10$. An dieser Schule gibt es zehn Klassenräume mit je 25 Sitzplätzen.

W 5 ■ 1323 Wir rechnen $27 - 11 = 16$ und $4 \cdot 16 = 64$. Oder $x : 4 = 27 - 11$, $x : 4 = 16$, $x = 64$. In diesem Betrieb arbeiten 64 Brigaden.

W 5 ■ 1324 Angenommen, es gibt x Zimmer mit je 6 Betten; dann gilt

$$6 \cdot x + 4 \cdot 9 + 2 \cdot (9+3) = 126,$$
$$6x + 36 + 24 = 126,$$
$$6x = 66,$$
$$x = 11.$$

In diesem Studentenwohnheim gibt es elf 6-Bett-Zimmer.

W 5*1325 Aus d) folgt: Andrea besucht die Klasse 4b. Aus a) folgt: Dirk hat nicht den Familiennamen Hofmann. Aus c) folgt: Andrea hat nicht den Familiennamen Hofmann. Deshalb heißt einer der Pioniere Mario Hofmann.
Aus c) folgt: Mario Hofmann besucht die Klasse 4b und ist der jüngste, also 9 Jahre alt. Deshalb sind Dirk und Andrea beide 10 Jahre alt.
Aus b) folgt: Dirk heißt nicht mit Familiennamen Hoschke, also Meisel. Deshalb heißt Andrea mit Familiennamen Hoschke.
Ergebnis: Mario Hofmann, 9 Jahre alt, Klasse 4b, Dirk Meisel, 10 Jahre alt, Klasse 4a, Andrea Hoschke, 10 Jahre alt, Klasse 4 b.

W 5*1326 Die größte zweistellige natürliche Zahl, deren Ziffer auf die Grundziffer 2 endet, lautet 92. Streichen wir die Ziffer 2, so verbleibt die Ziffer 9.
Wegen $92 + 9 = 101 < 145$ muß eine der gesuchten Zahlen zwischen 101 und 145 liegen und auf die Grundziffer 2 enden.
Daher ist diese Zahl von der Form $10x + 2$, und wir erhalten

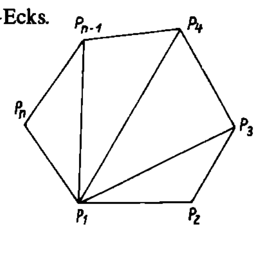
$$(10x+2) + x = 145,$$
$$11x = 143,$$
$$x = 13.$$

Die beiden natürlichen Zahlen lauten also 132 und 13; es gilt $132 + 13 = 145$.

6▲1327 Die zu ermittelnden Zahlen lassen sich darstellen durch
$n = 1000a + 100 \cdot 3a + 10 \cdot (3a - 5) + a$.
Wegen $3a \leqq 9$ gilt $a \leqq 3$. Wegen $a > 0$ kann daher a nur gleich 1, 2 oder 3 sein. Da für $a = 1$ die Zahl $3a - 5$ keine natürliche Zahl ist, gilt $a = 2$ oder $a = 3$.
Es gibt somit zwei Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, sie lauten 2612 und 3943.

6▲1328 Unter vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es genau zwei gerade und zwei ungerade Zahlen. Die Summe zweier gerader, aber auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist also in jedem Falle eine gerade Zahl, deshalb durch 2 teilbar und, weil sie größer als 2 ist, keine Primzahl.

W 6 ■ 1329 Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ und P_n die Eckpunkte eines konvexen n-Ecks. Von einem Eckpunkt aus lassen sich genau $(n-3)$ Diagonalen ziehen, die das n-Eck in $(n-2)$ Dreiecke zerlegen. Die Summe der Innenwinkel jedes dieser Dreiecke beträgt 180°; die Summe der Innenwinkel dieser $(n-2)$ Dreiecke beträgt somit $(n-2) \cdot 180°$. Sie ist gleich der Summe der Innenwinkel des n-Ecks.

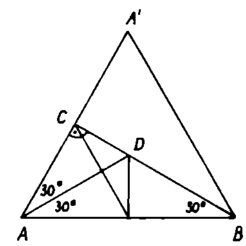


W 6 ■ 1330 Angenommen, es nehmen x Lehrerinnen und somit $(126 - x)$ Lehrer an der Weiterbildung teil, dann gilt

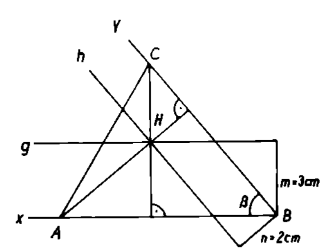
$$\frac{x}{5} = \frac{126 - x}{2},$$
$$2x = 630 - 5x,$$
$$7x = 630,$$
$$x = 90.$$

An der Weiterbildung nehmen 90 Lehrerinnen und 36 Lehrer teil.

W 6*1331 Es sei $\overline{AC} = b$ und $\overline{AB} = c = 2b$. Wir spiegeln A an der Geraden BC als Symmetrieachse; es sei A' der Bildpunkt von A. Wegen $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AC}$ und auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt dann $\overline{CA} = \overline{CA'} = b$, also $\overline{AA'} = 2b$ und $\overline{AB} = \overline{A'B} = 2b$.
Somit ist das Dreieck ABA' gleichseitig, und es gilt Winkel $\sphericalangle BAC = 60°$ und Winkel $\sphericalangle ABC = 90° - 60° = 30°$.
Da $\overline{AD}$ Winkelhalbierende ist, gilt weiter Winkel $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = 30°$. Also ist das Dreieck ABD gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$, und die Winkelhalbierende $\overline{DE}$ ist auch Seitenhalbierende. Daher gilt $\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} = b$. Das Dreieck AEC ist daher gleichschenklig und wegen Winkel $\sphericalangle CAE = 60°$ sogar gleichseitig.



W 6*1332 Zunächst ist der Winkel $\sphericalangle XBY = \beta = 50°$ mit seinem Scheitel B zu zeichnen. Danach ist zu dem Schenkel BX von β eine Parallele g im Abstand $m = 3$ cm und zu dem Schenkel BY eine Parallele h im Abstand $n = 2$ cm zu konstruieren. Der Schnittpunkt der Geraden g und h sei H. Die Senkrechte zu BX durch H schneidet BY im Punkte C, die Senkrechte zu BY durch H schneidet BX im Punkte A. Verbindet man A mit C, so erhält man das zu konstruierende Dreieck ABC.



7▲1333 Ein Spielwürfel besitzt $1+2+3+4+5+6 = 21$ Augen. Für sein Volumen gilt demnach

$$V = V_1 - V_2 = a^3 - \frac{21}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$V = (18^3 - 14\pi \cdot 1^3)\ \mathrm{mm}^3 \approx 5788\ \mathrm{mm}^3.$$

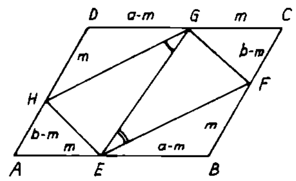
7▲1334 Das Plansoll für einen Tag betrage x m³, dann gilt

$$\begin{aligned}(x+14)+(x-2)+(x+16)&=184,\\ 3x+28&=184,\\ 3x&=156,\\ x&=52.\end{aligned}$$

Die Brigade mußte täglich 52 m³ Holz nach dem Plan bereitstellen.

W 7 ■ 1335 Wegen $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{AE}=\overline{CG}=m$ gilt $\overline{EB}=\overline{DG}=a-m$. Wegen $\overline{BC}=\overline{AD}=b$ und $\overline{BF}=\overline{DH}=m$ gilt $\overline{CF}=\overline{AH}=b-m$. Ferner gilt $\sphericalangle HAE=\sphericalangle FCG$ und $\sphericalangle EBF=\sphericalangle GDH$. Daraus folgt $\triangle AEH \cong \triangle GFC$ und $\triangle EBF \cong \triangle GDH$. ...
Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt weiter

$$\overline{EH}=\overline{FG} \text{ und } \overline{EF}=\overline{GH}.$$



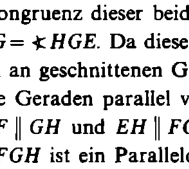
Die Diagonale $\overline{EG}$ zerlegt das Viereck $EFGH$ in zwei kongruente Dreiecke $\triangle EFG$ und $\triangle GHE$ ($\overline{EF}=\overline{HG}$, $\overline{EH}=\overline{FG}$, $\overline{EG}=\overline{EG}$). Aus der Kongruenz dieser beiden Dreiecke folgt $\sphericalangle FEG=\sphericalangle HGE$. Da diese Winkel Wechselwinkel an geschnittenen Geraden sind, müssen die Geraden parallel verlaufen. Deshalb gilt $EF \parallel GH$ und $EH \parallel FG$, d. h., das Viereck $EFGH$ ist ein Parallelogramm.

W 7 ■ 1336 Angenommen, es gebe x Kabinen mit zwei Betten, y Kabinen mit drei Betten und z Kabinen mit vier Betten; dann gilt

$$\begin{array}{rcll} x+y+z &=& 29 & \cdot 4\\ 2x+3y+4z &=& 86 & \cdot(-1)\\ \hline 4x+4y+4z &=& 116 & \\ -2x-3y-4z &=& -86 & +\\ \hline 2x+y &=& 30 & \\ y &=& 30-2x, & \end{array}$$

Da x, y und z sämtlich natürliche Zahlen sind, ist $2x$ eine gerade natürliche Zahl. Dann ist auch $y=30-2x$ eine gerade natürliche Zahl. Daher ist die Behauptung des Fahrgastes falsch.

W 7*1337 Wir drehen das dem Kreis einbeschriebene Quadrat um den Mittelpunkt des Kreises als Drehzentrum um 45°.



Es seien A_1, A_2, A_3 die Maßzahlen der Flächeninhalte des Kreises, des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Quadrates; dann gilt $A_1=\pi r^2$ $A_2=(2r)^2$, $A_3=4\cdot\frac{1}{2}\cdot r^2=2r^2$. Für das arithmetische Mittel aus A_2 und A_3 erhalten wir $m_1=\frac{1}{2}(4r^2+2r^2)=3r^2$, und es gilt $3r^2<\pi r^2$, weil $3<\pi=3{,}14\ldots$ Der Flächeninhalt des Kreises ist also größer als das arithmetische Mittel aus den Maßzahlen der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

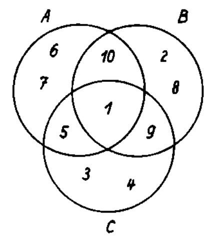
Es seien u_1, u_2, u_3 die Maßzahlen der Umfänge des Kreises, des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Quadrates; dann gilt $u_1=2\pi r$, $u_2=8r$, $u_3=4r\sqrt{2}$. Für das arithmetische Mittel aus u_2 und u_3 erhalten wir

$$m_2=\frac{1}{2}(8r+4r\sqrt{2})=2r(2+\sqrt{2}).$$

Nun gilt aber

$$\frac{2r(2+\sqrt{2})}{2\pi r}=\frac{2+\sqrt{2}}{\pi}=\frac{2+1{,}41}{3{,}14}>1.$$

Der Umfang des Kreises ist also kleiner als das arithmetische Mittel aus den Maßzahlen der Umfänge der beiden Quadrate. Die Behauptungen treffen daher in beiden Fällen nicht zu.



W 7*1338 $A=\{1, 5, 6, 7, 10\}$; $B=\{1, 2, 8, 9, 10\}$

W 8 ■ 1339 a) Die mittlere Geschwindigkeit auf der 1 000-m-Bahn betrug für *Eduard Rapp* (UdSSR)

$$v_1=\frac{1000}{67{,}61}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}=14{,}79\ \mathrm{m}\cdot s^{-1}=53{,}24\ \mathrm{km}\cdot \mathrm{h}^{-1},$$

für *Ferrucio Ferro* (Italien)

$$v_2=\frac{1000}{67{,}66}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}=14{,}78\ \mathrm{m}\cdot s^{-1}=53{,}21\ \mathrm{km}\cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

b) Als *Rapp* durch das Ziel fuhr, hatte *Ferro* noch 0,05 s zu fahren, bis er das Ziel erreichte. Da *Ferro* in 1 Sekunde 14,78 m zurücklegte, betrug sein Abstand von dem Ziel noch

$$14{,}78\cdot 0{,}05\ \mathrm{m}\approx 0{,}74\ \mathrm{m}.$$

Rapp hatte also bei der Fahrt durch das Ziel einen Vorsprung von 0,74 m.

W 8 ■ 1340 Angenommen, es gibt ein solches Dreieck mit der Maßzahl der Höhe h und der Maßzahl der Seitenlänge a. Dann ist die Maßzahl des Flächeninhalts gleich

$$A_2=\frac{a\cdot h}{2}$$

und die Maßzahl des Umfangs gleich

$u=3a$. Wegen $A=u$ gilt

$$\frac{a\cdot h}{2}=3a, \text{ also } h=6, \text{ wegen } a\neq 0.$$

Hat nun ein gleichseitiges Dreieck eine Höhe, deren Maßzahl $h=6$ ist, so gilt

$$A=\frac{a\cdot 6}{2}=3a=u,$$

d. h., die Maßzahl A des Flächeninhalts ist gleich der Maßzahl u des Umfangs, es gibt also ein gleichseitiges Dreieck mit der verlangten Eigenschaft.

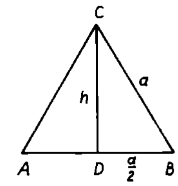
In einem solchen gleichseitigen Dreieck (siehe Bild) gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2=h^2+\frac{a^2}{4},\ \frac{3}{4}a^2=h^2,\ a^2=\frac{4h^2}{3}=\frac{4h^2\cdot 3}{9},$$

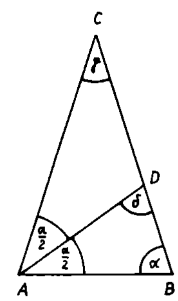
also $a=\frac{2h}{3}\sqrt{3}$ und daher wegen $h=6$

$$a=\frac{2\cdot 6}{3}\sqrt{3}=4\sqrt{3}\approx 6{,}93.$$

Ferner gilt $A=u=3a=12\sqrt{3}\approx 20{,}8$.



W 8*1341 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis $\overline{AB}$ ebenso lang wie die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ des Basiswinkels $\sphericalangle CAB$ sei (vgl. das Bild).



Bezeichnet man die Größen der Winkel mit $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABC=\alpha$, $\sphericalangle BCA=\gamma$, $\sphericalangle BDA=\delta$, so gilt $\sphericalangle CAD=\sphericalangle DAB=\frac{\alpha}{2}$.

Wegen $\overline{AB}=\overline{AD}$ ist das Dreieck ABD ebenfalls gleichschenklig; daher gilt $\delta=\alpha$.
Da die Winkelsumme des Dreiecks ABD gleich 180° ist, gilt weiter

$$\alpha+\frac{\alpha}{2}+\delta=180^\circ,$$

$$\text{also } \frac{5}{2}\alpha=180^\circ,\ \alpha=72^\circ.$$

Daher ist der Winkel an der Spitze des Dreiecks ABC gleich

$$\gamma=180^\circ-2\alpha=180^\circ-144^\circ=36^\circ.$$

W 8*1342 Da a und b nach Voraussetzung gerade natürliche Zahlen sind, sind auch die Zahlen $a+b$, $a-b$ und ab gerade Zahlen. Wir haben daher nur noch nachzuweisen, daß wenigstens eine dieser drei Zahlen durch 3 teilbar ist.

1. Ist nun a oder b durch 3 teilbar, so ist ab durch 3 teilbar.

2. Ist weder a noch b durch 3 teilbar, so läßt jede dieser Zahlen bei der Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Daher gilt

$$a=3m+1 \quad\text{oder}\quad a=3m+2,$$
$$b=3n+1 \quad\text{oder}\quad b=3n+2,$$

wobei m und n natürliche Zahlen sind.
Ist $a=3m+1$ und $b=3n+1$, so ist $a-b=(3m+1)-(3n+1)=3m-3n=3(m-n)$ durch 3 teilbar.

Ist $a=3m+2$ und $b=3n+2$, so ist
$a-b=(3m+2)-(3n+2)=3m-3n$
$=3(m-n)$ durch 3 teilbar.

Ist $a=3m+1$ und $b=3n+2$, so ist
$a+b=(3m+1)+(3n+2)$
$=3m+3n+3=3(m+n+1)$ durch 3 teilbar.

Ist $a=3m+2$ und $b=3n+1$, so ist ebenfalls
$a+b=(3m+2)+(3n+1)$
$=3(m+n+1)$ durch 3 teilbar.

3. In allen Fällen ist also wenigstens eine der drei Zahlen $a+b$, $a-b$, ab durch 3 teilbar und daher auch, da es gerade Zahlen sind, durch 6 teilbar, w. z. b. w.

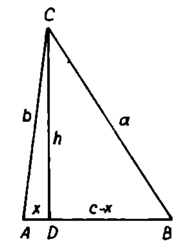
W 9 ■ 1343 Es seien $2k+1$, $2k+3$, $2k+5$, $2k+7$ vier aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen, wobei k eine natürliche Zahl ist. Dann ist das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl gleich
$P_1=(2k+3)(2k+5)=4k^2+16k+15$
und das Produkt aus der ersten und vierten Zahl gleich
$P_2=(2k+1)(2k+7)=4k^2+16k+7$.
Es gilt also für alle k
$P_1-P_2=8$,
d. h., wenn man beliebige vier aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen, z. B. 1, 3, 5, 7 oder 3, 5, 7, 9 usw. wählt, so ist stets das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl um 8 größer als das Produkt aus der ersten und vierten Zahl.

W 9 ■ 1344 Es seien a die Maßzahl der Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und h die Maßzahl der Höhe des Prismas. Dann ist die Maßzahl des Volumens des Prismas gleich
$$V=a^2h$$
und die Maßzahl der Oberfläche gleich
$$A=2a^2+4ah=2a(a+2h).$$
Wegen $V=A$ folgt daraus
$$a^2h=2a(a+2h),$$
also wegen $a\neq 0$
$$ah=2a+4h,$$
$$h(a-4)=2a,$$
$$h=\frac{2a}{a-4}.$$
Da a und h von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, gilt $a-4>0$, also $a>4$.
Ferner gilt
$$h=\frac{2a-8+8}{a-4}=\frac{2(a-4)}{a-4}+\frac{8-}{a-4}=2+\frac{8}{a-4}.$$
$a-4$ ist also ein Teiler von 8, da h eine natürliche Zahl ist. Wegen $a-4>0$ kann daher $a-4$ nur gleich 1, 2, 4 oder 8 sein.
Die folgende Tabelle zeigt die vier Möglichkeiten für a und h; in diesen vier Fällen (und nur in diesen Fällen) gilt $V=A$.

$a-4$	1	2	4	8
a	5	6	8	12
$h=2+\frac{8}{a-4}$	10	6	4	3
$V=a^2h$	250	216	256	256
$A=2a(a+2h)$	250	216	256	432

W 9*1345 Die Menge $N=\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ enthält genau n gerade und genau n ungerade Zahlen. Die Menge M möge genau p gerade und genau q ungerade Zahlen enthalten. Da die Menge M als Teilmenge der Menge N genau $n+1$ Zahlen enthält, enthält sie mindestens 1 und höchstens n ungerade Zahlen sowie mindestens 1 und höchstens n gerade Zahlen; es gilt $p+q=n+1$. Wir können daher die Menge M so ordnen, daß wir zunächst die p geraden Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ und dann die q ungeraden Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_q$ angeben:
$$a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q \qquad (1)$$
Jede der geraden Zahlen a_i ist gleich dem Produkt aus einer Potenz von 2 und einer ungeraden Zahl $c_i : a_i=2^{s_i}\cdot c_i$. Jetzt ordnen wir jeder geraden Zahl a_i der Zeile (1) die ungerade Zahl c_i zu und jeder ungeraden Zahl der Zeile (1) diese Zahl selbst zu und erhalten die Zahlen:
$$c_1, c_2, \ldots, c_p, b_1, b_2, \ldots, b_q \qquad (2)$$
In der Zeile (2) stehen $p+q=n+1$ ungerade Zahlen, die alle kleiner als $2n$ sind. Da es aber nur n solche Zahlen gibt, müssen mindestens zwei Zahlen der Zeile (2) übereinstimmen. Es gilt daher entweder $c_i=c_k$ oder $c_i=b_j$.
Im ersten Falle gilt
$$a_i=2^{s_i}\cdot c_i,\ a_k=2^{s_k}\cdot c_k,$$
$$\text{also } \frac{a_i}{a_k}=\frac{2^{s_i}}{2^{s_k}}=2^{s_i-s_k}.$$
Da wir o. B. d. A. $s_i>s_k$ annehmen können, ist $2^{s_i-s_k}$ eine ganze Zahl, also a_i durch a_k teilbar. Im zweiten Falle gilt
$$a_i=2^{s_i}\cdot c_i,\ b_j=c_i,\ \text{also } \frac{a_i}{b_j}=2^{s_i}$$
d. h. a_i ist durch b_j teilbar. In jedem Falle gibt es also in M zwei Zahlen, von denen die eine durch die andere teilbar ist, w. z. b. w.

W 9*1346 a) Wir nehmen zunächst an, daß die Höhe $\overline{CD}=h$ innerhalb des Dreiecks ABC liegt (vgl. das Bild) und bezeichnen die Länge der Strecke $\overline{AD}$ mit x. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras
$$h^2=b^2-x^2, \qquad (1)$$
$$h^2=a^2-(c-x)^2. \qquad (2)$$
Daraus folgt
$$a^2-c^2+2cx-x^2=b^2-x^2, \qquad (3)$$
$$2cx=b^2+c^2-a^2,$$
$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}. \qquad (4)$$
Wegen (1) gilt weiter
$$h=\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (5)$$
Ferner gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC
$$A=\frac{ch}{2}=\frac{c}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (6)$$
Es läßt sich leicht zeigen, daß die Formeln (5) und (6) auch dann gültig sind, wenn die Höhe $\overline{CD}$ außerhalb des Dreiecks liegt.
Für die praktische Rechnung ist es zweckmäßig, die Formeln (5) und (6) noch umzugestalten. Wir erhalten
$$h=\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{(b+x)(b-x)}$$
$$=\sqrt{\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)},$$
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)}$$
$$\overline{(2bc-b^2-c^2+a^2)},$$
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\,[a^2-(b-c)^2]},$$
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)}$$
$$\frac{2c}{(a+b-c)(a-b+c)}.$$
Setzt man



$a+b+c=2s$, so wird
$b+c-a=2s-2a=2(s-a)$,
$a+c-b=2s-2b=2(s-b)$,
$a+b-c=2s-2c=2(s-c)$,
also $h=\frac{1}{2c}\sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (7)$$
Wegen (6) folgt daraus für den Flächeninhalt
$$A=\frac{ch}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (8)$$
Die Formel (8) wird auch die *Heronische Inhaltsformel* genannt nach dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 130 u. Z.).
b) Man erhält für $a=12$ cm, $b=10$ cm, $c=8$ cm
$$s=\frac{a+b+c}{2}=15\text{ cm},$$
$$s-a=3\text{ cm},$$
$$s-b=5\text{ cm},$$
$$s-c=7\text{ cm};$$
daher gilt wegen (7) und (8)
$$h=\frac{2}{8}\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\text{ cm}$$
$$=\frac{15}{4}\sqrt{7}\text{ cm}\approx 9{,}92\text{ cm},$$
$$A=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\text{ cm}^2$$
$$=15\sqrt{7}\text{ cm}^2\approx 39{,}69\text{ cm}^2.$$

W 10/12 ■ 1347 Aus (1) folgt für den jährlichen Steigerungsfaktor q der UdSSR
$$q^{10}=\frac{91{,}0}{45{,}3},$$
$$10\cdot\log q=\lg 91{,}0-\lg 45{,}3,$$
$$\lg q=\frac{\lg 91{,}0-\lg 45{,}3}{0\,10}=0{,}03029.$$
Analog erhält man für den jährlichen Steigerungsfaktor r der USA
$$r^{10}=\frac{119{,}3}{106{,}2},$$
$$\lg r=\frac{\lg 119{,}3-\lg 106{,}2}{10}=0{,}00505.$$
Ferner erhält man aus (2)
$$91{,}0\cdot q^x=119{,}3\cdot r^x,$$

$$\left(\frac{q}{r}\right)^x = \frac{119,3}{91,0},$$
$$x(\lg q - \lg r) = \lg 119,3 - \lg 91,0,$$
$$x = \frac{\lg 119,3 - \lg 91,0}{\lg q - \lg r} = \frac{0,1176}{0,0252} \approx 4,7.$$

Unter Voraussetzung gleichbleibender jährlicher Steigerungsfaktoren war also nach rund 5 Jahren, d. h., im Jahre 1970, damit zu rechnen, daß die UdSSR die USA in der Rohstahlproduktion überholen wird. Tatsächlich erfolgte das Überholen 1 Jahr später, nämlich im Jahre 1971, in dem die Rohstahlproduktion in der UdSSR 120,7 Mill. t, dagegen in den USA 109,3 Mill t betrug. Diese Differenz (von 1 Jahr) hat verschiedene Ursachen, eine der Ursachen ist die durch Konjunkturschwankungen in den USA bedingte ungleichmäßige Entwicklung; daher war die Annahme eines gleichbleibenden Steigerungsfaktors nur angenähert zutreffend.

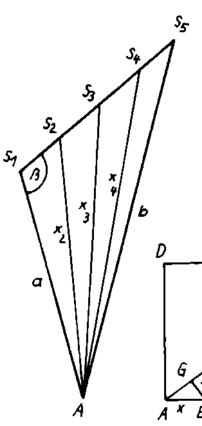
W 10/12 ■ 1348 Wir setzen $\overline{S_1S_5} = c = 4 \cdot 1,8 \text{ m} = 7,2 \text{ m}$, $\sphericalangle S_5S_1A = \beta$, $\overline{AS_2} = x_2$, $\overline{AS_3} = x_3$, $\overline{AS_4} = x_4$ (vgl. das Bild).
Dann gilt nach dem Kosinussatz

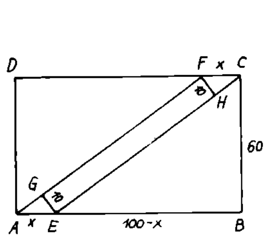
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{8^2+7,2^2-13^2}{2 \cdot 8 \cdot 7,2} = -\frac{53,16}{115,2} = -0,4615.$$

Ferner erhalten wir

$$x_2^2 = (8^2 + 1,8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 1,8 \cos\beta)\text{ m}^2 = (64 + 3,24 + 13,29)\text{m}^2 = 80,53 \text{ m}^2,$$
$$x_2 = 8,97 \text{ m};$$
$$x_3^2 = (8^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3,6 \cos\beta)\text{ m}^2 = (64 + 12,96 + 26,58)\text{ m}^2 = 103,54 \text{ m}^2,$$
$$x_3 = 10,18 \text{ m};$$
$$x_4^2 = (8^2 + 5,4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5,4 \cos\beta)\text{ m}^2 = (64 + 29,16 + 39,87)\text{m}^2 = 133,03 \text{ m}^2,$$
$$x_4 = 11,53 \text{ m}.$$

Die gesuchten Abstände des Standortes A von den Mittelpunkten S_2, S_3 bzw. S_4 der zweiten, dritten bzw. vierten Schale betragen also 8,97 m, 10,18 m, 11,53 m.





W 10/12*1349 Der von dem Weg eingenommene Teil des Grundstücks stellt ein Parallelogramm $AECF$ dar, dessen Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{FC}$ die Maßzahl x haben mögen. Ferner sei G der Fußpunkt des von E auf AF und H der Fußpunkt des von F auf EC gefällten Lotes (vgl. das Bild). Dann gilt für die Maßzahlen der Längen der Seiten der rechtwinkligen Dreiecke AEG und EBC

$$\overline{AE} = x,\ \overline{EG} = 10,\ \overline{AG} = \sqrt{x^2 - 100},$$
$$\overline{EB} = 100 - x,\ \overline{BC} = 60.$$

Wegen $AG \parallel EC$ gilt nun

$$\triangle AEG \sim \triangle EBC,$$

also
$$\overline{AG} : \overline{EG} = \overline{EB} : \overline{BC},$$
$$\sqrt{x^2 - 100} : 10 = (100 - x) : 60,$$
$$6\sqrt{x^2 - 100} = 100 - x,$$
$$36x^2 - 3600 = 10000 - 200x + x^2,$$
$$35x^2 + 200x - 13600 = 0,$$
$$x^2 + \frac{40}{7}x - \frac{2720}{7} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$x = -\frac{20}{7} + \sqrt{\frac{400}{49} + \frac{2720}{7}} = \frac{-20 + \sqrt{19440}}{7},$$
$$x \approx \frac{-20 + 139,4}{7} \approx 17,06.$$

Nun ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms $AEFC$ gleich dem Produkt aus der Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AE} = x$ und der Maßzahl der zugehörigen Höhe $\overline{BC} = 60$

$$A \approx 17,06 \cdot 60 \approx 1024.$$

Der Flächeninhalt des von dem Weg eingenommenen Teils des Grundstücks beträgt daher rund 1020 m².

W 10/12*1350 a) Aus $z = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{15}$ und $zx = x + x^2 + \ldots + x^{15} + x^{16}$ folgt durch Subtraktion

$$zx - z = x^{16} - 1,$$
$$z(x-1) = x^{16} - 1$$

und hieraus wegen $x - 1 \neq 0$

$$z = \frac{x^{16} - 1}{x - 1} \qquad (1)$$

Das ist die geforderte Umformung; denn man benötigt zur Berechnung von

$x^2 = x \cdot x$ 1 Multiplikation
$x^4 = x^2 \cdot x^2$ 1 weitere Multiplikation,
$x^8 = x^4 \cdot x^4$ 1 weitere Multiplikation,
$x^{16} = x^8 \cdot x^8$ 1 weitere Multiplikation,
zusammen also 4 Multiplikationen.
Ferner benötigt man zur Berechnung von
$\frac{x^{16} - 1}{x - 1}$ 1 Division,
so daß also insgesamt 5 Multiplikationen bzw. Divisionen notwendig sind.

b) Wir versuchen, den Ausdruck

$$z = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{15}$$

so umzuformen, daß eine Summe von Produkten entsteht, zu deren Berechnung nicht mehr als 5 Multiplikationen erforderlich sind. Wir erhalten

$$z = 1 + (x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13}) + (x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14}) + (x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15}),$$
$$z = 1 + x(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}) + x^2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}) + x^3(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}),$$
$$z = 1 + (x + x^2 + x^3)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}),$$
$$z = 1 + (x + x^2 + x^3)\left[(1 + x^3 + x^6) + x^6(x^3 + x^6)\right]. \qquad (2)$$

Damit haben wir eine Umformung erhalten, die den gestellten Forderungen entspricht; denn man benötigt zur Berechnung von

$x^2 = x \cdot x$ 1 Multiplikation,
$x^3 = x^2 \cdot x$ 1 weitere Multiplikation,
$x^6 = x^3 \cdot x^3$ 1 weitere Multiplikation.

Mit diesen drei Multiplikationen sind bereits (da Additionen nicht gezählt werden) die Summen

$$x + x^2 + x^3,\ 1 + x^3 + x^6,\ x^3 + x^6$$

erfaßt worden. Wir benötigen jetzt nur noch zur Berechnung von

$x^6(x^3 + x^6)$ 1 weitere Multiplikation,
$(x + x^2 + x^3)\left[(1 + x^3 + x^6) + x^6(x^3 + x^6)\right]$
1 weitere Multiplikation, so daß insgesamt nur 5 Multiplikationen erforderlich sind, womit auch die Aufgabe b) gelöst ist.

Lösung zu: Der „Dirichletsche Schubfachschluß", Heft 1/75

a) Bei der Division einer natürlichen Zahl n durch 1000 können die Reste 0, 1, 2, 3, ..., 999 auftreten.
Aus $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, ... folgt, daß die Potenzen von 7 nur auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden.
Von den bei der Division durch 1000 auftretenden Resten können deshalb diejenigen fortfallen, die auf die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6 oder 8 enden. Es entfallen also alle geraden Zahlen, das sind 500 Zahlen, ferner noch alle auf die Ziffer 5 endenden Zahlen, das sind weitere 100 Zahlen. Auf die verbleibenden 400 Reste verteilen wir die ersten 400 Potenzen der 7. Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.

1. Fall: Wenigstens eine der Potenzen $7^1, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{400}$ läßt bei Division durch 1000 den Rest 1, endet also auf die Ziffern 001, dann wäre die Existenz einer solchen Potenz bereits gesichert.

2. Fall: Keine dieser 400 Potenzen läßt bei Division durch 1000 den Rest 1. Dann lassen wenigstens zwei der Potenzen den gleichen Rest r, und es gilt

$$7^k = 1000m + r,$$
$$7^i = 1000n + r,$$
$$7^k - 7^i = 1000(m - n),$$
$$7^i(7^{k-i} - 1) = 1000(m - n),$$

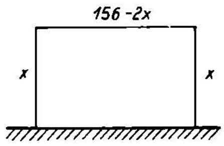
wobei $k > i$ gelte.
Da 7^i zu 1000 teilerfremd ist, muß 7^{k-i} bei Division durch 1000 den Rest 1 lassen. Wegen $0 < k - i < 400$ gehört 7^{k-i} zu den ersten 400 Potenzen der 7. Deshalb ist nur der 1. Fall richtig.

b) Es sei 7^m die kleinste Potenz, die bei Division durch 1000 den Rest 1 läßt, also auf die Ziffern 001 endet.
Dann läßt auch $(7^m)^n$ bei Division durch 1000 den Rest 1, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Das heißt, es gibt unendlich viele Potenzen von 7, die auf die Ziffern 001 enden.
Ohne Beweis: Die kleinste auf die Ziffern 001 endende Potenz von 7 ist 7^{20}, eine 17stellige Zahl.

Lösung zu: Ein Zaun und ... eine quadratische Funktion, Seite 65

Die zur Wand senkrechten Seiten mögen je x Meter lang sein; dann hat die zur Wand parallele Seite $(156-2x)$ Meter, und der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $S=x(156-2x)$ Quadratmeter. (siehe Bild) Wir formen den Ausdruck für den Flächeninhalt um, indem wir ein vollständiges Quadrat abtrennen:

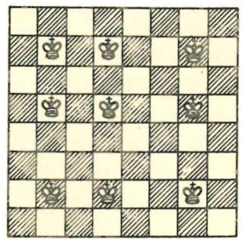
$$S=x(156-2x)=-2(x^2-78x+1521-1521)$$
$$=-2[(x-39)^2-1521]=-2\cdot(-1521)$$
$$-2(x-39)^2 \text{ oder } S=3042-2(x-39)^2.$$



Somit ist der Flächeninhalt des Rechtecks (des Maschinenhofs) gleich der Differenz aus der konstanten Größe 3042 und der veränderlichen Größe $2\cdot(x-39)^2$. Da aber der Ausdruck $2\cdot(x-39)^2$ nicht negativ sein kann, beträgt der Flächeninhalt höchstens 3042 Quadratmeter; dieser Wert wird erreicht, falls $2\cdot(x-39)^2=0$, also $x=39$ ist, d. h., die Länge des Hofs (in Richtung der Wand) muß 78 Meter betragen, die Breite dagegen 39 Meter. Unter genau diesen Bedingungen wird der Flächeninhalt des Grundstücks maximal und beträgt 3042 Quadratmeter.

Anmerkung: Es ergibt sich, daß die eine Seite des Rechtecks doppelt so lang sein muß wie die andere. Versucht zu beweisen, daß dieses Ergebnis „unabhängig von der Zaunlänge" ist (man setze diese gleich z und rechne dann genauso wie oben gezeigt)!

Lösungen zu
Rund um das Schachbrett Heft 2/75



Der König

Damen auf dem Schachbrett

a) Die Damesteine stellt man u. a. auf die Felder c6, c3, f8, h5.

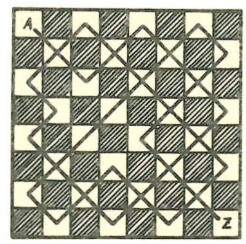
b) Die Damesteine kann man u. a. auf die Felder d6, e5, f4, g8 und h7 stellen.

c) Mit einem Damestein kann man 1456 Züge machen.

Das Petrow-Dreieck

Derartige Damestellungen gibt es vier: 1. weiß c3, e3 und d6, schwarz d8; 2. weiß d6, f6 und e3, schwarz e1; 3. weiß f4, f6 und c5, schwarz a5; 4. weiß c3, c5 und f4, schwarz h4. Bei jedem dieser Dreiecke bildet eine Dame die Dreiecksspitze (zum Brettrand). Das Dreieck ist in jeder konkreten Stellung in der geringsten Zugzahl aufzubauen. In allen vier Fällen hat die schwächere Seite, deren Dame binnen vier Züge gefangen wird, den Anzug. Sobald die einzelne Dame gezogen hat, zieht die gegnerische Dame vom großen Weg an das Ende der Diagonale der einzelnen Dame. Wenn diese dann wieder am Zug ist, folgt ein doppeltes Damenopfer nach folgendem Muster.

1. ... d8 – h4; 2. c3 – e1! h4 – f6; 3. e3 – g5! f6; h4; 4. d6 – g3; h4:f2; 5. el:beliebig (Falls hingegen 1. ... d8 – a5, so 2. c3 – e1! a5 – d8; 3. c3 – b6! d8 : a5; 4. d6 – b4 a5 : beliebig und 5. el : beliebig).



Von A bis Z

Das zersprungene Schachbrett

Die Lösung sei jedem Leser selbst überlassen!

Magisches Quadrat

5g und 2b; 1g und 2b; 5a und 5d

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 3

Wurzeln
корни · roots · racines

$\sqrt[n]{}=b$, n-te Wurzel aus c gleich b
корень энной степени из c равен b
(the) n-th root of c is equal to b
racine ennième de c égale b

$\sqrt[n]{}$ Wurzelausdruck
корень · radical · terme radical

$\sqrt{}$ Wurzelzeichen
знак корня
· root sign (radical sign) · signe radical

n Wurzelexponent
показатель корня index of a root
exposant d'une racine

c Radikand
подкоренное выражение · radicand · base

b Wurzelwert
значение корня
value of a root · valeur d'une racine

$\sqrt[n]{c^m}=c^{\frac{m}{n}}$, n-te Wurzel aus c hoch m gleich c hoch m n-tel
корень энной степени из c в степени m равен c в степени m, делённое на n
the n-th root of c to the m-th equals c to the power of m over n
racine ennième de c puissance m égale c puissance m sur n

$\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x
корень квадратный из x
square root of x · racine carrée de x

$\sqrt[3]{x}$ Kubikwurzel aus x
корень кубический из x
cube root of x · racine cubique de x

radizieren
извлечь корень
to extract a root · extraire la racine

einen Wurzelausdruck durch eine Potenz mit gebrochenem Exponenten wiedergeben
необразовать подкоренное выражение с помощью степени с дробным показателем
to express a radical by a power with a fractional exponent
reproduire un terme radical par une puissance à un exposant fractionnaire

Potenzen
возвести в степень · Powers · Puissances

$b^n=c$, b hoch n gleich c
b в энной степени равно c
b to the n-th power is equal to c
b puissance n égale c

b Basis
основание степени · base · base

n Potenzexponent
показатель степени · power exponent
exposant d'une puissance

c Potenzwert
значение степени · value of a power
valeur d'une puissance

b^n Potenz
степень · power · puissance

$b^{-n}=\frac{1}{b^n}$, b hoch minus n gleich eins durch b hoch n
b в степени минус n равно единице делённой на b в энной степени
b to the power of minus n is equal to one over b to the n-th
b puissance moins n égale un sur b puissance n

b^2 b Quadrat
b в квадрате (или: b квадрат)
b squared · b au carré

b^3 b hoch drei
b в кубе · b cubed · b puissance trois

potenzieren
возвести в степень · to raise to a power
élever à une puissance

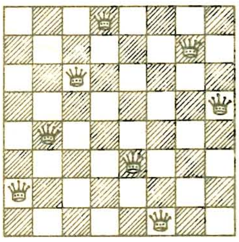
eine Zahl quadrieren
возвести число в квадрат
to square a number · carrer un nombre

Er kommt niemals zum Ziel

Der Springer gelangt immer von einem schwarzen Feld auf ein weißes und dann vom weißen wiederum auf ein schwarzes usw. Das Schachbrett hat 64 Felder. Um nach h8 zu gelangen, muß der Springer, wenn er jedes Feld berührt, 63 Züge ausführen. Am Anfang steht der Springer auf einem schwarzen Feld und am Ende muß er ebenfalls auf einem schwarzen Feld ankommen. Das ist unmöglich, weil der 63. Zug ein ungerader ist und der Springer bei jedem ungeraden Zug, da er doch auf einem schwarzen Feld beginnt, auf ein weißes Feld kommt.

Rössel und Läufer

Die Red. *alpha* erwartet Lösungsvorschläge.



Acht-Königinnen-Problem

Lösungen zu alpha-heiter 3/75

Wie viele sind es?

$$x+y+z=12$$
$$2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=48$$
$$y=36-7x$$

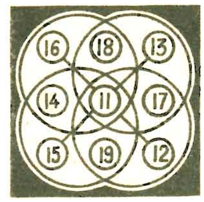
Fünf Männer, eine Frau und sechs Kinder transportierten die 12 Brote.

Drei Kästchen

Man nehme eine Kugel aus dem Kästchen „schwarz/weiß“ heraus. Da die Beschriftung falsch ist, müssen zwei Kugeln gleicher Farbe in ihm stecken (2× schwarz oder 2× weiß). Sollte die entnommene Kugel weiß sein, ist die andere auch weiß. Analog folgt, daß mit dem Kästchen 2× weiß zwei schwarze Kugeln liegen und im dritten können nur schwarz/weiß sein. Wenn die gezogene Kugel schwarz ist, dann ist die andere auch schwarz, in dem Kästchen mit der Beschriftung schwarz/schwarz stecken eine schwarze und eine weiße Kugel.

Angeln mit vielen Unbekannten

Da die Summe der Endziffern der geangelten Fische $2+3+3+4=12$ mit der Ziffer 2 endet und es kein Quadrat einer natürlichen Zahl gibt, das mit 2 endet, muß es sich nicht um vier, sondern um drei Personen handeln. $(2+3+4=9)$, d. h., daß der Sohn von einem gleichzeitig der Vater von dem anderen ist. Nikolai kann nicht der Sohn vom Vater Peter sein, da seine Beute mit der Ziffer 2 endet und nicht, wie es im Text – 4 – heißt. Daraus folgt, daß Peter der Sohn von Nikolai ist.



Arithmetisches Rätsel

Beim Einkauf

Der Mann hatte am Anfang 99,98 Lewa, nach dem Einkauf 49,99 Lewa.

Das Lotterielos

Die Summe der Ziffern einer fünfstelligen Zahl kann nicht größer als 45 sein $(9+9+9+9+9=45)$. Sie kann nicht kleiner gewesen sein, sonst würde es mehrere Möglichkeiten geben und der Vater würde die Zahl nicht sofort erkennen. Das Los trägt die Zahl 99999 und mein Vater ist 45 Jahre alt.

Kryptarithmetik

$120\cdot 589=70\,680$;
$177\cdot 594=104\,368$
$8+24-12=20$;
$(2\cdot 7)+17=31$
$7+(63:21)=10$;
$17+94-50=61$

Die Treppe

5	35			
34	4			
36	2	38		
3	37	1		
19	21	17	23	
20	18	22	16	
30	8	32	6	29
9	31	7	33	10
14	26	12	28	15
25	13	27	11	24

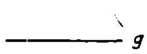
Geometrie

геометрия · geometry · géométrie

Planimetrie

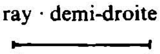
планиметрия · planimetry · planimétrie

Geraden und Winkel
прямые углы
lines and angles · droites et angles

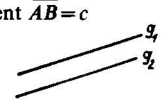


Gerade g
прямая g · straight line g · droite g

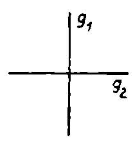
Strahl
луч · ray · demi-droite



Strecke $\overline{AB}=c$
отрезок $\overline{AB}$ на g
line segment AB is equal to c
segment $\overline{AB}=c$

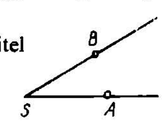


g_1 ist parallel zu g_2 $(g_1 \parallel g_2)$
g_1 и g_2 параллельны между собой
g_1 is parallel to g_2
g_1 ist parallel to g_2



g_1 steht senkrecht auf g_2 $(g_1 \perp g_2)$
g_1 перпендикулярно к g_2
g_1 is perpendicular to g_2
g_1 perpendiculaire à g_2 (*oder auch:* g_1 et g_2 orthogonaux)

Scheitel



вершина · vertex · sommet

Schenkel
сторона (угла) · leg · côté

Winkel ASB
угол ASB · angle ASB · angle ASB

spitzer Winkel
острый угол · acute angle · angle aigu

rechter Winkel
прямой угол · right angle · angle droit

stumpfer Winkel
тупой угол · obtuse angle · angle obtus

gestreckter Winkel
развёрнутый угол
straight angle · angle plat

überstumpfer Winkel
угол больше 180°
reflex angle · angle de plus de 180°

Komplementwinkel $(+=90°)$
дополнительные углы, сумма которых равна 90°
complementary angles
angles complémentaires

Supplementwinkel
дополнительные углы, сумма которых равна 180°
supplementary angles
angles supplémentaires

Winkelpaare an einer Transversalen durch zwei Gerade
пары углов, образуемых при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой
pairs of angles made by a transversal cutting ob two straight lines
angles formés par deux parallèles coupés par une sécante

Stufenwinkel
соответственные углы
corresponding angles · angles correspondants

Scheitelwinkel
вертикальные углы
vertical · angles opposés (par le sommet)

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

● Seit 1969 fördern Studenten der Sektion Mathematik/Geographie der PH *Karl Friedrich Wilhelm Wander* Dresden interessierte und talentierte Schüler der Klassen 5 bis 8. Die künftigen Mathematiklehrer wollen ihr bereits erworbenes fachliches Wissen an die Schüler weitergeben und dabei wertvolle Erfahrungen in der Planung und Gestaltung der außerunterrichtlichen Arbeit sammeln. Allen Teilnehmern macht es Freude, Denk- und Knobelaufgaben zu stellen, die sie selbst erdacht, aus Büchern oder der *alpha* ausgewählt und mit denen sie sich schon gründlich beschäftigt haben.

Spiel und Sport werden natürlich im Lager groß geschrieben. Unser Bild zeigt *Junge Mathematiker* beim Training für die Mopedfahrerlaubnis.

Zwei Aufgaben aus ihrer Arbeit:

Klasse 6: Drei Offiziere der NVA treffen sich zu einer Besprechung:
Major *Weiß*, Oberleutnant *Schwarz* und Hauptmann *Braun*. Beiläufig bemerkte der Schwarzhaarige: „Es ist merkwürdig, daß einer von uns weiße, einer schwarze und einer braune Haare hat, daß jedoch keiner von uns die Haarfarbe hat, die seinem Namen entspricht."
„Du hast recht", entgegnete Major *Weiß*. Welche Haarfarbe hat der Hauptmann?

Klasse 8: Es stehen fünf einzelne Spulen mit den Widerständen 1 Ω, 2 Ω, 5 Ω, 10 Ω und 20 Ω zur Verfügung. Stelle fest, wie viele Widerstände gemessen werden können, wenn die Spulen jeweils in Reihe geschaltet sind!

● Der im Jahre 1972 in Gräfenhainichen gebildete *Kreisklub Junger Mathematiker* kann eine Reihe schöner Erfolge aufweisen: So konnten z. B. im Februar 1975 die sieben Teilnehmer im Bezirksausscheid einen 1., 2., 5. und 6. Platz erringen.
Höhepunkt der Arbeit ist das jährlich in den Sommerferien durchgeführte vierzehntägige Spezialistenlager (für Kl. 5 bis 7).
An 6 Vormittagen beschäftigen sich die Teilnehmer mit mathematischen Problemen, u. a. mit Elementen der Mengenlehre, der Aussagenlogik und der Geometrie sowie Aufgaben aus früheren Olympiaden und *alpha*-Heften. Abschluß und Höhepunkt ist die Lagerolympiade.

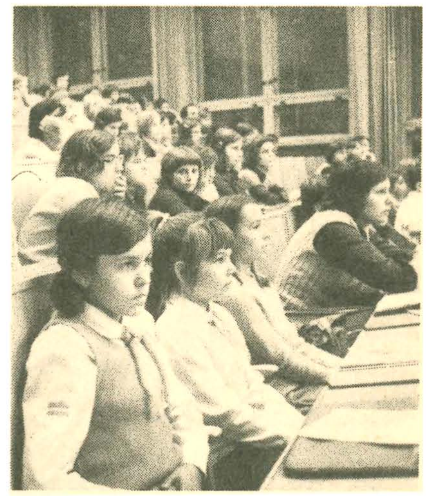
Drei Aufgaben aus der Klausur:

Klasse 5: In einem Kasten befinden sich 100 Kugeln, davon sind 25 weiß, 20 grün, 15 schwarz, 10 blau, 5 rot und der Rest gelb. Wieviel Kugeln mußt du mit verbundenen Augen mindestens herausnehmen, damit du auch im ungünstigsten Fall
a) 2 Kugeln, b) 6 Kugeln, c) 20 Kugeln
gleicher Farbe bekommst?

Klasse 6: Konstruiere Dreiecke ABC mit folgenden Bestimmungsstücken:
Seite $\overline{BC}=a=5$ cm, Winkel $ACB=\gamma=100°$
Winkelhalbierende $\overline{BD}=w_\beta=6$ cm.

Klasse 7: Gegeben ist eine Strecke $\overline{AB}$ und außerhalb von AB ein Punkt P.
a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $\overline{AB}$ die Seite c und P der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks ABC ist!
b) Wo muß P liegen, damit das Dreieck stumpfwinklig ist?

Aus Anlaß des 25. Jahrestages der Gründung unserer Republik legten sie im Oktober 1974 in einem ersten Kolloquium Rechenschaft über ihre Arbeit ab (siehe Foto).

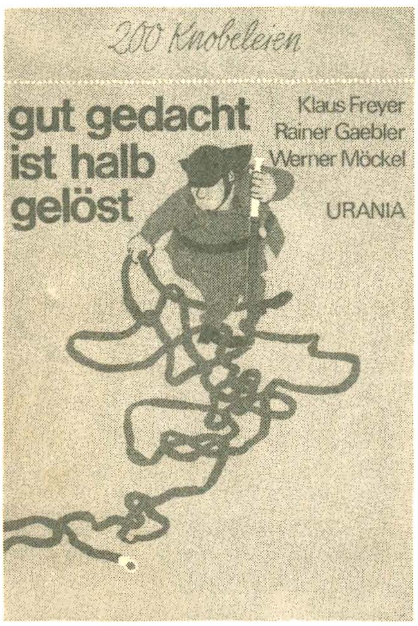


● Mit einem Vortrag vom stellv. Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Prof. Dr. Klötzler, der Verpflichtung der 25 Schüler durch den Direktor der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität, Prof. Dr. Schumann, und einer Aussprache zwischen den Gästen, Wissenschaftlern und Schülern wurde die *Mathematische Schülergesellschaft Leipzig* gegründet (16. 12. 74).

Unser Foto: Feierliche Eröffnung der *Olympiade Junger Mathematiker der DDR*, Bezirksausscheid. Alle 25 Schüler der MSG Leipzig hatten sich durch hervorragende Leistungen für diese 3. Stufe qualifiziert.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem Urania-Verlag



Bestell-Nr. 6531958, 223 S., zahlr. Abb., Preis 12,00 M

Köpfchen, Köpfchen muß man bei der Beschäftigung mit dem jetzt in 2. Auflage erschienenen Buch haben. Kniffliges für jung und alt wird hier in einer abwechslungsreichen, nach Sachgebieten geordneten Auswahl dargeboten. Unterhaltsame Aufgaben aus verschiedenen Gebieten von Mathematik und Physik regen das logische Denken an.

Vier Mann und nur ein Boot

Im Urlaub kamen Vater, Mutter, Tochter und Sohn auf einer Wanderung an einen kleinen Fluß, den sie überqueren wollten. Weit und breit war keine Brücke zu sehen. Als sie eine Weile am Ufer entlanggegangen waren, entdeckten sie ein Wochenendhäuschen mit einer Anlegestelle, an der ein Boot vertäut war. Das Boot, ein winziges Gefährt, hatte eine Tragfähigkeit von maximal 75 kg. Der Vater wog 75 kg, die Mutter 70 kg und Tochter und Sohn je 35 kg. Wie konnte die Familie mit dem entdeckten Boot übersetzen, und wie viele Flußüberquerungen waren mindestens erforderlich?

Johannes Lehmann

Mathe mit Pfiff

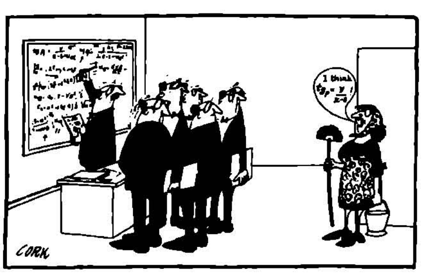
Ein Buch aus der akzent-Reihe

128 S., zahlreiche lustige Vignetten, Vierfarbendruck, Best.-Nr. 6533646 Preis 4,50 M

Aus dem Inhalt:
Überall natürliche Zahlen · gebrochene Zahlen · Teilbar oder nicht teilbar? · Überall Variable · Gleichungen und Ungleichungen in Theorie und Praxis · Logik/Kombinatorik · Aus alten Mathematikbüchern · Gesucht x, gesucht A · Rund um den Kreis · Geometrie · Magische Quadrate · Würfeleien · Kryptarithmetik · Rätsel und Spiele · umfassende Lösungen

● Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Wie lauten diese beiden Zahlen?

● Bisher hast du 6 Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst du nur noch den 0,8.Teil dieses Taschengeldes. Jörg ärgerte sich zunächst, dann aber schenkt er vor lauter Freude seiner kleinen Schwester Claudia eine Tüte Bonbons.
Es ist das Verhalten von Jörg zu begründen.



Göttner/Fischer/Krieg

Was ist, was kann Statistik

255 S., zahlr. Abb., Bestell-Nr. 6533160, Preis 6,80 M

Kennziffern, statistische Analysen, graphische und tabellarische Darstellungen statistischen Inhalts sind heute Bestandteile der beruflichen Tätigkeit vieler Menschen. Sowohl zur Leitung und Planung der gesamten Volkswirtschaft als auch über einzelne Teile sind statistische Informationen unentbehrlich. Ebenso bedingt die Lösung naturwissenschaftlicher, technisch-konstruktiver und technologischer Aufgaben in vielen Fällen die Verwendung statistischer Werte. Ohne die Anwendung statistischer Methoden ist ein tieferes Eindringen in den Gegenstand der einzelnen Wissenschaften nicht mehr vorstellbar. Aufgabe des vorliegenden Bändchens soll es sein, den Leser in die Methoden der Statistik einzuführen und an einer Auswahl von Beispielen deren Bedeutung zu zeigen.

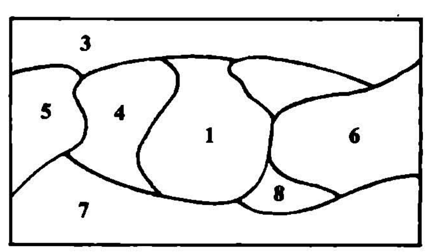
Hugo Steinhaus

100 neue Aufgaben

Best.-Nr. 6532866, 176 Seiten, zahlreiche Abb., Preis 8,50 M

Das Buch enthält in einer breiten Skala Aufgaben und Probleme aus verschiedenen Gebieten der elementaren Mathematik, Aufgaben zum Kopfzerbrechen für mathematisch noch weniger Gewandte sowie für Geübte. Sie erfordern nicht unbedingt Kenntnisse der höheren Mathematik. Wer sie aber lösen will, muß klar und schöpferisch denken. Diese Fähigkeit wird beim Beschäftigten mit den Aufgaben zwanglos entwickelt bzw. gefördert.

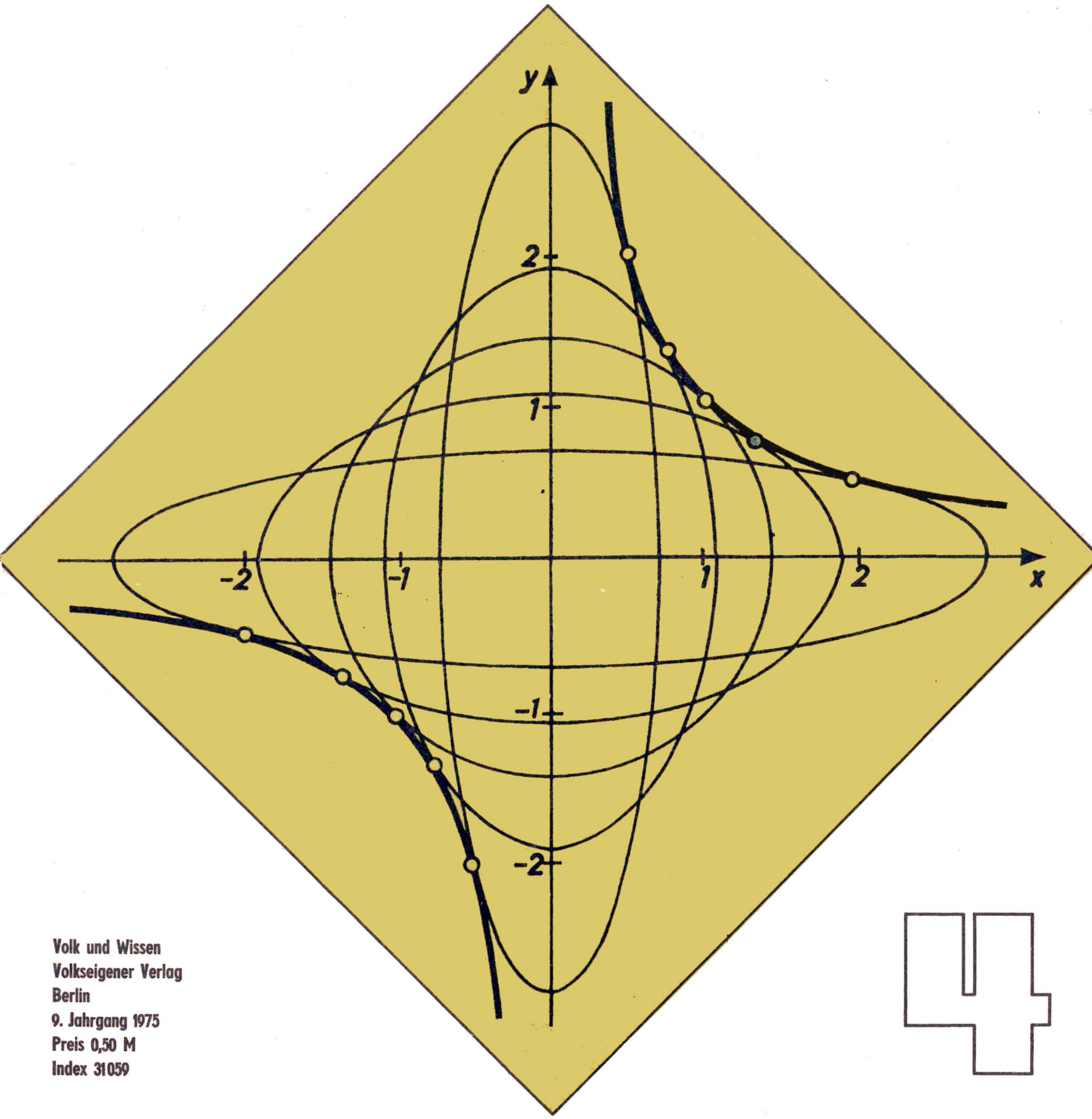
Färbung einer Landkarte



Die Abbildung zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbung verschieden ist?

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: F. Schröter, Leipzig (S. 81); Lengren, Berlin (S. 83); D. Fink, TH „Otto von Guericke", Magdeburg (S. 84); L. Otto, Leipzig, aus: Neues Leben 4/73 (S. 84); J. Lehmann, Leipzig (Innenteil, Seite VIII)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 16. Mai 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Rekursionsformeln als spezielle Operatorgleichungen

Im vorhergehenden Heft wurde der für die moderne Analysis und ihre Anwendungen in der Praxis fundamentale Begriff des linearen Operators eingeführt. Jetzt wollen wir zeigen, wie man diesen Begriff bei der Formulierung und Lösung von Gleichungen vorteilhaft verwenden kann. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf sogenannte rekursive Gleichungen oder Rekursionsformeln, die sich völlig elementar behandeln lassen, und beginnen mit einigen Beispielen für solche Formeln.

Beispiel 1: Der Sage nach wünschte sich der Erfinder des Schachspiels von seinem König als Belohnung so viele Weizenkörner, wie man auf dem letzten Feld des Schachbretts erhält, wenn man auf das erste Feld ein Korn legt und bei jedem weiteren Feld die Zahl der Körner verdoppelt. Bei den ersten zehn Feldern ergeben sich hierbei die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Bezeichnen wir die Zahl der Körner auf dem n-ten Feld mit x_n, so lautet das Bildungsgesetz dieser Zahlen für $n=2, 3, \ldots, 64$

$x_n=2x_{n-1}$, $x_1=1$.

Der König hielt den Wunsch für sehr bescheiden, ob das stimmt, werden wir noch sehen.

Beispiel 2: Im Jahre 1202 stellte der italienische Mathematiker Leonardo Fibonacci die Aufgabe, die Zahl der Kaninchen am Ende eines Jahres zu berechnen, die sich unter folgenden Bedingungen vermehren: Zunächst sei ein erwachsenes Paar vorhanden. Jedes erwachsene Paar möge in jedem Monat genau ein weiteres Paar zur Welt bringen, und jedes neugeborene Paar sei in zwei Monaten erwachsen. Das Bildungsgesetz für die Zahl x_n der am Ende des n-ten Monats vorhandenen Kaninchenpaare lautet offenbar

$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, $x_1=2$, $x_2=3$

für $n=3, 4, \ldots, 12$. Für $n=3$ folgt $x_3=3+2=5$, für $n=4$ folgt $x_4=5+3=8$ und für $x_5, x_6, \ldots, x_{12}$ finden wir analog

13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.

Beispiel 3: Die positive Lösung der Gleichung $x=\dfrac{x+2}{x+1}$ ist, wie man leicht nachrechnet (Klasse 8), die Zahl $\sqrt{2}$. Dieser Lösung entspricht geometrisch der Schnittpunkt der Geraden $y=x$ mit der Hyperbel $y=(x+2)/(x+1)$. Die der vorhergehenden Gleichung nachgebildete Rechenvorschrift

$x_n=\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}$

liefert, wenn man beispielsweise von $x_1=1$ ausgeht, für $n=2, 3, 4, \ldots$ Werte, die sich der Schnittstelle $\sqrt{2}$ immer mehr annähern (Bild 1). Die ersten fünf dieser Werte lauten

$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$

und man kann sie als rationale Näherungswerte für die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ verwenden.

▲1▲ Die Zahlen u_n und v_n seien durch $u_1=v_1=1$ und $u_n=u_{n-1}+2v_{n-1}$, $v_n=u_{n-1}+v_{n-1}$ für $n=2, 3, 4, \ldots$ definiert. Man zeige:

a) im Beispiel 3 gilt $x_n=u_n/v_n$,

b) diese Zahlen erfüllen für $n=3, 4, 5, \ldots$ auch die Gleichungen
$u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}$, $v_n=2v_{n-1}+v_{n-2}$,

c) für alle natürlichen Zahlen n gilt
$u_n^2-2v_n^2=(-1)^n$.

Beispiel 4: Die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses ist ein Maß für die Sicherheit des Eintretens dieses Ereignisses. Dieses Maß kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei man dem unmöglichen Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0 und dem sicheren Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1 zuschreibt. Ein bekanntes Beispiel für einen zufälligen Prozeß ist die Brownsche Molekularbewegung (Klasse 11), die man auch als Irrfahrt eines Teilchens bezeichnet. Wir betrachten eine Irrfahrt unter folgenden Bedingungen: Ein Teilchen möge sich zufällig auf den ganzzahligen Punkten $n=0, 1, 2, \ldots, N$ einer Geraden bewegen, wobei es von einem Punkt n mit $0<n<N$ zu den benachbarten Punkten $n-1$ bzw. $n+1$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 übergeht, bis es bei einem der Endpunkte 0 bzw. N angekommen ist (Bild 2). Es sei x_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen, vom Punkt n ausgehend, nach endlich vielen Schritten den Punkt 0 erreicht. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, daß dann für $0<n<N$ die Beziehung

$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n+1})$ besteht.

Die vorhergehenden Bemerkungen führen leicht zu den Randwerten $x_0=1$, $x_N=0$ (Beweis!), die Lösung dieses Problems wird weiter unten angegeben.

▲2▲ Man zeige, daß die vorhergehende Gleichung auf die Normalform

$x_n=2x_{n+1}-x_{n-2}$

mit $2\leqq n\leqq N$ gebracht werden kann.

Beispiel 5: Mit den Bezeichnungen des vorhergehenden Heftes betrachten wir die in Bild 3 angedeutete Übertragungsreihe, bei der zwei benachbarte Signale durch

$x_n=\mathbf{A}_n x_{n-1}$ verknüpft

sind und wir daher rekursiv für $n=1, 2, 3$

$x_1=\mathbf{A}_1x_0$, $x_2=\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1x_0$, $x_3=\mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1x_0$

usw. erhalten. Bei Verwendung standardisierter Bauelemente kommt dem Fall besondere Bedeutung zu, daß die Übertragungsreihe sich aus gleichen Teilsystemen zusammensetzt und somit die Übertragungsfaktoren

$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_3=\ldots=\mathbf{A}$

nicht von n abhängen. Dann vereinfachen sich unsere Ergebnisse unter Benutzung der Potenzschreibweise zu

$x_1=\mathbf{A}x_0$, $x_2=\mathbf{A}^2x_0$, $x_3=\mathbf{A}^3x_0$,

und es gilt allgemein $x_n=\mathbf{A}^nx_0$,

was sich leicht durch vollständige Induktion (Klasse 11) beweisen läßt. Ein Beispiel für eine solche Übertragungsreihe ist die Übertragung einer Fernsehsendung mit Hilfe von n Zwischenstationen, wobei n während einer Intervisionssendung etwa die Größenordnung 50 hat.

Rekursionsformeln: Die vorhergehenden Beispiele, die sich leicht durch zahlreiche weitere ergänzen ließen, besitzen folgende Gemeinsamkeiten. In jedem Fall ist eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$, d. h. eine Funktion x_n der ganzzahligen Veränderlichen n gesucht (bei der in der Regel nur die Werte mit $n\geqq 0$ interessieren). Den Wert dieser Funktion an einer festen Stelle n kann man aber auf Grund des Bildungsgesetzes erst dann berechnen, wenn man den Wert an der vorhergehenden Stelle $n-1$ (Beispiele 1, 3, 5) oder sogar an den beiden vorhergehenden Stellen $n-1$, $n-2$ (Beispiel 2, Aufgaben 1b, 2) kennt. Solche Bildungsgesetze heißen *Rekursionsformeln.* Im folgenden befassen wir uns eingehender mit den Rekursionsformeln *erster Ordnung* vom Typ

$x_n=ax_{n-1}$, $a\neq 0$

und denjenigen *zweiter Ordnung*

$x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$, $b\neq 0$. ...

Im Beispiel 5 haben wir x_n nicht nur rekursiv durch x_{n-1}, sondern auch unmittelbar durch x_0 ausgedrückt. Dieses Ergebnis halten wir zunächst nach Spezialisierung auf Verstärker $\mathbf{A}=a$ mit einer beliebigen Zahl $a\neq 0$ fest.

Satz 1: Genügt x_n für beliebige natürliche Zahlen n der Rekursionsformel $x_n=ax_{n-1}$, so besitzt x_n die Darstellung $x_n=a^nx_o$.

Umgekehrt ist jede Funktion dieser Form mit beliebigem x_o eine Lösung der Rekursionsformel. Für Leser, die mit den Begriffen des Beispiels 5 nicht so vertraut sind, sei noch ein direkter Beweis dieses Satzes angeführt.

Beweis der ersten Teilbehauptung: Im Fall $a=1$ lautet unsere Rekursionsformel $x_n = x_{n-1}$, und es ist unmittelbar klar, daß x_n gar nicht von n abhängt, also $x_n=x_o$ ist. Wegen $1^n=1$ gilt dann die im Satz angegebene Darstellung für x_n. Der allgemeine Fall läßt sich auf den soeben erledigten Spezialfall zurückführen, indem man die Hilfsfunktion $y_n=a^{-n}x_n$ einführt. Für diese gilt nämlich
$y_n=a^{-n}x_n=a^{-n+1}x_{n-1}=y_{n-1}$, so daß
$y_n=y_o=x_o$ ist und daher $x_n=a^n x_o$.

Beweis der zweiten Teilbehauptung:
Ist $x_n=a^n x_o$ mit einer beliebigen Zahl x_o, so ist $x_{n-1}=a^{n-1}x_o$ und
$ax_{n-1}=a^n x_o=x_n$, was zu beweisen war.
Wie man sofort sieht, läßt sich die Lösung $x_n=a^n x_o$ der Rekursionsformel von Satz 1 auch in der Form $x_n=a^{n-1}x_1$ schreiben (Beweis!). Hieraus geht hervor, daß das gesuchte Ergebnis des Beispiels 1 die unvorstellbar große Zahl $x_{64}=2^{63}>9\cdot 10^{18}$ ist.
Die dort geforderte Belohnung übersteigt bei weitem alle Weizenvorräte, sogar die der heutigen Welt.
Um jetzt unsere Kenntnisse aus dem vorhergehenden Heft anzuwenden und zu vertiefen, fassen wir die Rekursionsformeln auf als

Operatorgleichungen: Wie wir wissen, ist ein *Operator* nichts anderes als eine eindeutige Abbildung $x\rightarrow \mathbf{A}x$, bei der die Elemente des Definitions- und des Bildbereiches Funktionen sind. Für unsere Zwecke genügt es, diese Funktionen $x=x(t)$ nur an ganzzahligen Argumentstellen $t=n$ zu betrachten, wobei wir $x(n)=x_n$ schreiben (Bild 4). Dann hat speziell der *Verschiebungsoperator* **V** die Eigenschaften
$\mathbf{V}x_n=x_{n-1}$, $\mathbf{V}^2x_n=x_{n-2}$.
Unsere Rekursionsformeln
$x_n-ax_{n-1}=0$, $x_n-ax_{n-1}-bx_{n-2}=0$,
bei denen wir alle Glieder auf die linke Seite gebracht haben, lauten damit
$(1-a\mathbf{V})x_n=0$ bzw. $(1-a\mathbf{V}-b\mathbf{V}^2)x_n=0$,
und Satz 1 läßt sich folgendermaßen formulieren,

Satz 1': Die Gleichung erster Ordnung
$(1-a\mathbf{V})x_n=0$
besitzt genau die Lösungen $x_n=a^n x_o$.
Zur Verallgemeinerung dieses Satzes betrachten wir jetzt die beiden Operatoren $\mathbf{A}=1-\alpha\mathbf{V}$, $\mathbf{B}=1-\beta\mathbf{V}$ mit gewissen Zahlen α, $\beta\neq 0$ und die Gleichungen
$\mathbf{A}y_n=0$, $\mathbf{B}z_n=0$.
Nach Satz 1' besitzen sie die Lösungen
$y_n=\alpha^n y_o$, $z_n=\beta^n z_o$.
Satz 2: Die Gleichung zweiter Ordnung
$\mathbf{AB}x_n=0$ besitzt
für beliebige Zahlen y_o, z_o die Lösung
$x_n=y_n+z_n$.
Beweis: Da die auftretenden Operatoren *linear* sind und somit auf eine Summe gliedweise angewandt werden können, gilt wegen $\mathbf{B}z_n=0$ und $\mathbf{A}0=0$
$\mathbf{AB}x_n=\mathbf{AB}(y_n+z_n)=\mathbf{AB}y_n+\mathbf{AB}z_n=\mathbf{AB}y_n$.
Andererseits folgt durch Ausmultiplikation $\mathbf{AB}=1-(\alpha+\beta)\mathbf{V}+\alpha\beta\mathbf{V}^2=\mathbf{BA}$, so daß **A** mit **B** *vertauschbar* ist und wir wie behauptet
$\mathbf{AB}x_n=\mathbf{AB}y_n=\mathbf{BA}y_n=\mathbf{B}0=0$ erhalten.
Setzen wir jetzt $a=\alpha+\beta$, $b=-\alpha\beta$, so sehen wir, daß Satz 2 uns für die Rekursionsformel $x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$
folgende Lösung liefert: $x_n=\alpha^n y_o+\beta^n z_o$.

▲3▲ Man zeige (Klasse 9): Sind umgekehrt a, b vorgegeben mit $a^2+4b\geq 0$, so bleibt die letzte Lösungsaussage erhalten, wenn α und β die Nullstellen der quadratischen Gleichung $\lambda^2-a\lambda-b=0$ sind, also beispielsweise

$$\alpha=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4b}),\quad \beta=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+4b}).$$

Im Fall $a^2+4b=0$ ist $\alpha=\beta=a/2$, und die durch Satz 2 ermittelte Lösung kann zu $x_n=(a/2)^n x_o$ zusammengefaßt werden. Wie der folgende Satz zeigt, gibt es aber noch weitere Lösungen.
Satz 3: Die Gleichung zweiter Ordnung
$(1-\alpha\mathbf{V})^2x_n=0$ besitzt
für beliebige Zahlen x_o, y_o die Lösung
$x_n=\alpha^n(x_o+ny_o)$.
Beweis: Wegen der Linearität des Operators $\mathbf{A}=1-\alpha\mathbf{V}$ und der bereits bekannten Tatsache, daß $\alpha^n x_o$ eine Lösung ist, gilt
$\mathbf{A}^2x_n=y_o\mathbf{A}^2\alpha^n n$. Wegen
$\mathbf{A}\alpha^n n=\alpha^n n-\alpha^n(n-1)=\alpha^n$ ist weiterhin
$\mathbf{A}^2\alpha^n n=\mathbf{A}\alpha^n=0$
und damit auch
$\mathbf{A}^2x_n=0$, was zu beweisen war.

▲4▲ Man zeige mit Hilfe des Spezialfalls $\alpha=1$ von Satz 3, daß die Rekursionsformel der Aufgabe 2 unter den Bedingungen $x_o=1$, $x_N=0$ des Beispiels 4 die Lösung $x_n=1-n/N$ besitzt (Bild 5).

Anfangswertprobleme: Aus der Gestalt der Rekursionsformel $x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$
ist ersichtlich, daß man die Werte x_n der Lösung für $n=2, 3, 4, \ldots$ schrittweise berechnen kann, wenn die *Anfangswerte* x_o und x_1 vorgegeben sind. Wie im Fall von Satz 1 läßt sich dieses *Anfangswertproblem* aber auch geschlossen lösen.
Satz 4: Im Fall $a^2+4b>0$ ist
$x_n=\alpha^n y_o+\beta^n z_o$
mit den Zahlen α und β aus Aufgabe 3 und

$$y_o=\frac{x_1-\beta x_o}{\sqrt{a^2+4b}},\quad z_o=\frac{\alpha x_o-x_1}{\sqrt{a^2+4b}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.
Beweis: Nach Satz 2 wissen wir bereits, daß x_n eine Lösung der Rekursionsformel ist. Da diese Lösung eindeutig durch die Anfangswerte bestimmt ist, braucht nur noch für $n=0$ und $n=1$
$x_o=y_o+z_o$, $x_1=\alpha y_o+\beta z_o$
gezeigt zu werden. Wegen $\alpha-\beta=\sqrt{a^2+4b}$ folgt dies aber unmittelbar durch Einsetzen der Ausdrücke für y_o, z_o.
Nach diesen Vorbereitungen kann man jetzt alle noch nicht behandelten Rekursionsformeln aus unseren vorhergehenden Beispielen auflösen.

▲5▲ Man zeige, daß die Zahlenfolge von Fibonacci aus Beispiel 2 die geschlossene Darstellung

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

besitzt, wobei von den Anfangswerten $x_o=1$, $x_1=2$ auszugehen ist. Trotz der auftretenden Wurzel sind die x_n natürliche Zahlen!

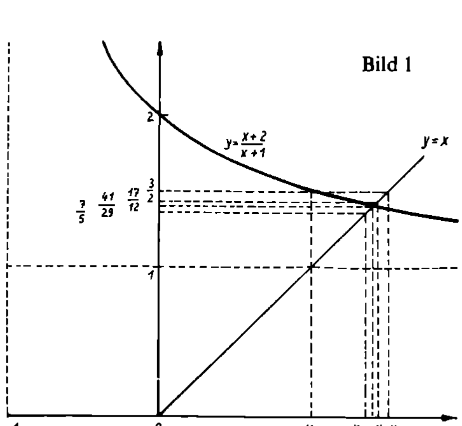


Bild 1

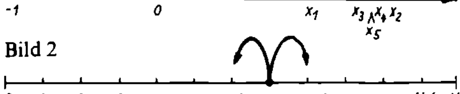


Bild 2

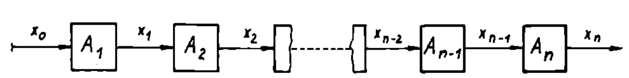


Bild 3

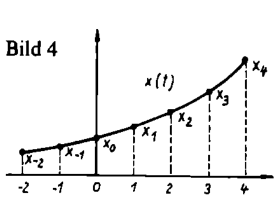


Bild 4

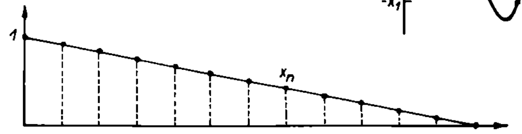


Bild 5

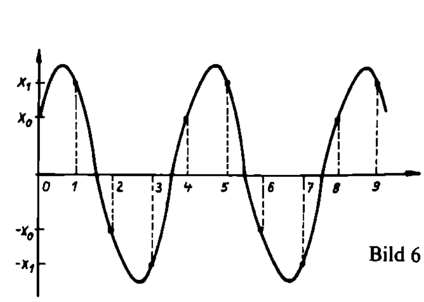


Bild 6

▲6▲ Man zeige: Die Lösungen der Rekursionsformeln aus Aufgabe 1b lauten unter den Anfangsbedingungen $u_o = u_1 = 1$ bzw. $v_o = 0$, $v_1 = 1$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n),$$

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n).$$

Nach Aufgabe 1a ist damit auch die Lösung x_n der Rekursionsformel aus Beispiel 3 bekannt. Nach Aufgabe 1c läßt sich weiterhin der Fehler zwischen x_n^2 und 2 bzw. zwischen x_n und $\sqrt{2}$ angeben, denn aus

$u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$

folgt nach Division durch v_n^2

$x_n^2 - 2 = (-1)^n/v_n^2$

und nach weiteren Zwischenrechnungen

$x_n - \sqrt{2} = (-1)^n/(1+\sqrt{2})^n v_n$.

Beispielsweise erhalten wir hieraus für $n=6$ die Abschätzung $0 < 99/70 - \sqrt{2} < 10^{-4}$.

Die Rekursionsformel der Aufgabe 2 genügt nicht den Voraussetzungen von Satz 4, doch läßt sich dieser Fall ganz analog erledigen.

▲7▲ Man zeige: Das Anfangswertproblem für die Rekursionsformel

$x_n = 2\alpha x_{n-1} - \alpha^2 x_{n-2}$

mit $\alpha \neq 0$ besitzt die Lösung

$$x_n = \alpha^n\left((1-n)x_o + \frac{n}{\alpha}x_1\right).$$

Periodische Lösungen: Es bleibt noch der Fall $a^2 + 4b < 0$ zu untersuchen, wobei wir uns jedoch auf den Spezialfall $a=0$, $b=-c^2$ mit $c>0$ beschränken, d. h. auf die Gleichung

$x_n + c^2 x_{n-2} = 0$.

Behandeln wir die Fälle gerader und ungerader n getrennt, so finden wir mit den Überlegungen des Beweises von Satz 1

$x_{2n} = (-c^2)^n x_o$, $x_{2n+1} = (-c^2)^n x_1$.

Dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe trigonometrischer Funktionen (Klasse 10) folgendermaßen zusammenfassen,

$x_n = c^n\left(x_o \cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x_1}{c}\sin\frac{\pi n}{2}\right)$. Im Fall $c=1$ hat x_n die *Periode* 4 (Bild 6).

▲8▲ Man zeige: Das Anfangswertproblem für die Rekursionsformel

$x_n = \sqrt{2}x_{n-1} - x_{n-2}$ besitzt die Lösung

$$x_n = x_o \cos\frac{\pi n}{4} + (x_1\sqrt{2} - x_o)\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Lothar Berg

Literatur:

Berg, L., Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren, ALPHA 1975, Heft 3.

Gnedenko, B. W., und A. J. Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Schülerbücherei Bd. 10, Berlin 1973.

Markuschewitsch, A. I., Rekursive Folgen, Math. Schülerbücherei Bd. 25, Berlin 1973.

Worobjow, N. N., Die Fibonaccischen Zahlen, Math. Schülerbücherei Bd. 19, Berlin 1971.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. Benno Klotzek

Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht"
Sektion Mathematik/Physik
Lehrstuhl Geometrie

▲1384▲ a) In der Ebene ε seien eine Gerade g und Punkte P, Q mit $P, Q \notin g$ gegeben. Kann ein Punkt $R \in g$ so gewählt werden, daß $l(\overline{PR}) + l(\overline{QR})$ möglichst klein wird?

Anleitung: Wir unterscheiden die Fälle, daß P, Q in verschiedenen bzw. nicht in verschiedenen Halbebenen bezüglich g liegen. Im zweiten Fall spiegle man etwa P an g.

b) Im Innern eines Winkels mit den Schenkeln p, q liege ein Punkt R. Unter welchen Bedingungen für den Winkel lassen sich Punkte $P \in p$ und $Q \in q$ finden, für die die Summe $l(\overline{PQ}) + l(\overline{QR}) + l(\overline{RP})$ möglichst klein wird?

Tagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Vom 12. bis 14. Mai 1975 war die Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam, der Gastgeber der 3. Tagung der Fachsektion „Unterricht und Ausbildung". Über 400 Wissenschaftler und Lehrer hatten umfassend Gelegenheit, sich über fachliche wie methodische Fragen des Mathematikunterrichts und der außerunterrichtlichen Arbeit auszutauschen.

Themen aus dem Arbeitsprogramm: Zu einigen aktuellen Problemen des Mathematikunterrichts in den Oberschulen der DDR – Zu einigen Erscheinungsformen imperialistischer Schulpolitik und Pädagogik im Bereich der mathematischen Bildung in kapitalistischen Staaten – Grundfragen der Topologie – Gründung einer Fachsektion „Geschichte und Philosophie der Mathematik" – Probleme des fakultativen Unterrichts – Beweise mit Hilfe des Bewegungsbegriffs – Gedanken zum mathematischen Definieren – Zur Theorie der geometrischen Konstruktion – Über Winkelfunktionen – Grundzüge der universellen Algebra.

Zahlreiche Beiträge wurden der Redaktion *alpha* übergeben bzw. zugesagt (im Rahmen einer umfassenden Aussprache über die außerunterrichtliche Arbeit).

Eine Aufgabe von Dr. Hans-Joachim Döring

Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg
Sektion Wirtschaftswissenschaften

▲1385▲ Zur Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Industriebetrieb zwei verschiedene Rohstoffe (R_1, R_2). Um eine Einheit des ersten Erzeugnisses herzustellen, braucht man drei Einheiten des Rohstoffes R_1 und sieben Einheiten des Rohstoffes R_2, für eine Einheit des zweiten Erzeugnisses sechs Einheiten von R_1 und fünf Einheiten von R_2, für eine Einheit des dritten Erzeugnisses acht Einheiten von R_1 und vier Einheiten von R_2. Vom Rohstoff R_1 stehen pro Zeiteinheit 640 Einheiten und vom Rohstoff R_2 490 Einheiten zur Verfügung.

Problem: Wieviel Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit der gesamte Rohstoffvorrat verbraucht wird?

Anleitung: a) Definieren Sie die Variablen in geeigneter Weise!

b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf!

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

d) Bestimmen Sie eine spezielle ganzzahlige Lösung, indem Sie für die beliebig wählbare Variable bestimmte Werte einsetzen!

(Da es sich um Produktionszahlen handelt, kommen nur nichtnegative Werte als zulässige Lösung in Frage.)

Kurzbiographie: geb. 1931 in Ober-Bielau, Kreis Görlitz; Vater: Lehrer. Besuch der Oberschule von 1943 bis 1951. 1951 Abitur an der *Ehrenberg-Oberschule* Delitzsch. 1951 bis 1952 Fachlehrerhelfer für Mathematik an der Zentralschule Krostitz; 1952 bis 1955 Direktstudium an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Pädagogische Fakultät, Mathematik und Physik; 1955 bis 1968 Fachlehrer und Direktor an polytechnischen und erweiterten Oberschulen der Stadt Halle; 1957 bis 1963 Fernstudium an der Pädagogischen Hochschule Potsdam, Nat. Fak., Fach Mathematik. Seit 1968 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Sektion Wirtschaftswissenschaften der *Martin-Luther-Universität.* Studienaufenthalte 1972 *Ökonomische Hochschule Bratislava,* 1973 *Ökonomische Fakultät Subotica* der Universität Novi Sad. 1971 Facultas docendi für Fachgebiet: „Mathematische Grundlagen der Operationsforschung". 1973 Promotion zum Dr. oec.; wissenschaftlicher Oberassistent; *Vorlesung:* „Mathematik für Ökonomen".

Wir bestimmen den Radius der Erde

„... und dann die dritte Querstraße links!"

Dem griechischen Philosophen und Mathematiker *Pythagoras* (6. Jh. v. u. Z.) wird die Einsicht zugeschrieben, daß die Erde eine Kugel sei. Im dritten Jahrhundert v. u. Z. bestimmte *Eratosthenes* (von ihm stammt das „Sieb des Eratosthenes" zur sukzessiven Bestimmung der Primzahlen) die Größe des Erdradius zu etwa 5900 km. Er wußte, daß Syene, das heutige Assuan, südlich von Alexandria liegt, und daß zur Sommersonnenwende mittags die Sonnenstrahlen in Syene senkrecht auf die Erdoberfläche einfallen. Deshalb maß er die Entfernung Syene-Alexandria sowie den höchsten Sonnenstand $h = 83°$ am Tag der Sommersonnenwende in Alexandria, um aus beiden Messungen den Erdradius $r_{\oplus}$ zu berechnen:

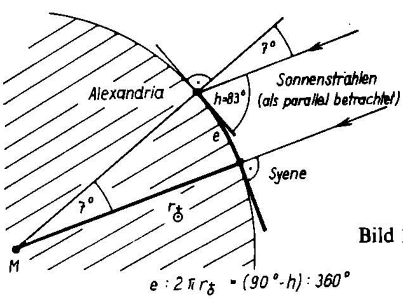


Bild 1

Ein Blick in die Tabelle „Astronomische Konstanten und Einheiten" unseres Tafelwerkes lehrt uns, daß der von *Eratosthenes* ermittelte Wert eine für damalige Bedingungen recht gute Näherung darstellt. Denn in der zitierten Tabelle ist der Radius einer mit der Erde volumengleichen Kugel zu

(I) $\quad r_{\oplus} = 6371\ \text{km}$

angegeben. Heute wissen wir, daß unsere Erde nur genähert als Kugel aufgefaßt werden kann. Infolge der durch die Rotation der Erde um ihre durch Nord- und Südpol verlaufende Achse auftretenden Zentrifugalkräfte ist unsere Erde abgeplattet: Der Abstand Pol-Erdmittelpunkt (6 357 km) ist um 21 km kleiner als der Abstand Äquator–Erdmittelpunkt (6378 km). Daß die Erdoberfläche nicht eben, sondern gekrümmt ist, erkennt jeder, der an der Küste das Herankommen eines Dampfers beobachtet: Zuerst sieht man nur die höchsten Aufbauten des Schiffes, dann wird das Deck des Schiffes sichtbar und schließlich auch der Rumpf des Schiffes.

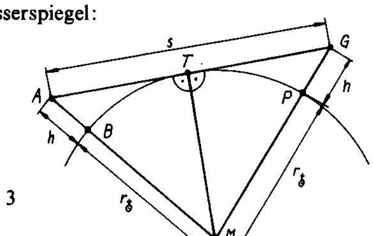
Während auf dem Festland durch die unre-

Bild 2

gelmäßige Gestalt der Erdoberfläche bei Beschränken auf kleinere Entfernungen die Kugelgestalt der Erdoberfläche nicht zu erkennen ist, ist dies bei einer nicht durch Wellen bewegten Wasseroberfläche relativ kleiner Ausdehnung möglich.

Die eben beschriebene Erscheinung kann ein Schülerkollektiv, das an einem großen Binnensee unserer Republik wohnt bzw. dort seinen Urlaub verbringt, benutzen, um bei Windstille den Erdradius zu bestimmen: Senkrecht über einem Punkt *P* des Seeufers wird in der Höhe *h* ein Gegenstand *G* befestigt. Ein Beobachter sticht vom Punkt *P* des Ufers aus mit einem Boot in See. Er entfernt sich soweit vom Punkt *P*, bis der aufgestellte Gegenstand infolge des Untertauchens unter den Horizont gerade nicht mehr gesehen werden kann. Dies geschehe, wenn das Boot den Punkt *B* erreicht, oder mit anderen Worten, wenn sich die Augen des Beobachters im Punkt *A* (in der Höhe *h* senkrecht über *B*) befinden. Um bei der Auswertung unseres Versuches einfacher rechnen zu können, haben wir angenommen, daß die Höhe der Augen des Beobachters über der Wasseroberfläche ebenso groß ist wie die Höhe des Gegenstandes *G* über dem Wasserspiegel:

Bild 3



Die Dreiecke *AMT* und *MGT* sind kongruent, denn sie haben die Seite $\overline{MT} = r_{\oplus}$ gemeinsam, ihre Winkel bei *T* sind rechte und ihre Seiten *AM* und *MG* haben die Länge $r_{\oplus} + h$. Wird die gradlinige Entfernung $\overline{AG}$ mit *s* bezeichnet, so gilt also insbesondere $\overline{AT} = \overline{TG} = \frac{s}{2}$. Nach dem *Lehrsatz des Pythagoras*, angewandt auf $\triangle AMT$, gilt

$$\overline{AM}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{MT}^2, \text{ d. h.}$$

$$(r_{\oplus} + h)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + r_{\oplus}^2 .$$

Hieraus folgt unter Benutzung einer binomischen Formel

$$r_{\oplus}^2 + 2r_{\oplus} h + h^2 = \frac{s^2}{4} + r_{\oplus}^2 .$$

Durch Subtraktion von $r_{\oplus}^{\ 2}$ von beiden Seiten dieser Gleichung ergibt sich

(II) $\quad 2r_{\oplus} h + h^2 = \frac{s^2}{4}$

Wir nehmen an, daß die Höhe der Augen des Beobachters und des Gegenstandes *G* über dem Wasserspiegel bei unserem Versuch jeweils zu

(III) $\quad h = 1{,}50$ m gewählt werden.

Zunächst soll die Gleichung (II) benutzt werden, um mittels des unserem Tafelwerk entnommenen Wertes des Erdradius die Entfernung *s* zu berechnen, in der bei unserem Versuch der Gegenstand *G* für den Beobachter gerade unter den Horizont taucht. Deshalb stellen wir die Gleichung (II) zunächst nach *s* um:

(IV) $\quad s = 2\sqrt{2r_{\oplus} h + h^2}$

Weiterhin setzen wir in Gleichung (IV) die gemäß (I) und (III) bekannten Werte ein und berechnen *s*:

$$s \approx 2\sqrt{19{,}1\ \text{km}^2} \approx 8{,}74\ \text{km}$$

Unter Beachtung der „Faustregel" für das Rechnen mit Näherungswerten erkennen wir beim Berechnen des Radikanden 19,1 km², daß *s* statt nach der Formel (IV) nach der einfacheren Näherungsformel $s \approx 2\sqrt{2r_{\oplus} h}$ berechnet werden darf.

Unsere Rechnung lehrt: Der See, auf dem wir unser Experiment mit $h = 1{,}50$ m durchführen wollen, muß vom geeignet gewählten Punkt *P* aus in einer Richtung eine Ausdehnung von etwa 10 km besitzen.

Um andererseits mittels der durch den beschriebenen Versuch erhaltenen Meßwerte den Erdradius selbst zu berechnen, muß die Formel (II) nach $r_{\oplus}$ umgestellt werden und in die so erhaltenen Formel (V) müssen die für *s* und *h* ermittelten Werte eingesetzt werden:

(V) $\quad r_{\oplus} = \frac{s^2}{8h} - \frac{h}{2}$

Wer die Berechnung ausführt, bemerkt analog zu oben, daß bei der Formel (V) der Subtrahend $\frac{h}{2}$ offenbar vernachlässigt werden darf:

(VI) $\quad r_{\oplus} \approx \frac{s^2}{8h}$

Eine Schülergruppe möge bei der Durchführung dieses Experimentes für die Höhe *h* und die kritische Entfernung *s* die Meßwerte $\bar{h} = 1{,}50$ m und $\bar{s} = 8{,}6$ km ermitteln. Durch Einsetzen dieser Näherungswerte $\bar{h}$ und $\bar{s}$ in die Näherungsformel (VI) wird ein Näherungswert $\overline{r_{\oplus}}$ für den Erdradius $r_{\oplus}$ erhalten:

(VII) $\quad \overline{r_{\oplus}} = \frac{\bar{s}^2}{8\bar{h}} = \frac{(8{,}6\ \text{km})^2}{8 \cdot 1{,}50\ \text{m}} \approx 6163\ \text{km}$

Wie stark weicht $\bar{r}_\delta$ von dem durch die Formel (V) bestimmten „wahren“ Wert des Erdradius ab? Da wir bei diesem Versuch die wahren Werte h und s nicht kennen, können wir mittels Formel (V) auch r_δ nicht berechnen. r_δ läßt sich jedoch nach oben und nach unten abschätzen, sofern die Schülergruppe bei der Durchführung des Versuches auch Fehlerschranken für die Meßwerte $\bar{h}$ und $\bar{s}$ bestimmt. Ohne zunächst auf die Durchführung des Versuches näher einzugehen, seien als vollständige Versuchsdaten angegeben:

(VIII) $\bar{h}=1{,}50\,\mathrm{m}$; $|\bar{h}-h|\leqq 0{,}04\,\mathrm{m}$

(IX) $\bar{s}=8{,}6\,\mathrm{km}$; $|\bar{s}-s|\leqq 0{,}2\,\mathrm{km}$

Laut (VIII) und (IX) genügen die wahren Werte h und s den Ungleichungen:

$1{,}46\,\mathrm{m}=1{,}50\,\mathrm{m}-0{,}04\,\mathrm{m}\leqq h\leqslant 1{,}50\,\mathrm{m}+0{,}04\,\mathrm{m}=1{,}54\,\mathrm{m}$

$8{,}4\,\mathrm{km}=8{,}6\,\mathrm{km}-0{,}2\,\mathrm{km}\leqslant s\leqslant 8{,}6\,\mathrm{km}+0{,}2\,\mathrm{km}=8{,}8\,\mathrm{km}$

Mit $h\geqq 1{,}46$ m und $s\leqslant 8{,}8$ km folgt aus (V)

$$r_\delta \leqslant \frac{(8{,}8\,\mathrm{km})^2}{8\cdot 1{,}46\,\mathrm{m}}-\frac{1{,}46\,\mathrm{m}}{2}<\frac{77{,}44\,\mathrm{km}^2}{11{,}68\,\mathrm{m}}<$$
$$<\frac{77\,440\,\mathrm{km}}{11{,}6}.$$

Wegen $77\,440\,\mathrm{km}:11{,}6<6\,700\,\mathrm{km}$ gilt also

(X) $r_\delta<6\,700\,\mathrm{km}$

Andererseits folgt mit $h\leqslant 1{,}54$ m und $s\geqq 8{,}4$ km aus (V)

$$r_\delta \geqslant \frac{(8{,}4\,\mathrm{km})^2}{8\cdot 1{,}54\,\mathrm{m}}-\frac{1{,}54\,\mathrm{m}}{2}=\frac{70{,}56\,\mathrm{km}^2}{12{,}32\,\mathrm{m}}-\frac{1{,}54\,\mathrm{m}}{2}.$$

Wegen $70\,560\,\mathrm{km}:12{,}32>5\,720\,\mathrm{km}$ gilt ebenfalls

(XI) $r_\delta>5\,700\,\mathrm{km}$. (X) und (XI) zusammen bilden das Versuchsergebnis:

$$5\,700\,\mathrm{km}<r_\delta<6\,700\,\mathrm{km}$$

Wählen wir nunmehr statt (VII) als neuen Näherungswert des Erdradius das arithmetische Mittel der beiden gefundenen Schranken

$$\bar{\bar{r}}_\delta=\frac{5\,700\,\mathrm{km}+6\,700\,\mathrm{km}}{2}=6\,200\,\mathrm{km},$$

so ist durch diesen Versuch der Erdradius mit einem absoluten Fehler $\bar{\bar{r}}_\delta-r_\delta$ bestimmt worden, der der Ungleichung $|\bar{\bar{r}}_\delta-r_\delta|<500\,\mathrm{km}$ genügt.

An diesem Versuchsergebnis und der eingangs gemachten Mitteilung über die Abplattung der Erde lesen wir ab: Auch wenn wir unseren Versuch unter gleichen Bedingungen an Orten verschiedener geographischer Breite durchführen, können wir wegen der Größe des absoluten Fehlers an den mit unseren Versuchsmitteln erhaltenen Ergebnissen nicht die Abplattung der Erde erkennen.

Nunmehr sollen einige Bemerkungen zur Durchführung dieses Versuches angeführt werden:

Der bei unserem Versuch zu wählende Gegenstand G muß so beschaffen sein, daß er vom Auge des Beobachters aus allen Entfernungen, die nicht größer als die kritische Entfernung $s\approx 8{,}74$ km sind, noch mit Sicherheit gesehen werden kann. Insbesondere muß gelten: Befindet sich das Boot im kritischen Punkt B (siehe Bild 3), so muß der Beobachter durch Höhersteigen im Boot, d. h., nach Vergrößern seiner Augenhöhe, den am Ufer aufgestellten Gegenstand G wieder sicher sehen können.

Um den Durchmesser d des Gegenstandes G, den wir als kreisförmig annehmen wollen, unter den zu stellenden Forderungen bezüglich der Sehweite und wegen der begrenzten Leistungsfähigkeit des menschlichen Auges gegenüber $h=1{,}50$ m vertretbar klein zu halten, wird vorgeschlagen, als Gegenstand G die Scheinwerferscheibe einer lichtstarken Stablampe zu wählen, deren Lichtkegel vom Punkt G nach dem Punkt A (siehe Bild 3) gerichtet ist. Dabei ist der Versuch in dunkler Nacht mit guter Bodensicht durchzuführen. Das Auge des Beobachters ist noch mit einem Fernglas zu bewaffnen.

Durch die Ausdehnung des Gegenstandes G sowie durch die des Fernglasobjektivs ist die Größe h nur mit einer angebbaren Genauigkeit bestimmbar.

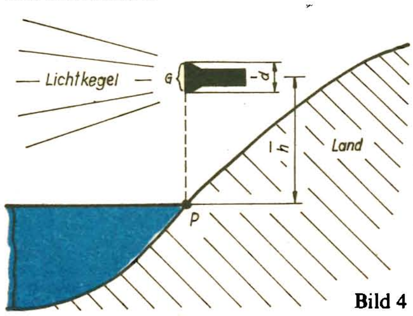


Bild 4

Falls die Scheinwerferscheibe der Stablampe einen Durchmesser $d\leqq 8$ cm besitzt, kann beim Justieren der Stablampe gemäß Bild 4 angenommen werden, daß $\overline{PG}$ der Ungleichung

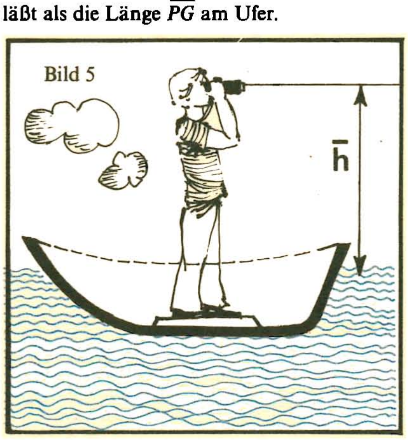
(XII) $1{,}46\,\mathrm{m}\leqslant\overline{PG}\leqslant 1{,}54\,\mathrm{m}$ genügt.

Wird andererseits vom Beobachter ein 10×50-Fernglas benutzt, so kann, da die Zahl 50 die Maßzahl des in Millimeter gemessenen Objektivdurchmessers ist, für $\overline{BA}$ ebenfalls die Ungleichung

(XIII) $1{,}46\,\mathrm{m}\leqslant\overline{BA}\leqslant 1{,}54\,\mathrm{m}$

als gültig angenommen werden. Hier ist durch die vorsichtige Wahl der Schranken mit berücksichtigt worden, daß sich vom Boot aus die Länge $\overline{BA}$ ungenauer ermitteln läßt als die Länge $\overline{PG}$ am Ufer.

Bild 5



(XII) und (XIII) garantieren zusammen die Gültigkeit von (VIII). Ein Weg zur Bestimmung der Entfernung $s=\overline{AG}$ (siehe Bild 3) sei aufgezeigt: Mittels einer Wanderkarte großen Maßstabes wird als Punkt P ein auf der Wanderkarte eindeutig festgelegter Punkt am Ufer des Sees gewählt. Um auch den kritischen Punkt B auf der Wanderkarte festlegen zu können, werden zwei weitere möglichst nahe bei B gelegene auf der Karte eindeutig festlegbare Punkte Q und R so gewählt, daß der Winkel QBR in grober Näherung ein rechter Winkel ist. Durch Anpeilen der Punkte Q und R von B aus mittels Marschkompaß werden die Richtungen festgelegt, in denen Q bzw. R von B aus erscheinen (gegebenenfalls müssen auch die Punkte Q und R durch Lampen markiert werden).

Bild 6 läßt erkennen, wie ausgehend von den auf der Karte markierten Punkten Q und R mittels der gemessenen Richtungswinkel der Punkt B auf der Karte festgelegt wird. Danach ist die Strecke $\overline{PB}$ auf der Karte auszumessen und gemäß Kartenmaßstab umzurechnen.

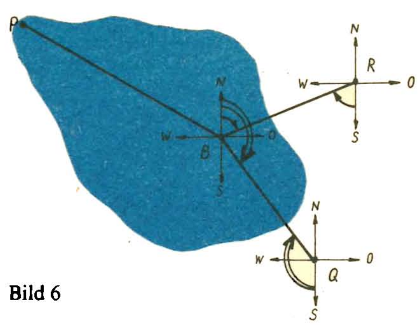


Bild 6

Der so für s ermittelte Wert ist ebenfalls nur ein Näherungswert. Dies ist u. a. auch deshalb der Fall, weil es unmöglich ist, auch nur einen Teil einer Kugeloberfläche (Erdoberfläche) längentreu auf einen Teil der Ebene (Karte) abzubilden.

Abschließend lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

▲1▲ Einer Arbeitsgemeinschaft, die gemäß dem Vorgehen in diesem Beitrag den Erdradius bestimmen will, steht zum Versuch nur ein See mit der maximalen geradlinigen Ausdehnung 2,5 km zur Verfügung. Wie groß darf h höchstens gewählt werden?

▲2▲ In welcher geradlinigen Entfernung kann ein Beobachter am Meeresstrand, dessen Augen sich 1,60 m über dem Meeresspiegel befinden, bei ruhiger See ein Schiff frühestens erkennen, dessen Aufbauten 6,5 m aus dem Wasser ragen?

▲3▲ (ab Klasse 9) Ein Beobachter, dessen Augen sich in der Höhe h_1 über dem Meeresspiegel befinden, sieht ein von ihm wegfahrendes Schiff in der Entfernung s bei unbewegter See unter den Horizont tauchen. Die Aufbauten dieses Schiffes ragen bis zur Höhe h_2 aus dem Wasser. Gib die Formel an, nach der aus s, h_1 und h_2 der Erdradius r_δ zu berechnen ist!

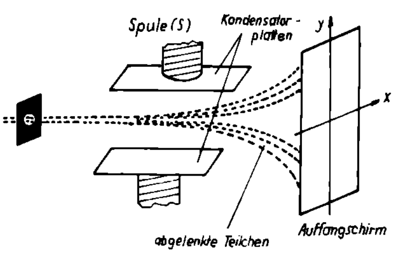
W. Träger

Wie wägt man ein Atom?

Noch kurz vor der Jahrhundertwende glaubte man, daß die Physik in sich als Forschungsgebiet im wesentlichen abgeschlossen sei und wohl kaum noch grundlegende Neuentdeckungen hinzukommen würden.
Doch spätestens 1896, mit der Entdeckung der natürlichen Radioaktivität, begann eine Entwicklung, die die Physik von Grundauf neu gestalten sollte.
Lenard war es, der 1903 Streuversuche mit Elektronen an Atomen durchführte und zu dem überraschenden Schluß kam, daß das Atom sich nicht als massive Kugel darstellen läßt, sondern im wesentlichen aus einem Kern mit einer dazugehörigen Hülle besteht.
Lenard konnte bereits an Hand der Streuversuche aussagen, daß der Radius des Kerns in der Größenordnung von 10^{-12} cm und der des gesamten Atoms bei 10^{-8} cm liegt. Der Zwischenraum sollte „leer" sein.
Lenards Schlußfolgerungen konnten 1911 durch *Rutherford* bestätigt werden. Ergebnisse von Streuversuchen mit α-Teilchen ergaben, daß der Kern des Atoms positiv geladen und in ihm nahezu die gesamte Masse des Atoms konzentriert ist. Der Kern müßte demnach, da das Atom insgesamt neutral ist, von einer negativen Elektronenhülle umgeben sein, welche die positive Ladung des Kerns nach außen kompensiert.
Rutherfords experimentell gewonnene Erkenntnisse faßte 1913 *Bohr* in einer Theorie zusammen *(Bohrsches Atommodell)*. Seit jener Zeit hat sich unser Wissen über den Aufbau des Atoms gewaltig erweitert. Das Bohrsche Atommodell mit seinen Elektronenbahnen um den positiven Kern konnte in der folgenden Zeit wiederum nur im beschränkten Maße eine Erklärung für gewisse atom- und kernphysikalische Erscheinungen geben. Unsere heutigen Vorstellungen über den Aufbau des Atoms lassen sich kaum noch auf ein bildhaftes Modell zurückführen. Komplizierte mathematische Gleichungen sind an die Stelle anschaulicher Vorstellungen getreten, Mathematik und Physik zu einer untrennbaren Einheit verwachsen. Viele physikalische Probleme konnten anfangs nicht geklärt werden, weil die mathematische Fragestellung erst gelöst werden mußte. Das trifft gerade in der Atom- und Kernphysik auch heute noch zu.

Eine der wichtigsten Größen des Atoms ist seine Masse. Sie ist der Messung unmittelbar zugänglich und erregte deshalb schon beizeiten das Interesse der Physiker. Bereits 1907 stellte man bei Untersuchungen an radioaktiven Elementen fest, daß es wohl Elemente mit gleicher Ordnungszahl (= Anzahl der Protonen im Kern), aber mit verschiedenem Atomgewicht geben müsse.
Diese Erscheinung ist nur so zu deuten, daß die betreffenden Atome gleiche Protonenzahl, aber eine unterschiedliche Neutronenzahl haben. Man nennt solche Atome *Isotope*. Inzwischen sind mehr als 1000 künstlich hergestellte und in der Natur vorkommende Isotope bekannt.

Wie wird nun eigentlich ein Atom gewogen?
Die klassische Methode zur Bestimmung der Masse wurde von *J. J. Thomson* 1910 entwickelt. Da die späteren verbesserten Methoden im Prinzip ähnlich arbeiten, soll *Thomsons* sogenannte *Parabelmethode* ausführlicher beschrieben werden.
Die zu untersuchenden Atome werden ionisiert, d. h., elektrisch „aufgeladen", indem aus der Elektronenhülle z. B. ein oder mehrere Elektronen entfernt werden. Das somit positiv geladene Ion kann sowohl in einem magnetischen als auch elektrischen Feld entsprechend abgelenkt werden. Die Ionen werden durch das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators beschleunigt.



Es wirkt dabei die Kraft $F = e \cdot E$ auf die Ionen, wobei E die Feldstärke des angelegten Feldes und e die Ladung des Ions ist. Die Beschleunigung a, die das Ion im elektrischen Feld erhält, errechnet sich aus $F = a \cdot m$. Daraus folgt

$$a = \frac{e \cdot E}{m} \quad (m = \text{Masse des Ions}) \qquad (1)$$

Als nächstes müssen wir die Ablenkung in y-Richtung bestimmen (siehe Bild). Aus der Weggleichung einer beschleunigten Bewegung

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

ergibt sich in unserem Fall $y = \frac{a}{2} t^2$. (2)

(Beschleunigung erfolgt nur im Plattenkondensator!)

Aus (1) und (2) folgt $y = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t^2$. (3)

Die Ablenkung in y-Richtung erfolgt in der Zeit t, wenn das Ion den Plattenkondensator der Länge l durchläuft. Aus der Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$, die es in diesem Stück hat, läßt sich t bestimmen. (3) erhält damit die Form

$$y = \frac{e \cdot E \cdot l}{2mv^2}. \qquad (4)$$

Wir errechnen jetzt die Ablenkung in x-Richtung.
Dem elektrischen Feld überlagerte *Thomson* ein magnetisches Feld, welches von den Spulen (S) erzeugt wird, so daß die elektrischen und magnetischen Feldlinien parallel verlaufen. Im Magnetfeld wirkt die sogenannte *Lorentz*-Kraft:

$$F = e \cdot H \cdot v \text{ auf das Ion} \qquad (5)$$

(H = Feldstärke des magn. Feldes).
Diese Kraft versucht das Ion auf eine Kreisbahn zu zwingen. Den Radius dieser Kreisbahn erhält man, wenn die Lorenz-Kraft mit der Zentrifugal-Kraft

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} \text{ gleichgesetzt wird: } r = \frac{m \cdot v}{e \cdot H} \qquad (6)$$

Die Ablenkung durch das Magnetfeld erfolgt in x-Richtung. Wir verfahren analog wie bei (2):

$$x = \frac{a}{2} t^2 = \frac{al^2}{2v^2},$$

die Beschleunigung ist $a = \frac{v^2}{r}$.

Dann erhalten wir für $x = \frac{l^2}{2r}$ (7)

(6) in (7) eingesetzt, ergibt schließlich

$$x = \frac{l^2 e \cdot H}{2 \cdot m \cdot v}. \qquad (8)$$

Diese Gleichung quadriert, nach v^2 umgestellt und in (4) eingesetzt, bringt uns das Endresultat

$$y = \frac{2Em}{l^2 e H^2} \cdot x^2. \qquad (9)$$

Das ist aber eine Parabelgleichung. Die (etwas langatmige) Herleitung sollte verdeutlichen, mit welch relativ einfachen physikalischen und mathematischen Mitteln das Problem der Massenbestimmung von Ionen gelöst werden konnte. Im physikalischen Experiment müßten z. B. auf einer Fotoplatte in der x-y-Ebene Spuren von Ionen zu finden sein, die Parabeläste bilden. Tatsächlich konnte *Thomson* dies 1910 mit seinem Massenspektrographen, wie die Anordnung genannt wird, beobachten. Da die in der Gleichung (9) stehenden Größen y, x, l, E und H direkt und e durch andere Versuche gemessen werden können, läßt sich dadurch die Masse der Ionen errechnen. Addiert man zu dieser Ionenmasse noch die Masse der durch den Ionisationsprozeß entfernten Elektronen, ergibt sich das absolute Atomgewicht. (*Übrigens:* von unserem Körpergewicht rund 20 g abgezogen, ergibt das Gewicht aller Atomkerne des Körpers. So leicht sind Elektronen!)
Wir müssen nochmals auf die Gleichung (9) zurückkommen. Ionen unterschiedlicher Masse ergeben auf der Fotoplatte auch unterschiedliche Parabeläste. Das führt schließlich zur Bestimmung der Masse der Isotope.

Thomson selbst konnte mit seiner Methode eine Reihe von Isotopen entdecken.
Der *Thomsonsche Massenspektrograph* arbeitete noch ziemlich ungenau, jedoch wurde das Prinzip der Ablenkung von Ionen im magnetischen und elektrischen Feld bei den Weiterentwicklungen beibehalten. Wesentliche Erkenntnisse der Atom- und Kernphysik sind der Massenspektroskopie zu verdanken. Aus der Fülle von Anwendungen und neuen Erkenntnissen sollen nur einige herausgegriffen werden, die besonders deutlich zeigen, inwieweit die Physik auch andere Gebiete der Naturwissenschaft beeinflußt. Die neuen Erkenntnisse beruhen vor allem auch auf genauen Kenntnissen der physikalischen Eigenschaften von Isotopen, wie eben gerade der Masse.
Aston konnte z. B. 1920 mit einer verbesserten massenspektroskopischen Methode feststellen, daß die Gesamtmasse eines Ions kleiner ist als die Summe der Masse der einzelnen Teilchen. Mathematisch scheint diese Tatsache völliger Unsinn zu sein, denn stelle dir bitte vor, du wiegst einen Apfel zu 60 g und einen zweiten mit 55 g. Zusammen würden die Äpfel nicht 115, sondern 112 g wiegen. – Ein nicht vorstellbares Ergebnis. – Die Masseneinbuße (der sogenannte Massendefekt) beruht bei den Atomen auf der Tatsache, daß ein Teil der Masse der Kernteilchen in Bindungsenergie „umgewandelt" wird. Gerade die Erkenntnis, daß Masse in Energie und Energie in Masse umgewandelt werden kann (besser müßte es heißen, daß Masse und Energie äquivalent sind), hat die Physik des 20. Jahrhunderts grundlegend revolutioniert, z. B. basiert die Gewinnung von Kernenergie auf dieser Tatsache.
Große Bedeutung in Naturwissenschaft und Technik haben die Isotope erlangt. Die massenspektroskopische Untersuchung von Meteoriten hat z. B. ergeben, daß die Isotopenzusammensetzung von Eisen, Tellur und anderen Elementen die gleiche wie auf der Erde ist. Die prozentuale Zusammensetzung eines Isotopengemisches läßt somit den Schluß zu, daß das Sonnensystem chemisch etwa gleich aufgebaut ist.
Eine andere Möglichkeit der Anwendung für die Massenspektroskopie fand sich in der Geologie. Durch radioaktiven Zerfall von in der Natur vorkommenden Elementen kommt es zu einer starken Variation der Isotopenzusammensetzung, da die einzelnen Isotope eines Elements meist verschiedene Zerfallszeiten (Halbwertszeiten) haben. Zerfällt z. B. Rhenium in einem Gestein in das Isotop ^{187}Os (Osmium, 187 gibt die Anzahl von Protonen und Neutronen im Kern an), so wird sich bei der massenspektrographischen Untersuchung dieses Isotop mengenmäßig bestimmen lassen. Aus der Kenntnis der Halbwertszeit von Rhenium ($5 \cdot 10^{10}$ Jahre) und der vorgefundenen Menge von Osmium läßt sich auf das Alter des Gesteins schließen. Mit Hilfe der Isotopenhäufigkeitsuntersuchungen an irdischem Blei konnte man auf ähnliche Weise das Alter der Erde auf rund 4,54 Milliarden Jahre bestimmen.
Eine besonders genaue Meßmethode mit einem Kohlenstoffisotop soll zum Schluß genannt werden. Neben dem Kohlenstoffisotop ^{12}C existiert in der Natur auch noch das ^{13}C- und das ^{14}C-Isotop (Kohlenstoff hat 6 Protonen, die Isotope 6, 7 oder 8 Neutronen im Kern). Das Kohlenstoff-14-Isotop wird bei der Reaktion der durch die kosmische Höhenstrahlung entstandenen Neutronen mit Stickstoff-14 in der Atmosphäre ständig neu gebildet. Aus dem Kohlendioxyd der Luft kann es durch Fotosynthese zum organisch gebundenen Kohlenstoff werden. Von 1 g aus Pflanzenmaterial aus dem 19. Jahrhundert gewonnenem Kohlenstoff zerfallen 14 Atome pro Minute (Halbwertszeit von ^{14}C – 5730 Jahre). Mit den besten Meßmethoden können noch Kohlenstoffisotope nachgewiesen werden, die vor 40000 Jahren entstanden sind. Damit läßt sich der Zeitpunkt der Entstehung von Pflanzenmaterial sehr lange und ziemlich genau zurückverfolgen. Es konnten z. B. umfangreiche neue Erkenntnisse über den zeitlichen Verlauf von Eiszeiten und über das chronologische Einordnen von Kulturepochen anhand von Grabfunden gewonnen werden.

H.-D. Jähnig

Die Schülerakademie Leipzig

Auf der Grundlage von Verträgen zwischen dem *Rat der Stadt Leipzig* und wissenschaftlichen Einrichtungen Leipzigs entstand nach dem Vorbild seiner Partnerstadt Kiew die *Schülerakademie Leipzig*. In ihr vermitteln Wissenschaftler verschiedenster Gebiete den Jugendlichen neueste wissenschaftliche Erkenntnisse und leisten damit einen Beitrag zur sinnvollen, anspruchsvollen Freizeitgestaltung und zur Berufsvorbereitung.

Die *Schülerakademie Leipzig* stellt sich die Aufgabe
– ihre Mitglieder, leistungsstarke und gesellschaftlich aktive Schüler der Klassen 9 bis 12, mit Problemen der modernen Wissenschaftsentwicklung vertraut zu machen.
– ihren Mitgliedern Aufgaben und Ziele der sozialistischen Integration am Forschungsgegenstand einzelner Institutionen (Akademie der Wissenschaften der DDR und Karl-Marx-Universität Leipzig) aufzuzeigen,
– ihnen Methoden des wissenschaftlichen Arbeitens zu erklären,
– Möglichkeiten zu schaffen, sie an Teilaufgaben von Vorhaben dieser Institutionen zu beteiligen,
– sie im Geiste der Weltanschauung und Moral der Arbeiterklasse zu erziehen.

Durch Vorträge (Vorlesungen), Experimentalzirkel, Besichtigungen, Exkursionen, Kolloquien und Seminare werden den Mitgliedern, die von den Direktoren und der GOL der FDJ ihrer Oberschule für die Mitgliedschaft in der *Schülerakademie Leipzig* vorgeschlagen wurden und für die diese Mitgliedschaft als FDJ-Auftrag gewertet wird, aktuellste Probleme der Natur- und Gesellschaftswissenschaften vermittelt.
Die Mitglieder erhalten beispielsweise den Auftrag, durch Vorträge, Dia-Ton-Reihen und Wandzeitungen die gewonnenen Erkenntnisse ihren Mitschülern weiterzuvermitteln. Dazu können sie u. a. die aufgezeichneten Vorträge (Tonbänder) und andere Materialien ausleihen. Die Resonanz der Schüler bezüglich dieser Einrichtung ist groß. Innerhalb eines Jahres erhöhte sich die Zahl ihrer Mitglieder von 140 auf über 900. Auch die Wissenschaftler äußern, daß es ihnen Freude bereitet, den aufgeschlossenen, interessierten Jugendlichen ihr Wissen zu vermitteln.

H.-D. Sauer

Aus dem Programm des Schuljahres 1974/75, Bereich Naturwissenschaften:
Geographische Landschaftsforschung und ihr Beitrag zur sozialistischen Landeskultur – Wie alt ist unsere Erde? – Gegenwärtige Vorstellungen über die Entstehung fossiler Brennstoffe – Einsteins Relativitätstheorie – Regulation des Stoffwechsels der Zelle – Entwicklungsprobleme industrieller Ballungsgebiete in der DDR – Die Rolle des Messens zur Erkennung der objektiven Umwelt – Energiereiche Strahlung zur Herstellung neuer Werkstoffe – Wozu ist theoretische Durchdringung der Forschung nötig? – Chemie im Haushalt – Waschmittel – Industrieabwässer-Nutzung und -Reinigung – Verunreinigung der Luft – Chemie und Landwirtschaft – Mikrobielle Synthese von Zitronensäure – Mikroorganismen in der Industrie – Nahrung der Zukunft – Anwendung der Rechentechnik bei der Führung chemisch-technischer Prozesse – Was kann man als Schüler von der Relativitätstheorie verstehen? – Laser – ihre Anwendung und Zukunft – Wie man den atomaren Aufbau der Kristalle aus Röntgenstrahlinterferenzen ermittelt – Experimentalzirkel in der Akademie der Wissenschaften der DDR
Exkursionen: Das Zentralinstitut für Isotopen- und Strahlenforschung der Akademie der Wissenschaften der DDR – Welche Natursteine sind an Leipziger Bauwerken verwendet worden? – Was ist das für ein Gestein? – Das Geophysikalische Observatorium Collm – Der Botanische Garten der Karl-Marx-Universität.

Spieglein, Spieglein an der Wand ...

Geometrische Optik, speziell für Klasse 5/6

Sicherlich hast du dich schon einmal vor einem Spiegel bewegt und dabei das merkwürdige Verhalten deines Spiegelbildes betrachtet. Um den Sachverhalt genau durchdenken zu können, wollen wir uns eine konkrete Situation vorstellen:

Wir nehmen an, du kämmst dir vor dem Spiegel deine Haare und willst dir gerade links deinen Scheitel neu ziehen (Bild 1).

Du fängst am Hinterkopf an und ziehst den Kamm nach vorn. Was macht dein Spiegelbild? Dein Spiegelbild scheint sich rechts den Scheitel zu ziehen. Dabei bewegt es ebenfalls den Kamm zur Stirn hin.

Dein Freund steht schräg hinter dir und beobachtet euch beide, dich und dein Spiegelbild. Von seinem Standpunkt aus ziehen beide den Scheitel links, aber während der Kamm bei dir von deinem Freund weggezogen wird, nähert sich ihm der Kamm in deinem Spiegelbild. Von seinem Standpunkt aus erscheint der Richtungssinn (vorn und hinten) der Kammbewegung vertauscht.

Die Entscheidung über links oder rechts, vorn oder hinten fällt also unterschiedlich aus, je nachdem ob ein außenstehender Beobachter urteilt oder ob man das Spiegelbild selbst sprechen läßt:

Bei einer Aussage über ein Spiegelbild muß der Standpunkt des Beobachters angegeben werden.

Bild 1: Du und dein Spiegelbild

Zur exakten Charakterisierung des Bildes am Planspiegel wollen wir ein Experiment durchführen:

Wir stellen einen Spiegel senkrecht auf den Tisch. Davor legen wir einen Würfel, dessen Seitenflächen zur besseren Unterscheidung mit verschiedenfarbigem Papier beklebt sind. Wir betrachten den Würfel und sein Spiegelbild. Wir bewegen den Würfel nach links, dann nach rechts.

- Von deinem Standpunkt aus bewegt sich sein Spiegelbild ebenfalls zuerst nach links, dann nach rechts.

Wir bewegen den Würfel zum Spiegel hin, vom Spiegel weg.

- Sein Spiegelbild bewegt sich ebenfalls zum Spiegel hin, vom Spiegel weg.
- Gegenstand und Spiegelbild bewegen sich in gleicher Weise.

Nun vergleichen wir die Lage entsprechender Ecken, Kanten und Flächen von Gegenstand und Bild miteinander (Bild 2).

Punkt A' liegt Punkt A gegenüber, Punkt B' liegt Punkt B gegenüber, Punkt C' liegt Punkt C gegenüber usw.

Wie verhält es sich mit den Kanten? Wir fahren einmal mit dem Finger die Kante EH von E nach H entlang und vergleichen die Fingerbewegung am Gegenstand mit der im Spiegelbild.

- Wir erkennen: Die dem Spiegel zulaufenden Kanten haben im Spiegelbild entgegengesetzten Richtungssinn.

Wie verhält es sich mit den Flächen? Die dem Spiegel nächste Fläche des Würfels ist auch im Spiegelbild die dem Spiegel nächste Fläche.

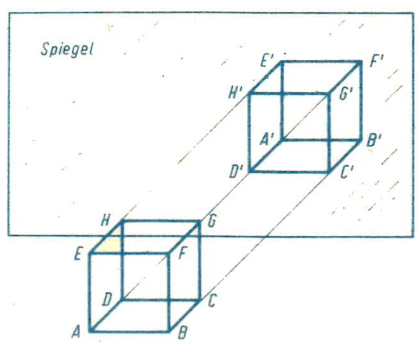


Bild 2: Gegenstand und Bild in schräger Parallelprojektion

Im Mathematikunterricht der Klasse 5 hattest du ähnliche Betrachtungen, nämlich die Spiegelung von Punkten, Strecken und Figuren an der Geraden, der Symmetriegeraden, durchgeführt und den Lehrsatz erarbeitet:

„Durch Spiegelung an einer Geraden können wir einer Figur (dem Original) das Spiegelbild dieser Figur zuordnen. Original und Spiegelbild liegen bezüglich der Symmetrieachse symmetrisch zueinander. Entsprechende Strecken sind gleich lang, und entsprechende Winkel sind gleich groß, entsprechende Punkte haben gleichen Abstand von der Symmetrieachse."

Jetzt soll ein Körper an einer Ebene, der Symmetrieebene, gespiegelt werden. Du sollst also deine Kenntnisse aus der Planimetrie in die Stereometrie übertragen.

Du wirst vermuten, daß der Gegenstand und das Spiegelbild ebenfalls symmetrisch zur Symmetrieebene, dem Spiegel, liegen. Dazu mußt du noch beweisen, daß der Gegenstand und sein Spiegelbild gleichgroß sind und daß das Spiegelbild von der Symmetrieebene die gleiche Entfernung wie der Gegenstand hat. Schaust du dir deinen Würfel und sein Spiegelbild kritisch an, so scheint das Bild kleiner als der Gegenstand zu sein. Besonders deutlich wird der Größenunterschied bei großen Gegenstandsweiten. Die Ursache für diese Erscheinung ist in der Perspektive zu suchen (Bild 3).

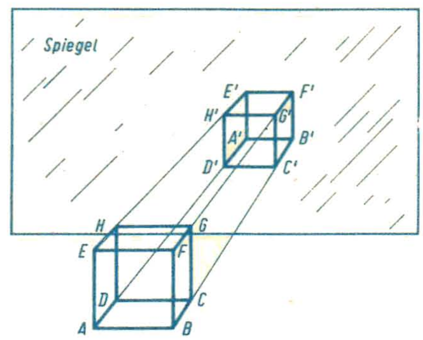


Bild 3: Gegenstand und Bild in Zentralprojektion

Im Experiment muß diese perspektivische Verkleinerung des Bildes berücksichtigt werden. Man darf nicht direkt den Gegenstand mit dem Bild vergleichen, sondern muß über eine Bezugsgröße, einen zweiten gleichbeschaffenen Gegenstand, schließen. Dazu machst du einen weiteren Versuch (Bild 4):

Auf deinem Lineal befestigst du in der Mitte mit Knete senkrecht ein Diaglas oder eine etwa gleichgroße Glasscheibe. Du nimmst dir zwei Kerzen oder zwei Halmapuppen, die eine soll dein Gegenstand sein, die andere soll der Lagekontrolle des Spiegelbildes dienen. Du stellst die eine Kerze bzw. Puppe in Abständen von 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm vor dem Diaglas auf. Du schaust von der gleichen Seite in den Spiegel, und dort, wo sich das Spiegelbild zu befinden scheint, stellst du die Kontrollkerze oder -puppe hin. Du vergleichst einmal die zusammengehörigen Gegenstandsweiten und Bildweiten miteinander und zum anderen die jeweilige Größe des Spiegelbildes mit der Größe der Kontrollkerze bzw. -puppe. Du wirst zu folgenden Erkenntnissen kommen:

- Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich.
- Gegenstand und Bild sind gleich groß.

Nun kannst du den Satz formulieren: Durch Spiegelung eines Gegenstandes an einem Planspiegel (Symmetrieebene) erhalten wir ein zum Original symmetrisch gelegenes Spiegelbild dieses Gegenstandes. Das Spiegelbild ist genau so groß wie der Gegenstand. Entsprechende Punkte haben den gleichen Abstand von der Symmetrieebene.

Wenn du also einen Gegenstand im Spiegelbild fotografieren willst, mußt du zur Entfernung Fotoapparat – Spiegel noch die Entfernung Gegenstand – Spiegel hinzu addieren, um ein scharfes Bild des Spiegelbildes zu erhalten.

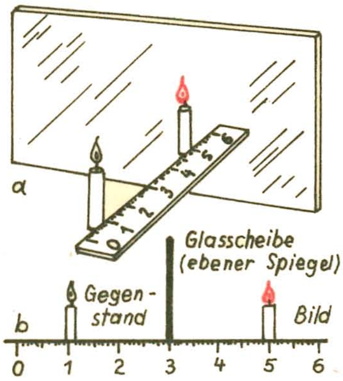


Bild 4: Ermittlung der Lage und der Größe des Spiegelbildes

Trotz vieler Übereinstimmung der planimetrischen und der stereometrischen Gegebenheit wird dir sicherlich auch ein prägnanter Unterschied zwischen beiden aufgefallen sein. Während nämlich ebene Figuren durch Umklappen um die Faltgerade, die Symmetrieachse, zur Deckung gebracht werden können (Durchgang durch die dritte Dimension), können bei Körpern Original und Spiegelbild durch Bewegung nicht in identische Lage gebracht werden.

- Die rechte Hand vor dem Spiegel erscheint im Spiegelbild als linke Hand. Es gelingt dir nicht, beide Hände zur Deckung zu bekommen.

Wie erklärt sich nun die Entstehung der Spiegelschrift?

Schreibe einmal vor dem Spiegel deinen Namen in der Luft! Du kannst die Schriftzüge ohne weiteres auch im Spiegel richtig lesen. Bei einem undurchsichtigen Blatt, z. B. der Zeitung, aber erscheint die Schrift „spiegelbildlich“. Was ist geschehen? (Bild 5)

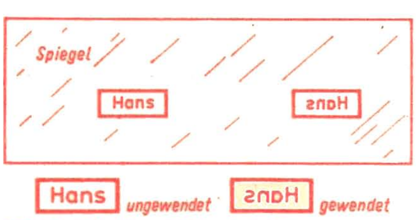
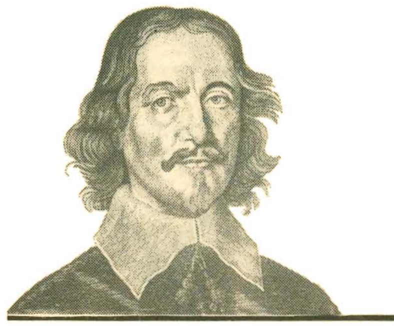


Bild 5: Schrift auf Klarsichtfolie vor dem Spiegel

Schreibe deinen Namen auf ein Stück undurchsichtiges Papier! Um es vor den Spiegel halten zu können, mußt du es wenden. Die Spiegelschrift sieht genau so aus, wie ein Abdruck auf Löschpapier. Durch das Wenden ist die Schrift zur Spiegelschrift geworden!

Nun schreibst du deinen Namen auf Klarsichtfolie. Da diese durchsichtig ist, brauchst du sie nicht zu wenden. Jetzt kannst du deine Schrift ohne weiteres auch im Spiegel richtig lesen.

Ursula Manthei



A. KAUFFELD

Otto von Guericke

Schriftenreihe: Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner

In der Broschüre wird zunächst ein ausgezeichneter Überblick über das private Leben und über die berufliche Tätigkeit des Ratsherrn, Ingenieurs und Diplomaten Otto von Guericke gegeben. Man erfährt, daß Guericke 50 Jahre im Dienste seiner Vaterstadt Magdeburg tätig war, die letzten 30 Jahre davon als Bürgermeister. In seine Amtszeit fiel der 30jährige Krieg, und zu seinen Aufgaben gehörte der Wiederaufbau seiner zerstörten Vaterstadt.

Erst im Alter von 50 Jahren begann Guericke mit seinen physikalischen Untersuchungen und führte diese neben seiner anstrengenden beruflichen Arbeit aus. Nach etwa 10 Jahren schloß er seine wissenschaftlichen Arbeiten mit der Veröffentlichung eines siebenbändigen Werkes ab.

In weiten Kreisen ist Guericke oft nur als Erfinder der Luftpumpe und besonders durch seine eindrucksvollen Versuche mit den Magdeburger Halbkugeln (s. Abb.) bekannt geworden. Der Verfasser des Buches stellt fest, daß diese Demonstrationsexperimente nur abschließende Glieder einer planmäßigen und umfassenden Untersuchung zur Erforschung der Luft bzw. des gasförmigen Zustandes der Körper waren. Darüber hinaus beschäftigte sich Guericke aber auch mit dem Problemkreis Schwere und Kraft sowie mit anderen damals besonders aktuellen physikalischen Erscheinungen.

Das Buch unterrichtet auch über den philosophischen Standpunkt Guerickes, der im Grunde materialistisch war, und über seine Forschungsmethoden eingehend und verständlich.

Auf den von ihm erforschten Gebieten hat Guericke in seiner Zeit und mit den Mitteln seiner Zeit Erkenntnisse gewonnen, die über das Niveau seiner Zeit hinausführten, und deren ganze Bedeutung erst sehr viel später voll erfaßt werden konnte.

Es ist sehr aufschlußreich zu erfahren, welche Rolle das Experiment und besonders das eigene Experimentieren als Mittel der Erkenntnisgewinnung bei Guericke gespielt haben und daß Guericke neben Galilei u. a. durch den Einsatz des Experiments als Frage an die Natur wesentlich zur Überwindung der Scholastik und der Dogmen der aristotelischen Lehre beigetragen hat. Er war somit einer der Pioniere der modernen naturwissenschaftlichen Forschungsmethode.

Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 2. Aufl. 1974,
111 Seiten, 6 Abbildungen, Preis 5,60 M

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 10. Oktober 1975

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften wohlbekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 10. Oktober 1975 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

1. Im Jahre 1974 erzielten 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte eine Transportleistung von insgesamt 10 800 000 t.
Berechne zur Veranschaulichung dieser Leistung, welche Länge ein Güterzug bei gleicher Transportleistung haben müßte! Dabei sei angenommen, daß dieser Zug aus Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t besteht und daß jeder dieser Wagen (einschließlich der Koppelvorrichtung) eine Länge von 12 m besitzt.
Wieviel Güterzüge zu je 60 dieser Güterwagen hätten 1974 täglich fahren müssen, um die gleiche Transportleistung zu erzielen (das Jahr sei zu 360 Tagen gerechnet)?

2. Ermittle alle positiven geraden Zahlen u, p, g, die folgende Ungleichungen erfüllen:
a) $42 > 5u > 19$
b) $11 < (3p+3) < 22$
c) $23 > (3g-3) \geqq 3$ und für die $(3g-3)$ eine natürliche Zahl ist!
Gib die Lösungsmenge so an, daß die geraden Zahlen, die jeweils die betreffende Ungleichheit erfüllen, der Größe nach geordnet sind!
Beginne stets mit der kleinsten!

3. Eine Gruppe von Pionieren unternahm eine Radwanderung. Sie starteten innerhalb eines Ortes und erreichten nach 800 m Fahrt den Ortsausgang. Nachdem sie danach das Fünffache dieser Strecke zurückgelegt hatten, rasteten sie. Nach weiteren 14 km machten sie Mittagspause. Die Reststrecke bis zu ihrem Fahrtziel betrug 2,5 km weniger als die bisher zurückgelegte Strecke.
Ermittle die Gesamtlänge der Strecke vom Start bis zum Fahrtziel!

4. An einem Waldlauf beteiligten sich insgesamt 81 Personen. Von den teilnehmenden Erwachsenen (18 Jahre oder älter) war die Anzahl der Männer doppelt so groß wie die der Frauen. Die Anzahl der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen (unter 18 Jahren) betrug die Hälfte der Anzahl der teilnehmenden Erwachsenen. Dabei waren es halb soviel Kinder (unter 16 Jahren) wie Jugendliche (16 Jahre oder älter, aber unter 18 Jahre).
Gib die Anzahlen der teilnehmenden erwachsenen Männer, Frauen sowie der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen an!

Olympiadeklasse 6

1. Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132 000 t Steinkohle und 24 000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.
Wieviel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

2. In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, daß alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.
Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen „Zahlenrätseln" sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muß nachgewiesen werden, daß die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und daß sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{b} \\ - & & & & - \\ \boxed{c} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{d} \\ \hline \boxed{e} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{a} \end{array}$$

3. Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker *Leonard Euler* ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:
Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.
Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

4. Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, daß das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.
Wieviel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

Olympiadeklasse 7

1. Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:
(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefaßt, ebenfalls eine Primzahl dar.
(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.
Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

2. Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, daß A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, daß A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird
a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B,
b) nach der Wassermenge W.
Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

3. Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden.
Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.
Beweise, daß die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, daß also $\overline{AC} = \overline{BD}$ und $AC \parallel BD$ gilt!

4. In der Ebene ε seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, daß keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält.
Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.

a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!

b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

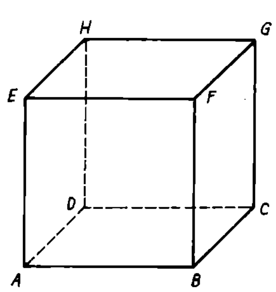
Olympiadeklasse 8

1. Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet: „Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf. bezahlt.
Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen."
Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

2. a) Ermittle alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) $a<4$. (2) $a-b>0$. (3) $a+b>2$.
b) Beweise, daß es keine geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a<0$ oder $b<0$ ist!

3. Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\sphericalangle BDA$ die Größe $90^\circ+\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$.

4. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm.



Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, daß die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrißtafel als auch parallel zur Aufrißtafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend des Bildes zu benennen.
Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!
Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

Olympiadeklasse 9

1. Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.
(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

2. In
$$\begin{array}{r} \text{H A U S} \\ +\underline{\text{H A U S}} \\ \text{S T A D T} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an!

3. Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, daß auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und daß der Abstand von A zu g kleiner ist, als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.
Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P}=\overline{B'P}$ gilt!
Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

4. Als Herr T. am 30. 12. 1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: „Jetzt bin ich genau 8mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."
Darauf entgegnete seine Frau: „Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, daß du 5mal so alt bist wie unser Sohn, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."
Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das – als Geburtsdatum des Sohnes – alle diese Angaben zutreffen!
Ist das der Fall, so geben sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ jeweils mit folgender Eigenschaft:
a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.
b) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine dreistellige Zahl, deren drei Ziffern einander gleich sind.
Hinweis: In der Zahlentafel ist eine Gleichung zur Berechnung der Summe natürlicher Zahlen zu finden.

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt.
Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!

3. Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, den Wert für das Verhältnis $a:b$ zweier positiver reeller Zahlen a und b mit $a<b$ so zu wählen, daß folgendes gilt:
Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ dieser Zahlen beträgt 60 % ihres arithmetischen Mittels!

4. In
$$\begin{array}{r} \text{H A U S} \\ +\text{ H A U S} \\ +\underline{\text{ H A U S}} \\ \text{S T A D T} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen an!

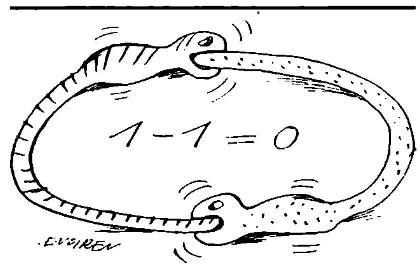
Olympiadeklasse 11/12

1. An einer Schule wird häufig Tischtennis gespielt. Man zeige, daß es stets unter sechs beliebigen Schülern dieser Schule entweder drei gibt, die bereits jeder gegen jeden gespielt haben, oder drei gibt, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen worden ist.

2. Man beweise, daß es zu drei beliebig ausgewählten Punkten einer Kugeloberfläche stets eine Halbkugel gibt, auf der diese drei Punkte liegen.
Bemerkung: Eine Halbkugel (-fläche) werde stets einschließlich ihrer Randlinie verstanden.

3. Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die
$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}=\frac{7}{12}, \qquad (1)$$
$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}=\frac{8}{15}, \qquad (2)$$
$$\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}=\frac{9}{20} \text{ gilt.} \qquad (3)$$

4. Es sei M die Menge aller derjenigen siebenstelligen Zahlen (im dekadischen Positionssystem), in denen jede der sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einmal auftritt.
Man beweise, daß keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar ist.



In freien Stunden alpha heiter

Wieso Spickzettel, Herr Horn?
Detlev Fink, Student an der TH Magdeburg

Spiel mit Dominosteinen

Die Dominosteine

0	1	2	3	4	5
6	6	6	6	6	6

können so zu einem Rechteck gelegt werden, daß in keiner Zeile und in keiner Spalte eine Zahl doppelt vorkommt.
Eine mögliche Anordnung der Steine ist diese

0	2	1
1	3	2
2	0	3
3	1	0

Beteiligt man auch die Steine

0	1	2	3
4	4	4	4

am Spiel, ist das Rechteck besonders einfach zu legen, so daß in keiner Zeile und in keiner Spalte eine Zahl doppelt vorkommt.
Etwas schwieriger wird es wieder, wenn auch noch die Steine

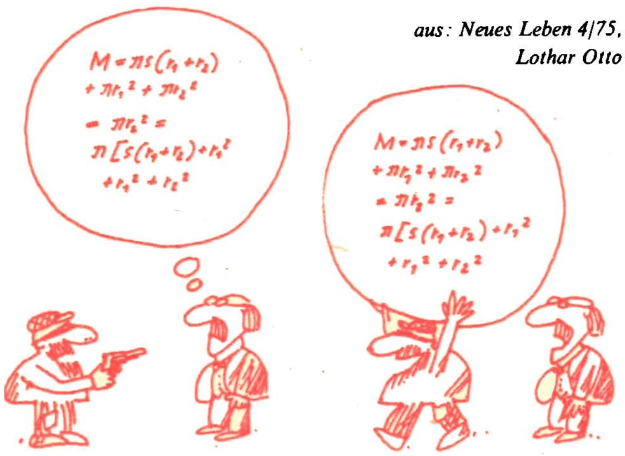
0	1	2	3	4
5	5	5	5	5

dazukommen und die 15 Steine zu einem Rechteck gelegt werden, wobei die gleiche Vorschrift (wie oben) gelten soll.
Zum Schluß sollen noch folgende Steine am Spiel teilnehmen, und auch jetzt soll die gleiche Vorschrift gelten, daß in keiner Zeile und in keiner Spalte gleiche Zahlen mehrfach vorkommen.

0	0	0	1	2	3
1	2	3	2	3	3

Wer bereits bei den ersten 10 Steinen mit den Ziffern von 0 bis 4 eine zweckmäßige Methode gefunden hat, dem wird die letzte Aufgabe keine großen Schwierigkeiten machen.
Heinz Krzikalle, Jacobsdorf

aus: Neues Leben 4/75, Lothar Otto



Dreistellige Telefonnummern

Johannes wohnt in einer Kleinstadt, wo man bloß dreistellige Telefonnummern benutzt. Einmal fragte er seine Mitschülerin Monika: „Kannst du mir deine Telefonnummer nennen?“ Sie antwortete: „Die erste Grundziffer heißt acht, die anderen zwei sind ungerade. Kannst du's erraten?“
Wieviel solche Nummern gibt es in der Stadt?
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau

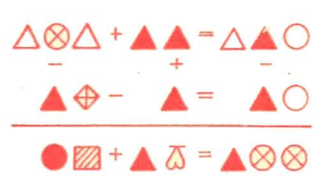
Vierstellige Autonummern

Frank erzählt:
Die vierziffrige Autonummer meines Mathe-Lehrers ist sehr leicht zu merken. Sie ist symmetrisch und die Quersumme ist so groß wie die vordere zweiziffrige Zahl.
Ralph meint:
Die Autonummer (vierziffrige) meines Vaters ist auch bemerkenswert. Die hintere zweiziffrige Zahl kann nicht größer sein, und sie ist beinahe das Fünffache der vorderen zweiziffrigen Zahl.
Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Netzschkau

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} EINS \\ +EINS \\ \hline PAAR \end{array} \qquad \begin{array}{r} PAAR \\ +PAAR \\ \hline VIER \end{array} \qquad \begin{array}{r} VIER \\ +VIER \\ \hline ACHT \end{array}$$

Die Buchstaben sollen so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Untersuche, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!
Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden



Schülerin Monika Damisch, Gera

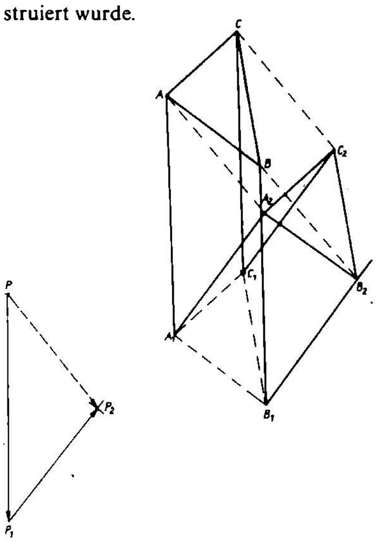
XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen

Kreisolympiade

Klassenstufe 5

1. Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der (1. Lösungsweg) für mindestens einen der Punkte A, B, C sein Bild A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ oder (2. Lösungsweg) gleichsinnig parallel und gleichlang zu einem der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_2}$ bzw. $\overrightarrow{CC_2}$ der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_2}$ und dann durch Verbindung von P_1 mit P_2 der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ konstruiert wurde.



2. Anita und Peter bezahlten für die 4 Flaschen Brause wegen $4 \cdot 15 = 60$ insgesamt 60 Pfennig mehr, als sie für 4 Flaschen Selters bezahlt hätten. Für diese 60 Pfennig hätten sie genau $7-4=3$ Flaschen Selterswasser kaufen können. Wegen $60:3=20$ kostete mithin jede Flasche Selterswasser 20 Pfennig, und folglich jede Flasche Brause 35 Pfennig. Wegen $4 \cdot 35 = 7 \cdot 20 = 140$ kosteten die 4 Flaschen Brause 1,40 Mark.

3. Laut Aufgabe legte der Zug, während Uwe schlief, eine Strecke zurück, die doppelt so lang wie 25 km war, also 50 km betrug. Vom Zeitpunkt des Einschlafens an bis zum Reiseziel mußte wegen $50+25=75$ Uwe folglich 75 km fahren. Das war laut Aufgabe die Hälfte der Länge seiner Reisestrecke. Daher war diese Reisestrecke 150 km lang.

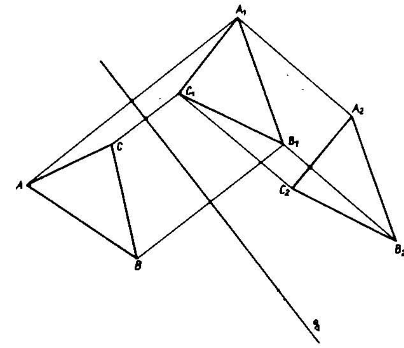
4. Laut Aufgabe wurden wegen $14 \cdot 6 = 84$ in diesem Turnier insgesamt 84 Spiele ausgetragen. Diese Anzahl setzt sich additiv zusammen aus der Anzahl der Spiele, die die Mädchen gegeneinander durchführten, und der Anzahl der Spiele, an denen die Jungen beteiligt waren.
Bei n Spielern, von denen jeder gegen jeden $(n-1)$ der anderen Spieler genau zwei Spiele austrägt, beträgt die Anzahl aller Spiele $n(n-1)$. Damit läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

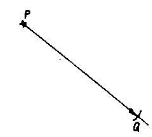
Anzahl der Spieler	Anzahl der Spiele	Ergänzung zu 84
2	2	82
3	6	78
4	12	72
5	20	64
6	30	54
7	42	42
8	56	28
9	72	12
$\geqq 10$	$\geqq 90$	–

Da laut Aufgabe 84 Spiele insgesamt durchgeführt wurden, kann die Anzahl der teilnehmenden Jungen bzw. die der Mädchen nicht größer als 9 gewesen sein. Als Summanden können nur die in der Tabelle ermittelten Zahlen auftreten, und zwar müssen es genau zwei Summanden der Form $n(n-1)$ sein, deren Summe 84 beträgt. Das ist, wie ein Vergleich der Zahlen der zweiten und dritten Spalte der Tabelle zeigt, nur für $42+42=84$ und $12+72=84$ möglich. Da die Anzahl der teilnehmenden Jungen größer war als die der Mädchen, kann die gesuchte Lösung nur lauten:
Es nahmen 4 Mädchen und 9 Jungen an dem in der Aufgabe erwähnten Turnier teil.

Klassenstufe 6

1. Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Spiegelung an g und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.





2. Wenn es eine Zahl z der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl z':
(1) $z' = 198 + z$ sowie
(2) $z + z' = 13776$.
Aus (1) und (2) folgt:
$$z + 198 + z = 13\,776, \text{ woraus man}$$
$$2z = 13\,776 - 198 = 13\,578,$$
also $z = 6\,789$ erhält.
Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben. In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6789 + 198 = 6987$ zu, da z' aus z dadurch gewonnen werden kann, daß in z die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden. Daher hat genau die Zahl $z = 6789$ die von Klaus genannten Eigenschaften.

3. Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Plazierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müßte Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist. Folglich ist in (1) die Plazierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben. Daraus folgt, daß in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegte Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

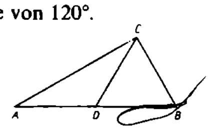
4. Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt. Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste. Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B trafen, geschah das wegen $28:7=4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.
Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt. Die Länge der Strecke von A nach B beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.

Klassenstufe 7

1. Aus (6), (3) und (2) folgt, daß weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine. Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

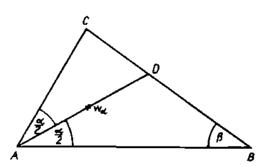
2. Wegen (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin $60°$ groß.

Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $\overline{AD}\ (=\overline{DB})=\overline{CD}$. Also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig. Als Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle BDC$ hat der Winkel $\sphericalangle ADC$ eine Größe von $120°$.



Folglich hat der Winkel $\sphericalangle ACD$ als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von $30°$. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ gleich der Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle ACD$ ist, beträgt diese $60°+30°=90°$, das Dreieck ABC ist also rechtwinklig, w. z. b. w.

3. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. AD sei die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $\overline{AD}=w_\alpha$, $\overline{\sphericalangle BAD}=\frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle ABD}=\beta$ bekannt. Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.



Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren das Dreieck ABD aus $\overline{AD}=5{,}5$ cm, $\overline{\sphericalangle BAD}=30°$ und $\overline{\sphericalangle ABD}=35°$.

(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe $60°$ nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.

(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $60°$. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $35°$. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ und hat die Länge 5,5 cm.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar. Da sowohl $\sphericalangle BAC$ als auch $\sphericalangle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist $\triangle ABC$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4\cdot\frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten. Daraus folgt $\frac{2}{12}x=20$ und somit $x=6\cdot 20=120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Fritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger), d. h. 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.

Klassenstufe 8

1. Die Anzahl aller von den Schülern der Stadt B bei dieser Kreisspartakiade errungenen Goldmedaillen sei g, die der Silbermedaillen s und die der Bronzemedaillen b. Dann gilt laut Aufgabe:

$$g+s+b=42, \qquad (1)$$

$$s=\frac{63}{3}=21, \qquad (2)$$

$$10<b<12. \qquad (3)$$

Daraus folgt, da b ganzzahlig ist, $b=11$ und somit wegen (1) und (2) $g=42-21-11=10$.

Die Schüler der Stadt B errangen 10 Gold-, 21 Silber- und 11 Bronzemedaillen.

2. Angenommen, A habe die in der Aufgabe genannte Strecke in t Stunden zurückgelegt. Dann benötigte B für dieselbe Strecke $(t+2)$ Stunden. Daher gilt $56t=40\ (t+2)$, woraus man $t=5$ erhält.

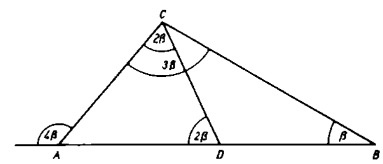
A legte mithin die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $56\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 5 Stunden zurück. Die Strecke war daher 280 km lang. Wegen $280:35=8$ würde D für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $35\frac{\text{km}}{\text{h}}$ genau 8 Stunden brauchen.

Da C erst 4 Stunden später als D abfahren soll, müßte er die gesamte Strecke in genau 4 Stunden zurücklegen, wenn er gleichzeitig mit D am Ziel eintreffen will. Wegen $280:4=70$ müßte er dabei eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$ einhalten.

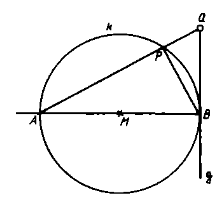
3. Es sei $\overline{\sphericalangle ABC}=\beta$. Dann hat der Außenwinkel bei A laut Aufgabe die Größe 4β. Nach dem Satz über den Außenwinkel am Dreieck beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ somit 3β, also gilt $\overline{\sphericalangle ACB}>\overline{\sphericalangle ABC}$. Daraus folgt, da im Dreieck dem größeren von zwei Winkeln jeweils die längere Seite gegenüberliegt, $\overline{AB}>\overline{AC}$. Daher gibt es auf AB einen Punkt D, für den $\overline{AD}=\overline{AC}$ gilt. Mithin sind A, D, C die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Daraus und aus dem Außenwinkelsatz folgt

$$\overline{\sphericalangle ADC}=\overline{\sphericalangle ACD}=2\beta.$$

Schließlich erhält man für jeden Punkt D der genannten Art $\overline{\sphericalangle DCB}=\overline{\sphericalangle ACB}-\overline{\sphericalangle ACD}=3\beta-2\beta=\beta=\overline{\sphericalangle DBC}$, also ist $\triangle CDB$ gleichschenklig mit $\overline{DB}=\overline{DC}$, w. z. b. w.



4. (I) Angenommen, k sei ein Kreis, wie er laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Sein Mittelpunkt sei M. Dann ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle APB$ ein rechter Winkel und als sein Nebenwinkel $\sphericalangle BPQ$ ebenfalls ein rechter Winkel. Folglich liegt P erstens auf dem Halbkreis über BQ und zweitens auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus Q durch P und zweitens auf der Senkrechten zu BQ durch B.



Daraus folgt, daß ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir zeichnen die Strecke BQ der Länge 6 cm.

(2) Wir schlagen über BQ einen Halbkreis.

(3) Wir schlagen um Q mit dem Radius der Länge 3 cm einen Kreis. Schneidet er den in (2) gezeichneten Halbkreis in einem Punkt, so sei dieser P genannt.

(4) Wir errichten in B die Senkrechte zu g.

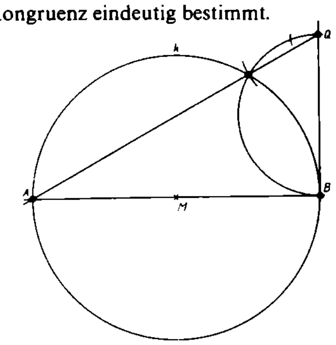
(5) Wir zeichnen den Strahl aus Q durch P. Schneidet er die in (4) konstruierte Senkrechte, so sei der Schnittpunkt A genannt.

(6) Wir zeichnen den Kreis k mit dem Durchmesser AB.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $\overline{BQ}=6$ cm und $\overline{PQ}=3$ cm. Der Kreis k berührt die Gerade g laut Konstruktion in B, da $AB \perp g$ ist. Ferner liegt laut Konstruktion P auf AQ (und zwar ist $P \neq A$). Wegen $BP \perp PQ$ (nach dem Satz von Thales) und damit $BP \perp AP$ liegt P nach der Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB sowie laut Konstruktion auf AQ.

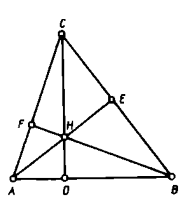
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. (3) liefert bei den gegebenen Längen für BQ und PQ genau einen Schnittpunkt P. (4) ist eindeutig ausführbar, ebenso (5), und es gibt, da der in (5) konstruierte Strahl einen spitzen Winkel mit dem Strahl aus Q durch B bildet, genau einen Schnittpunkt A des in (5) konstruierten Strahles mit der in (4) konstruierten Senkrechten. Schließlich ist auch (6) eindeutig ausführbar. Der Kreis k ist durch die gegebenen Stücke mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



Klassenstufe 9

1. Für jeden Spieltag in der Zeit dieser Halbserie sei n die Anzahl derjenigen Mannschaften der Oberliga, die nach diesem Spieltag mindestens ein Spiel ausgetragen haben. Für jede dieser n Mannschaften ist die Zahl der ausgetragenen Spiele höchstens $n-1$, da jede höchstens gegen jede der $n-1$ anderen Mannschaften genau ein Spiel ausgetragen haben kann. Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis $n-1$ keine n paarweise verschiedenen. Daher stimmen mindestens zwei dieser Zahle überein, w. z. b. w.

2. Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegen D, E und F auf den Dreieckseiten, und H liegt im Innern des Dreiecks. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke AEH und BDH ähnlich, da sie in den Scheitelwinkeln bei H und in den rechten Winkeln



bei E bzw. D übereinstimmen. Folglich gilt:

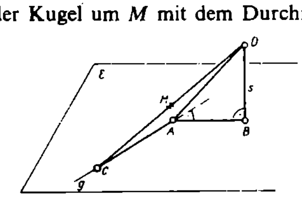
$$\overline{AH} : \overline{HE} = \overline{BH} : \overline{HD} \text{ und damit}$$
$$\overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{BH} \cdot \overline{HE}.$$

Analog ergibt sich, daß auch

$$\overline{BH} \cdot \overline{HE} = \overline{CH} \cdot \overline{HF} \text{ gilt.}$$

3. Hat eine ganze Zahl z ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, so gibt es eine ganze Zahl a mit $z^3 = 588a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a$. Daraus folgt, daß z^3 und folglich auch z durch jede der Primzahlen 2, 3, 7 teilbar ist; hiernach gibt es eine ganze Zahl x, mit der z von der Form $z = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x$ ist. Hat umgekehrt z diese Form, so ist $z^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot x^3$ ein ganzzahliges Vielfaches von 588. Daher hat eine ganze Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ ist. Unter allen positiven ganzzahligen Vielfachen von 42 ist 42 die kleinste und somit die gesuchte Zahl.

4. a) Der Mittelpunkt von CD sei M. Aus $s \perp \epsilon$ folgt $BD \perp BC$ sowie $BD \perp AC$; hiernach und wegen $AB \perp AC$ ist die Ebene durch A, B, C senkrecht zu AC, demnach ist $AD \perp AC$. Also gilt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = 90°$. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt daher jeder der Punkte A und B auf einem Kreis um M mit dem Durchmesser CD. Folglich liegen die Punkte A, B, C und D auf der Kugel um M mit dem Durchmesser CD.



b) Nach dem Lehrsatz des Pythagoras erhält man aus $\overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{AB} = a$ für CB die Länge $\overline{CB} = a\sqrt{3}$ und daraus sowie aus $\overline{BD} = a\sqrt{3}$ für die Länge des Durchmessers der Kugel $\overline{CD} = a\sqrt{6}$. Der Radius der Kugel beträgt in diesem Falle also $\frac{a}{2}\sqrt{6}$.

Klassenstufe 10

1. Die Zahl z_1 ist vierstellig, da sonst wegen $z_1 > z_2$ die Summe $z_1 + z_2 < 2000$ wäre. Bezeichnet man die erste der benutzten Ziffern mit a und die zweite mit b, so gilt $a=1$ oder $a=2$. Die Zahl z_1 hat hiermit die Form $abab$, z_2 ist entweder

(1) vierstellig, dann hat sie die Form $abab$ oder (2) dreistellig, dann hat sie die Form aba oder (3) zweistellig, dann hat sie die Form ab oder (4) einstellig, dann hat sie die Form a.

Im Falle (1) und (3) stehen an den Einerstellen beider Zahlen gleiche Ziffern, folglich wäre ihre Summe eine gerade Zahl, im Widerspruch dazu, daß 2555 ungerade ist.

Im Falle (4) wäre $a=2$, was auf $b=3$ führen würde. Da aber $2323+2=2325 \neq 2555$ ist, ist auch dieser Fall nicht möglich.

Im Falle (2) muß $a=2$ sein. Daraus erhält man $b=3$. Tatsächlich erfüllen diese Angaben alle Bedingungen der Aufgabe; denn es ist $2323+232=2555$.

Die beiden Ziffern lauten 2 und 3, und es ist $z_1 = 2323$ und $z_2 = 232$.

2. Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel mit den verlangten Eigenschaften.

Aus (1) und (2) folgt dann (4) $x>y>z$.

Nach (3) gilt $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$, wobei a, b, c natürliche Zahlen sind.

Aus (4) folgt dann (5) $a>b>c$.

Wegen (1) und (2) gilt schließlich $a^2-b^2=96$ sowie $b^2-c^2=96$ und damit $(a+b)(a-b)=(b+c)(b-c)=96$.

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (4), daß höchstens die folgenden Möglichkeiten bestehen:

$a+b$ bzw. $b+c$	96	48	32	24	16	12
$a-b$ bzw. $b-c$	1	2	3	4	6	8

Hiervon scheiden die Fälle mit ungeraden $(a+b)+(a-b)=2a$ aus, und in den übrigen Fällen folgt

(a, b) bzw. (a, c)	(25, 23)	(14, 10)	(11, 5)	(10, 2)

Die einzige Zahl, die sowohl erste als auch zweite Zahl in je einem dieser Paare ist, ist 10. Damit verbleibt nur die Möglichkeit $a=14$, $b=10$, $c=2$.

Das führt auf $x=196$, $y=100$, $z=4$.

Umgekehrt hat das Tripel (x, y, z) aus diesen Zahlen die verlangten Eigenschaften; denn es ist $196-100=100-4=96$.

Das Tripel (196, 100, 4) ist daher die einzige Lösung der Aufgabe.

3. Wegen $\overline{\sphericalangle AED}=90°$ und $\overline{\sphericalangle ACD}=90°$ liegen E und C nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AD. Daher ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle CDE$ entweder gleich $\sphericalangle CAE$ ($<90°$) oder gleich $180° - \sphericalangle CAE$ ($>90°$).

Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil mit B auch AB und insbesondere E als Punkt *von* AB auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie D und daher $\sphericalangle ECD > 90°$, also $\sphericalangle CDE < 90°$ ausfällt.

Es sei jetzt R der Punkt auf DE, für den

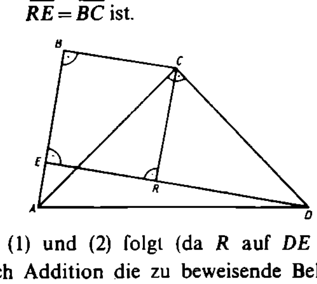
$$\overline{DR} = \overline{AB} \qquad (1)$$

gilt (wegen $\overline{AB} < \overline{AC} = \overline{DC} < \overline{DE}$ existiert tatsächlich genau ein solcher Punkt R).

Dann ist $\triangle DRC \cong \triangle ABC$ (nach sws).

Folglich ist $\sphericalangle DRC = 90°$ und somit $\sphericalangle ERC = 90°$. Daher ist $BERC$ ein Rechteck, so daß

$$\overline{RE} = \overline{BC} \text{ ist.} \qquad (2)$$

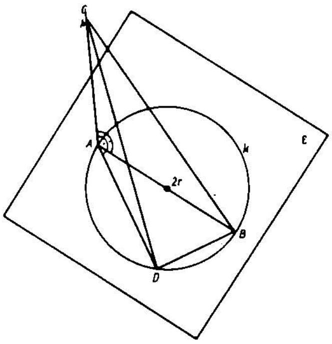


Aus (1) und (2) folgt (da R auf DE liegt) durch Addition die zu beweisende Behauptung.

4. a) Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABD rechtwinklig mit D als Scheitel des rechten Winkels. Daher gilt:
$\overline{AD}=\sqrt{4r^2-x^2}$ und somit für das Volumen der Pyramide

$$V=\frac{1}{6}xh\sqrt{4r^2-x^2}.$$

b) Wegen $AC \perp \epsilon$ ist $AC \perp BD$, ferner gilt $AD \perp BD$. Daher steht die Ebene durch A, C, D senkrecht auf BD, woraus die Behauptung $CD \perp BD$ folgt.



Anderer Beweis für b):
Nach Voraussetzung ist $AC \perp AD$. Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{CD}^2=4r^2-x^2+h^2$$

und wegen $AC \perp AB$

$$\overline{BC}^2=4r^2+h^2$$
$$=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2$$

Daher ist nach der Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras $\sphericalangle CDB$ ein rechter Winkel, *w. z. b. w.*

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Es gibt verschiedene Lösungswege:
Verlangt werden (zur Vergabe der vollen Punktzahl) sollte eine Begründung mindestens folgenden Umfangs:
Wegen (1) ist Ulrich nicht Schüler der Klasse 7, wegen (3) sind Hans und Werner nicht Schüler der Klasse 7. Also ist Fritz der Schüler der Klasse 7. Von den restlichen Schülern gehören wegen (3) Hans und Werner nicht der Klasse 8 an. Also ist Ulrich Schüler der Klasse 8. Von den nun noch verbleibenden zwei Schülern ist Hans wegen (2) nicht Schüler der Klasse 6. Also gehört Werner der Klasse 6 an, und folglich ist Hans der Schüler der Klasse 5.

2. Für jede natürliche Zahl gilt:
Bei ihrer Division durch 3 tritt als Rest einer der Werte 0, 1, 2 auf. Unter diesen Werten befinden sich keine vier verschiedenen. Daher gibt es unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen zwei, die bei Division durch 3 denselben Rest lassen. Ist r dieser Rest, so sind diese beiden Zahlen von der Form $3p+r$ und $3q+r$ mit natürlichen Zahlen p, q. Ihre Differenz ist demnach $(3p+r)-(3q+r)=3(p-q)$, also durch 3 teilbar.

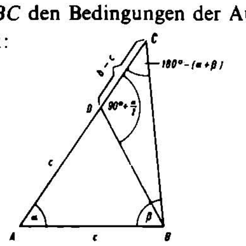
3. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist $b>c$. Daher gibt es einen Punkt D auf AC, für den $\overline{AD}=c$, also $\overline{DC}=b-c$ gilt.
Sodann ist nach dem Winkelsummensatz

$$\sphericalangle DCB=\sphericalangle ACB=180^\circ-(\alpha+\beta).$$

Ferner ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $\overline{AB}=\overline{AD}=c$, also gilt

$$\sphericalangle ABD=\sphericalangle ADB.$$

Wegen $\sphericalangle ABD+\sphericalangle ADB+\alpha=180^\circ$ folgt hieraus $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ADB=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$. Daher gilt $\sphericalangle CDB=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.
Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch D und zweitens auf dem freien Schenkel des in B an CB nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, angetragenen Winkels der Größe β.
Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(II) (1) Man konstruiert ein Dreieck BDC, in dem die Seite DC die Länge $b-c$, der Winkel $\sphericalangle CDB$ die Größe $90^\circ+\frac{\alpha}{2}$ und der Winkel $\sphericalangle DCB$ die Größe $180^\circ-(\alpha+\beta)$ haben.
(2) Man zeichnet den Strahl aus C durch D.
(3) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, einen Winkel der Größe β an.
(4) Schneidet sein freier Schenkel den in (2) gezeichneten Strahl in einem Punkt außerhalb von CD, so sei dieser A genannt.
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:



Nach Konstruktion hat $\sphericalangle ABC$ die verlangte Größe β. Ferner hat $\sphericalangle BAC$ nach dem Winkelsummensatz und nach Konstruktion die Größe
$180^\circ-\sphericalangle ABC-\sphericalangle DCB=180^\circ-\beta-(180^\circ-\alpha-\beta)=\alpha$.
Weiterhin ist nach Konstruktion

$$\sphericalangle ADB=180^\circ-\sphericalangle CDB=180^\circ-(90^\circ+\frac{\alpha}{2})=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$$ und somit

$$\sphericalangle ABD=180^\circ-\sphericalangle BAD-\sphericalangle ADB=180^\circ-\alpha-(90^\circ-\frac{\alpha}{2})=90^\circ-\frac{\alpha}{2}=\sphericalangle ADB.$$

Also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $\overline{AB}=\overline{AD}$, und somit gilt auch, wie verlangt, $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{AD}=\overline{CD}=b-c$.
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da für die gegebenen Größen α, β die Beziehung $180^\circ-\alpha-\beta>0$ und $(90^\circ+\frac{\alpha}{2})+(180^\circ-\alpha-\beta)<180^\circ$ gelten.
Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar und wegen $(180^\circ-\alpha-\beta)+\beta<180^\circ$ und $90^\circ+\frac{\alpha}{2}>\alpha$ auch Konstruktionsschritt (4). Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. In A_1 produzierte nach Durchführung der Rationalisierung jeder der 53 Arbeiter $\frac{1{,}59}{53}$ und in A_2 jeder der 62 Arbeiter $\frac{1{,}24}{62}$ des Produktionsausstoßes seiner Abteilung vor den Rationalisierungsmaßnahmen. Da in A_1 die Produktion auf eine größere Menge gewachsen war als in A_2, mußten Arbeiter von A_1 nach A_2 überwechseln. Ihre Anzahl sei x. Danach betrug in A_1 die Produktion $\frac{1{,}59}{53}(53-x)$ der früheren Produktion, in A_2 aber $\frac{1{,}24}{62}(62+x)$. Da diese beiden Produktionsausstöße gleich waren, gilt

$$\frac{159}{53}(53-x)=\frac{124}{62}(62+x),\text{ d. h.}$$
$$3(53-x)=2(62+x),\text{ also}$$
$$159-3x=124+2x \text{ und damit}$$
$$35=5x$$
$$x=7.$$

Es wechselten somit 7 Arbeiter von A_1 nach A_2 über. Der neue Produktionsausstoß in jeder Abteilung betrug dann
$\frac{1{,}59}{53}\cdot 46\,(=\frac{1{,}24}{62}\cdot 69)=1{,}38$,
d. h., er stieg auf 138 % des früheren Produktionsausstoßes.

5. Es gilt

$a:b=3:8$
$b:c=8:6$ (Erweiterung von 4 : 3 mit 2), daraus folgt
$a:b:c=3:8:6$,

d. h., a, b und c sind der Reihe nach das 3-, 8-, bzw. 6fache ein und derselben Länge.
Wegen $3+8+6=17$ und wegen des gegebenen Umfangs von 34 cm beträgt diese Länge 2 cm.
Die gesuchten Seitenlängen betragen daher $a=6$ cm, $b=16$ cm, $c=12$ cm.
Weitere Lösungsmöglichkeit:
Gegeben: $a:b=3:8$
$b:c=4:3$
$a+b+c=34$ cm
daraus folgt

$$b=\frac{8}{3}a$$
$$c=\frac{3}{4}b=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}a=2a$$
$$a+\frac{8}{3}a+2a=34\text{ cm}$$
$$\frac{17}{3}a=34\text{ cm}$$

$a=6$ cm, $b=16$ cm, $c=12$ cm.

6. Sei S der genannte Schnittpunkt, E der Mittelpunkt der Seite AB und F Fußpunkt der Höhe auf BC.
Weil die Gerade durch B und S den Winkel $\sphericalangle ABC$ halbiert, gilt dann

$\sphericalangle FBS \cong \sphericalangle SBA$ (1)

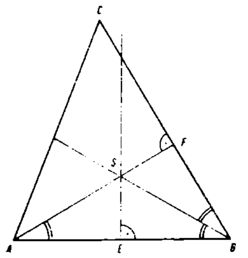
Da S außerdem auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, sind A, B, S die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit $\overline{AS} = \overline{BS}$, und deshalb ist

$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA$ (2)

Aus (1) und (2) folgt:

$\sphericalangle FBS \cong \sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA$ (3)

Weiter sind A, B, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Summe der Größe der in (3) genannten untereinander gleich großen Winkel beträgt somit nach dem Winkelsummensatz 90°.
Jeder von ihnen hat daher die Größe 30°.
Sabines Behauptung ist also richtig. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt 60°.



Klassenstufe 8

1. Das Alter eines jeden Schülers sei mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet.
Angenommen, (5) wäre wahr. Dann folgte erstens, daß (1) und (4) nicht beide wahr sein könnten; zweitens folgte auch, daß (7) und (3) nicht beide wahr sein könnten. Es gäbe also unter den Aussagen (1) bis (7) mehr als eine falsche. Damit ist die Annahme, (5) wäre wahr, widerlegt; d. h. (5) ist die falsche Aussage, und (1), (2), (3), (4), (6) und (7) sind wahr.
Aus (2) folgt $B<C$, aus (7) folgt $C<D$, aus (6) folgt $D<E$, aus (1) folgt $E<A$. Die verlangte Reihenfolge der Schüler lautet mithin: Berta, Christine, Dieter, Elvira, Anton.

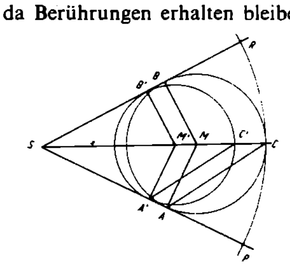
2. Angenommen, zwei Primzahlen P_1, ${}_2$ haben die verlangten Eigenschaften. Eine der Primzahlen P_1 und P_2 muß wegen (*a*) 2 sein, da die Summe ungerade Primzahlen stets größer als 2 und durch 2 teilbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_1 = 2$.
Wegen b) gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $(2+P_2)\cdot 2P_2 = 10\cdot n$,
also $(2+P_2)P_2 = 5\cdot n$ ist.
Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gilt entweder $2+P_2=5$, d. h. $P_2=3$ oder $P_2=5$.
Also erfüllen höchstens die Primzahlen (2; 3) und (2; 5) die Bedingungen.
In der Tat haben sie die verlangten Eigenschaften; denn ihre Summen P_1+P_2 sind 5 bzw. 7, jeweils also eine Primzahl. Die Produkte $(P_1+P_2)P_1P_2$ sind 30 bzw. 70, jeweils also durch 10 teilbar.

3. (I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt. A sei sein Berührungspunkt mit SP, B der mit SR und C der mit dem Bogen $\widehat{PR}$. Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt dann auf dem Strahl s aus S durch C; ferner ist $\triangle SAM \cong \triangle SBM$ wegen $\overline{SM} = \overline{SM}$, $\overline{MA} = \overline{MB}$ (Radius von k) und $\sphericalangle MAS = \sphericalangle MBS = 90°$.
Daher ist $\sphericalangle MSA = \sphericalangle MSB$, so daß s den Winkel $\sphericalangle PSR$ halbiert. Wegen $\overline{MA} = \overline{MC}$ ist weiter $\triangle ACM$ gleichschenklig und somit $\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle CAM} = \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle AMS}$, letzteres nach dem Außenwinkelsatz, der hier anwendbar ist, weil wegen der vorausgesetzten Berührung von innen M zwischen S und C liegt.
Sind jetzt M' ein beliebiger von S verschiedener Punkt auf s, A' der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P und C' der Schnittpunkt von s mit dem Kreis um M' mit dem Radius $\overline{M'A'}$, so ist $\sphericalangle A'M'S = \sphericalangle AMS$, weil $\triangle AMS \sim \triangle A'M'S$ ist. Es gilt nämlich $\sphericalangle ASM = \sphericalangle A'SM'$ und $\sphericalangle SAM = \sphericalangle SA'M' = 90°$.
Daher genügt ein Kreis k nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSR$, in dessen Innerem der Bogen $\widehat{PR}$ verläuft. Ihr Schnittpunkt mit dem Bogen $\widehat{PR}$ sei C.
(2) Man wählt einen beliebigen Punkt M' auf SC. Von M' fällt man das Lot $M'A'$ auf SP.
(3) Man schlägt um M' den Kreis k' mit dem Radius $\overline{M'A'}$. Der Schnittpunkt von k' mit der Verlängerung von SM' über M' hinaus sei C'.
(4) Man zeichnet die Parallele zu $A'C'$ durch C. Ihr Schnittpunkt mit SP sei A.
(5) Man errichtet auf SP in A die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit SC sei M.
(6) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MA}$.
(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Da gemäß (5) $\sphericalangle MAS = 90°$ ist und gemäß (4) A auf SP liegt, berührt k die Strecke SP, und zwar in A. Aus Symmetriegründen berührt daher k auch die Strecke SR. Wegen $CA \parallel C'A'$ (nach (4)) gilt $\sphericalangle SCA = \sphericalangle SC'A'$ und wegen $MA \parallel M'A'$ (nach (2) und (5)) und, da M auf SC liegt (nach (5)),

$\overline{\sphericalangle CMA} = \overline{\sphericalangle C'M'A'}$.

Daher gilt $\triangle CMA \sim \triangle C'M'A'$, und wegen $\overline{M'A'} = \overline{M'C'}$ ist $\overline{MA} = \overline{MC}$. Daher berührt k den Bogen $\widehat{PR}$ in C, dem gemeinsamen Punkt von k, $\widehat{PR}$ und der Zentralen durch M und S.
(IV) Die Konstruktionen in (II) sind alle (eindeutig) ausführbar. Das ist für (1), (3) und (6) bekannt und ergibt sich für (2), (4) und (5) folgendermaßen:
(2): Für den Fußpunkt A' des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P gilt $\overline{SA'} < \overline{SM'} < \overline{SC} = \overline{SP}$, also liegt A' auf SP wegen $\sphericalangle CSP < 90°$.
(4): Weil M' auf SC' liegt, gilt $\overline{SA'} < \overline{SC'}$ und folglich nach dem Strahlensatz für den Schnittpunkt A mit der Geraden durch S und P
$\overline{SA} < \overline{SC} = \overline{SP}$, also liegt wegen $\overline{\sphericalangle CSP} < 90°$ der Punkt A auf SP.
(5): Für den Schnittpunkt M mit der Geraden, durch S und C gilt nach dem Strahlensatz und weil M' auf SC' liegt,
$\overline{SM} = \frac{\overline{SM'}}{\overline{SC'}} \cdot \overline{SC} < \overline{SC}$, woraus, weil A auf SP liegt und $\overline{\sphericalangle CSP} < 90°$ ist, folgt, daß M auf SC liegt.
Bemerkungen: Zu dieser Konstruktion führt auch folgende Überlegung: Einerseits hat – nach Konstruktion von M', A', C' wie in (I) bzw. (II) (1) bis (3) – die Figur aus k' und dem Zentriwinkel $\sphericalangle PSR$ gehörenden Bogen des Kreises aus S durch C' die geforderten Berührungseigenschaften (mit diesem Bogen statt $\widehat{PR}$).
Andererseits muß diese Figur durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum S in die Figur um den gesuchten Kreis und den Bogen PR übergehen, da bei zentrischen Streckungen Kreise in Kreise übergehen, Geraden durch das Zentrum in sich selbst, und da Berührungen erhalten bleiben.



4. Es wurden genau 2 Spiele der folgenden Zusammenstellung gespielt: AB, AC, AD, BC, CD. Daher wurden insgesamt 12 Partien gespielt und mithin 12 Punkte vergeben.
Wenn nun bei einer Punkteverteilung, die den Angaben entspricht, Achim, Bernd, Christian und Detlef in dieser Reihenfolge a, b, c, d Punkte erzielten, so gilt:

$a+d+1=b+c$. (1)

$c+d=7$ (2)

$b+d=a+c+5$. (3)

Weil 12 Punkte insgesamt vergeben wurden, d. h. $a+b+c+d=12$ gilt, kann man aus dem entstandenen Gleichungssystem von 4 Gleichungen der Reihe nach die Unbekannten zu eliminieren und dann der Reihe nach zu ermitteln versuchen.
So folgt z. B. aus (1)

$a+d=5{,}5$, (4)

und $b+c=6{,}5$. (5)

Analog schließt man aus (3)

auf $b+d=8{,}5$ (6)

und $a+c=3{,}5$. (7)

Außerdem folgt aus (2)

$$a+b=5. \qquad (8)$$

Durch Addition erhält man aus (7) und (8)

$2a+b+c=8{,}5$ und daraus sowie aus (5) $2a+6{,}5=8{,}5$, also $a=1$.

Damit ergibt sich aus (4) $d=4{,}5$,

aus (6) $\qquad b=4$

und aus (7) $\qquad c=2{,}5$.

Daher kann nur die Antwort, Achim erhielt 1 Punkt, Bernd 4 Punkte, Christian 2,5 Punkte und Detlef 4,5 Punkte, den Angaben entsprechen.

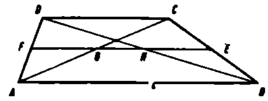
In der Tat erfüllt diese Antwort alle Bedingungen der Aufgabe. Denn wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es Beispiele für eine Verteilung der Partieausgänge, bei der die in der Antwort genannte Punkteverteilung entsteht. Ferner erhielten bei ihr Bernd und Christian zusammen 6,5 Punkte, also genau einen Punkt mehr als die 5,5 Punkte von Achim und Detlef. Weiterhin erhielten Christian und Detlef zusammen genau 7 Punkte. Schließlich erreichten Achim und Christian zusammen 3,5 Punkte, also genau 5 Punkte weniger als die 8,5 Punkte von Bernd und Detlef.

	A	B	C	D	
A	X	1	0	0	1
B	1	X	2	1	4
C	2	0	X	0,5	2,5
D	2	1	1,5	X	4,5

In jedem Feld steht die Anzahl der Punkte, die der in der jeweiligen Zeile stehende Spieler beim Spiel gegen den in der entsprechenden Spalte stehenden Spieler erzielte.

5. Es seien A, B, C und D Eckpunkte des Trapezes, und es sei $AB \parallel CD$. Weiterhin seien E der Mittelpunkt der Seite BC, F der Mittelpunkt der Seite AD sowie G der Mittelpunkt der Diagonalen AC und H der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Dann liegen nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes und dem Satz über die Mittelparallele im Trapez $ABCD$ die Punkte G und H auf FE. Man wähle die Bezeichnung so, daß $\overline{AB} \geqq \overline{CD}$ ist.

Behauptung: $\overline{GH}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{CD})$.



Beweis: Aus dem Satz, daß in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten verläuft und halb so lang wie diese ist, oder nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes folgt $\overline{FH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $\qquad$ (1)

sowie $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{CD}$. Aus (1) und (2) folgt (2)

$\overline{FH}-\overline{FG}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{CD})=\overline{GH}$. w. z. b. w.

6. a) In x kg der 25prozentigen Lösung befinden sich $\frac{25x}{100}$ kg des gelösten Stoffes, in y kg der 60prozentigen Lösung entsprechend $\frac{60y}{100}$ kg.

Somit hat $x:y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn sich in den durch Zusammengießen erhaltenen $(x+y)$ kg genau $\frac{35(x+y)}{100}$ kg des gelösten Stoffes befinden, d. h. genau dann, wenn $\frac{25x}{100}+\frac{60y}{100}=\frac{35(x+y)}{100}$ gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent

mit $\quad 25x+60y=35x+35y$,

$$25y=10x,$$

$$\frac{5}{2}=\frac{x}{y}.$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt somit 5 : 2.

b) Mit analoger Begründung wie in a) hat $x:y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn

$$\frac{p_1}{100}x+\frac{p_2}{100}y=\frac{p}{100}\cdot(x+y) \text{ gilt.}$$

Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$p_1x+p_2y=px+py,$$

$$(p_2-p)\,y=(p-p_1)x,$$

$$\frac{p_2-p}{p-p_1}=\frac{x}{y}.$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis lautet:

$$\frac{p_2-p}{p-p_1}.$$

Klassenstufe 9

1. Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn x die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ mit $83x=3\cdot 10^n+10x+8$ oder, äquivalent hierzu, mit $73x=3\cdot 10^n+8$ existiert.

Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, daß von ihnen nur die Zahl $3000008=73\cdot 41096$ teilbar ist. Daher ist $x=41096$ die gesuchte Zahl, und es gilt

$$83\cdot 41096=3410968.$$

2. Genau dann ist (a_1, a_2, a_3, a_4) ein derartiges Quadrupel, wenn es eine ganze Zahl n mit $a_1=n$, $a_2=n+1$, $a_3=n+2$, $a_4=n+3$ gibt, für die

$$n^3+(n+1)^3=(n+3)^3-(n+2)^3 \qquad (1)$$

gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit

$n^3+n^3+3n^2+3n+1=n^3+9n^2+27n+27-(n^3+6n^2+12n+8)$

und dies mit $n^3-6n=9$, d. h. mit

$$n(n^2-6)=9. \qquad (2)$$

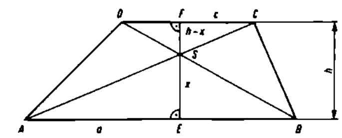
Da für ganzzahliges n die beiden Faktoren des linken Terms der Gleichung (2) ganze Zahlen sind, kann (2) nur erfüllt sein, wenn n eine der Zahlen $1, -1, 3, -3, 9, -9$ ist.

Wie die folgende Tabelle zeigt, erfüllt von diesen Zahlen genau die Zahl $n=3$ die Gleichung (2) und damit die Gleichung (1).

n	n^2	(n^2-6)	$n\cdot(n^2-6)$
1	1	−5	−5
−1	1	−5	5
3	9	3	9
−3	9	3	−9
9	81	75	675
−9	84	75	−675

Damit erfüllt das Quadrupel (3, 4, 5, 6) als einziges alle Bedingungen der Aufgabe.

3. Es seien E der Fußpunkt des Lotes von S auf die Gerade durch A und B sowie F der des Lotes von S auf die Gerade durch C und D. Dann gilt $\overline{EF}=h$. Setzt man $\overline{ES}=x$, so folgt $\overline{FS}=h-x$.



Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes: $x:(h-x)=\overline{SA}:\overline{SC}=a:c$, also $cx=ah-ax$, woraus man

$x=\frac{ah}{a+c}$ (1) sowie $h-x=\frac{ch}{a+c}$ (2) erhält.

Folglich gilt:

$F_1=\frac{1}{2}ax=\frac{a^2h}{2(a+c)}$ sowie $F_3=\frac{1}{2}c(h-x)=\frac{c^2h}{2(a+c)}$.

Die Dreiecke ABC und ABD haben den gleichen Flächeninhalt, da sie in einer Seite und der zugehörigen Höhenlänge übereinstimmen. Für ihren Flächeninhalt F gilt: $F=\frac{1}{2}a\cdot h$. Hiernach gilt für die Flächeninhalte F_2 bzw. F_4:

$$F_2=F_4=F-F_1=\frac{1}{2}ah-\frac{a^2h}{2(a+c)}$$

$$=\frac{a^2h+ahc-a^2h}{2(a+c)}=\frac{ahc}{2(a+c)}.$$

4. Wegen $(x-y)^2 \geqq 0$ gilt $x^2+y^2 \geqq 2xy$, wobei Gleichheit genau für $x=y$ gilt, und entsprechend $x^2+z^2 \geqq 2xz$, wobei Gleichheit genau für $x=z$ gilt, sowie

$y^2+z^2 \geqq 2yz$, wobei Gleichheit genau für $y=z$ gilt. Durch Addition und Division mit 2 folgt:

Es gilt stets

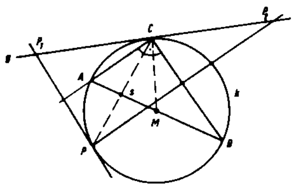
$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+xz+yz$, und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$x=y=z$ gilt.

5. a) Es gilt $\sphericalangle ACP_1 \cong \sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCP_2 \cong \sphericalangle BCP$, da der jeweils zuerst genannte Winkel Bild des anderen Winkels bei einer Spiegelung an der Geraden durch A und C bzw. an der durch B und C ist. Da die Winkel $\sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCP$ zusammen einen rechten Winkel ergeben, bilden alle vier genannten Winkel zusammen einen gestreckten. Also gilt $\sphericalangle P_1CP_2=180°$, d. h., C liegt auf der Geraden g durch P_1 und P_2.

b) Aus a) folgt: Genau dann ist g die Tangente t in C an k, wenn P_1 auf t liegt. Dies ist genau

dann der Fall, wenn P auf dem Spiegelbild s von t bei Spiegelung an der Geraden durch A und C liegt. Somit ist b) bewiesen, wenn man nachweist, daß $s \perp AB$ gilt. Dies kann folgendermaßen geschehen:
Der Winkel, den t mit AC bildet, ergänzt den Winkel $\sphericalangle BAC$ zu 90° (denn ist M der Mittelpunkt von AB, also von k, so ergänzt der Winkel zwischen t und AC den Winkel $\sphericalangle ACM$ zu 90°, und da $\triangle ACM$ gleichschenklig ist, gilt $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BAC$). Also ergänzt auch der Winkel, der s mit AC bildet, $\sphericalangle BAC$ zu 90°. Daher gilt $s \perp AB$.



6. Die Grundfläche der betrachteten Pyramide ist die des gleichseitigen Dreiecks KLM. Es hat die Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ (Pythagoras). Folglich beträgt sein Flächeninhalt (laut Tafel) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$. Es sei N der Mittelpunkt von LM. Dann liegen die Punkte K, N so auf dem Rechteck $ACGE$, wie es die Abb. zeigt; und zwar ist $\overline{GK} = \frac{a}{2}$ und $\overline{GN} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ (als halbe Länge der Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks MGL mit $\overline{GM} = \overline{GL} = \frac{a}{2}$). Daraus folgt:

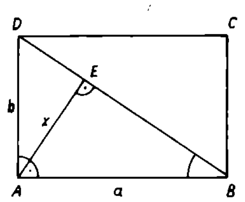
$$\overline{NK} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

und weiter (da $\triangle GPK \sim \triangle NGK$ ist)

$$\overline{GP} : \overline{GN} = \overline{NG} : \overline{NK},$$

also $\overline{GP} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} : \frac{a}{4}\sqrt{6} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

also $\overline{AP} = \overline{AG} - \overline{GP} = \frac{5}{6} a\sqrt{3}$.



Weiter gilt wegen $\overline{GN} : \overline{GK} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \overline{GC} : \overline{CA}$
$\triangle ACG \sim \triangle KGN$ und daher $\triangle ACG \sim \triangle GPK$, so daß für den Schnittpunkt P von AG mit NK $\sphericalangle GPK = \sphericalangle ACG = 90°$ ausfällt.
Aus Symmetriegründen gilt auch
$\sphericalangle GPL = 90°$.
Daher steht GP auf der Ebene durch L, M, N senkrecht, so daß AP Höhe der Pyramide $AKLM$ ist.
Mithin erhält man für das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten A, K, L, M den Wert

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{3} = \frac{5}{48} a^3.$$

Klassenstufe 10

1. Angenommen, es gibt eine Lösung, dann muß $A = 1$ sein, da die fünfstellige Summe zweier vierstelliger Zahlen kleiner als 20000 ist.
Sei die aus den drei Ziffern R, Z und T gebildete (möglicherweise mit 0 beginnende) dreistellige Zahl mit x bezeichnet, so muß gelten:
$2(1000A + x) = 10000 + 10x + E$, also
$2000A + 2x - 10000 - 10x = E$ und damit
$8(250A - 1250 - x) = E$, also $8 \mid E$.
Da E eine einstellige natürliche Zahl ist, kommen nur $E = 0$ oder $E = 8$ in Frage.
Für $E = 0$ folgt sofort

$$250A - 1250 = x,$$

also $10(25A - 125) = x$
und somit $10 \mid x$.
Das aber ist nur möglich für $T = 0$, was auf den Widerspruch $T = E$ führen würde.
Also ist eine Lösung nur möglich für $E = 8$.
In diesem Falle erhält man

$$250A - 1250 - x = 1$$
$$250(A - 5) = x + 1$$
$$A = 5 + \frac{x+1}{250}$$

Da A eine einstellige natürliche Zahl ist, folgt, daß der Quotient $\frac{x+1}{250} (>0)$ eine natürliche Zahl kleiner als 5 sein muß.
Ist er 1, 2, 3 bzw. 4 so ergibt sich jeweils
$x = 249$,
$x = 499$,
$x = 749$ bzw. $x = 999$.
Da nach den Bedingungen der Aufgabe x aus drei verschiedenen Ziffern bestehen muß, kommen höchstens 749 und 249 in Frage. Für $x = 749$ erhält man $A = 8$, was im Widerspruch zu $E = 8$ steht. Für $x = 249$ erhält man $A = 6$. Die somit als einzige verbliebene Möglichkeit
$A = 1$, $E = 8$, $R = 2$, $Z = 4$, $T = 9$, $A = 6$
erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe, da diese Ziffern sämtlich verschieden sind und da

$$\begin{array}{r} 6249 \\ +\ 6249 \\ \hline 12498 \end{array}$$

gilt.

Hinweis: Sollte die Lösung durch systematisches Probieren gefunden worden sein, so ist nur dann volle Punktzahl zu geben, wenn die Lösung mit ausreichendem Text versehen ist. Insbesondere muß nachgewiesen worden sein, daß es genau eine Lösung gibt.

2. Wegen $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{DC}$ ist $ABCD$ symmetrisch zu AC, so daß $\overline{BM} = \overline{DM}$ ausfällt.
Daher ist die zu beweisende Behauptung mit $\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}$ äquivalent.
Bezeichnen nun r den Inkreisradius und im Dreieck ABC h die Länge der Höhe auf die Gerade durch A und C sowie $I\,(\triangle XYZ)$ den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ, so gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}br} = \frac{I\,(\triangle AMB)}{I\,(\triangle CMB)} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot \overline{AM}}{\frac{1}{2}h \cdot \overline{CM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}},$$

w. z. b. w.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

(DDR-Olympiade)

Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12

1. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit

$$0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \text{ ist.} \qquad (1)$$

Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

2. Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Meßwerte u, v, w sei $180° + \delta$ mit $\delta \neq 0°$. Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Meßwerte so verändert werden, daß die Summe der dann entstehenden Werte $u + x$, $v + y$, $w + z$ gleich 180° ist.
Es ist zu beweisen, daß für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ *gilt.*

3. In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:
(A) Ist f in J streng konkav so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex. Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:
(B) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav. Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.
Hinweise:
1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng $\left\{\begin{matrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{matrix}\right\}$, wenn für je drei Zahlen x_1,

(Fortsetzung siehe Heft 5/75.)

x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $(x_1; f(x_1))$ $(x_2; f(x_2))$ begrenzten Sehne gelegene Punkt dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als $f(x^*)$ ist.

2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

4. Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \qquad (1) \text{ und}$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \text{ gelten.} \qquad (2)$$

5. Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet. Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.

a) Man beweise, daß es genau einen Punkt P^* im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.

b) Man beweise, daß für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^+ zusammenfällt.

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressanten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben. Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).

Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, daß bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) als einen „möglichen Fall". Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, als einen „günstigen Fall". Die Anzahl aller möglichen Fälle sei a_n genannt, die Anzahl aller „günstigen Fälle" g_n. Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als

$$q_n = \frac{g_n}{a_n}.$$

6B. In der Ebene sei der „Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert: Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr „Abstand"

$$d(P_1; P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A\,(0; 2)$ und $B\,(1; 4)$ gleichweit entfernt sind.

Preisträger stellen Aufgaben

Harry Reimann: Es seien $m \geqq 3$, $n \geqq 1$ und $k \geqq 1$ natürliche Zahlen. Im Raum seien n verschiedene m-Ecke gegeben, die paarweise genau einen Eckpunkt gemeinsam haben. Jeder der Eckpunkte der n m-Ecke sei der gemeinsame Eckpunkt von genau k m-Ecken. Es ist zu zeigen, daß dann stets $k \leqq m$ gelten muß.

Ralph Lehmann: In der Ebene seien ein Kreis vom Radius 1 sowie n beliebige Punkte P_1, P_2, ..., P_n gegeben.

a) Man zeige, daß auf der Peripherie des Kreises ein Punkt P mit $\overline{PP_1} + \ldots + \overline{PP_n} \geqq n$ existiert.

b) Man zeige, daß auf dem Rand eines beliebigen dem Kreis umbeschriebenen Dreiecks ein Punkt Q mit $\overline{QP_1} + \ldots + \overline{QP_n} \geqq 2n$ existiert.

Uwe Schäfer: Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M sowie ein Punkt A mit $A \in k$. Auf der Tangente Z durch den Punkt A sei ein Punkt B mit $\overline{AB} = a$ gegeben. Man konstruiere auf der Parallele p zu t durch M einen Punkt C, der nicht innerhalb des Kreises k liegt, mit folgender Eigenschaft: Wenn die Gerade AC den Kreis k in einem zweiten Punkt $D \neq A$ schneidet, so gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$.

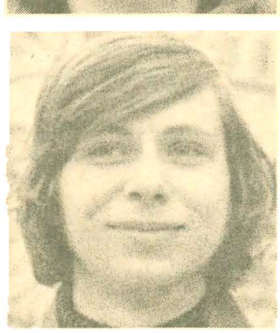
Thomas Maiwald: Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$x^4 - \frac{13}{2}x^3 + 12x^2 - \frac{13}{2}x + 1 = 0$$

erfüllt ist.

Preisträger der XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:



obere Reihe, von links:
Kl. 10: Uwe Schäfer, EOs „Dr. Th. Neubauer", Cottbus (aus Kl. 9);
Kl. 10: Werner Hoffmann, EOS Mühlhausen;
Kl. 10: Thomas Maiwald, EOS Zittau (aus Kl. 9);
mittlere Reihe, von links:
Kl. 12: Harry Reimann, EOS „Heinrich Hertz", Berlin;
Kl. 12: Ralph Lehmann, EOS „Diesterweg", Strausberg;
Kl. 12: Bernd Zaddach, Spezialkl. der Humboldt-Univ.;
links:
Kl. 12: Helmut Roßmann, EOS „Friedrich Engels", Neubr.

Beruf gesucht

Erik Tet	Tim Meckt	Thea Tim	Thea Eik
5501 Hamma	2841 Haar	8601 Merka	2421 Tramm

Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Vor-, Nach- und Beinamen

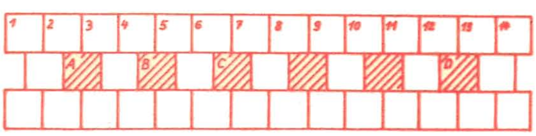
Im folgenden sind die Vor-, Nach- oder Beinamen von berühmten Mathematikern und Physikern genannt, dazu die zugehörigen Lebensdaten. Es sind die jeweils fehlenden Namen (also zum Vor- der Nachname usw.) zu finden; die Anfangsbuchstaben der zu erratenden Namen ergeben den Namen eines berühmten Mathematikers, der von 1601 bis 1655 lebte.
Giuseppe (1858 bis 1932), Newton (1643 bis 1727), Albert (1879 bis 1955), Dedekind (1831 bis 1916), Johannes (1436 bis 1476), Noether (1882 bis 1935), René (1596 bis 1650), Galois (1811 bis 1832), Jean Baptiste Joseph de (1768 bis 1830), Cartan (1869 bis 1951), Bernhard (1826 bis 1866), Planck (1858 bis 1947), Niels Henrik (1802 bis 1829), von Milet (um 624 bis 547 v. u. Z.).

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, z. Z. NVA

Silbenrätsel

Aus den Silben
bel - ber - de - ein - ent - ep - funk - ge - gen - gramm - heits - ka - ko - kreis - kreis - län - li - lon - me - mil - nus - on - pa - quo - ra - si - sym - tan - te - ter - ti - trie - ur - wahr - wert

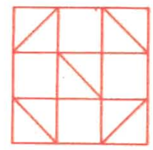
sind 14 dreisilbige Wörter nachstehender Bedeutung zu bilden und in die Figur einzutragen. Dabei haben je zwei Wörter eine gemeinsame Mittelsilbe, die unter den angegebenen Silben jeweils nur einmal aufgeführt ist. Aus den Anfangsbuchstaben dieser Mittelsilben erhält man einen in Klasse 9 eingeführten mathematischen Begriff, wenn man in die mit *A*, *B*, *C* und *D* gekennzeichneten Felder noch je einen der Vokale *a*, *i*, *o* und *u* einfügt.



Die Wörter bedeuten:
1. Einheit der Masse
2. Durchmesser eines Geschosses
3. Gerade, die eine Kurve berührt
4. Teil eines Koordinatensystems auf der Erdkugel
5. Graph einer quadratischen Funktion
6. unbegrenzte gerade Linie
7. eindeutige Abbildung
8. Ergebnis einer Division
9. Kreis mit dem Radius $r=1$
10. Merkmal einer Aussage
11. bei der Spiegelung entstehende geometrische Verwandtschaft
12. Gerät zur Eichung von Längen (aufbewahrt in Paris)
13. eine Winkelfunktion
14. griechischer Buchstabe

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

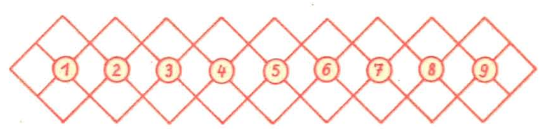
In einem Zug



Die Figur soll ohne abzusetzen nachgezeichnet werden. Dabei darf keine Verbindung zweier Punkte zweimal benutzt werden; auch dürfen sich keine Schnittpunkte mit schon benutzten Verbindungsstrecken ergeben.

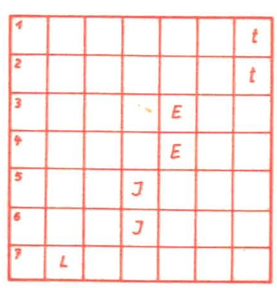
Oberlehrer Dipl.-Mathematiklehrer K. Becker, Lübtheen

Mathematische Begriffe



Die Buchstaben von 9 der 12 mathematischen Begriffe Bild, Term, neun, Wert, Ecke, wahr, Zahl, zwei, plus, Satz, Stab und zehn sind so in das folgende Schema einzusetzen, daß in jedem Feld ein Buchstabe steht und daß in den vier Feldern um einen mit Nummern versehenen Kreis beim Lesen in zyklischer Reihenfolge jeweils das Wortbild eines der 9 gewählten mathematischen Begriffe steht.

Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln



Kreuzworträtsel

Ergänze das folgende Schema! Die Buchstaben in den Feldern 1 bis 7 ergeben einen Ausruf des bekannten Mathematikers *Archimedes*.
Waagerecht: 1. bekannter Mathematiker (1862 bis 1943); 2. Begriff aus der Mengenlehre; 3. gleichmäßig gekrümmte Linie (existiert für jedes Dreieck); 4. englischer Friedensnobelpreisträger, Mathematiker; 5. Kegelschnitt; 6. Winkelfunktion; 7. Teilgebiet der Mathematik

Mathematikfachlehrer M. Linde, Damme

Der Abakus

1. Der Abakus als Urahn vieler Generationen von Rechengeräten

Im Heft 4/1972 unserer Zeitschrift ist die „счёты ученические" beschrieben worden. Sie ist als „Russische Rechenmaschine" in der Rechentechnik schon seit 1812 bekannt. Noch heute gibt es nahe Verwandte von ihr, der chinesische Suan-phan und der japanische Soro-ban. Sie sind in Ostasien im Gebrauch und werden dort in Schule und Wirtschaft verwendet.

Gehen wir zurück bis auf die kulturelle Frühzeit der Völker, so treffen wir auf den Urahn dieser drei Rechengeräte. Es ist der Abakus, das Rechenbrett. Er war eine Stein-, Metall- oder Holztafel, auf der in Spalten zwischen eingeritzten Linien Rechensteine als Ziffernsymbole eingesetzt wurden. Dieser Abakus hat sich in mancherlei Abwandlungen der Gestalt und Handhabung bis in unsere Zeit erhalten.

Wir wollen nicht jede Station des Entwicklungsweges dieser frühen Rechentechnik untersuchen, sondern uns nur mit den beiden bekanntesten Vertretern des klassischen Rechenbretts, dem griechischen und dem römischen Abakus, befassen. Im wesentlichen sollen die Grundelemente des Aufbaus der einzelnen Geräte und die Regeln ihrer Handhabung gezeigt werden. Es wird in der uns vertrauten Art von rechts nach links gerechnet, und zwar meist nach dem Dezimalsystem. Jede Spalte entspricht einer Zehnerstelle und die Symbole darin, seien es nun Steinchen oder andere Dinge, einer Einheit. Neu wird die sogenannte „Fünferbündelung" sein. Das ist das Zusammenfassen von je 5 Einheiten zu einer besonderen Einheit unter einem eigenen Symbol oder in einer eigenen Spalte.

2. Der „Griechische Abakus", auch „Salaminische Tafel" genannt

Er ist das Musterbeispiel eines klassischen Abakus. Seinen anderen Namen hat er von der griechischen Insel Salamis, wo 1846 ein Exemplar aufgefunden wurde. Dies ist eine Marmortafel, 1,50 m mal 0,75 m groß, also von der Größe einer Tischplatte. Wahrscheinlich wurde er auch mit einem Fuß als Rechentisch benutzt.

Denkt man sich nun als Rechner an der unteren Längsseite stehend, dann fallen in jeder Hälfte eine Gruppe von senkrechten, parallelen Linien auf, die in den Marmor eingeritzt sind. Links sind 10, rechts 4 Spalten gebildet, in die die Rechensteine als Ziffernsymbole eingesetzt wurden. Dann sind noch unten, links und oben Zeilen von griechischen Schriftzeichen. Es sind Buchstaben, die Zahlen und Münzwerte darstellen, ein Beweis dafür, daß die Tafel für geschäftliche Zwecke geschaffen wurde (Bild 1). Diese Zeichen sind entweder Gedächtnishilfen gewesen wie die Gebührentabellen auf unseren Postanweisungen, oder man hat an ihnen zur Erleichterung der Rechnung die Steine dafür abgezählt bereitgehalten.

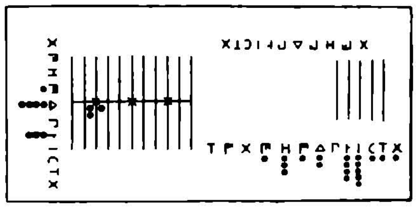
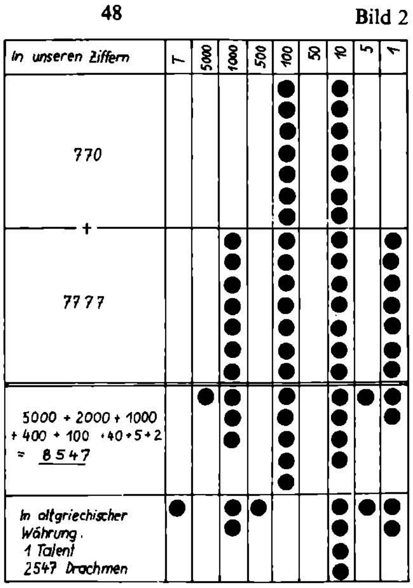


Bild 1

Die linken, längeren Spalten waren für die Münzwerte, deren Einheit die Drachme, ein Silberstück, war. Von der ersten Spalte rechts beginnend, haben wir nach links: 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 Drachmen und 1 Talent, das 6000 Drachmen galt, für die es aber kein Münzstück gab. Die Reihenfolge der Spalten war nicht rein dekadisch, also in Zehnerpotenzen, sondern dazwischen lag jeweils deren Fünffaches (Bild 2).

Die rechten, kürzeren Spalten waren für das Kleingeld, die Kupfermünzen, die Bruchteile der Drachme waren, bestimmt. 1 Obolos $= \frac{1}{6}$ Drachme, $\frac{1}{2}$ Obolos $= \frac{1}{12}$ Drachme, $\frac{1}{4}$ Obolos $= \frac{1}{24}$ Drachme und 1 Chalkos $= \frac{1}{8}$ Obolos $= \frac{1}{48}$ Drachme.

Bild 2



Die Rechenregeln lernt man am besten beim Lösen von Aufgaben. Rechenbrett sei ein Bogen Papier, den man mit 9 Spalten versieht (Bild 2). An den Kopf jeder Spalte setzt man die Zahlenwerte wie angegeben. Als Rechensteine dienen Mühle- oder Damesteine.

Wir wollen die Aufgabe lösen: $770 + 7777$.

Man setzt erst – noch ohne Berücksichtigung der 5er-Spalten – die Steine für beide Zahlen nacheinander ein. Dann entsteht folgende Lage: In einer Einer-Spalte 7 Steine, in der 10er-Spalte 14 Steine, in der 100er-Spalte 14 Steine und in der 1000er-Spalte 7 Steine. Nun kommt die Vereinfachung durch Umsetzen der Steine.

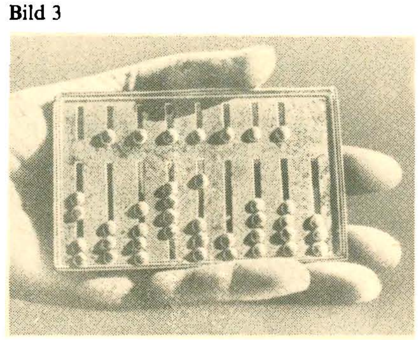
In der Einer-Spalte nehmen wir von den 7 Steinen 5 weg und setzen dafür einen Stein in die 5er-Spalte, 2 Steine bleiben in der Einer-Spalte. In der Zehner-Spalte nehmen wir 10 Steine weg und setzen dafür einen Stein in die 100er-Spalte. In der 10er-Spalte sind es dann noch 4 Steine. Nun kommen von den 15 Steinen (14+1) in der 100er-Spalte 10 weg, dafür ein Stein in die 1000-Spalte und statt der restlichen 5 Steine ein Stein in die 500er-Spalte. Jetzt sind 8 Steine in der 1000er-Spalte. Davon 6 Steine weg und ein Stein in die Talent-Spalte, bleiben 2 Steine in der 1000er-Spalte. Das Resultat ist: 1 Talent 2547 Drachmen.

Bei der an sich einfachen Rechnung ist größte Aufmerksamkeit nötig. Die „Salaminische Tafel" war bis um das 4. Jh. v.u.Z. in Gebrauch. Dann kam mehr und mehr das schriftliche Rechnen auf.

3. Der „Römische Handabakus", der Taschenrechner der Antike

Auch die Römer benutzten den griechischen Abakus. Aber für den Gebrauch in Schule, Haushalt und kleinen Geschäften haben sie ein kleines handliches Gerät erfunden, den „Römischen Handabakus". Im Bild 3 sieht man eine kleine Bronzetafel, nur 9 cm mal 12,5 cm groß, also knapp Postkartenformat. Im Bau und Handhabung bestehen Ähnlichkeiten mit der „Salaminischen Tafel". Er ist aber schon eine Weiterentwicklung des alten Abakus, zwar noch keine Rechenmaschine, aber schon ein mechanisches Gerät. In die Bronzeplatte sind zwei Reihen Schlitze eingeschnitten, in denen sich verschiebbare

Bild 3



Knöpfchen befinden. Dieser Abakus war wieder zunächst für Geschäfte bestimmt; denn er ist für Geldrechnung eingerichtet.
In der unteren Reihe der längeren Schlitze beginnt die Reihenfolge und damit der Stellenwert im Dezimalsystem vom 3. Schlitz rechts mit der Einheit der römischen Währung 1 As. Dann folgen nach links 10 As, 100 As usw. bis zu 1 Million As. Die Fünferbündelung wird hier durch die kürzeren oberen Schlitze ersetzt. Unten sind 4 Knöpfchen, oben ist nur 1 Knopf, der das Fünffache der unteren Einheit gilt mit Ausnahme des ersten Schlitzes von rechts, bei dem ein Knopf das Sechsfache zählt. Man kann so in jeder Dezimale Ziffern bis zu 9 Einheiten (4+5) darstellen.
Die Knöpfchen zählen nur, wenn sie zur Mitte hingezogen sind. In der Randstellung sind sie stumm. Die beiden Schlitze ganz rechts unten sind wieder für das Kleingeld bestimmt. Die zweite Spalte von rechts gilt eine Uncia $=\frac{1}{12}$ *As* und hat als einzige 5 Knöpfchen. Die erste Spalte gilt abschnittsweise für $\frac{1}{2}$ U. $=\frac{1}{24}$ As, $\frac{1}{4}$ U. $=\frac{1}{48}$ As und $\frac{1}{3}$ U. $=\frac{1}{36}$ As.
Zwischen den oberen und unteren Schlitzreihen sind die Zeichen für die Stellenwerte in altrömischen Symbolen angebracht (Bild 4). Zur Erläuterung stehen unsere heutigen arabischen Ziffern darunter in Klammer.

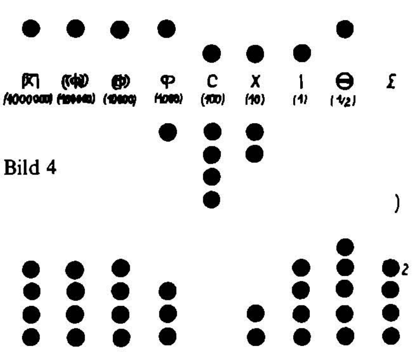
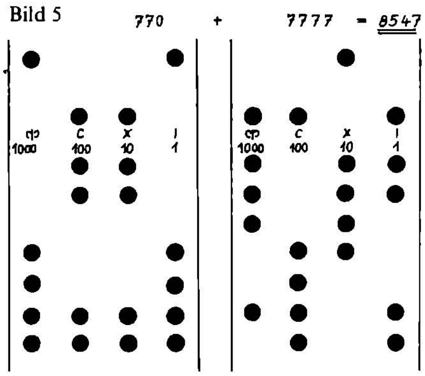


Bild 4

Um das Rechnen auf einem wirklichen Abakus zu üben, basteln wir dazu ein Modell. Man nimmt am besten starken Karteikarton im Format A5 (14,8 cm mal 21 cm) und macht dazu erst eine Vorzeichnung auf Millimeterpapier. Das erspart unnötige Arbeit mit Zirkel und Maßstab. Die 8 oberen Schlitze werden 3 cm, die 9 unteren 6 cm lang. Die Abstände zwischen den einzelnen Schlitzen und den beiden Schlitzreihen betragen je 3 cm. Die Zeichnung wird auf den Karton geheftet und durchgepaust. Man kann auch durch die Zeichnung hindurch die Schlitze mit einem scharfen Messer einschneiden. Dann werden am zweckmäßigsten Briefverschlußklammern als Knöpfchen in der nötigen Anzahl (45 Stück) durch die Schlitze gesteckt. Um ein gegenseitiges Behindern beim Verschieben zu vermeiden, dürfen die Stiele nicht länger als 1 cm sein. Zwischen die beiden Schlitzreihen wird ein Streifen mit den entsprechenden Zahlenzeichen geklebt.
Nun rechnen wir die gleiche Aufgabe wie vorhin: 770+7 777.
Verliert dabei nicht die Geduld! Sagt nicht: „Das kann man doch schneller auf dem Papier rechnen!" Das konnten die Römer eben nicht, genauso wenig wie die Griechen. Mit den römischen Zahlen war das sehr schwierig. Also nochmal: Konzentrierte Aufmerksamkeit und genaues Kopfrechnen!
Jetzt zur Aufgabe. Wir legen das Schema (Bild 4) daneben. Für die Zahl 770 bleibt der Einer-Schlitz leer. Dann schieben wir im 10er-Schlitz 2 untere Knöpfe zur Mitte, ebenfalls den oberen Knopf. Dasselbe erfolgt im 100er-Schlitz. Nun nehmen wir die Zahl 7 777 dazu. Im Einer-Schlitz unten 2 Knöpfe zur Mitte, den oberen ebenfalls. Im 10er-Schlitz soll nun die Zahl 140 erscheinen (70+70). Also unten 4 Knöpfe zur Mitte.

Bild 5


Für die restlichen 100 kommt 1 unterer Knopf im 100er-Schlitz zur Mitte. Im 100er-Schlitz soll jetzt 1 500 ausgedrückt werden (100+700+700). Es kommen also der obere Knopf zur Mitte, die 4 Knöpfe unten wieder in Ruhestellung und im 1 000er-Schlitz 1 Knopf unten zur Mitte. Schließlich muß im 1 000er-Schlitz 8 000 erscheinen (1 000+7 000). So kommen noch 2 Knöpfe unten zur Mitte, im ganzen also 3, und der obere Knopf auch zur Mitte. Dann haben wir das Resultat 8 547. Bei dieser ersten Aufgabe werden am besten außer dem Schema noch Papier und ein Stift benutzt. Für alle Phasen der Rechnung läßt sich diese Aufgabe nicht skizzieren. Im Bild 5 sind deshalb nur die Zahl 770 und das Endresultat dargestellt. Die Zwischenrechnungen müssen im Kopf oder auf dem Papier gemacht werden. Weitere Aufgaben können selbst ausgedacht werden.

M. Detlefsen

Literaturhinweis:

Wer sich weiter mit der Mathematik des Altertums beschäftigen möchte, dem sei das Lehrbuch von Prof. H. Wußing empfohlen: Mathematik der Antike, Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1964.

15 Jahre Mathe+LVZ

- 15 Jahre Mathe-Olympiaden in Leipzig. – Am 13. Juni 1960 ging die erste *Olympiade Junger Mathematiker* zu Ende. Ein Kollektiv von Mathematiklehrern wählte aus über 200 interessierten Schülern die Besten aus, überreichte Urkunden und gab damit den Startschuß für eine intensive Förderung der Jugend.
- 15 Jahre aktive Unterstützung der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik durch die *Leipziger Volkszeitung.* In ununterbrochener Folge gab die LVZ jeweils zu Ehren des Geburtstages der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" am 13. Dezember die nunmehr zur Tradition gewordene „Mathe-LVZ" heraus (Gesamtauflage 1 000 000): Mit Zirkel und Rechenstab – Mathe · international – Mathe-Olympiaden (I) – Mathe · heiter – Mathe · Rechenvorteile – Mathe · unterhaltsam – Mathe und Sport – Mathe · Astronautik und Aeronautik – Mathe und Bauwesen – Mathe und Verkehrserziehung – Mathe und Fachunterricht – Mathe · Olympiaden (II) – Mathe · modern

Die neue Mathe-LVZ (13. 12. 1975) lautet: Geometrie · (k) ein Stiefkind.
- Seit 12 Jahren erscheint monatlich auf der Jugendseite der LVZ eine Aufgabe unter dem Motto: *Mathe-Quiz.* Weit über 100 000 Einsendungen zeugen vom Interesse vor allem junger Leser für die Mathematik.
- Jedes Jahr sind rund 2 000 Pioniere und Jugendfreunde Gäste der „Wissensstraße Mathematik" zum Pressefest der LVZ. Sie werden vom *alpha*-Club der 29. OS Leipzig (*Leitung:* StR J. Lehmann, VLdV, Chefred. der *alpha*) betreut.

Zu unseren beiden *alpha*-Wandzeitungen (Seite 88/89):
In diesem Jahr werden (wie in jedem Jahr) Arbeitsblätter (gestaffelt nach Klassenstufen 1 bis 8/10) ausgegeben: An Tischen haben die interessierten Schüler die Möglichkeit zum Rechnen, d. h. ihr Wissen und Können zu erproben. Die Mitglieder des *alpha*-Clubs korrigieren die Arbeitsblätter (Format A3). Bei gutem bzw. sehr gutem Abschneiden wird die Urkunde (siehe Abb.) ausgefüllt und dem Teilnehmer überreicht. Außerdem stellt die LVZ jedes Jahr Preise zur Verfügung. Punktspiegel für Klasse 5: Aufgabe 1: 3 Punkte, 2/2 P., 3/2 P., 4/4 P., 5/2 P., 6/3 P., 7/2 P., 8/2 P.; 20 bis 18 P. – sehr gut, 17 bis 13 P. – gut. (Jedes Jahr werden die Arbeitsblätter mit neuem Inhalt bereitgestellt.)

(1)

917 Pioniere wurden beim Pioniertreffen in vier Schulen untergebracht. Die erste Schule nahm 305, die zweite Schule 186 und die dritte Schule nahm 202 Pioniere auf.

In der vierten Schule wurden [ ] Pioniere untergebracht.

(2)

Knut will die Zahl der Fenster errechnen, die auf einer Seite des Hochhauses zu sehen sind. In 14 Stockwerken sind es jeweils 9 Fenster. Im Erdgeschoß beträgt die Zahl der Fenster nur den dritten Teil, weil dort Türen sind.

Das Hochhaus hat [ ] Fenster an einer Seite.

(3)

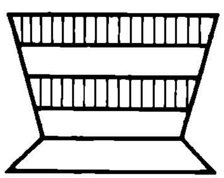
Welche Zahlen mußt du für a, b und c einsetzen?

$34 + a = 40$	
$40 : 10 = b$	
$b \cdot a = c$	
$c : (a-b) + 44 = 56$	

(4)

Wieviel Trapeze findest du in dieser Figur?

[ ] Trapeze



(5)

Lieber Koch, sag uns doch,
wieviel Faschingspfannkuchen
sind mit Senf gefüllt?
Darauf meint er:
"Zählt zur Zahl der senfgefüllten neun hinzu,
nehmt mal neun -
so sind es neun mehr als
neunundneunzig."
Gleich habt ihr es heraus.

Es sind [ ] senfgefüllte Pfannkuchen.

(6)

Setze die Zahlen 1,2,2,3,3,4,5,5,6,7,8,8 so in die Felder ein, daß die Summe jeder Zeile gleich 18 ist!

7			1
6			4

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	zus.
richtig:									
falsch:									

Name Vorname Klasse Schule

(7)

Welche Zahlen kannst du für die Buchstaben im Quadrat einsetzen, wenn folgendes bekannt ist:
J ist die Hälfte von K,
K ist die Summe von L + 9,
L ist die Differenz zwischen 11 und 14,
die Summe von N und M ist 25.

J		K
	L	
M		N

14		

(8)

Für welche natürlichen Zahlen x gilt, daß $49 > 8 \cdot x > 31$

alpha-Wandzeitung für Klasse 5

(1) Drei Pioniergruppen sammelten insgesamt 700 kg Altstoffe. Die erste Gruppe sammelte 130 kg, die zweite das Doppelte der ersten. Wieviel kg sammelte die dritte Gruppe?

Die dritte Gruppe sammelte [kg] Altstoffe.

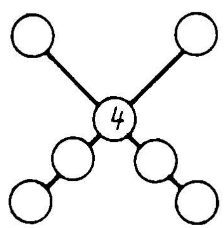
(2) Ersetze die geometrischen Figuren durch Ziffern! (Gleiche Figuren bedeuten gleiche Ziffern.)

□ + □ = △ | + =

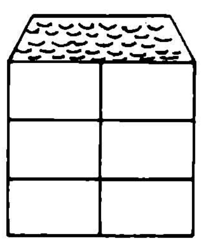
□ · □ = △ | · =

△ − △ = ○ | − =

(3) Trage die Zahlen 3, 5, 6, 7, 8, 9 so in die Kreisflächen ein, daß die Summe auf jeder Geraden 23 beträgt!



(4) In diesem Haus wohnen Jens, Peter, Inge, Horst, Elke und Uwe. Inge wohnt links neben Uwe. Jens wohnt rechts neben Horst. Inge wohnt höher als Horst. Uwe wohnt tiefer als Peter. Peter und Inge wohnen auf verschiedenen Seiten. Wo wohnt jeder einzelne?



(5) Auf dem Rasen sitzt eine Taube. Durch ein Geräusch wird sie aufgeschreckt. Sie erhebt sich in die Lüfte. Bei jedem Flügelschlag steigt sie um 60 cm in die Höhe. Bis zum neuen Flügelschlag sinkt sie um 30 cm. Wieviel Flügelschläge sind nötig, um eine Höhe von 12 m zu erreichen?

Es sind [Flügelschläge] nötig, um eine Höhe von 12 m zu erreichen.

(6) Welche Zahl bedeutet jeder Buchstabe, wenn folgendes bekannt ist:

$P = R : 40$ $\quad R = M + A$

$M = A \cdot 3$ $\quad A = 280 : 7$

$P + R + I + M + A = 350$

P	R	I	M	A

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	zus.
richtig:									
falsch:									

Name Vorname Klasse Schule

(7) Welche geraden Zahlen n erfüllen die Ungleichungen?

$11 < 3n + 3 < 22$ [ ]

$17 < n : 3 < 21$ [ ]

(8) Ordne! Schreibe die kleinste Menge zuerst!

6 t	75 dt	8200 kg	60 000 g

Lösungen

Lösungen zu „Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren" Heft 3/75

1. $(\mathbf{A}(\mathbf{BC}))x=\mathbf{A}(\mathbf{BC}x)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}x))$,
$((\mathbf{AB})\mathbf{C}x))=(\mathbf{AB})(\mathbf{C}x)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}x))$.
2. Das kommutative und assoziative Gesetz gelten für die Operatoraddition, da diese Gesetze für die gewöhnliche Addition gelten und sich unmittelbar übertragen. Die Klammern sind überflüssig, da das Ergebnis von der Art der Zusammenfassung unabhängig ist.
3. $\mathbf{A}(a_1x_1+a_2x_2)=$(da additiv) $\mathbf{A}(a_1x_1)+\mathbf{A}(a_2x_2)=a_1\mathbf{A}x_1+a_2\mathbf{A}(x_2)$ da homogen).
Umgekehrt folgt aus der Definitionsgleichung für die Linearität im Fall $a_1=a_2=1$, daß $\mathbf{A}$ additiv ist, und im Fall $a_2=0$, daß $\mathbf{A}$ homogen ist.
4. $\mathbf{AB}(a_1x_1+a_2x_2)=\mathbf{A}(a_1\mathbf{B}x_1+a_2\mathbf{B}x_2)=a_1\mathbf{AB}x_1+a_2\mathbf{AB}_2$.
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(a_1x_1+a_2x_2)=\mathbf{A}(a_1x_1+a_2x_2)+\mathbf{B}(a_1x_1+a_2x_2)=a_1\mathbf{A}x_1+a_2\mathbf{A}x_2+a_1\mathbf{B}x_1+a_2\mathbf{B}x_2=a_1(\mathbf{A}x_1+\mathbf{B}x_1)+a_2(\mathbf{A}x_2+\mathbf{B}x_2)=a_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})x_1+a_2(\mathbf{A}+\mathbf{B})x_2$.
5. $\mathbf{A}=(1+2\mathbf{V})(1+3\mathbf{V})$. $\mathbf{B}=1+\mathbf{V}(5+6\mathbf{V})$.
$\mathbf{A}=\mathbf{B}=1+5\mathbf{V}+6\mathbf{V}^2$.
6. $\mathbf{A}x+\mathbf{AB}f=f$ oder auch $\mathbf{A}x=(1-\mathbf{AB})f$.
7. $\mathbf{A}t=(1+a_1+a_2)t-(a_1+2a_2)$ und $\mathbf{A}t\equiv 0$ für $a_1=-2, a_2=1$.
8. $\mathbf{A}z^t=(z^2+a_1z+a_2)z^{t-2}$ und $Az^t\equiv 0$ für $z=\frac{1}{2}(-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2})$
sowie für $z=\frac{1}{2}(-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2})$.

Lösungen zu „Kombinatorische Probleme beim Aufstellen einer Fußballmannschaft" Heft 1/75

▲1▲ Für die Wahl des Torwarts besteht genau eine Möglichkeit. Für das Aufstellen der Verteidigerreihe gibt es 24 Möglichkeiten: Denn zunächst gibt es vier Möglichkeiten für die Wahl des Verteidigers mit der Rückennummer 2, nämlich $(B, 2)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$ und $(E, 2)$. In jedem dieser 4 Fälle gibt es drei Möglichkeiten für die Wahl des Verteidigers mit der Rückennummer 3. In jeder der damit gegebenen $4\cdot 3$ Möglichkeiten bestehen wiederum 2 Möglichkeiten für die Wahl des Verteidigers mit der Rückennummer 4. Damit bestehen $4\cdot 3\cdot 2=24$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Verteidigerreihe.
Für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 5 gibt es 6 Möglichkeiten. In jedem dieser 6 Fälle gibt es 5 Möglichkeiten für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 6. In jeder dieser $6\cdot 5=30$ Möglichkeiten gibt es 4 Möglichkeiten für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 7. In jedem dieser $6\cdot 5\cdot 4=120$ Fälle gibt es 3 Möglichkeiten für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 8. Für das Aufstellen der Läuferreihe gibt es also $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$ Möglichkeiten.
Da der Stürmer N nur die Rückennummer 11 tragen darf, gibt es für die Wahl des Stürmers mit der Rückennummer 9 zwei Möglichkeiten. In beiden Fällen gibt es für die Wahl des Stürmers mit der Rückennummer 10 nur eine Möglichkeit. Für das Aufstellen der Stürmerreihe gibt es also $2\cdot 1=2$ Möglichkeiten. Da das Aufstellen der vier Spielerreihen (Torwart-Verteidigerreihe-Läuferreihe-Stürmerreihe) voneinander unabhängig ist, gibt es $1\cdot 24\cdot 360\cdot 2=17\,280$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Fußballmannschaft.

▲2▲ Für den Einsatz des Spielers A gibt es 3 Möglichkeiten.
1. Fall: A wird nicht eingesetzt. Dann gibt es $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.
2. Fall: A wird auf Position 6 eingesetzt. Dann gibt es $5\cdot 4\cdot 3=60$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.
3. Fall: A wird auf Position 7 eingesetzt. Dann gibt es ebenfalls wie im 2. Fall 60 Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.
In allen drei möglichen Fällen gibt es, da alle Aufstellungen voneinander verschieden sind, insgesamt $120+60+60=240$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.

▲3▲ Für den Einsatz der Spieler A und B gibt es 6 Möglichkeiten:

1. Fall: $(A, 5)$, $(B, 6)$	*4. Fall:* $(B, 5)$, $(A, 6)$
2. Fall: $(A, 6)$, $(B, 7)$	*5. Fall:* $(B, 6)$, $(A, 7)$
3. Fall: $(A, 7)$, $(B, 8)$	*6. Fall:* $(B, 7)$, $(A, 8)$

In jedem dieser 6 Fälle gibt es für das Besetzen der übrigen Positionen der Läuferreihe jeweils $3\cdot 2=6$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $6\cdot 6=36$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.

▲4▲ Für das Aufstellen des Torwarts gibt es zwei Möglichkeiten. Für das Aufstellen der Verteidigerreihe $3\cdot 2\cdot 1=6$ Möglichkeiten. Die Möglichkeit für das Aufstellen der Läufer- und Stürmerreihe überblicken wir mit einer Fallunterscheidung:
1. Fall: Der Spieler M wird nicht eingesetzt. Dann gibt es für das Aufstellen der Läuferreihe $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ Möglichkeiten, für das Aufstellen der Stürmerreihe $3\cdot 2\cdot 1=6$ Möglichkeiten. Im 1. Fall gibt es für das Aufstellen der Mannschaft
$2\cdot 6\cdot 24\cdot 6=1\,728$ Möglichkeiten.
2. Fall: Der Spieler M wird als Läufer eingesetzt. Er kann entweder die Rückennummer 5, 6, 7 oder 8 tragen. Für seinen Einsatz gibt es vier Möglichkeiten. Bei jeder dieser vier Möglichkeiten gibt es $4\cdot 3\cdot 2=24$ Möglichkeiten für das Besetzen der anderen Positionen der Läuferreihe. Es gibt also $4\cdot 24=96$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe. Für das Aufstellen der Stürmerreihe gibt es $3\cdot 2\cdot 1=6$ Möglichkeiten. Im 2. Fall gibt es $2\cdot 6\cdot 96\cdot 6=6912$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft.
3. Fall: Der Spieler M wird als Stürmer eingesetzt. Für das Aufstellen der Läuferreihe gibt es $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ Möglichkeiten. Der Stürmer M kann entweder die Rückennummern 9, 10 oder 11 tragen. Für seinen Einsatz gibt es also 3 Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es für das Besetzen der beiden anderen Stürmerpositionen $3\cdot 2=6$ Möglichkeiten. Es gibt also $3\cdot 6=18$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Stürmerreihe. Im 3. Fall gibt es $2\cdot 6\cdot 24\cdot 18=5\,184$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft.
Insgesamt gibt es also $1\,728+6912+5\,184=13\,824$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 2/75

5▲1353 Wir rechnen $3\cdot 24=72$, $72:4=18$, $120-(72+18+24)=120-114=6$.
Inge besitzt 24 Ansichtskarten aus Finnland, 72 aus der Sowjetunion, 18 aus der ČSSR und 6 aus der Volksrepublik Bulgarien.

5▲1354 Angenommen a Zaunfelder haben keine Latten mehr und weitere b Zaunfelder besitzen noch alle Latten. Dann würden wegen $a=b$ die vorhandenen Latten der b Felder ausreichen, um alle $(a+b)$ Felder mit der halben Anzahl der erforderlichen Latten auszurüsten. Da in den restlichen c Feldern ebenfalls nur die Hälfte der Latten vorhanden ist, müssen wegen $a+b+c=32$ somit $11\cdot 32$ Latten, also 352 Latten, erneuert werden.

W 5 ■ 1355 Der rote Stoff sei x Meter lang; dann hat der grüne Stoff eine Länge von $(x-200)$ Metern, und der weiße Stoff ist $(x-150)$ Meter lang. Nun gilt

$$\begin{aligned} x+(x-200)+(x-150)&=3250,\\ 3x-350&=3250,\\ 3x&=3600,\\ x&=1200. \end{aligned}$$

Die Bahnen des roten, grünen und weißen Stoffes sind 1200 m, 1000 m und 1050 m lang.

W 5 ■ 1356 Wir lösen diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

n	$5\cdot n$	$5\cdot n-2$	
1	5	3	Primzahl
2	10	8	
3	15	13	Primzahl
4	20	18	
5	25	23	Primzahl
6	30	28	
7	35	33	
8	40	38	
9	45	43	Primzahl

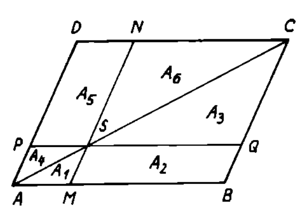
Nur die natürlichen Zahlen 1, 3, 5 und 9 erfüllen die Bedingung der Aufgabe.

W 5*1357 Zunächst lassen sich genau drei einstellige Ziffern 1, 2 und 3 bilden, und es gilt $s_1 = 1+2+3 = 6$. Ferner können folgende zweistellige Ziffern gebildet werden; 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Es gilt $s_2 = 11+12+13+ +21+\ldots+33 = 198$.
Schließlich lassen sich folgende dreistellige Ziffern bilden:
111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.
Hiefür gilt $s_3 = 111+112+\ldots+333 = 5994$. Es lassen sich genau drei einstellige, neun zweistellige und 27 dreistellige Ziffern bilden, und es gilt $s = s_1 + s_2 + s_3 = 6+198+5994 = 6198$.

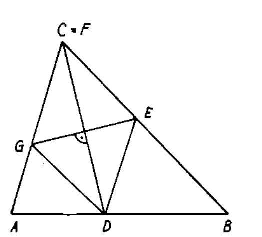
W 5*1358 Wir rechnen $30:6=5$; fünf Schüler erhielten die Note 1. $30-5-16=9$; neun Schüler erhielten die Noten 4 oder 5. Angenommen x Schüler erhielten die Note 5, dann erhielten $2 \cdot x$ Schüler die Note 4. Deshalb gilt $x+2\cdot x=9$, $3\cdot x=9$, $x=3$. Drei Schüler erhielten die Note 5, sechs Schüler die Note 4. Angenommen y Schüler erhielten die Note 3; dann gilt $3<y<6$, also $y=4$ oder $y=5$. Nach e) entfällt $y=5$. Somit erhielten 4 Schüler die Note 3 und 12 Schüler die Note 2.

6▲1359 Aus $100<n<200$ und $7\,|\,n$ folgt $n = 105, 112, 119, 126, \ldots, 182, 189, 196$.
Von diesen Zahlen haben die Quersumme 11 genau zwei Zahlen, nämlich 119 und 182.

▲6▲1360 Aus $AB \parallel CD \parallel PQ$ und $AD \parallel BC \parallel MN$ folgt, daß die Vierecke $AMSP$ und $SQCN$ ebenfalls Parallelogramme sind. Jedes Parallelogramm wird durch eine seiner Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Deshalb gilt $A_1 = A_4$, $A_3 = A_6$ und $A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6$. Durch Einsetzen erhalten wir $A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + A_5 + A_3$. Daraus folgt $A_2 = A_5$, w. z. b. w..



W 6 ■ 1361 Die Diagonalen eines Rhombus halbieren seine Winkel. Nachdem das Dreieck ABC konstruiert worden ist, zeichnen wir die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$; ihr Schnittpunkt mit AB sei D.



Nun zeichnen wir durch D die Parallele zu AC und die Parallele zu BC. Sie mögen BC in E bzw. AC in G schneiden. Das Viereck $DEFG$ ist dann der dem Dreieck ABC einzubeschreibende Rhombus.

W 6 ■ 1362 Es sei x die Anzahl der Schüler, welche die Mathematikarbeit mitgeschrieben haben.

Wegen $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ und $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ gilt

$$\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}x+2=x,$$

$$\frac{17}{18}x+2=x,$$

$$\frac{1}{18}x=2, \quad x=36.$$

Es haben 36 Schüler die Mathematikarbeit mitgeschrieben. $\frac{1}{9}\cdot 36=4$ Schüler erhielten die Note 1; $\frac{2}{9}\cdot 36=8$ Schüler erhielten die Note 2; $\frac{1}{3}\cdot 36=12$ Schüler erhielten die Note 3 und $\frac{5}{18}\cdot 36=10$ Schüler erhielten die Note 4.

W 6*1363 Es seien a, b, c, d, e jeweils das Lebensalter von Alfred, Berta, Christa, Dorit und Ernst; dann gilt

$$a+b+c+d+e=33 \qquad (1)$$
$$b=2(c+d), \qquad (2)$$
$$a=2e. \qquad (3)$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit 2 und erhalten

$$2a+2b+2(c+d)+2e=66.$$

Mit Hilfe von (2) und (3) gewinen wir daraus durch Einsetzen

$$2a+2b+b+a=66,$$
$$3a+3b=66,$$
$$a+b=22.$$

Aus (2) folgt: b ist eine gerade natürliche Zahl; aus (3) folgt: a ist eine gerade natürliche Zahl. Angenommen Dorit, die Jüngste, sei 1 Jahr alt; dann ist Christa wenigstens 3 Jahre alt. Deshalb gilt $b \geqq 2(1+3)=8$. Also ist $b=8$ oder $b=10$. Denn b ist eine gerade natürliche Zahl und kann nicht größer als 10 sein, weil sonst wegen $a+b=22$ a kleiner als b wäre.
Für $b=8$ gilt $a=14$ und somit $e=7$. Das ist wegen $b \geqq e+2=9$ nicht möglich. Für $b=10$ gilt $a=12$ und somit $e=6$ und $c+d=5$. Wegen $c \geqq d+2$ gibt es genau eine Lösung, nämlich $d=1$ und $c=4$.
Dorit ist 1 Jahr, Christa 4 Jahre, Ernst 6 Jahre, Berta 10 Jahre und Alfred 12 Jahre alt.

W 6*1364 Angenommen, die Schüler der 5. Klasse haben x kg Altstoffe gesammelt. In der nachstehenden Tabelle sind die Sammelergebnisse von den Schülern der 5. bis 10. Klasse zusammengestellt:

Klasse	Sammelergebnis in kg	Altstoffe in kg
5	x	202
6	$x+20$	222
7	$x+20$	222
8	$1{,}5x+15$	318
9	$1{,}75x+17{,}5$	371
10	$2x+20$	424

$$8{,}25x+92{,}5 = 1759$$
$$8{,}25x = 1666{,}5$$
$$x = 166650:825$$
$$x = 202$$

▲7▲1365 Aus $10^4 = 10000 < 32760$ und $20^4 = 160000 > 32760$ folgt, daß die gesuchten Zahlen größer als 10, aber kleiner als 20 sein müssen. Da das Produkt 32760 auf die Ziffer 0 endet, also durch 5 teilbar ist, muß eine der gesuchten Zahlen ebenfalls durch 5 teilbar sein. Das trifft im angegebenen Intervall nur für die Zahl 15 zu. Wegen $15^4 = 50625 > 32760$ müssen die übrigen drei Zahlen sämtlich kleiner als 15 sein. Wegen $n(n+1)(n+2)(n+3) = 32760$ und $n+3=15$ gilt somit $n=12$.
Die gesuchten Zahlen lauten 12, 13, 14 und 15, und es gilt $12\cdot 13\cdot 14\cdot 15 = 32760$.

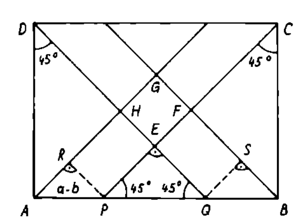
▲7▲1366 Die zweistelligen natürlichen Zahlen, die auf die Ziffer 5 enden, lassen sich in der Form $10n+5$ darstellen mit $n=1, 2, 3, \ldots, 9$. Nun gilt $(10n+5)^2 = 100n^2+100n+25 = n(n+1)\cdot 100+5^2$.
Dieses Verfahren gilt somit für die Berechnung des Quadrats aller zweistelligen natürlichen Zahlen, die auf die Ziffer 5 enden.

W 7 ■ 1367 Angenommen, es waren x Männer anwesend; dann beteiligten sich $x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x$ Frauen an der Familienfeier. Nun gilt

$$x-6=3\left(\frac{2}{3}x-6\right),$$
$$x-6=2x-18,$$
$$x=12.$$

Somit waren 12 Männer und 8 Frauen anwesend.

W 7 ■ 1368 Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle BCP = 45°$. Wegen $\sphericalangle PBC = 90°$ gilt dann auch $\sphericalangle BPC = 45°$.
Daraus folgt $\overline{BC} = \overline{BP} = b$, also $\overline{AP} = a-b$. Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle ADQ = 45°$. Wegen $\sphericalangle QAD = 90°$ gilt dann auch $\sphericalangle AQD = 45°$.



Daraus folgt $\sphericalangle PEQ = 90°$ und somit auch $\sphericalangle HEF = \sphericalangle PEQ = 90°$ als Scheitelwinkel. Aus analogen Überlegungen folgt, daß sämtliche Innenwinkel des Vierecks $EFGH$ rechte Winkel sind. Wegen $\overline{AD} = \overline{AQ} = \overline{BC} = b$ gilt ferner $\overline{BQ} = a-b$. Fällen wir von P das Lot $\overline{PR}$ auf AH und von Q das Lot $\overline{QS}$ auf BF, dann folgt aus der Kongruenz der Dreiecke

$\triangle APR$ und $\triangle QBS$ schließlich $\overline{PR}=\overline{QS}$, d. h., das Viereck $EFGH$ ist ein Quadrat. Für den Flächeninhalt dieses Quadrates gilt

$$A_Q=\frac{1}{2}\cdot\overline{HF}\cdot\overline{EG}=\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(a-b)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(a-b)^2,$$
$$A_Q=\frac{1}{2}\cdot(8-5)^2\ \mathrm{cm}^2=4{,}5\ \mathrm{cm}^2.$$

W 7*1369 Ein Spielwürfel besitzt insgesamt $1+2+3+4+5+6=21$ Augen. Nun gilt für die Oberfläche eines Würfels $A_1=6a^2$, für die Fläche eines Kreises $A_2=\frac{1}{4}\pi d^2$, für die Oberfläche einer Halbkugel $A_3=\frac{1}{2}\pi d^2$. Für die Oberfläche des Spielwürfels gilt somit

$$A_W=6a^2-21\cdot\frac{1}{4}\pi d^2+21\cdot\frac{1}{2}\pi d^2$$
$$=6a^2+\frac{21}{4}\pi d^2.$$

Für unser Zahlenbeispiel erhalten wir

$$A_W=\left(6\cdot 15^2+\frac{21}{4}\cdot\pi\cdot 2^2\right)\mathrm{mm}^2\approx 1416\ \mathrm{mm}^2.$$

W 7*1370 Es sei s die Maßzahl der Entfernung (in km) von A nach B; dann gilt wegen $t=\frac{s}{v}$ für unser Beispiel

$$\frac{s}{5}=\frac{s}{15}+2,\quad \frac{2s}{15}=2,\quad s=15,$$

d. h., die Orte A und B sind 15 km voneinander entfernt. Für das Durchfahren der halben Wegstrecke von 7,5 km benötigt der Radfahrer $\frac{1}{2}$ h. Für den Umweg benötigte er somit $2\frac{1}{2}$ h. Darum gilt $s_3=v_3\cdot t_3$ $15\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot\frac{5}{2}\mathrm{h}=37{,}5$ km. Der Radfahrer hatte einen Umweg von 37,5 km zu bewältigen.

W 8 ▪ 1371 Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung falsch ist. Dann wird keine der angegebenen Fremdsprachen von mindestens 12 Teilnehmern beherrscht. Also kann jede Fremdsprache nur von höchstens 11 Teilnehmern beherrscht werden. Da es sich um 6 Fremdsprachen handelt, wäre also die Anzahl n der Fremdsprachen, die insgesamt beherrscht werden,

$$n\leqq 6\cdot 11=66.$$

Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, wonach jeder der 70 Teilnehmer genau eine Fremdsprache beherrscht, also die Anzahl der Fremdsprachen, die insgesamt beherrscht werden, gleich

$$n=70 \text{ ist.}$$

Daher ist die Annahme falsch, und die aufgestellte Behauptung ist richtig, d. h., es gibt wenigstens eine Fremdsprache, die von mindestens 12 Teilnehmern beherrscht wird, w. z. b. w..

W 8 ▪ 1372 Wegen $AB \parallel CD$ gilt nach den Strahlensätzen

$$\overline{DE}:\overline{AF}=\overline{EM}:\overline{AM}=1:3,$$
$$\overline{EC}:\overline{FB}=\overline{EN}:\overline{BN}=1:3,$$

also $CD \parallel MN$ und daher $AB \parallel MN$. Daraus folgt weiter

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EM}}=\frac{\overline{EM}+\overline{AM}}{\overline{EM}}=1+\frac{\overline{AM}}{\overline{EM}}$$
$$=1+3=4,$$

also $\quad\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}=\frac{1}{4},\quad \overline{MN}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}a.$

Die Länge der Strecke $\overline{MN}$ ist also gleich $\frac{1}{4}a$.

W 8*1373 a) Der Expreßzug „Aurora" legt auf der Fahrt von Moskau nach Bologoje eine Strecke von 331 km in 2 h 28 min = 148 min zurück. Seine mittlere Geschwindigkeit beträgt daher auf dieser Strecke

$$v_1=\frac{331}{148}\mathrm{km}\cdot\mathrm{min}^{-1}=\frac{331\cdot 60}{148}\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$$
$$=134{,}2\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

Auf der Fahrt von Bologoje nach Leningrad legt er eine Strecke von 319 km in 2 h 23 min = 143 min zurück. Seine mittlere Geschwindigkeit beträgt daher auf dieser Strecke

$$v_2=\frac{319}{143}\mathrm{km}\cdot\mathrm{min}^{-1}=\frac{319\cdot 60}{143}\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$$
$$=133{,}8\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

b) Die beiden Züge mögen sich x min nach der Abfahrt des ersten Zuges von Moskau also um 13 h 43 min + x min treffen. Dann hat der erste Zug eine Strecke von $x\cdot\frac{331}{148}$ km zurückgelegt, da er in 1 Minute $\frac{331}{148}$ km zurücklegt.

Der zweite Zug fährt um 15.58 Uhr von Bologoje ab, also 135 min später, als der erste Zug von Moskau abgefahren ist und noch vor dem Eintreffen des ersten Zuges in Bologoje. Bis zur Begegnung mit dem ersten Zug fährt er daher $(x-135)$ min und legt eine Strecke von $(x-135)\cdot\frac{331}{175}$ km zurück, weil er in 175 min 331 km, also in 1 min $\frac{331}{175}$ km zurücklegt. Da die Summe der von den beiden Zügen gefahrenen Strecke gleich 331 km ist, erhält man die Gleichung

$$x\cdot\frac{331}{148}+(x-135)\cdot\frac{331}{175}=331, \text{ also}$$
$$x\cdot 175+(x-135)\cdot 148=148\cdot 175.$$

Daraus folgt

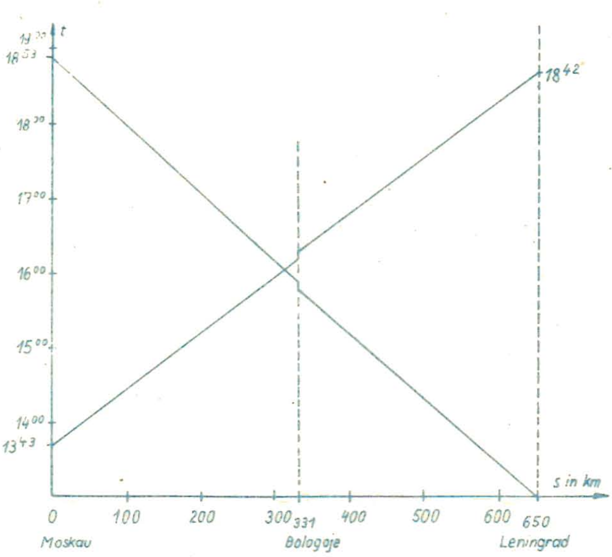
$$175x+148x-135\cdot 148=148\cdot 175,$$
$$323x=148\cdot 175+148\cdot 135,$$
$$323x=148\cdot 310,$$
$$x=\frac{148\cdot 310}{323}=142{,}0.$$

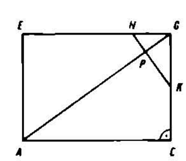
Der erste Zug begegnet also dem zweiten Zug 142 min, d. s. 2 h 22 min nach seiner Abfahrt von Moskau, also um 16.05 Uhr. Er hat dabei eine Strecke von $142\cdot\frac{331}{148}$ km = 317,6 km zurückgelegt. Die beiden Züge begegnen sich also in einer Entfernung von rund 318 km von Moskau.

Die Abbildung zeigt die graphische Lösung dieser Aufgabe. Auf der Abszissen-Achse sind, wie bei graphischen Eisenbahnfahrplänen üblich, die Entfernungen von Moskau abgetragen, auf der Ordinaten-Achse die Uhrzeiten. Der von links unten nach rechts oben verlaufende Streckenzug zeigt den Weg des ersten Zuges, der von rechts unten nach links oben verlaufende Streckenzug den Weg des zweiten Zuges. Beide Streckenzüge schneiden sich in einem Punkt, der der Entfernung 318 km (von Moskau) und der Uhrzeit 16.05 Uhr entspricht.

Die Abbildung zeigt den gesamten Abschnitt von Moskau bis Leningrad, damit die Fahrt der beiden Züge gut veranschaulicht wird. Für die graphische Lösung der Aufgabe hätte es auch genügt, nur den Abschnitt von Moskau bis Bologoje darzustellen, da die beiden Züge sich in diesem Abschnitt begegnen.

W 8*1374 a) Wir bezeichnen die gesuchte Länge der Strecke $\overline{AE}$ mit x (siehe Bild).





Nun gilt $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=\overline{BC}=b$ und nach dem Satz des Pythagoras $\overline{BD}=\sqrt{a^2+b^2}$.
Aus $\sphericalangle BEA=\sphericalangle DAB=90°$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle ABD$ folgt nun

$$\triangle ABE \sim \triangle ABD,$$

also $\quad x:a=b:\sqrt{a^2+b^2}$,

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b) Setzt man $a=4$ cm, $b=3$ cm, so wird
$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}\text{ cm}=\sqrt{25}\text{ cm}=5$ cm,

$$x=\frac{4\cdot 3}{5}\text{ cm}=2{,}4\text{ cm},$$

also noch nicht ganzzahlig. Da aber das 5-fache von 2,4 ganzzahlig ist, braucht man für a und b jeweils nur fünfmal so große Werte zu wählen, um auch einen ganzzahligen Wert für x zu erreichen. Man erhält nämlich für $a=20$ cm, $b=15$ cm

$$x=\frac{20\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}\text{ cm}=\frac{20\cdot 15}{\sqrt{625}}\text{ cm}$$

$$=\frac{20\cdot 15}{25}\text{ cm}=12\text{ cm}, \text{ also einen}$$

ganzzahligen Wert, wie es verlangt wurde.

W 9 ■ 1375 Es seien $n, n+1, n+2, n+3$ mit $n>0$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; dann ist die Summe der vier Potenzen entsprechend der Aufgabe gleich

$$s=2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}$$
$$=2^n(2^0+2^1+2^2+2^3)$$
$$=2^n(1+2+4+8)$$
$$=15\cdot 2^n \text{ mit } n\geqq 1. \text{ Daraus folgt}$$
$$s=15\cdot 2\cdot 2^{n-1}=30\cdot 2^{n-1}$$

Nun ist 2^{n-1} wegen $n-1\geqq 0$ eine natürliche Zahl, also ist die Summe s durch 30 teilbar, *w. z. b. w.*

W 9 ■ 1376 Für alle natürlichen Zahlen k mit $k>0$ gilt

$$k+1>k.$$

Durch Multiplikation auf beiden Seiten dieser Ungleichung mit der positiven Zahl $\frac{1}{k(k+1)}$ folgt $\frac{1}{k}>\frac{1}{k+1}$, also auch $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Setzt man der Reihe nach $k=1, 2, \ldots, n-1$, so erhält man die fortlaufende Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Daraus folgt insbesondere

$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, ...,
$\frac{1}{\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$. Für die Summe gilt daher

$$s=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$s>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Daher gilt $s>\sqrt{n}$. w. z. b. w.

W 9*1377 Aus $9y<1000$ folgt $y<\frac{1000}{9}=111\frac{1}{9}$, also $y\leqq 111$ und hieraus wegen $y=\frac{x}{z}\geqq\frac{100\,000\,000}{900\,909}>\frac{100\,000}{901}>110$ $\quad y=111$.

Aus $z=\frac{x}{111}\geqq\frac{100\,000\,000}{111}=900\,900\frac{100}{111}$ $>900\,900$ und $z\leqq 900\,909$ folgt, da an der letzten Stelle von z die Grundziffer 9 steht, $z=900\,909$,
also $\quad x=yz=100\,000\,899$.
Die Divisionsaufgabe lautet daher

```
100000899 : 111 = 900909
999
 1008
  999
    999
    999
```

W 9*1378 Man zeichnet das Rechteck ABB_1A_1, das außerhalb des Vierecks $ABCD$ liegt, dessen eine Seite mit $\overline{AB}$ zusammenfällt und dessen Seiten $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ die Länge r haben. Ferner zeichnet man zu den anderen Viereckseiten die entsprechenden Rechtecke BCC_1B_2, CDD_1C_2 und DAA_2D_2.
Ferner zeichnet man um die Eckpunkte A, B, C, D Kreisbogen mit dem Radius r, die jeweils durch die Punkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 bzw. D_1, D_2 begrenzt sind.
Dann ist das Gebiet G dasjenige Gebiet, das durch diese vier Kreisbogen sowie durch die vier Strecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_2C_1}$, $\overline{C_2D_1}$, $\overline{D_2A_2}$ begrenzt wird. Denn jeder Punkt des Gebietes G ist entweder ein Punkt des Vierecks $ABCD$ oder ein Punkt einer der vier Rechtecksflächen oder ein Punkt einer der vier zu den Kreisbogen gehörenden Kreissektoren und umgekehrt.
Bezeichnet man nun die Winkelgrößen des Vierecks mit α, β, γ, δ und die zu den vier Kreissektoren gehörenden Winkelgrößen mit α', β', γ', δ' so gilt, da die Winkel der Rechtecke bei A, B, C, D jeweils gleich 90° sind,
$\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma+\gamma'=\delta+\delta'=180°$,
also wegen $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$
auch $\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=360°$.
Daraus folgt, daß die vier Kreissektoren sich so aneinander legen lassen, daß sie zusammen eine Kreisfläche mit dem Radius r bilden, daß also ihr Gesamtflächeninhalt gleich πr^2 und der Gesamtumfang der entsprechenden Kreisbogen gleich $2\pi r$ ist.
Ferner gilt
$\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_2D_1}+\overline{D_2A_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=u_0$. Daher ist die Summe der Flächeninhalte der vier Rechtecke gleich

$$r(\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_2D_1}+\overline{D_2A_2})=ru_0.$$

Der Flächeninhalt des Gebietes G ist also gleich $A=A_0+\pi r^2+ru_0$;
der Umfang des Gebietes G ist gleich

$$u=u_0+2\pi r.$$

W 10/12 ■ 1379 Die positive reelle Zahl a sei in zwei Summanden x und y zerlegt. Dann gilt

$$x+y=a, \text{ also } y=a-x.$$

Setzt man nun $x=\frac{a}{2}+t$,
so wird $\quad y=a-x=\frac{a}{2}-t$. Die Summe der dritten Potenzen von x und y ist dann

$$s=x^3+y^3=\left(\frac{a}{2}+t\right)^3+\left(\frac{a}{2}-t\right)^3,$$

$$s=\frac{a^3}{8}+3\cdot\frac{a^2}{4}\cdot t+3\cdot\frac{a}{2}\cdot t^2+t^3+\frac{a^3}{8}-3\cdot\frac{a^2}{4}\cdot t$$
$$+3\cdot\frac{a}{2}\cdot t^2-t^3,$$

$$s=\frac{a^3}{4}+3\cdot a\cdot t^2.$$

Nun gilt $a>0$ und für alle reellen t

$$t^2\geqq 0, \text{ also } 3\cdot a\cdot t^2\geqq 0.$$

Daraus folgt

$s\geqq\frac{a^3}{4}$ für alle reellen t und $s=\frac{a^3}{4}$ für $t=0$.

Damit ist bewiesen, daß die Summe s der dritten Potenzen der beiden Summanden einen kleinsten Wert besitzt, nämlich $\frac{a^3}{4}$.
Dieser Wert wird angenommen, wenn $t=0$, wenn also

$$x=\frac{a}{2}+0=\frac{a}{2} \text{ und } y=\frac{a}{2}-0=\frac{a}{2},$$

d. h., wenn beide Summanden gleich, und zwar gleich $\frac{a}{2}$ sind.

W 10/12 ■ 1380 a) Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2, T_1 und T_2 die Berührungspunkte dieser Kreise mit einem der Schenkel des gegebenen Winkels (siehe Bild). Dann liegen die Punkte M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels; es gilt also

$$\sphericalangle M_1ST_1=\sphericalangle M_2ST_2=\frac{\alpha}{2}. \text{ Ferner gilt}$$
$$\sphericalangle ST_1M_1=\sphericalangle ST_2M_2=90°. \text{ Daraus}$$

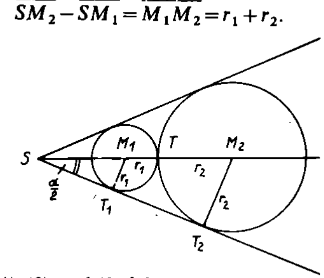
folgt wegen $0<\alpha<180°$, d. h. $\sin\frac{\alpha}{2}>0$,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_1}{\overline{SM_1}}, \text{ also } \overline{SM_1}=\frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad (1)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_2}{\overline{SM_2}}, \text{ also } \overline{SM_2}=\frac{r_2}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Da die Kreise k_1 und k_2 einander von außen berühren, gilt

$$\overline{SM_2}-\overline{SM_1}=\overline{M_1M_2}=r_1+r_2. \qquad (3)$$



Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\frac{r_2}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=r_1+r_2,$$

$$r_2-r_1=r_1\sin\frac{\alpha}{2}+r_2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$r_2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=r_1\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

und hieraus wegen $\sin\frac{\alpha}{2}<1$

$$\lambda=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

b) Für $\alpha=60°$ gilt $\frac{\alpha}{2}=30°$, d. h. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, also

$\lambda=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$. Für $\alpha=90°$ gilt $\frac{\alpha}{2}=45°$, d. h.

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, also $\lambda=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=3+2\sqrt{2}\approx 5{,}83.$

W 10/12*1381 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}})^{x-4}+(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}})^{x-4}=2x. \qquad (1)$$

Dann gilt $x\geqq 0$, weil die Summe auf der linken Seite von (1) nicht negativ ist, und sogar $x\geqq 1$, weil $x^2-1\geqq 0.$

Setzt man $z=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$, so gilt (2)

$z>0$ und daher wegen $x-\sqrt{x^2-1}>0$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}\cdot\frac{x-x^2-1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}$$

$$=\frac{x-x^2-1}{\sqrt{x^2-(x^2-1)}}=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Die Gleichung (1) ist also genau dann erfüllt, wenn

$$z^{x-4}+\frac{1}{z^{x-4}}=2x,$$

$$z^{2x-8}-2x\cdot z^{x-4}+1=0,$$

$$(z^{x-4}-x)^2=x^2-1, \text{ d. h., wenn} \qquad (3)$$

a) $z^{x-4}-x=\sqrt{x^2-1}$ oder b) $z^{x-4}-x=-\sqrt{x^2-1}$. Im Falle a) gilt $z^{x-4}=x+\sqrt{x^2-1}$, also wegen (2)

$$z^{x-4}=z^2.$$

Da Potenzen mit gleicher Basis nur dann gleich sind, wenn die Basis gleich 1 ist oder wenn die Exponenten gleich sind, gilt also $z=1$ oder $x-4=2$.

Nun gilt $z=1$ genau dann, wenn $x+\sqrt{x^2-1}=1$, was wegen $x\geqq 1$ nur für $x=1$ möglich ist.

Damit haben wir die erste Lösung $x_1=1$ der Gleichung (1) erhalten; denn es gilt $(\sqrt{1-0})^{-3}+(\sqrt{1+0})^{-3}=1+1=2=2\cdot 1$. Ist aber $x-4=2$, so gilt $x=6$. Damit haben wir die zweite Lösung $x_2=6$ der Gleichung (1) erhalten; denn es gilt

$$(\sqrt{6-\sqrt{35}})^2+(\sqrt{6+\sqrt{35}})^2$$
$$=6-\sqrt{35}+6+\sqrt{35}=2\cdot 6.$$

Im Falle b) gilt

$$z^{x-4}=x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{z^2}=z^{-2}.$$

Das gilt wie im Falle a) nur, wenn $z=1$ oder $x-4=-2$. Da $z=1$ schon unter a) behandelt wurde, erhalten wir nur noch eine dritte Lösung aus $x-4=-2$, d. h. $x_3=2$; denn es gilt

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-2}+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2}=$$

$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{4-3}=4=2\cdot 2.$$

Die Gleichung (1) hat also genau drei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1=1,\ x_2=6,\ x_3=2.$$

W 10/12*1382 Ist T der Berührungspunkt der Tangente, so gilt $\overline{MT}=r$. Bezeichnet man zur Abkürzung $\overline{CT}=x$, $\overline{TD}=y$, so ergibt sich aus dem Höhensatz in dem rechtwinkligen Dreieck CMD die Gleichung

$$r^2=xy, \text{ also } y=\frac{r^2}{x}.$$

Bezeichnet man die Länge der Strecke $\overline{CD}$ mit $f(x)$, so gilt

$$f(x)=x+y=x+\frac{r^2}{x} \text{ mit } x>0.$$

Um nun festzustellen, für welchen Wert von x ein Minimum von $f(x)$ angenommen wird, beachten wir, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

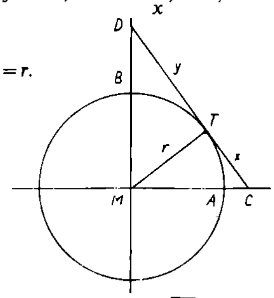
$$a+b=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$$
$$\geqq 2\sqrt{ab}.$$

Insbesondere gilt $a+b=2\sqrt{ab}$, wenn $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, also wenn $a=b$. Daher gilt

$$f(x)=x+\frac{r^2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{r^2}{x}}=2r$$

$$fx=2r, \text{ falls } x=\frac{r^2}{x}, \text{ d. h., } x^2=r^2,$$

also $x=r$.



Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ nimmt also den kleinsten Wert $2r$ an, wenn $x=y=r$, wenn also $\overline{TC}=\overline{TM}=r$ ist. Dann liegt T auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels $\sphericalangle BMA$.

W 10/12 ■ 1383 Angenommen, es sei x eine reelle Zahl, für die die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Dann erhält man, indem man (2) von (1) subtrahiert,

$$12x^3+28x^2+6x+14=0,$$

also $\quad 6x^3+14x^2+3x+\ 7=0. \qquad (3)$

Andererseits erhält man aus (1) und (2) durch Addition

$$6x^4+14x^3+12x^2+28x=0,$$

also $x(6x^3+14x^2+12x+28)=0$ und, da $x=0$ nicht Lösung von (1) bzw. (2) ist, $\quad 6x^3+14x^2+12x+28=0. \qquad (4)$

Aus (4) und (3) erhält man weiter durch Subtraktion

$9x+21=0$, also $x=-\frac{21}{9}=-\frac{7}{3}$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt eine Lösung hat, so kann es nur die Lösung $x=-\frac{7}{3}$ sein. Nun gilt für $x=-\frac{7}{3}$

$$3x^4+13x^3+20x^2+17x+7$$

$$=\frac{2401}{27}-\frac{4459}{27}+\frac{980}{9}-\frac{119}{3}+7=0,$$

$$3x^4+x^3-8x^2+11x-7$$

$$=\frac{2401}{27}-\frac{343}{27}-\frac{392}{9}-\frac{77}{3}-7=0,$$

d. h. die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt.

Lösungen zu „Rekursionsformeln als spezielle Operatorgleichungen" (von S. 73)

1a) Durch $x_n=\frac{u_n}{v_n}=\frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}}=\frac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}$, $x_1=\frac{u_1}{v_1}=\frac{1}{1}=1$ ist x_n eindeutig bestimmt.

b) Elimination von v_{n-1} ergibt $u_n=u_{n-1}+2(v_n-u_{n-1})=-u_{n-1}+2v_n$. Ersetzung von n durch $n-1$ ergibt $u_{n-1}=-u_{n-2}+2v_{n-1}$, erneute Elimination von v_{n-1} ergibt $u_{n-1}=-u_{n-2}+(u_n-u_{n-1})$, also $u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}$.

Die zweite Gleichung entsteht analog.

c) Durch Quadrieren entsteht $u_n^2=u_{n-1}^2\ u_{n-1}v_{n-1}+4v_{n-1}^2$, $v_n^2=u_{n-1}^2+2u_{n-1}v_{n-1}+v_{n-1}^2$, durch Elimination des gemischten Gliedes $u_n^2-2v_n^2=-u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2$, d. h. $y_n=-y_{n-1}$, $y_1=-1$ mit der Abkürzung $y_n=u_n^2-2v_n^2$. Nach Satz 1 folgt $y_n=(-1)^n$ (wegen $y_0=1$).

2. Auflösung nach x_{n+1} ergibt $x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}$, jetzt n durch $n-1$ ersetzen.

3. Man setze $x_n=\alpha^n y_0+\beta^n z_0$ in $x_n-ax_{n-1}-bx_{n-2}$ ein, klammere $\alpha^{n-2}y_0$ bzw. $\beta^{n-2}z_0$ aus und benutze $\alpha^2-a\alpha-b=0$, $\beta^2-a\beta-b=0$.

4. Nach Satz 3 gilt $x_n=x_0+ny_0$. Für $n=0$ ist $x_0=1$, für $n=N$ folgt $1-Ny_0=0$, also $y_0=-\frac{1}{N}$.

5. Aus $\lambda^2-\lambda-1=0$ folgt $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, und aus Satz 4 folgt $y_0=\frac{2-\beta}{\sqrt{5}}=\frac{\alpha^2}{\sqrt{5}}$, $z_0=\frac{\alpha-2}{\sqrt{5}}=-\frac{\beta^2}{\sqrt{5}}$.

6. Aus $\lambda^2-2\lambda-1=0$ folgt $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$, aus Satz 4 im ersten Fall $y_0=\frac{1-\beta}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$, $z_0=\frac{\alpha-1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ und im zweiten Fall $y_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $z_0=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

7. Nach Satz 3 ist $x_n=\alpha^n(x_0+ny_0)$, und für $n=1$ folgt aus $x_1=\alpha x_0+\alpha y_0$ sofort $y_0=\frac{x_1}{\alpha}-x_0$.

8. Wegen $\cos 0=1$, $\sin 0=0$ stimmt die Lösung für $n=0$ und wegen $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ auch für $n=1$. Beim Einsetzen von $x_0\cos\frac{\pi n}{4}+x^*\sin\frac{\pi n}{4}$ (mit $x^*=x_1\sqrt{2}-x_0$) in $x_n-\sqrt{2}\,x_{n-1}+x_{n-2}$ heben sich unter Beachtung von $\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)$ und $\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})=\sin\varphi$ sowie $\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi-\cos\varphi)$ und $\sin(\varphi-\frac{\pi}{2})=-\cos\varphi$ alle Glieder weg.

Lösungen zu: alpha-heiter 4/75

Spiel mit Dominosteinen

Mögliche Anordnungen:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3

0	1	2	3 5
1	2	5	4 0
2	3	4	5 1
3	4	1	0 2
4	5	0	1 3
5	0	3	2 4

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	1
4	5	6	0	1	2	3
3	4	5	6	0	1	2
6	0	1	2	3	4	5

Dreistellige Telefonnummern

Die Nummer heißt $8—x—y$. Es gibt 5 ungerade Grundziffern, und zwar: 1, 3, 5, 7, 9. Also für x kann man 5 verschiedene Grundziffern nennen und ebensoviel für y. Das kann man als eine Tabelle darstellen:

x \ y	1	3	5	7	9
1	11	13	15	17	19
3	31	33	35	37	39
5	51	53	55	57	59
7	71	73	75	77	79
9	91	93	95	97	99

Ergebnis: $5 \cdot 5 = 25$.

Vierstellige Autonummern

Die Autonummer lautet: 1881

Aufbau der Zahl: $a\ b\ b\ a$

Gleichung: $2(a+b) = 10a+b$ $\quad a = 1$

$b = 8a \quad b = 8$

Die Lösung $a = b = 0$ entfällt, da die Autonummer 0000 nicht existiert.

Die zweite Autonummer lautet: 2099.

Vor-, Nach- und Beinamen

Peano, Isaac, Einstein, Richard, Regiomontanus, Emmy, Descartes, Evariste, Fourier, Elie, Riemann, Max, Abel, Thales: Pierre de Fermat.

Kryptarithmetik

a) $3614 + 3614 = 7228$ $\quad 3941 + 3941 = 7882$ $\quad 4831 + 4831 = 9662$

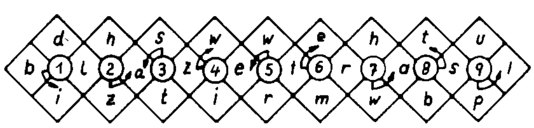
b) $1770 + 1770 = 3540$ $\quad 1880 + 1880 = 3760$ $\quad 2880 + 2880 = 5760$

$4660 + 4660 = 9320$ $\quad 4880 + 4880 = 9760$

c) $4513 + 4513 = 9026$ $\quad 4531 + 4531 = 9062$

Beruf gesucht – Mathematiker

Silbenrätsel – LOGARITHMUS



In einem Zug

Zur Angabe einer Lösung numerieren wir die Punkte von 1 bis 16. Um ohne abzusetzen die Figur nachzeichnen zu können, muß der Streckenzug im Punkt 6 beginnen und im Punkt 11 enden oder umgekehrt, da in diesen beiden Punkten jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken aufeinandertreffen.

Eine der möglichen Lösungen ist

6, 2, 5, 1, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 6, 11, 10, 14, 9, 13, 14, 15, 11, 12, 15, 16, 12, 8, 3, 4, 8, 7, 11.

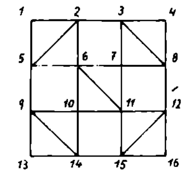
◄

$101 + 22 - 123$

$- \quad + \quad -$

$25 - 2 = 23$

$76 + 24 = 100$



Mathematische Begriffe

Eine mögliche Lösung:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
MIL	KA	TAN	LÄN	PA	GE	FUNK	QUO	EIN	WAHR	SYM	LIR	KO	EP
	LI	O	GEN	A	RA	I	TI		HEITS		ME	LI	SI
GRAMM	BER	TE	KREIS	BEL	DE	ON	ENT	KREIS	WERT	TRIE	TER	NUS	LON

Kreuzworträtsel

1. Hilbert
2. Element
3. Umkreis
4. Russell
5. Ellipse
6. Kosinus
7. Algebra

HEUREKA

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 4

Gleichungen · Уравнения · Equations · Equations

Beispiel zur Lösung einer Gleichung

Пример решения уравнений

Example for solving an equation

Exemple (modèle) pour solutionner une équation

(1) $\frac{7(x-2)}{3} + \frac{1}{5} = \frac{73}{15}$

(2) $35(x-2)+3 = 73$

(3) $35x - 70 + 3 = 73$

$35x - 67 = 73$

(4) $35x = 140$

(5) $x = 4$

(1) Multiplizieren Sie beide Seiten (jedes Glied) mit dem Hauptnenner!

Умножить обе части уравнения (каждый член) на общий знаменатель!

Multiply both sides (each term) by the least common denominator!

Multipliez les deux côtes (chaque terme) par le dénominateur commun!

(2) Lösen Sie die (runden) Klammern auf!

Раскрыть скобки!

Remove the parantheses!

Ouvrez les paranthèses!

(3) Addieren Sie 67 auf beiden Seiten!

Прибавить к обеим частям уравнения 67

Add 67 to both sides!

Additionnez (ajoutez) 67 aux deux côtés!

(4) Teilen Sie beide Seiten durch den Koeffizienten von x!

Разделить обе части уравнения на коэффициент при x

Divide both sides by the coefficient of x!

Divisez les deux côtés par le coefficient de x!

Diskutieren Sie das Ergebnis aus der Sicht der Mengenlehre!

Характеризуйте результат с точки зрения теории множеств!

Discuss the result from the standpoint of the thory of stees!

Discutez le résultat par le point de vue de la théorie des ensembles!

Im Variablenbereich X ist $x = 4$ das einzige Element, das die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage macht. (Die Lösungsmenge S besteht aus einem einzigen Element: $S = \{4\}$.)

В области переменной X единственным элементом, который делает данное уравнение истинным, является $x = 4$. (Множество корней состоит только из одного элемента: $S = \{4\}$.)

In the range X of variables, $x = 4$ is the only element making the given equation a true statement. (The solution set S consists of only one element: $S = \{4\}$.)

Dans la zone X des variables, $x = 4$ est le seul élément qui fait l'équation donnée à une vraie proposition. (L'ensemble S des solutions se compose d'un seul élément: $S = \{4\}$.)

Dreiecke

Треугольники · Triangles · Triangles

Schiefwinkliges Dreieck

Произвольный треугольник

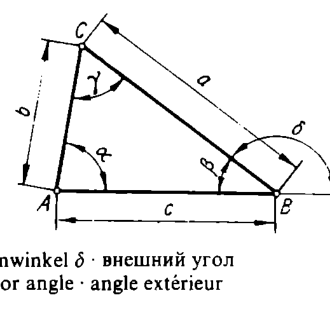
oblique or scalene triangle · triangle scalène

Seiten a, b, c · стороны a, b, c

sides · côtés

Innenwinkel α, β, γ · внутренние углы

interior angles · angles intérieurs



Außenwinkel δ · внешний угол

exterior angle · angle extérieur

Übung macht den Meister

Aufgaben aus Abschlußprüfungen der Oberschule

Textgleichungen

1968 Für die Bearbeitung von Werkstücken stehen zwei Drehmaschinen zur Verfügung. Die erste Maschine muß zur Bearbeitung 20 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 14 Minuten ein Werkstück aus. Die zweite moderne Maschine muß 200 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 2 Minuten ein Werkstück gleicher Art aus.

a) Wieviel Minuten werden bereits bei der Herstellung von 100 Werkstücken eingespart, wenn die modernere Maschine eingesetzt wird?

b) Bestimmen Sie diejenige Stückzahl, zu deren Herstellung beide Maschinen die gleiche Zeit benötigen!

1969 a) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit beliebiger Seitenlänge a, und zeichnen Sie eine Höhe h ein!

b) Leiten Sie die Gleichung $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ ohne Benutzung trigonometrischer Beziehungen her!

1970 Zwei Klassen planen eine Ferienwanderung.
Für gute Leistungen im polytechnischen Unterricht erhalten sie dazu von ihrem Patenbetrieb 360 M. Dieser Betrag soll entsprechend der Schüleranzahl auf beide Klassen aufgeteilt werden. In der einen Klasse sind 26, in der anderen 22 Schüler.

a) Berechnen Sie den Teilbetrag, den jede Klasse erhält!

b) Wieviel Prozent der Gesamtsumme erhält die Klasse mit 26 Schülern?

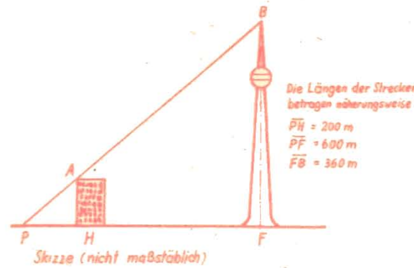
1971 Zur optimalen Auslastung des Transportraumes bei der Beförderung von Speisekartoffeln werden durch die Deutsche Reichsbahn Zielzüge eingesetzt. In einem solchen Zug laufen zwei Wagentypen mit einer Ladefähigkeit von 20 t bzw. 24 t Speisekartoffeln. Der Zug besteht aus 33 Waggons. Er befördert insgesamt 720 t Speisekartoffeln. Berechnen Sie, wieviel Waggons des jeweiligen Typs in diesem Zielzug eingesetzt sind!

1972 Das Produkt aus der Differenz zweier verschiedener Zahlen und einer dritten Zahl sei gleich x.

Geben Sie diesen mathematischen Sachverhalt in Form einer Gleichung mit Hilfe von Variablen an!

1973 Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 6. Das Produkt dieser beiden Zahlen beträgt 216. Ermitteln Sie diese beiden natürlichen Zahlen!

1974 Im Stadtzentrum Berlins erscheint von einem Punkt P aus der Fernsehturm hinter dem Hotel „Stadt Berlin" so, daß die Punkte P, A und B auf einer Geraden liegen.



a) Ermitteln Sie durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10 000 die Höhe $\overline{HA}$ des Hotels! Geben Sie das Ergebnis in Metern an!

b) Ermitteln Sie die Höhe des Hotels auch rechnerisch! Formulieren Sie einen Antwortsatz!

1975 Im Jahre 1973 wurden im Rahmen des Wohnungsbauprogramms in der DDR 80 700 Neubauwohnungen geschaffen.

a) Davon wurden 60 % an Arbeiterfamilien vergeben. Wieviel Wohnungen waren das?

b) Im Jahre 1972 wurden 69 500 Neubauwohnungen geschaffen. Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Anzahl der 1973 gebauten Wohnungen höher lag als die der 1972 gebauten!

Rechtwinkliges Dreieck
Прямоугольный треугольник
right triangle · triangle rectangle

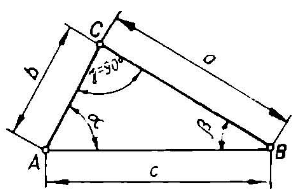
Katheten a, b · катеты a, b
legs or cathetuses · côtes

Hypotenuse c · гипотенуза c
hypotenuse c · hypoténuse c

spitze Winkel α, β · острые углы
acute angles · angles aigus

rechter Winkel γ · прямой угол γ
right angle · angle droit

pythagoreischer Lehrsatz: $a^2+b^2=c^2$ ·
теорема Пифагора $a^2+b^2=c^2$
Pythagorean theorem: $a^2+b^2=c^2$
théorème pythagoréen $a^2+b^2=c^2$



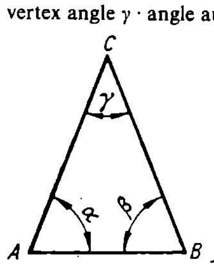
Gleichschenkliges Dreieck
Равнобедренный треугольник
isosceles triangle · triangle isocèle

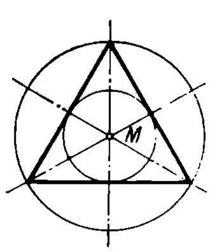
Basis AB · основание AB
base AB · base AB

Schenkel AC, BC
равные стороны AC, BC
lateral sides AC, BC · côtés AC, BC

Basiswinkel α, β · углы при основании α, β
base angles α, β · angles à la base α, β

Winkel an der Spitze γ · угол при вершине γ
vertex angle γ · angle au sommet γ





Gleichseitiges Dreieck mit drei Symmetrieachsen
Равносторонний треугольник с тремя осями симетрии
equilateral triangle with three axes of symmetry
triangle équilatéral avec trois axes de symétrie

M Mittelpunkt des In- und Umkreises; Schnittpunkt der Höhen, der Mittelsenkrechten sowie der Seiten- und Winkelhalbierenden

M центр вписанной окружности и описанной окружности; точка пересечения высот, срединных перпендикуляров, медиан и биссектрис углов

M incentre and circumcentre; intersection point of the altitudes, the mid-perpendiculars, the medians, and the bisectors of the angles

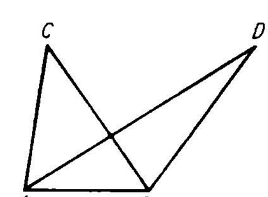
M centre de cercle inscrit et cercle circonscrit, point d'intersection des altitudes, des perpendiculaires au milieu, des médianes et des bissectrices

Dreieck ABC gleich Dreieck ABD
($\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ sind flächengleich;
$\triangle ABC=\triangle ABD$)

Треугольник ABC равновелик треугольнику ABD ($\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ равновеликие; $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$)

Triangle ABC equals triangle ABD
($\triangle ABC$ and $\triangle ABD$ are equal in area;
$\triangle ABC=\triangle ABD$)

Triangle
ABC égale triangle ABD.



BÜCHER MIT MATHE

aus dem Teubner-Verlag

J. KUCZERA

Heinrich Hertz

92 Seiten, 8 Abb., Preis: etwa 4,50 M

Heinrich Hertz als Entdecker der elektromagnetischen Wellen ist eine der markantesten Persönlichkeiten der Physikgeschichte.
Sein Leben und sein Werk sind angesichts der Rolle, die die elektromagnetischen Wellen in unserem täglichen Leben spielen, von allgemeinem Interesse.
Aus dem Inhalt: Elternhaus und Schule (1857 bis 1875) – Technisches Studium, Studienwechsel zur Naturwissenschaft (1875 bis 1878) – An der Berliner Universität und in Kiel (1878 bis 1885) – Die erfolgreiche Karlsruher Zeit (1885 bis 1889) – Entdeckung der Radiowellen – Letzte Lebensjahre in Bonn – Zur weltanschaulichen Position von H. Hertz

E. SCHMUTZER/W. SCHÜTZ

Galileo Galilei

152 Seiten, 8 Abb., Preis: 6,90 M

Galilei gehört zu den hervorragendsten Naturwissenschaftlern der Menschheitsgeschichte. Seine Leistung – erzwungen im Kampf gegen ideologische Gegner, gegen Böswilligkeit und Voreingenommenheit während einer Periode durchgreifender gesellschaftlicher Neuorientierung – ist zum Sinnbild der fortschrittlichen Haltung eines Wissenschaftlers und seines Einsatzes für eine dem Menschen helfende Verwendung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse geworden.
Aus dem Inhalt: Kindheit und Jugendjahre (1564 bis 1588) – Galileis Wirken in Pisa, Padua und Florenz (1589 bis 1633) – Galileis ideologischer Konflikt mit der kirchlichen Obrigkeit – Galileis wissenschaftliches Vermächtnis in seinen beiden Hauptwerken – Ausblick auf die Newtonsche und Einsteinsche Physik

M. MILLER

Gelöste und ungelöste mathematische Aufgaben

96 Seiten, 7 Abb., Preis: 5,70 M

H. BELKNER

Reelle Vektorräume

174 Seiten, 49 Abb., Preis: 9,50 M

GELFAND/GLAGOLEWA/SCHNOL

Funktionen und ihre graphische Darstellung

127 Seiten, 132 Abb. u. 9 Tafeln, Preis 7,00 M

N. J. WILENKIN

Unterhaltsame Mengenlehre

184 Seiten, 82 Abb., Preis: 6,50 M

J. VYŠÍN

Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

146 Seiten, 41 Abb., Preis 9,60 M

GELFAND/GLAGOLœWA/KIRILLOW

Die Koordinatenmethode

75 Seiten, 6 Abb., Preis 3,40 M

ZICH/KOLMAN

Unterhaltsame Logik

84 Seiten, 15 Abb., Preis 4,40 M

Eine Aufgabe aus dem BSB B. G. Teubner-Verlag

gestellt von

Dr. R. Thiele

Lektor für Mathematik

▲1386▲ A kennt das Produkt $p=mn$ und B die Summe $s=m+n$ zweier natürlicher Zahlen m und n mit $1<m\leqq n$. A weiß, daß B die Summe s kennt, und B weiß, daß A das Produkt p kennt.
Es ergibt sich folgender Dialog.

A_1: „Ich kenne die Summe s nicht."

B_1: „Das wußte ich. Ich gebe dir den Hinweis, daß die Summe s kleiner als 14 ist."

A_2: „Ich wußte bereits, daß die Summe s kleiner als 14 ist. Jedoch kenne ich jetzt die Zahlen m und n."

B_2: „Damit kenne ich auch m und n!"

Wie lauten die natürlichen Zahlen m und n?

A. KOLMAN

Die vierte Dimension

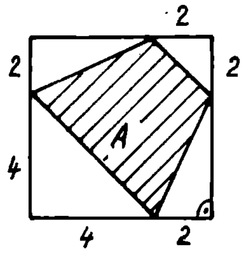
Etwa 96 Seiten mit etwa 30 Abbildungen, kartoniert, etwa 5,95 M, erscheint voraussichtlich IV. Quartal 75

Aus der Geschichte des Verlages

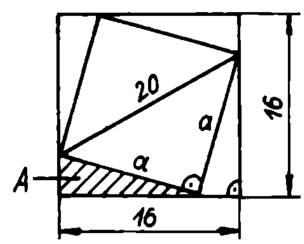
Der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft stellt einen der ältesten Verlage in der DDR dar. Durch B. G. Teubners Kauf einer Setzerei und Druckerei wurde 1811 der Grundstock für die 1824 eröffnete und bald weithin bekannte Verlagsbuchhandlung gelegt.
Zunächst begann die verlegerische Tätigkeit mit griechischen und lateinischen Textausgaben, die noch nach 150 Jahren Bestandteil des Verlagsprogramms sind. Die Entwicklung der kapitalistischen Wirtschaft in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und der damit verbundene Aufschwung der Naturwissenschaften führten zur Herausgabe mathematischer Werke. Der Anfang wurde 1849 gemacht. Bald schloß sich die Herausgabe der noch heute existierenden Zeitschrift „Mathematische Annalen" an, in der bereits die namhaftesten deutschen Mathematiker jener Zeit veröffentlichten. Um die Jahrhundertwende gehörte der Teubner Verlag zu den führenden Wissenschaftsverlagen der Welt, so daß z. B. die berühmten Mathematiker O. Hesse, J. Steiner, J. Plücker, H. Graßmann, H. Minkowski, B. Riemann, F. Klein, D. Hilbert und C. Carathéodory Autoren des Verlages waren.
Im Jahre 1911 wurde die Mathematische Bibliothek begründet, die später zur Mathematisch-Physikalischen Bibliothek erweitert wurde und in der bis 1964 etwa 100 Bände erschienen.
Der Beitrag des Teubner-Verlages zur Verwirklichung des „Mathematikbeschlusses" bestand in der Mitarbeit beim planmäßigen Aufbau und der zielstrebigen Entwicklung einer Mathematischen Schülerbücherei, deren erster Band im Teubner-Verlag erschien und deren vorliegende Bände seit über zehn Jahren verständliche Einführungen in die wichtigsten mathematischen Disziplinen bilden.

Gut gedacht ist halb gelöst

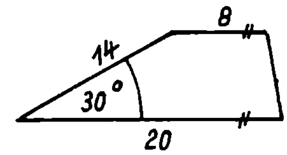
gesucht: A



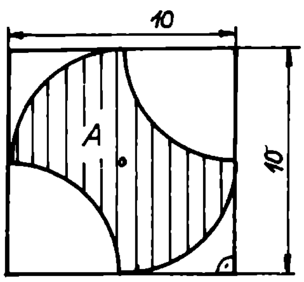
gesucht : A



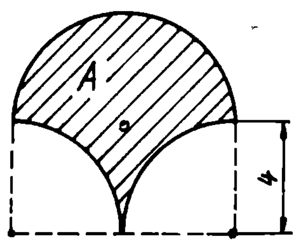
gesucht: A



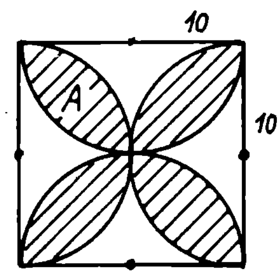
gesucht : A



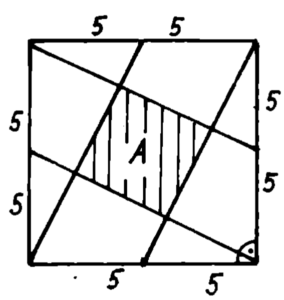
gesucht: A, U (Umfang)



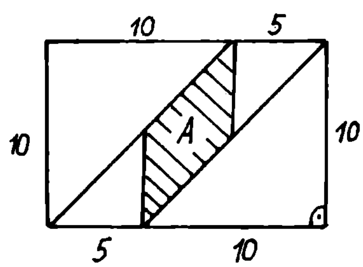
gesucht : A



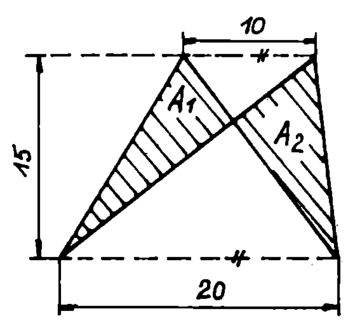
gesucht: A



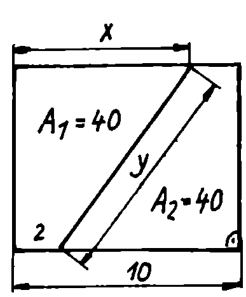
gesucht: A



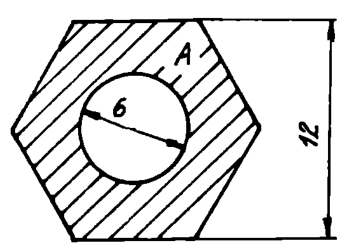
gesucht : A_1, A_2



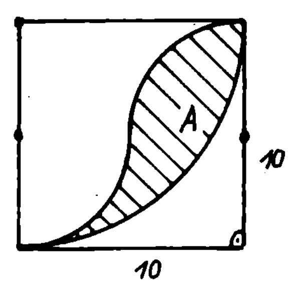
gesucht: x, y



gesucht: A

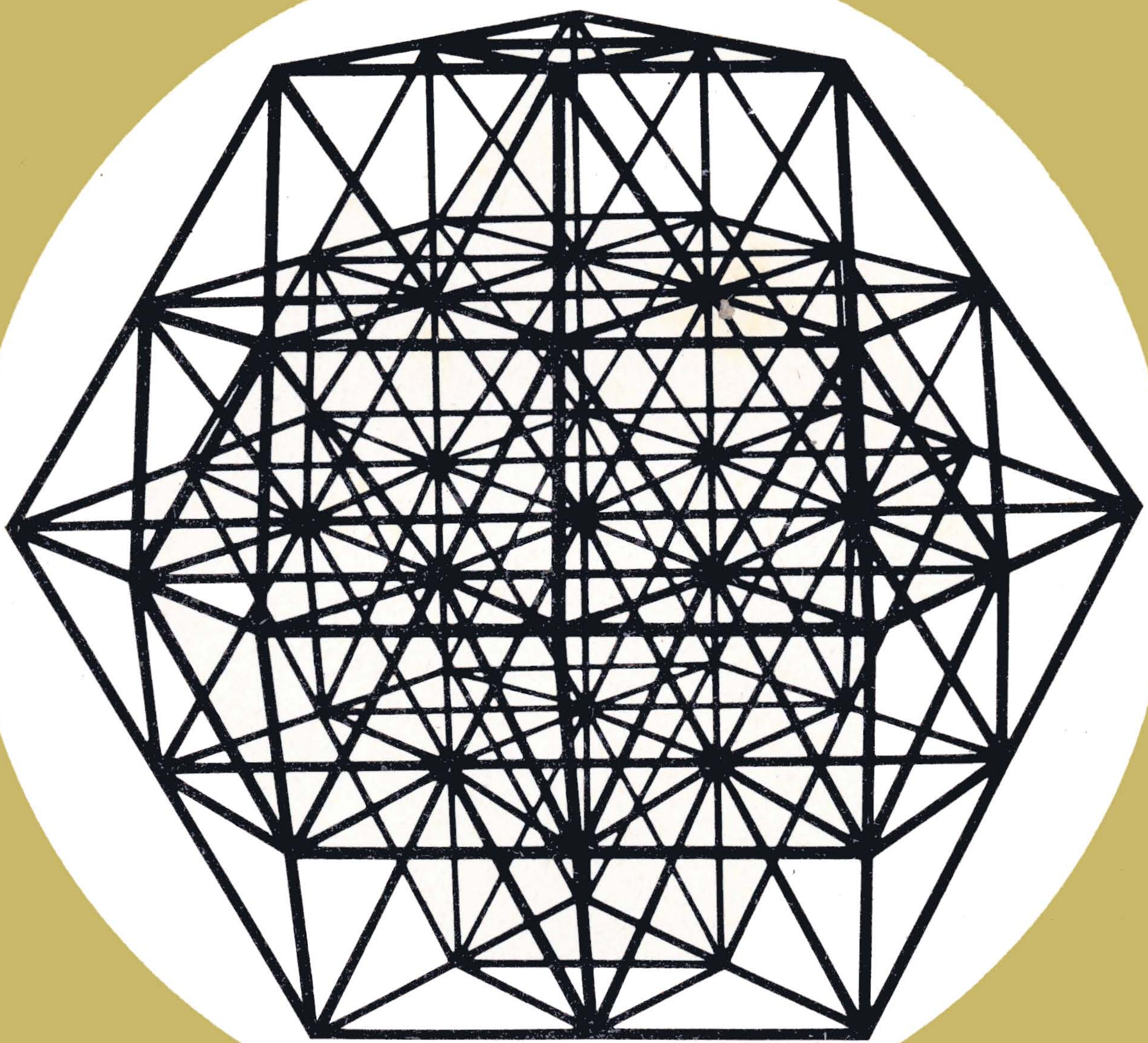


gesucht: A



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Mathematica, Sofia (S. 103); J. Lehmann, Leipzig (S. 103 und S. 106); Vignetten: H. J. Guckuk (S. 107); Foto aus „Guter Rat", UdSSR-Sonderheft (S. 108); Foto Wiekers, Halle (S. 109); R. Schulz, Rotta (IV. U-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 20. Juli 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Inhalt von Polygonflächen

Im folgenden sind einige Aufgaben zusammengestellt, bei denen der Begriff „Inhalt einer Polygonfläche“ von grundlegender Bedeutung ist. Durch eine Aufstellung der von uns benötigten und voneinander unabhängigen Eigenschaften dieses Begriffes soll eine *axiomatische* Definition des Inhalts einer Polygonfläche gegeben werden.

A 1. Der Inhalt einer Polygonfläche ist eine positive Zahl.

A 2. Die Inhalte von gleichen (kongruenten) Polygonflächen sind gleich.

A 3. Wenn eine Polygonfläche in mehrere Teilflächen zerlegt wird, so ist ihr Inhalt gleich der Summe der Inhalte dieser Teilflächen.

A 4. Der Inhalt einer Dreiecksfläche ist gleich dem halben Produkt von der Länge einer Grundlinie mit der Länge der dieser Grundlinie zugeordneten Höhe.

Bemerkung: Die Maßeinheit wird als gegeben angesehen. Es läßt sich leicht zeigen, daß das Produkt unabhängig davon ist, welche der Dreieckseiten als Grundlinie angenommen wird. Zur Bezeichnung der Sätze wurde der Buchstabe *A* gewählt, da das Wort „Axiom“ damit beginnt.

Aus den oben angeführten vier Eigenschaften (Axiomen) ergeben sich alle Sätze über die Inhalte von Vielecksflächen, die in der Schulmathematik gelehrt werden. Sehr viel schwieriger ist der Beweis dafür zu führen, daß man jeder ebenen Vielecksfläche $A_1A_2\ldots A_n$ genau eine positive Zahl $I_{A_1A_2\ldots A_n}$, nämlich ihren Inhalt, zuordnen kann, so daß dabei die Eigenschaften *A* 1, *A* 2, *A* 3 und *A* 4 gewahrt sind. Im Lehrprogramm der Schulen verzichtet man auf diesen Beweis und nimmt den Satz als offensichtlich geltend an.

An Stelle von *A*4 kann auch die folgende Grundeigenschaft gesetzt werden, aus der sich *A* 4 folgern läßt: *A* 4'. Der Inhalt einer Quadratfläche mit den Seiten der Länge 1 ist gleich 1.

Beispiele:

a) Der Inhalt einer Parallelogrammfläche ist gleich dem Produkt aus den Längen von Grundlinie und Höhe.

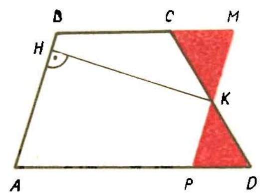
b) Der Inhalt einer Trapezfläche ist gleich dem Produkt der halben Summe der Längen der Grundlinien und der Länge der Höhe.

Macht euch einmal Gedanken darüber, wie man diese Behauptungen mit Hilfe der Axiome *A* 1 bis *A* 4 beweisen kann. Wir beginnen die Aufgabenserie damit, eine andere Formel für den Inhalt der Trapezfläche zu beweisen.

▲1▲ Der Inhalt einer Trapezfläche ist gleich dem Produkt von der Länge einer der beiden Seiten des nichtparallelen Seitenpaares und der Länge des Lotes aus der Mitte der anderen Seite auf die gegenüberliegende Seite.

Beweis: In der gegebenen Trapezfläche *ABCD* seien $AD \parallel BC$, *K* ist die Mitte der Seite *CD* und *KH* das Lot von *K* auf die Gerade *g*(*AB*). Wir legen durch den Punkt *K* eine Gerade $h \parallel g$. *M* und *P* seien die Schnittpunkte von *h* mit den Geraden *a*(*BC*) bzw. *b*(*AD*) (Bild 1).

Bild 1



Die Parallelogrammfläche *ABMP* ist inhaltsgleich mit der gegebenen Trapezfläche *ABCD*, da die Fünfeckfläche *ABCKP* Teilfläche der beiden anderen Flächen ist und die beiden Dreiecksflächen *CMK* und *KPD* inhaltsgleich sind; d. h. Trapezfläche und Parallelogrammfläche sind aus inhaltgleichen Teilflächen zusammengesetzt. Da der Inhalt der Parallelogrammfläche gleich dem Produkt der Längen ihrer Grundlinie $|AB|$ und Höhe $|KH|$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

Den letzten Absatz des Beweises kann man formal wie folgt schreiben:

$I_{ABMP} = I_{ABCKP} + I_{CMK}$ nach *A* 3

$I_{ABCD} = I_{ABCKP} + I_{KPD}$ nach *A* 3 und Konstruktion

$I_{KPD} = I_{CMK}$ nach Kongruenzsatz „eine Seite und zwei anliegende Winkel“ und nach *A* 2

$I_{ABCD} = I_{ABMP}$ nach *A* 3

Wir empfehlen euch, die nun folgenden Aufgaben in ähnlicher Weise zu lösen. Sie sind im Wesentlichen so geordnet, daß die Lösung der vorangegangenen Aufgabe eine Hilfe für das Lösen der folgenden bietet. Einige dieser Aufgaben sind auch mit Lösungen versehen, wie z. B. Aufgabe 1, die wir oben betrachteten. Es ist jedoch nicht erforderlich, sich nach diesem Hinweis zu richten. Die Aufgaben lassen auch andere Lösungswege zu, die nicht schlechter als die hier vorgeschlagenen sind.

▲2▲ In der Trapezfläche *ABCD* ($BC \parallel AD$) ist der Punkt *K* (Mittelpunkt von *AB*) mit den Eckpunkten *C* und *D* verbunden. Es ist das Verhältnis des Inhaltes der Dreieckfläche *KCD* zum Inhalt der Trapezfläche *ABCD* zu bestimmen.

▲3▲ Durch einen inneren Punkt *X* der Diagonalen *AC* der Parallelogrammfläche *ABCD* sind Parallelen zu den Seiten der Fläche gelegt. Hierdurch wird die gegebene Parallelogrammfläche in vier Parallelogrammflächen unterteilt, wobei zwei Teilflächen von der Diagonalen *AC* geschnitten werden. Beweist, daß die beiden anderen Parallelogrammflächen inhaltsgleich sind.

Hinweis: Benutzt die Tatsache, daß eine Parallelogrammfläche durch eine Diagonale in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt wird.

▲4▲ Durch jeden Eckpunkt einer konvexen Viereckfläche wird eine Gerade gelegt, die parallel zu jener Diagonalen des Vierecks ist, die nicht durch diesen Eckpunkt geht (Bild 2).

Bild 2

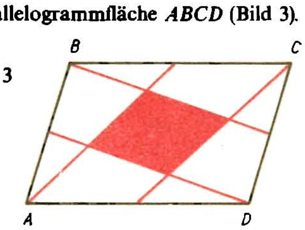
Beweist, daß die sich so ergebende Parallelogrammfläche den doppelten Inhalt der konvexen Viereckfläche besitzt.

▲5▲ Beweist, daß zwei konvexe Viereckflächen inhaltsgleich sind, wenn ihre Diagonalen entsprechend gleiche Länge haben und sich außerdem unter gleichen Winkeln schneiden.

▲6▲ In die Parallelogrammfläche *ABCD* sind vier Strecken eingezeichnet. Die Ecke *B* ist mit dem Mittelpunkt der Seite *DC*, die Ecke *A* mit dem Mittelpunkt der Seite *BC*, die Ecke *D* mit dem Mittelpunkt der Seite *AB* und die Ecke *C* mit dem Mittelpunkt der Seite *AD* verbunden.

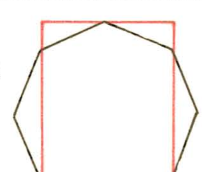
Beweist, daß die durch diese vier Verbindungsstrecken umschlossene Viereckfläche eine Parallelogrammfläche ist und daß deren Inhalt fünfmal kleiner als der Inhalt der Parallelogrammfläche *ABCD* (Bild 3).

Bild 3



▲7▲ Beweist, daß der Inhalt einer regelmäßigen Achteckfläche gleich dem Produkt der Längen der größten und kleinsten ihrer Diagonalen ist. *Hinweis:* Betrachtet das Bild 4.

Bild 4



▲8▲ Beweist, daß der Inhalt einer Vieleckfläche, deren Seiten durch einen Kreis von innen berührt werden, gleich dem Produkt der Länge des Kreisradius und dem halben Umfang des Vielecks ist.

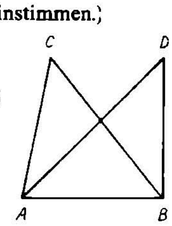
In den folgenden Aufgaben kommt man ohne das Verfahren der *Zerlegung und Addition* aus. Wir wollen festhalten, daß dieses Verfahren im Prinzip immer dann anwendbar ist, wenn die Inhaltsgleichheit zweier Vielecke zu beweisen ist.

Es gilt das folgende Theorem: *Wenn zwei Vieleckflächen inhaltsgleich sind, so kann man eine von ihnen derart in Teilflächen zerlegen, daß sich daraus die andere Vieleckfläche zusammensetzen läßt.*

Der Beweis dieses Theorems ist nicht schwierig. Um aber die Inhaltsgleichheit zweier Flächen nachzuweisen, oder das Verhältnis der Inhalte zweier Flächen zu ermitteln, ist es im konkreten Fall durchaus nicht immer notwendig, *zu zerlegen oder zu addieren.* So ist es z. B. vielfach vorteilhaft, die Inhalte zweier Dreieckflächen mit Hilfe des Axioms A 4 zu vergleichen. Aus diesem resultieren sofort die folgenden Aussagen über die Verhältnisse der Inhalte von Dreieckflächen:

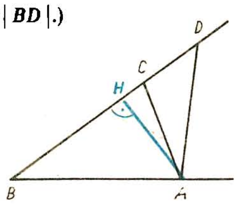
Wenn man den Eckpunkt einer Dreieckfläche längs einer durch diesen Punkt gehenden Geraden verschiebt, die parallel zu der nicht durch diesen Punkt gehenden Dreieckseite liegt, so verändert sich der Inhalt der Dreieckfläche nicht. (In Bild 5 sind die Dreieckflächen ABC und ADB flächengleich, da die Längen der Grundlinien und Höhen übereinstimmen.)

Bild 5



Bei k-facher Vergrößerung einer Seite von einer durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegebenen Dreieckfläche vergrößert sich auch der Inhalt der Dreieckfläche k-mal. (Vergleiche Bild 6; die Dreieckflächen ABC und ABD haben die gleiche Höhe AH. Deshalb ist das Verhältnis der Inhalte ihrer Flächen gleich dem Verhältnis der Längen der Basisstrecken: $I_{ABC} : I_{ABD} = |BC| : |BD|$.)

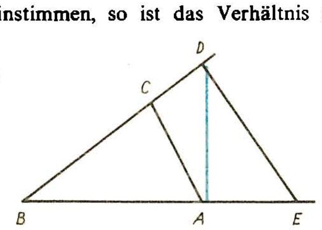
Bild 6



Hieraus lassen sich folgende Verallgemeinerungen ableiten:

Wenn zwei Dreieckflächen in einem Winkel übereinstimmen, so ist das Verhältnis der

Bild 7

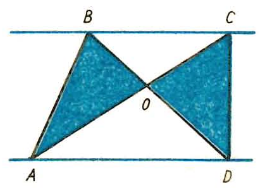


Inhalte beider Dreieckflächen gleich dem Verhältnis der Produkte aus den Längen der diese Winkel einschließenden Seitenpaare (Bild 7; $I_{ABC} : I_{ABD} = |BC| : |BD|$, $I_{ABD} : I_{EBD} = |AB| : |EB|$; daher ist auch $I_{ABC} : I_{EBD} = (|AB| \cdot |BC|) : (|EB| \cdot |BD|)$.

Sind insbesondere zwei Dreieckflächen ähnlich und stehen die Längen sich entsprechender Seiten der beiden Flächen im Verhältnis $k : 1$, so verhalten sich deren Inhalte wie $k^2 : 1$.

In den folgenden Aufgaben können gerade derartige Überlegungen zur Lösung angewandt werden, nämlich Vergleiche der Inhalte von Dreieckflächen, bei denen Basisstrecken, Höhen oder Winkel gleiche Größe besitzen.

Bild 8



▲9▲ 0 sei der Schnittpunkt der Strecken AC und BD (Bild 8). Notwendig und hinreichend dafür, daß die Inhalte der Dreieckflächen AOB und DOC übereinstimmen, ist, daß die Geraden $a(BC)$ und $b(AD)$ parallel sind. Beweist dies!

Zur vollständigen Lösung gehört der Beweis, von zwei Behauptungen:

(1) Wenn die Inhalte der Dreieckflächen AOB und DOC übereinstimmen, so sind die Geraden $a(BC)$ und $b(AD)$ parallel.

(2) Wenn die Geraden $a(BC)$ und $b(AD)$ parallel sind, so sind die Inhalte der Dreieckflächen AOB und DOC gleich.

▲10▲ Beweist, daß jede konvexe Viereckfläche dann und nur dann eine Parallelogrammfläche ist, wenn jede ihrer Diagonalen den Inhalt der Fläche halbiert. Auch in dieser Aufgabe sind, wie in Aufgabe 9, zwei Theoreme zu beweisen: das direkte und das inverse.

▲11▲ In der Dreieckfläche ABC teilt eine durch den Eckpunkt A gehende Gerade die Seitenhalbierende aus dem Eckpunkt B im Verhältnis $1 : 2$ von B aus gerechnet. Ferner schneidet sie die Seite BC im Punkt K.

Bestimmt das Verhältnis der Inhalte der Dreieckflächen ABK und ABC.

Hinweis: Legt durch den Punkt C eine zu AK parallele Gerade und bestimmt mit ihrer Hilfe das Verhältnis $|BK| : |BC|$.

▲12▲ Bestimmt in der Verlängerung der Seite BC einer konvexen *Viereckfläche ABCD* einen Punkt O derart, daß der Inhalt der Viereckfläche $ABCD$ gleich dem Inhalt der Dreieckfläche ABO ist.

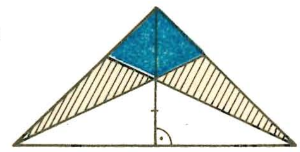
Hinweis: Legt durch den Punkt D eine zur Diagonalen AC parallele Gerade. Ist die Aufgabe 12 immer lösbar? Ist die Lösung immer eindeutig?

Die Lösung der Aufgabe demonstriert zugleich einen Weg, wie eine beliebige konvexe Vieleckfläche in eine inhaltsgleiche mit geringerer Seitenzahl verwandelt werden kann.

▲13▲ Vom Mittelpunkt der Symmetrielinie einer gleichschenkligen Dreieckfläche sind die Verbindungsgeraden nach den auf der Basis liegenden Eckpunkten gezogen (Bild 9).

Wie verhalten sich die Inhalte der durch die beiden Geraden ausgeschnittenen vier Teilflächen zum Inhalt der Dreieckfläche?

Bild 9



▲14▲ Gegeben ist die Dreieckfläche ABC. Durch Abtragen der Strecke AB auf $g(AB)$ über B hinaus ergibt sich der Punkt P; durch Abtragen der Strecke BC auf $g(BC)$ über C hinaus ergibt sich der Punkt K; durch Abtragen der Strecke CA auf der Geraden $g(CA)$ über A hinaus ergibt sich der Punkt M.

Wie verhält sich der Inhalt der Dreieckfläche ABC zum Inhalt der Dreieckfläche PKM?

Hinweis: Die Punkte M und B, P und C, sowie A und K sind durch je eine Gerade miteinander zu verbinden.

▲15▲ Formuliert und löst eine analoge Aufgabenstellung für eine Viereckfläche. Folgert aus ihr das Resultat der Aufgabe 6.

▲16▲ Auf den Seiten der konvexen Viereckfläche $ABCD$ sind die Punkte M, P, H, K derart festgelegt, daß $|AM| : |MB| = 3 : 5$, $|BP| : |PC| = 1 : 3$, $|CK| : |KD| = 4 : 5$ und $|DH| : |HA| = 1 : 8$ gilt.

Wie verhält sich der Inhalt der Sechseckfläche $MBPKDH$ zum Inhalt der Viereckfläche $ABCD$? Überlegt, ob man die Aufgabe auch allgemein bei beliebiger Vorgabe der Verhältnisse $|AM| : |MB|$, $|BP| : |PC|$, $|CK| : |KD|$, $|DH| : |HA|$ lösen kann.

Hinweis: Zeichnet die Diagonale BD ein und benutzt die Eigenschaft A 3.

▲17▲ In einer konvexen Viereckfläche sind die Mittelpunkte benachbarter Seiten miteinander verbunden.

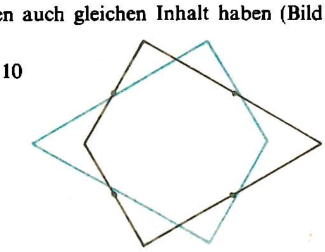
Von welcher Art ist die von den eingezeichneten Verbindungslinien bestimmte Viereckfläche?

Wie verhält sich der Inhalt der gegebenen zum Inhalt der eingezeichneten Viereckfläche?

Hinweis: Zieht die Diagonalen in der gegebenen Viereckfläche und benutzt eine Eigenschaft der Mittellinie bei Dreieckflächen.

▲18▲ Beweist, daß zwei Viereckflächen mit zusammenfallenden Mittelpunkten ihrer Seiten auch gleichen Inhalt haben (Bild 10).

Bild 10

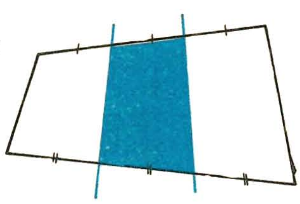


▲19▲ Eine Gerade g, die zur Diagonalen AC der Viereckfläche $ABCD$ parallel ist und die Diagonale BD halbiert, soll die Seite AD in einem Punkt E schneiden. Beweist, daß die Viereckfläche $ABCD$ von der Geraden $h(CE)$ halbiert wird.
Hinweis: Zeichnet die Seitenhalbierenden bezüglich der Dreieckfläche BCD durch C und bezüglich der Dreieckfläche BAD durch A ein.

▲20▲ Durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen einer konvexen Viereckfläche ist je eine zur anderen Diagonalen parallele Gerade gezeichnet. Der Schnittpunkt O dieser Geraden ist mit den Mittelpunkten der Viereckseiten verbunden.
Beweist, daß diese vier Verbindungslinien die Viereckfläche in vier Teilflächen gleichen Inhaltes zerschneiden.
Hinweis: Macht eine große Skizze und bezeichnet darin die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA entsprechend mit M, T, P und K und den Mittelpunkt der Diagonalen AC mit H. Um z. B. zu zeigen, daß der Inhalt der Viereckfläche $MOKA$ ein Viertel des Inhaltes der Viereckfläche $ABCD$ ist, hilft die Feststellung, daß die Viereckflächen $MOKA$ und $MHKA$ *inhaltgleich sind.*

▲21▲ Zwei sich gegenüberliegende Seiten einer konvexen Viereckfläche werden von zwei Geraden g und h derart geschnitten, daß die Seiten in drei Strecken gleicher Länge zerlegt werden. Dabei besitzen g und h im Innern der Viereckfläche keinen gemeinsamen Punkt (Bild 11). Beweist, daß der Inhalt der von g und h ausgeschnittenen Teilfläche ein Drittel des Inhaltes der gegebenen Viereckfläche ist.

Bild 11



▲22▲ Die Punkte K und L seien die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. CD der konvexen Viereckfläche $ABCD$. Die Strecken DK und AL schneiden sich im Punkt P und die Strecken CK und BL im Punkt Q.
Beweist die Behauptung, daß die Summe der Inhalte der Dreieckflächen APD und BQC gleich dem Inhalt der Viereckfläche $PKQL$ ist (Bild 12).

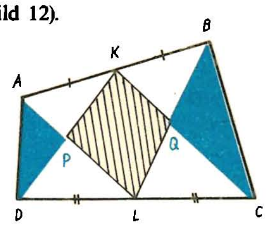
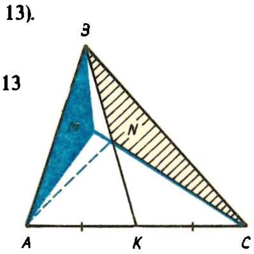


Bild 12

In den bisherigen Aufgaben war die Inhaltsgleichheit von Polygonflächen zu beweisen oder das Verhältnis der Inhalte solcher Flächen zu bestimmen. Nun folgen einige Aufgaben, bei denen Ungleichungen über die Inhalte von Flächen Verwendung finden.

▲23▲ Der Punkt M liege innerhalb der Dreieckfläche ABC.
Beweist, daß die Inhalte der Dreieckflächen ABM und CBM dann und nur dann gleich sind, wenn M auf der Seitenhalbierenden BK (mit K als Mittelpunkt der Strecke AC) liegt (Bild 13).

Bild 13



Lösung: Wenn der Punkt M auf der Seitenhalbierenden BK liegt, so gilt $I_{ABK}=I_{CBK}$, $I_{AMK}=I_{CMK}$ und daher $I_{ABM}=I_{CBM}$. Damit ist die Behauptung der Aufgabe in einer Richtung bewiesen. Noch unbewiesen ist die Umkehrung: wenn $I_{ABM}=I_{CBM}$ gilt, so liegt der Punkt M auf der Seitenhalbierenden durch B.
Wir gehen von der Annahme aus, daß M nicht auf der Seitenhalbierenden BK liegt. Dann hat genau eine der Strecken MA oder MC mit der Seitenhalbierenden BK einen Punkt gemeinsam. Die Strecken MC und BK mögen den Punkt N als gemeinsamen Punkt haben. Dann gilt $I_{ABM}<I_{ABN}$, da die Dreiecksfläche ABM innerhalb der Dreieckfläche ABN liegt. Ferner gilt $I_{CBM}>I_{CBN}$, da die Dreieckfläche CBN innerhalb der Dreieckfläche ABM innerhalb der Drei-$I_{ABN}=I_{CBN}$, da N auf der Seitenhalbierenden BK liegt. Wegen
$I_{ABM}<I_{ABN}=I_{CBN}<I_{CBM}$ gilt $I_{ABM}<I_{CBM}$.
Wir waren von der Annahme ausgegangen, daß $I_{ABM}=I_{CBM}$ gilt. Der Widerspruch zeigt, daß das Gleichheitszeichen nicht gelten kann, wenn M nicht auf der Seitenhalbierenden BK liegt. Für den Fall, daß die Strecken MA und BK einen gemeinsamen Punkt haben, verläuft die Beweisführung analog. Die Aufgabe ist damit vollständig gelöst.
Zur Lösung der folgenden Aufgabe, die eine gewisse Ähnlichkeit mit Aufgabe 20 hat, lassen sich die gleichen Hilfsmittel wie oben anwenden.

▲24▲ Je zwei sich gegenüberliegende Seiten einer Sechseckfläche $ABCDEF$ sind zueinander parallel.
Beweist, daß der Inhalt der Dreieckfläche ACE nicht kleiner als die Hälfte des Inhaltes der Sechseckfläche sein kann.

P. R. Kantor/Sh. M. Rabbot
aus: „Quant“ 2/72

Wir danken Herrn Doz. Dr. Schröder, TU Dresden, für die Bearbeitung des sowjetischen Beitrags für die Leser der Schülerzeitschrift *alpha.*

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc.
P. J. Kótschina

Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

▲1387■ Die Oberfläche des Luftschiffes *Komsomolskaja Prawda* bestand aus drei Teilen: dem Vorderteil, einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen 16 m und 5 m, dem Mittelteil – auch einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen 30 m und 5 m und dem Schwanzteil – einem Kreiskonus, dessen Spitze genau 1 m vom Ende des Mittelteils entfernt war; dieser Kreiskonus war an das Ende des Mittelteils aufgesteckt.
a) Skizzieren Sie den Achsenschnitt des Luftschiffes!
b) Schreiben Sie die drei Gleichungen der drei Teile des Achsenschnittes auf (die x-Achse – als Symmetrieachse, die y-Achse – durch die Schnittpunkte der beiden Ellipsen)!
c) Schreiben Sie die drei Gleichungen der Rotationskörper auf!
d) Berechnen Sie das Volumen des mit Wasserstoff gefüllten Luftschiffes (Kreiskonus vernachlässigen)!

Kurzbiographie: Frau Prof. Dr. Pelageja Jakowlewna Kótschina, geboren im Jahre 1899, ist Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Für ihre hervorragenden wissenschaftlichen Leistungen wurde sie mit dem Titel „Held der sozialistischen Arbeit“ ausgezeichnet. Die Gelehrte von Weltruf arbeitet im Bereich der Mathematik, der Mechanik, der Hydrodynamik und besonders in der Filtrationslehre sowie der Filtrationsberechnung. Eine Reihe von Werken *P. J. Kótschinas* ist dem Leben und Wirken der Mathematikerin *Sofia Kowalewskaja* gewidmet. Viele Jahre unterrichtete sie Mathematik an verschiedenen Hochschulen. Trotz ihres hohen Alters ist sie bis heute aktiv am *Institut für Probleme der Mechanik* der Akademie der Wissenschaften der UdSSR tätig.
Die uns übersandte Aufgabe ist dem Gebiet der *Analytischen Geometrie* entnommen. Solche Aufgaben galt es bei der Projektierung von Luftschiffen zu lösen. In Heft 1/76 bringen wir dazu eine kleinen Beitrag aus der Feder von *P. J. Kótschina,* der Einblick in ihre frühere Tätigkeit auf dem Gebiete der Berechnung und Projektierung von Luftschiffen gibt.

A. Halameisär, Moskau

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Teil 1

1. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

„So ein Zufall, daß wir uns hier treffen!" – „Das stimmt, aber wahrscheinlich komme ich morgen noch einmal her. Möglicherweise sehen wir uns dann wieder." – „Sicher, denn ich werde morgen auch hier sein."

Ein Dialog, wie er uns täglich begegnen könnte. In ihm wimmelt es von Begriffen wie „Zufall", „wahrscheinlich", „möglicherweise", „sicher", die wir in der Umgangssprache häufig gebrauchen, ohne über ihre genaue Bedeutung recht nachzudenken.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt sich u. a. damit, diese Begriffe so zu fassen, daß man mit ihnen rechnen, aus ihnen gültige Aussagen gewinnen kann. Mit einigen Grundlagen dieser mathematischen Disziplin wird sich unser Beitrag befassen. Zunächst wollen wir die Begriffe klären, die wir immer wieder benötigen.

Als *zufälligen Versuch* bezeichnen wir einen Vorgang, dessen Ergebnis ungewiß ist. Er muß unter den ihn bestimmenden Bedingungen (zumindest gedanklich) beliebig oft wiederholbar sein. Die möglichen Ausgänge eines zufälligen Versuches heißen *Elementarereignisse*. Unter einem *zufälligen Ereignis* (häufig auch nur „Ereignis" genannt) verstehen wir eine Untermenge der Menge aller Elementarereignisse. Zufällige Ereignisse wollen wir mit großen lateinischen Buchstaben, eventuell mit Indizes versehen, bezeichnen. Dazu einige Beispiele:

(1) Zufälliger Versuch: Einmaliges Würfeln
Elementarereignisse: A_1 (eine 1 würfeln), A_2 (eine 2 würfeln) ..., A_6 (eine 6 würfeln).
Weitere zufällige Ereignisse sind z. B.: G (eine gerade Zahl würfeln), Z (eine Zahl größer als 2 würfeln), P (eine positive Zahl würfeln).

(2) Zufälliger Versuch: Dreimaliges Würfeln
Elementarereignisse: A_3 (3 Augen in der Summe würfeln), A_4, A_5, ..., A_{17}, A_{18}. Weitere Ereignisse sind A (zwischen 12 und 15 würfeln), B (eine Primzahl würfeln), C (mehr als 20 würfeln).

(3) Zufälliger Versuch: Niederschlag am 7. 10. 1975 in Leipzig
Elementarereignisse sind z. B. N_0 (kein Niederschlag), N_{10} (10 mm Niederschlag), $N_{12,3}$ (12,3 mm Niederschlag). Weitere Ereignisse sind A (Niederschlagsmenge zwischen 8 und 15 mm), B (weniger als 1 000 mm Niederschlag).

Wir wollen im folgenden an unsere zufälligen Versuche 2 einschränkende Bedingungen stellen:
1. Es sollen nur endlich viele Elementarereignisse möglich sein.
2. Wenn man den zufälligen Versuch genügend oft wiederholt, soll im Mittel jedes Elementarereignis gleich oft auftreten.

Beispiel (1) erfüllt die beiden Bedingungen, während Beispiel (2) der Bedingung 2. nicht genügt (Augensumme 3 tritt z. B. seltener auf als Augensumme 10). Wir können aber auch den zufälligen Versuch aus Beispiel (2) unseren Bedingungen anpassen, wenn wir als Elementarereignisse A_{111} (dreimal 1 würfeln), A_{112} (bei den ersten beiden Würfen 1, beim dritten 2 würfeln), A_{121} (beim ersten und dritten Wurf 1, beim zweiten 2 würfeln), ..., A_{666} (dreimal 6 würfeln) auffassen.

■ Übung 1: Man begründe, warum Beispiel (3) den Bedingungen 1. und 2. nicht genügt!

Wir fragen jetzt danach, ob es ein Maß dafür gibt, „wie zufällig" ein bestimmtes Ereignis A ist. Grenzfälle für zufällige Ereignisse sind offensichtlich das *sichere Ereignis S*, das bei einem zufälligen Versuch stets auftritt (Ereignis P aus Beispiel (1) und B aus (3)), und das *unmögliche Ereignis*, das bei einem zufälligen Versuch nicht auftreten kann (Ereignis C aus Beispiel (2)).

Das gesuchte Maß für den Zufall, die Wahrscheinlichkeit, kann unter den Bedingungen 1. und 2. (klassischer Fall) auf folgende Art definiert werden:
Wahrscheinlichkeit für das zufällige Ereignis A

$$= \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Gesamtzahl der Elementarereignisse}}$$

in Formeln: $P(A) = \frac{g(A)}{m}$.

Dabei heißt ein Elementarereignis E für das zufällige Ereignis A günstig, wenn aus dem Auftreten von E das Auftreten von A folgt. Die so definierte Wahrscheinlichkeit hat die Eigenschaften:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$ für alle zufälligen Ereignisse A
b) $P(S) = 1$
c) $P(U) = 0$
d) $P(E) = \frac{1}{m}$ für Elementarereignisse E
e) Die *Vereinigung* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ von n Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist ein Ereignis, das genau dann auftritt, wenn mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auftritt. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Elementarereignisse, so gilt

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \frac{n}{m}.$$

Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *schließen einander aus*, wenn bei jedem Versuchsausgang höchstens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auftreten kann.

■ Übung 2: Man beweise, daß für beliebige, einander ausschließende Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$!

2. Würfeln und Wahrscheinlichkeit

Die *Wahrscheinlichkeitsdefinition* wollen wir jetzt auf einige Beispiele anwenden, die sich auf das Würfeln beziehen. Dabei müssen wir uns vor Augen halten, daß aus $P(A)=\frac{1}{6}$ nicht folgt, daß bei jeweils 6 Würfen das Ereignis A unbedingt genau einmal auftreten muß (Analog: Jedes 4. Los gewinnt!). Eine „strenge" Gesetzmäßigkeit, wie wir sie sonst von der Mathematik gewohnt sind, tritt hier nicht auf. $P(A)=\frac{1}{6}$ bedeutet lediglich, daß A bei 6 Würfen im Mittel genau einmal auftritt. Würfelt man also sehr lange, so werden sich für das Verhältnis

$$\frac{\text{Versuche, bei denen } A \text{ auftrat}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}$$

Werte einstellen, die sich von $\frac{1}{6}$ nur wenig unterscheiden.

Beim einmaligen Würfeln sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse leicht überschaubar. Die Gesamtzahl m der Elementarereignisse ist 6. Die Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis E demzufolge $P(E)=\frac{1}{6}$. Die Anzahl der für ein beliebiges zufälliges Ereignis A günstigen Fälle $g(A)$ kann man durch Auszählen leicht ermitteln. So ist etwa in Beispiel (1) $P(G)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, denn für G sind die Elementarereignisse A_2, A_4 und A_6 günstig, oder $P(Z)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, da für Z die Elementarereignisse A_3, A_4, A_5 und A_6 günstig sind.

Etwas komplizierter wird es beim mehrmaligen Würfeln. Zunächst überlegen wir uns, daß die Anzahl der Elementarereignisse beim n-maligen Würfeln „6" beträgt: Bei jedem Wurf gibt es genau 6 mögliche Ausgänge, unabhängig davon, wie die anderen Würfe ausgegangen sind. Also ist die Gesamtzahl $6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 6^n$.

(Wir müssen wegen Bedingung 2. die möglichen Versuchsausgänge „zuerst 1, dann 2" und „zuerst 2, dann 1" als verschieden ansehen.)

Betrachten wir einige konkrete Beispiele:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim zweimaligen Würfeln eine durch 5 teilbare Augensumme zu erzielen?

Lösung: Wir führen folgende Bezeichnungen für Ereignisse ein:

B Augenzahl durch 5 teilbar
C Augenzahl 5
D Augenzahl 10
A_{ik} zuerst i, dann k würfeln (Elementarereignisse)

Nach Übung 2 gilt

$$P(B)=P(C \cup D)=P(C)+P(D)$$

und nach Eigenschaft e)

$$P(C)=P(A_{14})+P(A_{23})+P(A_{32})+P(A_{41})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(D)=P(A_{46})+P(A_{55})+P(A_{64})=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

Damit ist $P(B)=\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{7}{36}$.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Würfeln mindestens eine 6 zu erzielen?

Lösung: Wir führen zunächst den Begriff des *Komplementärereignisses* ein. Ein Ereignis $\bar{A}$ heißt zum Ereignis A *komplementär*, falls es genau dann auftritt, wenn A nicht auftritt. Offensichtlich gilt $A \cup \bar{A} = S$ und $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Das zum in der Aufgabe beschriebenen Ergebnis A komplementäre $\bar{A}$ ist:

„Bei n-maligem Würfeln keine 6 erzielen".

Wie oben überlegt man sich, daß $g(\bar{A})=5^n$ ist. Also gilt

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

■ Übung 3: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zweimaligem Würfeln die Augensumme a) 8, b) 11 zu erzielen?

■ Übung 4: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei n-maligem Würfeln insgesamt weniger als $(n+4)$ Augen zu erzielen?

Zuletzt ein Beispiel, bei dem unsere Wahrscheinlichkeitsrechnung zu versagen scheint:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zweimaligem Würfeln eine gerade Augensumme oder insgesamt weniger als 8 Augen zu erzielen?

■ Übung 5: Wo steckt der Fehler in folgender „Lösung"?

Ereignis A: Augensumme gerade Zahl
Ereignis B: Augensumme 8

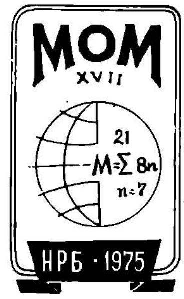
Offensichtlich ist in der Aufgabenstellung nach $P(A \cup B)$ gefragt. Günstig für A sind die 18 Elementarereignisse $A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{31}, \ldots, A_{66}$; günstig für B die 21 Elementarereignisse $A_{61}, A_{52}, A_{43}, A_{34}, A_{25}, A_{16}, \ldots, A_{11}$. Daraus folgt:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{18}{36}+\frac{21}{36}=\frac{13}{12}. \quad \left(\text{Aber: } \frac{13}{12}>1\right)$$

Im nächsten Heft setzen wir den Beitrag mit der Auflösung dieses „Widerspruchs" zur Wahrscheinlichkeitsdefinition fort, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ihn ein aufmerksamer *alpha*-Leser selbst entdeckt, nahe bei 1 liegt. *P. Henkel/G. Schmidt*

XVII. Internationale Mathematikolympiade

Burgas/Sofia, Juli 1975



Aufgaben

1. Tag

1. Es seien x_i, y_i $(i=1, \ldots, n)$ reelle Zahlen und es gelte:
$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n$ und $y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n$.
Es sei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgend eine Anordnung der Zahlen $y_1, \ldots, y_n$. Man beweise:
$\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2$. (CSSR, 6 Punkte)

2. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ irgend eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen so, daß für alle $k \geqq 1$ gilt: $a_k < a_{k+1}$. Man zeige, daß unendlich viele a_m dieser Folge in der Form
$a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q$
mit geeigneten positiven ganzen Zahlen x, y geschrieben werden können. Dabei ist $p \neq q$.
(England, 7 Punkte)

3. Über den Seiten eines beliebigen Dreieckes ABC sind nach außen die Dreiecke BPC, CQA und ARB so konstruiert, daß
$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45°$,
$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30°$ und
$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15°$
gilt. Man beweise:
1. $\sphericalangle QRP = 90°$ und
2. $\overline{QR} = \overline{RP}$. (Niederlande, 7 Punkte)

2. Tag

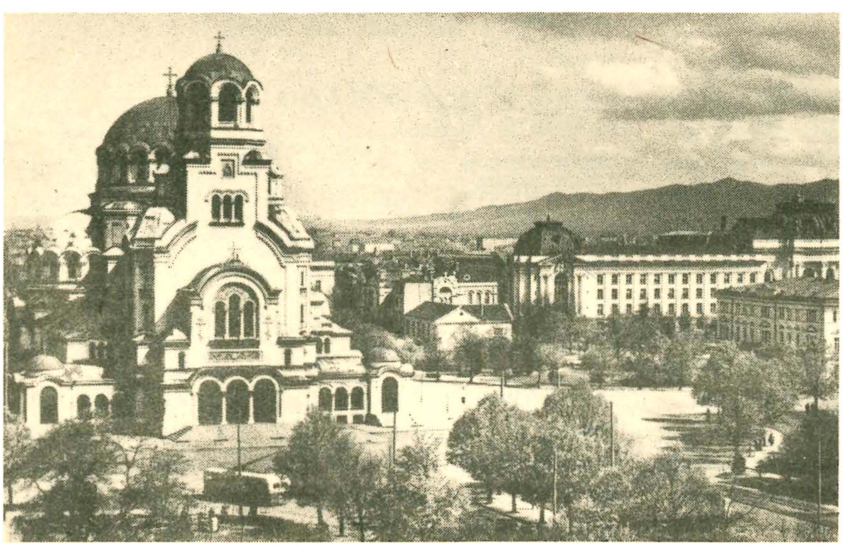
4. Es sei A die Summe der Ziffern der im dekadischen Zahlensystem dargestellten Zahl 4444^{4444}.
Es sei B die Summe der Ziffern von A. Man berechne die Summe der Ziffern von B. (Alle Zahlen sind im dekadischen Zahlensystem dargestellt.) (UdSSR, 6 Punkte)

5. Entscheide durch einen Beweis, ob es möglich ist, auf der Kreislinie eines Kreises (Radius 1) 1975 Punkte derart zu wählen, daß der (geradlinige) Abstand beliebiger zweier dieser Punkte eine rationale Zahl ist.
(UdSSR, 6 Punkte)

6. Man bestimme alle Polynome P in zwei Variablen, die den folgenden Bedingungen genügen:
1. P ist homogen vom Grade n, d. h., für alle reellen Zahlen t, x, y gilt:
$$P(t \cdot x,\ t \cdot y) = t^n \cdot P(x,\ y)$$
(n ist eine positive ganze Zahl),
2. für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:
$$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$$
und
3. $P(1,0)=1$. (England, 8 Punkte)

In Sofia fand der feierliche Abschluß der XVII. IMO statt.

● Punktspiegel: 40 bis 39 Punkte 1. Preis – 38 bis 32 Punkte 2. Preis – 31 bis 23 Punkte 3. Preis



● Die DDR-Mannschaft hatte mit allen Mannschaften engen Kontakt. In alter Tradition übergab jede der 17 Mannschaften eine Aufgabe an die DDR-Mannschaft für die Leser der Zeitschrift *alpha*, die wir in 3/76 veröffentlichen. Darüber hinaus trug die DDR-Mannschaft beim Gedankenaustausch weitere 40 Aufgaben zusammen, welche zum Training in Clubs, Spezialklassen und der *alpha* geeignet sind. *Uwe Quasthoff* bearbeitet sie und stellt sie *alpha* zur Verfügung.

● Die amerikanische Mannschaft informierte *alpha*, daß an der ersten Stufe der Olympiade (mit halbprogrammiertem Material) rund 350000 Schüler der Abschlußklassen in den USA teilnahmen. Die 100 Besten nahmen an einer Landesolympiade in New York teil.

● Gastgeber der XVIII. IMO wird Österreich sein. Die XIX. IMO findet in der SFR Jugoslawien statt. Voraussichtlich wird das Gründerland der IMO's, die SR Rumänien, zur XX. IMO einladen.

● Jeder IMO-Teilnehmer erhielt ein Abzeichen (siehe oben links). Die bulgarischen Freunde zeigen damit die weltweite Bedeutung dieser internationalen Veranstaltung (Erdkugel). $M=\sum 8n$ bedeutet: jede Mannschaft besteht aus 8 Schülern; $n=7$: An der I. IMO nahmen sieben (sozialistische) Länder teil.
$\sum^{21}$: Das bulgarische Ministerium für Volksbildung lud 21 Länder ein. Die Mannschaften der Rep. Kuba, Rep. Finnland, Italiens und der Türkei reisten nicht an.

● Die Auszeichnung der Preisträger nahmen drei Mathematiker vor: Der stellv. Minister für Volksbildung der VR Bulgarien, der 37jährige Rektor der Universität Sofia und der Vorsitzende der Mathematischen Gesellschaft der VR Bulgarien.

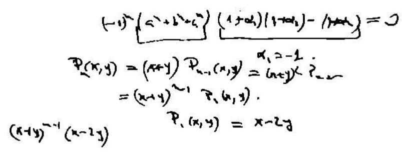
● Zwischen den Chefredakteuren der mathematischen Schülerzeitschriften „Matematika" (Sofia) und der „alpha" fand während der IMO ein Erfahrungsaustausch statt. Es wurde insbesondere ein Austausch von Artikeln und von Aufgaben der Olympiaden (1. und 2. Stufe) vereinbart.

Altes bulg. Stadtwappen

● Der Delegationsleiter der österreichischen Mannschaft dankte in aller Namen für die herzliche Gastfreundschaft der bulgarischen Freunde. Die Mitglieder der Jury sowie aller Mannschaften lernten kennen: Burgas und den Sonnenstrand des Schwarzen Meeres. Warna und den Goldenen Strand (Nessebar) sowie auf einer Rundfahrt den Schipka-Paß (Balkangebirge), die Städte Sliven, Stara Zagora, Kasanlak, Gabrowo, Plewen und Sofia (mit Witoschagebirge).

- *alpha* stellt die DDR-Mannschaft vor: 1. *Klaus Altmann*, EOS „Heinrich Hertz", Berlin (Kl. 12) 36 Punkte, 2. Preis – 2. *Ralph Lehmann*, EOS „Diesterweg", Strausberg (Kl. 12) 33 Punkte, 2. Preis – 3. *Michael Marczinek*, EOS „Heinrich Hertz", Berlin (Kl. 10) 26 Punkte, 3. Preis – 4. *Udo Matte*, Weißenfels, Spezialklasse Math.-Ph. der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Kl. 12) 29 Punkte, 3. Preis – 5. *Uwe Quasthoff*, Leipzig, Spezialklasse Math.-Ph. der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Kl. 12) 34 Punkte, 2. Preis – 6. *Harry Reimann*, EOS „Heinrich Hertz", Berlin (Kl. 12) 34 Punkte, 2. Preis – 7. *Uwe Risch*, EOS „Geschw. Scholl", Burg (Kl. 11) 27 Punkte, 3. Preis – 8. *Helmut Roßmann*, EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg (Kl. 12) 30 Punkte, 3. Preis
- Alle Mitglieder der DDR-Mannschaft sind *alpha*-Leser. Das *alpha*-Abzeichen in Gold erhielten: *Ralph Lehmann* (7jährige Teilnahme), *Uwe Quasthoff* (4 Jahre), *Uwe Risch* (4 Jahre), *Harry Reimann* (3 Jahre), Abzeichen in Silber: *Klaus Altmann* (1 Jahr).

links: DDR-Mannschaft;
rechts: griechische Mannschaft



Der Rektor der Universität zeichnet aus

- In diesem Jahr nahm erstmals eine Mannschaft aus Griechenland an der IMO teil. In Griechenland werden Olympiaden für die Abschlußklassen (entspricht unserer Klasse 12) in zwei Stufen durchgeführt.

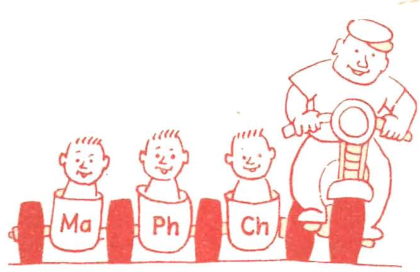
Wettbewerbsatmosphäre

* Ein Schüler der Mannschaft der DRV erkrankte am Tage der Anreise und konnte an den beiden Klausuren nicht teilnehmen.
** Drei Diplome wurden für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erteilt.

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	Teilnehmer 1	2	3	4	5	6	7	8	∑	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom**
Volksrepublik Bulgarien	13	16	33	14	25	27	30	28	186	—	1	4	—
Deutsche Demokratische Republik	36	33	26	29	34	34	27	30	249	—	4	4	—
Republik Frankreich	40	19	27	14	35	11	20	10	176	1	1	1	—
Republik Griechenland	8	20	7	10	4	11	2	33	95	—	1	—	—
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	24	36	23	40	40	32	19	27	241	2	2	3	—
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	36	18	20	26	13	11	22	17	163	—	1	1	—
Mongolische Volksrepublik	13	3	7	2	2	12	26	10	75	—	—	1	—
Königreich Niederlande	9	8	29	4	0	8	6	3	67	—	—	1	—
Republik Österreich	34	39	13	28	20	17	23	18	192	1	1	2	—
Volksrepublik Polen	4	13	11	16	16	4	27	23	124	—		2	—
Sozialistische Republik Rumänien	35	27	19	16	14	18	28	23	180	—	1	3	2
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	32	25	25	34	40	26	28	36	246	1	3	4	—
Königreich Schweden	13	22	16	17	11	34	37	10	160	—	2	—	—
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	18	13	16	18	27	20	30	20	162	—	—	2	—
Ungarische Volksrepublik	27	34	37	23	28	35	37	37	258	—	5	3	—
Vereinigte Staaten von Amerika	29	40	28	40	32	11	28	39	247	3	1	3	1
Demokratische Republik Vietnam	36	25	26	20	21	17	30	*	175	—	1	3	—

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



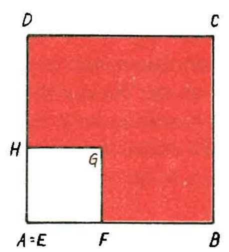
Letzter Einsendetermin: 20. Januar 1976

Ma 5 ■ 1387 Katja erhielt von ihrer Mutter 3,80 M zum Einkauf von Kuchen. Katja kaufte Butterkuchen zu 25 Pf je Stück, Pflaumenkuchen zu 35 Pf je Stück und Törtchen zu 70 Pf je Stück. Sie kaufte von einer Sorte genau 2 Stück, von einer weiteren Sorte genau 3 Stück und von der verbleibenden Sorte genau 4 Stück. Von welcher Sorte hat Katja zwei, drei bzw. vier Stückchen Kuchen eingekauft, wenn sie das Geld restlos ausgegeben hat?

Anett Rabe, Pestalozzi-OS Oberlungwitz, Kl. 6

Ma 5 ■ 1388 In ein Quadrat $ABCD$ mit dem Umfang von 108 cm wurde, wie aus der Abbildung ersichtlich, ein kleineres Quadrat $EFGH$ so eingezeichnet, daß die schraffierte Fläche genau 648 cm² beträgt. Wie lang ist der Umfang des Quadrates $EFGH$?

Iris Böhme, OS Spora, Kl. 6



Ma 5 ■ 1389 Die *Jungen Pioniere* einer 5. Klasse fertigen eine Wimpelkette an. Ihnen steht eine 267 m lange Schnur zur Verfügung. An beiden Enden der Schnur sollen je 52 cm zum Befestigen freibleiben. Auf die Schnur werden 15 cm breite Wimpel gezogen, zwischen denen ein Abstand von 4 cm bleibt. Der zehnte Teil der Anzahl dieser Wimpel ist von roter, der siebente von blauer Farbe. An der Schnur befinden sich dreimal so viel gelbe wie rote Wimpel; die restlichen Wimpel sind weiß. Wieviel Wimpel sind von weißer Farbe?

Birgit Weyh, OS Fambach, Kl. 7

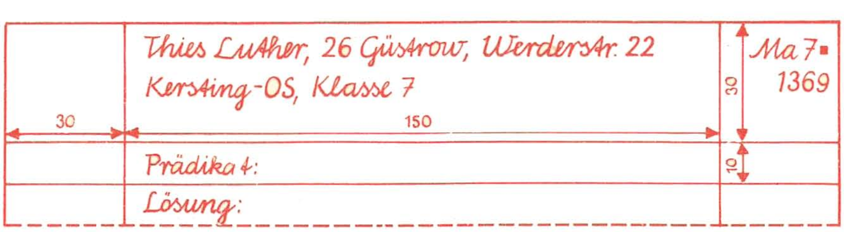
Ma 5 ■ 1390 Eine Sekretärin erhielt den Auftrag, ein Manuskript von 126 Seiten innerhalb von sechs Arbeitstagen abzuschreiben. Statt täglich gleichviel Seiten, wollte die Sekretärin im ersten Drittel der zur Verfügung stehenden Arbeitszeit täglich 7 Seiten mehr, während der restlichen Tage täglich 7 Seiten weniger abschreiben, als das tägliche Soll vorsah. Konnte die Sekretärin bei dieser Arbeitsaufteilung ihren Auftrag termingerecht erfüllen? *Sch.*

Ma 5 ■ 1391 Peter und Karin sammeln Briefmarken, Peter besitzt gegenwärtig dreimal soviel Briefmarken wie Karin. Hätten Peter 130 Briefmarken weniger und Karin 10 Briefmarken weniger gesammelt, so würden beide gleichviel Briefmarken besitzen. Wieviel Briefmarken hat Peter, wieviel Karin gegenwärtig gesammelt? *Wolfgang Bauer, OS II Bad Langensalza, Kl. 5*

Ma 5 ■ 1392 Zu einer Familie gehören Großvater, Vater und Sohn. Addiert man das Lebensalter (in ganzen Zahlen) des Vaters und das des Sohnes, so erhält man 41 Jahre. Die Summe aus dem Lebensalter des Vaters und dem des Großvaters beträgt 96 Jahre. Die Summe aus dem Lebensalter von Großvater, Vater und Sohn beträgt 100 Jahre. Wie alt ist jeder von ihnen?

Schüler Ralf Schicke, Lochau

Ma 6 ■ 1393 Während der *30. Nordischen Skiweltmeisterschaften* in Falun errangen die Sportler aus der DDR fünf 1. Plätze, sechs 2. Plätze, zwei 4. Plätze, zwei 5. Plätze und einen 6. Platz.
Für diese Plätze wurden nach der inoffiziellen Länderwertung, bei der die DDR von allen beteiligten Ländern am besten abschnitt, insgesamt 76 Punkte vergeben. Dabei wurden in jeder ausgetragenen Disziplin für jeden der Plätze 1 bis 6 jeweils die gleichen Punktzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ mit $p_1 > p_2 > p_3 >$



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

$p_4 > p_5 > p_6 > 0$ vergeben. Es ist zu ermitteln, wieviel Punkte es jeweils für einen 1., 2., 3., ..., 6. Platz gibt. *T.*

Ma 6 ■ 1394 Jörg, der an der Mathematik-Olympiade seines Bezirkes teilgenommen hatte, wurde gefragt, welchen Platz er erreicht habe. Jörg antwortete: „Addiert man zu der Zahl der von mir erreichten Platznummer 5, dividiert man diese Summe durch 10, addiert man zu dem erhaltenen Quotienten 3 und multipliziert man schließlich die nun erhaltene Summe mit 5, so erhält man eine Zahl, die um 10 größer ist als die Zahl meiner Platznummer." Welchen Platz hat Jörg belegt? *Carola Senft, Wingerode*

Ma 6 ■ 1395 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die bei Division durch 2, 3, 5, 7 oder 11 stets den Rest 1 läßt. *Carola Kunze, Kl. 7 Callenberg*

Ma 6 ■ 1396 Auf einem Orientierungsmarsch vom Orte A nach dem Orte B hatten die teilnehmenden Kameraden der GST drei Kontrollpunkte anzulaufen. Nachdem sie 1 km weniger als den dritten Teil der gesamten Marschstrecke zurückgelegt hatten, trafen sie am ersten Kontrollpunkt ein. Nach weiteren 5 km Marschweg hatten sie den zweiten Kontrollpunkt erreicht und damit bereits $\frac{3}{5}$ der gesamten Marschstrecke zurückgelegt. Der dritte Kontrollpunkt lag genau in der Mitte der Wegstrecke zwischen dem zweiten Kontrollpunkt und dem Ziel. Wieviel Kilometer waren vom dritten Kontrollpunkt bis zum Ziel noch zu marschieren? *Ingrid Wolf, Berlin*

Ma 6 ■ 1397 Es ist folgender Satz zu beweisen:
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den spitzen Innenwinkeln von 30° und 60° ist die Hypotenuse doppelt so lang wie die dem Winkel von 30° gegenüberliegende Kathete. *Thomas Apel, Reichenbach*

Ph 6 ■ 1398 Zwischen einem Blitz und dem darauffolgenden Donner wird eine Zeit von $5\frac{1}{3}$ s gemessen.
Wie weit ist das Gewitter entfernt?
(Die Schallgeschwindigkeit beträgt rund 1198,8 km pro Stunde.) *L. L.*

Ma 7 ■ 1399 Uwe kaufte zu Beginn des Schuljahres einige Schreibhefte zu 8 Pf und einige zu 15 Pf das Stück. Er gab dafür den Betrag von 1,31 M aus. Wieviel Hefte jeder Preislage hatte er gekauft? *Holger Brodmann, OS P.-Herrmann, Kl. 8, Hettstedt*

Ma 7 ■ 1400 Addiert man zur Anzahl der Schüler unserer Klasse die Zahl 1 und dividiert man diese Summe durch 3, so erhält man die Anzahl der Mädchen unserer Klasse. Subtrahiert man von der Anzahl der Schüler unserer Klasse hingegen 10 und dividiert man diese Differenz durch 2, so erhält man ebenfalls die Anzahl der Mädchen unserer Klasse. Wieviel Jungen gehören dieser Klasse an? *Heidrun Thiel, OS Ponitz, Kl. 9*

Ma 7 ■ 1401 Welches konvexe Vieleck besitzt genau 35 Diagonalen? *Holger Brodmann, Hettstedt*

Ma 7 ■ 1402 Ein Korb mit Äpfeln wurde wie folgt aufgeteilt:
Achim erhielt die Hälfte der im Korb befindlichen Äpfel und noch einen halben Apfel. Von den verbleibenden Äpfeln erhielt Bruno wiederum die Hälfte und einen halben Apfel. Von den nunmehr noch im Korb vorhandenen Äpfeln erhielt Claus ebenfalls die Hälfte und einen halben Apfel. Auf die gleiche Weise wurde die Verteilung mit Dieter, dann mit Ernst fortgesetzt, der schließlich genau einen Apfel erhielt. Wieviel Äpfel befanden sich in dem Korb? *Holger Brodmann, Hettstedt*

Ph 7 ■ 1403 Zu berechnen ist die Dichte des Stoffes, aus dem ein fester Körper besteht. Der Körper hat eine Masse von 4,2 kg und sein Volumen beträgt 21 dm³. Welcher Stoff hat diese Dichte?

Ch 7 ■ 1404 Ein mit Schwefelsäure von der Dichte 1,315 g/ml gefüllter Glasballon hat eine Masse von 100 kg. Die Masse des leeren Ballons beträgt 13,8 kg. Wieviel Liter Schwefelsäure befinden sich in dem Ballon?

Ma 8 ■ 1405 Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden. *H. Kampe, Fachlehrer für Mathematik, Neuseddin*

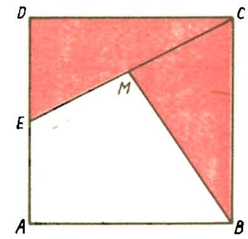
Ma 8 ■ 1406 a) Es sei ABC ein Dreieck, bei dem sich die Größen der drei Winkel wie 3 : 4 : 11 verhalten. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?
b) Gibt es auch ein Dreieck, bei dem sich die Größen der drei Winkel wie 1 : 10 : 100 verhalten? Bejahendenfalls sind die Größen der drei Winkel zu berechnen. *Dieter Knape, Fachlehrer, Jessen*

Ma 8 ■ 1407 Es seien a und c mit $a<c$ zwei positive reelle Zahlen. Man gebe alle positiven reellen Zahlen x an, für die die Gleichung

$$\frac{a+x}{1+\frac{ax}{c^2}}=c$$

erfüllt ist. *Herwig Gratias, Sömmerda*

Ma 8 ■ 1408 Es seien $ABCD$ ein Quadrat und E der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$. Ferner sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EC}$ (vgl. das Bild). Man entscheide, ob der Flächeninhalt des in der Abbildung weiß gefärbten Vierecks $ABME$ größer, kleiner oder gleich dem Flächeninhalt des in der Abbildung grau gefärbten Fünfecks $EMBCD$ ist. Erst schätzen, dann die Flächeninhalte berechnen! *L.*



Ph 8 ■ 1409 a) Welchen Druck übt ein stehender Mensch mit einem Gewicht von 60 kp auf den Fußboden aus, wenn die Fläche einer Fußsohle 150 cm² beträgt?
b) Welchen Druck übt derselbe Mensch beim Skilaufen auf die Schneedecke aus, wenn die Länge eines Skis 2 m und die durchschnittliche Breite 10 cm beträgt?
c) Gib für beide Drucke das kleinste ganzzahlige Verhältnis an! *L. L.*

Ch 8 ■ 1410 1000 g 25%ige Salzsäure sollen mit Wasser auf den Gehalt von 10% verdünnt werden. Wieviel Wasser ist hierzu erforderlich?

Ma 9 ■ 1411 Es seien a und b zwei reelle Zahlen.
a) Man beweise, daß dann stets die Ungleichung $a^2-ab+b^2 \geqq 0$ erfüllt ist. (1)
b) Man beweise ferner, daß das Gleichheitszeichen in (1) nur dann gilt, wenn $a=b=0$ ist. *Thomas Maiwald, EOS Zittau, Kl. 10*

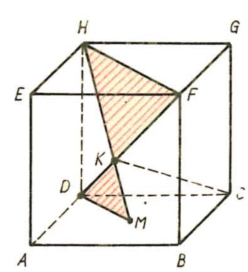
Ma 9 ■ 1412 Eine gerade quadratische Pyramide habe den Oberflächeninhalt $A_0=1536$ cm². Die Summe der Flächeninhalte der vier Seitenflächen (auch „Mantel" genannt) betrage $M=960$ cm². Man berechne das Volumen V dieser Pyramide. *Dieter Knape, Jessen*

Ma 9 ■ 1413 Es ist zu beweisen, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, vermehrt um 1, stets eine Quadratzahl ergibt, daß also

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=a^2$$

ist, wobei a eine natürliche Zahl ist. *Holger Brodmann, Hettstedt*

Ma 9 ■ 1414 Es seien $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge a, M der Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche $ABCD$ und $\overline{DF}$ eine Raumdiagonale dieses Würfels (vgl. das Bild). Diese Raumdiagonale möge die Verbindungsstrecke $\overline{HM}$ in einem Punkt



K schneiden, was stets zutrifft, weil die Punkte D, M, B, F und H in einer Ebene liegen.

a) Man berechne die Flächeninhalte der Dreiecke KDM und KFH.

b) Man berechne den Abstand des Punktes K von dem Eckpunkt C des Würfels.

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Ph 9 ▪ 1415 Zum Antrieb einer Seilwinde an einem Turmdrehkran wird ein Motor mit einer Leistung von 20 kW benutzt. Die Seilwinde hebt einen 60 kp schweren Kübel in 4 s 20 m hoch. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Anlage? *L. L.*

Ch 9 ▪ 1416 Nach dem Kontaktverfahren wird aus Gips ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$) Schwefelsäure hergestellt. Wieviel 96%ige Schwefelsäure erhält man aus 100 t Gips?

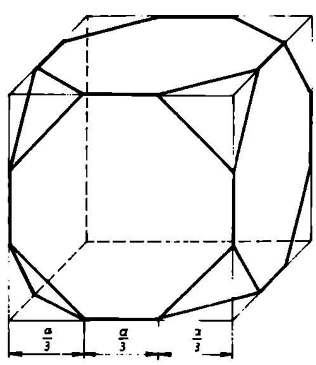
G. Brandes

Ma 10/12 ▪ 1417 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung

$$\left|\frac{2x-9}{x+1}\right| \leqq 1 \text{ erfüllt ist.}$$ *L.*

Ma 10/12 ▪ 1418 Gegeben sei ein Würfel, dessen Kanten jeweils in drei gleiche Teile geteilt worden sind. Durch je drei Teilpunkte, die auf den drei von einem Eckpunkt des Würfels ausgehenden Kanten liegen und die diesen Eckpunkten benachbart liegen, sei eine Ebene gelegt. Durch diese acht Ebenen seien nun acht Teilkörper abgeschnitten, die die Form von dreiseitigen Pyramiden (Tetraeder) haben, so daß ein Restkörper entsteht, der durch sechs einander kongruente Achtecke und durch acht gleichseitige Dreiecke begrenzt ist (vgl. das Bild). Wie verhält sich das Volumen V_0 des Restkörpers zu dem Volumen V_1 des Würfels?

Mathematikfachlehrer Alois Weninger, Knittelfeld, Österreich



Ma 10/12 ▪ 1419 Das Volumen eines Baumstamms, der die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes hat, kann nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$V=\frac{\pi h}{12}(d_1^2+d_1 d_2+d_2^2).$$

Dabei ist h die Höhe,
d_1 der untere Durchmesser,
d_2 der obere Durchmesser des Baumstamms.

In der Praxis rechnet man aber meistens mit der folgenden Näherungsformel (der sog. „Försterformel"):

$$V'=\frac{\pi}{4}hd^2,$$

wobei $d=\frac{d_1+d_2}{2}$ der mittlere Durchmesser des Baumstamms ist.

a) Man berechne das Volumen eines Baumstamms nach der genauen Formel und nach der Näherungsformel, wenn

$$h=10\text{ m},\ d_1=30\text{ cm},\ d_2=20\text{ cm}.$$

b) Wie groß sind dabei der Betrag des absoluten Fehlers und der Betrag des prozentualen Fehlers?

c) Man stelle eine allgemeine Formel für $V-V'$ und für $\frac{V-V'}{V'}$ auf, indem man $d_1=d+\delta$ und $d_2=d-\delta$ setzt.

Werner Gundlach, Fachlehrer f. Mathematik i. R., Schwarz

Ma 10/12 ▪ 1420 Man ermittle alle Funktionswerte der Funktion

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$$ im Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ und im Intervall $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

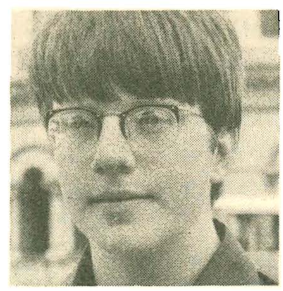
Peter Surjan, Budapest, Ungarische VR

Ph 10/12 ▪ 1421 Der Ausleger eines Turmdrehkranes ist am Rohrmast in einer Höhe von 28,4 m befestigt. Bei der höchsten Stellung des Auslegerendpunktes von 52 m beträgt die Ausladung 10 m und die Tragkraft 4000 kp. Wie lang ist der Ausleger? Ermittle zeichnerisch oder rechnerisch die Belastung des Auslegers! *L. L.*

Ch 10/12 ▪ 1422 Eine Natronlauge benötigt zur Neutralisation 50 ml einer 0,1 normalen Schwefelsäure. Wieviel Gramm NaOH enthält die Lauge? *G. Brandes*

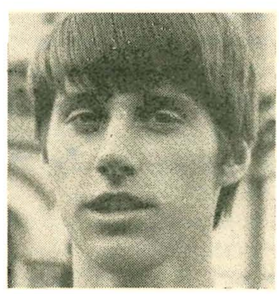
alpha stellt vor: Preisträger der XVII. IMO

Einen 1. Preis erhielten:

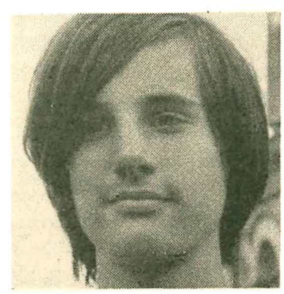


John Rickard
City of London School
London, England

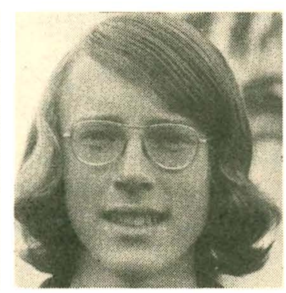
Jonathan Hitchcock
Kingston Grammar School
Kingston, England



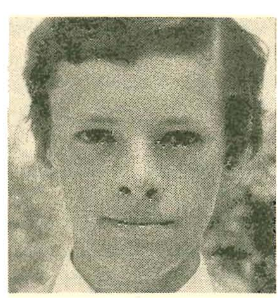
Paul Herdey
Hamilton-Wenham Regional High School
South-Hamilton, USA



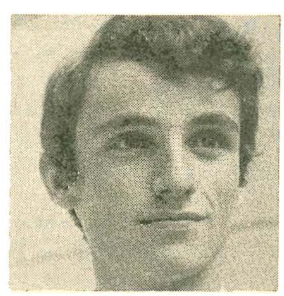
Miller Puckette
Sewanee Academy
Sewanee Tennesea, USA



Paul Vojta
Southwest Secondary School
Minneapolis, USA



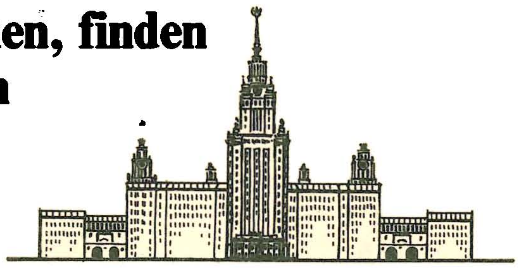
Wilfrid Pascher
II. Bundesgymnasium Graz
Graz, Österreich



Jean-Claude Sikoraw
Lycée Louis le Grand Paris
Paris, Frankreich

Boris Yousin
180. Schule Moskau
Moskau, UdSSR

Kämpfen, suchen, finden und verteidigen



Über die Möglichkeiten zur Beschäftigung mit der Mathematik für interessierte Schüler in der Sowjetunion

Ich hatte Gelegenheit, mehrere Jahre recht gründlich einige Probleme des Mathematikunterrichts in sowjetischen Schulen zu untersuchen. Häufig werde ich in diesem Zusammenhang gefragt, worin die Ursachen zu suchen sind, daß die sowjetischen Schüler auf mathematischem Gebiet so große Erfolge aufweisen können. Ich will versuchen, diese Frage kurz zu beantworten.

Unter den sowjetischen Schülern gibt es – wie auch in der DDR – sehr viele, für die die Beschäftigung mit der Mathematik mehr als nur eine notwendige Pflicht ist, die mit viel Enthusiasmus und Liebe, vor allem aber mit großem Fleiß ihrem Hobby, besonders dem Lösen interessanter Aufgaben, nachgehen.

Mehr noch als bei uns werden durch Fernsehen und Presse den Interessenten Aufgaben gestellt. Viele sowjetische Schüler beteiligen sich aktiv an *Fernsehschulen*. An den Zeitungskiosken der UdSSR bietet man populärwissenschaftliche mathematische Literatur ebenso wie andere Zeitschriften an, vor allem – man kauft sie auch. Für viele sowjetische Schüler ist die Beschäftigung mit der Mathematik zum Bedürfnis geworden, mathematisches Wissen ist wichtiger Bestandteil der Allgemeinbildung.

Hauptsächlich beschäftigen sich die sowjetischen Schüler natürlich im Unterricht mit der Mathematik. Zur Zeit werden an den Schulen der UdSSR neue Lehrpläne in diesem Fach eingeführt, die eine weitere Erhöhung des Unterrichtsniveaus mit sich bringen werden. Danach lernen bereits die Schüler der 7. Klasse den Wurzelbegriff, quadratische Gleichungen, Vektoren u. a. m. kennen, Schüler der 9. und 10. Klassen – die Anfänge der Differential- und Integralrechnung, ein Gebiet, welches bei uns Stoff der EOS ist. Viele Aufgaben, vor allem zum Beweisen, zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen und Aufgaben aus der Geometrie sind schwerer als die bei uns üblichen. Besonders hohe Anforderungen werden an die Schüler gestellt, die sich für die Aufnahme an eine Hochschule bewerben. In mathematischen Fachrichtungen gibt es für einen Studienplatz zwei, drei oder noch mehr Bewerber. Sie alle müssen eine Aufnahmeprüfung absolvieren. *alpha* wird in einem der nächsten Hefte einige Varianten solcher Kontrollarbeiten veröffentlichen.

Eine besonders günstige Möglichkeit zur zusätzlichen Beschäftigung mit dem Lieblingsfach bietet den sowjetischen Schülern der *fakultative Unterricht*. Dafür stehen in den Klassen 7 und 8 je zwei Wochenstunden und in den Klassen 9 und 10 je vier Wochenstunden zur Verfügung. Über ein Drittel der Teilnehmer am fakultativen Unterricht haben sich für die Mathematik entschieden. So können Schüler der 7. und 8. Klassen sich gründlicher als dies im Unterricht geschehen kann, mit den Teilbarkeitsregeln, mit der Symmetrie, der Parallelverschiebung und der Drehung, mit Elementen der Mengentheorie, mit Funktionen und ihren Graphen beschäftigen. Sie können zusätzlich Aufgaben aus den verschiedenen Stoffgebieten lösen. In den 9. und 10. Klassen haben die Schüler außer dem Kurs *Ergänzende Kapitel und Fragen des systematischen Mathematiklehrgangs* noch die Möglichkeit einen Lehrgang in *Numerischer Mathematik, Programmierung* oder einer anderen angewandten Richtung zu belegen.

Wie an unseren Schulen, so bestehen auch an sowjetischen Schulen eine Vielzahl *mathematischer Arbeitsgemeinschaften*. An erster Stelle steht in diesen Arbeitsgemeinschaften das Lösen interessanter Aufgaben zur Vorbereitung auf Olympiaden. Eine Auswahl solcher Aufgaben findet ihr auf der *alpha*-Wandzeitung. Die Schüler arbeiten selbständig populärwissenschaftliche Literatur durch und halten Kurzvorträge im Zirkel oder in einer wissenschaftlichen *Schülergesellschaft*. An den Schulen werden häufig spezielle mathematische Wettbewerbe und Wettkämpfe im mündlichen Lösen von Denkaufgaben veranstaltet. Besonders intensiv beschäftigen sich die sowjetischen Schüler mit den Biographien bedeutender Mathematiker.

Für alle interessierten Schüler der UdSSR besteht die Möglichkeit, an einer *Schule mit verstärktem Mathematikunterricht* zu lernen oder Teilnehmer einer mathematischen Fernschule zu werden. An den Schulen mit verstärktem Mathematikunterricht erhalten die Schüler auch eine berufsorientierende Ausbildung als *Programmierer/Technischer Rechner*. An diesen Schulen wird nur unwesentlich mehr Unterrichtsstoff im Vergleich zu den übrigen Schulen vermittelt, dafür wird der Stoff besonders gründlich behandelt. Es werden viele schwierige Aufgaben gelöst.

Verständlicherweise spielt die Mathematik auch in der außerunterrichtlichen Arbeit eine entscheidende Rolle. Ich hatte Gelegenheit, an einem Treffen von Schülern sowjetischer Mathematikschulen teilzunehmen, welches durch die 239. Leningrader Mittelschule organisiert wurde. Es nahmen Schüler aus 19 Städten teil. Die notwendigen Mittel für Exkursionen und Verpflegung erarbeiteten die Leningrader Schüler, sie organisierten selbst einen Teil der Veranstaltungen, die Unterkunft und Betreuung der Gäste. Es gab einen *Tag der Mathematik*, einen *Tag der Physik*, einen *Tag der Geschichte und Literatur*. Der Tag der Mathematik begann mit Kurzvorträgen bedeutender Wissenschaftler der Leningrader Universität. Nach einer kleinen Mathematikolympiade wurde in Sektionen gearbeitet. Die Schüler hielten Kurzvorträge, die oft im Kollektiv erarbeitet worden waren.

Schüler der mathematischen *Fernschulen* erhalten regelmäßig Lehrmaterialien und Übungsaufgaben zugeschickt. Studenten der Pädagogischen Hochschulen bzw. Universitäten korrigieren die eingereichten Lösungen. An solchen Schulen beteiligen sich tausende Schüler (an Fernschulen der Moskauer Universität allein über 10000). Vor allem durch die Fernschulen und die oft damit eng verbundenen Arbeitsgemeinschaften wird erreicht, daß ein beachtlicher Teil der sowjetischen Schüler sich regelmäßig und mit großem Fleiß über den Unterricht hinaus mit der Mathematik beschäftigt. Das ist die Grundlage aller Erfolge. *D. Hetsch*

Absolventen zahlreicher sowj. Schulen erhalten ein spezielles Abzeichen, z. B. das der Ph.-Math.-Internatsschule bei der Moskauer Lomonossow-Universität.

Mathematikaufgaben aus Freundesland

Aufgaben aus der Sowjetunion

alpha-Wandzeitung

Klasse 6

▲1▲ Wieviel Teiler hat die Zahl $3^6 \cdot 5^4$?

▲2▲ Von 100 Würfeln haben 80 eine rote Seitenfläche, 85 – eine blaue, 75 – eine grüne. Wie groß ist die kleinstmögliche Zahl von Würfeln, die Seitenflächen aller 3 Farben haben müssen?

▲3▲ Die Arbeiter A und B führen gemeinsam eine bestimmte Tätigkeit in 4 Tagen aus, A und C würden dazu 3 Tage benötigen, B und C 2,4 Tage. In welcher Zeit würde jeder der drei Arbeiter die Tätigkeit allein ausführen?

▲4▲ Die Pionierleiterin verteilt in ihrer Pioniergruppe Ansichtskarten. Der erste Pionier erhält 1 Karte und $\frac{1}{10}$ des Rests, der zweite – 2 Karten und $\frac{1}{10}$ des verbliebenen Rests, der dritte – 3 Karten und $\frac{1}{10}$ des verbliebenen Rests usw.
Wieviel Pioniere waren in der Gruppe, wenn alle die gleiche Anzahl von Karten erhielten?

▲5▲ Es ist die zweistellige Zahl zu bestimmen, deren Quersumme 13 ist und bei der die Differenz zwischen der ursprünglichen Zahl und der Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern entsteht, auf 7 endet.

▲6▲ Es ist der unkürzbare Bruch zu bestimmen, dessen Wert sich beim Hinzufügen des Nenners zu Nenner und Zähler verdoppelt.

▲7▲ Es ist zu beweisen, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

▲8▲ Es ist zu beweisen, daß zwei Zahlen, die ungerade sind und deren Differenz 64 ist, immer relativ prim zueinander sind!

▲9▲ Es ist zu beweisen, daß man eine beliebige Rubelsumme, die größer als 7 ist, mit Banknoten im Werte von 3 und 5 Rubel bezahlen kann, ohne daß Wechselgeld herausgegeben werden muß.

▲10▲ Um 5 gegebene Zahlen zu addieren, die nicht durch 5 teilbar sind, rundet ein Schüler jeweils auf eine durch 5 teilbare Zahl. Die gefundene Summe erwies sich als richtig.
Welcher Fehler hätte auftreten können, wenn er jeweils nur die nächstkleineren, durch 5 teilbaren Zahlen addiert hätte?

▲11▲ Es ist die kleinste ganze Zahl zu bestimmen, die mit der Ziffer 1 beginnt und die sich verdreifacht, wenn man die Ziffer 1 vorn streicht und hinten hinzusetzt.

▲12▲ Eine bestimmte Zahl endet auf die Ziffer 6. Wenn man diese Ziffer am Ende streicht und sie vorn an die Zahl setzt, so hat die neue Zahl den doppelten Wert der ursprünglichen Zahl.
Wie groß ist sie? Welche weiteren Zahlen haben diese Eigenschaft?

▲13▲ Die Mengen A, B, C seien nicht leer und es gelte: A ist Untermenge von $B \cup C$, B ist Untermenge von $A \cup C$, C ist Untermenge von $A \cup B$. Kann man daraus schließen, daß $A = B = C$ ist?

▲14▲ Gegeben seien drei Mengen A_1, A_2, A_3 und für jedes $n \geqq 4$ wird eine Menge $A_n = A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup A_{n-3})$ definiert.
Es ist die Menge A_{10} zu bestimmen!

▲15▲ Es ist zu beweisen, daß die Länge der Seitenhalbierenden des Dreiecks kleiner als die halbe Summe der Längen der Seiten ist, zwischen denen sie liegt, aber größer als die Differenz zwischen dieser halben Summe und der Hälfte der Länge der dritten Seite!

▲16▲ Es ist zu beweisen, daß im ungleichseitigen rechtwinkligen Dreieck die Winkelhalbierende des rechten Winkels auch den Winkel zwischen Höhe und Seitenhalbierender der Hypotenuse halbiert!

Klasse 7

▲1▲ 7 Äpfel sind auf 12 Personen gleichmäßig aufzuteilen, ohne einen Apfel dabei in 12 gleiche Teile zu teilen.

▲2▲ Mit welcher kleinsten Anzahl von Gewichten kann man auf einer Balkenwaage eine beliebige Masse ganzzahlig von 1 g bis 40 g wiegen, wenn man die Gewichte auf beide Seiten der Waage legen darf?

▲3▲ Es ist zu beweisen, daß man unter 12 beliebigen natürlichen Zahlen immer 2 Zahlen auswählen kann, so daß deren Summe oder deren Differenz durch 20 teilbar ist.

▲4▲ Es sind solche Zahlen zu finden, die bei der Division durch 2 den Rest 1, bei der Division durch 3 den Rest 2, bei der Division durch 4 den Rest 3, bei der Division durch 5 den Rest 4 und bei der Division durch 6 den Rest 5 lassen.

▲5▲ P und $(8P^2+1)$ seien Primzahlen. Es ist P zu bestimmen!

▲6▲ Es ist für a, b, $c > 0$ zu beweisen:
Wenn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, so
$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}.$$

▲7▲ Es ist zu beweisen: Wenn $a+b+c=0$, so $a^3+b^3+c^3=3abc$.

▲8▲ Es ist zu beweisen: Wenn $a+b+c=0$, so $(a^2+b^2+c^2)^2 = 2 \cdot (a^4+b^4+c^4)$.

▲9▲ Es ist zu beweisen: Wenn $a+b+c$ durch 6 teilbar ist, so ist auch $a^3+b^3+c^3$ durch 6 teilbar.

Arbeitsatmosphäre in der Ph.-Math.-Internatsschule der Moskauer Univ.

▲10▲ Gegeben ist ein konvexes n-Eck, dessen Innenwinkel alle stumpf sind. Es ist zu beweisen, daß die Summe der Längen der Diagonalen größer als die Summe der Seitenlängen ist!

▲11▲ Es ist zu beweisen, daß im Trapez die Halbierungspunkte der Diagonalen und die Halbierungspunkte der nichtparallelen Seiten auf einer Geraden liegen!

▲12▲ Es ist zu beweisen: Wenn man die Seitenmitten eines Vierecks verbindet, so erhält man ein Parallelogramm.

▲13▲ Es ist zu beweisen, daß die Summe der Abstände jedes inneren Punktes von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks gleich der Höhe des Dreiecks ist!

▲14▲ Es ist ein ebenes, konvexes Viereck aus 3 Seiten und den beiden Winkeln zu konstruieren, die die fehlende vierte Seite mit der ersten und der dritten bildet.

Klasse 8

▲1▲ a und b sind teilerfremd. Wie groß kann der größte gemeinsame Teiler von $a+b$ und $a-b$ werden?

▲2▲ a und b seien ganze Zahlen. Es ist zu beweisen: Wenn a^2+b^2 durch 21 teilbar ist, so ist auch a^2+b^2 durch 441 teilbar.

▲3▲ Es ist zu beweisen, daß für jede beliebige natürliche Zahl n eine solche Zahl N existiert, so daß keine der Zahlen $N+1$, $N+2, \ldots, N+n$ Primzahl ist.

▲4▲ Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ sind $n+1$ Zahlen ausgewählt. Es ist zu beweisen, daß man unter den ausgewählten immer zwei finden kann, von denen eine die andere teilt.

▲5▲ Es ist zu beweisen, daß die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ für kein einziges $n \in N$ zu einer ganzen Zahl wird.

▲6▲ Man beweise:

Wenn $x+\frac{1}{x}=1$, so $x^5+\frac{1}{x^5}=1$.

▲7▲ Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen $n>1$ gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

▲8▲ Es ist die Ungleichung $x^2+y^2+z^2 \geqq xy+xz+yz$ zu beweisen!

▲9▲ Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b mit $a+b=2$ gilt:

$$a^4+b^4 \geqq 2.$$

▲10▲ Beweisen Sie:

Wenn
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ &\;\vdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0, \end{aligned}$$
so gilt $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 0$.

▲11▲ Man löse die Gleichungssysteme

a) $y^3=5x+y$, $x^3=5y+x$ b) $x^3=5x+y$, $y^3=5y+x$

▲12▲ Unter welchen Bedingungen hat das Gleichungssystem

$$xyz+z=a$$
$$xyz^2+z=b$$
$$x^2+y^2+z^2=4$$ genau eine Lösung?

▲13▲ Auf den Seiten eines konvexen Vierecks $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 1 werden folgende Punkte festgelegt: K auf AB, L auf BC, M auf CD, N auf AD. Dabei soll gelten

$$\frac{l(\overline{AK})}{l(\overline{KB})}=2,\quad \frac{l(\overline{BL})}{l(\overline{LC})}=\frac{1}{3},\quad \frac{l(\overline{CM})}{l(\overline{MD})}=1,\quad \frac{l(\overline{DN})}{l(\overline{NA})}=\frac{1}{5}.$$

Es ist der Flächeninhalt des Sechsecks $AKLCMN$ zu bestimmen!

▲14▲ Es ist ein Quadrat zu konstruieren, von dem ein Eckpunkt und der Mittelpunkt einer nichtanliegenden Seite gegeben ist.

Bei Freunden studieren

Liebe *alpha*-Leser!

Viele von Euch wissen sicher schon recht gut, welchen Beruf sie einmal ergreifen wollen. Einer wird Facharbeiter, der andere möchte erst ein Studium absolvieren, ehe er in seinem Beruf tätig wird.

Aber Hand aufs Herz! Habt Ihr Euch schon einmal überlegt, wo Ihr studieren wollt? Kennt ihr alle Möglichkeiten?

Seit zwei Jahrzehnten entscheiden sich jährlich Hunderte für ein besonders interessantes Studium, für ein Studium in der UdSSR oder in anderen sozialistischen Ländern. Welchen Mathematik-Anhänger reizt es nicht, an solchen berühmten Universitäten, wie der Moskauer, Leningrader, Charkower, Toruner, Krakower oder Budapester Universität sein Studium zu absolvieren?

Ein Studium im Ausland ist eine ehrenvolle Auszeichnung. Durch hervorragende fachliche und gesellschaftliche Arbeit kann man erreichen, daß man von seiner EOS oder BBS zum Besuch der

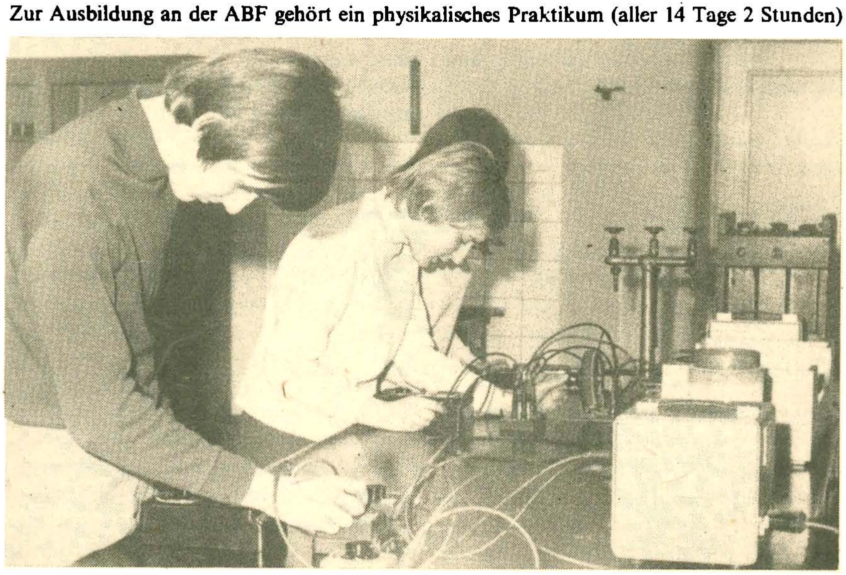
ABF *Walter Ulbricht* Halle – Institut zur Vorbereitung auf das Auslandsstudium

delegiert wird. Ein Studium im sozialistischen Ausland verlangt viel Anstrengung, aber wer Fleiß und Mühe nicht scheut, dem bietet es reiche Möglichkeiten. Ein Studium in der UdSSR wird Euch Gelegenheit geben, aus erster Hand das Land kennenzulernen, das die Grundlagen der kommunistischen Gesellschaftsordnung errichtet. Ihr werdet Möglichkeiten haben, enge, freundschaftliche Kontakte zu Menschen anderer, mit uns brüderlich verbundener Staaten herzustellen. Nach erfolgreichem Abschluß des Studiums gehört Ihr zu denjenigen, die die sozialistische ökonomische Integration mitverwirklichen. Das ist eine schwere aber schöne Aufgabe, eine lohnende Perspektive.

D. Hetsch

Die sprachliche Vorbereitung auf das Auslandsstudium erfolgt durch Gastdozenten aus den einzelnen sozialistischen Ländern in modernen Phonokabinetten

Zur Ausbildung an der ABF gehört ein physikalisches Praktikum (aller 14 Tage 2 Stunden)



Wahr oder falsch – Wie kann man das beweisen?

Axel erledigt seine Hausaufgaben. Beim Addieren der Zahlen 35 und 21 fällt ihm dabei auf, daß beide Zahlen durch 7 teilbar sind und daß auch ihre Summe 56 durch 7 teilbar ist. Er überlegt, ob wohl in jedem Fall die Summe von zwei Zahlen, die durch 7 teilbar sind, eine Zahl ist, die ebenfalls durch 7 teilbar ist. Er fragt seine größere Schwester Beate und deren Freundin Christa danach.
Beate behauptet: „Immer wenn man zwei durch 7 teilbare natürliche Zahlen addiert, so erhält man als Summe wieder eine durch 7 teilbare natürliche Zahl." Christa ergänzt: „Und entsprechend ist es, wenn man zwei Zahlen addiert, die nicht durch 7 teilbar sind. Man erhält als Summe stets eine Zahl, die ebenfalls nicht durch 7 teilbar ist."
Haben Beate und Christa recht mit ihren Behauptungen? Beide begründen ihre Feststellungen, indem sie Zahlenbeispiele dafür angeben.

Beate:

Durch 7 teilbar	Durch 7 teilbar	Summe
42	14	$42+14=56$
21	28	$21+28=49$
14	7	$14+7=21$

„Die Summen 56, 49 und 21 sind durch 7 teilbare natürliche Zahlen. Also ist die Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen wieder stets durch 7 teilbar."

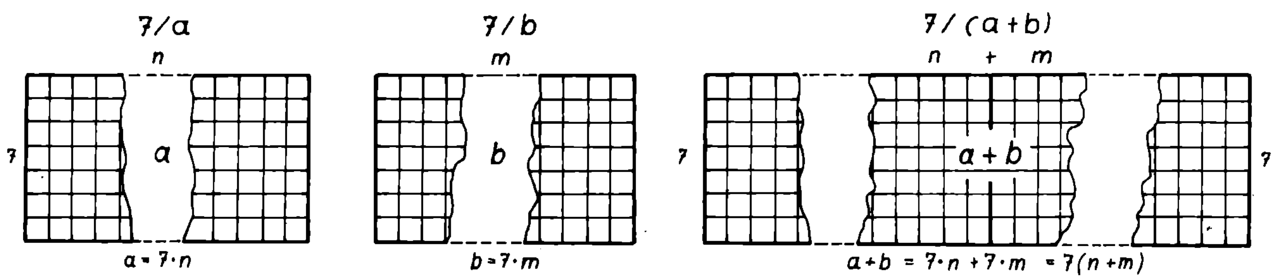
Christa:

Nicht durch 7 teilbar	Nicht durch 7 teilbar	Summe
25	30	$25+30=55$
36	23	$36+23=59$
15	10	$15+10=25$

„Die Summen 55, 59 und 25 sind nicht durch 7 teilbar. Also ist die Summe zweier nicht durch 7 teilbarer natürlicher Zahlen stets nicht durch 7 teilbar."
Axel überzeugen diese Begründungen nicht ganz. Nach einigem Nachdenken meint er dann sogar: „Christas Behauptung ist trotz der angegebenen Beispiele falsch. Die Zahlen 23 und 26 sind nicht durch 7 teilbar, ihre Summe $23+26=49$ ist aber dennoch durch 7 teilbar." Zu Beates Behauptung fällt ihm kein Gegenbeispiel ein. Ist Beates Aussage demzufolge also wahr? Das läßt sich gewiß nicht sagen, denn vielleicht hat Axel nicht genügend lange nach einem solchen Gegenbeispiel gesucht. Schließlich gibt es beliebig viele Fälle, über die Beate etwas aussagt.
Fassen wir zunächst einmal zusammen:
Eine Aussage, die sich auf mehr als einen Einzelfall bezieht, ist als falsch erkannt, wenn man nachweisen kann, daß sie auf einen in ihr erfaßten Fall nicht zutrifft, d. h. wenn man ein Gegenbeispiel angeben kann. Eine Aussage, die sich auf beliebig viele Einzelfälle bezieht und für die man kein Gegenbeispiel gefunden hat, muß nicht unbedingt wahr sein. Demzufolge können Aussagen, die sich auf beliebig viele Einzelfälle beziehen, nicht durch Überprüfen einer bestimmten Anzahl dieser Einzelfälle als wahr nachgewiesen werden.
Wie aber läßt sich die Wahrheit einer Aussage nachweisen?

Eine Aussage ist dann als wahr erkannt, wenn man nachweisen kann, daß sie auf jeden in ihr erfaßten Fall zutrifft. Dieser Nachweis ist verhältnismäßig einfach, wenn sich die Aussage nur auf eine bestimmte Anzahl von Einzelfällen bezieht. Soll man zum Beispiel nachweisen, daß die Aussage
(1) „Unter drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, die kleiner als 50 sind, befindet sich stets eine Primzahl"
wahr ist, so kann man einfach alle 23 Einzelfälle, beginnend bei (1, 3, 5) und endend bei (45, 47, 49), der Reihe daraufhin untersuchen, ob sich mindestens eine Primzahl unter den jeweils drei ungeraden Zahlen befindet. Da dies auf jeden dieser untersuchten Einzelfälle zutrifft, ist die obige Aussage wahr.
Beates Aussage läßt sich auf diese Weise nicht als wahr nachweisen, da man nicht beliebig viele Einzelfälle überprüfen kann. In diesem Fall bedient man sich zweckmäßigerweise der Variablen. Sie stehen anstelle von Zahlen, die man beliebig aus einem vorgegebenen Zahlbereich, zum Beispiel aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, wählen kann.
Wir wollen daher zunächst einmal Beates Aussage unter Verwendung von Variablen neu formulieren:
(2) „Wenn die natürlichen Zahlen a und b durch 7 teilbar sind, so ist ihre Summe $a+b$ durch 7 teilbar."
Um zum Ausdruck zu bringen, daß dieser Sachverhalt auf alle beliebig vielen möglichen Fälle zutrifft, wollen wir noch genauer formulieren:
(3) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a und b durch 7 teilbar sind, so ist ihre Summe $a+b$ durch 7 teilbar."
Die „Buchstaben" a und b, die Variablen, erfassen gewissermaßen die beliebig vielen natürlichen Zahlen, die durch 7 teilbar sind, „mit einem Schlage". Will man die Wahrheit der obigen Aussage also nachweisen oder – wie man auch sagt – die Aussage beweisen, so muß man dabei selbstverständlich auch mit diesen beliebigen Zahlen a und b arbeiten und nicht mit speziellen Zahlen, die durch 7 teilbar sind.
Bei dem Beweis einer Aussage stützt man sich auf Aussagen, die bereits als wahr erkannt worden sind, und auf Definitionen von Begriffen, die in der zu beweisenden Aussage oder in den bereits bekannten Aussagen vorkommen. Man wird bei einem Beweis im allgemeinen von dem ausgehen, was man bereits über die in der Aussage enthaltenen Begriffe weiß. Fragen wie „Was wird vorausgesetzt?", „Was wird behauptet?", „Was ist über die vorkommenden Begriffe bekannt?" helfen oft beim Finden eines Beweises.
Versuchen wir also einmal, einen Beweis für die Aussage (3) zu finden und aufzuschreiben. Wir werden davon ausgehen, daß a und b beliebige natürliche Zahlen und durch 7 teilbar sind. Was bedeutet nun „eine Zahl a ist durch 7 teilbar"? Wir erinnern uns an die Definition der Teilbarkeit natürlicher Zahlen. (Vgl. zum Beispiel Lehrbuch für Klasse 6, Seite 8). „Die natürliche Zahl a bzw. b ist durch 7 teilbar" bedeutet: „Es gibt eine

natürliche Zahl, die, mit 7 multipliziert, a bzw. b ergibt." Bezeichnet man diese Zahl bei der Zahl a mit n und bei der Zahl b mit m, so ist daher $a=7 \cdot n$ und $b=7 \cdot m$. Nachzuweisen ist, daß die Summe der Zahlen a und b durch 7 teilbar ist.
Bilden wir also die Summe: $a+b=7 \cdot n+7 \cdot m$. Wir wären fertig mit unserem Beweis, wüßten wir, ob es eine natürliche Zahl gibt, die mit 7 multipliziert, $a+b$ ergibt. Man müßte also versuchen, die Summe $7 \cdot n+7 \cdot m$ in ein Produkt umzuformen, von dem ein Faktor die Zahl 7 ist. Eine solche Umformung ist aber möglich auf Grund des bereits bekannten Distributivgesetzes. Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt nämlich: $7 \cdot n+7 \cdot m=7 \cdot (n+m)$. Also ist $a+b=7 \cdot (n+m)$. Da die Summe der Zahlen n und m wieder eine natürliche Zahl ist, – nennen wir sie k –, gibt es also eine Zahl, nämlich die Zahl $k=n+m$, die, mit 7 multipliziert, die Summe $a+b$ ergibt. Das wiederum bedeutet: Die Summe $a+b$ ist durch 7 teilbar. Da wir mit beliebigen Zahlen a und b gearbeitet haben, ist damit die Aussage (3) bewiesen. Beate hat also recht mit ihrer Aussage.



Wenn man den Beweis noch einmal Schritt für Schritt durchgeht, wird man feststellen, daß man ihn ebenso für die folgende allgemeinere Aussage führen könnte:
(4) „Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt: Wenn a und b durch c teilbar sind, so ist ihre Summe $a+b$ durch c teilbar."
Den Beweis dafür könnte man in der folgenden Form kurz aufschreiben:

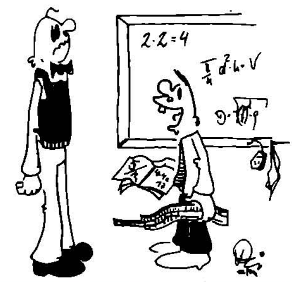
Beweis:
a, b, c seien beliebige natürliche Zahlen; a und b seien teilbar durch c.

a ist teilbar durch c	b ist teilbar durch c	
Es gibt eine natürliche Zahl, die, mit c multipliziert, a ergibt.	Es gibt eine natürliche Zahl, die mit c multipliziert, b ergibt.	Definition
Diese Zahlen seien mit n und m bezeichnet. $a=c \cdot n$	$b=c \cdot m$	
$a+b=c \cdot n+c \cdot m$		Addition ist stets ausführbar im Bereich d. natürlichen Zahlen
$a+b=c \cdot (n+m)$		Distributivgesetz
Es sei $k=n+m$; k ist eine natürliche Zahl. $a+b=c \cdot k$		
Es gibt eine natürliche Zahl, die, mit c multipliziert, die Summe $a+b$ ergibt.		
$a+b$ ist teilbar durch c		Definition

Da a, b und c beliebige natürliche Zahlen sind, ist die Aussage bewiesen.
Fassen wir also zu sammen: Eine Aussage über Zahlen, aber auch über geometrische Begriffe, wie Dreiecke, Kreise usw. –, die sich auf unendlich viele Einzelfälle bezieht, läßt sich nicht beweisen, indem man einige spezielle Einzelfälle überprüft.
Der Beweis läßt sich nur erbringen, wenn man dabei mit beliebigen Zahlen (oder entsprechend Dreiecken, Kreisen usw.) arbeitet. Nur auf diese Weise läßt sich zeigen, daß eine solche Aussage, bezogen auf die unendlich vielen Einzelfälle, wahr ist. Eine Aussage, die sich auf endlich viele Einzelfälle bezieht, wie z. B. die Aussage (1), kann dagegen tatsächlich durch Überprüfen aller Einzelfälle bewiesen werden.
Für alle diejenigen, die auch selbständig üben möchten, um so ihre Kenntnisse zu vertiefen und ihre Fähigkeiten zu entwickeln, sei zum Abschluß noch eine Aufgabe angefügt.
Aufgabe: Folgende Aussagen sollen untersucht werden:
(5) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a und b gerade Zahlen sind, so ist ihre Summe $a+b$ eine gerade Zahl."
(6) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a eine zweistellige gerade Zahl und b eine zweistellige ungerade Zahl ist, so ist ihre Summe $a+b$ eine ungerade Zahl."
(7) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a und b ungerade Zahlen sind, so ist ihre Summe $a+b$ eine gerade Zahl."
(8) „Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt: Wenn a, b und c aufeinanderfolgende Zahlen sind, so ist ihre Summe $a+b+c$ durch 3 teilbar."
(9) „Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn a eine dreistellige Zahl ist und wenn die letzte Grundziffer von a durch 2 teilbar ist, so ist a durch 2 teilbar."
(10) „Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n \cdot (n+1)+1$ ist eine Primzahl."
(11) „Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt: Wenn die Summe $a+b$ durch c teilbar ist, so sind a und b durch c teilbar."
(12) „Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: Wenn a, b, c aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen sind, so ist mindestens eine dieser Zahlen eine Primzahl."
(13) „Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn a eine einstellige Zahl ist, so ist $a \cdot (a+2)+1$ eine Quadratzahl."
(14) „Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn a eine Primzahl und $a \leq 10$ ist, so ist $a \cdot (a+3)+1$ eine Primzahl."
(a) Welche Aussagen sind falsche Aussagen, d. h. für welche dieser Aussagen läßt sich ein Gegenbeispiel angeben?
(b) Welche Aussagen sind wahre Aussagen? Welche dieser Aussagen lassen sich durch Überprüfen endlich vieler Einzelfälle beweisen?
Welche dieser Aussagen lassen sich auf diese Weise nicht beweisen?
(c) Gib für jede Aussage entweder ein Gegenbeispiel an, oder beweise sie!

M. Rehm

In freien Stunden alpha heiter



„Sie sagten doch,
Rechenstabgenauigkeit genügt!"
... *Fink, TH Magdeburg*

Es ist die 11. Karte

I. Gang: Der Mitspieler wird gebeten, sich eine Spielkarte zu merken, die ich in 4 Gängen finden will. 21 Spielkarten werden in 3 Stapeln zu 7 Karten ausgelegt, und der Mitspieler bezeichnet den Stapel mit seiner „gedachten" Karte. Dieser Stapel kommt in die Mitte der neu zusammengelegten 3 Stapel.

II. Gang: Beim zweiten Auslegen hat das eben bezeichnete Kartendrittel die umrandeten Plätze in der Anordnung, wie folgt:

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	
10	11	12	Mittelplätze
13	14	15	
16	17	18	
19	20	21	

III. Gang: Möglichkeit A: Mitspieler bezeichnet Reihe 1, falls 10 oder 13 die Gedachte ist. Nach richtigem Zusammenlegen und neuem Auslegen bekommt
10 den Platz 11., (7+4) 13 den Platz 12., (7+5)
Möglichkeit B: Mitspieler bezeichnet Reihe 2, falls 8, 11 oder 14 die Gedachte ist; dann bekommt
8 den Platz 10., (7+3)
11 den Platz 11., (7+4) 14 den Platz 12., (7+5).
Möglichkeit C: Mitspieler bezeichnet Reihe 3, falls 9 oder 12 die Gedachte ist; dann bekommt
9 den Platz 10., (7+3) 12 den Platz 11., (7+4).
Man sieht, nach dem III. Gang gibt es für die Gedachte nur noch die drei Mittelplätze 10., 11. oder 12. Nach letzter Reihenbezeichnung und entsprechendem Zusammenlegen wird jeder der drei Mittelplätze zum 11. wegen 7+4=11.

IV. Gang: Verdeckt hinzählen, 11. aufwerfen!

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27

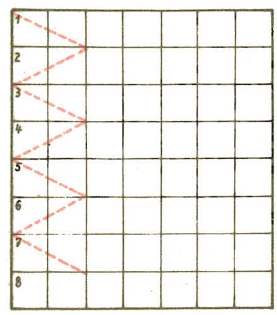
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Von 27 Karten wird es immer die 14., von 15 Karten die 8., von 9 Karten die 5. Karte.

S. Thum, Barth

Rätsel



Waagerecht:
1. Teilgebiet der Mathematik
2. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks bildet den Mittelpunkt für den ...
3. Begriff beim Rechnen mit Logarithmen
4. Name der Funktion $y=x^2$
5. Zahl
6. Zeiteinheit
7. Viereck
8. Land der Pyramiden

Reiht man die Buchstaben auf der gestrichelten Linie aneinander, so erhält man einen Wirkungsort des Mathematikers *Adam Ries.*

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

Kennst du sie?

Von 15 berühmten Mathematikern (*M*), Physikern (*P*) bzw. Chemikern (*C*) sind die Vornamen und Lebensdaten angegeben. Errate die Nachnamen; deren Anfangsbuchstaben ergeben den Namen eines Mathematikers, der im vorigen Jahrhundert lebte.
Daniel (1700 bis 1782 (M), Albert (1879 bis 1955) (P), Friedlieb Ferdinand (1795 bis 1867) (C), John (1550 bis 1617) (M), David (1862 bis 1943) (M), Niels Henrik (1802 bis 1829) (M), Wilhelm Conrad (1845 bis 1923) (P), Richard (1831 bis 1916) (M), Adam (1492 bis 1559) (M), Abram Fjodorowitsch (1880 bis 1960) (P), Leonhard (1707 bis 1783) (M), Dimitri Iwanowitsch (1834 bis 1907) (C), André Marie (1775 bis 1836) (P), John von (1903 bis 1957) (M), Emmy (1882 bis 1935) (M).

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Verrückte Sätze

Hier sind ein paar Rätselsätze. Könnt ihr sie lesen?
8 8er schwammen am 7gebirge vorbei.
7 Kinder 7 den Sand
4 Re4förster spielten 1st auf Re4 66.
4 W8eln l8en 3st. *Stephan Marzak, 11 Jahre, Köln*

Knobel mit

Die Buchstaben sind so durch Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

K · I + K = T
K N · I + N = T I
K N O · I + O = T I M
K N O B · I + B = T I M L
K N O B E · I + E = T I M L E
K N O B E L · I + L = T I M L E B
K N O B E L M · I + M = T I M L E B O
K N O B E L M I · I + I = T I M L E B O N
K N O B E L M I T · I + T = T I M L E B O N K

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

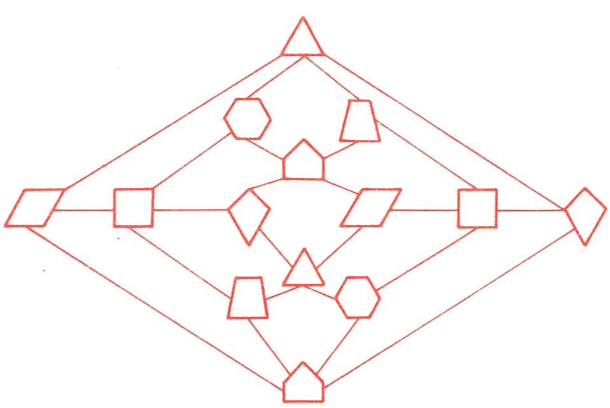
Kryptarithmetik *H. Oehl, München*

  Mathe
+ alpha
  Spass (Keine Zahl beginnt mit Null.)

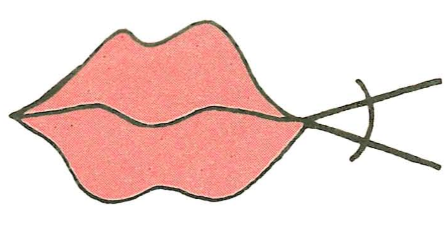
Magische Figur

In der Figur sind die Zahlen von 1 bis 14 so einzutragen, daß die Summe der Zahlen in den gleichen Formen stets 15 ist. Je vier Formen sind zu einem Viereck verbunden. Die Summe der Zahlen in den Eckpunkten soll stets 30 betragen.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz



Mundwinkel *R. Schade, aus: Magazin 4/75*



Silbenrätsel

Die Silben
a – a – a – ba – de – de – ent – ga – gam – ge – in – ir – ka – kom – kreis – kus – le – le – lich – lym – ma – ma – ma – me – me – mo – na – na – nal – o – o – o – pa – pi – pi – quo – ra – ra – ral – rith – te – te – ter – the – ti – ti – tik – tür
setze man zu 16 ein- oder mehrsilbigen Wörtern mit nachfolgender Bedeutung zusammen.
Anschließend entnehme man jedem Wort eine Silbe. Diese ergeben aneinandergereiht den Namen einer Veranstaltung, die 1974 in der DDR stattgefunden hat.
(evtl. Hinweis: Bei der Auswahl der Silben hat die Ziffernfolge 1 2 1 2 1 2 3 2 2 2 4 4 2 1 1 3 helfende Bedeutung.)

Die Wörter bedeuten:

1. Linie, die die Seiten eines Vielecks berührt
2. Einheit der Länge
3. Bezeichnung für die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ...
4. Ergebnis einer Division
5. letzter Buchstabe des griechischen Alphabets
6. Plural einer Zeiteinheit
7. Gerade, die zu einer anderen gleichen Abstand hat
8. griechischer Buchstabe
9. Seite eines rechtwinkligen Dreiecks
10. Bestandteil eines Dezimalbruchs
11. Teilgebiet der Mathematik
12. Bezeichnung für Zahlen, wie z. B. 2, , ...
13. sportlicher und mathematischer Wettbewerb
14. Name einer in der Kreislehre wichtigen Zahl
15. im Altertum benutztes Rechenbrett
16. Bezeichnung für die natürlichen Zahlen, die durch 2 teilbar sind.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Am Rechner
Dieter Christke, Leipzig

Neonlicht gleißt
haltlos
an weißfließenden Wänden.
Glattes Linoleum
wirft spiegelnd es
den Röhren zurück.
Hinter schirmendem Glas
zucken feinnervig
vielgliedrige Arme
erhalten der Bänder –
widersinnig scheint's –
unfaßbaren Tanz.
Lacknägel berühren
liebkosend
plastgestaltete Dendriten,
ratterndes Jauchzen
peripherer Geräte zeigt an –
berechnet ein neuer Gedanke.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen · Fortsetzung

Bezirksolympiade

Klassenstufe 10

4. Laut Definition von f gilt
$(f(2))$
$=(a^2+b^2+(a+b)^2)=(2a^2+2ab+2b^2)^2=$
$=4(a^4+2a^3b+2a^2b^2+a^2b^2+2ab^3+b^4)=$
$=2(a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)=$
$=2(a^4+b^4+(a+b)^4)=2f(4)$, w.z.b.w.

5. Angenommen, n sei eine Zahl mit den verlangten Eigenschaften. Dann muß wegen $n^2+6n-187=(n-11)(n+17)$ mindestens einer dieser beiden Faktoren durch 19 teilbar sein, da 19 eine Primzahl ist.
Fall 1: Es gelte $n-11=m\cdot 19$ mit ganzzahligem m. Daraus folgt $n=19m+11$.
Für $m<0$ ist n keine natürliche Zahl.
Aus $m=0$ folgt $n=11$.
Aus $m=1$ folgt $n=30$.
Für $m\geqq 2$ ist $n>40$.
Fall 2: Es gelte $n+17=r\cdot 19$ mit ganzzahligem r. Daraus folgt $n=19r-17$.
Für $r\leqq 0$ ist n keine natürliche Zahl.
Aus $r=1$ folgt $n=2$.
Aus $r=2$ folgt $n=21$.
Für $r\geqq 3$ ist $n\geqq 40$.
Also können höchstens die Zahlen 11, 30, 2, 21 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Tatsächlich gilt:
$11^2+6\cdot 11-187=11(11+6-17)=0\cdot 19$
$30^2+6\cdot 30-187=30\cdot 36-187=$
$893=47\cdot 19$
$2^2+6\cdot 2-187=16-187=-9\cdot 19$
$21^2+6\cdot 21-187=21\cdot 27-187=$
$380=20\cdot 19$
Genau die Zahlen 11, 30, 2, 21 genügen daher den Bedingungen der Aufgabe.

6 (I.) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $\overline{OP}=a$, $\overline{OR}=b$, $\overline{PX}=x$, $\overline{RY}=y$ gesetzt wird:

$$\frac{y}{a}=\frac{b}{a+b}; \qquad (1)$$

denn wegen $\sphericalangle ROP\cong\sphericalangle YRQ$ und $\sphericalangle ORX\cong\sphericalangle RYQ$ ist $\triangle ORX\sim\triangle RYQ$.

Außerdem gilt $\frac{x}{b}=\frac{a}{b+y}$, $\qquad (2)$

weil wegen $\sphericalangle OPY\cong\sphericalangle OXQ$ und $\sphericalangle OYP\cong\sphericalangle PQX$ $\triangle OYP\sim\triangle PQX$ gilt.
Aus (1) und (2) folgt

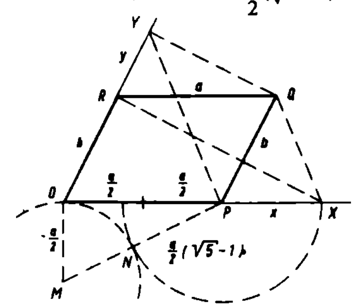
$$\frac{x}{b}=\frac{a}{b+\frac{ab}{a+x}}, \qquad (3)$$

$$x^2+ax-a^2=0 \qquad (4)$$

und hieraus wegen $x>0$

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten OP und $\overline{OM}=\frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius $\overline{PN}$, so ist $\overline{PX}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.



Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgabe, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:
(II) (α) Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s.
(β) Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.
(γ) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MO}$. Ist N der Schnittpunkt von k mit PM, dann
(δ) schlage man den Kreis k' um P mit dem Radius $\overline{PN}$. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und P ist der Punkt X.
(III) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt $\overline{MP}=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{OP}^2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$.
Daher ist nach Konstruktion
$\overline{PX}=\overline{PN}=\overline{PM}-\overline{MN}=\overline{PM}-\overline{MO}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.
Folglich gilt $x=\overline{PX}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ und damit (4) und (3). Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, daß $YQ\parallel RX$ ist, so gilt
$\triangle OYP\sim\triangle PQX$
und hieraus $\sphericalangle OPY\cong\sphericalangle PXQ$. Folglich ist
$\overline{\sphericalangle PXQ}+\overline{\sphericalangle YPX}=180°$.
Daher können die PY bzw. XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt haben, sind also parallel.
(IV) Die angegebene Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.

DDR-Olympiade

Olympiadeklasse 10

1. Wendet man auf die Faktoren des gegebenen Produktes eine der binomischen Formeln an, so erhält man $z=$

$$\frac{(1-2)\cdot(1+2)\cdot(3-2)\cdot(3+2)\cdot(5-2)\cdot(5+2)\cdot}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}$$
$$\ldots\frac{(197-2)\cdot(197+2)\cdot(199-2)\cdot(199+2)}{\ldots\cdot 197^2\cdot 199^2}$$

Da nun in allen Faktoren des Zählers von den ungeraden Zahlen die Zahl 2 subtrahiert wird bzw. zu den ungeraden Zahlen die Zahl 2 addiert wird, sind alle Faktoren des Zählers ungerade Zahlen. Dabei treten alle ungeraden Zahlen mit $3\leqq m\leqq 197$ genau zweimal als Faktoren auf, denn sie werden ein erstes Mal dadurch erzeugt, daß von der Zahl $m+2$ die Zahl 2 subtrahiert wird und ein zweites Mal dadurch, daß zu der Zahl $m-2$ die Zahl 2 addiert wird. Demnach kann man kürzen und erhält

$$z=\frac{(1-2)\cdot(3-2)\cdot(197+2)\cdot(199+2)}{1^2\cdot 199^2}$$

und schließlich

$z=\frac{-201}{199}$. Da 199 eine Primzahl ist, ist z damit in der verlangten Form angegeben.
Wir wollen hier noch angeben, wie man die die Lösung unter Verwendung des Produktzeichens Π aufschreiben kann.

$$z=\prod_{k=0}^{99}\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)$$

$$z=\frac{\prod_{k=0}^{99}((2k+1)^2-2^2)}{\prod_{k=0}^{99}(2k+1)^2}$$

$$z=\frac{\prod_{k=0}^{99}((2k+1)-2)((2k+1)+2)}{\prod_{k=0}^{99}(2k+1)^2}$$

$$z=\frac{\prod_{k=0}^{99}(2k-1)\prod_{k=0}^{99}(2k+3)}{\prod_{k=0}^{99}(2k+1)\prod_{k=0}^{99}(2k+1)}$$

Ersetzt man nun k durch $k-1$, so muß man natürlich k von 1 bis 100 laufen lassen. Wir nutzen das aus und erhalten damit

$$z=\frac{\prod\limits_{k=0}^{99}(2k-1)\prod\limits_{k=0}^{100}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{100}(2k-1)\prod\limits_{k=0}^{99}(2k+1)}$$

Jetzt können wir kürzen, und von jedem dieser vier Produkte bleibt dann entweder der 0-te Faktor oder der 100-ste Faktor stehen: $z=\frac{-1\cdot 201}{199\cdot 1}$. Damit erhalten wir das Ergebnis wie oben.

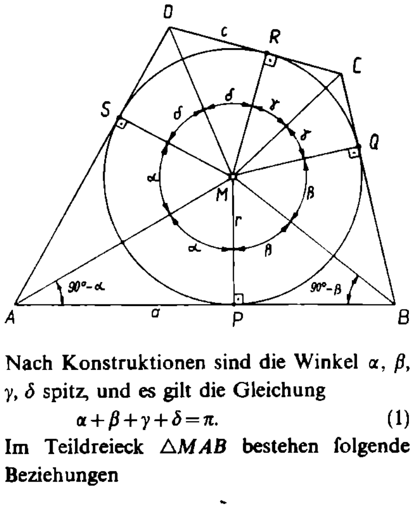
Bemerkungen: Diese Aufgabe muß im Rahmen der 4. Stufe der OJM als leicht bezeichnet werden und war damit als 1. Aufgabe am ersten Tag auch richtig platziert. Die meisten Schüler lösten die Aufgabe ohne ersichtliche Schwierigkeiten wie ganz oben angegeben. Kein Schüler benutzte die Produktschreibweise. (Wir möchten bei dieser Gelegenheit nur einmal auf diese Möglichkeit aufmerksam machen.) Die häufigsten Mängel traten bei Formulierungen auf, etwa 30 %₀ wiesen im Antwortsatz nicht auf die Teilerfremdheit von 201 und 199 hin. Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Schüler	8	0	2	2	2	31	55

Dr. Hans-Jürgen Sprengel,
Päd. Hochschule Karl Liebknecht,
Potsdam

2. I. Formelmäßige Erfassung der geometrischen Vorgaben (siehe Bild). Mit P, Q, R, S werden in dieser Reihenfolge die auf AB, BC, CD, DA liegenden Berührungspunkte des Inkreises mit dem Tangentenviereck bezeichnet. Es ist die Tatsache zu verwenden, daß ein Berührungsradius senkrecht auf der zugehörigen Tangente steht.

Weiterhin seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in dieser Reihenfolge die Größen der Winkel $\sphericalangle AMP$, $\sphericalangle BMQ$, $\sphericalangle CMR$, $\sphericalangle DMS$. Da die Tangenten aus A an den Inkreis symmetrisch bezüglich AM liegen, gilt $\sphericalangle AMP=\sphericalangle AMS$. Entsprechend folgt $\sphericalangle BMQ=\sphericalangle BMP$, $\sphericalangle CMR=\sphericalangle CMQ$, $\sphericalangle DMS=\sphericalangle DMR$.



Nach Konstruktionen sind die Winkel α, β, γ, δ spitz, und es gilt die Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi. \qquad (1)$$

Im Teildreieck $\triangle MAB$ bestehen folgende Beziehungen

$$\overline{AP}+\overline{BP}=a \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\sin\alpha,\ \frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}=\sin\beta \qquad (3)$$

$$\frac{r}{\overline{AM}}=\cos\alpha,\ \frac{r}{\overline{BM}}=\cos\beta. \qquad (4)$$

Auf Grund des Sinus-Satzes der ebenen Trigonometrie gilt weiterhin

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \qquad (5)$$

II. *Beweis*

Durch Einsetzen von (3) in (2) findet man

$$\overline{AM}\sin\alpha+\overline{BM}\sin\beta=a \qquad (6)$$

Verknüpft man (5) mit (6), ergibt sich

$$\overline{BM}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}+\sin\beta\right)=a$$

Die gefundene Gleichung wird mit $\cos\alpha$ durchmultipliziert.

$$\overline{BM}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=a\cos\alpha \qquad (7)$$

Die linke Seite von (7) läßt sich mit Hilfe eines Additionstheorems umformen. Durch Division mit $\overline{BM}$ und Einsetzen von (4) auf der rechten Seite von (7) ergibt sich

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{ar}{\overline{AM}\cdot\overline{BM}} \qquad (8)$$

Mittels zyklischer Vertauschung der Formeln 2 bis 5 von dem Dreieck $\triangle MAB$ auf das Dreieck $\triangle MCD$ und ein den Schritten 6 bis 8 analoges Vorgehen findet man

$$\sin(\gamma+\delta)=\frac{cr}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}} \qquad (9)$$

Wegen $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-(\alpha+\beta))$ folgt aus (1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma+\delta)$. (10)

Mit (10) führen (8) und (9) auf die Gleichung

$$\frac{ar}{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}=\frac{cr}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}} \text{ oder } \frac{a}{c}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}} \qquad (11)$$

Ende des Beweises.

Bemerkungen: Die gestellte Aufgabe ist für die Klassenstufe 10 als angemessen zu bezeichnen. Bei Vorgabe von 7 Punkten für den vollständigen Beweis ergab die Korrektur folgenden Punktespiegel:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl d. Schüler	29	24	3	3	6	4	0	31

Der hohe Anteil von Schülern (53 %₀), die mit der Aufgabe so gut wie nichts anzufangen wußten, erklärt sich aus dem Fehlen eines Lösungsgedankens. Ein Lösungsgedanke besteht z. B. darin, die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle MAB$ und $\triangle MCD$ zueinander in Beziehung zu setzen. Wegen der gemeinsamen Höhe r muß das Verhältnis der Flächeninhalte gleich dem Verhältnis $a:c$ der Basen sein.

Auf alle Fälle ist die Bereitstellung geometrischer Grundbeziehungen an dem Viereck ein erster Schritt zur Durchführung des Beweises. In dem hier demonstrierten Fall erleichtert dies eine zielgerichtete identische Umformung der Ausgangsgleichung (2).

Dozent Dr. E. Schröder,
Technische Universität Dresden

3 A. *Lösung* (in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission):

Die Pyramide $ABCDS$ (Bild 1) wird längs AS aufgeschnitten. Ihre Mantelfläche wird in die Ebene abgewickelt, so daß die Figur von Bild 2 entsteht. Die Punkte der Kante AS werden dabei sowohl den Punkten der Strecke $A'S'$ als auch denen von $A''S'$ zugeordnet, z. B. hat P die beiden Bildpunkte P' und P''. Wegen $0°<\varphi<90°$ gilt $0°<\sphericalangle A'S'A''=4\varphi<360°$, so daß stets $A'\neq A''$ und $P'\neq P''$ sein muß. Betrachtet man einen beliebigen, aber festen Punkt P und dazu einen beliebigen geschlossenen Streckenzug $PQRTP$ von der in der Aufgabe genannten Art, so geht $PQRTP$ bei dieser Abbildung in einen gleichlangen (wegen $P'\neq P''$ nicht geschlossenen) Streckenzug $P'Q'R'TP''$ (Bild 2) über, der folgende Eigenschaften hat:

1. $\overline{P'S'}=\overline{P''S'}=\overline{PS}$;
2. P', Q', R', T' bzw. P'' sind innere Punkte der Strecken $A'S'$, $B'S'$, $C'S'$, $D'S'$ bzw. $A''S'$.

Bild 1

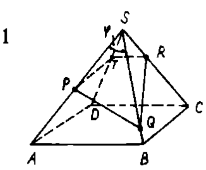
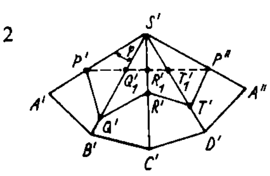


Bild 2



Streckenzüge in der Ebene mit diesen beiden Eigenschaften sollen zulässige Streckenzüge genannt werden. Jedem zulässigen Streckenzug entspricht umgekehrt ein geschlossener Streckenzug auf dem Mantel der Pyramide, der dieselbe Länge hat und die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Unter den geschlossenen Streckenzügen $PQRTP$ gibt es daher genau dann einen kürzesten, wenn es unter den zulässigen Streckenzügen $P'Q'R'T'P''$ einen kürzesten gibt. Das Bild 2 legt nahe, zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $0°<4\varphi<180°$. Das Polygon $A'B'C'D'A''S'$ ist ein konvexes Sechseck. Man erkennt leicht, daß die Strecke $P'P''$ dann jede der drei Strecken $B'S'$, $C'S'$, $D'S'$ in einem inneren Punkt schneiden muß. Daher ist die Strecke $P'P''=P'Q_1'R_1'T_1'P''$ (Bild 2) ein zulässiger Streckenzug, und zwar der kürzeste, da die Strecke die kürzeste Verbindung zwischen P' und P'' überhaupt ist. Ergebnis:

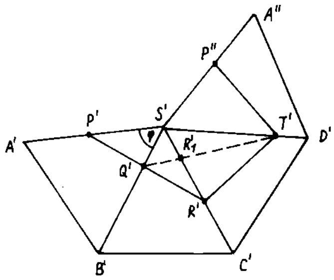
Die Winkelgrößen φ mit $0°<\varphi<45°$ gehören zu der gesuchten Menge.

2. $180°\leqq 4\varphi<360°$. Das Polygon $A'B'C'D'A''S'$ ist entweder ein Fünfeck ($\varphi=45°$) oder ein konkaves Sechseck mit einem Innenwinkel $\sphericalangle A'S'A''>180°$. In beiden Fällen ist die Strecke $P'P''$ sicher kein zulässiger Streckenzug, da sie keine inneren Punkte der Strecken $C'S'$, $B'S'$, $D'S'$ enthält. Das führt zu der Vermutung, daß in der Menge der zulässigen Streckenzüge kein kürzester existiert, wenn $45°\leqq\varphi<90°$ ist. Dies wird nun

dadurch bewiesen, daß gezeigt wird: Für $45° \leqq \varphi < 90°$ gibt es zu jedem zulässigen Streckenzug noch einen kürzeren zulässigen Streckenzug. Ist nämlich $P'Q'R'T'P''$ (Bild 3) irgendein zulässiger Streckenzug, so können nicht sämtliche der drei Streckenzüge $P'Q'R'$, $Q'R'T'$, $R'T'P''$ Strecken sein. Sonst wäre $P'Q'R'T'P''$ die Strecke $P'P''$, also im Widerspruch zur Voraussetzung kein zulässiger Streckenzug. Es sei $Q'R'T'$ ein Streckenzug, bei dem Q', R', T' nicht auf derselben Geraden liegen. Die Strecke $Q'T'$ muß wegen $\sphericalangle B'S'D' = 2\varphi < 180°$ die Strecke $C'S'$ in einem inneren Punkt R'_1 schneiden. Daher ist $P'Q'R'_1T'P''$ wieder ein zulässiger Streckenzug. Er ist aber kürzer als $P'Q'R'$ $T'P''$, weil $\overline{Q'T'} < \overline{Q'R'} + \overline{R'T'}$ ist. Ergebnis: Die Winkelgrößen φ mit $45° \leqq \varphi < 90°$ gehören nicht zu der gesuchten Menge.

Die gesuchte Menge von Winkelgrößen φ ist daher mit $0° < \varphi < 45°$ gefunden.

Bild 3



Bemerkungen: Die Aufgabe wurde von nur 11 Schülern ausgewählt. Das zeigt, daß bei den Schülern im allgemeinen die Logik gegenüber der Geometrie den Vorzug genießt. Mängel traten vor allem bei der Behandlung des Falls $45° \leqq \varphi < 90°$ auf, wenn es darum ging, einen sauberen Nachweis dafür zu führen, daß es zu jedem zulässigen Streckenzug immer noch einen kürzeren gibt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl d. Schüler	1	2	0	0	0	1	6	1

Dr. G. Seifert, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik

3 B. *Lösung (nach einem bearbeiteten Lösungsvorschlag des Schülers Bernd Renner, Halle):* Uwes Aussage ist nur dann falsch, wenn gilt:

a) Peter hat den Zirkel nicht,

b) Klaus hat das Lineal.

Peters Aussage ist ebenfalls nur dann falsch, wenn a) und b) zutreffen. Das heißt, daß Uwes und Peters Aussagen entweder beide wahr oder beide falsch sind. Wären sie beide falsch, so wäre auch Monikas Aussage falsch – was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Daraus folgt, daß die Mitteilungen von Uwe, Peter und Monika wahr und die von Klaus und Ilona falsch sind. Da die Aussage von Klaus falsch ist, hat er selbst das Lineal, und Uwe hat den Bleistift nicht. Dann hat Peter den Zirkel (Peters Aussage). Ilona hat weder Füller noch Bleistift, also hat sie den Radiergummi. Da Uwe den Bleistift nicht hat, hat ihn Monika. Also hat Uwe den Füller.

Mithin ergibt sich:

Uwe hat den Füller,
Monika hat den Bleistift,
Peter hat den Zirkel,
Klaus hat das Lineal,
Ilona hat den Radiergummi.

Bemerkungen: 89 % der Schüler wählten diese Aufgabe. Als typische Fehler traten falsche Wahrheitswerttabellen auf, insbesondere bei der Implikation. Oftmals wurden auch unvollständige bzw. unübersichtliche Fallunterscheidungen durchgeführt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl d. Schüler	13	13	3	14	5	13	1	27

Dr. Ingeborg Bartsch, Universität Rostock, Sektion Mathematik

4. *1. Lösungsmöglichkeit:* Wir nehmen an, daß eine rationale Zahl r die Gleichung (1) erfüllt. Dann folgt durch Quadrieren, da beide Seiten von (1) positiv sind,

$$(2+\sqrt{3})^r + 2(\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}})^r + (2-\sqrt{3})^r = 16, \text{ woraus sich}$$

$$(2+\sqrt{3})^r + (2-\sqrt{3})^r = 14 \qquad (2)$$

und die Erkenntnis

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1 \text{ ergibt.} \qquad (3)$$

Durch die Substitution $(2+\sqrt{3})^r = : z$ erhält man aus (2) unter Berücksichtigung von (3) die quadratische Gleichung $z^2 - 14z + 1 = 0$, deren Lösungen $z_1 = 7 + 4\sqrt{3}$ und $z_2 = 7 - 4\sqrt{3}$ sind. Daraus ergibt sich

$$(2+\sqrt{3})^{r_1} = 7 + 4\sqrt{3} \text{ bzw.}$$
$$(2+\sqrt{3})^{r_2} = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Wegen $7 \pm 4\sqrt{3} = 4 \pm 4\sqrt{3} + 3 = (2 \pm \sqrt{3})^2$ erhalten wir als mögliche Lösungen von (1) $r_1 = 2$ und $r_2 = -2$. Die rationalen Zahlen $r_1 = 2$ und $r_2 = -2$ sind tatsächlich Lösungen von (1), denn es gilt

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = $$
$$= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \quad \text{und}$$
$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-2} =$$
$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4.$$

2. *Lösungsmöglichkeit:* Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x$ für alle reellen Zahlen x. Zunächst gilt stets

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-x} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-x} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x} + \frac{1}{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x} \\ &= (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = f(x). \end{aligned}$$

Also ist f eine gerade Funktion und es gilt $\sqrt{2+\sqrt{3}} = (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-1}$. Wir setzen $\sqrt{2+\sqrt{3}} = : a$ und erhalten $f(x) = a^x + a^{-x}$ mit $a > 1$. Für $x > 0$ untersuchen wir das Monotonieverhalten von f. Mit einer beliebigen positiven reellen Zahl α gilt:

$$\begin{aligned} f(x+\alpha) - f(x) &= a^{x-\alpha} + \frac{1}{a^{x+\alpha}} - a^x - \frac{1}{a^x} \\ &= \frac{1}{a^{x+\alpha}}(a^{2x+2\alpha} + 1 - a^{2x+\alpha} - a^\alpha) \\ &= \frac{1}{a^{x+\alpha}}(a^{2x+\alpha}(a^\alpha - 1) - (a^\alpha - 1)) \\ &= \frac{1}{a^{x+\alpha}}(a^{2x+\alpha} - 1)(a^\alpha - 1) \end{aligned}$$

Wegen $\alpha > 0$ und $a > 1$ folgt $a^\alpha > 1$ und $a^{2x+\alpha} > 1$, also $f(x+\alpha) - f(x) > 0$ und damit $f(x+\alpha) > f(x)$. Im Intervall $(0, \infty)$ ist die Funktion f streng monoton wachsend und wegen $f(-x) = f(x)$ im Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend. Folglich können höchstens eine positive reelle Zahl r_1 und eine negative reelle Zahl r_2 existieren, die (1) erfüllen. Die Gleichung (1) läßt sich auch in der Form $(2+\sqrt{3})^{\frac{r}{2}} + (2-\sqrt{3})^{\frac{r}{2}} = 4$ schreiben, aus der man unmittelbar die Lösung $r_1 = 2$ ablesen kann. Daher sind $r_1 = 2$ und $r_2 = -r_1 = -2$ genau die Lösungen von (1).

Bemerkungen: Von den 100 Startern lösten 15 die Aufgabe vollständig (6 Punkte), 3 wiesen nur die Notwendigkeit nach, daß eine Lösung r Element der Menge $\{2, -2\}$ ist, unterließen aber den Hinweis, daß sowohl 2 als auch -2 tatsächlich Lösungen sind (5 Punkte), 32 konnten nur die „gesehene" Lösung $r_1 = 2$ angeben (1 Punkt) und 5 Starter erhielten keinen Punkt. 36 Schüler bemühten sich vergebens, mit Hilfe von Monotoniebetrachtungen die Vollständigkeit der Lösungsmenge $\{2, -2\}$ für Gleichung (1) zu zeigen. Die Beziehung $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}})^{-1}$ haben nur etwa 20 Starter erkannt. Ein Schüler entwickelte eine interessante Lösungsvariante unter Benutzung der Tatsache, daß für von Null verschiedene reelle Zahlen x und y aus $xy \neq 1$ und $x \neq y$ stets $x^{-1} - y^{-1} \neq y - x$ folgt. Wegen der sehr unsauberen schriftlichen Darlegung seiner Gedanken gelangte er jedoch nicht ans Ziel. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung erscheint der Klassenstufe angemessen zu sein.

Dr. Hans-Jürgen Vogel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

5. Die Aussagen von Annemarie und Brigitte sind Allaussagen. Um eine solche zu widerlegen, reicht ein Gegenbeispiel aus.

Nimmt man $f(x) = x$ $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, dann erhält man zwei Funktionen, die alle Voraussetzungen erfüllen:

1. Definitionsbereich von f = Definitionsbereich von g = Menge R der reellen Zahlen.

2. a) f ist auf R streng monoton wachsend, wie sich sofort aus der Monotoniedefinition in der Anmerkung ergibt.

b) g ist nicht auf ganz R streng monoton. Für $x_1 = -1 < 1 = x_2$ ergibt sich

$$g(x_1) = g(x_2) = \sqrt{2}.$$

3. $g^2(x) - f^2(x) = (\sqrt{x^2+1})^2 - x^2 = 1.$

Von Schülern angegebene Modifikationen des obigen Lösungsweges:

1. Andere Funktionen für g

a) $g(x) = -\sqrt{x^2+1}$

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{für rationale } x \\ -\sqrt{x^2+1} & \text{für irrationale } x \end{cases}$

2. Direkter Nachweis, daß $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ nicht streng monoton ist auf ganz R.

Fall 1: $x_1, x_2 \in (0, \infty)$

$x_1 < x_2 \rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2+1} = g(x_1) < \sqrt{x_2^2+1} = g(x_2)$; also ist g auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Fall 2: $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$
$x_1 < x_2 \to |x_1| > |x_2| \to |x_1|^2 = x_1^2 > |x_2|^2 = = x_2^2 \to g(x_1) > g(x_2)$; also ist g auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend.

3. Zusätzliche Forderung an f: Es gebe $x_1, x_2 \in R$ mit $f(x_1) = -f(x_2)$.
Solche Funktionen sind z. B. $f(x) = x$, $f(x) = x^3$. Sei o. B. d. A. $x_1 < x_2$. Dann ist $g^2(x_1) = 1 + f^2(x_1) = 1 + f^2(x_2) = g^2(x_2)$ und damit $|g(x_1)| = |g(x_2)|$; also ist g nicht überall streng monoton.

Bemerkungen: Die meisten Schüler sahen nicht, daß nur ein Gegenbeispiel angegeben zu werden braucht, um die Aussagen von Annemarie und Brigitte zu widerlegen. Wer es aber erkannte, kam auch schnell auf das Beispiel

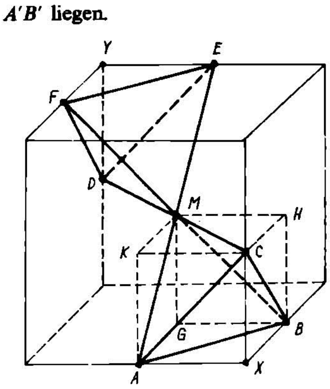
$$f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Bei dem Versuch eines „allgemeinen" Beweises wurden von den Schülern aufwendige Umformungen vorgenommen, die dann in den meisten Fällen nicht zum Ziel führten. Die Anmerkung zur Aufgabe glaubten einige Schüler benutzen zu müssen; sie versperrten sich damit die Idee des Gegenbeispieles.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl d. Schüler	30	15	4	10	8	16	17

Der Punktedurchschnitt von 2,67 ist für diese doch leichte Aufgabe als zu gering zu bezeichnen. *Dipl.-Math. Peter Kobelt, Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg*

6. *Lösung* (entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission):
a) I. Angenommen, es gibt eine Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und D, E, F mit den geforderten Eigenschaften. Wir bezeichnen mit A', B', C' die Punkte, die dabei A, B, C zugeordnet sind. Da AB Kante sein soll, muß AB mindestens zwei ebenen Seitenflächen angehören. Nach Voraussetzung gehen von A nur die Kanten AB, AC, AA' und von B nur die Kanten BA, BC, BB' aus. Folglich müssen AA' und BB' in einer gemeinsamen Ebene liegen, in der auch AB und $A'B'$ liegen.



Die Punkte A, B, E, F liegen in einer gemeinsamen Ebene ε, da der Mittelpunkt M des Würfels aus Symmetriegründen Mittelpunkt von AE und BF ist (siehe Bild). Da M auch Mittelpunkt von CD ist und M nicht in der Ebene durch A, B, C enthalten ist, gilt $D \notin \varepsilon$, und damit kann weder DE noch DF mit AB in einer gemeinsamen Ebene liegen. Folglich muß $A'B' = EF$ und damit $C' = D$ sein. Nun muß aus Symmetriegründen noch $A' = E$ und $B' = F$ sein.

II. Auf Grund der Mittelpunktslage von M ist andererseits einsichtig, daß diese Zuordnung tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt. Die gesuchte Figur besteht aus den beiden Tetraedern $ABCM$ und $DEFM$.

b) Die Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD haben sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Da AE, BF und CD die Länge $a\sqrt{2}$ besitzen, haben auch AM, BM, CM, EM, FM, DM sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Also sind beide Tetraeder regelmäßig und kongruent zueinander und haben nach einer bekannten Formel das Volumen $\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 \sqrt{2} = \frac{a^3}{24}$. Die gesamte Figur hat dann das Volumen $\frac{a^3}{12}$.

Bemerkungen: Die meisten Schüler gingen von den sechs möglichen eindeutigen Zuordnungen von $\{A, B, C\}$ auf $\{D, E, F\}$ aus. Die Begründungen dafür, daß fünf dieser Zuordnungen nicht die geforderten Eigenschaften besitzen, waren häufig unzureichend und zu sehr auf die Anschauung gestützt. (Bei der Korrektur wurde eine solche Behauptung, daß der Mittelpunkt M des Würfels auch Mittelpunkt von AE, BF und CD ist, der anschaulichen Richtigkeit wegen ohne weitere Begründung akzeptiert.)

Eine elegante elementare Berechnung des Volumens der Figur hat ein Schüler angegeben, wenn man die Volumenformel für das regelmäßige Tetraeder nicht parat hat. Sind G, H, K die Mitten derjenigen Seitenflächen des Würfels, die die Punkte A, B bzw. B, C bzw. C, A enthalten, so ist $AXBGKCHM$ ein Würfel mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$. Aus diesem Würfel entsteht das Tetraeder $ABCM$ dadurch, daß vier zu $AXBC$ kongruente Tetraeder abgeschnitten werden. Das Tetraeder $AXBC$ hat nun offensichtlich ein Sechstel des Volumens des Würfels (mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$). Also hat das Tetraeder $ABCM$ das Volumen $\frac{2}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{24}$. (Bei dieser Lösung ist nicht einmal die Kenntnis notwendig, daß das Tetraeder $ABCM$ regelmäßig ist.)

Die Aufgabe war angemessen. Die Schüler fanden (bis auf wenige Ausnahmen) einen Zugang und konnten wenigstens Teillösungen erzielen. Im Teil b) traten Fehler bei der Volumenberechnung auf, insbesondere bei der Berechnung der Höhe des Tetraeders. Bei richtiger Lösung wurden für den Teil a) 5 und für den Teil b) 3 Punkte vergeben.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anz. d. Schüler	7	4	7	5	19	11	19	21	13

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

Lösungen zu: Übung macht den Meister (Heft 4/75)

Textgleichungen

1968 a ist die Anzahl der Werkstücke und t die Zeit in Minuten, dann folgt für die
1. Maschine $t_1 = 20 + 14a$
2. Maschine $t_2 = 200 + 2a$.

a) Bei 100 Werkstücken gilt

$$t_1 = 20 + 14 \cdot 100 = 1420$$
$$t_2 = 200 + 2 \cdot 100 = 400$$

Die Einsparung berechnet man aus $t_1 - t_2 = 1020$. Durch die modernere Maschine werden 1020 Minuten eingespart.

b) Bei gleicher Zeit gilt $t_1 = t_2$.

$$20 + 14a = 200 + 2a$$
$$12a = 180$$
$$a = 15$$

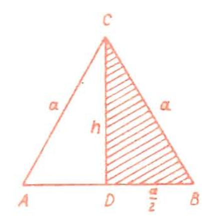
Bei 15 Werkstücken brauchen beide Maschinen die gleiche Zeit.

(Kl. 9, Gleichungssysteme)

1969 Aus dem rechtwinkligen $\triangle DBC$ ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

(Kl. 8, Lehrsatz des Pythagoras)



1970 a) die 1. Klasse erhält x Mark, die 2. Klasse $(360 - x)$ Mark.

$$26 : 22 = x : (360 - x)$$
$$22x = 26 \cdot (360 - x)$$
$$22x = 360 \cdot 26 - 26x$$
$$48x = 360 \cdot 26$$
$$x = 195$$

Die 1. Klasse erhält 195 M und die 2. Klasse 165 M.

b) $$360 : 195 = 100 : x$$
$$x = \frac{19500}{360}$$
$$x = 54{,}2$$

Die Klasse mit 26 Schülern erhält 54,2% der Gesamtsumme.

(Kl. 8, Gleichungen, Kl. 7 Prozentrechnung

1971 Es sind vom 1. Typ x Waggons, vom 2. Typ $(33 - x)$ Waggons.

$$20x + (33 - x)24 = 720$$
$$20x + 792 - 24x = 720$$
$$4x = 72$$
$$x = 18$$

Vom 1. Typ wurden 18 Waggons und vom 2. Typ 15 Waggons eingesetzt.

(Kl. 8, Gleichungen)

1972 $\begin{aligned} x+y &= 4 \quad x=4-y \\ 3x-2y &= 52 \quad x=12 \\ 3(4-y)-2y &= 52 \\ 12-3y-2y &= 52 \\ y &= -8 \end{aligned}$

Die zwei Zahlen heißen 12 und -8.

(Kl. 9, Gleichungssysteme)

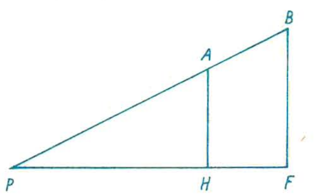
1973 $\begin{aligned} x-y &= 6 \quad x=6+y \quad x:y \in N \\ x \cdot y &= 216 \\ (6+y)y &= 216 \\ y^2+6y-216 &= 0 \\ y_{1;2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ y_{1;2} &= -3 \pm \sqrt{9+216} \\ y_{1;2} &= -3 \pm 15 \\ y_1 &= 12 \\ y_2 &= -18 \text{ (entfällt als Lösung,} \\ &\text{da } y \in N) \\ x &= 6+y \\ x &= 6+12 \\ x &= 18 \end{aligned}$ Die beiden natürlichen Zahlen heißen 12 und 18.

(Kl. 9, Quadratische Gleichungen)

1974 $\overline{PH} = 200$ m
$\overline{PF} = 600$ m
$\overline{FB} = 360$ m
$x : 200 = 360 : 600$
$x = 120$

Die Höhe des Hotels beträgt 120 m

(Kl. 8, Ähnlichkeit, Strahlensatz)



1975 a) $80\,700 : x = 100 : 60$
$x = 48\,420$

An Arbeiterfamilien wurden 48 420 Wohnungen vergeben.

b) $69\,500 : 80\,700 = 100 : x$
$x = 116{,}2$

Die Anzahl der 1973 gebauten Wohnungen lag um 16,2 °/₀ höher als 1972.

(Kl. 7, Prozentrechnung)

Lösungen zu alpha-heiter 5/75

Rätsel

1. Algebra, 2. Inkreis, 3. Numerus, 4. Parabel, 5. Billion, 6. Sekunde, 7. Rhombus, 8. Ägypten
Lösungswort: Annaberg

Kennst du sie?

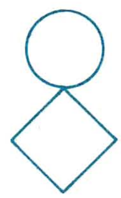
Bernoulli, Einstein, Runge, Neper, Hilbert, Abel, Röntgen, Dedekind, Ries, Loffe, Euler, Mendelejew, Ampere, Neumann, Noether; Bernhard Riemann.

Verrückte Sätze

Acht Achter schwammen am Siebengebirge vorbei. Sieben Kinder sieben den Sand. Vier Revierförster spielten einst auf Revier sechsundsechzig. Vier Wachteln lachten dreist.

Aufgaben der Qualifizierungsrunde der schwedischen Mathematik-Olympiade 1974

1. Aus einem Silberdraht soll ein Ohrgehänge angefertigt werden, das aus einem Kreis mit angelötetem Quadrat besteht (vgl. die Abb.). Wie verhält sich der Durchmesser des Kreises zu der Seitenlänge des Quadrats, wenn die Summe der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrats möglichst klein sein soll?



2. Fünf Gegenstände, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet seien, sollen so in drei Fächer A, B, C gelegt werden, daß sich in jedem Fach mindestens ein Gegenstand befindet. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür?

3. Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt[3]{60-x} + \sqrt[3]{x-11} = \sqrt[3]{4}$$

zu ermitteln.

Man beachte, daß in dieser Aufgabe die dritte Wurzel aus einer reellen Zahl auch dann definiert ist, wenn der Radikand negativ ist. Es gilt also für alle reellen Zahlen a und b

$\sqrt[3]{a} = b$ genau dann, wenn $a = b^3$.

4. Man beweise, daß für alle ganze Zahlen n die Zahlen

$2n^2+n+1$ und $8n^2+2n+1$

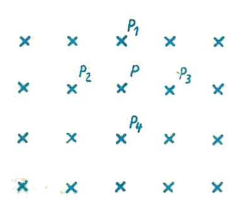
keinen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.

5. Es seien p und q zwei voneinander verschiedene positive ganze Zahlen.

a) Man beweise, daß es dann eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, deren eine Lösung gleich $\frac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ ist.

b) Man untersuche ferner, welche zweite Lösung eine solche quadratische Gleichung haben kann.

6. Es sei M eine Menge von $m \cdot n$ Punkten ($m \geq 3$, $n \geq 3$), die in der Form eines Rechtecks angeordnet sind. Man unterscheidet in dieser Menge innere Punkte und Randpunkte. Dabei sei ein Punkt P innerer Punkt genannt, wenn er wie in der Abbildung von vier benachbarten Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 umgeben ist.



Nun seien Funktionen f definiert, bei denen jedem Punkt P der Menge M eine reelle Zahl $f(P)$ zugeordnet ist und für alle inneren Punkte P

$$f(P) = \frac{1}{4}\left(f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)+f(P_4)\right)$$

gilt.

f_1 und f_2 seien zwei solche Funktionen, wobei $f_1(R) = f_2(R)$ für alle Randpunkte R der Menge M gilt.

Man beweise, daß dann auch $f_1(P) = f_2(P)$ für alle inneren Punkte der Menge M gilt.

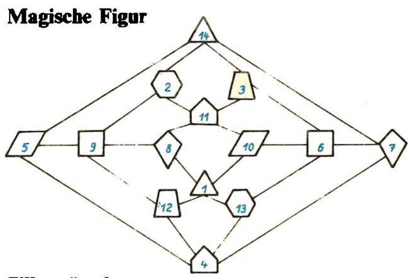
Knobel mit

$K=1$, $N=2$, $O=3$, $B=4$, $E=5$, $L=6$, $M=7$, $I=8$, $T=9$

Kryptarithmetik

Einige Lösungen:
43 295 + 37 093 = 80 388;
14 082 + 49 384 = 63 466;
32 084 + 29 182 = 61 266;
16 592 + 64 096 = 80 688

Magische Figur



Silbenrätsel

1. **In**kreis, 2. **Me**ter, 3. **na**türlich, 4. **Quo**tient, 5. **O**mega, 6. **Mo**nate, 7. **Pa**rallele, 8. **Gam**ma, 9. **Ka**thete, 10. **Kom**ma, 11. **Arith**metik, 12. **ir**rational, 13. **Olym**piade, 14. **Pi**, 15. **A**bakus, 16. **Ge**rade
Internationale Mathematikolympiade

Übung macht den Meister

Arbeit mit Variablen

Aus Abschlußprüfungen der 10. Klasse der Oberschule

1975 Vereinfache den Term
$(m^2n^5)^3$
so weit wie möglich!

1974 Vereinfache folgenden Term so weit wie möglich!
$\sqrt[3]{a^6b^9}$ $(a \geqq 0;\ b \geqq 0;\ b \in P)$

1973 Gib den Wert für die Variable a an, für den der Term
$\frac{5}{6-3a}$
nicht definiert ist!

1972 Forme die Gleichung für das Volumen des Kegels
$V=\frac{1}{3}\pi r^2$
nach der Variablen r um!

1971 Forme die folgende Gleichung nach a um!
$A=\frac{a+c}{2}\cdot h$

1970 Vereinfache die folgende Summe so weit wie möglich!
$3m(m+0{,}6n-4n^2)+(m-5n)^2$

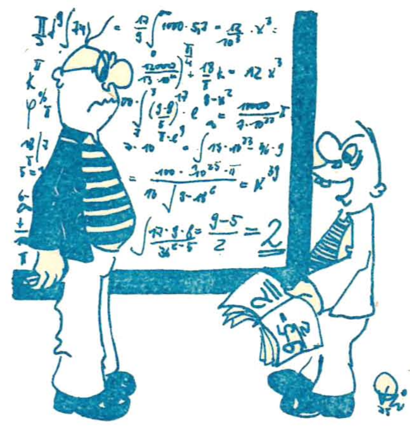
1969 Löse die folgende Gleichung nach a auf!
$\frac{1}{a}-\frac{1}{5a}=b$
$(a \neq 0,\ b \neq 0;\ a,b$ reell$)$

1968 Löse die folgende Gleichung nach t auf!
$s=p+p\cdot k\cdot t$
$(p \neq 0,\ k \neq 0)$

1967 Berechne
$(6a+5b)\left(\frac{1}{2}a-2b\right)$!

1966 Löse nach c auf und vereinfache so weit wie möglich!
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$
$(a \neq b;\ b \neq 0;\ c \neq 0,\ a \neq -b)$

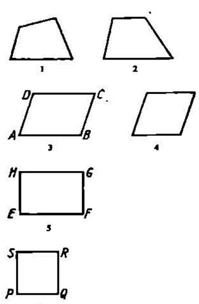
1965 Eine Seite eines Rechtecks sei 6 cm lang. Verlängert man diese Seite um 4 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so entsteht ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt.
Wie lang ist die andere Seite des ursprünglichen Rechtecks?



So wie Sie es gemacht haben geht es natürlich auch.

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 5

Vierecke
Четырёхугольники
Quadrangles (*or*: Quadrilaterals)
Quadrangles (Quadrilatères)



1 allgemeines Viereck
произвольный четырёхугольник
any quadrilateral
quadrangle quelconque

2 Trapez
трапеция (четырёхугольник, две стороны которого параллельны)
trapezium, trapezoid (quadrilateral with one pair of parallel sides)
trapèze (quadrangle avec une paire de côtés parallèles)

3 Parallelogramm (Viereck mit parallelen Gegenseiten)
параллелограмм (четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны)
parallelogram (quadrilateral whose opposite sides are parallel)
parallélogramme (quadrangle avec côtés parallèles opposés)

4 Rhombus
ромб (равносторонний четырёхугольник)
rhombus (equilateral quadrangle)
losange (quadrangle équilatéral)

5 Rechteck
прямоугольник (четырёхугольник с прямыми углами)
rectangle (quadrilateral with right angles)
rectangle (quadrangle qui a seulement des angles droits)

6 Quadrat
квадрат (равносторонний прямоугольник)
square (equilateral rectangle)
carré (rectangle équilatéral)

Regelmäßige Vielecke
правильные многоугольники
Regular Polygons · Polygones réguliers

Fünfeck · Sechseck · Achteck · Zwölfeck
пятиугольник, · шестиугольник · восьмиугольник · двенадцатиугольник
pentagon · hexagon · octagon · dodecagon
pentagone · hexagone · octogone · dodécagone

Der Kreis — The circle
круг — Le cercle

Kreis und Kreisteile

M Mittelpunkt
центр
centre
centre

$A=\pi r^2$ Kreisfläche
площадь круга
area of the circle
surface du cercle

r Radius
радиус
radius
rayon

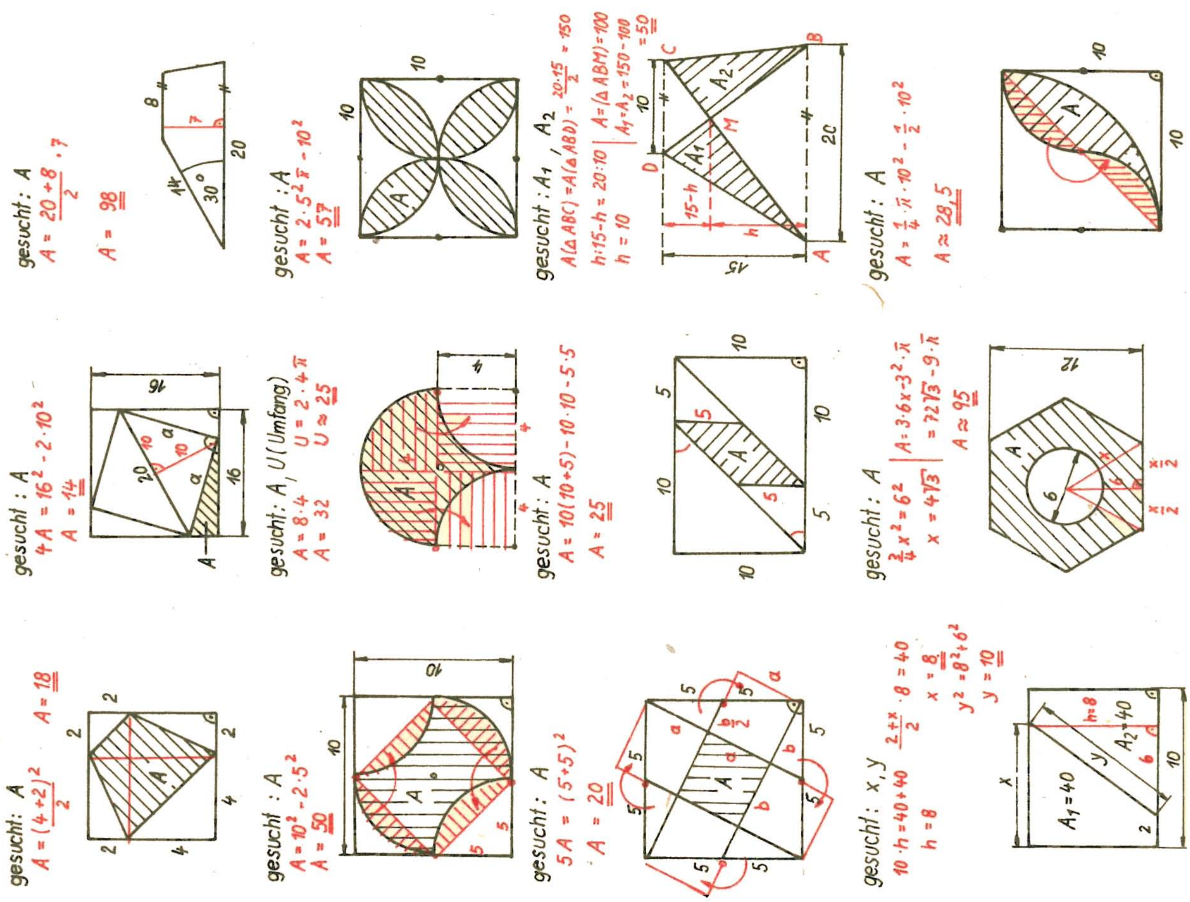
t Tangente
касательная
tangent
tangente

d Durchmesser
диаметр
diameter
diamètre

P_t Berührungspunkt
точка касания
point of tangency
point de contact

$U=2\pi r$ Kreisumfang
длина окружности
circumference of the circle
périmètre du cercle (circonférence du cercle)

Lösung zu: Gut gedacht ist halb gelöst (4/75)



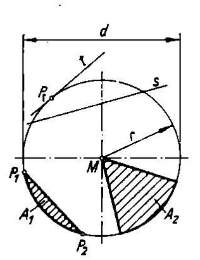
s Sekante
секущая
secant
sécante

A_1 Kreisabschnitt
круговой сегмент
circular segment
segment de cercle

$\overline{P_1P_2}$ Sehne
хорда
chord
corde

A_2 Kreisausschnitt
круговой сектор
circular sector
secteur de cercle

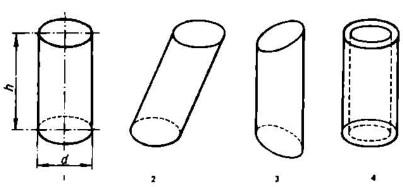
$\overset{\frown}{P_1P_2}$ Kreisbogen
дуга
circular arc
arc de cercle



Kreiszylinder
круговые цилиндры
Circular cylinders
Cylindre circulaire

1 gerader Zylinder
прямой цилиндр
right cylinder
cylindre droit (cylindre de révolution)

h Höhe
высота
height
hauteur



d Durchmesser der Grundfläche
диаметр основания
diameter of the base
diamètre de base

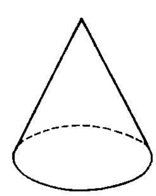
$A_M = dh$ Mantelfläche des geraden Zylinders
боковая поверхность прямого кругово цилиндра
curved surface of the right circular cylinder
surface latérale du cylindre droit circulair

2 schiefer Zylinder
наклонный цилиндр
oblique cylinder
cylindre oblique

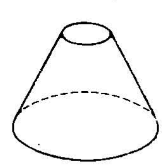
3 schief abgeschnittener Zylinder
наклонный отрезанный цилиндр
obliquely cut cylinder
cylindre tronqué

4 Hohlzylinder
полый цилиндр
hollow cylinder
cylindre creux

Gerader Kreiskegel
прямой круговой конус
Right circular cone
Cône droit circulaire



Kegelstumpf
усечённый конус
Frustum of a cone
Cône tronqué



Mit Heft 6/75 schließen wir unser kleines Lexikon ab. Wir würden uns freuen, von unseren Lesern Aufgaben in russischer, englischer oder französischer Sprache (Lösungsvorschläge in deutsch) zu erhalten.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem VEB Fachbuchverlag

S. Koch

Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben

136 S., 61 Abb. *Preis 7,80 M*

In diesem Buch sind aus dem Bereich des Mathematikunterrichts der Fach- und Oberschulen etwa 140 vollständig durchgerechnete Aufgaben enthalten, deren Lösung jeweils in Schritte unterteilt ist:

Teil A: Aufgabenstellung

Teil B: Erste Lösungsschritte, meist mit dem Lösungsplan, dem Ansatz und den notwendigen Überlegungen

Teil C: Durchführung der weiteren rechnerischen Operationen

Teil D: Fixierung des Ergebnisses, Kontrolle und Formulierung der Antwort. Hier werden auch Schlußfolgerungen gezogen, Verallgemeinerungen erwähnt und Hinweis auf Ergänzungen gegeben.

Aus dem Inhalt: Formelumstellungen · Aus der Mengenlehre · Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei unbekannten Variablen · Quadratische Gleichungen · Ungleichungen, Wurzelgleichungen, goniometrische Gleichungen · Folgen, Grenzwert, Stetigkeit · Funktionsuntersuchungen · Extremaufgaben · Flächenberechnung durch Integration · Volumenberechnung von Rotationskörpern

A. J. Kitaigorolski

Unwahrscheinliches – möglich oder unmöglich?

252 S., 38 Bilder *Preis 5,50 M*

In diesem Buch geht es um die Wahrscheinlichkeitstheorie. Anliegen des Autors ist es, den Lesern die Dialektik von Gesetzmäßigkeit und Zufall verständlich zu machen und Verhaltensweisen für gewisse Situationen in Beruf und Alltag zu erläutern.

Jiri Sedláček

Keine Angst vor Mathematik

167 S., 71 Bilder *Preis: 4,80 M*

Das Buch will zeigen, daß manche Aufgaben der Unterhaltungsmathematik kein bloßer Zeitvertreib sind, sondern daß sie zu ernsten, für die angewandte Mathematik wichtigen Problemen führen. Diese Schrift, deren Stoff höchstens das Wissen der Oberschule verlangt, wendet sich insbesondere an Schüler, die sich für Mathematik interessieren.

Kießling/Körner

Anleitung zum Lösen physikalischer Aufgaben

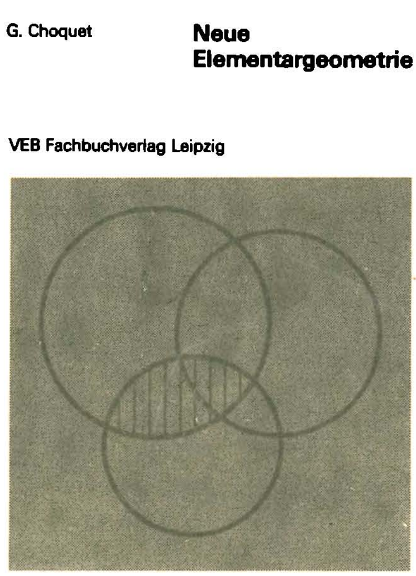
127 S., 56 Abb., 1 Beilage *Preis 5,00 M*

Die Verfasser dieses Buches haben sich die Aufgabe gestellt, die Selbststudienarbeit beim Lösen physikalischer Aufgaben bestmöglich anzuleiten. Dieses Buch ist kein Lehrbuch, sondern eine Übungsanleitung. Der Leser muß sich die physikalischen Grundlagen durch Anhören der Experimentalvorlesungen und Studium von Lehrbüchern erarbeitet haben. In dem Buch finden wir rund 100 vielseitig ausgewählte Beispiele (Teilprogrammierte Lösung von Aufgaben und Diskussion).

Dietrich/Stahl

Grundzüge der Matrizenrechnung

313 S., 10 Bilder, 57 Kontrollfragen und Antworten, 66 Übungen und Lösungen
Preis 8,50 M



144 S., 15 Bilder *Preis 16,80 M*

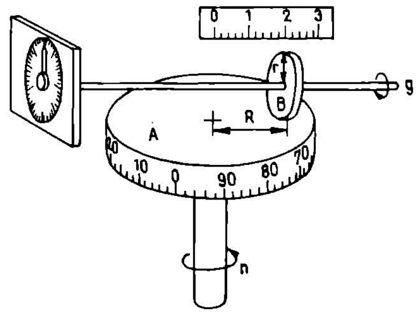
Mit diesem Buch legt der Verlag ein Werk eines wegen seiner mathematischen Leistungen hoch angesehenen französischen Wissenschaftlers vor, das auch einen method.-didaktischen Zweck verfolgt. Es enthält eine axiomatische Begründung der euklidischen Elementargeometrie, die, von anschaulichen Axiomen ausgehend, dennoch rasch die zugrunde liegenden algebraischen Strukturen hervortreten läßt. Nicht die Kongruenzbeziehungen von Dreiecken stehen im Vordergrund, sondern die durch das Parallelogramm gegebene Vektoraddition. Geschrieben ist das Ganze in einem modernen Stil, der das Vertrautsein mit solchen Begriffen wie Äquivalenz, Abbildungen, totale Ordnung – Begriffe, ohne die heute wohl kaum noch eine mathematische Theorie formuliert wird.

M. Kovács

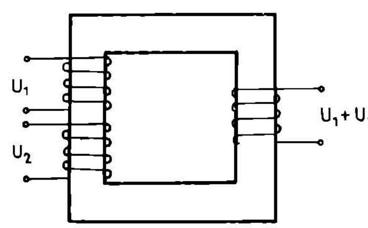
Rechenautomaten und logische Spiele

212 S., 114 Bilder *Preis 8,00 M*

Dieses Buch führt auf populärwissenschaftliche Weise einige Gedanken über die Beziehungen zwischen Mathematik, Logik, Physik und Kybernetik ein, und gleichzeitig regt es dazu an, einfache Geräte selbst zu bauen.



Mechanische Multiplizier-Dividier-Maschine



Addition mit Hilfe eines Transformators

Die Lösung mathematischer und logischer Aufgaben, die sonst mit Bleistift und Papier gerechnet werden, findet ihre Darstellung in physikalischen Zusammenhängen und kann so mit wenigen Mitteln, aber mit etwas Denkarbeit automatisiert werden. Neben Lesen, Lernen und Überlegen steht gleichzeitig das Basteln, zu dem das Buch anregt und so eine sinnvolle Verbindung zwischen Theorie und Praxis herstellt.

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mit diesem Beitrag eröffnen wir die *alpha*-Serie „Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt“. Wir – das ist ein Kollektiv von FDJlern der *Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität* Leipzig. In unserer Serie wollen wir über „den mathematischen Alltag“ an den Schulen berichten, über Zirkelnachmittage von Arbeitsgemeinschaften, Mathematikklubs, über die Arbeit mit der *alpha*, über Spezialistenlager und andere Aktivitäten *Junger Mathematiker*.
Natürlich wird dabei die Diskussion von interessanten Aufgaben, die euch, liebe *alpha*-Leser, beschäftigen, im Mittelpunkt stehen. Deshalb sind wir an euren Ideen interessiert. Helft mit bei der Gestaltung der neuen Serie! Richtet eure Beiträge an

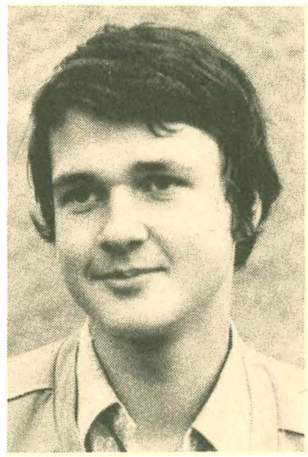
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14
„Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt“.

Vergeßt nicht, Absender sowie Schule und Schuljahr anzugeben!

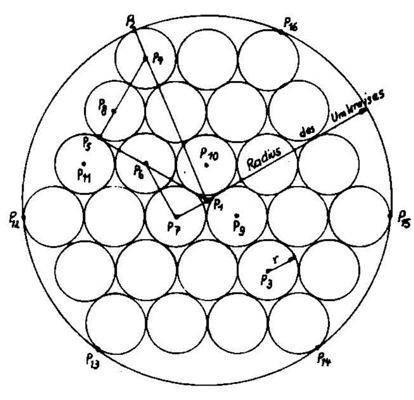
● Einen interessanten **Beitrag** zu einem Pionierfest leisteten die 11 Mitglieder der AG Mathematik der Klasse 6c der 1. Oberschule „Hans Beimler“ aus Herzberg und ihre Zirkelleiterin, Frau *Gutsche*. Sie hatten Stände aufgebaut, an denen sie ihren Mitschülern Mathematikaufgaben, Scherzfragen und lustige Zeichenaufgaben vorlegten. So wurden z. B. Rechenaufgaben mit Streichhölzern oder Fragen wie „Welche Zahl hat ebenso viele Ziffern wie Buchstaben?“ gestellt.

● Die folgende Aufgabe sandte uns Herr *Reinhard Schulz*, Fachlehrer für Mathematik an der OS Rotta und Leiter des *Kreisklubs Junger Mathematiker* Gräfenhainichen.
Aufgabe: 27 kongruente Kreise mit dem Radius r sind entsprechend der Zeichnung so angeordnet, daß jeder innere Kreis von genau 6 Kreisen berührt wird. Wie groß ist der Radius des zugehörigen Umkreises?
Die Aufgabe entstand übrigens bei der Kreisolympiade, als je 27 Bleistifte für die Teilnehmer auf diese Weise gebündelt waren. Auch Rohre, die auf der Ladefläche eines LKW so zusammengebunden waren, fand Herr *Schulz*.

Die Lösung stammt von seinem Klubmitglied *Thomas Kaatz*. Thomas (s. Foto) ist Schüler der 10. Klasse der EOS Gräfenhainichen und mehrfacher Sieger bei der Bezirksolympiade.



Lösung: (1) Der Schnittpunkt P_1 der Transversalen des gleichseitigen Dreiecks $P_7P_9P_{10}$ ist der Mittelpunkt des Umkreises, denn $\triangle P_1P_7P_{12} \cong \triangle P_1P_7P_{13} \cong \triangle P_1P_9P_{14} \cong \triangle P_1P_9P_{15} \cong \triangle P_1P_{10}P_{16} \cong \triangle P_1P_{10}P_2$ nach sws.



Also gilt $R = \overline{P_1P_2}$.
(2) $\overline{P_1P_7} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r = \frac{2}{3}$ Höhe im Dreieck $P_7P_9P_{10}$.
(3) $\sphericalangle P_6P_7P_1 = \sphericalangle P_6P_7P_{10} + \sphericalangle P_{10}P_7P_1 = 60° + 30° = 90°$, daraus folgt
$$\overline{P_1P_6} = \sqrt{\frac{4}{3}r^2 + 4r^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}r.$$
(4) $P_6P_5 = \sqrt{3}r =$ Höhe im gleichseitigen Dreieck $P_6P_8P_{11}$.
(5) Dreieck $P_5P_1P_4$ ist rechtwinklig mit den Katheten $\overline{P_1P_5} = \overline{P_1P_6} + \overline{P_6P_5} = \frac{7}{3}\sqrt{3}r$ und $\overline{P_4P_5} = 3r$. Daraus folgt
$$\overline{P_1P_4} = \sqrt{\frac{49}{3}r^2 + 9r^2} = \frac{2}{3}\sqrt{57}r.$$
(6) Der Kreis mit dem Radius r um P_4 berührt den Umkreis in P_2, folglich liegen P_1, P_4 und P_2 auf einer Geraden. Also ist
$$R = \overline{P_1P_4} + \overline{P_4P_2} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{57} + 1\right)r \approx 6{,}03r$$

● Zum Abschluß eine Aufgabe von Diplommathematiker *Gerold Schmidt*, dem Autor dieses Artikels:
Aufgabe: In der Aufstiegsrunde zur Fußball-Oberliga spielen die 5 Staffelsieger der Liga, wobei jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal auf eigenem und genau einmal auf gegnerischem Platz anzutreten hat. Für ein gewonnenes Spiel gibt es 2 Punkte, für ein unentschiedenes 1 und für ein verlorenes keinen.
Am Ende steigen die beiden Mannschaften mit den meisten Punkten in die Oberliga auf (bei Punktgleichheit entscheidet die Tordifferenz, d. h. die Differenz aus erzielten Toren und Gegentoren, über die Plazierung).
a) Man beweise, daß eine Mannschaft, die jedes Heimspiel gewinnt und jedes Auswärtsspiel unentschieden gestaltet, auf jeden Fall aufsteigt!
b) Man untersuche, ob diese Behauptung auch richtig ist, wenn 6 Mannschaften auf oben genannte Weise 2 Aufsteiger ermitteln!
Die Lösung findet ihr im nächsten Heft unter „Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt“. Viel Spaß beim Knobeln! *G. Schmidt*

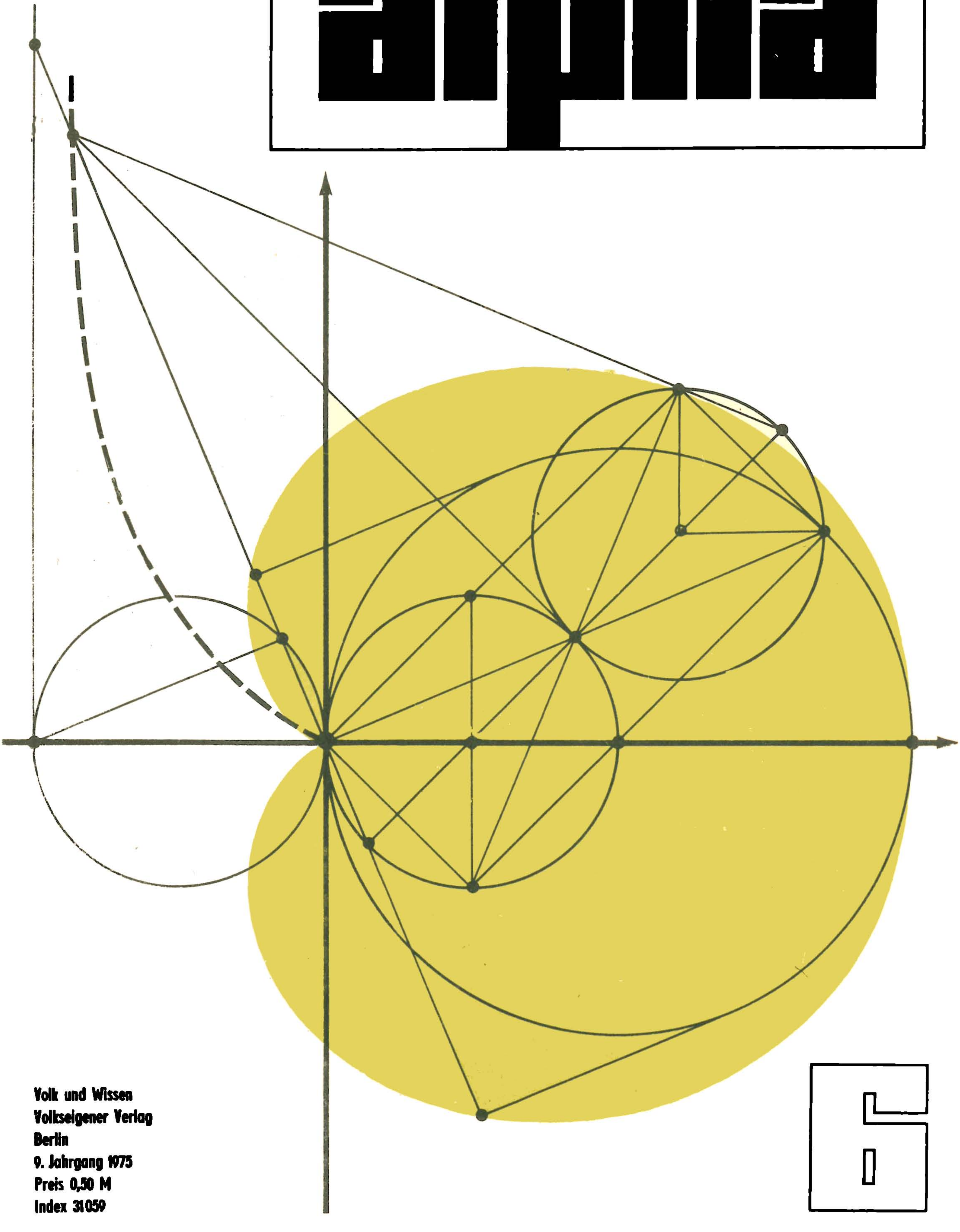
Leser fragen – alpha antwortet

Unser Leser *Wolfgang Noetzold* aus Zschokken versteht die folgende Aussage, auf die er beim Studium der *Kleinen Enzyklopädie* Mathematik stieß, nicht:
„... jeder abbrechende Dezimalbruch läßt sich als unendlicher Dezimalbruch mit unendlich vielen Nennern darstellen, z. B. $7{,}58 = 7{,}57999\ldots$“ –

Unsere Antwort: Wir bezeichnen die Zahl, die durch den unendlichen Dezimalbruch $7{,}579\overline{9}\ldots$ dargestellt wird, mit x. Dann gilt $10x = 75{,}799\overline{9}\ldots$ Subtrahieren wir $x = 7{,}579\overline{9}\ldots$, so erhalten wir $9x = 68{,}22$ und nach Division durch 9 $x = 7{,}58$.
Da zwei Zahlen, die mit einer dritten übereinstimmen, untereinander gleich sind, gilt also $7{,}58 = 75799\overline{9}\ldots$
Dieses Verfahren ist auf jeden abbrechenden Dezimalbruch anwendbar, was den obigen Satz beweist.
Wir bemerken noch, daß man mit einer Verallgemeinerung des obigen Vorgehens, jeden periodischen Dezimalbruch in die Form $\frac{p}{q}$ (p und q ganze Zahlen) umwandeln kann.
Damit beweist man, daß jeder periodische Dezimalbruch Darstellung einer rationalen Zahl ist.
Übung: Verwandle die periodischen Dezimalbrüche
a) $1{,}44\overline{4}\ldots$ b) $107{,}\overline{107}\ldots$
in die Form $\frac{p}{q}$ (p und q ganz und unkürzbar)!

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Christa Günther/Uwe Seemann, Güstrow (S. 123/124); *Vignetten:* F. Fricke, Magdeburg (S. 126); W. Moese, L. Worabjow, G. Reisig, L. Rauwolf (S. 127/128); J. Lehmann, Leipzig (S. 135 u. 138)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 22. September 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen

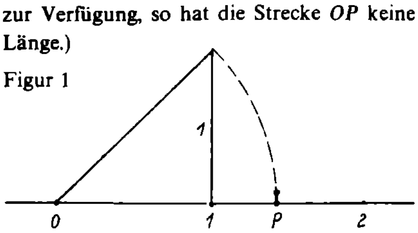
1. *Wir formulieren die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen*

Bei der Behandlung von Quadratwurzeln und bei Kreisberechnungen habt ihr in der 7. Klasse erstmalig mit reellen Zahlen gearbeitet. In der 9. Klasse sind eure Kenntnisse über reelle Zahlen vertieft worden. Unter anderem habt ihr folgende Definition kennengelernt (vgl. Lehrbuch 9. Klasse, Seite 21):
Eine reelle Zahl ist ein unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode.

Worin liegt nun eigentlich die wesentlich neue Qualität des Bereiches der reellen Zahlen im Vergleich zum Bereich der rationalen Zahlen? Zu jeder rationalen Zahl gibt es genau einen Punkt auf der Zahlengeraden. Die Menge der rationalen Zahlen ist durch die Ordnungsrelation $<$ dicht geordnet. Das heißt bekanntlich, daß zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen noch mindestens eine weitere rationale Zahl liegt. Hieraus folgt dann, daß zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen noch unendlich viele andere rationale Zahlen liegen. Folglich liegen auch auf der Zahlengeraden zwischen je zwei verschiedenen Bildpunkten rationaler Zahlen noch unendlich viele andere Bildpunkte von rationalen Zahlen.
Und doch gibt es auf der Zahlengeraden noch Punkte, die nicht Bildpunkte von rationalen Zahlen sind.

Der in der Figur 1 markierte Punkt P ist z. B. nicht Bildpunkt einer rationalen Zahl, und zwar deswegen nicht, weil es keine rationale Zahl x gibt, die der Gleichung $x^2=2$ genügt.[1]
(Haben wir also nur die rationalen Zahlen zur Verfügung, so hat die Strecke OP keine Länge.)

Figur 1



Die Menge der reellen Zahlen läßt sich jedoch so auf die Zahlengerade abbilden, daß es nicht nur zu jeder reellen Zahl genau einen Punkt auf der Zahlengeraden gibt, sondern darüber hinaus auch *jeder Punkt der Zahlengeraden Bildpunkt genau einer reellen Zahl ist* (vgl. Lehrbuch Klasse 9, Seite 21).

Durch diese markante Eigenschaft unterscheidet sich die Menge der reellen Zahlen grundlegend von der Menge der rationalen Zahlen.

Wir wollen uns zunächst das Ziel setzen, diesen grundlegenden Unterschied noch auf eine andere Art zu beschreiben, ohne uns dabei auf die Zahlengerade beziehen zu müssen. Dazu betrachten wir einige Beispiele (Beispiel 1 bis 3).[2]

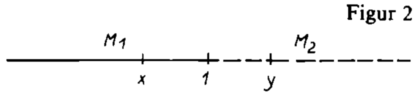
Beispiel 1:

$M_1=\{x|x<1 \text{ und } x \text{ rational}\}$ [3]
und $M_2=\{y|y>1 \text{ und } y \text{ rational}\}$
sind zwei Mengen mit folgenden Eigenschaften:

a) Beide Mengen sind nicht leer, d. h., sie enthalten jede wenigstens ein Element.

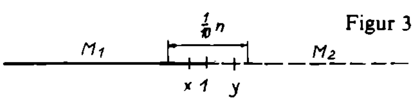
b) Für jedes Element x aus M_1 und jedes Element y aus M_2 gilt $x \leqq y$ (hier sogar $x<y$). (Figur 2)

Figur 2



c) Die Mengen M_1 und M_2 „kommen sich beliebig nahe“. Das soll folgendes bedeuten: Zu jeder natürlichen Zahl n (und sei sie noch so groß gewählt) gibt es stets ein Element x aus M_1 und ein Element y aus M_2 derart, daß $y-x<\frac{1}{10^n}$ ist. (Figur 3)

Figur 3



Wir geben zunächst einige Erläuterungen zu den genannten Eigenschaften.

Zu (a): M_1 enthält z. B. die Zahl $\frac{3}{4}$, denn $\frac{3}{4}$ ist eine rationale Zahl, und es gilt $\frac{3}{4}<1$. Ebenso sind die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{7}{11}, 0, -\frac{3}{7}, -19$ u. a. Elemente von M_1. Demgegenüber enthält M_2 z. B. die Zahlen $2, \frac{5}{4}$ und $2{,}35$; denn alle diese Zahlen sind rational und größer als 1.

Zu (b): Da jede Zahl aus M_1 kleiner als 1 und jede Zahl aus M_2 größer als 1 ist, gilt $x \leqq y$ für jedes $x \in M_1$ und jedes $y \in M_2$.

Zu (c): Schließlich sei beispielsweise die natürliche Zahl $n=3$ vorgegeben. Gibt es Zahlen x aus M_1 und y aus M_2, so daß $y-x<\frac{1}{10^3}$ ist?

Ja! Wir wählen z. B. $x=1-\frac{1}{10000}$ und $y=1+\frac{1}{10000}$.

Beide Zahlen sind rational. Ferner gilt $x<1$ und $y>1$. Also ist $x \in M_1$ und $y \in M_2$. Außerdem ist

$$y-x=1+\frac{1}{10000}-(1-\frac{1}{10000})=$$
$$=\frac{2}{10000}<\frac{10}{10000}=\frac{1}{1000}, \text{ also } y-x<\frac{1}{1000}.$$

Aufgabe 1:
Es sei $n=5$ vorgegeben. Bestimme Zahlen $x \in M_1$ und $y \in M_2$ mit $y-x<\frac{1}{10^5}$!

(*) Es gibt nun genau eine rationale Zahl s, die zwischen beiden Mengen liegt in dem Sinne, daß für jede Zahl $x \in M_1$ und für jede Zahl $y \in M_2$ gilt $x \leqq s \leqq y$.
Diese Zahl s ist die Zahl 1.

Betrachten wir noch ein anderes Paar von Mengen M_1, M_2 (*Beispiel 2*):
$M_1=\{x|x \text{ rational und } x>0 \text{ und } x^2 \leqq 9\}$
$M_2=\{y|y \text{ rational und } y>0 \text{ und } y^2>9\}$.
Auch diese beiden Mengen haben die Eigenschaften (a), (b) und (c).

Aufgabe 2:
Gib Zahlen an, die zu M_1 bzw. M_2 gehören!

Eigenschaft (b) kann wie folgt nachgewiesen werden:
Aus $x \in M_1$ und $y \in M_2$ folgt $x^2 \leqq 9$ und $9<y^2$, also $x^2<y^2$. Gäbe es nun ein $x \in M_1$ und ein $y \in M_2$ mit $x>y$, so wäre $x^2>y^2$ im Widerspruch zu $x^2<y^2$.
Also muß stets $x \leqq y$ gelten.

Überzeugen wir uns noch von der Gültigkeit der Eigenschaft (c)!

Es sei z. B. die Zahl $\frac{1}{100}$ vorgegeben. Die Zahlen $x=3$ und $y=3{,}001$ leisten das Verlangte. Es ist nämlich 3 eine positive rationale Zahl mit $3^2=9 \leqq 9$; ebenso ist $3{,}001$ eine positive rationale Zahl und $3{,}001^2=$ $=9{,}006001>9$. Schließlich gilt $y-x=$ $=3{,}001-3=0{,}001<0{,}01$.

In gleicher Weise findet man zu jeder natürlichen Zahl n Zahlen $x \in M_1$ und $y \in M_2$ mit[4]
$y-x<\frac{1}{10^n}$.

Auch hier gibt es wieder genau eine Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt, nämlich die Zahl 3. Für jedes $x \in M_1$ und jedes $y \in M_2$ gilt also $x \leqq 3 \leqq y$.

Es gibt allerdings Mengen M_1 und M_2 rationaler Zahlen, die zwar die Bedingungen (a), (b) und (c), aber *nicht* die Bedingung (*) erfüllen.

Dazu ein Beispiel (*Beispiel 3*):
$M_1=\{x|x \text{ positiv rational und } x^2<2\}$
$M_2=\{y|y \text{ positiv rational und } y^2>2\}$.

Aufgabe 3:
Zeige, daß M_1 und M_2 die Eigenschaften (a) und (b) haben!

Wir wollen auch (c) überprüfen. Ist $\frac{1}{10}$ (also $n=1$) vorgegeben, so leisten die Zahlen $x=1{,}41$ und $y=1{,}42$ das Verlangte, denn beide Zahlen sind positiv rational, es ist $x^2=1{,}9881<2$, $y^2=2{,}0164>2$ und schließlich $y-x=1{,}42-1{,}41=0{,}01<0{,}1$.

Ist $\frac{1}{100}$ vorgegeben, so betrachten wir die Zahlen

	a	a^2
	1,410	1,988100
	1,411	1,990921
	1,412	1,993744
Zahlen	1,413	1,996569
aus M_1	1,414	1,999396
	1,415	2,002225
	1,416	2,005056
Zahlen	1,417	2,007889
aus M_2	1,418	2,010724
	1,419	2,013561
	1,420	2,016400

Wir wählen also $x=1{,}414$ und $y=1{,}415$. Dann ist $x \in M_1$, $y \in M_2$ und $y-x=1{,}415-1{,}414=0{,}001<0{,}01$. Entsprechend verfahren wir, wenn die Zahl $\frac{1}{1000}$ vorgegeben ist. Dazu berechnen wir die Quadrate der Zahlen

1,4140; 1,4141; ...; 1,4149; 1,4150.

Wieder finden wir zwei Zahlen derart, daß das Quadrat der einen noch kleiner und das Quadrat der anderen schon größer als 2 ist. Die eine gehört zu M_1, die andere zu M_2, und ihre Differenz ist kleiner als $\frac{1}{1000}$.

Wenn man für eine beliebige natürliche Zahl n schon Zahlen $x \in M_1$ und $y \in M_2$ mit $y-x<\frac{1}{10^n}$ gefunden hat, so erhält man auf die gleiche Weise wie oben für die natürliche Zahl $n+1$ ebenfalls ein $x \in M_1$ und ein $y \in M_2$ mit $y-x<\frac{1}{10^{n+1}}$.

Wie steht es nun mit der Bedingung (*)? Gäbe es eine rationale Zahl c zwischen den Mengen M_1 und M_2, so wären folgende Fälle möglich:

(1) $c^2=2$ (2) $c^2<2$ (3) $c^2>2$.

Wie wir bereits wissen, kann Fall (1) nicht eintreten, da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist.

Im Fall (2) würde die Zahl c zu M_1 gehören. Wir zeigen, daß es zu jeder Zahl aus M_1 eine noch größere gibt, die ebenfalls zu M_1 gehört.

Es sei x eine beliebige Zahl aus M_1. Wenn wir zeigen können, daß es eine positive Zahl z gibt, für die $(x+z)^2<2$ gilt, so sind wir fertig. Wegen $z>0$ ist nämlich $x+z>x$ und wegen $(x+z)^2<2$ ist $x+z \in M_1$.

Wie finden wir aber eine solche Zahl z?

Aufgabe 4:

Gib für die Zahlen $x=1$; 1,4; 1,41; 1,414 (Zahlen aus M_1) jeweils ein positives z an, so daß $(x+z)^2<2$ gilt! Sicher muß z der Ungleichung $0<z<1$ genügen. Wenn diese Abschätzung für z auch noch viel zu grob ist, so hilft sie uns jedoch schon, unsere weiteren Überlegungen zu vereinfachen. Es ist

$(x+z)^2=x^2+2xz+z^2=x^2+z(2x+z)$.

Wegen $1{,}5 \in M_2$ und $0<z<1$ gilt gewiß

$$2x+z<2\cdot 1{,}5+1=4 \text{ und damit}$$
$$(x+z)^2<x^2+4z.$$

Wählen wir z nun so, daß

i) $x^2+4z<2$ gilt,

so ist natürlich auch $(x+z)^2<2$. Die Ungleichung i) ist für $z<\frac{1}{4}(2-x^2)$ erfüllt.

Folglich erhalten wir

$(x+z)^2<x^2+4z<x^2+4\cdot\frac{1}{4}(2-x^2)=2.$

Die Zahl $x+z$ mit $0<z<\frac{1}{4}(2-x^2)$ ist also größer als x und gehört auch noch zu M_1. Somit finden wir zu jeder Zahl $x \in M_1$ – also auch zu c – eine noch größere Zahl in M_1. Das ist aber ein Widerspruch zu der Bedingung (*), denn für jede Zahl $x \in M_1$ müßte $x \leq c$ gelten.

Aufgabe 5:

Zeige analog, daß auch Fall (3) nicht eintreten kann! Damit erhalten wir: Es gibt keine rationale Zahl, die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegt.

Daß es bei diesem Beispiel, wie auch bei vielen anderen keine rationale Zahl gibt, die zwischen beiden Mengen liegt, ist der entscheidende Mangel des Bereichs der rationalen Zahlen und der Grund dafür, diesen Zahlenbereich zum Bereich der reellen Zahlen zu erweitern. Im Bereich der reellen Zahlen gilt nun der folgende Satz 1: Sind M_1 und M_2 Mengen reeller Zahlen mit den Eigenschaften a) bis c), so gibt es stets genau eine reelle Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt.

In diesem Satz wird die wichtige Eigenschaft des Bereiches der reellen Zahlen formuliert, die – wie wir an Beispielen gesehen haben – im Bereich der rationalen Zahlen nicht gilt. Weiter oben hatten wir die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen unter Zuhilfenahme der Zahlengeraden formuliert. Mit dem Satz 1 haben wir eine von der Zahlengeraden unabhängige rein arithmetische Beschreibung der wichtigsten Eigenschaft der reellen Zahlen erhalten. Zahlreiche mathematische Fragestellungen gehen auf diesen wichtigen Satz zurück. Einige dieser Probleme werden bereits in der Schule behandelt.

In einem 2. Teil (Heft 1/76) sollen einige Beispiele dargelegt werden, bei denen der Satz 1 angewendet wird.

H. Lemke/W. Stoye

[1] Diese Behauptung wurde im Unterricht der 9. Klasse bewiesen (vgl. Lehrbuch Klasse 9, Seite 12)

[2] Die hierbei verwendeten Skizzen (Figur 2 und 3) dienen nur zur Veranschaulichung des betreffenden Sachverhalts.

[3] Lies: M_1 ist die Menge aller x, für die gilt: $x<1$ und x rational.

[4] Man wähle etwa $x=3$ und $y=3+\frac{1}{10^{n+1}}$.

Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. Dr. h. c. Helmut Heinrich

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

▲1423 a) Bei einer Uhr seien (z. B. infolge schlechter Beleuchtungsverhältnisse) der große und der kleine Zeiger leicht zu verwechseln. Wie oft innerhalb von 12 Stunden und zu welchen Zeiten liefert die Vertauschung der beiden Zeiger eine korrekte Zeigerstellung?

Anmerkung: Da der große Zeiger in einer Stunde, der kleine Zeiger in 12 Stunden einen Umlauf vollführt und gefordert werden muß, daß zur Zeit 0 h 0 min beide Zeiger in Nullrichtung zeigen, heißt eine Zeigerstellung korrekt, wenn die Maßzahlen α und β der in Grad gemessenen Winkel, die die beiden Zeiger zur Zeit s h m min mit der Nullrichtung einschließen, der Relation

$\alpha=6\,m$ (großer Zeiger)

$\beta=30\,s+\frac{1}{2}m$ (kleiner Zeiger)

$s \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$

$0 \leq m<60$ genügen. (1)

▲1423 b) Die Maschen eines einen einfach zusammenhängenden flächenhaften Bereich B bedeckenden Netzpolygons N (Bild 1) seien sämtlich Vielecke gleicher Eckenzahl n, und N sei so beschaffen, daß jede Kante (n-Eck-Seite) entweder ganz dem Rande von B angehört oder zwei benachbarten Maschen gemeinsam ist. Es seien:

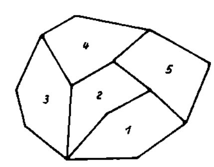
r die Anzahl der auf dem Rand von B liegenden Kanten (Maschenseiten) [= Anzahl der auf dem Rand von B liegenden Knoten (Maschenecken)]

s die Anzahl der im Innern von B liegenden Kanten.

p die Anzahl der im Innern von B liegenden Knoten.

Dann gilt stets die Relation.

$$r-(n-2)s+np=n.$$



$n=5$, $r=9$, $s=8$, $p=4$

$r-(n-2)s+np=9-3\cdot 8+5\cdot 4=5$

VIII. Internationale Physikolympiade

7. bis 17. Juli 1975 (Güstrow/Berlin)

Theoretische Aufgaben,
1. Klausur (9. Juli)

1. An eine vertikale Achse A ist unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ein seitlicher Arm angesetzt.

Die Anordnung kann um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Auf dem Arm befindet sich ein verschiebbarer Körper mit dem Gewicht $G=m\cdot g$. Die Verschiebung erfolgt unter Reibung mit dem Haftreibungskoeffizienten μ.
($\mu=\tan\beta$; β: Reibungswinkel)

a) Für welche Winkel α befindet sich der Körper bei $\omega=0$ in Ruhe und bei welchen Winkeln α befindet er sich in Bewegung?

b) Die Anordnung rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.
(Während einer Rotationsbewegung ändert sich der Winkel α nicht.)
Für welche Lagen befindet sich der Körper relativ zum Arm in Ruhe?
Benutzen Sie bei der Rechnung die folgenden Beziehungen:
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Prof. Dr. Kremp, Päd. Hochschule Güstrow

2. Für eine dicke Glaslinse (Brechzahl n) in Luft mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 und dem Scheitelabstand d ist die Brennweite f der Linse durch folgenden Ausdruck gegeben

$$f=\frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$

Anmerkung: $r_i>0$ bedeutet: Krümmungsmittelpunkt M_i liegt rechts vom Flächenscheitel S_i; $r_i<0$ bedeutet: Krümmungsmittelpunkt M_i liegt links vom Flächenscheitel $S_i\cdot(i=1, 2)$.

Für bestimmte Anwendungen ist die Unabhängigkeit der Brennweite von der Wellenlänge λ erwünscht.

a) Für wieviel verschiedene Wellenlängen kann man dieselbe Brennweite erreichen?

b) Stellen Sie eine Beziehung zwischen r_i, d und den Brechzahlen auf, für die die geforderte Wellenlängenunabhängigkeit erfüllbar ist, und diskutieren Sie diese!
Zeichnen Sie eine mögliche Linsenform! Geben Sie die Lage der Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 an!

c) Zeigen Sie, daß sich für eine Plankonvexlinse eine bestimmte Brennweite nur für eine Wellenlänge erreichen läßt!

d) Geben Sie für 2 weitere Fälle Bedingungen für die Parameter der dicken Linse an, für die man eine bestimmte Brennweite nur mit einer Wellenlänge realisieren kann! Berücksichtigen Sie dabei den physikalischen und den geometrischen Sachverhalt!

Prof. Dr. Klebe, Päd. Hochschule Potsdam

3. Lösen Sie folgende ebene ionenoptische Aufgabe:
Aus einem Punkt Q tritt ein in der Zeichenebene divergierendes Strahlenbündel von einfach positiv geladenen Ionen (Ladung $+e$) gleicher konstanter Masse m aus. Sie wurden durch die Spannung U beschleunigt. In einem homogenen Magnetfeld der Induktion B, welches die Zeichenebene senkrecht von hinten nach vorn durchsetzt, werden die Ionen abgelenkt.
Die Begrenzung des Magnetfeldes soll so beschaffen sein, daß die ursprünglich divergierenden Ionen sich als konvergierende Strahlen im Punkte A ($\overline{QA}=2a$) schneiden. Der Verlauf der Ionenbahnen sei symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten auf $\overline{QA}$.
Von den möglichen Magnetfeldbegrenzungen ist der Typ zu betrachten, bei dem ein zusammenhängendes Magnetfeld in der Umgebung der Mittelsenkrechten wirkt und sich die Punkte Q und A im feldfreien Bereich befinden.

a) Geben Sie den Krümmungsradius R der Teilchenbahnen im Magnetfeld als Funktion der Spannung U und der Induktion B an!

b) Geben Sie charakteristische Eigenschaften der Teilchenbahnen in der oben beschriebenen Anordnung an!

c) Gewinnen Sie die Magnetfeldbegrenzungen durch geometrische Konstruktionen für die Fälle

$$R<a, \qquad R=a, \qquad R>a!$$

d) Geben Sie die allgemeine Gleichung für die Magnetfeldbegrenzung an!

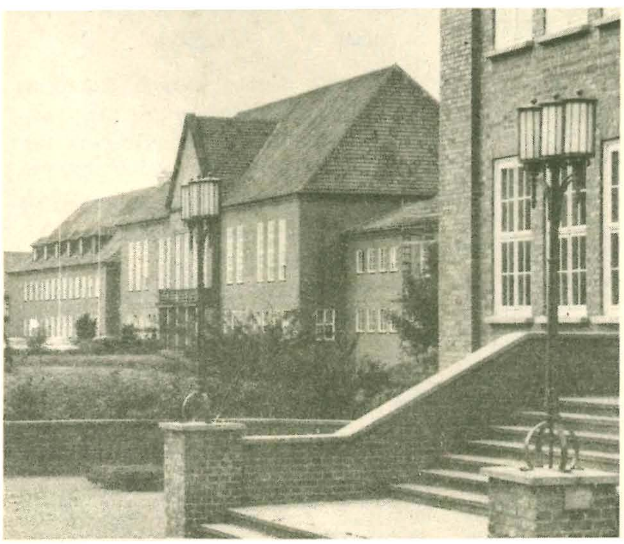
Prof. Dr. Bernhard,
Humboldt-Universität zu Berlin

Experimentelle Aufgabe,
2. Klausur (11. Juli)

4. Aus Platzgründen müssen wir auf die Veröffentlichung des Textes der Aufgabe 4 sowie der Lösungen verzichten. Allen interessierten *Jungen Physikern* empfehlen wir, sich an ihren Physiklehrer zu wenden, der

links: Päd. Hochschule „Liselotte Herrmann",

rechts: Delegation der DDR (v. l. n. r.): Volker Fritzsche – 1. Preis (Kl. 12, Spezialkl. der Martin-Luther-Universität Halle); Prof. Dr. Wendt (Delegationsleiter, PH Güstrow); Martin Hanke – 2. Preis (Kl. 12, EOS „Heinrich Hertz", Berlin); Jörg Bergmann – 1. Preis (Kl. 12, Spezial-OS „M. A. Nexö" Dresden); Matthias Wagner – 1. Preis (Kl. 12, Spezialschule „Carl Zeiss" Jena); Udo Walta (Päd. Betreuer, PH Güstrow); Hans-Georg Martin – 3. Preis (Kl. 11, Spezialschule „Carl Zeiss" Jena)

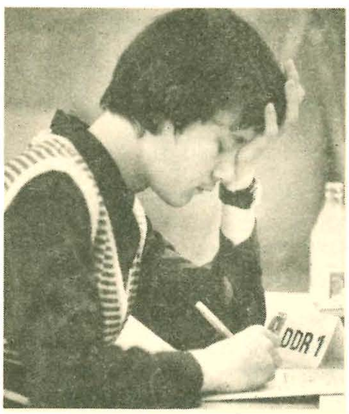


sicher das umfassende Material über die VIII. IPO aus Heft 10/75, Zeitschrift „Physik in der Schule", zur Verfügung stellt.

Ergebnisse der VIII. IPO

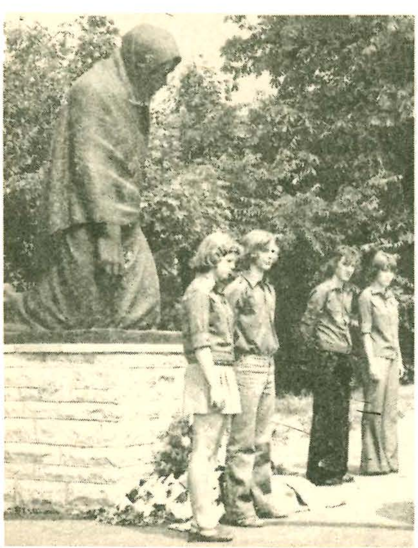
Land	Gesamtpunktzahl	Preis 1.	2.	3.	Anerkennungsurkunden
VR Bulgarien	109	–	–	–	3
DDR	186	3	1	1	–
Bundesrepublik Deutschland	97	–	–	–	1
Rep. Frankreich	144	–	1	2	2
VR Polen	164	–	1	4	–
SR Rumänien	135	1	1	–	1
ČSSR	146	1	1	1	1
Ungarische VR	169	1	2	1	1
UdSSR	176	1	2	2	–
	zus.	7	9	11	9

Punktespiegel: 1. Preis – 50 bis 39 Punkte, 2. Pr. – 38 bis 34 P., 3. Pr. – 33 bis 28 P., Anerkennung – 27 bis 22 P.



Wettbewerbsatmosphäre

Aus dem Programm: Exkursionen nach Rostock, Schwerin, Berlin und Potsdam.
Unser Foto: Kranzniederlegung am Denkmal zu Ehren der Häftlinge des KZ Sachsenhausen (Muess bei Schwerin)



Extremwertaufgaben, die jeder lösen kann

Wir wollen unter allen Rechtecken mit demselben Umfang $U=20$ cm das flächengrößte ermitteln (Bild 1).

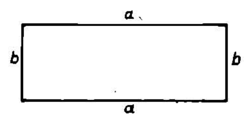


Bild 1

Sprecht eine Vermutung aus, wie wohl die Seitenlängen a und b des Rechteckes zu wählen sind!

Wir wissen, daß $U=2(a+b)=20$, also $a+b=10$ ist. Der Flächeninhalt A des Rechtecks ergibt sich aus $A=a\cdot b$. Daher können wir die obige Frage auch so formulieren:

Welches von allen Paaren $(a;\ b)$ positiver Zahlen der Summe 10 hat das größte Produkt? Solche Paare sind z. B.

$$(1;9);(8;2);(5;5);\left(\frac{7}{2};\frac{13}{2}\right);(9{,}9;0{,}1)$$

mit den dazugehörigen Produkten

$$9;16;25;\frac{91}{4};0{,}99.$$

Ihr habt natürlich längst gemerkt, daß das größte Produkt vermutlich für $a=b=5$ auftritt. Wir wollen nun beweisen, daß das Produkt zweier positiver Zahlen a, b der konstanten Summe s stets für $a=b=\frac{s}{2}$ maximal wird.

Für $a=b=\frac{s}{2}$ ergibt sich als Produkt $a\cdot b=\frac{s^2}{4}$.

Für jede andere Wahl von a und b mit $a+b=5$ ergibt sich ein kleineres Produkt; denn nehmen wir etwa $a=\frac{s}{2}+d$ mit $0<d<\frac{s}{2}$, so bleibt für den zweiten Faktor $b=\frac{s}{2}-d$, und als Produkt erhalten wir $a\cdot b=\left(\frac{s}{2}+d\right)\left(\frac{s}{2}-d\right)$ $=\frac{s^{2^2}}{4}-d^2$, welches wegen $d^2>0$ stets kleiner ist als $\frac{s^2}{4}$.

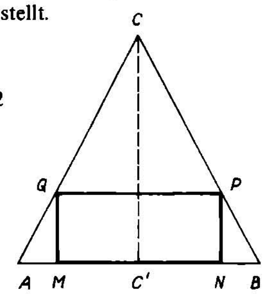
Wir erhalten also als Resultat den

Satz: Unter allen Paaren positiver Zahlen a, b mit konstanter Summe s ist das Paar $\left(\frac{s}{2};\frac{s}{2}\right)$ dasjenige mit dem größten Produkt.

Mit Hilfe dieses Satzes lösen wir einige Aufgaben aus der Geometrie bzw. aus der Physik.

Beispiel 1: In ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ soll ein Rechteck $MNPQ$ von maximalem Inhalt so gelegt werden, wie in Bild 2 dargestellt.

Bild 2



Wir bezeichnen mit c die Länge der Basis AB des Dreiecks, mit h die Länge seiner Höhe CC' und mit x bzw. y die gesuchten Längen der Seiten $MN=QP$ bzw. $MQ=NP$ des Rechtecks.

Was weißt du über die Längen der Strecken AC' und AM? Wenn du diese Frage beantwortet hast, findest du wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AMQ$ und $\triangle AC'C$ (Begründung?) die Proportion:

$$y:\left(\frac{c}{2}-\frac{x}{2}\right)=h:\frac{c}{2},$$

die wir nach y auflösen und erhalten

$$y=\frac{h}{c}(c-x)$$

Rechne das nach!

Der Inhalt A des Rechtecks $MNPQ$ ergibt sich dann zu

$$A=xy=\frac{h}{c}x(c-x).$$

Da $\frac{h}{c}$ eine Konstante ist, hängt die Größe von A allein von dem Produkt $x(c-x)$ ab. Erfüllen die Faktoren des Produktes die Voraussetzungen des obigen Satzes? Ja, denn es ist $x>0$ und $c-x>0$ wegen $c>x$ und $x+(c-x)=c$, c konstant. Nach unserem Satz hat demnach das Rechteck $MNPQ$ maximalen Flächeninhalt für

$$x=c-x=\frac{c}{2},$$

woraus sich $y=\frac{h}{2}$ und als maximaler Flächeninhalt $A_{max}=\frac{1}{4}hc$ ergeben.

Das nächste Beispiel verlangt Kenntnisse aus der Körperberechnung und dem Rechnen mit Wurzeln. Wer das nicht kann, liest gleich bei Beispiel 3 weiter.

Beispiel 2: Welcher unter allen geraden Kreiskegeln konstanter Oberfläche A hat das größte Volumen V?

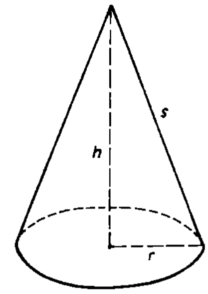
Wir bezeichnen mit r die Länge des Grundkreisradius des Kegels und mit h seine Höhe. Die Formeln für Volumen V und Oberfläche A eines Kreiskegels könnt ihr dem „Tafelwerk" entnehmen:

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h \qquad A=\pi r(r+s)$$

Dabei bezeichnet s die Länge einer Mantellinie; nach dem Satz des *Pythagoras* gilt $s^2=r^2+h^2$ oder $s=\sqrt{r^2+h^2}$ (Bild 3).

Wir lösen nun die Formel für die Oberfläche A nach h auf und setzen den erhaltenen Ausdruck in die Formel für das Volumen V ein:

Bild 3



$$\pi r(r+\sqrt{r^2+h^2})=A$$
$$r+\sqrt{r^2+h^2}=\frac{A}{\pi r}$$
$$\sqrt{r^2+h^2}=\frac{A}{\pi r}-r=\frac{A-\pi r^2}{\pi r}$$
$$r^2+h^2=\frac{(A-\pi r^2)^2}{\pi^2 r^2}$$
$$h=\sqrt{\frac{(A-\pi r^2)^2}{\pi^2 r^2}-r^2}=$$
$$=\frac{1}{\pi r}\sqrt{A(A-2\pi r^2)}$$

Also: $V=\frac{\pi}{3}r^2\cdot\frac{1}{\pi r}\sqrt{A(A-2\pi r^2)}=$
$$=\frac{\sqrt{A}}{3}\sqrt{r^2(A-2\pi r^2)}.$$
$$V=\frac{\sqrt{A}}{3}\sqrt{2\pi r^2(\frac{A}{2\pi}-r^2)}=\frac{\sqrt{2\pi A}}{3}\sqrt{r^2(\frac{A}{2\pi}-r^2)}$$

Wer hat bemerkt, mit welchem Ziel die Umformungen in V vorgenommen wurden? Ganz recht, auf den letzten Ausdruck können wir unseren Satz anwenden, denn wegen der Konstanz von $\frac{\sqrt{2\pi A}}{3}$ hängt V allein vom Produkt $r^2(\frac{A}{2\pi}-r^2)$ ab, und zwar ist V um so größer, je größer dieses Produkt ist. Da die Radiuslänge r die Ungleichung $r^2<\frac{A}{2\pi}$ erfüllt (Begründung?), sind beide Faktoren des Produktes positiv und haben die konstante Summe $\frac{A}{2\pi}$. Also nimmt das Volumen V seinen größten Wert an für $r^2=\frac{A}{2\pi}-r^2=\frac{A}{4\pi}$, woraus $r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ folgt. Das maximale Volumen beträgt dann $V_{max}=\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A}{\pi}}$. Rechne das nach!

Aus dem Ansatz
$$V_{max}=\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A}{\pi}}=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{A}{4\pi}\cdot h$$
ergibt sich
$$h=\sqrt{\frac{2A}{\pi}}=2r\sqrt{2}.$$

Wir erhalten also das Resultat:

Von allen geraden Kreisregeln konstanter Oberfläche besitzt derjenige das maximale Volumen, für dessen Radiuslänge r und Höhenlänge h die Proportion
$$h:2r=\sqrt{2}:1 \text{ gilt.}$$

Beispiel 3: Die Leistung N einer Turbine hängt von der Zahl n der Umdrehungen ab; es gilt $N=\alpha n-\beta n^2$, wo α, β positive Konstanten sind. Bei welcher Umdrehungszahl erreicht die Turbine maximale Leistung? Forme zunächst den Ausdruck für N so um, daß unser Satz anwendbar ist, und prüfe, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind!

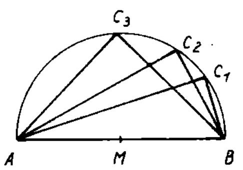
Sicher hast du N umgeformt zu $N=\beta n(\frac{\alpha}{\beta}-n)$, worin $n(\frac{\alpha}{\beta}-n)$ für $0<n<\frac{\alpha}{\beta}$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren mit konstanter Summe $\frac{\alpha}{\beta}$ ist. Die Turbine erreicht also ihre maximale Leistung N_{max} für $n=\frac{\alpha}{\beta}-n=\frac{\alpha}{2\beta}$, und es ist $N_{max}=\frac{\alpha^2}{4\beta}$.

Bei der Herleitung unseres Satzes und in den Beispielen sind wir stets davon ausgegangen, daß unser Problem eine Lösung besitzt, mehr noch, daß es eindeutig lösbar ist. Dieses Vorgehen legt uns der „gesunde Menschenverstand" nahe, und diese Annahme ist auch bei den nachfolgenden Aufgäben gerechtfertigt. Bei schwierigen Extremwertaufgaben ist es notwendig, Untersuchungen zur Existenz und gegebenenfalls zur Eindeutigkeit von Lösungen zu machen, doch muß man sich dazu in der Differentialrechnung auskennen.

Wenn es dir bis hierher Spaß gemacht hat, kannst du deine Kräfte noch an den folgenden Aufgaben messen.

▲1▲ Welches von allen Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite AB und gemeinsamem Umkreis, dessen Mittelpunkt M auf dieser gemeinsamen Seite liegt, hat den größten Flächeninhalt (Bild 4)?

Bild 4



▲2▲ Für welchen Wert von x aus dem Intervall $-3<x<4$ nimmt die Funktion mit der Gleichung $y=f(x)=(x-4)^4(x^2+6x+9)^2$ ihren maximalen Funktionswert an?

▲3▲ Wir wollen nun die am Anfang gestellte Frage in dem Sinne umkehren, daß wir nach demjenigen unter allen Paaren positiver Zahlen a, b mit konstantem Produkt fragen, das die kleinste Summe hat.

a) Beweise zunächst den Satz: Die Summe zweier positiver Zahlen, deren Produkt 1 ist, ist nicht kleiner als 2. Wann tritt das Gleichheitszeichen ein?

Anleitung: Es ist also zu zeigen, daß für positive Zahlen c, d mit $cd=1$ stets $c+d\geqq 2$ gilt. Wegen $cd=1$ kannst du $d=\frac{1}{c}$ setzen; sodann benutze die Ungleichung $(c-1)^2\geqq 0$.

b) Nun können wir zur ursprünglichen Fragestellung zurückkehren. Vielleicht versuchst du erst einmal, aus der Betrachtung konkreter Beispiele eine Vermutung zu formulieren.

Anleitung für den Beweis: Es ist zweckmäßig, das konstante Produkt ab der Zahlen a, b mit p^2 zu bezeichnen: $ab=p^2$.

Um deine Vermutung zu beweisen, daß $a+b$ minimal wird für $a=b=p$, setze $a=pc$ mit $0<c<p$. Wie ist dann b zu setzen? Nun kannst du den unter a) bewiesenen Satz anwenden.

c) Welches unter allen Rechtecken konstanten Flächeninhalts hat den kleinsten Umfang?

▲4▲ Die in Aufgabe 3a) bewiesene Ungleichung $c+d\geqq 2$ für positive Zahlen c, d mit $c\cdot d=1$, die im Zusammenhang mit Aufgabe 3 den Charakter eines Hilfssatzes hat, ist außerordentlich wichtig und vielseitig anwendbar. Davon wollen wir uns sogleich überzeugen!

a) Zeige: Das geometrische Mittel $G=\sqrt{ab}$ zweier positiver Zahlen a, b ist nicht größer als ihr arithmetisches Mittel
$$A=\frac{a+b}{2}:\sqrt{ab}\leqq\frac{a+b}{2}.$$
Wann tritt das Gleichheitszeichen ein?

Anleitung: Es gilt $\frac{a}{G}\cdot\frac{b}{G}=1$.

b) Den Satz aus Aufgabe 3a) kann man auf n positive Zahlen a_1, a_2, ..., a_n ausdehnen und zeigen: Wenn $a_1a_2\cdot\ldots\quad a_n=1$, dann $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqq n$. Wenn du die Methode der vollständigen Induktion beherrschst, kannst du den Beweis versuchen.

Die Beweisidee wird deutlich, wenn wir hier unter Benutzung der Gültigkeit des Satzes für $n=2$ zeigen, daß er auch für $n=3$ gilt: Seien a_1, a_2, a_3 drei positive Zahlen mit $a_1a_2a_3=1$. Sind alle $a_i=1 (i=1, 2, 3)$, so ist $a_1+a_2+a_3=3$. Sind nicht alle Faktoren gleich 1, so muß es solche geben, die kleiner als 1, und solche, die größer als 1 sind. Sei etwa $a_1>1$, $a_2<1$, so formen wir die zu untersuchende Summe um: $a_1+a_2+a_3=$
$=(a_1a_2+a_3)+1+a_1-a_1a_2+a_2-1$
$=(a_1a_2+a_3)+1+(a_1-1)(1-a_2)$.

Wegen $(a_1a_2)a_3=1$ gilt nach Aufgabe 3a): $a_1a_2+a_3\geqq 2$, folglich $a_1+a_2+a_3\geqq 2+1+$ $+(a_1-1)(1-a_2)$, mithin $a_1+a_2+a_3>3$, da der letzte Summand $(a_1-1)(1-a_2)$ wegen $a_1>1$ und $a_2<1$ gewiß positiv ist.

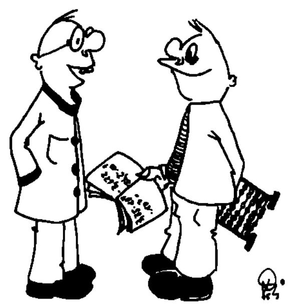
c) Mit dem eben gewonnenen Ergebnis kannst du die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gleichfalls auf drei (bzw. auf n) positive Zahlen ausdehnen. Der Beweis verläuft ebenso wie in 4a).

d) Nun kannst du sogar untersuchen, welcher von allen Quadern mit den Kantenlängen a, b, c bei konstanter Summe $a+b+c=s$ größtes Volumen hat.

Wie zu erwarten war, tritt dies für $a=b=c=\frac{s}{3}$ ein, das maximale Volumen ist $V_{max}=(\frac{s}{3})^3$.

Die Ungleichungen, die in den Aufgaben 4a) bis 4c) untersucht wurden, gestatten noch viele wichtige Folgerungen. Vielleicht findest du einige davon? *J. Hronik/H. Kästner*

Wer löst mit alpha -Wettbewerb



Na, sagen Sie schon,
wie haben Sie es gemacht?

Letzter Einsendetermin: 8. März 1976

Ma 5 ■ 1424 Aus einem Draht von jeweils 120 cm Länge soll einmal das Kantenmodell eines Würfels, zum anderen das Kantenmodell eines Quaders mit einer Länge von $a=15$ cm und einer Breite von $b=10$ cm hergestellt werden. Um wieviel Kubikzentimeter unterscheiden sich die Rauminhalte dieser beiden Körper?

Mathematikfachlehrer A. Weninger, Knittelfeld/Österreich

Ma 5 ■ 1425 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $a=25$ cm und $b=16$ cm. Ein zu diesem Rechteck flächengleiches Rechteck $A'B'C'D'$ habe die Seitenlänge $a'=40$ cm. Um wieviel Zentimeter ist der Umfang u' des Rechtecks $A'B'C'D'$ größer als der des Rechtecks $ABCD$?

Mathematiklehrer Gerold Friedel, Choren

Ma 5 ■ 1426 Welche natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, f, g, h, j, k erfüllen sämtliche der nachstehenden Gleichungen?

(1) $b : h=k$, (5) $a+j+e=16$,
(2) $e-j=k$, (6) $d+a=6$,
(3) $a+c=e$, (7) $b=e+c$,
(4) $f+d=f$, (8) $j=g:j$,
(9) $f=(c+g):h$,
(10) $a+j=9$.

Schüler Matthias Rogall, Dresden

Ma 5 ■ 1427 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{V I E R} \\ +\text{V I E R} \\ \hline \text{A C H T} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält, deren Summe so groß wie nur möglich sein soll. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Grundziffern, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern.

Schülerin Uta Eimecke, OS Domersleben (Kl. 7)

Ma 5 ■ 1428 Für die im dekadischen System dargestellte natürliche Zahl $\overline{abaacd}$ sollten die folgenden Bedingungen erfüllt sein: $a+b=2$; $2a=c$; $3a+b+c+d=16$.
Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Matthias Rogall, Dresden

Ma 5 ■ 1429 Von den 26 Schülern einer 5. Klasse erzielten in der letzten Klassenarbeit im Fach Mathematik genau so viele Schüler die Note 1 wie die Note 3. Die Note 2 erreichten doppelt so viele Schüler wie die Note 1. Zwei Schüler erhielten die Note 4, kein Schüler die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Note 1 bzw. 2?

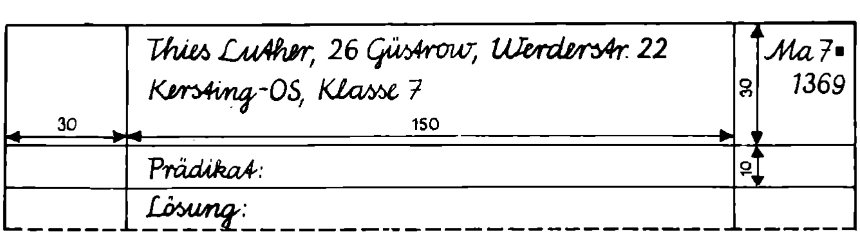
Schülerin Sabine Moldauer, OS Sondershausen

Ma 6 ■ 1430 In einer Klassenarbeit im Fach Mathematik wurden von den Schülern einer sechsten Klasse folgende Ergebnisse erzielt: Der dritte Teil der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 1 oder die Note 5. Fünf Schüler mehr als der dritte Teil der Schüler erhielten die Note 3 oder die Note 4. Der sechste Teil der Schüler erreichte die Note 2. Die Anzahl der Schüler, die die Note 4 erhielten, ist gleich dem vierten Teil der Anzahl der Schüler, die die Note 3 erzielten. In der Klassenarbeit wurde der Zensurendurchschnitt 2,4 erreicht. Wieviel Schüler erhielten jeweils die Noten 1, 2, 3, 4 bzw. 5?

Schüler Andreas Kasparek, Gräfenhainichen

Ma 6 ■ 1431 Ein Quader mit den Kantenlängen a, b, c besitze eine Oberfläche $A_0=286\ \text{cm}^2$. Eine der aus den Kantenlängen a und b gebildete Rechteckfläche betrage $A_1=63\ \text{cm}^2$; eine der aus den Kantenlängen b und c gebildete Rechteckfläche betrage $A_2=35\ \text{cm}^2$. Es ist das Volumen dieses Quaders zu berechnen.

Schülerin Gabi Kutschbach, Karl-Marx-Stadt (Kl. 7)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪ 1432 Ein Schüler, der sich am *alpha*-Wettbewerb beteiligt, hat auf Grund von eingesandten Lösungen mehr als 20, aber weniger als 45 Antwortkarten erhalten. $\frac{3}{8}$ dieser Karten trugen das Prädikat „gut gelöst". Die Anzahl der Karten mit dem Prädikat „gelöst" war gleich dem dritten Teil der Anzahl der Karten mit dem Prädikat „gut gelöst". Die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben war gleich der Hälfte der Anzahl der Karten mit dem Prädikat „gelöst". Wieviel der eingesandten Aufgaben waren „sehr gut gelöst", „gut gelöst", „gelöst" bzw. „nicht gelöst"?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ▪ 1433 Ein Radrennfahrer trainierte an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Am ersten Tag legte er $\frac{4}{15}$, am zweiten Tag $\frac{2}{5}$ der gesamten Trainingsstrecke und am dritten Tag 100 km zurück.
Wieviel Kilometer legte der Radrennfahrer am ersten und zweiten Tag jeweils zurück?

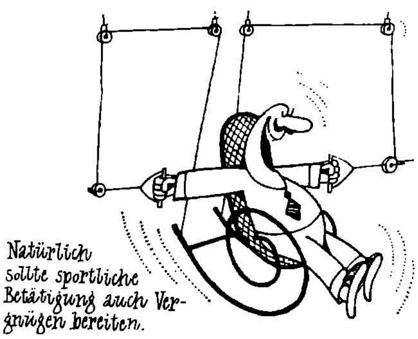
Schülerin Elisabeth Clemens, Prerow

Ma 6 ▪ 1434 Hans hat sich ein Buch gekauft. Von Bernd nach dem Preis befragt, antwortete Hans scherzhaft: „Das Buch kostete 1,50 M und noch $\frac{3}{8}$ seines Preises."
Wie teuer war das Buch?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ph 6 ▪ 1435 Aus 40 kg Messing sollen genau vier Wägestücke so hergestellt werden, daß damit jede Masse von 1 kg bis 40 kg (mit ganzzahliger Maßzahl) auf einer gleicharmigen Balkenwaage ermittelt werden kann. Welche Maßzahlen müssen diese vier Wägestücke besitzen?

Schüler Klaus Meier, Osternienburg



Ma 7 ▪ 1436 Vier *Junge Pioniere*, und zwar Axel, Bernd, Ernst und Franz, die bei der Verschönerung des Vorgartens ihres Wohnblocks mitgeholfen hatten, erhielten einen Korb mit Äpfeln als Belohnung. Axel erhielt den vierten Teil der Anzahl dieser Äpfel. Bern erhielt zwei weniger als ein Drittel, Ernst sechs weniger als die Hälfte der Anzahl aller Äpfel. Franz erhielt drei Äpfel mehr als die Hälfte der Anzahl der Äpfel, die Axel erhalten hatte. Wieviel Äpfel erhielt jeder dieser Jungen Pioniere? *Sch.*

Ma 7 ▪ 1437 Mit welcher Ziffer endet das Produkt

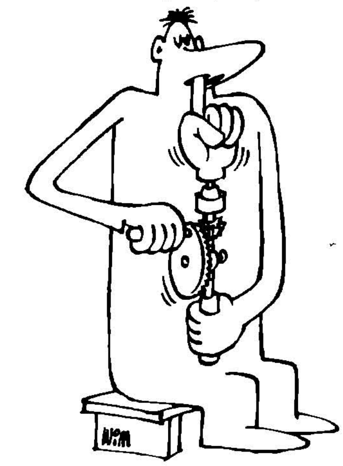
$$1973^{1973} \cdot 1974^{1974} \cdot 1975^{1975}?$$

Dabei bedeutet z. B. 1975^{1975} ein Produkt aus 1975 Faktoren, von denen jeder gleich 1975 ist.

Oberlehrer Ing. Karl Koch, Schmalkalden

Ma 7 ▪ 1438 Es ist ein Dreieck ABC aus der Seite $\overline{AB}=c=6$ cm, dem Innenwinkel $\sphericalangle ABC=\gamma=40°$ und der Seitenhalbierenden $\overline{CD}=s_c=8$ cm zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen und zu beschreiben.

Schüler Andreas Kasparek, Gräfenhainichen



Ma 7 ▪ 1439 Zeichne ein Dreieck ABC aus $\overline{AB}=c=4$ cm, $\overline{BC}=a=6$ cm und $\overline{AC}=b=9$ cm! Verwandle durch eine geeignete Konstruktion das gezeichnete Dreieck ABC in ein flächengleiches Rechteck $ABEF$, das die Seite $\overline{AB}$ mit dem Dreieck ABC gemeinsam hat.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

Ph 7 ▪ 1440 Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Raumschiffes, das sich in gleichförmiger Kreisbewegung um die Erde bewegt und dabei einen Weg von 42600 km in 1,5 Stunden zurücklegt?

Ch 7 ▪ 1441 Zur Herstellung von 1 t Zucker werden 120 m^3 Wasser benötigt. Eine Zuckerfabrik produziert pro Jahr 1022 t Weißzucker. Um die Größe der benötigten Wassermenge zu veranschaulichen, ist zu berechnen, wieviel Tankwagen mit 3 t Fassungsvermögen nötig wären, um die genannte Wassermenge bereitzustellen. *L. L.*

Ma 8 ▪ 1442 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen z anzugeben, die $\frac{2}{9}$ mal so groß sind wie diejenige zweistellige natürliche Zahl, die durch Vertauschung der Ziffern der Zahl z entsteht.

Mathematikfachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 8 ▪ 1443 Zur Einzäunung einer Weidefläche, die die Form eines Rechtecks haben soll, mit einem Elektrozaun stehen 1120 m Leitungsdraht zur Verfügung. Der Zaun soll so angelegt werden, daß er aus zwei parallel geführten Leitungsdrähten besteht, daß also seine Gesamtlänge 560 m beträgt.
a) Wie groß ist der Flächeninhalt der maximalen Rechtecksfläche, die durch diesen Zaun begrenzt werden kann?
b) Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

Mathematikfachlehrer Hans-Joachim Hellwig, Heiligengrabe

Ma 8 ▪ 1444 Im Juni 1937 gelang es dem sowjetischen Flieger *Valeri Tschkalow* als erstem Flieger der Welt, in einem Non-Stop-Flug von Moskau ($\varphi=56°$ N) über den Nordpol ($\varphi=90°$ N) nach Seattle (USA, $\varphi=48°$ N) zu fliegen. Er benötigte mit seiner ANT-25 für diesen Flug 63 h 25 min.
Im Juni 1975 wurde dieser Non-Stop-Flug von einer IL-62 M wiederholt. Diese sowjetische Maschine benötigte für den Flug nur 10 h 54 min.
a) Man berechne die Länge der zurückgelegten Flugstrecke und beachte dabei, daß in beiden Fällen die tatsächlich zurückgelegte Flugstrecke um 12,27 $^0/_0$ länger war als die Luftlinie Moskau–Nordpol–Seattle.
b) Man berechne die mittleren Geschwindigkeiten (in $km \cdot h^{-1}$) der ANT-25 und der IL-62-M auf ihrem Flug von Moskau nach Seattle.
Hinweis zur Lösung: Bei der Berechnung der Länge der Luftlinie Moskau-Nordpol-Seattle beachte man, daß ein Meridian vom Äquator ($\varphi=0°$ N) bis zum Nordpol ($\varphi=90°$ N) rund 10000 km lang ist. *L.*

Ma 8 ▪ 1445 a) Wieviel Meter Stahlrohre, die die Form eines Hohlzylinders mit dem inneren Durchmesser 270 mm und der Wandstärke 6 mm haben, können aus 3000 t Stahl (Dichte 7,85 $g \cdot cm^{-3}$) hergestellt werden?
b) Nach einem neuen, in der UdSSR entwickelten Verfahren ist es möglich, solche für Bewässerungsanlagen bestimmten Stahlrohre auch mit einer Wandstärke von nur 1,8 mm herzustellen. Wieviel Meter Stahlrohre von dieser Wandstärke können aus 3000 t Stahl angefertigt werden? *L.*

Ph 8 ▪ 1446 In Halle werden die alten Häuser modernisiert. Ein Lastaufzug befördert 60 Mauerziegel (1 Mauerzigel hat ein Gewicht von 3,5 kp) in 25 Sekunden 20 m hoch. Berechne die erforderliche Arbeit in kpm!

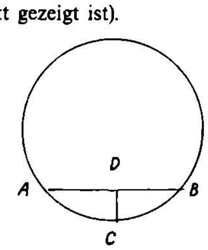
L. L.

Ch 8 ■ 1447 Es sollen 1000 g 10%ige Salzsäure durch Zusatz von 25%iger Salzsäure auf den Gehalt von 12,5 % gebracht werden. Wieviel 25%ige Salzsäure ist erforderlich?

Dipl.-Chemiker G. Brandes, Magdeburg

Ma 9 ■ 1448 Auf Grund neuerer Untersuchungen gelangten kanadische Astronomen zu der Erkenntnis, daß *Barnards Stern* im Sternbild des Schlangenträgers, der von der Erde etwa 6 Lichtjahre entfernt ist, von fünf Planeten umgeben sein müsse. Diese Planeten umkreisen den Stern mit Umlaufzeiten von 2,4, 2,9, 3,8, 11 bzw. 26 Jahren. Der innerste Planet hat einen Abstand von 0,95 AE von dem Zentralgestirn. Dabei ist 1 AE (Astronomische Einheit) gleich der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne und beträgt rund 150 Millionen km.
Man berechne mit Hilfe des *3. Keplerschen Gesetzes*, nach dem sich die Quadrate der Umlaufzeiten von Planeten wie die dritten Potenzen ihrer Abstände von dem Zentralgestirn verhalten, die Abstände der übrigen vier Planeten von Barnards Stern in AE und in Millionen km. *L.*

Ma 9 ■ 1449 Der innere Durchmesser eines Rohres, das die Form eines Hohlzylinders hat, kann auf die folgende Weise ermittelt werden:
Man lege ein Brett $\overline{AB}$, dessen Länge b bekannt, aber kleiner als der innere Durchmesser des Rohres ist, in das Rohr und messe den Abstand $\overline{CD}=a$ des Mittelpunktes D der Strecke $\overline{AB}$ von der inneren Rohrwandung (vgl. die Abb., in der das Rohr im Querschnitt gezeigt ist).



Man berechne nun den inneren Durchmesser d eines Rohres für den Fall, daß $b=1200$ mm und $a=200$ mm ist.

Mathematikfachlehrer Friedrich Bier, Klausdorf

Ma 9 ■ 1450 Es sind alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

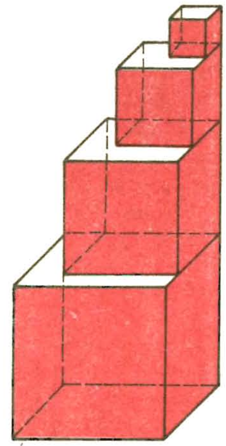
$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{13}{5}, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=13 \qquad (2)$$

zu ermitteln.

Schüler Roland Schlesinger, OS III Saßnitz (Kl. 9)

Ma 9 ■ 1451 Von den abgebildeten vier Würfeln habe der erste eine Kantenlänge von 1 cm, der zweite von 2 cm, der dritte von 3 cm und der vierte von 4 cm.
a) Man berechne den Oberflächeninhalt des aus diesen vier Würfeln zusammengesetzten Körpers.
b) Man berechne den Oberflächeninhalt eines Körpers, der aus n solchen Würfeln zusammengesetzt ist, wobei der erste eine Kantenlänge von 1 cm hat und die Kantenlänge jedes der folgenden Würfel jeweils um 1 cm größer als die des vorhergehenden Würfels ist. *Sch.*



Ph 9 ■ 1452 Ein Ölheizgerät, eingesetzt zum Trocknen von Zementfertigteilen, hat eine Leistung von 80000 kcal $\cdot$ h^{-1}.
Wie groß ist der Verbrauch von Heizöl (Heizwert 10000 kcal $\cdot$ kg^{-1}) in einer Schicht (8 h) bei einem Wirkungsgrad von 0,6? *L. L.*

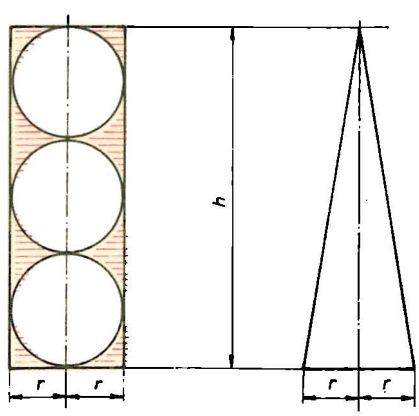
Ch 9 ■ 1453 Berechnen Sie die Masse Phosphorpentaxid in 20 g 60 %iger o-Phosphorsäure! *G. Brandes*

Ma 10/12 ■ 1454 Man beweise, daß die Summe

$$s=1+2+3+\ldots+n$$

aller natürlichen Zahlen, die nicht größer als eine natürliche Zahl n sind, genau dann durch die Anzahl n ihrer Summanden teilbar ist, wenn n eine ungerade Zahl ist. *Sch.*

Ma 10/12 ■ 1455 Gegeben sei ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius r, dessen Höhe n mal so groß wie sein Durchmesser ist. Dabei sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$. Ferner sei ein gerader Kreiskegel gegeben, dessen Radius und dessen Höhe ebenso groß wie der Radius bzw. die Höhe des Zylinders ist.



In den Zylinder seien n Kugeln mit dem Radius r so gelegt, daß sie übereinander liegen und ihre Gesamthöhe gleich der Höhe des Zylinders ist (vgl. die Abb., in der ein Zylinder mit drei Kugeln im Längsschnitt dargestellt ist). Nun sei der freie Raum zwischen den Kugeln und dem Zylindermantel mit Wasser ausgefüllt. Man entscheide, ob das Volumen der Wassermenge kleiner, größer oder ebenso groß wie das Volumen des Kegels ist.

Ing. Armin Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 1456 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=720$$

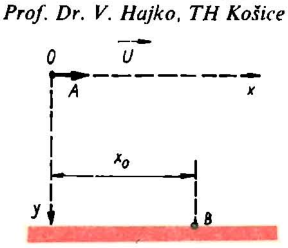
zu ermitteln. *Schüler Frank Pohl, EOS „DSF", Neugersdorf (Kl. 11)*

Ma 10/12 ■ 1457 Einem Würfel mit der Kantenlänge a sei eine Kugel einbeschrieben. Ferner sei ε eine Ebene, die durch eine der Würfelkanten sowie durch den Mittelpunkt einer der quadratischen Begrenzungsflächen des Würfels geht, die mit dieser Würfelkante keinen Punkt gemeinsam hat. Man berechne den Flächeninhalt des Kreises, in dem sich die Ebene ε und die Kugel schneiden.

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Ph 10/12 ■ 1458 Ein Flugzeug A fliegt in einer Höhe $h=4000$ m mit einer Horizontalgeschwindigkeit $v=500$ km h^{-1}. In welcher waagerecht gemessenen Entfernung x_0 (siehe Bild) vom Punkt B muß ein beliebiger Körper aus dem Flugzeug abgeworfen werden, damit er im freien Fall in B auftrifft? (Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

Prof. Dr. V. Hajko, TH Košice (ČSSR)



Ch 10/12 ■ 1459 Wieviel g 95 %iges Natriumkarbonat sind zur Herstellung von 10 l 0,2 normaler Lösung erforderlich?

G. Brandes

„Immer nur Spalt-Tabletten.
Warum bekomme ich nicht auch mal Dioxphenylactanolisaopropyaminsulfat wie die Schulzen?"

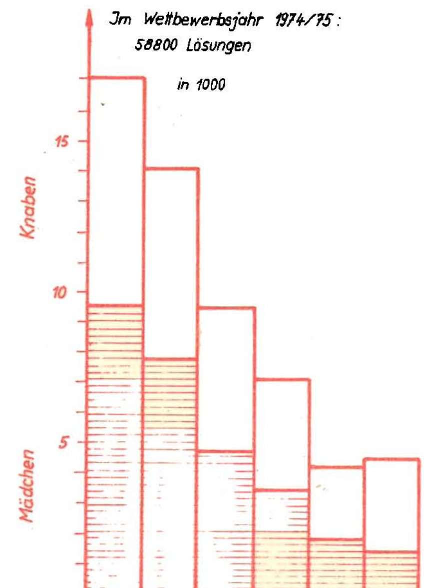
alpha-Wettbewerb 1974/75 Preisträger

Bodo Heise, Görlitz; **Andrea Dreyer,** Cottbus; **Frank Lohmeyer,** Zittau; **Jens Schumann,** Coswig; **Harry Höfer,** Dorndorf; **Jörg Pöhland,** Klingenthal; **Peter-Alexander Pöhler,** Dresden; **Jürgen Anders,** Dahlewitz; **Frank Herzel,** Güstrow; **Falk und Karsten Breuer,** Radebeul; **Esther Wolf,** Hoyerswerda; **Frank Eisenhaber, Bettina Dähn,** beide Güstrow; **Rolf Kamieth,** Kakerbeck; **Gerd Birnbaum,** Spitzkunnersdorf; **Jens Peter Mönch,** Berlin; **Klaus-Dieter Beck,** Potsdam; **Frank Meurer,** Dietzhausen; **Olaf Racke,** Neubrandenburg; **Marion Breitschuh,** Berlin; **Peter Dittrich,** Rudolstadt; **Franz Sander,** Görlsdorf; **Alois Weninger,** Knittelfeld (Österreich); **Eva Gerstner,** Dresden; **Ullrich Scherf,** Eisenach; **Almut Beckmann,** Steinbach-Hallenberg; **Cornelia Krümmling,** Neuenhofe; **Andreas Hempler,** Rüdnitz; **Heike Ender,** Lössau; **Thomas Wingeß,** Fambach; **Friedel Messerschmidt, Bettina Römhild,** beide Trusetal; **Jürgen Wage,** Mittelstille; **Heinz-Olaf Müller,** Schmalkalden; **Birgit Thomas,** Zittau; **Henry Ribbe,** Thaldorf; **Martina Schmidt, Yvonne Pforr, Andrea Thränhardt,** alle Rotta; **Stefan Gondlach,** Zittau; **Bärbel Kiel,** Niederorschel; **Manuela Lehmert,** Worbis; **Iris Reinhold,** Wingerode.

Vorbildliche Leistungen

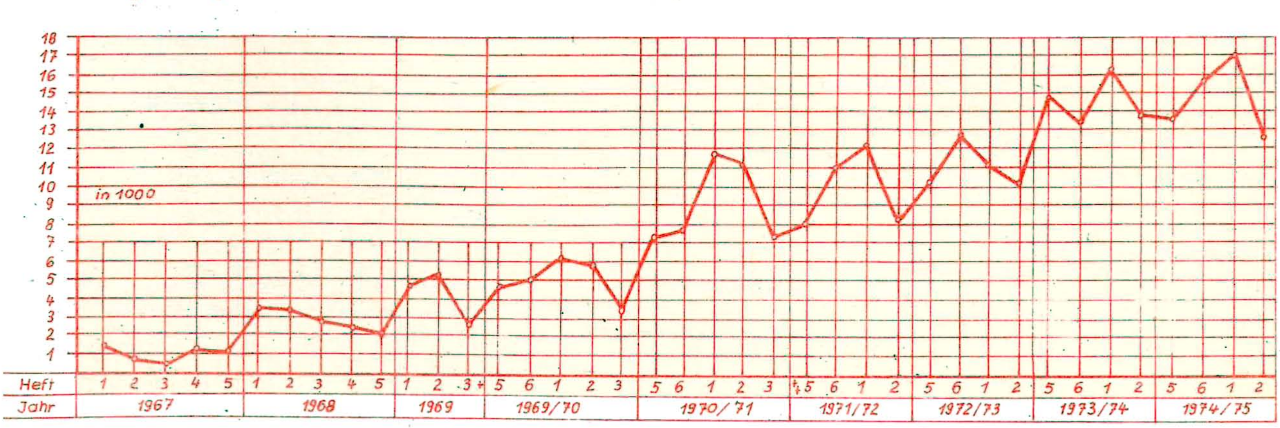
Reiner Burkhardt, Voigtsdorf; Carsten Rähder, Zittau; Undine Nathan, Hoyerswerda; Gabriele Orgis, Bernsbach; Margrit Weibrecht, Bad Salzungen; Steffen Pankow, Zittau; Thomas Mittelbach, Plessa; Eckart Möbius, Schwerin; Thomas Hartwig, Dresden (Kl. 3); Birgit Lang, Karl-Marx-Stadt; Karola Näther, Leipzig; Uwe Zscherpel, Meerane; Ulrike Baumann, Radebeul; Frauke und Burkhard Maess, Bad Doberan; Claudia Steiber, Lienz (Österreich); Kerstin Zirnstein, Pirna; Uwe Krebs, Dresden; Udo Schmidt, Schulzendorf; Roderich Winkler, Schwerin; Hans Georg Lobert, Roßleben; Stefan Schuster, Meißen; Christine Schober, Rostock; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Gundula Göllner, Dresden; Annelie Meyer, Silberstraße; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Wilfried Rentsch, Dresden; Volker Beyes, Berlin; Christian Buchta, Felixdorf (Österreich); Bernd Hanke, Großschweidnitz; Uwe Kintzel, Erfurt; Klaus Baumgart, Dresden; Wolfgang Stein; Rudolstadt; Axel Haubeiß, Ringleben; Michael Rehm, Torgau; Gunter Rothämel, Knut Enter, Frank Wurschi, Annette Recknagel, Petra Recknagel, Sabine Munk, Birgit Hoffmann, alle Steinbach-Hallenberg; Cornelia Brauer, Volker Thiele, Erika Trautvetter, Doris Trautvetter, alle Neuenhofe; Silke Zimpel, Dingelstädt; Frank Jeschek, Kloster; Silvio Schmidt, Thomas Gerth, Sabine Eberhardt, Dietmar Müller, Ines Rieger, alle Schmalkalden; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Elke Herrlich, Bad Gottleuba; Holger Hanisch, Lobenstein; Frank Kunze, Greußen; Matthias Kasparek, Bodo Pfuhl, beide Rotta; Frank Höpfner, Wolgast; Gerald Sommer, Ines Grigoleit, Gabriele Schubert, alle Zittau; Marion Sölter, Westgreußen; Uwe Heverhagen, Clingen; Kerstin Fritze, Niederorschel; Doris Warschun, Marita Freyer, Sylvia Müller, alle Rüdigershagen; Kirsten Rosenow, Altentreptow; Dietmar Glanz, Kefferhausen; Thomas Merscher, Berlin; Monika Wehling, Wingerode; Iris Abt, Elke Hüfner, Birgit Weyh, Wolfgang Hensel, alle Fambach; Kerstin Weisheit, Annette Rennhack, Beate Engelhaupt, Sybille Wiegand, alle Roßdorf; Elke Specht, Jörg Voigtberger, beide Mittelstille; Bernd Müller-Lustig, Ernstthal; Petra Biehain, Horka; Dorit Grunert, Lössau; Bernd Kasch, Bernd Bethke, Carola Frank, Marion Buckmann, Silvia Heidrich, alle Stralsund; Steffi Krauß, Berlingerode; Falk Neumann, Hoyerswerda; Thomas Bienek, Schwepnitz; Christel Mitzenheim, Jena; Susanne Zöllner, Halle; Guntram Türke, Auerbach; Gunter Rothämel, Steinbach-Hallenberg; Grit Schulze, Cottbus; Uwe Haberlandt, Leipzig; Elke Pfannschmidt, Wiederstedt; Jörg Butter, Freiberg; Manuela Marpert, Markersdorf; Uwe Feldberg, Worbis; Ina Spanaus, Schleusingen; Anne-Kathrin Endtricht, Görlitz; Heike Arnold, Grimma; Simone Hansche, Klausdorf; Jana Michaelis, Bad Salzungen; Ute Jentzsch, Coswig; Gunter Fix, Mittelbach; Mario Binkowski, Demmin; Angelika Radtke, Mittweida; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Henri Koch, Arnstadt.

Hinweis: Die Namen der Teilnehmer am Wettbewerb, die das Abzeichen in Gold für drei- oder mehrjährige Teilnahme erhielten, veröffentlichen wir in Heft 1/76. d. Red.



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn in %	44	45	50	52	56	67
Mä in %	56	55	50	48	44	33

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs



Zufall und Wahrscheinlichkeit

Teil 2

Der Fehler der in Übung 5 dargestellten „Lösung“ bestand darin, daß wir nicht beachtet haben, daß das benutzte Additionsgesetz nur für einander ausschließende Ereignisse gilt. Wenn eines der Elementarereignisse $A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{31}, A_{15}, A_{24}, A_{33}, A_{42}, A_{51}$ eintritt, so treten aber sowohl A als auch B ein. Also schließen A und B einander nicht aus.

Durch dieses Beispiel werden wir auf eine neue Definition geführt:

Unter dem *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Ereignisse A und B versteht man die Vereinigung aller Elementarereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_v$ mit folgender Eigenschaft: Tritt E_i (i 1, 2, ..., v) ein, so auch A und B.

Allgemein gilt das Additionsgesetz für Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Daraus erhält man das Additionsgesetz für einander ausschließende Ereignisse, wenn man bedenkt, daß sich zwei Ereignisse genau dann ausschließen, wenn $A \cap B = U$, also $P(A \cap B) = 0$.

Im Beispiel ist $A \cap B = A_{11} \cup A_{13} \cup A_{22} \cup A_{31} \cup A_{15} \cup A_{24} \cup A_{33} \cup A_{42} \cup A_{51}$ und somit

$$P(A \cup B) = \frac{16}{36} + \frac{21}{36} - \frac{9}{36} = \frac{5}{6}.$$

Übung 6: Man beweise: Sind A und B zufällige Ereignisse, so gilt

$$P(A \cap B) \leqq P(A) \leqq P(A \cup B) \leqq P(A) + P(B)$$

Unter welchen Bedingungen gelten die einzelnen Gleichheitszeichen?

3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unter der *bedingten Wahrscheinlichkeit* $P(A/B)$ verstehen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis A eintritt, wenn das Ereignis B eingetreten ist. Wir wollen uns diesen Begriff wieder am Beispiel des einmaligen Würfelns klarmachen.

Seien A: Gerade Augenzahl würfeln
und B : Mindestens 5 Augen würfeln.
Damit ist $A \cap B$: Genau 6 Augen würfeln.
Offenbar sind

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3} \text{ und } P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

$P(A/B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine gerade Zahl erzielt zu haben, wenn die Augenzahl mindestens 5 beträgt. Es gilt $P(A/B) = \frac{1}{2}$, denn mögliche Fälle sind jetzt 5 und 6, aber günstig ist nur die 6. Ferner ist $P(B/A) = \frac{1}{3}$, wovon der Leser sich selbst leicht überzeugt. Allgemein gilt: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Löst man diese Gleichung nach $P(A \cap B)$ auf, so erhält man eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts der Ereignisse A und B aus der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ von A bezüglich B und der Wahrscheinlichkeit von B (Multiplikationsgesetz für Wahrscheinlichkeiten):

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

■ *Übung 7:* In einem Bekleidungswerk erweisen sich 96 % der Anzüge als tragbar. Von jeweils 4 dieser Anzüge sind im Mittel 3 erste Wahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Anzug dieses Werkes zur ersten Wahl gehört?

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt

$$P(A/B) = P(A).$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn aus ihr folgt auch

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B),$$

d. h., man kann die Variablen, die für die Ereignisse stehen, vertauschen.

Für unabhängige Ereignisse A und B hat das Multiplikationsgesetz die einfache Form:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Beispiel: Schütze 1 erzielt 80 % Treffer, Schütze 2 70 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens ein Schuß im Ziel landet, wenn beide gleichzeitig schießen?

Seien A: Schütze 1 trifft und B: Schütze 2 trifft.

Gesucht ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Da A und B unabhänge Ereignisse sind, ist

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$ und

$P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94.$

Schließlich wollen wir noch den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit angeben und mit Hilfe der bereits bekannten Gesetze beweisen:

Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ schließen einander aus, und es sei $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$. (Unter diesen Bedingungen bilden $A_1, _2, \ldots, A_n$ ein vollständiges Ereignissystem.) Dann gilt für jedes zufällige Ereignis B:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$

und die Ereignisse $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, ..., $(B \cap A_n)$ schließen einander aus. Folglich ist

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n).$$

Wendet man noch auf jeden Summanden das Multiplikationsgesetz an, so erhält man die Behauptung.

Beispiel: In einem VEB werden an drei Maschinen die gleichen Werkstücke produziert.

Maschine	Tagesproduktion	Ausschußanteil
1	263 Stück	$\frac{1}{25}$
2	526 Stück	$\frac{1}{50}$
3	789 Stück	$\frac{1}{25}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein willkürlich gewähltes Werkstück fehlerhaft ist?
Seien A: Werkstück fehlerhaft
und B_i : Werkstück an Maschine i produziert.
Lösung:

$$P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)+P(A/B_3)\cdot P(B_3)$$
$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{50}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1+1+3}{150}=\frac{1}{30}.$$

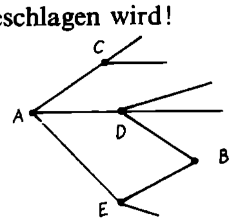
Damit möchten wir unseren kurzen Ausflug in die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beenden. Wer noch weiter in sie eindringen will, sei auf die beiden Literaturangaben am Ende dieses Beitrages verwiesen. Aus diesen Büchern entnahmen auch wir zahlreiche Anregungen und Beispiele.
Zur Übung fügen wir noch einige Aufgaben an, die mit den Mitteln unserer beiden Beiträge gelöst werden können.

4. Übungsaufgaben

▪ *Übung 8:* In einer Stadt langjährig durchgeführte Beobachtungen ergaben, daß von 100000 Kindern, die das 10. Lebensjahr erreichten, im Mittel 82277 das 40. und 37977 das 70. Lebensjahr erreichen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein 40jähriger das 70. Lebensjahr erreicht?

▪ *Übung 9:* Jemand schreibt an 6 Personen Briefe und dazu 6 Umschläge. In jeden Briefumschlag legt er auf gut Glück einen Brief. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens ein Brief in den richtigen Umschlag kommt?

▪ *Übung 10:* Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man von A nach B gelangt, wenn an jeder Kreuzung jede Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit eingeschlagen wird!



▪ *Übung 11:* Ein Schütze erzielt 80% Treffer, ein zweiter 40 ‰. Jeder gibt genau einen Schuß auf eine Zielscheibe ab. Es wird danach genau ein Treffer festgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er vom ersten Schützen stammt?

▪ *Übung 12:* 15 Urnen von 3 unterschiedlichen Typen sind wie folgt mit schwarzen und weißen Kugeln gefüllt:

Typ	Anzahl	schwarze K.	weiße K.
I	2	10	5
II	6	8	2
III	7	10	6

a) Eine Kugel wird willkürlich gezogen. Sie ist schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus einer Urne vom Typ I stammt?
b) Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, bei zwei Ziehungen zweimal weiß zu ziehen, wenn man die zuerst gezogene Kugel vor dem zweiten Zug zurücklegt.

Literaturhinweise

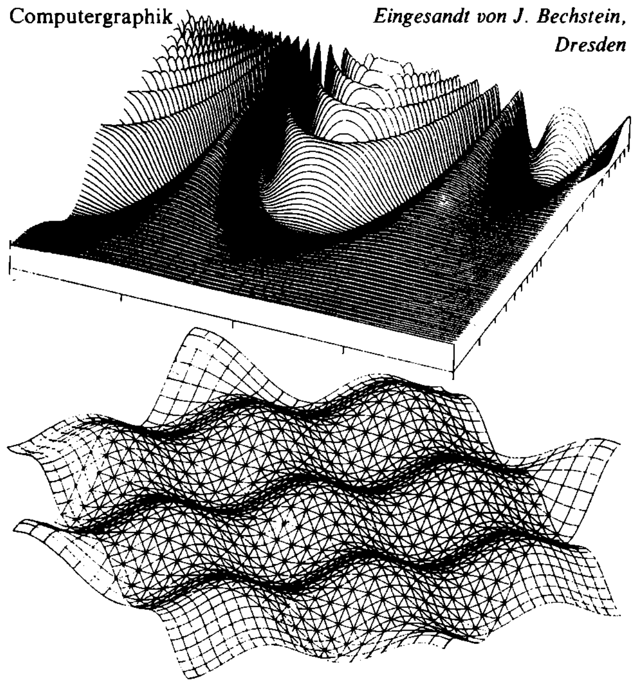
Gert Maibaum: **Wahrscheinlichkeitsrechnung**
besonders geeignet für den fakultativen Unterricht an EOS, 223 Seiten, zahlreiche Abb. und Aufgaben Preis 7,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

B. W. Gnedenko/A. J. Chintschin: **Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung**
174 Seiten, 18 Abb. Preis 4,50 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski:
Mathematische Unterhaltungen, Teil 3
Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung
84 Seiten, 32 Abb. Preis 4,10 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

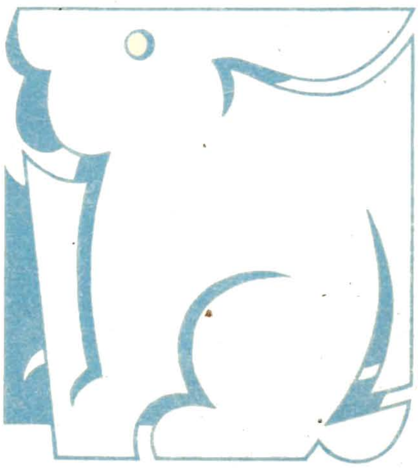
A. Renyi: **Briefe über die Wahrscheinlichkeit**
94 Seiten Preis 7,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Computergraphik *Eingesandt von J. Bechstein, Dresden*



Mit Papier selbst gestaltet

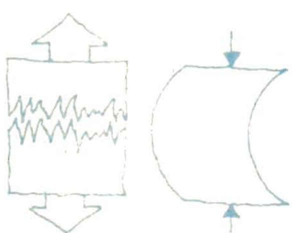
Anregung zur eigenschöpferischen Arbeit



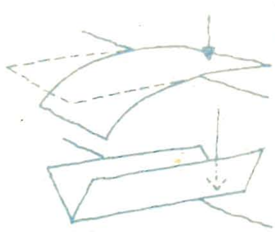
alpha-Wandzeitung

Die Texte zu dieser Wandzeitung wurden dem oben gezeigten Heft, Herausgeber: Zentralhaus für Kulturarbeit der DDR, Leipzig (Autor: B. Sikora) entnommen.

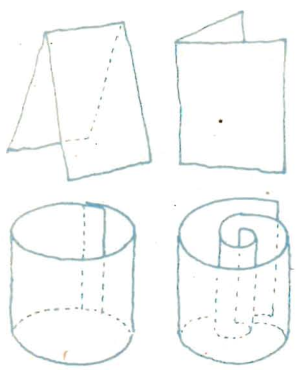
Wesentliche Papiereigenschaften



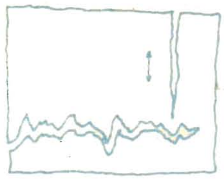
Zugwiderstand ist größer als Druckwiderstand



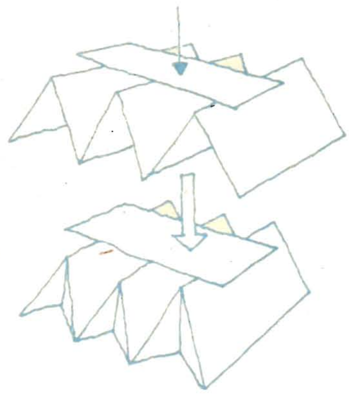
Biegung durch Eigengewicht
Stabilisierung durch Faltung



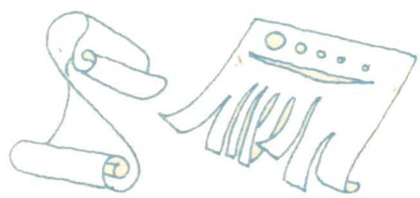
Faltung und Rollenform ermöglichen ein Aufstellen



Riss längs der Faser ist glatter als quer zur Faser



Doppelfaltung widersteht einer Flächenbelastung besser als einfache Faltung



Papier ist gut geeignet zum Biegen, Verdrehen, Einschneiden und Löchern

Papiere, Kartons, Pappen, Folien – eine Übersicht

Velourpapier
Samtige Oberfläche in verschiedenen Farben. Dekorationspapier mit vielfältiger Verwendungsmöglichkeit.

Buntpapier
Verschiedenfarbige, glänzende oder matte Oberfläche, rauhe oder gummierte Rückseite. In Blockform erhältlich.
Für Applikationen, Collagen, Silhouettenschnitte und ausgeschnittene Schrift nutzbar.

Scherenschnittpapier
Rauhes, schwarzdurchgefärbtes Material für Silhouetten und Bildschnitte, in Blockform im Handel.

Seidenpapier
Je nach Art unterschiedlich dünn, durchscheinend und weich, geringe räumliche Stabilität, weiß, gelblich eingefärbt oder bedruckt.

Werkmappen
Verschiedene Restpapiere und Karton meist im Format A 5, in Mappen abgepackt, vielseitig nutzbar.

Ein Hinweis: Es lohnt sich, für farbige Papierarbeiten geeignetes Material zu sammeln. Mit einer Palette verschiedener Papiere läßt sich leichter und phantasievoller arbeiten.
Die nachfolgend genannten Papiere und Pappen dienen vorwiegend als Hüll- und Packmaterial. Sie sind aber auch zu dekorativen Zwecken nutzbar.

Kreppapier
Dekorations- und Einwickelpapier, in Rollen und verschiedenen Farben im Handel (meist 0,5 m breit und 5 m lang). Fein gefältelte Oberfläche, vielfältig verformbares Material, zum Zusammenlegen und Knüllen gut geeignet. Exakte räumliche Formen sind nicht möglich. Reißfestigkeit quer zur Faser gering.

Pergamentpapier
Wird zum Einpacken fettiger Waren benutzt. Zu gestalterischen Zwecken ist das als „Echt Pergamentpapier" erhältliche Material nutzbar, relativ weiß und durchscheinend, für Knitterpapiere und Transparentschnitte geeignet.

Packpapier
Naturfarbig oder gefärbt, rauhe und glatte Seite. Nachbehandelte Papiere sind auf beiden Seiten geglättet und imprägniert. Wird in Rollen oder Bogen gehandelt und kann für Dekorations- und Faltarbeiten verwendet werden.

Pappe
Kräftiges naturfarbiges, eingefärbtes oder kaschiertes Material. Wird Pappe geklebt, muß dies auf Vorder- und Rückseite erfolgen, damit keine Flächenkrümmungen entstehen. Nutzbar für Buchumschläge, Behälter und Grundkörper, als Unterlage für Papierarbeiten sehr gut geeignet.

Wellpappe
Durch gewellte Pappeinlage verstärktes Material, quer zur Wellung gut biegbar, in Wellenrichtung relativ stabil.
Für räumliche Formen als eigenständiges und als Grundmaterial nutzbar.

Zeitungspapier
Holzhaltiges Papier mit großen Harzanteilen, rauh, saugfähig, vergilbt leicht, billig und gut zu verarbeiten, geringe optische Wirkung der Oberfläche.
Geeignet für Saaldekorationen (Säulenumwicklung u. ä.), aber nicht für feingliedrige, stabile Formen. Wird in Rollen geliefert, Restware in Druckereien.

Plakatkarton
Kartonmaterial mit Kreide-Kaseinbeschichtung in Plakatformaten. Beschichtung sehr empfindlich.
Kann für Tischaufsteller verwendet werden.

Schreib- und Zeichenpapier, Zeichenkarton
Mehr oder weniger holzhaltig bzw. holzfrei, verschiedene Bleichungsgrade, gut geschlossene Oberfläche, Vorderseite glatter und dichter als Rückseite. Unterschiedliche Qualität ist zu beachten. Im Format A 5 bis A 1 in Blattform im Einzelhandel, größere Formate und Zeichenkartonrollen (1,57 m breit, 55 m lang, hadernhaltiger, weißer und holzfreier Karton vom VEB Feinpapierfabriken Neu Kaliß) im Fachhandel erhältlich.
Rollenkarton ist geeignet für Faltleuchten und großformatige, anspruchvolle Dekorationsarbeiten.

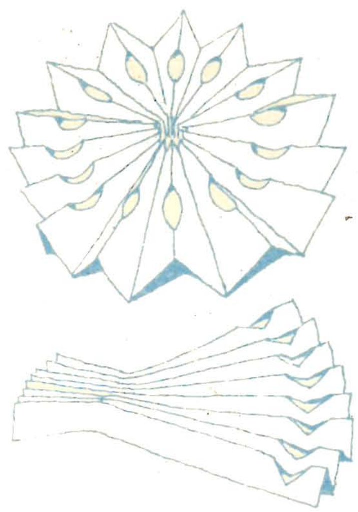
Tapeten
Tapetenreste können auf der Rückseite mit wasserfester Plakatfarbe (Nerchau-Plakatfarbe) eingewalzt, getrocknet und gegebenenfals mit PVAC-Bindemittel farblos lackiert werden.
Aus dem eingefärbten Papier lassen sich großflächige Dekorationen und Schriften ausschneiden, die mit Tapetenkleister aufgeklebt werden können.

Kunstdruckpapier und -karton
Entsteht durch ein- oder beidseitige Beschichtung hochgradig gebleichter Papiere und Kartons mit Kreide und Kaolin unter Druck und Wärmeeinwirkung, wird für Halbtondruck verwendet und ist im Fachhandel in Standardgrößen erhältlich. Zerstörung der Oberfläche bei Bearbeitung mit spitzen Gegenständen und Punktklebung. Schmierflecke entstehen leicht.
Auf dem matt oder glänzend weißen Papier stehen Striche mit Skribent und Reißfeder sehr brillant, für Federzeichnungen ist es jedoch weniger geeignet.

Folien
Klarsichtfolien als Schutz- und Veredlungsschicht für repräsentative Arbeiten, gefärbte Folien für Durchleuchtebilder, Collagen und mehrschichtige Bildschnitte sind im Einzelhandel erhältlich. Holz- und Metallfolien können als Untergrund von dekorativen Arbeiten und für Behälter und Verpackungen benutzt werden. Gold- und Silberfolien aber nur sparsam einsetzen, ebenso die bunten Folien. Sie wirken schnell kitschig.

Transparentpapier
Verhältnismäßig gut durchsichtig, relativ fest, dichte Oberfläche. Empfindlich gegenüber Feuchtigkeit (verzieht sich unregelmäßig) und Bruch, reißt leicht ein. Verwendung zum Überpausen und Korrigieren von Entwürfen, Untergrund für Zeichnungen bei Lichtpaus-Vervielfältigung. Für bestimmte Faltarbeiten (Effekt der durchscheinenden Faltung) geeignet.

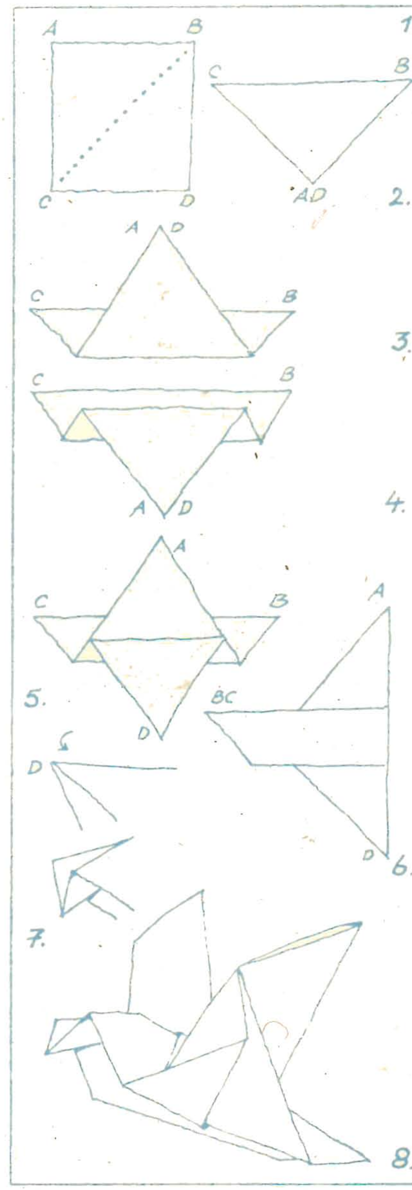
Büttenpapier
Handgeschöpftes Büttenpapier ist unterschiedlich dick, weiß, gelblich oder braun. Relativ festes Material mit dichter Oberfläche und typischem, gewelltem Rand.
Wird für künstlerische Schriftgestaltung und Federzeichnungen verwendet.

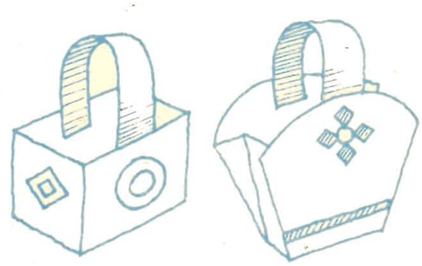


Papierstreifen gefältelt und eingeschnitten, dann aufgefächert

Pappe und Karton, gefaltet, gesteckt – eingeschnittene und geklebte Kegel

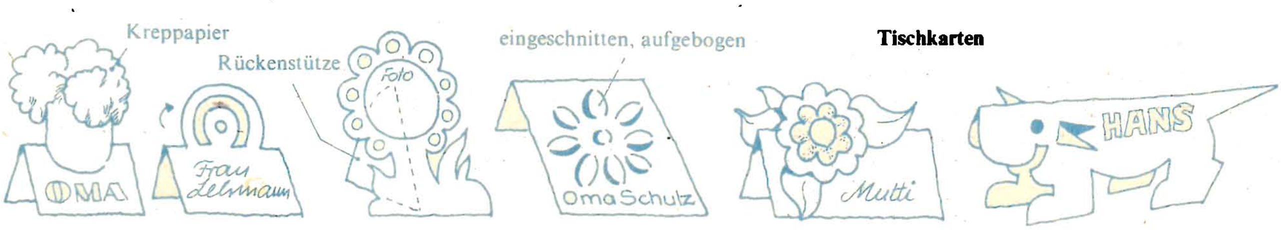
Wir falten eine „Taube“





Farbflächen sind aufgeklebt

Tischkarten



Mädchen meistern Mathematik

alpha stellt vor: Sabine Anders, Cottbus

Ich heiße Sabine Anders, bin 17 Jahre alt und besuche die 12. Klasse der EOS „A. Becker“, Cottbus. Meine Mutter (ohne Beruf), mein Vater (Elektriker) und meine Schwester (16 Jahre alt) gehören zur Familie.

Durch meinen Vater, damals selbst Liebhaber von Unterhaltungsmathematik, wurde ich bereits in frühester Kindheit durch logische Denkschulung mit der Mathematik bekannt und vertraut gemacht. Dank meiner guten Konzentrationsfähigkeit hatte ich erste Erfolgserlebnisse, die meine Freude an mathematischen Knobeleien weckten und meine Kombinationsfähigkeit forderten. Vom ersten Schultage an folgte ich dem Mathematikunterricht mit großer Aufnahmebereitschaft. In guter Mitarbeit und gewissenhaftem Anfertigen von Hausaufgaben machte sich mein Interesse für die Mathematik bemerkbar. Auch in anderen Fächern folgte ich dem Unterricht aufmerksam, so daß ich nie größere Schwierigkeiten hatte. Da meine Eltern das Ziel hatten, uns eine möglichst breite Allgemeinbildung zukommen zu lassen, gingen sie mit uns beiden Geschwistern in die Bezirksmusikschule. Seit dieser Zeit hatten unsere Mitbewohner oft Grund, sich bei uns wegen Lärms, verursacht durch mehr oder weniger qualifiziertes Klavierspiel, zu beschweren.

Bis zum vollendeten 3. Schuljahr wachte unsere Mutter streng darauf, daß wir gewissenhaft und einwandfrei unsere Pflichten (Hausaufgaben, Klavierüben) erfüllten. Bis zu meinem Eintritt in den Matheklub beschäftigte sich mein Vater mit uns außerunterrichtlich, indem er uns ständig Knobelaufgaben – selbsterdachte oder aus der Literatur gewählte – stellte. So gelang es mir, bei ABC-Olympiaden, Kreis- und Bezirksolympiaden, Preise zu erringen, wodurch ich mir meine Mitarbeit im Kreis- und Bezirksklub Cottbus verdiente. Auch in der Musikschule stellten sich bald Erfolge ein; so erhielt ich beim DDR-Ausscheid in der Fachgruppe Klavier das Prädikat sehr gut.

Übergebührende Anerkennung meiner Leistungen führte zur Überheblichkeit, die sich darin äußerte, daß ich glaubte, nichts mehr tun zu müssen, um erfolgreich zu sein. Meinen Eltern habe ich es zu verdanken, daß ich diese Krise rechtzeitig überwinden konnte. Die kontinuierliche und intensive Förderung im Kreis- und Bezirksklub ermöglichte mir die Teilnahme an den letzten drei DDR-Olympiaden. Mein Wunsch ist es, nach dem Abitur Mathematik zu studieren. Doch kann ich mir mein Leben nicht mehr ohne die Beschäftigung mit der Musik vorstellen. Mit Kerstin Bachmann (Halle, siehe alpha-Heft 3/72), deren Hobby neben der Mathematik auch Musik, das Violinenspiel ist, haben wir bei der Siegerehrung der DDR-Olympiade 1974 zusammengespielt. Wenn es auch viel Arbeit kostete, es hat uns (und den Zuhörern, d. Red.) große Freude bereitet.

Ein anderes Hobby von mir ist das Lesen. Erst kürzlich studierte ich das Buch „Spiel mit dem Unendlichen“ von der ungarischen Mathematikerin Rosza Peter geschrieben. Ich kann es jedem sehr empfehlen, auch denen, die sich nicht unbedingt intensiv mit Mathematik beschäftigen.

Seit Gründung der Zeitschrift „alpha“ nehme ich am alpha-Wettbewerb teil. Alle Leser möchte ich herzlich grüßen und zum Schluß eine Aufgabe stellen, deren Lösung Ihr im Heft 1/76 findet:

▲1▲

(1) $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 = (a+b+c+d+e)^2$

(2) $ace = a+b+c+d+e$

(3) $bce = 2(a+b+c+d+e)$

(4) $b+c=e$

(5) $d = a+c$

Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen des obigen Gleichungssystems.

Sabine Anders

alpha stellt vor: Dr. Monika Noack, Berlin

Von Beginn meiner Schulzeit an, das war im Jahre 1953, nahm ich am Schulleben, insbesondere auch an allem, was an Außerschulischem geboten wurde, mit viel Freude teil. Ich war ein aktiver und begeisterter Pionier, was bei dem abwechslungsreichen Pionierleben, das es an meiner Schule gab, nicht schwer war. In der 8. Klasse nahm ich an der 1. Berliner Mathematik-Olympiade teil. Von 1961 bis 1965 besuchte ich die EOS „Heinrich Hertz“, die damals allerdings noch nicht Spezialschule für Mathematik war. In meiner Freizeit trieb ich viel Sport, war in einem Chor und zeitweilig in noch anderen Arbeitsgemeinschaften, ich las viel, besuchte regelmäßig Theater und Konzerte, nahm an Mathematikzirkeln und Spezialistenlagern Junger Mathematiker teil und bemühte mich als FDJ-Leitungsmitglied um eine gute FDJ-Arbeit in meiner Klasse und Schule. Als Schülerin der 11. Klasse gehörte ich zu jenen acht Jungen Mathematikern, die zur VI. Internationalen Mathematik-Olympiade nach Moskau delegiert wurden, und erhielt dort einen dritten Preis, was mir bei der VII. IMO in Berlin, an der ich auch teilnahm, leider nicht gelang.

Meine Entscheidung für ein Mathematikstudium stand schon lange vor dem Abitur fest, und so nutzte ich die den sechs weiteren IMO-Kandidaten und mir gebotene Möglichkeit, statt des UTP eine spezielle Betreuung durch einige Mitarbeiter der Humboldt-Universität zu erhalten. Darüber hinaus besuchte ich beispielsweise noch die Vorlesung „Lineare Algebra“ des 1. Studienjahres. Später im Studium nahm ich dann auch viele Möglichkeiten wahr, fakultativ Lehrveranstaltungen zu besuchen. Mir hat das Studium der Mathematik immer viel Spaß gemacht, und auf Grund der relativ guten Vorbereitung durch Mathematikzirkel und ähnliche Veranstaltungen fiel es mir auch – vor allem zu Beginn des Studiums – leichter als manchem anderen. Der Übergang von der Schule zur Universität bringt für jeden Schwierigkeiten mit sich. Statt der gewohnten Schulstunden sind Vorlesungen, Übungen und Seminare zu besuchen, und von ganz entscheidender Bedeutung wird ein umfangreiches Selbststudium. Man muß sehr fleißig, beharrlich und kontinuierlich arbeiten und sich an tagtägliches Ringen um das Verständnis des Stoffes gewöhnen. Aber die Freude an der Beschäftigung mit der Mathematik hat das bei mir nicht gemindert. – Seit dem Abschluß meines Forschungsstudiums bin ich Assistent am Bereich Mathematische Optimierung der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität und als solcher an der Ausbildung der künftigen Diplom-Mathematiker beteiligt.

Meine Verbindung zur Mathematik-Olympiade ist nie abgerissen; ich bin Mitglied des Bezirkskomitees für die Olympiaden Junger Mathematiker Berlin, unterrichte in den Berliner Spezialistenlagern und bei der Vorbereitung unserer IMO-Kandidaten, bin als Koordinator bei der Berliner- und DDR-Olympiade tätig und nicht zuletzt Sekretär der Mathematischen Schülergesellschaft bei der Humboldt-Universität zu Berlin. Seit dem vergangenen Jahr betreue ich im Rahmen der MSG vier Junge Mathematiker, was mir viel Freude bereitet, und ich hoffe, daß diese vier, die in Berlin bisher sehr erfolgreich waren, bei künftigen Olympiaden auch wieder ein Wort mitzureden haben.

Aus meiner Arbeit in der MSG

Alle Pioniere und FDJ-ler der Mathematischen Schülergesellschaft bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universtität zu Berlin (MSG) kommen wöchentlich einmal in ihren Zirkeln (Klassenstufe 7 bis 12) zusammen. Sie werden von Mitarbeitern und Forschungsstudenten der Sektion Mathematik betreut. Die Teilnehmer lernen teils direkt im Unterricht, teils durch Selbststudium ausgewählte, altersangemessene Kapitel der Mathematik kennen, die oft über den Schulstoff hinausgehen. Daneben werden natürlich auch Aufgaben gelöst, die Olympiadecharakter haben, denn das gute Abschneiden unserer Berliner IMO-Teilnehmer in diesem Jahr ist uns Verpflichtung, alles zu tun, damit wir auch zu künftigen Internationalen Mathematik-Olympiaden Teilnehmer aus Berlin delegieren können, die unsere Republik würdig vertreten. – Die Besten jeder Klassenstufe erhalten neben den Zirkeln eine Spezialbetreuung durch Mitarbeiter der Sektion Mathematik. Die Spezialgruppe der Klasse 9 leite ich seit einem Jahr. Ihr gehören vier Schüler an. Bisher beschäftigten wir uns vor allem mit Geometrie. Die Schüler halten Vorträge über kleine Kapitel, und wir lösen Aufgaben, die wir meist sowjetischen Aufgabensammlungen, die für unsere Zwecke besonders gut geeignet sind, entnehmen. Einige davon werde ich aufschreiben:

▲Aufgabe▲ Die Mitten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ und $\overline{ED}$ des konvexen Fünfecks $ABCDE$ seien durch Strecken verbunden. Die Mitten H und K dieser Strecken seien von neuem miteinander verbunden. Man beweise, daß die Strecke $\overline{HK}$ parallel zur Strecke $\overline{AE}$ ist und daß die Länge von $\overline{HK}$ gleich einem Viertel der Länge von $\overline{AE}$ ist.

▲Aufgabe▲ Es sei eine der Diagonalen eines gegebenen Sehnenvierecks Durchmesser des Umkreises. Man beweise, daß die Längen der Projektionen der einander gegenüberliegenden Seiten auf die andere Diagonale gleich sind.

s. auch S. 138 *Monika Noack*

alpha stellt vor: die sechs Teilnehmerinnen der XVII. IMO

Land	Dem. Rep. Vietnam	Niederlande	Mongolische VR	SR Rumänien	SR Rumänien	Sowjetunion
Name Vorname	**Phan Vu Diem Hang**	**Geldof** **Susan**	**Zotondambon** **Sarantuja**	**Draghicescu** **Ivana**	**Nastase** **Ileana**	**Howanowa** **Tatjana**
Schule	Mathematik-Schule der Universität Hanoi	Goese-Lyceum Driewegen	1. Schule Ulan Bator (Kl. 10)	Lic. „M. Viteacul Bukarest	M. Viteaculu Lic. Bukarest	444. Schule Moskau (Kl. 9)
Beruf des Vaters Beruf der Mutter Hobbys Berufswunsch	Maschinen-Ingenieur Arbeiterin Musik Mathematiklehrerin	Arzt Hausfrau leichte Musik, Sport Mathematik in technischer Richtung	Ingenieur Hochschullehrerin Literatur Ökonomiestudium	Ingenieur Ingenieur Zeichnen Physikstudium	Rechtsanwalt Ökonom Musik Ingenieur	Ingenieur Chemielehrerin Sport Mathematikstudium
Wer weckte das Interesse für die Mathematik?	Durch eigene Beschäftigung mit der Mathematik	Durch den Mathematiklehrer wurde Interesse geweckt	Mathematiklehrer in Kl. 7	Freund des Vaters von Beruf Ingenieur	ganze Familie, insbesondere großer Bruder	Mathematiklehrerin in Klasse 4

In freien Stunden alpha heiter

Was soll man machen, wenn es keine karierten Blöcke gibt?

D. Fink, stud. math. an der TH „Otto v. Guericke", Magdeburg

Diophant

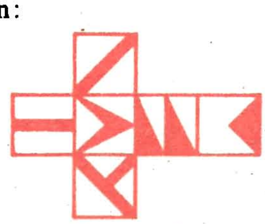
Wenn man die Buchstaben im Namen des griechischen Mathematikers DIOPHANT in geeigneter Weise durch Ziffern von 0 bis 9 ersetzt und von der so entstandenen Zahl das $3n$-fache ($n = 3, 4, \ldots, 27$) bildet, erhält man neunstellige Zahlen, in denen sich jeweils eine Ziffernfolge dreimal wiederholt.
Von den möglichen 25 Gleichungen seien zur Erleichterung einige angegeben.

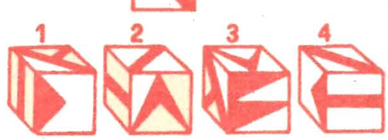
3 · 4 · D I O P H A N T = D I R D I R D I R
3 · 7 · D I O P H A N T = I H T I H T I H T
3 · 10 · D I O P H A N T = O N E O N E O N E
3 · 11 · D I O P H A N T = P E N P E N P E N
3 · 16 · D I O P H A N T = H T I H T I H T I
3 · 17 · D I O P H A N T = A I T A I T A I T
3 · 19 · D I O P H A N T = N E O N E O N E O
3 · 25 · D I O P H A N T = T A I T A I T A I

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Ungarische Würfeleien

Aus der ungarischen Rätselzeitschrift „Fules" ausgeschnitten:





Welcher Würfel gehört zu dem dargestellten Netz?

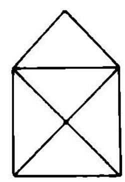
IMO-Spielerei

Auf der Rundfahrt der Freundschaft (Burgas–Tirnowo–Sofia) wurde auch viel geknobelt. *M. Marczinek* errechnete $2^{100} = 1267650600228229401496703205{*}{*}{*}$ und fragt alle *alpha*-Leser:
Wie heißen die letzten 3 Ziffern von 2^{100} in Dezimalschreibweise?

Das Haus vom Nikolaus

Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Haus zu zeichnen, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Strecke zweimal zu durchfahren?
(*Hinweis:* Die Diagonalen sind je eine Kante, ihr Schnittpunkt zählt nicht als Knoten.)

Dr. G. Maeß, Sektion Numerische Mathematik an der Universität Rostock



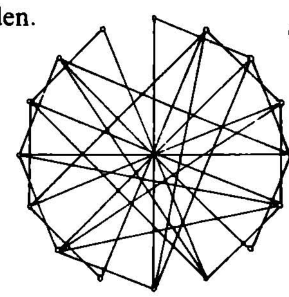
Heitere Interpretation einer Olympiadeaufgabe

An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander. Es ist zu beweisen, daß es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.
Wie originell ein Schüler der Klasse 9 diese Aufgabe löste, findest du auf Seite 144.

In einem Zug

Die Figur soll ohne abzusetzen nachgezogen werden. Dabei ist die Verbindung zweier Punkte stets eine Strecke, und keine Verbindung darf zweimal benutzt werden.

Oberlehrer Dipl.-Math.-Lehrer K. Becker, Lübtheen



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{M A T H E} \\ +\text{A L P H A} \\ \hline \text{S P A S S} \end{array}$$

H. Oehl, München

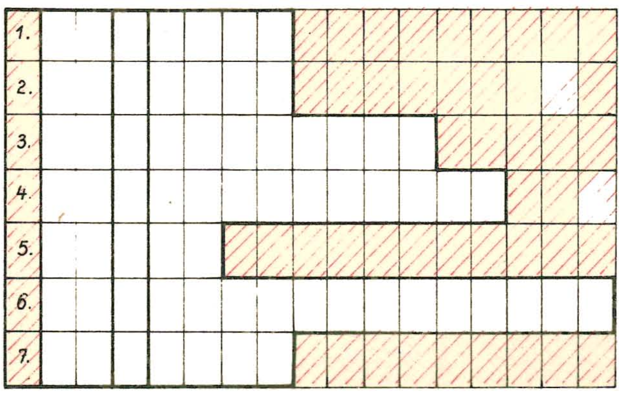
Die Rufnummer

Willst du mich heute noch erreichen,
dann wähle so vier Zahlenzeichen:
Die hintere Zahl aus zwei Ziffern
kann die vordere schnell liefern,
wenn man davon ganz ungeniert
genau ein Zehntel subtrahiert.
Von den vier Ziffern dann – summiert,
fühl'n Mystiker sich attackiert.

Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Kreisvolkshochschule Netzschkau

Füllrätsel

Die dritten Buchstaben der Wortbilder der durch die angegebenen Eigenschaften bestimmten mathematischen Begriffe ergeben in der festgelegten Reihenfolge gelesen das Wortbild des gesuchten Begriffes.

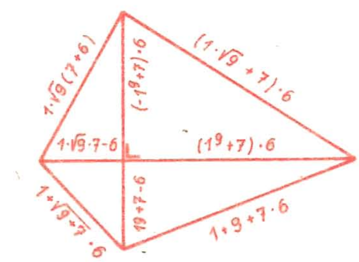


1. Zeile: Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet.
2. Zeile: Viereck mit vier Symmetrieachsen.
3. Zeile: Menge der gemeinsamen Punkte einer Trapezfläche und der Mittelparallelen ihrer Grundseiten.
4. Zeile: Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen.
5. Zeile: Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt gleichweit entfernt sind.
6. Zeile: Menge aller Punkte, deren jeder von zwei gegebenen Punkten jeweils gleichen Abstand hat.
7. Zeile: Vieleck bestimmter Eckenzahl, das bei jeder Lage seiner Eckpunkte einen Inkreis hat.

Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln

1976

$$
\begin{aligned}
1976 &= 197\cdot 6+19\cdot 7\cdot 6+1\cdot 9-7-6\\
&=(1^9\cdot 76)(-1+\sqrt{9}\cdot 7-6)\\
&=19(7-6)(1-9)(-7-6)\\
&=(1+97+6)\cdot 19(7-6)\\
&=(1+97+6)\cdot 19^{7-6}\\
&=19(7+6)(1\cdot 9-7+6)\\
&=\sqrt{19\cdot 76}(1+9+7\cdot 6)\\
&=(1+97+6)(19+76):(1-9+7+6)\\
19+76 &= 1\cdot 9+76+1\cdot 9+7-6\\
19-76 &= 1-97+6-1\cdot 9+7\cdot 6\\
19\cdot 76 &= [1-\sqrt{9}(7+6)]\cdot(1+\sqrt{9}-7\cdot 6)\\
19:76 &= (19+7-6):(1+\sqrt{9}+76)\\
19^{76} &= (19^{7-6})1^9\cdot 76\\
\sqrt[19]{76} &= \underline{\sqrt{1\cdot 9\cdot 7\cdot 6-1-\sqrt{9}-7-6}}\quad \sqrt{19\cdot 76(-1\cdot 9+7+6)}\\
\frac{1}{9}+\frac{7}{6} &= \frac{1+9+7+6}{19-7+6}\\
\frac{1}{9}-\frac{7}{6} &= \frac{19(-7+6)}{19-7+6}\\
\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{6} &= \frac{1-9+7-6}{(1-\sqrt{9}-7)\cdot 6}\\
\frac{1}{9}:\frac{7}{6} &= \frac{\sqrt{1\cdot 9}+7-6}{1-9-7-6}\\
1+9+7+6 &= \frac{1\cdot 9+7+6}{1}+\frac{1+9-7+6}{9}+\frac{1-9+7-6}{7}+\frac{19-7-6}{6}\\
\frac{19+76}{19-76} &= \frac{1\cdot 9+7-6}{-19+7+6}=\frac{(1+9)(7-6)}{(1-9+7)\cdot 6}
\end{aligned}
$$

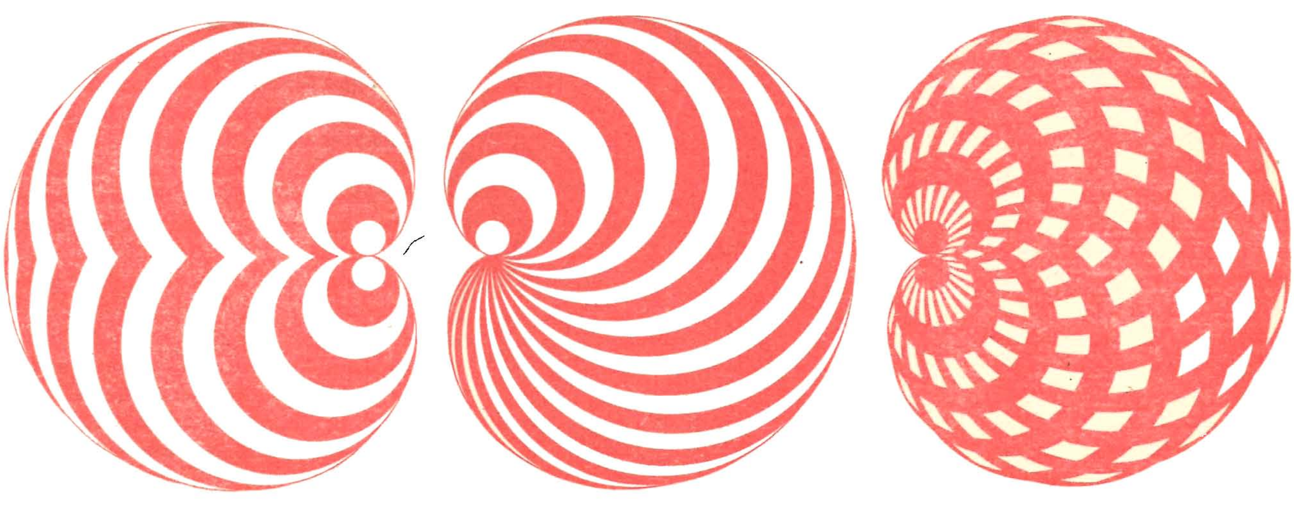


$A=(1^9\cdot 7\cdot 6)^{(19-7):6}$

Ing. H. Decker, Köln

Dynamische Schönheit

H. Baravalle, New York



ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

● Einen interessanten geometrischen Trugschluß sandte uns *Ralf Schulze*, Mitglied der *Mathematischen Schülergesellschaft* (MSG) bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin.

Er liefert einen „Beweis“, daß ein rechter Winkel gleich einem stumpfen ist. Dabei benutzt er eine Skizze, die durch folgende Konstruktion erhalten wurde (Bild 1): Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr zwei Punkte A und B. In A wird zu g die Senkrechte s errichtet, auf der D ein beliebiger Punkt ($\neq A$) ist. Weiterhin wird in B ein stumpfer Winkel an g angetragen, so daß der freie Schenkel s in der gleichen Halbebene wie D liegt. Um B wird ein Kreis mit $\overline{AD}$ geschlagen, der s in C schneidet. G sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu AB und CD.

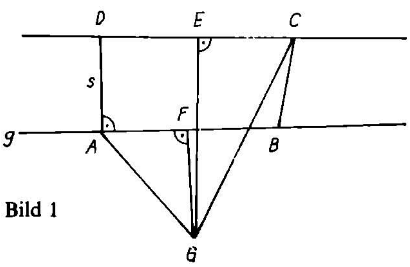


Bild 1

Nun ist $\overline{\sphericalangle DAB}=90°$ und $\overline{\sphericalangle ABC}>90°$.

Außerdem gilt $\overline{AD}=\overline{BC}$ (1)

und, wenn die Mittelpunkte von AB bzw. DC mit E bzw. F bezeichnet werden,

$\overline{DE}=\overline{CE}$, $\overline{\sphericalangle DEG}=\overline{\sphericalangle CEG}$ (2)

sowie $\overline{AF}=\overline{BF}$, $\overline{\sphericalangle AFG}=\overline{\sphericalangle BFG}$ (3)

Aus den Kongruenzsätzen gewinnt man

$\triangle DEG \cong \triangle CEG$ (4)

und $\triangle AFG \cong \triangle BFG$ (5)

Daraus folgt weiter

$\overline{DG}=\overline{CG}$ (6)

und $\overline{AG}=\overline{BG}$ (7)

Aus (1), (6) und (7) erhält man

$\triangle ADG \cong \triangle BCG$ und daraus (8)

$\overline{\sphericalangle DAG}=\overline{\sphericalangle CBG}$ (9)

Außerdem gilt wegen (5)

$\overline{\sphericalangle FAG}\cong\overline{\sphericalangle FBG}$. (10)

Aus (9) und (10) folgt schließlich

$90°+\overline{\sphericalangle FAG}=\overline{\sphericalangle DAG}=\overline{\sphericalangle CBG}$

$=\overline{\sphericalangle CBF}+\overline{\sphericalangle FBG}$,

also $90°=\overline{\sphericalangle CBF}$.

Habt Ihr, liebe *alpha*-Leser, den Trugschluß in diesem „Beweis“ gefunden? Wenn nicht, so führt einmal die Konstruktion der angegebenen Figur exakt durch. Dann werdet Ihr feststellen, daß in der angegebenen Skizze (Bild 1) „manipuliert“ wurde. Die richtigen Lagebeziehungen der einzelnen Punkte zeigt Bild 2. Es kann also von (9) nicht auf (10) und somit auf die Behauptung geschlossen werden.

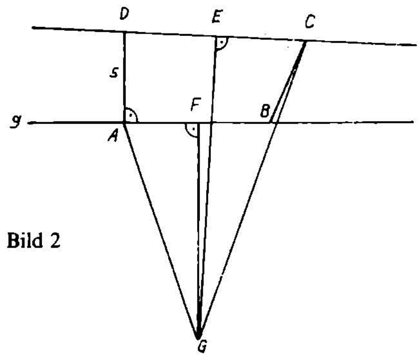
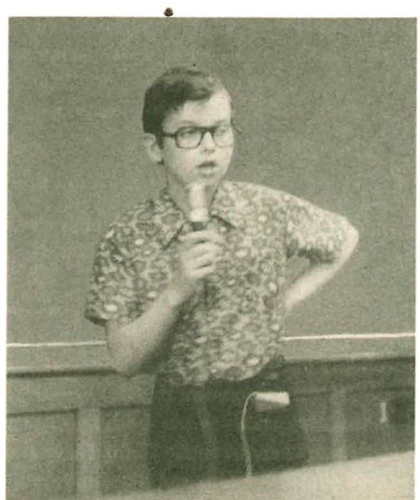


Bild 2

● Die Berliner MSG besteht seit etwa drei Jahren. In ihr arbeiten die besten *Jungen Mathematiker* von der 7. Klasse an in Gruppen von etwa 12 Mitgliedern zusammen. Außer der Zirkeltätigkeit werden Selbststudium, Einzelkonsultationen und Kurzlehrgänge in den Schulferien durchgeführt. Alljährlich findet ein Schülerkolloquium statt, auf dem MSG-Mitglieder Vorträge über mathematische Probleme halten, mit denen sie sich im Selbststudium beschäftigt haben.

So sprach *Gerald Görner* (siehe Foto) über die *Codierung von Nachrichten*. Dabei führte er u. a. aus:

„Wenn man eine Nachricht übermittelt, dann kann es doch einmal passieren, daß sie verfälscht wird, so z. B. auch beim Transport einer Dualzahl in einem Elektronenrechner. Deshalb fügt ein elektronischer Rechner einer eingegebenen Dualzahl, z. B. LLOL oder LOLO, eine Prüfstelle hinzu, durch deren Wert die Anzahl der L in der neuen Dualzahl immer ungerade wird. In unserem Beispiel erhalten wir also LLOLO bzw. LOLOL. Ist nun die Anzahl der L in einer transportierten Dualzahl gerade, z. B. LOOLO,



kann man nur sagen, daß die Nachricht verfälscht ist. Es ist aber von Bedeutung, die verfälschte Stelle zu ermitteln. Mit einer solchen Methode, die das für vierstellige Dualzahlen ermöglicht, wollen wir uns nachfolgend beschäftigen.

Dabei transportieren wir unsere vierstellige Dualzahl als siebenstellige Nachricht mit 3 Kontrollstellen. Die Dualzahl steht auf den Stellen 3, 5, 6 und 7. Die Kontrollstellen 1, 2 und 4 werden so belegt, daß die Summe der L auf den Stellen 1, 3, 5 und 7, auf den Stellen 2, 3, 6, 7 und 4, 5, 6, 7 jeweils ungerade wird. Die Dualzahl LLOL wird somit als OLLLLOL übertragen. Wäre stattdessen die die Nachricht OLLLOOL angekommen, so könnte man den Fehler durch folgende Überlegungen finden:

(1) Die Summe der L auf 1, 3, 5, 7 ist 2, also liegt ein Fehler vor.

(2) Die Summe der L auf 2, 3, 6, 7 ist 3, also kein Fehler.

(3) Die Summe der L auf 4, 5, 6, 7 ist 2, also liegt ein Fehler vor.

Wegen (1) und (3) muß der Fehler auf 5 oder 7 sein. Er liegt aber wegen (2) auf Stelle 5. Man überlegt sich leicht, daß diese Methode immer zum Ziel führt, wenn nicht mehr als eine Stelle verfälscht übertragen wird.“

● Der Schüler *Clemens Jaunich* schrieb im Auftrage der AG 7 des Klubs der *Jungen Mathematiker Cottbus* an *alpha*:

„Wir sind 12 Mitglieder des Kreisklubs und gehören zu den eifrigen Lesern von *alpha*. Wir befaßten uns unter Anleitung unseres AG-Leiters, Herrn *Kohlstock*, mit der Lösung von Gleichungen mit absoluten Beträgen. Dabei lösten wir u. a. folgende Aufgabe:

$$|9-x|-|0{,}5x+1|=12.“$$

Im nächsten Heft veröffentlichen wir die Lösung. Dann könnt Ihr sie mit Eurer eigenen vergleichen.

Fortsetzung von Seite 135

▲Aufgabe▲ Man beweise, daß die Fläche eines Quadrates, das innerhalb eines Dreiecks liegt, höchstens gleich der Hälfte der Fläche des Dreiecks ist.

Die vier Schüler meiner Spezialgruppe grüßen alle alpha-Leser. In Heft 1 geben sie die Lösungen zu den zwei folgenden Aufgaben, die ebenfalls einer von uns durchgearbeiteten Broschüre entnommen sind:

▲Aufgabe▲ Kann man acht Strecken in der Ebene so lagern, daß jede von ihnen mit genau drei anderen dieser Strecken Schnittpunkte hat?

Beantworte die gleiche Frage für sieben Strecken!

▲Aufgabe▲ Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC werde von dem Kreis, dessen Durchmesser die längere Kathete ist, im Verhältnis 1 : 3 geteilt. Man bestimme die Winkel des Dreiecks!

M. Noack

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 5/74 (Nachtrag):

W 9 ■ 1281 Für alle $i=1, 2, \ldots, n$ gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl stets größer oder gleich Null ist.

$$(a_i - b_i)^2 \geqq 0,$$

also $a_i^2 - 2a_ib_i + b_i^2 \geqq 0,$

$$a_i^2 \geqq 2a_ib_i - b_i^2 = b_i(2a_i - b_i).$$

Daraus folgt wegen $b_i > 0$

$$\frac{a_i^2}{b_i} \geqq 2a_i - b_i. \text{ Daher gilt}$$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n}$$
$$\geqq (2a_1 - b_1) + (2a_2 - b_2) + \ldots + (2a_n - b_n)$$
$$\geqq 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$
$$\geqq 2 - 1 = 1, \text{ w. z. b. w.}$$

▲ 10/12 ▲ 1282 Es soll bewiesen werden, daß das Produkt $z = 99n$ stets die Quersumme 18 hat, wenn n eine natürliche Zahl mit $0 < n < 100$ ist. Dann läßt sich n in der Form $n = 10a + b$ darstellen, wobei a und b natürliche Zahlen mit $0 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ sind und nicht beide gleich Null sind.
Für das Produkt erhält man

$$z = 99n = (100 - 1)(10a + b) =$$
$$= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 - a \cdot 10 - b.$$

Um z dekadisch darzustellen, ist die rechte Seite so umzuformen, daß die Faktoren bei den Potenzen von 10 einstellige natürliche Zahlen sind. Dabei sind die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

1. $b \neq 0$. Dann gilt

$$z = a \cdot 10^3 + (b-1) \cdot 10^2 + (9 - a) \cdot 10 + (10 - b),$$ das ist eine natürliche Zahl, die die Grundziffern

$$a,\ b-1,\ 9-a,\ 10-b,$$

also die Quersumme

$$a + b - 1 + 9 - a + 10 - b = 18 \quad \text{hat.}$$

2. $b = 0$. Dann ist nach Voraussetzung $a \neq 0$, und es gilt

$$z = a \cdot 10^3 - a \cdot 10 = (a-1) \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + (10 - a) \cdot 10 + 0,$$ das ist eine natürliche Zahl, die die Grundziffern

$$a - 1,\ 9,\ 10 - a,\ 0,$$

also die Quersumme

$$a - 1 + 9 + 10 - a = 18 \quad \text{hat.}$$

In jedem Falle hat also die Zahl z die Quersumme 18, w. z. b. w.

▲ 10/12 ▲ 1283 Die Gleichung

$$1! + 2! + \ldots + x! = 1^3 + 2^3 + \ldots + y^3 \qquad (1)$$

hat für
$x = 1$ die Lösung $y = 1$; denn $1! = 1^3$;
$x = 2$ keine Lösung; denn $1! + 2! = 3$ und $1^3 < 3$, $1^3 + 2^3 > 3$;
$x = 3$ die Lösung $y = 2$; denn $1! + 2! + 3! = 9$ und $1^3 + 2^3 = 9$.
Für $x = 4$ gilt $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$.
Andererseits gilt

$$1^3 + 2^3 + \ldots + y^3 = \left[\frac{y(y+1)}{2}\right]^2 = z^2,$$

wobei $z = \frac{y(y+1)}{2}$ eine natürliche Zahl ist.
Die rechte Seite der Gleichung (1) ist also gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl. Nun endet das Quadrat einer natürlichen Zahl niemals auf die Grundziffer 3, weil die Zahlen $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ nicht auf die Grundziffer 3 enden. Da jedoch die linke Seite der Gleichung (1) im Falle $x = 4$ gleich 33 ist, ergibt sich ein Widerspruch; daher hat in diesem Falle die Gleichung keine Lösung.
Für $x \geqq 5$ endet die Summe

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \ldots + x! =$$
$$= 33 + 5! + 6! + \ldots + x!$$

ebenfalls auf die Grundziffer 3; denn die Summanden $5! = 120$, $6! = 720$ usw. sind jeweils Vielfache von 10. Da aber auch in diesem Falle auf der rechten Seite der Gleichung (1) das Quadrat einer natürlichen Zahl steht, ergibt sich ein Widerspruch, d. h. die Gleichung hat auch für $x \geqq 5$ keine Lösung.
Daher hat die gegebene Gleichung genau zwei Lösungen, nämlich

$$x = 1, y = 1 \quad \text{und} \quad x = 3, y = 2.$$

W 10/12 ■ 1284 Angenommen, es sei (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (1)$$
$$x^6 + y^6 = 1. \qquad (2)$$

Dann gilt wegen (1)

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad (3)$$
$$y^6 = (1 - x^2)^3 = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6,$$

also wegen (2)

$$x^6 + 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = 1,$$
$$3x^4 - 3x^2 = 0,$$
$$x^2(x^2 - 1) = 0. \qquad (4)$$

Die Gleichung (4) ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$x^2 = 0$, d. h. $x = 0$ oder
$x^2 - 1 = 0$, d. h. $x^2 = 1$,
also $x = 1$ oder $x = -1$.

Aus der Gleichung (3) erhalten wir die zugehörigen Werte für y:

$x_1 = 0, \quad y_1 = 1;$
$x_2 = 0, \quad y_2 = -1;$
$x_3 = 1, \quad y_3 = 0;$
$x_4 = -1, \quad y_4 = 0.$

Für diese Werte sind aber auch, wie die Probe bestätigt, die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.
Das gegebene Gleichungssystem hat also genau vier reelle Lösungen, nämlich
$(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

W 10/12 ■ 1285 Es seien
$a_1 = 384\,400$ km der Radius der Umlaufbahn des Mondes,
$T_1 = 27{,}32\ d = 655{,}68\ \text{h} \approx 39\,340$ min die Umlaufzeit des Mondes,
$a_2 = 35\,600\ \text{km} + 6\,370\ \text{km} = 41\,970$ km der Radius der Umlaufbahn von „Kosmos 637",
T_2 die gesuchte Umlaufzeit dieses Satelliten (in min).
Dann gilt nach dem 3. Keplerschen Gesetz

$$T_2^2 : T_1^2 a_2^3 : a_1^3,$$
$$T_2 = \sqrt{\frac{a_2^3 \cdot T_1^2}{a_1^3}}.$$

Setzen wir die obigen Werte ein, so erhalten wir (am besten durch logarithmische Rechnung) $T_2 = 1\,419\ \text{min} = 23\ \text{h}\ 39$ min, das sind fast 24 h.
Es handelt sich also um einen „Synchronsatelliten" oder „quasistationären Satelliten", d. h. um einen Raumflugkörper, der auf seiner kreisförmigen Umlaufbahn, die gegenüber dem Äquator nur um 0,25° geneigt ist, in nahezu 24 h die Erde umfliegt, also in derselben Zeit, die die Erde für die Drehung um ihre Achse benötigt. Ein solcher Satellit macht also auf einen Beobachter den Eindruck, als ob er fest über einem bestimmten Ort der Erde stehe.

W 10/12*1286 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-8)(x-10) \cdot (x-11)(x-12) = 14\,400. \qquad (1)$$

Da das arithmetische Mittel von $x-1$ und $x-12$, von $x-2$ und $x-11$, von $x-3$ und $x-10$, von $x-5$ und $x-8$ jeweils gleich $x - \frac{13}{2}$ ist, empfiehlt sich die Substitution $x - \frac{13}{2} = t$, also $x = t + \frac{13}{2}$. Dann ist t eine Lösung der Gleichung

$$(t + \tfrac{11}{2})(t + \tfrac{9}{2})(t + \tfrac{7}{2})(t + \tfrac{3}{2})(t - \tfrac{3}{2})(t - \tfrac{7}{2})(t - \tfrac{9}{2})(t - \tfrac{11}{2}) = 14\,400, \qquad (2)$$

$$(t^2 - \tfrac{121}{4})(t^2 - \tfrac{81}{4})(t^2 - \tfrac{49}{4})(t^2 - \tfrac{9}{4}) = 14\,400. \qquad (3)$$

In dieser Gleichung ist das arithmetische Mittel von
$t^2 - \frac{121}{4}$ und $t^2 - \frac{9}{4}$, von $t^2 - \frac{81}{4}$ und $t^2 - \frac{49}{4}$ jeweils gleich $t^2 - \frac{65}{4}$. Man setzt daher $t^2 - \frac{65}{4} = z$, also $t^2 = z + \frac{65}{4}$ und erhält

$$(z - \tfrac{56}{4})(z - \tfrac{16}{4})(z + \tfrac{16}{4})(z + \tfrac{56}{4}) = 14\,400,$$
$$(z - 14)(z - 4)(z + 4)(z + 14) = 14\,400, \qquad (4)$$
$$(z^2 - 196)(z^2 - 16) = 14\,400,$$
$$z^4 - 212z^2 - 11\,264 = 0. \qquad (5)$$

Diese quadratische Gleichung für z^2 hat genau eine nicht negative Lösung, nämlich $z^2 = 106 + \sqrt{11\,236 + 11\,264} = 106 + \sqrt{22\,500} = 106 + 150,$
$z^2 = 256$. Diese Gleichung hat die Lösungen:
a) $z_1 = 16$. Dann ist $t^2 = 16 + \frac{65}{4} = \frac{129}{4}$,
also $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{129}$, $t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{129}$

und $x_1=\frac{13+\sqrt{129}}{2}$, $x_2=\frac{13-\sqrt{129}}{2}$.

b) $z_3=-16$. Dann ist $t^2=-16+\frac{65}{4}=\frac{1}{4}$,

also $t_3=\frac{1}{2}$, $t_4=-\frac{1}{2}$

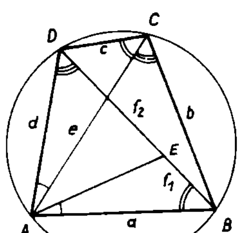
und $x_3=\frac{1}{2}+\frac{13}{2}=7$, $x_4=-\frac{1}{2}+\frac{13}{2}=6$.

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sein. Die Probe bestätigt, daß das tatsächliche Lösungen sind.

Die gegebene Gleichung hat also genau vier reelle Lösungen, nämlich

$$x_1=\frac{13+\sqrt{129}}{2},\ x_2=\frac{13-\sqrt{129}}{2},$$
$$x_3=7,\ x_4=6.$$

W 10/12*1287 Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Bezeichnungen. Ferner sei der Punkt E auf der Diagonale $\overline{BD}$ so gewählt, daß $\sphericalangle DAC=\sphericalangle EAB$ gilt (vgl. die Abb.). Das ist immer möglich, weil das Sehnenviereck $ABCD$ konvex ist und daher $\sphericalangle DAC<\sphericalangle DAB$ ist.



Wir schreiben zur Abkürzung $\overline{BE}=f_1$, $\overline{ED}=f_2$; dann ist $f_1+f_2=f$. Nun gilt

$\sphericalangle EAB=\sphericalangle DAC$,

$\sphericalangle ABE=\sphericalangle ACD$ (als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AD}$),

also $\triangle ABE\sim\triangle ACD$. Daraus folgt

$f_1 : a=c : e$,

also $f_1e=ac$. Ferner gilt (1)

$\sphericalangle DAE=\sphericalangle CAB$,

$\sphericalangle EDA=\sphericalangle BCA$ (als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AB}$),

also $\triangle EDA\sim\triangle BCA$. Daraus folgt

$f_2 : d=b : e$,

also $f_2e=bd$. (2)

Aus (1) und (2) folgt weiter

$f_1e+f_2e=ac+bd$,

$e(f_1+f_2)=ac+bd$,

$ef=ac+bd$, w. z. b. w.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Bausch (3/75)

▲1219▲ *Beweis:*

Wir setzen zur Abkürzung der Schreibweise $x_i=a_i$, $\ln x_i=b_i$, dann ist

$$D=\begin{vmatrix} n & \sum\limits_i b_i & \sum\limits_i a_i \\ \sum\limits_i b_i & \sum\limits_i b_i^2 & \sum\limits_i a_ib_i \\ \sum\limits_i a_i & \sum\limits_i a_ib_i & \sum\limits_i a_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=n\sum_i a_i^2\sum_i b_i^2+2\sum_i a_i\sum_i b_i\sum_i a_ib_i-$$
$$-(\sum_i a_i)^2\sum_i b_i^2-\sum_i a_i^2(\sum_i b_i)^2-n(\sum_i a_ib_i)^2$$
$$=n\sum_{i,j} a_i^2b_j^2+2\sum_{i,j,k} a_ib_ka_jb_j-\sum_{i,j,k} a_ia_kb_j^2$$
$$-\sum_{i,j,k} a_i^2b_jb_k-n\sum_{i,j} a_ib_ia_jb_j\quad (1\leqq i,j,k\leqq n)$$
$$=\sum_{i,j,k}(a_i^2b_j^2+2a_ia_jb_jb_k-a_ia_kb_j^2-a_i^2b_jb_k$$
$$-a_ia_jb_ib_j)$$
$$=\sum_{i,j,k}(a_i^2b_j^2+a_ia_jb_jb_k+a_ia_kb_ib_j-a_ia_kb_j^2$$
$$-a_i^2b_jb_k-a_ia_jb_ib_j)$$
$$=\sum_{i,j,k} a_ib_j(a_ib_j+a_jb_k+a_kb_i-a_kb_j-a_ib_k$$
$$-a_jb_i)$$
$$=\sum_{i,j,k} a_ib_j\Delta_{ijk}\text{ mit }\Delta_{ijk}=\begin{vmatrix}1&1&1\\a_i&a_j&a_k\\b_i&b_j&b_k\end{vmatrix}$$

Der Wert der Summe hängt nicht von der Anordnung der Indizes ab, da diese sämtlich und unabhängig voneinander von 1 bis n variieren. Insgesamt gibt es sechs verschiedene Anordnungen der Indizes i, j, k und folglich sechs zu oben analoge Darstellungen der Summe. Bei einer Vertauschung zweier Indizes ändert die Determinante Δ_{ijk} lediglich das Vorzeichen. Folglich gilt

$$D=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k}(a_ib_j-a_jb_i-a_ib_k-a_kb_j+a_kb_i+a_jb_k)\Delta_{ijk}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k}\Delta_{ijk}^2\geqq 0$$

Wir zeigen nun, daß wenigstens eine der Determinanten Δ_{ijk} verschieden von Null ist. Daraus folgt dann $D>0$.

Laut Voraussetzung sind mindestens drei der a_i paarweise verschieden, das seien a_p, a_q, a_r. Es gilt

$$\Delta_{pqr}=\begin{vmatrix}1&1&1\\a_p&a_q&a_r\\b_p&b_q&b_r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a_p&a_q-a_p&a_r-a_p\\b_p&b_q-b_p&b_r-b_p\end{vmatrix}=$$
$$=(a_q-a_p)(b_r-b_p)-(a_r-a_p)(b_q-b_p)$$
$$=(x_q-x_p)\ln\frac{x_r}{x_p}-(x_r-x_q)\ln\frac{x_q}{x_p}$$

Angenommen, es wäre $\Delta_{pqr}=0$.

Das hieße ($x_p>0$)

$$(\overline{x_q}-1)\ln\overline{x_r}=(\overline{x_r}-1)\ln\overline{x_q}\text{ mit}$$
$$\overline{x_q}=\frac{x_q}{x_p}\neq 1,\ \overline{x_r}=\frac{x_r}{x_p}\neq 1,\ \overline{x_q}\neq\overline{x_r},$$

also $$\frac{\ln\overline{x_r}}{\overline{x_r}-1}=\frac{\ln\overline{x_q}}{\overline{x_q}-1}$$

Diese Gleichheit kann aber nicht erfüllt sein, da $\overline{x_r}\neq\overline{x_q}$ gilt und $b^{(x)}=\frac{\ln x}{x-1}$ im gesamten Definitionsbereich eine streng monoton fallende Funktion ist. Folglich ist $\Delta_{pqr}\neq 0$ und damit $D>0$.

Bemerkung: Es gibt eine wesentlich kürzere Beweismöglichkeit, die aber einige spezielle Kenntnisse voraussetzt:

Wir definieren drei Vektoren im n-dimensionalen Raum

$\mathfrak{a}=\{1,1,\ldots,1\}$; $\mathfrak{b}=\{\ln x_1,\ln x_2,\ldots,\ln x_n\}$; $\mathfrak{c}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

Dann lassen sich die Elemente der Determinante D als Skalarprodukte dieser Vektoren darstellen, nämlich

$$D=\begin{vmatrix}\mathfrak{aa}&\mathfrak{ab}&\mathfrak{ac}\\\mathfrak{ba}&\mathfrak{bb}&\mathfrak{bc}\\\mathfrak{ca}&\mathfrak{cb}&\mathfrak{cc}\end{vmatrix}$$

Das ist aber die Gramsche Determinante dritter Ordnung (s. z. B. W. J. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. III, 1, Kap. I, § 2). Ihr Wert ist nach einem bekannten Satz positiv, falls die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ linear unabhängig sind, und gleich Null, falls die Vektoren linear abhängig sind.

Die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind aber linear unabhängig, denn oben wurde gezeigt, daß $\Delta_{pqr}\neq 0$ ist, und folglich ist der Rang der Matrix $\begin{pmatrix}1&1&\ldots&1\\x_1&x_2&\ldots&x_n\\\ln x_1&\ln x_2&&\ln x_n\end{pmatrix}$ gleich 3.

Lösung der „Fußballaufgabe" – AG's im Blickpunkt (5/75)

a) Wir nehmen an, die Mannschaften A und B belegen die ersten beiden Plätze, Mannschaft C gewinnt jedes Heimspiel und gestaltet jedes Auswärtsspiel unentschieden. C holt dann insgesamt $4\cdot 2+4\cdot 1=12$ Punkte. A und B holen gegen C einen, gegen D und E jeweils höchstens 4 Punkte. Das sind zusammen höchstens 9 für jede Mannschaft. Außerdem spielen A und B noch zweimal gegeneinander. Dabei werden genau 4 Punkte vergeben, von denen die eine Mannschaft höchstens 2 bekommt. Diese hätte dann in der gesamten Aufstiegsrunde maximal $9+2=11$ Punkte, wäre also im Widerspruch zur Annahme hinter C plaziert. Also war die Annahme falsch, die Behauptung ist somit bewiesen (indirekter Beweis).

b) Angenommen, Mannschaft C gewinnt alle Heimspiele mit 1 : 0 und erreicht in den Auswärtsspielen jeweils ein 0 : 0. Weiterhin spielen A gegen B 2 : 0 und 0 : 1. In sämtlichen Spielen gegen D, E und F gewinnen A und B jeweils mit 2 : 0. Dann hätten A bzw. B jeweils 1 (gegen C) $+3\cdot 4$ (gegen D, E und F) $+2$ (gegen B bzw. A) $=15$ Punkte, C hätte $5\cdot 2$ (aus Heimspielen) $+5\cdot 1$ (aus Auswärtsspielen) $=15$ Punkte. A hätte eine Tordifferenz von 12 (14 erzielte, 2 erhaltene Tore), B von 10 (13 erzielte und 1 erhaltenes Tor) und C von 5 (5 erzielte, kein erhaltenes Tor). Mannschaft C erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, wäre aber trotzdem nur Dritter. Die Behauptung ist also falsch (Angabe eines Gegenbeispiels genügt).

Lösungen zu: Extremwertaufgaben, die jeder lösen kann

▲1▲ Nach der Umkehrung des Thalessatzes sind alle in Frage kommenden Dreiecke rechtwinklig, und wir können die Aufgabenstellung auch so formulieren: Welches unter allen rechtwinkligen Dreiecken vorgegebener Hypotenusenlänge d hat maximalen Flächeninhalt?

Bezeichnen wir die Kathetenlängen mit x bzw. y, so ist der Flächeninhalt A des Dreiecks $A=\frac{xy}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $y=\sqrt{d^2-x^2}$, und wir erhalten

$$A=\frac{x}{2}\sqrt{d^2-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2(d^2-x^2)}$$

Der Radikand $x^2(d^2-x^2)$ ist wegen $x \neq d$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren mit der konstanten Summe d^2, also nimmt er seinen größten Wert an, für $x^2=d^2-x^2=\frac{d^2}{2}$, woraus $x=\frac{d}{2}\sqrt{2}$ folgt. Daraus ergibt sich $y=\frac{d}{2}\sqrt{2}$ und $A_{max}=\frac{d^2}{4}$.

Das flächengrößte unter den rechtwinkligen Dreiecken fester Hypotenuse ist also das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

▲2▲ Es ist $f(x)=(x-4)^4[(x+3)^2]^2 =[(4-x)(x+3)]^4$, und der Ausdruck $(4-x)(x+3)$ ist für $-3<x<4$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren konstanter Summe 7. Infolgedessen nimmt die Funktion $f(x)$ ihren größten Wert im Intervall $-3<x<4$ für $4-x=x+3=\frac{7}{2}$, also für $x=\frac{1}{2}$, an, und es ist $f(\frac{1}{2})=(\frac{7}{2})^8$.

▲3▲ a) Wegen $(c-1)^2 \geqq 0$, also $c^2-2c+1 \geqq 0$ gilt $c^2+1 \geqq 2c$, und nach Division der Ungleichung durch $c>0$ erhalten wir $c+\frac{1}{c} \geqq 2$, also $c+d \geqq 2$ für positive Zahlen c, d mit $cd=1$. Der Ausgangsungleichung $(c-1)^2 \geqq 0$ entnehmen wir auch, daß das Gleichheitszeichen eintritt genau dann, wenn $c=1$.

b) Sei $ab=p^2$. Für $a=b=p$ ist die Summe $a+b=2p$, und für jede andere Wahl von a und b ist diese Summe größer. Wählen wir etwa $a=pc$ und demzufolge $b=\frac{p}{c}$ mit $0<c<p$, dann ist

$$a+b=pc+\frac{p}{c}=p(c+\frac{1}{c}) \geqq 2p,$$

da nach Aufgabe 3a) gilt $c+\frac{1}{c} \geqq 2$. Das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn $c=1$, also $a=b=p$.

c) Sind a und b die Längen der Rechteckseiten, so soll $U=2(a+b)$ minimal werden bei konstantem Flächeninhalt $A=ab$. Die Lösung ergibt sich als unmittelbare Anwendung des Ergebnisses von Aufgabe 3b):

Unter allen flächengleichen Rechtecken hat das Quadrat kleinsten Umfang.

▲4▲ a) Sind a, b zwei positive Zahlen, $G=\sqrt{ab}$ ihr geometrisches, $A=\frac{a+b}{2}$ ihr arithmetisches Mittel, so gilt offenbar: $\frac{a}{G}\cdot\frac{b}{G}=\frac{ab}{G^2}=1$. Also ist nach Aufgabe 3a)

$$\frac{a}{G}+\frac{b}{G} \geqq 2,$$

woraus durch Multiplikation mit $\frac{G}{2}>0$ sofort die Behauptung folgt.

Du kannst die Behauptung auch unmittelbar, vom Ansatz $(a-b)^2 \geqq 0$ ausgehend, beweisen.

b) Zu zeigen ist: Für positive Zahlen a_1, a_2, ..., a_n mit $a_1a_2...a_n=1$ gilt $a_1+a_2+...+a_n \geqq n$.

Für $n=2$ ist der Satz durch Aufgabe 3a) bewiesen. Nun zeigen wir: Wenn der Satz für irgendeine natürliche Zahl $k \geqq 2$ gilt, dann ist er auch für die nachfolgende natürliche Zahl $k+1$ richtig.

Seien $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ $(k+1)$ positive Zahlen mit $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_k\cdot a_{k+1}=1$. Sind alle $a_i=1$ $(i=1, 2, ..., k+1)$, so ist $a_1+a_2+... +a_k+a_{k+1}=k+1$. Sind nicht alle Faktoren gleich 1, so gibt es welche, die kleiner als 1, und andere, die größer als 1 sind. Da es auf die Bezeichnungsreihenfolge nicht ankommt, sei $a_1>1$, $a_{k+1}<1$. Wir formen die zu untersuchende Summe um:

$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}=(a_1a_{k+1}+a_2+... +a_k)+1+a_1+a_{k+1}-a_1a_{k+1}-1$
$=(a_1a_{k+1}+a_2+...+a_k)+1$
$+(a_1-1)(1-a_{k+1})$

Wegen $(a_1a_{k+1})a_2...a_k=1$ gilt nach der Induktionsvoraussetzung $a_1a_{k+1}+a_2+...+a_k \geqq k$, folglich

$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}$
$\geqq k+1+(a_1-1)(1-a_{k+1})$, also
$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}>k+1$, da der letzte Summand $(a_1-1)(1-a_{k+1})$ wegen $a_1>1$ und $a_{k+1}<1$ sicher positiv ist.

c) Sind a_1, a_2, ..., a_n n positive Zahlen, $G=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ ihr geometrisches, $A=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ ihr arithmetisches Mittel. Da offenbar $\frac{a_1}{G}\cdot\frac{a_2}{G}\cdot ...\cdot\frac{a_n}{G}=1$ gilt, folgt nach Aufgabe 3b) sofort

$$\frac{a_1}{G}+\frac{a_2}{G}+...+\frac{a_n}{G} \geqq n,$$

woraus durch Multiplikation mit $\frac{G}{n}>0$ sofort die Behauptung folgt. Wer den allgemeinen Beweis in Aufgabe 3b) nicht geführt hat, kann sich auf den in der Aufgabenstellung behandelten Fall $n=3$ stützen und die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel für diesen Fall beweisen.

d) Für die positiven Zahlen a, b, c (Seitenlängen!) gilt nach Aufgabe 4c):

$$\sqrt[3]{abc} \leqq \frac{a+b+c}{3}=\frac{s}{3}$$

Erheben wir diese Ungleichung in die dritte Potenz, so erhalten wir

$$V=abc \leqq (\frac{s}{3})^3,$$

und das Gleichheitszeichen tritt ein genau dann, wenn $a=b=c=\frac{s}{3}$ Also hat der Würfel unter allen Quadern gleicher Kantenlängensumme das größte Volumen.

Lösungen zu: Aufgaben aus Freundesland (5/75)

Klasse 6

1. 35; 2. 40; 3. A: 12 Tage, B: 6 Tage, C: 4 Tage; 4. 9; 5. 85; 6. $\frac{1}{3}$;

7. Genau eine der Zahlen ist durch 3, und mindestens eine ist durch 2 teilbar.

8. Voraussetzung: a, b ungerade, $a-b=64$. Angenommen, es existiere eine Zahl t mit t/a und $t/b \Rightarrow t/a-b$.
64 hat als Teiler nur Vielfache von 2. Da a und b ungerade sind, kann kein solches $t \neq 1$ existieren.

9. Ist die Summe durch 3 teilbar, so bezahlt man alles mit 3-Rubelscheinen.
Läßt die Summe bei Division durch 3 den Rest 1, wird mit 2 Fünfrubelscheinen und der Rest mit Dreirubelscheinen bezahlt. (Die kleinste auf diese Weise bezahlbare Summe ist 10 Rubel.)
Läßt die Summe bei Division durch 3 den Rest 2, wird mit 1 Fünfrubelschein und der Rest mit Dreirubelscheinen bezahlt.
(Die kleinste auf diese Weise im angegebenen Bereich bezahlbare Summe ist 8 Rubel.)

10. Der gesuchte Fehler ist die Summe der Reste bei der Division der Ausgangszahlen durch 5. Da sich bei der Addition der gerundeten Zahlen die Summe nicht verändert hat, muß die Summe der Reste durch 5 teilbar sein.
Die Restsumme kann nicht Null sein, da die Ausgangszahlen nicht durch 5 teilbar sind. Weiterhin kann die Summe nicht 5 sein, da in diesem Fall jeweils der Rest 1 bleiben würde, die Summe der gerundeten Zahlen also nicht mit der Summe der Ausgangszahlen übereinstimmen könnte. Entsprechendes gilt für die Summe 20. In Frage kommen also nur die Restsummen 15 oder 20.

11. 142 857

12. 315 789 473 684 210 526. Weitere Zahlen z_n sind $z_n=\sum_{i=0}^{n}$ 315 789 473 684 210 526 $\cdot 10^{18i}$

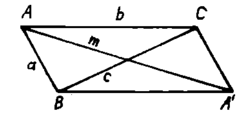
13. Nein. Zum Beispiel erfüllen $A=\{1; 2\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$ die genannten Bedingungen.

14. $A_{10}=A_4=(A_1 \cup A_2) \cap A_3$.

15. a) Im Parallelogramm $ABA'C$ gilt:

$$2m<a+b \Rightarrow m<\frac{a+b}{2}$$

b) $m+\frac{c}{2}>a$ und $m+\frac{c}{2}>b \Rightarrow m>\frac{a+b-c}{2}$



16. Beweisführung mittels Strahlensatz und Satz über Winkelsumme im Dreieck.

Fortsetzung: Siehe Heft 1/76, d. Red.

Lösungen zu alpha-heiter 6/75

Diophant

$D=1$ $I=2$ $0=3$ $P=4$ $H=5$ $A=6$
$N=7$ $T=9$ $R=8$ $E=0$

Ungarische Würfeleien

Würfel Nr. 4 gehört zum vorgegebenen Netz

IMO-Spielerei

1. Lösung: $\varphi(125=(5-1)5^2=100=2^{100}$
$\equiv 1(125)$

2. Lösung: 3 Abschätzungen aus $2^7\equiv 3(125)$

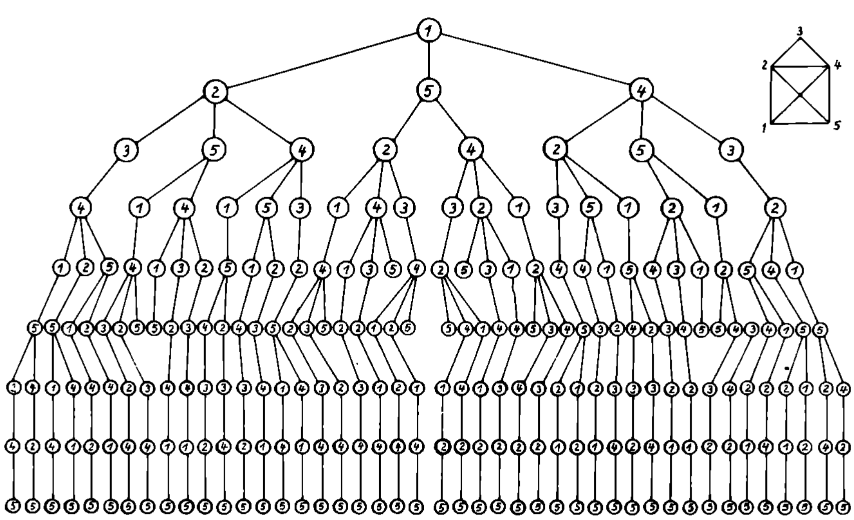
a) $2^{21}\equiv 27(125)$
$2^{23}\equiv 108\equiv -17(125)$
$2^{25}\equiv -68=57\equiv 2\cdot 5^2+7(125)$
$2^{50}\equiv 4\cdot 5^4+749\equiv -1(5^3)$
$2^{100}\equiv 1(125)$

b) $2^{35}\equiv 243\equiv -7(125)$
$2^{105}\equiv -343\equiv 32(125)$
$2^{100}\equiv 1(125)$

c) $2^{21}\equiv 27\equiv -98(125)$
$2^{20}\equiv -49\equiv 1-2\cdot 5^2(125)$
$2^{40}\equiv 1-100+4\cdot 5^4\equiv -99\equiv 26$
$\equiv 5^2+1(125)$
$2^{80}\equiv 5^4+51\equiv 51\equiv 1+25^2(125)$
$2^{100}\equiv 2^{20}\cdot 2^{80}\equiv(1-2\cdot 5^2)(1+2\cdot 5^2)$
$\equiv 1(125)$
$2^{100}\equiv 1(125)\rightarrow 2^{100}\equiv 376(1\,000)$

Das Haus vom Nikolaus

Wir numerieren die Ecken („Knoten") wie im Bild angegeben (s. u.):
Beginnen bzw. aufhören kann man nur in einem Knoten mit ungerader Kantenzahl, also in 1 oder 5. Wir betrachten nur die Wege von 1 nach 5. Jeder Weg kann dann auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Eine auch für Schüler verständliche Lösungsmethode könnte der folgende „Entscheidungsbaum" sein. Wir beginnen bei 1 und haben drei Möglichkeiten zur Auswahl: 2, 4, 5. Von 5 kann man in zwei Richtungen weiterzeichnen, von 2 und 4 in jeweils drei Richtungen. Kommt ein Knoten zum zweiten Mal vor, so muß beachtet werden, daß eine (beim Startknoten) bzw. zwei Kanten bereits verbraucht sind. Den Ast 1 4 ... kann man erhalten, indem man im Ast 1 2 ... die Knoten 4 und 2 vertauscht. Das gleiche gilt für die Äste 1 5 4 ... und 1 5 2 ... (siehe beiliegender Graph, der Kniff ist Symmetrieachse). Als Lösung würde also auch der halbe Graph ausreichen.
Es ergeben sich 44 Möglichkeiten. Rechnet man die hinzu, die im Punkt 5 beginnen, so sind es insgesamt 88.



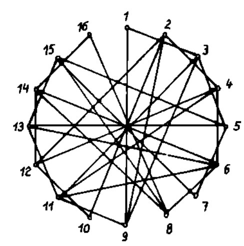
Heitere Interpretation einer Olympiadeaufgabe

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	x													
2		x												
3			x											
4				x										
5					x									
6						x								
7							x							
8								x						
9									x					
10										x				
11											x			
12												x		
13													x	
14														x

Jede Mannschaft muß 13mal gegen andere spielen. An einem Spieltag maximal 7 Spiele.
1. Fall: Das Spiel, wo die Mannschaft gegen sich selbst spielen muß, wird auf einen Tag gelegt (siehe Tabelle) und findet nicht statt wegen Unmöglichkeit. Daraus folgt: Alle Mannschaften haben nach jedem Spieltag die gleiche Anzahl von Spielen (bei keinem Ausfall).
2. Fall: Die Spiele, wo jede Mannschaft gegen sich selbst spielen muß, werden auf die ganze Halbserie verteilt. Daraus folgt: An 7 Spieltagen spielen je zwei Mannschaften nicht, da wenn eine gegen sich selbst spielen muß (unmöglich) eine zweite sofort mit pausieren muß (da sie alleine wäre $14-1=13$ $13:2=5$ Rest 1) Daraus folgt: 2 Mannschaften haben in jedem Falle die gleiche Anzahl von Spielen.
Anmerkung des Korrektors: Es geht in dieser Aufgabe um Spiele, die tatsächlich stattfinden und nicht um Spiele, die nicht stattfinden, weil sie gar keine Spiele sind! Daraus ergibt sich folgende Definition:
Wenn ein Spiel kein Spiel ist und an dem Tag stattfindet, an dem es nicht stattfindet, dann ist es das Spiel einer Mannschaft gegen sich selbst.

In einem Zug

Zur Angabe einer Lösung numerieren wir die Punkte von 1 bis 16. Um ohne abzusetzen die Figur nachzeichnen zu können, muß der Streckenzug im Punkt 11 beginnen und im Punkt 6 enden oder umgekehrt, da in diesen beiden Punkten jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken aufeinandertreffen.



Eine der möglichen Lösungen ist
11, 3, 9, 1, 2, 5, 13, 11, 9, 2, 4, 11, 6, 4, 12, 2, 10, 12, 14, 6, 8, 14, 16, 8, 15, 5, 7, 15, 13, 6.

Kryptarithmetik

$43\,295+37\,093=80\,388$; $14\,082+49\,384=63\,466$; Dr. Paasche, München fand noch: $32\,084+29\,182=61\,266$ und $16\,592+64\,096=80\,688$

Die Rufnummer

Sie lautet 4036, denn $\frac{1}{10}$ von $40=36$, die Quersumme ist 13. Die vordere zweiziffrige Zahl muß eine volle Zehnerzahl sein, weil nur dann die hintere eine natürliche Zahl wird. Von den 9 Möglichkeiten 1009 2018 3027 ... hat nur 4036 die Quersumme 13.
Die Lösung ist eindeutig. (Die 7 als zweitmögliche Zahl ist in keinem Fall als Quersumme enthalten.)

Füllrätsel

Sekante, Quadrat, Mittellinie, Sehnenviereck, Kreis, Mittelsenkrechte, Dreieck, Kathete

Übung macht den Meister

Ungleichungen (aus den schriftlichen Abschlußprüfungen der Oberschulen)

1972 Gegeben ist die lineare Ungleichung

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$$

a) Löse diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!
b) Gib folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:
1. Die Lösungsmenge L_1 obiger Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
2. die Lösungsmenge L_2 obiger Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4<x<1$;
3. die Menge M aller Elemente, die sowohl in L_1 als auch in L_2 vorkommen!

1973 Gegeben ist die Ungleichung

$$7(3x-2)<3x+22 \qquad (x \in P)$$

a) Löse diese Ungleichung!
b) Gib die Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

1974 Gegeben sind die folgenden Ungleichungen:

(1) $5x+5<x+25 \qquad (x \in P)$
(2) $12x-(x-1)>5x+13 \qquad (x \in P)$

a) Löse die Ungleichung (1)! Gib diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!
b) Löse die Ungleichung (2)! Gib diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die einstellige natürliche Zahlen sind!
c) Die unter a) angegebenen natürlichen Zahlen bilden die Menge M_1, die unter b) angegebenen natürlichen Zahlen die Menge M_2. Gib den Durchschnitt von M_1 und M_2 durch Aufzählen der Elemente an!

1975 Gegeben ist die Ungleichung

$$2x-(8-x)<8(2x+3)-5x \qquad (x \in P)$$

a) Löse diese Ungleichung!
b) L sei die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung. Gib für jede der sechs Zahlen

$$-8;\ 3;\ 0;\ -\frac{1}{2};\ 5{,}2 \text{ an, ob sie}$$

zur Lösungsmenge L gehört oder nicht!

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1974/75

OS Ahlbeck, OS Altentreptow, AG Math. OS Altenweddingen, OS Alt-Töplitz, OS Asbach, AG Math. OS Bad Bebra, OS I Bad Brambach, AG Math. OS Bad Gottleuba, Th. Neubauer-OS Bad Salzungen, alpha-Club OS Baruth, alpha-Zirkel OS Bahratal, AG Math. (Kl. 9) OS Berndten, OS Bergwitz, Diesterweg-OS Berlin, AG Math. OS Berlingerode, OS Bernterode, OS Birkungen, Schiller-OS Bleicherode, F.-Weinert-OS Blumberg, OS Boddin, AG Math. (Kl. 5) OS Breddin, OS II Breitungen, OS Broderstorf, AG Math. OS Brohm, TOS Büttstedt, AG Math. OS Burkau OS Casekow, Klub Jg. Mathematiker (Haus der JP) Cottbus, OS Clingen, OS Deutschenbora, OS Kombinat Diedorf. OS Diesdorf, Käthe-Kollwitz-OS und Math.-AG (Kl. 5/6) OS Makarenko, beide Dingelstädt, OS Döllnitz, AG Math. 43. OS Dresden, M.-Poster-OS Drognitz, OS Dubna (UdSSR), OS Effelder, 31. OS Erfurt, OS Geschw. Scholl Eisenach, AG Math. OS Espenhain, OS Fambach, OS Floh, AG Math. (Kl. 6) Schiller-OS Freital, OS Friedeburg, OS V „H. Günther" Fürstenwalde, OS I H. Heine Gadebusch, E.-Hartsch-OS Gersdorf, K.-Gräpler-OS Gnoien, AG Math. (Kl. 5) OS Görlsdorf, J.-Brinckmann-OS Goldberg, AG Math. OS Gottleuba, Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen, Otto-Drews-OS Greifswald, „Juri Gagarin"-OS Greußen, EOS Karl-Marx Greußen, AG Math. (Kl. 5) 4. OS Grimma, AG Math. Großenhain, OS Großbodungen, Dr.-S.-Allende-OS Großweitzschen, OS Grüna, OS Güsen, OS II Hainichen, Diesterweg-OS I Halle, 12. OS Halle-Neustadt, OS

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 6

(Schluß)

Ebene Trigonometrie
Прямо линейная тригонометрия
Plane Trigonometry
trigonométrie plane

Definition der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck
Определение тригонометрических функций из прямоугольного треугольника
Definition of the Trigonometric functions in a right triangle
définitions des fonctions trigonométriques an triangle rectangle

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$

$\frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \text{Sinus des Winkels }\alpha$

$\frac{\text{противолежащий катет по отношению углу }\alpha}{\text{гипотенуза}}$
$= \text{синус угла }\alpha$

$\frac{\text{side opposite }\alpha}{\text{hypotenuse}} = \text{sine of the angle }\alpha$

$\frac{\text{côté opposé á ...}}{\text{hypoténuse}} = \text{sinus de l'angle ...}$

$\frac{b}{c} = \cos\alpha$

$\frac{\text{Ankathete zu }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \text{Cosinus des Winkels }\alpha$

$\frac{\text{прилежащий катет по отношению к углу }\alpha}{\text{гипотенуза}}$
$= \text{косинус угла }\alpha$

$\frac{\text{side adjacent to }\alpha}{\text{hypotenuse}} = \text{cosine of the angle }\alpha$

$\frac{\text{côté adjacent á ...}}{\text{hypoténuse}} = \text{cosinus de l'angle ...}$

$\frac{a}{b} = \tan\alpha$

$\frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Ankathete zu }\alpha} = \text{Tangens des Winkels }\alpha$

$\frac{\text{противолежащий катет по отношению к углу }\alpha}{\text{прилежащий катет по отношению к углу }\alpha}$
$= \text{тангенс угла }\alpha$

$\frac{\text{side opposite }\alpha}{\text{side adjacent to }\alpha} = \text{tangent of the angle }\alpha$

$\frac{\text{coté opposé á ...}}{\text{coté adjacent á ...}} = \text{tangente de l'angle ...}$

$\frac{b}{a} = \cot\alpha$

$\frac{\text{Ankathete zu }\alpha}{\text{Gegenkathete zu }\alpha} = \text{Cotangens des Winkels }\alpha$

$\frac{\text{прилежащий катет по отношению к углу }\alpha}{\text{противолежащий катет по отношению к углу }\alpha}$
$= \text{котангенс угла }\alpha$

$\frac{\text{side adjacent to }\alpha}{\text{side opposite }\alpha} = \text{cotangent of the angle }\alpha$

$\frac{\text{coté adjacent á ...}}{\text{coté opposéá ...}} = \text{cotangente de l'angle ...}$

Fundamentalsätze zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke
Основные теоремы для расчёта произвольных треугольников
Fundamental laws for solving oblique triangles
théorèmes fondamentals pour calculer des triangles scalènes

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha}$$

Sinussatz · теорема синусов
law of sines · théorème de sinus

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
Cosinussatz · теорема косинусов
cosine law · théorème de cosinus

Hammerbrücke, OS Hangelsberg, Schule der „DSF“ Heiligengrabe, AG Math. OS „Maxim Gorki“ Heringsdorf, Goethe-OS Hohenleipisch, OS Horka, OS A. Becker Kamsdorf, C.-Zetkin-OS Kandelin, Pionierhaus „Juri Gagarin“, E.-Thälmann-OS, AG Math. (Kl. 6) K.-Liebknecht-OS, alle Karl-Marx-Stadt, OS Klausdorf, EOS Kleinmachnow, Station Jg. Naturf. u. Techn. Köthen, OS Kriebitzsch, Schulkombinat Küllstedt, AG Math. OS Kuhfelde, Schulkombinat Lauscha, OS I und OS II, K.-Liebknecht-OS alle Leinefelde, W.-Pieck-OS, alpha-Club 29. OS, beide Leipzig, OS Lichte, AG Math. (Kl. 5) OS Lichtenhain, OS I Lobenstein, OS W. Wallstab Löderburg, OS Lössau, R.-Luxemburg-OS Ludwigsfelde, OS Lüderitz, OS Mittelstille, Kreis-AG Math Naundorf, 7. OS F. Weineck, AG Math. OS, beide Neubrandenburg, TOS Neuenhofe, OS Neukloster, alpha-Club 3. OS, J.-Nehru-OS, beide Neustrelitz, Th.-Neubauer-OS Niederorschel, OS Niedersalza, OS V Nordhausen, E.-Weinert-OS Oberschönau, OS Olbersdorf, Comeniusschule Oranienburg, OS Osternienburg, AG Math. (Kl. 4) 25. OS Potsdam-Bornstedt, Th.-Neubauer-OS Rackwitz, OS Radis, AG Math. OS I Raguhn, EOS Goethe (Kl. 9 B2) Reichenbach, Math-AG (Kl. 7) OS Rheinsberg, J.-Gagarin-OS Ribnitz-Damgarten, OS Roßdorf, Haus der JP Rostock, OS Rotta, OS Rüdnitz, OS Sachsendorf, W.-Pieck-OS Sangerhausen, OS Schernberg, OS Schlatkow, OS Schlottwitz, J. G. Seume-OS, K.-Marx-OS, beide Schmalkalden, J. R. Becher-OS Schneeberg, OS Schorssow, OS Schwepnitz, F.-Reuter-OS Siedenbollentin, OS „W. Seelenbinder“ Sitzendorf, AG Math. Dr. R.-Sorge-OS Söllichau, AG Math. Geschw.-Scholl-OS Sondershausen, AG Math. (Kl. 9) EOS Stollberg, AG Math. OS Stolpen, W.-Heinze-OS Stralsund, OS Struth-Helmershof, AG Math. E.-Schneller-OS Stülpe, EOS Karl Marx Tangerhütte, OS Teistungen, OS II Teterow, alpha-Zirkel OS Treben, OS W. Pieck Trusetal, OS Viernau, OS Vitte, EOS Julius Fucik, Waldheim, Mathe.-Club Fr.-Engels-Schule Waren, OS Wedendorf, OS Weißenborn, OS Wernshausen, OS Wesenberg, Diesterweg-OS W.-Pieck-Stadt Guben, Karl-Marx-OS Wilkau-Haßlau, K.-Kollwitz-OS Wittenberg, OS Wörmlitz, OS Wohlmirstedt, E.-Schneller-OS Wolgast, EOS und Spezialistenlager Math. d. Kreises Worbis, OS Wredenhagen, OS Zaatzke, AG Math. (6. Kl.) OS Zahna, AG Math. OS „F. Schiller“ Zella-Mehlis, Max-Lenk-OS Zepernick, OS Ziegelheim, AG Math. und Prof.-Dr.-W. Du-Bois-OS Zittau, AG „C. F. Gauß“, Goethe-OS Zossen, alpha-Club OS Zschornewitz, OS Zurow.

Wir danken den Mitarbeitern der Zeitschrift „Posvetu“ sowie der Sektion Mathematik des Verlages Volk und Wissen, die uns bei dieser kleinen Zusammenstellung vorbildlich unterstützten.

Wer sich sprachlich noch mehr weiterbilden dem empfehlen wir die Literatur, aus der wir unsere sechs Folgen des Kleinen Mathematiksprachlexikons entnahmen. (s. o.)

J. Lehmann

Einige Termini aus Sondergebieten der Mathematik

Kombinatorik · комбинаторика
theory of combinations · analyse combinatoire; Permutation · перестановка
permutation · permutation; *n* Fakultät (*n*!)
n факториал
factorial · faculté;
n Elemente zur *r*-ten Klasse ·
n элементы по *r*
n elements taken *r* at a time · *n* éléments de l'ordre *r*;
Variation · размещение
variation · variation;
Kombinationen mit Wiederholungen
сочетания сповторениями
combination with repetitions allowed
combinaisons complètes

Matrizen und Determinanten
матрицы и определители
matrices and determinants · matrices et déterminants; (*m*, *n*)-Matrix
матрица из *m* строк и *n* столбцов
m by *n* matrix · (*m*, *n*)-matrice; quadratische Matrix · квадратная матрица
square matrix · matrice carrée; Rang einer Matrix · ранг матрицы
rank of a matrix · rang d'une matrice;
Zeilen und Spalten einer Determinante
строки и столбцы определителя
rows and columns of a determinant
lignes et colonnes d'un déterminant;
Entwicklung einer Determinante nach den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Spalte · разложение определителя по минорам элементов первого столбца
expansion of a determinant by the minors of the elements of the first column
développement d'un déterminant par les sonsdeterminants (déterminants inférieurs) des éléments de la première colonne

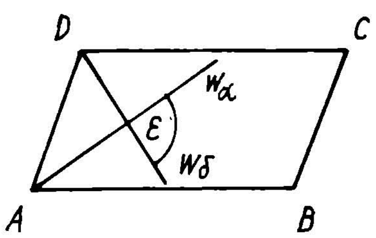
Vektorrechnung · векторное исчисление
vector calculus · calcul vectoriel; Betrag eines Vektors · модуль вектора
magnitude of a vector · module d'un vecteur;
Ortsvektor · радиус-вектор
position vector · vecteur de position;
Einheitsvektor · единичный вектор
unit vector · vecteur unité (unitaire);
Nullvektor · нулевой вектор
null vector · vecteur (de) zéro;
Vektorprodukt · векторное произведение
vector product · produit vectoriel (extérieur);
Skalarprodukt · скалярное произведение
scalar product · produit scalaire (intérieur);
Vektoralgebra · векторная алгебра
vector algebra · algèbre vectorielle;

Folgen und Reihen
последовательности и ряды
sequences and series · progressions et séries;

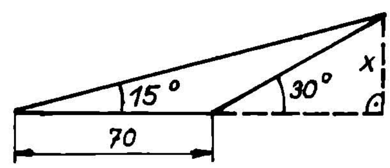
Zahlenfolge
числовая последовательность
number sequence · suite de nombres;
arithmetische (geometrische) Folge ·
арифметическая (геометрическая) прогрессия
arithmetic (geometric) progression ·
progression arithmétique (géométrique);
Anfangsglied · старший член
initial term · terme de départ; Endglied
последний член · final term · terme final;
konvergieren · сходиться
to converge · converger; Konvergenzkriterium · признак сходимости
test of convergence · caractère de convergence; divergieren · расходиться
to diverge · diverger;
Divergenz · расходимость · divergence
divergence; unendliche Reihe(n)
бесконечный ряд (бесконечные ряды)
infinite series · séries infinies;
Potenzreihe(n)
степенной ряд (степенные ряды)
power series · séries de puissances;
Fourier-Reihe(n) · ряд фурье (ряды фурье)
Fourier series · séries de Fourier

Gut gedacht ist halb gelöst

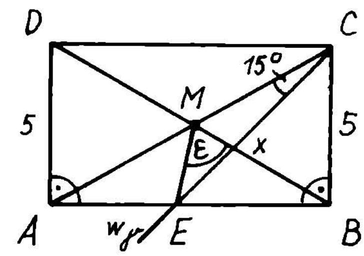
gesucht: ε



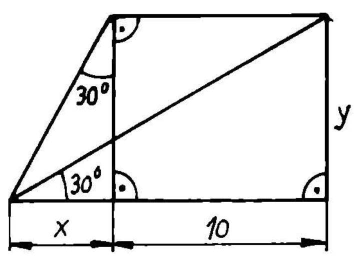
gesucht: x



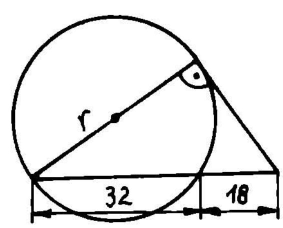
gesucht: x, ε



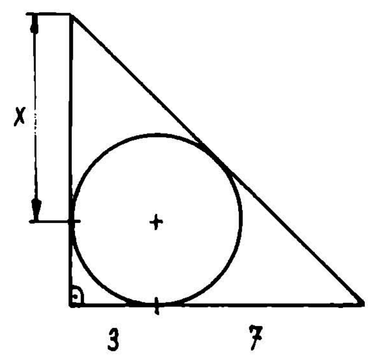
gesucht: x, y



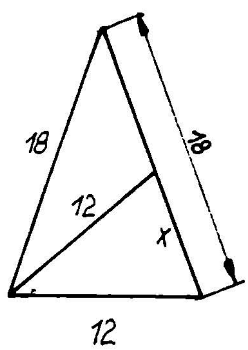
gesucht: r



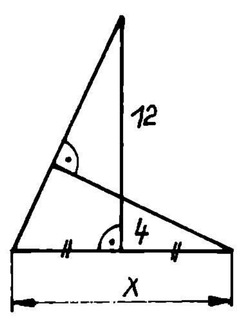
gesucht: x



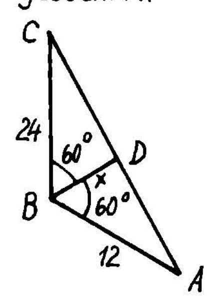
gesucht: x



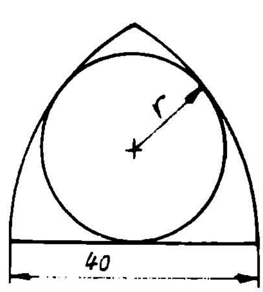
gesucht: x



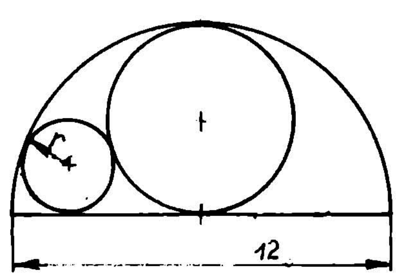
gesucht: x



gesucht: r



gesucht: r



gesucht: r