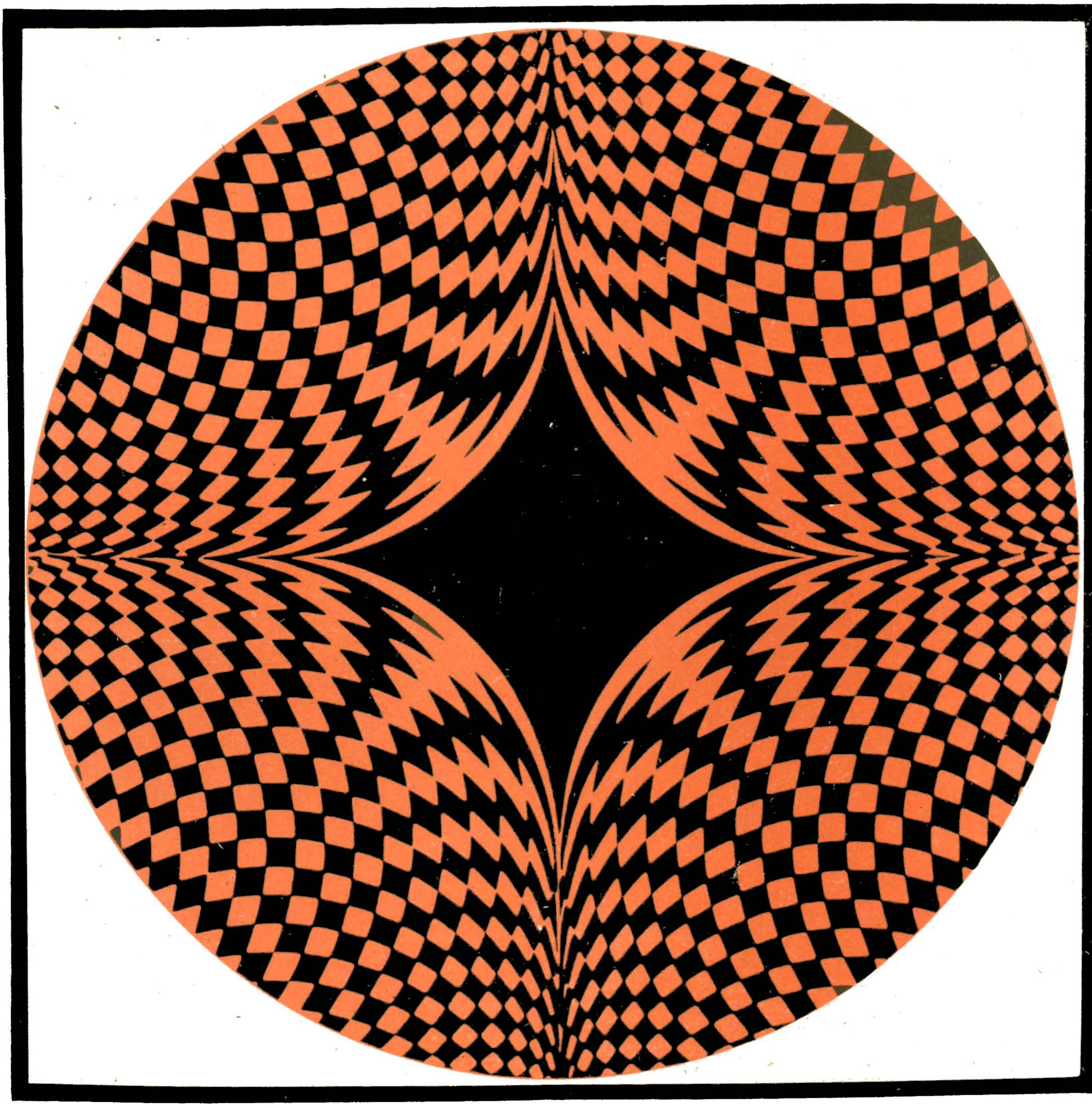
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

1

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: K. H. Giersch, Wochenpost 33/74; W. Günzel, Wochenpost 38/74; G. Simerow, aus *Balkanfeuer*, Eulenspiegelverlag (S. 1/3); W. Heiden, Stralsund (S. 5 und 12); R. Ratschew, Sofia (S. 8); Z. Lengren, Warszawa (S. 10); aus Eulenspiegel 35/75 (S. 14);
Vignetten: K.-H. Guckuck, Leipzig (S. 14/15)
Typographie: H. Tracksdorf

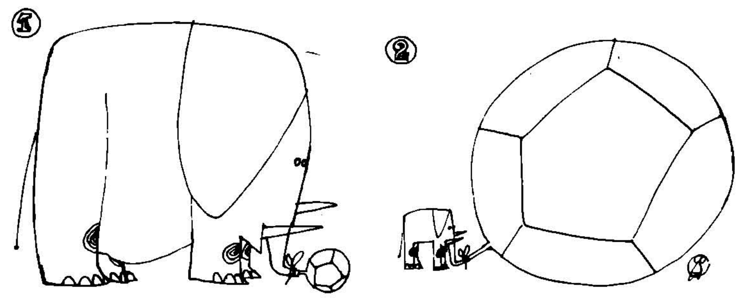
Gesamtherstellung: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 14. November 1975

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* *bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet*

Mathematik und Biologie



Sicher wird mancher Leser bei dieser Überschrift stutzen und sich fragen, welche Beziehungen denn wohl zwischen Mathematik und Biologie bestehen können. Jedem ist aus dem Unterricht die enge Verbindung zwischen Mathematik und Physik bekannt, denn physikalische Gesetzmäßigkeiten werden häufig mit Hilfe von Formeln dargestellt. Dagegen trifft man mathematische Formulierungen im Biologieunterricht kaum an. Es wäre aber verfehlt, daraus schließen zu wollen, daß zwischen Biologie und Mathematik keine Beziehungen bestehen.

Das Leben vollzieht sich in räumlichen und zeitlichen Beziehungen. Eine Pflanze oder ein Tier bildet einen geometrisch beschreibbaren und meßbaren Körper, der ein Element der mannigfaltigen Beziehungen seiner Umwelt bildet und einer bestimmten Ordnung in ihr folgt. Von einer Pflanzen- oder Tierart kommen also bestimmte Mengen in einem Lebensraum vor, die wir beschreiben und zählen. Das dabei gewonnene Zahlenverhältnis ermöglicht uns Aussagen über die Eigenart des Lebensraumes, z. B. über die Zusammensetzung des Bodens, die vorherrschenden Lichtverhältnisse oder die vorhandene Feuchtigkeit. Mathematisch erfaßte Wechselbeziehungen von Organismen in ihrer Umwelt ermöglichen, das Wesentliche beim Weglassen des Unwesentlichen zu gewinnen, also zu abstrahieren. Auf diesem Wege erkennen wir gesetzmäßige Zusammenhänge. Erkannte Gesetzmäßigkeiten ermöglichen uns, die Wechselbeziehungen der Organismen so zu beeinflussen, daß beispielsweise unsere Kulturpflanzen gleichmäßig hohe Erträge bringen und damit unsere Ernährung sichern.

Die Pflanzen und Tiere stehen jedoch nicht nur ihrer Umwelt gegenüber in mathematisch erfaßbaren Beziehungen, auch ihr Bau weist diese auf. So haben wir im 5. und 6. Schuljahr Familien der Samenpflanzen kennengelernt, deren Blütenbau durch das zahlenmäßige Verhältnis seiner Elemente gekennzeichnet ist. Alle Kreuzblütengewächse besitzen z. B. 4 Kelchblätter (K), 4 Kronenblätter (C), 6 Staubblätter (A) und 2 zu einem Stempel verwachsene Fruchtblätter (G). Diese Elemente erscheinen stets in einer bestimmten räumlichen Anordnung, die wir als Blütengrundriß (Blütendiagramm) bei Abstraktion der Farbe, Form, Größe, des Geruchs und anderer Merkmale wiedergeben, die für die betreffende Art charakteristisch sind. Aus diesem Diagramm können wir die Blütenformel, also das rein mathematische Verhältnis, ableiten: K4 – C4 – A2 + 4 – G(2). Die Zahl in der Klammer bedeutet in ein Wort übersetzt: verwachsen; die Trennung der Zahl 6 in 2 + 4 heißt: die Staubblätter sind in zwei Kreisen in der angegebenen Menge angeordnet. Von allen Familien der Samenpflanzen lassen sich diese Blütenformeln als mathematische Verallgemeinerungen aufstellen. Sie helfen uns, die Arten den Pflanzenfamilien rasch zuzuordnen und zu bestimmen.

▲1▲ Deute die Blütenformeln:
a) K(5) – C(5) – A 4 – G(2)
b) K(5) – C 5 – A(9) + 1 – G1!
Erkunde mit Hilfe des Biologielehrbuches für die 5. Klasse (S. 131 und 129) und für die 6. Klasse (S. 7), um welche Pflanzenfamilien es sich dabei handelt!

Die Pflanzen- und Tierarten haben mannigfaltige Eigenschaften in Bau und Funktion, die heute von der *numerischen Taxonomie*, der Lehre von der Ordnung der Organismen in ihre natürlichen Verwandtschaftsgruppen, mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen genutzt werden und zu neuen Erkenntnissen führen.

Bisher haben wir verhältnismäßig unveränderliche Merkmale der Organismen mathematisch betrachtet. Wir wissen jedoch, daß die Lebewesen ständigen Veränderungen unterworfen sind. Sie nehmen Stoffe und Energie aus ihrer Umwelt auf, verwerten diese und geben Stoffwechselreste sowie Energie in umgewandelter Form wieder an ihre Umwelt ab. Das Verhältnis der Stoffaufnahme und -abgabe läßt sich mathematisch genauer erfassen. So wissen wir, daß bei der Veratmung eines mol Traubenzucker ($C_6H_{12}O_6$) 6 mol Kohlendioxyd (CO_2) entstehen. Dieses Verhältnis der genannten Gase läßt sich in den Volumina messen. Als Atmungsquotient (respiratorischer Quotient) $RQ = \frac{CO_2}{O_2}$ erlaubt es Aussagen über den Stoffwechsel der Organismen und seine Intensität.

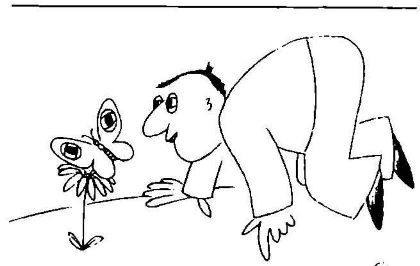
▲2▲ Bei normaler Veratmung von Kohlenhydrat ($C_6H_{12}O_6$) ist der RQ 1.
Berechne, wie groß der RQ bei der Veratmung einer in Fetten häufig vorkommenden Fettsäure, der Stearinsäure, ist, bei der 26 mol O_2 verbraucht und 18 mol CO_2 gebildet werden!

Der Sauerstoff wird im Blute der Wirbeltiere vor allem durch die roten Blutkörperchen transportiert. Ihr Volumen und damit ihre Oberfläche, die zueinander in einem mathematischen Verhältnis stehen, sind bei den einzelnen Klassen – Fische, Lurche, Reptilien, Vögel, Säuger – unterschiedlich gestaltet. Die dadurch bestimmte Menge in einem Kubikmillimeter (mm^3) Blut beträgt beim Menschen durchschnittlich 4,5 Millionen.

Alle biologischen Prozesse beziehen physikalische und chemische Erscheinungen ein. Sie verlaufen unter bestimmten Bedingungen wie Druck und Temperatur, der Veränderung von Stoffen und deren Beschleunigung durch Enzyme, aber auch von Eigenschaften, die für das jeweilige Individuum kennzeichnend sind. Dieses Abweichen im Verhalten verschiedener Organismen vom statistischen errechneten Normwert bezeichnen wir als *biologische Variabilität*. Es genügen deshalb bei Untersuchungen nicht Einzelwerte. Sie können zufällig sein und zu Irrtümern führen. Um Fehlurteile in vorgegebenen Grenzen zu halten, werden als mathematische Mittel die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Statistik eingesetzt.

Die meisten Vorgänge und Gesetzmäßigkeiten im biologischen Bereich sind zufälliger Natur, und daraus erklärt sich die Bedeutung

---

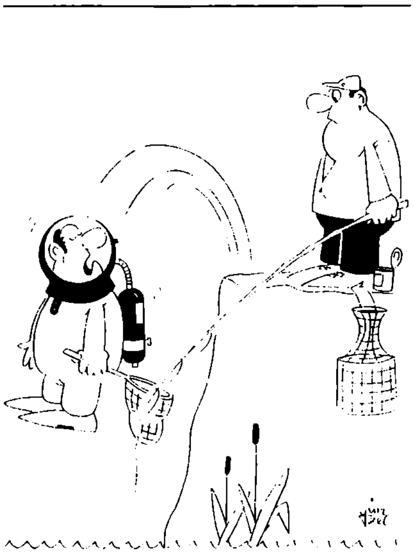


der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mathematischen Statistik für die Biologie. Es werden in der Biologie aber auch andere mathematische Disziplinen, wie z. B. Graphentheorie, Differentialgleichungen u. a. benötigt. Seit Beginn dieses Jahrhunderts gab es starke Wechselbeziehungen vor allem zwischen Mathematischer Statistik und biologischen Disziplinen im weitesten Sinne (Landwirtschaft, Medizin, Pharmazie, Mikrobiologie, Genetik), die schon im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts zur Herausbildung einer neuen Fachrichtung, der *Biometrie*, führten. Zur Biometrie gehören vor allem die den Fragestellungen der Biologie angepaßten Verfahren der Mathematischen Statistik, während man zur *Biomathematik* auch alle anderen mathematischen Methoden rechnet, die in der Biologie besondere Bedeutung erlangt haben.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der *Biostatistik* hat zur Erkenntnis wesentlicher Zusammenhänge in der Vererbungslehre (Genetik) geführt. Das Doppelschrauben-Modell der Anordnung der Nukleotide in der DNS (Desoxyribonuklein-Säure) ist nicht zuletzt das Ergebnis der komplizierten mathematischen Berechnungen seiner Entdecker, der Engländer *Crick* und *Watson* (vergleiche Biologielehrbuch Klasse 10!).

Am Beispiel der Tierzucht soll die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei Anwendung der Mendelschen Gesetze gezeigt werden. Es empfiehlt sich für Schüler der 10. bzw. 12. Klasse, dazu im Biologielehrbuch für Klasse 10 (Volk und Wissen, Berlin 1971) die Abschnitte *Von den Erbanlagen zur Merkmalausbildung* und *Neukombination von Erbanlagen* (Seiten 32 bis 39) nochmals zu lesen.

Besamungsbullen sind als Vatertiere in unserer sozialistischen Landwirtschaft sehr wertvoll. Mit oft mehreren tausend Nachkommen bestimmen sie die Leistungen in der Tierproduktion wesentlich. Deshalb richten Bullen großen Schaden an, wenn sie Träger von Erbkrankheiten sind. Oft werden diese durch unterschiedliche Zustandsformen der Erbanlagen (Gene) gekennzeichnet. Wenn diese am gleichen Ort von gleichen (homologen) Kernschleifen (Chromosomen) getragen werden, heißen sie Allele. Allele mit krankhafter Merkmalsausbildung sind meist in mischerbigen Zellen von Allelen mit normaler Merkmalsausbildung überdeckt. Sie sind rezessiv. Das bedeutet, daß die Krankheit nur auftritt, wenn an einem Genort mit den möglichen Allelen A und a beide Allele vom Typ a sind.



„*Mal sehen, was ich für dich finden kann.*"

Tabelle 1:
Gesundheitszustand eines Rindes in Abhängigkeit vom Genotyp

Genotyp	A A	Aa	aa
Gesundheitszustand	gesund	gesund	krank

Um möglichst zu vermeiden, daß Träger des Allels a zur Besamung von Kühen eingesetzt werden, führt man eine Untersuchung (Test) durch, die mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung geplant werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (etwa des Würfelns einer 4) ist eine Zahl zwischen 0 und 1 für die (u. a.) folgende Rechenregeln gelten:

Sind A und B zwei Ereignisse, die sich ausschließen (d. h. nicht beide gleichzeitig eintreten), so gilt

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

Sind A und B zwei Ereignisse, so gilt

$$P(\text{sowohl } A \text{ als auch } B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (2)$$

Hierbei lesen wir P(X) als Wahrscheinlichkeit von X (des Ereignisses X) und verstehen unter A oder B, daß entweder A oder B oder auch A und B gleichzeitig auftreten und unter A/B das Auftreten von A unter der Bedingung, daß B erfüllt ist. Führt man einen Versuch mit endlich vielen (n) möglichen Ergebnissen durch, die alle gleiche Wahrscheinlichkeit haben und von denen x Ergebnisse das Ereignis A ergeben, so kann man P(A) durch $\frac{x}{n}$ berechnen.

Sind z. B. bei einem Würfel die Zahlen 1, ..., 6 gleichwahrscheinlich, und ist A das Ereignis *gerade Zahl wird geworfen*, so ist $n=6$, $x=3$ und die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer geraden Zahl gleich $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Ähnlich erhält man für das Würfeln einer 4 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Setzen wir für A das Würfeln einer 4, für B das Würfeln einer geraden Zahl, so ist

$$P(A/B) = \frac{1}{3},$$

da es unter den 3 geraden Zahlen des Würfels eine 4 gibt.

Wir sagen, die Ereignisse A und B seien unabhängig, wenn $P(A/B) = P(A)$ gilt. Dann hat (2) die Form

$$P(\text{sowohl } A \text{ als auch } B) = P(A)\, P(B). \quad (3)$$

Es ist für unsere Untersuchung zu fordern, daß nur solche Bullen in die Besamungsstation aufgenommen werden, die höchstens mit der Wahrscheinlichkeit 0,001 Träger des Allels a sind.

(Diesen Wert kann man so interpretieren, daß im Mittel jeder tausendste Bulle zu unrecht als Besamungsbulle eingesetzt [also Träger von a] ist.)

Zunächst soll erklärt werden, wieso ein Bulle vom Genotyp A a – also ein *gesunder* Bulle – kranke Nachkommen haben kann. Bei der Meiose (Reifeteilung) erzeugt ein solcher Bulle mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Gameten mit dem Allel A und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Gameten mit dem Allel a. Auch eine gesunde Kuh vom Genotyp A a erzeugt mit diesen Wahrscheinlichkeiten Gameten mit dem A- bzw. a-Allel.

Tabelle 2: Bulle A a

		A ♂	a ♂
Kuh A a	A ♀	A A	A a
	a ♀	a A	a a

Genotypen der Nachkommen von Bullen und Kühen des Genotyps A a

Nun ist es bei der Befruchtung rein zufällig, welche weibliche Gamete sich mit welcher männlichen Gamete vereinigt, d. h. alle möglichen Kombinationen sind nach (3) gleichwahrscheinlich $\left(=\frac{1}{4}\right)$.

$$P(A♀\ A♂) = P(A♀) \cdot P(A♂) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A♀\ a♂) = \frac{1}{4}$$

$$P(a♀\ A♂) = \frac{1}{4}$$

$$P(a♀\ a♀) = \frac{1}{4}$$

so daß etwa ein Viertel aller Nachkommen gesunder A a-Bullen und A a-Kühe kranke Tiere (a a) sind.

Ein möglicher Test für das Vorhandensein von a ist der folgende:

Man paart den gesunden Bullen, dessen Genotyp unbekannt ist (A A oder A a) an n kranke Kühe vom Genotyp a a an. Ist der Bulle vom Genotyp A A, so gibt es keine Nachkommen vom Genotyp a a

Tabelle 3: Bulle A A

		A	A
Kuh a a	a	a A	a A
	a	a A	a A

Genotypen der Nachkommen von Bullen vom Genotyp A A und Kühen vom Genotyp a a

denn alle Nachkommen sind vom Genotyp A a.

Ist ein Bulle vom Genotyp A a, so treten

Tabelle 4: Bulle A a

		A	a
Kuh a a	a	a A	a a
	a	a A	a a

Genotypen der Nachkommen von Bullen vom Genotyp A a und Kühen vom Genotyp a a

nach Tabelle 4 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Nachkommen vom Genotyp a a auf. Wir können also mit Sicherheit folgende Aussage machen:: Ist der Nachkomme aus der Paarung eines Bullen mit einer Kuh vom Genotyp a a, so trägt der Bulle das unerwünschte Allel und wird nicht in die Besamungsstation aufgenommen. Ist der Nachkomme gesund, so kann der Bulle den Genotyp A A oder A a haben.

Tabelle 5 enthält die möglichen Schlußfolgerungen. Wir ersehen aus der Tabelle, daß eine sichere Aussage nur möglich ist, wenn Nachkommen vom Genotyp a a auftreten.

Tabelle 5: Schlußfolgerungen bei Anpaarung eines gesunden (A A oder A a) Bullen an kranke Kühe anhand des Gesundheitszustandes (gesund = A A oder A a, krank = a a) der Nachkommen

Anzahl der Nachkommen	Gesundheitszustand der Nachkommen	Schlußfolgerung
1	gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,5
	krank	Bulle hat den Genotyp A a
2	alle gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,75
	wenigstens einer krank	Bulle hat den Genotyp A a
3	alle gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,875
	wenigstens einer krank	Bulle hat den Genotyp A a
4	alle gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,9375
	wenigstens einer krank	Bulle hat den Genotyp A a

Dann ist der Bulle mit Sicherheit Träger des unerwünschten Allels a und kommt nicht für die Besamung in Frage. Ist ein Nachkomme gesund, so kann der Bulle das Allel a besitzen oder auch nicht. Betrachten wir Nachkommen von 2 (unverwandten) Kühen und des zu testenden Bullen, so sind die Ereignisse T_{1g} *erster Nachkomme ist gesund* und T_{2g} *zweiter Nachkomme ist gesund* voneinander unabhängig, und es gilt wegen $P(T_{1g}/T_{2g}) = P(T_{1g})$ nach (3) für die Wahrscheinlichkeit, daß beide Nachkommen gesund sind $P(\text{sowohl } T_{1g} \text{ als auch } T_{2g}) = P(T_{1g}) \cdot P(T_{2g})$.

Für n Nachkommen gilt allgemeiner

$$P(\text{sowohl } T_{1g} \text{ als auch } T_{2g}, \ldots, \text{ als auch } T_{ng}) = P(T_{1g}) \cdot P(T_{2g}) \ldots \cdot P(T_{ng}) \qquad (4)$$

Wir stellen eine Hypothese (wissenschaftlich begründete [s. o.] Annahme) auf, wir nennen sie Nullhypothese H_0. Sie lautet:

H_0 Der Bulle hat den Genotyp A A

Die Gegen- oder Alternativhypothese H_A lautet:

H_A Der Bulle hat den Genotyp A a

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i-te Nachkomme gesund ist (T_{ig}), falls H_0 richtig ist

$$P(T_{ig}/H_0) = 1$$

da bei Gültigkeit von H_0 alle Nachkommen vom Typ A a (also gesund) sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i-te Nachkomme gesund ist, falls H_A richtig ist, ist

$$P(T_{ig}/H_A) = \frac{1}{2} \text{ für jedes } i \; (i = 1, \ldots, n).$$

Folglich ist nach (4)

$$P(\text{alle Nachkommen sind gesund}/H_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Wir vereinbaren folgende Entscheidungsregel: Anhand der Nachkommen von n Paarungen des zu testenden Bullen an Kühe vom Genotyp a a entscheiden wir uns für die Annahme von H_0, falls alle n Nachkommen gesund sind. Wir entscheiden uns für H_A, falls wenigstens ein Nachkomme krank ist. Wenn wir uns für H_A entscheiden, so ist die Entscheidung sicher immer richtig. Eine Entscheidung für H_0 dagegen kann falsch sein, der Bulle kann vom Genotyp A a sein, ohne daß ein Nachkomme vom Genotyp a a auftritt. Die Aussage „H_0 *ist richtig*" ist also nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit wahr, die wir mit $1-\alpha$ bezeichnen. α heißt Irrtumswahrscheinlichkeit oder Risiko der Entscheidung. Wir wollen nun errechnen, wie groß α in Abhängigkeit von n ist, und angeben, wie groß n mindestens sein muß, damit α den weiter oben vorgegebenen Wert 0,001 nicht überschreitet.

In Tabelle 6 ist $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ in Abhängigkeit von n angegeben.

Tabelle 6: Wahrscheinlichkeit α für die fälschliche Einstufung eines anhand von n Anpaarungen getesteten Bullen als Besamungsbullen in Abhängigkeit von n

n	α	n	α
1	0,500000	7	0,007812
2	0,250000	8	0,003906
3	0,125000	9	$1{,}953 \cdot 10^{-3}$
4	0,062500	10	$9{,}77 \cdot 10^{-4}$
5	0,031250	15	$3{,}05 \cdot 10^{-5}$
6	0,015625	20	$9{,}54 \cdot 10^{-7}$

Aus Tabelle 6 ersieht man, daß der Wert $\alpha = 0{,}001$ zum ersten Mal für $n = 10$ unterschritten wird, so daß man mindestens 10 Nachkommen für den Test benötigt, um das Risiko unter 0,001 zu halten.

An einigen Beispielen wurden die Beziehungen von Biologie und Mathematik nachgewiesen. Verständlicherweise geben sie nur einen Einblick in die Möglichkeiten, mittels der Mathematik Gesetzmäßigkeiten des Lebens zu erfassen und für die planmäßige, verantwortungsbewußte Veränderung von Lebensprozessen zum Wohle des Menschen anzuwenden. Spezialgebiete der Biomathematik wie statistische Genetik, Bevölkerungsstatistik, Analyse von Wachstums- und Entwicklungsprozessen sowie Bevölkerungsmathematik sollen ihrer großen Bedeutung wegen noch erwähnt werden. Abschließend sei noch auf die Kybernetik als Querschnittswissenschaft von den Reglungs- und Steuerungsvorgängen hingewiesen, weil auch sie über die Mathematik zu tieferen Erkenntnissen des Biologischen führt.

D. Rasch/G. Fehling

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Hans Bock

Sektion Mathematik
Karl-Marx-Universität Leipzig

▲1460▲ Ein Oktaeder, dessen Begrenzungsflächen gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge s sind, wird von einer Ebene geschnitten.

a) Bei welcher Lage der Ebene bezüglich des Oktaeders ergibt sich als Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck?

b) Wie groß ist im Falle des regelmäßigen Sechseckes als Schnittfigur das Volumen derjenigen Pyramide, die entsteht, wenn ein Eckpunkt des Oktaeders mit allen Eckpunkten der Schnittfigur verbunden wird?

Ein mutiger Geistesriese der jungen Bourgeoisie

Zum 325. Todestag des Philosophen und Mathematikers

René Descartes

René Descartes (31. 3. 1596 bis 11. 2. 1650), dessen 326. Todestag die fortschrittliche Menschheit in diesen Tagen begeht, wirkte in einer Zeit gesellschaftlicher Bewegungen, die nach den Worten Friedrich Engels „Riesen brauchte und Riesen zeugte. Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit…, die die moderne Herrschaft der Bourgeoisie begründeten".

Seine Arbeiten als Mathematiker, die die „variable Größe" und damit „die Dialektik und damit die Bewegung" in der Mathematik einführten, kennzeichnet Engels als einen „Wendepunkt in der Mathematik". Sie hatten einen nachhaltigen und bestimmenden Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik, der Naturwissenschaften, insbesondere auf die der Physik und nicht zuletzt auf die Herausbildung eines materialistischen Weltbildes. Descartes unternahm den kühnen Versuch, alle damals bekannten Naturerscheinungen durch die mechanische Bewegung zu erklären und ein Weltbild zu entwerfen, welches Makro- wie Mikrokosmos in sich vereinigt und nichts enthielt außer der sich bewegenden Materie. Er verallgemeinerte eine Vielfalt von Beobachtungen und gelangte vielfach zu einer richtigen Erklärung physikalischer, chemischer und physiologischer Erscheinungen. Seine materialistischen Grundthesen von der Materialität und Unendlichkeit der Welt, der unendlichen Teilbarkeit materieller Erscheinungen, der Unzerstörbarkeit von Materie und Bewegung, die Leugnung von Kräften, die außerhalb der Materie stehen (mit Ausnahme Gottes), haben die Entwicklung der Naturwissenschaft und des Materialismus gewaltig beeinflußt und nicht zuletzt die geistige Entwicklung Europas.

Die cartesische Physik wurde zur gleichen Zeit entwickelt wie die Dynamik *Galileis* (1564 bis 1642), aber unter anderen historischen Bedingungen. Descartes war Zeuge des Entstehens „Königlicher Manufakturen" in Frankreich, die zur Stärkung der Macht der Krone in Unterstützung der Geistlichkeit führten, die aber andererseits die Unzufriedenheit der um ihre ökonomische Macht kämpfenden jungen Bourgeoisie schürten. Letztere war ökonomisch zu schwach, den Kampf um die politische Macht zu beginnen. Der Dreißigjährige Krieg führte *Descartes* als Offiziersfreiwilligen verschiedener europäischer Feldherren nach Deutschland, und die Suche nach wissenschaftlichen Arbeitsbedingungen brachte ihn schließlich in das hochentwickelte Holland. Hier schrieb er den größten Teil seiner Werke, die sich gegen die kirchlich-scholastische feudale Weltanschauung richteten.

Descartes forderte eine Philosophie, die der Praxis diene und die Herrschaft des Menschen über die Naturkräfte zu festigen imstande sei. An Stelle jener „spekulativen Philosophie", schrieb er, „wie man sie in den Schulen lehrt, eine praktische zu finden, die uns die Kraft und die Wirkung des Feuers, des Wassers, der Luft, der Gestirne, des Himmelsgewölbes und aller übrigen Körper, die uns umgeben, so genau kennen lehrt, wie wir die verschiedenen Tätigkeiten unserer Handwerker kennen, so daß wir sie in derselben Weise zu allen Zwecken, wozu sie geeignet sind, verwenden und uns auf diese Weise gleichsam zu Meistern und Besitzern der Natur machen können" (*Descartes*). Eine Philosophie zu fordern, die der bewußten Veränderung bestehender Verhältnisse dient, eine Philosophie, die den Glauben durch wissenschaftliche Erkenntnisse verdrängt, eine Philosophie, die das Verneigen vor kirchlichen Dogmen und ihren Autoritäten durch den logischen Beweis verbannt, ist eine „Waffe" in den Händen der Bourgeoisie, die sie gegen den Absolutismus und die Kirche zum Erreichen ihrer ökonomischen und zur Verwirklichung ihrer politischen Macht gebraucht. Damit zog *Descartes* den Haß der katholischen Kirchenmänner auf sich.

Seine materialistischen Grundthesen erschütterten die Grundpfeiler der mittelalterlichen, feudalen Weltanschauung. Dem theologischen Dogmatismus und der religiösen Offenbarung setzte *Descartes* die Kraft des menschlichen Geistes entgegen. Er wandte sich an den gesunden Sinn „einfacher Menschen" und schrieb sein Werk „Abhandlung über die Methode" in der Sprache seines Volkes. Die Wut des Klerus und die Verurteilung *Galileis* im Jahre 1633 zwangen *Descartes*, seine Werke anonym zu veröffentlichen. Sein Werk „Traktat über das Licht" konnte erst 1664, 14 Jahre nach seinem Tode, erscheinen. Der unerbittliche Widerstand der protestantischen Theologen erzwang schließlich das Verbot der Lehre *Descartes* an den Universitäten Utrecht und Leyden. 1650 starb *René Descartes* als einer der Größten unter den Materialisten.

Prof. Dr. habil. Karl-Heinz Kannegießer
(aus: Leipziger Volkszeitung vom 8. 2. 75)

Lebensdaten zu René Descartes

1596 31. März, *René Descartes* Geburt als drittes Kind des Juristen *Joaquim Descartes* in Haye bei Tours
1604 bis 1612 Besuch des Jesuitencollegs La Fleche
1614 bis 1616 Studium in Poitiers, *Descartes* erwirbt das Baccalaureat und Lizenziat der Rechte an der Fakultät zu Poitiers
1618 Erbe eines kleinen Gutes Le Perron im Poitou. Freiwilliger Eintritt in die Armee *Moritz v. Nassau* in Holland
1618 bis 1648 Dreißigjähriger Krieg
1619 Entdeckung des *Eulerschen Polyedersatzes* $e+f=n+2$
1620 Freiwillig in der Armee des Herzogs von Bayern, Teilnahme an der Schlacht am Weißen Berge
1622 bis 1625 Reisen, unter anderem nach Italien
1626 bis 1628 Aufenthalt in Paris, Freundschaft mit *M. Mersenne* und *G. de Balzac*
1628 Emigration nach Holland
1631 Besuch in England
1632 Gründung der Amsterdamer Akademie. Bekanntschaft mit *C. Huygens*
1637 „Discours de la méthode…" erscheint
1638 Streit mit *Fermat* über die Tangentenmethode
1646 *Roberval* bezichtigt *Descartes* des Plagiats
1649 *Descartes* folgt einer Einladung nach Schweden
1650 Tod am 11. Februar
1659 bis 1661 Zweite lateinische Ausgabe der „Geometrie" erscheint
1663 *Descartes* Schriften kommen auf den Index

alpha-Buchtip

Biographien bedeutender Mathematiker

Eine Sammlung von Biographien.
Herausgegeben von *W. Arnold*
und Prof. Dr. sc. *H. Wußing*
536 Seiten, 340 Abb., Halbleinen,
Preis 22,– M
Bestell-Nr.: 706 107 0
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Das Buch umfaßt eine Sammlung von 41 Biographien bedeutender Mathematiker von der Antike bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Für das 20. Jahrhundert wird ein Ausblick angefügt. Zur Erläuterung der gesellschaftlichen und ökonomischen Verhältnisse, in denen die Mathematiker lebten, werden für die verschiedenen Epochen Überblicksdarstellungen angegeben. Die Auswahl der Persönlichkeiten, die in diesem Buch vorgestellt werden, wurde von den Herausgebern unter dem Aspekt vorgenommen, daß wichtige Schritte in der Entwicklung erfaßt werden, daß die Schulmathematik berücksichtigt wird und daß möglichst viele Kulturzentren erwähnt werden.
In dem obengenannten Buch finden wir auch einen Beitrag (9 Seiten) über *René Descartes* (Autor: *W. Arnold*, Abteilungsleiter für Mathematik und Naturwissenschaften im VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin). Wir geben die Lebensdaten von *R. Descartes* wieder (aus diesem Buch S. 175/176). Siehe Seite 4.

Das ist einer der 100 Teilnehmer des 7. Wettbewerbs Stralsund/Insel Rügen. 50 der erfolgreichsten *Jungen Mathematiker* aus allen Teilen der Insel waren am Sonntag, 12. 10. 1975, nach Stralsund gereist, um in einer zweistündigen Klausur mit den besten *Jungen Mathematikern* Stralsunds ihre Kräfte zu messen. Die Schüler kamen aus Vitte (Hiddensee), Binz, Saßnitz, Bergen, Göhren, Putbus, Garz, Dranske, Sellin. Im März 1976 wird Bergen Gastgeber des 8. Wettbewerbs, im Mai Hiddensee (9. Wettbewerb) sein.

Übung macht den Meister

Gleichungen aus aller Welt
Alle reellen Zahlen *x*, *y* bzw. *z* sind gesucht!

Ungarische Volksrepublik

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-5\right)-5\right]-5\right\}-5=0$$

Volksrepublik Polen

$$5x(x+m)-(x-m)(x-2m)=(4x+m)(x+m)$$

ČSSR

$$\frac{3}{4}(x+1)-\frac{2}{3}(2x-1)=2-\frac{5}{6}(x+1)$$

Volksrepublik Bulgarien

$$\frac{19-5x}{4-2x}-\frac{20-14x}{6-3x}=5$$

Island

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

DDR

$$(p+qx)^2+(px-q)^2=2(p^2x^2+q^2)$$

UdSSR

$$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}}=\sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{6-x}}}}$$

Republik Österreich

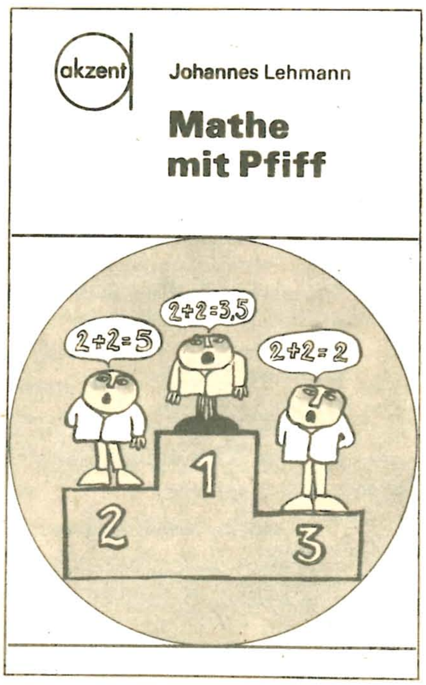
$$4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$$

Sozialistische Republik Rumänien

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x^2+xy+y^2=13 \\ \text{II} & x+y=4 \end{array}$$

Großbritannien

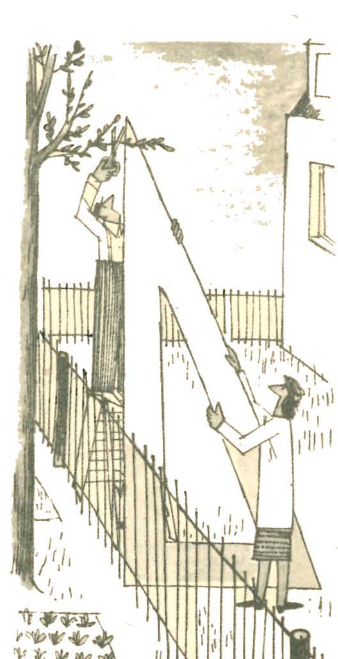
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x-6y+z &=& 15 \\ \text{II} & x+5y+3z &=& -9 \\ \text{III} & 2x-y+4z &=& 4 \end{array}$$



Ein Buch aus der akzent-Reihe
138 S., zahlreiche lustige Vignetten,
Vierfarbendruck, Best.-Nr. 653 364 6
Preis 4,50 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Dieses Taschenbuch ist eine Sammlung von teilweise sehr unterhaltsamen und reizvollen Aufgaben aus allen Gebieten der elementaren Mathematik. Es will insbesondere den jugendlichen Leser zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen, indem es Übungs- sowie Denksportaufgaben stellt und die dazugehörenden ausführlichen Lösungswege angibt. Das Taschenbuch zeigt, daß Mathematik nicht trocken sein muß, sondern auch Spaß und Freude bereiten kann.

Aus dem Inhalt:
Überall natürliche Zahlen · Gebrochene Zahlen · Teilbar oder nicht teilbar? · Überall Variable · Gleichungen und Ungleichungen in Theorie und Praxis · Logik/Kombinatorik · Aus alten Mathematikbüchern · Gesucht *x*, gesucht *A* · Rund um den Kreis · Geometrie · Magische Quadrate · Würfeleien · Kryptarithmetik · Rätsel und Spiele · umfassende Lösungen



Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen

Teil 2 – Anwendungen

Für unsere weiteren Betrachtungen setzen wir voraus, daß in der Menge der reellen Zahlen eine Ordnungsrelation festgelegt ist (vgl. Lehrbuch Klasse 9, S. 22).

Zunächst eine Vorbemerkung: Es sei $a = a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ eine beliebige nichtnegative reelle Zahl. Brechen wir den unendlichen Dezimalbruch $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ nach der n-ten Stelle (n eine beliebige natürliche Zahl) ab, so erhalten wir $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ als rationalen Näherungswert von a mit

$$a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \leq a.$$

Erhöhen wir bei diesem Näherungswert die letzte Stelle um 1, so erhalten wir

$a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$ als rationalen Näherungswert von a mit

$$a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} > a.$$

Summe und Produkt reeller Zahlen

$a = a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ und $b = b_0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$ seien beliebige reelle Zahlen. Da jede dieser Zahlen unendlich viele Stellen nach dem Komma hat, ist hier das für endliche Dezimalbrüche bekannte Verfahren für die Addition nicht anwendbar.[5]

Wir bilden deshalb die folgenden Mengen:

$M_1 = \{x_1 + x_2 \mid x_1, x_2$ rational und $x_1 \leq a$ und $x_2 \leq b\}$

$M_2 = \{y_1 + y_2 \mid y_1, y_2$ rational und $a \leq y_1$ und $b \leq y_2\}$.

M.a.W.: M_1 enthält Summen rationaler Zahlen x_1 und x_2. Dabei sind x_1 bzw. x_2 zu kleine Näherungswerte der reellen Zahlen a bzw. b. Dagegen enthält M_2 Summen von zu großen Näherungswerten von a und b.

Die Mengen M_1 und M_2 haben ebenfalls die Eigenschaften (a) bis (c) (vergl. Teil 1, Heft 6/75). Wir führen hier den Nachweis von (c) für den Fall, daß a und b *nichtnegative* reelle Zahlen sind.

[5] Soll z. B. die Summe der Zahlen 3,10459 und 0,78400 berechnet werden, so beginnt man das Verfahren der Addition mit der am weitesten rechts stehenden Stelle. Reelle Zahlen haben im allgemeinen jedoch unendlich viele Stellen nach dem Komma, so daß es keine am weitesten rechts stehende Stelle gibt.

Es seien also $a = a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ und $b = b_0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$ beliebige *nichtnegative* reelle Zahlen und n eine beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten die rationalen Zahlen

$$x_1 = a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n\, a_{n+1}$$

und

$$x_2 = b_0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n\, b_{n+1}.$$ Dann gilt

$$x_1 \leq a < x_1 + \frac{1}{10^{n+1}}$$

und

$$x_2 \leq b < x_2 + \frac{1}{10^{n+1}}.$$ Folglich ist

$$x_1 + x_2 \in M_1,\; x_1 + \frac{1}{10^{n+1}} + x_2 + \frac{1}{10^{n+1}} \in M_2$$

und

$$\left(x_1 + \frac{1}{10^{n+1}} + x_2 + \frac{1}{10^{n+1}}\right) - (x_1 + x_2) = \frac{2}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}.$$

Damit ist gezeigt, daß für die Mengen M_1 und M_2 die Eigenschaft (c) gilt, falls a und b nichtnegative reelle Zahlen sind.

Aufgabe 6:

Weise nach, daß die Eigenschaft (c) für die Mengen M_1 und M_2 auch gilt, wenn

(a) eine der Zahlen a und b nichtnegativ, die andere negativ ist

(b) a und b negativ sind.

Nach Satz 1 gibt es genau eine reelle Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt. Diese Zahl definieren wir als die Summe der reellen Zahlen a und b.

Beispiel 4: Es sei

$a = 6,102001000200001000002\ldots$ und

$b = 1,123456789101112131415\ldots.$

Es ist

$6 \leq a < 7;\; 6,1 \leq a < 6,2;\; 6,10 \leq a < 6,11;\; 6,102 \leq a < 6,103;\; \ldots$

$1 \leq b < 2;\; 1,1 \leq b < 1,2;\; 1,12 \leq b < 1,13;\; 1,123 \leq b < 1,124;\; \ldots$

Zu M_1 gehören beispielsweise die Zahlen $6+1$; $6,1+1,1$; $6,10+1,12$ und $6,102+1,123$. Zu M_2 gehören z. B. die Zahlen $7+2$; $6,2+1,2$; $6,11+1,13$ und $6,103+1,124$.

Die Elemente der Mengen M_1 und M_2 liefern Näherungswerte für die Summe $a+b$. Beispielsweise ist

$$6,10 + 1,12 \leq a + b < 6,11 + 1,13$$

bzw. $$7,22 \leq a + b < 7,24.$$

7,22 ist ein Näherungswert von $a+b$. Die Abweichung dieses Näherungswertes von $a+b$ ist kleiner als 0,02.

Analog ist wegen

$6,102 + 1,123 = 7,225 \leq a + b$

$a + b < 7,227 = 6,103 + 1,124$

auch 7,225 ein Näherungswert von $a+b$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,002 ist.

Aufgabe 7:

Bestimme einen Näherungswert von $a+b$, der um weniger als 0,00002 von $a+b$ abweicht!

In gleicher Weise wie die Summe kann auch das Produkt reeller Zahlen definiert werden. Gegeben seien die reellen Zahlen a und b. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß a und b positiv sind. Wieder bilden wir Mengen M_1 und M_2, und zwar:

$M_1 = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1, x_2$ positiv und rational und $x_1 \leq a,\, x_2 \leq b\}$

$M_2 = \{y_1 \cdot y_2 \mid y_1, y_2$ rational und $y_1 \geq a$ und $y_2 \geq b\}$.

Auch dieses Mengenpaar hat die Eigenschaften (a) bis (c). Folglich gibt es genau eine reelle Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt. Diese Zahl heißt das Produkt der Zahlen a und b. Das Produkt $a \cdot b$ kann ebenfalls durch Elemente aus M_1 und M_2 angenähert werden.

Beispiel 5: Wählen wir a und b wie im Beispiel 4, so gilt beispielsweise

$$6,10 \cdot 1,12 \leq a \cdot b < 6,11 \cdot 1,13$$

bzw. $$6,8320 \leq a \cdot b < 6,9043.$$

Demnach ist 6,8320 ein Näherungswert von $a \cdot b$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,0723 ist.

Aufgabe 8:

Bestimme einen Näherungswert von $a \cdot b$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,01 ist!

Quadratwurzeln reeller Zahlen

In der 9. Klasse habt ihr die Definition der n-ten Wurzel einer nichtnegativen reellen Zahl kennengelernt, nachdem zuvor folgender Satz ohne Beweis mitgeteilt wurde (vgl. Lehrbuch Klasse 9, S. 25):

Ist a eine nichtnegative reelle Zahl und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, so existiert stets genau eine nichtnegative reelle Zahl b mit $b^n = a$.

Wir wollen hier diesen Satz für den Spezialfall $n = 2$ beweisen. Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl.[6]

Satz 2:

Es gibt genau eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = a$. Diese positive reelle Zahl x wird die Quadratwurzel von a genannt; man schreibt $x = \sqrt{a}$.

Den Satz 2 können wir in zwei Teilaussagen zerlegen:

1. Es gibt mindestens eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = a$ (Existenz).

[6] Für $a = 0$ ist der Satz trivial, denn es ist $0^2 = 0$ und $a^2 \neq 0$ für jede reelle Zahl $a \neq 0$.

2. Es gibt höchstens eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = a$ (Eindeutigkeit).

Die Eindeutigkeit können wir wie folgt beweisen:

Angenommen, es gibt wenigstens *zwei* positive reelle Zahlen x_1, x_2 mit $x_1^2 = x_2^2 = a$. Wegen $x_1 \neq x_2$ gilt $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$. Daraus folgt aber sofort $x_1^2 < x_2^2$ oder $x_2^2 < x_1^2$ im Widerspruch zu $x_1^2 = x_2^2 = a$.[7]

Beim Beweis der Existenz machen wir von Satz 1 Gebrauch.

Wir betrachten hier die folgenden Mengen:

$M_1 = \{x \mid x \text{ positiv reell und } x^2 \leq a\}$

$M_2 = \{y \mid y \text{ positiv reell und } y^2 \geq a\}$.

Dieses Mengenpaar hat wiederum die Eigenschaften (*a*) bis (*c*).

Zu (*a*): Ist $a \leq 1$, so liegt wegen $a^2 \leq a$ die Zahl a in M_1.

Ist $a > 1$, so liegt die Zahl 1 in M_1.

In jedem Fall ist M_1 nicht leer.

Wegen $(a+1)^2 > a$ für jede reelle Zahl a liegt $a+1$ in M_2. Also ist auch M_2 nicht leer.

Zu (*b*): Für jedes $x \in M_1$ und jedes $y \in M_2$ gilt $x \leq y$.

Gäbe es nämlich Zahlen x in M_1 und y in M_2 mit $x > y$, so wäre $x^2 > y^2$ im Widerspruch zu $x^2 \leq a \leq y^2$.

Zu (*c*): Der Nachweis dieser Eigenschaft wird wie im Beispiel 3 geführt.

Nach Satz 1 gibt es genau eine Zahl s, die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegt. Wir wollen nun zeigen, daß diese Zahl s die geforderte Eigenschaft hat, daß nämlich $s^2 = a$ gilt.

Diesen Nachweis führen wir indirekt. Wir nehmen also an, es sei $s^2 \neq a$. Dann ist entweder $s^2 < a$ oder $s^2 > a$.

1. Fall: $s^2 < a$.

Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit[8]

$$s^2 + \frac{1}{10^n} < a.$$

Wir können nun zeigen, daß es eine Zahl t mit $t > s$ und $t^2 < a$ gibt, also eine Zahl t aus M_1, die größer als s ist.

Wie finden wir eine solche Zahl t?

Wir probieren, ob eine der Zahlen $t = s + \frac{1}{10^m}$ (m eine natürliche Zahl) bei geeigneter Wahl von m die Bedingungen $t > s$ und $t^2 < a$ erfüllt.

Offensichtlich ist jede der Zahlen $s + \frac{1}{10^m}$ größer als s. Wie steht es mit der Bedingung $t^2 = \left(s + \frac{1}{10^m}\right)^2 < a$? Es ist

$$t^2 = \left(s + \frac{1}{10^m}\right)^2 = s^2 + 2s \cdot \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{2m}}.$$

Wegen $\frac{1}{10^{2m}} < \frac{1}{10^m} (m > 0)$ gilt

$$t^2 < s^2 + \frac{2s}{10^m} + \frac{1}{10^m} = s^2 + \frac{2s+1}{10^m}.$$

Damit die rechte Seite der Ungleichung kleiner als a wird, wählen wir m so groß, daß

$$\frac{2s+1}{10^m} < \frac{1}{10^n} \text{ gilt.}$$

Für die Zahl n gilt aber (s. o.) $s^2 + \frac{1}{10^n} < a$.

Folglich ist

$$t^2 < s^2 + \frac{2s+1}{10^m} < s^2 + \frac{1}{10^n} < a.$$

Wegen $t^2 < a$ ist $t \in M_1$. Ferner ist $t > s$ im Widerspruch dazu, daß s zwischen M_1 und M_2 liegt.

2. Fall: $s^2 > a$

Dieser Fall kann analog zum Fall 1 zum Widerspruch geführt werden. Damit haben wir den Satz 2 bewiesen. Die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegende Zahl s ist die Quadratwurzel von a. Die Elemente der Mengen M_1, M_2 sind Näherungswerte für die Zahl $\sqrt{a}$, denn für jedes $x \in M_1$ und jedes $y \in M_2$ gilt

$$x \leq \sqrt{a} \leq y.$$

Beispiel 6: Es sei $a = 5$. Dann sind die Zahlen 2; 2,2; 2,23 und 2,236 aus M_1 und die Zahlen 3; 2,3; 2,24 und 2,237 aus M_2, und es gilt

$$2 \leq \sqrt{5} \leq 3$$
$$2{,}2 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}3$$
$$2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$$
$$2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237.$$

Die Zahl 2,236 ist ein Näherungswert von $\sqrt{5}$, der um weniger als 0,001 von $\sqrt{5}$ abweicht.

Aufgabe 9:

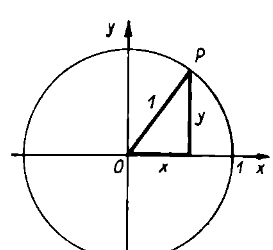
Berechne einen Näherungswert für $\sqrt{7}$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,001 ist!

Flächeninhalt einer Kreisfläche

Die Figur 4 zeigt einen Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Die Koordinaten x und y der Kreispunkte genügen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Wir wollen nun diejenige Punktmenge betrachten, die aus allen und nur den Punkten $(x; y)$ besteht, für die $x^2 + y^2 \leq 1$ gilt.



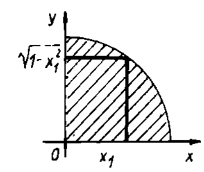
Figur 4

Eine solche Punktmenge nennen wir bekanntlich eine Kreisfläche.

Was versteht man unter dem Flächeninhalt dieser Kreisfläche?

Um diese Frage zu beantworten, wenden wir uns zunächst dem Viertelkreis zu, der im I. Quadranten liegt. Wir betrachten also die Punktmenge (vgl. Fig. 5)

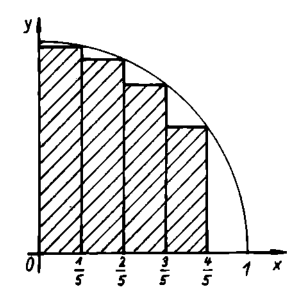
$K = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.



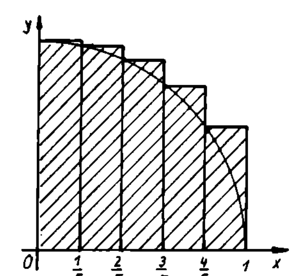
Figur 5

Nun gehen wir davon aus, daß wir den Flächeninhalt von Rechteckflächen berechnen können, nämlich als Produkt von Länge und Breite des betreffenden Rechtecks.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl, $n > 1$. Durch Parallelen zur y-Achse an den Stellen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ und durch Parallelen zur x-Achse erhalten wir einmal nebeneinanderliegende Rechteckflächen, die ganz in der Punktmenge K enthalten sind (vgl. Fig. 6) und zum anderen Rechteckflächen, die zusammengenommen die Punktmenge K enthalten (vgl. Fig. 7).



Figur 6



Figur 7

Im ersten Fall erhalten wir $n - 1$ Rechtecke. Die Summe der Inhalte dieser $n - 1$ Rechteckflächen nennen wir $U(n)$. Für jede natürliche Zahl n ($n > 1$) gibt es eine Zahl $U(n)$. Die Menge aller Zahlen $U(n)$ nennen wir M_1.

Im zweiten Fall erhalten wir n Rechtecke. Die Summe der Inhalte dieser n Rechteckflächen nennen wir $O(n)$. Für jede natürliche Zahl $n (n > 1)$ gibt es eine Zahl $O(n)$. Die Menge aller Zahlen $O(n)$ nennen wir M_2. (Fortsetzung in Heft 2/76)

H. Lemke/W. Stoye

[7] Wir verwenden dabei, daß < eine Ordnungsrelation in der Menge der reellen Zahlen ist und daß für die Multiplikation reeller Zahlen das Monotoniegesetz gilt.

[8] Sind $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ und $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ nichtnegative reelle Zahlen mit $a < b$, so existiert eine natürliche Zahl k mit $a_k < b_k$ und $a_m = b_m$ für alle $m < k$. Ferner gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > k$ und $a_n < 9$. Für diese Zahl n gilt dann $a + \frac{1}{10^n} < b$.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 6. Mai 1976

Ma 5 ▪1461 Gegeben sei eine zweistellige natürliche Zahl, deren erste Ziffer doppelt so groß ist wie deren zweite. Multipliziert man diese Zahl mit 13, so ist das erhaltene Produkt um 522 größer als diejenige Zahl, die aus der gegebenen Zahl durch Vertauschen der Ziffern hervorgeht. Um welche Zahl handelt es sich? *Andreas Fittke, Berlin*

Ma 5 ▪1462 Das Produkt zweier natürlicher Zahlen betrage 5394. Die Summe aus diesen Zahlen sei gleich 149. Um welche Zahlen handelt es sich? *Andreas Fittke, Berlin*

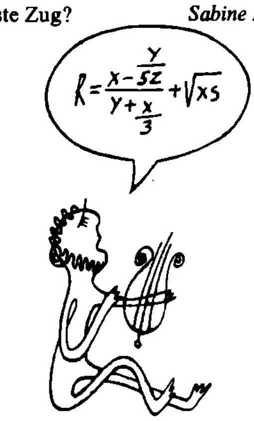
Ma 5 ▪1463 Eine durch 2 teilbare zweistellige natürliche Zahl n_1 habe die Quersumme 9, und ihre zweite Grundziffer sei doppelt so groß wie ihre erste. Eine weitere durch 2 teilbare natürliche Zahl n_2 habe die Quersumme 7. Die Differenz aus n_1 und n_2 ergebe eine Zahl, die größer ist als n_2. Welche Zahlen n_1 und n_2 erfüllen die gestellten Bedingungen? *Matthias Rogall, Dresden*

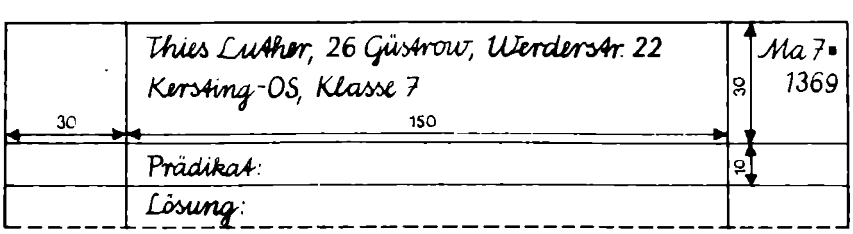
Ma 5 ▪1464 Acht Spielwürfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6 seien zu einem Würfel mit doppelter Kantenlänge zusammengesetzt. Für den Betrachter dieses Würfels seien genau drei in einer Ecke zusammenstoßende Seitenflächen sichtbar. Es soll die Summe der sichtbaren Augenzahlen der Spielwürfel dieser drei Seitenflächen ermittelt werden. Zwischen welchen Augenzahlen muß diese Summe liegen? *K.-H. Breitmoser, Neubrandenburg*

Ma 5 ▪1465 Genau vier Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft heißen mit Familiennamen Schulze, genau drei Krause, genau zwei Müller und genau zwei Paetow. Genau drei Mitglieder dieser AG haben den Vornamen Hans, genau drei den Vornamen Fritz und genau vier den Vornamen Günter. Der Leiter dieser Arbeitsgemeinschaft hat den Vornamen Ernst; sein Stellvertreter heißt Hans Paetow. Keine zwei Mitglieder dieser AG haben gleiche Vor- und Familiennamen. Wie heißen die zehn Mitglieder dieser Arbeitsgemeinschaft mit ihrem vollen Namen? *Oberlehrer Karl Becker, Lübtheen*

Ma 5 ▪1466 Im *VEB Kabelwerk Meißen* werden gegenwärtig insgesamt 527 Lehrlinge als Facharbeiter ausgebildet, und zwar 168 Lehrlinge aus der DDR und halb so viel Lehrlinge aus der VR Polen. Aus der Ungarischen VR kommen dreimal so viel Lehrlinge wie aus der VR Polen. Die restlichen Lehrlinge kommen aus der VR Bulgarien. Wieviel Lehrlinge aus den genannten Volksdemokratien werden im VEB Kabelwerk z. Z. ausgebildet? *Schülerin Monika Ramsch, Meißen*

Ma 6 ▪1467 Zwei Personenzüge fuhren in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbei. Der erste Zug hatte eine mittlere Geschwindigkeit von $45\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite von $36\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein Fahrgast aus dem zweiten Zug stoppte mit seiner Armbanduhr die Vorbeifahrt dieser Züge. Er stellte fest, daß der erste Zug dafür 6 s benötigte. Wie lang war der erste Zug? *Sabine Köcher, Zittau*





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma6 ■1468 Nachdem ein Fahrgast in einem D-Zug die Hälfte seines Reiseweges bereits zurückgelegt hatte, schlief er ein. Als er erwachte, hatte er bis zum Reiseziel noch die Hälfte der Bahnstrecke zurückzulegen, während der er geschlafen hatte.
Welchen Teil der gesamten Reisestrecke war der Fahrgast schlafend gefahren?

Sabine Köcher, Zittau

Ma6 ■1469 Ein Radfahrer fuhr vom Orte A nach dem Orte B. Nachdem er zwei Drittel des Weges zurückgelegt hatte, zwang ihn eine Reifenpanne, den restlichen Weg zu Fuß zurückzulegen. Dafür benötigte er zweimal so viel Zeit wie für die Fahrt mit dem Fahrrad. Wieviel mal so groß war die Geschwindigkeit während des Radfahrens wie die während des Fußmarsches? *Sabine Köcher, Zittau*

Ma6 ■1470 Vier Schüler Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tröger lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Wir wissen:
a) Martin hatte Blumen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Konfekt mitgebracht.
b) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller. Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Nachnamen?

Sch.

Ma6 ■1471 Zeichne eine Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ und $\sphericalangle BAD < 90°$. Konstruiere einen inneren Punkt P von $\overline{AB}$ so, daß $\sphericalangle APD = \sphericalangle CPD$ gilt! *Sch.*

Ph6 ■1472 Eisberge bedeuten für die Seefahrt Gefahrenstellen. Von einem Schiff wird ein Eisberg gesichtet, von dem das Volumen des aus dem Wasser herausragenden Teiles mit $2000\,\text{m}^3$ geschätzt wird. Berechne das (angenäherte) Volumen des gesamten Eisberges, wenn die Dichte des Meerwassers $1{,}03\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und die Dichte des Eises $0{,}9\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt! *L. L.*

Ma7 ■1473 Es ist ein Dreieck ABC aus der Länge der Seite $\overline{AB} = c = 6$ cm, der Länge der Seitenhalbierenden $\overline{CD} = s_c = 8$ cm und der Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB = \gamma = 40°$ zu konstruieren.
Die Konstruktion ist zu beschreiben.

Ma7 ■1474 Olaf borgt sich von seinem Freund Peter 0,45 M. Dieser aus 12 Münzen bestehende Geldbetrag setzt sich aus 1-Pfennig-, 5-Pfennig- und 10-Pfennigstücken zusammen. Wieviel Münzen jeder Sorte hat Olaf von Peter erhalten? *Dipl.-Lehrer für Mathematik M. Linde, Damme*

Ma7 ■1475 Vier Schüler, und zwar Gerd, Hans, Ingo und Kurt, sind entweder Abonnent der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" oder der Zeitschrift „technikus". Von ihnen wissen wir:
a) Genau zwei dieser Schüler, nämlich Gerd und der 10jährige beziehen „alpha", Hans hingegen nicht.
b) Hans, der 11jährige und der 13jährige besuchten Kurt im Krankenhaus.
c) Genau zwei Schüler, nämlich Ingo und der 8jährige beziehen die Zeitschrift „technikus", der 11jährige hingegen nicht.
Wie alt ist jeder dieser vier Schüler, und welche Zeitschrift bezieht jeder von ihnen im Abonnement? *Sch.*

Ma7 ■1476 Sechs Schüler halfen bei der Obsternte; sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist folgendes bekannt:
a) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 Mark und keiner mehr als 12 Mark.
b) Konrad spendete mehr als Peter.
c) Hans spendete mehr als Georg, Georg mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
d) Frank spendete mehr als Hans und Hans mehr als Konrad.
e) Hans spendete 2 Mark weniger als Frank, Peter 2 Mark mehr als Inge.
f) Alle spendeten volle Markbeträge.
Wieviel Geld erhielt jeder dieser Schüler für das Obstpflücken?

Schüler Thomas Weiß, Weimar

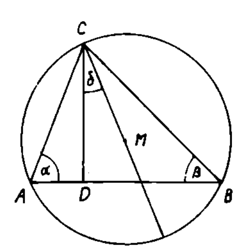
Ph7 ■1477 Der Moskauer Sportstudent *Wladimir Bure* ist mit 51,36 Sekunden für 100 Meter Freistil der schnellste Mann Europas. Vom Weltrekord des Amerikaners *Mark Spitz* trennen ihn 14 Hundertstelsekunden. *Wladimir* wünscht, die Differenz ausgleichen zu können. Wie groß ist diese (in cm)? *L. L.*

Ch7 ■1478 Salpetersäure mit einem Gehalt von 24,8% (Massenprozent) hat bei 20°C die Dichte von $1{,}145\frac{\text{g}}{\text{ml}}$.
a) Welche Masse haben 55 l?
b) Wieviel Liter sind 55 kg dieser Säure?

Dipl.-Chem. G. Brandes, Magdeburg

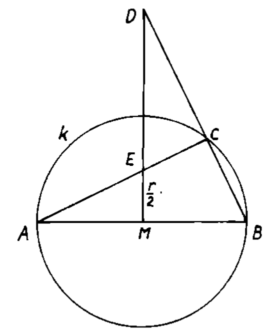
Ma8 ■1479 Es sei $\Delta\, ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit den Winkelgrößen $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\alpha > \beta$. Dann liegt der Mittelpunkt M des Umkreises dieses Dreiecks im Innern des Dreiecks. Ferner sei D der Fußpunkt der von C ausgehenden Höhe. Man beweise, daß, wenn man $\sphericalangle MCD = \delta$ setzt, $\delta = \alpha - \beta$ gilt.

Herwig Gratias, stud. phys., Sömmerda



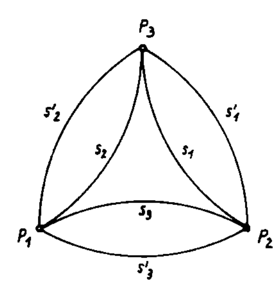
Ma8 ■1480 Es sei $\overline{AB}$ Durchmesser eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. In M sei auf AB die Senkrechte errichtet; E sei ein Punkt dieser Senkrechten, der von M den Abstand $\overline{EM} = \frac{r}{2}$ hat. Ferner seien C der zweite Schnittpunkt von AE mit dem Kreis k und D der Schnittpunkt der Geraden ME und BC. Man berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks MBD.

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz



Ma8 ■1481 Zur Speicherung von Wärmeenergie ist in Karl-Marx-Stadt eine der größten Anlagen Europas seit drei Jahren in Betrieb. Diese Anlage besteht aus 27 Behältern, die die Form eines geraden Kreiszylinders mit einem Durchmesser von 3,4 m und einer Höhe von 17 m haben. In den Behältern ist Wasser gespeichert, das unter Druck steht und eine Temperatur von 80°C bis 160°C, also eine mittlere Temperatur von 120°C besitzt. Man berechne
a) das Volumen eines solchen Behälters,
b) die in allen 27 Behältern gespeicherte Wärmeenergie in Kalorien (cal), wobei zu beachten ist, daß 1 g Wasser bei einer Temperaturdifferenz von 1 grd gegenüber der Außentemperatur eine Wärmeenergie von 1 cal besitzt, und eine Außentemperatur von 20°C angenommen wird. *L.*

Ma8 ■1482 Von drei Ortschaften P_1, P_2, P_3 sei jede mit jeder anderen durch zwei Wege verbunden, also die Ortschaften P_1 und P_2 durch die Wege s_3 und s'_3, die Ortschaften P_2 und P_3 durch die Wege s_1 und s'_1, die Ortschaften P_3 und P_1 durch die Wege s_2 und s'_2.



Diese sechs Wege kreuzen einander nicht.
Ein rüstiger Wanderer will von P_3 aus eine Wanderung unternehmen, bei der er jeden der sechs Wege genau einmal begeht. Wie viele verschiedene Varianten für einen solchen Wanderweg gibt es?

(Dabei gelten zwei Varianten bereits als verschieden, wenn die Reihenfolge, in der die Wege begangen werden, verschieden ist.)

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ph 8 ▪1483 Welches Höchstgewicht darf ein zweiachsiger Güterwagen haben, wenn der zulässige Druck auf die Eisenbahnschiene $100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ beträgt und die Berührungsfläche eines Rades mit der Schiene $5\ \text{cm}^2$ groß ist?

E. Eichler

Ch 8 ▪1484 Bei der Ablieferung von Getreide an den VEB Getreidewirtschaft werden 14% Wassergehalt zugrunde gelegt. Eine LPG lieferte zunächst 3,720 t und später 3,800 t ab. Laborproben ergaben 16% Wassergehalt bei der ersten und 12,5% Wassergehalt bei der zweiten Lieferung. Wieviel Tonnen Getreide wurden der LPG angerechnet?

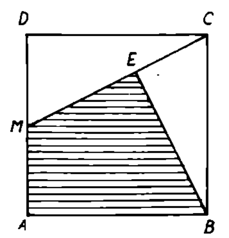
(*Anleitung*: Man berechne die abgelieferte Trockenmasse und ergänze so, daß 14% Wassergehalt angenommen werden können; Rechenstabgenauigkeit genügt.) *Mathematik-Fachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz*

Ma 9 ▪1485 Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2>(x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2$$

im Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln. *L.*

Ma 9 ▪1486 Es sei $ABCD$ ein Quadrat, dessen Seitenlänge a gegeben ist. M sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Von B sei das Lot auf die Verbindungsstrecke $\overline{MC}$ gefällt; der Fußpunkt dieses Lotes sei mit E bezeichnet.



Man berechne den Flächeninhalt des (schraffiert gezeichneten) Vierecks $ABEM$.

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Ma 9 ▪1487 Es sind alle positiven reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung $x^{x^{1976}}=1976$ erfüllt ist. *A. D. Osmanow, Demurlo, Georgische SSR, UdSSR*

Ma 9 ▪1488 Es sind alle Tripel (x, y, z) von nicht negativen reellen Zahlen x, y, z zu ermitteln, für die das Gleichungssystem

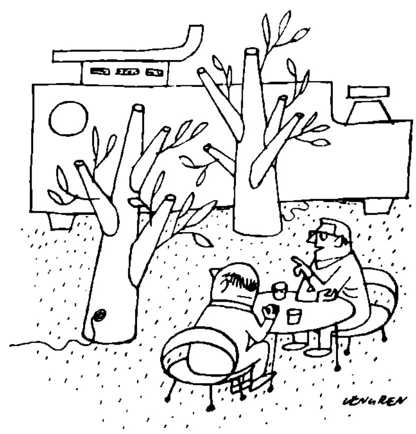
$$x^2+xy+y^2=xyz, \quad (1)$$
$$x^2+xz+z^2=xyz, \quad (2)$$
$$y^2+yz+z^2=xyz \quad (3)$$

erfüllt ist. *Frank Müller, stud. phys., Erfurt*

Ph 9 ▪1489 Ein massiver unregelmäßiger Körper aus Blei erscheint einem Schüler zu leicht. Um festzustellen, ob sich im Inneren des Körpers ein Hohlraum befindet, wägt er zunächst den Körper und stellt ein Gewicht von 285 p fest. Im Meßzylinder, der mit 40 ml Wasser gefüllt ist, steigt der Wasserspiegel nach Eintauchen des Körpers bis zum Teilstrich 67 ml. Besitzt der Körper einen Hohlraum? Wenn ja, wie groß ist der Hohlraum?

(Blei $\gamma=11{,}4\ \text{p}\cdot\text{cm}^{-3}$) *L. L.*

Ch 9 ▪1490 In der Luft (Idealluft) sind die Edelgase mit 0,03% vertreten. Wie groß müßte man den Durchmesser des Kreises wählen, wenn man in einem Kreisdiagramm die Beteiligung der Edelgase als Kreissektor mit einer Bogenlänge von 2 mm darstellen wollte? *Oberlehrer Ing. H. Pelka, Leipzig*



„Die Bäume sind aus Polyester mit verschiedenfarbiger Innenbeleuchtung."

Ma 10/12 ▪1491 Jemand soll die Nullstellen der Funktion f mit

$$f(x)=\sqrt{x-5}-\frac{3}{\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-2},$$

die für alle reellen Zahlen x mit $x>5$ definiert ist, ermitteln und rechnet wie folgt:

Aus $\sqrt{x-5}-\frac{3}{\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-2}=0$ (1)

folgt $x-5-3=\sqrt{(x-2)(x-5)}$ (2)

und hieraus

$$x-8=\sqrt{x^2-7x+10}, \quad (3)$$

also

$$(x-8)^2=x^2-7x+10 \quad (4)$$
$$x^2-16x+64=x^2-7x+10, \quad (5)$$
$$9x=54, \quad (6)$$
$$x=6. \quad (7)$$

Also schließt er, daß $x=6$ eine Nullstelle der Funktion f sei. Nun gilt aber

$$f(6)=\sqrt{1}-\frac{3}{\sqrt{1}}-\sqrt{4}=1-3-2=-4<0,$$

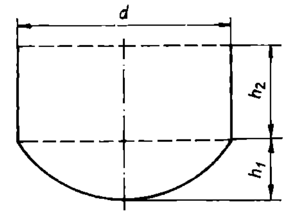
also ist $x=6$ nicht Nullstelle der Funktion f.

a) Wo steckt der Fehler der obigen Schlußweise?

b) Es ist zu beweisen, daß die Funktion f in ihrem Definitionsbereich keine Nullstelle hat.

L.

Ma 10/12 ▪1492 Der im Schnitt abgebildete offene Blechbehälter, der aus einer Kugelkappe mit der Höhe h_1 und dem Durchmesser d sowie einem aufgesetzten Zylindermantel mit der Höhe h_2 und dem Durchmesser d besteht, soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.



a) Es ist der Durchmesser D dieser Blechscheibe als Funktion von d, h_1, h_2 darzustellen.

b) Es ist der Durchmesser D für den Fall zu berechnen, daß

$d=230$ mm, $h_1=70$ mm, $h_2=110$ mm ist.

Hinweis zur Lösung: Der Flächeninhalt der Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen hergestellt wird, ist gleich dem Oberflächeninhalt des offenen Blechbehälters, also gleich der Summe des Flächeninhalts der Kugelkappe und des Flächeninhalts des Zylindermantels. *L.*

Ma 10/12 ▪1493 Man ermittle alle Tripel (x, y, z) von natürlichen Zahlen x, y, z, die von Null verschieden und paarweise teilerfremd sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$x^2+y^2=z^2$, (1)

$x+y<50$, (2)

x ist durch 7 teilbar. (3)

Schüler Eckhard Liebscher, Ilmenau

Ma 10/12 ▪1494 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$12x^4-11x^3-146x^2-11x+12=0$$

zu ermitteln. *Fachlehrer f. Mathematik H. Kampe, Neuseddin*

Ph 10/12 ▪1495 Ein zylindrischer Gießkübel von 80 cm Höhe und 90 cm Durchmesser ist 70 cm hoch mit flüssigem Stahl gefüllt. Um wieviel Grad muß der Gießkübel geneigt werden, damit der Stahl ausfließen kann?

L. L.

„Ich arbeite gerade an der Theorie der fallenden Körper."

Ch 10/12 ▪1496 0,5240 g einer eisenhaltigen Legierung wurden im Analysengang gelöst, das Eisen wurde als Hydroxid gefällt und durch Glühen in Eisen(III)oxid überführt. Nach dem Glühen lagen 0,1649 g Eisen(III)-oxid vor. Wieviel % Fe waren in der Legierung vorhanden? *H. Pelka, Leipzig*

Leser fragen – alpha antwortet

Unser Leser *Roland Fiedler*, EOS Gotthold Ephraim Lessing, 12. Klasse, Hoyerswerda, stellt uns die folgende Aufgabe:

Man beweise, daß die Ungleichung

$$m^n > n^m \qquad (1)$$

für alle positiven ganzen Zahlen m und n mit $2 < m < n$ erfüllt ist.

Beweis: a) Wir beweisen zunächst, daß die obige Ungleichung (1) für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die größer als 2 sind, erfüllt ist, daß also

$$m^{m+1} > (m+1)^m \qquad (2)$$

für alle natürlichen Zahlen m mit $m \geqq 3$ gilt.

Nach dem Binomischen Satz ist

$$(m+1)^m = m^m + m \cdot m^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot m^{m-2} + \ldots + m \cdot \frac{m-1}{1} \ldots \frac{m-k+1}{k} \cdot m^{m-k} + \ldots + m \cdot m + 1.$$

Ferner gilt wegen $m \geqq 3$ für $k = 2, 3, \ldots, m-2$,

$$m \cdot \frac{m-1}{2} \ldots \frac{m-k+1}{k} \cdot m^{m-k} < m^k \cdot m^{m-k} = m^m$$

und $m^2 + 1 < m^2(m-1) + m^2 = m^3 \leqq m^m$,

also $(m+1)^m < m^m \cdot m = m^{m+1}$,

womit die Ungleichung (2) bewiesen ist.

b) Aus (2) folgt

$$m^{\frac{1}{m}} > (m+1)^{\frac{1}{m+1}}. \qquad (3)$$

Setzt man $n = m + k$, wobei k eine positive ganze Zahl ist, so folgt zunächst aus (3)

$$m^{\frac{1}{m}} > (m+1)^{\frac{1}{m+1}} > (m+2)^{\frac{1}{m+2}} > \ldots > (m+k)^{\frac{1}{m+k}} = n^{\frac{1}{n}},$$

also $m^{\frac{1}{m}} > n^{\frac{1}{n}}$, $m^n > n^m$,

womit die Ungleichung (1) für $3 \leqq m < n$ bewiesen ist.

alpha-Wettbewerb

Vorbildliche Hilfe

● Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000,– M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin, transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Die Wirtschaft, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania Verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig.

Gedanken über die Arbeit eines Mathematikers in der Praxis

Im folgenden sollen einige Gedanken zur Tätigkeit eines Mathematikers in der Praxis, insbesondere in der Industrie, geäußert werden. Ich möchte den Betrachtungen eine These voranstellen:

In der Praxis hört die Mathematik auf, eine selbständige Wissenschaft zu sein. Sie kann hier nur über andere Disziplinen, in erster Linie Ökonomie, Technologie und technische Wissenschaften wirken und so ihren Nutzen unter Beweis stellen.

Anders ausgedrückt heißt das: Die Mathematik hat sich an der Praxis zu orientieren, sie hat sich auf die Praxis einzustellen, sie ist hier eben nur Hilfswissenschaft.

Daß sie in der Praxis dann allerdings eine sehr wirksame Hilfe sein kann, wird damit natürlich keineswegs eingeschränkt. Aus der genannten These sollte man eine Reihe von Schlußfolgerungen ziehen, auf die nicht früh genug während der Ausbildung eines Mathematikers hingewiesen werden kann, um manche spätere Enttäuschung von vornherein zu vermeiden.

1. Der Mathematiker darf nicht erwarten, daß ihm die Aufgaben mathematisch formuliert übergeben werden. Vielmehr besteht eine seiner wesentlichen Aufgaben darin, in Zusammenarbeit – oder manchmal auch heftigem Meinungsstreit – mit Vertretern anderer Disziplinen den mathematischen Kern einer Problematik erst herauszuschälen, um danach zu einem mathematischen Modell zu gelangen.

2. Der Mathematiker muß fähig und willens zu einer disziplinierten Zusammenarbeit mit Kollegen anderer Fachrichtungen sein. Er muß deshalb nicht nur über fundierte mathematische Kenntnisse verfügen, sondern auch auf naturwissenschaftlichen, technischen und gesellschaftlichen Gebieten gewisse Grundlagen mitbringen.

3. Das Tempo und die Dynamik unserer Entwicklung und die damit verbundene Vielfalt der in der Praxis anstehenden Probleme verlangt eine große Disponibilität des Absolventen. Er muß sich daher auch während seiner späteren Tätigkeit intensiv weiterbilden, wobei meist die nichtmathematischen Gebiete den Hauptteil ausmachen werden.

4. Der Mathematiker muß sich für eine Aufgabe solange verantwortlich fühlen, bis die Lösung und Einführung in die Praxis vollzogen ist oder – und das kann manchmal leider auch passieren – bis er erkennt, daß sich seine Vorstellungen nicht verwirklichen lassen. Damit werden von ihm große Zähigkeit, Ausdauer, Risikofreudigkeit, Überzeugungskraft und vor allem auch die Fähigkeit verlangt, seine Ergebnisse für Nichtmathematiker darzustellen, ja vielfach sogar für den Arbeiter am Aggregat oder an der Maschine.

5. Es ist eine oft übersehene Tatsache, daß ein beträchtlicher Teil der Kenntnisse und Fertigkeiten eines Mathematikers in der Praxis auf Erfahrungen beruht, die man während des Studiums nur in sehr geringem Maße vermitteln kann. So wird er etwa im Laufe seiner praktischen Tätigkeit erkennen, welche Faktoren vernachlässigbar sind, er wird Erfahrungen über die effektivsten mathematischen Methoden sammeln, und er wird schließlich auch einsehen, daß es letztlich auf den praktischen Nutzen ankommt (und kaum auf die Eleganz mathematischer Beweisführungen, so unangenehm das vielleicht auch in manchen Ohren klingen mag).

Im Zusammenhang mit diesen Schlußfolgerungen dürfte es in erster Linie darauf ankommen, die entsprechende Einstellung zum späteren Einsatz anzuerziehen. Der präzisierte Studienplan enthält viele Möglichkeiten hierzu. Insbesondere das Praktikum hat dabei eine wichtige Rolle zu spielen, aber auch in Lehrveranstaltungen, FDJ-Versammlungen oder Diskussionsrunden mit Praktikern können die angeschnittenen Fragen den Studenten in geeigneter Weise nahegebracht werden. In die gleiche Richtung weist auch die oft hervorgehobene Tatsache, daß nicht alle in der Praxis bedeutsamen mathematischen Aussagen und Ergebnisse während des Studiums behandelt werden können. Eine gute mathematische Ausbildung befähigt den Absolventen – wenn er nur den Willen dazu mitbringt. Ich habe während meines Studiums vor über zwanzig Jahren außer einer Vorlesung über *Praktische Analysis* nur Vorlesungen über Gebiete der *Reinen Mathematik* gehört, konnte mich aber bei meiner späteren Tätigkeit in Leuna sehr schnell in die erforderlichen Gebiete einarbeiten, aber – und das glaube ich heute mit gutem Gewissen sagen zu können – ich hatte die notwendige Einstellung dazu.

J. Piehler

(Vortrag, gehalten auf der Arbeitskonferenz „Mathematik und ihre Wirksamkeit in der sozialistischen Praxis". *Veranstalter*: Wissenschl. Beirat beim Min. für das Hoch- und Fachschulwesen der DDR und Vorstand der Math. Gesellschaft der DDR, 28./30. 11. 1974)

Mathematischer Wettbewerb 1975 Stralsund/Bergen

alpha-Wandzeitung

Der Chefredakteur *alpha* im Gespräch mit den Initiatoren der *Mathematischen Wettbewerbe* Insel Rügen/Stadtkreis Stralsund: *W. Brand* und *W. Perlberg*, Fachberater in Stralsund-Stadt, *Lilly Behrends*, Direktorin des Hauses der JP Stralsund, *Gerti Holz*, Fachberater für Unterstufe, Stralsund-Stadt, *G. Ladda*, Fachberater in Bergen (v. l. n. r.). Die Wettbewerbe finden jährlich zweimal statt. Neben der Mannschaftswertung (pro Klassenstufe) gibt es jeweils noch Urkunden für sehr gute Einzelleistungen der Teilnehmer.

Aufgaben des Vergleichs-Wettbewerbs

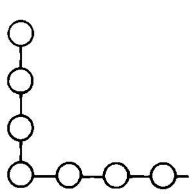
Klassenstufe 3

▲1▲ Du hast die Zahlen 24, 8 und 7. Bilde mit den ersten beiden Zahlen eine Aufgabe! Mit dem Ergebnis dieser Aufgabe und der Zahl 7 bilde die nächste Aufgabe! Das Ergebnis soll 21 sein!

$24 \square 8 = a \qquad a \square 7 = 21$

▲2▲ Für welche Zahlen x gilt: $49 > 8 \cdot x > 31$?

▲3▲ Trage die Zahlen von 3 bis 9 so in die Kreisflächen ein, daß die Summe auf jeder Geraden 23 ist!



▲4▲ Multipliziere eine Zahl a mit 7! Subtrahierst du vom Ergebnis 5, so erhältst du 37. Welche Zahl mußt du für a einsetzen?

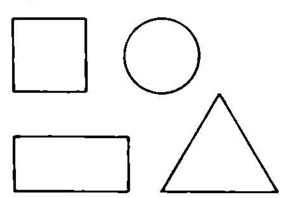
▲5▲ Uwe sammelt ausländische Ansichtskarten. Er hat bereits 64. Davon erhielt er von seinem Freund aus der Sowjetunion 36 Karten, aus der VR Polen hat er den vierten Teil der Karten, aus der SU und aus der ČSSR die restlichen.

a) Wieviel Karten hat Uwe aus der ČSSR?

b) Vergleiche die Anzahl der Karten, und stelle eine Ungleichung auf!

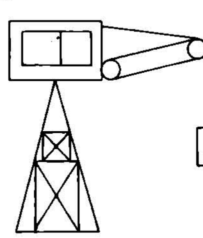
c) Aus welchem Land hat Uwe die meisten Karten?

▲6▲ a) Schreibe die Namen dieser Figuren auf!



b) Bei welchen Figuren verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander?

c) Suche je eine dieser vier Figuren in der Abbildung auf und benenne sie!



Klassenstufe 4

▲1▲ Löse folgende Ungleichung: $16883 - a > 16878$!

a) Schreibe die Lösungen für a geordnet auf! (Beginne mit der kleinsten Zahl!)

b) Bilde mit den geordneten Ziffern in umgekehrter Reihenfolge eine Zahl!

c) Berechne die Hälfte dieser Zahl!

▲2▲ Wie alt ist Peter?

Er sagt scherzhaft: „Meine Mutter ist 12 Jahre älter als unsere Republik im vorigen Jahr (gemeint ist 1974) wurde. Sie ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich zusammen. Ich bin 3 Jahre jünger als mein Bruder."

▲3▲ Frank sammelt Briefmarken aus drei sozialistischen Ländern. Er hat 250 Marken aus der VR Polen. Viermal soviel hat er aus der Sowjetunion. Der Rest kommt aus der ČSSR. Beim Zählen seiner Marken stellte er fest, daß er 1772 Briefmarken besitzt.

a) Wieviel Briefmarken hat Frank aus der ČSSR?

b) Aus welchem Land ha[illegible]e meisten Briefmarken?

▲4▲ Für eine Fahrt zwischen Betonwerk und Baustelle benötigt der LKW 38 Minuten. Das Entladen dauert 16 Minuten.

Um welche Uhrzeit beginnt der LKW seine 2. Fahrt im Betonwerk, wenn die erste Fahrt um 7.16 Uhr begann und das Beladen im Betonwerk 13 Minuten dauert? (Hin- und Rückfahrt sind eine Fahrt!)

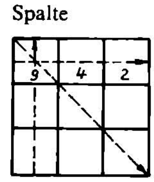
▲5▲ Welche Lage können ein Kreis und eine Gerade zueinander haben?

a) Zeichne alle Lagemöglichkeiten!

b) Wieviel Schnittpunkte kann es zwischen Kreis und Gerade geben?

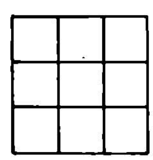
▲6▲ Schreibe die Zahlen von 1 bis 9 so in die freien Kästchen, daß jede Zahl nur einmal vorkommt, daß die Summe in jeder Spalte, in jeder Diagonalen und in jeder Zeile 15 beträgt!

Spalte



Zeile
z. B. $9+4+2=15$

Diagonale



Beachte!
Übertrage das Quadrat auf Deinen Zettel!
Eine Lösung genügt!

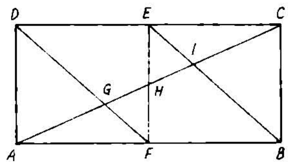
Klassenstufe 5

▲1▲ Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich. Sie sollen ergänzt werden. Beschreibe, wie du die Ziffern gefunden hast!

$$\begin{array}{r} 4xx \cdot x2x \\ \hline x3xx \\ x12 \\ xx4x \\ \hline xxxxx8 \end{array}$$

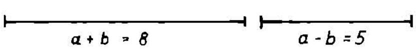
▲2▲ Nach der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe.
Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100."
a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

▲3▲ Wieviel Dreiecke sind in der Figur enthalten?
Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!



Klassenstufe 6

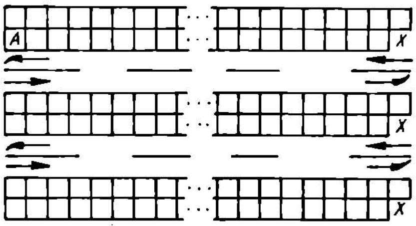
▲1▲ Gegeben sind zwei Strecken.
Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz.



Wie lang sind die Strecken a und b?
Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

▲2▲ Sechs Pioniere Axel, Bernd, Claudia, Doris, Erika und Felix nahmen am Leistungsvergleich der *Mathematikklubs* der Kreise Rügen und Stralsund teil. Sie errreichten eine Gesamtpunktzahl von 136 Punkten. Über diese Schüler ist folgendes bekannt:
1. Doris erreichte die höchste Punktzahl und übertraf ihren Mannschaftskameraden Felix um 5 Punkte.
2. Erika und Bernd kamen nicht aus dem gleichen Kreise.
3. Axel und Claudia besuchen den gleichen Mathematikklub.
4. Claudia erreichte bei der XIV. Kreisolympiade in Stralsund 36 Punkte.
5. Axel und Erika belegten für ihre Kreise bei der Bezirksspartakiade im Weitsprung jeweils den 4. Platz.
6. Claudia erreichte 21 Punkte.
7. Erika und Felix wohnen in einem Ort und organisierten im vergangenen Schuljahr drei Altstoffsammlungen.
Aus welchen Kreisen kommen diese sechs Pioniere?

▲3▲ Die beiden *Jungen Mathematiker* Peter und Klaus unterhalten sich über die Anzahl der Parktaschen auf einem großen Parkplatz, der etwa folgendes Aussehen hat:

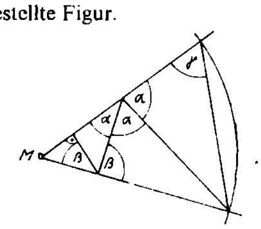


Erklärungen:
A Parktasche für je ein Auto
x 10 m hoher Lichtmast
··· hier liegen noch weitere paarweise angeordnete Parktaschen zwischen

Die beiden Schüler können, da der Parkplatz mit Autos besetzt ist, die Anzahl der Parktaschen nicht zählen. Peter meint, die Form des Parkplatzes zu kennen und behauptet, daß genau 370 Parktaschen vorhanden sind. Klaus ist mit dieser Zahl nicht zufrieden. Was meinst du zu Peters Behauptung?

Klassenstufe 7

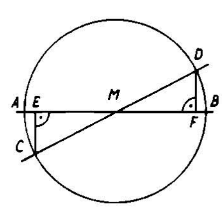
▲1▲ Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur.



Wie groß sind die Winkel α, β und γ?
Begründe deine Entscheidungen!
(Die Figur ist nur eine Skizze, nicht maßstabgerecht!)

▲2▲ Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b ($a > 1$; $b > 1$). Untersuche, ob es Gesetzmäßigkeiten zwischen dem k.g.V., g.g.T. und der Summe, Differenz, Produkt und Quotient dieser natürlichen Zahlen gibt!

▲3▲ Durch den Mittelpunkt M eines Kreises verlaufen zwei Geraden, die in M miteinander einen spitzen Winkel bilden.
Sie schneiden den Kreis in den Punkten A und B bzw. C und D. Von C und D sind die Lote auf die durch A und B verlaufende Gerade gefällt. Die Fußpunkte der Lote seien E und F. (Skizze!)
Beweise, daß die Dreiecke MEC und MFD kongruent sind!



Statut

des Klubs Junger Mathematiker
Haus der Jungen Pioniere Stralsund

Die Erziehung der sozialistischen Schülerpersönlichkeit steht im Mittelpunkt unserer Bildungs- und Erziehungsarbeit. Leiten lassen wir uns dabei von den Grundgedanken des Pionier- und FDJ-Statuts sowie den Pionier- und FDJ-Aufträgen.

1. Aufgaben des Klubs

Die Aufgaben des Klubs bestehen darin,
– die Förderung mathematisch befähigter Pioniere und FDJ-Mitglieder in Zirkeln und Spezialistenlagern und in anderen Formen der Tätigkeit zu gewährleisten,
– die Mitglieder zur selbständigen Arbeit mit mathematischen Schülerzeitschriften und mathematischer Literatur zu befähigen,
– die Vorbereitung, Durchführung und Auswertung der Olympiade *Junger Mathematiker* und anderer mathematischer Wettbewerbe in den Schulen zu unterstützen!
– viele Schüler für die Arbeit mit der Schülerzeitschrift *alpha* und für die Teilnahme an deren Aufgabenwettbewerben zu gewinnen,
– mathematische Probleme in Wissenswettbewerben und Feriengestaltungen einzubeziehen,
– die Öffentlichkeit, insbesondere die Eltern der Mitglieder des Klubs, für die Erreichung der Ziele des Mathematikklubs zu interessieren.

2. Rechte der Mitglieder

Die Mitglieder haben das Recht,
– bei guten Leistungen und gutem gesellschaftlichen Verhalten zu Mathematikolympiaden delegiert zu werden,
– bei hervorragenden Leistungen bei der Bezirksolympiade in den Bezirksklub delegiert zu werden,
– an allen Veranstaltungen des Klubs teilzunehmen,
– die Arbeitsmittel des Klubs zu benutzen,
– Vorschläge zur Gestaltung der Klubarbeit zu unterbreiten.

3. Pflichten der Mitglieder

Die Mitgliedschaft setzt sehr gute mathematische und gesellschaftliche Leistungen, erfolgreiche Teilnahme an den Olympiaden und die volle Anerkennung des Status voraus.
Die Mitglieder haben die Pflicht,
– nach höchsten mathematischen Leistungen zu streben,
– regelmäßig an der Zirkelarbeit und den sonstigen Veranstaltungen teilzunehmen,
– mit ihrem erworbenen Wissen ihre Mitschüler zu unterstützen,
– das mathematische Interesse in ihrem Klassenkollektiv, insbesondere für die jährliche Schulolympiade, zu fördern,
– die Arbeitsmittel und das andere gesellschaftliche Eigentum des Klubs sorgfältig und schonend zu behandeln,
– bei Delegierung an Wettbewerben aktiv teilzunehmen,
– regelmäßig an den Klubnachmittagen teilzunehmen, bei mehrmaligem Fehlen erfolgt der Ausschluß,
– die erfolgreichsten Pioniere und FDJ-Mitglieder werden zum Schuljahresende ausgezeichnet.

Stralsund, Oktober 1971

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (19. 11. 1975)

Olympiadeklasse 5

1. Die Werktätigen des *Flachglaskombinates Torgau* beschlossen, im Jahre 1975 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm $135000\,m^2$ Flachglas über den Plan hinaus zu produzieren. Diese Glasmenge reicht für 4500 Neubauwohnungen eines bestimmten Typs aus. Ermittle den Bedarf an Flachglas (in Quadratmetern), der nach diesen Angaben für 1000 Neubauwohnungen dieses Typs zugrunde gelegt wurde.

2. Bei den folgenden fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

(1) $x=y:40$,
(2) $z=4\cdot u$,
(3) $u=280:7$,
(4) $160=v+40$,
(5) $y=z+v$.

3. Als eine Pioniergruppe über ihre in den letzten Jahren durchgeführten Ferienreisen berichtete, stellte sich folgendes heraus:
(1) Genau 13 Mitglieder dieser Gruppe waren schon einmal an der Ostsee.
(2) Genau 15 Pioniere waren schon einmal im Harz.
(3) Genau 6 Pioniere waren schon einmal sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
(4) Genau 4 Pioniere waren bisher weder an der Ostsee noch im Harz.
Ermittle die Anzahl aller Pioniere, die dieser Gruppe angehören!

4. Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein Punkt A. Konstruiere auf dieser Geraden g vier weitere Punkte B, C, D, E, die in dieser Reihenfolge auf derselben von A ausgehenden Halbgeraden liegen und für die folgendes zutrifft:
(1) Die Strecke $\overline{AB}$ ist 2,5 cm lang.
(2) Die Strecke $\overline{BC}$ ist um 0,3 dm länger als als die Strecke $\overline{AB}$.
(3) Die Strecke $\overline{CE}$ ist genauso lang wie die Summe der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.
(4) Die Strecke $\overline{DE}$ ist um 50 mm kürzer als die Strecke $\overline{CE}$!
Beschreibe die Konstruktion, und ermittle die Länge der Strecke $\overline{AD}$ (in cm)!

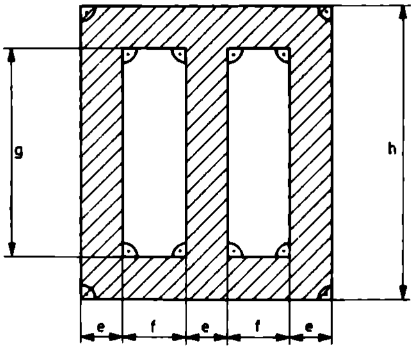
Olympiadeklasse 6

1. Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15000 kp befördern. Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet. Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

2. Das Wohnschiff „Kuhle Wampe", das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, daß es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und daß diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibett-Kabinen aufteilen.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen!

3. Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von 6,4 cm! Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein, und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D! Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h.
Spiegele den Kreis k an g, und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h, und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

4. Berechne den Inhalt A der schraffierten Fläche der in der Abbildung dargestellten



Figur (die Maße sind der Abb. zu entnehmen).
a) für $e=10$ mm, $f=15$ mm, $g=50$ mm, $h=70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

Olympiadeklasse 7

1. a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.
Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!
b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, daß die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa „auf Lücke" gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

2. Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder. Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde. Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
(Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.)

3. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{\sphericalangle DCE}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{\sphericalangle ABC}-\overline{\sphericalangle CAB}\right| \text{ gilt!}$$

4. Konstruiere ein Dreieck ABC aus
$b=6$ cm, $h_b=5$ cm, $c=7$ cm!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 8

1. Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.
Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

2. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n\geq 1$, für die unter den sechs Zahlen

$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

3. Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC}=r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle AMD}=3\cdot\overline{\sphericalangle ACM}$ gilt!

4. Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch p geht! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

1. Klaus hat bei einer Hausaufgabe 4^2-3^2 auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, daß das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, daß auch hier $11^2-10^2=21=11+10$ ist.

Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a>b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

2. In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!

b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!

(Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z. B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.)

3. Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m\leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $\overline{MD}=m$ gilt.

Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie $1:7$ verhält. Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke $\overline{DN}$.

4. Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ und $\overline{\sphericalangle BAC}=\alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, daß er viermal so groß ist wie der Winkel $\sphericalangle AC_2B$!

Olympiadeklasse 10

1. Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.

Zuschauer

(1): „A oder C gewinnt."

(2): „Wenn A Zweiter wird, gewinnt B."

(3): „Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht."

(4): „A oder B wird Zweiter."

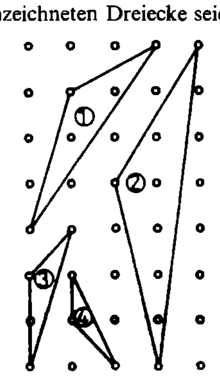
Nach dem Einlauf stellte sich heraus, daß die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und daß alle vier Aussagen wahr waren.

Wie lautete der Einlauf?

2. Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält. Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Danach stellt er fest, daß in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

3. Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (siehe Bild).



Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind!

4. Für positive reelle Zahlen a und b gelte

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2. \qquad (*)$$

Es ist zu beweisen, daß dann für diese Zahlen

$a+b\geqq 2$ (**) gilt.

Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b) zu ermitteln, für die (*) gilt und für die in (**) das Gleichheitszeichen gilt.

Olympiadeklasse 11/12

1. a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a+b)^n=c_0a^n+c_1a^{n-1}b+c_2a^{n-2}b^2+\ldots+c_nb^n \qquad (*)$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0+c_1+c_2=79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.

b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß aus (*) durch die Ersetzung

$a=x^2$, $b=\frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n=c_0x^{k_0}+c_1x^{k_2}+\ldots+c_nx^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i=0$ hat, d. h., in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.

c) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

2. Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.

Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

3. Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren. An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.

Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

4. Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

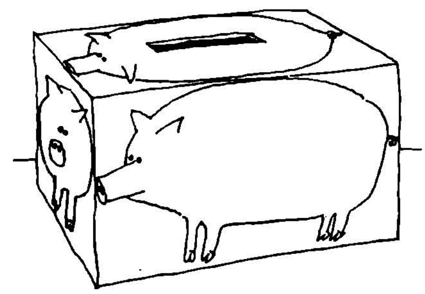
(1) $x+y+z=a$

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2$

(3) $x^3+y^3+z^3=a^3$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

In freien Stunden alpha heiter



Wie lautet die richtige Antwort?

Zwei *Junge Mathematiker* unterhalten sich.

A_1: „Das, was du nicht verloren hast, besitzt du das noch?“

B_1: „Ja, das, was ich nicht verloren habe, besitze ich selbstverständlich noch!“

A_2: „Hast du 10000 M verloren?“

B_2: „Nein!“

A_3: „Also, dann besitzt du die nicht verlorenen 10000 M noch und bist sicher bereit, mir 1000 M für ein paar Tage zu leihen?“

B_3: „Du hast mich mit deiner Frage ganz schön reingelegt. In Zukunft werde ich mir meine Antworten besser überlegen!“

Wie müßte die richtige Antwort auf die anfangs von A gestellte Frage lauten?

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Städtewettkampf

Bei einem Wettkampf zwischen den drei Städten S, T und U erreichten die elf Teilnehmer folgende Punkte:

Teiln. *A*	910 Punkte	Teiln. *G*	100 Punkte
„ *B*	480 „	„ *H*	40 „
„ *C*	426 „	„ *I*	36 „
„ *D*	408 „	„ *K*	22 „
„ *E*	320 „	„ *L*	10 „
„ *F*	238 „		

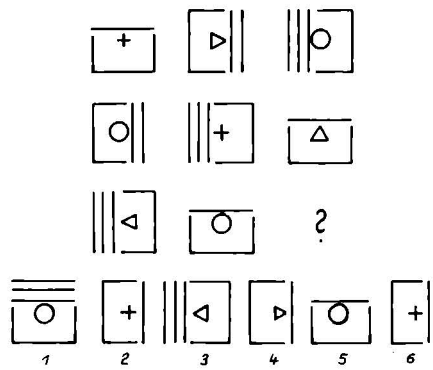
Es stellt sich heraus, daß die Teilnehmer der Stadt S die doppelte Anzahl von Punkten erreicht haben wie die der Stadt T. Aus der Stadt U kommt nu rein Teilnehmer.

Aus welchen der drei Städte S, T und U kommen die 11 Wettkämpfer?

Ing. H. Decker, Köln

Welche Figur?

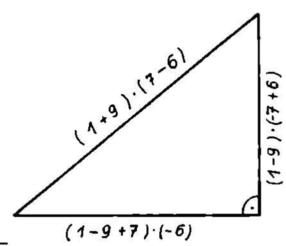
Eine der sechs numerierten Figuren ist in das freie Feld mit dem Fragezeichen einzusetzen, und zwar so, daß die in der Anordnung der nicht numerierten Figuren verborgene Gesetzmäßigkeit nicht verletzt wird.



Welche Figur ist die richtige?

aus: NBI 23/74

Das Jahr 1976



$1^{9-7+6} = 1$

$1^9+7-6 = 2$

$\sqrt{1+9-7+6} = 3$

$-1\cdot 9+7+6 = 4$

$1-9+7+6 = 5$

$\sqrt{(-1\cdot 9+7+6)(1+9-7+6)} = 6$

$1^{9-7}+6 = 7$

$\sqrt{(1+9)\cdot 7-6} = 8$

$1+9-7+6 = 9$

$(1+9)(7-6) = 10$

$19\cdot(7+6)(1-9)(-7+6) = 1976$

Flächeninhalt: $A = 1\cdot\sqrt{9+7}\cdot 6\,FE$

Umfang: $U = 1\cdot\sqrt{9+7}\cdot 6\,LE$

Mathematikfachlehrer H. Biastoch, Gorden

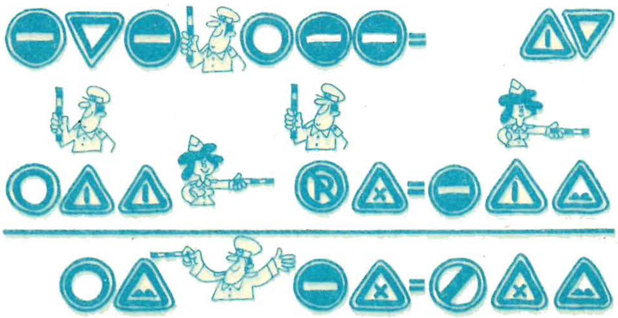
Gezeichnet nach einer Idee von Marion Schlottig, Cottbus

Zahlwörter

1-stand	6-erlei
2-ge	7-schläfer
3-st	8-bar
4-tel	9-auge
5-kampf	10-ender

Verkehrsbereich

Gleiche Verkehrszeichen bedeuten gleiche Ziffern, und gleiche Haltungen des Verkehrsreglers sollen gleiche Grundrechenoperationen (+, −, ·, :) bedeuten. Entsprechendes gilt bei Verschiedenheit der Zeichen. Ersetze so, daß alle sechs Aufgaben richtig gelöst sind!



Kryptarithmetik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\mathrm{PPPPPPPPP} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{RRRRRRRRR} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{R} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{OOOOOOOOO} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{O} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{DDDDDDDDD} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{D} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{UUUUUUUUU} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{KKKKKKKKK} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{K} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{TTTTTTTTT} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{EEEEEEEEE} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Silbenrätsel

ar – be – ben – bi – can – chi – des – e – ein – hek – kel – kör – me – me – ne – ne – nom – ons – per – pez – ro – stein – sym – ta – tar – tor – ti – tra – trie – win

1. Fremdwort für Rotationskörper
2. Grundbegriff der Geometrie
3. Begründer der Mengenlehre
4. Flächenmaß
5. Schöpfer der Relativitätstheorie
6. Winkel mit einem gemeinsamen Schenkel und Scheitel
7. Lagebeziehung von Figuren zu einer Geraden
8. Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten
9. Mathematiker des Altertums
10. Polynom

Die ersten Buchstaben der 10 gefundenen Wörter ergeben ein Rechenhilfsmittel.

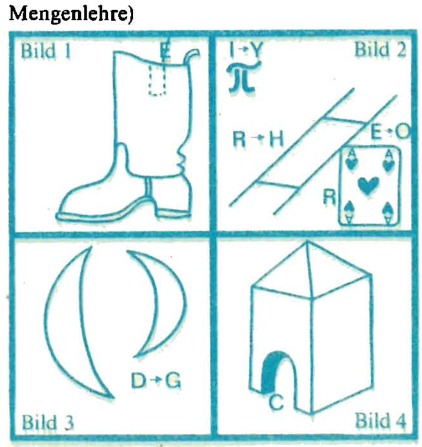
Mathematikfachlehrer Eva Haude, Greifswald

Berühmte Mathematiker

In den folgenden Bildern sind die Namen einiger bedeutender Mathematiker versteckt. Ihr findet sie, wenn ihr die dargestellten Begriffe erratet und die dazu gegebenen Anweisungen beachtet.

Es soll bedeuten:

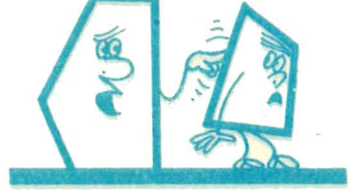
	Der vierte Buchstabe ist zu streichen!
$I \to Y$	Anstelle des Buchstabens *I* setzt den Buchstaben *Y*!
Bild 1	deutscher Mathematiker (1487 bis 1567)
Bild 2	griechischer Mathematiker (im 6. Jahrhundert v. u. Z.)
Bild 3	französischer Mathematiker (1746 bis 1818) (Begründer der wissenschaftlichen Darstellenden Geometrie)
Bild 4	deutscher Mathematiker (1845 bis 1918) (Begründer der Mengenlehre)



OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Immer wieder Eckensteher!

Etwas mehr Haltung, bitte!



Ein bißchen kantig, aber sonst ganz nett!

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

Für achtjährige Teilnahme
Kerstin Bachmann, Halle; **Ralph Lehmann,** Petershagen; **Jörg Hutschenreiter,** Dresden; **Annegret Kirsten,** Leuna; **Lutz Püffeld,** Hennigsdorf; **Christina Feige,** Mühlhausen; **Christoph Scheurer,** Glauchau; **Henrik Frank,** Greifswald; **Uwe Lewandovski,** Leipzig; **Karin Fischer,** Dresden; **Eckhard Schadow,** Oranienburg

Für siebenjährige Teilnahme
Astrid Rösel, Zittau; **Gerlinde Koch,** Schmalkalden; **Guido Blosfeld,** Halle; **Kirsten Helbig,** Frankfurt; **Detlef Poppe,** Mühlhausen; **Andreas Schlosser,** Zwickau; **Ute und Ines Greiner,** Wurzen; **Brigitte Hildenbrandt,** Stützerbach; **Wolfgang Herrmann,** Grünhain; **Martin Ermrich,** Elbingerode; **Hans-Peter Tams,** Ribnitz-Damgarten; **Michael Schnelle,** Calau; **Roswitha Leyh,** Eisenach

Für sechsjährige Teilnahme
Marid Helbig, Frankfurt; **Hermann Tenor,** Dessau; **Angelika Müller,** Greifswald; **Lars Luther,** Güstrow; **Dirk Sprengel,** Potsdam; **Falk Bachmann,** Halle; **Ulf Hutschenreiter,** Dresden; **Hiltrud Manske,** Steinbach-Hallenberg; **Ullrich Riedel,** Flöha; **Bernd Redlich,** Wernburg; **Ulrike Bandemer,** Freiberg; **Olaf Richter,** Pirna; **Horst Kohlschmidt,** Dresden; **Ralf Weber,** Bischofswerda; Andreas Neubert, Schwarzenberg; Hellfried Schumacher, Ahlbeck; Peter Herrlich, Radebeul; Manfred Zmeck, Rüdnitz; Rainer Gutsche, Herzberg; Stephan Fleischmann, Zella-Mehlis; Angela Bagola, Spremberg; Jens-Uwe Richter, Kemtau; Arndt Petzold, Torsten Waldeck, beide Karl-Marx-Stadt; Birgit Weiß, Bernau; Wilfried Carl, Halle; Ilona Drews, Wöbbelin; Birgit Krötenheerdt, Halle; Birgit Kühnstedt, Erfurt; Holger Jurack, Burkau; Falk Bahner, Betina Zimmermann, beide Steinbach-Hallenberg

Für fünfjährige Teilnahme
Elke Halecker, Astrid Surber, Jörg Wachsmann, Silke Zimmermann, alle Clingen; **Andreas Illing,** Gersdorf; **Volker Lerche,** Schmalkalden; **Ulv Krabisch,** Leipzig; **Lew Dimenstein,** Leningrad (UdSSR); **Thies Luther,** Güstrow; **Jan Müller,** Berlin; **Frank Schulze,** Himmelsberg; **Uwe Rieckert,** Cottbus; **Bernd Kreußler,** Leipzig; **Thomas Maiwald,** Olbersdorf; **Karl Krause,** Mansfeld (Rentner); **Wolfgang Huschmann,** Oelsnitz; **Uwe Heiber,** Ilmenau; **Jürgen Sommerschuh,** Bischofswerda; **Christine Hense,** Potsdam; Ursula Garnitz, Zeuthen; Jörg Brüstel, Ziegelheim; Kornelia Poike, Neukirch; Ingo Fietze, Cottbus; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Gudrun Drews, Wöbbelin; Borwin Wegener, Berlin; Wolfgang Baier, Görlitz; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Uwe Beck, Falkensee; Ingolf Buttig, Großharthau; Isolde Kehr, Gospenroda; Frank Aßmus, Oranienburg; Carola Zimmermann, Döbeln; Wulf Henze, Milow; Kirsten Liebmann, Karl-Marx-Stadt; Rita Rempel, Cottbus; Gabriele Schröter, Ilmenau; Thomas Jakob, Gera; Silvia König, Forst; Frank Mulsow, Parchim; Andreas Fischer, Lobetal; Meinhard Mende, Munzenau; Ulrike Zinke, Lützen; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Birgit Graizarek, Wickersdorf; Kerstin Utke, Stralsund; Bernhard Tschada, Sondershausen; Heiko Tennert, Döbeln; Klaus Schlegel, Dresden; Volker Fritzsche, Radebeul; Gundula Hanke, Frankenheim; Bianca Herrmann, Zahna; Helfried Schmidt, Dresden; Rainer Seifert, Pinnau; Elke Seidel, Dresden; Volker Manusch, Dittersbach; Andreas Wenzel, Dorfchemnitz; Sigrun Below, Seelow; Thomas Jarosch, Berlin; Petra Scharf, Kathrin Benedix, beide Döbeln; Carola Fechtner, Neubrandenburg; Heidi Günther, Sohland; Rita Klingl, Schleusingerneundorf; Uwe Prochno, Berlin; Andreas Hochhaus, Mühlhausen; Edda Günther, Ronneburg; Michael Lätsch, Reichenbach; Roland Kaschner, Lauchhammer; Annette Schulze, Joachim Ernst, beide Döbeln; Stefan Kaiser, Niederschmalkalden; Silvia Glatzel, Riesa; Karla Eberlein, Niederfrauendorf; Holger Harz, Weimar; Wolfram Flämig, Dresden; Wolfgang Seeber, Gehren; Andreas Fischer, Radebeul; Sabine Pohl, Jena; Dagmar Schüppel, Karl-Marx-Stadt; Cornelia Linz, Cottbus; Doris Jeschner, Eisleben; Heinz-Peter Müller, Bischofferode; Regina Kupfer, Rohrbach; Uwe Bormann, Magdeburg; Elke Fiedler, Dresden; Sybille Baumgart, Löderburg; Monika Künstler, Simone Sauer, Regina Schwarz, Ingolf Wiedermann, Dagmar Hentsche, Anke Tutschke, Angela Lange, Christine Schneider, Harald Berger, alle Burkau; Karin Kusche, Betina Hoffmann, Margit Mangold, Ursula Thomas, Angela Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Thomas Fuchs, Fambach

Für vierjährige Teilnahme
Sabine Schoof, Neuenhofe; **Uwe Lumm, Frank Billert, Gudrun Bertram, Karin Berndt,** alle Clingen; **Sylvia Kohlmetz,** Zaatzke; **Andreas Kasparek,** Gräfenhainichen; **Andreas Fittke,** Berlin; **Carola Totzauer, Cornelia Thiel,** beide Güstrow; **Gerald Werner,** Meiningen; **Michael Minx,** Berlin; **Stefan Krötenheerdt,** Halle; **Wolfgang Taubert,** Meiningen; **Ulf Ritschel,** Booßen; **Andrea Nießen,** Berlin; **Birgit Rosenberger,** Suhl; **Eckhard Liebscher,** Ilmenau; **Stefan Kasper,** Leipzig; **Arnhild Lorenz,** Görlitz; **Cornelia Thannhausser** Linz (Österreich); Petra Beck, Potsdam; Jürgen Sägenschnitter, Cottbus; Sylke Nölting, Greifswald; Claudia Kummer, Leipzig; Heinz Ernst, Linz (Österreich); Dagmar Lorenz, Görlitz; Bernd Bräutigam, Bernsbach; Petra Maeder, Berlin; Rüdiger Schultz, Bergen; Kurt Oertel, Zschornewitz; Axel Müller, Oberlungwitz; Roland Henze, Arnstadt; Bengt Nölting, Greifswald; Peter Schmidt, Magdeburg; Manfred Zimmer, Volkstedt; Hardy Eich, Glasin; Gudrun Fuchs, Neukloster; Ilona Wünsche, Rodewitz; Jörg Kaiser, Cottbus; Michael Sack, Leipzig; Hartmut Simmchen, Zittau; Audrey Hoffmann, Berlin; Frank Orzschig, Wilkau-Haßlau; Angela Gebhardt, Bernsbach; Uta Gutsche, Herzberg; Petra Stuhr, Heide Kasdorf, beide Güstrow; Peter Röhl; Cottbus; Frank Hasse, Warbelow; Andreas Lochner, Meißen; Elke Gräfe, Oberlichtenau; Clemens Jaunich, Cottbus; Christine und Matthias Kuhnt, Zug; Horst Lange, Olbersdorf; Christian Kolliwer, Jörg Schmeling, beide Berlin; Gerald Hauck, Erfurt; Tanja Hellak, Eisenhüttenstadt; Andreas Bernert, Zwickau; Dagmar Pohle, Elsterwerda; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Detlef Kohn, Weimar; Betty Schönherr, Großröhrsdorf; Volker Schulz, Nauen; Klaus Hering, Halle-Neustadt; Katrin Richter, Wittenberg; Uwe Finke, Magdeburg; Rainer Grünert, Dresden; Uwe Klaus, Leipzig; Roland Löffler, Weida; Evelin Ebert, Zschokken; Andrej Jendrusch, Glienicke; Falk Pankau, Wildpark; Matthias Breitbarth, Mühlhausen; Thomas Göpfert, Karl-Marx-Stadt; Manfred Goldenbogen, Stralsund; Astrid Bärenklau, Ruhla; Thomas Luschtinetz, Stralsund; Michael Schalle, Drognitz; Frank Pfeiffer, Warbelow; Ralph Scharf, Döbeln; Hendrik Glaßmann, Karl-Marx-Stadt; Winfried Glöde, Neubrandenburg; Marita Fügas, Berlin; Uwe Börner, Brand-Erbisdorf; Uta Weidauer, Bernsbach, Erika Krüger, Sangerhausen; Matthias Ohm, Ahlbeck; Claudia Endtricht, Görlitz; Axel Schurath, Gnoien; Michael Fukarek, Greifswald; Wolfgang Patzer, Erfurt; Dieter Hornawsky, Silbach; Steffen Döring, Olbersdorf; Lutz Hoffmann, Güstrow; Klaus Harms, Bobzin; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Karin Kramer, Martina Knospe, beide Görlitz; Jens Löwe, Bahratal; Sigrid Meibuhr, Wodarf; Rüdiger Tanzke, Andreas Erben, Hans-Joachim Berger, Hardo Burkhardt, alle Löderburg; Jana Riedel, Ute Selle, Angela Hartewig, Leonore Weise, Bettina Billig, alle Karl-Marx-Stadt; Irmhild Bittner, Greifswald; Ute Busch, Lobenstein; Hartmut Hacker, Breesen; Iris Seeberg, Marlies Gerlach, Gunter Krause, Lutz Schade, Uwe Fischer, Lutz Fuchs, Christine Kretzschmar, alle Hainichen; Rolf Schmid, Kratzmühle; Norbert Ziegler, Ilona Winkler, beide Cunnersdorf; Frank Ringel, Petra Henkel, beide Alt-Töplitz; Jens Scheerschmidt, Oberschönau; Uwe Trautvetter, Neuenhofe; Jörg Keitel, Clingen; Manfred Häußler, Westgreußen; Iris Schulz, Sabine Jahn, Monika Schöbe, alle Rotta; Thomas Kaatz, Gräfenhainichen; Barbara Hössel, Kerstin Schubert, Petra Thomzik, Stefan Meingast, Petro Göbel, Heidi Huhn, Rainer Usbeck, Marina Heil, alle Steinbach-Hallenberg; Karola Volk, Fam-

bach; Sabine Peter, Schmalkalden; Ute Grünbeck, Birgit Herdmann, Christina Wurst, Bernd Linß, Klaus Pabst, Heiko Rosenbusch, alle Mittelstille

Für dreijährige Teilnahme

Christine Spiegelberg, Berlin; **Dirk Herrmann,** Alt-Töplitz; **Barbara Höpfner,** Wolgast; **Henri Hoffmann,** Oberschönau; **Uwe Wiegel,** Neuenhofe; **Torsten Busch, Steffen Apel,** beide Klausdorf; **Christiane Bloch,** Zaatzke; **Michael Thränhardt,** Oranienbaum; **Carola Senft, Uta Richter,** beide Wingerode; **Gerald Manske,** Steinbach-Hallenberg; **Barbara Gehb,** Fambach; **Haiko Müller,** Schmalkalden; **Matthias Bernstein,** Wernshausen; **Bernadette Domaschke,** Seifhennersdorf; **Andrea Hönemann,** Stützerbach; **Volkmar Türke,** Auerbach; **Holger Bensch,** Berlin; **Ute Schilling,** Hoyerswerda; **Aldo und Jörg Bojarski,** Saßnitz; **Astrid und Wolfhart Umlauft,** Freital; **Gudrun Billig,** Coswig; **Roland Schlesinger,** Saßnitz; **Reinhard Pohl,** Dresden; **Ralf Becker,** Wolmirstedt; **Thomas Sroka, Hubertus Mund,** beide Sondershausen; **Michael Weicker,** Mügeln; **Friedemann Vetter,** Bukkow; **Klaus Schenk,** Hoyerswerda; **Andreas Bachmann,** Dresden; **Sabine Lützkendorf,** Erfurt; **Andrea Herrmann,** Hammerunterwiesenthal; **Torsten Löwe,** Schleiz; **Michael Schubert, Torsten Musiol,** beide Güstrow; **Wilfried Röhnert,** Radebeul; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Kordula Becker, Moskau (UdSSR); Helmut Bernstein, Freiberg; Dietmar Richter, Halberstadt; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Andreas Gude, Berlin; Armin Hoell, Ribnitz; Annette Schulz, Cottbus; Andreas Matthus, Rostock; Jens Negwer, Grimma; Annette Lasar, Erfurt; Holger Heydrich, Grimma; Werner Jeroch, Dresden; Sylvia Schmidt, Buchholz; Thomas Apel, Reichenbach; Petra Hansch, Klausdorf; Martin Menge, Bernburg; Peter Pörs, Berlin; Thomas Kruppa, Eilenburg; Ellen Krüger, Katrin Wahn, beide Uebigau; Jens Siemoneit, Grimmen; Andreas Schlegel, Dresden; Adrian Schubert, Luga; Dieter Bahlmann, Friedrichsgrün; Holger Kreil, Mittelbach; Ulrike Otto, Ilmenau; Frank Kratsch, Göhren; Dirk Markgraf, Bischofferode; Holger Hentze, Leipzig; Rita Hellmann, Großschönau; Steffen Hanisch, Dresden; Sylvia Zipf, Waldheim; Armin Körner, Leipzig; Eva Kertész, Kecskemét (Ungarische VR); Michael Schott, Gräfenthal; Roger Labahn, Anklam; Michael Zwicke, Riesa; Ralf Kretschmer, Dresden; Lutz Gründel, Dessau; Sabine Einert, Pockau; Steffen Roch, Annaberg; Jürgen Lehmann, Weimar; Rainer Bauer, Mittweida; Christiane Jordan, Kietz; Angela Mäder, Plottendorf; Anke Bartsch, Rostock; Valeska Heymann, Berlin; Jürgen Rolle, Schlegel; Carola Berger, Grimma; Holm Dettmer, Dresden; Ronald Rösch, Karl-Marx-Stadt; Thomas Reuscher, Stralsund; Gert Mielke, Rolofshagen; Ute Scharkowski, Zepernick; Ruth Klingbeil, Salow; Katrin Rurainsky, Bad Langensalza; Jürgen Krahl, Plauen; Monika Schulz, Berlin; Christine Kindt, Wendisch-Priborn; Ulf Günther, Ronneburg; André Wortha, Pleetz; Gunter Reißig, Weimar; Christian Wolf, Greifswald; Regina Kreul, Zittau; Michael Zschiesche, Leipzig; Uwe Horn, Bad Frankenhausen; Bertram Utzelmann, Grünhain; Annekatrin Elsner, Ponickau; Sylvia Kunze, Weißenfels; Antje Matthesius, Ratzdorf; Susanne Jähnisch, Wellmitz; Achim Bastian, Ribnitz; Andrea Puchert, Eichicht; Frank Regensburger, Dresden; Andreas Feige, Mühlhausen; Michael Apitz, Dresden; Günter Mosel, Gülze; Irmtraud Schröder, Kl. Schwarzlosen; Frank Janke, Falkenberg; Klaus-Peter Schröder, Rostock; Bernd Henke, Schwarzheide; Manuel Richter, Wilthen; Dagmar Klatte, Görlitz; Günter Carlsen, Titschendorf; Roland Fiebig, Halle; Almute Mende, Riesa; Uwe Hanisch, Dresden; Beate Lehrmann, Walbeck; Ramona Zschau, Grimma; Bettina Schade, Waren; Elke Barth, Arnsnesta; Uli Meier, Weißenfels; Karin Willner, Gerstungen; Mario Hoffmann, Kirchberg; Jörg Hlouschek, Treben; Holger Schnabel, Wismar; Steffen Wandslebe, Hoyerswerda; Sylvia Wende, Leinefelde; Thomas Purcz, Leipzig; Mario Schmidt, Bischofferode; Heidelore Stallbohm, Eldena; Armin Wappler, Königswalde; Andreas Philipp, Rochlitz; Gerald Görmer, Berlin; Birgit Boldt, Ludwigslust; Bernd Heinemann, Strausberg; Diether Pickel, Meyenburg; Holger Hoppe, Stendal; Christina Busch, Niendorf; Hartger Hohmann, Lübtheen; Dietmar Tkazyk, Bornitz; Peter Möller, Bad Doberan; Diethard Spieß, Bad Langensalza; Holger Milnik, Jördenstorf; Hans-Christoph Vogel, Hoyerswerda; Angelika Engelhardt, Viernau; Marlies Kolberg, Stahnsdorf; Christine Stüber, Alsleben; Hans-Joachim Babetzke, Lübtheen; Heike Keller, Cossebaude; Heike Rabsahl, Iris Lange, beide Fockendorf; Beate Kuhle, Gr. Schwarzlosen; Heike Waldert, Gotha; Michael Winks, Berlin; Karsten Wallroth, Eisenach; Kurt Wiechmann, Glasin; Harald Schlesinger, Saßnitz; Reinhardt Rascher, Karl-Marx-Stadt; Peter Brauer, Gnoien; Katrin Pech, Waren; Michael Beck, Blankenfelde; Annette Pötschke, Bautzen; Wolfgang Fukarek, Greifswald; Frank Wegner, Rostock; Beatrix Seeboth, Gernrode; Birgit Klunk, Neukloster; Jens Helbig, Hohenstein-Ernstthal; Ines Quast, Lübbendorf; Ines Gustmann, Coswig; Thomas Pahl, Prenzlau; Burkhard Schult, Ludwigsfelde; Renate Gramsch, Großenhain; Uwe Räffler, Bischofferode; Eckhard Unger, Boizenburg; Kerstin Wucherpfennig, Halle-Neustadt; Ralf Böttger, Hoyerswerda; Steffen Heinrich, Zittau; Gunar Kloss, Merseburg; Ina Greiner-Petter, Malchin; Brigitta Kern, Hirschfelde; Helmut Heiland, Niederorschel; Detlef Neubauer, Berlin; Asmund Hohmann, Lübtheen; Pia und Petra Hellmuth, Dresden; Ina Freber, Meißen; Christian Gürlich, Ketzin; Susann Freyer, Müllrose; Katrin Römer, Karl-Marx-Stadt; Andreas Richter, Weißwasser; Burkhard Rahr, Groß-Naundorf; Ute Sonnenburg, Hennigsdorf; Martina Jentsch, Cossebaude; Angela Krüger, Wellmitz; Michael Kirchner, Sondershausen; Karen Angrick, Neukloster; Klaus Badenschier, Wittenberge; Sybille Lieb, Lüttewitz; Kerstin Nörenberg, Berlin; Peter Wiehe, Bischofferode; Kerstin Klingbeil, Oberlungwitz; Elke Klein, Lüderitz; Ralf Griese, Groß Wüstenfelde; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Matthias Dietsch, Holger Mehle, beide Fockendorf; Thomas Guffler, Eisenach; Bernd Hübner, Oybin; Steffen Wendt, Haida; Achim Troll, Oberlungwitz; Peter Rosenbohm, Ribnitz; Michael Feudel, Bischofferode; Olaf Wender, Mühlhausen; Claudia Ziehm, Berlin; Jörg Hinrichs, Sellin; Heike Manthey, Ribnitz; Cornelia Otto, Raguhn; Torsten Reetz, Mellensee; Bernhard und Birgit-Cornelia Maaz, Jena; Hartmut Alwardt, Ziddorf; Reinhard Frank, Hirschberg; Dagmar Laux, Leipzig; Marina Mittag, Dresden; Wolfgang Kirschnick, Schwerin; Thomas Köhler, Oederan; Klaus und Dieter Löbe, Osternienburg; Bernhard Wilde, Dresden; Carmen Henze, Pratau; Beate Küchler, Pirna; Constanze Weisbrod, Halle; Hansjörg Himmel, Leipzig; Thomas Müller, Krems (Österreich); Petra Hampel, Leutersdorf; Torsten Flade, Beiersfeld; Walter Tiedtke, Schorssow; Gert Trinks, Dresden; Uwe Hartig, Riesa; Hans Wagner, Werdau; Holger Pfeifer, Dresden; Steffen Gollmer, Berlin; Hilmar Müller, Blüthen; Andreas Pietsch, Zella-Mehlis; Holger und Heike Stehfest, Havelberg; Andreas Seifert, Hohenstein-Ernstthal; Ines Krebs, Oschersleben; Joachim Liers, Leipzig; Christine Günther, Storkau; Irmgard Friese, Breitenworbis; Barbara Kempt, Karl-Marx-Stadt; Katrin Schuft, Hennigsdorf; Martin Gland, Halle-Neustadt; Matthias Kutschick, Kleinopitz; Heidrun Müller, Leipzig; Burkhard Götz, Cottbus; Andrea Boy, Hoyerswerda; Thomas Weiß, Weimar; Steffen Trapp, Meißen; Volkmar Schreiber, Krien; Sabine Vosahlo, Jena; Udo Fechner, Spremberg; Gisela Mann, Leipzig; Lutz Wenert, Hartau; Uwe Sobotta, Magdeburg; Dieter Schwerwinski, Rostock; Hans-Martin Kühn, Gramzow; Cornelia Schmidt, Kolochau; Bernd Haase, Wünschendorf; Roland Schreiber, Krien; Lutz Dietrich, Hohenstein-Ernstthal; Ulrich Kammer, Pirna; Michael Monse, Olbersdorf; Maike Kuschfeldt, Menteroda; Ulrike Casper, Merzdorf; Jens Kühnert, Heinrichsort; Torsten Ueberdick, Halle; Kerstin Hasse, Warbelow; Mathias Dierl, Gersdorf; Lothar Pohl, Falkenhagen; Andreas Massanek, Neusornzig; Hans-Eckehard Wilde, Dresden; Irina Leven, Greifswald; Heidemarie Engert, Plottendorf; Wolfgang Nickel, Leipzig; Olaf

Gutschker, Kolkwitz; Katrin Wagner, Röbel; Steffen Kühling, Zwenkau; Sylvia Schimanski, Gademow; Katrin Göbel, Potsdam; Sylvia Haltenhof, Ammern; Thomas Badstüber, Gersdorf; Stefan Zimmermann, Matthias Marx, Klepzig; Frank Naumann, Karl-Marx-Stadt; Frank Thienert, Berlin; Carmen Schwebmeyer, Ahlbeck; Frank Geyer, Wallhausen; Maria Gonsior, Finsterwalde; Ingo Lohde, Schönfeld; Cornelia Eickert, Gielow; Kerstin Würtenberger, Volker Helmert, beide Karl-Marx-Stadt; Jürgen Richter, Pfaffroda; Kerstin Schmelzer, Hettstedt; Silke Kornisch, Böhlitz-Ehrenberg; Christina Schröter, Ilmenau; Torsten Saro, Stahnsdorf; Andreas König, Zella-Mehlis; Sigrid Ehrenpfordt, Finsterwalde; Ina Daberkow, Demmin; Ulrike Heldner, Choren; Anke Bushert, Grimmen; Kerstin Kaiser, Altenburg; Norbert Münsch, Radegast; Heidrun Wallner, Bergen; Ronald Märkisch, Bürgel; Uta Lohse, Bautzen; Olaf Müller, Bischofferode; Claudia Müller, Eisenach; Ramona Müller, Spremberg; Ute Heidel, Engelsdorf; Gabriele Müller, Worbis; Anne-Kathrin Küttner, Krien; Birgit Arnhold, Radebeul; Sylvia Zehe, Wittenberge; Gudrun Kaiser, Hohen-Demzin; Norbert Behnke, Greußen; Frank Macher, Bahratal; Frank Bräuer, Hellendorf; Steffi Förtsch, Reitzengeschwenda; Birgit Oelschlegel, Arndt Gläßer, beide Altenbeuthen; Cornelia Klaffke, Bernd Ehrling, beide Löderburg; Bärbel Ifland, Brehme; Regina Klingebiel, Beate Sander, beide Ecklingerode; Andreas Kohlstedt, Andreas Kaiser, beide Leinefelde; Ralf Briesemeister, Siegfried Müller, beide Sachsendorf; Uta Schaarschmidt, Fürstenwalde; Frank Pätz, Ulrike Alme, Bernd Krantz, Andrea Gottschling, Hans-Jürgen Weber, Michael Kämmer, Lutz Burkhardt, Marion Gössinger, Elke Naumann, Karin Krauß, Gabriele Michel, Ralf Weidermann, Angela Preiß, Rolf Busch, Klaus-Peter Wintzler, alle Lobenstein; Veronika Anhalt, Effelder; Annette Fahrig, Elke Birkefeld, beide Niederorschel; Birgit Vorbau, Anita Seromin, Andrea Jost, Wolfgang Warm, alle Altentreptow; René Misterek, Helmersdorf; Gabriele Reimann, Karin Rasche, Sulyka Adam, Carmen Bardoux, alle Stolpen; Angela Schlegel, Sabine Klotzsche, beide Wolgast; Ines Pahl, Dagmar Krümmling, beide Neuenhofe; Stefan Borchardt, Worbis; Andreas Mempel, Clingen; Frauke Apel, Susanne Burda, Detlef Dumjahn, Susanne Thomas, alle Klausdorf; Rüdiger Teltow, Rehagen; Ines Krüger, Jürgen Hack, Ferdinand Mohr, Sabine Sperling, Bernd Wagner, Bernd Schulz, Wolf-Dieter Wegner, Reiner Wagner, alle Zaatzke; Birgit Baldauf, Zschornewitz; Eberhard Förster, Söllichau; Viola Forner, Sabine Büttner, Susanne Lorenz, Andrea Ratz, Martina Schröter, alle Rotta; Monika Glosse, Angelika Rode, Cordula Görge, Martina Wehling, alle Wingerode; Bernd Endter, Christine Döll, Ralf-Peter Burkhardt, Sabine Holland-Nell, Heidrun Päckert, Katrin Döll, Erek Sänger, Heike Sauer, Cornelia Horn, Petra Koch, Reinhold Beckmann, Sabine Henkel, Kerstin Usbeck, Beate Wurschi, Anette Recknagel, Hartmut Gießler, Frank Hoffmann, Hans-Georg König, Claudia Holland, Birgit Heidenreich, Thomas Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Anke Ilgen, Monika Müller, Klaus Ullrich, alle Fambach; Katrin Bauer, Heike Geruschke, Uwe Schleicher, Falk Oelschläger, Antje Tischer, Frank Schaft, Andreas Mäder, Peter Heide, Petra Weichler, Constanze Prause, Anette Seidel, Peter Gaudian, alle Schmalkalden; Lutz Storch, Lothar Bühner, beide Breitungen; Eberhard Georgy, Erfurt

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/75

Ma 5 ■1387 Angenommen, Katja habe x Stück Kuchen zu 25 Pf, y zu 35 Pf und z zu 70 Pf gekauft. Wir fertigen eine Tabelle an.

x	y	z	$25\cdot x$	$35\cdot y$	$70\cdot z$	$25\cdot x+35\cdot y+70\cdot z$
2	3	4	50	105	280	435
2	4	3	50	140	210	400
3	2	4	75	70	280	425
3	4	2	75	140	140	355
4	2	3	100	70	210	380
4	3	2	100	105	140	345

Nur für $x=4$, $y=2$, $z=3$ wird die Gleichung $25\cdot x+35\cdot y+70\cdot z=380$ erfüllt. Katja hat somit 4 Stück Butterkuchen, 2 Stück Pflaumenkuchen und 3 Törtchen gekauft, und es gilt $4\cdot 25$ Pf $+2\cdot 35$ Pf $+3\cdot 70$ Pf $=380$ Pf $=3{,}80$ M.

Ma 5 ■1388 Das Quadrat $ABCD$ besitzt eine Seitenlänge von $108\text{ cm}:4=27\text{ cm}$; sein Flächeninhalt beträgt $27\cdot 27\text{ cm}^2=729\text{ cm}^2$. Aus $729\text{ cm}^2-648\text{ cm}^2=81\text{ cm}^2$ folgt wegen $9\cdot 9\text{ cm}^2=81\text{ cm}^2$, daß das Quadrat $EFGH$ eine Seitenlänge von 9 cm und somit einen Umfang von $4\cdot 9\text{ cm}=36\text{ cm}$ besitzt.

Ma 5 ■1389 Aus $267\text{ m}=26700\text{ cm}$, $2\cdot 52\text{ cm}=104\text{ cm}$ und $26700\text{ cm}-104\text{ cm}=26596\text{ cm}$ folgt, daß für die Wimpel 26596 cm Schnur zur Verfügung steht. Für den letzten aufzuziehenden Wimpel braucht der Abstand von 4 cm nicht berücksichtigt zu werden, also $26596\text{ cm}-15\text{ cm}=26581\text{ cm}$. Aus $15\text{ cm}+4\text{ cm}=19\text{ cm}$ und $26581:19=1399$ folgt, daß auf die Schnur $(1+1399)$ Wimpel, also 1400 Wimpel gezogen waren. Wegen $1400:10=140$ waren es 140 rote Wimpel. Wegen $1400:7=200$ waren es 200 blaue Wimpel. Wegen $3\cdot 140=420$ waren es 420 gelbe Wimpel. Aus $1400-(140+200+420)=640$ folgt, daß die Wimpelkette 640 weiße Wimpel enthielt.

Ma 5 ■1390 Aus $126:6=21$ folgt, daß täglich 21 Seiten des Manuskripts abzuschreiben waren. Ein Drittel von 6 Arbeitstagen sind 2 Arbeitstage. Die Maschinenschreiberin schaffte bei dieser Arbeitsaufteilung
$2\cdot(21+7)+4\cdot(21-7)=56+56=112$ Seiten. Wegen $112<126$ hat sie den Arbeitsauftrag nicht termingerecht erfüllt.

Ma 5 ■1391 Angenommen, Karin besitzt gegenwärtig n Briefmarken; dann besitzt Peter gegenwärtig $3\cdot n$ Briefmarken. Nun gilt

$$3\cdot n-130=n-10,$$
$$3\cdot n-n=130-10,$$
$$2\cdot n=120,$$
$$n=60.$$

Karin hat 60, Peter 180 Briefmarken gesammelt.

Ma 5 ■1392 Aus $100-96=4$ folgt, daß der Sohn 4 Jahre alt ist. Aus $41-4=37$ folgt, daß der Vater 37 Jahre alt ist. Aus $96-37=59$ folgt, daß der Großvater 59 Jahre alt ist.

Ma 6 ■1393 Für die von den Sportlern der DDR für alle erkämpften Plätze vergebene Punktzahl gilt
$5p_1+6p_2+2p_4+2p_5+p_6=76$. Angenommen, es gelte $p_6=1$, $p_5=2$, $p_4=3$, $p_3=4$, $p_2=5$, $p_1=6$; dann erhält man $5\cdot 6+6\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 2+1=71$ Punkte, also 5 Punkte weniger als 76 Punkte. Da der erste Summand in der obigen Summe gleich $5p_1$ ist und da $p_1>p_2$ gilt, können diese 5 Punkte nur in den Punktzahlen der 1. Plätze enthalten sein. Somit gilt $p_1=7$, und wir erhalten $5\cdot 7+6\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 2+1=76$ Punkte.

Ma 6 ■1394 Angenommen, Jörg habe den n-ten Platz errungen; dann gilt

$$[(n+5):10+3]\cdot 5=n+10,$$
$$(n+5):2+15=n+10,$$
$$(n+5)+30=2\cdot n+20,$$
$$n+35=2\cdot n+20,$$
$$n=15.$$

Jörg hat somit den 15. Platz erreicht.

Ma 6 ■1395 Es sei x die gesuchte Zahl; dann ist $x-1$ durch die paarweise einander teilerfremden Zahlen 2, 3, 5, 7 und 11 teilbar. Daher ist $x-1=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2310$, also $x=2311$. Die kleinste der zu ermittelnden Zahlen lautet somit 2311.

Ma 6 ■1396 Die Länge der Marschstrecke von A nach B betrage x km Dann gilt
$\left(\frac{x}{3}-1\right)+5=\frac{3x}{5}$, $\frac{3}{5}\cdot x-\frac{1}{3}\cdot x=4$, $\frac{4}{15}\cdot x=4$, $x=15$.

Bis zum zweiten Kontrollpunkt waren $\frac{3}{5} \cdot 15\,\text{km} = 9\,\text{km}$ zurückgelegt worden. Nun gilt $15\,\text{km} - 9\,\text{km} = 6\,\text{km}$ und $6\,\text{km} : 2 = 3\,\text{km}$. Folglich war der dritte Kontrollpunkt 3 km vom Ziel entfernt.

Ma 6 ■1397 Wir spiegeln den Punkt B des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC an der Geraden AC als Symmetrieachse; sein Bildpunkt sei B'. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB'C = 60°$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC = 30°$, also $\sphericalangle BAB' = 60°$.

Das Dreieck ABB' ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig. Wegen $\overline{BC} = \overline{B'C} = a$, also $\overline{BB'} = 2a$ und $\overline{AB} = \overline{BB'} = c$ gilt $c = 2 \cdot a$.

Ph 6 ■1398

Gegeben: $v = 1\,198{,}8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Gesucht: s

$$t = 5\frac{1}{3}\text{s} = \frac{16}{3 \cdot 3600}\text{h}$$

Lösung:

$$s = v \cdot t$$

$$s = \frac{1\,198{,}8\,\text{km} \cdot 16\,\text{h}}{\text{h} \cdot 3 \cdot 3600}$$

$$s = 1{,}776\,\text{km}$$

Das Gewitter ist 1,776 km entfernt.

Ma 7 ■1399 Angenommen, Uwe habe x Hefte zu 8 Pf und y Hefte zu 15 Pf das Stück gekauft, dann gilt

$$8x + 15y = 131,$$
$$8x = 128 - 8y - 7y + 3,$$
$$x = 16 - y - \frac{7y - 3}{8}.$$

Nur für $y = 5$ ist $\frac{7y-3}{8}$ ganzzahlig und x eine positive ganze Zahl. Wir erhalten

$$x = 16 - 5 - \frac{7 \cdot 5 - 3}{8} = 11 - 4 = 7.$$

Uwe kaufte 7 Hefte zu 8 Pf und 5 Hefte zu 15 Pf das Stück, und es gilt $7 \cdot 8\,\text{Pf} + 5 \cdot 15\,\text{Pf} = 56\,\text{Pf} + 75\,\text{Pf} = 131\,\text{Pf} = 1{,}31\,\text{M}$.

Ma 7 ■1400 Es sei n die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt

$$\frac{n+1}{3} = \frac{n-10}{2},$$
$$2(n+1) = 3(n-10),$$
$$2n + 2 = 3n - 30,$$
$$n = 32.$$

Zu dieser Klasse gehören 32 Schüler; es sind $\frac{n+1}{3} = \frac{32+1}{3} = 11$ Mädchen und somit 21 Jungen.

Ma 7 ■1401 Von jeder Ecke eines n-Ecks lassen sich $(n-3)$ Diagonalen, von allen n Ecken somit $n(n-3)$ Diagonalen ziehen. Dabei wurden alle Diagonalen doppelt gezeichnet, denn z. B. die Diagonale $\overline{P_iP_j}$ ist identisch der Diagonalen $\overline{P_jP_i}$. Für die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n-Ecks gilt somit $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$. Nun gilt

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3) = 35,$$
$$n \cdot (n-3) = 70,$$
$$n \cdot (n-3) = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$n \cdot (n-3) = 10 \cdot 7, \text{ also}$$
$$n = 10.$$

Ein konvexes 10-Eck besitzt genau 35 Diagonalen.

Ma 7 ■1402 Angenommen, es waren x Äpfel im Korb vorhanden.

Achim erhielt $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ Äpfel; danach verblieben im Korb $\left(x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$ Äpfel. Bruno erhielt $\left(\frac{x-1}{2} : 2 + \frac{1}{2}\right)$ Äpfel, also $\frac{x+1}{4}$ Äpfel.

Analog dazu gilt:

Claus erhielt $\frac{x+1}{8}$ Äpfel, Dieter erhielt $\frac{x+1}{16}$ Äpfel und Ernst erhielt $\frac{x+1}{32}$ Äpfel. Nun gilt aber $\frac{x+1}{32} = 1$, $x + 1 = 32$, also $x = 31$. Im Korb befanden sich 31 Äpfel. Achim erhielt $\frac{x+1}{2} = \frac{31+1}{2} = 16$ Äpfel, Bruno erhielt 8, Claus 4, Dieter 2 und Ernst 1 Apfel.

Ph 7 ■1403

Gegeben: $m = 4{,}2\,\text{kg} = 4\,200\,\text{g}$ Gesucht: ϱ

$V = 21\,\text{dm}^3 = 21\,000\,\text{cm}^3$

Lösung:

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

$$\varrho = \frac{4\,200\,\text{g}}{21\,000\,\text{cm}^3}$$

$$\varrho = 0{,}2\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Der Stoff Kork hat die Dichte $0{,}2\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Ch 7 ■1404 Ballon Säure: 100 kg
Ballon leer: 13,8 kg
Masse der Säure: 82,6 kg.

Ma 8 ■1405 Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann gilt

$$\frac{9}{91} = \frac{x}{7} - \frac{x}{13},$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 < x < 7$ und $0 < y < 13$ sind.

Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher

$$13x - 7y = 9,$$
$$7y = 13x - 9,$$
$$y = \frac{13x - 9}{7}.$$

Wir erhalten für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

x	$13x$	$13x-9$
1	13	4
2	26	17
3	39	30
4	52	43
5	65	56
6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar

$$y = \frac{13x - 9}{7} = \frac{56}{7} = 8.$$

Die gesuchte Darstellung lautet also

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13}.$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung; denn es gilt

$$\frac{5}{7} - \frac{8}{13} = \frac{65}{91} - \frac{56}{91} = \frac{9}{91}.$$

Ma 8 ■1406 a) Wir bezeichnen die Größe des ersten der drei Winkel des Dreiecks ABC mit $3x$. Dann ist $4x$ die Größe des zweiten Winkels, da sich beide Winkelgrößen wie $3:4$ verhalten, und $11x$ die Größe des dritten Winkels, da sich die Größen des zweiten und des dritten Winkels wie $4:11$ verhalten. Da die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich 180° ist, erhalten wir die Gleichung

$$3x + 4x + 11x = 180°,$$
$$18x = 180°,$$
$$x = 10°.$$

Das Dreieck ABC hat also die Winkelgrößen $3x = 30°$, $4x = 40°$, $11x = 110°$, d. s. zusammen 180°.

b) Bezeichnen wir die Größe des ersten Winkels mit x, so sind die Größen der beiden anderen Winkel gleich $10x$ bzw. $100x$.

Wir erhalten daher

$$x + 10x + 100x = 180°,$$
$$111x = 180°,$$
$$x = \frac{180°}{111} \approx 1{,}62162°.$$

Es gibt also ein solches Dreieck, und zwar ein Dreieck mit den Winkelgrößen $x \approx 1{,}6°$, $10x \approx 16{,}2°$, $100x \approx 162{,}2°$, wobei jeweils auf eine Stelle nach dem Komma gerundet worden ist.

Ma 8 ■1407 Es sei x eine positive reelle Zahl, für die die Gleichung

$$\frac{a+x}{1 + \frac{ax}{c^2}} = c \text{ erfüllt ist.} \qquad (1)$$

Dann gilt wegen $1 + \frac{ax}{c^2} > 0$ und $c < 0$

$$\frac{(a+x)c^2}{c^2 + ax} = c,$$
$$(a+x)c = c^2 + ax,$$
$$ac + cx = c^2 + ax,$$
$$x(a-c) = c(a-c).$$

Hieraus folgt wegen $a < c$, also $a - c \neq 0$

$$x = c.$$

Die Gleichung (1) kann daher höchstens für $x = c$ erfüllt sein; tatsächlich ist sie aber auch für $x = c$ erfüllt; denn es gilt

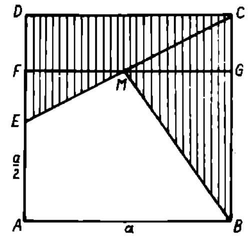
$$\frac{a+x}{1 + \frac{ax}{c^2}} = \frac{a+c}{1 + \frac{ac}{c^2}} = \frac{(a+c)c}{c+a} = c.$$

Ma 8 ■1408 Es sei $ABCD$ das gegebene Quadrat mit der Seitenlänge a. Dann gilt, da E der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$ ist,

$$\overline{DE} = \overline{EA} = \frac{a}{2}.$$

Ferner gilt $\overline{EM} = \overline{MC}$ (vgl. das Bild).

Nun möge die Parallele durch M zu CD die Seite $\overline{DA}$ in F und die Seite $\overline{BC}$ in G schneiden. Wegen $\overline{EM}=\overline{MC}$, $\sphericalangle EMF=\sphericalangle CMG$ und $\sphericalangle MFE=\sphericalangle MGC=90°$ gilt (nach dem Kongruenzsatz *sww*) $\Delta\, MFE \cong \Delta\, MGC$.



Daraus folgt $\overline{FM}=\overline{MG}$ und wegen $\overline{FM}+\overline{MG}=\overline{FG}=\overline{CD}=a$

$$\overline{MG}=\frac{a}{2}.$$

Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks BCM wegen $\overline{BC}=a$ und $\overline{MG}=\frac{a}{2}$ gleich

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks CDE ist wegen $\overline{CD}=a$ und $\overline{DE}=\frac{a}{2}$ gleich

$$A_2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Daher beträgt der Flächeninhalt des Fünfecks $EMBCD$

$$A_3=a_1+A_2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}.$$

Da der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ a^2 ist, gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $ABME$

$$A_4=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2},$$

woraus $A_3=A_4$ folgt, d. h., die Flächeninhalte des weiß gefärbten Vierecks $ABME$ und des grau gefärbten Fünfecks $EMBCD$ sind einander gleich, obwohl es zunächst scheint, als ob der Flächeninhalt des Vierecks größer sei.

Ph 8 ▪1409

Gegeben: $F=60$ kp Gesucht: p

$A=150\ \text{cm}^2$

Lösung:

$$p=\frac{F}{A}$$

$$p=\frac{60\ \text{kp}}{150\ \text{cm}^2}$$

$$p=0{,}4\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Der Druck eines stehenden Menschen auf den Fußboden beträgt $0{,}4\frac{\text{kp}}{\text{cm}^3}$.

b) Gegeben:

$F=60$ kp Gesucht: p

$A=200\ \text{cm}\cdot 10\ \text{cm}=2000\ \text{cm}^2$

Lösung:

$$p=\frac{F}{A}$$

$$p=\frac{60\ \text{kp}}{2000\ \text{cm}^2}$$

$$\underline{\underline{p=0{,}03\frac{\text{kpp}}{\text{cm}^2}}}$$

Der Druck auf die Schneedecke beträgt $0{,}03\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$.

c) Das Verhältnis beträgt

$$0{,}4\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}:0{,}03\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}=40:3.$$

Ch 8 ▪1410 Mischungsformel:

$$n=\frac{m(a-p)}{(p-b)}\ \left|\ \begin{array}{ll} m=1000 & b=0\\ a=\ \ 25 & p=10\end{array}\right.$$

$$n=\frac{1000(25-10)}{10}=1500$$

Es sind also 1500 g Wasser mit 1000 g 25%iger Salzsäure zu mischen, um 10%ige Salzsäure zu erhalten.

Ma 9 ▪1411 a) Für alle reellen Zahlen a und b gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ ist,

$$(a-b)^2\geqq 0, \quad (1)$$

also

$$a^2-2ab+b^2\geqq 0, \quad (2)$$

$$a^2-ab+b^2\geqq ab. \quad (3)$$

Wir unterscheiden nunmehr die folgenden Fälle:

1. $a>0$ und $b>0$ oder $a<0$ und $b<0$.
Dann ist $ab>0$, also wegen (3)
$a^2-ab+b^2\geqq ab>0.$
2. $a>0$ und $b<0$ oder $a<0$ und $b>0$.
Dann ist $a^2>0$, $b^2>0$, $ab<0$, also $-ab>0$, also $a^2-ab+b^2>0.$
3. $a=0$ und $b\neq 0$.
Dann ist $a^2=0$, $ab=0$, $b^2>0$, also
$a^2-ab+b^2=b^2>0.$
4. $a\neq 0$ und $b=0$.
Dann ist $a^2>0$, $ab=0$, $b^2=0$, also
$a^2-ab+b^2=a^2>0.$
5. $a=b=0$.
Dann ist $a^2-ab+b^2=0$.

In allen Fällen ist also die Ungleichung
$a^2-ab+b^2\geqq 0$ erfüllt, w.z.b.w.

b) Nur im 5. Fall, also wenn $a=b=0$, gilt das Gleichheitszeichen.

Ma 9 ▪1412 Es seien
a die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche,
h die Länge der Höhe,
h' die Länge der Seitenhöhe, d. h. der Höhe jedes der vier gleichschenkligen Dreiecke, die die Seitenflächen bilden. Dann gilt

$$h'^2=h^2+\frac{a^2}{4}. \quad (1)$$

Ferner gitl für die Summe der Flächeninhalte der vier Seitenflächen

$$M=4\cdot\frac{1}{2}\cdot ah'=2ah'\ \ 0960\ \text{cm}^2 \quad (2)$$

$$A_0=a^2+M=a^2+960\ \text{cm}^2=1536\ \text{cm}^2, \quad (3)$$

also

$$a^2=576\ \text{cm}^2,\ \text{d. h. } a=24\ \text{cm}. \quad (4)$$

Aus (4) und (2) folgt

$$h'=\frac{960}{2\cdot 24}\ \text{cm}=20\ \text{cm},$$

also wegen (1)

$$h^2=h'^2-\frac{a^2}{4}=\left(400-\frac{24^2}{4}\right)\text{cm}^2=256\ \text{cm}^2,$$

$$h\ =16\ \text{cm}. \quad (5)$$

Wegen (4) und (5) ist das Volumen der Pyramide gleich

$$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\cdot 576\cdot 16\ \text{cm}^3=3072\ \text{cm}^3.$$

Ma 9 ▪1413 Es seien $n, n+1, n+2, n+3$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned} &n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\ &=[n(n+3)]\,[(n+1)(n+2)]+1\\ &=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\ &=(n^2+3n)(n^2+3n)+2(n^2+3n)+1\\ &=(n^2+3n+1)^2.\end{aligned}$$

Damit wurde bewiesen, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, vermehrt um 1, stets gleich einer Quadratzahl, nämlich gleich dem Quadrat der natürlichen Zahl n^2+3n+1 ist.

Ma 9 ▪1414 a) Die Punkte D, B, F, H sind Eckpunkte eines Rechtecks, weil sie in einer Ebene liegen und $DB\perp BF$, $BF\perp FH$, $FH\perp HD$, $HD\perp DB$ gilt (siehe Bild 1). Ferner ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{DB}$ und K der Schnittpunkt der Diagonale $\overline{DF}$ dieses Rechtecks mit der Verbindungsstrecke $\overline{HM}$.

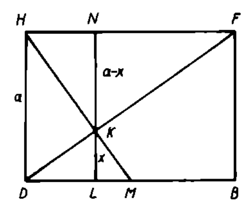


Bild 1

Dabei gilt $\overline{BF}=\overline{HD}=a$ und $\overline{DB}=\overline{FH}=a\sqrt{2}$, weil $\overline{DB}$ eine Diagonale des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a ist. Daher ist

$$\overline{DM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Es sei nun $\overline{KL}=x$ die Länge der von K ausgehenden Höhe in dem Dreieck KDM und $\overline{KN}=a-x$ die Länge der von K ausgehenden Höhe in dem Dreieck KFH. Aus der Ähnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt nun, daß die Längen ihrer Höhen x bzw. $a-x$ sich wie die entsprechenden Grundseitenlängen $\overline{DM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\overline{FH}=\sqrt{2}$ verhalten; es gilt

also $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$, $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{1}{2}$,

also $2x=a-x$,

$$3x=a,$$

$$x=\frac{a}{3}\ \text{und}\ a-x=\frac{2}{3}a.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks KDM ist also gleich $A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2}{12}\sqrt{2}$,

und der Flächeninhalt des Dreiecks KFH ist gleich $A_2=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}a=\frac{a^2}{3}\sqrt{2}.$

b) Da die durch das Rechteck $DBFH$ bestimmte Ebene auf der Ebene des Quadrats $ABCD$ senkrecht steht, steht auch die Höhe $\overline{KL}$ des Dreiecks DMK senkrecht auf jeder Geraden der Ebene $ABCD$, also auch auf der

Geraden LC. Daher ist das Dreieck KLC rechtwinklig, und wir können die gesuchte Länge der Strecke $\overline{KC}$ aus $\overline{KL}$und $\overline{LC}$ berechnen (siehe Bild 2).

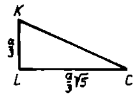


Bild 2

Um die Länge von $\overline{LC}$ zu ermitteln, berechnen wir zunächst $\overline{LM}$.
Wir erhalten (siehe Bild 1)

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{KH}}=\frac{x}{a-x}=\frac{\frac{1}{3}a}{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{2}, \text{ also}$$

$2\cdot\overline{KM}=\overline{KH}$. Wegen

$$\overline{KM}+\overline{KH}=\overline{HM}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{6} \text{ folgt hieraus}$$
$$3\cdot\overline{KM}=\frac{a}{2}\sqrt{6},\ \overline{KM}=\frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

Also wird (siehe Bild 1)

$$\overline{LM}=\sqrt{\left(\frac{a}{6}\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{2a^2}{36}}=\frac{a}{6}\sqrt{2}.$$

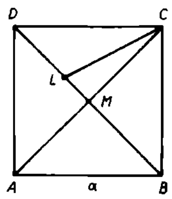


Bild 3

Nun liegt Lauf der Diagonale $\overline{DB}$ des Quadrats $ABCD$ (siehe Bild 3).
Da in dem rechtwinkligen Dreieck LMC $\overline{MC}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist, gilt

$$\overline{LC}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a}{6}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{2a^2}{36}}$$
$$=\sqrt{\frac{5a^2}{9}}=\frac{a}{3}\sqrt{5}.$$

Da $\overline{KC}$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks KLC ist (siehe Bild 2), gilt

$$\overline{KC}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{9}+\frac{a^2}{9}}=\frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Der Punkt K hat also von dem Eckpunkt C des Würfels den Abstand $\frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Ph 9 ▪1415 Gegeben:

$P_{zu}=20\text{ kW}=20000\text{ W}$ Gesucht: η
$F=60\text{ kp}=(60\cdot 9{,}81)N$
$h=20\text{ m}$
$t=4\text{ s}$

Lösung:

$$\eta=\frac{P_{nutz}}{P_{zu}}\quad P_{nutz}=\frac{F\cdot h}{t}$$
$$\eta=\frac{2943\text{ W}}{20000\text{ W}}\quad P_{nutz}=\frac{(60\cdot 9{,}81)N\cdot 20\text{ m}}{4\text{ s}}$$
$$=2\,943\text{ W}$$
$$\eta=0{,}1472$$

Der Wirkungsgrad der Anlage beträgt 14,72%.

Ch 9 ▪1416 Die Reaktionsfolge ergibt sich nach folgendem Schema:

$CaSO_4\cdot 2H_2O\rightarrow SO_3\rightarrow H_2SO_4$
$M_{CaSO_4}\cdot 2H_2O : M_{H_2SO_4}=100:0{,}96x$

$$x=\frac{98{,}08\cdot 100}{172{,}17\cdot 0{,}96}=59{,}34\text{ t } 96\%\text{ige Schwefelsäure}$$

Ma 10/12 ▪1417 Es sei x eine reelle Zahl, für die die Ungleichung

$$\left|\frac{2x-9}{x+1}\right|\leq 1 \text{ erfüllt ist.} \qquad (1)$$

Dann gilt $x+1\neq 0$, also $x\neq -1$.
Ferner gilt

$$|2x\ 99|\leq|x+1|. \qquad (2)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle:

1. Fall: $x\geq\frac{9}{2}$.

Dann gilt $2x-9\geq 0$, also $|2x\ 99|=2x-9$.
Ferner gilt $x+1\geq 0$, also $|x+1|=x+1$.
In diesem Fall folgt also aus (2)

$$2x-9\leq x+1, \qquad (3)$$
$$x\leq 10.$$

Daher ist für $\frac{9}{2}\leq x\leq 10$ die Ungleichung (3) und damit auch die Ungleichung (1) erfüllt.

2. Fall: $-1<x<\frac{9}{2}$.

Dann gilt $2x-9<0$, also $|2x-9|=-2x+9$.
Ferner gilt $x+1>0$, also $|x+1|=x+1$.
In diesem Fall folgt also aus (2)

$$-2x+9\leq x+1, \qquad (4)$$
$$3x\leq -8$$
$$x\geq\frac{8}{3}.$$

Daher ist für $\frac{8}{3}\leq x<\frac{9}{2}$ die Ungleichung (4) und damit die Ungleichuug (1) erfüllt.

3. Fall: $x<-1$.

Dann gilt $2x-9<0$, also $|2x-9|=-2x+9$.
Ferner gilt $x+1<0$, also $|x+1|=-x-1$.
In diesem Fall folgt also aus (2)

$$-2x+9\leq -x-1, \qquad (5)$$
$$-x\leq -10, \text{ d. h. } x\geq 10.$$

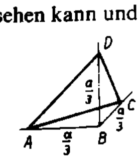
Die Ungleichung (5) und damit die Ungleichung (1) ist also in diesem Falle wegen $x<-1$ nicht erfüllt.

Zusammenfassung: Die Ungleichung (1) ist für alle reelle Zahlen x mit $\frac{8}{3}\leq x\leq 10$ und nur für diese erfüllt.

Ma 10/12 ▪1418 Es sei a die Kantenlänge des Würfels; dann ist sein Volumen gleich

$$V_1=a^3.$$

Jeder der acht abgeschnittenen Teilkörper stellt eine Pyramide $ABCD$ dar (siehe Bild), als deren Grundfläche man das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\frac{a}{3}$ und $\frac{a}{3}$ ansehen kann und deren Höhe die Länge $\frac{a}{3}$ hat. Das Volumen dieser Pyramide ist gleich



$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{162}.$$

Das Volumen des Restkörpers ist also gleich

$$V_0=a^3-\frac{8\cdot a^3}{162}=\frac{77}{81}a^3.$$

Das Volumen des Restkörpers verhält sich daher zu dem Volumen des Würfels wie

$$V_0:V_1=77:81.$$

Ma 10/12 ▪1419 a) Wegen $h=10$ m, $d_1=0{,}3$ m, $d_2=0{,}2$ m, $d=0{,}25$ m, $\pi\approx 3{,}1416$ erhält man

$$V=\frac{\pi\cdot 10}{12}(0{,}3^2+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}2^2)\text{ m}^3=\frac{\pi\cdot 10}{12}\cdot 0{,}19\text{ m}^3\approx 0{,}4974\text{ m}^3$$
$$V'=\frac{\pi\cdot 10}{4}\cdot 0{,}25^2\text{ m}^3\approx 0{,}4909\text{ m}^3$$

b) Der Betrag des absoluten Fehlers ist also gleich $|V-V'|=0{,}0065\text{ m}^3$
und der Betrag des prozentualen Fehlers gleich $\left|\frac{V-V'}{V}\right|\cdot 100\%=\frac{0{,}0065}{0{,}4974}\cdot 100\%$
$\approx 1{,}3\%$

Der prozentuale Fehler ist also sehr gering, er beträgt nur rd. 1%.

c) Es gilt

$$V-V'=\frac{\pi h}{12}(d+\delta)^2+(d+\delta)(d-\delta)+(d-\delta)^2-\frac{\pi h}{4}d^2$$
$$=\frac{\pi h}{12}(d^2+2d\delta+\delta^2+d^2-\delta^2+d^2-2d\delta+\delta^2-3d^2),$$
$$V-V'=\frac{\pi h}{12}\delta^2. \text{ Ferner gilt}$$
$$\frac{V-V'}{V'}=\frac{\pi h}{12}\delta^2:\frac{\pi h}{4}d^2=\frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2.$$

Im Falle a) gilt

$$\frac{\delta}{d}=\frac{0{,}05}{0{,}25}=\frac{1}{5}, \text{ also}$$
$$\frac{V-V'}{V}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}\approx 0{,}013,$$

d. s. 1,3% in guter Übereinstimmung mit dem Wert unter b), obwohl hier zur Vereinfachung nicht durch V, sondern durch V' dividiert wurde.

Ma 10/12 ▪1420 Wir bezeichnen mit I_1 das Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ und mit I_2 das Intervall $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. (1)

Nun gilt für alle x der Intervalle I_1 und I_2

$$f(x)=\frac{\sqrt{(1-\sin x)^2}-\sqrt{(1+\sin x)^2}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{\sqrt{(1-\cos x)^2}-\sqrt{(1+\cos x)^2}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

Wegen (1) gilt stets
$1-\sin x>0$, $1+\sin x>0$, $1-\cos x>0$, $1+\cos x>0$, also

$$\sqrt{(1-\sin x)^2}=1-\sin x,$$
$$\sqrt{(1+\sin x)^2}=1+\sin x \text{ usw.}$$

Ferner gilt im Intervall I_1 $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$, da $\cos x>0$, und im Intervall I_2 $\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$, da $\cos x<0$.

In beiden Intervallen gilt also

$\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$ und ferner

$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$.

Daher folgt aus (2)

$$f(x) = \frac{(1-\sin x)-(1+\sin x)}{|\cos x|} \cdot \frac{(1-\cos x)-(1+\cos x)}{\sin x}$$

$$f(x) = \frac{2\sin x \cdot 2\cos x}{|\cos x| \cdot \sin x}$$

und hieraus wegen $\sin x \neq 0$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\cos x}{|\cos x|}. \qquad (3)$$

Nun gilt im Intervall I_1 $\cos x > 0$ und $|\cos x| > 0$, also

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = 1,$$

dagegen im Intervall I_2 $\cos x < 0$ und $|\cos x| > 0$, also

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = -1.$$

Wegen (3) gilt daher für alle x im Intervall I_1 $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = 4$$

und für alle x im Intervall I_2 $\left(\frac{\pi}{2} < x\pi\right)$

$$f(x) = -4.$$

Lösungen zu alpha-heiter

Wie lautet die richtige Antwort?

Mögliche Antwort: „Etwas, was ich nicht verloren habe, besitze ich noch; vorausgesetzt, daß ich es überhaupt besessen habe!“

Städtewettkampf

Die Gesamtpunktzahl der Teilnehmer A bis L ist 2990. Ferner muß die der Teilnehmer von Stadt S und T durch 3 teilbar sein. Sehen wir uns die einzelnen Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 3 an, so stellen wir fest:

a) B, C, D, I sind ohne Rest teilbar (Restklasse $\bar{0}$)

b) A, F, G, H, K, L haben jeweils den Rest 1 (Restklasse $\bar{1}$)

c) E hat den Rest 2 (Restklasse $\bar{2}$).

Da die Summe von b) ebenfalls ohne Rest teilbar ist, muß E mit 320 Punkten aus der Stadt U kommen.

Die Punktezahl der übrigen Teilnehmer ist dann 2670, die sich mit 1780 auf S und mit 890 auf T verteilen. Teilnehmer A mit 910 Punkten muß also zur Mannschaft von S gehören.

Es bleiben dann noch zu untersuchen

von S 870 Punkte (Restklasse $\bar{0}$),

von T 890 Punkte (Restklasse $\bar{2}$).

1. Annahme: Die 870 Punkte setzen sich nur aus Teilnehmern mit der Restklasse 0 zusammen. Von diesen Punktwerten 480, 426, 408, 36 ergeben nur die drei letzten die Summe 870.

2. Annahme: Die Untersuchung, ob sich die Summe 870 auch unter Verwendung von drei Werten der Restklasse 1 und dann die Summe 890 mit den übrigen zwei Werten Restklasse 1 bilden lassen, ergibt keine Lösung.

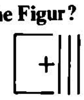
Es kommen somit die

Teilnehmer A, C, D, I aus Stadt S

Teilnehmer B, F, G, H, K, L aus Stadt T

Teilnehmer E aus Stadt U.

Welche Figur?



Verkehrsreich

202	−	122	=	80
−		−		+
188	+	96	=	284
14	·	26	=	364

Kryptarithmetik

P = 1; R = 2; O = 3; D = 4;
U = 5; K = 6; T = 7; E = 9

Silbenrätsel

Rotationskörper, Ebene, Cantor, Hektar, Einstein, Nebenwinkel, Symmetrie, Trapez, Archimedes, Binom – RECHENSTAB

Berühmte Mathematiker

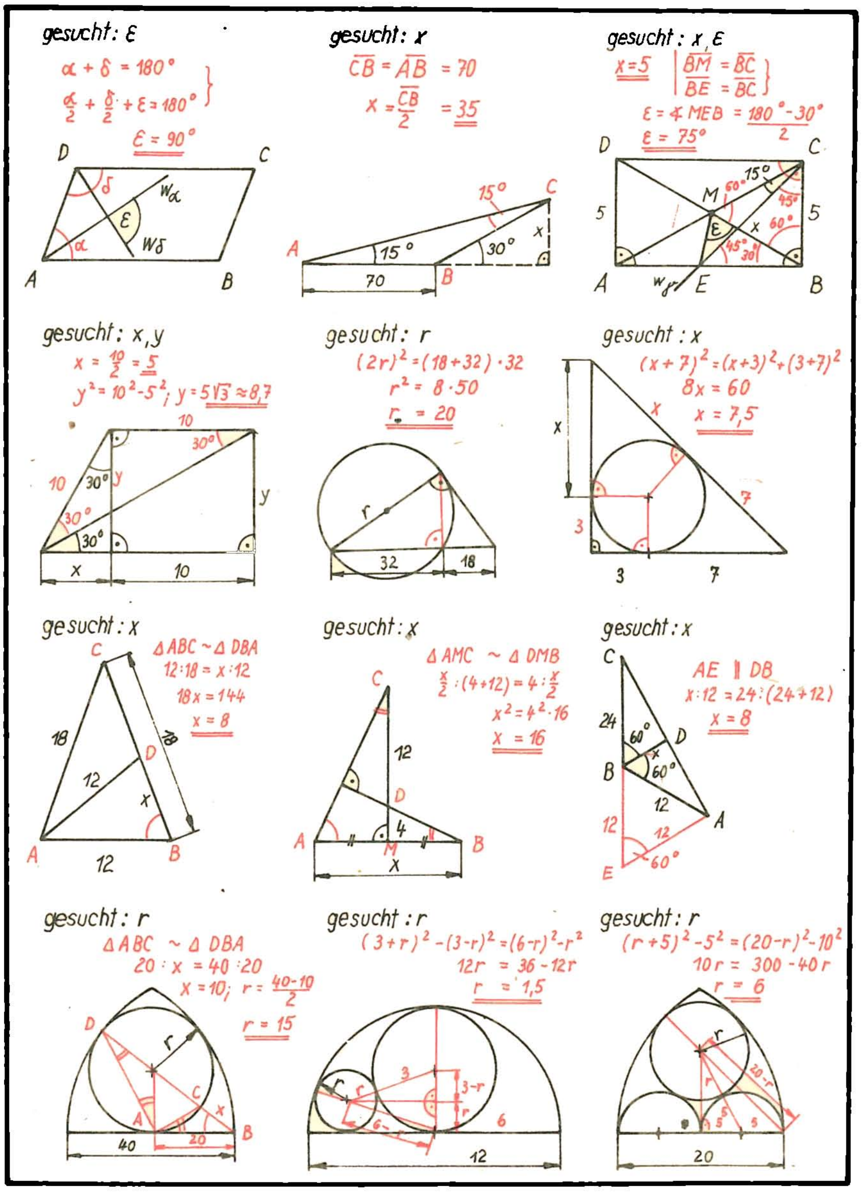
1. Michael Stifel; 2. Pythagoras; 3. Gaspard Monge; 4. Georg Cantor

Lösungen zu „Mathematik und Biologie“,

▲1▲ a) Lippenblütengewächse,
b) Schmetterlingsblütengewächse

▲2▲ $RQ = \frac{18}{26} = 0{,}69$

Lösungen zu: Gut gedacht ist halb gelöst, Heft 6/75



1967 bis 1975

alpha-Wandzeitungen: 1/75 Jetzt schlägt's 13/ Rund um die Uhr ● 2/75 Rund um das Schachbrett (beide J. Lehmann) ● 3/75 Patenschaft in Aktion (Zentralinst. f. Metallurgie) ● 4/75 15 Jahre Mathe-LVZ (J. Lehmann) ● 5/75 Aufgaben aus Freundesland – UdSSR (D. Hetsch)

Aufgaben: 5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR (O. Prinits) ● 6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam (H. Tang/Nguyen lam Son) ● 6/69, 1/70 Prüfungsaufgaben aus Island (G. O. Gestsson) ● 1/70, 4/70 Prüfungsaufgaben aus Tansania (W. Büchel) ● 3/72 Mathematik und Sport (Th. Scholl) ● 5/74 25 Jahre RGW (Th. Scholl) ● 6/74 Was braucht man zum Lösen einer Aufgabe? (W. Burmeister) ● 6/74 Logik-Aufgaben aus der Ungarischen VR (Urania) ● 1/75 bis 6/75 Übung macht den Meister – Gleichungen, Ungleichungen, Variable u. a. (J. Lehmann) ● 6/75 Extremwertaufgaben, die jeder lösen kann (I. Horak/ H. Kästner)

Berichte: 1/67 Internat. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) (D. Ziegler) ● 1/71 Die Mathematik ist schön (R. Peter) ● 1/71 Taugen Mädchen für die Mathematik? ● 3/72 Mathematikstudent im Forschungsstudium (O. Krötenheerdt) ● 4/72 Technische Universität Dresden (R. Sonnemann) ● 6/73 Solidarität in Aktion (DRV) ● 6/73 Aus der Zentralschule der Pionierorganisation *Ernst Thälmann* berichtet (I. Koch) ● 3/74 Mathematik in Erfurt (W. Mögling) ● 3/74 Mathematische Schülergesellschaft der Humboldt-Universität zu Berlin (MSG) ● 2/75 Mathematik in der Mokotowska (Ch. Heermann)

Berufe: 3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium (W. Zill) ● 6/67 Als Diplommathematiker in Dubna (G. Laßner) ● 6/67 Als Mathematiklehrer in Tansania (H. Büchel) ● 2/68 Elektronische Datenverarbeitung – eine Perspektive ● 3/68 Facharbeiter für Datenverarbeitung (Ch. Papendorf) ● 4/68 Mathematisch-technischer Assistent (G. Paulin) ● 5/68 Ingenieur für Programmierung (W. Leupold) ● 6/68 Diplommathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung) (J. Lötzsch/G. Seifert) ● 2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten ● 4/69 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten (H. Ernst) ● 5/69 Hochbauzeichner – ein Beruf für Mädchen ● 6/69 Diplom-Mathematiker (H. Girlich) ● 1/70 Diplomlehrer für Mathematik (R. Mildner) ● 5/70 Bauingenieur (W. Wittig) ● 6/70 Hochschulingenieur (G. Burucker) ● 1/71 Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter ● 5/72 Studienmöglichkeiten an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar (D. Schwaab) ● 1/73 Geophysiker (R. Rösler) ● 4/73 Diplomlehrer für Physik (M. Wurlitzer) ● 5/74 Aus der Arbeit eines Diplommathematikers (M. Peregudow)

Beweise: 2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion (W. Stoye) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 4/69 Mathematikprobleme – selbst gemacht (Nazla H. A. Khedre) ● 4/71 Ein interessanter geometrischer Beweis (E. Schröder) ● 2/74 Das Prinzip der kleinsten Zahl hilft uns weiter (W. Stoye) ● 3/75 Notwendig und hinreichend ist hier zu beweisen (E. Schröder) ● 5/75 Wahr oder falsch – wie kann man das beweisen? (M. Rehm)

Biographien: 2/67 *Gottfr. Wilh. Leibniz* als Mathematiker (W. Purkert) ● 4/67 *Leonhard Euler* 1707 bis 1783 (H. Bernhardt) ● 4/67 *Gaspard Monge* 1746 bis 1818 (E. Schröder) ● 5/67 *A. J. Chintschin* (H. Bernhardt) ● 5/67 Aus der Jugend *A. J. Chintschins* (A. Artisow/ Muromzewa) ● 4/68 *August Ferdinand Möbius* 1790 bis 1868 (H. Wußing) ● 1/69 *Lew Danilowitsch Landau* (B. Zimmermann) ● 4/69 *Evariste Galois* (E. Hertel/O. Stamfort) ● 6/69 *Michael Stifel* (J. Schwarz) ● 6/69 *Alexander ossiowitsch Gelfond* (H. Boll) ● 1/70 Mathematik in der Familie *W. I. Lenins* (G. N. Wolkow) ● 3/70 *Janos Bolyai* (I. Reiman) ● 4/70 Auf den Spuren *Jakob Steiners* (E. Schröder) ● 5/70 Leninpreisträger *Lew Semjonowitsch Pontrjagin* ● 6/70, 2/71, 4/71 *Albrecht Dürer* (E. Schröder) ● 1/71, 4/71 Der Weg eines Talents – *Olga A. Ladyschenskaja* (J. Senkjewitsch) ● 5/71, 1/72, 2/72 *Ramanujan* – das mathematische Genie Indiens (V. Lewin) ● 6/71 *Johannes Kepler* (Th. Riedrich) ● 5/72, 6/72, 1/73 *Nicolaus Copernicus* (H. Wußing) ● 5/73 *A. Ljapunow* (L. Boll) ● 6/73 Über den Schöpfer einer neuen Geometrie/ *N. J. Lobatschewski* (A. Halameisär/B. A. Rosenfeld) ● 1/74 *S. Banach*/Mathematik im Schottischen Kaffee (J. Lehmann) ● 6/74 *Blaise Pascal* (S. G. Gindikin) ● 3/75 *Emmy Noether* (H. Wußing)

Funktionen: 6/70, 2/71, 4/71 Was ist eine Funktion? (A. N. Kolmogorow) ● 2/73 Funktionen und ihre graphische Darstellung (Gelfand/Glagolewa/Schmol) ● 1/74 Einige Grundzüge der klassischen und modernen Variationsrechnung (R. Klötzler) ● 3/75 Ein Zaun und ... eine quadratische Funktion (A. Halameisär)

Geometrie, darstellend: 6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) ● 1/68 Abstand zweier Punkte im Raum (E. Schröder) ● 2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) ● 4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur (E. Schröder) ● 1/70 Auch ein Schlußlicht hat es in sich (E. Schröder) ● 5/70 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (E. Schröder) ● 5/72, 6/72 Darstellende Geometrie und Architekturausbildung (E. Kühn)

Geschichte der Mathematik: 6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike (M. Otto) ● 6/68 *Mathematische Manuskripte* von *Karl Marx* (R. Sperl) ● 1/70 Über die Anfänge der Mathematik (H. Wußing) ● 6/69 bis 5/70 Mathematikkalender (W. Heinig/J. Lehmann) ● 3/71 Geschichte der Mathematik der Tschechoslowakei (O. Langer) ● 2/73 In alten Mathematikbüchern geblättert (J. Lehmann) ● 2/74 Der *Euclides Danicus* von Mohr (G. Strommer)

Gleichungen/Ungleichungen: 1/68 Eine schwierige Hausaufgabe (R. Lüders) ● 6/69 Über die Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) ● 4/70 Einige Ungleichungen für Fakultäten (V. I. Lewin) ● 6/70 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) ● 2/72 Zwei Beweise einer Ungleichung von *Cauchy* (W. Dziadek) ● 5/72 Diophantische Gleichungen (H. Menzer) ● 1/73 Ungleichungen im Bereich der nat. Zahlen (J. Lehmann) ● 4/73 Ein Verfahren zur Abspaltung linearer und quadratischer Polynome (H. Butzke) ● 5/74 Über Ungleichungen (H.-D. Gronau) ● 3/75 Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren (L. Berg) ● 4/75 Rekursionsformeln als spezielle Operatorgleichungen (L. Berg)

Graphentheorie: 3/71 Über die Ramseyschen Zahlen (J. Sedláček) ● 4/72 Der Graph (J. I. Churgin) ● 6/72, 1/73, 2/73, 4/73 Aus der Graphentheorie (W. Voß)

Kombinatorik: 6/71 Geometrische Kombinatorik (L. Lovász/J. Pelikán) ● 6/71, 2/72, 3/72 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? (W. Türke)

Logik: 2/68 Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage (M. Rehm) ● 3/70 Mathematische Logik für Anfänger (Leseprobe) ● 5/70 Achtung Kreuzung – Vorfahrt beachten! (W. Träger) ● 5/72, 6/72, 1/73, 2/73 Kleine Worte – Große Wirkung (L. Flade) ● 2/75 Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage (L. Flade)

Mengenlehre: 1/67 Mit Mengen fängt es an (1) (W. Walsch/H. Lohse) ● 2/67 Wir operieren mit Mengen (2) (W. Walsch) ● 3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) (W. Walsch) ● 4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre (W. Walsch) ● 2/69 Zweiermengen und geordnete Paare (H. Tiede)

Nomographie: 2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden – Olympiadeaufgaben: 1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha–Neu-

Hinweis:

Aus Platzgründen veröffentlichen wir in Heft 1/77 die vollständigen Inhaltsverzeichnisse der Jahrgänge 1975 und 1976; d. Red.

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Die Briefmarke zur Gestaltung des Titelblattes durch H. Fahr, Berlin, überreichte A. Halameisär, Moskau; R. Jäger aus *technikus* 9/75 (S. 29); Porträt aus *technikus* 5/75 (S. 33); Zentralbild/ADN (S. 33); *Vignetten:* K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 38, S. 40/41); J. Lehmann, Leipzig (S. 39); G. Sprengel, Dessau (S. 40/41); Louis Rauwolf, Berlin (S. 40/41); ADN-ZB-Graphik (IV. Umschlagseite).
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. Dezember 1975

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Einige Aufgaben mit rationalen Zahlen

In der 7. Klasse haben wir die rationalen Zahlen kennengelernt. Dadurch wurde es möglich, daß wir nun uneingeschränkt subtrahieren können. Wir haben also einen großen Schritt vorwärts gemacht. Erinnern wir uns: In den unteren Klassen kannten wir nur die natürlichen Zahlen. In diesem Bereich war neben der Subtraktion auch noch die Division nicht uneingeschränkt ausführbar. Den ersten Schritt zur Beseitigung dieser Mängel gingen wir in der 6. Klasse. Dort wurden die gebrochenen Zahlen eingeführt. Von nun an war also die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) uneingeschränkt ausführbar. Wir hatten aber immer noch keinen Zahlenbereich, in dem wir uneingeschränkt subtrahieren konnten. Den schufen wir uns nun in der 7. Klasse mit dem *Bereich der rationalen Zahlen.* Wenn wir umfassend über die rationalen Zahlen Bescheid wissen wollen, so können wir uns nicht damit zufriedengeben, nur mit ihnen rechnen zu können. Wir müssen auch das in der Mathematik gebräuchliche Verfahren zur Erweiterung eines Zahlenbereichs beherrschen. Deshalb beschränken sich auch die folgenden Aufgaben nicht nur auf das Rechnen mit den neuen Zahlen.

Aufgabe 1

Vervollständige die folgende Tabelle!

	Differenzen aus der gleichen Klasse			rationale Zahl
a)	(8 – 12)	(–)	(188 – 192)	
b)	(–)	(80,6 – 25,5)	(–)	
c)	(–)	(–)	(–)	
d)	(–)	(–)	(–)	$-1\frac{3}{4}$

gleich an Aufgabe a) klarmachen. Dazu erinnern wir uns an den im Unterricht behandelten Satz:

Für Differenzen $(a-b)$ *und* $(c-d)$ *von gebrochenen Zahlen, die in einer Klasse liegen, gilt:* $a+d=b+c$.

Wir geben uns also ein beliebiges c vor und bestimmen dann unser d. Welche rationale Zahl ordnen wir nun den jeweils gefundenen drei Differenzen aus einer Klasse zu? Wir kommen hier sicherlich zum Ziel, wenn wir in den Differenzen (die ja eigentlich geordnete Paare gebrochener Zahlen sind) eine gebrochene Zahl 0 werden lassen. In diesem Zusammenhang erinnern wir uns daran, wie die Bezeichnung einer rationalen Zahl festgelegt war. Dazu ist an sich jede Differenz aus der jeweiligen Klasse geeignet. Im Unterricht hatten wir dazu die folgenden Definitionen kennengelernt:

- *Die rationale Zahl, in der die Differenz* $(a-0)$ *vorkommt, wird mit* $+a$ *bezeichnet.*
- *Die rationale Zahl, in der die Differenz* $(0-a)$ *vorkommt, wird mit* $-a$ *bezeichnet.*
- *Die rationale Zahl, in der die Differenz* $(0-0)$ *vorkommt, wird mit* 0 *bezeichnet.*

Nun können wir die zur Bezeichnung dieser Klasse von gebrochenen Zahlen verwendete rationale Zahl angeben.

Wir haben die rationalen Zahlen als *Klassen von Differenzen* kennengelernt. Die Aufgaben a) und b) verlangen, zu vorgegebenen Differenzen noch andere zu suchen, die in derselben Klasse liegen, sowie den Namen der jeweiligen Klasse (die ihr zugeordnete rationale Zahl) anzugeben. Wie findet man nun weitere Differenzen? Das können wir uns

Die Aufgabe d) verlangt von uns den umgekehrten Weg. Welche Differenzen lassen sich z. B. der hier vorgegebenen rationalen Zahl zuordnen? Die Aufgabe c) gibt uns schließlich völlig freie Hand. Hier können wir selbst Differenzen vorgeben, die in derselben Klasse liegen, und ihnen die entsprechende rationale Zahl zuordnen (oder umgekehrt). Bei dieser Aufgabe müssen wir beachten, daß die Differenzen $(a-b)$ und $(b-a)$ voneinander verschieden sind.

Noch zwei kleine Zusatzfragen: Wieviel Differenzen gehören eigentlich zu einer Klasse? Welche Bedeutung besitzt das Zeichen – in der hier benutzten Schreibweise $(a-b)$?

Aufgabe 2

Ordne die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach!

a) -100; 87; 0; -21; -5; 1

b) $-2{,}748$; $\frac{4}{7}$; $-2{,}8$; $\frac{5}{8}$; $0{,}9$; $-2{,}749$

Die Ordnung rationaler Zahlen haben wir an der Zahlengeraden erklärt. Dabei haben wir auch den Begriff des absoluten Betrages einer rationalen Zahl kennengelernt. Die Ordnung erklärten wir so:

Von zwei verschiedenen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

Für die positiven rationalen Zahlen war das das alte Ordnungsprinzip der gebrochenen Zahlen. Für die negativen rationalen Zahlen konnten wir nach dieser Definition den folgenden Satz formulieren:

Von zwei verschiedenen negativen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die den größeren absoluten Betrag hat.

Die Definition des absoluten Betrages lautete schließlich so:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \text{ positiv oder gleich 0 ist,} \\ a, \text{ falls } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Zurück zu unserer Aufgabe! Die rationalen Zahlen sollen hier so geordnet werden, daß mit der kleinsten begonnen wird. In der Aufgabe a) finden wir nur ganze Zahlen, so daß uns das Ordnen leichtfallen sollte. Die Aufgabe b) erfordert einige Kenntnisse über gebrochene Zahlen. Was wissen wir noch aus der 6. Klasse über den Vergleich von Dezimalbrüchen bzw. von gemeinen Brüchen?

Wie kann man z. B. entscheiden, ob $\frac{4}{7}$ größer oder kleiner als $\frac{5}{8}$ ist? Wenn es sich um gleichnamige Brüche handeln würde, dann wäre die Sache einfacher. Wir brauchten dann nur die Zähler zu vergleichen.

Aufgabe 3

Nenne mindestens sieben rationale Zahlen, die zwischen -3 und $0{,}25$ liegen!

Was heißt in dieser Aufgabe „mindestens“? Gibt es auch noch mehr Zahlen, die zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegen? Was wissen wir diesbezüglich von den rationalen Zahlen? Erinnern wir uns daran, was es bedeutet, wenn wir im Unterricht lernten, daß die rationalen Zahlen überall dicht liegen!

Eine weitere Frage:

Können in unserer Antwort nur ganze Zahlen enthalten sein?

Vielleicht versuchen wir einmal, nachdem wir sieben rationale Zahlen angegeben haben, die diese Bedingung erfüllen, davon zwei benachbarte auszuwählen und wieder Zahlen zu suchen, die zwischen diesen (nun noch näher beieinanderliegenden) rationalen Zahlen liegen. Wem gelingt das?

Aufgabe 4

Ermittle alle Zahlen, für die gilt:

a) $|a| = 8{,}5$
b) $|a| = -2$
c) $-|a| = 7$
d) $-|a| = -0{,}5$

Manche Schüler haben Angst vor dem absoluten Betrag. In Aufgabe 2 haben wir uns schon überlegt, wie er definiert war. In der Definition wurden zwei Fälle unterschieden. Weshalb eigentlich? Was ist der absolute Betrag einer rationalen Zahl stets für eine Zahl?
Wenn wir das wissen, dann können wir die Aufgaben a) und b) sofort lösen. Bei Aufgabe c) müssen wir uns darüber klar werden, was das Zeichen „–“ vor dem Absolutstrich bedeutet. (Das ist wichtig, weil ja bei der Einführung dieser neuen Zahlen dieses Zeichen in verschiedenen Bedeutungen vorkommt. Eine davon – nämlich die als Trennzeichen – haben wir bereits bei der Schreibweise der Differenzen kennengelernt. Weitere sind z. B.: Vorzeichen, Operationszeichen, Zeichen für entgegengesetzte Zahl.) Das hat dann auch Auswirkungen auf die rechte Seite der Gleichung. In Aufgabe d) steht dieses Zeichen – sogar zweimal. Nun haben wir uns jede Aufgabe einzeln überlegt und gesehen, daß die Angst ganz unbegründet ist. Bevor wir die einzelnen Lösungen hinschreiben, sollten wir uns noch überlegen, ob wir in jeder Aufgabe überhaupt zwei Zahlen für a finden können.

Aufgabe 5

Berechne!

a) $|7{,}4| - |-12{,}9| + |2| =$
b) $-|2\frac{2}{3} + 19{,}\bar{3} - 4\frac{1}{3}| =$
c) $|-12| : |0{,}04| =$

Nachdem wir Aufgabe 4 gelöst haben, können wir uns mit unseren aufgefrischten Kenntnissen über den absoluten Betrag auch an Aufgabe 5 wagen. Hier werden wir ebenfalls wieder Kenntnisse aus der 6. Klasse benötigen (Rechnen mit gebrochenen Zahlen).
Bei den Aufgaben a) und b) sollten wir daran denken, daß wir hier mit absoluten Beträgen rechnen müssen. Wir werden sie also erst einmal bestimmen und dann erst das Ergebnis der Aufgaben ausrechnen. In Aufgabe b) steht zwischen den Absolutstrichen eine Aufgabe aus der 6. Klasse. Wir müssen hier mit gebrochenen Zahlen rechnen. In welcher Darstellungsweise der gebrochenen Zahlen wollen wir das tun? Wenn wir damit fertig sind, haben wir noch zwei Dinge zu beachten. Erst dann haben wir die Lösung dieser Aufgabe.

Aufgabe 6

Gib in den folgenden Ketten von Ungleichungen für die Variablen jeweils eine rationale Zahl so an, daß die Ungleichungen dadurch erfüllt werden!

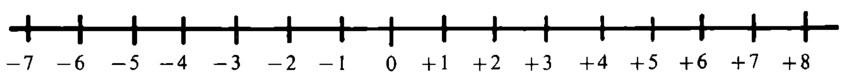
a) $-8 < x < -7{,}5 < y$
$x =$ $y =$

b) $\frac{7}{8} < r < -\frac{6}{8} < s < t < -\frac{1}{2}$
$r =$ $s =$ $t =$

In der Aufgabe 2 hatten wir es schon einmal mit solchen Ketten von Ungleichungen zu tun. Dort waren alle Zahlen gegeben, hier fehlen einige. Sie müssen also bestimmt werden. Wenn wir uns an die Lösungshinweise zu den Aufgaben 2 und 3 und daran erinnern, was wir uns dazu überlegt hatten, wird uns die Lösung hier sicherlich nicht schwerfallen. Bei Aufgabe b) sollen s und t zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegen. Für s und t ist dann noch als weitere Bedingung zu beachten, daß $s < t$ sein soll.

Aufgabe 7

Skizziere auf der Zahlengeraden die Lage aller der Zahlen z, für die gilt: $|z| \leq 3$



Auf dem Stück der Zahlengeraden, das hier gezeichnet wurde, sind nur die ganzen Zahlen markiert. Unsere Aufgabe lautet, alle Zahlen z mit der genannten Bedingung zu skizzieren. Dazu sollten wir uns diese Bedingung zunächst einmal genau ansehen.
Was bedeutet das Kleinergleichzeichen? Welche Zahlen lassen sich für z einsetzen, damit diese Bedingung erfüllt ist? Wo liegen diese Zahlen auf der Zahlengeraden?

Aufgabe 8

Welche der folgenden Aussagen werden beim Einsetzen von rationalen Zahlen für die jeweiligen Variablen wahr, welche falsch?
Gib für die wahren Aussagen zwei Beispiele an! Nenne bei den falschen Aussagen ein Gegenbeispiel!

a) Für alle a, b gilt:
Wenn $a < b$, dann ist $-a > -b$
b) Für alle c, d gilt:
Wenn $c < d$, dann ist $-c < -d$
c) Für alle e, f gilt:
Wenn $-e < f$, dann ist $-f > e$

Für a, b, c, d, e und f können wir uns hier jeweils rationale Zahlen eingesetzt denken. Es handelt sich also um Variable für rationale Zahlen. Was bedeuten nun die beiden Wörter für alle?
Wann ist eine Aussage wahr, wann falsch? Wie könnten wir das formulieren? Die geforderten Beispiele lassen sich sicherlich leicht finden. Wenn eine Aussage nun aber falsch ist, was heißt es dann, ein Gegenbeispiel anzugeben? Mit dem Angeben von zwei Beispielen bzw. einem Gegenbeispiel haben wir hier natürlich nichts bewiesen.

Aufgabe 9

Es seien folgende rationale Zahlen gegeben:
$12; 0; -85\frac{1}{13}; 8; -85\frac{1}{12}; \underset{-}{8},01; -28; 19\frac{2}{5}$

a) Welche dieser Zahlen ist die kleinste?
b) Welche dieser Zahlen ist die größte?
c) Welche dieser Zahlen hat den kleinsten Absolutbetrag?
d) Welche dieser Zahlen hat den größten Absolutbetrag?
e) Welche ist die größte ganze Zahl, die kleiner als alle gegebenen Zahlen ist?
f) Welche ist die kleinste ganze Zahl, die größer als alle gegebenen Zahlen ist?

Die sechs Fragen zu dieser Aufgabe sollten wir ganz genau lesen. Die Antworten auf die Fragen a) bis d) sind sicherlich einfach.
Wir haben inzwischen ja wieder mit dem Ordnen und mit den absoluten Beträgen rationaler Zahlen Erfahrungen gesammelt. Die gilt es hier anzuwenden. Bei den Fragen

Bereich	a	b	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a:b$ ▶
R	32	-7				
R	-17	0				
N	60	160				
R^*	$4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$				
R^*	6	$\frac{54}{9}$				
R	$-\frac{5}{8}$	0,375				

e) und f) sollten wir uns erst einmal ganz genau klarmachen, wonach gefragt ist. Die gesuchten Zahlen müssen hier zwei Bedingungen erfüllen. Welche sind das? Wenn wir das erkannt haben, dann haben wir die jeweilige Zahl auch bereits gefunden.

Aufgabe 10

Berechne $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ und $a:b$, indem du anstelle von a und b die folgenden Zahlen aus den jeweils angegebenen Bereichen einsetzt! Wenn eine Aufgabe nicht lösbar sein sollte, so schreibe in das entsprechende Feld „n. l.“!
Endlich kommen wir zum Rechnen mit rationalen Zahlen! Aber Vorsicht: Hier soll ja auch in anderen Zahlenbereichen gerechnet werden. Wir sollten uns am Anfang noch einmal überlegen, was wir über die uneingeschränkte bzw. über die eingeschränkte Ausführbarkeit der Rechenoperationen in den einzelnen Zahlenbereichen wissen. Wenn wir uns dann die jeweils gegebenen Zahlen ansehen, dann können wir bestimmt schon in einige Felder schreiben, daß diese dort gestellte Aufgabe nicht lösbar ist.
Wieviel Aufgaben bleiben dann noch von den 24 Aufgaben übrig? Wir brauchen also erst gar nicht jede Aufgabe in Angriff zu nehmen, nachdem wir wissen, welche herausfallen müssen. In welcher Spalte werden wohl die meisten „n. l.“ stehen? Bei den Aufgaben, die im Bereich der rationalen Zahlen zu lösen sind, gibt es auch noch eine kleine Fußangel. Wer findet sie?

Aufgabe 11

Berechne!

a) $53-12{,}7-x+23=-85$ $\qquad x=$

b) $3\frac{2}{5}-20-\frac{4}{5}+x=0$ $\qquad x=$

c) $-3{,}7+41{,}9+x-79{,}1=100$ $\qquad x=$

d) $-7\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{4}{8}\right)\cdot 3\frac{2}{3}=x$ $\qquad x=$

e) $\dfrac{-3{,}6\cdot(-20)\cdot 12{,}5}{17{,}5\cdot(-1)\cdot 0{,}72}=x$ $\qquad x=$

Hier müssen wir uns noch einmal alle Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen und mit rationalen Zahlen ins Gedächtnis rufen. Wir werden sie brauchen. Bei den Aufgaben a) bis c) steht x mitten drin. Diese Aufgaben lassen sich auch ohne Kenntnisse aus der Gleichungslehre lösen, d. h. also auch von Schülern der 7. Klasse, die die rationalen Zahlen gerade behandeln.
Wir können hier doch einige Zahlen zusammenfassen. Auf welche Struktur lassen sich dann diese Aufgaben zurückführen? Wie ermittelt man in Aufgaben der Form $y+x=b$ die zu bestimmende Variable x?
In den Aufgaben d) und e) gibt es einige Rechenvorteile. Wer entdeckt sie? Sie schränken den Rechenaufwand etwas ein.

H. Seibt

Übung macht den Meister

Arbeit mit Gleichungen mit zwei Variablen

Aus Abschlußprüfungen der Oberschulen der DDR (Kl. 10)

1975

Gegeben sind die linearen Funktionen mit den Gleichungen

$$\begin{array}{l|l|l} \text{I} & y=3x-2 & \\ \text{II} & x+y=4 & (x\in P). \end{array}$$

a) Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dar, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes ihrer Graphen an!
b) Betrachten Sie die beiden gegebenen Gleichungen als Gleichungssysteme, und lösen Sie es rechnerisch!

1974

Durch die Gleichung $y=3x-1$ ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Gerade g. Geben Sie die Gleichung einer anderen Funktion an, deren Graph parallel zu der Geraden g verläuft!

1973

a) Zeichnen Sie die Punkte $A\,(-4;\,1)$ und $B\,(0;\,3)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Zeichnen Sie durch diese beiden Punkte die Gerade g! Geben Sie die Gleichung der durch g dargestellten Funktion an!
c) Spiegeln Sie die Gerade g an der Abszissenachse, und bezeichnen Sie das Spiegelbild mit g'!
d) Berechnen Sie den spitzen Winkel, den die beiden Geraden g' und g einschließen!

1972

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen

$$\begin{array}{l|l|l} \text{I} & f_1(x)=y=2x+1, & \\ \text{II} & f_2(x)=y=x^2+2x-3 & \text{mit } x\in P. \end{array}$$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_1!
c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!
e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!

1971

Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x$; (x reell).

a) Berechnen Sie für diese Funktion die zu den angegebenen x-Werten gehörenden y-Werte!

x	-4	$+1$	$+3$
y			

(Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)
b) Zeichnen Sie den Graph g_1 dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
c) Zeichnen Sie die Gerade g_2, die parallel zu g_1 verläuft und durch den Punkt $P_1\,(0;\,-3)$ geht! Geben Sie die Gleichung der durch g_2 dargestellten Funktion an!
d) Spiegeln Sie die Gerade g_2 an der y-Achse, und zeichnen Sie das Spiegelbild!

1970

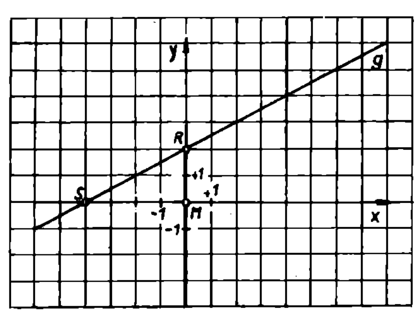
Gegeben sind zwei Funktionen mit den Gleichungen

$y=2x$
und $y=-x+6$ $\qquad$ (x reell).

a) Die Graphen dieser Funktionen sind Geraden. Zeichnen Sie die zwei Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)
b) Die beiden Geraden schneiden die x-Achse in den Punkten P und Q. Geben Sie die Koordinaten der Punkte P und Q an!
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQS (in Quadratzentimetern)!

1969

Übertragen Sie die Abbildung auf Millimeterpapier!



a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die in der Abbildung durch die Gerade g graphisch dargestellt ist!
b) Zeichnen Sie durch den Punkt $P\,(0;\,5)$ die Parallele zur x-Achse! Diese Parallele schneidet die Gerade g im Punkt T.
c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes T an!
d) Beweisen Sie, daß die Dreiecke MRS und RTP ähnlich sind!

Abu Raihan Biruni
(943 bis 1048)

Porträt eines Wissenschaftlers

Ich habe das getan, was jeder auf seinem Fachgebiet tun muß – mit Hochachtung die Bemühungen der Vorgänger in sich aufnehmen und ohne Befangenheit ihre Fehler korrigieren.
(*Biruni* – „*Mas'ud-Kanon*")

Ein Plenum der sowjetischen Gesellschaft der Wissenschaftshistoriker war im Jahre 1973 zwei Jubiläen gewidmet: dem 500. Geburtstag *Nikolaus Kopernikus*' und dem fast gleichzeitigen 1000. Geburtstag von *Abu Raihan Biruni*.
In der Usbekischen und der Tadshikischen Sozialistischen Sowjetrepublik, im Iran und in Afghanistan, in Syrien und Indien – überall, wo *Biruni* lebte und arbeitete, zählt man ihn zu den hervorragenden Vertretern der Geschichte des Landes. Orientalisten nennen die erste Hälfte des 11. Jahrhunderts „Epoche des Biruni".
Seine Lebenszeit im Übergang vom ersten zum zweiten Jahrtausend – Ende des 10. und Anfang des 11. Jahrhunderts – fällt in die Periode des Aufblühens der Völker Mittelasiens, in die sogenannte „Östliche Renaissance". Die schnelle Entwicklung des Bauwesens und der Bautechnik verlangte Kenntnisse der Mathematik und vor allem der Geometrie. Die Hauptwand mit den Nischen in moslemischen Tempeln – den Moscheen – muß, so verlangt es der Islam, in Richtung Mekka stehen. Die Ausrichtung der Moscheen und die Entwicklung der Handelsbeziehungen, d. h. die Land- und Seereisen, verlangten Kenntnisse der Astronomie. Zu Recht gilt *Abu Raihan Biruni* als einer der bedeutenden Mathematiker und Astronomen der Östlichen Renaissance.
Biruni wurde am 4. September 973 in Kjat, der alten Hauptstadt von Choresm, geboren. (Die ehem. Stadt Kjat befindet sich auf dem Territorium der Usbekischen SSR. Sie heißt jetzt Biruni-Stadt.) Sein Lehrer und Erzieher war der in jener Zeit bekannte Mathematiker und Astronom *Abu Mansur ibn Irak*, ein Verwandter des *Schah von Choresm*. Schon mit 17 Jahren begann *Biruni* astronomische Beobachtungen durchzuführen und fünf Jahre später konstruierte er selbständig astronomische Geräte, bestimmte und präzisierte die Koordinaten von 600 geographischen Punkten, baute einen Globus mit einem Durchmesser von 5 m, auf welchem er alle in jener Zeit bekannten Städte, Meere und Berge markierte. In dieser Periode schrieb er eine wichtige Abhandlung über Kartographie, wo erstmals die Projektion der Halbkugel auf eine Ebene vorgeschlagen wurde. Diese Projektion wird auch heute von Kartographen für die Darstellung der Erdhalbkugel angewandt.
In den nachfolgenden Jahren lebte *Biruni* in einer kleinen Stadt, die heute zu Teheran gehört, in Gorgan (Iran), in der neuen Hauptstadt des Choresmreiches – Urgentsch, in Ghazna (Afghanistan); er reiste nach Indien, wo er Sanskrit lernte und für die indischen Gelehrten die Werke *Euklids*, *Ptolemäus*' aber auch einige seiner eigenen Arbeiten in Sanskrit übersetzte. Nach der Rückkehr aus Indien verfaßte *Biruni* das hervorragende Werk „Indien", in dem er die Geographie des Landes, seine Gebräuche, Geschichte, Religionen und hauptsächlich seine Wissenschaften, vor allem die Erfolge indischer Wissenschaftler auf dem Gebiet der Mathematik und Astronomie beschreibt.
Im August des Jahres 1027 beendete *Biruni* eine größere Abhandlung *Zur Berechnung von Sehnen im Kreis*, welche viele Aufgaben und Sätze aus der Geometrie und der Trigonometrie enthält, aber auch wertvolle Fakten zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Orient. Einen interessanten Lehrsatz aus diesem Buch findet der Leser am Ende dieses Artikels.
Im Jahre 1037 wurde die wichtigste Arbeit von *Biruni*, der Mas'ud Kanon – eine echte Enzyklopädie der Astronomie, der Mathematik und aller mit ihnen verbundenen Wissenschaften – beendet. Im ersten Buch wird das Weltbild (das Ptolemäische System) dargelegt, im zweiten Buch – die Kalendersysteme und Fragen der Chronologie. Das dritte Buch ist der Trigonometrie und der Geometrie gewidmet. Hier findet man eine Anzahl verschiedener Formeln, darunter die für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$, für Funktionen mit doppeltem und halbem Winkel, es wird die Aufgabe zur Berechnung von $\sin 1°$ gelöst u. a. m. Indem *Biruni* den Umfang eines regelmäßigen 180-Ecks zur näherungsweisen Berechnung der Länge des Kreisumfangs verwendete, erhält er den ziemlich genauen Wert von 3,141 für die Zahl π. Im Buch werden einige Lösungen der Aufgabe zur Dreiteilung des Winkels mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals beschrieben, es werden kubische Gleichungen gegeben, auf das zwei markierte Punkte enthält, die die Lösung dieser antiken Aufgabe führt. (Allgemein ist diese Aufgabe nicht lösbar.)
Durch Anwendung von Näherungsmethoden berechnete *Biruni* die Länge der Seite eines einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 9-Ecks, d. h., er bestimmte die Sehnenlänge für einen Winkel von 40°. Indem er die durchgeführten Schlüsse verallgemeinerte, konnte *Biruni* ein allgemeingültiges Näherungsverfahren zur Lösung solcher Aufgaben vorschlagen, welches seinem Wesen nach das heutige Iterationsverfahren (ein Verfahren aufeinanderfolgender Näherungen) vorwegnahm.
Wie alle Mathematiker des Mittelalters, benutzte *Biruni* das Sexagesimalsystem. Er stellte eine Tabelle der Sinuswerte (mit einer Schrittweite von 15') und der Tangenswerte (mit einer Schrittweite von 1°) von jeweils vier Sexagesimalstellen auf und verwies auch auf die Regeln zur linearen und quadratischen Interpolation. In dem bereits genannten dritten Buch beweist *Biruni* solche für die Astronomie und Geodäsie wichtigen Sätze, wie den ebenen und den sphärischen Sinussatz, den sphärischen Tangenssatz und erweitert gleichzeitig den Zahlbegriff.
Bis zu *Biruni* wurden als Zahlen nur die natürlichen Zahlen bezeichnet, evtl. noch die Brüche, die man als Zahlteile dieser oder jener Einheit auffaßte; Verhältnisse wurden nur als Verhältnisse zweier natürlicher Zahlen betrachtet. Durch Einführung von Maßzahlen in der Geometrie erweiterte *Biruni* den Zahlbegriff, führte irrationale Verhältnisse ein und veränderte nach seinen eigenen Worten die Lehre von den Zahlen vom Speziellen zum Allgemeinen. Unter Verwendung der heutigen Terminologie könnte man sagen, daß *Biruni* bis zur Menge der positiven reellen Zahlen vorgestoßen ist.
Das vierte Buch des Mas'ud-Kanon ist der Astronomie der Sphären gewidmet, das fünfte Buch der Geodäsie und der Geographie. Das sechste, siebente und achte Buch beschreiben die Bewegung der Sonne, des Mondes und die Sonnen- bzw. Mondfinsternisse. Im neunten Buch wird ein Katalog von 1029 hellen Sternen gegeben, das zehnte Buch berichtet über die Planetenbewegungen. Das letzte, elfte Buch ist der Astrologie und den Kenntnissen gewidmet, die für das Wahrsagen notwendig sind.
An seinem Lebensende verfaßte *Biruni* noch zwei wichtige Arbeiten: Mineralogie – eine Sammlung von Fakten über das Erkennen von Edelsteinen – und Pharmakologie – ein Buch über Arzneimittel (welches *Biruni* nicht vollenden konnte).
Abu Raihan Biruni starb am 11. 12. 1048 in Ghazna. „Zum Leben genügte ihm das Aller-

notwendigste", schrieb einer seiner Zeitgenossen im Jahre 1055. „*Biruni* war materiellen Reichtümern gegenüber gleichgültig und achtete die alltäglichen Dinge gering, er gab sich vollkommen dem Wissenserwerb hin, war ständig über die Bücher gebeugt, die er zusammenstellte. Seine Hand legte nie die Feder weg, seine Augen beobachteten ständig, und sein Herz war auf das Nachdenken gerichtet..."

Schon in seiner Jugend zeigte *Biruni* Neigung zum Wissenserwerb. „Als in unsere Gegend ein Fremder kam", schrieb *Biruni* später, „brachte ich ihm Getreide, Pflanzen, Früchte und anderes, erfragte, wie dies in seiner Sprache heiße und schrieb es auf." (Damit ist hier ein Auswanderer aus Byzanz gemeint.)

Im Buch Indien schrieb *Biruni* über seine Beziehungen zu indischen Gelehrten: „Zuerst nahm ich unter den indischen Astronomen die Stellung des Schülers zum Lehrer ein, da ich noch nicht ausreichend mit ihren Ergebnissen und Methoden vertraut war. Als ich im Bekanntmachen mit ihnen ein wenig vorankam, ihnen ursächliche Beziehungen zu erklären begann, einige logische Beweise demonstrierte und richtige Methoden der mathematischen Wissenschaft zeigte, kamen sie in großer Zahl zu mir mit dem Bestreben, nützliche Kenntnisse zu erwerben."

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Arbeit *Birunis* war die Bestimmung des Erdradius durch eine sehr einfache und scharfsinnige Methode. Wenn von einem Berggipfel G der am weitesten entfernte Punkt E unter dem Winkel α zur Horizontalen zu sehen ist, so kann man bei Kenntnis der Höhe $\overline{MG}$ des Berges das Dreieck EGO berechnen (Bild 1). Nachdem *Biruni* vom Gipfel eines hohen Berges inmitten einer gleichförmigen Ebene in Indien entsprechende Messungen vorgenommen hatte, fand er, daß ein Längenkreis (Meridian) (gemessen im heutigen Maßsystem) 40392,8 km lang ist, was der Abweitung am Äquator von 112,2 km entspricht. Zum Vergleich wollen wir erwähnen, daß nach heutigen Angaben ein Meridian 40008,55 km lang ist und die Abweitung am Äquator mit 111,13 km angegeben wird. Wie man sieht, waren *Birunis* Berechnungen überaus genau (und das vor 1000 Jahren!).

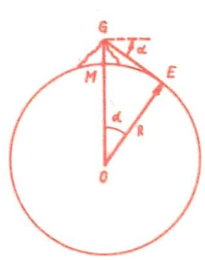


Bild 1: Schema zum Messen des Erdradius nach Biruni.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OG}} = \frac{R}{R+H} = \cos\alpha$$

In der Abhandlung „Das spezifische Gewicht" beschreibt *Biruni* ein von ihm entwickeltes Gerät zur Bestimmung des spezifischen Gewichts. Erstmalig in der Geschichte der Physik berechnete *Biruni* hinreichend genau spezifische Gewichte vieler Metalle, Minerale und Flüssigkeiten. Hier einige der von *Biruni* erhaltenen Resultate und zum Vergleich die genaueren heutigen Werte:

Metalle	Spezifische Gewichte nach Biruni	heut. Werte
Gold	19,05	19,25
Quecksilber	13,58	13,55
Blei	11,33	11,34
Silber	10,43	10,50
Kupfer	8,70	8,93
Eisen	7,87	7,86
Zinn	7,31	7,28

Abu Raihan Biruni war einer der größten Astronomen und bedeutendsten Mathematiker des mittelalterlichen Ostens. Aber er war nicht nur Astronom und Mathematiker: seine Arbeiten auf dem Gebiet der Physik und Geographie, zur Geschichte und zur Chronologie, zur Mineralogie und Pharmakologie, seine philosophischen Auseinandersetzungen mit Abn Sina sind ein unschätzbarer Beitrag für alle diese Wissenschaften. *Biruni* kannte hervorragend die Logik des Aristoteles, er beherrschte mehrere Sprachen einschließlich Arabisch, Persisch und Sanskrit, er war ein Kenner der arabischen Poesie. Er wußte sehr viel und lernte sein ganzes Leben lang, strebte danach, mehr und mehr zu erfahren.

Die Besonderheit der wissenschaftlichen Methode *Birunis* besteht in der Verbindung sorgfältiger Beobachtungen mit einer tiefgründigen Analyse. *Biruni* war ein hervorragender Experimentator; ausgehend von Beobachtungen und von Fakten, die er aus Experimenten erhielt, war er bemüht, das Tatsachenmaterial kritisch zu durchdenken und zu vergleichen, einen logischen, ja wenn möglich, einen mathematischen Beweis seiner Behauptungen zu geben. Überall, wo er konnte, verglich *Biruni* die Besonderheiten und Errungenschaften der verschiedenen Völker; er wird zu Recht als einer der Begründer der historisch-vergleichenden Methode bezeichnet.

Jede Epoche bringt ihre Titanen hervor. Die vielseitigsten Gelehrten der antiken Welt waren *Demokrit* und *Aristoteles*, der Östlichen Renaissance – *Biruni* und *Ibn Sina*, der Europäischen Renaissance – *Leonardo da Vinci* und *René Descartes*.

...Es sind 1000 Jahre vergangen. In unseren Tagen ist die ganze Menschheit vom Leben und Wirken *Birunis* angetan. Seine Arbeiten wurden in russischer und usbekischer, in tadshikischer, in persischer, in arabischer und in vielen europäischen Sprachen herausgegeben. Das Jubiläum des 1000. Geburtstages von *Biruni* beging man in Mittelasien, wo er geboren wurde und aufwuchs, im Iran und Afghanistan, wo er wirkte, in arabischen Ländern, in deren Sprache *Biruni* seine Arbeiten veröffentlichte, in Indien, das er mit der Kultur der arabischen Länder bekannt gemacht hat. Das Jubiläum des Geburtstages von *Abu Raihan Biruni* war ein Festtag für die gesamte progressive Menschheit.

Versuche, den folgenden Lehrsatz aus *Birunis* Buch „Zur Berechnung von Sehnen im Kreis" zu beweisen:

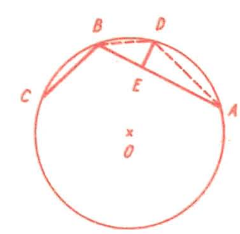


Bild 2: Eine Aufgabe von *Biruni*.
Es ist bekannt, daß $\overline{CD} = \overline{DA}$, $DE \perp AB$.
Es ist zu beweisen, daß $\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BC}$.

Wenn vom Punkt B eines Kreises (siehe Bild 2) zwei Sehnen BA und BC gezeichnet werden und vom Punkt D, dem Mittelpunkt des Kreisbogens AC, das Lot DE auf die größere Sehne AB gefällt wird, dann teilt der Punkt E den Polygonzug ABC in zwei gleiche Teile, d. h., $\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BC}$.

A. J. Halameisär
B. A. Rosenfeld

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 20. Juni 1976

Ma 5 ▪1497 In dem nachfolgenden Schema sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält:

```
**4·*1
 2*4
  *3*
 ****
```

Andrea Städtke, Leninoberschule Wolgast

Ma 5 ▪1498 Franks Vater besitzt ein Kraftfahrzeug vom Typ *Trabant*, das eine vierstellige Autonummer hat. Die vierte Ziffer ist gleich dem Dreifachen der zweiten Ziffer. Die dritte Ziffer ist um 2 kleiner als die erste Ziffer. Die erste Ziffer ist um 3 kleiner als die vierte Ziffer. Die Quersumme der Autonummer beträgt 22.
Wie lautet diese Autonummer?

AG Junge Mathematiker, 5. OS Zittau

Ma 5 ▪1499 Ein Neuerer sagte nach der Realisierung eines Verbesserungsvorschlages zu seinem Arbeitskollegen: „Wenn ich zur Hälfte der Arbeitszeit, die ich bisher zur Herstellung dieses Werkstückes benötigte, noch 15 Minuten addiere, so ergibt das 3 Stunden und 45 Minuten." Welche Zeit benötigte dieser Neuerer bisher zur Anfertigung des Werkstückes? *Lehrer Dieter Knape, Jessen*

Ma 5 ▪1500 Frank und Uwe wollen in den Ferien mit dem Fahrrad an einen etwas entlegenen See zum Baden fahren. Sie haben zwei Möglichkeiten, an den See zu gelangen. Frank meint, daß sie auf der 15,8 km langen Talfahrt schneller ans Ziel kommen. Auf diesem Streckenabschnitt können sie eine mittlere Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen, wobei zu beachten ist, daß sie einen nicht befahrbaren Weg von 900 m Länge zu Fuß gehen müssen und dafür 10 min benötigen. Uwe meint, daß sie für die 15,5 km lange Fahrt durch das hügelige Gelände weniger Zeit benötigen. Dabei können sie eine mittlere Geschwindigkeit von $24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren. Entscheide, wer von beiden recht hat!

Schüler Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt

Ma 5 ▪1501 Die Schüler einer Oberschule hatten im letzten Vierteljahr insgesamt 240 kg Altmetall der Erfassungsstelle zugeführt. Der vierte Teil davon war Blei, der achte Teil Kupfer, der sechste Teil Zink und der Rest war Messing. Wieviel Kilogramm Blei, Kupfer, Zink und Messing wurden von diesen Schülern gesammelt?

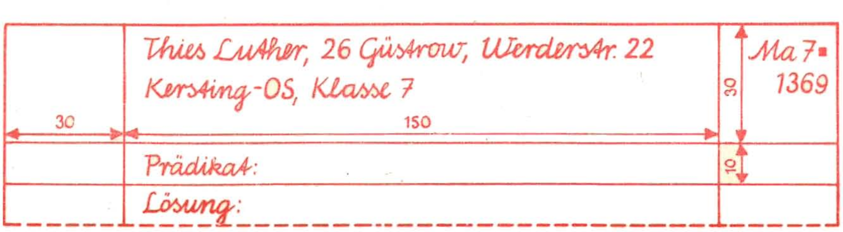
Schüler Frank Oswald, Radeberg, Erich-Weinert-OS

Ma 5 ▪1502 Von einer Altstoffsammelstelle wurden 60 Kisten mit je 42 Gläsern und 10 Kisten weniger mit je 49 Gläsern abgeholt. Auf dem Transport ging der siebzigste Teil der Gläser entzwei. Wie viele Gläser konnten der Glasindustrie nur als Bruchglas zugeführt werden?

Schülerin Carola Görtz, Wurbis

Ma 6 ▪1503 Erika hat sich eine dreistellige natürliche Zahl gedacht, die kleiner als 400 ist und folgende Eigenschaften besitzt:
a) Ihre zweite Ziffer ist um 1 größer als ihre erste Ziffer.
b) Die dritte Ziffer ist gleich dem Zweifachen der ersten Ziffer.
c) Die Hälfte der gedachten Zahl ist gleich einer Primzahl.
Welche Zahlen könnte Erika sich gedacht haben? *AG Junge Mathematiker, 5. OS Zittau*

Ma 6 ▪1504 In einem Korb befanden sich Äpfel und Birnen. Ralf entnahm diesem Korb sechs Früchte. Danach enthielt der Korb zehn Äpfel mehr als Birnen. Ralf meinte, im Korb hätten ursprünglich 29 Früchte gelegen.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Bärbel hingegen behauptete, das könne nicht stimmen. Wer von den beiden hat recht?

Kerstin Steinborn, Lübtheen

Ma 6 ▪1505 Ein Flugzeug fliegt vom Flughafen A zum 1 800 km entfernten Flughafen B. Das Flugzeug legt $\frac{3}{4}$ der Flugstrecke mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit setzte das Flugzeug den Flug fort, wenn es für die gesamte Flugstrecke eine Zeit von 2 Stunden und 6 Minuten benötigte?

Jörg Bruchertseifer, Dubna, UdSSR

Ma 6 ▪1506 Bei einem Sportfest errang Ursula mehr als 1450 Punkte, aber weniger als 1500 Punkte. Sabine errang $\frac{5}{6}$, Petra $\frac{6}{7}$ der Anzahl der von Ursula erreichten Punkte. Wieviel Punkte errang jede dieser Schülerinnen, wenn nur ganzzahlige Punktzahlen vergeben wurden?

Ines Schulze, Milmersdorf

Ma 6 ▪1507 Es ist sowohl die kleinste als auch die größte natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 36 teilbar ist und in der Form 8*42** dargestellt werden kann. Für die Sternchen sind Grundziffern einzusetzen.

Andreas Fittke, Berlin

Ph 6 ▪1508 Gold besitzt die Eigenschaft, daß es sehr dünn ausgewalzt werden kann. *Blattgold* ist nur ungefähr $\frac{1}{9000}$ mm dick. Welche Masse an Gold braucht man für 1 m² Blattgold $\left(\varrho = 19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

Ma 7 ▪1509 Läßt sich ein 25-Rubel-Schein so in 5-, 3- und 1-Rubel-Scheine wechseln, daß man insgesamt zehn Geldscheine, und zwar von jeder Sorte wenigstens einen erhält?

Schülerin Cordula Becker, Moskau (nach einer Aufgabe aus der Sowjetunion)

Ma 7 ▪1510 Zwei Kunden, die zufällig gleiche Geldbeträge in ihren Geldbörsen haben, treffen sich in einem Fachgeschäft für Weine. Der erste Kunde kauft Wein zum Preise von 5,60 M je Flasche; ihm verbleiben nach Bezahlung der Rechnung noch 4,00 M vom mitgeführten Geldbetrag. Der zweite Kunde kauft Wein zum Preise von 4,80 M je Flasche; ihm verbleiben nach dem Begleichen der Rechnung noch 2,40 M. Der erste dieser beiden Kunden hat zwei Flaschen Wein weniger erstanden als der zweite. Wieviel Flaschen Wein wurden von jedem dieser Kunden gekauft? Welchen Geldbetrag führten sie mit sich?

Lehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 7 ▪1511 Eine Brigade einer LPG sollte ein Feld in 14 Tagen bestellen. Sie übererfüllte diese Planvorgabe täglich um 2 ha und beendete die Aussaat bereits nach 10 Tagen. Wieviel Hektar wurden von dieser Brigade insgesamt bestellt? Wieviel Hektar sollten täglich nach Plan bestellt werden?

Lehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 7 ▪1512 Die Bewohner eines Mietshauses hatten laut Mietvertrag die Kosten für die Zentralheizung selber zu tragen.
Würde jede Person des Hauses 10,00 M bezahlen, so wären 88,00 M der Heizkosten nicht gedeckt. Würde hingegen jede Person 10,80 M zahlen, so würden 2,5% mehr Geld vereinnahmt werden, als erforderlich wäre. Wieviel Personen wohnen in diesem Haus? Wie hoch sind die gesamten Heizkosten?

Lehrer Dieter Knape, Jessen

Schneller, Jungs, sonst kommen wir nie hoch!

Ph 7 ▪1513 Eine Erdgasquelle drückt in einer Stunde 15000 m³ Gas von 1,8 at in die Leitung. Wieviel m³ verliert das Innere der Quelle, wenn diese unter einem Druck von 75 at steht?

Ch 7 ▪1514 0,3 g Magnesium werden in einem Tiegel verbrannt. Wie groß ist die Masse des entstandenen Magnesiumoxids?

Oberstudienrat Dr. paed. R. Osterwald, EOS A.-H. Francke, Halle

Ma 8 ▪1515 Es seien a, b, c drei rationale Zahlen, von denen eine positiv, eine negativ und eine gleich Null ist. Ferner sei

$$\frac{a(c-b)}{b} > 0.$$

Welche von diesen drei rationalen Zahlen ist positiv, welche negativ und welche gleich Null? *Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪1516 Es sei ΔABC ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\sphericalangle CAB = \alpha > 90°$. Ferner seien $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ die von den Eckpunkten B bzw. C ausgehenden Höhen dieses Dreiecks. Die Geraden BE und CF (also die Verlängerungen der beiden Höhen) mögen sich im Punkt S schneiden. Es ist zu beweisen, daß dann der Winkel $\sphericalangle CSB$ zwischen diesen Geraden gleich der Summe der beiden spitzen Winkel des Dreiecks ist.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1517 Es sind alle Primzahlen p und q zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Unter den vier Zahlen 18, p, $p+q$, pq gibt es zwei, deren Produkt gleich dem Produkt der anderen beiden Zahlen ist.

Frank Bergner, Großenhain, 10. Kl.

Ma 8 ▪1518 a) Auf einem Tisch liegen zwei 5-Mark-Stücke, die sich gegenseitig berühren und bei denen in beiden Fällen die Ziffer 5 aufrecht steht (siehe Bild 1). Wie wird die Ziffer des oberen Geldstückes stehen, wenn dieses, ohne zu gleiten, auf dem unteren Geldstück abrollt und nach einem vollen Umlauf um dieses Geldstück wieder genau über dem unteren Geldstück liegt?

Bild 1

Bild 2

b) Es soll die entsprechende Aufgabe gelöst werden, wenn ein 5-Pfennig-Stück über einem 5-Mark-Stück liegt, dieses 5-Pfennig-Stück auf dem unteren Geldstück abrollt und nach einem vollen Umlauf wieder genau über dem unteren Geldstück liegt (siehe Bild 2).
Bemerkung: Der Durchmesser eines 5-Mark-Stückes beträgt 29 mm, der Durchmesser eines 5-Pfennig-Stückes 19 mm. *L.*

Ph 8 ▪1519 Von einer Steckdose, an der eine Spannung von 220 Volt gemessen wird, führt eine 2 mm dicke und 25 m lange Aluminiumleitung zu einem Kochherd, der eine Stromstärke von 12 A aufnimmt. Welche Spannung liegt am Kochherd? *H. Begander, Leipzig*

„...möchte bloß mal wissen, wo der ganze Gips bleibt!“

Ch 8 ▪1520 Es sei bekannt, daß 60 cm^3 eines Stoffes eine Masse von 90 g besitzen. Welches Volumen nehmen dann 150 g desselben Stoffes ein?

Ma 9 ▪1521 Man beweise den folgenden Satz:
Ist die Summe zweier Quotienten von rationalen Zahlen, die von Null verschieden sind, gleich 1, so erhält man die Summe der reziproken Werte dieser Quotienten, indem man das Produkt der beiden Divisoren durch das Produkt der beiden Dividenden dividiert. Für alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen a, b, c, d gilt also:

Wenn $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$, so $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1522 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$, wobei $a \neq b$ ist. Ferner seien die Seiten $\overline{AB}$ über B hinaus bis zum Punkt E, $\overline{BC}$ über C hinaus bis zum Punkt F, $\overline{CD}$ über D hinaus bis zum Punkt G, $\overline{DA}$ über A hinaus bis zum Punkt H so verlängert, daß $\overline{AB}=\overline{BE}$, $\overline{BC}=\overline{CF}$, $\overline{CD}=\overline{DG}$, $\overline{DA}=\overline{AH}$ gilt.
1. Man entscheide, ob dann das Viereck $EFGH$
a) ein Parallelogramm,
b) ein Rhombus,
c) ein Quadrat ist.
2. Man berechne das Verhältnis aus dem Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ und dem Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1523 Es sind alle natürlichen Zahlen x, y, z mit $x \leqq y \leqq z$ zu ermitteln, für die die Gleichungen

$$x+y+z=46 \qquad (1)$$

und

$$xyz=3060 \qquad (2)$$

erfüllt sind.

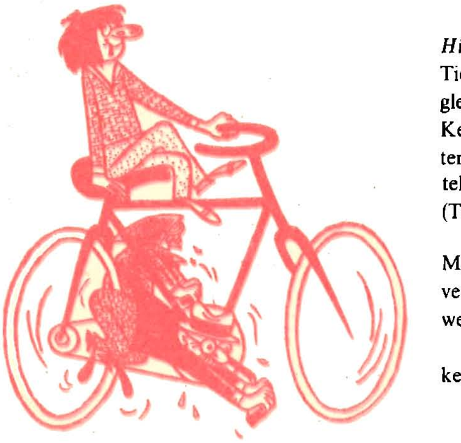
Thomas Bienek, OS Schwepnitz, Kl. 8

Ma 9 ▪1524 Welchen Rest läßt die Zahl

$$7^{1975}+7^{1976}$$

bei der Division durch 588?

Olaf Raeke, OS V. Neubrandenburg, Kl. 9



Ph 8 ▪1525 Eine Granate mit einer Masse von 5 kg verläßt den Lauf des Geschützrohres mit einer Geschwindigkeit von $1200\ m \cdot s^{-1}$.
Berechnen Sie die auf die Granate wirkende Kraft im Lauf des Geschützrohres, wenn dort die gleichförmige Beschleunigung 0,01 s dauerte! Welche Arbeit wurde dabei erforderlich?

H. Begander, Leipzig

Ch 9 ▪1526 In einem Kaliwerk werden täglich 2300 kg Brom als Nebenprodukt gewonnen. Das Brom ist im Kalirohsalz zu 0,1 % enthalten. Wieviel Tonnen Rohsalz müssen demnach täglich mindestens gefördert werden?

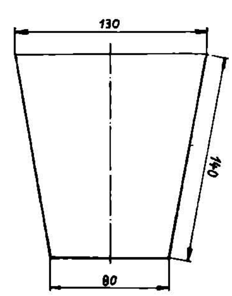
L. L.

Ma 10/12 ▪1527 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a

$0{,}35-(a-3{,}5)(4{,}5-a)>0$ gilt.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ▪1528 Ein offener Blechbehälter, der die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes und die in der Abbildung angegebenen Maße (in mm) hat, soll durch Tiefziehen aus einer kreisförmigen Blechscheibe (Platine) hergestellt werden.
a) Wie groß ist der Durchmesser der Blechscheibe (Platine)?
b) Wie groß ist das Volumen des Blechbehälters?
c) Es soll eine allgemeine Formel für die Berechnung des Platinendurchmessers aus d_1, d_2 und s angegeben werden, wobei
d_1 der Durchmesser der Grundfläche,
d_2 der Durchmesser der Deckfläche,
s die Mantellinie des Kegelstumpfes ist.



Hinweis zur Lösung: Man beachte, daß beim Tiefziehen der Flächeninhalt der Platine gleich dem Oberflächeninhalt des offenen Kegelstumpfes ist, und benutze die bekannten Formeln für die Grundfläche, den Mantel und das Volumen des Kegelstumpfes (Tabellen und Formeln, S. 34).

L.

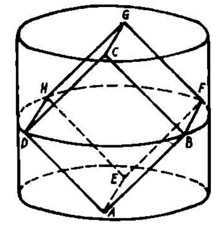
Ma 10/12 ▪1529 Es seien a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen. Man beweise, daß die Gleichung

$$a^{2x}+(ab)^x=b^{2x}$$

keine ganzzahlige Lösung x hat.

Hans-Reinhard Berger, stud. phys., Hohenstein-Ernstthal

Ma 10/12 ▪1530 Einem Würfel mit der Kantenlänge a sei ein gerader Kreiszylinder so umbeschrieben, daß genau eine Kante des Würfels in der Grundfläche, genau eine Kante in der Deckfläche des Zylinders liegt und daß alle anderen nicht auf diesen Kanten liegenden Eckpunkte des Würfels auf dem Mantel des Zylinders liegen (siehe Bild).



a) Man berechne den Radius, die Höhe und das Volumen des Zylinders aus der Kantenlänge a des Würfels.
b) Wie verhält sich das Volumen des umbeschriebenen Zylinders zu dem Volumen des Würfels?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ph 10/12 ▪1531 An dem Seil eines Kranes hängt ein Bauteil und gerät in Schwingungen. Der Weg von links nach rechts ist 3 m, und er wird in 5 s zurückgelegt.
a) Berechnen Sie die Länge des Seils!
b) Berechnen Sie die Elongationen nach 2 s bzw. 5,1 min!

H. Begander, Leipzig

Ch 10/12 ▪1532 Wieviel m^3 SO_3 (Normzustand) können theoretisch durch Verarbeiten von 3 t Pyrit (Rösten, kat. Oxydation) hergestellt werden?

Oberlehrer Ing. H. Pelka, Leipzig

Achtung – alpha-Wettbewerb

Zur Erleichterung der Arbeit der Redaktion *alpha* bitten wir AGs, Zirkel, Klubs, Schulkollektive, *keine* Antwortkarten zwischen dem 1. und 10. September 1976 einzusenden. Wir erbitten *eine Liste* (mit Schulstempel) mit:
Name, Vorname, Wohnort, Anzahl der abgegebenen Antwortkarten (1975/76), Teilnahme am Wettbewerb (1 Jahr, 2 Jahre usw.) der einzelnen Teilnehmer des Kollektivs. Geschwister senden ihre Antwortkarten *getrennt* ein.

Berufsbild Bauzeichner

Du gehst deine gewohnten Wege in der Stadt, siehst die vertrauten Bilder, ihre Alltäglichkeiten: auch die des Bauens. Die Stadt aus Stein, Glas, Stahl und Beton erzählt von ihren Erbauern und Bewohnern.

Die zwanzigjährige *Ute Krenz* ist beides. Als sie vor der Wahl stand, ob dieser oder jener Beruf, entschied sie sich fürs Bauzeichnen.

Auch du stehst vor Hunderten von Berufen. Welchen wählst du? Warum? Ute wollte Freude an ihrer Arbeit haben, sehen können, was aus ihren Mühen wird, mitmachen an den großen Veränderungen, unseres gesellschaftlichen Erbes und ein Kapitel Selbständigkeit bringen.

Was ist aus ihren Wünschen geworden? Als sie noch Schülerin war, lernte sie durch die Patenbrigade der Klasse eine Projektierungsabteilung des *VEB BMK Ingenieurhochbau Berlin* kennen. Sie durfte in den Ferien an einer Zeichenmaschine arbeiten, mit Feder und Tusche einen Zementsilo aufs Transparentpapier bringen. Das brachte sie gehörig ins Schwitzen.

Eine äußerst komplizierte Sache, damals. Sie hatte sogar ein bißchen Angst vor der Exaktheit dieser Tätigkeit bekommen.

Dann begann die Lehre: Statik, Bauphysik, Baukonstruktion, Projektionslehre, Fachkunde, BMSR, Datenverarbeitung, Elektronik... und mit der Zeit und der Übung kam das Können. Heute arbeitet sie selbständig an kleinen oder großen Bauzeichnungen und ist jedesmal stolz, wenn sie wieder eine Zeichnung tipp topp fertig hat. Während der Lehrzeit können die zukünftigen Bauzeichner entscheiden, in welche Richtung sie sich spezialisieren wollen: Wohnungsbau oder Industriebau? Ute zog den letzteren vor. Auch hier sind die vielfältigsten Möglichkeiten gegeben, angefangen von Rationalisierungsobjekten für die Industrie oder Bauvorhaben, Turn- und Schwimmhallen, Heizkraftwerke und ich weiß nicht, was noch alles. Künftig werden immer größere und interessantere Objekte projektiert und gebaut.

Dabei hilft Ute mit ihrer Arbeit als Bauzeichner. Ein wichtiger und notwendiger Beruf. Soll beispielsweise eine Turnhalle entstehen, übersetzt sie die in Form von Freihandskizzen festgehaltenen Gedanken der Ingenieure und Architekten in die technische Zeichnung. Damit schafft Ute das Verständigungsmittel zwischen dem Konstrukteur und der Baustelle. Genau und sauber arbeiten, darauf kommt es an, denn in der Bauausführung darf kein Fehler entstehen.

Eine Bauzeichnerin trägt dabei viel Verantwortung. Nach ihrer Zeichnung arbeiten die Bauleiter, Meister und Baufacharbeiter. Nach ihren Zeichnungen verändert sich das Gesicht der Stadt. Im zweiten Jahr der berufspraktischen Ausbildung lernte sie in der Projektierungsabteilung, in der sie heute arbeitet. Ute hatte bereits in der Lehre größere komplexe Zeichnungen wie Grundrisse, Schnitte, Fundamentalpläne usw. gefertigt. Durch diese Form der Ausbildung ist gesichert, daß die künftigen Bauzeichner innerhalb einer kurzen Einarbeitungszeit in der Projektierungsbrigade „zu Hause" sind, ohne große Anfangsschwierigkeiten zu haben. Nach erfolgreichem Abschluß der Berufsausbildung bestehen für Bauzeichner unterschiedliche Einsatz- und Entwicklungsmöglichkeiten.

So kann man sich beispielsweise nach zweijähriger beruflicher Tätigkeit an der Betriebsakademie bewerben und Teilkonstrukteur werden oder an der Fachschule für Bauwesen ein Ingenieurstudium aufnehmen.

Wie du siehst, werden deine eventuellen Neigungen für ein spezielles Gebiet weitgehend berücksichtigt.

Ute weiß vom Wert ihrer Arbeit, die die Grundlage für neue Gebäude ist.

Geht sie durch die Stadt, sieht sie nicht nur die vertrauten Bilder.

Als die Weltfestspiele vor der Tür standen, zeichnete sie schon lange vorher die Festivalgaststätten. Lange bevor du ahnen konntest, daß es so etwas geben wird. „Es ist schön, der Zeit voraus zu sein", meint Ute, „so erlebe ich archektonische Veränderungen unserer Stadt in meinen Vorstellungen und sehe sie Wirklichkeit werden."

Silvia Stein, aus technikus 5/75

Bauzeichnerin *Ute Krenz*

Technische Zeichnerin *Karla Lippold*, VEB Stahlgießerei „Elstertal", Silbitz

Der *Thälmann-Platz* in Halle mit der 350 m langen Hochstraße

Zwei verwandte geometrische Aufgaben

Die nachstehende leicht zu formulierende Kreisaufgabe erweist sich bei der Lösung als recht aufwendig, weil sie auf eine transzendente Gleichung führt. Es sei ein beliebiger Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Ein beliebiger Punkt P seiner Peripherie werde zum Mittelpunkt eines größeren Kreises gemacht, dessen Radius so zu bestimmen ist, daß der außerhalb des gegebenen Kreises gelegene Teil der Fläche dieses größeren Kreises ebenso groß ausfällt wie die gesamte Fläche des gegebenen. Man ermittle das hierzu notwendige Radienverhältnis $\lambda = \frac{\varrho}{r} (> 1)$.

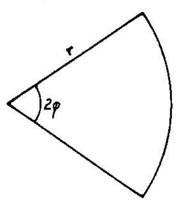


Bild 1 $\quad A_{Sekt} = \phi r^2$

Unter Berücksichtigung der Inhaltsformel für Kreissektoren (Bild 1) $A_{Sekt} = \phi r^2$ (r = Kreisradius, 2ϕ = Öffnungswinkel des Sektors; ϕ bedeutet das Bogenmaß, außer wenn gelegentlich eine numerische Angabe im Gradmaß gemacht wird) ergibt sich aus der geforderten Flächengleichheit entsprechend Bild 2 der Ansatz

$$\pi r^2 = \pi \varrho^2 - \phi \varrho^2 - \phi r^2 + r^2 \sin\phi, \qquad (*)$$

wobei das Viereck $PAMB$, weil es Bestandteil beider Kreissektoren ist, doppelt abgezogen

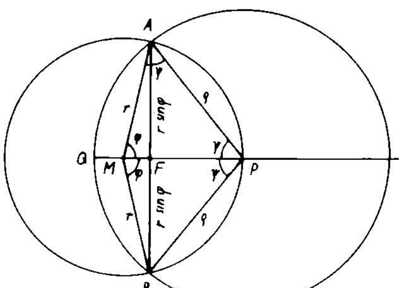


Bild 2 $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MP} = r$

$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PQ} = \varrho$

$\overline{AF} = \overline{BF} = r \sin\phi$

$A_{Sekt(M,\,2\phi)} = \phi r^2$

$A_{Sekt(P,\,2\psi)} = \psi \varrho^2$

$A_{\square PAMB} = r \cdot r \sin\phi = r^2 \sin\phi$

wird, also einmal wieder hinzugefügt werden muß. Im gleichschenkligen Dreieck MPA gilt für die Basiswinkel $\overline{\sphericalangle APM} = \overline{\sphericalangle PAM} = \phi$, so daß aus dem Dreieck MPA folgt:

$2\psi + \phi = \pi$ oder $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$. Wird dieser Wert in (*) eingesetzt, gleichzeitig (*) beiderseits durch r^2 dividiert und passend zusammengefaßt, so hat man zunächst

$\pi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2}\right)\lambda^2 - \phi + \sin\phi$. Nun gilt

$$\sin\frac{\phi}{2} = \frac{\varrho}{2} : r = \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \lambda = 2\sin\frac{\phi}{2} \qquad (**).$$

Einsetzen in die vorige Gleichung liefert

$\pi = 2(\pi + \phi)\sin^2\frac{\phi}{2} - \phi + \sin\phi$ oder

$(\pi + \phi)\left(1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}\right) = \sin\phi$.

Berücksichtigt man noch $1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2} = \cos\phi$ und dividiert nach dem Einsetzen beiderseits durch $\cos\phi$, so ergibt sich für die Variable ϕ die transzendente Gleichung

$$\tan\phi = \pi + \phi, \qquad (\square)$$

die ihren Namen deshalb trägt, weil in ihr die transzendente Funktion *Tangens* vorkommt. Ein geeignetes Verfahren zu ihrer Lösung, nämlich das der *schrittweisen Näherung*, wird durch die Betrachtung folgender Skizze

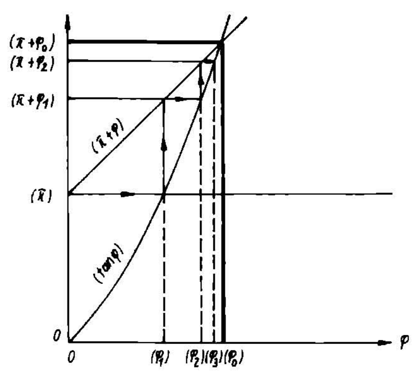


Bild 3

Da eine maßstabstreue Figur wenig anschaulich wirkt, wurde diese Prinzipskizze vorgezogen, die das Verfahren der *schrittweisen* Näherung gut verdeutlicht. Die Graphen stimmen im Prinzip mit den Beschriftungen überein. Wegen der numerischen Verschiedenheiten stehen letztere in Klammern.

(Bild 3) nahegelegt, in welcher die Graphen der beiden Funktionen $f(\phi) = \pi + \phi$ und $g(\phi) = \tan\phi$ angedeutet sind. Der gesuchte Lösungswert ϕ_0 wird offenbar durch die Abszisse des Schnittpunktes der Graphen von f und g geliefert. Dieser Wert kann schnell mit jeder verlangten Genauigkeit gewonnen werden, wenn man im Sinne der schrittweisen Näherung wie folgt vorgeht, wobei eine passende Tafel zu verwenden ist:

Zuerst wird ϕ_1 aus der Bedingung $\tan\phi_1 = \pi$ ermittelt, sodann ϕ_2 aus der Bedingung $\tan\phi_2 = \pi + \phi_1$, danach ϕ_3 aus $\tan\phi_3 = \pi + \phi_2$, usw. Wird in dieser Weise fortgefahren, bis die Werte von ϕ auf beiden Seiten im Rahmen der zugrundegelegten Stellenzahl übereinstimmen, so ist ϕ_0 so genau wie jeweils gewünscht angenähert.

Der eigentlich zu ermittelnde Wert von λ folgt dann aus (+) zu $\lambda_0 = 2\sin\frac{\phi_0}{2}$. In nachstehender Übersicht sind die Näherungsschritte zusammengestellt. Dabei wurde die Genauigkeit so gewählt, daß ein einwandfreier Vergleich mit dem Ergebnis der (anschließend dargelegten) zweiten Aufgabe möglich ist.

$\tan\phi_1 = \pi$; $\phi_1 = 72{,}343° \mathrel{\hat{=}} 1{,}26262$;

$\pi + \phi_1 = 4{,}40421$;

$\tan\phi_2 = 4{,}4042$; $\phi_2 = 77{,}208° \mathrel{\hat{=}} 1{,}34753$;

$\pi + \phi_2 = 4{,}48912$;

$\tan\phi_3 = 4{,}4891$; $\phi_3 = 77{,}442° \mathrel{\hat{=}} 1{,}35161$;

$\pi + \phi_3 = 4{,}49320$;

$\tan\phi_4 = 4{,}4932$; $\phi_4 = 77{,}453° \mathrel{\hat{=}} 1{,}35180$;

$\pi + \phi_4 = 4{,}49339$;

$\tan\phi_5 = 4{,}4934$; $\phi_5 \mathrel{\hat{=}} 77{,}453° = \phi_0$.

$\lambda_0 = 2\sin\frac{\phi_0}{2} = 2 \cdot 0{,}62561$ und

$\lambda_0 = 1{,}25122$.

Da eine allgemeine Begründung des Verfahrens der schrittweisen Näherung hier zu weitläufig wäre, soll stattdessen auf andere Art die Existenz einer Lösung im angegebenen Bereich von ϕ nachgewiesen werden:

Man findet für die stetige und monoton wachsende Funktion $h(\phi) = \tan\phi - (\pi + \phi)$ mit Hilfe von Tafelwerten $h(77{,}4°) = -0{,}01873$ und $h(77{,}5°) = 0{,}01659$ und entnimmt daraus, daß nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle ϕ_0 existieren und die Ungleichung $77{,}4° < \phi_0 < 77{,}5°$ befriedigen muß. Nach der bekannten regula falsi ergibt sich daher

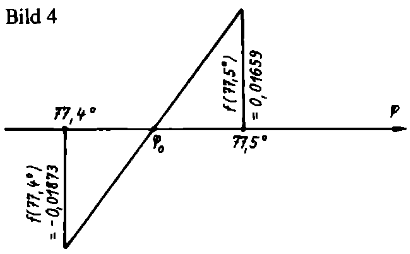
$$\frac{\phi_0 - 77{,}4°}{77{,}5° - 77{,}4°} = \frac{0{,}01873}{0{,}01873 + 0{,}01659} = 0{,}53029,$$

also

$\phi_0 = 77{,}4° + 0{,}53029 \cdot 0{,}1° = 77{,}453°$.

Damit ist nicht nur die Existenz einer Nullstelle von $h(\phi)$ im angegebenen Bereich bewiesen, sondern zugleich der vorher erhaltene numerische Wert von ϕ_0 bestätigt worden (Bild 4). Die soeben gelöste Aufgabe steht in gewisser Beziehung zu einer anderen, deren Lösungsansatz nicht mehr so elementar wie in der ersten aufgestellt werden kann, obwohl die Fragestellung besonders einfach und anschaulich geschildert werden kann:

Bild 4



Auf einer Wiese steht ein kreisrunder Turm vom Radius r. Im Randpunkt P des Turmes ist mit einem Strick der Länge $\overline{PQ}$ eine Ziege angepflockt. Wie lang ist $\overline{PQ}$ zu wählen, damit der der Ziege zum Abweiden zugängliche Teil der Wiese ebenso groß ausfällt wie der Querschnitt des Turmes?

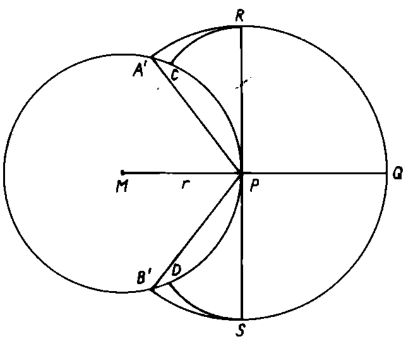


Bild 5 $\overline{PA'}=\overline{PB'}=\overline{PR}=\overline{PS}=\overline{PQ}$
$\overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PQ}$

Ein Vergleich mit der vorigen Fragestellung zeigt (Bild 5), daß der in der Figur rechts von der Tangente in P gelegene Halbkreis vom Radius $\overline{PQ}$ gegenüber dem entsprechenden Halbkreis der vorigen Aufgabe keinen Unterschied aufweist, daß aber der auf der anderen Seite der Tangente gelegene Teil der *Weidefigur* nicht mehr Teilstück eines Kreises vom Radius $\overline{PQ}$ ist, weil sich der Strick dort an den Grundkreis des Turmes anlegt, so daß nicht die Punkte A' und B', sondern nur die näher bei P gelegenen Punkte C und D erreichbar sind.

Für die exakte Berechnung der abgeweideten Fläche sind die Hilfsmittel der Integralrechnung erforderlich, so daß sie hier nicht gezeigt werden kann. Man erkennt aber anschaulich, daß $\overline{PQ}$ ein wenig größer als der Wert von ϱ in der ersten Aufgabe sein muß. Wäre nämlich $\overline{PQ}=\varrho$, so würde das Fehlen der Flächen der beiden gebogenen spitzen Figuren $A'RC$ und $B'SD$ die vorher bestehende Flächengleichheit aufheben. Gerade um diese (offenbar kleinen) Flächen auszugleichen, muß $\overline{PQ}>\varrho$ genommen werden.

Allerdings wird man auf Grund der Anschauung vermuten dürfen, daß der Unterschied vergleichsweise nur klein zu sein braucht, um die Flächengleichheit wieder herzustellen. Trotzdem ist es auf den ersten Blick erstaunlich, wie gering in Wahrheit der Unterschied ist. Setzt man nämlich analog zur ersten Aufgabe für das Vergrößerungsverhältnis $\mu=\frac{\overline{PQ}}{r}$ an, so folgt aus der hier unterdrückten Rechnung, daß μ einer kubischen Gleichung genügen muß, die man zweckmäßig in der Form schreibt

$$\frac{1}{3\pi}\mu^3+\frac{1}{2}\mu^2-1=0.$$

Als hier allein interessierende Lösung findet man $\mu_0=1{,}25657$, also einen gegenüber λ_0 nur um 0,00535 vergrößerten Wert, so daß der Unterschied sich sogar in einer relativ groß angelegten Figur nicht gut verdeutlichen läßt. Deshalb wurde hier auf diesen (zeichnerischen) Vergleich verzichtet. Die beiden anderen Lösungen sind negativ.

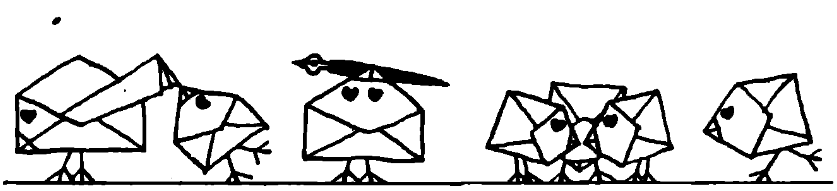
Etwas besser dagegen tritt der Lageunterschied zwischen den Punkten A' und C (bzw. B' und D) hervor, der durch den Unterschied zwischen den Sehnen PA' (bzw. PB') und den Bogen $\overset{\frown}{PC}$ (bzw. $\overset{\frown}{PD}$) entsteht.

Insgesamt läßt sich sagen: Man kann den aus einer transzendenten Gleichung berechneten Wert λ_0 als einen recht brauchbaren Näherungswert für den aus einer kubischen Gleichung (allerdings mit transzendenten Koeffizienten) gewonnenen Wert μ_0 ansehen. Wesentlich ist dabei der Umstand, daß durch den Näherungswert die Anwendung der Integralrechnung erspart wird.

Dieses instruktive Wechselverhältnis zwischen zwei prinzipiell verschiedenen, aber praktisch verwandten Aufgaben mit numerisch annähernd übereinstimmenden Lösungen dürfte ein gewisses Interesse beanspruchen können.

H. Karl

Wenige Tage nach der Übergabe dieses Beitrags erhielten wir die schmerzliche Nachricht, daß unser Redaktionsmitglied *Prof. Dr. H. Karl* verstorben ist. Er war uns allen seit Gründung der Zeitschrift ein aktiver Freund und Helfer. Wir werden ihm ein ehrendes Gedenken bewahren.
Das Redaktionskollegium alpha



Leser schreiben an alpha

▪ ... Als Zirkelleiter der Mathe-AG (Kl. 6/8) unserer Schule regte ich die Teilnehmer an, sich mit den Aufgaben zu beschäftigen. Nahm bisher nur ein Schüler am *alpha*-Wettbewerb teil, sind es jetzt bereits 10 AG-Mitglieder. Die Wettbewerbsaufgaben, aber auch einige Beiträge der *alpha* trugen zur besseren Gestaltung der Zirkel und unserer monatlichen Mathematikwandzeitung bei. Vielleicht können wir bald einmal selbst erdachte Aufgaben an *alpha* einsenden... *Renate Kutschank, AG-Leiter an der OS Deutschenbora*

▪ ... Mich interessieren besonders Beiträge, die die Verbindung zwischen Mathematik und gesellschaftlicher Praxis aufzeigen. Deshalb habe ich mich auch gefreut, daß neben Mathematik- jetzt auch Physik- und Chemieaufgaben in den Wettbewerb aufgenommen wurden... *Rolf Wendler, Sömmerda (Kl. 12)*

▪ ... Mit großer Spannung erwarten unsere Schüler jedesmal Dein Erscheinen, liebe *alpha*. Insbesondere erwartet Dich der Wandzeitungsredakteur unserer AG Mathe. Die Mitglieder der AG haben sich unter anderem die Aufgabe gestellt, allen Schülern unserer Schule die Aufgaben des Wettbewerbs zugänglich zu machen. Abos und Teilnahme am Wettbewerb sind gestiegen. Liebe *alpha*! Du bist mir bei einer interessanten Gestaltung der AG ein guter Freund und Helfer! Dafür danke ich Dir ganz herlich... *Ilse Wille, Fachl. f. Mathe H.-Eisler-OS Wusterhusen*

▪ ... Schon als Schülerin der 5. Klasse nahm ich am Wettbewerb teil. Es freut mich immer, solche schöne und spannende Aufgaben zu lösen. Noch größer ist die Spannung, wenn die Antwortkarten eintreffen. In diesem Schuljahr nehme ich selbstverständlich wieder am Wettbewerb teil. *Silke Gabriel, Wismar (Kl. 6)*

▪ ... *alpha* ist einfach Klasse. Besonders interessant war das „Kleine Mathematik-Sprachlexikon". Auch mein Vati löst gern in der *alpha*... Weiter so viele Aufgaben!... *B. Domaschke, Seifhennersdorf (Kl. 7)*

▪ ... Ich komme aus der Demokratischen Republik Vietnam und lerne z. Z. am Herder-Institut in Leipzig Deutsch. Heute kaufte ich erstmals die *alpha*. Sie ist für mich sehr interessant. Darf ich am Wettbewerb teilnehmen? *Lê tuyên Ibnân*

Lieber Freund! Wir freuen uns auf Deine Teilnahme am Wettbewerb. Im vergangenen Schuljahr gingen 402 Lösungen aus dem Ausland ein. Red. *alpha*

aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht

Aufgaben speziell für Klassen 4 bis 6

alpha-Wandzeitung

Klasse 4

▲1▲ Die letzten zwei Ziffern einer dreistelligen Zahl sind Nullen.
Nenne Teiler dieser Zahl!

▲2▲ Man weiß, daß sowohl x als auch y durch $z (z \neq 0)$ teilbar sind.
Was kann man über die Teilbarkeit der Summe $(x+y)$, der Differenz $(x-y)$ bzw. des Produktes $(x \cdot y)$ aussagen?

▲3▲ Es sind zwei Geraden gegeben, die einander schneiden. Kann man eine dritte Gerade so zeichnen, daß insgesamt
a) drei Schnittpunkte vorhanden sind,
b) zwei Schnittpunkte vorhanden sind,
c) ein Schnittpunkt vorhanden ist,
d) mehr als 3 Schnittpunkte vorhanden sind?

▲4▲ Gegeben ist das Dreieck ABC.
Um was für Dreiecke handelt es sich?
$\overline{AB}=\overline{BC}+\overline{CA}$; $\quad \overline{AB}>\overline{BC}=\overline{CA}$
$\overline{AB}<\overline{BC}=\overline{CA}$; $\quad \overline{AB}<\overline{BC}<\overline{CA}$
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$.

▲5▲ Fülle die Tabelle vollständig aus!

x	y	$z=x-y$	$875-z$
105	23		
	97	129	
	11		832

▲6▲ Welche Vielfachen von 1000 erfüllen die Ungleichung
$$2000+k<5000?$$

▲7▲ Untersuche, nach welcher Vorschrift die angefangenen Folgen gebildet sein könnten:
7, 9, 11, 13, ..., ..., ..., ...,
27, 30, 33, 36,
27, 53, 79, 105,
198, 180, 162, 144,
100, 90, 81, 73,
100, 81, 64, 49!

▲8▲
```
4042 : 8* = 4*        48* · 7 = **16
344
 602
 602
  ./.
```

▲9▲ Eine Fußballmannschaft gewann dreimal so viele Spiele als sie verlor. Vier Spiele verliefen unentschieden. Sie trug insgesamt 28 Spiele aus.
Wieviel Spiele gewann diese Mannschaft?

▲10▲ Bestimme z!
$10^3+z \quad =10^4$
$z-7 \cdot 10^1=10^3$
$z \cdot 10^4 \quad =2 \cdot 10^5$
$10^6 : z \quad =5 \cdot 10^5$

▲11▲ A und B haben zusammen 10 Mark, A und C zusammen 19 Mark, B und C zusammen 23 Mark in ihren Geldbörsen.
Wieviel Mark hat jeder bei sich?

▲12▲ Löse diese Ungleichungen!
$622589+c<622593 \qquad 83<28 \cdot x<141$
$100003-d>99998 \qquad 74>650 : x>64$

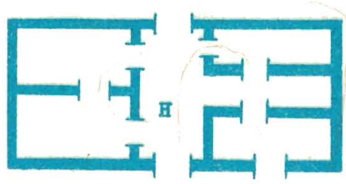
Klasse 5

▲1▲ Nach einem Mathematikwettbewerb wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft antwortete er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100.“

▲2▲ Wie viele Möglichkeiten hat RITA, die Buchstaben ihres Namens in allen möglichen Reihenfolgen zu schreiben? Schreibe sie auf!

▲3▲
```
154*5* : **7 = 2**        ABA · BB
***4                      --------
----                           BCB
 2675                          BCB
 ****                     --------
 ----                         BDDB
  ****
  ****
  ----
     0
```

▲4▲ Du siehst den Grundriß eines Fabrikgebäudes. Vom Hofe H aus soll der Nachtwächter durch alle Tore genau einmal gehen und hinter sich abschließen.
Ist das möglich? Wenn ja, wo endet der Rundgang?



▲5▲ Setze für o jeweils ein Rechenzeichen so ein, daß wahre Aussagen entstehen! Gibt es mehrere Möglichkeiten?
a) $35 o 10 o 7=52$ d) $10 o 0 o 1=0$
b) $25 o 25 o 0=50$ e) $42 o 42=1$
c) $(19 o 1) o (0 \cdot 19)=0$

▲6▲ Welche natürliche Zahlen x erfüllen nachfolgende Ungleichungen?
a) $6x<19$ c) $30<x+7 \leqq 54$
b) $x+18>29$ d) $50 \leqq 7x-2 \leqq 54$
e) $40>14x+1>30$

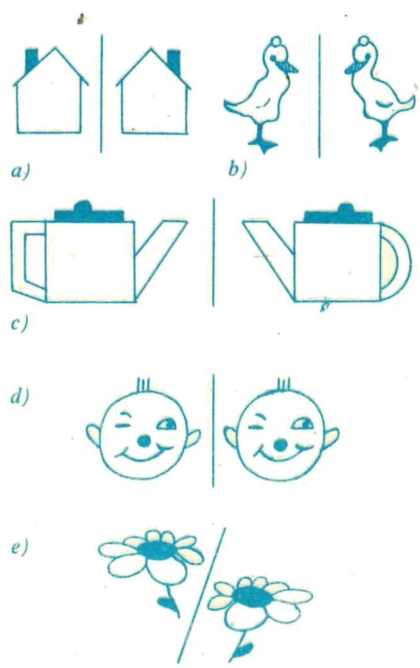
▲7▲ Für alle natürlichen Zahlen x gilt:
$x * 0=0 \qquad x ** =1$
$0 * x=x \qquad x * x>x$
$x * 1=1$

▲8▲ a) Kann man ein Rechteck zeichnen, dessen Umfang 42 cm und dessen Flächeninhalt 20 cm² beträgt?
b) Geht dasselbe mit $u=41$ cm und $A=20$ cm²?
c) Oder mit $u=40$ cm und $A=100$ cm²?
d) Oder mit $u=10$ cm und $A=25$ cm²?
e) Oder mit $u=9$ cm und $A=9$ cm²?

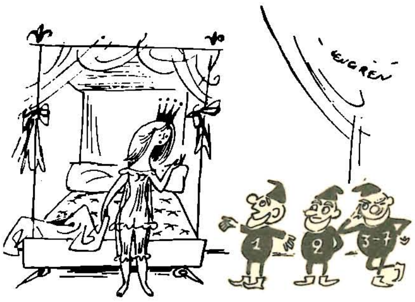
▲9▲ Vervollständige folgende Tabelle!

Bruch	erweiterter Bruch	Erweiterungszahl
$\frac{7}{13}$		7
$\frac{17}{20}$	$\frac{51}{60}$	
	$\frac{50}{90}$	10
$\frac{4}{7}$		13
$\frac{5}{12}$	$\frac{40}{96}$	

▲10▲ In welchen Beispielen ist die eine Figur nicht das Spiegelbild der anderen?



▲11▲ Uwe sagt: Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder.
Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?



„Nichts zu machen, Eure Hoheit – keine Leute, keine Leute!"

Klasse 6

▲1▲ Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

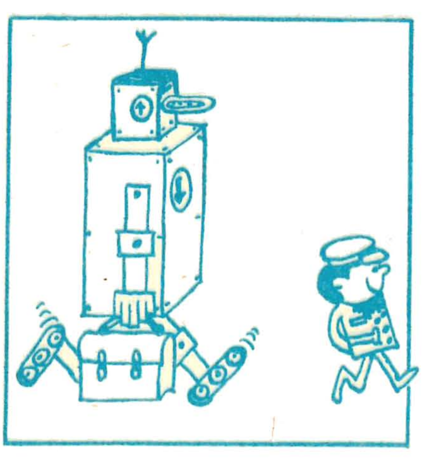
a) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.
b) Scheitelwinkel sind kongruent.
c) Nebenwinkel sind nicht kongruent.
d) Es gibt kongruente Nebenwinkel.
e) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Nebenwinkel.
f) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Scheitelwinkel.
g) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, sind es keine Scheitelwinkel!
h) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, sind es Nebenwinkel.

▲2▲ Versuche 20 so in zwei Summanden zu zerlegen, daß

- jeder durch 5 teilbar ist,
- genau einer durch 5 teilbar ist;
- keiner durch 5 teilbar ist!

▲3▲ Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen? Gib von jeder Aussage an, ob sie wahr oder falsch ist!

a) Nicht alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger.
b) Alle Dreiecke sind rechtwinklig.
c) $(3+7):5$
d) $(3+7):5=30$
e) x ist durch 3 teilbar.
f) 9 ist durch 3 teilbar.

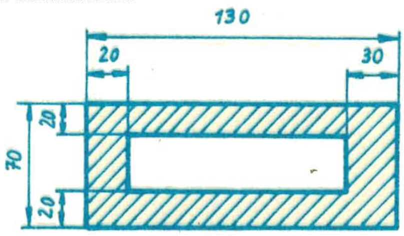


▲4▲ Bilde durch Einfügen von Operationszeichen aus den folgenden Zeichenreihen Terme, die der Reihe nach die Zahlen 35, 20, 0, 4, 20 bezeichnen!

a) $(18\quad 8)\cdot 3\quad 5;$
b) $(36\quad 4+1)\cdot 2;$
c) $(26\quad 4)\quad 10-3;$
d) $(8\quad 6)\quad 2;$
e) $(25\quad 15)\quad 2.$

▲5▲ In einer Möbelfabrik wurde im Laufe eines Jahres die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert.
Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische. Wieviel Tische wurden im Dezember hergestellt?

▲6▲ Berechne den Inhalt des schraffierten Flächenstücks!



▲7▲ Ermittle alle durch 36 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Zehnerstellen jeweils eine Primzahl darstellt!

▲8▲ Im Pionierhaus „Juri Gagarin" besuchen Beate, Ronald, Steffi und Uwe vier verschiedene Arbeitsgemeinschaften. Zu einem Pionierfest treffen sie sich mit anderen Freunden und berichten folgendes:

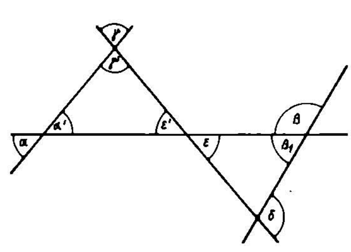
(1) Sie besuchen die AG Flugmodellsport, Mathematik, Plastbearbeitung und Verkehrserziehung.
(2) An jedem der Tage Montag, Dienstag, Mittwoch und Freitag findet genau eine AG statt.
(3) Uwe weiß nicht, wann die AG Flugmodellsport, Mathematik und Plastbearbeitung stattfinden.
(4) Ronalds AG Mathematik findet nicht freitags statt.
(5) Steffi kommt dienstags immer etwas später zur AG, weil sie lange Unterricht hat.
(6) Ronalds Vater leitet mittwochs die AG Plastbearbeitung.

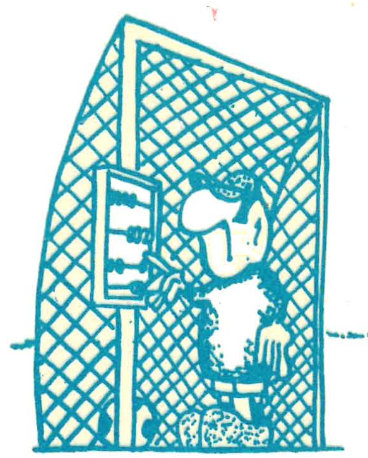
Ordne jedem Pionier seine AG und den betreffenden Wochentag zu!

▲9▲ In der Figur sind folgende Stücke gegeben:

$$\alpha=50^\circ,\ \beta=120^\circ,\ \gamma=80^\circ.$$

Gesucht ist die Größe des Winkels δ.





▲10▲ Konstruiere folgende Dreiecke:

a) $c=6$ cm, $\alpha=40^\circ$, $h_c=6$ cm
b) $a+b=11$ cm, $\alpha=40^\circ$, $h_c=4{,}3$ cm
c) $b=7$ cm, $\alpha=40^\circ$, $s_c=5$ cm!

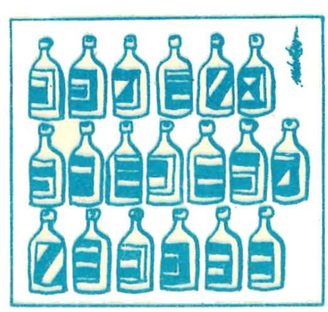
▲11▲ In einem Dreieck ABC gelte $\alpha=58^\circ$, und die Seite a sei größer als die Seite c.
Ordne die drei Dreieckseiten nach ihrer Größe, ohne das Dreieck zu konstruieren! Gib eine Begründung für dein Ergebnis an!

Vorliegende Aufgaben wurden entnommen aus: Aufgaben zum Mathematikunterricht der Klassen 4 bis 6, Bezirkskabinett für Weiterbildung der Lehrer und Erzieher, Haus des Lehrers Halle; Programme für Schularbeitsgemeinschaften *Junge Mathematiker* der Klassen 5 bis 7, Haus der Jungen Pioniere Juri Gagarin, Karl-Marx-Stadt; 2 × 2 plus Spaß dabei, 333 Aufgaben der Klassen 1 bis 4, Leipziger Volkszeitung, Leipzig

---

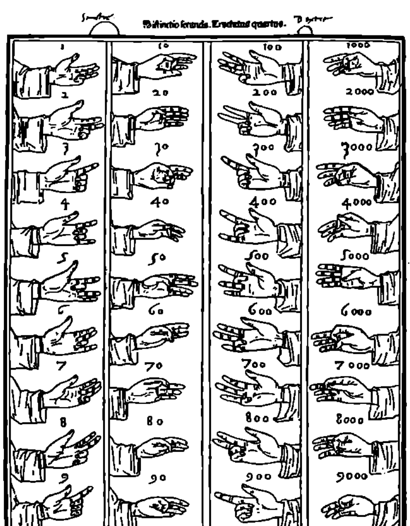
Vorsicht zerbrechlich!

Herr Müller stößt in seinem Keller an das Regal, und die Flaschen fallen dabei um. Untersucht, welche ihm zerbrochen sind!



Unser natürlicher Digitalrechner

Der Mensch nimmt seine Finger nicht nur bei handwerklichen Tätigkeiten, sondern auch beim Zählen und Rechnen zu Hilfe.
Unserem dekadischen Zahlensystem liegt vermutlich die Anzahl der Finger beider Hände zugrunde. Im Altertum benutzte man zur Verständigung über Preise sogar im internationalen Handel sogenannte *Fingerzahlen*, indem man bestimmten Stellungen der Finger einzelne Zahlen zugeordnet hat. Die Finger der linken Hand dienten dabei zur Bezeichnung kleinerer Zahlen (von 1 bis 100). Daumen und Zeigefinger der linken Hand bezeichneten die Zehner und die übrigen Finger derselben Hand die Einer. Entsprechend wurden Zahlenzeichen mit den Fingern der rechten Hand für 100 bis 10000 gebildet. So konnten sich Menschen verschiedener Sprachen, die nicht einmal schriftkundig waren, über Zahlen verständigen. Fingerzahlen werden heute noch gelegentlich auf den Märkten südlicher und orientalischer Länder benutzt.



linke Hand rechte Hand

Mit den zehn Fingern lassen sich alle natürlichen Zahlen bis 1000 im Dualsystem darstellen. Ordnet man nämlich den einzelnen Fingern die Potenzen der Zwei von 2^0 bis 2^9 – so wie in dem Bild 1 angegeben ist – zu, und markiert man gestreckte Finger mit „1“ und gekrümmte mit „0“, so entsprechen verschiedene Stellungen der Finger beider Hände im Dualsystem dargestellten Zahlen. Im Bild 2 ist als Beispiel die Zahl 227 mit den Fingern beider Hände im Dualsystem als 11100011 (2) dargestellt. Mit den Fingern beider Hände können leicht Multiplikationen von $6 \cdot 6$ bis $10 \cdot 10$ bzw. von $11 \cdot 11$ bis $15 \cdot 15$ durchgeführt werden. Im ersten Falle werden den einzelnen Fingern beider Hände die Zahlen 6 (den Daumen), 7 (den Zeigefingern), 8 (den Mittelfingern), 9 (den Ringfingern) und 10 (den kleinen Fingern) zugeordnet.

Bild 1

Bild 2

Will man beispielsweise $7 \cdot 9$ mit den Fingern ausrechnen, so entspricht diesem Term folgende Stellung der Finger (Bild 3).

Bild 3

Die Summe der gekrümmten Finger ergibt die Anzahl der Zehner und das Produkt aus den Anzahlen der gestreckten Finger die Einer.

$$2+4=6 \searrow \; 63 \; \swarrow 3 \cdot 1=3$$

Bezeichnen wir nämlich die beiden Faktoren mit x bzw. y, so ist die Anzahl der gekrümmten Finger $x-5$ bzw. $y-5$ und die Anzahl der gestreckten Finger $10-x$ bzw. $10-y$. Es ist dann

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 10[(x-5)+(y-5)]+(10-x)\cdot(10-y) \\ &= 10x+10y-100+100-10x-10y+xy \\ &= xy \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation von $11 \cdot 11$ bis $15 \cdot 15$ ordnet man den Fingern beider Hände die Zahlen 11 (den Daumen), 12 (den Zeigefingern), 13 (den Mittelfingern), 14 (den Ringfingern) und 15 (den kleinen Fingern) zu. Will man z. B. $12 \cdot 13$ mit den Fingern ausrechnen, so entspricht diesem Term folgende Fingerstellung (Bild 4).

Bild 4

Die Summe der gekrümmten Finger ergibt die Anzahl der Zehner und das Produkt aus den Anzahlen der gekrümmten Finger die Einer. Schließlich wird noch zur derart gebildeten Zahl 100 addiert.

$$100 \searrow \quad 2+3=5 \searrow \; 156 \; \swarrow 2 \cdot 3=6$$

Es gilt jetzt

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 100+10[(x-10)+(y-10)] \\ &\quad +(x-10)\cdot(y-10) \\ &= xy \end{aligned}$$

Produkte von $16 \cdot 16$ bis $20 \cdot 20$ errechnet man mit den Fingern folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 200+20[(x-15)+(y-15)] \\ &\quad +(20-x)\cdot(20-y) \\ &= 200+20x+20y-600+400 \\ &\quad -20x-20y+xy \\ &= xy \end{aligned}$$

Beispiel $18 \cdot 19$ (Bild 5)

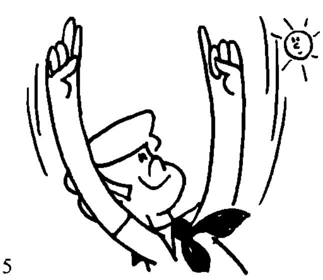


Bild 5

Die doppelte Summe der gekrümmten Finger ergibt die Anzahl der Zehner und das aus den Anzahlen der gestreckten Finger gebildete Produkt die Einer. Es werden dazu schließlich noch 200 addiert.

$$200 \searrow \quad 2(3+4)=14 \downarrow \; 342 \; \swarrow 2 \cdot 1=2$$

Das Fingerrechnen gehört heute in fast allen Ländern der Geschichte an. Mit der Einführung der allgemeinen Schulpflicht wurde es von den schriftlichen Rechenmethoden verdrängt, zumal diese nicht nur in einem äußerst engen Zahlenraum anwendbar sind. Dennoch ist der mathematische Grundgedanke jenes primitiven Verfahrens wissenswert.

M. Walter

Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen

Teil 3

Die Mengen M_1, M_2 haben die Eigenschaften (*a*) bis (*c*), denn offenbar sind beide Mengen nicht leer. Weiter gilt für jede natürliche Zahl $n (n > 1)$

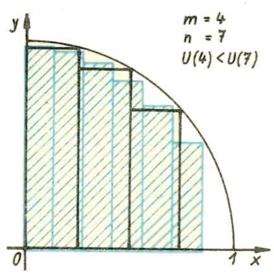
$$U(n) < O(n), \tag{1}$$

denn im zweiten Fall sind die Rechtecke von gleicher Breite, aber größerer Länge als im ersten Fall, und außerdem kommt bei $O(n)$ noch der Inhalt einer weiteren Rechteckfläche als Summand hinzu.

Für beliebige natürliche Zahlen m, n mit $n > m > 1$ gilt

$$U(m) < U(n) \text{ und } O(n) < O(m). \tag{2}$$

(Diesen Sachverhalt mache man sich anhand der Figur 8 klar.)



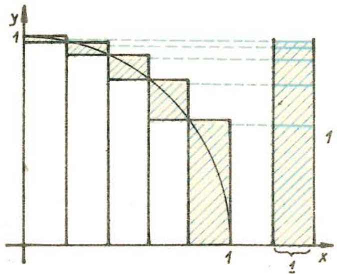
Aus (1) und (2) folgt für beliebige natürliche Zahlen m, n sofort

$$U(m) < O(n),$$

m. a. W. jedes Element aus M_1 ist kleiner als jedes Element aus M_2.

Schließlich ist auch die Eigenschaft (*c*) erfüllt. Denn wie man aus Figur 9 sofort ablesen kann, ist für jede natürliche Zahl n $(n > 1)$ offenbar

$$O(n) - U(n) = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}. \tag{3}$$



Sei nun eine beliebige natürliche Zahl k vorgegeben.

Wählt man $n = 10^k + 1$, so ist

$$O(n) - U(n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{10^k + 1} < \frac{1}{10^k}.$$

Dabei ist $U(n) \in M_1$, $O(n) \in M_2$, und die Differenz dieser beiden Zahlen ist kleiner als $\frac{1}{10^k}$.

Nach Satz 1 gibt es genau eine Zahl s, die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegt. Diese Zahl s heißt der Flächeninhalt der Punktmenge K.

Mit Hilfe der Elemente von M_1 und M_2 können wir die Zahl s annähern. Dazu wählen wir $n = 10$. Dann gilt

$$U(10) = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2} + \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{10}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\sqrt{\frac{99}{100}} + \sqrt{\frac{96}{100}} + \sqrt{\frac{91}{100}} + \sqrt{\frac{84}{100}} + \sqrt{\frac{75}{100}} + \sqrt{\frac{64}{100}} + \sqrt{\frac{51}{100}} + \sqrt{\frac{36}{100}} + \sqrt{\frac{19}{100}} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot (\sqrt{99} + \sqrt{96} + \sqrt{91} + \sqrt{84} + \sqrt{75} + \sqrt{64} + \sqrt{51} + \sqrt{36} + \sqrt{19}).$$

Die hier vorkommenden Quadratwurzeln können wir bis auf zwei Ausnahmen ebenfalls nur näherungsweise bestimmen. Mit Hilfe der Zahlentafel (Seite 8/9) finden wir die folgenden Ungleichungen bzw. Gleichungen:

$9{,}94 < \sqrt{99} < 9{,}95$ $\quad 8{,}00 = \sqrt{64} = 8{,}00$
$9{,}79 < \sqrt{96} < 9{,}80$ $\quad 7{,}14 < \sqrt{51} < 7{,}15$
$9{,}53 < \sqrt{91} < 9{,}54$ $\quad 6{,}00 = \sqrt{36} = 6{,}00$
$9{,}16 < \sqrt{84} < 9{,}17$ $\quad 4{,}35 < \sqrt{19} < 4{,}36$
$8{,}66 < \sqrt{75} < 8{,}67$

Durch Summation erhalten wir

$$72{,}57 < \sqrt{99} + \sqrt{96} + \sqrt{91} + \sqrt{84} + \sqrt{75} + \sqrt{64} + \sqrt{51} + \sqrt{36} + \sqrt{19} < 72{,}64$$

und nach Multiplikation mit $\frac{1}{100}$ schließlich

$$0{,}7257 < U(10) < 0{,}7264.$$

Aus (3) folgt

$$O(n) = U(n) + \frac{1}{n}, \text{ also}$$

$$O(10) = U(10) + \frac{1}{10}. \text{ Damit gilt}$$

$$0{,}8257 < O(10) < 0{,}8264.$$

Für den Flächeninhalt s der Punktmenge K, d. h. der Viertelkreisfläche, erhalten wir die Ungleichung

$$0{,}7257 < U(10) < s < O(10) < 0{,}8264.$$

Der Flächeninhalt der Viertelkreisfläche liegt also zwischen 0,7257 und 0,8264.

Da der Flächeninhalt A der Kreisfläche das Vierfache von s beträgt, erhalten wir für ihn die Näherung

$$2{,}9028 < A < 3{,}3056.$$

Berücksichtigt man nur zwei Stellen nach dem Komma, so folgt

$$2{,}90 < A < 3{,}31.$$

Aus dem Unterricht der Klasse 7 ist bekannt, daß $A = \pi r^2$ gilt.

Da der Radius unseres Kreises 1 beträgt, ist $A = \pi$.

Unsere Abschätzung für den Flächeninhalt des Kreises liefert zugleich eine Näherung für die Zahl π:

$$2{,}90 < \pi < 3{,}31. \tag{4}$$

Wählt man bei den eben durchgeführten Berechnungen die Zahl n größer als 10, so kann man die Näherung (4) für die Zahl π verbessern.

Aufgabe 10

Bestimme eine Näherung für die Zahl π, indem du für n die Zahl 20 wählst!

H. Lemke/W. Stoye

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Gläser

Institut für mathematischen Unterricht an der Universität Strasbourg, Frankreich

▲1533▲ Es ist die Menge M aller reellen Zahlen z anzugeben, für die

$$z = (1 - x^n)^m \text{ gilt,}$$

wobei x eine beliebige reelle Zahl mit $0 < x < 1$ und n, m beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

In freien Stunden alpha heiter

Aus „TausendundeinTag“

In der alten persischen Erzählung „Die Geschichte Moradbaks“, die in der Sammlung „Tausendundein-Tag“ enthalten ist, stellt ein Weiser einem jungen Mädchen die folgende Aufgabe und erwähnt dabei, daß solche Aufgaben von den indischen Philosophen gestellt werden: „Eine Frau geht in einen Garten, um Äpfel zu ernten. Der Garten hat vier Tore; jedes wird von einem Manne bewacht. Die Frau gibt dem Hüter des ersten Tores die Hälfte der gepflückten Äpfel; als sie beim zweiten anlangt, gibt sie dem zweiten Wächter die Hälfte der übriggebliebenen Äpfel; ebenso verfährt sie beim dritten; endlich teilt sie noch mit dem vierten, so daß ihr schließlich nur zehn Äpfel bleiben. Nun fragt man, wieviel Äpfel geerntet wurden.“

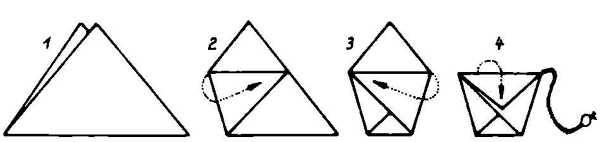
Zur Schulentlassung

Bei einer Schulentlassung tauschen alle Schüler untereinander ihre Fotografien aus. Wieviel Schüler wurden entlassen, wenn 870 Fotografien getauscht wurden?

Mehrzweckbecher

Ein Mehrzweckbecher ist sehr schnell hergestellt und vielfach verwendbar: beim Wandertag als Trinkgefäß, beim Pioniernachmittag als Würfel- oder Geschicklichkeitsbecher. Und so wird er gebastelt: Einen quadratischen Bogen (21 cm mal 21 cm) zu einem Dreieck falten (Bild 1), zuerst die linke Spitze des Dreiecks bis an die rechte Papierkante (Bild 2 und 3), dann die linke Spitze bis an die rechte Papierkante falzen. Zum Schluß biegt die beiden oberen Spitzen nach außen, und fertig ist der Würfelbecher (Bild 4). Verwendet Ihr Pergament- oder Butterbrotpapier, erhaltet ihr einen Trinkbecher. Der Geschicklichkeitsbecher entsteht, wenn ihr an der rechten oberen Kante einen 20 cm langen Faden befestigt, an dessen Ende eine Perle angebracht wurde. Der Pionier, der die Perle als erster im Becher landet, ist Sieger.

Aus NBI 45/74



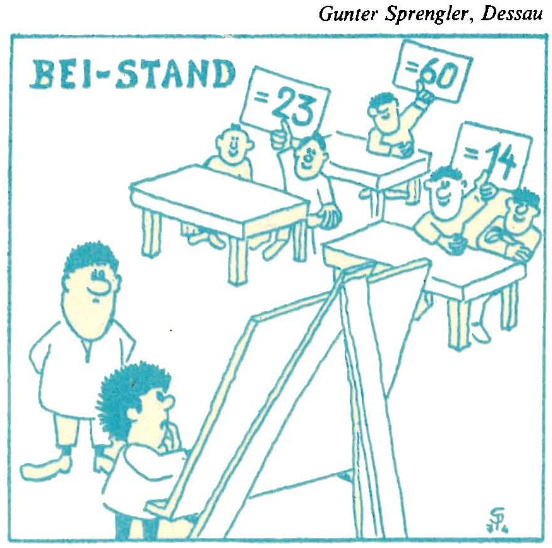
3× ALPHA

1. Gerade, Maschinenteil; 2. deutscher Mathematiker (1849 bis 1925); 3. Sternbild des südlichen Himmels; 4. Zahlwort; 5. Vorsilbe (griech.), bedeutet soviel wie *fünf*; 6. Name einer beliebten Schülerzeitschrift der DDR; 7. Vorsilbe (griech.), bedeutet so viel wie *über*; 8. Sonnenfernster Planet; 9. Positive Elektrode.

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

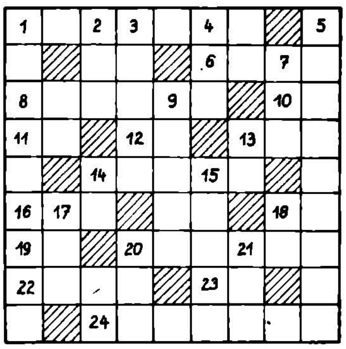
1.	A				
2.		L			
3.	L		P		
4.				H	
5.	P				A
6.	/			H	
7.	H		P		
8.		L			
9.	A				

Gunter Sprengler, Dessau



Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Winkelfunktion; 6. Mathematiker, u. a. auf dem Gebiet der mathematischen Logik tätig; 8. Futterbehälter (Mz.); 10. Himmelsrichtung (Abk.); 11. Flächenmaß; 12. chemisches Symbol für ein Metall; 13. europäische Hauptstadt; 14. Belastung, unangenehme Erscheinung; 16. Brennstoff; 18. Maßeinheit im Schiffsbau (Abk.); 19. persönliches Fürwort; 20. antiker Bewohner Italiens; 22. Zahlwort; 23. Kreiszahl; 24. Teil des rechtwinkligen Dreiecks.



Senkrecht: 1. Winkelfunktion; 2. russisches Zahlwort; 3. Begriff aus der Algebra; 4. weiblicher Vorname; 5. Teilgebiet der Mathematik; 7. Weltorganisation (Abk.); 9. Eigenschaft einer Funktion; 13. Skatausdruck; 14. physikalische Maßeinheit; 15. Linienzug, zeichnerische Darstellung eines Sachverhaltes, einer Funktion; 17. schweizerisches Flächenmaß; 20. weiblicher Vorname; 21. norwegischer Mathematiker.

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Was bedeutet das?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

5×4=20

Setze aus jeweils vier Teilen ein Rechteck zusammen mit den Seitenlängen 4 Einheiten mal 5 Einheiten. Wieviel Möglichkeiten gibt es? (Jedes der Einzelteile besteht aus 5 Quadraten.)

aus: Euklid 10/74, Athen

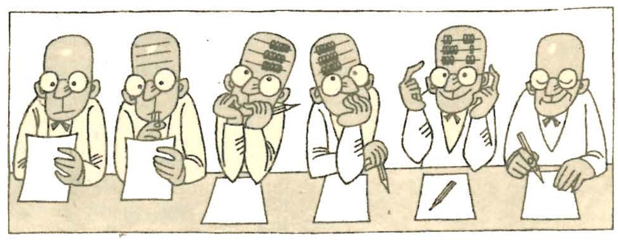
Unmögliches wird möglich!

$$\begin{array}{r} \text{PLUS} \\ +\ \text{PLUS} \\ +\ \text{PLUS} \\ \hline \text{MINUS} \end{array}$$

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern. Wieviel Lösungen sind möglich?

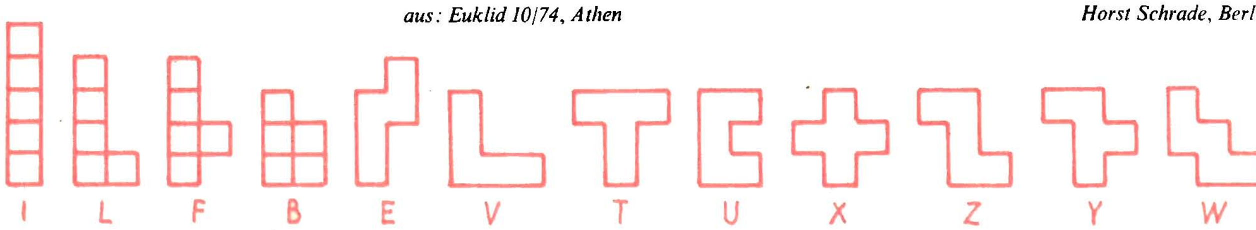
Matthias Gärting, OS Gröbers (Saalkreis, Kl. 8)

Kopfrechnen



Louis Rauwolf

Horst Schrade, Berlin



XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(7./8. Februar 1976)

Klassenstufe 7

1. Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze.

Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz. (2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

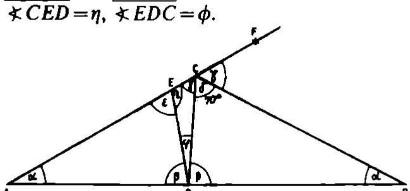
Benno: (3) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz. (4) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (5) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz. (6) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilung der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

2. In der abgebildeten Figur gelte:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF = \gamma$, $\sphericalangle BCD = \delta$, $\sphericalangle AED = \varepsilon$, $\sphericalangle CED = \eta$, $\sphericalangle EDC = \phi$.



Es sei $\delta = 70°$

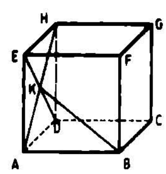
Ermittle α, β, γ, ε, η und ϕ!

3. Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, daß sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d. h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, daß jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und daß jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

4. Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120% der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist. Nach wieviel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

5. Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H (siehe Bild). K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen $\overline{AH}$ und $\overline{DE}$.

Beweise: Es gilt $\overline{DE} \perp \overline{BK}$.



6. Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.

Ermittle c für jede 1000000000stellige durch 9 teilbare Zahl z!

Klassenstufe 8

1. Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger: „Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen.

Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, daß genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet wurden." Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn. Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf ermitteln konnte!

2. Beweise, daß alle Primzahlen $p > 3$ sich in der Form $6n + 1$ bzw. $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

3. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Konstruiere in seinem Innern einen Punkt P, so daß die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

4. Eine Pioniergruppe wanderte von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, daß sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

5. Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ auf der Seite $\overline{AB}$ Punkte E und F so zwischen A und B liegen, daß $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und auf der Seite $\overline{BC}$ Punkte G und H so zwischen B und C liegen, daß $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und auf der Seite $\overline{CD}$ Punkte I und K so zwischen C und D liegen, daß $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und auf der Seite $\overline{DA}$ Punkte L und M so zwischen D und A liegen, daß $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt, so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

6. Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, daß die Summe der Länge der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ 11 cm beträgt, daß die Seite $\overline{AB}$ die Längen $a = 6$ cm und die Seite $\overline{AD}$ die Länge $d = 1$ cm haben soll.

Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, daß für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leqq u \leqq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d. h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

Klassenstufe 9

1. Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

2. Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlänge $\overline{BC} = a$ und die Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, daß $\overline{BC}$ auf g liegt.

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

3. Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) von Aussagen gemacht, von denen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!

A_1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.

A_2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.

B_1) $x-5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.

B_2) $x+1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.

C_1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.

C_2) x ist die Zahl 389.

D_1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379. 383, 389, 397.

D_2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

4. Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

5. Beweisen Sie den folgenden Satz:
In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

6. Beweisen Sie, daß für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc=1$ die Ungleichung $(1+a)(1+b)(1+c) \geqq 8$ gilt!
Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Klassenstufe 10

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{BC}=a$ und der Höhenlänge $\overline{AD}=h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu $\overline{BC}$ durch A.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

2. Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ mit $\overline{AB}=5$ cm. Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ zu sein.

3. Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt

$$(1+a^2x^2):x^2=b$$

(mit gegebenen Zahlen a, b) versehentlich die Gleichung

$$(1+a^2x^2)\cdot x^2=b$$

(mit denselben Zahlen a, b) gedruckt. Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge.

4. Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, und $\overline{CC'}$ und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HA'}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{HB'}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{HC'}} \text{ gelten,}$$

so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

5. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x>0$, für die folgendes gilt: Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x. (Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

6. Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist:

$$[x] \leqq x < [x]+1.$$

Beispielsweise ist

$$[\pi]=3,\ [-4,2]=-5,\ [5]=5.$$

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p>0$ gibt, so daß für alle x gilt: $f(x+p)=f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f. Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f. Beispielsweise ist $f(x)=1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z. B. $f(x)=\sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.

a) Beweisen Sie, daß durch $y=(-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen c erklärte Funktion f definiert ist!

b) Beweisen Sie, daß die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!

c) Weisen Sie nach, daß diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!

d) Stellen Sie f graphisch dar!

Klassenstufe 11/12

1. Jemand löste eine Divisionsaufgabe A; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren. Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest. Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe A eine neue Divisionsaufgabe A', indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ. Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe A.
Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben A, die diese Eigenschaft aufweisen.

2. Ist M eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine *Einheit von M* bezeichnet werden, wenn für jedes Element x aus M die Beziehung

$$\frac{x}{e} \in M \text{ gilt.}$$

(So besitzt z. B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten $+1$ und -1, während z. B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)
Es sei nun M die Menge aller Zahlen $a+b\sqrt{2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z. B. $+1$ und -1 Einheiten.

a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von M an.

b) Man beweise, daß M unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

3. Es seien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises k. Ferner seien X bzw. Y bzw. Z die zu A_2 bzw. B_2 bzw. C_2 bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen B_1C_1 bzw. C_1A_1 bzw. A_1B_1 symmetrisch liegenden Punkte.
Man beweise, daß X, Y und Z auf ein und derselben Gerade liegen.

4. Definition: Eine gebrochene rationale Funktion f heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ mit

$u(x)=a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0;\ a_m \neq 0$
$v(x)=b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0;\ b_n \neq 0$
und $m<n$ darstellen läßt.

Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion 0 $\left(=\dfrac{u(x)}{v(x)}\right.$ mit $u(x)=a_mx^m+\ldots+a_0$, alle $\left.a_m=\ldots=a_0=0\right)$ verschieden ist.

5. In der Ebene mögen n Punkte ($n \geqq 4$) so gelegen sein, daß je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind. Man beweise, daß dann alle n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.

Von den folgenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Gegeben seien n Punkte einer Ebene ($n>0$), von denen keine drei auf derselben Gerade liegen. Die n Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, daß es keine drei Punkte gibt, von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.
Man zeige, daß unter diesen Bedingungen für die Anzahl Z_v der Verbindungsstrecken

$$Z_v \leqq \left[\frac{n^2}{4}\right] \text{ gilt.}$$

Man zeige ferner, daß sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.

Anmerkung: Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

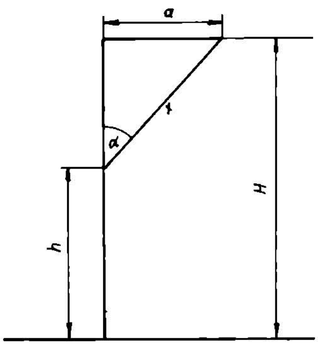
6B. Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und p, q, r, s reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte. Bei der Division dieses Polynoms durch $(x-p)$ ergebe sich als Rest die Zahl r, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x-q)$ als Rest die Zahl s.
Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x-p)(x-q)$?

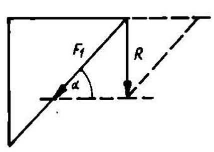
Lösungen

Ph 10/12 ▪1421 Nach dem Lehrsatz des Pythagoras erhält man

$$x^2 = (H-h)^2 + a^2$$
$$x^2 = 100 + 557$$
$$x = \sqrt{657}$$
$$x = 25{,}6$$

Der Ausleger ist 25,6 m lang.





Die Belastung des Auslegers errechnet man nach:

$$\tan\alpha = \frac{H-h}{a} \qquad F_1 = \frac{R}{\sin\alpha}$$
$$\tan\alpha = \frac{23{,}6}{10} \qquad F_1 = \frac{4000}{0{,}9205}$$
$$\alpha = 67^\circ \qquad F_1 = 4340$$

Die Belastung des Auslegers beträgt 4340 kp.

Ch 10/12 ▪1422 50 ml 0,1n Schwefelsäure entsprechen 50 ml 0,1n NaOH. 1000 ml 0,1n NaOH enthalten 3,9997 g NaOH (1000 ml 1n NaOH enthalten 39,997 g) 50 ml 0,1n NaOH enthalten x g NaOH

$$x = \frac{3{,}997 \cdot 50}{1000} = 0{,}19998 \text{ g} \approx 0{,}2 \text{ g}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/75:

Ma 5 ▪1424 Ein Würfel besitzt 12 Kanten. Jede Kante des herzustellenden Kantenmodells eines Würfels besitzt somit die Länge von 120 cm : 12 = 10 cm. Sein Volumen beträgt $V_W = 10^3\text{ cm}^3 = 1000\text{ cm}^3$. Für die 12 Kanten des Quaders gilt $4(a+b+c) = 120$ cm. Wegen $a = 15$ cm und $b = 10$ cm erhalten wir daraus $4 \cdot (15\text{ cm} + 10\text{ cm} + c) = 120$ cm, also $c = 5$ cm. Das Volumen des Quaders beträgt somit $V_Q = a \cdot b \cdot c = 15 \cdot 10 \cdot 5\text{ cm}^3 = 750\text{ cm}^3$. Demnach hat der Würfel einen um 250 cm³ größeren Rauminhalt als der Quader.

Ma 5 ▪1425 Aus $a \cdot b = a' \cdot b'$ bzw. $25 \cdot 16 = 40 \cdot b'$ folgt $b' = 10$ cm. Für die Umfänge der beiden Rechtecke gilt somit
$u = 2(a+b) = 2(25+16)\text{cm} = 82$ cm,
$u' = 2(a'+b') = 2(40+10)\text{cm} = 100$ cm,
$u' - u = 100\text{ cm} - 82\text{ cm} = 18$ cm.
Der Umfang u' des Rechtecks $A'B'C'D'$ ist um 18 cm größer als der Umfang u des Rechtecks $ABCD$.

Ma 5 ▪1426 Aus $f+d=f$ folgt $d=0$.
Aus $d+a=6$ folgt $a=6$.
Aus $a+j=9$ folgt $j=3$.
Aus $a=6, j=3, a+j+e=16$ folgt $e=7$.
Aus $a=6, e=7, a+c=e$ folgt $c=1$.
Aus $e=7$ und $j=3$ und $e-j=k$ folgt $k=4$.
Aus $c=1, e=7, b=e+c$ folgt $b=8$.
Aus $j=3$ und $j=g:j$ folgt $g=9$.
Aus $b=8, k=4, b:h=k$ folgt $h=2$.
Aus $c=1, g=9, h=2, f=(c+g):h$ folgt $f=5$.
Die natürlichen Zahlen $a=6$, $b=8$, $c=1$, $d=0$, $e=7$, $f=5$, $g=9$, $h=2$, $j=3$, $k=4$ erfüllen sämtliche Gleichungen.

Ma 5 ▪1427 Wegen $V+V+1=A$ kann $A=9$ und $V=4$ gelten. Wegen $A \neq I$ kann I nicht 9 sein, also $I=8$, $C=7$. Für $E=6$ erhalten wir wegen $R+R+1=T$ somit $H=3$. Damit gilt auch $R=5$ und $T=0$. Die gesuchte Aufgabe lautet $4865+4865=9730$.

Ma 5 ▪1428 Aus
$a+b=2=0+2=1+1=2+0$ folgt wegen $a>0$ und $a \neq b$ somit $a=2$ und $b=0$.
Aus $a=2$ und $c=2a$ folgt $c=4$.
Aus $a=2$, $b=0$, $c=4$ und $3a+b+c+d=16$ folgt $3 \cdot 2+0+4+d=16$, also $d=6$.
Die gesuchte Zahl lautet 202246.

Ma 5 ▪1429 Angenommen, x Schüler erhielten die Note 1; dann gilt

$$x+2x+x+2=26,$$
$$4x=24,$$
$$x=6.$$

Sechs Schüler erhielten die Note 1, zwölf Schüler die Note 2.

Ma 6 ▪1430 Angenommen, es waren x Schüler an der Klassenarbeit beteiligt, dann gilt

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x+5\right) + \frac{1}{6}x = x,$$
$$\frac{5}{6}x+5 = x,$$
$$\frac{1}{6}x = 5,$$
$$x = 30.$$

An der Klassenarbeit waren 30 Schüler beteiligt. 10 Schüler erhielten die Note 1 oder 5. 15 Schüler erhielten die Note 3 oder 4. 5 Schüler erhielten die Note 2. Angenommen, y Schüler die Note 3, dann erhielten $\frac{1}{4}y$ Schüler die Note 4, und es gilt

$$y+\frac{1}{4}y = 15,\ \frac{5}{4}y = 15,\ y = 12.$$

Somit erhielten 12 Schüler die Note 3 und 3 Schüler die Note 4. Angenommen, z Schüler erhielten die Note 1, dann erhalten $(10-z)$ Schüler die Note 5.
Nun gilt aber

$$z \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 3 \cdot 4$$
$$+(10-z) \cdot 5 = 2{,}4 \cdot 30,$$
$$z+10+36+12+50-5z = 72,$$
$$4z = 36,\ z = 9.$$

Demnach erhielten 9 Schüler die Note 1 und 1 Schüler die Note 5.

Ma 6 ▪1431 Aus $2(ab+ac+bc) = 286$ folgt $ab+ac+bc = 143$. Aus $ab=63$ und $bc=35$ folgt durch Einsetzen
$63+ac+35 = 143$, also $ac = 45$.
Nun gilt $\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{63 \cdot 45}{35}$, also nach dem Kürzen $a^2 = 81$ bzw. $a = 9$.
Aus $ab=63$ und $a=9$ folgt $b=7$.
Aus $bc=35$ und $b=7$ folgt $c=5$.
Das Volumen des Quaders beträgt somit $V = abc = 9 \cdot 7 \cdot 5\text{ cm}^3 = 315\text{ cm}^3$.

Ma 6 ▪1432 Es sei x die Anzahl aller eingesandten Aufgaben. Von diesen Aufgaben wurden $\frac{3}{8}x$ gut gelöst, $\frac{3}{8}x : 3 = \frac{1}{8}x$ gelöst, $\frac{1}{8}x : 2 = \frac{1}{16}x$ nicht gelöst. Angenommen, es wurden y Aufgaben sehr gut gelöst. Dann gilt $y+\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x = x$, also $y = \frac{7}{16}x$.

Wegen $20 < x < 45$ und $y = \frac{7}{16}x$ wird y nur für $x = 32$ ganzzahlig. Der Schüler hat somit 14 Aufgaben sehr gut gelöst, 12 Aufgaben gut gelöst, 4 Aufgaben gelöst und 2 Aufgaben nicht gelöst.

Ma 6 ▪1433 Die gesamte Trainingsstrecke sei x Kilometer lang;
dann gilt $\frac{4}{15}x + \frac{2}{5}x + 100 = x$,

$$\frac{2}{3}x + 100 = x,$$
$$\frac{1}{3}x = 100,\ x = 300.$$

Der Radrennfahrer legte am ersten Tag $\frac{4 \cdot 300}{15}$ km = 80 km und am zweiten Tag $\frac{2 \cdot 300}{5}$ km = 120 km zurück.

Ma 6 ▪1434 Der Preis des Buches betrage x Mark, dann gilt

$$1{,}5 + \frac{3}{8}x = x,$$
$$\frac{5}{8}x = \frac{15}{10},$$
$$x = \frac{15 \cdot 8}{10 \cdot 5},\quad x = 2{,}4$$

Das Buch kostete 2,40 M, und es gilt

$$1{,}50 + \frac{3}{8} \cdot 2{,}40 = 1{,}50 + 0{,}90 = 2{,}40.$$

Ph 6 ▪1435 Wegen
$40 = 1+3+9+27 = 3+3^1+3^2+3^3$

kann man jede natürliche Zahl durch Potenzen von 3 so darstellen, daß jede Potenz höchstens einmal auftritt, wenn man neben der Addition auch die Subtraktion zuläßt.
Beispiel:
$16=1\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3,$
$16=1\cdot 3^2+(3\cdot 3^1-1\cdot 3^1)+1\cdot 3,$
$16=1\cdot 3^2+1\cdot 3^2-1\cdot 3^1+1\cdot 3,$
$16=2\cdot 3^2-1\cdot 3^1+1\cdot 3,$
$16=(3\cdot 3^2-1\cdot 3^2)-1\cdot 3^1+1\cdot 3,$
$16=1\cdot 3^3-1\cdot 3^2-1\cdot 3^1+1\cdot 3,$
$16=27-9-3+1.$
Will man nun die Masse von 16 kg ermitteln, so sind auf die linke Waagschale x kg, 9 kg und 3 kg, auf die rechte Waagschale 27 kg und 1 kg zu legen, denn es gilt

$$x+9+3=27+1,$$
$$x=28-12,$$
$$x=16.$$

Ma 7 ■1436 Angenommen, es befanden sich x Äpfel im Korb. Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Verteilung der Äpfel.

Anzahl d. Äpfel	Axel	Bernd
	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{3}x-2$
	Ernst	Franz
	$\frac{1}{2}x-6$	$\frac{1}{8}x+3$

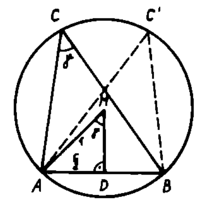
Nun gilt

$$\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{3}x-2\right)+\left(\frac{1}{2}x-6\right)+\left(\frac{1}{8}x+3\right)=x,$$
$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x-x=5,$$
$$6x+8x+12x+3x-24x=120,$$
$$5x=120,$$
$$x=24.$$

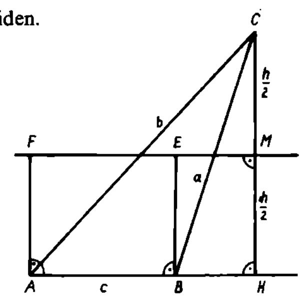
Im Korb befanden sich somit 24 Äpfel. Axel erhielt $\frac{1}{4}\cdot 24=6$, Bernd $\frac{1}{3}\cdot 24-2=6$, Ernst $\frac{1}{2}\cdot 24-6=6$ und Franz $\frac{1}{8}\cdot 24+3=6$ Äpfel.
Alle vier Jungen Pioniere erhielten also gleichviel Äpfel.

Ma 7 ■1437 Die Potenz
$1975^n=(10\cdot 197+5)^n$ endet für jede natürliche Zahl $n\geqq 1$ mit der Ziffer 5. Die Potenz
$1974^n=(10\cdot 197+4)^n$ endet für jede natürliche Zahl $n\geqq 1$ entweder mit der Ziffer 6 oder mit der Ziffer 4, d. h., diese Potenz ist für jedes $n\geqq 1$ eine gerade natürliche Zahl. Das Produkt aus einer geraden natürlichen Zahl und einer mit der Ziffer 5 endenden natürlichen Zahl endet stets mit der Ziffer 0. Somit endet das gegebene Produkt ebenfalls mit der Ziffer 0.

Ma 7 ■1438 Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel über demselben Bogen.
Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC und D der Fußpunkt des von M auf AB gefällten Lotes. Dann gilt
$\sphericalangle ADM=90°$, $\sphericalangle AMD=\sphericalangle ACB=\gamma=40°$
und $\overline{AD}=\frac{c}{2}=3$ cm; somit läßt sich das Dreieck ADM aus diesen Stücken konstruieren.
Der Kreis um A mit dem Radius $c=6$ cm schneidet die Gerade AD über D hinaus in B. Wir konstruieren den Kreis um M mit dem Radius $r=\overline{AM}$, den Umkreis des zu konstruierenden Dreiecks ABC. Der Kreis um D mit dem Radius $s_c=8$ cm schneidet den Umkreis des Dreiecks im Punkte C bzw. C'.



Ma 7 ■1439 Es seien $\overline{AB}=c$ und $\overline{BE}=d$ die Seitenlängen des dem Dreieck ABC flächengleichen Rechtecks $ABEF$, und es sei $\overline{CH}=h$ die Höhe des Dreiecks ABC zur Seite $\overline{AB}=c$. Wegen $c\cdot d=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h$ gilt $h=2\cdot d$. Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion:
Wir fällen von C das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei H. Wir halbieren $\overline{CH}$, der Mittelpunkt von $\overline{CH}$ sei M. Wir ziehen durch M zu AB die Parallele. Durch A und B konstruieren wir je eine Senkrechte zu AB. Diese Senkrechten mögen die bereits gezeichnete Parallele in den Punkten E und F schneiden.



Ph 7 ■1440
Gegeben: $s=42\,600$ km Gesucht: v
$t=\frac{3}{2}h$
Es genügt die Berechnung der gleichförmigen Bewegung.

$$v=\frac{s}{t}$$
$$v=\frac{42\,600\text{ km}\cdot 2}{3h}$$
$$v=28\,400\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Geschwindigkeit des Raumschiffes beträgt $28\,400\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ch 7 ■1441 $1022\cdot 120=122640$
Im Jahr werden $122\,640$ m³ Wasser benötigt, um 1022 t Weißzucker herzustellen.

$$122640:3=40880$$

Es waren 40880 Tankwagen nötig, um diese Wassermenge zu transportieren.

Ma 8 ■1442 Es sei $z=10a+b$, wobei a und b natürliche Zahlen mit $1\leqq a\leqq 9$ und $1\leqq b\leqq 9$ sind, eine natürliche Zahl, die die verlangte Eigenschaft hat. Dann lautet diejenige Zahl, die durch Vertauschung der Ziffern von z entsteht, $10b+a$, und es gilt

$$10a+b=\frac{2}{9}(10b+a),$$
$$90a+9b=20b+2a,$$
$$88a=11b,$$
$$8a=b.$$

Da a und b von Null verschieden sind und b eine einstellige natürliche Zahl ist, kann nur $a=1$ und daher $b=8$ sein. Tatsächlich hat die Zahl $z=18$ und nur diese Zahl die verlangte Eigenschaft; denn es gilt

$$18=\frac{2}{9}\cdot 81.$$

Ma 8 ■1443 a) Es seien x und y die Maßzahlen der Seitenlängen des Rechtecks. Dann ist die Maßzahl des Flächeninhalts gleich $A=xy$ und die Maßzahl des Umfangs gleich $2x+2y=2(x+y)$. Es gilt also

$$2(x+y)=560,$$
$$x+y=280,$$
$$y=280-x.$$

Daraus folgt

$$A=xy=x(280-x)=280x-x^2,$$
$$A=-(x^2-280x+19600)+19600,$$
$$A=19600-(x-140)^2.$$

Wegen $(x-140)^2\geqq 0$ gilt $A\leqq 19600$ und $A=19600$ genau dann, wenn $x=140$.
Der Flächeninhalt der maximalen Rechtecksfläche, die eingezäunt werden kann, beträgt also $19\,600$ m² $=1{,}96$ ha.
b) Ist der Flächeninhalt maximal, so gilt
$x=140$, also $y=280-x=140$.
Das Rechteck ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge 140 m.

Ma 8 ■1444 a) Von Moskau ($\phi=56°$N) bis zum Nordpol ($\phi=90°$N) beträgt die Anzahl der Breitengrade $90°-56°=34°$, vom Nordpol bis Seattle ($\phi=48°$N) $90°-48°=42°$, das sind zusammen $34°+42°=76°$. Für die Länge x der Luftlinie Moskau–Nordpol–Seattle gilt also

$$x:10000\text{ km}=76°:90°,$$
$$x=\frac{76\cdot 10000}{90}\text{ km}=8\,444\text{ km}.$$

Die tatsächlich zurückgelegte Entfernung ist um 12,27% größer, sie beträgt also

$$8444\cdot 1{,}1227\text{ km}=9480\text{ km}.$$

b) Die ANT-25 legte diese Entfernung von 9480 km in 63 h 25 min $=\frac{3805}{60}$ h zurück. Ihre mittlere Geschwindigkeit betrug daher

$$v_1=\frac{9480\cdot 60}{3805}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\approx 150\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Die IL-62-M legte diese Entfernung in 10 h 54 min $=\frac{654}{60}$ h zurück. Ihre mittlere Geschwindigkeit betrug daher

$$v_2=\frac{9480\cdot 60}{654}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\approx 870\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Ma 8 ▪1445 Es seien

$2r_1$ die Maßzahl (in m) des inneren Durchmessers,

s die Maßzahl (in m) der Wandstärke,

x die Maßzahl (in m) der Gesamtlänge der zylindrischen Stahlrohre.

Dann ist die Maßzahl (in m^2) des Querschnitts gleich

$Q=\pi(r_1+s)^2-\pi r_1{}^2=\pi r_1{}^2+2\pi r_1 s+\pi s^2-\pi r_1{}^2,$

$Q=\pi s(2r_1+s).$

Da die Maßzahl der Länge gleich x, die Dichte gleich $7{,}85\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ und die Masse gleich 3000 t ist, gilt also

$$\pi s(2r_1+s)x\cdot 7{,}85=3000,$$

$$x=\frac{3000}{7{,}85\pi s(2r_1+s)}.$$

a) In diesem Falle ist der innere Durchmesser 270 mm = 0,27 m, also gilt $2r_1=0{,}27$. Die Wandstärke beträgt 6 mm = 0,006 m, also gilt $s=0{,}006$. Wir erhalten daher

$$x=\frac{3000}{7{,}85\pi 0{,}006(0{,}27+0{,}006)}$$

$$=\frac{500000}{7{,}85\cdot 0{,}276\pi},$$

$$x\approx 73500.$$

Es können also Stahlrohre mit einer Gesamtlänge von 73500 m, d. s. 73,5 km, hergestellt werden.

b) In diesem Falle gilt $2r_1=0{,}27$, $s=0{,}0018$, also

$$x=\frac{3000}{7{,}85\pi 0{,}0018(0{,}27+0{,}0018)}$$

$$=\frac{10000000}{7{,}85\cdot 6\cdot 0{,}2718\pi},$$

$$x\approx 249000.$$

Es können also Stahlrohre mit einer Gesamtlänge von 249000 m, d. s. 249 km, hergestellt werden.

Ph 8 ▪1446

Gegeben: $G=60\cdot 3{,}5\,\mathrm{kp}=210\,\mathrm{kp}$

$h=20\,\mathrm{m}$ Gesucht: W

Es ist die Hubarbeit zu berechnen.

$W=G\cdot h$

$W=210\,\mathrm{kp}\cdot 20\,\mathrm{m}$

$W=4200\,\mathrm{kpm}$

Die erforderliche Arbeit beträgt 4200 kpm.

Ch 8 ▪1447 Mischungsformel $m=\dfrac{n(p-b)}{a-p}$

$n=1000\quad p=12{,}5\quad a=25\quad b=10$

$$m=\frac{1000(12{,}5-10)}{25-12{,}5}=200$$

1000 g 10%ige Salzsäure sind demnach mit 200 g 25%iger Salzsäure zu mischen.

Ma 9 ▪1448 Wir bezeichnen die Maßzahlen der Umlaufzeiten (in Jahren) der fünf Planeten mit

$T_1=2{,}4$; $T_2=2{,}9$; $T_3=3{,}8$; $T_4=11$; $T_5=26$

und die Maßzahlen ihrer Abstände von dem Zentralgestirn (in AE) mit

$r_1=0{,}95$, r_2, r_3, r_4, r_5.

Dann gilt nach dem 3. Keplerschen Gesetz

$$r_2^3:r_1^3=T_2^2:T_1^2,$$

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2,$$

$$r_2=r_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\lg r_2=\lg r_1+\frac{2}{3}(\lg T_2-\lg T_1).$$

Für $r_1=0{,}95$, $T_2=2{,}9$, $T_1=2{,}4$ erhalten wir hieraus

$r_2\approx 1{,}08\,\mathrm{AE}\approx 162$ Mill. km.

Ferner erhalten wir

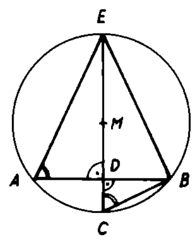
$r_3\approx 1{,}29\,\mathrm{AE}\approx 194$ Mill. km,

$r_4\approx 2{,}62\,\mathrm{AE}\approx 393$ Mill. km,

$r_5\approx 4{,}65\,\mathrm{AE}\approx 698$ Mill. km.

Der fünfte (äußerste) Planet hat also von dem Zentralgestirn einen Abstand, der nur etwas kleiner als der Abstand des Jupiter von der Sonne (5,2 AE) ist.

Ma 9 ▪1449 Verlängert man die Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus bis zu Schnittpunkt E mit dem Kreis, so liegt der Mittelpunkt M des Kreises auf $\overline{ED}$, und es gilt $d=\overline{ED}+\overline{CD}$ (siehe Bild).



Aus $\sphericalangle ADE=\sphericalangle BDC=90°$ und $\sphericalangle EAD=\sphericalangle DCB$ (nach dem Peripheriewinkelsatz) folgt $\Delta ADE=\sim\Delta BDC$.

Wegen $\overline{AD}=\overline{DB}=\dfrac{b}{2}$, $\overline{CD}=a$ folgt hieraus weiter

$$\overline{ED}:\frac{b}{2}=\frac{b}{2}:a,$$

$$\overline{ED}=\frac{b^2}{4a},$$

also $$d=\frac{b^2}{4a}+a.$$

Wegen $b=1{,}2$ m, $a=0{,}2$ m erhält man hieraus

$$d=\left(\frac{1{,}2^2}{4\cdot 0{,}2}+0{,}2\right)\mathrm{m}=(1{,}8+0{,}2)\,\mathrm{m}$$

$$=2\,\mathrm{m}=2000\,\mathrm{mm}.$$

Der innere Durchmesser des Rohres ist also gleich 2000 mm, d. s. 2 m.

Ma 9 ▪1450 Es sei (x, y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{13}{5},\qquad (1)$$

$$x^2+y^2=13.\qquad (2)$$

Dann gilt

$x+y\neq 0$, $x-y\neq 0$, also wegen (1)

$$\frac{x(x-y)+y(x+y)}{x^2-y^2}=\frac{13}{5},$$

$$x^2-xy+xy+y^2=\frac{13}{5}(x^2-y^2),$$

$$x^2+y^2=\frac{13}{5}(x^2-y^2).$$

Wegen (2) ist $x^2+y^2=13$, also

$$13=\frac{13}{5}(x^2-y^2),$$

$$x^2-y^2=5.\qquad (3)$$

Durch Addition von (2) und (3) erhält man

$$2x^2=18\text{, d. h., }x^2=9\qquad (4)$$

und hieraus wegen (2)

$$y^2=13-x^2=13-9=4.\qquad (5)$$

Nun ist die Gleichung (4) für $x=3$ und $x=-3$ erfüllt und die Gleichung (5) für $y=2$ und $y=-2$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Paare

(3, 2), (3, −2), (−3, 2), (−3, −2) sein.

Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind; denn man erhält z. B. für $x=3$, $y=2$

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{3}{3+2}+\frac{2}{3-2}=\frac{3}{5}+2=\frac{13}{5},$$

$x^2+y^2=3^2+2^2=13$ usw.

Ma 9 ▪1451 a) Es seien a_1 die Kantenlänge und A_1 der Flächeninhalt des nicht durch den zweiten Würfel verdeckten Teils der Oberfläche des ersten Würfels. Ferner seien a_2 und A_2, a_3 und A_3, a_4 und A_4 die entsprechenden Größen für den zweiten, dritten und vierten Würfel. Dann gilt

$A_1=5a_1^2,$

$A_2=5a_2^2-a_1^2,$

$A_3=5a_3^2-a_2^2,$

$A_4=6a_4^2-a_3^2.$

Also ist der gesamte Oberflächeninhalt des Körpers gleich

$A=A_1+A_2+A_3+A_4$

$=4a_1^2+4a_2^2+4a_3^2+6a_4^2,$

$A=4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+2a_4^2.$

Nun gilt $a_1=1$ cm, $a_2=2$ cm, $a_3=3$ cm, $a_4=4$ cm, also

$$A=[4(1^2+2^2+3^2+4^2)+2\cdot 4^2]\,\mathrm{cm}^2$$

$$=[4\cdot 30+32\,\mathrm{cm}^2]=152\,\mathrm{cm}^2.$$

Der Oberflächeninhalt des aus den vier Würfeln zusammengesetzten Körpers ist also gleich 152 cm².

b) Für den Fall von n Würfeln erhält man analog wie oben

$A_1=5a_1^2,$

$A_2=5a_2^2-a_1^2,$

$A_3=5a_3^2-a_2^2,$

. . .

$A_{n-1}=5a_{n-1}^2-a_{n-2}^2,$

$A_n\ =6a_n^2-a_{n-1}^2$, also

$A=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{n-1}+A_n$

$=4a_1^2+4a_2^2+4a_3^2+\ldots+4a_{n-1}^2+6a_n^2$

$=4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2)+2a_n^2.$

Für $a_1=1$ cm, $a_2=2$ cm, $a_3=3$ cm, …, $a_n=n$ cm erhält man also

$A=[4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2n^2]\,\mathrm{cm}^2.$

Nun gilt (vgl. Tabellen und Formeln, S. 43, Z. 2 v. u.)

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{, also}$$

$$A=\left[\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+2n^2\right]\mathrm{cm}^2,$$

$$A=\left[\frac{2}{3}n(2n^2+3n+1+3n)\right]\mathrm{cm}^2,$$

$$A=\left[\frac{2}{3}n(2n^2+6n+1)\right]\mathrm{cm}^2.$$

Für $n=4$ erhält man hieraus wie oben

$$A=\frac{2}{3}\cdot 4(2\cdot 4^2+6\cdot 4+1)\,\text{cm}^2$$
$$=\frac{2\cdot 4\cdot 57}{3}\,\text{cm}^2=152\,\text{cm}^2.$$

Für $n=100$ erhält man

$$A=\frac{2}{3}\cdot 100(20000+600+1)\,\text{cm}^2$$
$$=1\,373\,400\,\text{cm}^2.$$

Ph 9 ▪1452

Gegeben: $H=10000\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ Gesucht: m in 8 h

$\eta=0{,}6$ P_{zu}

$P_{ab}=80000\,\frac{\text{kcal}}{\text{h}}$

Der Verbrauch des Heizöls ergibt sich aus seiner Masse und seinem Heizwert. Vorher ist die benötigte Wärmemenge Q zu berechnen.

$$\eta=\frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

$$P_{zu}=\frac{P_{ab}}{\eta}$$

$$P_{zu}=\frac{80000\,\text{kcal}}{0{,}6\,\text{h}}=133\,333\,\text{kcal}\cdot\text{h}^{-1}.$$

In 8 h ist die Wärmemenge

$$Q=133\,333\,\text{kcal}\cdot\text{h}^{-1}\cdot 8\,\text{h}$$
$$=1\,066\,640\,\text{kcal}$$
$$Q=m\cdot H$$
$$m=\frac{Q}{H}$$
$$m=\frac{1\,066\,640\,\text{kcal}\cdot\text{kg}}{10000\,\text{kcal}}=106{,}664\,\text{kg}.$$

Der Verbrauch von Heizöl beträgt 106,664 kg.

Ch 9 ▪1453 $P_2O_5+3H_2O\rightarrow 2H_3PO_4$

100 g 60%ige o-Phosphorsäure enthalten 60 g H_3PO_4. 20 g 60%ige o-Phosphorsäure enthalten x g H_3PO_4.

$$x=\frac{60\cdot 20}{100}=12$$

$$2M_{H_3PO_4}:M_{P_2O_5}=12:x$$
$$2\cdot 97{,}995:141{,}945=12:x$$
$$x=8{,}69$$

In 20 g 60%iger o-Phosphorsäure sind rund 8,7 g Phosphoroentoxid enthalten.

Ma 10/12 ▪1454 Es gilt

$$s=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

und $s=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1,$

also $2s=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots$
$+(n+1)+(n+1)+(n+1),$

$$2s=n(n+1),$$
$$s=\frac{n(n+1)}{2}$$

(vgl. Tabellen und Formeln, S. 43, Z. 5 v. u.). Daraus folgt

$$\frac{s}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

s ist also genau dann durch n teilbar, wenn $\frac{n+1}{2}$ ganzzahlig ist. Ist nun n ungerade, so ist $n+1$ gerade, also $\frac{n+1}{2}$ ganzzahlig. Ist aber n gerade, so ist $n+1$ ungerade, also $\frac{n+1}{2}$ nicht ganzzahlig. Daher ist die Summe s genau dann durch n teilbar, wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist, w. z. b. w.

Ma 10/12 ▪1455 Es sei $h=2nr$ die Höhe des Zylinders und des Kegels. Dann ist das Volumen des Zylinders gleich $V_1=\pi r^2\cdot 2nr$ und das Gesamtvolumen der n Kugeln gleich $V_2=n\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$, also beträgt das Volumen der Wassermenge

$$V=V_1-V_2=2\pi nr^3-\frac{4}{3}\pi nr^3=2\pi nr^3\left(1-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\pi nr^3.$$

Andererseits ist das Volumen des Kegels gleich

$$V'=\frac{\pi}{3}r^2\cdot 2nr=\frac{2}{3}\pi nr^3.$$

Daraus folgt $V=V'$, d. h., das Volumen der Wassermenge ist ebenso groß wie das Volumen des Kegels.

Ma 10/12 ▪1456 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=720. \qquad (1)$$

Da der Mittelwert der Zahlen x, $x+2$, $x+3$, $x+5$ gleich $x+2{,}5$ ist, setzt man $x+2{,}5=t$, also $x=t-2{,}5$, und erhält aus (1) die Gleichung

$$(t-2{,}5)(t-0{,}5)(t+0{,}5)(t+2{,}5)$$
$$=720, \qquad (2)$$
$$\left(t^2-\frac{25}{4}\right)\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=720,$$
$$t^4-\frac{13}{2}t^2+\frac{25}{16}-720=0.$$

Diese in t^2 quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$t^2=\frac{13}{4}+\sqrt{\frac{169}{16}-\frac{25}{16}+720}$$
$$=\frac{13}{4}+\sqrt{729}=\frac{13}{4}+27=\frac{121}{4} \qquad (3)$$

und $t^2=\frac{13}{4}-27=-\frac{95}{4}.$ (4)

Da t^2 nicht negativ sein soll, scheidet die zweite Lösung aus. Wir erhalten aus $t^2=\frac{121}{4}$ die beiden Werte für t:

$$t_1=\frac{11}{2}, \text{ also } x_1=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=3;$$

$$t_2=-\frac{11}{2}, \text{ also } x_2=-\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=-8.$$

Für $x_1=3$ und $x_2=-8$ ist aber auch die Gleichung (1) erfüllt; denn es gilt

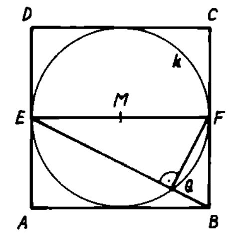
$$3(3+2)(3+3)(3+5)$$
$$=3\cdot 5\cdot 6\cdot 8=720$$

und $(-8)(-8+2)(-8+3)(-8+5)$
$=8\cdot 6\cdot 5\cdot 3=720.$

Die Gleichung (1) hat also genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=3$ und $x_2=-8$.

Ma 10/12 ▪1457 Wir legen einen Schnitt $ABCD$ durch den Würfel und die einbeschriebene Kugel, der durch den Mittelpunkt M der Kugel geht und im Punkt B senkrecht auf der Würfelkante steht, die in der Ebene ε liegt. Dann ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a und dem einbeschriebenen Kreis k, der den Mittelpunkt M hat und Schnittkreis der Kugel ist (siehe Bild).

O. B. d. A. können wir annehmen, daß die Ebene ε auch durch den Punkt E, den Mittelpunkt der Quadratseite $\overline{DA}$, geht. Dann liegt $\overline{BE}$ in der Ebene ε. Bezeichnen wir mit F den Mittelpunkt der Quadratseite $\overline{BC}$, so liegt M auf $\overline{EF}$. Ist Q der Schnittpunkt von $\overline{BE}$ mit dem Kreis k, so ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle FQE=90°$, also ist $\overline{FQ}$ Höhe in dem rechtwinkligen Dreieck FEB.



Da die Punkte E und Q in der Ebene ε und auf der Kugel liegen und M Mittelpunkt dieser Kugel ist, ist $\overline{EQ}=2x$ Durchmesser und x Radius des Kreises, in dem die Ebene ε die Kugel schneidet. Wir berechnen jetzt $\overline{EQ}=2x$ mit Hilfe des Kathetensatzes in dem rechtwinkligen Dreieck FEB und erhalten

$$\overline{EQ}\cdot\overline{EB}=\overline{EF}^2,\ \overline{EQ}=\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EB}}.$$

Wegen $\overline{EF}=a$, $\overline{FB}=\frac{a}{2}$ gilt

$$\overline{EB}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{5},$$

also $\overline{EQ}=2x=\frac{a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}},\ x=\frac{a}{\sqrt{5}}.$

Der Flächeninhalt des Kreises, in dem sich die Ebene ε und die Kugel schneiden, ist also gleich

$$A=\pi x^2=\frac{\pi}{5}a^2.$$

Ph 10/12 ▪1458

Gegeben: $h=4000$ m Gesucht: x_0

$v=500\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$g=9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Der Körper vollführt eine Bewegung von der Art des horizontalen Wurfs.

$$x=v\cdot t;\quad y=\frac{1}{2}gt^2$$
$$x_0=v\cdot t_0;\quad h=\frac{1}{2}gt_0^2$$
$$x_0=v\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\quad t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$x_0=\frac{500000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}\cdot\sqrt{\frac{8000\,\text{m}}{9{,}81\,\text{ms}^{-2}}}$$
$$x_0=3958\,\text{m}$$

Der Körper muß in der Entfernung von 3958 m abgeworfen werden.

Ch 10/12 ▪1459

$$x_1=\frac{10\cdot M_{Na_2CO_3}}{2\cdot 5}$$
$$=\frac{10\cdot 105{,}989}{2\cdot 5}=105{,}989$$

Für die Herstellung von 10 l 0,2n Na_2CO_3 sind 105,989 g reines Natriumkarbonat notwendig.

$$x_2 = \frac{105{,}989 \cdot 100}{95} = 111{,}6$$

Zur Herstellung von 10 l 0,2normaler Lösung sind rund 117 g 95%iges Natriumkarbonat erforderlich.

Lösungen der Aufgaben der Qualifizierungsrunde der schwedischen Mathematikolympiade 1974

▲1▲ Es seien s die Länge des Drahtes, x der Durchmesser des Kreises, y die Seitenlänge des Quadrats.
Dann ist die Summe der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrats gleich

$$A = \frac{\pi}{4}x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Für die Drahtlänge, also für die Summe der Umfänge des Kreises und des Quadrats, gilt

$s = \pi x + 4y$. Aus (2) folgt (2)

$y = \frac{s - \pi x}{4}$. Daher gilt (3)

$$A = \frac{\pi}{4}x^2 + \left(\frac{s-\pi x}{4}\right)^2,$$

$$A = \frac{1}{16}[\pi(\pi+4)x^2 - 2\pi s x + s^2],$$

$$A = \frac{\pi(\pi+4)}{16}\left[\left(x^2 - \frac{2s}{\pi+4}\right)x + \left(\frac{s}{\pi+4}\right)^2 - \left(\frac{s^2}{\pi+4}\right)^2 + \frac{s^2}{\pi(\pi+4)}\right],$$

$$A = \frac{\pi(\pi+4)}{16}\left[\left(x - \frac{s}{\pi+4}\right)^2 + \frac{4s^2}{\pi(\pi+4)^2}\right]. \qquad (4)$$

Folglich wird A ein Minimum, wenn $x = \frac{s}{\pi+4}$.
Wegen (3) gilt dann

$$y = \frac{1}{4}\left(s - \frac{\pi s}{\pi+4}\right) = \frac{s}{\pi+4},$$

also $x : y = \frac{s}{\pi+4} : \frac{\pi+4}{s} = 1 : 1$.

Der Durchmesser des Kreises verhält sich also zu der Seitenlänge des Quadrats wie 1 : 1.

▲2▲ Wir unterscheiden zunächst drei Fälle, je nachdem, ob in das Fach A
1. genau 1 Gegenstand,
2. genau 2 Gegenstände,
3. genau 3 Gegenstände gelegt werden.

1. Fall: Dann gibt es fünf Möglichkeiten für die Belegung des Faches A (je nachdem, ob man den Gegenstand 1, 2, 3, 4 oder 5 hineinlegt).
Liegt jetzt im Fach B auch genau 1 Gegenstand, so gibt es hierfür jeweils vier Möglichkeiten. Liegen jedoch im Fach B genau 2 Gegenstände, so gibt es hierfür jeweils sechs Möglichkeiten, z. B.

(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5).

Liegen jedoch im Fach B genau 3 Gegenstände, so gibt es hierfür jeweils vier Möglichkeiten, z. B.

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 4, 5).

Insgesamt gibt es also im 1. Fall
$5 \cdot (4+6+4) = 5 \cdot 14 = 70$ Möglichkeiten.

Lösungen zu alpha-heiter, 2/76

Aus „TausendundeinTag“
Die Frau besaß 160 Äpfel, denn
$80+40+20+10+10=160$.

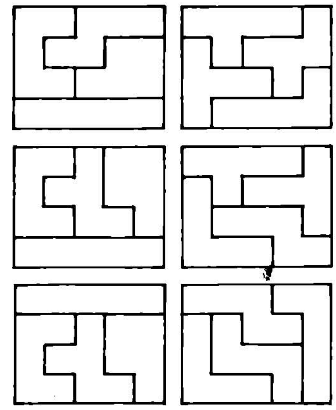
Zur Schulentlassung
$x \cdot (x-1) = 870$
$x_1 = 30$; $x_2 = -29$
30 Schüler wurden entlassen.

3× ALPHA
1. Achse, 2. Klein, 3. Lupus, 4. Sechs, 5. Penta, 6. Alpha, 7. Hyper, 8. Pluto, 9. Anode

Kreuzworträtsel
Waagerecht: 1. Kosinus; 6. Thue; 8. Troege; 10. NO; 11. Ar; 12. AL; 13. Rom; 14. Plage; 16. Gas; 18. RT; 19. er; 20. Italer; 22. neun; 23. Pi; 24. Kathete
Senkrecht: 1. Kotangens; 2. sto; 3. Ideal; 4. Ute; 5. Geometrie; 7. UNO; 9. glatt; 13. Re; 14. PS; 15. Graph; 17. Are; 20. Ina; 21. Lie.

Was bedeutet das?
6 aus 49

5×4=20



Unmögliches wird möglich!
Es gibt 7 Lösungen:

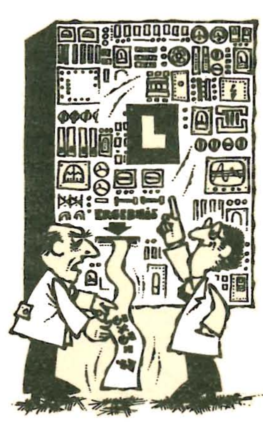
9150	6250	9450	6450
9150	6250	9450	6450
9150	6250	9450	6450
27450	18750	28350	19350

4650	7950	8950
4650	7950	8950
4650	7950	8950
13950	23850	26850

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Durch gute Patenschaftsbeziehungen zum *VEB Zahnradwerk Pritzwalk* ist die Erweiterte Oberschule Pritzwalk seit Dezember 1974 im Besitz einer EDV-Anlage vom Typ R 100. Werktätige dieses Werkes stellten die Anlage auf. Sie wurde uns vom *Chemiefaserwerk Premnitz* (als amortisierte Anlage) zu praktischer Arbeit zur Verfügung gestellt.
Der Rechner dient in erster Linie zur Ausbildung der Schüler im Bedienen und Programmieren der Anlage. Außerdem arbeiten an dieser Anlage die Schüler, die in der wissenschaftlich-praktischen Arbeit auf dem Gebiet der EDV tätig sind.
Die Ergebnisse unseres vorjährigen Sportfestes und des Wettkampfes um die *Urkunde des Staatsratsvorsitzenden* wurden auf dieser Anlage in kurzer Zeit umfassend ermittelt. Im Verlauf der Arbeit entstanden Programme, mit denen Aufgaben aus unseren Lehrbüchern schnell gelöst werden können: z. B. Lösen von Gleichungssystemen; Bestimmen der Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte von ganzrationalen Funktionen bis zum 6. Grad; Bestimmen folgender Funktionswerte: Logarithmus, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen; Aufgaben zur Körperberechnung; Ermittlung von Potenzen, Wurzeln des GgT und kgV, von Binominalkoeffizienten. Unseren Stundenplan erarbeiteten wir auch mit dieser Anlage. Seit mehreren Jahren arbeiten der Betreuer der Anlage und ein Mathematiklehrer unserer Schule an der Lösung dieses Problems. Seit zwei Jahren stellen wir brauchbare Pläne für unsere Schule auf. Die Nacharbeit beträgt etwa 2%, die durch ein Sonderprogramm zufriedenstellend gelöst wird. Wir würden uns freuen, wenn uns Arbeitsgemeinschaften EDV aus ihrer außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten würden.

Arbeitsgemeinschaft EDV der EOS Pritzwalk



BÜCHER MIT MATHE

aus dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

A. S. Solodownikow

Lineare Ungleichungssysteme

98 Seiten, Preis: 5,00 M
Math. Schülerbücherei Nr. 74

Die gegenwärtige intensive Entwicklung der Theorie der linearen Ungleichungssysteme begann erst in den vierziger bis fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts, als das stürmische Wachstum der angewandten Disziplinen (lineare, konvexe und andere Gebiete der mathematischen Optimierung, die sog. Spieltheorie usw.) ein vertieftes und systematisches Studium der linearen Ungleichungen nötig machten. Diese Broschüre möchte den Leser mit verschiedenen Aspekten der Theorie der linearen Ungleichungssysteme vertraut machen; mit geometrischen Aspekten und, eng damit zusammenhängend, mit Lösungsmethoden, mit einigen rein algebraischen Eigenschaften und mit prinzipiellen Fragen der linearen Optimierung. Für die Lektüre werden keinerlei Kenntnisse vorausgesetzt, welche die Ergebnisse des Mathematikunterrichts der Schule überschreiten.

H. Pieper

Zahlen aus Primzahlen

167 Seiten, Preis: 6,70 M

Aus dem Inhalt: Primzahlen; die p-adische Entwicklung der rationalen Zahlen; die p-adischen Zahlen.
Dieses Büchlein stellt eine kurze Einführung in ein Teilgebiet der Mathematik, nämlich in die Arithmetik, in die Theorie der Zahlen dar. *Hensel* nannte es das „reinste und mathematischste Gebiet" der Mathematik. *Gauß* sagte einmal, die Mathematik sei die Königin der Wissenschaften, die Zahlentheorie aber die Königin der Mathematik. Dieses Buch wurde sehr ausführlich geschrieben; es soll mit wenigen Vorkenntnissen verständlich sein. Doch oberflächlich lesen läßt es sich nicht. Man muß mit ihm arbeiten, die Abstraktionen und Schlüsse nachvollziehen, sich Schritt für Schritt die Kenntnisse aneignen, in den Stoff eindringen.

K.-D. Drews

Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben

154 Seiten, Preis: 7,50 M
Math. Schülerbücherei Nr. 89

Themen dieses Buches sind die Bestimmung der Lösungen von linearen Gleichungssystemen, die Matrizenrechnung sowie die Bestimmung der Lösungen von linearen Optimierungsaufgaben. Dabei stehen sowohl die Herleitung der wesentlichen theoretischen Aussagen als auch die Bereitstellung von algorithmisch aufbereiteten Rechenverfahren im Vordergrund, und zwar erfolgt die Entwicklung der Theorie unmittelbar in Verbindung mit den Lösungsalgorithmen. Diese wurden unter den in der Praxis üblichen Verfahren ausgewählt und erhalten Formulierungen, die dem Leser das übersichtliche Durchrechnen von Beispielen ermöglichen, aber auch eine Verwendbarkeit in modernen programmgesteuerten Rechenautomaten erkennen lassen. Der Stoff ist so abgefaßt, daß er für Schüler der Abiturstufe verständlich wird.

N. N. Worobjow

Teilbarkeitskriterien

85 Seiten, Preis: 4,20 M
Math. Schülerbücherei Nr. 52

Aus dem Inhalt: Die Teilbarkeit von Zahlen; die Teilbarkeit von Summen und Produkten; Restgleichheits- und Teilbarkeitskriterien; die Teilbarkeit von Potenzen; Beweise der Sätze, Lösungen der Aufgaben. Die vorliegende Broschüre kann als Beschreibung einer der möglichen *Spaziergänge* am Rande der modernen Mathematik angesehen werden. Die Darlegung grundlegender Dinge, die sich auf Teilbarkeitskriterien beziehen, erlaubt es, einige ziemlich abstrakte Fragen der diskreten Mathematik zu berühren. Dazu gehören vor allem die Aussagen der elementaren Zahlentheorie, die sich um den Hauptsatz der Arithmetik und die kanonische Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gruppieren.
Das Büchlein ist für mathematikinteressierte Schüler der oberen Klassen bestimmt und setzt, von einigen Anwendungen des binomischen Satzes abgesehen, keinerlei Vorkenntnisse voraus.

I. I. Golowina/I. M. Jaglow

Vollständige Induktion in der Geometrie

144 Seiten, Preis: 5,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 75

Aus dem Inhalt: Berechnungen mittels vollständiger Induktion; Beweise mittels vollständiger Induktion (Aufgaben über Karten, Färbungsprobleme); Vollständige Induktion bei Konstruktionen; Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion; Definition mittels vollständiger Induktion; Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl; ...; Lösung der Aufgaben. Das Buch wendet sich an Schüler der höheren Klassen der Erweiterten Oberschulen. Es kann vorteilhaft im Unterricht und zur Arbeit im Mathematikzirkel verwendet werden.

A. O. Gelfond

Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen

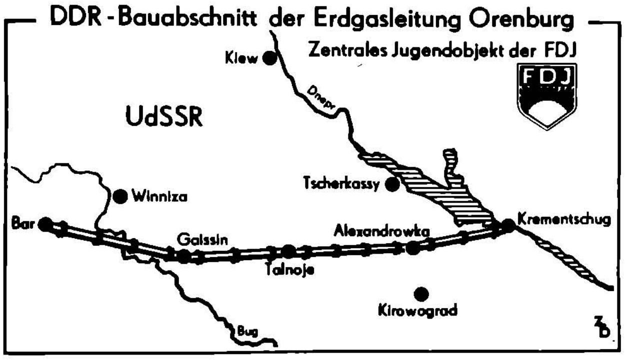
(Diophantische Gleichungen)

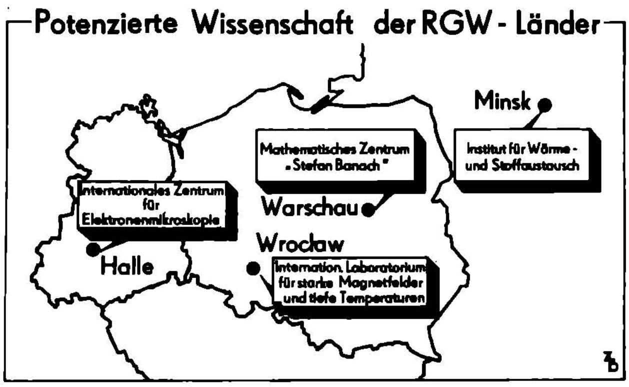
59 Seiten, Preis: 3,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 22

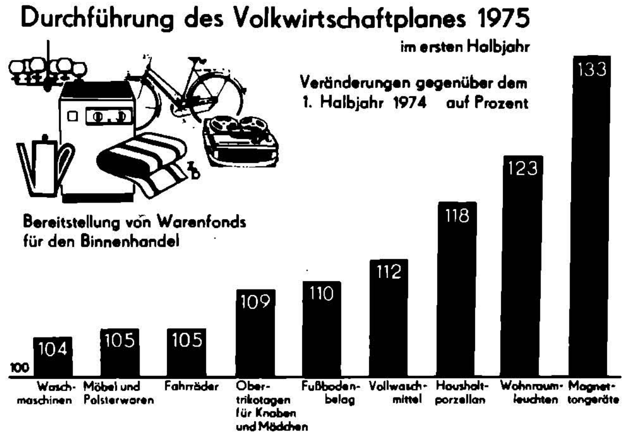
Aus dem Inhalt: Gleichungen mit einer Unbekannten; Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten; Beispiele für Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten; Gleichungen der Form $x^2 - Ay^2 = 1$. Die Ermittlung aller Lösungen dieser Gleichung; die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten; Gleichungen höheren als zweiten Grades mit zwei Unbekannten; algebraische Gleichungen höheren Grades als zweiten Grades mit drei Unbekannten und einige Exponentialgleichungen.
Das vorliegende Büchlein behandelt eines der interessantesten Gebiete der Zahlentheorie, nämlich die Auflösung von sogenannten diophantischen Gleichungen.

Fakten und Zahlen

Für die Betreuung von Kindern werktätiger Mütter

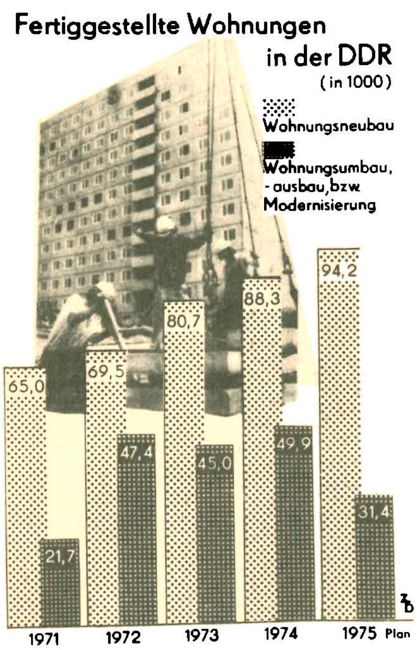


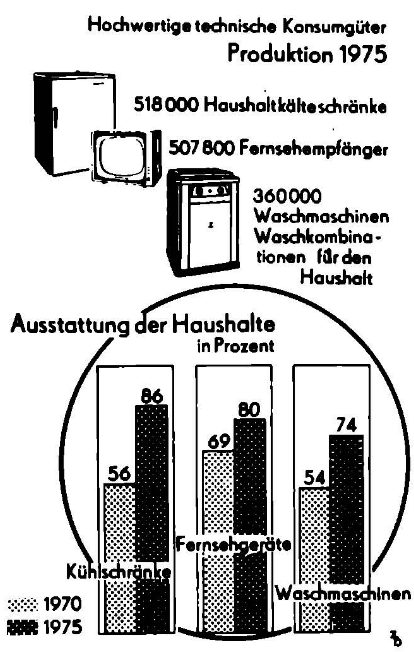


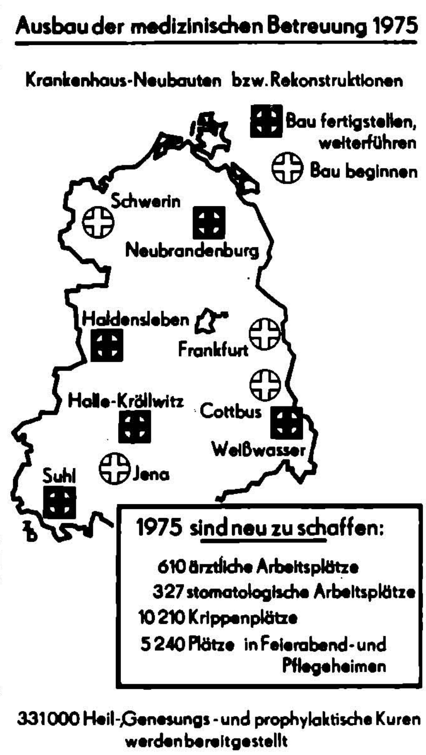


Was sagt eigentlich die Statistik heute zur Gleichberechtigung der Frau?
Daß 49 Prozent aller Berufstätigen in unserer Republik Frauen und damit 85 Prozent aller arbeitsfähigen Frauen berufstätig sind; daß jeder 3. Abgeordnete, 5. Bürgermeister, 3. Richter, 2. Schöffe, jeder 5. Schuldirektor, 10. Leiter in der Industrie, jeder 2. Hoch- oder Fachschulabsolvent eine Frau ist.

Wir haben mit der Gründung der DDR sehr darauf geachtet, die führenden Positionen unseres Staates mit bewährten Vertretern der Arbeiterklasse zu besetzen – gilt das heute noch?
Zahlen mögen antworten: Der Arbeiterklasse entstammen 57 Prozent aller Volkskammerabgeordneten, 60 Prozent aller Abgeordneten der örtlichen Volksvertretungen, 75 Prozent der Leiter in der sozialistischen Volkswirtschaft, 74 Prozent der Richter, 80 Prozent der Offiziere der NVA.

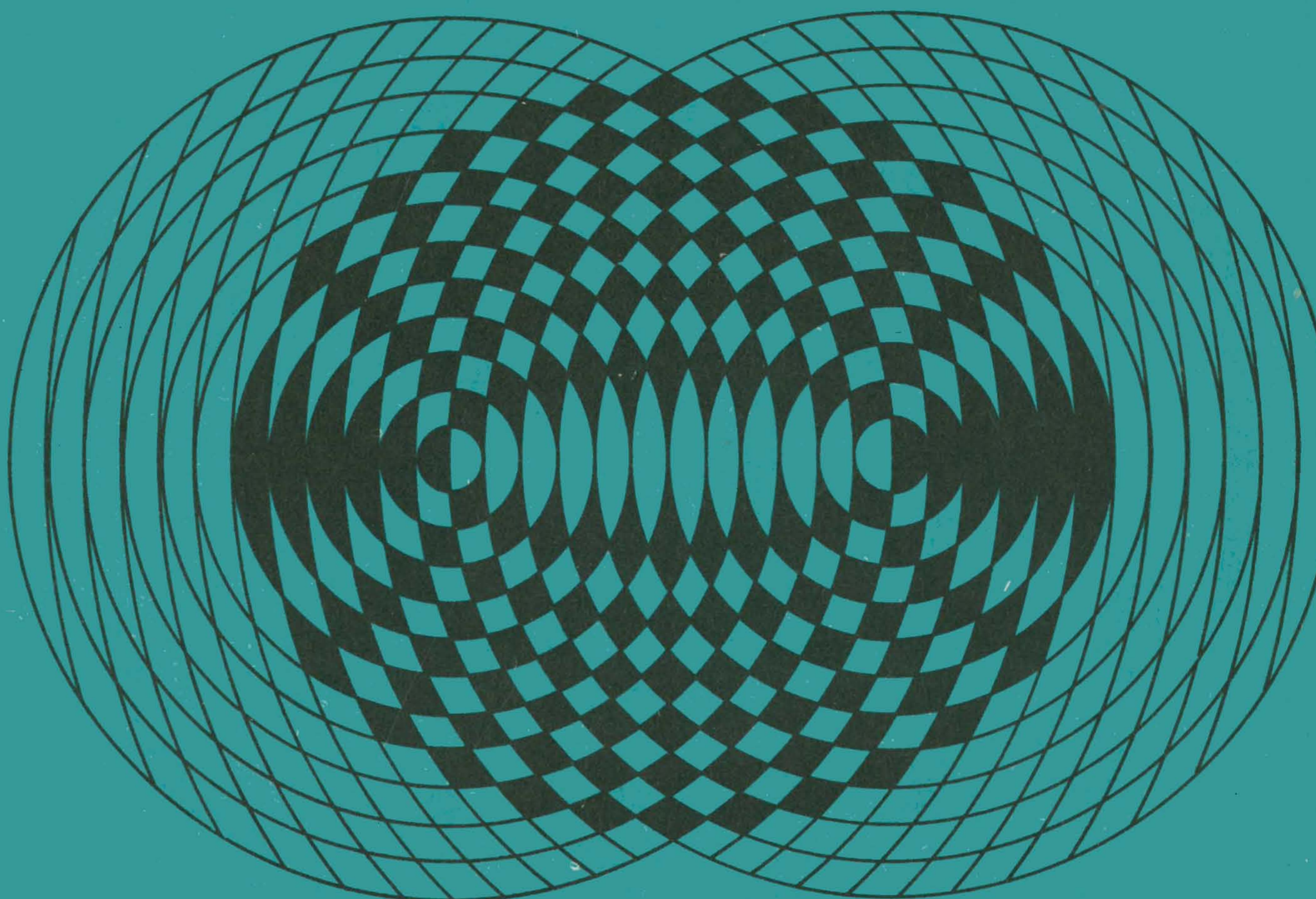






Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Titelblatt nach der österreichischen mathematischen Zeitschrift für junge Mathematiker π; Eigenfoto (S. 51); J. Lehmann, Leipzig (S. 55); *Vignetten:* K.-H. Guckuk, Leipzig; Ch. Pollmer, Dresden; Jerzy Flisak (VR Polen); Josef Kaczmarczyk (VR Polen); Gabbert, Berlin; J. Freiberg, Leipzig (S. 59); Pullwit, LVZ Leipzig (IV. U.-Seite)
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. Februar 1976

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Kombinatorik und binomischer Satz

Teil 1

1. Man erzählt sich, daß zu Beginn unseres Jahrhunderts zehn Schüler, die gerade das Gymnasium in *Sankt Petersburg* absolviert hatten, beschlossen, dieses Ereignis in einem der besten Restaurants auf dem *Newski* zu feiern. In diesem Restaurant bestellten sie ein vorzügliches Abendessen. Sie stritten sich aber plötzlich darum, wo jeder sitzen sollte. Einer wollte unbedingt mit dem Gesicht zur Bühne sitzen, auf der eine bekannte Sängerin auftrat; ein anderer wollte nicht am Durchgang sitzen; dem dritten gefiel der Platz in der Ecke nicht. Außerdem wollte jeder einen bestimmten linken und rechten Nachbarn haben.

„Was ist los, Herrschaften?", wollte der auf diesen Lärm herbeigekommene Wirt wissen. Die jungen Leute erklärten es ihm. „Sie können sich also nicht einigen, wie Sie sitzen wollen", lachte der Wirt, „nehmen Sie doch jeweils diejenigen Plätze ein, an denen Sie sich gerade befinden. Morgen nehmen Sie dann dieselben zehn Plätze in einer anderen Reihenfolge ein, übermorgen wieder in einer anderen usw. Wenn Sie alle Möglichkeiten der Sitzreihenfolge ausprobiert haben, dann erhält jeder von Ihnen für sein ganzes Leben eine Blanco-Karte (kostenlose Karte) für mein Restaurant."

Es war für die jungen Leute natürlich verlockend, ihre Eltern nicht um Geld bitten zu müssen und trotzdem täglich in einem der besten Petersburger Restaurants unentgeltlich essen zu können. Von nun an trafen sie sich regelmäßig jeden Tag auf dem *Newski.* Manchmal kamen sie auch zum Mittagessen. Eine kostenlose Bewirtung ergab sich jedoch nicht. Das lag aber nicht daran, daß der Wirt sein Versprechen nicht einhielt.

Man kann aus den zwei Buchstaben A und B zwei „Wörter" mit je zwei Buchstaben bilden: AB und BA. Allgemein gibt es für die Anordnung von zwei Elementen genau zwei Möglichkeiten. Wir können auch noch ein drittes Element C vor dieses Paar AB stellen. Dann erhalten wir CAB; man kann auch C zwischen das Paar stellen, dann ergibt sich ACB; schließlich kann sich C auch hinter dem Paar befinden, so daß wir ABC erhalten. Dasselbe kann man auch mit dem Paar BA durchführen. Wir erhalten CBA, BCA bzw. BAC.

Für drei Elemente existieren also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten der Anordnung. Aus drei Elementen kann man sechs „Permutationen" bilden – sogenannte Vereinigungen, die sich voneinander in der Anordnung ihrer Elemente unterscheiden.

Die Anzahl der Permutationen von k Elementen bezeichnet man mit P_k, d. h.

$$P_2 = 2$$
$$P_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

Es seien k Dinge (Elemente) gegeben, von denen wir alle möglichen P_k Permutationen bilden. Nehmen wir eine davon:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_k$$

Nun fügen wir noch das $(k+1)$-te Element hinzu. Dieses Element läßt sich

1) vor dem ersten Element a_1;

2) vor dem zweiten Element a_2;

. . . .

k) vor dem k-ten Element a_k;

k + 1) nach allen gegebenen k-Elementen anordnen.

Es gibt also für das $(k+1)$-te Element genau $k+1$ Möglichkeiten, d. h., die Anzahl der Permutationen aus $(k+1)$ Elementen ist

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k+1)$$

P_2 und P_3 haben wir unmittelbar berechnet. Jetzt wollen wir unsere Überlegungen fortsetzen und dabei aus Symmetriegründen jeweils den Faktor 1 ergänzen:

$$P_2 = 1 \cdot 2,\ P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$
$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \ldots,$$
$$P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k,$$
$$P_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1)$$

Definition: Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl k nennt man Fakultät der Zahl k und bezeichnet es mit „$k!$".

Beispiele:

$$P_2 = 1 \cdot 2 = 2! = 2,$$
$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6,$$
$$P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k = k! \qquad (1)$$

Berechnen wir einmal die Anzahl der Permutationen von zehn Elementen:

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10! = 3\,628\,800$$

Wenn wir unter dieser Anzahl Tage verstehen, so entspricht das Ergebnis einer Zeit von fast 10000 Jahren.

...Wenn unsere zehn jungen Leute täglich sogar dreimal im Restaurant am Newski essen würden, könnten sie den Wirt immer noch nicht dazu bringen, sein Versprechen über die kostenlose Bewirtung einzuhalten.

2. Die Permutationen unterscheiden sich also voneinander durch die Anordnung ihrer Elemente. Zur Berechnung der Anzahl der Permutationen benutzten wir das Prinzip der vollständigen Induktion. Dazu mußten wir

1) die Anzahl der Permutationen von zwei (oder drei) Elementen unmittelbar berechnen;

2a) die Gesetzmäßigkeit der Veränderung der Anzahl der Permutationen durch das Hinzufügen von noch einem Element berücksichtigen (Vergrößerung der Anzahl der Elemente um 1);

2b) diese Gesetzmäßigkeit beweisen.

Manchmal wird diese Gesetzmäßigkeit, von der unter 2) gesprochen wurde, vorausgesetzt oder als zu beweisende Hypothese gegeben.

Aufgaben

▲1▲ Zur Wiederholung des Prinzips der vollständigen Induktion überprüfe die folgenden Hypothesen:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) = k^2$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

▲2▲ Berechne:

a) $\frac{10!}{3!}$ b) $\frac{P_8 - P_7}{P_6}$ c) $\frac{11}{6!} + \frac{43}{7!}$

▲3▲ Bestimme die Summe der Quersummen aller fünfstelligen Zahlen, die aus den Ziffern 1, 4, 6, 7 und 8 (ohne Wiederholung) bestehen!

▲4▲ Wieviel verschiedene fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 2, 4, 6, 8 und 0 (ohne Wiederholung) bilden?

3. Musteraufgabe 1:

Es seien 26 Zettel mit verschiedenen Buchstaben

$$A, B, C, \ldots, Z$$

(ohne Wiederholung) gegeben. Wieviel verschiedene vierstellige Wörter lassen sich aus ihnen bilden?

Selbstverständlich besitzen hier viele dieser „Wörter" keinen Sinn, z. B. $KLMN$. Wir wollen aber trotzdem die Anzahl aller möglichen Wörter berechnen.

Lösung: Für die Lösung dieser Aufgabe bereiten wir eine Tafel für ein vierstelliges Wort vor:

— — — —

Für den ersten Buchstaben gibt es offenbar 26 Möglichkeiten. Damit erhalten wir genau 26 einstellige Wörter. Für die 2. Stelle kann man jetzt einen der verbleibenden 25 Buchstaben auswählen. Auf diese Art und Weise bekommen wir 25 mit A beginnende zweistellige Wörter, ebenfalls 25 mit B beginnende usw. Das ergibt insgesamt $26 \cdot 25$ zweistellige Wörter.

Für die Auswahl des dritten Buchstabens verbleiben noch 24 Möglichkeiten (da wir ja die ersten beiden Buchstaben dafür nicht mehr verwenden können). Wir erhalten also $26 \cdot 25 \cdot 24$ Möglichkeiten für die dreistelligen Wörter. Die gesuchten vierstelligen Wörter ergeben schließlich die folgende Anzahl:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$$

Darunter befinden sich z. B. auch diese Wörter:

DORA DORN NORD NORM

Die ersten beiden Wörter unterscheiden sich nur in einem Buchstaben; das zweite und dritte Wort nur in der Reihenfolge der Buchstaben; das dritte und vierte Wort wieder in einem Buchstaben. Allgemein können sich verschiedene Wörter voneinander durch die Wahl der Buchstaben oder durch die Reihenfolge ihrer Anordnung unterscheiden.

Definition: Vereinigungen, die sich durch die Wahl der Elemente oder durch die Reihenfolge ihrer Anordnung unterscheiden, heißen Variationen.

(Wir behandeln hier die Variationen ohne Wiederholungen. Ein Element darf nur einmal auftreten.)

Die Anzahl aller Variationen bezeichnen wir mit dem Buchstaben V und entsprechenden Indizes. Wie weiter oben bereits gezeigt wurde, ist die Anzahl der Variationen von 26 Elementen zu je 4 gleich:

$$V_{26}^4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$$

Manchmal sagt man auch: Variationen von 26 Elementen zur 4. Klasse, allg.: von n Elementen zur k-ten Klasse.

Aufgaben

▲5▲ Formuliere eine Regel dafür, wie die Anzahl der Variationen von n Elementen zu je k (dabei ist natürlich $k \leq n$) zu berechnen ist! Schreibe die entsprechende Formel auf!

▲6▲ Berechne:
a) V_{10}^3 b) V_{12}^2 c) V_7^3

▲7▲ Wieviel verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich aus den folgenden Ziffern bilden?
a) 3, 4, 5, 6 b) 2, 3, 4, 5, 6
c) 1, 2, 3, 4, 5, 6
d) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ohne Wiederholung)

Zum Aufschreiben der Anzahl der Variationen ist es manchmal günstig, die Schreibweise der Fakultät zu benutzen, z. B.

$$V_{26}^4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot (22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 22} = \frac{26!}{22!}$$

oder in allgemeiner Form:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

▲8▲ Berechne:
a) $\dfrac{V_{13}^5 + V_{13}^4}{V_{13}^3}$ b) $\dfrac{V_{10}^k \cdot P_{10-k}}{P_9}$

▲9▲ Löse die folgenden Gleichungen:
a) $V_x^2 = 90$ b) $V_y^2 = 42$ c) $V_x^3 = 56 \cdot x$

4. Musteraufgabe 2:

Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 (ohne Wiederholung) bilden?

Um auf diese Frage antworten zu können, schreiben wir die verlangten dreistelligen Zahlen wie folgt auf:

123	124	579
231	241	795
312	412	
132		
213		
321		

In der ersten Spalte stehen alle dreistelligen Zahlen, die aus den ersten drei angegebenen Ziffern bestehen, in den folgenden Spalten die entsprechenden Zahlen aus den anderen Ziffern. Es ist selbstverständlich, daß in jeder Spalte genau sechs verschiedene dreistellige Zahlen stehen, die aus ein und denselben Ziffern bestehen, aber in unterschiedlicher Reihenfolge geschrieben sind.

Erkläre, weshalb es genau sechs Zahlen pro Spalte gibt!

Lösung: Unsere dreistelligen Zahlen unterscheiden sich voneinander entweder durch die Ziffernauswahl (in den verschiedenen Spalten) oder durch die Reihenfolge ihrer Anordnung (in ein und derselben Spalte). Für die Antwort auf diese Fragestellung ist es erforderlich, die Anzahl der Variationen aus 7 Elementen zu je 3 zu bestimmen:

$$V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

Musteraufgabe 3:

Wieviel verschiedene Produkte lassen sich aus drei Faktoren bilden, wenn man die sieben in der Musteraufgabe 2 angegebenen Ziffern benutzt?

(Produkte sollen verschieden heißen, wenn sie sich nicht nur in der Reihenfolge der Anordnung ihrer Faktoren unterscheiden.)

Lösung: Es gibt genau soviel voneinander verschiedene Produkte, wie es Spalten gibt, d. h. um soviel weniger, wie es verschiedene dreistellige Zahlen in jeder der Spalten gibt. Die Antwort auf diese Aufgabenstellung erhalten wir durch Division:

$$\frac{V_7^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{210}{6} = 35$$

Definition: Vereinigungen, die sich nur durch die Auswahl der Elemente unterscheiden, heißen Kombinationen.

Die Anzahl aller Kombinationen bezeichnet man mit dem Buchstaben C und entsprechenden Indizes. Wie wir sahen, ist die Anzahl aller möglichen Kombinationen aus 7 Elementen zu je 3 gleich:

$$C_7^3 = \frac{V_7^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \quad \text{oder}$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

C_7^3 wird gelesen als „Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholungen von 7 Elementen zu je 3 (oder zur 3. Klasse)“. Dieser Term ist identisch mit dem Binominalkoeffizienten $C_7^3 \equiv \binom{7}{3}$. Manchmal braucht man auch $\binom{0}{0} = 1$.

Aufgaben

▲10▲ Formuliere eine Regel dafür, wie man die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zu je k berechnet (natürlich mit $k \leq n$), und schreibe die entsprechende Formel auf!

▲11▲ Berechne:
a) C_{10}^4 b) C_8^3 c) C_8^5

▲12▲ Löse die folgenden Gleichungen!
a) $C_x^2 = 21$ b) $5 \cdot C_x^3 = C_{x+2}^4$ c) $C_x^4 = \dfrac{15\,V_x^2}{4}$

▲13▲ Eine FDJ-Gruppe hat 20 Mitglieder. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, daß drei von ihnen in die Gruppenleitung gewählt werden?

▲14▲ In einer Sportsektion gibt es 10 gute Volleyballspieler. Auf wieviel Möglichkeiten läßt sich aus ihnen eine Mannschaft (mit 6 Spielern) zusammenstellen?

▲15▲ Es ist leicht zu überprüfen, daß $C_5^2 = C_5^3$. Überprüfe, ob auch $C_{12}^7 = C_{12}^5$ und $C_{20}^{12} = C_{20}^8$ gelten! Formuliere die analoge Eigenschaft in allgemeiner Form!

5. Musteraufgabe 4:

In einer Moskauer Schule beschlossen 20 Absolventen, sich an der Mechanisch-Mathematischen Fakultät der Lomonossow-Universität zu bewerben. Nach dem Ablegen der Aufnahmeprüfung wurde eine Liste mit den Namen der zum Studium Zugelassenen ausgehängt. Auf dieser Liste befanden sich 13 Namen von diesen 20 Absolventen.

Wieviel verschiedene Listen mit 13 Namen lassen sich aus den 20 Absolventen dieser Moskauer Schule bilden?

Lösung: Zwei verschiedene Listen der Aufgenommenen müssen sich voneinander mindestens durch einen Namen unterscheiden, d. h., es gibt soviel verschiedene Listen, soviel verschiedene Kombinationen es aus 20 Elementen zu je 13 gibt, nämlich C_{20}^{13}.

Auf der Liste der Abgelehnten standen natürlich die Namen der anderen 7 Absolventen dieser Schule. Sie bekamen ihre Bewerbungsunterlagen zurück. Es ist klar, daß es mit diesen Abgelehnten soviel verschiedene Listen gibt, soviel es Kombinationen aus 20 Elementen zu je 7 gibt, nämlich C_{20}^7.

Jeder Name der 20 Absolventen muß entweder in der Liste der Aufgenommenen oder in der Liste der Abgelehnten erscheinen. Jeder Liste der Aufgenommenen entspricht genau eine Liste der Abgelehnten und umgekehrt.

Die Menge X (der verschiedenen Listen der Aufgenommenen) und die Menge Y (der verschiedenen Listen der Abgelehnten) stehen in einer eindeutigen Zuordnung zueinander. Jedem Element der ersten Menge entspricht genau ein Element der zweiten Menge und umgekehrt. Daraus folgt, daß diese beiden Mengen eine gleiche Anzahl von Elementen enthalten, d. h.

$$C_{20}^{13}=C_{20}^{7}.$$

Wenn sich an der Universität n Absolventen bewerben würden, von denen k angenommen und die übrigen $n-k$ abgelehnt würden, so könnten wir unsere Überlegungen wortwörtlich wiederholen und als Schlußfolgerung gewinnen, daß

$$C_n^k=C_n^{n-k} \qquad (3)$$

Es ist noch anzumerken, daß wir diese Ergebnisse ohne Berechnungen, nur auf der Grundlage von logischen Überlegungen erhalten haben. Dieses Resultat kann man aber auch unmittelbar aus der Formel für die Anzahl der Kombinationen erhalten (unter Verwendung der Fakultät):

$$C_{20}^{13}=\frac{V_{20}^{13}}{P_{13}}=\frac{\frac{20!}{(20-13)!}}{13!}=\frac{20!}{7!\,13!}$$

$$C_{20}^{7}=\frac{V_{20}^{7}}{P_7}=\frac{\frac{20!}{(20-7)!}}{7!}=\frac{20!}{13!\,7!}$$

Aufgaben

▲16▲ Unter Verwendung der Fakultät ist herzuleiten, daß

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

▲17▲ Überprüfe die folgenden Gleichungen!

a) $C_7^3+C_7^2=C_8^3$ b) $C_p^k+C_p^{k-1}=C_{p+1}^k$

▲18▲ Löse die Gleichungssysteme!

a) $C_x^{y+1}:C_x^y:C_x^{y-1}=5:5:3$

b) $\begin{cases} V_x^y:V_x^{y-1}=8 \\ C_x^y:C_x^{y-1}=1{,}6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} V_x^y:V_x^{y-1}=10 \\ C_x^{y-1}:C_x^y=0{,}6 \end{cases}$

▲19▲ In einer Hochschule hat ein Lehrstuhl für Mathematik 9 Mitarbeiter. Wieviel Möglichkeiten gibt es für das Aufstellen eines Konsultationsplanes für 9 Tage, wenn jeder Mitarbeiter genau eine Konsultation abhalten soll und wenn an jedem Tage nur ein Mitarbeiter eine Konsultation durchführt?

▲20▲ Eine FDJ-Leitung hat 9 Mitglieder. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür, aus dieser Leitung eine dreiköpfige Delegation für einen Besuch im Patenbetrieb zusammenzustellen?

▲21▲ Die 9 Mitglieder einer Gewerkschaftsleitung müssen einen Vorsitzenden, einen Sekretär und einen Kassierer wählen. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür?

▲22▲ Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür, daß 3 Soldaten und ein Unteroffizier zum Dienst eingeteilt werden, wenn dafür 15 Soldaten und 4 Unteroffiziere zur Verfügung stehen?

6. Musteraufgabe 5:

Die Basketballspieler einer Sportgemeinschaft trainierten im Winter unregelmäßig. Manchmal kamen alle 9 Spieler zusammen, manchmal nur 2 oder 3. Der Trainer wollte berechnen, wieviel verschiedene Möglichkeiten es für die Anwesenheit von verschiedenen Mannschaften in der Turnhalle gibt.

„Heute ist noch keiner erschienen. Das ist eine Möglichkeit. Vielleicht kommt einmal ein Spieler allein. Dann kann er nur das Werfen des Balles ins Netz üben und nicht spielen. Für diesen Fall gibt es bei 9 Spielern also 9 Möglichkeiten.“ Der Trainer notierte sich: $1+9=10$

„Es können auch 2 Spieler kommen“, überlegte er weiter. „Gestern kamen Arthur und Bernd, vorgestern Bernd und Claus. Das sind wieder verschiedene Mannschaften.“

Der Trainer rechnete und rechnete und gab es schließlich auf. Wieviel verschiedene Mannschaften von Basketballspielern können sich in der Turnhalle befinden? (Die Mannschaften nennen wir dann voneinander verschieden, wenn sie sich in der Anzahl der Spieler oder in den Spielern selbst unterscheiden.)

Lösung: Um die Anzahl der verschiedenen Mannschaften zu berechnen, teilen wir sie nach der Anzahl der anwesenden Spieler in Gruppen ein:

	Möglichkeiten
1) Es war kein Spieler anwesend	1
2) Es kam 1 Spieler von den 9 Spielern	9 oder C_9^1
3) Es kamen 2 von den 9 Spielern	C_9^2
. . . . .	
9) Es kamen 8 von den 9 Spielern	C_9^8
10) Es kamen alle 9 Spieler	1

Die Gesamtzahl der Möglichkeiten erhalten wir durch Addition:

$$C_9^0+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6+C_9^7+C_9^8+C_9^9$$

Dieser Ausdruck läßt sich unter Benutzung des Summenzeichens auch kürzer schreiben:

$$\sum_{k=0}^{9} C_9^k.$$

Hierbei wird über k in den Grenzen von 0 bis 9 summiert. *A. Halameisär*

(Fortsetzung in Heft 4/76, d. Red.)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Leopold Schmetterer

Universität Wien

▲1534▲ Der Entdecker einer (außerordentlich ergiebigen) Wasserquelle stellt diese auch anderen zur Verfügung, behält sich jedoch das Recht vor, die Wasserentnahme im Einklang mit der folgenden Vorschrift zu reglementieren: Jeder neu hinzukommende Nutznießer darf (etwa pro Tag) niemals mehr Wasser entnehmen, als sämtliche bisher schon zugelassenen Verbraucher im Mittel pro Tag bekommen. Man überlege sich:

a) Der Entdecker hat sich auf diese Weise das Recht gesichert, mindestens so viel Wasser zu entnehmen, wie jeder andere schon partizipierende oder neu hinzukommende Verbraucher.

b) Immer, wenn ein weiterer Benützer hinzukommt, bleibt die im Mittel entnommene Wassermenge gleich, oder nimmt sogar ab. (Wenn also die Anzahl der Benützer über alle Grenzen wächst, strebt die im Mittel entnommene Wassermenge einem Grenzwert zu.)

c) Der Entdecker hat sich durch die eben getroffene Regelung das Recht vorbehalten, gewisse Benützer zu benachteiligen. Es kann sich z. B. im Einklang mit dieser Regelung folgende Situation ergeben:

Im allgemeinen erhält jeder Benützer mindestens 10 l, aber bei stets anwachsender Verbraucherzahl gibt es immer wieder Benützer, die nur wenig mehr als 1 l erhalten. (Statt 10 l und 1 l kann man allgemein b l und a l mit $b>a$ wählen.)

Mit Bewegung geht es besser

Bei der XIV. Bezirksolympiade *Junger Mathematiker* (1975) wurde für die Klassenstufe 11/12 folgende Aufgabe gestellt:

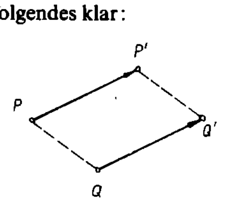
Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Man begründe und beschreibe die Konstruktion eines Fünfecks $ABCDE$, für das F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind. Man untersuche, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, daß das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, daß Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise oder in der Verlängerung voneinander liegen.

Ihr werdet mit gewissem Recht gleich einwenden, daß die Behandlung von Olympiadeaufgaben dieser obersten Stufe hier eigentlich fehl am Platze ist. Euer Einwand mag noch berechtigter erscheinen, wenn man berücksichtigt, daß gerade diese Geometrieaufgabe den Teilnehmern erhebliche Schwierigkeiten bereitete. Nun, gerade hier werden wir sehen, daß mit euren Schulkenntnissen über Bewegungen (in der Ebene) übersichtlich und einfach die Lösung der Konstruktionsaufgabe erarbeitet, begründet und beschrieben werden kann. Dabei können wir die Aufgabenstellung sogar noch etwas allgemeiner fassen, indem wir die Voraussetzung „..., von denen keine drei auf derselben Geraden liegen" weglassen.

Zunächst wollen wir einige Kenntnisse über Bewegungen wiederholen, vertiefen und erweitern.

Wenn ihr euch die zeichnerische Darstellung einer *Verschiebung* vor Augen haltet, so ist euch folgendes klar:

Bild 1



(1) *Eine (eindeutig umkehrbare) Abbildung der Punkte der Ebene auf sich ist genau dann eine Verschiebung, wenn für je zwei Punkte P und Q und ihre Bilder P' und Q' die gerichteten Strecken $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{QQ'}$ gleiche Länge und gleiche Orientierung besitzen.* (Demnach bilden $PQQ'P'$ ein Parallelogramm, falls P, P' und Q nicht auf ein und derselben Geraden liegen; Bild 1.) Zu zwei Punkten A und B gibt es also eine und nur eine Verschiebung, die A in B abbildet. Diese Verschiebung soll hier kurz mit V_{AB} bezeichnet werden.

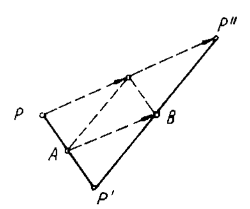
Ferner kennt ihr *Drehungen*, speziell *Drehungen um 180°* (wobei es in diesem Fall auf die Drehrichtung nicht ankommt!). Diese speziellen Drehungen werden auch *Punktspiegelungen* genannt. Diese Bezeichnung ist recht treffend, denn sie besitzen – wie euch bekannt ist – folgende Eigenschaft.

(2) *Eine Spiegelung an einem Punkt A ist diejenige (eindeutig umkehrbare) Abbildung der Ebenenpunkte auf sich, bei der A in sich übergeht und für jeden Punkt $P \neq A$ und sein Bild P' der Punkt A Mittelpunkt von $\overline{PP'}$ ist.*

Die Spiegelung am Punkt A wollen wir hier kurz mit S_A bezeichnen. Wir führen nun zwei Punktspiegelungen nacheinander aus. Die Schreibweise S_AS_B soll heißen, daß zuerst die Abbildung S_A und danach die Abbildung S_B ausgeführt wird. Mit der Nacheinanderausführung von speziellen Bewegungen habt ihr euch bereits an verschiedenen Stellen des Mathematikunterrichts befaßt. Wir wollen untersuchen, welche Bewegung wir in unserem Falle erhalten.

Bei der Nacheinanderausführung S_AS_B betrachten wir einen beliebigen Punkt P. Das Bild von P sei P''.

Bild 2



Auf Grund der Beschreibung der Punktspiegelung (siehe (2)) und an Hand des Bildes 2 könnt ihr leicht erkennen, daß die gerichtete Strecke $\overrightarrow{PP''}$ doppelt so lang wie die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ ist und beide gleiche Orientierung haben. Da dies für jeden Punkt P der Fall ist (überlegt euch das auch für den speziellen Fall, daß P auf der Verbindungsgeraden von A und B liegt!), ergibt sich jetzt nach der Beschreibung (1) für Verschiebungen der

(3) *Satz: Das Resultat der Nacheinanderausführung S_AS_B zweier Punktspiegelungen ist gleich dem Doppelten der Verschiebung V_{AB}.*

Zusatzaufgabe 1: Welche Beziehung besteht zwischen S_AS_B und S_BS_A?

Nun zeigen wir noch den

(4) *Satz: Die Nacheinanderausführung $(S_AS_B)S_C$ dreier Spiegelungen an Punkten A, B, C (ergibt die) Spiegelung an demjenigen Punkt D, der das Bild von A bei der Verschiebung V_{BC} ist.*

Beweis: Bei der Verschiebung V_{BC} geht A in einen Punkt D über, und es sind dann die Verschiebungen V_{BC} und V_{AD} gleich. Aus dieser Gleichheit folgt nach dem Satz (3), daß $S_BS_C = S_AS_D$ ist. Führen wir vor der Bewegung S_BS_C erst noch die Bewegung S_A aus, so erhalten wir $S_A(S_BS_C) = S_A(S_AS_D)$. Bei der Nacheinanderausführung von Bewegungen kommt es zwar auf ihre Reihenfolge, aber nicht auf die Reihenfolge ihrer Zusammenfassung an. Ein Beispiel dafür gibt die Zusatzaufgabe 1. (Man sagt dafür auch kurz, daß für die Nacheinanderausführung von Bewegungen das *assoziative* Gesetz gilt.) In unserem Falle ist also $S_A(S_BS_C) = (S_AS_B)S_C$ und $S_A(S_AS_D) = (S_AS_A)S_D$. (Deshalb kann man statt $(S_AS_B)S_C$ einfach $S_AS_BS_C$ schreiben.) Da die Nacheinanderausführung einer Punktspiegelung mit sich selbst die identische Abbildung ist, gilt nun $(S_AS_B)S_C = S_D$, w. z. b. w.

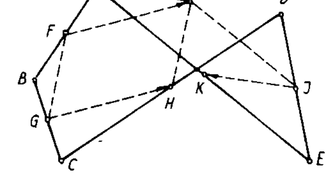
Wir können uns nun ganz der eigentlichen Aufgabe zuwenden.

Gibt es zu Punkten F, G, H, I, K solche Punkte A, B, C, D, E, die der Aufgabenstellung genügen, so ist B das Bild von A bei der Spiegelung an F und entsprechend so weiter und schließlich A das Bild von E bei der Spiegelung an K. Dann geht A bei der Nacheinanderausführung $S_FS_GS_HS_IS_K$ in sich über. Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Punktes A mit dieser Eigenschaft, daß es eindeutig bestimmte Punkte B, C, D, E gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Als B ist nämlich das Bild von A bei der Spiegelung an F zu wählen, und Entsprechendes gilt für C, D und E.

Nun ist noch zu klären, ob und welche Punkte bei der zusammengesetzten Bewegung $S_FS_GS_HS_IS_K$ festbleiben. Nach dem Satz (4) ist $S_FS_GS_H$ die Spiegelung an einem Punkt L, und damit ist – wiederum nach (4) – $S_FS_GS_HS_IS_K = S_LS_IS_K$ die Spiegelung an einem Punkt M. Bei einer Punktspiegelung S_M ist nun bekannt, daß der Punkt M und nur dieser fest bleibt.

Unsere bewegungsgeometrischen Überlegungen ergeben also in überraschend einfacher und übersichtlicher Weise:

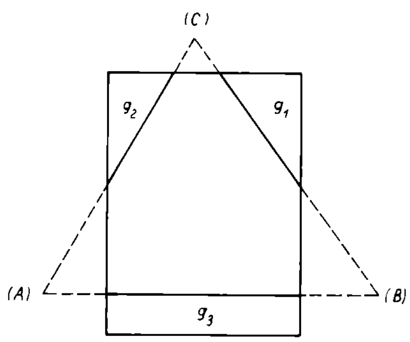
Bild 3



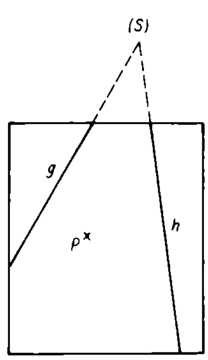
Die vorgelegte Konstruktionsaufgabe besitzt stets eine und nur eine Lösung. Diese kann wie folgt beschrieben werden (siehe Bild 3): Durch die Verschiebung V_{GH} geht der Punkt F in einen Punkt L über. Dann wird L um V_{IK} in einen Punkt A verschoben. Die übrigen Punkte B, C, D, E werden schrittweise dadurch gewonnen, daß A an F, dann B an G,

Konstruktionen in einer begrenzten Zeichenebene

1. Die Abbildung stellt die Umrisse eines Zeichenblattes dar, in das drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die paarweise verschiedene Richtung haben, eingezeichnet sind. Die Schnittpunkte A, B und C dieser Geraden liegen außerhalb des Zeichenblattes. Es ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte unzugänglich sind, zu konstruieren. Dabei ist die Konstruktion nur auf dem gegebenen Zeichenblatt auszuführen.



2. Gegeben seien zwei Geraden g und h, deren unzugänglicher Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt und ein Punkt P, der zwischen diesen Geraden liegt. Es ist die Gerade PS zu konstruieren.

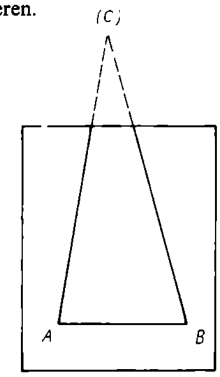


C an *H* und schließlich *D* an *I* gespiegelt wird. (Alle diese Konstruktionsschritte sind einfach mit dem Lineal und Zirkel, ja sogar einfach mit Lineal und Zeichendreieck ausführbar.)

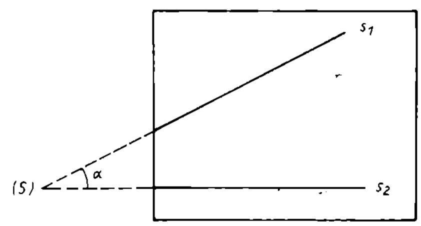
Zusatzaufgabe 2: Untersuche die völlig analoge Aufgabenstellung bezüglich vierer Punkte!

E. Quaisser

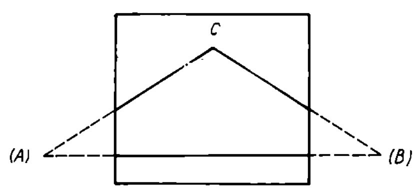
3. Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C unzugänglich ist. Es ist die Senkrechte zur Geraden AB durch C zu konstruieren.



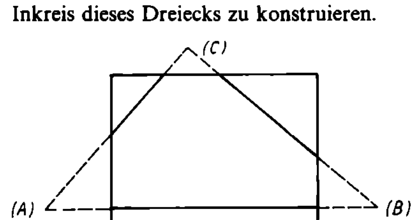
4. Gegeben sei ein Winkel α mit den Schenkeln s_1 und s_2 und dem unzugänglichen Scheitel S. Es ist die Halbierungslinie des Winkels α zu konstruieren.



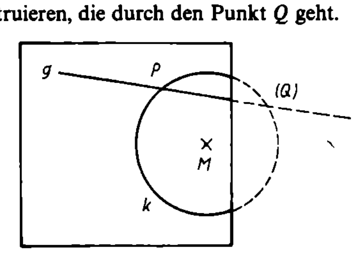
5. Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte A und B beide unzugänglich sind. Es ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ durch Konstruktion zu bestimmen.



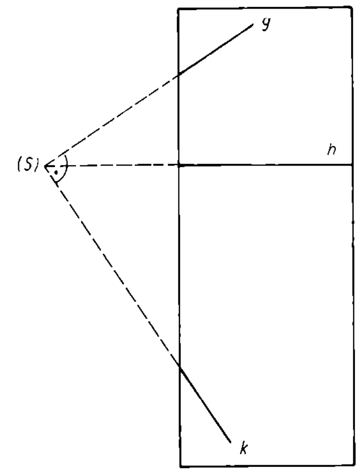
6. Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte sämtlich unzugänglich sind. Es ist der Inkreis dieses Dreiecks zu konstruieren.



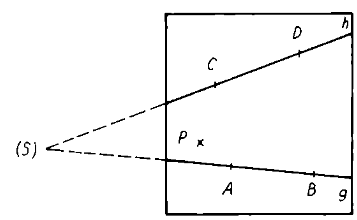
7. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade g, die den Kreis k in dem Punkt P und in dem unzugänglichen Punkt Q schneidet. Es ist eine Sekante zu konstruieren, die durch den Punkt Q geht.



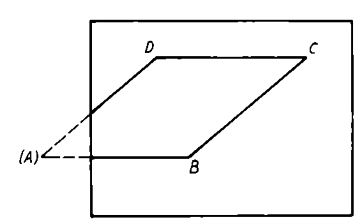
8. Gegeben seien zwei Geraden g und h, deren Schnittpunkt S außerhalb der Zeichenebene liegt. Es ist eine dritte Gerade k so zu konstruieren, daß sie durch den Punkt S geht und senkrecht auf der Geraden g steht.



9. Auf einem rechteckigen Zeichenblatt seien zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, die auf den Geraden g bzw. h liegen. Die Geraden g und h schneiden einander in einem Punkt S, der außerhalb des Zeichenblattes liegt. Ferner sei auf dem Zeichenblatt ein Punkt P gegeben, der innerhalb des durch die Geraden g und h bestimmten Winkels liegt. Es ist eine Strecke zu zeichnen, die auf der Verbindungsgeraden des Punktes P mit dem Schnittpunkt S von g und h liegt.



10. Gegeben sind drei Punkte B, C und D, die in einer rechteckigen Zeichenfläche liegen. Diese drei Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$, dessen vierter Eckpunkt A außerhalb der Zeichenfläche liegt.



Es ist eine Strecke zu konstruieren, die auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAD$ mit dem unzugänglichen Punkt A liegt.

Th. Scholl

Rückblick auf die XVII. IMO

Es ist nun schon zu einer guten Tradition geworden, daß die DDR-Mannschaft während der IMO von jeder teilnehmenden Mannschaft eine Aufgabe für unsere *alpha*-Leser erhält. Wir danken *Uwe Quasthoff* (Teiln. der XVII. IMO) und *Wolfgang Burmeister* (TU Dresden) für die Bearbeitung der gestellten Probleme.

Volksrepublik Bulgarien

Man finde im Innern eines spitzwinkligen Dreiecks den Punkt M, für den der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ maximal wird, wobei A', B', C' die Fußpunkte der Lote von M auf die Dreiecksseiten sind.

Deutsche Demokratische Republik

$Q(x)$ bezeichne die Quersumme der Zahl x, und n sei eine durch 9 teilbare Zahl mit weniger als 10 Milliarden Ziffern.
Man zeige, daß $Q(Q(Q(n)))=9$ ist.

Republik Frankreich

Man zeige, daß für positive Zahlen a, b, c folgende Ungleichung gilt:
$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

Republik Griechenland

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein Winkel ϕ. H sei der auf AB gelegene Höhenfußpunkt des Dreiecks. Man konstruiere Punkt I und K auf BC bzw. AC, so daß $\overline{IH}=\overline{IK}$ und $\sphericalangle KHI=\phi$ gilt, falls solche Punkte existieren.

Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland

An einer Mathematikolympiade beteiligen sich n Länder mit je zwei Teilnehmern. Es stehen die Klausurräume A und B zur Verfügung. Die $2n$ Teilnehmer werden in ungeordneter Folge in eine Reihe gestellt und durchnumeriert. Nr. 1 geht in Raum A. Der zweite bis $2n$-te Teilnehmer geht in den Raum, in den der Teilnehmer vor ihm ging, wenn der andere Teilnehmer seines Landes nicht bereits dort ist, sonst in den anderen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Raum A zuerst gefüllt ist?

Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien

Man beweise für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung
$$(n!)! > (n-1)!^{n!}$$

Mongolische Volksrepublik

In der Ebene sind $2n$ Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, daß mindestens ein Dreieck entsteht, wenn man mehr als n^2 der Verbindungsstrecken zeichnet.

Königreich der Niederlande

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 seien fünf beliebige positive reelle Zahlen. Man zeige, daß man aus ihnen P_k und P_l so auswählen kann, daß
$$0<\frac{1}{P_k+25}-\frac{1}{P_l+25}<\frac{1}{100} \text{ gilt.}$$

Republik Österreich

Man zeige, daß die Gleichung
$$x^2-2y^2=7$$
unendlich viele ganzzahlige Lösungspaare x, y besitzt.

Volksrepublik Polen

Man betrachte die Summe
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2n+1}$$
aus reellen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Wird ein beliebiges Glied a_i aus der Summe gestrichen, so können die übrigen Glieder so umgruppiert werden, daß zwei gleich große Teilsummen verbleiben.
Man weise nach, daß dann
$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{2n+1}$ ist.

Sozialistische Republik Rumänien

Es seien k und p natürliche Zahlen mit
$$k^2=p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)(p+7).$$
Man beweise, daß $k=p=0$ ist.

Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken

Gegeben seien n konvexe Figuren in der Ebene, von denen je zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Man zeige, daß dann eine Gerade existiert, die mit jeder der Figuren einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Königreich Schweden

Gegeben sei eine Funktion mit der Gleichung $y=f(x)$ und den Eigenschaften
1. $f(0)=0$
2. Für alle $x\geqq 0$ ist $f(x+1)=f(x)+\sqrt{x}$
3. Für alle $x\geqq\frac{1}{2}$ ist $2f(x)<f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Man bestimme $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Tschechoslowakische Sozialistische Republik

Gegeben sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABQ mit der Hypotenuse AP. Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, daß die Punkte B, C, P sowie die Punkte C, D, Q auf je einer Geraden liegen. Außerdem ist die Seitenlänge des Quadrats durch die Länge a der Katheten des gegebenen Dreiecks APQ auszudrücken.

Ungarische Volksrepublik

n sei eine natürliche Zahl. Man berechne die Summe
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}.$$

Vereinigte Staaten von Amerika

Gegeben ist ein Stoß von N Karten, darunter genau drei Asse. Die Karten werden von oben nach unten einzeln umgedreht, bis das zweite As gewendet ist. Man zeige, daß die zu erwartende Anzahl von umzudrehenden Karten $\frac{N+1}{2}$ ist (unter der zu erwartenden Anzahl versteht man die durchschnittliche Anzahl für alle möglichen gleichwahrscheinlichen Kartenverteilungen).

Demokratische Republik Vietnam

Man finde für eine gegebene positive ganze Zahl n die größte reelle Zahl p, so daß für beliebige positive Zahlen A_i, B_i die Ungleichung
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{B_i}\geq p\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i}{\sum_{i=1}^{n}B_i}$$
erfüllt ist.

Mathematikolympiaden in Österreich

Wettbewerbe für Schüler auf dem Gebiet der Mathematik haben in Österreich noch keine große Tradition. Erst im Jahre 1969 entschloß sich das *Bundesministerium für Unterricht und Kunst*, einen solchen Bewerb jährlich durchzuführen.
Die Ziele der österreichischen Mathematikolympiaden entsprechen denen anderer Länder, die solche Bewerbe veranstalten. An der Spitze stehen wohl die Entdeckung und Förderung von mathematischen Talenten. Da eine spezielle Förderung wegen einer zu geringen Wochenstundenzahl im obligatorischen Unterricht kaum gegeben ist, können sich interessierte Schüler zu Vorbereitungskursen melden. In diesen Kursen lernen die Schüler Beweisverfahren kennen, werden mit immer schwierigeren Aufgaben konfrontiert und zur Beschäftigung mit der Mathematik

auch außerhalb der unterrichtlichen Zeit motiviert. Wir unterscheiden zwischen einem *Anfängerkurs* für Schüler, die noch an keinem Wettbewerb teilgenommen haben, und einem weiterführenden *Fortgeschrittenenkurs*. Die schönen Erfolge, die österreichische Schüler bei Internationalen Olympiaden in den letzten Jahren erringen konnten, zeigen, daß diese Maßnahme notwendig und richtig ist. Die Bewerbe werden getrennt für Anfänger und Fortgeschrittene durchgeführt. Die Anfänger bestreiten zunächst einen *Kurswettbewerb*. Die besten Schüler der Kurse bewerben sich dann um die Ehre eines *Landessiegers*. Von einem *Bundesbewerb* wurde in den letzten Jahren abgesehen. Wichtiger als der Bewerb erscheint uns eine Verlängerung der Kurstätigkeit.

Die Bewerbe der Fortgeschrittenen werden in drei Stufen durchgeführt: Kurs-, Gebiets- und Bundesbewerb. *Gebietswettbewerbe* werden meist in drei Städten veranstaltet. Die besten Schüler der drei Gebiete (insgesamt etwa 30) werden vor dem *Bundesbewerb* zu einem 14tägigen Spezialkurs zusammengefaßt. Die besten acht Schüler werden für die IMO nominiert. Wegen der Kurstätigkeit sind die Bewerbe nicht über das ganze Jahr verteilt, sondern beginnen erst Ende April. Alle Bewerbe werden in Form von Klausuren durchgeführt.

Das Interesse der Schüler an der Mathematikolympiade ist ständig im Steigen begriffen. Während im Gründungsjahr nur etwa 23 Kurse geführt werden konnten, so haben wir in diesem Jahr rund 1000 Anmeldungen allein zu den Anfängerkursen. Dies ist zweifelsohne noch nicht die gewünschte Breitenwirkung.

Vielleicht wird uns die XVIII. IMO in Österreich dem Ziel, daß alle mathematischen Talente an der Olympiade teilnehmen, näherbringen.

Th. Mühlgassner/W. Ratzinger

Aufgaben – gestellt von der österreichischen IMO-Delegation 1975

1. Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a, b, c, dem Umkreisradius R und den Punkten U (Umkreismittelpunkt) und H (Höhendurchschnittpunkt). Man beweise:

$$9R^2 = \overline{UH}^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

2. Man finde alle Paare x, y von natürlichen Zahlen, für die die Gleichung

$$x^5 - xy^2 + y^2 - 1 = 0$$

gilt.

3. Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{\frac{-n^2+3n+4}{2}}$$

irrational ist.

Eine Aufgabe von W. Redtenbacher

Mitglied der österreichischen Mannschaft bei der XIV., XV. und XVI. IMO

▲1535▲ a) Es sind alle reellen Lösungen (x_1, x_2) des Gleichungssystems

$$x_1^4 + (x_1x_2)^4 = 1, \quad (1)$$
$$x_1^5 + (x_1x_2)^5 = 1 \quad (2)$$

zu ermitteln.

b) Die obige Aufgabe ist auf den Fall von n Variablen ($n \geqq 2$) zu verallgemeinern. Es sind also alle reellen Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Gleichungssystems

$$x_1^{2n} + (x_1x_2)^{2n} + (x_1x_2x_3)^{2n} + \ldots + (x_1x_2\ldots x_n)^{2n} = 1, \quad (1)$$
$$x_1^{2n+1} + (x_1x_2)^{2n+1} + (x_1x_2x_3)^{2n+1} + \ldots + (x_1x_2\ldots x_n)^{2n+1} = 1 \quad (2)$$

zu ermitteln.

Mag. Th. Mühlgassner (Eisenstadt) und Mag. W. Ratzinger (Linz) – Iniatoren österreichischer Mathematikolympiaden – Delegationsleitung der österr. IMO-Mannschaft.

IMO-Teilnehmer der DDR stellen Aufgaben

▲1▲ Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n beliebige positive reelle Zahlen ($n \geqq 2$) und m eine natürliche Zahl mit $m \geqq 2$.

1. Man beweise, daß dann gilt:

$$\frac{\sqrt[m]{a_1} + \sqrt[m]{a_2} + \ldots + \sqrt[m]{a_n}}{n} \leqq \sqrt[m]{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}. \quad (1)$$

2. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

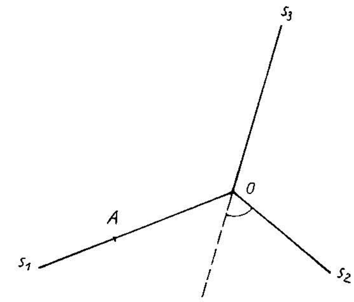
Ralph Lehmann, Petershagen

▲2▲ Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen m und n mit $n \geqq 1$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$s = \frac{1}{1 \cdot (m+1)} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{(2m+1)(3m+1)} + \ldots + \frac{1}{((n-1)m+1)(nm+1)} = \frac{n}{mn+1}$$

Hans-Gert Gräbe, Halle

▲3▲ In einer Ebene seien ein Punkt O und drei von diesem Punkt ausgehende Strahlen s_1, s_2, s_3 gegeben, wobei die orientierten Winkel $\sphericalangle(s_1, s_2)$, $\sphericalangle(s_2, s_3)$, $\sphericalangle(s_3, s_1)$ sämtlich größer als 0° und kleiner als 180° sind und die Verlängerung von s_3 über O hinaus mit den Strahlen s_1 und s_2 je einen spitzen Winkel bildet. Ferner sei ein Punkt A auf s_1 gegeben, der nicht mit O zusammenfällt (vgl. die Abb.).



Es soll ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt B auf s_2 und dessen Eckpunkt C auf s_3 liegt, so konstruiert werden, daß die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ auf den Winkelhalbierenden dieses Dreiecks liegen. *Hans-Gert Gräbe, Halle*

▲4▲ Man beweise, daß die Zahl $2^k + 1$ keine Primzahl ist, wenn k eine natürliche Zahl ist, die sich nicht als Potenz von 2 darstellen läßt, wenn also $k \neq 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$ ist. *Hans-Jürgen Schmidt, Greifswald*

▲5▲ Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ eine Fibonaccische Folge, d. h. eine Folge, für die $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ und $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ für $n \geqq 2$ gilt.

a) Man entscheide, ob die unendliche Reihe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{2^k} = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \frac{u_3}{2^3} + \ldots + \frac{u_n}{2^n} + \ldots$$

konvergiert und berechne gegebenenfalls ihre Summe.

b) Man entscheide, ob auch die unendliche Reihe

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \ldots$$

konvergiert und gebe bejahendenfalls einen Näherungswert für ihre Summe an, wobei eine Genauigkeit von 1% ausreichen soll.

Hinweis zur Lösung: Zur Lösung kann die Formel

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

benutzt werden (vgl. N. N. Worobjow: Die Fibonaccischen Zahlen. Berlin 1971, S. 29).

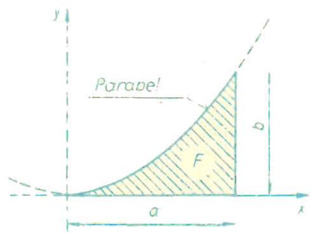
Klaus Altmann, Berlin

Herleitung der Fläche unter der Parabel ohne Integralrechnung

In jedem besseren Tabellenbuch wird die Fläche unter der Parabel (Bild 1) mit

$$F=\frac{1}{3}a\cdot b$$

angegeben, die z. B. in der Statik häufig benötigt wird.



Berechnet wird diese Fläche F durch Integration der quadratischen Funktion $y=\frac{b}{a^2}x^2$

$$F=\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2dx=\frac{b}{a^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{3}\,(a^3-0^3)$$

$$=\frac{1}{3}a\cdot b$$

Hier soll gezeigt werden, daß diese Fläche auch ohne Integration berechnet werden kann.

Man benutzt dabei folgenden Kunstgriff:

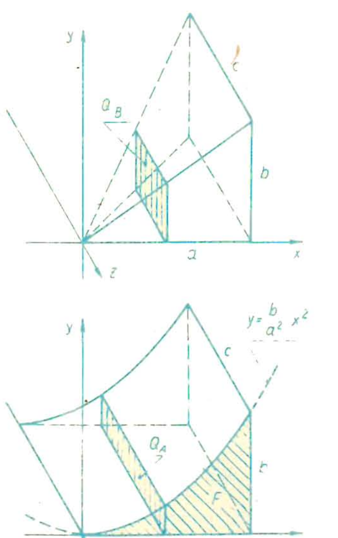


Bild 2 zeigt zwei unterschiedliche Körper, die volumengleich sind, was sich mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri beweisen läßt.

Das Cavalierische Prinzip besagt:
Körper mit inhaltsgleichem Querschnitt in gleichen Höhen haben gleiches Volumen.
Die Länge a der Körper soll hier als Höhe im Sinne des Cavalierischen Prinzips aufgefaßt werden.
Die Querschnittsflächen der Körper betragen in Höhe x (mit $0\leqq x\leqq a$):

Körper A

$$Q_{Ax}=c\cdot\frac{b}{a^2}x^2$$

Körper B

$$Q_{Bx}=\frac{b}{a}x\cdot\frac{c}{a}x \qquad \text{(Strahlensatz!)}$$

D. h. $Q_{Ax}=Q_{Bx}$

Daraus folgt nach dem Cavalierischen Prinzip

$V_A=V_B$.

Nachdem die Volumengleichheit der Körper A und B bewiesen ist, läßt sich die Größe der gesuchten Fläche F leicht herleiten:

$$V_A=F\cdot c \qquad \text{(Prisma)}$$

$$V_B=\frac{1}{3}b\cdot c\cdot a \qquad \text{(Pyramide)}$$

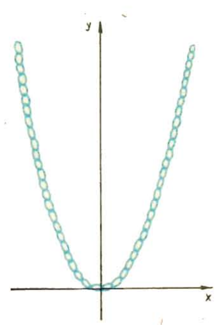
Da $V_A=V_B$ und $F\cdot c=\frac{1}{3}b\cdot c\cdot a$

ist $\quad F=\frac{1}{3}a.\,b$

M. Wilde

Satz des Cavalieri: Wenn für zwei Körper mit gleich langen Höhen und gleichen Grundflächeninhalten gilt, daß parallel zur Grundflächenebene in beliebigen, aber jeweils gleichen Abständen von dieser geführte Schnitte stets zu Schnittflächen mit gleich großen Flächeninhalten führen, so haben die beiden Körper gleiche Volumina. (Lehrbuch Klasse 8, S. 80)

Ringparabel



Mathematik in der Pädagogischen Hochschule „Wolfgang Ratke", Köthen

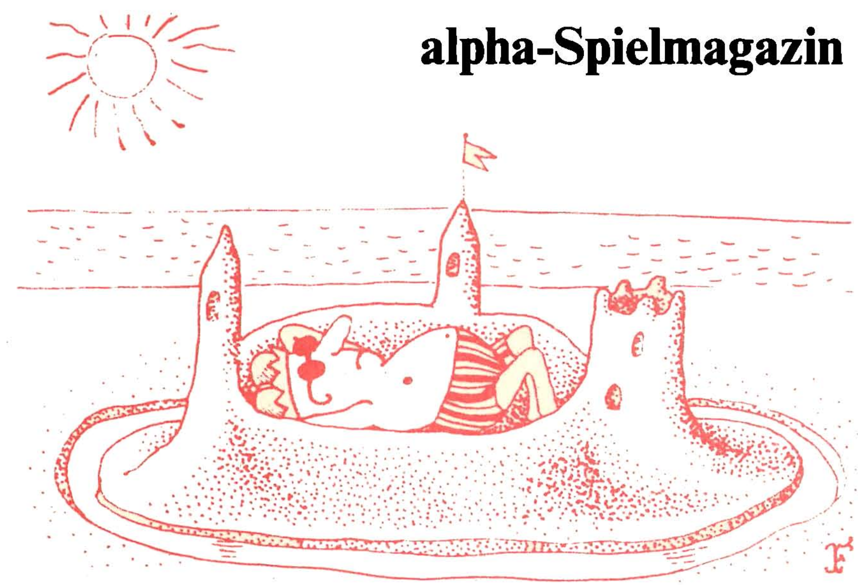
Die jüngste Pädagogische Hochschule der DDR befindet sich in der im Bezirk Halle gelegenen Kreisstadt Köthen. Dem seit September 1963 bestehenden Pädagogischen Institut wurde am 1. 9. 1974 der Status einer *Pädagogischen Hochschule* verliehen.
Unsere Ausbildungsstätte für Fachlehrer in den Kombinationen *Mathematik/Chemie, Chemie/Biologie* und *Biologie/Chemie* trägt den Namen des Humanisten und Pädagogen *Wolfgang Ratke*, der in den Jahren 1618/19 in Köthen wirkte.
An der Sektion Mathematik werden jährlich 90 Studenten der Fachrichtung *Mathematik/Chemie* immatrikuliert. Entsprechend dem gültigen Lehrprogramm werden sie in einem vierjährigen Studium als Diplomlehrer ausgebildet.

RATIO VICIT VETUSTAS CESSIT

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE KÖTHEN WOLFGANG RATKE

Die Hochschullehrer und wissenschaftlichen Mitarbeiter der Sektion Mathematik arbeiten in den Lehrkollektiven *Theoretische Mathematik, Angewandte Mathematik* und *Methodik des Mathematikunterrichts.* Obwohl die Sektion Mathematik erst seit 1972 besteht, hat sich die mathematische Forschung bereits gut entwickelt. Unsere Algebraiker beschäftigen sich mit den universell-algebraischen und kategorientheoretischen Grundlagen abstrakter Automaten; die Geometer führen Untersuchungen über die Anwendung des Schrägspiegelungskalküls in den Naturwissenschaften durch. Unter Anleitung wissenschaftlicher Mitarbeiter beschäftigen sich einige unserer Diplomanden mit einem System zur maschinellen Leistungskontrolle. Eine Forschungsgruppe Prozeßoptimierung befindet sich im Aufbau. Die Mitglieder des Lehrkollektivs Methodik arbeiten im Rahmen der Schulbuchforschung an der Verbesserung der Mathematiklehrbücher.

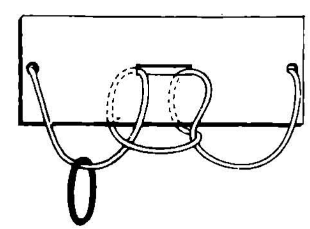
alpha-Spielmagazin



Betrachtet aufmerksam die sechs Zeichnungen, zieht in Gedanken die jeweiligen beiden Schnurenden auseinander! In vier Fällen entsteht dabei kein Knoten. In zwei Fällen aber ergibt sich beim Auseinanderziehen der Enden ein Knoten. Welche Schlingen sind das?

Brettchen, Schnur und Ring

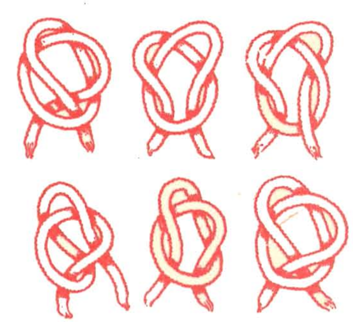
Ein Brett hat an den Seiten zwei kleine Löcher und in der Mitte einen Schlitz. Eine



3

Anfangspunkt zurückkehrt. Wenn man das vor dem Zusammenkleben einmal gedrehte Band rechtwinklig übereinanderklebt, schneidet man es auf der Mittellinie am Rande beginnend und auf der anderen Seite am Rande endend.

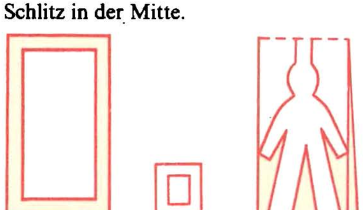
Wer löst den Knoten?



Lösung: Man löst die Schere, indem man die Schlaufe vom rechten Ring lockert, durch den linken Ring zieht und über die ganze Schere schiebt. Dann kann man die Schere glatt abstreifen.

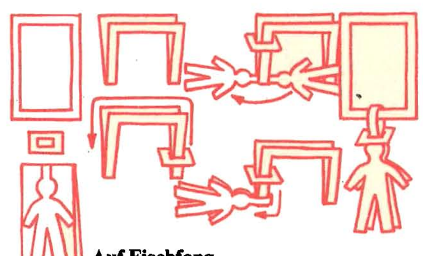
Wie kommt das Männlein in den Rahmen?

Aus festem Karton schneiden wir uns einen rechteckigen Rahmen und im Faltschnitt laut Bild zwei Männlein, die durch einen Steg verbunden sind, sowie ein Rechteck mit einem Schlitz in der Mitte.



6

Lösung: Der Rahmen wird gefaltet und das Rechteck darübergeschoben. Ein Männlein stecken wir zwischen dem Rahmen hindurch und falten es auf das andere. Nun schieben wir das Rechteck nach rechts, stülpen es über den Steg und öffnen den Rahmen.



Auf Fischfang

Dieses Unterhaltungsspiel ist für zwei Beteiligte vorgesehen. Vor jedem Spieler liegt ein Blatt kariertes Papier, das 10 mal 10 = 100

„Ich werfe auf E 6" und Rolf: „Ich werfe auf B 2." Wirft Rolf, trägt Peter in seinem Quadratfeld die Würfe von Rolf ein und sagt entweder „Nicht gefangen" oder, wenn Peter traf, „Haifisch getroffen". So geht es abwechselnd weiter, bis schließlich einer der Spieler sagen muß: „Ich habe verloren, alle Fische sind gefangen."
Man tut gut, die auf das Quadratfeld des anderen geworfenen Netze auf einer zweiten Spielfeldzeichnung zu vermerken, damit nicht auf ein bestimmtes Feld mehrmals geworfen wird.

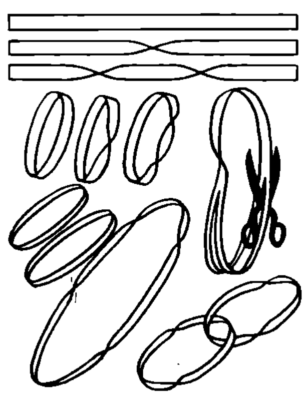
Gewundert

Der sportliche Vati erzählte seinem Sohn: „Da gab es damals einen Römer, der jeden Morgen vor dem Frühstück dreimal über den Tiber schwamm. Ist das nicht fabelhaft, Karsten?"
„Na ja", zögerte der Kleine, „ich wundere mich nur, warum dieser Held nicht viermal geschwommen ist, damit er wenigstens an dem Ufer ankam, an dem seine Sachen lagen!" *aus: LVZ, 27./28. 9. 75*

8

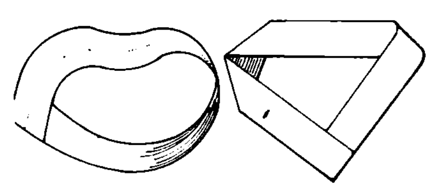
Die Zauberringe

Wir schneiden aus festem Papier drei lange Streifen in Breite von je 20 mm und kleben sie in verschiedener Weise zusammen:



den ersten zu einem einfachen Ring (siehe Bild), den zweiten drehen wir vor dem Zusammenkleben einmal und den dritten vor dem Zusammenkleben zweimal. Nun behaupten wir, daß 3 verschiedene Lösungen entstehen, wenn wir die Ringe der Länge nach aufschneiden. Das Ergebnis ist überraschend. Versucht es erst selbst einmal!

Interessant sind noch folgende Möglichkeiten: Das vor dem Zusammenkleben einmal gedrehte Band wird im Abstand eines Drittels der Streifenbreite vom Rand entfernt parallel zu diesem aufgeschnitten, bis man wieder zum

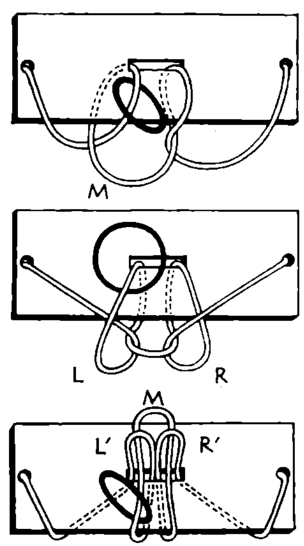


2

Schnur ist durch diese Öffnungen geschlungen – genau wie abgebildet. Die Enden der Schnur sind hinten befestigt oder mit je einem Knoten versehen.

In der linken Schlaufe hängt ein Ring. Es wird verlangt, den Ring in die rechte Schlaufe zu bringen, ohne die Schnüre zu lösen oder das Brett zu zersägen. Der Ring geht auch nicht etwa durch den Schlitz zu stecken. Man kann erst einmal solch ein „Brett“ aus Pappe basteln und probieren.

Lösung: Man zieht zunächst die Schlinge *M* so weit heraus, daß man den Ring durch diese Schlinge nach oben schieben kann. Der Ring wird nun gegen das Brett gedrückt, und zugleich werden die aus der Öffnung hängenden Schnurteile *L* und *R* nach vorn und unten gezogen, beide gleichzeitig.



4

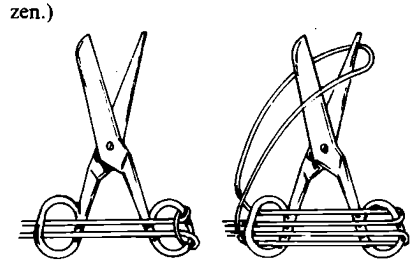
Man zieht so lange, bis die Schlinge *M* von hinten durch die Öffnung heraustritt. Sie bringt zwei Schlaufen mit, sozusagen eine Schlaufe *L′* und eine Schlaufe *R′*. Den vielleicht zunächst unübersichtlichen Knoten zupft man so zurecht, wie die letzte Abbildung zeigt.

Nun schiebt man den Ring durch Schlaufe *L′*, und damit ist er auf der Schlinge *M*. Von hier schiebt man ihn durch Schlaufe *R′*. Und nun gehts symmetrisch zurück: Der Knoten wird zurückgeschoben (und von hinten weiter nach unten gezogen), wobei der Ring noch am Schlitz festgehalten wird. Erst wenn der ursprüngliche Schnurverlauf wieder erkennbar ist, schiebt man den Ring durch *M* in die Schlinge *R*.

Die Schere in der Schnur

Um den Griff einer Schere schlingt man eine Schnur, wie es das linke Bild zeigt:

Die beiden Enden werden an irgendeinem Gegenstand im Zimmer befestigt. Nun soll die Schere von der Schnur gelöst werden, ohne daß die Knoten geöffnet oder die Schnur durchschnitten wird. (Es empfiehlt sich, eine möglichst lange Schnur zu benutzen.)



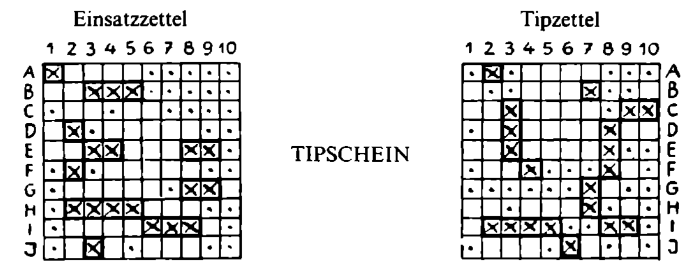
5

kleine Felder hat (Rechenheftpapier). Die senkrechten Felder werden rechts außen von oben nach unten mit den Buchstaben *A* bis *J* bezeichnet, die waagerechten Felder oben von links nach rechts mit den Ziffern 1 bis 10. Diese 100 Felder sind das Meer, in das nun – verdeckt vor den Augen des anderen – jeder an beliebiger Stelle seine Fische einzeichnet, und zwar:

1 Wal = 4 Quadrate lang
2 Haifische = je 3 Quadrate lang
3 Thunfische = je 2 Quadrate lang
4 Flundern = je 1 Quadrat.

Die Fische dürfen sich nur an den Ecken, nicht an den Längsseiten berühren.

Nun beginnt der Fang. Abwechselnd wirft jeder ein Netz auf die Fische in dem Quadratfeld des anderen. Peter sagt zum Beispiel:



7

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Spezialistenlager Junger Mathematiker des Bezirkes Leipzig

Wie in jedem Jahr, so findet auch in den Sommerferien 1976 ein *Spezialistenlager für Junge Mathematiker* des Bezirkes Leipzig statt. Dort werden etwa 200 der besten Teilnehmer von Mathematikzirkeln (in diesem Jahr zum größten Teil Kandidaten der *Mathematischen Schülergesellschaft*) und Olympiaden zwei Ferienwochen verbringen. Sie werden sich in Mathematikzirkeln unter Anleitung von als Zirkelleitern erfahrenen Studenten und Assistenten der *Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität* auf die Höhepunkte des kommenden Schuljahres vorbereiten. Natürlich kommt auch die Erholung bei Wanderungen, Baden, Sport und Basteln nicht zu kurz. Als Helfer werden wieder Lehrerstudenten für Mathematik und Physik eingesetzt.
Im vergangenen Jahr fand das Ferienlager ausnahmsweise nur für Schüler der Klassen 10 bis 12 in Lichtenstein statt. Höhepunkte waren dabei u. a. Vorträge von Frau Dipl.-Math. *Deweß* über *Mengenlehre* und Herrn Dr. *Deweß* über *Operationsforschung* mit interessanten Beispielen sowie ein Arbeitseinsatz der *Jungen Mathematiker* auf dem Sportplatz vor der Jugendherberge.
Im Zirkel wurde z. B. folgende Aufgabe von Dipl.-Math. *Heinz Voigt* behandelt:
In einem Tetraeder Kantenlänge a werden vier gleichgroße Kugeln so eingelagert, daß jede von ihnen drei Tetraederflächen und die restlichen drei Kugeln berührt. Man berechne den Radius r der Kugeln!

G. Schmidt

Zum Knobeln in den Sommerferien noch eine Auswahl von Aufgaben, die in den vergangenen Jahren bei Lagerolympiaden gestellt wurden:

▲1▲ Ermittle die fehlenden Ziffern!

a)
```
3?7 · 2?
--------
   ?5?
   163?
   ----
   ??75
```

b)
```
  ?????
-  ????
  -----
      3
```

Beschreibe bei a), wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast! Gib bei b) alle möglichen Lösungen an! (Kl. 4)

▲2▲ Es ist ein rechteckiges Blech gegeben mit den Kantenlängen a und b, wobei die Seite b um 6 cm länger ist als die Seite a. Vergrößert man beide Seiten um 4 cm, so wird der Flächeninhalt um 72 cm² größer.
Gesucht sind die Längen der Seiten a und b (in cm). (Kl. 5)

▲3▲ Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt!
a) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
b) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
c) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine zweistellige Zahl z_1, deren Dreifaches kleiner als z ist. (Kl. 5)

▲4▲ Es ist ein Dreieck zu konstruieren aus den Seiten b und c und dem Umkreisradius r.
Dabei ist $c = 5$ cm, $r = 4$ cm, $b = 6$ cm. Anzugeben sind Lösungsplan, Konstruktion und Konstruktionsbeschreibung, Determination. (Kl. 6)

▲5▲ Berechne die Größe des kleineren Winkels der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden! (Kl. 7)

▲6▲ 500 Körbe seien mit Äpfeln gefüllt, wobei jeder Korb höchstens 243 Äpfel enthält.
Zeige: Mindestens drei Körbe enthalten gleichviel Äpfel. (Kl. 7)

▲7▲ Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks ABC werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$ und $\overline{AA'} = \overline{CA}$ abgetragen.
Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ siebenmal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.
(Kl. 7)

▲8▲ Löse das folgende System von Ungleichungen – gib die Lösungsmenge an!

$$1 - |1 - x| < 2x$$
$$\frac{1}{2}x + 2 > |x + 1| \qquad \text{(Kl. 8)}$$

▲9▲ Ein Regiment der NVA von weniger als 3000 Mann läßt sich genau in Dreier-, Vierer-, Fünfer- und Siebenerreihen aufstellen. Bei Neuneraufstellung würden in einer Reihe 3 Mann fehlen, bei Elferaufstellung wären 3 Mann zuviel.
Wie stark ist das Regiment? (Kl. 9)

▲10▲ Gesucht sind alle Funktionen f mit $D(f) = P$, für die gilt:

$$f(x) \cdot f(x+y) - f^2(y) \cdot f^2(x-y) \cdot e^{y+4} = 0 \qquad \text{(Kl. 10)}$$

In Heft 6/75 stellten wir eine Aufgabe, die uns *Clemens Jaunich* aus Cottbus geschickt hatte: Man bestimme alle Zahlen x, für die gilt

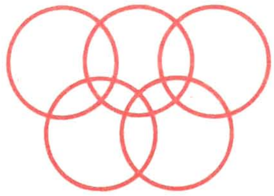
$$|9 - x| - |0{,}5x + 1| = 12.$$

(Lösung siehe Seite 66)

Schachgroßmeister *Rainer Knaak*, stud. math. an der *Karl-Marx-Universität Leipzig*, im Wettkampf gegen interessierte *Junge Mathematiker* des Bezirks Leipzig (nach der Klausur der Bezirksolympiade)

Mathematik und Sport

alpha-Wandzeitung



Mitarbeiter gesucht

Auf dieser *alpha*-Wandzeitung haben wir 12 Aufgaben aus Anlaß der Olympischen Spiele 1976 gestellt.
Wer sendet uns Aufgaben (mit Lösungsvorschlag) von den Olympischen Spielen 1976 für unseren alpha-Wettbewerb 1976/77? Die besten Einsender erhalten Buchprämien aus dem Bereich des Sports. Red. *alpha*

Die olympischen Ringe

a) Kannst du die fünf olympischen Ringe in einem Zug zeichnen, ohne eine Linie zweimal zu durchfahren?
b) Durch die fünf Ringe werden 15 Gebiete (das Außengebiet nicht mitgezählt) begrenzt. Trage in die Gebiete die Zahlen 1 bis 15 so ein, daß jede Zahl nur einmal vorkommt und die Summe in jedem Ring 39 beträgt!

Ingo Rath (Wien)

▲1▲ Die DDR-Mannschaft errang bei Olympischen Sommerspielen bisher folgende Medaillen:

	Gold	Silber	Bronze
Melbourne 1956	1	4	2
Rom 1960	3	9	7
Tokio 1964	3	11	5
Mexiko 1968	9	9	7
München 1972	20	23	23

a) Berechne, wieviel Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen insgesamt seit 1956 bei Olympischen Spielen von DDR-Sportlern errungen wurden!
b) Stelle für die einzelnen Olympischen Spiele getrennt ein Säulendiagramm auf, in dem du die errungenen Medaillen darstellst (1 Medaille = 1 cm)!

▲2▲ Ergänze unter Ausnutzung folgender Aussagen die untenstehende Tabelle der inoffiziellen Länderwertung nach Abschluß aller 195 Disziplinen der Olympischen Spiele von 1972!
(1) Die DDR erreichte mehr als 19 Goldmedaillen und 6. Plätze.
(2) Die Mannschaft der BRD/WB kam auf eine Gesamtpunktzahl, in der die Ziffer 1, 2 und 3 jede genau einmal vorkommen.
(3) Ungarn erkämpfte doppelt so viele Bronzemedaillen wie es 5. Plätze erreichte.
(4) Die japanische Mannschaft erkämpfte Goldmedaillen und ihre Gesamtpunktzahl ist eine Kubikzahl.

	Gold	Silber	Bronze	4.	5.	6.	Punkte
UdSSR	50	27	22	16	19	9	
USA		31	29	29	21	8	639
DDR		23	23	22	22		480
BRD/WB	13		16	17	20	11	
Ungarn	6	13		9		8	222
Japan		8	8	10	9	5	

▲3▲ In München 1972 stand Hallenhandball erstmals auf dem olympischen Programm. Nach Abschluß der Hauptrunde ergab sich für die Gruppe A folgender Tabellenstand:

1. ČSSR	3	42:38	4:2
2. DDR	3	36:34	4:2
3. UdSSR	3	34:34	3:3
4. Schweden	3	34:40	1:5

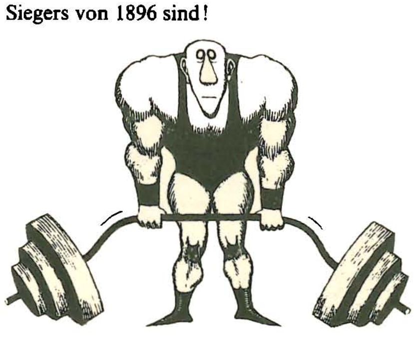
Die DDR spielte gegen die ČSSR 14:12. Bestimme die möglichen Ausgänge aller anderen Spiele (nur Sieg, Niederlage oder Unentschieden, nicht die Ergebnisse)!

▲4▲ *Monika*, *Michael* und *Bernd* verfolgten im Fernsehen das Rennen der Einerkajaks bei den Olympischen Spielen von München. Am Bildschirm war der Einlauf nicht genau auszumachen und die drei Freunde hatten verschiedene Meinungen, wie in welcher Reihenfolge die ersten drei Plätze belegt wurden:
Monika: Peterson (Schweden) gewann vor Shaparenko (UdSSR) und Czapo (Ungarn).
Michael: Du hast dich versehen, Shaparenko (UdSSR) kam vor Peterson (Schweden) ins Ziel.
Bernd: Es war Peterson (Schweden) vor Czapo (Ungarn), aber der Schwede war nicht auf dem ersten Platz.
Als die offiziellen Ergebnisse durchgegeben wurden, stellte sich heraus, daß genau eine Aussage falsch gewesen ist.
Welche war das, und wie lautete die Reihenfolge der drei Erstplazierten?

▲5▲ Die Olympiasieger im Dreisprung erreichten folgende Weiten:

1896: 13,71 m;	1900: 14,44 m;
1904: 14,33 m;	1908: 14,92 m;
1912: 14,76 m;	1920: 14,51 m;
1924: 15,53 m;	1928: 15,21 m;
1932: 15,72 m;	1936: 16,00 m;
1948: 15,40 m;	1952: 16,22 m;
1956: 16,35 m;	1960: 16,81 m;
1964: 16,85 m;	1968: 17,39 m;
1972: 17,35 m.	

a) Stelle die Weiten in Abhängigkeit vom Jahr in einem Koordinatensystem graphisch dar, und verbinde die Punkte durch Geraden!
b) Ermittle in m und %, um wieviel besser die Leistungen der Olympiasieger von 1908, 1924, 1948 und 1972 als das Ergebnis des Siegers von 1896 sind!



Hinweis: Bei einer inoffiziellen Länderwertung werden für Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen und die Plätze 4, 5 und 6 die Punktzahlen 7, 5 bzw. 4 und 3, 2 und 1 vergeben.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen

Kreisolympiade

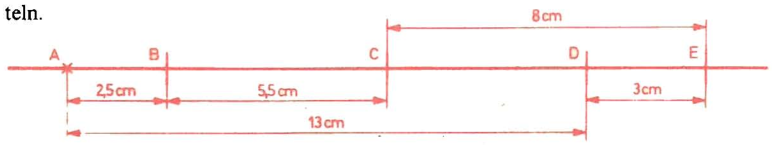
Klassenstufe 5

1. Wegen $4\,500:9=500$ und $135\,000:9=15\,000$ wurde als Bedarf für 500 Neubauwohnungen $15\,000\ \text{m}^2$ Flachglas angenommen, für 1 000 Neubauwohnungen folglich das Doppelte, also $30\,000\ \text{m}^2$.

2. Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280:7=40$ genau dann eine wahre Aussage, wenn man $u=40$ einsetzt. Hiernach entsteht wegen $4\cdot 40=160$ genau dann aus (2) eine wahre Aussage, wenn man $z=160$ einsetzt. Gleichung (4) wird genau dann wahr, wenn man $v=120$ einsetzt; denn es gilt $160=120+40$, während die Summe aus 40 und je einer anderen Zahl als 120 eine andere Zahl als 160 ergibt. Wegen $160+120=280$ wird (5) genau für $y=280$ wahr, und wegen $280:40=7$ wird (1) genau für $x=7$ wahr.

3. Nach (1) waren genau 13 der Pioniere schon einmal an der Ostsee. Nach (2) und (3) betrug die Anzahl der Pioniere, die schon einmal im Harz, aber noch nicht an der Ostsee waren, wegen $15-6=9$ genau 9 Pioniere. Also waren wegen $13+9=22$ genau 22 Pioniere dieser Gruppe schon einmal in wenigstens einer der genannten Feriengegenden. Nach (4), und weil damit jeder der anwesenden Pioniere erfaßt wurde, betrug wegen $22+4=26$ deren Anzahl 26.

4. Wir tragen zunächst von A aus auf g mit dem Zirkel eine Strecke von 2,5 cm Länge ab. Ihr anderer Endpunkt sei B.
Dann tragen wir wegen $0{,}3\ \text{dm}=3\ \text{cm}$ und $2{,}5\ \text{cm}+3\ \text{cm}=5{,}5\ \text{cm}$ von B aus auf der Halbgeraden von g, auf der A nicht liegt, eine Strecke von 5,5 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt C. Wegen $2{,}5\ \text{cm}+5{,}5\ \text{cm}=8\ \text{cm}$ tragen wir nun von C aus auf der Halbgeraden von g, auf der B nicht liegt, eine Strecke von 8 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt E. Da D laut Aufgabe zwischen C und E liegt, tragen wir schließlich wegen $50\ \text{mm}=5\ \text{cm}$ und $8\ \text{cm}-5\ \text{cm}=3\ \text{cm}$ von E aus auf derselben Halbgeraden von g, auf der C liegt, eine Strecke von 3 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt D.
Wegen $2{,}5\ \text{cm}+5{,}5\ \text{cm}+8\ \text{cm}-3\ \text{cm}=13\ \text{cm}$ hat die Strecke AD eine Länge von 13 cm.
Es ist auch zulässig, die Länge von AD nach der Konstruktion durch Messung zu ermitteln.



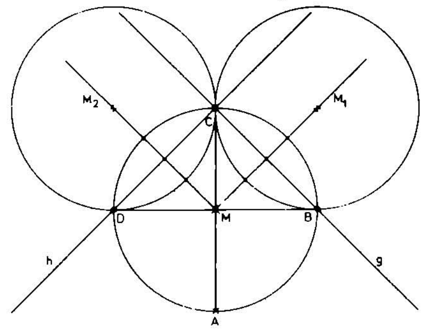
Klassenstufe 6

1. Der erste Hubschrauber beförderte $\frac{1}{3}$ von 15 000 kp, das sind 5 000 kp. Der zweite beförderte $\frac{7}{8}$ von 15 000 kp, wegen $\frac{7}{8}\cdot 15\,000=13\,125$ sind das 13 125 kp; der dritte beförderte $\frac{3}{5}$ von 15 000 kp, wegen $\frac{3}{5}\cdot 15\,000=9\,000$ also 9 000 kp. Das beförderte Sperrgut hatte somit wegen
$5\,000+13\,125+9\,000=27\,125$
ein Gesamtgewicht von 27 125 kp.

2. Die Anzahl der Dreibett-Kabinen muß mindestens 1 und kann wegen $3\cdot 14=42>41$ höchstens 13 betragen. Außerdem muß ihre Anzahl ungerade sein, da sonst (bei gerader Anzahl von Dreibett-Kabinen) eine gerade Zahl von Plätzen dadurch belegt wären und als Differenz zur ungeraden Zahl 41 mithin eine ungerade Zahl von Betten auftreten würde, die sich nicht ausschließlich auf Zweibett-Kabinen verteilen läßt. Für jede der ungeraden Zahlen von Dreibett-Kabinen von 1 bis 13 gibt es nun jeweils genau eine (zugehörige) Anzahl von Zweibett-Kabinen, wie nachstehende Tabelle ausweist:

Anzahl der Dreibett-Kabinen	Anzahl der damit vorh. Betten	Anzahl der darüber hinaus vorh. Betten	Anzahl der Zweibett-Kab.	Gesamtplätze
1	3	38	19	41
3	9	32	16	41
5	15	26	13	41
7	21	20	10	41
9	27	14	7	41
11	33	8	4	41
13	39	2	1	41

4. a) Die schraffierte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, daß aus einem Rechteck R zwei Rechtecke S und T herausgeschnitten wurden, wobei wegen
$10+15+10+15+10=60$
das Rechteck R die Seitenlängen 60 mm und



70 mm hat und jedes der Rechtecke S, T die Seitenlängen 15 mm und 50 mm. Daher ergeben sich für R, S, T wegen $60\cdot 70=4200$ bzw. $15\cdot 50=750$ die Flächeninhalte $4200\ \text{mm}^2$ bzw. $750\ \text{mm}^2$ bzw. $750\ \text{mm}^2$. Somit hat wegen $4200-750-750=2700$ die schraffierte Fläche den Flächeninhalt $A=2700\ \text{mm}^2$.
b) Die Seitenlängen von R sind $(3e+2f)$ und h, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke S, T sind f und g. Daher hat R den Flächeninhalt $(3e+2f)h$, und jedes der Rechtecke S, T hat den Flächeninhalt $f\cdot g$. Also ist $A=(3e+2f)h-2fg$.

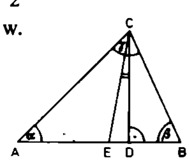
Klassenstufe 7

1. a) Wenn die Angaben für ein Rechteck zutreffen, dann ergibt sich der Umfang als Summe aus dem Vierfachen der kleineren Seitenlänge und dem Doppelten von 75 m. Das Vierfache der kleineren Seitenlänge beträgt somit $650\ \text{m}-150\ \text{m}=500\ \text{m}$, die kleinere Seitenlänge also 125 m, die größere 200 m.
Der Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks beträgt
$125\cdot 200\ \text{m}^2=25\,000\ \text{m}^2=2{,}5\ \text{ha}$.
b) Parallel zur größeren Rechteckseite können nach den Bedingungen der Aufgabe $\frac{125}{5}-1=24$ und parallel zur kleineren

$\frac{200}{5} - 1 = 39$ Bäume gepflanzt werden. Die gesuchte Anzahl der Bäume beträgt somit $24 \cdot 39 = 936$.

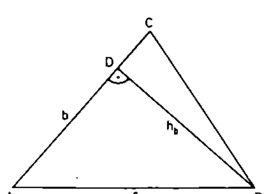
2. Ist am 1. Januar 1975 das jüngste Kind x Jahre alt, so ist das zweite $2x$ Jahre, das älteste $4x$ Jahre, die Mutter $14x$ Jahre, der Vater $15x$ Jahre und der Großvater $(64+4x)$ Jahre alt. Es gilt nun laut Aufgabe
$x + 2x + 4x + 14x + 15x = 4x + 64$,
daraus folgt $32x = 64$, also $x = 2$.
Das jüngste Kind war am 1. Januar 1975 somit 2 Jahre alt, das zweite 4 Jahre, das älteste 8 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre und der Großvater 72 Jahre alt.

3. Die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C seien α, β, γ. Da ΔABC bei A spitzwinklig ist, bilden A, D, C ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit α als Größe des Innenwinkels bei A.
Daher gilt $\overline{\sphericalangle ACD} = 90° - \alpha$.
Da D und E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen, gilt folglich
$\overline{\sphericalangle DCE} = |\overline{\sphericalangle ACD} - \overline{\sphericalangle ACE}| = |90° - \alpha - \frac{\gamma}{2}|$,
wegen
$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$ also $\overline{\sphericalangle DCE} = \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$,
w. z. b. w.

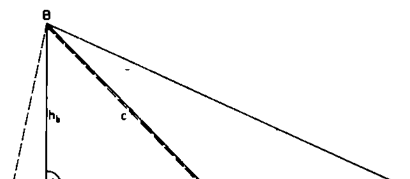


Bemerkung: Wie vorstehende Lösung zeigt, braucht man nur die Voraussetzung, daß $\sphericalangle CAB$ spitz ist. Da sich dies eventuell durch Vertauschung der Bezeichnung von A mit B (die an Voraussetzungen und Behauptung sonst nichts ändert) stets erreichen läßt, gilt der Satz sogar für beliebige Dreiecke.

4. (I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Der Fußpunkt des von B auf die Gerade durch A und C gefällten Lotes sei D. Dann gilt $\overline{BA} = c$, $h_b = \overline{BD}$, und es ist $A \neq D$, wegen $c \neq h_b$ ist folglich ABD ein Dreieck. In ihm sind c, h_b Seitenlängen, und es enthält den rechten Winkel $\sphericalangle BDA$. Punkt C liegt erstens auf der Geraden durch A und D und zweitens auf dem Kreis um A mit b.
Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(II) (1) Wir konstruieren das Teildreieck ABD aus $\overline{AB} = c$, $\overline{BD} = h_b$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle BDA$.
(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und A.
(3) Wir zeichnen den Kreis um A mit b. Schneidet er die Gerade durch D und A, so sei C einer der Schnittpunkte.
(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Nach Konstruktion ist $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BD} = h_b$ und BD die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe.
(IV) Wegen $h_b < c$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach (ssw) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.
Konstruktionsschritt (2) ist stets eindeutig ausführbar, da sich wegen $h_b < c$ bei (1) $D \neq A$ ergeben hatte.



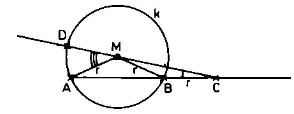
Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte C_1 und C_2. Da nun der wegen $h_b < c$ spitze Winkel $\sphericalangle DAB$ in dem einen der beiden Dreiecke ABC_1, ABC_2 als Innenwinkel in dem anderen als Außenwinkel bei A auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei A spitzwinklig, das andere bei A stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent. Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin nicht, auch nicht bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 8

1. Die von der Gesamtmasse von 2000 g genommenen 12%, das sind $\frac{12}{100} \cdot 2000\,\text{g} = 240\,\text{g}$, sind laut Aufgabe genau 20%, d. h. ein Fünftel der Masse des Wassers.
Wegen $240\,\text{g} \cdot 5 = 1200\,\text{g}$ enthielt das Gefäß also 1200 g Wasser. Mithin beträgt die Masse des leeren Gefäßes 800 g.
2. Wenn bereits das Doppelte der kleinsten der sechs Zahlen $(n+1)$ die größte $(n+6)$ übertrifft, also $2(n+1) > (n+6)$ und mithin $n > 4$ gilt, kann aus den sechs Zahlen sicher kein geordnetes Paar mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften gefunden werden. Da aus $n > 4$ stets auch $2(n+1) > (n+6)$ folgt, kann n höchstens gleich 1, 2, 3, 4 sein. Analog stellt man fest, daß höchstens für $n = 1$ eine der sechs Zahlen das Dreifache einer anderen sein kann und daß das Vierfache wegen $4(n+1) \geqq (n+7) > (n+6)$ nicht auftreten kann. Aus analogen Gründen sind höhere Vielfache erst recht nicht möglich.
Es sei $n = 1$. Unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gilt $2|4$, $2|6$ und $3|6$. Weitere Teilbarkeitsbeziehungen treten nicht auf. Folglich erhalten wir in diesem Fall genau die Zahlenpaare (2; 4), (2; 6), (3; 6).
Es sei $n = 2$. Unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8 treten genau die Teilbarkeitsbeziehungen $3|6$ und $4|8$ auf. Man erhält mithin genau die Paare (3; 6), (4; 8).
Es sei $n = 3$. Dann erhält man aus den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau das Paar (4; 8).
Es sei $n = 4$. Aus den Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10 erhält man genau das Paar (5; 10). Damit sind alle gesuchten Paare ermittelt.

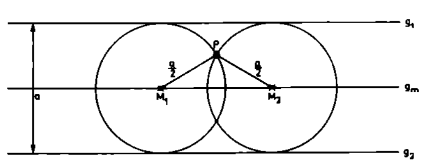
3. Der Winkel $\sphericalangle AMD$ ist Außenwinkel des Dreiecks ACM.
Folglich gilt: $\overline{\sphericalangle AMD} = \overline{\sphericalangle ACM} + \overline{\sphericalangle MAC}$.
Nun gilt: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{BC} = r$.
Folglich sind die Dreiecke ABM und BMC gleichschenklig. Daher gilt:

$$(\overline{\sphericalangle MAC} =)\ \overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle MBA} \qquad (1)$$
und
$$\overline{\sphericalangle BMC} = \overline{\sphericalangle BCM}\ (= \overline{\sphericalangle ACM}). \qquad (2)$$



Der Winkel $\sphericalangle MBA$ ist Außenwinkel des Dreiecks BMC und wegen (2) daher doppelt so groß wie $\sphericalangle ACM$.
Folglich ist wegen (1) $\sphericalangle MAC$ doppelt so groß wie $\sphericalangle ACM$ und mithin $\sphericalangle AMD$ dreimal so groß wie $\sphericalangle ACM$, w. z. b. w.

4. (I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Sein Mittelpunkt M liegt erstens auf der Mittelparallelen g_M zu g_1 und g_2 und zweitens (da sein Radius folglich $\frac{a}{2}$ beträgt) auf dem Kreis um P mit dem Radius $\frac{a}{2}$.
Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:
(II) (1) Wir konstruieren die Mittelparallele g_M zu g_1 und g_2.
(2) Wir zeichnen um P einen Kreis mit $\frac{a}{2}$, schneidet er g_M, so sei M einer der Schnittpunkte.
(3) Wir zeichnen um M den Kreis k mit $\frac{a}{2}$.
(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Nach Konstruktion beträgt der Abstand von M zu g_1 und g_2 jeweils $\frac{a}{2}$, g_1 und g_2 sind somit Tangenten an k. Ferner gilt auch nach Konstruktion $\overline{MP} = \frac{a}{2}$.
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da P zwischen g_1 und g_2 liegt,

ist der Abstand von P zu g_M kleiner als $\frac{a}{2}$. Also existieren stets genau zwei Schnittpunkte von g_M mit dem Kreis um P mit $\frac{a}{2}$.

Es entstehen somit stets zwei Kreise, die den geforderten Bedingungen genügen.

Klassenstufe 9

1. Laut Aufgabenstellung sind alle Paare (a, b) mit a, b natürlich und $a > b$ zu ermitteln, für die

$$a^2 - b^2 = a + b \text{ gilt.}$$

Nun ist nach einer binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit $(a+b)(a-b) = a+b$. Wegen a, b natürlich und $a > b$, ist $a+b \neq 0$. Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit $a - b = 1$, d. h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren (a, b) natürlicher Zahlen erfüllt, für die a um 1 größer ist als b.

2. a) In dem Feld aD kann nur noch die Ziffer 4 eingetragen werden, da die Zeile a bereits die Ziffern 1, 2, 3 enthält und in Spalte D die 5 steht. Gleiche Überlegungen führen zu aE: 5.

Nun darf z. B. in eE nur noch 2 oder 3 stehen, da in der Spalte E bereits 5 und 4 sowie in den Diagonalen $aA + eE$ die 1 stehen.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b					
c				5	
d					4
e					

Sei eE: 2, dann folgt eindeutig in dieser Reihenfolge:

dD: 3; cC: 4; bB: 5; eA: 3; cA: 2; bA: 4; dA: 5; eD: 1; bD: 2; bC: 1; eC: 5; dC: 2; eB: 4; dB: 1; cB: 3; cE: 1; bE: 3.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Die Kontrolle aller Zeilen, Spalten und Diagonalen zeigt, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

b) Sei eE: 3, dann folgt eindeutig in dieser Reihenfolge:

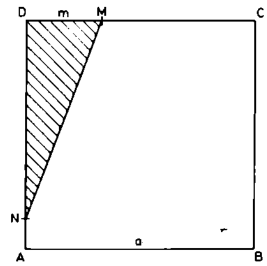
dD: 2; cC: 4; eD: 1; bD: 3; dB: 1; dC: 5; dA: 3; cA: 2.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b				3	
c	2		4	5	
d	3	1	5	2	4
e				1	3

Das Feld eA kann nun nach den Regeln der Aufgabe nicht mehr besetzt werden, da die schon besetzten Felder in der Spalte A und in der Diagonalen $aE \div eA$ bereits alle Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 enthalten. Also ist durch die Besetzung eA: 3 keine weitere Eintragung zu erhalten; es gibt somit genau die in a) gefundene den Bedingungen entsprechende Eintragung.

3. Für jeden Punkt N auf dem Strahl aus D durch A sei $\overline{DN} = n$ gesetzt. Dann hat das Dreieck MND wegen $DN \perp DM$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2} mn$. Dieser verhält sich genau dann zum Flächeninhalt a^2 von $ABCD$ wie $1:7$, wenn $\frac{1}{2} mn = \frac{1}{7} a^2$, d. h. $n = \frac{2a^2}{7m}$ gilt.

Ferner liegt N genau dann auf AD, wenn $n \leqq a$ gilt.



Daher existiert zu gegebenem m genau dann ein Punkt N auf AD mit der verlangten Eigenschaft, wenn

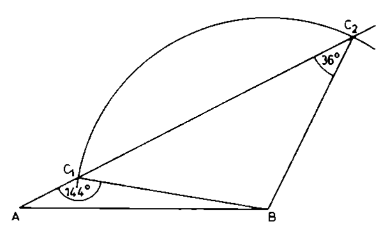
$$\frac{2a^2}{7m} \leqq a, \text{ d. h. } m \geqq \frac{2}{7} a \text{ gilt.}$$

Zu jedem solchen m hat dann jeweils genau der Punkt N auf AD mit

$$\overline{DN} = \frac{2a^2}{7m}$$

die verlangte Eigenschaft.

4. Da beide Dreiecke den gestellten Bedingungen genügen, muß $\overline{\sphericalangle BAC_1} = \overline{\sphericalangle BAC_2}$ gelten. Daher lassen sich die Dreiecke so legen, daß C_1 und C_2 auf demselben von A ausgehenden Strahl liegen. Ferner gilt $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$, also ist das Dreieck BC_1C_2 gleichschenklig.



Folglich gilt auch $\overline{\sphericalangle C_2C_1B} = \overline{\sphericalangle C_1C_2B}$ als Basiswinkel. Geht man von diesen (folglich spitzen) Winkeln zu $\sphericalangle AC_1B$, $\sphericalangle AC_2B$ über, so bedeutet dies bei demjenigen der beiden Scheitel C_1, C_2, der zwischen dem anderen und A liegt, den Übergang zum Nebenwinkel (des spitzen Winkels), also eine Vergrößerung, bei dem anderen keine Veränderung. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle AC_1B$ größer als $\sphericalangle AC_2B$ ist, liegt somit C_1 zwischen C_2 und A, und es gilt $\overline{\sphericalangle AC_1B} + \overline{\sphericalangle C_2C_1B} = 180°$ (Nebenwinkel), also $\overline{\sphericalangle AC_1B} + \overline{\sphericalangle AC_2B} = 180°$.

Da $\overline{\sphericalangle AC_1B} = 4 \cdot \overline{\sphericalangle AC_2B}$ ist, folgt daraus

$$5 \cdot \overline{\sphericalangle AC_2B} = 180° \text{ und somit}$$
$$\overline{\sphericalangle AC_2B} = 36° \text{ sowie } \overline{\sphericalangle AC_1B} = 144°.$$

Der Winkel $\sphericalangle AC_1B$ hat eine Größe von 144°.

Klassenstufe 10

1. *1. Lösungsweg:* Wäre A Zweiter, so nach (2) B Erster im Widerspruch zu (1). Wäre A Dritter, so nach (1) C Erster im Widerspruch zu (3). Also wurde A Erster. Folglich wurde nach (4) B Zweiter und mithin C Dritter.

Der Aufgabenstellung kann entnommen werden, daß alle Bedingungen erfüllt werden können; also werden sie bei diesem (einzig als möglich verbliebenen) Einlauf erfüllt.

(Man kann auch wie im folgenden 2. Lösungsweg direkt bestätigen, daß bei dem Einlauf ABC, und nur bei diesem, alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind.)

2. Lösungsweg: Da A, B, C die ersten drei Plätze belegten, sind genau folgende sechs Fälle möglich:

				Widerspruch zur Aussage
a)	A	B	C	./.
b)	A	C	B	(4)
c)	B	A	C	(1)
d)	B	C	A	(1), (4)
e)	C	A	B	(2)
f)	C	B	A	(3)

In fünf dieser Fälle entsteht ein Widerspruch zu wenigstens einer Aussage. Als einziger allen Bedingungen genügender Fall verbleibt a) mit der Reihenfolge ABC.

2. *1. Lösungsweg:* Nimmt man an, anfangs seien im ersten Kästchen x, im zweiten y und im dritten z Kugeln, dann sind nach den drei Verteilungen folgende Anzahlen von Kugeln in den Kästchen:

Kästchen	1	2	3
anfangs	x	y	z
1. Verteil.	$x-y-z$	$y+y$	$z+z$
2. Verteil.	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)$	$4z$
3. Verteil.	$4(x-y-z)$	$[2(2y-(x-y-z)-2z)]-2z$	$4z-2(x-y-z)-(3y-x-z)$

Daher ist die Bedingung der Aufgabe nur erfüllt, wenn

(1) $4(x-y-z) = 64$,

(2) $-2x+6y-2z = 64$ und

(3) $-x-y+7z = 64$ gilt.

Hieraus folgt

$$x = 104, \; y = 56, \; z = 32.$$

Das erste Kästchen enthielt ursprünglich 104 Kugeln, das zweite 56 und das dritte 32 Kugeln.

2. Lösungsweg: Nach der 3. Verteilung enthielt jedes der Kästchen 64 Kugeln. Da bei dieser Verteilung die Anzahl der Kugeln des 1. und 2. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese nach der 2. Verteilung je 32 Kugeln, das dritte somit 128 Kugeln.

Da bei der 2. Verteilung die Anzahl der Kugeln des 1. und 3. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese nach der 1. Verteilung 16 bzw. 64 Kugeln, das zweite somit zu diesem Zeitpunkt 112 Kugeln.
Da bei der 1. Verteilung die Anzahl der Kugeln des 2. und 3. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese somit anfangs 56 bzw. 32 und das erste somit 104 Kugeln.

3. Es sei o.B.d.A. die Seitenlänge eines „kleinsten Quadrates" des Gitternetzes mit 1 angenommen. Dann haben die Seiten der Dreiecke (als Rechteckdiagonalen bzw. -seiten) die folgenden Längen:
Dreieck 1: $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; 5
Dreieck 2: $\sqrt{13}$; $\sqrt{17}$; $5\sqrt{2}$
Dreieck 3: $\sqrt{2}$; 2; $\sqrt{10}$
Dreieck 4: 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$
Folglich sind die Dreiecke 1 und 4 ähnlich; denn es ist

$$\sqrt{5}:1=\sqrt{10}:\sqrt{2}=5:\sqrt{5}$$

Außerdem sind die Dreiecke 1 und 3 ähnlich; denn es ist

$$\sqrt{5}:\sqrt{2}=\sqrt{10}:2=5:\sqrt{10}.$$

Mithin sind die Dreiecke 1, 3, 4 untereinander ähnlich. Wären die Dreiecke 2 und 4 ähnlich, so müßte wegen

$$\sqrt{13}<\sqrt{17}<5\sqrt{2} \text{ und } 1<\sqrt{2}<\sqrt{5}$$

die Gleichung

$$\sqrt{13}:1=\sqrt{17}:2 \text{ gelten,}$$

was nicht der Fall ist. Also sind die Dreiecke 2 und 4 nicht ähnlich. Folglich sind die Dreiecke 1, 3, 4 sämtliche untereinander ähnlichen der Dreiecke 1, 2, 3, 4.

4. Es sei (a, b) ein Paar positiver reeller Zahlen, für das (*) gilt. Dann gilt
$(a-b)^2 \geqq 0$, also $a^2-2ab+b^2 \geqq 0$,
$a^2+2ab+b^2 \geqq 4ab$,
$(a+b)(a+b) \geqq 4ab$, und wegen $ab>0$
daher
$(a+b)\dfrac{(a+b)}{ab} \geqq 4$ bzw.
$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$, woraus wegen (*)
die Behauptung (**) folgt.
Das Gleichheitszeichen gilt genau für $a-b=0$, d. h. genau für $a=b$, was zusammen mit (*) genau für $a=b=1$ zutrifft.

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Angenommen, (1) wäre wahr. Dann hätte die Mannschaft der Klasse 8a den zweiten Platz belegt, also wäre (3) falsch und somit (4) wahr. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist (1) falsch und somit (2) wahr, d. h., die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz. Daraus folgt, daß (6) falsch und somit (5) wahr ist. Den zweiten Platz belegte mithin die Mannschaft der Klasse 7a. Daraus folgt, daß die Aussage (4) falsch und somit (3) wahr ist, d. h., den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a.
Für den vierten Platz verbleibt dann nur noch die Mannschaft der Klasse 7b.
Daher kann nur die folgende Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a, den zweiten die Mannschaft der Klasse 7a, den dritten die Mannschaft der Klasse 8b und den vierten die Mannschaft der Klasse 7b.
Diese Verteilung entspricht in der Tat den Bedingungen; denn bei ihr sind die Aussagen (2), (3), (5) wahr und (1), (4), (6) falsch.

2. Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt C bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Folglich gilt

$$2\gamma+70^\circ=180^\circ, \text{ woraus man}$$
$$2\gamma=110^\circ \text{ bzw.}$$
$$\gamma=55^\circ \text{ erhält.}$$

Der Winkel $\sphericalangle BCF$ ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Also gilt nach dem Außenwinkelsatz

$$\gamma=2\alpha \text{ bzw. } \alpha=\frac{\gamma}{2},$$

woraus man $\alpha=27{,}5^\circ$ erhält.
Nun gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf ΔBDC:

$$\alpha+\beta+\delta=180^\circ, \text{ also}$$
$$27{,}5^\circ+\beta+70^\circ=180^\circ \text{ und mithin}$$
$$\beta=82{,}5^\circ.$$

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt D bilden ebenfalls einen gestreckten Winkel. Also gilt

$$2\beta+\phi=180^\circ \text{ und folglich}$$
$$165^\circ+\phi=180^\circ \text{ bzw.}$$
$$\phi=15^\circ.$$

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf ΔECD gilt:

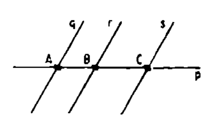
$$\eta+\gamma+\phi=180^\circ \text{ bzw.}$$
$$\eta+55^\circ+15^\circ=180^\circ, \text{ also}$$
$$\eta=110^\circ$$

und damit nach dem Satz über Nebenwinkel

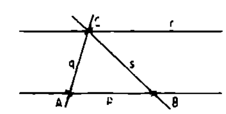
$$\varepsilon=180^\circ-110^\circ=70^\circ$$

Damit sind die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und ϕ ermittelt.

3. Behauptung: Es gibt keine 5 Geraden und 3 Punkte, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Beweis: Angenommen, es gäbe 5 derartige Geraden p, q, r, s, t und 3 derartige Punkte A, B, C. Dann lassen sich zwei Fälle unterscheiden:
a) Die Punkte A, B, C liegen auf ein und derselben Geraden (etwa p).
b) Die Punkte A, B, C liegen nicht auf ein und derselben Geraden.
Im Falle a) geht laut Aufgabe noch (mindestens je eine weitere der genannten Geraden durch A bzw. B bzw. C. Da kein weiterer Schnittpunkt auftreten soll, müssen diese 3 Geraden (etwa q, r, s) zueinander parallel sein.



Jede weitere (fünfte) Gerade durch einen der Punkte A, B, C ist nun zu q, r, und s nicht parallel und erzeugt daher (mindestens) einen weiteren (vierten) Schnittpunkt, entgegen der Annahme.
Im Falle b) können entweder die A, B, C enthaltenden Geraden (etwa p, q, r) jede genau einen dieser Punkte enthalten und zueinander parallel sein, dann liefert bereits jede vierte Gerade, die durch einen der Punkte A, B, C verläuft, (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, da sie zu p, q, r nicht parallel ist, oder (mindestens) eine der Geraden (etwa p) enthält zwei der Punkte A, B, C (etwa A, B). Dann kann von den (mindestens) zwei Geraden, die sich im dritten der Punkte (c) schneiden, nur die eine (q) außer durch C auch noch durch einen der Punkte A, B (etwa A) verlaufen und die andere (r) entweder zu p parallel sein oder durch C und B verlaufen, da anderenfalls ein weiterer Schnittpunkt entstünde. Das heißt, es lassen sich durch C höchstens drei Geraden (q, r, s) unter den Bedingungen der Aufgabe legen, wenn p durch A und B verläuft. Jede weitere Gerade (t) durch einen der Punkte A, B ist stets zu (mindestens) drei der Geraden p, q, r, s nicht parallel und liefert daher (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, entgegen der Annahme (siehe Bild). Damit ist die Behauptung bewiesen.

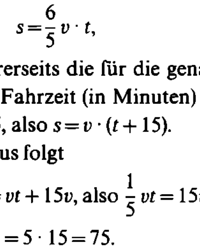


4. Ist v die auf der Strecke übliche Durchschnittsgeschwindigkeit, so fährt der Zug mit der Geschwindigkeit $\frac{120}{100}v=\frac{6}{5}v$.
Ist s die Länge der Strecke von B bis zu der Stelle, an der der Rückstand aufgeholt ist, und ist t die Fahrzeit des Zuges von B bis zu dieser Stelle, so ist einerseits

$$s=\frac{6}{5}v\cdot t,$$

andererseits die für die genannte Strecke übliche Fahrzeit (in Minuten)
$t+15$, also $s=v\cdot(t+15)$.
Daraus folgt
$\frac{6}{5}vt=vt+15v$, also $\frac{1}{5}vt=15v$,
also $t=5\cdot 15=75$.
Der Rückstand ist mithin in 75 min aufgeholt.

5. Das Dreieck EBD ist gleichseitig; denn seine Seiten sind Diagonalen kongruenter Quadrate. Da in jedem Quadrat die Diagonalen



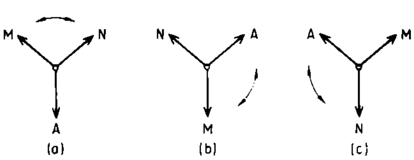
einander halbieren, ist K Mittelpunkt der Seite ED und folglich BK Seitenhalbierende im Dreieck EBD. Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhe und Seitenhalbierende, die von ein und derselben Ecke ausgehen, zusammen. Somit gilt tatsächlich

$DE \perp BK$, w.z.b.w.

6. Wegen $z>0$ gilt auch $a>0$, $b>0$, $c>0$. Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a, b und c dieser Aufgabe durch 9 teilbar.
Da jede der 1000000000 Ziffern von z höchstens 9 beträgt, ist
$a \leqq 9 \cdot 1000000000 = 9000000000$,
also ist a höchstens zehnstellig.
Deshalb ist $b < 9 \cdot 10 = 90$, also ist b eine der Zahlen 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9.
Die Quersumme jeder dieser 9 Zahlen ist 9. Daher gilt $c=9$ für alle zu betrachtenden Zahlen z.

Klassenstufe 8

1. Nach den Erklärungen des Ortskundigen würden alle drei Richtungsschilder auf den richtigen Weg weisen, wenn die beiden falschen Schilder miteinander ausgetauscht würden, da genau zwei der drei Schilder falsch und folglich genau eines richtig beschriftet waren. Weil der Wanderer aus Altdorf kam, konnte er leicht feststellen, ob das Richtungsschild, das nach Altdorf wies, richtig oder falsch beschriftet war. Wenn es richtig beschriftet war (a), mußten die beiden anderen falsch sein, und er ging den Weg, auf welchen das Schild „Mittendorf" wies.



Wenn es aber falsch beschriftet war (b), (c), konnte er sich dieses Schild mit dem Richtungsschild „Altdorf" vertauscht denken, und dann wiesen alle drei Schilder – auch das nach Neudorf – in die richtige Richtung.

2. Jede Primzahl $p>3$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher von keiner der Formen $6n = 2 \cdot 3n$, $6n+2 = 2(3n+1)$, $6n+3 = 3(2n+1)$, $6n+4 = 2(3n+2)$ mit ganzzahligem n. Da sie aber wie jede ganze Zahl von einer der Formen $6n+r$ mit ganzzahligen n, r und $0 \leqq r \leqq 5$ ist, gilt entweder

$p = 6n+1$ (n ganzzahlig) oder (1)

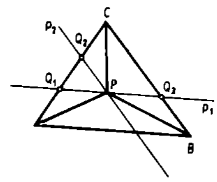
$p = 6m+5 = 6(m+1)-1$ (m ganzzahlig), also mit $n = m+1$

$p = 6n-1$ (n ganzzahlig) (2)

Wäre $n \leqq 0$ in (1) oder (2), so ergäbe sich der Widerspruch $p \leqq 1$ bzw. $p \leqq -1$. Daher ist in beiden Fällen die ganze Zahl $n \geqq 1$, w.z.b.w.

3. I. Angenommen, P sei ein Punkt, wie er nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Dann hat das Dreieck ABP ein Drittel des Flächeninhalts von ΔABC als Flächeninhalt. Sind h_c, h_c' die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP, so ist folglich

$h_c' = \frac{1}{3} h_c$.



Also liegt P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3} h_c$, und zwar, da P im Innern von ΔABC liegt, auf derjenigen Parallelen p_1, die auf derselben Seite der Geraden durch A und B verläuft, auf der auch C liegt. Diese Parallele p_1 schneidet AC in einem Punkt Q_1, für den $\overline{AQ_1} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ gilt. Ebenso liegt P auf der Parallele p_2 zu BC durch denjenigen Punkt Q_2 auf AC, für den $\overline{CQ_2} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ gilt.
Somit entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
II. (1) Man konstruiert die Punkte Q_1 und Q_2 auf AC, für die

$$\overline{AQ_1} = \overline{CQ_2} = \frac{1}{3}\overline{AC} \text{ gilt.}$$

(2) Man zieht die Parallele p_1 zu AB durch Q_1 und die Parallele p_2 zu BC durch Q_2.
(3) Schneiden sich p_1 und p_2, so sei P ihr Schnittpunkt.
III. Jeder so konstruierte Punkt P entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Nach Konstruktion liegt P ebenso wie Q_1 auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C. Ferner liegt P ebenso wie Q_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A. Weiterhin schneidet p_1 die Strecke BC in einem Punkt Q_3, der folglich auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B. Da Q_2 zwischen Q_1 und C liegt, liegt der Schnittpunkt P von p_1 mit p_2 zwischen Q_1 und Q_3 und damit ebenfalls auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B. Damit ist gezeigt, daß P im Innern von ΔABC liegt. Sind ferner h_c, h_c' die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP und sind h_a, h_a' die Längen der Höhen auf die Gerade durch B und C in den Dreiecken ABC, PBC, so ist nach Konstruktion $h_c' = \frac{1}{3} h_c$, $h_a' = \frac{1}{3} h_a$. Daher haben die Dreiecke ABP und PBC je ein Drittel des Flächeninhalts von ΔABC als Flächeninhalt. Dasselbe gilt auch für ΔACP; denn da P im Innern von ΔABC liegt, setzt sich ΔABC aus den Dreiecken ABP, PBC, ACP zusammen.
IV. Da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC nicht parallel zueinander und folglich p_1 und p_2 ebenfalls nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in genau einem Punkt. Somit existiert stets genau ein Punkt P, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

4. Die Entfernung von A nach B betrage s km. Die Pioniergruppe hat beim Anstellen ihrer Überlegung bereits 3 km zurückgelegt, muß also noch $(s-3)$ km bewältigen. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Zeit der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit. Bei beiden Geschwindigkeiten $v_1 = 3\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. $v_2 = 4\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist die Zeit t vom Beginn der Geschwindigkeitserhöhung bis zur Abfahrt des Zuges gleich. Diese Zeit in Stunden beträgt somit

$t = \frac{s-3}{v_1} - \frac{2}{3}$ bzw. $t = \frac{s-3}{v_2} + \frac{3}{4}$.

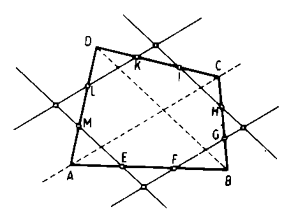
Nach Einsetzen der Werte für v_1 bzw. v_2 erhält man daraus

$\frac{s-3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{s-3}{4} + \frac{3}{4}$ bzw.

$4s - 12 - 8 = 3s - 9 + 9$, also $s = 20$.

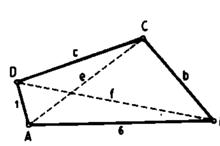
Die Länge des Weges von A nach B beträgt somit 20 km.

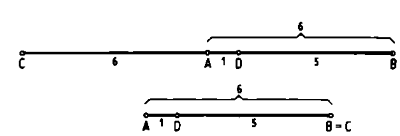
5. Nach Voraussetzung gilt:
$\overline{AM} : \overline{AD} = 1:3 = \overline{AE} : \overline{AB}$.
Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Teiles des Strahlensatzes $ME \parallel DB$. Ebenso folgt $IH \parallel DB$, also gilt $ME \parallel IH$.



Da ferner $ABCD$ konvex ist, liegt C und folglich auch IH außerhalb von ΔABD, während ME innerhalb ΔABD liegt. Also sind die Gerade durch M, E, und die Gerade durch I, H zwei voneinander verschiedene Parallelen. Die gleiche Aussage ergibt sich für die Gerade durch F, G und die Gerade durch L, K. Daraus folgt die Behauptung.

6. Es sei $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$. Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABD, ABC und ACD, gilt (alle Längenangaben in Zentimeter)





$5<f<7, \qquad (1)$

$6-e<b<6+e, \qquad (2)$

$e-1<c<e+1. \qquad (3)$

Aus (1) und $e+f=11$ folgt

$4<e<6. \qquad (4)$

Aus (2), (3) und (4) folgt

$5<b+c<2e+7<19.$

Hieraus und aus $u=b+c+7$ folgt

$12<u<26.$

Wie das Bild zeigt, treten diese Längen $x=12$ (cm) und $y=26$ (cm) im Entartungsfall tatsächlich auf, sind daher die gesuchten Längen. Daher gilt $12 \leqq u \leqq 26$.

Klassenstufe 9

1. Angenommen, drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen genügen den Bedingungen der Aufgabe. Dann gibt es eine positive ganze Zahl k so, daß diese drei Zahlen $2k-1$, $2k+1$ und $2k+3$ lauten. Für diese k gilt dann

$(2k-1)^2+(2k+1)^2+(2k+3)^2=1111x$

mit einer natürlichen Zahl x, für die $1 \leqq x \leqq 9$ gilt,

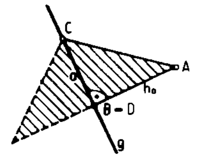
$12k^2+12k+11=1111x$, also

$$k^2+\ k+\ 1=\frac{1111x+1}{12}.$$

Da k^2+k+1 eine ganze Zahl ist, muß wegen der Teilbarkeit durch 12 die Zahl $(1111x+1)$ eine gerade und folglich $1111x$ eine ungerade Zahl sein. Mithin kommen für x nur die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 in Frage. Für diese hat $1111x+1$ die Werte 1112, 3334, 5556, 7778, 10000, von denen nur 5556 durch 12 teilbar ist. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $x=5$.

Daraus erhält man $k^2+k+1=463$ mit den Lösungen $k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1849}$, von denen nur $k=21$ positiv ist. Daher können nur die aus $k=21$ als $2k-1$, $2k+1$, $2k+3$ entstehenden drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Probe $41^2+43^2+45^2=1681+1849+2025=5555$ bestätigt, daß diese drei Zahlen die geforderten Bedingungen erfüllen.

2. Fall: 1) Der Fußpunkt D der Höhe h_a falle mit B oder C zusammen. Es entsteht ein gerader Kreiskegel mit dem Radius h_a und der Höhe a (siehe Bild):

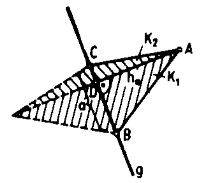


$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot a$$

Fall 2) Der Fußpunkt D sei innerer Punkt der Strecke BC. Dann gilt:

$$V=V_{k_1}+V_{k_2},$$

wobei K_1 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{BD}$ und K_2 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{CD}$ sein soll (siehe Bild).



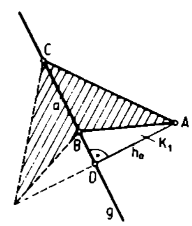
$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{BD}+\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{CD},$$

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot(\overline{BD}+\overline{CD}),$$ und wegen

$\overline{BD}+\overline{CD}=a$ folgt

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot a.$$

Fall 3) Der Fußpunkt D liege außerhalb der Strecke BC (siehe Bild).



Dann gilt

$$V=V_2-V_1,$$

wenn (o.B.d.A.) $\overline{DB}<\overline{DC}$ und K_2 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{DC}$ ist, also

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{DC}-\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{DB},$$

und wegen $\overline{DC}-\overline{DB}=a$ folgt

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot a.$$

Das Volumen V des durch Rotation der Dreiecksfläche entstandenen Körpers beträgt mithin in allen drei Fällen

$$V=\frac{1}{3}\pi a\cdot h_a{}^2.$$

3. I) Angenommen, eine Zahl x genügt der Forderung der Aufgabe. Dann ergibt sich: Aus D folgt: Gleichgültig, welche der beiden Aussagen wahr ist, x muß eine dreistellige natürliche Zahl sein. Aus C folgt: Wäre C_2 wahr, dann wäre auch C_1 wahr, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also ist C_2 falsch und demnach C_1 wahr.

Aus C_1 und D folgt, daß x eine dreistellige natürliche Zahl ist, die mit der Ziffer 3 beginnt.

Wäre D_2 wahr, dann müßte x die Zahl 333 sein. Für diese Zahl wären jedoch beide Aussagen B_1 und B_2 falsch. Demnach muß D_2 falsch und D_1 wahr sein.

Wäre B_2 wahr, dann müßte gelten

$x+1=12n.$

Dann würde daraus folgen

$x+1-6=12n-6$

$x-5\ \ =6(2n-1),$

d. h, auch Aussage B_1 wäre wahr.

Da das im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht, muß B_2 falsch und B_1 wahr sein. Ist nun $x-5$ durch 6 teilbar, dann auch $x+1$, und da von zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von 6 genau eines durch 12 teilbar ist, $x+1$ aber nicht durch 12 teilbar sein darf, muß $x-5$ durch 12 teilbar sein.

Aus den bisherigen Aussagen folgt:

x ist eine Primzahl mit $300<x<399$.

Sie ist um 5 größer als ein Vielfaches von 12 und ungleich 389. Alle diese Bedingungen werden genau von den Zahlen 317 und 353 erfüllt.

Wäre nun A_2 wahr, dann käme nur die Zahl 353 in Frage, und damit wäre auch A_1 wahr. Folglich muß A_2 falsch sein, und damit entfällt 353.

Somit kann nur die Zahl 317 die in der Aufgabe genannte Forderung erfüllen.

II) Insbesondere ist hiermit gezeigt, daß außer der Zahl 317 keine Zahl der Forderung der Aufgabe genügt, d. h., es ist gezeigt, daß A_1 für die Zahl 317 wahr ist. Ferner sind B_1, C_1, D_1 für 317 wahr und A_2, B_2, C_2, D_2 für 317 falsch. Daher genügt 317 tatsächlich der Forderung der Aufgabe.

4. Angenommen, es gäbe n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren erste die Zahl a und deren Summe die Zahl 60 ist. Dann gilt

$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+[(a+(n-1)]=60.$

Bei Verwendung der Summenformel für die natürlichen Zahlen erhält man $\frac{1}{2}n$

$(2a+n-1)=60$ und somit

$$a=\frac{60}{n}-\frac{n-1}{2} \text{ oder } a=\frac{120-n^2+n}{2n}.$$

Wäre $r \geqq 12$, so wäre $n^2-n=n(n-1) \geqq 12\cdot 11 >120$, also $a<0$. Also verbleiben nur die Möglichkeiten $n=2, \ldots, 11$. Für diese hat $\frac{120-n(n-1)}{2n}$ die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Werte:

n	2	3	4	5	6
$n(n-1)$	2	6	12	20	30
$120-n(n-1)$	118	114	108	100	90
$2n$	4	6	8	10	12
$\frac{120-n(n-1)}{2n}$	$\frac{59}{2}$	19	$\frac{27}{2}$	10	$\frac{15}{2}$

n	7	8	9	10	11
$n(n-1)$	42	56	72	90	110
$120-n(n-1)$	78	64	48	30	10
$2n$	14	16	18	20	22
$\frac{120-n(n-1)}{2n}$	$\frac{39}{7}$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{11}$

Daher können nur die Darstellungen als Summen aus den in (1), (2), (3) genannten Zahlen die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

(1) 19, 20, 21

(2) 10, 11, 12, 13, 14

(3) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Die Probe bestätigt, daß die Summe dieser Zahlen jeweils 60 ist.

Hinweis: Das Probieren kann auch wesentlich eingeschränkt werden, wenn man beachtet, daß aus

$$\frac{1}{2}n(2a+n-1)=60, \text{ also}$$

$$n(2a+n-1)=120 \text{ folgt},$$

daß $n \mid 120$ sein muß, und, falls n gerade ist, $8 \mid n$ gilt. Mithin bleiben nur noch $n=3, 5, 8$ übrig.

5. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dabei seien a, b und c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB und α, β und γ die Größen der Innenwinkel bei A, B und C.

Ferner schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB in D. Da jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt D zwischen A und B. Es wird nun (o.B.d.A.) behauptet:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Beweis: Man verlängert BC über C hinaus um b bis zum Punkt E. Wegen $\overline{AC}=\overline{EC}$ ist das Dreieck ACE gleichschenklig.

Also gilt

$\overline{\sphericalangle CAE}=\overline{\sphericalangle CEA}$ (als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und ferner

$\overline{\sphericalangle CAE}+\overline{\sphericalangle CEA}=\gamma$ (nach dem Außenwinkelsatz). Daraus folgt

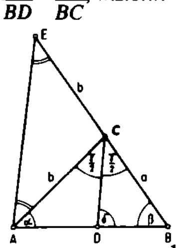
$$\overline{\sphericalangle CAE}=\frac{\gamma}{2}.$$

Die Winkel $\sphericalangle CAE$ und $\sphericalangle ACD$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß. Folglich sind die Strecken CD und AE parallel.

Daher gilt nach einem der Strahlensätze

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \text{ und wegen } \overline{AC}=\overline{EC}=b$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \text{ w.z.b.w.}$$



6. Wegen $abc=1$ gilt $c=\frac{1}{ab}$.

Mithin gilt

$$\begin{aligned}
&(1+a)(1+b)(1+c)\\
&=(1+a)(1+b)\left(1+\frac{1}{ab}\right)\\
&=(1+a+b+ab)\left(1+\frac{1}{ab}\right)\\
&=1+a+b+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+1\\
&=2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right). \qquad (*)
\end{aligned}$$

Nun gilt für alle $x>0$

$(x-1)^2=x^2-2x+1 \geqq 0$, also

$$x-2+\frac{1}{x} \geqq 0 \text{ bzw.}$$

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2 \text{ (1), und das}$$

Gleichheitszeichen gilt genau für $x=1$.

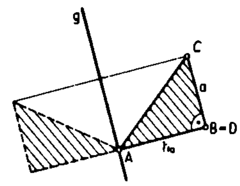
Wegen (1) folgt aus (*)

$(1+a)(1+b)(1+c) \geqq 2+2+2+2=8$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $a=b=c=1$ gilt, w.z.b.w.

Klassenstufe 10

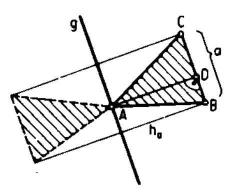
1. Für die Lage des Punktes D unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: D fällt mit einem der Punkte B, C zusammen, o.B.d.A. mit dem Punkte B. Das Volumen V des Rotationskörpers ergibt sich dann als Differenz des Volumens V_z eines Zylinders mit dem Radius h_a und der Höhenlänge a und des Volumens V_k eines Kegels mit gleichem Radius und gleicher Höhenlänge (siehe Bild).



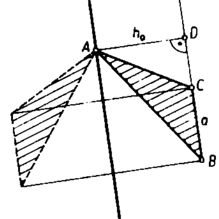
$$\begin{aligned}
V&=V_z-V_k\\
&=\pi h_a^2\cdot a-\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot a\\
&=\frac{2}{3}\pi h_a^2\cdot a.
\end{aligned}$$

Fall 2: D liegt zwischen B und C. Dann ist das Volumen V gleich der Differenz aus V_z und der Summe der Volumina V_{k_1} eines Kegels mit dem Radius h_a und der Höhenlänge $\overline{BD}$ und V_{k_2} eines Kegels mit gleichem Radius und der Höhenlänge $\overline{DC}$, wobei $\overline{BD}+\overline{DC}=\overline{BC}=a$ gilt (siehe Bild).



$$\begin{aligned}
V&=V_z-(V_{k_1}+V_{k_2})\\
&=\pi h_a^2\cdot a-\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot(\overline{BD}+\overline{DC})\\
&=\frac{2}{3}\pi h_a^2\cdot a.
\end{aligned}$$

Fall 3: D liegt auf der Geraden durch B und C außerhalb von BC, o.B.d.A. so, daß C zwischen B und D liegt.



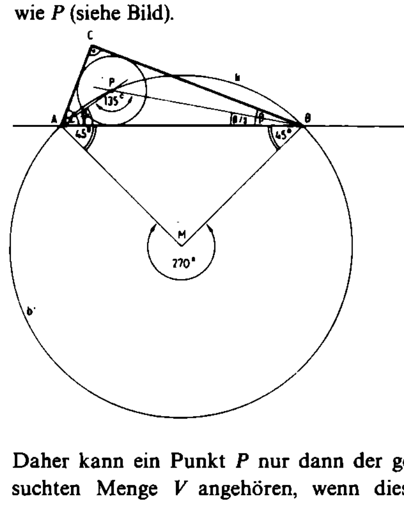
Dann ist das Volumen V gleich der Differenz aus der Summe der Volumina V_z und V_{k_2} und dem Volumen V_{k_1}, wobei diesmal $\overline{BC}=\overline{BD}-\overline{CD}=a$ gilt (siehe Bild).

$$\begin{aligned}
V&=V_z+V_{k_2}-V_{k_1}\\
&=\pi h_a^2\cdot a+\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot\overline{CD}-\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot\overline{BD}\\
&=\pi h_a^2\cdot\left[a+\frac{1}{3}(\overline{CD}-\overline{BD})\right]\\
&=\pi h_a^2\cdot\left(a-\frac{1}{3}a\right)=\frac{2}{3}\pi h_a^2\cdot a.
\end{aligned}$$

Das Volumen V des betrachteten Rotationskörpers beträgt also in jedem Falle

$$V=\frac{2}{3}\pi a\cdot h_a^2.$$

2. I. Angenommen, P sei der Inkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB. Dann liegt P nicht auf der Geraden g durch A, B. Sind α, β die Innenwinkelgrößen bei A bzw. B im Dreieck ABC, so ist $\alpha+\beta=90°$ und $\overline{\sphericalangle BAP}=\frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle ABP}=\frac{\beta}{2}$, also $\overline{\sphericalangle BAP}+\overline{\sphericalangle ABP}=45°$ und daher $\overline{\sphericalangle APB}=135°$. Ist M der Mittelpunkt des Umkreises k von ΔABP, so hat folglich derjenige Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden Bogen $b'=\widehat{AB}$ von k gehört, die Größe 270°. Also ist ΔABM ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB; folglich gilt $\overline{\sphericalangle BAM}=\overline{\sphericalangle ABM}=45°$, und da zu b' ein überstumpfer Zentriwinkel gehört, liegt M auf derselben Seite von g wie b', d. h. nicht auf derselben Seite von g wie P (siehe Bild).



Daher kann ein Punkt P nur dann der gesuchten Menge V angehören, wenn diese durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

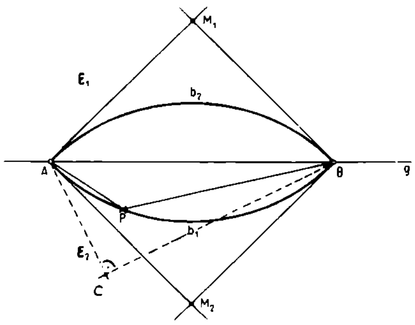
II. (1) Man zeichnet die Gerade g durch A und B. Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2.

(2) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, daß dessen freie Schenkel in ε_1 verlaufen und sich in M_1 schneiden.

(3) Man zeichnet den Kreis um M_1 mit dem Radius $\overline{M_1A}=\overline{M_1B}$. Der in ε_2 liegende Bogen dieses Kreises sei b_1 genannt.

(4) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, daß dessen freie Schenkel in ε_2 verlaufen und sich in M_2 schneiden.

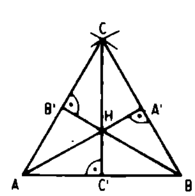
(5) Man zeichnet den Kreis um M_2 mit dem Radius $\overline{M_2A} = \overline{M_2B}$. Der in ε_1 liegende Bogen dieses Kreises sei b_2 genannt.
(6) Die Vereinigungsmenge der beiden Kreisbögen b_1 und b_2 mit Ausnahme der Punkte A und B sei mit V bezeichnet.



III. Jeder Punkt P der so konstruierten Menge V gehört der gesuchten Menge an.
Beweis: Nach Konstruktion sind die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse AB.
Liegt P ($\neq A, B$) auf b_1, so ist $\sphericalangle APB$ ein in dem Kreis k_1 um M_1 mit $\overline{M_1A} = \overline{M_1B}$ liegender Peripheriewinkel; und der Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden, d. h. in ε_1 gelegenen Bogen $b_1' = \widehat{AB}$ von k_1 gehört, ist überstumpf, da auch M_1 in ε_1 liegt. Somit hat dieser Zentriwinkel die Größe 270°, folglich gilt $\sphericalangle APB = 135°$, also
$\sphericalangle BAP + \sphericalangle ABP = 45°$. Trägt man an AB in A und B je einen Winkel der Größe $2 \cdot \sphericalangle BAP$ bzw. $2 \cdot \sphericalangle ABP$ so an, daß die freien Schenkel in ε_2 verlaufen, so schneiden sich diese folglich in einem Punkt C, für den
$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 90°$, also $\sphericalangle ACB = 90°$ gilt.
In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse ist P der Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt.
Daher gehört P der gesuchten Menge an.
Analog beweist man, daß jeder Punkt P ($\neq A, B$) auf b_2 der gesuchten Menge angehört.
IV. Alle Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar.

3. (I) Angenommen, für Zahlen a und b seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann hat die Gleichung $(1+a^2x^2):x^2 = b$ mindestens eine Lösung x. Daraus folgt $b \neq 0$; denn für keine Zahl a hat die Gleichung
$(1+a^2x^2):x^2 = 0$ eine Lösung. Da ferner beide in der Aufgabe angegebenen Gleichungen mindestens eine gemeinsame Lösung x haben, so gilt für diese auch die nach Division der zweiten durch die erste entstehende Gleichung $x^4 = 1$. Hieraus folgt $x^2 = 1$, also $1 + a^2 = b$.
Somit können die Bedingungen der Aufgabe nur erfüllt sein, wenn $b + 1 + a^2$ ist.
(II) Zum Nachweis, daß für $b = 1 + a^2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, ermitteln wir zunächst die Lösungsmenge der Gleichung
$(1+a^2x^2):x^2 = 1 + a^2$:
Angenommen, für eine Zahl x gelte diese Gleichung, dann folgt $1 + a^2x^2 = x^2 + a^2x^2$, also $x^2 = 1$. Daher können nur die Zahlen 1 und -1 Lösung sein. Sie sind dies auch; denn es gilt
$(1 + a^2 \cdot 1^2) : 1^2 = 1 + a^2$ und
$[(1 + a^2 \cdot (-1)^2)] : (-1)^2 = 1 + a^2$.
Also hat $(1 + a^2x^2) : x^2 = 1 + a^2$ die Lösungsmenge $\{1, -1\}$. Ferner ermitteln wir die Lösungsmenge der Gleichung
$(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = 1 + a^2$:
Angenommen, für eine Zahl x gelte diese Gleichung. Dann folgt
$x^2 + a^2x^4 - 1 - a^2 = 0$, also
$a^2(x^4 - 1) + x^2 - 1 = 0$,
$(x^2 - 1)[(a^2(x^2 + 1) + 1)] = 0$ und somit wegen $a^2(x^2 + 1) + 1 \geqq a^2 \cdot 1 + 1 \geqq 1 > 0$ weiter
$x^2 - 1 = 0$.
Daher können nur die Zahlen 1 und -1 Lösung sein. Sie sind dies auch; denn es gilt
$(1 + a^2 \cdot 1^2) \cdot 1^2 = 1 + a^2$ und
$[(1 + a^2 \cdot (-1)^2)] \cdot (-1)^2 = 1 + a^2$. Also hat auch $(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = 1 + a^2$ die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.
Daher sind die Bedingungen der Aufgabe genau für $1 + a^2 = b$ erfüllt, und die gesuchte Lösungsmenge ist $\{1, -1\}$.

4. Aus der Voraussetzung folgt:
$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{HA'} : \overline{HC'}$ (1)
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz gilt
$\Delta AC'H \sim \Delta HA'C$ (Scheitelwinkel, rechte Winkel) und
$\Delta ABA' \sim \Delta CBC'$ (gemeinsamer Winkel, rechte Winkel)
Daraus folgt $\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{HC'} : \overline{HA'}$ (2)
und $\overline{AB} : \overline{CB} = \overline{AA'} : \overline{CC'}$ (3)
Nach (1) und (2) ergibt sich
$$\overline{HA'} : \overline{HC'} = \overline{HC'} : \overline{HA'}$$
und damit $\overline{HC'} = \overline{HA'}$
Unter Berücksichtigung von (2) folgt daraus
$$\overline{CH} = \overline{AH}.$$
Durch Addition erhält man daraus
$$\overline{CC'} = \overline{AA'}.$$
Durch Einsetzen in (3) ergibt sich
$$\overline{AB} = \overline{CB}.$$
Analog verläuft der Beweis für
$$\overline{AB} = \overline{AC}.$$
Damit ist bewiesen, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.

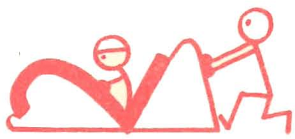


5. Angenommen, es gibt Positionssysteme mit Basen n und darin jeweils zweistellige Zahlen x mit den Ziffern a und b, welche die geforderten Eigenschaften haben, dann gilt:
$nb + a = 2(na + b)$ (*) $(a > 0, b < n)$
Aus (*) folgt $n(b - 2a) = 2b - a$. Dabei gilt $b - 2a \neq 0$; denn wäre $b - 2a = 0$, also $b = 2a$, dann müßte auch $2b - a = 0$, also $4a - a = 0$ und mithin $a = 0$ sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher folgt aus * weiterhin $n = \frac{2b - a}{b - 2a}$. Da n positiv ist, unterscheidet man zwei Fälle:
I. $2b - a < 0$ und $b - 2a < 0$ oder
II. $2b - a > 0$ und $b - 2a > 0$.
Fall I. entspricht nicht den Bedingungen der Aufgabe, denn wegen $a - 2b > 0$ und $2a - b > 0$ sowie $n = \frac{a - 2b}{2a - b} \geqq 2$ wäre $a - 2b \geqq 4a - 2b$, also $3a \leqq 0$, d. h. $a \leqq 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Im Falle II. folgt entsprechend $a \geqq 0$, wobei $a = 0$ genau für $n = 2$ gilt. Daraus folgt $n \geqq 3$.
Da a, b und n natürliche Zahlen > 1 sind, folgt $b - 2a \geqq 1$. Aus $b - 2a = 1$ erhält man $n = 3a + 2$. Es sei nun $b - 2a = d \geqq 2$. Dann müßte gelten $2b - a = 2(2a + d) - a = 3a + 2d$ und damit $n = \frac{3a + 2d}{d}$. Wegen $b < n$ würde nun $2a + d < \frac{3a + 2d}{d}$ oder $2ad + d^2 < 3a + 2d$ bzw.
$d^2 - 2d + 1 + 2ad < 3a + 1$ bzw.
$(d - 1)^2 + 2ad < 3a + 1$ gelten. Nun folgte aber aus $d \geqq 2$:
$(d - 1)^2 \geqq 1$, also $2ad \geqq 4a$ und damit
$(d - 1)^2 + 2ad \geqq 4a + 1 > 3a + 1$, im Widerspruch zur Annahme. Folglich ist $b = 2a + 1$, $n = 3a + 2$ die einzige Lösung.
$(3a + 2)(2a + 1) + a = 6a^2 + 8a + 2$
$= 2(3a^2 + 4a + 1) = 2[(3a + 2)a + 2a + 1)]$.
Es gibt mithin unendlich viele Positionssysteme, in welchen es zweistellige Zahlen der verlangten Eigenschaft gibt; und zwar in jedem dieser Positionssysteme genau eine zweistellige Zahl dieser Art. Für alle diese Positionssysteme gilt:
Die Zahlen x und n erfüllen genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn $x = an + b = an + 2a + 1$ und $n = 3a + 2$ gilt, wobei $n = 3a + 2$ und $b = 2a + 1$, wobei a eine beliebige natürliche Zahl > 0 ist.

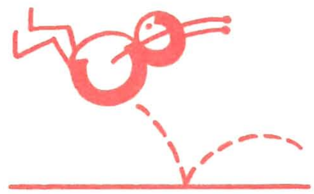
6. a) Laut Definition von $[x]$ ist $[x] = g$ für jede reelle Zahl erklärt und eine ganze Zahl. Für alle ganzen Zahlen g ist ebenso $(-1)^g$ erklärt. Also ist durch $y = f(x) = (-1)^{[x]}$ eine Funktion f erklärt, die für alle reellen x existiert.
b) Wegen $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = +1$, $(-1)^3 = -1$, $(-1)^4 = +1$ liegt die Vermutung nahe, daß $f(x + 2) = f(x)$ gilt.
Aufgrund der Definition von $[x]$ gilt genau dann $[x] = g$, wenn es eine reelle Zahl a mit $0 \leqq a < 1$ gibt, so daß $x = g + a$ ist. Folglich gilt $x + 2 = g + 2 + a$ und, da $g + 2$ ebenfalls eine ganze Zahl ist, $[x + 2] = g + 2 = [x] + 2$.
Damit ergibt sich
$$f(x+2) = (-1)^{[x+2]} = (-1)^{[x]+2} = (-1)^{[x]} \cdot (-1)^2 = (-1)^{[x]},$$
d. h. $f(x + 2) = f(x)$, es existiert also ein p mit $p = 2$.

Fortsetzung auf Seite 72

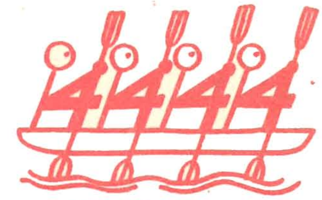
EINER-KANADIER



ZWEIER-BOB



DREISPRUNG



VIERER-KAJAK

▲6▲ Im Kanuslalom werden Punkte zur Wertung benutzt (Fahrzeit in s plus Strafpunkte für das Berühren oder Auslassen von Toren). Sieger wird demnach der Sportler mit der geringsten Gesamtpunktzahl. Die ersten Sechs der Olympischen Spiele von 1972 erreichten folgende Punktzahlen:

1. Horn (DDR)	268,56
2. Sattler (Österreich)	270,76
3. Gimpel (DDR)	277,95
4. Peters (BRD)	282,82
5. Raum (BRD)	288,01
6. Havlicek (ČSSR)	289,56

Weiter ist folgendes bekannt:

1. Jeder erhielt Strafpunkte, die in den Stufen 10, 20, 30, ... vorkamen.
2. Keiner erhielt mehr als 40 Strafpunkte.
3. Zweimal erhielten Sportler die gleiche Strafpunktzahl.
4. Ein besser plazierter Sportler (s. o.) erhielt weniger Strafpunkte als ein nach ihm plazierter.
5. Der BRD-Sportler *Peters* erzielte die zweitschnellste Fahrzeit.

Ermittle, wieviel Strafpunkte jeder dieser Sportler erhielt, und ordne sie in der Reihenfolge nach ihren reinen Fahrzeiten!

▲7▲ Der Moderne Fünfkampf beginnt mit einem Geländeritt über 1000 bis 1500 m mit 10 bis 23 Hindernissen (je nach Gegebenheiten des Austragungsortes). Gewertet wird wie folgt:

Fehlerloser Ritt mit einer Geschwindigkeit von 400 m/min: 1100 Punkte

Für jede angefangene Sekunde über die erlaubte Zeit werden abgezogen (bis zu einer Gesamtzeit von 6 min): 5 Punkte.

Wird die Reitzeit von 6 min überschritten, erhält der Sportler 0 Punkte. Außerdem gibt es noch Strafpunkte an Hindernissen. Pluspunkte werden keine vergeben.

Die Strecke für den Geländeritt sei 1100 m, 1200 m bzw. 1450 m lang.

a) Berechne für die drei Längen, welche Zeit ein fehlerloser Geländeritt höchstens dauern darf, damit die Höchstpunktzahl erreicht wird!

b) Wieviel Punkte erhält ein Sportler, der die jeweilige Strecke in 5:30 min absolviert?

▲8▲ Folgende Hürdenstrecken sind olympische Disziplinen: 110 m und 400 m bei den Männern und 100 m bei den Frauen. Es sind jeweils 10 Hürden zu überwinden. Folgende Abstände gelten vom Start bis zur 1. Hürde bzw. von der letzten Hürde bis zum Ziel:

110 m:	13,72 m	14,02 m
400 m:	45,00 m	40,00 m
100 m:	13,00 m	10,50 m

Wie groß ist bei jeder Hürdenstrecke der Abstand zwischen den Hürden?

▲9▲ Die letzte Disziplin des Modernen Fünfkampfs ist der Geländelauf über 4000 m. Für eine Zeit von 14:15,0 werden 1000 Punkte vergeben, für je 1 s Abweichung von dieser Zeit werden 3 Punkte dazugezählt (bei schnellerem Lauf) bzw. abgezogen (bei langsamerem Lauf). Ein Sportler A hat 42 Punkte Rückstand zum Führenden B, der den Geländelauf in 13:47,0 schon absolviert hat.

Wie schnell muß A laufen, um B

a) um 3 Punkte

b) um 12 Punkte zu überbieten?

▲10▲ Der Weltrekord im 10000-m-Lauf steht bei 27:30,8 min.

a) Welcher Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht das?

b) Welche Zeit wurde durchschnittlich für jeweils 100 m benötigt?

▲11▲ Bei großen internationalen Rudermeisterschaften bestreiten meist sechs Boote die einzelnen Ausscheidungen und Finalrennen (ggf. je nach Teilnehmerzahl auch nur 5 oder 4).

Bei den Olympischen Spielen in München 1972 wurden Vorläufe und Hoffnungsläufe, das Halbfinale und das Finale gerudert, ehe die Sieger feststanden. Im Einer gab es 3 Vorläufe, 3 Hoffnungsläufe, 2 Halbfinalläufe (mit je sechs Booten) und das Finale mit sechs Booten. Die Sieger der Vorläufe erreichten direkt das Halbfinale.

a) Wieviel Boote aus jedem Hoffnungslauf kamen ins Halbfinale?

b) Mit welcher minimalen Platzziffer (d. i. die Summe der Plazierung in jedem Lauf) konnte ein Sportler Olympiasieger werden?

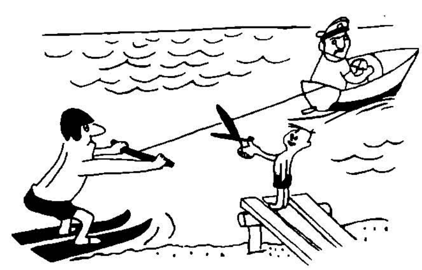
c) Mit welcher maximalen Platzziffer konnte ein Sportler Olympiazweiter werden, wenn in den Vorläufen je sechs Boote starteten?

▲12▲ Nach dem ersten Teilsprung, dem sogenannten Hop (dt. Hupf) teilt man die Dreisprungtechnik in zwei Varianten ein, die Flachsprungtechnik (Hop beträgt 35 bis 36% des Gesamtsprunges) und die Steilsprungtechnik (Hop beträgt mehr als 38% des Gesamtsprunges).

Ein Sportler erreicht 16,90 m im Dreisprung. Wie weit ist sein erster Teilsprung mindestens, wenn er

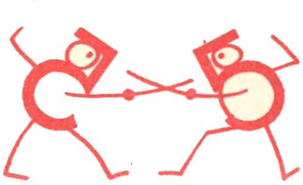
a) nach der Flachsprungtechnik

b) nach der Steilsprungtechnik springt?



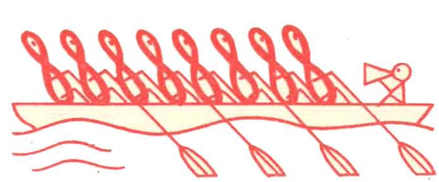
Ich gratuliere dir zur Eröffnung der Saison, Vati!

MODERNER FÜNFKAMPF
(Teildisziplin Fechten)



SIEBENMETERWURF
beim Hallenhandball

RUDER-ACHTER



Berufsbild: Diplom-Ingenieur für Landtechnik

Über die Ausbildung landtechnischer Hochschulkader

Die sozialistische Landwirtschaft ist ein Zweig unserer Volkswirtschaft, der einen bedeutenden Beitrag zur Lösung der vom VIII. Parteitag der SED beschlossenen Hauptaufgabe leistet. Fast 50% unseres Nahrungsgüterbedarfs produziert die Land-, Forst- und Nahrungsgüterwirtschaft unserer Republik, jeder dritte bis vierte Werktätige im produzierenden Bereich unserer Volkswirtschaft ist mit seinen Leistungen an der Erzeugung von Lebensmitteln beteiligt, der Anteil am gesellschaftlichen Gesamtprodukt beträgt etwa 30%, und für diese Produktion werden etwa 23% der Grundfonds unserer Volkswirtschaft benötigt.
Diese Zahlen machen sichtbar, welche große Verantwortung die Arbeiter und Genossenschaftsbauern für die immer bessere Versorgung der Bevölkerung mit ausreichend qualitätsgerechten Nahrungsmitteln und der Industrie mit Rohstoffen haben.
Die Unterstützung, die die Arbeiterklasse der DDR und auch der UdSSR unserer sozialistischen Landwirtschaft gibt, sollen folgende Angaben deutlich machen.
Der Mechanisierungsgrad beträgt in der Getreideernte 99,9%, bei der Kartoffelernte 91,1% und bei der Ernte der Zuckerrüben 96,2%. Je 100 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche stehen den in 1210 kooperativen Abteilungen Pflanzenproduktion, 47 LPG und 5 VEG Pflanzenproduktion arbeitenden 345000 Arbeitern und Genossenschaftsbauern 111 PS zur Verfügung. 27% dieser PS-Leistung entfallen dabei auf Traktoren aus der Sowjetunion.
Der schrittweise Übergang zu industriemäßigen Produktionsmethoden, der damit verbundene Einsatz moderner, hochleistungsfähiger Maschinensysteme und Anlagen sowie die notwendige Erhöhung der Arbeitsproduktivität erfordern die Ausbildung hochqualifizierter landtechnischer Hochschulkader.
In Arbeitsteilung mit Diplom-Agraringenieuren und Diplom-Agrarökonomen tragen sie die Verantwortung, daß die von der Arbeiterklasse bereitgestellte Technik effektiv eingesetzt und erhalten wird.
Entsprechend der Aufgabenverteilung und wissenschaftlichen Profilierung unserer Universitäten und Hochschulen ist die Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg verantwortlich für die Ausbildung und Erziehung produktionsorientierter landtechnischer Hochschulkader, die unmittelbar in den Landwirtschaftsbetrieben bzw. ihren Vorleistungsbereichen (Kreisbetriebe für Landtechnik, Landtechnische Instandsetzungswerke und Betriebe des landtechnischen Anlagenbaus) eingesetzt werden.
Zur Realisierung dieser Zielstellung dient ein vierjähriges Direktstudium, das in der Grundstudienrichtung „Mechanisierung der Landwirtschaft" zu absolvieren ist.
Der zunehmenden Spezialisierung und Arbeitsteilung der landwirtschaftlichen Produktion wird im Studium dahingehend Rechnung getragen, daß die Ausbildung in folgenden Fachrichtungen erfolgt:

- Mechanisierung der Pflanzenproduktion
- Mechanisierung der Tierproduktion und
- Landtechnische Instandhaltung.

Das Studium schließt mit dem Erwerb des ersten akademischen Grades „Diplomingenieur" ab.
Unter Berücksichtigung der spezifischen Aufgabenstellung der Ingenieurhochschulen ist es notwendig, daß der Bewerber die Hochschulreife (Abitur) und eine abgeschlossene Berufsausbildung in einem landwirtschaftlich-landtechnischen Beruf besitzt.
Facharbeiter, die die 10. Klasse absolviert haben und im Rahmen ihrer berufspraktischen Tätigkeit vorbildliche fachliche und gesellschaftliche Leistungen nachweisen können, haben die Möglichkeit, im Rahmen eines einjährigen Vorbereitungslehrgangs die Hochschulreife zu erwerben. Dazu werden sie vom Betrieb delegiert und erhalten die für die Konsultationswochen notwendige Arbeitsbefreiung von 60 Arbeitstagen.
Für alle anderen Bewerber gilt das an den Oberschulen verbindliche Bewerbungsverfahren, wobei Bewerber, die ihren Ehrendienst bei der NVA ableisten, bereits vor Aufnahme des Wehrdienstes in das Zulassungsverfahren einbezogen werden.
Spezielle Auskünfte erteilt jedoch auch jederzeit das Direktorat für Erziehung, Aus- und Weiterbildung der Ingenieurhochschule.
Das Studium stellt einen Klassenauftrag dar und erfordert vom Studenten eine hohe Leistungsbereitschaft auf fachlichem und gesellschaftlichem Gebiet.
Der zunehmende industriemäßige Charakter der landwirtschaftlichen Produktion sowie die damit verbundene Mechanisierung und Teilautomatisierung der Produktionsprozesse erfordern vom zukünftigen Absolventen nicht nur umfassende fachspezifische und gesellschaftswissenschaftliche Kenntnisse.
Unumgängliche Voraussetzung für die komplexe Beherrschung technisch-technologischer Prozesse sind gefestigte Kenntnisse in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Wissensgebieten, die für die ingenieurmäßige Anwendung z. T. unmittelbar, zum größeren Teil aber mittelbar, d. h. über andere Grundlagendisziplinen und die fachrichtungsspezifischen Lehrgebiete, wirksam werden. So zielt die Ausbildung im Lehrgebiet Mathematik auf die Aneignung der wichtigsten mathematischen Methoden zur Beurteilung und Lösung naturwissenschaftlicher, technisch-technologischer und ökonomischer Probleme. Die Ausbildung gliedert sich (unter Einbeziehung der Belange der numerischen Mathematik) in die Teilgebiete lineare Algebra/lineare Optimierung, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung/mathematische Statistik.
An ausgewählten Beispielen wird dabei auch demonstriert, wie die Mathematik unmittelbar zur Intensivierung der Produktion beitragen kann. So werden die Studenten zum Beispiel mit den mathematischen Grundlagen der an der Landwirtschaftlichen Hochschule Wolgograd ausgearbeiteten Methode zur Programmierung der Ernte vertraut gemacht. Mit dieser Hochschule verbinden uns besonders enge Partnerschaftsbeziehungen, daneben auch mit Hochschulen in der VR Polen, der Ungarischen VR und der ČSSR.
Die beste Vorbereitung auf die mathematische Ausbildung sind solide Kenntnisse des Schulstoffs, da dieser als bekannt vorausgesetzt und auf ihm systematisch aufgebaut wird. Schwierigkeiten haben erfahrungsgemäß insbesondere solche Studenten, die an der Schule ihre Rechenfertigkeiten (bis hin zum formalen Differenzieren und Integrieren) nicht genügend gefestigt haben. Diesbezügliche Lücken lassen sich später schwer schließen. Die Methoden der Wissensvermittlung an einer Hochschule stellen im Vergleich zur allgemeinbildenden Schule höhere Anforderungen an die Selbständigkeit, insbesondere die disziplinierte Durchführung des Selbststudiums. Wer sich auf ein Studium vorbereitet, sollte deshalb möglichst frühzeitig beginnen, selbständig mit Lehrbüchern zu arbeiten.
In den Lehrgebieten Physik und Chemie wird ein Überblick über die für die Ausbildung wesentlichen physikalischen und chemischen Zusammenhänge und die Grundlagen für das Verständnis der Chemisierung der Landwirtschaft, insbesondere der Anwendung chemischer Mittel in technischen Bereichen gegeben.

Durch Demonstrationsexperimente und selbständige Arbeit im physikalischen und chemischen Praktikum werden die naturwissenschaftlichen Grundbegriffe gefestigt, das Vorstellungsvermögen geschult und experimentelle Fähigkeiten und Fertigkeiten vermittelt.
Parallel und zur Festigung des auf den späteren Einsatz orientierenden Wissens werden die theoretischen Lehrveranstaltungen in den Grundlagenfächern und den Fachdisziplinen durch Übungen und Praktika ergänzt.
In ausgewählten, fortschrittlichen Landwirtschaftsbetrieben werden das 4wöchige Berufspraktikum I (am Ende des 1. Studienjahres) und das 5monatige Ingenieurpraktikum im 7. Semester durchgeführt. Das Berufspraktikum II wird als 7wöchiges Praktikum am Ende des 2. Studienjahres in ausgewählten Jugendobjekten der FDJ absolviert. Die besten Studenten durchlaufen ein Praktikum im sozialistischen Ausland.
Ausgerüstet mit umfangreichen theoretischen Kenntnissen und praktischen Fertigkeiten wird der Absolvent befähigt, die ihm entsprechend seiner Ausbildung übertragenen Funktionen und Tätigkeiten in der sozialistischen Praxis zu erfüllen.
Der Einsatz erfolgt für Absolventen der Fachrichtung
- Mechanisierung der Pflanzenproduktion: Überwiegend als landtechnische Leitungskader in KAP, LPG und VEG der Pflanzenproduktion, in ACZ (Agrochemische Zentren), bei der Mechanisierung des Gartenbaus und der Forstwirtschaft sowie in weiteren Einrichtungen der Land-, Forst- und Nahrungsgüterwirtschaft;
- Mechanisierung der Tierproduktion: Als „Technische Leiter" bzw. Betriebsingenieur in LPG und VEG sowie ihren kooperativen Einrichtungen der Tierproduktion und VE-Kombinaten für industrielle Mast (KIM);
- Landtechnische Instandhaltung: Als Technologen für die vorbeugende Instandhaltung und für die Instandsetzung in Kreisbetrieben für Landtechnik, Landtechnischen Instandsetzungswerken und Betrieben des Landtechnischen Anlagenbaus.

H. Bausch/E. Schneider

Bei Freunden in Kuba zu Gast

In den Jahren 1967/68 beschlossen die verantwortlichen Mitarbeiter im kubanischen *Erziehungsministerium* die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der *Primaria* (Kl. 1 bis 6). Als Vorbild wählten die kubanischen Genossen den Mathematikunterricht an unserer polytechnischen Oberschule.

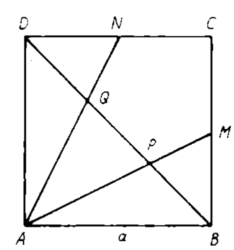
In Anlehnung an unsere Lehrpläne, Lehrbücher und Unterrichtshilfen wurden inzwischen Ausbildungsmaterialien für die *Primaria* und auch für die *Secundaria* (Kl. 7 bis 9) entwickelt. Bei der Einführung dieser Materialien in den Unterricht werden die kubanischen Pädagogen seit 1968 von Lehrerbildnern aus Erfurt und Köthen tatkräftig unterstützt. Im Juni/Juli 1971 war ich das erste Mal als Lehrkraft in einem Kurs mit einer großen Gruppe kubanischer Mathematiklehrer und Schulinspektoren in Havanna eingesetzt und auch in den Jahren 1972, 1974, 1975 und 1976 führte ich in Havanna Weiterbildungskurse durch. Da es in Kuba keine Ausbildung in *Methodik des Mathematikunterrichts* gibt, wird in den Kursen, ausgehend von den fachwissenschaftlichen Grundlagen des Schulstoffes, vor allem an der methodischen Aufbereitung des Stoffes und dem zweckmäßigen Einsatz der Lehrbücher gearbeitet.
Die Kursteilnehmer führen dann ihrerseits in den Weiterbildungswochen mit den Lehrern in den Provinzen Lehrgänge durch, so daß im darauffolgenden Jahr in einer weiteren Klassenstufe ein moderner Mathematikunterricht erteilt werden kann. Unsere kubanischen Kollegen sind mit großem Eifer bei der Erfüllung dieser Aufgabe. Trotz 30° im Schatten bei der Vorlesung oder beim Selbststudium erlahmt ihr Fleiß nicht.
Bei meinen Besuchen in Kuba habe ich bereits in vielen Schulen hospitiert und mich davon überzeugen können, wie gut unsere Kursteilnehmer das Gelernte weitergegeben haben und es nun im Unterricht umgesetzt wird. Besonders eindrucksvoll waren Besuche in der *Escuela Vocacional* „W. I. Lenin" (Spezialschule) und in der *Escuela en el Campo* (Landoberschule) mit dem Namen „Republica Democratica Alemana" am 21. Mai 1974, als dort der *Concurso Nacional de Matematica* (nationale Mathematikolympiade) stattfand. Aus dem Kreis der Teilnehmer an diesem Wettbewerb wurde auch die Delegation Kubas zur XVI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1974 in Erfurt ausgewählt.

W. Jungk

Aufgaben aus der Republik Kuba

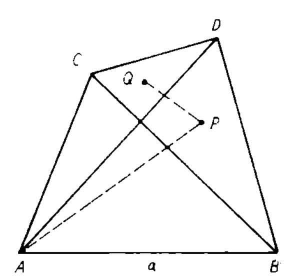
▲1▲ Gegeben sei eine quadratische Gleichung in der Normalform $x^2+px+q=0$; der Koeffizient p des linearen Gliedes px und das absolute Glied q seien beides reelle Zahlen.
a) Für welche Werte von p und q besitzt die gegebene Gleichung die reellen Lösungen $x_1=a$ und $x_2=b$?
b) Für welche Werte von p und q besitzt die gegebene Gleichung die reellen Lösungen $x_1=a^2$ und $x_2=b^2$?
c) Es seien $x_1=a$ und $x_2=2a$ reelle Lösungen der gegebenen Gleichung; es ist p als Funktion von q darzustellen!
d) Es sei $p=-2$, und eine der beiden Lösungen sei gleich dem Quadrat der anderen Lösung. Welchen Wert hat in diesem Fall das absolute Glied q?

▲2▲ Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a$ dar. Der Mittelpunkt M der Seite $\overline{BC}$ und der Mittelpunkt N der Seite $\overline{CD}$ wurden mit dem Eckpunkt A des Quadrates verbunden. Die Diagonale $\overline{BC}$ schneide AM in P und AN in Q.

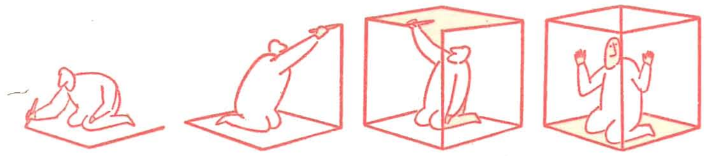


a) Es ist zu beweisen, daß $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{DQ}$ gilt!
b) Welche der drei Winkel $\sphericalangle BAP$, $\sphericalangle PAQ$ und $\sphericalangle QAD$ sind einander kongruent?

▲3▲ Die abgebildete Figur sei ein reguläres Tetraeder $ABCD$ mit der Kantenlänge $AB=a$. Das von A auf die Ebene CBD gefällte Lot habe den Fußpunkt P. Das von P auf die Ebene CAD gefällte Lot habe den Fußpunkt Q. Es ist zu beweisen, daß
$\overline{PQ}=\frac{1}{3}\cdot\overline{AP}$ gilt.



In freien Stunden alpha heiter



Praktische Geometrie

Hundert Gefangene

Es war einmal ein russischer Märchenkönig mit Namen *Dodon*. Bei einem Streifzug nahm er 100 Feinde gefangen. Diese sperrte er in 100 Einzelzellen. Davor patrouillierte Tag und Nacht die Wache.
Alle Zellenschlösser konnte man mit einem Schlüssel öffnen, den der König trug. Wurde dieser Schlüssel im Schloß einmal umgedreht, ließ sich die Tür öffnen. Wurde er nochmals umgedreht, war die Tür verschlossen, usw.
Zu seinem Geburtstag wünschte der König, die Gefangenen freizulassen. Deshalb schickte er am Tage zuvor einen Boten, der alle Zellen nacheinander durchging und immer den Schlüssel einmal drehte. Nun waren alle Zellen geöffnet. Doch da der Geburtstag des Königs noch nicht angebrochen war, sperrten die Wachen noch den Ausgang.
Sobald der Bote den Schlüssel zurückbrachte, entschied sich der König *Dodon* wieder anders. Er schickte einen zweiten Boten, der den Schlüssel in jedem zweiten Zellenschloß noch einmal umdrehen sollte. Damit waren alle Zellen mit ungerader Nummer wieder verschlossen.
Danach mußte ein dritter Bote den Schlüssel in der 3., 6., 9., usw. Zelle wieder umdrehen. Dann ein vierter Bote den in der 4., 8., 12., ... usw. Genau so machten es alle weiteren Boten des Märchenkönigs bis zum 100., der den Schlüssel nur in der 100. Zelle umdrehte.
Endlich brach der Geburtstag des Königs an. Die Wache wurde entlassen, und alle Gefangenen, die in offenen Zellen saßen, waren frei.
Wieviel Gefangene hat der Märchenkönig *Dodon* freigelassen?

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau

Motorsport

VOLVO + FIAT = MOTOR	SAAB + FORD = MOTOR	VOLGA + DODGE = MOTOR
TATRA + BENZ = MOTOR		

aus: „Fules", Budapest

Kleine Logelei

Denke mit!
Herr Maier, Herr Berger und Herr Janik wohnen in Linz, Graz oder Wien. Sie sind von Beruf Schlosser, Lehrer oder Arzt. Ihre Lieblingsbeschäftigung ist Segelflug, Boxen oder Tennis. Sie trinken gerne Tee oder Fruchtsaft oder Mineralwasser.
Folgendes ist bekannt:
1. Herr Berger kennt den Lehrer, der weder boxt noch Tennis spielt.
2. Der Schlosser, der in Graz wohnt, besucht oft seinen Freund in Linz, der gern Tee trinkt.
3. Janik, der gern Mineralwasser trinkt, ist nicht der Arzt.
4. Der Tennisspieler ist nicht Schlosser.
5. Maier, der keinen Fruchtsaft trinkt, spielt Tennis.

Gib Beruf, Wohnort, Lieblingsbeschäftigung und Lieblingsgetränk von Herrn Maier, Berger und Janik an!

Schüler Peter Braumüller, Wiener Neustadt

aus: Tribüne, Zeichnung: Gabbert

Silbenrätsel

Aus den Silben

a – arc – ber – bol – che – con – di – ein – eins – eur – ex – flä – funk – ge – go – in – in – kreis – la – le – lu – mal – me – mi – mor – na – ni – no – null – o – o – on – ons – pa – pier – pli – ra – rad – re – rie – sa – stel – sym – täts – the – ti – ti – ti – ti – tri – trie – us – vi – vo – zit

sind 13 Begriffe zu bilden, deren Anfangs- und Endbuchstaben, von oben nach unten gelsen, jeweils einen französischen Mathematiker ergeben.

1. Hilfsmittel der Nomographie,
2. Wissensgebiet der Physik,
3. Planmäßige Tilgung einer Schuld,
4. Funktionsbegriff,
5. Vorname eines Physikers (1. Physiknobelpreisträger),
6. Begriff der Stereometrie,
7. Größe aus der Dreiecksberechnung,
8. Das Bogenmaß des Winkels α hat das . . .
9. Rauminhalt (Mz.),
10. Beruf, der umfangreiche mathematische Kenntnisse verlangt,
11. entwickelt, aufgelöst,
12. Gebiet der Mathematik,
13. erste Bekanntschaft mit der Mathematik.

Dipl.-Ing. K. Gallien, Berlin

Kryptarithmetik

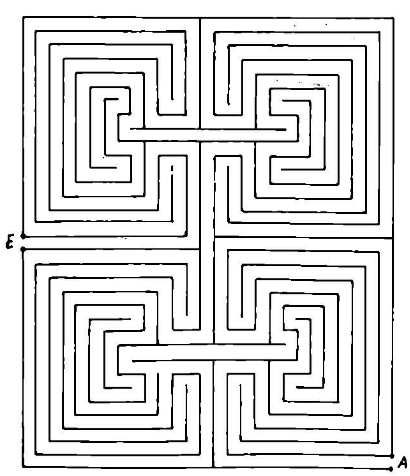
1. $\frac{EVE}{DID} = 0,\overline{TALK}$
2. $Z \cdot 17 \cdot d = ddd\ldots$

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen.

Dr. M. Skalicky, Wien

Ein Troja-Diagramm

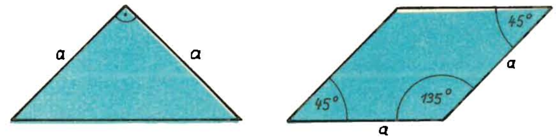
Dr. M. Skalicky, Wien



Legespiel

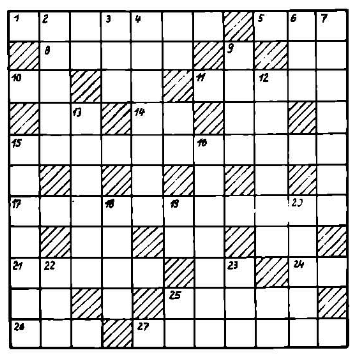
Schneide aus Pappe acht kongruente Rhomben mit der Seite a und den Winkeln 45° und 135° sowie zwölf kongruente rechtwinklig-gleichschenk.ige Dreiecke mit den Katheten a aus! Lege diese 20 Pappstücke zu einem Quadrat zusammen!

Lehrerin Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS, Döbeln



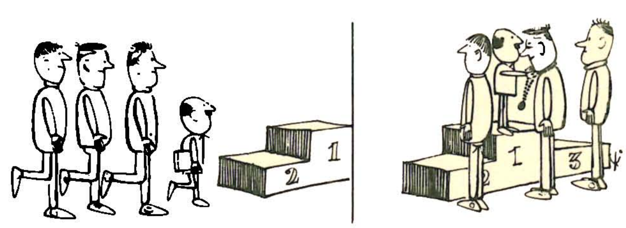
Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. bedeutender deutscher Philosoph und Mathematiker (1646 bis 1716), 5. Bezeichnung einer bestimmten Zeitzone (Abk.), 8. eigentümliche Sprechweise, Mundart, 10. Funktionssymbol für den natürlichen Logarithmus, 11. italienischer Geigenbauer, 14. älteres Zeichen für den Tangenshyperbolicus, 15. Teil eines Bruches, 17. Hochzahlen, Exponenten, 21. weiblicher Vorname, 24. Hühnerprodukt, 25. Teil einer geometrischen Figur (Mz.), 26. engl.: eins, 27. geschlossene Linienzüge.



Senkrecht: 2. Stelle im Positionssystem der Zahlen, 3. Einheit der Information, 4. deutsche Mathematikerin (1882 bis 1935), 6. lat.: ist, 7. Gesamtheit aller mathematischen Symbole, 9. römischer Gott der Liebe, 12. Grundlage der Mathematik, Grundaussagen, 13. Teil des Rechenstabs (Mz.), 15. bedeutender italienischer Philosoph und Logiker (1781 bis 1848), 16. rumänischer Mathematiker (1873 bis 1939), 18. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829), 19. Begrenzer aus der algorithmischen Sprache ALGOL, 20. geometrischer Begriff, 22. Neugrad, 23. Arbeiterpartei in der BRD (Abk.)

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden



Lösungen

Lösungen: Schwedische Mathe-Olympiade 1974 (Forts.)

2. Fall: Dann gibt es $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ Möglichkeiten für die Belegung des Faches A.

Liegt jetzt im Fach B genau 1 Gegenstand, so gibt es hierfür jeweils drei Möglichkeiten. Liegen aber im Fach B genau 2 Gegenstände, so gibt es hierfür jeweils drei Möglichkeiten, z. B.

$(3, 4), (3, 5), (4, 5)$.

Mehr als 2 Gegenstände können in diesem Fall nicht im Fach B liegen, da sonst das Fach C leer bliebe.

Insgesamt gibt es also im 2. Fall

$10\cdot(3+3)=10\cdot 6=60$ Möglichkeiten.

3. Fall: Dann gibt es $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}=10$ Möglichkeiten für die Belegung des Faches A.

Im Fach B kann in diesem Fall nur 1 Gegenstand liegen, dafür gibt es jeweils zwei Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also im 3. Fall

$10\cdot 2=20$ Möglichkeiten.

Berücksichtigt man alle drei Fälle, so gibt es insgesamt

$70+60+20=150$ Möglichkeiten

für die Belegung der Fächer A, B, C nach den gestellten Bedingungen.

▲3▲ Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung $\sqrt[3]{60-x}+\sqrt[3]{x-11}=\sqrt[3]{4}$. (1)

Setzt man

$u=\sqrt[3]{60-x}$, $v=\sqrt[3]{x-11}$, so gilt (2)

$\sqrt[3]{4}=u+v$, (3)

$4=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$,

also wegen (3)

$u^3+v^3+3\sqrt[3]{4}uv=4$.

Daher gilt wegen (2)

$60-x+x-11-3\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[3]{(60-x)(x-11)}=4$,

$3\sqrt[3]{4(-x^2+71x-660)}=-45$,

$4(x^2-71x+660)=3375$,

$$x^2-71x-\frac{735}{4}=0. \qquad (4)$$

Diese quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen

$$x_1=\frac{71+76}{2}=\frac{147}{2} \text{ und}$$

$$x_2=\frac{71-76}{2}=-\frac{5}{2}. \qquad (5)$$

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es höchstens die Lösungen $x_1=\frac{147}{2}$ und $x_2=-\frac{5}{2}$ sein.

Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen der Gleichung (1) sind. Man erhält nämlich für $x_1=\frac{147}{2}$:

$$\sqrt[3]{60-x_1}+\sqrt[3]{x_1-11}=\sqrt[3]{-\frac{27}{2}}+\sqrt[3]{\frac{125}{2}}$$

$$=\frac{-3+5}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4};$$

für $x_2=-\frac{5}{2}$:

$$\sqrt[3]{60-x_2}+\sqrt[3]{x_2-11}=\sqrt[3]{\frac{125}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{27}{2}}$$

$$=\frac{5-3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}.$$

▲4▲ Für alle ganzen Zahlen n gilt

$8n^2+2n+1=4(2n^2+n+1)-(2n+3)$, (1)

$2n^2+n+1=n(2n+3)-2n+1$

$=n(2n+3)-(2n+3)+4$,

$2n^2+n+1=(n-1)(2n+3)+4$. (2)

Nun sind die Zahlen $2n+3$ und 4 stets teilerfremd, da $2n+3$ eine ungerade Zahl ist und 4 keine ungeraden Teiler (außer 1) besitzt. Wegen (2) sind daher auch die Zahlen $2n^2+n+1$ und $2n+3$ teilerfremd. Daraus folgt aber wegen (1), daß auch die Zahlen $2n^2+n+1$ und $8n^2+2n+1$ teilerfremd sind, w. z. b. w.

▲5▲ Setzt man

$$\frac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=x, \qquad (1)$$

so gilt, da $p\neq q$,

$$x=\frac{(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt{p}-\sqrt{q})}=\frac{p+q-2\sqrt{pq}}{p-q},$$

$(p-q)x=p+q-2\sqrt{pq}$. (2)

x ist also Lösung der linearen Gleichung

$(p-q)x-p-q+2\sqrt{pq}=0$. (3)

1. Ist nun $\sqrt{pq}$ rational, so ist es auch, da p und q natürliche Zahlen sind, ganzzahlig. In diesem Fall ist daher x Lösung der linearen Gleichung (3) mit ganzzahligen Koeffizienten, also auch Lösung der quadratischen Gleichung

$[(p-q)x-(p+q-2\sqrt{pq})]\,[x-r]=0$, (4)

wobei r eine beliebige rationale Zahl ist. Wegen $r=\frac{a}{b}$, wobei a und b ganze Zahlen mit $b\neq 0$ sind, erhält man aus (4) durch Umformung die quadratische Gleichung

$[(p-q)x-(p+q-2\sqrt{pq})]\,[bx-a]=0$, (5)

die nur ganzzahlige Koeffizienten hat. Ist also $\sqrt{pq}$ rational, so ist x Lösung der quadratischen Gleichung (5) mit ganzzahligen Koeffizienten, deren zweite Lösung eine beliebige rationale Zahl ist.

2. Ist $\sqrt{pq}$ nicht rational, so erhält man aus (3) durch Multiplikation mit

$(p-q)x-p-q-2\sqrt{pq}$

die quadratische Gleichung

$[(p-q)x-p-q]^2-4pq=0$. (6)

Das ist eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, die wegen (6), (3), (2) und (1) die beiden Lösungen

$$x_1=\frac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \text{ und}$$

$$x_2=\frac{p+q+2\sqrt{pq}}{p-q}=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \text{ hat.}$$

Ist also $\sqrt{pq}$ nicht rational, so ist x Lösung der quadratischen Gleichung (7) mit ganzzahligen Koeffizienten, deren zweite Lösung

$$x_2=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \text{ ist.}$$

▲6▲ Wir untersuchen die Funktion

$g(P)=f_1(P)-f_2(P)$.

Für alle Randpunkte R gilt dann nach Voraussetzung

$g(R)=f_1(R)-f_2(R)=0$.

Ferner gilt für alle inneren Punkte P, falls P_1, P_2, P_3, P_4 die vier benachbarten Punkte sind,

$g(P)=f_1(P)-f_2(P)$

$=\frac{1}{4}[f_1(P_1)-f_2(P_1)+f_1(P_2)-f_2(P_2)$

$+f_1(P_3)-f_2(P_3)+f_1(P_4)-f_2(P_4)]$

$=\frac{1}{4}[g(P_1)+g(P_2)+g(P_3)+g(P_4)]$.

Es sei nun a das Maximum der Funktionswerte von g, es gilt also $g(P)\leqq a$ für alle Punkte P der Menge M. Ist nun $\bar{P}$ ein innerer Punkt, für den das Maximum angenommen wird, so gilt

$a=g(\bar{P})=\frac{1}{4}[g(P_1)+g(P_2)+g(P_3)+g(P_4)]$,

wobei P_1, P_2, P_3, P_4 die vier benachbarten Punkte von $\bar{P}$ sind. Daraus folgt aber

$g(P_1)=g(P_2)=g(P_3)=g(P_4)=a$;

denn wäre z. B. $g(P_1)<a$, so wäre

$g(\bar{P})<\frac{1}{4}\cdot 4a=a$, was der Voraussetzung widerspricht.

Wenn nun noch nicht einer der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 Randpunkt ist, so kann man das Verfahren so lange fortsetzen, bis einer der Punkte P_i Randpunkt ist. Dann gilt aber nach Voraussetzung $g(P_i)=0$, woraus $a=g(P_i)=0$ folgt, d. h. das Maximum a der Funktionswerte von g ist gleich Null. Analog weist man nach, daß auch das Minimum der Funktionswert von g gleich Null ist.

Lösung der Aufgabe von Clemens Jaunich, Heft 6/75, S. 138, bearbeitet von Studentinnen der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig:

$$|9-x|=\begin{cases} 9-x & \Longleftrightarrow 9-x\geqq 0\sim x\leqq 9\\ -9+x & \Longleftrightarrow 9-x<0\sim x>9\end{cases}$$

$$|0{,}5x+1| =\begin{cases} 0{,}5x+1 & \Longleftrightarrow 0{,}5x+1>0\sim x\geqq -2\\ -0{,}5x-1 & \Longleftrightarrow 0{,}5x+1<0\sim x<-2\end{cases}$$

Aus den Vorüberlegungen ergeben sich folgende Fälle:

1. Fall: $x>9$

$$-(9-x)-(0{,}5x+1)=12$$
$$x=44$$

$L_1=\{44\}$

2. Fall: $-2\leqq x\leqq 9$

$$9-x-(0{,}5x+1)=12$$
$$x=-\frac{8}{3}$$

Widerspruch zur Voraussetzung

$L_2=\emptyset$

3. Fall: $x<-2$

$$9-x-(-0{,}5x-1)=12$$
$$x=-4$$

$L_3=\{-4\}$

Zu jeder Lösung ist eine Probe durchzuführen. Für die gestellte Ausgangsgleichung erhält man die Lösungselemente $\{44;\ -4\}$

Lösungshinweise und Lösungen zu: Kombinatorik und binomischer Satz, S. 49

▲1▲ Wir überprüfen eine Hypothese, z. B. für $k=2$:

$$1+3=2^2;$$

a) Die Hypothese (die Gesetzmäßigkeit) ist gegeben;

b) Die Hypothese soll für eine gewisse Anzahl k von Summanden wahr sein, d. h., es ist wahr, daß

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2;$$

wir zeigen, daß in diesem Falle die Hypothese (Formel) auch für $k+1$ Summanden wahr ist, d. h., es gilt auch

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Die Summe der ersten angeordneten k Summanden ist tatsächlich gleich k^2. Es bleibt zu zeigen, daß

$$k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Das läßt sich unmittelbar nachprüfen.

▲2▲ a) 90 b) 49 c) $\frac{120}{7!}=\frac{1}{42}$

▲3▲ 3120

▲4▲ $5!-4!=96$

▲5▲ vgl. Formel (2)!

▲6▲ a) 720 b) 132 c) 210

▲7▲ a) $V_4^4=P_4=24$ b) $V_5^4=120$ c) $V_6^4=360$

▲8▲ $\dfrac{\frac{13!}{8!}+\frac{13!}{9!}}{\frac{13!}{10!}}=100$ b) 10

▲9▲ a) 10 b) 7 c) 9

▲11▲ a) 210 b) 56 c) 56

▲12▲ a) 7 b) 14 c) 12

▲13▲ $C_{20}^3=1040$

▲14▲ $C_{10}^6=210$

▲18▲ a) $x=7, y=3$ b) $x=12, y=5$ c) $x=15, y=6$

▲19▲ $V_9^9=P_9=9!=362\,880$

▲20▲ $C_9^3=84$

▲21▲ $V_9^3=504$

▲22▲ $C_{15}^3\cdot C_4^1=1820$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Gläser (Heft 2/76)

▲1533▲ 1. Es sei $n=m=1$. Dann gilt $z=1-x$, wobei x eine beliebige reelle Zahl mit $0<x<1$ ist.

Daher gilt $-1<-x<0$,

also $0<z<1$, (1)

wobei z jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann, weil x jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann.

2. Wegen $x>0$ gilt auch $x^2>0$, $x^3>0$ und allgemein $x^n>0$; (2)

ferner gilt $x<1$, also da x eine positive reelle Zahl ist, auch

$x^2<x<1$, $x^3<1$ und allgemein $x^n<1$. (3)

Aus (2) und (3) folgt

$$0<x^n<1,$$
$$-1<-x^n<0,$$
$$0<1-x^n<1. \quad (4)$$

Aus (4) folgt weiter

$$0<(1-x^n)^m<1, \quad (5)$$

wobei m und n beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

3. Damit haben wir bewiesen, daß für alle reellen Zahlen z mit

$$z=(1-x^n)^m$$

$0<z<1$ gilt, falls m und n beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Da andererseits, wie unter 1. gezeigt wurde, für $n-m=1$ auch z jeden Wert zwischen 0 und 1 annimmt, ist also M die Menge aller reellen Zahlen z, für die $0<z<1$ gilt.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Bock, Heft 1/76, S. 3

▲1460▲ Zu a) Ein regelmäßiges Sechseck ergibt sich als Schnittfigur aus Symmetriegründen genau dann, wenn die Ebene zu einer Begrenzungsfläche (in Skizze zur Begrenzungsfläche BCE bzw. ADF) parallel läuft und durch den Mittelpunkt des Oktaeders geht. Die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks beträgt $\frac{s}{2}$.

b) Lage der Ebene nach Skizze sei vorausgesetzt. Es wird der Punkt A gewählt, von dem aus die Eckpunkte des Sechsecks verbunden werden.

V sei das Volumen der sich ergebenden sechsseitigen Pyramide;

h sei deren Höhe. Dann ergibt sich:

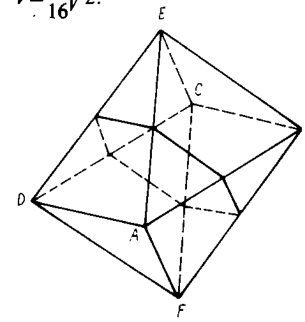
$$V=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{s}{4}\cdot\frac{s}{4}\sqrt{3}$$
$$V=\frac{s^2}{8}\cdot\sqrt{3}h$$

Die Höhe h ist die Hälfte des Abstandes d zwischen den Begrenzungsflächen BCE und ADF. Dieser Abstand d ist die Höhe der dreiseitigen Pyramide $BCEA$ bezüglich BCE. Deren Volumen ist der vierte Teil des Oktaedervolumens $\left(\frac{s^3}{3}\sqrt{2}\right)$. D. h. es gilt:

$$\frac{s^2}{12}\sqrt{3}\cdot 2\cdot h=\frac{1}{4}\cdot\frac{s^3}{3}\sqrt{2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$h=\frac{s\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \text{ und somit}$$
$$V=\frac{s^3}{16}\sqrt{2}.$$



Nachtrag: Auch bei Wahl eines anderen Eckpunktes des Oktaeders (anstelle von A) ergibt sich dasselbe Volumen, da die Höhen aller sechsseitigen Pyramiden, die jeweils möglich sind, untereinander gleich sind.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/76

W 5 ■1461 Die gegebene Zahl läßt sich in der Form $10a+b$ darstellen. Wegen $a=2b$ erhalten wir daraus $10\cdot 2b+b=21b$. Die durch Vertauschen der Ziffern erhaltene Zahl ist dann $10b+a$. Wegen $a=2b$ erhalten wir daraus $10b+2b=12b$.

Nun gilt ferner

$$21b\cdot 13-522=12b,$$
$$273b-12b=522,$$
$$261b=522,$$
$$b=2.$$

Aus $b=2$ und $a=2b$ folgt $a=4$. Die gesuchte Zahl lautet somit 42, und es gilt $42\cdot 13-522=24$.

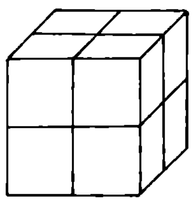
W 5 ■1462 Es sei a die größere und b die kleinere der beiden zu ermittelnden natürlichen Zahlen.

Wegen $a+b=149$ gilt dann $a\geqq 75$ und $b\leqq 74$. Wegen $a\cdot b=5394=2\cdot 3\cdot 29\cdot 31$ und wegen $a<149$ kann also a nur gleich $3\cdot 29=87$ oder $3\cdot 31=93$ sein. Dann wäre b gleich $2\cdot 31=62$ oder $2\cdot 29=58$. Wegen $a+b=87+62=149$ oder $a+b=93+58=151>149$ gilt nur $a=87$ und $b=62$.

Somit lauten die gesuchten Zahlen 87 und 62.

W 5 ■1463 Von den Zahlen 12, 24, 36, 48 besitzt nur die Zahl 36 die Quersumme 9, also gilt $n_1=36$. Von den Zahlen 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70 sind nur 16, 34, 52, 70 durch 2 teilbar; also könnte n_2 gleich 16, 34, 52, 70 sein. Für $n_1-n_2=d$ gilt entweder $36-16=20$ oder $36-34=2$ oder $36-52$ nicht lösbar oder $36-70$ nicht lösbar. Wegen $d>n_2$ gibt es genau eine Zahl $n_2=16<20$, die die gestellten Bedingungen erfüllt. Daher genügen nur die Zahlen 36 und 16 den Bedingungen der Aufgabe.

W5 ▪1464 Man sieht genau 7 Spielwürfel. Davon sieht man drei Spielwürfel mit einer, drei Spielwürfel mit zwei und einen Spielwürfel mit drei sichtbaren Flächen. Das sind zusammen $3\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 3=12$ Flächen von Spielwürfeln. Im günstigsten Fall zeigen davon 7 Flächen die Augenzahl 6, 4 Flächen die Augenzahl 5 und eine Fläche die Augenzahl 4; das sind insgesamt $7\cdot 6+4\cdot 5+1\cdot 4=66$ Augen. Im ungünstigsten Fall sind es $7\cdot 1+4\cdot 2+1\cdot 3=18$ Augen. Es sei x die Summe der Augenzahlen; dann gilt also $18\leqq x\leqq 66$.



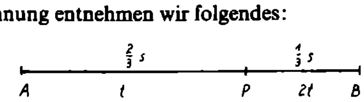
W5 ▪1465 Da keine zwei der Mitglieder dieser Arbeitsgemeinschaft den gleichen Vor- und Familiennamen haben, aber nur vier verschiedene Vornamen vorkommen, heißen vier dieser Schüler Hans Schulze, Fritz Schulze, Günter Schulze, Ernst Schulze.
Es verbleiben zweimal der Vorname Hans, zweimal der Vorname Fritz, dreimal der Vorname Günter. Da der Familienname Krause dreimal vorkommt, heißen drei weitere Schüler Hans Krause, Fritz Krause, Günter Krause. Ein Schüler heißt Hans Paetow. Nunmehr verbleiben zweimal der Vorname Günter, einmal der Vorname Fritz. Da der Familienname Müller zweimal vorkommt, heißen zwei weitere Schüler Fritz Müller, Günter Müller. Der letzte Schüler heißt Günter Paetow.

W5 ▪1466 Aus $168:2=84$ folgt, daß aus der VR Polen 84 Lehrlinge ausgebildet werden. Aus $84\cdot 3=252$ folgt, daß aus der Ungarischen VR 252 Lehrlinge ausgebildet werden. Wegen $527-168-84-252=x$ und somit $x=23$ werden in diesem Betrieb z. Z. 23 Lehrlinge aus der VR Bulgarien ausgebildet.

W6 ▪1467 Aus $v=v_1+v_2=45\frac{\text{km}}{\text{h}}+36\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $=81\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $s=v\cdot t=81\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 6\text{ s}$ $=81000\frac{\text{m}}{\text{h}}\cdot\frac{6}{60\cdot 60}\text{h}=135\text{ m}$ folgt, daß der erste Zug eine Länge von 135 m besaß.

W6 ▪1468 Aus $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ folgt, daß der Reisende während des dritten Teiles der gesamten Reisestrecke geschlafen hatte.

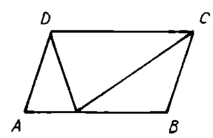
W6 ▪1469 Der nachstehend abgebildeten Zeichnung entnehmen wir folgendes:



Wegen $v=\frac{s}{t}$ erhalten wir $v_1=\frac{2s}{3t}$ und $v_2=\frac{1s}{6t}$, also $v_1:v_2=4:1$. Die Geschwindigkeit während des Radfahrens war viermal so groß wie die während des Fußmarsches.

W6 ▪1470 Aus a) folgt: Martin heißt mit Nachnamen weder Altmann noch Müller. Aus b) folgt: Martin hat auch nicht den Nachnamen Neubert. Also heißt Martin mit Nachnamen Tröger. Aus b) folgt:
Ernst heißt mit Nachnamen weder Neubert noch Müller. Da Ernst nicht Tröger heißen kann, hat Ernst den Nachnamen Altmann. Aus a) folgt: Karl heißt mit Nachnamen nicht Müller. Da Karl auch nicht Tröger bzw. Altmann heißen kann, hat Karl den Nachnamen Neubert. Somit hat Franz den Nachnamen Müller.

W6 ▪1471 Die Winkel $\sphericalangle APD$ und $\sphericalangle CDP$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen; deshalb gilt $\sphericalangle APD=\sphericalangle CDP$. Wegen $\sphericalangle APD=\sphericalangle CPD$ gilt dann auch $\sphericalangle CDP$ $=\sphericalangle CPD$, d. h., das Dreieck DPC ist gleichschenklig, und es gilt $\overline{CD}=\overline{CP}$. Daraus folgt die Konstruktion: Wir schlagen um C mit $\overline{CD}$ als Radius einen Kreis, der $\overline{AB}$ in P schneidet und verbinden C und D mit P.



Ph6 ▪1472 Gegeben: $V_0=2300\text{ m}^3$

$\gamma_1=1{,}03\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}=1{,}03\frac{\text{Mp}}{\text{m}^3}$

$\gamma\ =0{,}9\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}=0{,}9\ \frac{\text{Mp}}{\text{m}^3}$

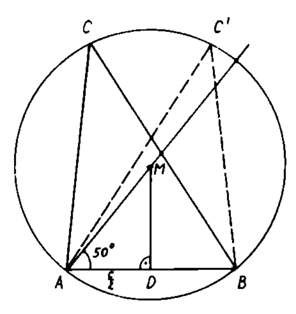
Gesucht: V

Ein Körper schwimmt, wenn das Gewicht (G) gleich der Auftriebskraft (F_A) ist.

$$F_A=G \qquad \text{mit } F_A=\gamma_1\cdot V_1$$
$$\gamma_1\cdot V_1=\gamma\cdot V \qquad G=\gamma\cdot V$$
$$\gamma_1(V-V_0)=\gamma\cdot V \qquad V_1=V-V_0$$
$$\gamma_1\cdot V-\gamma_1 V_0=\gamma\cdot V$$
$$1{,}03\cdot V-1{,}03\cdot 2300=0{,}9\cdot V$$
$$0{,}13\,V=2369$$
$$V\approx 18\,200$$

Das Volumen des gesamten Eisberges beträgt rund $18\,200\text{ m}^3$.

Ma7 ▪1473 Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises k des zu konstruierenden Dreiecks ABC. Wegen $\overline{AM}=\overline{BM}=r$ ist das Dreieck ABM gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle MAB$ $=\sphericalangle MBA$. Die Gerade DM ist somit Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$. Da der halbe Zentriwinkel $\sphericalangle AMD$ gleich dem Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$ $=\gamma=40°$ ist, gilt ferner $\sphericalangle MAD=90°-40°$ $=50°$. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die folgende Konstruktion des Dreiecks ABC:



Wir zeichnen eine Strecke $\overline{AD}=\frac{c}{2}=3\text{ cm}$, tragen in A an AD einen Winkel von 50° an. Das in D auf AD zu errichtende Lot schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels in M. Der Kreis um M mit $\overline{AM}$ als Radius, schneidet AD in B. Der Kreis um D mit $s_c=8$ cm als Radius schneidet den Kreis um M mit $\overline{AM}$ als Radius in C und C'. Verbinden wir C und C' mit A und B, so erhalten wir das zu konstruierende Dreieck ABC bzw. ABC'.

Ma7 ▪1474 Angenommen, Olaf habe von Peter x 1-Pfennig-, y 5-Pfennig- und somit $(12-x-y)$ 10-Pfennig-Münzen erhalten; dann gilt

$$x+5y+10(12-x-y)=45,$$
$$-9x-5y+120=45,$$
$$5y=75-9x,$$
$$5y=75-5x-4x,$$
$$y=15-x-\frac{4x}{5}.$$

Nun ist y nur dann ganzzahlig, wenn x ein Vielfaches von 5 ist. Da Olaf 12 Münzen erhalten hat, gibt es genau drei Fälle, nämlich $x=0$, $x=5$ und $x=10$.
Für $x=0$ erhalten wir $y=15>12$, was nicht möglich ist. Für $x=5$ erhalten wir $y=6$, d. h., Olaf hat von Peter fünf 1-Pfennig-, sechs 5-Pfennig- und wegen $12-5-6=1$ genau eine 10-Pfennig-Münze erhalten.
Für $x=10$ erhalten wir $y=-3$, also eine negative Zahl, was ebenfalls nicht möglich ist.

Ma7 ▪1475 Aus a) folgt: Hans ist nicht 10 Jahre alt. Aus b) folgt: Hans ist weder 11 noch 13 Jahre alt. Folglich ist Hans 8 Jahre alt. Aus c) folgt: Hans bezieht die Zeitschrift „technikus". Aus b) folgt: Kurt ist weder 8 noch 11 noch 13 Jahre alt. Also ist Kurt 10 Jahre alt.
Aus a) folgt: Kurt hat „alpha" abonniert. Aus c) folgt: Ingo ist nicht 11 Jahre alt, also beträgt sein Lebensalter 13 Jahre, und er hat die Zeitschrift „technikus" abonniert.
Folglich ist Gerd 11 Jahre alt, und er bezieht nach a) die Zeitschrift „alpha".

Zusammenstellung:

Name	Alter	Zeitschrift
Gerd	11	alpha
Hans	8	technikus
Ingo	13	technikus
Kurt	10	alpha

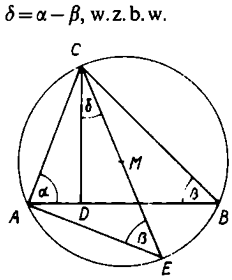
Ma7 ▪1476 Es seien f, g, h, i, k, p die von Frank, Georg, Hans, Inge, Konrad, Peter gespendeten Geldbeträge.
Aus a) folgt: $6\leqq f, g, h, i, k, p\leqq 12$.
Aus b) folgt: $p<k$.
Aus c) folgt: $i<p<g<h$.

Aus d) folgt: $k<h<f$.
Aus e) folgt: $h+2=f$ und $i+2=p$.
Deshalb gilt $6\leqq i<p<g$, $k<h<f\leqq 12$ bzw.
$6\leqq i<i+2<g, k<h<h+2\leqq 12$ (*)
Es sei $i=6$; dann gilt $p=i+2=6+2=8$. Aus $h+2\leqq 12$ folgt $h\leqq 10$. Aus $g>p=8$ und $g<h\leqq 10$ folgt $g=9$. Aus $k>p=8$ und $k<h\leqq 10$ folgt $k=9$; also ist $h=10$ und $f=12$. Für $i\geqq 7$ ist die fortlaufende Ungleichung (*) nicht erfüllbar.
Somit spendete Inge 6 M, Peter 8 M, Georg und Konrad je 9 M, Hans 10 M, Frank 12 M. Es haben Inge 12 M, Peter 16 M, Georg und Konrad je 18 M, Hans 20 M, Frank 24 M erhalten.

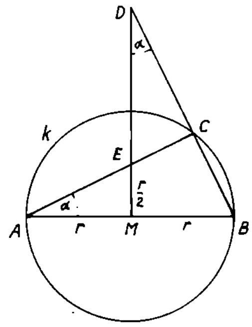
Ph 7 ▪1477 Gegeben: $t_1=51{,}36$ s
$t_2=51{,}22$ s
$s_1=100$ m
gesucht: $s=s_1-s_2$
Die Zeiten sind direkt proportional den Wegen. $t_1:t_2=s_1:s_2$
$$t_1:(t_1-t_2)=s_1:(s_1-s_2)$$
$$t_1:(t_1-t_2)=s_1:s$$
$$s=\frac{(t_1-t_2)s_1}{t_1}$$
$$s=\frac{0{,}14\text{ s}\cdot 100\text{ m}}{51{,}36\text{ s}}$$
$$s\approx 0{,}27\text{ m}=27\text{ cm}$$
Die Differenz beträgt 27 cm.

Ch 7 ▪1478
a) $m=v\cdot\varrho$
$m=55\text{ l}\cdot 1{,}145\text{ kg}\cdot\text{l}^{-1}=62{,}975$ kg
b) $v=\frac{m}{\varrho}$ $\quad V=\frac{55\text{ kg}}{1{,}145\frac{\text{kg}}{\text{l}}}=48{,}04$ l

Ma 8 ▪1479 Bezeichnet man den zweiten Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis mit E, so gilt nach dem Satz des Thales $\sphericalangle CAE=90°$ (siehe Bild). Ferner gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle AEC=\beta$. Wegen $\sphericalangle DCA=90°-\alpha$, also $\sphericalangle ECA=90°-\alpha+\delta$ folgt, da die Winkelsumme im ΔAEC gleich 180° ist,
$$90°+\beta+90°-\alpha+\delta=180°,$$
$$\delta=\alpha-\beta, \text{ w.z.b.w.}$$

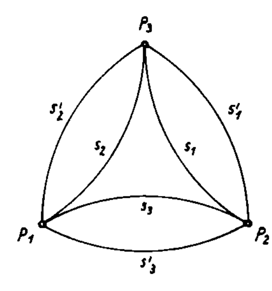


Ma 8 ▪1480 Nach dem Satz des Thales gilt $\sphericalangle BCA=90°$. Daraus folgt, wenn man $\sphericalangle EAM=\alpha$ setzt, $\sphericalangle MBC=90°-\alpha$, also
$\sphericalangle BDM=\alpha=\sphericalangle EAM$. Ferner gilt
$\sphericalangle AME=\sphericalangle DMB=90°$, also
$\Delta DMB\sim\Delta AME$. Daraus folgt
$\overline{DM}:\overline{MB}=\overline{AM}:\overline{EM}$,
$$\overline{DM}=\frac{\overline{MB}\cdot\overline{AM}}{\overline{EM}}=\frac{r\cdot r}{\frac{r}{2}}=2r.$$
Daher beträgt der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks MBD
$$A=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2r=r^2.$$



Ma 8 ▪1481 a) Das Volumen eines jeden der 27 Behälter beträgt
$$V_1=\frac{\pi}{4}d^2h,$$
wobei $d=3{,}4$ m und $h=17$ m ist.
Man erhält
$$V_1=\frac{\pi}{4}\cdot 3{,}4^2\cdot 17\text{ m}^3=\pi\cdot 2{,}89\cdot 17\text{ m}^3$$
$$\approx 154\text{ m}^3.$$
b) Das Gesamtvolumen der 27 Behälter beträgt $V\approx 154\cdot 27\text{ m}^3\approx 4160\text{ m}^3$
$=4\,160\,000\,000\text{ cm}^3$.
Das in den Behältern gespeicherte Wasser hat also eine Masse von 4160000000 g. Da die mittlere Temperaturdifferenz gegenüber einer Außentemperatur von 20 °C etwa 120 °C − 20 °C = 100 grd beträgt, ist in den 27 Behältern eine Wärmeenergie von
4160000000 · 100 cal
= 4160000000000 cal,
d.s. 416 Gigakalorien, gespeichert.

Ma 8 ▪1482 Von P_3 aus gibt es zunächst vier Möglichkeiten, die Wanderung zu beginnen, und zwar auf den Wegen s_1, s_1, s_2, s_2' (siehe Bild). Wir untersuchen zunächst die Möglichkeit, bei der der Weg s_1 von P_3 nach P_2 gewählt wird.
a) Von P_2 aus gibt es dann zwei Möglichkeiten, den Weg nach P_1 fortzusetzen, und von P_1 je zwei Möglichkeiten, den Weg weiter nach P_3 zu begehen, insgesamt also vier Möglichkeiten. Die weiteren Wege über P_2, P_1 bis zur Beendigung der Wanderung sind dann eindeutig bestimmt.



b) Es besteht aber auch die Möglichkeit, von P_2 aus auf s_1' nach P_3 zurückzukehren. Dann gibt es von P_3 aus zwei Möglichkeiten, nach P_1 zu gelangen, und von P_1 je zwei Möglichkeiten, nach P_2 zu wandern, insgesamt also vier Möglichkeiten.
c) Der Wanderer hat aber auch die Möglichkeit, nachdem er wie im Falle a) in P_1 angekommen ist, wieder nach P_2 und dann nach P_3 zurückzukehren. Dann gibt es noch zwei Möglichkeiten, den Weg nach P_1 fortzusetzen, insgesamt also vier Möglichkeiten.
d) Endlich hat der Wanderer, nachdem er wie im Falle a) in P_3 angekommen ist, noch die Möglichkeit, nach P_1 zurückzukehren und dann den Weg über P_2 nach P_3 zu beenden. Da es für den Weg bis P_3 – vgl. Fall a) – bereits vier Möglichkeiten gibt, erhalten wir in dem vorliegenden Fall weitere vier Möglichkeiten.
Es gibt also insgesamt
$4+4+4+4=16$ Möglichkeiten
für die Fortsetzung des Weges, nachdem zu Beginn der Weg s_1 von P_3 nach P_1 gewählt wurde.
Wie oben gezeigt wurde, gibt es vier Möglichkeiten, die Wanderung zu beginnen, und zu jeder dieser vier Möglichkeiten 16 Möglichkeiten, die Wanderung fortzusetzen. Die Anzahl der Varianten für den Wanderweg beträgt also insgesamt
$4\cdot 16=64$.

Ph 8 ▪1483
Gegeben: $A=4\cdot 5\text{ cm}^2=20\text{ cm}^2$
$$p=100\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$
Gesucht: F
Das Gewicht drückt auf alle vier Räder gleichmäßig.
$$F=p\cdot A$$
$$F=\frac{100\text{ kp}\cdot 20\text{ cm}^2}{\text{cm}^2}$$
$$F=2000\text{ kp}=2\text{ Mp}.$$

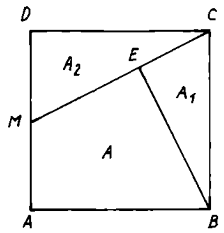
Ch 8 ▪1484 1. Lieferung: In 3,720 t sind 84% Trockenmasse. 2. Lieferung: In 3,800 t sind 87,5% Trockenmasse
3,125 t
3,325 t
6,450 t zusammen.
6,450 t Trockenmasse entsprechen dann 86% der zu verrechnenden Getreidemasse. 100% entsprechen 7,500 t. Der LPG werden 7,500 t Getreide angerechnet.

Ma 9 ▪1485 Es sei x eine reelle Zahl, für die die Ungleichung
$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 > (x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2 \quad (1)$$
erfüllt ist. Dann gilt
$$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4 > x^2+6x+9+x^2+8x+16 + x^2+10x+25, \quad (2)$$
$$6x+5>24x+50,$$
$$-18x>45.$$
Daraus folgt
$$18x<-45,$$
$$x<-\frac{45}{18},$$
$$x<-\frac{5}{2}. \quad (3)$$

Für alle reellen x, für die die Ungleichung (3) erfüllt ist, ist aber auch die Ungleichung (1) erfüllt.
Daher besteht die Lösungsmenge der Ungleichung (1) aus allen reellen Zahlen x, für die $x<-\frac{5}{2}$ gilt:

$$L=\left\{x<-\frac{5}{2};\ x\in P\right\}.$$

Ma9 ■1486 Aus $\overline{CD}=a$, $\overline{DM}=\frac{a}{2}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras (siehe Bild)



$$\overline{MC}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Aus $\sphericalangle CDM=\sphericalangle CEB=90°$ und $\sphericalangle DMC=\sphericalangle BCE$ als Wechselwinkel der geschnittenen Parallele folgt

$$\Delta CDM\sim\Delta CEB,$$

also $a:\frac{a}{2}\sqrt{5}=\overline{EB}:a$, $\overline{EB}=\frac{a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}=\frac{2a}{5}\sqrt{5}$.
Ferner gilt $\overline{EC}:a=\frac{a}{2}:\frac{a}{2}\sqrt{5}$,

$\overline{EC}=\frac{a}{5}\sqrt{5}$. Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks CEB gleich

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{a}{5}\sqrt{5}=\frac{a^2}{5}.$$

Ferner ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDM gleich

$$A_2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $ABEM$ gleich

$$A=a^2-A_1-A_2=a^2-\frac{a^2}{5}-\frac{a^2}{4},$$

$$A=\frac{20a^2-4a^2-5a^2}{20}=\frac{11}{20}a^2.$$

Ma9 ■1487 Es sei x eine positive reelle Lösung der Gleichung

$x^{x^{1976}}=1976$. Dann gilt (1)

$$\left((x)^{x^{1976}}\right)^{1976}=1976^{1976},$$

also auf Grund der Potenzgesetze

$$(x^{1976})^{x^{1976}}=1976^{1976}. \qquad (2)$$

Setzt man

$$x^{1976}=t,\ \text{also}\ x=\sqrt[1976]{t}, \qquad (3)$$

so erhält man aus (2)

$$t^t=1976^{1976}. \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist offenbar für $t=1976$ erfüllt. Damit haben wir wegen (3) eine Lösung der Gleichung (1) erhalten, nämlich

$$x=\sqrt[1976]{1976}. \qquad (5)$$

Denn aus (5) folgt $x^{1976}=1976$, also

$$x^{x^{1976}}=\left(\sqrt[1976]{1976}\right)^{1976}=1976.$$

Es ist jetzt nur noch nachzuweisen, daß die Gleichung (4) und damit auch die Gleichung (1) keine weiteren positiven reellen Lösungen hat.
Setzt man $f(t)=t^t$, so gilt

$f(t)<1$ für $0<t<1$,
$f(t)=1$ für $t=1$.

Ferner ist $f(t)$ streng monoton wachsend für $t>1$, nimmt also den Wert 1976^{1976} genau einmal an, und zwar für $t=1976$. Daher hat die Gleichung (4) keine weiteren positiven reellen Lösungen, und die Gleichung (1) hat genau eine positive reelle Lösung, nämlich $x=\sqrt[1976]{1976}$.

Ma9 ■1488 Es sei (x, y, z) ein Tripel von nicht negativen reellen Zahlen, für die das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist. Dann folgt durch Subtraktion aus (1) und (2):

$$xy-xz+y^2-z^2=0,$$
$$x(y-z)+(y+z)(y-z)=0,$$
$$(y-z)(x+y+z)=0; \qquad (4)$$

(1) und (3):

$$xy-yz+x^2-z^2=0,$$
$$(x-z)(x+y+z)=0; \qquad (5)$$

(2) und (3):

$$xz-yz+x^2-y^2=0,$$
$$(x-y)(x+y+z)=0. \qquad (6)$$

Das Gleichungssystem (4), (5), (6) ist erfüllt genau dann, wenn

$$y-z=x-z=x-y=0 \qquad (7)$$

oder wenn

$$x+y+z=0. \qquad (8)$$

Im Falle der Gleichungen (7) gilt $x=y=z$, also wegen (1)

$$x^2+x^2+x^2=x^3,$$
$$x^3-3x^2=0,$$
$$x^2(x-3)=0, \qquad (9)$$

also $x=0$ oder $x=3$.
Damit haben wir bereits zwei Lösungstripel erhalten, nämlich die Tripel (0, 0, 0) und (3, 3, 3). Die Probe zeigt, daß für diese Tripel die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt sind. Im Falle der Gleichung (8) gilt wegen $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$

$$x=y=z=0.$$

Wir erhalten also kein weiteres Lösungstripel. Das gegebene Gleichungssystem hat daher genau zwei Lösungstripel, die der gestellten Bedingung genügen, nämlich (0, 0, 0) und (3, 3, 3).

Ph9 ■1489 Gegeben: $G=285\ \text{p}$
$V=67\ \text{cm}^3-40\ \text{cm}^3=27\ \text{cm}^3$
$\gamma=11{,}4\ \text{p}\cdot\text{cm}^{-3}$
Gesucht: γ_1: V_1
Die Wichte (γ_1) des Körpers ergibt sich

aus $\gamma_1=\frac{G}{V}$

$$\gamma_1=\frac{285\ \text{p}}{27\ \text{cm}^3}$$

$$\gamma_1\approx 10{,}56\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$$

Da $\gamma_1<\gamma$, muß der Körper einen Hohlraum besitzen. Diesen Hohlraum erhält man durch $V_1=V-V_2$, wobei V_2 das Volumen des reinen Bleikörpers ist.

$$V_2=\frac{G}{\gamma} \qquad V_1=V-V_2$$

$$V_2=\frac{285\ \text{p}\cdot\text{cm}^3}{11{,}4\ \text{p}} \qquad V_1=27\ \text{cm}^3-25\ \text{cm}^3$$

$$V_2=25\ \text{cm}^3 \qquad V_1=2\ \text{cm}^3$$

Der Hohlraum beträgt $2\ \text{cm}^3$.

Ch9 ■1490 $\frac{2}{x}=\frac{0{,}03}{100}$

$$x=\frac{20\cdot 10^3}{3}=6{,}66\cdot 10^3$$
$$2r=6{,}66\cdot 10^3$$
$$2r=6{,}66\cdot 10^3\ \text{mm}:3{,}14$$
$$=2{,}1\cdot 10^3\ \text{mm}=21\ \text{m}$$

Der Durchmesser müßte 2,3 m lang sein.

Ma 10/12 ■1491 a) Für $x=6$ sind die Gleichungen (7), (6), (5) und (4) erfüllt, aber nicht die Gleichung (3) und daher auch nicht die Gleichungen (2) und (1); denn aus (4) folgt (3) nur für $x\geqq 8$. Der Fehler bei der obigen Schlußweise besteht also darin, daß eine Implikation nicht notwendig umkehrbar ist: Aus (3) folgt zwar für die Gleichung (4), aber nicht aus (4) für die Gleichung (3).
b) Hätte die Funktion f in ihrem Definitionsbereich eine Nullstelle x_0, so müßte, da aus (1), wie oben gezeigt wurde, (7) folgt, $x_0=6$ sein. Das ist aber wegen $f(6)=-4$ nicht möglich. Daher hat die Funktion f in ihrem Definitionsbereich keine Nullstelle, w. z. b. w.

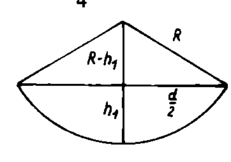
Ma 10/12 ■1492 a) Da der Flächeninhalt der Blechscheibe gleich der Summe der Flächeninhalte der Kugelkappe und des Zylindermantels ist, gilt

$$\frac{\pi}{4}D^2=2\pi Rh_1+\pi dh_2 \qquad (1)$$

wobei R der Radius der zu der Kugelklappe gehörenden Kugel ist. Nun gilt für den Radius R dieser Kugel (siehe Bild)

$$R^2=\frac{d^2}{4}+(R-h_1)^2, \qquad (2)$$

$$2Rh_1=\frac{d^2}{4}+h_1^2. \qquad (3)$$



Setzt man diesen Wert in (1) ein, so erhält man

$$\frac{D^2}{4}=\frac{d^2}{4}+h_1^2+dh_2,$$
$$D^2=d^2+4(h_1^2+dh_2),$$
$$D=\sqrt{d^2+4(h_1^2+dh_2)}. \qquad (4)$$

Damit ist der Durchmesser D der Blechscheibe als Funktion von d, h_1, h_2 dargestellt.
b) Für $d=230\ \text{mm}$, $h_1=70\ \text{mm}$, $h_2=110\ \text{mm}$ erhält man aus (4)

$$D=\sqrt{230^2+4(70^2+230\cdot 110)}\ \text{mm}$$
$$=\sqrt{173\,700}\ \text{mm}\approx 416{,}8\ \text{mm}.$$

Der Durchmesser der Blechscheibe beträgt also rund 417 mm.

Ma 10/12 ■1493 Es seien x, y, z drei von Null verschiedene paarweise teilerfremde natürliche Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$x^2+y^2=z^2$ (1)

$x+y<50$, (2)

x ist durch 7 teilbar. (3)

Wegen $x<50-y$ und $y>0$ ist dann

$x=7, 14, 21, 28, 35$ oder 42. (4)

Ferner gilt wegen (1)

$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$. (5)

Dabei ist $z+y>z-y>0$; ferner sind $z+y$ und $z-y$ beide gerade oder beide ungerade, da sonst $2z$ ungerade wäre, und haben außer 2 keinen gemeinsamen Teiler, da sonst z und y nicht teilerfremd wären. (6)

Wir behandeln jetzt die einzelnen sich aus (4) ergebenden Fälle:

1. $x=7$. Dann gilt

$(z+y)(z-y)=49$.

Wegen (6) folgt, da nur einer der beiden Faktoren durch 7 teilbar ist, $z+y=49$, $z-y=1$, also $2z=50$, $z=25$, $y=24$.

Wir erhalten damit die erste Lösung:

$x=7, y=24, z=25$

und überzeugen uns davon, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

2. $x=14$. Dann gilt

$(z+y)(z-y)=4\cdot 49$.

Hier gibt es keine Zerlegung der Zahl $4\cdot 49$ in Faktoren, die den Bedingungen (6) entspricht.

3. $x=21$. Dann gilt

$(z+y)(z-y)=9\cdot 49$.

Wegen (6) gibt es dann nur die folgende Faktorenzerlegung:

$z+y=49, z-y=9$,

also $2z=58$, $z=29$, $y=20$.

Wir erhalten somit die zweite Lösung:

$x=21, y=20, z=29$

und überzeugen uns davon, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

4. $x=28$. Dann gilt

$(z+y)(z-y)=16\cdot 49$.

Hier gibt es keine Zerlegung der Zahl $16\cdot 49$ in Faktoren, die den Bedingungen (6) und (2) entspricht.

5. $x=35$. Dann gilt

$(z+y)(z-y)=25\cdot 49$.

Wegen (6) gibt es dann nur die folgende Faktorenzerlegung:

$z+y=49, z-y=25$,

also $2z=74$, $z=37$, $y=12$.

Wir erhalten somit die dritte Lösung:

$x=35, y=12, z=37$

und überzeugen uns davon, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

6. $x=42$. Dann gilt

$(z+y)(z-y)=36\cdot 49$.

Hier gibt es keine Zerlegung der Zahl $36\cdot 49$ in Faktoren, die den Bedingungen (6) und (2) entsprechen. Damit sind sämtliche Fälle behandelt. Es gibt also genau drei Tripel von natürlichen Zahlen, nämlich

(7, 24, 25), (21, 20, 29), (35, 12, 37),

für die die gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Ma 10/12 ■1494 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$12x^4-11x^3-146x^2-11x+12=0. \quad (1)$$

Dann gilt $x\neq 0$. Die Gleichung (1) ist eine sogenannte symmetrische Gleichung, da der Koeffizient von x^4 und das Absolutglied sowie die Koeffizienten von x^3 und x übereinstimmen. Wir dividieren daher durch x^2 und erhalten

$$12x^2-11x-146-11\cdot\frac{1}{x}+12\cdot\frac{1}{x^2}=0,$$

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-11\left(x+\frac{1}{x}\right)-146=0. \quad (2)$$

Wir setzen

$$x+\frac{1}{x}=z \text{ und erhalten} \quad (3)$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2, \text{ also } x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$$

Wegen (2) erhalten wir dann die Gleichung

$$12(z^2-2)-11z-146=0,$$

$$z^2-\frac{11}{12}z-\frac{170}{12}=0. \quad (4)$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$z_1=\frac{11}{24}+\sqrt{\frac{121}{24^2}+\frac{170}{12}}=\frac{11}{24}+\sqrt{\frac{8281}{24^2}},$$

$$z_1=\frac{11+91}{24}=\frac{17}{4};$$

$$z_2=\frac{11-91}{24}=-\frac{10}{3}.$$

Wegen (3) erhalten wir für $z_1=\frac{17}{4}$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4},$$

$$x^2-\frac{17}{4}x+1=0. \text{ Diese}$$

quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_1=4, x_2=\frac{1}{4}.$$

Für $z_2=-\frac{10}{3}$ erhalten wir

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3},$$

$$x^2+\frac{10}{3}x+1=0. \text{ Diese}$$

quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_3=-\frac{1}{3}, x_4=-3.$$

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen

$$x_1=4, x_2=\frac{1}{4}, x_3=-\frac{1}{3}, x_4=-3$$

sein. Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen der Gleichung (1) sind. Denn für $f(x)=12x^4-11x^3-146x^2-11x-12=0$ gilt

$$f(4)=0, f\left(\frac{1}{4}\right)=0, f\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \text{ und}$$

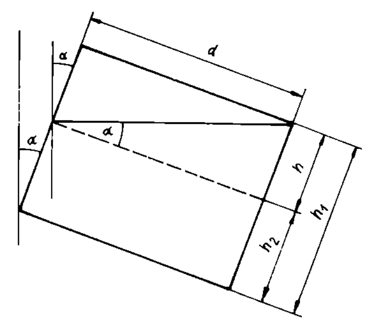
$$f(-3)=0.$$

Ph 10/12 ■1495 Gegeben: $d=90$ cm

$h_1=80$ cm $h_2=70$ cm

Gesucht: α

Aus der Zeichnung ergibt sich



$$\tan\alpha=\frac{h}{d} \qquad h=h_1-h_2$$

$$\tan\alpha=\frac{10}{90}$$

$$\tan\alpha=0{,}1111$$

$$\alpha=6{,}34^\circ$$

Der Kübel muß um 6,34° geneigt sein.

Ch 10/12 ■1496

$2\,Fe \rightarrow 1$ Mol Fe_2O_3

$2\cdot 55{,}85 \rightarrow 159{,}7$

$2\cdot 55{,}85$ g $\rightarrow 159{,}7$ g Fe_2O_3

x g $\rightarrow 0{,}164$ Fe_2O_3

x g : $2\cdot 55{,}85$ g $= 0{,}1649$ g : $159{,}7$ g

$x=0{,}1147$ Fe

(Atomgewicht des Sauerstoffs auf 16 gerundet)

$0{,}5240$ g $\rightarrow 0{,}1147$ g Fe

100 g $\rightarrow$ x g Fe Eisengehalt 21,89%

$$\frac{0{,}5240}{100}=\frac{0{,}1147}{x}$$

Lösungen zu: alpha-heiter (3/76)

Hundert Gefangene

Es ist offensichtlich, daß die Zellen offen waren, deren Nummer eine ungerade Zahl an Teilern besitzt. Die meisten Nummern N mit dem Teiler A haben doch auch noch den Teiler $\frac{N}{A}$. Die Nummer 20 hat z. B. die Teiler 1 und 20, 2 und 10, 4 und 5, 5 und 4, 10 und 2, 20 und 1. Also 6 Teiler. Ungerade Anzahlen an Teilern haben lediglich die Nummern, die Quadratzahlen sind. Die Nummer 25 hat die Teiler 1 und 25, 5 und 5, 25 und 1.

Also drei Teiler.

Der König hat 10 Gefangene freigelassen. Und zwar die mit den Zellennummern 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 und 100.

Motorsport

71671 + 9542 = 81213;

8662 + 4375 = 13037;

70253 + 10156 = 80409;

58518 + 6023 = 64541

Kleine Logelei

Herr Maier spielt Tennis (5). Aus (5) und (3) folgt, daß er Tee trinkt. Aus Tee folgt Linz (2). Da deswegen Graz ausscheidet, ist er nicht Schlosser. Da er wegen (5) auch nicht Segelflieger ist, ist er auch nicht Lehrer (1) und somit Arzt.

Somit ergibt sich: Maier, Tennis, Tee, Linz, Arzt.
Herr Berger ist nicht Lehrer (1), also auch nicht Segelflieger, demzufolge Boxer. Da jetzt für Janik nur mehr Segelflug bleibt, ist Berger der Schlosser. Aus (2) folgt Graz. Wegen (3) und (5) trinkt er Fruchtsaft.
Somit ergibt sich: Berger, Boxer, Schlosser, Graz, Fruchtsaft. Für Herrn Janik folgt dann: Janik, Lehrer, Segelflug, Mineralwasser.

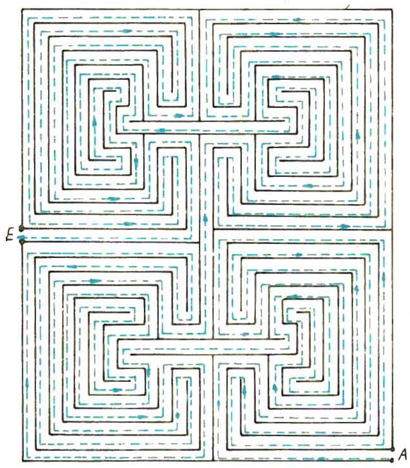
Silbenrätsel

1. Funktionspapier, 2. Relativitätstheorie, 3. Amortisation, 4. Nullstelle, 5. Conrad, 6. Oberfläche, 7. Inkreisradius, 8. Symbol arc, 9. Volumina, 10. Ingenieur, 11. Explizit, 12. Trigonometrie, 13. Einmaleins
– François Viete (Vieta), René Descartes –

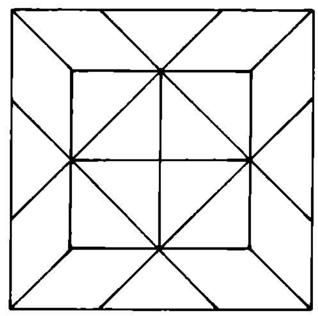
Kryptarithmetik

1. $\frac{303}{242}=0{,}7\overline{986}$
2. $Z=65359477124183\ldots$
$Z\cdot 17=11111\ldots$
$d=1, 2, 3, \ldots, 9$

Troja-Diagramm



Legespiel



Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Leibniz, 5. MEZ, 8. Idiom, 10. ln, 11. Amati, 14. th, 15. Bruchstrich, 17. Logarithmen, 21. Agnes, 24. Ei, 25. Ecken, 26. one, 27. Graphen
Senkrecht: 2. Einer, 3. bit, 4. Noether, 6. est, 7. Zeichen, 9. Amor, 12. Axiome, 13. Zungen, 15. Bolzano, 16. Titeica, 18. Abel, 19. if, 20. Ebene, 22. gon, 23. DKP.

„Du, Vati, wieviel Liter verbrauchst du eigentlich auf 100 Kilometer?"

Übung macht den Meister

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abschlußprüfung, Klasse 10

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

▲1▲ Berechnen Sie 7^0!

▲2▲ Formen Sie die Potenz $a^{-3}(a\in P, a\neq 0)$ so um, daß kein negativer Exponent auftritt!

▲3▲ Schreiben Sie die Potenz $a^{\frac{1}{2}}\,(a\in P, a>0)$ als Wurzel!

▲4▲ Schreiben Sie die Wurzel $\sqrt[3]{k^2}\quad(k\in P, k>0)$ als Potenz!

▲5▲ Schreiben Sie die Gleichung $2^3=8$ in der Form $\log_a b=c$!

▲6▲ Schreiben Sie die Gleichung $\log_5 125=3$ in der Form $a^c=b$!

▲7▲ Berechnen Sie $\sqrt{0{,}09}$!

▲8▲ Schreiben Sie die Gleichung $3^4=81$ in der Form $\sqrt[n]{a}=b$!

▲9▲ Berechnen Sie die Wurzel $\sqrt[3]{0{,}008}$!

▲10▲ Schreiben Sie die Einheit $1\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ als Produkt!

▲11▲ Berechnen Sie $\left(3{,}5\cdot\frac{11}{3}+13{,}5\right)^c$!

▲12▲ Schreiben Sie $\sqrt[4]{a^3}$ als Potenz! Berechnen Sie den Logarithmus $\log_2 32$!

▲13▲ Vereinfachen Sie folgende Terme:
a) $2pq^{k+1}\cdot 4p^{-2}q^k$ d) $5\sqrt{k^2}-\sqrt{49k^2}$
b) $\frac{(5a^4x^2)^3}{25a^6x^7}$ e) $\sqrt[3]{a^6b^9}$
c) $\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[4]{m^7}$ $\sqrt[3]{135}:\sqrt[3]{5}$
$\sqrt[3]{\frac{a^2}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$

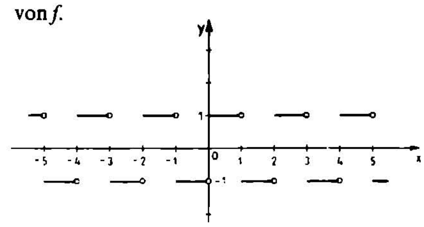
▲14▲ Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes:
$x_1=1{,}68\cdot 4{,}35$
$x_2=\frac{7{,}05}{1{,}39}$
$x_3=\frac{0{,}276\cdot 765}{0{,}038}$
$x_4=\frac{\sqrt{545}\cdot 23{,}2}{4680\cdot 0{,}665}$

▲15▲ Schreiben Sie die Zahlen 628000000 und 0,0037 in der Darstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen, d. h. in der Form $a\cdot 10^n$! Dabei soll der Faktor a jeweils zwischen 1 und 10 liegen!

▲16▲ Vergleichen Sie das folgende Zahlenpaar miteinander: $7\sqrt{8}$ und $5\sqrt{18}$! Setzen Sie das richtige Zeichen ($<$; $=$; $>$)!

Fortsetzung von Seite VIII

c) Wir zeigen, daß $p=2$ die kleinste positive Periode ist:
Angenommen, es gäbe für f eine Periode p mit $0<p<2$. (2)
Dann wäre $0<\frac{p}{2}<1$ (2)
und $-1<-\frac{p}{2}<0$. (3)
Es müßte $f(x+p)=f(x)$ für alle x gelten, also auch etwa für $x_0=-\frac{p}{2}$, d. h., es müßte $f\left(-\frac{p}{2}\right)=f\left(\frac{p}{2}\right)$ sein. Wegen (3) gilt aber $\left[-\frac{p}{2}\right]=-1$ und damit $f\left(-\frac{p}{2}\right)=-1$ und wegen (2) $\left[\frac{p}{2}\right]=0$ und damit $f\left(\frac{p}{2}\right)=1$, folglich ist $f\left(-\frac{p}{2}\right)\neq f\left(\frac{p}{2}\right)$.
Daher ist $p=2$ tatsächlich die kleinste Periode von f.



d) Die so „o" bezeichneten Punkte gehören nicht zum Graph der Funktion.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

A. S. Solodownikow

Lineare Ungleichungssysteme

98 Seiten, Preis: 5,00 M
Math. Schülerbücherei Nr. 74

Die gegenwärtige intensive Entwicklung der Theorie der linearen Ungleichungssysteme begann erst in den vierziger bis fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts, als das stürmische Wachstum der angewandten Disziplinen (lineare, konvexe und andere Gebiete der mathematischen Optimierung, die sog. Spieltheorie usw.) ein vertieftes und systematisches Studium der linearen Ungleichungen nötig machten. Diese Broschüre möchte den Leser mit verschiedenen Aspekten der Theorie der linearen Ungleichungssysteme vertraut machen; mit geometrischen Aspekten und, eng damit zusammenhängend, mit Lösungsmethoden, mit einigen rein algebraischen Eigenschaften und mit prinzipiellen Fragen der linearen Optimierung. Für die Lektüre werden keinerlei Kenntnisse vorausgesetzt, welche die Ergebnisse des Mathematikunterrichts der Schule überschreiten.

H. Pieper

Zahlen aus Primzahlen

167 Seiten, Preis: 6,70 M

Aus dem Inhalt: Primzahlen; die p-adische Entwicklung der rationalen Zahlen; die p-adischen Zahlen.
Dieses Büchlein stellt eine kurze Einführung in ein Teilgebiet der Mathematik, nämlich in die Arithmetik, in die Theorie der Zahlen dar. *Hensel* nannte es das „reinste und mathematischste Gebiet" der Mathematik. *Gauß* sagte einmal, die Mathematik sei die Königin der Wissenschaften, die Zahlentheorie aber die Königin der Mathematik. Dieses Buch wurde sehr ausführlich geschrieben; es soll mit wenigen Vorkenntnissen verständlich sein. Doch oberflächlich lesen läßt es sich nicht. Man muß mit ihm arbeiten, die Abstraktionen und Schlüsse nachvollziehen, sich Schritt für Schritt die Kenntnisse aneignen, in den Stoff eindringen.

K.-D. Drews

Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben

154 Seiten, Preis: 7,50 M
Math. Schülerbücherei Nr. 89

Themen dieses Buches sind die Bestimmung der Lösungen von linearen Gleichungssystemen, die Matrizenrechnung sowie die Bestimmung der Lösungen von linearen Optimierungsaufgaben. Dabei stehen sowohl die Herleitung der wesentlichen theoretischen Aussagen als auch die Bereitstellung von algorithmisch aufbereiteten Rechenverfahren im Vordergrund, und zwar erfolgt die Entwicklung der Theorie unmittelbar in Verbindung mit den Lösungsalgorithmen. Diese wurden unter den in der Praxis üblichen Verfahren ausgewählt und erhalten Formulierungen, die dem Leser das übersichtliche Durchrechnen von Beispielen ermöglichen, aber auch eine Verwendbarkeit in modernen programmgesteuerten Rechenautomaten erkennen lassen. Der Stoff ist so abgefaßt, daß er für Schüler der Abiturstufe verständlich wird.

N. N. Worobjow

Teilbarkeitskriterien

85 Seiten, Preis: 4,20 M
Math. Schülerbücherei Nr. 52

Aus dem Inhalt: Die Teilbarkeit von Zahlen; die Teilbarkeit von Summen und Produkten; Restgleichheits- und Teilbarkeitskriterien; die Teilbarkeit von Potenzen; Beweise der Sätze, Lösungen der Aufgaben. Die vorliegende Broschüre kann als Beschreibung einer der möglichen *Spaziergänge* am Rande der modernen Mathematik angesehen werden. Die Darlegung grundlegender Dinge, die sich auf Teilbarkeitskriterien beziehen, erlaubt es, einige ziemlich abstrakte Fragen der diskreten Mathematik zu berühren. Dazu gehören vor allem die Aussagen der elementaren Zahlentheorie, die sich um den Hauptsatz der Arithmetik und die kanonische Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gruppieren.
Das Büchlein ist für mathematikinteressierte Schüler der oberen Klassen bestimmt und setzt, von einigen Anwendungen des binomischen Satzes abgesehen, keinerlei Vorkenntnisse voraus.

I. I. Golowina/I. M. Jaglow

Vollständige Induktion in der Geometrie

144 Seiten, Preis: 5,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 75

Aus dem Inhalt: Berechnungen mittels vollständiger Induktion; Beweise mittels vollständiger Induktion (Aufgaben über Karten, Färbungsprobleme); Vollständige Induktion bei Konstruktionen; Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion; Definition mittels vollständiger Induktion; Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl; ...; Lösung der Aufgaben. Das Buch wendet sich an Schüler der höheren Klassen der Erweiterten Oberschulen. Es kann vorteilhaft im Unterricht und zur Arbeit im Mathematikzirkel verwendet werden.

A. O. Gelfond

Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen

(Diophantische Gleichungen)

59 Seiten, Preis: 3,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 22

Aus dem Inhalt: Gleichungen mit einer Unbekannten; Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten; Beispiele für Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten; Gleichungen der Form $x^2-Ay^2=1$. Die Ermittlung aller Lösungen dieser Gleichung; die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten; Gleichungen höheren als zweiten Grades mit zwei Unbekannten; algebraische Gleichungen höheren Grades als zweiten Grades mit drei Unbekannten und einige Exponentialgleichungen.
Das vorliegende Büchlein behandelt eines der interessantesten Gebiete der Zahlentheorie, nämlich die Auflösung von sogenannten diophantischen Gleichungen.

625 Millionen Mark für das Lernen

Im Zeichen des IX. Parteitages

In der sozialistischen Schule sind Unterrichtsmittel kein Zusatz für den Unterricht. Sie sind Quellen und Mittel für die Gewinnung von Erkenntnissen. Ohne sie und ihre effektive Nutzung wäre das angestrebte Bildungs- und Erziehungsziel nicht zu erreichen, könnten viele Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht erworben werden.

Die Richtigkeit dieser These findet jeder Schüler Tag für Tag in der eigenen Praxis bestätigt. Und er erlebte, wie diese materielle Bedingung Unterrichtsmittel sich von Jahr zu Jahr verbesserte.

Das ist leicht dahingeschrieben und registriert. Aber welcher gesellschaftliche Aufwand steckt dahinter, was gab unsere Gesellschaft allein für diese eine Bedingung hohen Unterrichtsniveaus seit dem VIII. Parteitag aus?

Die an unseren Schulen allein von 1971 bis 1975 gelieferten Unterrichtsmittel repräsentieren einen Wert von 625 Millionen Mark. Der zentrale Fonds des *Ministeriums für Volksbildung* stieg von 49,7 im Jahre 1971 auf 77,7 Millionen Mark im Jahre 1975. Gegenwärtig besitzt jede Schule in der DDR einen Unterrichtsmittelbestand von durchschnittlich 140000 Mark. In den *Kreisstellen für Unterrichtsmittel* stehen hochwertige technische Geräte und Unterrichtsmittel, wie Filme, Diareihen, Tonbänder u. a., zur Ausleihe an die Schulen bereit.

Etwa 1500 Unterrichtsmittel wurden neu- bzw. weiterentwickelt. Darunter befinden sich Gerätesysteme für Schüler zum Experimentieren im naturwissenschaftlichen und polytechnischen Unterricht.

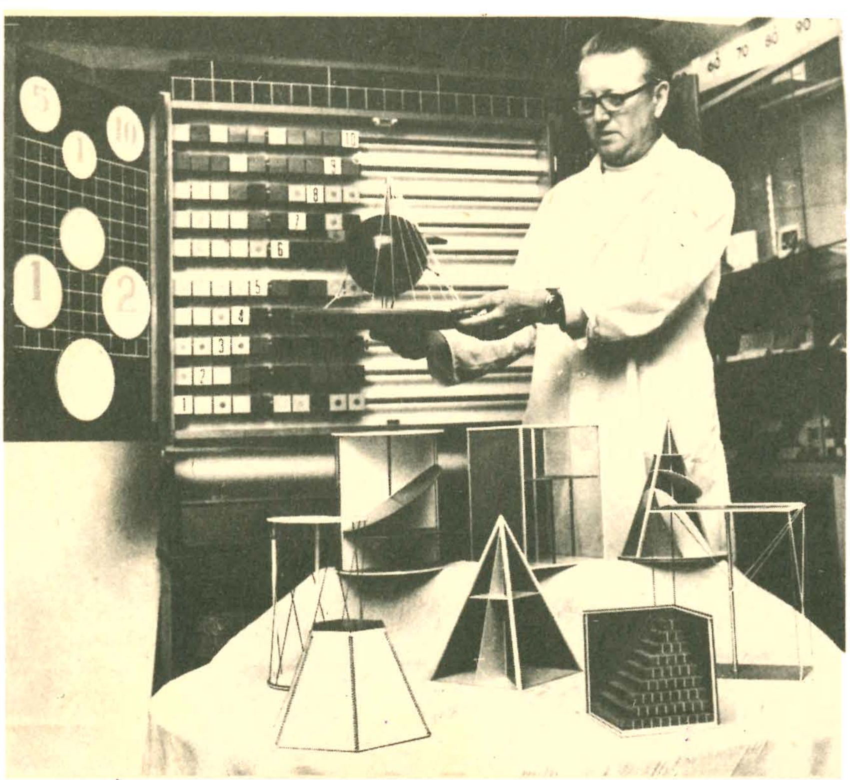
Von 1971 bis 1975 wurden 134 Bildreihen und Dia-Filme, 67 Tonbildreihen und 64 eigens für den Unterricht produzierte Schallplatten herausgegeben.

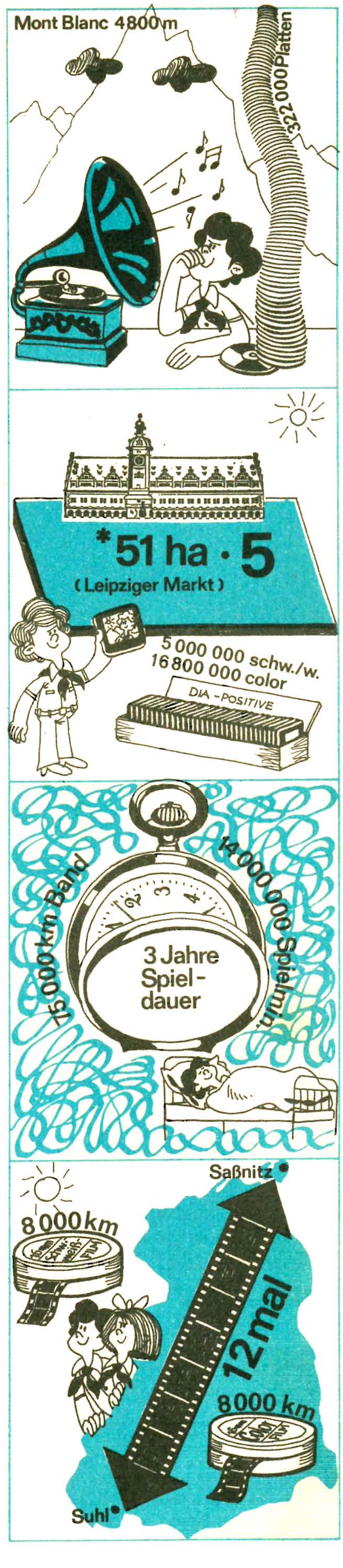
Und auch in diesem Bereich gibt es eine immer enger werdende Zusammenarbeit mit anderen sozialistischen Staaten. So bewähren sich seit Jahren z. B. Wattmeter und Demonstrationsmeßgeräte aus der UdSSR, Universalmeßgeräte aus der ČSSR, Telefonbaukästen aus der VR Polen in unseren Schulen. Die „Interscola" und die kürzlich zu Ende gegangene „Škola nová 75" in Brno sind Ausdruck dafür.

Eine millionenschwere Bedingung ist für die solide Ausbildung unserer Kinder von den Werktätigen allein seit dem VIII. Parteitag geschaffen worden und wird ständig vervollkommnet.

J. Golde

Das Staatliche Kontor für Unterrichtsmittel und Schulmöbel in Leipzig stellt für unsere Schulen fast 100 verschiedenartige mathematische Modelle zur Verfügung. Darüber hinaus werden weit über 2000 Arbeitsmittel und Modelle für andere Unterrichtsgebiete von den Mitarbeitern dieses Kollektivs bereitgestellt.

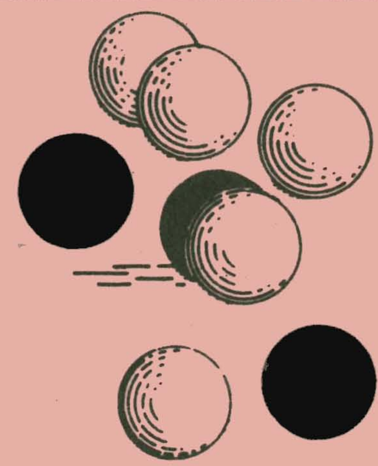


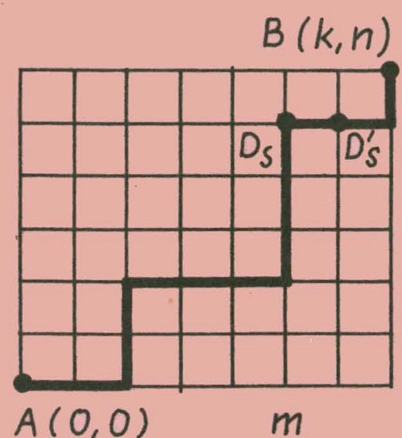


Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

$$P_n = n!$$





00, 01, 02, 03
10, 11, 12, 13
20, 21, 22, 23
30, 31, 32, 33

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

4

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 75, S. 76), J. Freiberg, Leipzig
Vignetten: J. Flisak, Warschau; J. Puchalski, Warschau; Gabbert, Leipzig; Günzel, Berlin; Lehrerzeitung, Prag; H. Büttner, Berlin; K.-H. Guckuk, Leipzig
Nach einer Idee von *Kerstin Schulz*, 7. OS Aschersleben (Kl. 6) gezeichnet von K.-H. Guckuk, Leipzig (Vignetten S. 87 unten)
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. April 1976

alpha

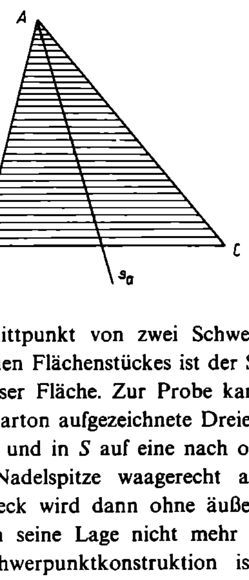
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

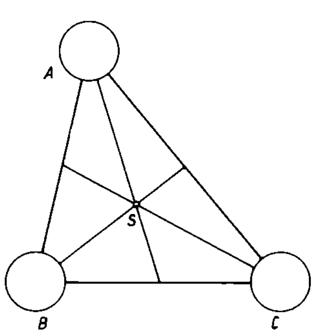
* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Bestimmung des Schwerpunktes eines Dreiseits

Aus der Schule ist uns die Aufgabe geläufig, von einem Dreieck den Schwerpunkt zu bestimmen. Hierzu zeichnet man in das Dreieck die Seitenhalbierenden ein. Diese schneiden sich in einem Punkt S, dem Schwerpunkt der Dreieckfläche. Zur Begründung dieser Konstruktion macht man sich klar, daß jede Seitenhalbierende eines Dreiecks eine Schwerelinie der Fläche ist. Zerlegt man nämlich in einem Gedankenexperiment die Fläche in feine Streifen parallel zu einer der Dreieckseiten, so liegen die Halbierungspunkte aller Streifen auf der dieser Seite zugeordneten Seitenhalbierenden.



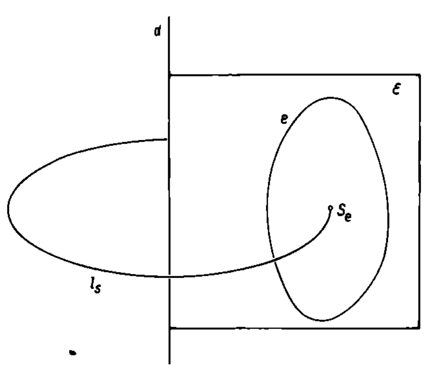
Der Schnittpunkt von zwei Schwerelinien eines ebenen Flächenstückes ist der Schwerpunkt dieser Fläche. Zur Probe kann man das auf Karton aufgezeichnete Dreieck ausschneiden und in S auf eine nach oben gerichtete Nadelspitze waagerecht auflegen. Das Dreieck wird dann ohne äußere Einwirkungen seine Lage nicht mehr ändern. Diese Schwerpunktkonstruktion ist auch dann richtig, wenn man unter einem Dreieck ein System von drei Körpern gleicher Masse versteht, deren Schwerpunkte sich mit den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks decken.



Überlegungen von ganz anderer Art sind anzustellen, wenn man die Schwerpunktbestimmung nur auf den Rand des Dreiecks ABC bezieht. Man spricht dann von dem Dreiseit ABC und dem Schwerpunkt S_e des Dreiseits. Ein aus drei geraden Metallstäben gleicher Stärke und gleichen Materials zusammengeschweißter Dreieckrahmen liefert ein Modell, das näherungsweise dieser Vorstellung entspricht. Zunächst kann man sich leicht erklären, daß die Seitenhalbierenden dieses Metallrahmens im allgemeinen keine Schwerelinien sind. Folglich entspricht auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiseits nicht dem Schwerpunkt dieser geschlossenen Linie.

I. Ein leicht verständlicher Satz soll uns zunächst einen analytischen Zugang zum Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiseits bieten. Dieser Satz lautet: Dreht sich eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve e um eine in der Kurvenebene ε liegende Achse d, die e nicht schneidet, so ist der Flächeninhalt O der erzeugten Drehfläche gleich dem Produkt aus der Bogenlänge l_e von e und der Weglänge l_s des Schwerpunktes S_e von e bei einer Umdrehung von ε um d; es gilt also

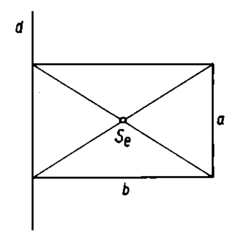
$$O = l_e \cdot l_s, \qquad (1)$$



Wir wollen diesen Satz zunächst an einem bekannten Beispiel erproben.

1. Die geschlossene Kurve e sei ein Rechteck mit der Länge $l_e = 2(a+b)$ als Umfang (für Polygonseiten und deren Längen setzen wir im folgenden die gleichen Bezeichnungen, also a, b, c, d, ...). Eine der beiden Rechteckseiten a bringen wir mit der Drehachse d zur Deckung und lassen die Rechtecklinie e um d rotieren. Auf diese Weise wird eine Zylinderfläche erzeugt. Die Bogenlänge l_e der erzeugenden Kurve ist gleich $2(a+b)$. Der Schwerpunkt des Vierseits hat von der Achse den Abstand $b/2$. Für die Länge des von dem Schwerpunkt bei einem Umlauf zurückgelegten Weges folgt daher

$$l_s = 2\pi \frac{b}{2} = \pi b.$$



Die Oberfläche O des erzeugten Zylinders hat nach (1) den Inhalt

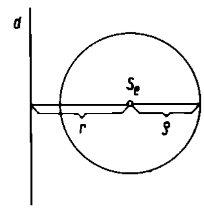
$O = l_s \cdot l_e = \pi b \cdot 2(a+b) = 2\pi ab + 2\pi b^2$.

Die Anwendung des oben zitierten Satzes liefert, wie nicht anders zu erwarten, die Summe der Inhalte von Deck- und Basisfläche sowie des Mantels der Zylinderfläche.

2. Die erzeugende Kurve e sei eine Kreislinie, die die in ε liegende Gerade d nicht schneidet. Bei einmaliger Umdrehung von ε um d überstreicht e eine Ringfläche, auch Torus genannt. Uns interessiert nun der Inhalt der Oberfläche des Torus. Hat e den Radius ρ, so folgt $l_e = 2\pi\rho$. Der Mittelpunkt von e ist offensichtlich auch der Schwerpunkt S_e von e. Hat S_e den Abstand r von d mit $r > \rho$, so gilt für den Inhalt der in dieser Weise erzeugten Drehfläche nach (1)

$O = 2\pi r \cdot 2\pi\rho$ oder

$O = 4\pi^2 r\rho$.



3. Wir wollen uns nun der eingangs gestellten Aufgabe zuwenden. Um von dem Dreiseit ABC den Schwerpunkt S_e zu bestimmen,

bringen wir die Seite a mit der Drehachse d zur Deckung. Dreht sich das Dreiseit um die Achse d, so entsteht eine aus zwei Drehkegeln mit gemeinsamem Basiskreis zusammengesetzte Drehfläche. Dieser Basiskreis hat die Höhe h_a des Dreiseits als Radius. Somit ergibt sich für die Länge s der von dem Eckpunkt A beschriebenen Kreislinie

$$s = 2\pi h_a.$$

Die Mantelfläche eines Drehkegels kann man, wie uns dies von Bastelarbeiten her sicher geläufig ist, in eine Ebene abwickeln. Dabei entsteht ein Kreissegment. Hat dieses Segment den Radius der Länge r und den Bogen der Länge s, so gilt für den Inhalt K des Kreissegmentes

$$K = \frac{1}{2} rs.$$

Wendet man diese Formel auf die beiden Kegelflächen an, ergibt sich für deren Inhalte

$$K_1 = \pi h_a b \qquad K_2 = \pi h_a c.$$

Wegen $h_a = c \sin\beta = b \sin\gamma$ kann man auch schreiben

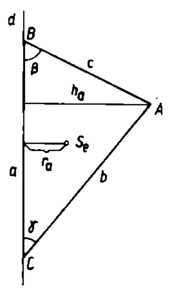
$$K_1 = \pi bc \sin\beta \qquad K_2 = \pi bc \sin\gamma$$

und für die Oberfläche des gesamten Drehkörpers

$$O = K_1 + K_2 = \pi bc(\sin\beta + \sin\gamma). \tag{2}$$

Ferner steht die Länge der erzeugenden Linie zur Verfügung. Es gilt

$$l_e = a + b + c. \tag{3}$$



Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes S_e von der mit a zur Deckung gebrachten Drehachse d mit r_a, so folgt für die Weglänge l_s von S_e bei einem Umlauf:

$$l_s = 2\pi r_a. \tag{4}$$

Die Anwendung des oben zitierten Satzes führt unter Beachtung von (1), (2), (3) und (4) auf die Gleichung

$$\pi bc(\sin\beta + \sin\gamma) = 2\pi r_a(a+b+c). \tag{5}$$

Darin ist r_a die gesuchte Größe. Die Auflösung von (5) nach r_a ergibt

$$r_a = \frac{bc(\sin\beta + \sin\gamma)}{2(a+b+c)}. \tag{6}$$

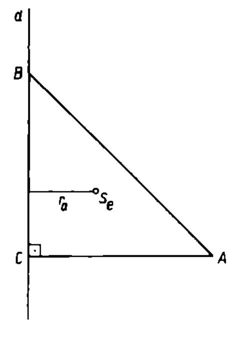
Aus dem gefundenen Ergebnis (6) lassen sich sofort die Abstände des Schwerpunktes S_e von den beiden anderen Dreieckseiten ablesen. Man erhält durch zyklische Vertauschung

$$r_b = \frac{ac(\sin\alpha + \sin\gamma)}{2(a+b+c)},$$

$$r_c = \frac{ab(\sin\alpha + \sin\beta)}{2(a+b+c)}. \tag{7}$$

Zum Abschluß der Rechnung wollen wir uns davon überzeugen, daß sich der so gefundene Punkt S_e mit dem Schwerpunkt S der Dreieckfläche nicht deckt. Die Behauptung, daß S_e mit S identisch ist, stellt eine Allaussage dar. Um sie zu widerlegen, genügt es, ein Gegenbeispiel aufzuzeigen. Wir betrachten den Fall $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$. Mit dieser Festlegung für die Seiten folgt für die Winkel

$$\beta = 45°, \qquad \gamma = 90°.$$



Die Anwendung von (6) liefert

$$r_a = \frac{1+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{8}$$

Da sich die Seitenhalbierenden des Dreiecks im Verhältnis 1 : 2 schneiden, hat der Flächenschwerpunkt S von a den Abstand $^1/_3$. Folglich sind die Schwerpunkte S und S_e nicht identisch. Lediglich für das gleichseitige Dreieck fallen der Schwerpunkt der Fläche und der Schwerpunkt des Randes zusammen.

Der hier zur Schwerpunktbestimmung der Dreieckslinie verwendete Satz findet sich erstmals in einem Werk des Schweizer Mathematikers Paul Guldin (1577–1643). Dieser Satz ist in die Fachliteratur als erste Guldinsche Regel eingegangen. Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden.

II. Abschließend soll noch gezeigt werden, wie man den Schwerpunkt S_e der Dreieckslinie ABC auf konstruktivem Wege finden kann. Entscheidend ist zunächst die Zielstellung, zwei Schwerelinien in möglichst einfacher Weise aufzusuchen. Wir werden die durch den Halbierungspunkt P von a gehende Schwerelinie s_p bestimmen. Hierfür bietet sich an, einen zweiten Punkt $X \in s_p$ auf der Verbindungsgeraden der Halbierungspunkte Q und R der Seiten b bzw. c konstruktiv zu ermitteln. Zu diesem Zweck ordnen wir dem Punkt Q die Masse m_b und R die Masse m_c zu, so daß die Proportion

$$m_b : m_c = b : c \tag{9}$$

erfüllt ist. Der gesuchte Punkt X muß mit dem Schwerpunkt des aus den Massen m_b und m_c bestehenden Systems identisch sein. Nach dem Hebelgesetz stehen bei Gleichgewicht eines zweiarmigen Hebels die Hebellängen im umgekehrten Verhältnis zu den in ihren Endpunkten angebrachten Massen. Vgl. Abb. 8. Von dem Punkt $X \in s_p$ ist also zu fordern:

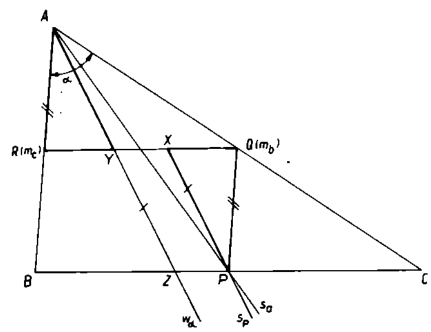
$$|RX| : |QX| = m_b : m_c. \tag{10}$$

Wegen (9) ist die Bestimmung von $X \in$ auf eine geometrische Aufgabe zurückführbar. Die mit (10) äquivalente Forderung lautet:

$$|RX| : |QX| = b : c. \tag{11}$$

Diese Proportion legt es nahe, die Winkelhalbierende w_α in die Konstruktion einzubeziehen. Zeichnet man in das Dreieck ABC die Winkelhalbierende w_α von α ein, so schneidet diese die Gegenseite in einem Punkt Z und die Verbindungsgerade (QR) in Y. Nun benutzen wir den Satz, daß die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Die Anwendung des Satzes auf den vorliegenden Fall führt auf die Proportion

$$b : c = |CZ| : |BZ|.$$



Da die Verbindungsgeraden (BC) und (QR) zueinander parallel sind, kann man den Strahlensatz anwenden. Es gelten die Proportionen

$$|CZ| : |BZ| = |QY| : |RY| \text{ und damit}$$

$$|QY| : |RY| = b : c. \tag{12}$$

Wir behaupten: Zieht man durch P eine Parallele zu w_α, so schneidet diese die Gerade (QR) in dem gesuchten Punkt X; d. h., diese Parallele zu w_α durch P ist eine Schwerelinie der Dreieckslinie.

Beweis: Nach Konstruktion gilt

$\Delta PQX \cong \Delta ARY$.

Folglich bestehen die Gleichungen

$|QX| = |RY|$ und $|QY| = |RX|$.

Daraus resultiert die Proportion

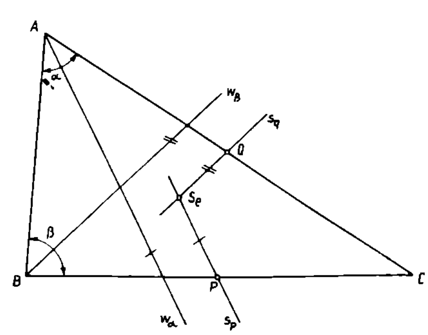
$$|QY| : |RY| = |RX| : |QX|. \tag{13}$$

Mit (12) und (13) kann man weiter folgern

$$|RX| : |QX| = b : c$$

und

$$|RX| : |QX| = m_b : m_c. \tag{14}$$



Mit (14) ist der Beweis erbracht, daß durch die angegebene Konstruktion die Forderung (10) und damit auch (11) erfüllt wird. Die hier abgeleitete Konstruktion der Schwerelinie s_p

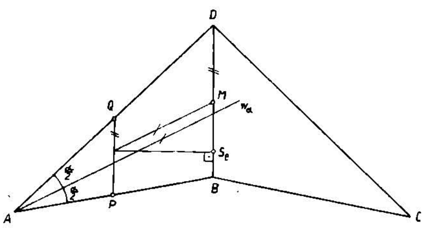
läßt sich in analoger Weise von Q und R ausgehend wiederholen. Im Schnittpunkt von zwei auf diese Weise bestimmten Schwerelinien liegt der gesuchte Schwerpunkt des Dreiseits ABC.

Zusammenfassend kann für den Schwerpunkt S_e einer Dreieckslinie folgende Konstruktionsvorschrift gegeben werden:

In dem Dreiseit ABC sind die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ und die Halbierungspunkte P, Q, R der Seiten a bzw. b bzw. c einzuzeichnen. Dann schneiden sich die Parallelen s_p zu w_α durch P, s_q zu w_β durch Q und s_r zu w_γ durch R in einem Punkt S_e. Dies ist der Schwerpunkt der Dreieckslinie.

Aufgaben:

1. Begründe die in der Abbildung für ein symmetrisches Vierseit gegebene Schwerpunktkonstruktion!



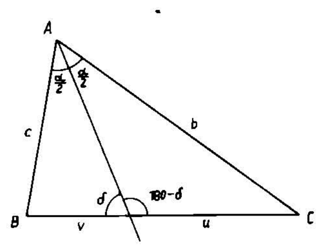
2. Konstruiere den Schwerpunkt eines beliebigen Vierseits!

3. Weise nach, daß das auf analytischem Wege gefundene Ergebnis (6) mit dem konstruktiven Ergebnis übereinstimmt!

E. Schröder

In obigem Beitrag wurde der Hilfssatz verwendet: Eine Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis durch Anwendung des Sinus-Satzes auf die Teildreiecke:



Es gilt

$$\frac{\sin\delta}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{v}, \quad \frac{\sin(180-\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{u}. \qquad (*)$$

Wegen $\sin\delta = \sin(180-\delta)$ folgt aus (*)

$$\frac{c}{v} = \frac{b}{u} \text{ oder } \frac{b}{c} = \frac{u}{v}.$$

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Gottfr. Bachmann

Pädagogische Hochschule Halle
„N. K. Krupskaja"
Sektion Mathematik-Physik

▲1536▲ Man ermittle fünf reelle Zahlen $a_j \geqq 1$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ derart, daß das Produkt $a_1^2 \cdot a_2 \cdot a_3^3 \cdot a_4 \cdot a_5^2$ seinen größten Wert annimmt unter den Bedingungen

$$\sqrt[100]{a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3 \cdot a_5} \leqq 2$$
$$\sqrt[80]{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5} \leqq 2$$
$$\sqrt[50]{a_1 \cdot a_3 \cdot a_4} \leqq 2$$

Lösungshinweis:
Durch die eineindeutigen Transformationen $a_j := 2^{x_j}$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ und anschließendes Logarithmieren (zur Basis 2) erhält man ein lineares Optimierungsproblem, aus dessen Lösungen die Lösungen der gestellten Aufgabe errechnet werden können.

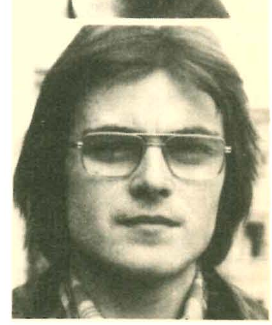
Kurzbiographie

Prof. Dr. sc. nat. G. Bachmann,
geb. 1927 in Mockritz;
Vater: Lehrer, Mutter: Hausfrau;
1933 bis 1937 Besuch der Volksschule,
1937 bis 1944 Besuch des Realgymnasiums (später: Oberschule) Döbeln bzw. der Fürstenschule Meißen (Staatl. Gymnasium), Reifevermerk;
1945 Baupraktikant, später Neulehrer;
Lehrerprüfungen 1947 und 1949;
1949 bis 1953 Lehrer an Erweiterten Oberschulen in Waldheim/Sa., Altenberg/Erzgeb., Bischofswerda/Sa.;
1952/53 Teilnahme an einem einjährigen Sonderlehrgang an der Pädagogischen Hochschule Potsdam zur Ausbildung in Mathematik;
1954 bis 1959 Oberassistent,
1959 bis 1960 Lektor,
1961 bis 1969 Dozent am Pädagogischen Institut Halle;
1958 Diplom an der Martin-Luther-Universität Halle nach externer Vorbereitung,
1968 Promotion A und 1972 Promotion B an der TH Ilmenau;
1969 bis 1974 Hochschuldozent und seit 1974 ordentlicher Professor für Geometrie an der Pädagogischen Hochschule Halle.

Preisträger der XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:

Peter Dittrich,
EOS *Dr. Th. Neubauer*, Rudolstadt (Kl. 10)
Peter Bartenstein, EOS *Geschw. Scholl*, Hildburghausen (Kl. 10)
Michael Marczinek,
EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 11)
Friedhelm Schieweck,
EOS *Otto von Guericke*, Magdeburg (Kl. 12)



Einen zweiten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Tilo Brock, 40. OS Leipzig; Jens-Uwe Richter, EOS *Th. Neubauer*, Karl-Marx-Stadt; Ilja Schmelzer, *Dr.-K.-Fischer-OS*, Halle; Uwe Szyszka, EOS *F. Engels*, Neubrandenburg (aus Kl. 9); Steffen Thiel, EOS Königs-Wusterhausen, (aus Kl. 9); Andreas Kasparek, EOS Gräfenhainichen (aus Kl. 9); *In Olympiadeklasse 11:* Roger Labahn, EOS *Geschw. Scholl*, Anklam
In Olympiadeklasse 12: Norbert Schieweck, EOS *Otto von Guericke*, Magdeburg; Jörg-Uwe Löbus, EOS *R. Rolland*, Dresden; Hans-Georg Martin, *Spezialschule Carl Zeiss*, Jena; Thomas Hoffmann, EOS *Geschw. Scholl*, Apolda; Klaus Brinckmann, EOS *B. Brecht*, Dresden; Uwe Risch, EOS Burg

Einen dritten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Jan Müller, EOS *H. Hertz*, Berlin; Heiko Hoffmann, Herder-OS, Rostock; Stefan Vogel, E.-Thälmann-OS, Plauen; Annette Damnik. EOS *F. Schmenkel*, Luckenwalde; Frank Bauernöppel, EOS *H. Hertz*, Berlin; Jürgen Prestin, EOS *R. Wossidlo*, Waren; Frank Bergner, EOS *F. Engels*, Riesa; Uwe Doetzkies, Max-Lingner-OS, Berlin; Bernd Kreußler, KJS *F. Lesch*, Frankfurt (Oder) (aus Kl. 9); Wolfram Würbel, EOS *R. Rotkegel*, Forst; Olaf Sammler, EOS *H. Hertz*, Berlin; Kerstin Rudorf, W.-Komarow-OS, Karl-Marx-Stadt
In Olympiadeklasse 11: Lutz Gärtner und Norbert Heß, beide Spezialkl. Math. der Humboldt-Univ. zu Berlin; Thomas Maiwald, EOS Zittau (aus Kl. 10); Hans-Dietmar Gröger, EOS Staßfurt (aus Kl. 10); Thomas Luschtinetz, Hansa-EOS, Stralsund; Harro Rosner, EOS *H. Hertz*, Berlin; Günter Gerbeth, Spezialkl. der Univ. Halle
In Olympiadeklasse 12: Ronald Lange, Spezialkl. der Univ. Halle; Bernhard Runge, EOS Goethe, Schwerin; Klaus Taeschner und Frank Reglin, beide EOS *H. Hertz*, Berlin; Reiner Lindemann, Spezialkl. der Humboldt-Univ. zu Berlin; Ingolf Buttig, EOS Goethe, Bischofswerda

Weitere 38 Schüler erhielten eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen.

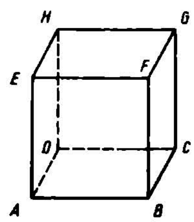
XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

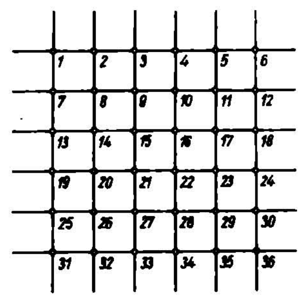
1. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.



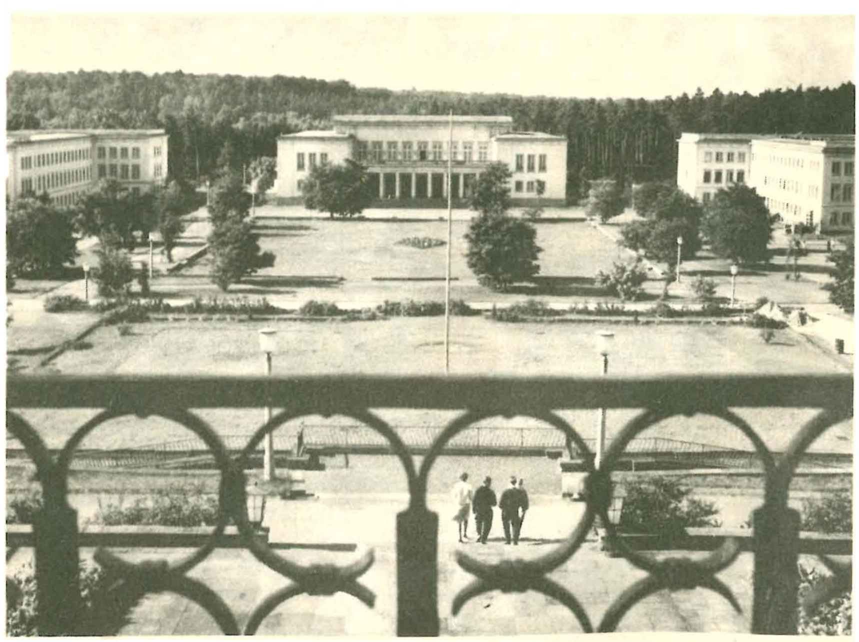
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, daß sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt. Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!

2. In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die im Bild dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, daß

(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,
(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und
(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.



Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, daß es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!



Die Jugendhochschule „Wilhelm Pieck“, Bogensee bei Berlin – seit 15 Jahren Gastgeber der DDR-Olympiaden

Von den nachstehenden Aufgaben 3 A und 3 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3 A. Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z]=g$ bezeichnet, für die $g \leqq z < g+1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die
$-10 \leqq x \leqq 2$ und
$[x^2]=[x]^2$ gilt!

3 B. In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x;\ y)$ seien die Punkte $F_1(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$ sowie der Graph x derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$f(x)=\frac{1}{x}$ definiert ist.

Man beweise: Es gibt eine Zahl c, so daß k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c.

4. Man ermittle alle ungeordneten Paare $(x,\ y)$ aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt: Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

5. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an die Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert! Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!
Hinweis: Es gibt zu dem Dreieck ABC genau einen Kreis, der die Seite AC, die Verlängerung von BA über A hinaus und die Verlängerung von BC über C hinaus berührt. Dieser Kreis heißt der Ankreis an die Seite AC des Dreiecks ABC.

6. Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, daß f nullstellenfrei ist, d. h., daß keine reelle Zahl x mit $f(x)=0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, daß auch die durch $F(x)=f(2x)+f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

Die Lösungen zu diesen Aufgaben sowie die Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 veröffentlichen wir in Heft 5/76.
Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufe 11/12 findet der interessierte Leser in *Mathematik in der Schule*, Heft 12/76, d. Red.

Unser Dank gilt den Betreuern der Bezirksmannschaften und den unermüdlichen Organisatoren der DDR-Olympiaden

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Aus der Arbeit unseres NVA-Zirkels Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Universität Jena

Eine gute Vorbereitung auf ein Studium der Mathematik anzuregen und zu unterstützen, ist das Hauptanliegen des Jugendobjektes *Studienvorbereitung* unserer Sektion, das nun bald schon sein zehnjähriges Jubiläum feiern kann.
Wir wollen heute einmal darüber berichten, welche Aufgabe sich der *NVA-Zirkel* als ein Bereich des Jugendobjekts gestellt hat, und wie er seine Arbeitsziele zu realisieren versucht:
Wir sind zunächst davon ausgegangen, daß gegenwärtig nahezu alle männlichen Studienbewerber ihren Ehrendienst in der NVA *vor* Beginn ihres Studiums leisten. Dadurch wird eine gewisse Unterbrechung des Lernprozesses zwischen Schule und Universität unvermeidlich, und dies bringt u. a. mehr oder weniger große Schwierigkeiten mit sich. Die Frage:

Unser Dank gilt der Jury, den Koordinatoren und den Korrektoren der DDR-Olympiade

Wie können die zukünftigen Studenten der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, die ihren Ehrendienst in den Reihen der NVA leisten, einen Teil dieser Schwierigkeiten überwinden?
charakterisiert deshalb die Arbeit des Bereiches *NVA-Zirkel* unseres Jugendobjektes.

Dabei erschienen uns für diese spezielle Art von Studienvorbereitung drei Dinge als besonders wichtig:
1. der Kontakt zur Universität während der Armeezeit (einschließlich der Möglichkeit, sich mit Problemen, Fragen und Wünschen an uns zu wenden),
2. die Beschäftigung mit der Mathematik,
3. die Information über das fachliche und gesellschaftliche Leben an der Sektion (und Universität).

Das regelmäßige Studium der *Wurzel* kann hierbei – wie wir meinen – schon von sehr großem Nutzen sein. Deshalb schicken wir jedem an unserer Sektion vorimmatrikulierten NVA-Angehörigen die *Wurzel* kostenlos ins *Objekt.* Darüber hinaus haben wir zwei Lesematerialien erarbeitet, die einige *Grundbegriffe der Mengenlehre* und der *Logik* (beides spielt ja in den Grundvorlesungen der ersten Semester eine hervorragende Rolle), die zum Teil schon von der Schule her bekannt sind, einmal unter einem anderen Aspekt vorstellen, um auf diese Weise ein wenig auf die Denkweise der Mathematik zu orientieren. Erfahrungsgemäß macht ja gerade die neue Art der Betrachtung und Behandlung der mathematischen Grundbegriffe zu Beginn des Studiums Schwierigkeiten.
Diese Lesematerialien sind speziell auf unsere *Partner*, die Soldaten, zugeschnitten und haben bei ihnen bislang eine recht positive Resonanz gefunden.
Wir bleiben deshalb bei dieser Art der Betreuung, suchen aber nach weiteren Möglichkeiten, unsere Arbeit zu verbessern.
Die Arbeit des NVA-Zirkels, in dem z. Z. drei Studenten arbeiten, ist recht aufwendig: sie reicht von inhaltlichen Überlegungen und Entwürfen über die Beantwortung der umfangreichen Briefpost, vielen Adressenänderungen, der Neuerfassung unserer Mitglieder bis zum Versand der *Wurzel* und unserer Materialien.

Von den Überlegungen, die wir uns um eine Verbesserung der Arbeit des NVA-Zirkels machen, seien hier genannt:
– Kontaktaufnahme mit anderen Universitäten und Erfahrungsaustausch über Methoden der Studienvorbereitung.
– Verbesserung der Information über nichtfachliche Fragen des Studiums.
– Anregung zur Kontaktaufnahme der Soldaten untereinander (brieflich bzw. im selben Objekt).
– Verbesserung der Zusammenarbeit des NVA-Zirkels mit den anderen Bereichen des Jugendobjektes.

W. Nehrlich

Von der Zahl zum Gesetz

Leseprobe

Speziell für Klassen 5/6

Wie hängt das zusammen?

Klasse 6 hat ihre erste Mathematikarbeit geschrieben, und von den 20 Schülern fehlte keiner. Folgende Zensuren wurden dabei erreicht:

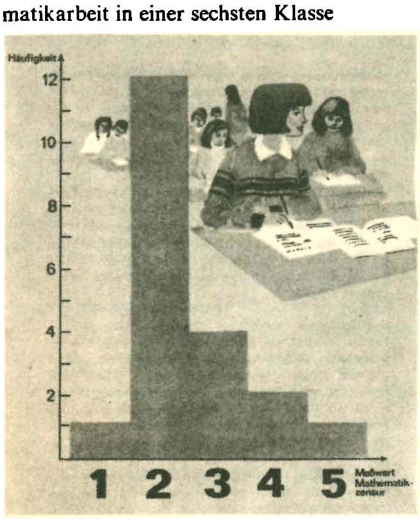
Zensur	Anzahl der Schüler
1	1
2	12
3	4
4	2
5	1

In der Fachsprache der Statistik bezeichnen wir die Zensuren als *Meßwerte* und die zugehörigen Schülerzahlen als *Häufigkeiten.* Zwölf Schüler erhielten die Note 2; der Meßwert 2 liegt also mit der Häufigkeit 12 vor.

Sehr oft haben derartige Tabellen von Meßwerten einen größeren Umfang, z. B. bei Ergebnissen von physikalischen Experimenten oder bei der Registrierung der Regenmengen für jeden Tag eines Jahres. Um in solchen Fällen rasch einen guten Überblick zu erhalten und um Besonderheiten zu erkennen, stellt man die Meßwerte und ihre Häufigkeiten zeichnerisch dar. In der Statistik ist dafür unter anderem das *Histogramm* gebräuchlich.

Beim Histogramm ordnen wir die Meßwerte nacheinander an und zeichnen darüber Rechtecke, deren Größe sich nach der Häufigkeit richtet.

Histogramm für die Zensuren der 1. Mathematikarbeit in einer sechsten Klasse



Das Histogramm liefert keine anderen Aussagen als die *Tabelle*, es gibt nur ein einprägsameres Bild. Bei der Besprechung einer Mathematikarbeit ist es für den Lehrer und die Schüler gleichermaßen interessant, wo jeder einzelne steht, ob die Leistung über oder unter dem Durchschnitt der Klasse liegt. Bei den Noten 1 oder 5 ist diese Frage leicht zu beantworten. Schwieriger scheint das aber bei den Zensuren 2 und 3 zu sein. Um einen Vergleich vornehmen zu können, berechnen wir einen *Mittelwert.*

Ganz absichtlich habe ich geschrieben „einen Mittelwert" und nicht „den Mittelwert". In der Statistik kann man nämlich mit verschiedenen Verfahren Mittelwerte erhalten. Da gibt es zunächst den Mittelwert, der den tatsächlich „mittelsten Wert" oder wie man ihn auch nennt ‚Medianwert" darstellt: in unserem Beispiel die Note 3. Dann existiert ein *Modalwert*, das ist der „häufigste Wert": für unsere Mathematikarbeit die Note 2. Beides sind „Mittelwerte", die aber für jeden einzelnen Schüler noch keinen echten Vergleich ergeben. Am häufigsten arbeitet man in der Statistik mit dem *arithmetischen Mittel*, das wir auch hier berechnen.

Wir bezeichnen die Meßwerte der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5. In unserem Beispiel heißt das:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5.$

Für die Häufigkeiten verwenden wir die Symbole h_1, h_2, h_3, h_4 und h_5:

$h_1 = 1, h_2 = 12, h_3 = 4, h_4 = 2, h_5 = 1.$

Die Zahl der Schüler, die die Arbeit geschrieben haben, betrug $n = 20$.

Für das arithmetische Mittel wählen wir das Zeichen $\bar{x}$. Die allgemeine Formel heißt dann:

$$\bar{x} = \frac{h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 + h_3 \cdot x_3 + h_4 \cdot x_4 + h_5 \cdot x_5}{n}$$

Wir setzen die Zahlenwerte ein und erhalten

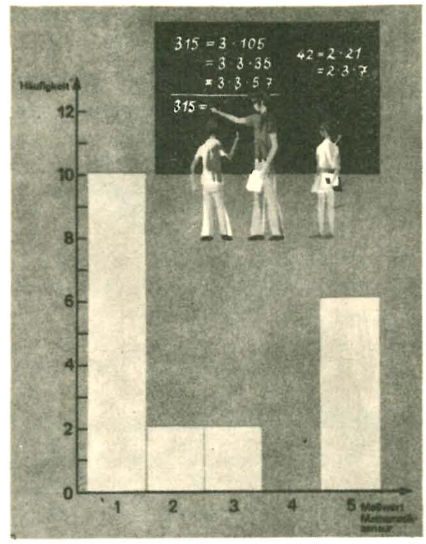
$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{20}$$

$$= \frac{1 + 24 + 12 + 8 + 5}{20} = \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Der *Durchschnitt* der Klassenarbeit betrug, berechnet mit dem arithmetischen Mittel, also 2,5. Jene 13 Schüler mit den Noten 1 und 2 schrieben eine überdurchschnittliche Arbeit. Wer eine 3, 4 oder 5 als Zensur erhalten hatte, erreichte nur eine unter dem Durchschnitt liegende Leistung.

Außer Medianwert, Modalwert und arithmethischem Mittel gibt es in der Statistik noch einige weitere Mittelwerte. Für die meisten Aufgaben liefert aber das arithmetische Mittel die beste Aussage. Deshalb – und nicht etwa nur, weil es leicht zu berechnen ist – beschränken wir uns im weiteren auf diesen Mittelwert. Wenn wir jetzt vom Mittelwert sprechen, meinen wir damit immer das arithmetische Mittel.

Genau ein Monat war seit der ersten Mathematikarbeit in Klasse 6 vergangen, als die zweite Arbeit geschrieben wurde. Wieder waren alle 20 Schüler anwesend. Dieses Mal sahen die Ergebnisse etwas anders aus.



Histogramm für die Zensuren der 2. Mathematikarbeit in einer sechsten Klasse

Zensur	Anzahl der Schüler
1	10
2	2
3	2
4	–
5	6

Die Hälfte der Schüler bekam die Note 1, sechs Schüler mußten sich aber mit einer 5 begnügen. Welche Arbeit war besser ausgefallen, die erste oder die zweite?

Wir berechnen wieder den Durchschnitt mit dem arithmetischen Mittel und erhalten:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 6 \cdot 5}{20}$$

$$= \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Genau der gleiche Wert hatte sich schon im ersten Fall ergeben. Wenn in zwei aufeinanderfolgenden Klassenarbeiten derselbe Mittelwert zustande kommt, so ist das sicherlich ein Zufall. Beide Male lagen ja den Zensuren ganz unterschiedliche Häufigkeiten zugrunde. Betrachten wir nun das Histogramm für die zweite Mathematikarbeit, so wird der Unterschied zur ersten Arbeit recht deutlich.

Um über eine Klassenarbeit oder eine andere Reihe von Meßwerten etwas Allgemeines auszusagen, reicht offenbar der Mittelwert nicht aus. Auf irgendeine Weise müssen wir angeben, wie dieser Durchschnitt zustande gekommen ist. Wir suchen eine Zahl, die zeigt, wie sich die einzelnen Meßwerte um den Mittelwert herum verteilen.

Um in der Sprache der Statistik zu sprechen: Welche Zahl sagt uns aus, wie stark die Meßwerte um den Mittelwert „streuen"? Von den verschiedenen Möglichkeiten, die die Statistik dafür hat, wählen wir nun eine wichtige Kennzahl aus: das lineare Streuungsmaß.

Bevor wir diese Kennzahl berechnen, lernen zunächst einen Begriff kennen, der manchem Leser noch unbekannt sein wird:
die negative Zahl.
An einem Februartag zeigt das Thermometer mittags um 12 Uhr die Temperatur von $+3\,°C$ Im Verlaufe der folgenden 12 Stunden, also bis Mitternacht, geht die Temperatur um 8 Grad zurück. Am Thermometer kann man dann ablesen: $-5\,°C$. Als Subtraktionsaufgabe sieht das so aus:

$$3-8=-5$$

Wird von einer kleineren Zahl eine größere subtrahiert, dann ergibt die Differenz stets eine negative Zahl. Mit solchen negativen Zahlen arbeiten wir jetzt auch beim Berechnen des *linearen Streuungsmaßes*.
Wir teilen uns den Weg in fünf Schritten ein und erläutern ihn am Beispiel der ersten Klassenarbeit, die bekanntlich die folgenden Ergebnisse brachte:

Zensur = Meßwert	Anzahl der Schüler = Häufigkeit
$x_1=1$	$h_1=1$
$x_2=2$	$h_2=12$
$x_3=3$	$h_3=4$
$x_4=4$	$h_4=2$
$x_5=5$	$h_5=1$

1. Schritt: Wir subtrahieren von jedem Meßwert den Mittelwert $x=2{,}5$.
Das ergibt die Differenzen

$$x_1-\bar{x}=1-2{,}5=-1{,}5$$
$$x_2-\bar{x}=2-2{,}5=-0{,}5$$
$$x_3-\bar{x}=3-2{,}5=+0{,}5$$
$$x_4-\bar{x}=4-2{,}5=+1{,}5$$
$$x_5-\bar{x}=5-2{,}5=+2{,}5$$

Das Vorzeichen dieser Differenzen ist teils positiv, teils negativ. Wenn wir die Streuung betrachten, so interessiert uns nicht, ob der einzelne Meßwert oberhalb oder unterhalb des Mittelwertes liegt. Wir suchen nach einer allgemeinen Aussage für alle Meßwerte, und deshalb beseitigen wir die Vorzeichen der berechneten Differenzen.
2. Schritt: Wir bilden von den Differenzen die absoluten Beträge.
Zur Erläuterung: Unter dem absoluten Betrag einer Zahl verstehen wir ihren Betrag ohne Vorzeichen; das mathematische Symbol dafür besteht aus zwei senkrechten Strichen. So ist der absolute Betrag von -4 gleich 4; symbolmäßig $|-4|=4$. Und für $+4$ heißt der absolute Betrag ebenfalls 4: $|4|=4$. Zwei Zahlen, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, haben also den gleichen absoluten Betrag. Zum Beispiel:
$|-3|=|+3|=3$. $|-3|$ wird gelesen als „absoluter Betrag von minus 3“. Mit den absoluten Beträgen rechnen wir wie mit positiven Zahlen.
Für unser Beispiel erhalten wir

$$|x_1-\bar{x}|=|-1{,}5|=1{,}5$$
$$|x_2-\bar{x}|=|-0{,}5|=0{,}5$$
$$|x_3-\bar{x}|=|+0{,}5|=0{,}5$$
$$|x_4-\bar{x}|=|+1{,}5|=1{,}5$$
$$|x_5-\bar{x}|=|+2{,}5|=2{,}5$$

3. Schritt: Wir multiplizieren die absoluten Beträge mit den Häufigkeiten der einzelnen Meßwerte.

$$h_1\cdot|x_1-\bar{x}|=\ 1\cdot 1{,}5=1{,}5$$
$$h_2\cdot|x_2-\bar{x}|=12\cdot 0{,}5=6{,}0$$
$$h_3\cdot|x_3-\bar{x}|=\ 4\cdot 0{,}5=2{,}0$$
$$h_4\cdot|x_4-\bar{x}|=\ 2\cdot 1{,}5=3{,}0$$
$$h_5\cdot|x_5-\bar{x}|=\ 1\cdot 2{,}5=2{,}5$$

4. Schritt: Wir addieren die im 3. Schritt berechneten Produkte.

$$1{,}5+6{,}0+2{,}0+3{,}0+2{,}5=15{,}0$$

5. Schritt: Wir dividieren die erhaltene Summe durch die Anzahl $n=20$ der teilnehmenden Schüler und erhalten das lineare Streuungsmaß s.

$$s=\frac{15{,}0}{20{,}0}=0.75$$

Um uns in diesen Rechenschritten zu üben, ermitteln wir gleich noch das lineare Streuungsmaß für die Ergebnisse der zweiten Mathematikarbeit. Wir kürzen jetzt den Schreibaufwand etwas ab, indem wir die einzelnen Schritte in einer Tabelle zusammenfassen. Der Mittelwert hieß auch hier $\bar{x}=2{,}5$.

Meßwert	Häufigkeit	*1. Schritt*
$x_1=1$	$h_1=10$	$x_1-\bar{x}=-1{,}5$
$x_2=2$	$h_2=2$	$x_2-\bar{x}=-0{,}5$
$x_3=3$	$h_3=2$	$x_3-\bar{x}=+0{,}5$
$x_4=4$	$h_4=0$	$x_4-\bar{x}=+1{,}5$
$x_5=5$	$h_5=6$	$x_5-\bar{x}=+2{,}5$

2. Schritt	*3. Schritt*
$\lvert x_1-\bar{x}\rvert=1{,}5$	$h_1\cdot\lvert x_1-\bar{x}\rvert=10\cdot 1{,}5=15{,}0$
$\lvert x_2-\bar{x}\rvert=0{,}5$	$h_2\cdot\lvert x_2-\bar{x}\rvert=2\cdot 0{,}5=1{,}0$
$\lvert x_3-\bar{x}\rvert=0{,}5$	$h_3\cdot\lvert x_3-\bar{x}\rvert=2\cdot 0{,}5=1{,}0$
$\lvert x_4-\bar{x}\rvert=1{,}5$	$h_4\cdot\lvert x_4-\bar{x}\rvert=0\cdot 1{,}5=0{,}0$
$\lvert x_5-\bar{x}\rvert=2{,}5$	$h_5\cdot\lvert x_5-\bar{x}\rvert=6\cdot 2{,}5=15{,}0$

4. Schritt: Summe $=32{,}0$

5. Schritt: $s=\dfrac{32{,}0}{20}=1{,}6$

Das lineare Streuungsmaß gibt an, um welche Größe jeder Meßwert durchschnittlich vom Mittelwert abweicht. Die Betonung bei diesem Satz liegt auf dem Wort „durchschnittlich“. Kein einziger Meßwert braucht dabei um genau den Betrag des Streuungsmaßes vom Mittelwert entfernt zu liegen, denn das Streuungsmaß ist eben eine für alle Meßwerte allgemeingültige Größe.
Für unsere beiden Mathematikarbeiten heißt das: Die einzelnen Zensuren streuen bei der ersten Arbeit durchschnittlich mit $s=0{,}75$, bei der zweiten mit $s=1{,}6$ um den gleichen Mittelwert $\bar{x}=2{,}5$. Ein großes Streuungsmaß zeigt, daß es bei den einzelnen Meßwerten große Unterschiede gibt – so wie bei der zweiten Arbeit: Von 20 Schülern erhielten zehn eine 1 und sechs eine 5.
Welches Ergebnis wünscht sich jeder Lehrer für eine Klassenarbeit? Mittelwert natürlich möglichst nahe bei 1 und ein sehr kleines Streuungsmaß, nicht größer als 1.
Ein solches kleines Streuungsmaß drückt aus, daß die Leistungen der einzelnen Schüler nicht allzuviel voneinander abweichen. Unsere Beispiele zeigen: Ohne mathematisch-statistische Berechnungen, ohne Untersuchung von Mittelwert und Streuungsmaß lassen sich die Noten einer Klassenarbeit nicht exakt deuten und auswerten.

Die folgende Aufgabe sollt ihr versuchen, selbständig zu lösen, um zu überprüfen, wieweit ihr in der Lage seid, kleinere statistische Betrachtungen anzustellen.

Arbeitskräfte im Kaufhaus

Ein Kaufhaus hat insgesamt 150 Mitarbeiter. Bedingt durch Urlaub, Krankheit, Haushalttage für Frauen, Freistellung zum Fernstudium und andere Gründe sind fast immer einige Arbeitskräfte abwesend. So betrug für den Verlauf einer Woche der tägliche Arbeitskräftebestand:

Montag	143 Mitarbeiter
Dienstag	138 Mitarbeiter
Mittwoch	147 Mitarbeiter
Donnerstag	142 Mitarbeiter
Freitag	136 Mitarbeiter
Sonnabend	140 Mitarbeiter

Berechne den durchschnittlichen Arbeitskräftebestand je Tag und das lineare Streuungsmaß!

Kombinatorik und binomischer Satz

Teil 2

Jetzt wollen wir uns die Lösung dieser Aufgaben noch einmal auf einem anderen Weg überlegen.

Der erste (z. B. der nach dem Alphabet erste) Spieler kann entweder kommen oder fehlen. Das sind zwei Möglichkeiten. Der zweite Spieler kann ebenfalls entweder kommen oder fehlen. Für beide Spieler gibt das insgesamt vier Möglichkeiten. Diese sind:

Möglichkeiten	1. Spieler	2. Spieler
1	nein	nein
2	ja	nein
3	nein	ja
4	ja	ja

Der dritte Spieler kann dabei fehlen (dann bleiben unsere vier Möglichkeiten) oder kommen (das ergibt noch einmal vier Möglichkeiten). Diese Überlegungen können wir für jeden Spieler fortsetzen. Auf diese Art und Weise vergrößert das Kommen oder Fehlen eines jeden folgenden Spielers die Anzahl der Möglichkeiten auf das Doppelte. Für 9 Spieler haben wir $2^9=512$ verschiedene Mannschaften. Darunter befindet sich als eine Möglichkeit die, daß alle 9 Spieler kommen, und als eine andere die, daß die Turnhalle leer bleibt.

Wenn man diese Überlegungen auf den Fall von n Spielern verallgemeinert, so erhält man die wichtige Formel:

$$C^0_n + C^1_n + \ldots + C^n_n = 2^n \quad \text{oder} \qquad (5)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C^k_n = 2^n \qquad (5a)$$

Aufgaben

▲23▲ Jeder von den 7 Studenten A, B, C, D, E, F, G kann zu einem Betriebspraktikum in eins von zwei Werken geschickt werden. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

▲24▲ In einer Klasse sind 29 Schüler. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Anwesenheit bzw. das Fehlen dieser Schüler in ihrem Klassenraum?

▲25▲ Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Aufteilung von acht verschiedenen Geldstücken in zwei Portemonnaies?

▲26▲ Wieviel verschiedene gerade Teiler besitzt die Zahl 2310?

▲27▲ Fünf Schüler möchten Fotos von sich haben. Neben den Einzelbildern und dem Gruppenfoto mit allen fünf Schüler wollen sie auch alle Bilder mit je zwei verschiedenen Schülern, alle mit je drei verschiedenen und alle mit je vier verschiedenen Schülern haben.

Wieviel Möglichkeiten für verschiedene Fotos gibt es?

Zusammenfassung von 1. bis 6.

Wir betrachten drei Arten von Vereinigungen: Permutationen, Variationen und Kombinationen.

a) Permutationen unterscheiden sich voneinander nur durch die Anordnung der Elemente;

b) Variationen unterscheiden sich voneinander durch die Anordnung der Elemente oder durch die Auswahl der Elemente;

c) Kombinationen unterscheiden sich voneinander nur durch die Auswahl der Elemente.

Bei den nachfolgenden Aufgaben ist zuerst die Art der jeweiligen Vereinigung festzustellen, und danach sind die Berechnungen auszuführen.

▲28▲ Am ersten Schultag begrüßten sich 20 Schüler mit Handschlag. Wieviel solcher Händedrücke gab es?

▲29▲ 20 Absolventen einer Schule beschlossen, zur Erinnerung jeweils ihre Fotos auszutauschen. Wie viele Fotos wurden dazu insgesamt benötigt?

▲30▲ Die Schüler einer Klasse werden in neun verschiedenen Fächern unterrichtet. Am 1. September sollen sie fünf verschiedene Unterrichtsstunden (Fächer) haben. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für das Aufstellen des Stundenplanes an diesem Tag?

▲31▲ Ein Unteroffizier muß 4 von 10 Soldaten für eine Streife auswählen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

▲32▲ An einer FDJ-Versammlung nehmen 15 Jugendfreunde teil. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Auswahl des Versammlungsleiters, seines Stellvertreters und des Sekretärs der Versammlung?

▲33▲ Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, aus 15 Menschen eine dreiköpfige Delegation auszuwählen?

7. In der Aufgabe 17b wurde die Gültigkeit der folgenden wichtigen Formel bewiesen:

$$C^k_{p+1} = C^k_p + C^{k-1}_p \qquad (6)$$

Da die beiden folgenden Beziehungen gelten:

$$C^0_k = C^k_k = 1 \quad \text{und} \quad C^1_k = k,$$

erhalten wir:

$$C^2_3 = C^1_2 + C^2_2 = 2+1 = 3$$

$$C^2_4 = C^1_3 + C^2_3 = 3+3 = 6 \quad \text{usw.}$$

Die erhaltenen Ergebnisse kann man in Form einer Tabelle der Anzahl der Kombinationen aufschreiben, wobei in der k-ten Zeile die Anzahl der Kombinationen aus k Elementen steht, wie z. B.

$$C^5_7 = C^4_6 + C^5_6 = 15+6 = 21$$

Anzahl der Kombinationen

von	zu je 0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Bemerkung: Die erhaltene Tabelle heißt arithmetisches Dreieck oder Pascalsches Dreieck.

▲34▲ Setze die Tabelle bis zur 12. Zeile fort!

8. Wenn wir zwei zweigliedrige Ausdrücke (Binome) miteinander multiplizieren, so erhalten wir:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

Bei drei Binomen ergibt sich:

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

Jetzt wollen wir n solche Binome miteinander multiplizieren:

$$P_n(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p) \qquad (7)$$

Durch Ausklammern und Zusammenfassen erhalten wir ein Polynom, das wir nach fallenden Potenzen von x anordnen:

$$P_n(x) = \begin{cases} x^n \\ -x^{n-1}(a+b+c+\ldots+p) \\ +x^{n-2}(ab+ac+bc+\ldots) \\ -x^{n-3}(abc+abd+\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^n abc\ldots p \end{cases}$$

oder kürzer:

$$P_n(x) \qquad (7a)$$
$$= S_0x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + \ldots + S_n$$

Man kann leicht feststellen, daß

a) der erste Koeffizient S_0 dieses Polynoms $P_n(x)$ gleich 1 ist;

b) die einzelnen Glieder Koeffizienten mit abwechselnden Vorzeichen besitzen;

c) jeder Koeffizient S_k gleich der Summe aller möglichen Produkte der zweiten Glieder der unter (7) angegebenen Binome ist, und zwar mit je k Faktoren in jedem Produkt.

Aufgabe

▲35▲ Klammere aus, und fasse das Polynom nach fallenden Potenzen von x zusammen:

a) $(x-2)(x-3)(x-4)$

b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

c) $(x-1)(x+2)(x+4)(x-5)$

d) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x+2)$

Bemerkung: Wenn $P_n(x)=0$, so erhalten wir durch Ausklammern eine Gleichung n-ten Grades bezüglich x. Sie besitzt genau die n folgenden Lösungen: $x_1=a$, $x_2=b$ usw. ,weil diese eine der im Ausdruck (7) stehenden Klammern zu Null werden lassen. Solche Gleichungen wollen wir in diesem Artikel nicht betrachten.

9. Im Ausdruck (7) seien nun alle zweiten Glieder in den Klammern untereinander gleich, d. h.

$$P_n(x)=(x-a)^n$$

Dann ist klar, daß

$S_0=1$

$S_1=(a+a+a+\ldots+a)=na$

$S_2=(a^2+a^2+a^2+\ldots+a^2)=C_n^2a^2,$

weil es in der Klammer soviel Summanden gibt, soviel Möglichkeiten von Produkten mit zwei Faktoren aus n Faktoren existieren, nämlich C_n^2

$S_3=C_n^3a^3$

$S_4=C_n^4a^4$ usw.

Der „allgemeine" (an $(k+1)$-ter Stelle stehende) Koeffizient ist

$$C_n^ka^k.$$

Schließlich erhalten wir als letzten Koeffizienten a^n.

Zusammenfassend ergibt sich hieraus:

$$(x-a)^n=x^n-nax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}-C_n^3a^3x^{n-3}+\ldots+(-1)^kC_n^ka^kx^{n-k}+\ldots+(-1)^na^n \qquad (8)$$

Die Formel (8) heißt Zerlegungsformel des Newtonschen Binoms und wird zum Potenzieren des Binoms $(x-a)$ mit natürlichen Exponenten benutzt. In dieser Formel hat das $(k+1)$-te Glied die folgende Form:

$$T_{k+1}=(-1)^kC_n^ka^kx^{n-k} \qquad (9)$$

Newton selbst hat eine andere Formel hergeleitet, so daß die hier benutzte Benennung dieser Formel nicht ganz gerechtfertigt ist. Oft nennt man diese Formel einfach binomischen Lehrsatz oder die binomische Formel.

In der Praxis benötigt man oft irgendeins der Zerlegungsglieder. Man kann es bestimmen, ohne die ganze Zerlegung aufzuschreiben.

Bemerkung: 1. Beim Potenzieren (mit natürlichen Exponenten) der Summe $(x+a)$ werden alle Zerlegungsglieder positiv.

2. Unter „x" und „a" kann man eine beliebige Zahl bzw. einen beliebigen Term n verstehen, z. B.

a) $(x+a)^6 = x^6+6ax^5+C_6^2a^2x^4+C_6^3a^3x^3+C_6^4a^4x^2+C_6^5a^5x+a^6$
$= x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$

b) $(3x-2a)^5=(3x)^5-5\cdot 2a(3x)^4+C_5^2(2a)^2(3x)^3-C_5^3(2a)^3(3x)^2+C_5^4(2a)^43x-(2a)^5$
$=243x^5-810ax^4+1080a^2x^3+720a^3x^2+240a^4x-32a^5$

Wir wollen nun noch einige Eigenschaften der Formel (8) zusammenstellen:

1. die Anzahl der Zerlegungsglieder ist um 1 größer als der Exponent n;

2. der Exponent der ersten Zahl (x) nimmt ab, und der Exponent der zweiten Zahl (a) wächst von Glied zu Glied jeweils um 1; die Summe der Exponenten ist in allen Gliedern gleich n;

3. die Koeffizienten der Glieder, die gleichweit vom Anfang und vom Ende der Zerlegung entfernt sind, sind untereinander gleich (das sind gerade die Zahlen aus der entsprechenden Zeile des Pascalschen Dreiecks);

4. die Summe aller Binomialkoeffizienten ist gleich 2^n, vgl. mit der Formel (5);

5. die Summe aller Binomialkoeffizienten der geradzahligen Glieder ist gleich der Summe der Binomialkoeffizienten der ungeradzahligen Glieder; jede dieser Summen ist gleich 2^{n-1}.

Aufgaben

▲36▲ Beweise die Eigenschaften 1., 3., 4. und 5.!

Hinweis: Benutze zum Beweis von 4. und 5. den binomischen Lehrsatz für $(1+1)^n$ und $(1-1)^n$.

▲37▲ Zerlege:

a) $(2a^2-3a)^5$ b) $(1-\sqrt{2})^6$

c) $(2\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x})^4$

▲38▲ Bestimme

a) das neunte Glied der Zerlegung $(a+\sqrt{b})^{12}$

b) das sechste Glied der Zerlegung $(a^2-b^3)^{13}$

10. Musteraufgabe 6:

Bestimme das Zerlegungsglied von $(\sqrt{y}-\sqrt[4]{y})^{20}$, das y^7 enthält!

Lösung:

Dazu schreiben wir uns das allgemeine Zerlegungsglied auf:

$$T_{k+1}=C_{20}^k(\sqrt[4]{y})^k(\sqrt{y})^{20-k}=C_{20}^ky^{\frac{k}{4}}y^{\frac{20-k}{2}}=C_{20}^ky^{\frac{40-k}{4}}$$

Nach der Aufgabenstellung gilt:

$$y^{\frac{40-k}{4}}=y^7, \text{ d. h. } \frac{40-k}{4}=7.$$

Hieraus ergibt sich $k=12$ und das gesuchte Glied hat die Form:

$$T_{12+1}=C_{20}^{12}y^7=C_{20}^8y^7=216970y^7$$

Musteraufgabe 7:

In der Zerlegung $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$ verhält sich der Koeffizient des fünften Gliedes zum Koeffizienten des dritten Gliedes wie 7 : 2.

Bestimme das Zerlegungsglied, das x in der ersten Potenz erhält!

Lösung:

1. Aus der Aufgabenstellung folgt, daß

$$\frac{C_n^4}{C_n^2}=\frac{7}{2} \text{ oder}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n(n-1)}=\frac{7}{2}$$

Daraus ergibt sich, daß $n=9$.

2. Das allgemeine Zerlegungsglied lautet:

$$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k(\sqrt{x})^{9-k}=C_9^kx^{-\frac{2k}{3}}x^{\frac{9-k}{2}}$$

Da wir das Glied suchen, das x in der ersten Potenz enthält, gilt:

$$-\frac{2k}{3}+\frac{9-k}{2}=1$$

Daraus ergibt sich, daß $k=3$.

3. Das gesuchte Glied ist

$$T_{3+1}=C_9^3x^1=84x$$

Aufgaben

▲39▲ In der Zerlegung $\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$ verhält sich der Koeffizient des vierten Gliedes zum Koeffizienten des sechsten Gliedes wie 5 : 18. Bestimme in dieser Zerlegung das Glied, das kein z enthält!

▲40▲ Bestimme das Glied der Zerlegung $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$, das nach der Vereinfachung z^5 enthält, wenn die Summe der Binominalkoeffizienten dieser Zerlegung gleich 128 ist!

▲41▲ Es sei das folgende Polynom gegeben:

$$x(1-x)^{10}+x^2(1-2x)^{20}+x^3(1-3x)^{30}$$

Bestimme den Koeffizienten des Gliedes, das x^4 enthält, nachdem alle genannten Operationen ausgeführt worden sind!

▲42▲ Das zweite, dritte und vierte Glied der Zerlegung $(x+y)^z$ ist gleich 240, 720 bzw. 1080. Bestimme x, y und z!

▲43▲ Leite den binomischen Lehrsatz für $(x+a)^n$ her unter Benutzung der Methode der vollständigen Induktion über n!

Hinweis: Benutze die Formel (6).

11. Musteraufgabe 8:

Berechne $1{,}002^5$ mit einer Genauigkeit bis zu 0,000001!

Lösung:

$(1+0{,}002)^5=1^5+5\cdot 1^4\cdot 0{,}002$
$+10\cdot 1^3\cdot 0{,}002^2+10\cdot 1^2\cdot 0{,}002^3$
$+5\cdot 1^1\cdot 0{,}002^4+0{,}002^5$
$=1+0{,}01+0{,}00004+0{,}00000008$
$+0{,}00000000008+0{,}000000000000032$
$\approx 1{,}01004$

Wenn der zweite Summand in einem Binom wesentlich kleiner ist als der erste, so sind die Zerlegungsglieder, die diesen Summanden in hohen Potenzen enthalten, fast Null. Bei Berechnungen mit einer vorgegebenen Genauigkeit können wir diese Glieder dann vernachlässigen, wenn sie nicht mehr in dem vorgegebenen Genauigkeitsintervall liegen.

▲44▲ Berechne

a) $0{,}997^4$ mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-6}!

b) $1{,}04^6$ mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-4}!

Bemerkung: Wenn die Größe x sehr klein ist, so benutzt man für Näherungsrechnungen oft die Formel

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$$

A. Halameisär

Combinatorial Problems

▲1▲ There are five roads leading from city A to city B, and three from B to C. How many routes passing through B lead from A to C?

▲2▲ There are five types of envelopes without postage stamps and four types of postage stamps of the same value. In how many ways can we choose an envelope with a postage stamp?

▲3▲ Choose one textbook each out of 3 algebras, 7 geometries and 7 trigonometry books. In how many ways can this be done?

▲4▲ In how many ways is it possible to make a tricolour flag if there is bunting of 5 different colours? The same, only one of the strips has to be red.

▲5▲ One person has 7 mathematics books, another has 9 books. In how many ways can they exchange their books, one for one!

▲6▲ A committee of 9 is elected. They elect a chairman, vice-chairman, secretary and treasurer. In how many ways can this be done?

▲7▲ Mother has 2 apples and 3 pears. Every day, for five days running, she gives me one piece of fruit. In how many ways can this be done?

▲8▲ There are n telephone subscribers. In how many ways is it possible to connect three pairs simultaneously?

▲9▲ There are 12 girls and 15 boys at a school ball. In how many ways can we form 4 pairs in a dance?

▲10▲ In how many ways can 5 different rings be put on four fingers of one hand?

Olympiadeaufgaben aus der Demokratischen Republik Vietnam

(Republikausscheid 1974)

Seit einigen Jahren haben zunehmend mehr junge Vietnamesen die Möglichkeit, am *Herder-Institut* der Karl-Marx-Universität Leipzig einen etwa zehnmonatigen Vorbereitungslehrgang zu absolvieren. Während dieser Zeit vervollkommnen unsere vietnamesischen Freunde ihre in Hanoi erworbenen Kenntnisse der deutschen Sprache und machen sich mit den Besonderheiten der Fachsprache der einzelnen Unterrichtsfächer (Ma, Ph, Ch, Bio bzw. Gesellschaftswissenschaften) vertraut. Im jeweils folgenden Studienjahr beginnen sie dann das Studium an einer Hoch- oder Fachschule der DDR.

Seit dem Schuljahr 74/75 nehmen die besten vietnamesischen Studenten des *Herder-Institutes* an den Mathematikolympiaden der DDR teil. Sie errangen bei der Bezirksolympiade im vergangenen Schuljahr einen 2. und 3. Preis in Klassenstufe 11, in diesem Jahr demonstrierten sie den hohen Stand der Förderung mathematischer Talente in ihrer Heimat mit drei ersten und zwei zweiten Preisen in Klassenstufe 12.

Le Viet Thai, zur Zeit Student an der Bergakademie Freiberg, stellt uns die vorliegenden Aufgaben zur Verfügung. *Ch. Werge*

Aufgaben Klassenstufe 7

1. Tag

1. Beweise für alle natürlichen Zahlen n!
$$24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

2. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung ($x \in R$)!
$$x - a^2x + a - \frac{b^2}{b^2 - x^2} = \frac{x^2}{x^2 - b^2}$$

3. Bestimme alle zweistelligen natürlichen Zahlen $10a + b$ (a, b Ziffern), für die gilt:
$$(10a + b)^2 = (a + b)^3!$$

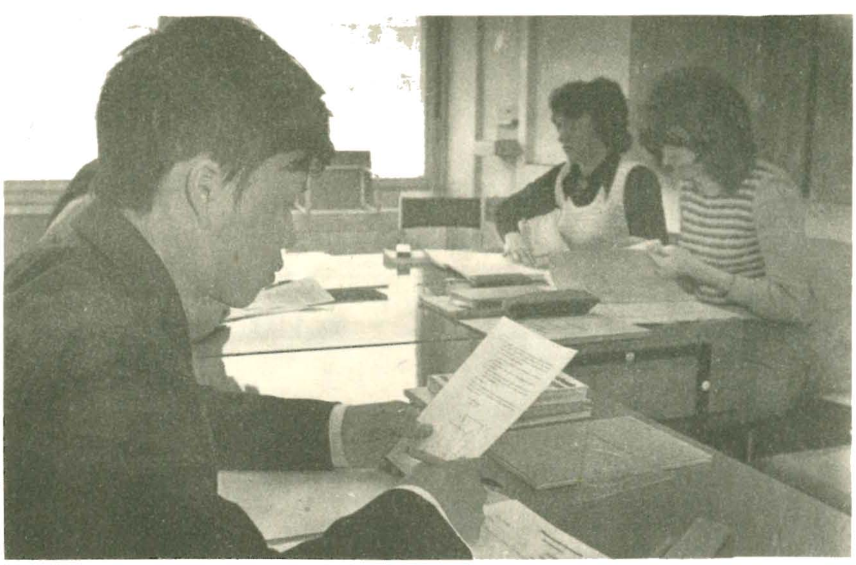
2. Tag

4. Einige ältere Bürger wollen 10 Bäume pflanzen. Diese Bäume bilden 5 Zeilen und jede Zeile hat genau 4 Bäume. Sie haben sechs Möglichkeiten gefunden. Bestimme die sechs Möglichkeiten!

5. Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ aus folgenden Bestimmungsstücken!
$\overline{AB} = a$; $\overline{AC} + \overline{BD} = m$; $\sphericalangle(AC, BD) = \alpha$

6. In einem spitzwinkligen $\Delta\, ABC$ liegt ein $\Delta\, A'B'C'$ mit $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{AC}$ und $C' \in \overline{AB}$. Bestimme das Dreieck $\Delta\, A'B'C'$, das den kleinsten Umfang hat!

Vietnamesische Studenten des Herder-Instituts Leipzig und sowjetische Schüler nahmen an der Bezirksolympiade des Bezirks mit großem Erfolg teil.



Übung macht den Meister

Quadratische Funktionen

Aus Abschlußprüfungen der Oberschulen der DDR

1976

a) Durch die Gleichung

$$y=x^2-6x+5 \qquad (x \in P)$$

ist eine Funktion bestimmt.

Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Geben Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes an!

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall

$$0 \leqq x \leqq 6!$$

b) Durch die Gleichung

$$y=x^2-6x+q \qquad (x, q \in P)$$

sind Funktionen gegeben.

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen q, die man in die Funktionsgleichung einsetzen kann, so daß die damit bestimmten Funktionen keine Nullstellen haben!

1975

Durch $y=\frac{1}{x^2}$ $\qquad (x \in P;\ x \neq 0)$

ist eine Funktion gegeben.

a) Berechnen Sie deren Funktionswerte y für die in der Tabelle vorgegebenen Argumente x! (Doppelbrüche sind in gemeine Brüche umzuformen.)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+\frac{5}{2}$
y							

(Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)

b) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

c) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatesystem den Graphen der Funktion

$$y=x^2 \qquad (x \in P)!$$

d) Geben Sie die Koordinaten derjenigen Punkte an, die sowohl zum Graphen der Funktion $y=\frac{1}{x^2}$ als auch zu dem der Funktion $y=x^2$ gehören!

1974

Durch die Gleichung $y=x^2-2$ ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Parabel.

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

b) Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes an, und zeichnen Sie die Parabel!

c) Verschieben Sie die Parabel so, daß ihr Scheitelpunkt die Koordinaten $x_s=0$, $y_s=3$ hat!

(Zeichnen Sie die verschobene Parabel in dasselbe Koordinatensystem, das Sie bei Teilaufgabe b) benutzt haben!)

d) Geben Sie die Gleichung der Funktion an, deren Graph durch die Verschiebung entstanden ist!

1973

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y=x^3$ $(x \in P)$. Berechnen Sie für diese Funktion die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte!

x	2	3	-1	
y				125

1972

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen

(1) $\quad f_1(x)=y=2x+1,$

(2) $\quad f_2(x)=y=x^2+2x-3 \qquad$ mit $x \in P$.

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

b) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f_1!

c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel.

Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!

d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!

e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!

1971

a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Koordinateneinheit 1 cm) die Graphen der Funktionen mit Gleichungen der Form $y=ax^2$ (x reell) für

1. $a=1$ $\qquad$ 2. $a=\frac{1}{2}$ $\qquad$ 3. $a=-1$

mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq +3$!

b) Geben Sie den Wertebereich von Funktionen mit Gleichungen der Form $y=ax^2$ $(a<0)$ an, wenn der Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen (d. h. $-\infty<x<+\infty$) ist!

1970

a) Eine quadratische Funktion habe eine Gleichung der Form

$$y=(x+d)^2+e. \qquad (x \text{ reell})$$

Geben Sie für den Fall $d=0$ und $e=3$ die Scheitelpunktskoordinaten des Graphen der Funktion an!

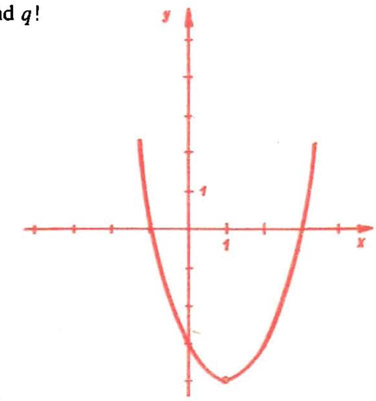
b) Die nachstehend dargestellte Parabel sei der Graph einer weiteren quadratischen Funktion mit einer Gleichung von der Form

$$y=(x+d)^2+e \qquad (x \text{ reell})$$

1. Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme der obenstehenden Abbildung die Nullstellen x_1 und x_2 dieser Funktion!

2. Geben Sie die Gleichung dieser speziellen quadratischen Funktion in der Form $y=(x+d)^2+e$ an!

3. Überführen Sie nunmehr diese Gleichung der Funktion in eine Gleichung der Form $y=x^2+px+q$, und bestimmen Sie hieraus p und q!



1969

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2-ax+c=0 \qquad (a, c, x \text{ reell}).$$

a) Geben Sie für diese Gleichung die Diskriminante an!

b) Geben Sie die Anzahl aller reellen Lösungen der Gleichung für folgende zwei Fälle an:

(1) $\quad a=0$ und $c=\frac{1}{5}$ $\qquad$ (2) $\quad c=\frac{a^2}{4}$

Begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe der Diskriminante!

1968

Die Gleichung einer quadratischen Funktion lautet $y=(x-2)^2-1;$ $\qquad$ (x reell)

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Bereich $1 \leqq x \leqq 5$!

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!

Zur Übung

Gegeben ist die quadratische Funktion mit der Gleichung

$$y=x^2-6x+5 \qquad (x \in P).$$

a) Zeichnen Sie das Bild dieser Funktion!

b) Geben Sie den Wertebereich an!

c) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab!

d) Überprüfen Sie die Richtigkeit der für die Nullstellen ermittelten Werte rechnerisch!

e) Berechnen Sie, welcher Funktionswert y in dieser Funktion dem Argument $x=2$ zugeordnet ist!

Von dem Graphen einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y=x^2+px+q$ $(x \in P)$ ist der Scheitelpunkt $S(-3;\ -4)$ gegeben.

a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Intervall $-6 \leqq x \leqq 0$!

b) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion!

c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion für den gesamten Definitionsbereich $(x \in P)$ an!

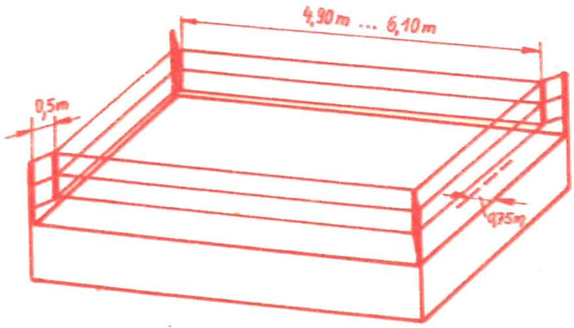
d) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab!

e) Ermitteln Sie die Nullstellen auch rechnerisch und vergleichen Sie sie anschließend mit den aus der Zeichnung gefundenen Werten!

Mathematik und Sport

alpha-Wandzeitung

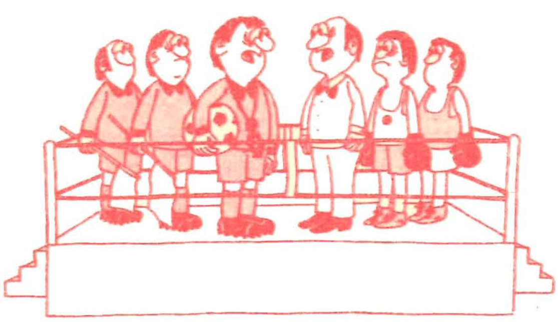
▲1▲ Ein quadratischer Boxring hat die in der Abbildung angegebenen Abmessungen und ist mit einem 1 cm dicken Fußbodenbelag ausgelegt.



a) Wieviel m^2 beträgt die minimale und die maximale Kampffläche zwischen den Seilen?

b) Wieviel m^2 Fußbodenbelag sind mindestens bereitzustellen?

c) Wieviel m Seil sind maximal zur Bespannung nötig (wobei die Abmessungen der Pfosten vernachlässigt werden sollen)?

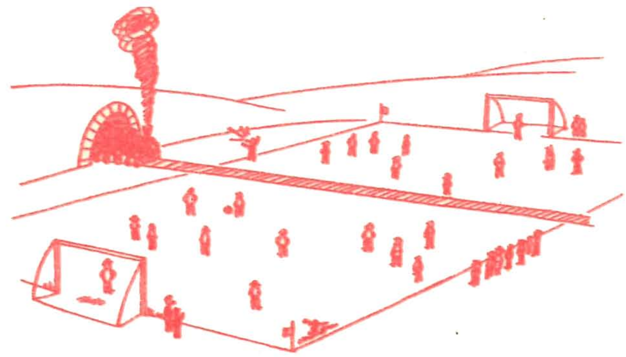


„Wer hat den Veranstaltungsplan aufgestellt?"

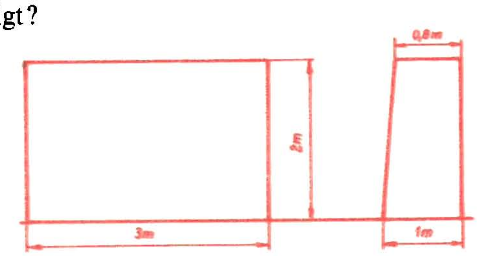
▲2▲ Das Spielfeld beim Hallenhandball besitzt einen Torraum, dessen Begrenzungslinie 6 m von der Grundlinie (auf der Breite des Tores) bzw. 6 m von den Torpfosten entfernt ist.
Das Tor ist 3 m breit.

a) Berechne den Flächeninhalt des Torraumes und die Länge der Begrenzungslinie!

b) Wieviel Prozent der Fläche des $40 \times 20\ m^2$ großen Hallenhandballfeldes nehmen die beiden Torräume ein?



▲3▲ Ein Hallenhandballtor hat die aus der Skizze ersichtlichen Abmessungen.
Wieviel m^2 Netz werden für die Bespannung benötigt, wenn man die Dicke der Begrenzungspfosten vernachlässigt?



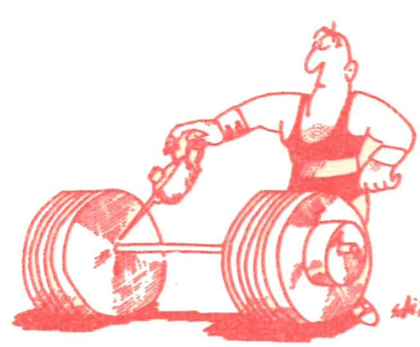
▲4▲ Ein Handball muß einen Umfang von 58 bis 60 cm haben. Berechne sein kleinstes und sein größtes Volumen, wenn ideale Kugelform angenommen wird!

▲5▲ Die Eisenstange einer Scheibenhantel wiegt 20 kg und ist 220 cm lang.
Berechne

a) ihren Durchmesser;

b) den äußeren Durchmesser einer auf sie aufschiebbaren Scheibe von 50 kg Gewicht, wenn die Scheibe 10 cm dick ist!

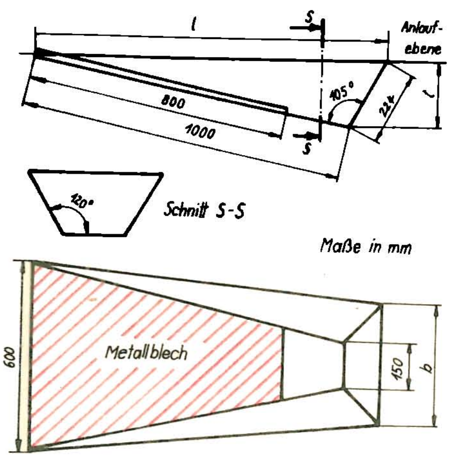
$$\left(\varrho_{Fe} = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}\right)$$



▲6▲ Der Einstichkasten für den Stabhochsprung hat folgende Form und Abmessungen:
Berechne

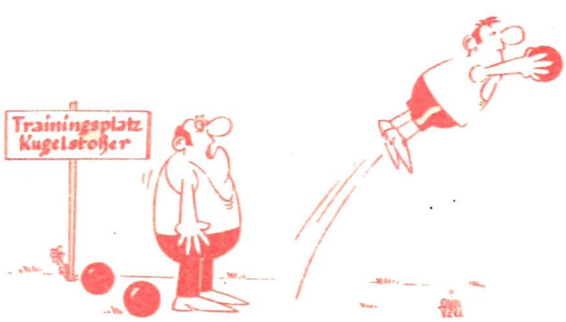
a) die Länge l des Kastens in der Anlaufebene,

b) seine größte Tiefe t,



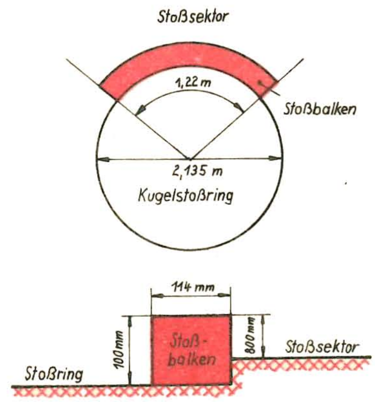
c) seine Breite b am Ende des Kastens in der Anlaufebene,
d) die Fläche des Metallbleches, das den vorderen Teil des Kastenbodens schützt,
e) die Oberfläche des Körpers, der vom Einstichkasten und der Anlaufebene begrenzt wird!

▲7▲ Die Kugel für das Kugelstoßen der Männer wiegt 7,257 kg, ihr minimaler Durchmesser beträgt 110 mm, ihr maximaler 130 mm. Sie besteht entweder aus massivem Eisen $\left(\varrho_{Fe} = 7{,}8\frac{g}{cm^3}\right)$ oder es ist eine Bleikugel $\left(\varrho_{Pb} = 11{,}3\frac{g}{cm^3}\right)$ mit Eisenmantel.
Berechne
a) den Durchmesser einer massiven Eisenkugel,
b) den maximalen Durchmesser der inneren Bleikugel, damit die gesamte Kugel noch den Wettkampfbestimmungen entspricht!



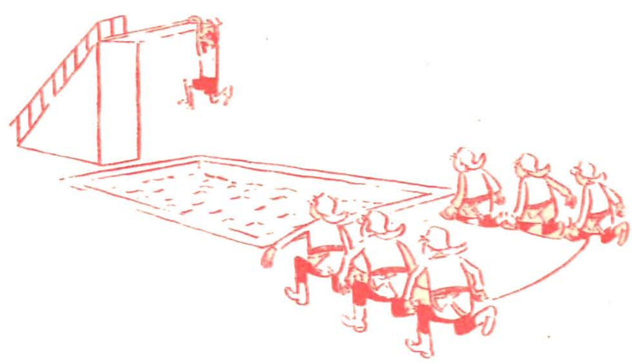
„Loooslassen!!"

▲8▲ Das Kugelstoßen erfolgt aus einem Kreis mit 2,135 m Durchmesser heraus. Dieser Kugelstoßring wird an seiner Vorderseite von einem Stoßbalken aus Holz begrenzt, dessen Abmessungen den Skizzen zu entnehmen sind:
Welche Fläche des Stoßbalkens ist
a) von oben,
b) vom Kugelstoßring aus,
c) vom Stoßsektor aus
zu sehen (ohne Stirnflächen!)?

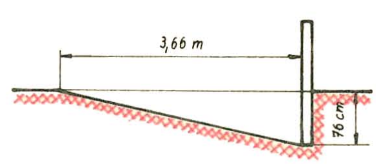


▲9▲ Eine 2,75 m breite und 9 m lange Sprunggrube soll mit frischem Sand so aufgefüllt werden, daß der Sand 50 cm hoch liegt.
Wieviel t Sand sind anzufahren $\left(\text{Dichte von trockenem Sand } \varrho = 1{,}6\frac{g}{cm^3}\right)$?

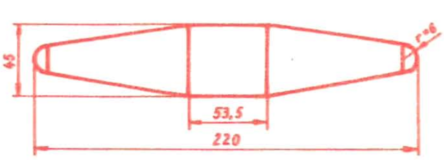
▲10▲ Ein Absprungbalken für Weit- bzw. Dreisprung hat folgende Mindestmaße: Länge 1,22 m; Breite 0,20 m; Höhe 0,10 m.
Berechne das Volumen des Balkens!



▲11▲ Der Wassergraben des 3000-m-Hindernislaufes hat die in der Zeichnung angegebenen Abmessungen.
Welche Neigung hat der Grabenboden?

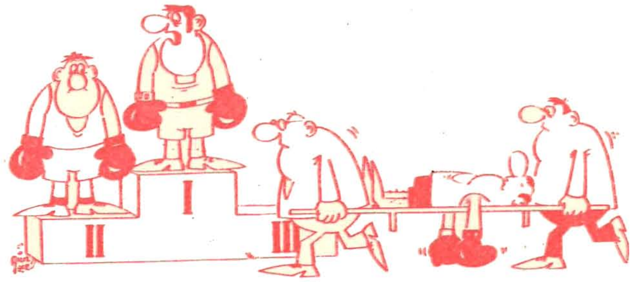


▲12▲ Ein Diskus für Männer hat folgenden Querschnitt (Maße in mm):



Berechne die Fläche dieses Querschnittes! *Ch. Pollmer*

In freien Stunden alpha heiter



„Immer die Warterei auf den Dritten!"

Wer nimmt das letzte Hölzchen?

Fordere einen Freund auf, sich mit dir in ein *Hölzchenduell* einzulassen! Du hast dabei nichts zu befürchten, es sei denn, dein Partner kennt diese Knobelei. Schütte die Hölzchen auf den Tisch, und reihe sie nebeneinander! Jeder – dein Freund und du – darf jetzt abwechselnd ein bis drei Hölzchen aufnehmen. Derjenige, dem es beschieden ist, das letzte Hölzchen aufzunehmen, hat die Knobelei verloren.

Du wirst immer gewinnen, wenn du die Hölzchen unauffällig zählst und darauf achtest, daß dein Freund dann aufnehmen muß, wenn 49, 45, 41, 37, 33, 29, 25, 21, 17, 13, 9, 5 Hölzchen liegen. Du wirst also immer so aufnehmen, daß du deinem Partner die erwähnten Stückzahlen servieren kannst.

Ein Beispiel: Du bist am Zuge. Es liegen 23 Hölzchen vor dir. 2 nimmst du auf, es verbleiben 21. Dein Freund nimmt 3 auf, du begnügst dich mit einem, 17 Hölzchen verbleiben noch. 1 nimmt dein Freund, jetzt bist du nicht so bescheiden, du nimmst gleich 3 Stück auf. Es verbleiben 13. Dein Freund nimmt 2 Hölzchen, du auch. 9 Hölzchen liegen noch auf dem Tisch. 3 nimmt dein Freund, du hebst 1 auf. Jetzt kommt der Endkampf. 5 Hölzchen sind noch vorhanden. Dein Freund kann 1, 2 oder 3 aufnehmen, du hast immer die Möglichkeit, so aufzuheben, daß für ihn 1 übrigbleibt.

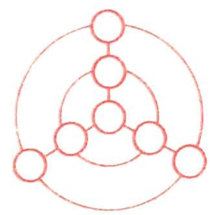
Hast du im *Duell* einmal eine der angeführten Richtzahlen erreicht, zum Beispiel 33, so ist es für dich einfach, die Knobelei zu steuern. Nimmt nämlich dein Partner 3 Hölzchen auf, so begnügst du dich mit 1. Reichen deinem Freund 2 Hölzchen, so nimmst auch du 2 auf. Genügt deinem Freund jedoch 1 Hölzchen, so kassierst du 3. Wenn du so verfährst, wird deinem Freund immer das letzte Hölzchen vorbehalten sein.

Magische Kreise

Die Zahlen 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13 sollen so in die Figur eingesetzt werden, daß die Summe der drei Zahlen, die auf demselben Kreis oder derselben Geraden liegen, stets gleich ist. (Jede Zahl ist dabei nur einmal zu verwenden.)

Bestimme die Summe der drei Zahlen, und trage, unter Beachtung der gestellten Forderung, die Zahlen ein!

Fachberater f. Math. H. Kampe, OS Neuseddin



Die Mückenfamilie

Von einer Mückenfamilie ist folgendes bekannt:

(1) Der Mückenvater, seine Eltern, seine Tante *Mucki* und sein Großvater *Surrefein* leben zusammen.

(2) Die Mückenmutter hat ihre drei Schwestern und ihre vier Brüder mitgebracht. Auch ihr Vater ist noch in der Familie *Flatterflügel*.

(3) Die Mückenmädchen sind 4mal soviel wie die Mückenjungen, wenn der Mückenjunge *Kugelbauch* abgezogen wird.

(4) Die Anzahl der Mückenkinder ist kleiner als 23, aber größer als 18.

a) Wieviel Mitglieder hat die gesamte Mückenfamilie?

b) Wieviel Mückenmänner, Mückenfrauen, Mückenjungen und Mückenmädchen gibt es?

c) Wie groß ist die Anzahl der Mückenkinder?

Katrin Pohl, Lugau (13 Jahre alt)

Interessante Brüche

Wenn man zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ den Nenner addiert, dann verdoppelt sich der Wert des Bruches:

$$\frac{1+3}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Es ist der Bruch zu suchen, dessen Wert sich bei der Addition des Nenners zum Zähler und Nenner a) verdreifacht, b) vervierfacht.

aus: „Mathe zur Unterhaltung", Moskau

A vanishing Number

In einer alten Sprachzeitschrift stand das folgende Rätsel:
A vanishing Number –
There is a number of three figures, in value not very far short of a thousand, but when halved its value is nothing.
What is it?
Solution –
The number is 888. When halved it becomes
$\frac{000}{000} = 0.$

Das Rätsel enthält grundlegende Fehler. Welche sind es? *Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Netzschkau*

Silbenrätsel

ben – chen – e – e – ein – fer – fläch – gral – heits – in – ka – kel – kreis – kur – läu – ma – mul – nal – nen – ner – ner – nus – o – pli – ra – satz – si – te – ti – tion – ti – ve – win.

1. Er wird bestimmt durch eine Drehung, die zwei von demselben Punkt ausgehende Strahlen ineinander überführt.
2. Summe von unendlich vielen Differenzen
3. Teil des Bruches
4. Bild einer Funktion
5. Kreis mit dem Radius 1
6. Teil des Rechenstabes
7. Rechenoperation
8. Eine transzendente Zahl
9. Beweisbare Aussage
10. Winkelfunktion
11. Bezeichnung für Körper mit nur ebenen Begrenzungsflächen
12. Nenner eines Bruches von der Wurzel befreien.

Die ersten Buchstaben der 12 gefundenen Wörter ergeben ein Zeichengerät.

Dipl.-Lehrer Dieter Völzke, Greifswald

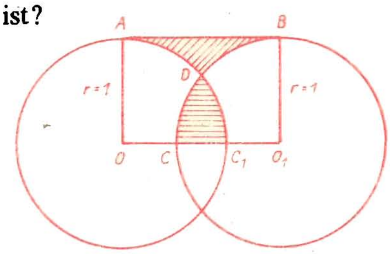
Der geheimnisvolle Schatz

Sterbend trug ein alter Pirat seinem Enkel auf, einen versteckten Schatz zu holen: „Der Schatz liegt auf einer Insel. Du findest ihn, wenn du dich nach drei Punkten orientierst: einem Turm, einer Eiche und einem hohen Ahornbaum. Geh vom Turm zur Eiche und von da nach rechts unter einem rechten Winkel genau so weit wie vom Turm bis zur Eiche! Stecke da einen Stab in die Erde! Dann geh vom Turm zum Ahorn und von da nach links unter einem rechten Winkel so weit wie vom Turm zum Ahorn! Stecke auch da einen Stab in die Erde! In der Mitte zwischen den beiden Stäben liegt der Schatz vergraben."
Der Enkel kam auf die Insel, fand Eiche und Ahorn. Vom Turm fehlte jede Spur. Wie soll er nun den Schatz finden? Kannst du ihm helfen?

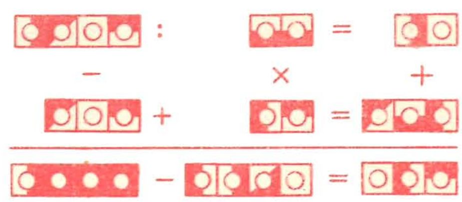
aus: Quant 1/75, Moskau

Denkökonomie

Wie groß ist die Strecke $\overline{00_1}$ in dem abgebildeten geometrischen Problem, wenn die schraffierten Flächen gleich groß sind und der Radius der Kreise jeweils $r = 1$ ist? *Krudetski*



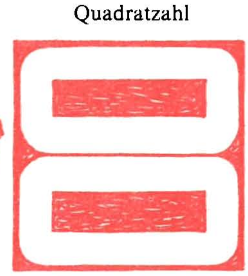
Zahlenrätsel im Oktalsystem



aus: Wurzel 12/75


Kegelmantel


eingeschlossener Winkel


Quadratzahl


Winkel an der Spitze

Über die Aufgabe, die Anzahl isomerer chemischer Verbindungen zu finden

Die Frage, wie zum Beispiel bei gesättigten Kohlenwasserstoffen, C_nH_{2n+2}, die Anzahl der isomeren Verbindungen gefunden werden kann, wird im Chemieunterricht nicht behandelt. Wer sich einmal mit dieser Frage beschäftigt hat, weiß, daß sie nicht ganz einfach zu beantworten ist. Die entsprechende Zahlenfolge (in Abhängigkeit von der Anzahl n der C-Atome) ist in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Tabelle 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_nH_{2n+2}	1	1	1	2	3	5	9	18	35

	10	11	12	13...
	75	159	355	802...

Prüft, ob es sich um
a) eine arithmetische Folge 1. Ordnung,
b) eine geometrische Folge,
c) eine arithmetische Folge m-ter Ordnung ($m>1$),
d) die Folge der FIBONACCIschen Zahlen
handelt!

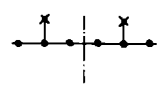
Ein Bildungsgesetz ist nicht ohne weiteres zu erkennen.

Wir können die Strukturformeln der Isomeren systematisch entwickeln, indem wir die Hauptkette um 1; 2; 3; ... C-Atome verkürzen und Seitenketten mit beziehentlich 1; 2; 3; ... C-Atomen angliedern. Dabei sind bei der Hauptkette und auch bei den Seitenketten alle möglichen und zulässigen Verzweigungen bzw. Kombinationen zu berücksichtigen.

Beispiel: C_7H_9

(Wir stellen nur das Gerüst der C-Atome dar, wobei wir diese in der Hauptkette symbolisch mit einem Punkt, in den Seitenketten mit einem Kreuz bezeichnen.)

Wir müssen Symmetrien beachten. Die beiden Formen sind zueinander symmetrisch (in bezug auf die eingezeichnete Symmetrielinie); sie stellen ein und dieselbe chemische Verbindung dar. Deshalb sind sie beim Abzählen der Isomeren nur einmal zu berücksichtigen. Die Form ist symmetrisch in bezug auf die eingezeichnete Symmetrielinie.

Bild 3 

Wir behandeln das Problem analytisch und verallgemeinern. Dabei werden uns verschiedene Zahlenfolgen begegnen. Wir beschränken uns darauf, die Anzahl Formen für die Hauptketten n, $n-1$ und $n-2$ zu ermitteln.

1. Hauptkette n

Es gibt für jedes $n \in \{1; 2; 3; ...\}$ genau eine Form. Hiermit finden wir die einfache Zahlenfolge f_1, die wir tabellarisch darstellen.

Tabelle 2

n	1	2	3...
Anzahl Formen	1	1	1...

2. Hauptkette n — 1

Die Seitenkette ist eingliedrig (Methyl, $-CH_3$). Wir müssen zwischen geradem und ungeradem n unterscheiden.

n gerade, $n-1$ ungerade

Bei genau einer Form trägt das mittlere C-Atom die Seitenkette. Würde sich die Seitenkette an einem der beiden endständigen C-Atome der verkürzten Hauptkette befinden, so wäre die entsprechende Form mit der Hauptkette n identisch. Unter den $n-4$ möglichen Formen sind je zwei zueinander symmetrisch. Deshalb beträgt die Anzahl der Formen

$$1+\frac{n-4}{2}=\frac{n-2}{2}(n\geqq 4) \qquad (1)$$

Die Formel (1) führt zu einer Zahlenfolge

$f_2 = 1; 2; 3; ...$

n ungerade, $n-1$ gerade

$$\text{Anzahl der Formen: } \frac{n-3}{2}(n\geqq 5) \qquad (2)$$

Prüft nach! Welche Zahlenfolge ergibt sich aus der Formel (2)?

3. Hauptkette n — 2

Die beiden C-Atome können eine zweigliedrige Seitenkette (Äthyl, $-C_2H_5$) oder zwei eingliedrige Seitenketten ($-CH_3$, $-CH_3$) bilden.

3.1. *Eine zweigliedrige Seitenkette*

Wir zählen ab wie bei der Hauptkette $n-1$. Dabei müssen wir beachten, daß jetzt an jedem Ende der Hauptkette zwei Plätze frei bleiben müssen (warum?).

n gerade, $n-2$ gerade

$$\text{Anzahl Formen: } \frac{n-6}{2}(n\geqq 8) \qquad (3)$$

n ungerade, $n-2$ ungerade

$$\text{Anzahl Formen: } 1+\frac{n-7}{2}=\frac{n-5}{2}(n\geqq 7) \qquad (4)$$

Prüft nach! Welche Zahlenfolgen ergeben sich aus den Formeln (3) und (4)?

3.2. *Zwei eingliedrige Seitenketten*

n gerade, $n-2$ gerade

Die beiden endständigen Plätze der verkürzten Hauptkette dürfen nicht besetzt werden (warum?). Wegen der Symmetrie kann die erste Seitenkette $\frac{n-4}{2}$ Plätze einnehmen. In ihrer äußersten zulässigen Stellung gibt es dann für die zweite Seitenkette $n-4$ Möglichkeiten. Rückt die erste Seitenkette um einen Platz weiter nach der Mitte, so hat die zweite unter Beachtung der Symmetrie noch $n-6$ Möglichkeiten. Und so weiter. Macht euch den Sachverhalt an einem Beispiel klar!

Die Anzahl der Formen beträgt also

$$(n-4)+(n-6)+...+4+2.$$

Offensichtlich ist das eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsglied $(n-4)$ und der Differenz (-2). Sie hat so viele Glieder, wie die erste Seitenkette Plätze einnehmen kann, nämlich $\frac{n-4}{2}$. Nun ist die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe gleich dem Produkt aus der halben Gliederzahl und der Summe aus Anfangs- und Endglied. So ergibt sich

$$\frac{n-4}{4}(n-4+2)=\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}$$

$$=\frac{n^2-6n+8}{4}(n\geqq 6) \qquad (5)$$

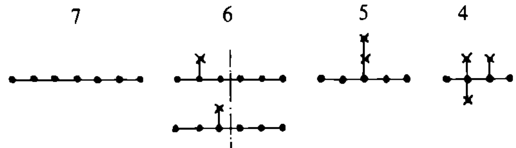
Die Formel (5) führt zu einer Zahlenfolge f_3.

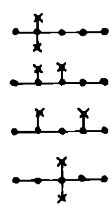
n ungerade, $n-2$ ungerade

In diesem Fall ergibt sich die Anzahl Formen zu

Hauptkette 7 6 5 4 C-Atome

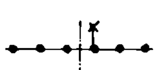
Bild 1





Anzahl
Formen $1+2+5+1=9$

Bild 2

 und 

$(n-4)+(n-6)+\ldots+3+1$

$$=\frac{n-3}{4}(n-4+1)$$

$$=\left(\frac{n-3}{2}\right)^2=\frac{n^2-6n+9}{4}(n\geqq 5) \qquad (6)$$

Rechnet nach! Die Formel (6) führt zu einer Folge f_4. Für die Herleitung der Formeln (5) und (6) gibt es noch andere Wege. Beim Lösen der Aufgaben könnt Ihr selbst solche Wege gehen.

Wir erhalten alle Formen mit der Hauptkette $n-2$, indem wir die Ergebnisse von 3.1. und 3.2. summieren.

n gerade

$$\frac{n-6}{2}+\frac{n^2-6n+8}{4}$$

$$=\frac{n^2-4n-4}{4}(n\geqq 6) \qquad (7)$$

n ungerade

$$\frac{n-5}{2}+\frac{n^2-6n+9}{4}$$

$$=\frac{n^2-4n-1}{4}(n\geqq 5) \qquad (8)$$

Die Formeln (7) und (8) führen zu den Zahlenfolgen f_5 und f_6.

Wir setzen jetzt einige Kenntnisse über Permutationen voraus und leiten für die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an verschiedenen C-Atomen eine Formel her. N untereinander verschiedene Elemente können auf $1.2.3\ldots(N-1)N=N!$ (lies N Fakultät) Arten angeordnet werden. Die Anzahl der Permutationen von N verschiedenen Elementen ist $N!$

Treten in einer Anzahl von Elementen Gruppen von gleichen Elementen auf, so ist die Anzahl der Permutationen kleiner, als wenn alle Elemente verschieden sind. Die N Elemente seien in m Gruppen zu je $p_1, p_2, \ldots, p_m$ gleichen Elementen so zusammenzufassen, daß die $p_i!$ Permutationen der Elemente p_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ als gleich gelten. Dann ist die Gesamtanzahl der Permutationen dieser Elemente $\dfrac{N!}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!}$; $p_1+p_2+\ldots+p_m=N$

Bei zwei eingliedrigen Seitenketten an verschiedenen C-Atomen unterscheiden wir die Elemente Ɨ und · . Für gerades n ist

$$N=n-4,\ p_1=2,\ p_2=N-2=n-6.$$

Gesamtanzahl Permutationen dieser Elemente:

$$\frac{(n-4)!}{2!\,(n-6)!}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2\cdot 1.2.3\ldots(n-7)(n-6)}$$

$$=\frac{(n-5)(n-4)}{2}$$

Unter diesen $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ Permutationen befinden sich jedoch Paare zueinander symmetrischer Formen, die bei der Bestimmung der Isomeren nur einmal zu berücksichtigen sind. Bevor wir halbieren, müssen wir die Formen subtrahieren, die nur einmal vorkommen; das sind $\frac{n-4}{2}$.

$$\frac{\frac{(n-4)(n-5)}{2}-\frac{n-4}{2}}{2}$$

$$=\frac{(n-4)(n-5-1)}{4}=\frac{(n-4)(n-6)}{4}$$

Nun sind noch die symmetrischen Formen zu addieren:

$$\frac{(n-4)(n-6)}{4}+\frac{n-4}{2}$$

$$=\frac{(n-4)(n-6+2)}{4}$$

$$=\left(\frac{n-4}{2}\right)^2(n\geqq 6) \qquad (9)$$

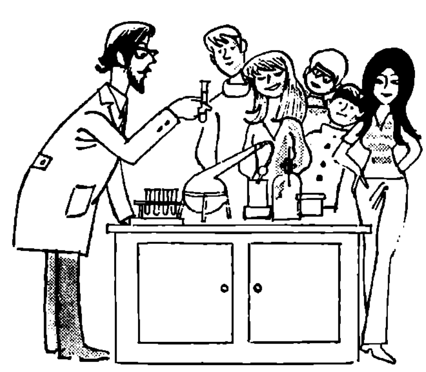
Addiere hierzu die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an demselben C-Atom, und vergleiche die Summe mit Formel (5)!

Wir stellen die Resultate zusammen.

Tabelle 3

Hauptkette	n	$n-1$	$n-2$
Anzahl	1	$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n^2-4n-4}{4}$ (n gerade)
Formen		$(n\geqq 4)$	$(n\geqq 6)$
	1	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n^2-4n-1}{4}$ (n ungerade)
		$(n\geqq 5)$	$(n\geqq 5)$

Die folgende Tabelle 4 zeigt die ersten Glieder der entsprechenden Zahlenfolgen. In der zweiten bis vierten Spalte stehen links die Anzahl Formen für gerades n, rechts die für ungerades n.



„Und wie reagiert die Substanz in meiner Hand? Achten Sie auf die Färbung!" – „Sie schämt sich."

Tabelle 4

n		Anzahl Formen mit der Hauptkette n		$n-1$		$n-2$		Summe	
4			1		1				2
	5		1		1		1		3
6		1		2		2		5	
	7		1		2		5		
8		1		3		7			
	9		1		3		11		
10		1		4		14			
	11		1		4		19		
⋮									
Zahlen-folge		f_1		f_2		f_5	f_6		

Die letzte Spalte enthält Summen der Anzahl Formen mit den Hauptketten n, $n-1$ und $n-2$. Nur bis $n=6$ stimmen diese mit den Anzahlen der Isomeren in Tabelle 1 überein. Von $n=7$ an kommen Formen der Hauptketten $n-3$; $n-4$; ... hinzu.

Entsprechend ihrer Bedeutung als Anzahlen sind die Glieder der vorstehenden Folgen natürliche Zahlen. Die Folgen sind im allgemeinen unendlich. Beschränken wir uns jedoch auf die bekannten Kohlenwasserstoffe (gegenwärtig bis $n=82$), so erhalten wir endliche Folgen. Wir betrachten nun einige der Zahlenfolgen etwas näher.

Bei $f_1=1; 1; 1; \ldots$

handelt es sich um eine unendliche Folge mit konstanten Gliedern.

Independente (analytische) Darstellung:

$$a_k=1 \text{ mit } k\in\{1; 2; 3; \ldots\}$$

Der Zusammenhang zwischen k und n (unter den Bedingungen n gerade, $n\geqq 4$) ist durch die Beziehung gegeben

$$n=2+2k=2(k+1).$$

$$f_2=1; 2; 3; \ldots$$

ist die Folge der natürlichen Zahlen (ohne die Null).

Independente Darstellung:

$$a_k=k \text{ mit } \in\{1; 2; 3; \ldots\}$$

Die Folge f_5 schreiben wir in Tabellenform.

Tabelle 5

k	1	2	3	4...
a_k	2	7	14	23...

Der Zusammenhang zwischen k und n (unter den Bedingungen n gerade, $n\geqq 6$) ist durch die Beziehung gegeben

$$n=2k+4.$$

Setzen wir in die Formel (7) ein, so erhalten wir die independente Darstellung:

$$a_k=k^2+2k-1$$

Wir bilden die Differenzfolgen.

Ausgangsfolge: 2; 7; 14; 23; 34; 47; ...

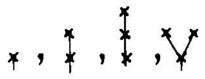
1. Differenzfolge: 5; 7; 9, 11; 13; ...

2. Differenzfolge: 2; 2; 2; 2; ...

f_5 ist also eine arithmetische Folge 2. Ordnung.

Ähnlich wie unter 3. dargestellt, können wir die Anzahl Formen mit der Hauptkette $n-3$

ermitteln. Hier werden die Verhältnisse schon komplizierter, zumal da wir vier verschiedene Seitenketten und deren mögliche und zulässige Kombinationen berücksichtigen müssen.

Bild 4 

Schon vor 100 Jahren, im Jahre 1875, hat der englische Mathematiker A. Cayley das aufgeworfene Problem ganz allgemein geometrisch-konstruktiv und analytisch gelöst. Er veröffentlichte damals eine Arbeit „Über analytische Formen, genannt Bäume, mit Anwendung auf die Theorie chemischer Kombinationen".

W. Renneberg

Petrolchemisches Kombinat Schwedt

Kleiner alpha-Chemie-Wettbewerb

Löst die hier zu diesem Beitrag zusammengestellten Aufgaben! Der *VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie*, Leipzig, stiftete wertvolle Buchpreise. Alle eingesandten Lösungen werden korrigiert und nach den Richtlinien des *alpha*-Wettbewerbs bewertet. Die Antwortkarten zählen für den *alpha*-Wettbewerb 1976/77.

Überlegt, welche Verfahren im Hinblick auf Formen mit der Hauptkette $n-3$, $n-4$ usw. vorteilhaft sind! Vielleicht findet ihr noch andere rationelle Wege?

Aufgaben

▲1▲ Untersuche die Zahlenfolgen

$f_3 = 2; 6; 12; 20; \ldots$

$f_4 = 1; 4; 9;, 16; \ldots$

$f_6 = 1; 5; 11; 19; \ldots$!

Gib die independente, die rekursive, die verbale Darstellungsart an! Kennzeichne den Typ!

▲2▲ Bestimme für zwei eingliedrige Seitenketten die Anzahl Formen mit den Seitenketten

a) an demselben C-Atom,

b) an verschiedenen C-Atomen

getrennt und summiere! Unterscheide zwischen geradem und ungeradem n!

Vergleiche die Ergebnisse mit den Formeln (5) und (6)!

▲3▲ Für zwei eingliedrige Seitenketten an verschiedenen C-Atomen und gerades n ist die Anzahl Formen auf folgendem Wege zu ermitteln:

a) beide Seitenketten auf derselben Seite der Symmetrielinie der Hauptkette,

b) je eine Seitenkette auf den beiden Seiten der Symmetrielinie. Summiere die Ergebnisse, und vergleiche mit der entsprechenden Formel aus Aufgabe 2b)!

▲4▲ Für zwei eingliedrige Seitenketten an verschiedenen C-Atomen und ungerades n ist die Anzahl Formen in der folgenden Weise zu ermitteln.

1. Fall: Am mittleren C-Atom befindet sich keine Seitenkette. Unterscheide dabei Formen mit den Seitenketten auf derselben und auf verschiedenen Seiten der Symmetrielinie!

2. Fall: Das mittlere C-Atom trägt eine Seitenkette. Summiere und vergleiche mit der entsprechenden Formel aus Aufgabe 2b)!

▲5▲ Leite für ungerades n die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an verschiedenen C-Atomen her, indem du zunächst die Gesamtanzahl Permutationen der Elemente I und ● berechnest! Berücksichtige dann, daß darunter zueinander symmetrische Formen vorkommen!

Addiere zu dem Ergebnis die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an demselben C-Atom! Mit welcher Formel des Textes muß dein Ergebnis übereinstimmen?

Werner Renneberg

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 7. Oktober 1976

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 8. Oktober 1976 veröffentlicht.
Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Olympiadeklasse 5

1. In einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft stellt Monika den Teilnehmern folgende Aufgabe:
Jeder der Buchstaben A, L, P, H bedeutet eine einstellige natürliche Zahl. Dabei gilt:
(1) Die Zahl H ist doppelt so groß wie die Zahl P.
(2) Die Zahl A ist gleich der Summe aus der Zahl P und dem Doppelten der Zahl H.
(3) Die Zahl L ist gleich der Summe der Zahlen A, P und H. Schreibt man die Zahlen $ALPHA$ in dieser Reihenfolge hintereinander, dann erhält man die (fünfstellige) Leserzahl der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha".
Wie groß ist diese Leserzahl?

2. Auf einer Geraden g sollen fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet sein und folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die Strecke AE hat die Länge $\overline{AE} = 18$ cm.
(2) Die Strecke AD ist 2 cm kürzer als die Strecke AE.
(3) Die Strecke CD hat die Länge $\overline{CD} = 5$ cm.
(4) Die Strecke AB ist 3 cm länger als die Strecke CE.
a) Konstruiere fünf derartige Punkte A, B, C, D, E!
b) Ermittle die Längen der Strecken $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$!
Als Lösung genügt
a) eine Konstruktion ohne Beschreibung und
b) die Ermittlung der Streckenlängen $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ aus den Bedingungen (1) bis (4).

3. Um zu ermitteln, welchen Durchschnittswert die Masse eines Maiskolbens von einem Versuchsfeld hat, hatten Schüler einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft sechs Kolben ausgewählt und gewogen. Der größte Kolben hatte eine Masse von 850 g, drei Kolben hatten eine Masse von je 640 g, zwei Kolben von je 460 g. Wieviel Gramm betrug hiernach die durchschnittliche Masse eines dieser sechs Maiskolben?

4. Ein rechteckiger Spielplatz wird eingezäunt. Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt 390 m; die langen Seiten des Rechtecks sind doppelt so lang wie die kurzen.
a) Ermittle die Seitenlängen des Spielplatzes!
b) Zeichne den Spielplatz (Konstruktion des Rechtecks) im Maßstab 1 : 1000!

Olympiadeklasse 6

1.
$$\begin{array}{ccc} AAA\cdot A & = & BBB \\ + & & - \\ CCC\cdot E & = & DDD \\ \hline FFF\ :F & = & GGG \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle fünf angegegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

2. Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück. Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.
Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

3. Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches $\frac{17}{19}$ subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert $\frac{7}{11}$ erhalten soll.
Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

4. Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark. Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.
Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

Olympiadeklasse 7

1. Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis.
Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.
Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:
(1) Anita und Christine;
(2) Anita und Fritz;
(3) Bernd und Fritz;
(4) Anita und Doris;
(5) Bernd und Erich.
Anschließend wurde festgestellt, daß in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.
Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten?
Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten läßt!

2. Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form
$$z = 12345678910111213\ldots9899100$$
entsteht.
a) Wieviel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

3. Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.
Beweise folgenden Satz:
Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $\overline{AS} = \overline{BS}$.

4. Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B.

B fuhr mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

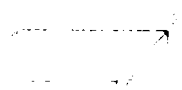
A mit einer Geschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wieviel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet, holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, daß beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?

b) Nach wieviel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen (überrunden), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?
Wieviele Runden hätte A und wieviele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

Olympiadeklasse 8

1. Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Bild) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, daß als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.



Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!

2. In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen.
Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1. 11. 1976 (Montag) bis 27. 11. 1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.
Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:
(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.
(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13. 11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.
(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.
(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.
(5) Große kann nur vom 4. bis 6. 11. oder vom 18. bis 20. 11. oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.
(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.
(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24. 11. zum Lehrgang geschickt werden.
(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.
Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen! Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

3. Beweise den folgenden Satz:
Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist, dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

4. Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:
Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist.
Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!
Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:
„Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe."
Stimmt diese Behauptung von Fritz?
Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

Olympiadeklasse 9

1. Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie Autorennen nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der Startlinie AG zur Ziellinie DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden.
Unter einem „Zug" wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden.
Die Spielregeln lauten:
(1) P_0 liegt auf AE
(2) Der erste „Zug" besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.
(3) Wenn bereits ein „Zug" $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten „Zug" P_kP_{k+1} folgendermaßen:
a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.
b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1} (Hinweis: P_{k+1} muß innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k).
Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 14)$, $C(7;\ 21)$, $D(16;\ 21)$, $E(16;\ 18)$, $F(7;\ 18)$, $G(7;\ 0)$ einen „Fahrweg", d. h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!
Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, 9$) ohne Begründung.

2. Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:
Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile usw.
Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

3. Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABCD$.

4. Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt:

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm
Würfel	a
Kugel	c
reguläres Tetraeder	e

	Oberflächeninhalt in cm²	Volumen in cm³
Würfel	b	b
Kugel	d	d
reguläres Tetraeder	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen.

während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

Olympiadeklasse 10

1. In das Kryptogramm

$$\begin{array}{r} K\,A\,T\,E\,R \\ +\;K\,A\,T\,Z\,E \\ \hline T\,I\,E\,R\,E \end{array}$$

sind anstelle der Buchstaben Ziffern (0, 1, ..., 9) so einzusetzen, daß eine Additionsaufgabe mit richtiger Lösung entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen.
Geben Sie sämtliche Lösungen dieser Aufgabe an!

2. Geben Sie alle reellen Zahlen $x (x \neq -3)$ an, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{2}{x+3}-\frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3}-\frac{1}{10}\,. \qquad (1)$$

3. Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, daß nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

4. Gegeben sei eine Streckenlänge a. Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaften

$$\overline{AB}=2a,\ \overline{BC}=a,\ \sphericalangle ACB=90^\circ.$$

Berechnen Sie die Abstände des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks von jeder der Dreieckseiten!

Olympiadeklassen 11/12

1. Man ermittle alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), die das Gleichungssystem

$$x+yz=7 \qquad (1)$$
$$xy+z=5 \qquad (2)$$
$$x+y+z=6 \qquad (3)$$

erfüllen.

2. Man beweise, daß für jedes Dreieck ABC die Gleichung

$$\overline{MA}^2\cdot\sin\alpha+\overline{MB}^2\cdot\sin\beta+\overline{MC}^2\cdot\sin\gamma=2F$$

gilt, wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel bei A, B bzw. C bezeichnen, F der Flächeninhalt des Dreiecks und M der Mittelpunkt seines Inkreises ist.

3. Einer Schule stehen für ein Zeltlager folgende Zelte zur Verfügung:
2 Zelte für je 3 Personen,
1 Zelt für 8 Personen,
2 Zelte für je 10 Personen und
2 Zelte für je 16 Personen.
(Die Personenzahlangaben sind die vom Hersteller angegebenen Höchstbelegungszahlen.) Jedes dieser Zelte wird entweder mit Mädchen zu genau 50% seiner Höchstbelegungszahl ausgelastet oder mit Jungen so belegt, daß es zu höchstens 70%, mindestens aber zu 50% ausgelastet ist.
Dabei sind insgesamt für das Zeltlager mehr Mädchen als Jungen zu berücksichtigen.
a) Wieviel Personen können maximal unter diesen Bedingungen am Zeltlager teilnehmen?
b) Man gebe für einen derartigen Fall eine entsprechende Belegung der Zelte an.

4. Auf der Oberfläche einer massiven Kugel, deren Durchmessergröße nicht angegeben ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen.
Man beschreibe eine Konstruktion des durch die Punkte A und B verlaufenden Großkreises. Zur Konstruktion auf der Kugeloberfläche darf nur ein Zirkel, zu eventuell notwendigen Hilfskonstruktionen in einer Ebene dürfen nur Zirkel und Lineal verwendet werden.
Hinweis: Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen, verläuft genau ein Großkreis.

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/76:

Ma 5 ■1497 Wegen $xx4\cdot x=2x4$ beträgt der zweite Faktor 11. Daraus folgt $2x4=x3x$; jedes Teilprodukt beträgt somit 234, also auch der erste Faktor. Die gelöste Aufgabe lautet somit

$$\begin{array}{r} 234\cdot 11 \\ \hline 234 \\ 234 \\ \hline 2574 \\ \hline\hline \end{array}$$

Ma 5 ■1498 Für jede der vier Ziffern der Autonummer gilt $0\leqq n\leqq 9$. Die zweite Ziffer sei n, die vierte somit $3\cdot n$, die erste $3n-3$ und die dritte $3n-5$. Für die Quersumme der Autonummer gilt deshalb

$$\begin{aligned}(3n-3)+n+(3n-5)+3n&=22,\\ 10n-8&=22,\\ 10n&=30,\\ n&=3.\end{aligned}$$

Die Autonummer lautet somit 6349.

Ma 5 ■1499 Angenommen, zur Herstellung des Werkstückes wurden bisher x Minuten benötigt; wegen 3 h 45 min = 225 min gilt dann

$$\begin{aligned} x:2+15&=225,\\ x:2&=210,\\ x&=420.\end{aligned}$$

Zur Anfertigung des Werkstückes wurden bisher 420 Minuten, also 7 Stunden benötigt.

Ma 5 ■1500 Bei einer mittleren Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ schafft man 1 km in 2 min. Für 15,8 km − 0,9 km = 14,9 km benötigt man 14,9 · 2 min = 29,8 min. Hinzu kommen 10 min Fußweg. Nach Franks Vorschlag werden insgesamt (29,8 + 10) min = 39,8 min benötigt. Bei einer mittleren Geschwindigkeit von $24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und einer Fahrstrecke von 15,5 km benötigt man (15,5 : 24) h = [(15,5 · 60) : 24 min = 38,75 min. Nach Uwes Vorschlag werden 38,75 min benötigt. Uwe hat somit recht.

Ma 5 ■1501 Wir rechnen 240 kg : 4 = 60 kg; 240 kg : 8 = 30 kg; 240 kg : 6 = 40 kg; 240 kg − 60 kg − 30 kg − 40 kg = 110 kg. Von den Schülern wurden 60 kg Blei, 30 kg Kupfer, 40 kg Zink und 110 kg Messing gesammelt.

Ma 5 ■1502 Wir rechnen 60 · 42 = 2520, 60 − 10 = 50, 50 · 49 = 2450, 2520 + 2450 = 4970 und 4970 : 70 = 71; beim Transport gingen 71 Gläser entzwei.

Ma 6 ■1503 Jede dreistellige natürliche Zahl läßt sich wie folgt darstellen:

$$z=100a+10b+c \text{ mit } 1\leqq a\leqq 9 \text{ und } 0\leqq b,\ c\leqq 9.$$

Wegen $b=a+1$ und $c=2a$ erhalten wir daraus

$$z=100a+10(a+1)+2a.$$

Da die dreistellige Zahl z kleiner als 400 ist, folgt $a=1$ oder $a=2$ oder $a=3$, also $z=122$ oder $z=234$ oder $z=346$.
Nun soll $\frac{z}{2}$ eine Primzahl sein.
Für $a=1$ erhalten wir $\frac{z}{2}=61$; dies ist eine Primzahl. Für $a=2$ erhalten wir $\frac{z}{2}=117$; diese Zahl ist durch 9 teilbar, also keine Primzahl. Für $a=3$ erhalten wir $\frac{z}{2}=173$; dies ist eine Primzahl.
Erika hat sich entweder die Zahl 61 · 2 = 122 oder 173 · 2 = 346 gedacht.

Ma 6 ■1504 Angenommen, im Korb befanden sich ursprünglich n Früchte. Nachdem Ralf sechs herausgenommen hatte, waren im Korb noch $(n-6)$ Früchte. Der Korb enthielt nun x Birnen und $(x+10)$ Äpfel, also $(2x+10)$ Früchte. Demnach gilt

$$\begin{aligned} n-6&=2x+10,\\ n&=2x+16,\\ n&=2\cdot(x+8).\end{aligned}$$

Wegen $n=2\cdot(x+8)$ ist n ohne Rest durch 2 teilbar. Da 29 aber nicht durch 2 teilbar ist, kann n nicht gleich 29 sein. Ralf irrte sich, Bärbel hatte recht.

Ma 6 ▪1505 Aus $1800\,\text{km} \cdot \frac{3}{4} = 1350\,\text{km}$,

$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1350}{900}\,\text{h} = \frac{3}{2}\,\text{h} = 90\,\text{min}$ und $126\,\text{min} - 90\,\text{min} = 36\,\text{min} = \frac{6}{10}\,\text{h}$ folgt

$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{450 \cdot 10\,\text{km}}{6\,\text{h}} = 750\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Das Flugzeug setzte den Flug auf der restlichen Flugstrecke von 450 km mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $750\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fort.

Ma 6 ▪1506 Da nur ganzzahlige Punktzahlen vergeben wurden, muß die Anzahl der von Ursula erreichten Punkte sowohl durch 6 als auch durch 7, also durch 42 teilbar sein. Aus $1450 < 42 \cdot n < 1500$ folgt $n = 35$.
Ursula errang somit $42 \cdot 35 = 1470$ Punkte, Sabine errang $\frac{5}{6} \cdot 1470 = 1225$ Punkte, und Petra errang $\frac{6}{7} \cdot 1470 = 1260$ Punkte.

Ma 6 ▪1507 Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.
Aus $8042xx$ folgt für die ersten vier Ziffern die Quersumme 14. Entsprechend den Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 4 und 9 lautet somit die kleinste dieser Zahlen 804204. Aus $8942xx$ folgt für die ersten vier Ziffern die Quersumme 23. Entsprechend den Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 9 und 4 lautet somit die größte dieser Zahlen 894276.

Ph 6 ▪1508

Gegeben: $\varrho = 19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ Gesucht: m

$h = \frac{1}{9000}\,\text{mm} = \frac{1}{90000}\,\text{cm}$

$A_G = 1\,\text{m}^2 = 10000\,\text{cm}^2$

$m = \varrho \cdot V$ $\quad V = A_G \cdot h$

$m = \frac{19{,}3\,\text{g} \cdot 10\,\text{cm}^3}{\text{cm}^3 \cdot 90}$ $\quad V = 10000\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1\,\text{cm}}{90000}$

$\underline{\underline{m = 2{,}14\,\text{g}}}$ $\quad V = \frac{10}{90}\,\text{cm}^3$

Für $1\,\text{m}^2$ Blattgold braucht man 2,14 g Gold.

Ma 7 ▪1509 Angenommen, wir erhalten beim Wechseln des 25-Rubel-Scheines x 5-Rubel-Scheine und y 3-Rubel-Scheine, dann müßten wir nach Voraussetzung noch $(10-x-y)$ 1-Rubel-Scheine erhalten, und es gilt

$$\begin{aligned} 5x+3y+1\cdot(10-x-y) &= 25,\\ 5x+3y+10-x-y &= 25,\\ 4x+2y &= 15,\\ 2y &= 14-4x+1,\\ y &= 7-2x+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für keine natürliche Zahl x wird y ebenfalls eine natürliche Zahl. Ein 25-Rubel-Schein läßt sich auf die geforderte Weise nicht wechseln.

Ma 7 ▪1510 Angenommen, der erste Kunde habe x Flaschen, der zweite somit $(x+2)$ Flaschen Wein gekauft; dann gilt

$$\begin{aligned} 5{,}60\cdot x+4{,}00 &= 4{,}80\cdot(x+2)+2{,}40,\\ 5{,}6x+1{,}6 &= 4{,}8x+9{,}6,\\ 0{,}8x &= 8,\\ x &= 10. \end{aligned}$$

Der erste dieser Kunden hat 10 Flaschen, der zweite 12 Flaschen Wein gekauft. Jeder führte einen Geldbetrag von $5{,}60\,\text{M} \cdot 10 + 4\,\text{M} = 60\,\text{M}$ mit sich.

Ma 7 ▪1511 Angenommen, es sollten nach Plan täglich x Hektar bestellt werden; tatsächlich wurden aber $(x+2)$ Hektar bestellt. Nun gilt

$$\begin{aligned} 14\cdot x &= 10\cdot(x+2),\\ 14x &= 10x+20,\\ 4x &= 20,\\ x &= 5. \end{aligned}$$

Nach Plan sollten täglich 5 ha Feld bestellt werden; insgesamt wurden $14 \cdot 5\,\text{ha} = 70\,\text{ha}$ bestellt.

Ma 7 ▪1512 Angenommen, es wohnen x Personen in diesem Haus; dann gilt

$$\begin{aligned} 10x+88 &= 10{,}8x-(10x+88)\cdot\frac{2{,}5}{100},\\ 10x+88 &= 10{,}8x-\frac{10x+88}{40},\\ (10x+88)\cdot 40 &= 40\cdot 10{,}8x-(10x+88),\\ 41(10x+88) &= 432x,\\ 410x+41\cdot 88 &= 432x,\\ 22x &= 41\cdot 88,\\ x &= 4\cdot 41,\\ x &= 164. \end{aligned}$$

Im Hause wohnen 164 Personen. Die Heizkosten belaufen sich auf $10\,\text{M} \cdot 164 + 88\,\text{M} = 1728\,\text{M}$.

Ph 7 ▪1513 Gegeben: $p_1 = 1{,}8\,\text{at}$; $p_2 = 75\,\text{at}$, $V_1 = 15000\,\text{m}^3$
Gesucht: V_2

Nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte gilt

$$\begin{aligned} p_1\cdot V_1 &= p_2\cdot V_2\\ V_2 &= \frac{p_1 V_1}{p_2}\\ V_2 &= \frac{1{,}8\,\text{at}\cdot 15000\,\text{m}^3}{75\,\text{at}}\\ V_2 &= 360\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

Die Quelle verliert $360\,\text{m}^3$ Gas in einer Stunde.

Ch 7 ▪1514 1. Aufstellen der Gleichung für die Reaktion:

$2\,Mg + O_2 \rightarrow 2\,MgO$

2. Gegeben: $m_{Mg} = 0{,}3\,\text{g}$; $M_{Mg} = 24\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$

$M_{MgO} = 40\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$

gesucht: m_{MgO}

3. Aufstellen des Stoffmengenverhältnisses:

$n_{Mg} : n_{MgO} = 1 : 1$

$n_{Mg} = n_{MgO}$

4. Einsetzen der Größengleichungen für die Stoffmengen:

$$\frac{m_{Mg}}{M_{Mg}} = \frac{m_{MgO}}{M_{MgO}}$$

$$m_{MgO} = \frac{m_{Mg}\cdot M_{MgO}}{M_{Mg}}$$

5. Einsetzen der Größen:

$$m_{MgO} = \frac{0{,}3\,\text{g}\cdot 40\,\text{g}\cdot\text{mol}}{24\,\text{g}\cdot\text{mol}}$$

$$m_{MgO} = 0{,}5\,\text{g}$$

Bei der Verbrennung von 0,3 g Magnesium entstehen 0,5 g Magnesiumoxid.

Ma 8 ▪1515 Wegen $\frac{a(c-b)}{b} > 0$ (1)

ist $a \neq 0$, da sonst der Zähler auf der linken Seite von (1) gleich Null wäre. Ferner ist auch $b \neq 0$, da b im Nenner der linken Seite von (1) steht.
Da genau eine der drei Zahlen gleich Null ist, kann daher nur $c = 0$ sein. Also folgt aus (1)

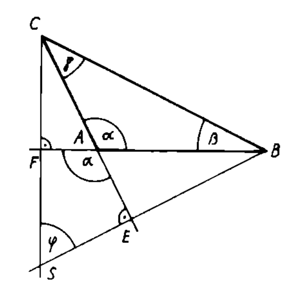
$$-\frac{ab}{b} > 0 \qquad (2)$$

und wegen $b \neq 0$ weiter $-a > 0$, d. h. $a < 0$. Also ist a negativ und ferner, da $c = 0$ ist, b positiv.
Die Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses. Man erhält nämlich für $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

$$\frac{a(c-b)}{b} = -\frac{ab}{b} = -a > 0.$$

Ma 8 ▪1516 Das Viereck $SEAF$ hat zwei rechte Winkel, nämlich die Winkel $\sphericalangle SEA$ und $\sphericalangle AFS$, da die beiden Höhen $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ senkrecht auf den Verlängerungen der zugehörigen Seiten stehen (siehe Bild). Ferner ist in diesem Viereck $\sphericalangle EAF = \alpha$ (als Scheitelwinkel). Bezeichnet man die Größe des vierten Winkels $\sphericalangle FSE$ dieses Vierecks mit ϕ, so gilt, da die Winkelsumme eines jeden Vierecks 360° beträgt

$$\begin{aligned} \phi+90^\circ+\alpha+90^\circ &= 360^\circ,\\ \phi &= 180^\circ-\alpha. \end{aligned}$$



Bezeichnet man die Größen der beiden spitzen Winkel des Dreiecks ABC mit β und γ, so folgt hieraus wegen $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$

$\phi = \beta + \gamma$, w. z. b. w.

Ma 8 ▪1517 Es seien p und q zwei Primzahlen, die die geforderte Eigenschaft haben. Dann gilt eine der folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 18\cdot p &= (p+q)\cdot pq, && (1)\\ 18\cdot(p+q) &= p\cdot pq, && (2)\\ 18\cdot pq &= p\cdot(p+q). && (3) \end{aligned}$$

Im Falle (1) folgt wegen $p \neq 0$

$$\begin{aligned} 18 &= (p+q)q,\\ 2\cdot 3^2 &= (p+q)q. && (4) \end{aligned}$$

Da q Primzahl ist, gilt also $q = 2$ oder $q = 3$.

Ist $q=2$, so folgt aus (4) $p+q=9$, also $p=7$. Die Primzahlen $p=7$, $q=2$ haben also die geforderte Eigenschaft, da für sie die Gleichung (1) erfüllt ist.

Ist $q=3$, so folgt aus (4) $p+q=6$, also $p=3$. Daher haben auch die Primzahlen $p=3$, $q=3$ die geforderte Eigenschaft; denn auch für sie ist die Gleichung (1) erfüllt.

Im Falle (2) gilt

$$2\cdot 3\cdot 3\cdot(p+q)=p\cdot p\cdot q. \qquad (5)$$

Daraus ergibt sich aber ein Widerspruch, weil auf der linken Seite von (5) mindestens vier Primfaktoren stehen, während auf der rechten Seite nur drei Primfaktoren vorhanden sind. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

Im Falle (3) folgt wegen $p\neq 0$

$$18q=p+q, \text{ d. h. } 17q=p.$$

Wegen $q>1$ wäre also p nicht Primzahl, was der Voraussetzung widerspricht. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten. Daher haben nur die Primzahlen $p=7$ und $q=2$ sowie die Primzahlen $p=3$ und $q=3$ die geforderte Eigenschaft.

Ma8 ▪1518 a) Wir bezeichnen die begrenzenden Kreise des unteren bzw. des oberen Geldstückes mit k_1 bzw. k_2 und die Berührungspunkte auf den beiden Kreisen mit T_1 bzw. T_2. Dann fallen bei Beginn des Versuches die Punkte T_1 und T_2 zusammen.

Während des Abrollens bleibt der Punkt T_1 fest, während der Punkt T_2 sich mit dem Kreis k_2 bewegt und auf diesem einen Weg von der Länge $d\pi$ zurücklegt, wobei d der Durchmesser der beiden Kreise ist. Daher fällt nach einem vollen Umlauf des Kreises k_2 um den Kreis k_1 der Punkt T_2 wieder mit dem Punkt T_1 zusammen. Aus diesem Grunde steht nach Beendigung des Versuches die Ziffer des oberen Geldstückes wieder aufrecht.

b) Wir wählen die gleichen Bezeichnungen wie im Falle a), beachten aber, daß der Durchmesser des Kreises k_1 gleich $d_1=29$ mm und der Durchmesser des Kreises k_2 gleich $d_2=19$ mm ist. Nach einem vollen Umlauf des Kreises k_2 um den Kreis k_1 hat dann der Punkt T_2 auf dem Kreis k_2 einen Weg von $d_1\pi$ zurückgelegt und die in der Abbildung angegebene Stellung erreicht. Dabei hat er sich um einen Winkel α gedreht, für den gilt

$$\alpha:360^\circ=d_1\pi:d_2\pi,$$

$$\alpha=\frac{d_1}{d_2}\cdot 360^\circ=\frac{29}{19}\cdot 360^\circ,$$

$$\alpha\approx 549^\circ=360^\circ+189^\circ.$$

Der Punkt T_2 hat also auf dem Kreis k_2 eine volle Umdrehung (360°) und außerdem noch etwas mehr als eine halbe Umdrehung (189°) ausgeführt. Er befindet sich nach Beendigung des Versuchs in der in der Abbildung angegebenen Stellung. Daher steht die Ziffer 5 des oberen Geldstückes fast „auf dem Kopf".

Ph8 ▪1519 Gegeben: $U=220$ V; $I=12$ A; $l=25$ m; $r=1$ mm; $\varrho=\frac{0{,}0286\ \Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$

Gesucht: Klemmenspannung U

Die Klemmenspannung U ergibt sich aus der Differenz der Spannung U an der Steckdose und dem Spannungsabfall U_V in der Leitung.

$U_K=U-U$

$U_K=220\text{ V}-5{,}5\text{ V} \qquad R=2\cdot\frac{\varrho\cdot 1}{A}$

$U_K=214{,}5$ V

$U_V=I\cdot R \qquad A=\pi r^2$

$$U_V=\frac{2\cdot I\cdot\varrho\cdot l}{\pi r^2}$$

$$U_V=\frac{2\cdot 12\text{ A}\cdot 0{,}0286\ \Omega\text{mm}^2\cdot 25\text{ m}}{3{,}14\cdot 1\text{ mm}^2\cdot\text{m}}$$

$U_V=5{,}46\text{ V}\approx 5{,}5$ V

Am Kochherd liegt eine Klemmenspannung von 214,5 V an.

Ch8 ▪1520

Volumen in cm³	60	x
Masse in g	90	150

$90:150=60:x$

$x=100$

150 g des Stoffes nehmen ein Volumen von 100 cm³ ein.

Ma9 ▪1521 Aus $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$

folgt $\frac{ad+bc}{bd}=1$, also $ad+bc=bd$.

Für die Summe der reziproken Werte der beiden Quotienten gilt daher

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}=\frac{bd}{ac},$$

d. h. man erhält diese Summe, indem man das Produkt bd der beiden Divisoren durch das Produkt ac der beiden Dividenden dividiert, w. z. b. w.

Ma9 ▪1522 1. Wegen $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{BC}=\overline{DA}=b$ gilt

$$\overline{AE}=2a, \overline{CG}=2a, \text{ also } \overline{AE}=\overline{CG}.$$

Ferner gilt

$$\overline{AH}=b, \overline{CF}=b, \text{ also } \overline{AH}=\overline{CF},$$

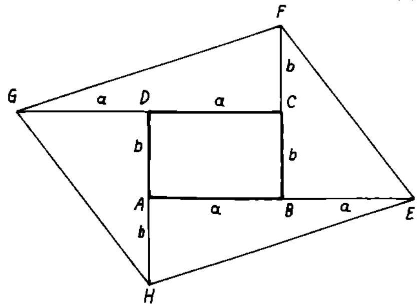
$$\sphericalangle EAH=\sphericalangle FCG=90^\circ \text{ (siehe Bild).}$$

Daraus folgt $\triangle EAH\cong\triangle FCG$, also

$$\overline{HE}=\overline{FG}. \qquad (1)$$

Analog erhält man $\triangle FGC\cong\triangle HDG$, also

$$\overline{EF}=\overline{GH}. \qquad (2)$$



Wegen (1) und (2) hat also das Viereck $EFGH$ zwei Paare gleichlanger Seiten, d. h., dieses Viereck ist ein Parallelogramm. Wegen $a\neq b$ kann man o. B. d. A. $a>b$ annehmen.

Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{HE}^2=4a^2+b^2, \overline{EF}^2=4b^2+a^2$$

und $4a^2+b^2=3a^2+b^2+a^2$

$$>3b^2+b^2+a^2=4b^2+a^2, \text{ also}$$

$$\overline{HE}>\overline{EF},$$

d. h., das Viereck $EFGH$ ist kein Rhombus und erst recht kein Quadrat. Es trifft also nur die Aussage 1a) zu, wonach das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist.

2. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ist gleich

$$A_1=ab. \qquad (3)$$

Der Flächeninhalt eines jeden der rechtwinkligen Dreiecke $\triangle EAH$, $\triangle FBE$, $\triangle GCF$, $\triangle HDG$ ist gleich $\frac{1}{2}\cdot 2ab=ab$.

Daher ist der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ gleich

$$A_2=ab+4ab=5ab. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$A_1:A_2=ab:5ab=1:5.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ verhält sich also zu dem Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ wie 1 : 5.

Ma9 ▪1523 Es seien x, y, z drei natürliche Zahlen mit $x\leqq y\leqq z$, für die die Gleichungen

$$x+y+z=46 \qquad (1)$$

und

$$xyz=3060 \qquad (2)$$

erfüllt sind. Dann gilt

$$46=x+y+z\leqq 3z,$$

also $z\geqq\frac{46}{3}$, und, da z eine natürliche Zahl ist, $z\geqq 16$. (3)

Andererseits gilt wegen (1) und $x>0$, $y>0$

$$z\leqq 44. \qquad (4)$$

Wegen $xyz=3060=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17$ (5)

kann daher z nur gleich

17, 18, 20, 30, 34 oder 36 sein.

1. Für $z=17$ erhält man aus (1) und (2)

$$x+y=29, \qquad (6)$$

$$xy=2^2\cdot 3^2\cdot 5=180. \qquad (7)$$

Wegen $x\leqq y\leqq z$ folgt dann aus (7), $y=15$ und $x=12$, was der Gleichung (6) widerspricht. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Für $z=18$ erhält man aus (1) und (2)

$$x+y=28, \qquad (8)$$

$$xy=2\cdot 5\cdot 17=170. \qquad (9)$$

Dann würde aus (9) $y=17$ und $x=10$ folgen, was der Gleichung (8) widerspricht. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

3. Für $z=20$ erhält man aus (1) und (2)

$$x+y=26, \qquad (10)$$

$$xy=3^2\cdot 17=153. \qquad (11)$$

Wegen $x\leqq y\leqq z$ folgt dann aus (11) $y=17$ und $x=9$. Dann ist auch die Gleichung (10) erfüllt. Damit haben wir eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) erhalten, nämlich $x=9$, $y=17$, $z=20$.

Denn es gilt

$$x+y+z=9+17+20=46,$$

$$xyz=9\cdot 17\cdot 20=3060.$$

4. Für $z=30$, 34 oder 36 ergibt sich jeweils ein Widerspruch, so daß diese Fälle nicht eintreten können. Es gilt nämlich für alle natürlichen Zahlen x, y, z

$$x^2-2xy+y^2 \geqq 0,$$
$$x^2+2xy+y^2 \geqq 4xy,$$
$$(x+y)^2 \geqq 4xy,$$
$$xy \leqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt wegen $x+y \leqq 16$

$$xy \leqq 8^2=64. \qquad (12)$$

Nun ist aber in diesen Fällen

$$xy \geqq \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17}{36}=85 \qquad (13)$$

im Widerspruch zu der Ungleichung (12).
Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau eine Lösung (x, y, z), wobei x, y, z natürliche Zahlen mit $x \leqq y \leqq z$ sind, nämlich $x=9$, $y=17$, $z=20$.

Ma9 ▪1524 Wir setzen $z=\frac{7^{1975}+7^{1976}}{588}$
und erhalten wegen $588=2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

$$z=\frac{7^{1975} \cdot (1+7)}{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}=\frac{7^{1975} \cdot 8}{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}=\frac{7^{1973} \cdot 2}{3}$$

Nun ist (vgl. Tabellen und Formeln, S. 42, Z. 16) a^n-b^n stets durch $a-b$ teilbar, wobei a, b, n natürliche Zahlen mit $a \neq b$ sind. Folglich ist
$7^{1973}-1=7^{1973}-1^{1973}$ durch $7-1=6$ teilbar. Daher ist $2 \cdot (7^{1973}-1)=2 \cdot 7^{1973}-2$ durch 6 und also auch durch 3 teilbar.
Wir erhalten

$$z=\frac{7^{1973} \cdot 2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{7^{1973} \cdot 2-2}{3}+\frac{2}{3}=k+\frac{2}{3},$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Wegen $588=3 \cdot 196$ gilt weiter

$$z=k+\frac{2}{3}=k+\frac{2 \cdot 196}{3 \cdot 196}=k+\frac{392}{588}.$$

Also läßt die Zahl z bei der Division durch 588 den Rest 392.

Ph9 ▪1525 Gegeben: $m=5$ kg;
$v=1200\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $t=0{,}01$ s
Gesucht: F; W.

$$F=m \cdot a \qquad a=\frac{v}{t} \qquad W=F \cdot s$$
$$F=\text{m} \cdot \frac{v}{t} \qquad W=\frac{F \cdot v \cdot t}{2}$$
$$F=\frac{5\ \text{kg} \cdot 1200\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{0{,}01\ \text{s}}$$
$$F=600\ 000\ \text{N}$$
$$F=\ 61\,200\ \text{kp}$$
$$W=\frac{61200\ \text{kp} \cdot 1200\ \text{m} \cdot 0{,}01\ \text{s}}{2 \cdot \text{s}}$$
$$W=367\,200\ \text{kpm}$$
$$\text{s}=\frac{a}{2}t^2 \qquad a=\frac{v}{t}$$
$$\text{s}=\frac{vt}{2}$$

Auf die Granate wirkt eine Kraft von 61 200 kp, und es wird eine Arbeit von 367 200 kpm verrichtet.

Lösungen zu alpha-heiter 4/76:

Die Mückenfamilie

Bezeichnet man die Anzahl der Mückenjungen mit x, dann ist die Anzahl der Mückenmädchen nach (3) $4 \cdot (x-1)$. Aus (4) ergibt sich dann die Ungleichung

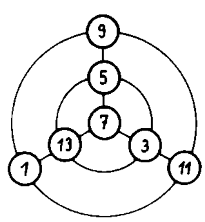
$$18<x+4(x-1)<23$$
$$18<5x-4 \quad <23$$
$$22<5x \quad <27$$

Da nur natürliche Zahlen zugelassen sind, ergibt sich die Lösung $x=5$. Also gibt es 5 Mückenjungen und 16 Mückenmädchen. Nun findet man aus (1) und (2) und (3):
a) Die gesamte Mückenfamilie hat 35 Mitglieder.
b) Es sind 8 Mückenmänner, 6 Mückenfrauen, 5 Mückenjungen, 16 Mückenmädchen.
c) Die Anzahl der Mückenkinder beträgt 21.

Magische Kreise

1. Die Summe der einzutragenden Zahlen ist 49.
2. Insgesamt muß fünfmal die gleiche Summe gebildet werden:
$5x$ (x...Summe)
3. Die Summen der Zahlen auf den beiden Kreisen werden je zweimal, die Zahl in der Mitte aber dreimal gezählt.
$2 \cdot 49+m=5 \cdot x$
Daraus folgt: Die Summe auf der linken Seite muß durch 5 teilbar sein. Damit kann m nur 7 sein. (Die Zahl in der Mitte ist 7.)
Die Summe der Zahlen auf demselben Kreis bzw. derselben Geraden muß 21 sein.
Da die Zahl in der Mitte 7 ist, bleibt als Summe für die beiden fehlenden Zahlen 14. Es ergeben sich folgende Kombinationen:

1	3	5
13	11	9



Damit ergibt sich eine der möglichen Lösungen: Weitere Möglichkeiten ergeben sich durch Vertauschung der „Radien" bzw. durch jeweiliges paarweises Vertauschen der Zahlen auf den Geraden.

Interessante Brüche

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{7}$.

A vanishing Number

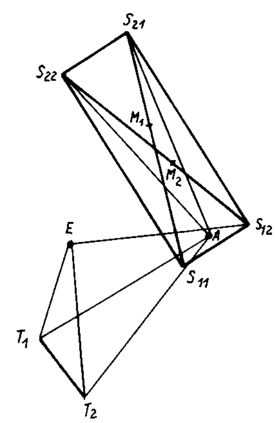
„Nichts" ist nicht mit Null gleichzusetzen. Null kann nicht Divisor sein.

Silbenrätsel

1. Winkel, 2. Integral, 3. Nenner, 4. Kurve, 5. Einheitskreis, 6. Läufer, 7. Multiplikation, 8. e, 9. Satz 10. Sinus, 11. Ebenflächner, 12. Rationalmachen – Winkelmesser

Der geheimnisvolle Schatz

Wenn es möglich ist, den Schatz ohne dritten Orientierungspunkt (Turm) zu finden, kann die Lage des Turmes als beliebig angenommen werden. Dann findet man den Schatz, indem man die Hälfte des Weges von der Eiche zum Ahorn zurücklegt, sich unter einem rechten Winkel nach links wendet und die gleiche Strecke geht. (Turm unmittelbar bei Eiche.) Es bleibt also zu zeigen, daß die Lage des Turmes beliebig ist:
T_1 und T_2 seien mögliche Standorte des Turmes, E und A die beiden Bäume, S_{11} der erste Stab für Turm T_1, S_{21} der zweite usw. M_1 und M_2 seien die Mitten der Strecken zwischen den Stäben (entsprechend für T_1 und T_2). Es ist zu zeigen, daß M_1 und M_2 zusammenfallen.
Die Dreiecke $\triangle T_1ET_2$ und $\triangle S_{11}ES_{12}$ sind kongruent (SWS). Da $\sphericalangle T_1ES_{11}=90°$, folgt T_1T_2 senkrecht zu $S_{11}S_{12}$. Analog erhält man $T_1T_2 \perp S_{11}S_{21}$, folglich $S_{11}S_{12} \parallel S_{22}S_{21}$ (1)



Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle T_1ET_2$ und $\triangle S_{11}ES_{12}$ sowie $\triangle T_1AT_2$ und $\triangle S_{22}AS_{21}$ folgt $S_{11}S_{12}=S_{22}S_{21}$. (2)
Nach (1) und (2) ist das Viereck $S_{11}S_{12}S_{21}S_{22}$ ein Parallelogramm. Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander, folglich gilt $M_1=M_2$.

Denkökonomie

Die Strecke $\overline{00_1}$ ist eine Seite des Rechtecks $A00_1B$ und kann über den Umweg der Flächenberechnung dieses Rechtecks erhalten werden, da die Seite r des Rechtecks die Länge 1 hat; die Fläche des Rechtecks $A00_1B$ ist gleich der Summe aus den Flächen beider Viertelkreise und der Fläche ABD abzüglich der flächengleichen Überschneidungsflächen CDC_1, der beiden Viertelkreise, also der Fläche des halben Einheitskreises $\frac{\pi}{2}$.

Zahlenrätsel im Oktalsystem

$$\begin{array}{rcl} 5126 : 77 &=& 52 \\ - \quad x & & + \\ \underline{126+46} &=& \underline{174} \\ 5000-4532 &=& 246 \end{array}$$

Proportionaleinstellung des Rechenstabs beim stöchiometrischen Rechnen

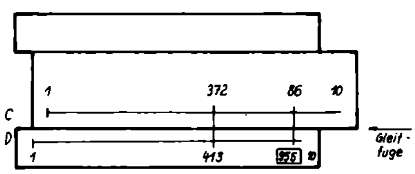
Mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes kann man sich das Auflösen einer Verhältnisgleichung nach der Variablen ersparen. Wir erläutern die Berechnung des vierten Gliedes einer Verhältnisgleichung am Beispiel:

$$\frac{37{,}2}{41{,}3}=\frac{8{,}6}{x}$$

Zur Berechnung von x stellen wir den Rechenstab wie in Bild 1 ein. Wir denken uns die Gleitfuge gleichsam als Bruchstrich und stellen auf der Skale C die Zähler und auf der Skale D die Nenner ein. Es handelt sich um folgende Schritte:

1. Überschlag: Der Nenner auf der linken Seite ist etwas größer als der Zähler auf der linken Seite. Deshalb muß auch der Nenner auf der rechten Seite etwas größer als der Zähler auf der rechten Seite sein (etwa 10).
2. Wir stellen $C\,3-7-2$ über $D\,4-1-3$.
3. Wir lesen unter $C\,8-6$ die Ziffernfolge $D\,9-5-5$ ab.

Ergebnis: $x=9{,}55$.



Proportionaleinstellung des Rechenstabs beim Lösen einer Verhältnisgleichung

Stöchiometrische Aufgaben können bekanntlich nach einer Schrittfolge gelöst werden; eine solche ist im Lehrbuch für Klasse 7 angegeben. Benutzt man zur eigentlichen Berechnung die Proportionaleinstellung des Rechenstabes, so kann man sich also das Auflösen der Verhältnisgleichung nach der Variablen ersparen. Die ganze Schrittfolge verkürzt sich dann um eine Maßnahme beim fünften Teilschritt. Da die Variable in der Verhältnisgleichung viertes Glied sein muß, tragen wir zweckmäßig die Massen der in der chemischen Gleichung angegebenen Stoffmengen über der Gleichung und die gegebenen und gesuchten Größen unter der Gleichung ein. Für das im Lehrbuch angeführte Beispiel erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} 48\,\mathrm{g} & 80\,\mathrm{g} \\ 2\mathrm{Mg}+\mathrm{O}_2 & 2\mathrm{MgO} \\ 0{,}3\,\mathrm{g} & x \end{array}$$

$$\frac{48\,\mathrm{g}}{0{,}3\,\mathrm{g}}=\frac{80\,\mathrm{g}}{x}$$

Die Proportionaleinstellung des Rechenstabs ist in Bild 2 wiedergegeben.

Lösen der Verhältnisgleichung bei einer stöchiometrischen Aufgabe

Vielleicht kommen aufgeweckte Schüler darauf, daß es gar nicht nötig ist, die Verhältnisgleichung explizite hinzuschreiben, daß sie vielmehr nach dem vierten Teilschritt „den Rechenstab unmittelbar an die chemische Gleichung anlegen" können. *W. Renneberg*

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungswege

Liebe Leser!

Einige von euch, die am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen, werden sich an die Aufgabe W10/12 1162 im Heft 6/1973 erinnern:

Es sei $ABCDEFGH$ ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ (Seitenlänge a) und der Höhe h. Dabei sollen die Punkte E, F, G, H senkrecht über den Punkten A, B, C bzw. D liegen. Die Flächendiagonale $\overline{EG}$ sei durch die Punkte P_1 und P_2 in drei gleichlange Teile geteilt, so daß $\overline{EP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2G}$ ist. Es ist das Volumen des Körpers $ABCDP_1P_2$ zu berechnen, der durch die Kanten $\overline{P_1A}$, $\overline{P_1B}$, $\overline{P_1D}$, $\overline{P_2B}$, $\overline{P_2C}$, $\overline{P_2D}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ und $\overline{P_1P_2}$ begrenzt ist (siehe Bild 1, IV. Umschlagseite).

Wir werden sehen, daß wir durch verschiedene *räumliche Betrachtungen* zu einem Ergebnis kommen können. Dazu wollen wir gleich jetzt zur Vereinfachung der Darlegungen vereinbaren, daß bei der Bezeichnung einer Pyramide der letztgenannte Punkt die Spitze und die vorhergehenden die Ecken der zugehörigen Grundfläche darstellen sollen. Ferner wird mit $V(ABCD)$ das Volumen der Pyramide $ABCD$ und mit V_0 das Volumen des vorgegebenen Körpers bezeichnet.

▲1▲ Eine naheliegende und die wohl einfachste Lösung ergibt sich, in dem wir den Körper längs der Kanten $\overline{AP_1}$ und $\overline{CP_2}$ durch einen ebenen Schnitt *zerlegen*. Dies ist möglich, da die Punkte P_1 und P_2 auf der zu AC parallelen Geraden EG liegen. Dabei zerfällt er in zwei gleich große Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche ACP_2P_1. Diese Fläche ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseitenlängen $a\sqrt{2}$ und $\frac{a}{3}\sqrt{2}$ und der Höhe h; sie besitzt demnach den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}+\frac{a}{3}\sqrt{2}\right)\cdot h=\frac{2}{3}a\sqrt{2}\,h$. Die Höhe der Pyramiden ist $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, da $\overline{BD}$ senkrecht auf der Ebene durch A, C, G und E steht und durch AC halbiert wird. Also ist

$$V_0=2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\,h\right)\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{4}{9}a^2h.$$

▲2▲ Eine weitere einfache *Zerlegung* erhält man mittels ebener Schnitte durch B, D, P_1 bzw. B, D, P_2 (siehe Bild 2).

Wegen $P_1P_2 \parallel \overline{AC}$ und $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{2}{3}\overline{AN}$ ist $V(BDP_1P_2)=\frac{2}{3}V(BDP_1A)$. Folglich gilt

$$V_0=2\cdot V(BDP_1A)+\frac{2}{3}\cdot V(BDP_1A)$$
$$=\frac{8}{3}\cdot V(BDP_1A)=\frac{8}{3}\cdot V(ABDP_1)$$
$$=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\cdot h\right)=\frac{4}{9}a^2h.$$

▲3▲ Geht man von der *Entstehung des Körpers* aus, so liegt es nahe, zunächst das Volumen jener Teile zu bestimmen, die vom ursprünglichen Quader abzutrennen sind. Die Bilder 3a und 3b vermitteln eine geäußerte Vorstellung, welche (leicht zu berechnenden) Teile dies sein könnten. Da sind zunächst die Pyramide $ABFEP_1$ und die dazu kongruente Pyramide $CDHGP_2$; ihre Grundflächen haben offensichtlich den Inhalt ah und ihre Höhen sind gleich der Dreieckshöhen von P_1 auf die Seite $\overline{EF}$ (des Dreiecks EFP_1), also aus Ähnlichkeitsgründen gleich $\frac{1}{3}\overline{FG}=\frac{a}{3}$. Demnach ist ihr Volumen $V_1=\frac{1}{3}(ah)\cdot\frac{a}{3}=\frac{1}{9}a^2\cdot h$.

Ferner werden die Pyramide $BCGFP_1$ und die dazu kongruente Pyramide $DAEHP_2$ herausgenommen. Völlig analoge Betrachtungen ergeben eine Höhe von $\frac{2}{3}a$. Also ist ihr Volumen $V_2=\frac{1}{3}(ah)\cdot\frac{2}{3}a=\frac{2}{9}a^2\cdot h$. Insgesamt erhalten wir

$$V_0=a^2h-2V_1-2V_2=\frac{3}{9}a^2h.$$

Dies stimmt nicht mit dem bisherigen Ergebnis überein! Wo steckt hier der Fehler? Natürlich. Die zweite Abspaltung (Bild 3b) setzt voraus, daß $\overline{CP_1}$ und $\overline{BP_2}$ in einer gemeinsamen Ebene liegen. Das ist jedoch nicht möglich, da wegen $P_1P_2 \parallel AC$ die Ebene durch C, P_1, P_2 die Grundfläche $ABCD$ längs AC schneidet. (Für diejenigen von euch, die sich irreführen ließen, sei zum Trost gesagt, daß sich hier auch Menschen täuschen ließen,

Bild 1

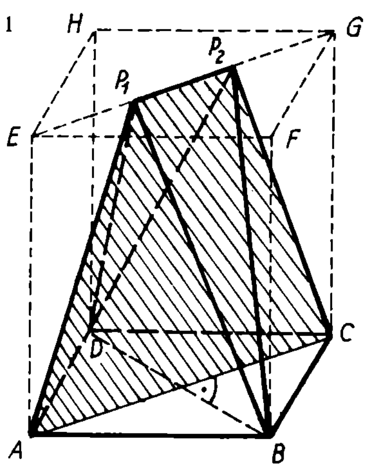


Bild 2

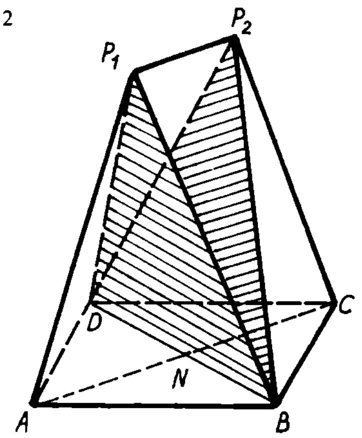


Bild 3a

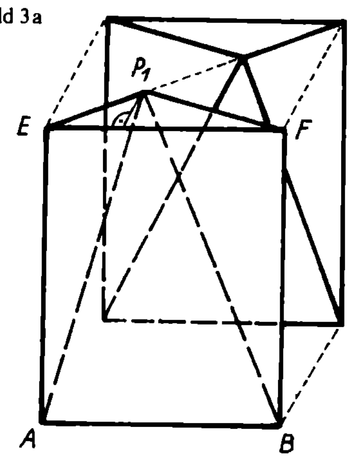


Bild 3b

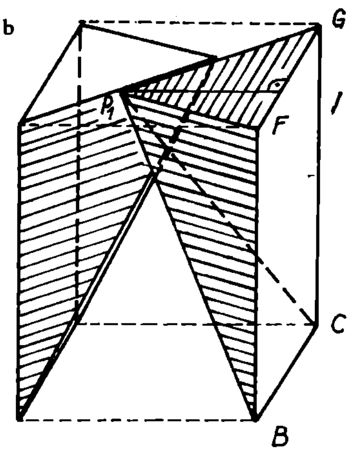


Bild 4

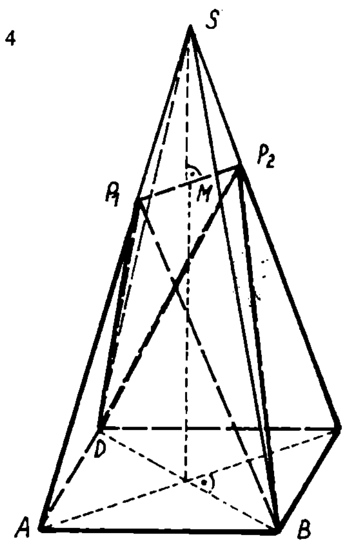
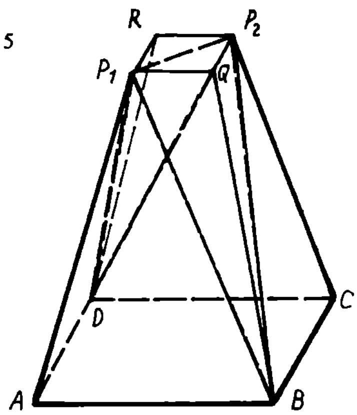


Bild 5



die von Berufs wegen ein gutes Vorstellungsvermögen brauchen. Aus Fehlern kann man lernen; also das nächste Mal kritischer bei räumlichen Betrachtungen sein!)

Nun wollen wir den Fehler schnell beheben. Anstelle der Pyramide $BCGFP_1$ sind einfach die Pyramiden P_1P_2FB und $BCGFP_2$ zu nehmen. Der Inhalt des Dreiecks P_1P_2F ist wegen $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{EG}$ gleich dem Drittel des Inhalts von EGF, also $\frac{1}{6}a^2$. Folglich ist $V(P_1P_2FB)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{6}\cdot h=\frac{1}{18}a^2h$. Die Pyramide $BCGFP_2$ jedoch ist offensichtlich kongruent zu $ABFEP_1$. Demnach ist

$V_0=a^2h-4V_1-2V(P_1P_2FB)=\frac{4}{9}a^2h$.

▲4▲ Das Volumen des Körpers kann deshalb nicht unmittelbar angegeben werden, weil es keiner der einfachen Körper mit bekannter Volumenformel ist. Darum wäre zu versuchen, ihn durch Anfügen von einfachen Körpern *zu einem einfachen Körper* mit bekannter Volumenformel zu *ergänzen.*

Die Verlängerungen der Kanten $\overline{AP_1}$ und $\overline{CP_2}$ schneiden sich in einem Punkt S. Das Dreieck ACS ist gleichschenklig. Aus dem Körper entsteht nun offenbar durch Anfügen der zueinander kongruenten Pyramiden P_1P_2SB und P_1P_2SD die Pyramide $ABCDS$ (siehe Bild 4). Wegen $P_1P_2 \parallel AC$ und $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ ist $\overline{SM}:(\overline{SM}+h)=1:3$ und damit $\overline{SM}=\frac{h}{2}$. Also ist

$V(ABCDS)=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{3}{2}h=\frac{1}{2}a^2h$. Weiterhin hat das Dreieck P_1P_2S den Inhalt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}\,a\cdot h$.

Da das Lot von B auf die Ebene durch P_1, P_2, S (und A, C) nach unseren räumlichen Darlegungen unter 1. die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ besitzt, gilt

$V(P_1P_2SB)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}ah\right)\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{36}a^2h$. Zusammen ergibt sich

$V_0=\frac{1}{2}a^2h-2\cdot\frac{1}{36}a^2h=\frac{4}{9}a^2h$.

▲5▲ Wir *ergänzen* den Körper zum Pyramidenstumpf $ABCDP_1QP_2R$ mit quadratischer Deckfläche P_1QP_2R (siehe Bild 5). Dies ist möglich, da $P_1P_2 \parallel AC$ und $ABCD$ Quadrat ist. Wegen $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ hat das Quadrat den Inhalt $\left(\frac{a}{3}\right)^2$; das Volumen des Pyramidenstumpfes ist demnach

$\frac{1}{3}\left(a^2+\frac{a^2}{9}+\sqrt{a^2\cdot\frac{a^2}{9}}\right)\cdot h=\frac{13}{27}a^2h$.

Weiterhin ist

$V(P_1P_2QB)=V(P_1P_2RD)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{9}\right)\cdot h$
$=\frac{1}{54}a^2h$.

Folglich ist

$V_0=\frac{13}{27}a^2h-2\cdot\frac{1}{54}a^2h=\frac{4}{9}a^2h$.

Überlegt euch nun selbst weitere geeignete Zerlegungen (etwa mit der Pyramide $ABCDM$ bzw. Ergänzungen (etwa zu einem dreiseitigen Prisma mit EG als Mantelkante). Wer von euch diese Aufgabe auch gern mit allgemeineren Methoden lösen möchte, dem wollen wir die Simpson-Formel (speziell die *Keplersche Faßformel;* siehe *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, S. 236 und 607 (9. Aufl. 1974)) empfehlen: Da der Inhalt der Schnittfläche, die durch einen ebenen Körperschnitt parallel zur Grundfläche, die durch einen ebenen Körperschnitt parallel zur Grundfläche entsteht, eine quadratische Funktion von der Schnitthöhe x ist

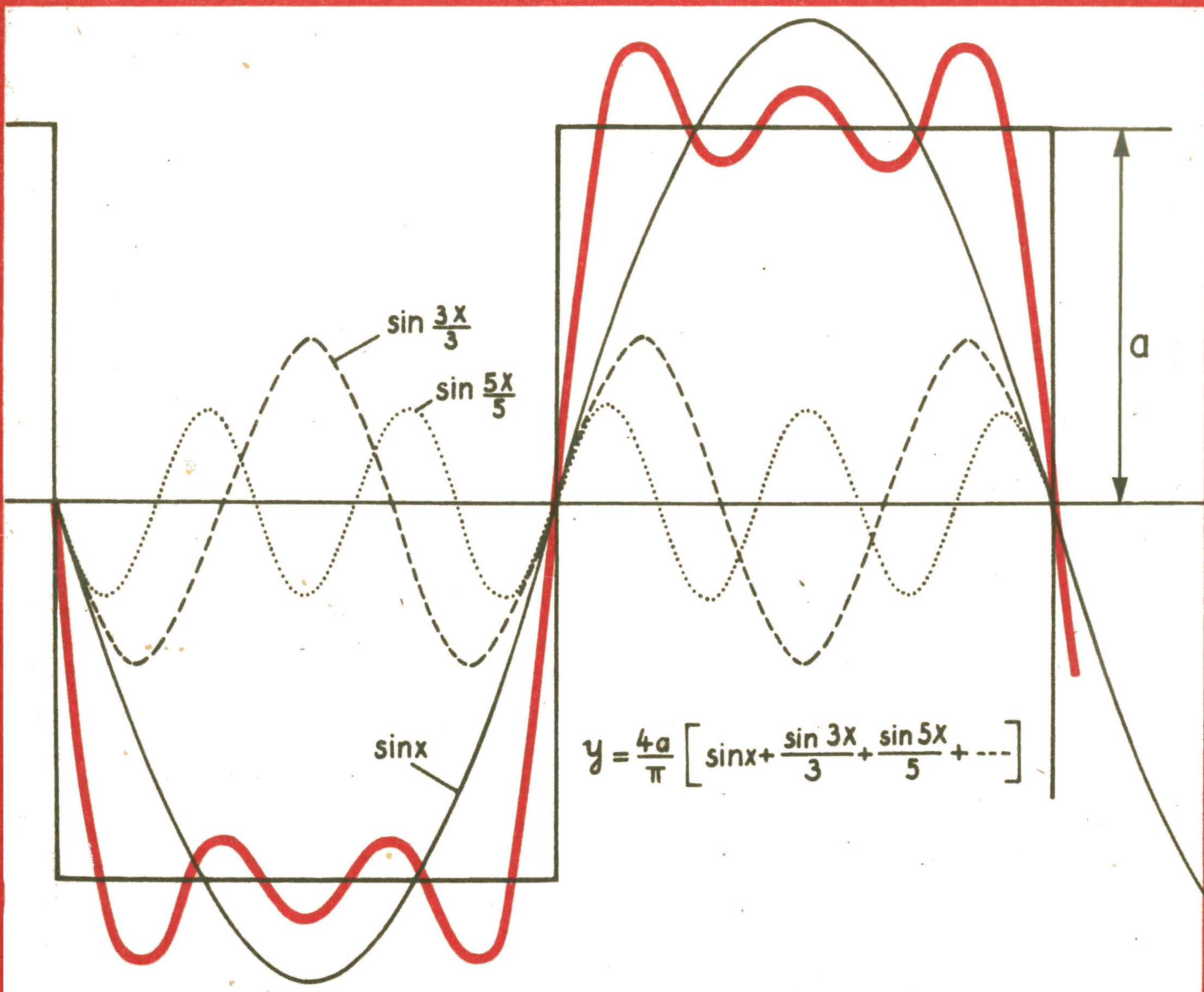
[durch einige einfache Rechnungen erhält man $F_x=\frac{a^2}{3h^2}(h-x)(3h-x)$], gilt (exakt)

$V_0=\frac{h}{6}(F_0+4F_{\frac{h}{2}}+F_h)$
$=\frac{h}{6}\left(a^2+4\cdot\frac{5}{12}a^2+0\right)=\frac{4}{9}a^2h$.

L. Dimenstein/E. Quaisser

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 100); Vignetten: „Wurzel“, Jena (S. 108); Horst Alisch, Berlin; H. Fink, Magdeburg; Leneuren, Berlin; B. Zlatanow, Sofia

Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 25. Juni 1976

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mit Zeichenstift und Schablone

Wir lösen Gleichungen mit einer Variablen

1. Problemstellung

Beim Lösen von eingekleideten oder Anwendungsaufgaben stößt man häufig auf Gleichungen mit einer Variablen.

Aufgabe:

Vier Schüler kaufen auf gemeinsame Kosten einen Ball. Der erste steuert die Hälfte des dabei benötigten Betrags bei, der zweite ein Drittel dessen, was die übrigen drei geben, der dritte ein Viertel dessen, was die übrigen drei geben, und der vierte die restlichen 25 Pfennig. Wie teuer ist der Ball? (OJM 1966, Klasse 9) Diese Aufgabe kann mit Hilfe der linearen Gleichung

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+0{,}25=x$$

gelöst werden.

Aufgabe:

Ein Motorboot fährt 28 km stromabwärts, um dann, nach rascher Wendung, zu seinem Ausgangspunkt zurückzukehren. Von der Abfahrt bis zur Ankunft sind (ohne Berücksichtigung der Wendezeit) 7 Stunden vergangen. Mit welcher Geschwindigkeit $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ würde sich das Motorboot in einem stehenden Gewässer fortbewegen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt und wenn die Leistung des Motors konstant ist?

Die Aufgabe führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2-8x-9=0.$$

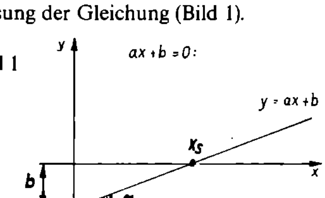
Manche Gleichungen mit einer Variablen (so z. B. auch die in den beiden Aufgaben angegebenen) kann man rechnerisch lösen. Die lineare Gleichung $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ liefert als Lösung $x=-\frac{b}{a}$. Als Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $x^2+px+q=0$ erhält man $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$, wobei x_1 und x_2 reell sind, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geq 0$ gilt. Solche Lösungsformeln gibt es auch für kubische Gleichungen (*Cardanische Formel*) und für Gleichungen vierten Grades.

Es gibt jedoch auch Gleichungen, die man nicht mit Hilfe von Formeln rechnerisch lösen kann, so z. B. die allgemeine algebraische Gleichung n-ten Grades der Form
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$,
$a_n\neq 0$; $a_0, \ldots, a_n$ reelle Zahlen; $n\geq 5$ (Der Mathematiker Abel hat folgendes Ergebnis bewiesen: Es gibt für die allgemeine Gleichung n-ten Grades, wenn $n\geq 5$ ist, keine Formel, die die Lösungen der Gleichung durch die Koeffizienten mit Hilfe von Radikalen ausdrückt)
und transzendente Gleichungen, wie z. B.
$3\sin x-x=0$, $\tan x-x=0$ oder $e^x-x=0$.
Man versucht, solche Gleichungen grafisch zu lösen. Mit Hilfe gewisser Verfahren (Iterationsverfahren) kann man die zeichnerisch gewonnene Näherungslösung verbessern.
In diesem Beitrag wollen wir einfache Gleichungen mit einer Variablen mit Zeichenstift und Schablone lösen und einige praktische Hinweise zur grafischen Lösung solcher Gleichungen zusammenstellen.

2. Wie helfen uns Lineal und Schablone?

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen, also eine Gleichung der Form $ax+b=0$, kann man grafisch (mit Lineal und Zeichenstift) lösen, indem man die lineare Funktion $y=f(x)=ax+b$ (Gerade mit dem Anstieg a und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y_s=b$) zeichnet. Die Abszisse des Schnittpunktes x_s der Geraden mit der x-Achse, die Nullstelle der Funktion $y=f(x)$, ist die Lösung der Gleichung (Bild 1).

Bild 1



Am Beispiel der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0$; a, b, c sind reelle Zahlen) soll nun die Verwendung der Schablone für die Kurve der Funktion $y=x^2$ erläutert werden. Zur grafischen Lösung der gegebenen Gleichung geht man auch zur Funktion $y=ax^2+bx+c$ über, zeichnet diese mit Hilfe der Schablone und ermittelt die Nullstellen x_s. Das sind, falls solche existieren, die Lösungen der Gleichung. Um die Anwendungsmöglichkeiten der Schablone zu demonstrieren, werden zuerst verschiedene Spezialfälle betrachtet.

1. Fall: $y=x^2$

Die Kurve ist eine Parabel, die nach oben geöffnet ist, mit dem Scheitelpunkt $S(0, 0)$. Eine Nullstelle liegt bei $x_s=0$. Die Kurve kann mit der Schablone gezeichnet werden, indem man diese in $S(0, 0)$ anlegt. Die Achse der Parabel fällt mit der y-Achse zusammen.

2. Fall: $y=ax^2$

Falls $a>1$ ist, erhält man eine nach oben geöffnete gestreckte Parabel mit $S(0, 0)$. Falls $1>a>0$ gilt, ist die Parabel gestaucht. Falls $a<0$ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet (Bild 2).

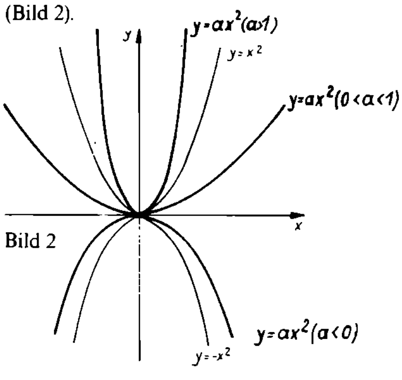
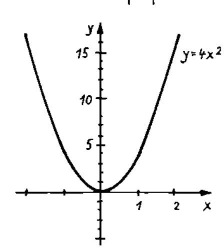


Bild 2

Eine Nullstelle liegt ebenfalls bei $x_s=0$. Das Bild der Funktion $y=ax^2$ kann man mit Hilfe der Schablone $y=x^2$ zeichnen, indem man auf der y-Achse den Maßstab entsprechend ändert, die Parabel in $S(0, 0)$ anlegt, und zwar nach oben geöffnet, falls $a>0$ ist, und nach unten geöffnet, falls $a<0$ ist. Die Achse fällt mit der y-Achse zusammen. Der Maßstab auf der y-Achse wird so geändert, daß der Strecke 1 auf der x-Achse die Strecke $|a|$ auf der y-Achse entspricht (Bild 3: $y=4x^2$). Die Einheit auf der y-Achse hat also im Vergleich zur Einheit auf der x-Achse (Länge 1) die Länge $\frac{1}{|a|}$.

Bild 3



Einheit auf der x-Achse: 1 [cm]

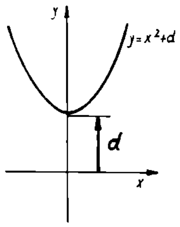
Einheit auf der y-Achse: $\frac{1}{|a|}\triangleq\frac{1}{4}$ [cm]

3. Fall: $y=x^2+d$

Die Achse der Parabel fällt mit der y-Achse zusammen, und der Scheitelpunkt liegt bei $(0, d)$. Die Parabel ist also, wenn $d>0$ ist, in Richtung der positiven y-Achse ($(+y)$-Achse), wenn $d<0$, in Richtung der negativen y-Achse ($(-y)$-Achse) verschoben (Bild 4).

4. Fall: $y=(x+e)^2$
Man erhält eine Parabel, deren Achse parallel zur y-Achse verläuft. Die Parabel ist nach oben geöffnet, und der Scheitelpunkt liegt bei $(-e, 0)$.

Bild 4



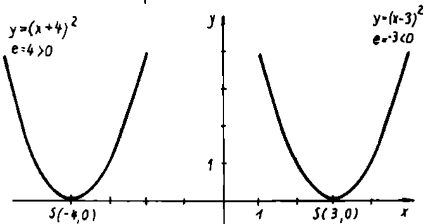


Bild 5

Die Parabel ist bei $e>0$ in Richtung der negativen x-Achse, bei $e<0$ in Richtung der positiven x-Achse verschoben (Bild 5).
Nach Betrachtung dieser Spezialfälle ist es möglich, die Kurve der Funktion

$$y=ax^2+bx+c$$

zu zeichnen.
Eine Umformung ergibt

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \text{ oder}$$
$$y=a(x+e)^2+d.$$
$$\text{mit} \quad e=\frac{b}{2a} \text{ und } d=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Die Kurve kann mit Hilfe der Schablone gezeichnet werden. Die Achse der Parabel verläuft parallel zur y-Achse. Es muß die Öffnung der Parabel beachtet werden ($a>0$: nach oben geöffnet; $a<0$: nach unten geöffnet) und bei Streckung bzw. Stauchung ist der Maßstab auf der y-Achse entsprechend zu wählen (eine Einheit hat, falls auf der x-Achse die Einheit 1 cm ist, die Länge $\frac{1}{|a|}$ cm). Der Scheitelpunkt liegt dann bei $S\left(-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right)$.
Zusammenfassend ergibt sich:
$y=a(x+e)^2+d$
d: Verschiebung in Richtung der y-Achse
($d>0$: Verschiebung in Richtung $(+y)$-Achse
$d<0$: Verschiebung in Richtung $(-y)$-Achse).
e: Verschiebung in Richtung der x-Achse:
($e>0$ Verschiebung in Richtung $(-x)$-Achse;
$e<0$ Verschiebung in Richtung $(+x)$-Achse).

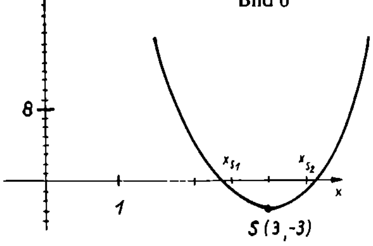


Bild 6

a: Streckung bzw. Stauchung; Öffnung der Parabel
Beispiel: Es ist die Gleichung

$$8x^2-48x+69=0 \text{ mit Hilfe}$$

von Zeichenstift und Schablone zu lösen.
Die Umformung ergibt
$8(x-3)^2+69-72=8(x-3)^2-3=0.$
Es ist die Kurve der Funktion

$$y=8(x-3)^2-3 \text{ zu zeichnen,}$$

also mit Hilfe der Schablone $y=x^2$ die Parabel mit $S(3,-3)$, Öffnung nach oben und Achse parallel zur y-Achse. Der Maßstab auf y-Achse wird entsprechend 1:8 geändert (Bild 6). Als Nullstellen erhält man $x_{s_1}\approx 3{,}6$ und $x_{s_2}\approx 2{,}4$
Das sind die Lösungen der Gleichung.

Aufgaben:

▲1▲ Man zeichne
$y=3x,\ y=-\frac{1}{3}x,\ y=(x-3)^2,\ y=x^2-5$ und $y=-3(x-2)^2+4$!

▲2▲ Man löse die Gleichung
$4x^2+8x+6=0$ grafisch!
Ähnliche Überlegungen wie bei der Darstellung der quadratischen Funktion kann man auch für andere Funktionen anstellen, so u. a. für die Funktionen

$$y=a(x-e)^3+f \text{ und}$$
$$y=a\sin(x-c)+d.$$

Man kann nach diesen Betrachtungen Gleichungen der Form

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \text{ bzw.}$$
$$a\sin(x-c)+d=0$$

unter Verwendung der Schablonen für $y=x^3$ bzw. $y=\sin x$ lösen.

▲3▲ Es sind die Betrachtungen für die Funktionen
$y=a(x-e)^3+f$ und $y=a\sin(x-c)+d$
durchzuführen!

▲4▲ Es sind die Gleichungen
$4x^3-24x^2+48x-30=0$ und
$3\cdot\sin(x-2)+1=0$
grafisch mit Hilfe von Schablonen zu lösen.

3. Wie kann man allgemein Gleichungen mit einer Variablen grafisch lösen?

Es sollen nun allgemein Gleichungen mit einer Variablen der Form

$$f(x)=0 \text{ betrachtet werden.}$$

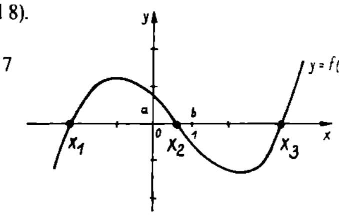
Diese Gleichung kann man grafisch lösen, indem man das Bild der Funktion

$$y=f(x)$$

zeichnet und die Nullstellen x_i bestimmt (Bild 7). Dabei kann man die Betrachtungen des vorhergehenden Abschnittes verwenden und bei der grafischen Darstellung, soweit das möglich ist, auch Schablonen benutzen.
Will man die Genauigkeit der Näherungslösung erhöhen, so kann man das z. B. erreichen durch Veränderung des Maßstabes auf der x-Achse, durch ein *Auseinanderziehen* des Intervalls (a, b), in dem die Nullstelle liegt.

In Bild 7 liegt die Nullstelle x_2 zwischen 0 und 1 (im Intervall (0, 1)). Dieses Intervall wird *auseinandergezogen*. Wenn man jetzt in dem Intervall die Kurve zeichnet, läßt sich die Genauigkeit der Näherungslösung erhöhen (Bild 8).

Bild 7



Nullstellen von $y=f(x)$: x_1, x_2 und x_3
Lösungen der Gleichung $f(x)=0$: x_1, x_2 und x_3

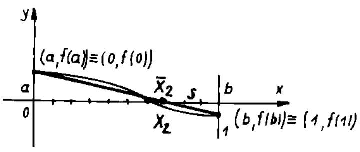
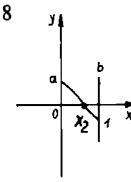


Bild 8



s: Sehne
$\bar{x}_2$: Näherungswert für x_2

Da das Zeichnen der Kurve im jeweiligen Intervall (a, b) meist schwierig ist, kann man auch nach dem *Auseinanderziehen* die Kurve ersetzen durch die Sehne s zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (Bild 8). Der Schnittpunkt der Sehne s mit der x-Achse liefert einen Näherungswert $\bar{x}$ für die Wurzel. Durch weitere Verkleinerung des Intervalls, in dem der exakte Wert x der Wurzel liegt, durch *Auseinanderziehen* dieses verkleinerten Intervalls, durch Zeichnen der Sehne anstelle der Kurve in dem neuen Intervall erhält man eine weitere Verbesserung. Man kann diesen Prozeß fortsetzen, muß allerdings beachten, daß die Wurzel x im Intervall bleibt (es muß gelten $f(a)\cdot f(b)<0$; d. h., $f(a)$ und $f(b)$ müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben).
Manchmal ist es auch zweckmäßig, die Gleichung

$$f(x)=0$$

durch äquivalente Umformung auf die Form

$$x=\phi(x)$$

oder auf die Form

$$\phi_1(x)=\phi_2(x) \text{ zu bringen.}$$

Die Umformung muß allerdings dann so erfolgen, daß die Kurven von $y=\phi(x)$ bzw. $y=\phi_1(x)$ und $y=\phi_2(x)$ einfacher (evtl. mit Schablone) zu zeichnen sind. Die Nullstellen der Funktion $y=f(x)$ (Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$) erhält man dann, indem man die Kurven der Funktionen

$$y=x \text{ und } y=\phi(x) \text{ bzw.}$$
$$y=\phi_1(x) \text{ und } y=\phi_2(x)$$

zeichnet. Die Abszissen der Schnittpunkte sind die gesuchten Wurzeln (Bild 9).
Beispiele:
1. Es ist die Gleichung $x^3-3x-1=0$ grafisch zu lösen!

Bild 9

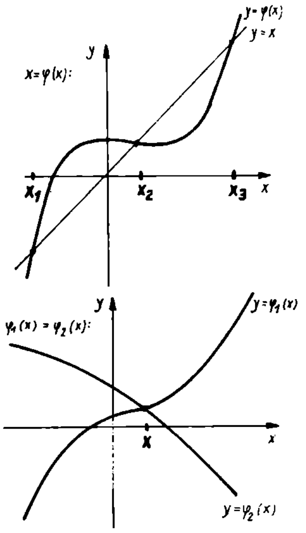
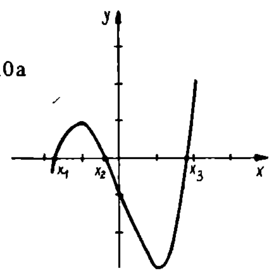


Bild 10a



a) Grafische Darstellung von $y=x^3-3x-1$ unter Verwendung der Wertetabelle

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

Aus dem Bild 10a ist zu erkennen, daß die Kurve der Funktion die x-Achse in drei Punkten schneidet. Die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln x_1, x_2 und x_3, in den Intervallen $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ und $(1, 2)$.

b) Auseinanderziehen des Intervalls $(-1, 0)$ zur genaueren Bestimmung der Wurzel x_2. Dabei wird anstelle der Kurve jeweils die Sehne s gezeichnet (Bild 10b).

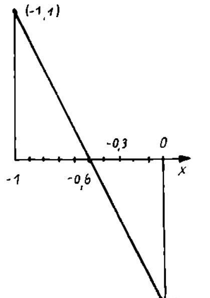
c) Umformung liefert $x^3=3x+1$. Die Darstellung ist in Bild 10c angegeben.

2. Es ist die Gleichung $(x+1)^3+e^{x+3}=1$ zu lösen.

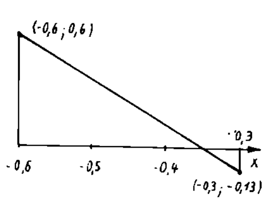
Umformung ergibt

$(x+1)^3=1-e^{x+3}\approx 1-20e^x$.

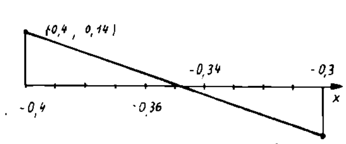
Bild 10b



$x_2=-0{,}5$
$x_2\in(-0{,}6; -0{,}3)$
$f(-0{,}6)>0$
$f(-0{,}3)<0$

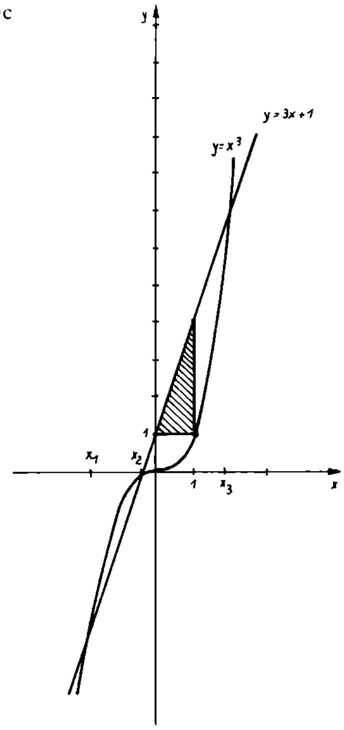


$x_2\approx -0{,}35$
$x_2\in(-0{,}4; -0{,}3)$
$f(-0{,}4)>0$
$f(-0{,}3)<0$



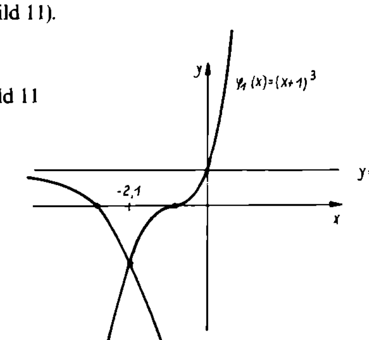
$x_2\approx -0{,}35$
$x_2\in(-0{,}36; -0{,}34)$
$f(-0{,}35)>0$
$f(-0{,}34)<0$

Bild 10c



Es werden mit Hilfe der Schablone die Kurven der Funktionen $\phi_1(x)=(x+1)^3$ und $\phi_2(x)=1-20e^x$ gezeichnet. Als Abszisse des Schnittpunktes erhält man $x_S\approx -2{,}1$ (Bild 11).

Bild 11



Aufgaben:

▲1▲ Man löse grafisch $x^3-4x^2+2=0$.

▲2▲ Es sind
a) $x-\tan x=0$,
b) $x-3\sin x=0$
c) $x^2-2-\ln x=0$ grafisch zu lösen!

J. Gronitz

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Manfred Schneider

Direktor der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

▲1537▲ Bei der Messung der Spannweite einer Brücke ist die an einem Ufer gelegene Basislinie $200\pm 0{,}01$ m lang. Gemessen wurden die Winkel zwischen der Basislinie und der Richtung von ihren Enden zu dem auf dem anderen Flußufer gelegenen Punkt. Sie sind $90°\pm 1°$ bzw. $60°\pm 1°$.
Mit welcher Genauigkeit kann man aus diesen Angaben die Länge der Brücke berechnen?

Wir stellen vor:
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

Unsere *Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt* ist noch eine sehr junge Bildungseinrichtung. Sie feierte 1973 ihr 25jähriges Bestehen. Das Mathematische Institut der TH Karl-Marx-Stadt begann 1954 seine Tätigkeit mit einem Hochschullehrer und zwei wissenschaftlichen Mitarbeitern. Heute sind an der Sektion Mathematik 16 Hochschullehrer und 105 wissenschaftliche Mitarbeiter beschäftigt. An der Sektion werden Diplommathematiker mit der Spezialisierungsrichtung *Numerische Mathematik* und *Mathematische Methoden der Operationsforschung* sowie *Diplomlehrer* für die Fachkombination *Mathematik/Physik* ausgebildet. Außerdem ist die Sektion verantwortlich für die Mathematikausbildung aller an unserer Hochschule vertretenen Fachrichtungen. Das sind neben den bereits genannten die Fachrichtungen Maschineningenieurwesen, Elektroingenieurwesen, Wirtschaftswissenschaften, Physik, Lehrer für Physik/Mathematik, Lehrer für Polytechnik und Berufsschullehrer für Maschineningenieurwesen und Elektroingenieurwesen. Im Rahmen der vielseitigen und umfangreichen Ausbildungsaufgaben der Sektion werden in jeder Studienrichtung sowohl in gesellschaftlicher als auch in fachlicher Hinsicht hohe Anforderungen gestellt. Bei der Ausbildung der Mathematikstudenten wird großer Wert auf Beziehungen zur Praxis gelegt. Dazu erge-

ben sich an unserer Technischen Hochschule durch die Zusammenarbeit mit den technischen Sektionen vielfältige Möglichkeiten. Bei der Ausbildung der Lehrerstudenten arbeiten wir eng mit den Organen der Volksbildung des Territoriums zusammen, um bereits vom ersten Tag des Studiums an die Studenten mit den Aufgaben ihres zukünftigen Berufes in Verbindung zu bringen.
Zur Förderung mathematisch begabter Schüler gibt es an unserer Sektion eine Spezialklasse für Mathematik (11. und 12. Klasse), an der jährlich 25 Schüler ihr Abitur erwerben und sich vertieft mit Fragen der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik befassen. Viele ehemalige Schüler dieser Klasse haben durch eine rechtzeitige Einbeziehung in die Forschungsarbeiten der Sektion heute bereits ihre Promotion abgeschlossen und arbeiten als Mitarbeiter an unserer Sektion oder an anderen wissenschaftlichen Einrichtungen.
Unsere Sektion ist in der Forschung verantwortlich für die Leitung der Hauptforschungsrichtung *Numerische Mathematik* in der DDR. Kennzeichnend für die mathematischen Forschungsarbeiten unserer Sektion sind vielfältige und enge Verbindungen zu wissenschaftlichen Einrichtungen der Sowjetunion, z. B. zum Rechenzentrum der *Akademie der Wissenschaften der UdSSR* in Moskau und zur *Fakultät für Numerische Mathematik und Kybernetik der Staatlichen Universität Moskau* und anderer sozialistischer Staaten. Viele Mitarbeiter unserer Sektion absolvierten ein Zusatzstudium oder eine Aspirantur an sowjetischen Einrichtungen.
Unsere Sektion veranstaltet jährlich Tagungen und Weiterbildungsveranstaltungen auf dem Gebiet der Numerischen Mathematik, zu denen wir auch viele ausländische Gäste begrüßen können. Große Aufmerksamkeit schenken wir der Verbindung von mathematischer Forschung mit Problemen der Praxis. Die Sektion arbeitet dazu eng mit einer Reihe von Einrichtungen der Volkswirtschaft der DDR und mit technischen Sektionen unserer Hochschule zusammen.
Neben der mathematischen Forschung beschäftigt sich auch eine Gruppe mit Problemen der Methodik des Mathematikunterrichts.
Eine weitere wichtige Aufgabe der Sektion ist die Weiterbildung von Hoch- und Fachschulkadern sowie die Unterstützung der Lehrerweiterbildung im Bezirk Karl-Marx-Stadt. Im Rahmen eines Jugendobjekts unterstützt die Sektion die außerunterrichtliche Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik im Bezirk. Wir beteiligen uns an der Gestaltung der Mathematik-Olympiaden, führen mit mathematisch interessierten Schülern Korrespondenzzirkel durch und beteiligen uns an der Weiterbildung von Arbeitsgruppenleitern auf dem Gebiet der Mathematik.

J. Gronitz

alpha stellt vor: Kerstin Rudorf

W.-Komarow-OS, Karl-Marx-Stadt, Kl. 9

Seit meiner frühesten Jugend habe ich schon immer gern „geknobelt". Viel Anregung erhielt ich durch meine Eltern, die beide einen technischen Beruf ausüben, und oft sitze ich mit meiner gleichaltrigen Schwester und dem ein Jahr jüngeren Bruder über mathematischen Problemen.
Nachdem ich einmal die *alpha* entdeckt hatte und es mir gelungen war, das *alpha*-Abzeichen zu erreichen, begann ich, mich intensiv mit der Mathematik zu befassen. Die *alpha* ist auch heute noch eine große Hilfe für mich. Auch durch meine Mathematik-Lehrerin erhielt ich eine gute Unterstützung. Seit dem 8. Schuljahr nehme ich an den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR teil. Meine guten Leistungen waren Anlaß, mich in das Mathematikzentrum des Pionierhauses *Juri Gagarin* Karl-Marx-Stadt zu delegieren. Außerdem bin ich seit vergangenem Jahr Mitglied des Bezirkskorrespondenzzirkels.
Mein schönster Erfolg war die Teilnahme an der diesjährigen DDR-Olympiade in Berlin-Bogensee. Dort erhielt ich als Frühstarter (aus Klasse 9) in der Olympiadeklasse 10 einen 3. Preis.

Fibonaccische Zahlen

In letzter Zeit habe ich mich oft mit Zahlentheorie beschäftigt. Heute will ich die *alpha*-Leser mit den Fibonaccischen Zahlen vertraut machen. Sie entstanden aus einer Aufgabe von Leonardo von Pisa mit dem Beinamen Fibonacci (um 1170 bis 1250).

Aufgabe:
Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein Gehege, um zu erfahren, wieviel Nachkommen es im Laufe eines Jahres haben wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß jedes Paar monatlich ein neues Paar zur Welt bringt und daß die Kaninchen erst im Alter von 2 Monaten gebären können. Man erhält folgendes Ergebnis:

Monat	1	2	3	4	5
Anzahl d. Kaninchenpaare		2	3	5	8	13

Monat	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl d. Kaninchenpaare	21	34	55	89	144	233	377

Zu diesem Ergebnis kommt man, indem man die 1. Zahl zur zweiten, die zweite zur dritten Zahl usw. addiert. Auf diese Weise erhält man die *Folge der Fibonaccischen Zahlen*.
Für die Folge u_1; u_2; u_3; ...; u_n der Fibonaccischen Zahlen gilt:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ und } u_1 = u_2 = 1$$

Einige interessante Eigenschaften dieser Zahlenfolge sind:
1. Wenn man die Summe der ersten n Zahlen berechnen will, erhält man aus
$u_1 = u_3 - u_2,\ u_2 = u_4 - u_3,\ \ldots,\ u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$
durch Addition der Gleichungen

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - u_2$$
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$$

2. Die Summe der Fibonaccischen Zahlen mit ungeraden Indizes beträgt:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = u_{2n}$$

Beweis: Es ist
$u_1 = u_2,\ u_3 = u_4 - u_2,\ u_5 = u_6 - u_4,\ \ldots,$
$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$
Man erhält ebenfalls durch Addition der Gleichungen: $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$
3. Die Summe der Fibonaccischen Zahlen mit geraden Indizes ist
$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$
Zum Beweis subtrahiert man die Gleichung 2. von der Gleichung 1.
$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = (u_{2n+2} - 1) - u_{2n}$
$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$
4. Durch vollständige Induktion kann die Formel $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$
bewiesen werden. Beweis: Für $m=1$ gilt
$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2 = u_{n-1} + u_n$
Für $m=2$ gilt
$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = (u_{n-1} + u_n) + u_n = u_{n+1} + u_n$
was beides richtig ist. Wenn man annimmt, daß die Formel für $m=k$ und für $m=k+1$ gilt und daraus folgern kann, daß sie auch für $m=k+2$ gilt, dann ist die Aussage bewiesen.
Durch Addition von
$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$ und
$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$ erhält man
$u_{n+k+2} = u_{n-1}(u_k + u_{k+1}) + u_n(u_{k+1} + u_{k+2})$
$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$,
was zu beweisen war.
5. Es ist zu beweisen: Wenn n durch m teilbar ist, dann ist auch u_n durch u_m teilbar. Diesen Satz beweist man ebenfalls durch vollständige Induktion. Es sei $n=mk$, dann gilt für $k=1 \cdot n=m$. Daraus folgt u_n ist durch u_m teilbar. Angenommen, u_{mk} ist durch u_m teilbar, dann gilt für $u_{m(k+1)} = u_{mk} + u_m$ wegen der Gleichung 4.: $u_{m(k+1)} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m-1}$
$u_{mk-1}u_m$ ist durch u_m teilbar. Da u_{mk} durch u_m teilbar ist, ist auch $u_{mk}u_{m+1}$ durch u_m teilbar. Da der Satz, wenn er für $n=k$ gilt, auch für $n=k+1$ gilt, gilt er für alle k.
6. Die Fibonaccischen Zahlen kann man nach der Formel

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

die Binetsche Formel heißt, berechnen.

Aus der Kombinatorik

Hochsymmetrische kombinatorische Strukturen

1. Endliche projektive Ebenen

Fügen wir zu jeder Geraden der gewöhnlichen (euklidischen) Ebene einen neuen, sogenannten *unendlichfernen Punkt* hinzu, und zwar so, daß zwei Geraden dann und nur dann derselbe unendlichferne Punkt zugeordnet wird, wenn die beiden Geraden parallel sind, und sagen wir ferner, daß die unendlichfernen Punkte eine Gerade (die sogenannte *unendlichferne Gerade*) bilden, so ist leicht zu sehen, daß die folgenden Aussagen gelten (zwischen den alten und den neu eingeführten Punkten und Geraden soll jetzt nicht mehr unterschieden werden):

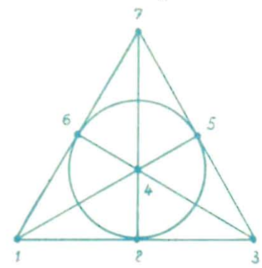
1. Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.
2. Je zwei Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam.
3. Es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Diese erweiterte Ebene nennen wir reelle projektive Ebene. Die projektive Ebene ist in vielerlei Hinsicht regelmäßiger als die gewöhnliche euklidische Ebene; für letztere gilt beispielsweise nicht die 2. Aussage.

Bisher haben wir die Aussagen 1, 2 und 3 als gewisse Sätze angesehen, die sich auf die reelle projektive Ebene beziehen. Wir wollen sie jetzt unter einem anderen Gesichtswinkel betrachten, indem wir sie als Axiome der projektiven Ebene ansehen! Was bedeutet das? Angenommen, es sei eine Menge M gegeben (eine Gesamtheit gewisser Dinge). Die Elemente der Menge M werden wir Punkte nennen. Wir wollen ferner annehmen, daß gewisse Untermengen der Menge M ausgezeichnet sind; diese Untermengen werden wir Geraden nennen. Die so definierten *Punkte* und *Geraden* sollen projektive Ebene genannt werden, wenn für sie die Aussagen 1, 2 und 3 gelten. Hiernach sehen wir, daß die oben konstruierte reelle projektive Ebene nur ein Beispiel für eine projektive Ebene darstellt, daß aber auch andere Beispiele möglich sind. Uns interessieren im folgenden solche Beispiele, bei denen M eine endliche Menge ist (also nur endlich viele Elemente besitzt). Derartige projektive Ebenen heißen endliche projektive Ebenen.

Gibt es sie überhaupt? Durchaus, und zwar ist die einfachste die in Bild 1 dargestellte. Diese Abbildung ist folgendermaßen zu verstehen: Die Elemente der Menge M (die Punkte) sind die in dem Bild von 1 bis 7 numerierten Punkte. Die Geraden sind dagegen diejenigen dreielementigen Untermengen von M, die in dem Bild auf eine Gerade fallen (also z. B. 123, 145 usw.), sowie noch eine weitere Gerade, nämlich diejenige, die in dem Bild als Kreis erscheint (also 256). Der Leser mag selbst nachprüfen, daß alle drei Axiome erfüllt sind! Eine andere Möglichkeit, dieselbe endliche projektive Ebene vorzugeben, wird mit Bild 2 geliefert: hier werden einfach nacheinander diejenigen Untermengen von M aufgezählt, die Geraden genannt werden sollen.

Bild 1



1	2	3
1	4	5
1	6	7
2	4	7
2	5	6
3	4	6
3	5	7

Bild 2

1	2	3	10
1	4	7	11
1	5	9	13
1	6	8	12
2	4	9	12
2	5	8	11
2	6	7	13
3	4	8	13
3	5	7	12
3	6	9	11
4	5	6	10
7	8	9	10
10	11	12	13

Bild 3

In Bild 3 wird die nächsteinfache endliche projektive Ebene nach einem zu dem Bild 2 ähnlichen tabellarischen Verfahren angegeben. Hier sind die Elemente der Menge M mit den Zahlen von 1 bis 13 bezeichnet, während Geraden diejenigen vierelementigen Untermengen von M genannt werden, die eine Zeile von Bild 3 bilden.

Wenn wir uns diese beiden Beispiele endlicher projektiver Ebenen näher anschauen, so können wir zu der Vermutung gelangen, daß der folgende Satz allgemein gilt:

Satz 1: Zu jeder endlichen projektiven Ebene gibt es eine natürliche Zahl n ($n \geqq 2$), so daß die folgenden Aussagen gelten:

1. Auf jeder Geraden liegen $n+1$ Punkte.
2. Durch jeden Punkt gehen $n+1$ Geraden.
3. Die Gesamtzahl der Punkte beträgt n^2+n+1.
4. Die Gesamtzahl der Geraden beträgt n^2+n+1.

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß dieser Satz in der Tat richtig ist. (Der Leser mag sich selbständig daran versuchen.)

Das fragliche n heißt Ordnung der entsprechenden endlichen projektiven Ebene. Die Ordnungen der in Bild 2 und 3 dargestellten endlichen projektive Ebenen sind $n=2$ bzw. $n=3$, also die beiden kleinstmöglichen Werte; deshalb haben wir auch gesagt, daß dies die einfachsten endlichen projektiven Ebenen sind.

Wir weisen darauf hin, daß der Satz 1 zahlreiche nichttriviale Folgerungen besitzt. Beispielsweise sehen wir sofort, daß man aus einer Menge von N Punkten sicher keine endliche projektive Ebene konstruieren kann, wenn N eine natürliche Zahl ist, die nicht die Form n^2+n+1 (mit einer geeigneten natürlichen Zahl $n \geqq 2$) hat. Diese Behauptung ist indessen, für sich allein betrachtet, keineswegs selbstverständlich!

Es liegt die Frage nahe, inwieweit der Satz 1 umkehrbar ist. Satz 1 sagt nämlich nur aus, daß zu jeder endlichen projektiven Ebene eine Zahl n existiert, die die oben formulierten Eigenschaften besitzt. Behauptet wird jedoch nicht, daß zu jeder beliebig vorgegebenen natürlichen Zahl $n \geqq 2$ sicher $(n+1)$-elementige Untermengen einer aus n^2+n+1 Elementen bestehenden Menge gewählt werden können, die eine endliche projektive Ebene bilden. Wir müßten also wissen, für welche natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ tatsächlich eine endliche projektive Ebene n-ter Ordnung existiert. Es läßt sich beweisen, daß es tatsächlich eine endliche projektive Ebene der Ordnung n gibt, wenn n eine Primzahlpotenz $n=p^k$ (p prim, $k \geqq 1$) ist.

(Der Beweis ist nicht schwer, erfordert aber gewisse algebraische Vorkenntnisse.) Ungelöst (und eines der berühmtesten ungelösten Probleme für hochsymmetrische kombinatorische Strukturen) ist dagegen das folgende *Problem 1:* Wenn eine endliche projektive Ebene der Ordnung n existiert, ist dann n notwendig Primzahlpotenz?

Wissen wir überhaupt für irgendein n, daß es keine endliche projektive Ebene n-ter Ordnung gibt? Alles, was wir in dieser Hinsicht wissen, wird in dem folgenden Satz zusammengefaßt (der Satz ist von *R. H. Bruck* und *H. J. Ryser* 1949 mittels einer sehr geistvollen algebraisch-zahlentheoretischen Überlegung bewiesen worden):

Satz 2 (Bruck-Ryser): Wenn n eine natürliche Zahl ist, die bei Division durch 4 als Rest 1 oder 2 ergibt, und n nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, so gibt es keine endliche projektive Ebene der Ordnung n.

Aus dem Satz geht beispielsweise hervor, daß keine endliche projektive Ebene der Ordnung $n=6$ existiert. Im Hinblick darauf, daß $n=2$, 3, 4, 5, 7, 8, 9 Primzahlpotenzen sind, ist der nächstfolgende fragliche Fall 10. Hierauf ist der Satz von Bruck-Ryser nicht anwendbar, weil $10=3^2+1^2$ ist.

Problem 2: Gibt es eine endliche projektive Ebene der Ordnung 10?

(Sicher wird mancher Leser meinen, warum probiert man das nicht an einer elektronischen Rechenmaschine aus? Wenn es um eine so kleine Zahl wie 10 geht, könnte doch die Rechenmaschine den ganzen Fall offensichtlich in einigen Minuten oder vielleicht einigen Sekunden durchprobieren. Die Lage ist jedoch die, daß die Anzahl der hierbei durchzuprüfenden Fälle so groß ist, daß es selbst mit den schnellsten heute bekannten Rechenmaschinen hoffnungslos lange Zeit dauern würde.)

Wir wollen uns jetzt einer anderen Frage zuwenden: Sind bei festem n die endlichen projektiven Ebenen allesamt *gleichartig?*

Unter *gleichartig* verstehen wir, daß sie sich nur in der Bezeichnung unterscheiden, d. h., präzis formuliert: Zwei endliche projektive Ebenen der Ordnung n heißen dann *gleichartig*, man sagt auch isomorph, wenn man den Punkten der einen umkehrbar eindeutig die Punkte der anderen so zuordnen kann, daß irgendwelche Punkte in der einen projektiven Ebene genau dann eine Gerade bilden, wenn die ihnen entsprechenden Punkte in der anderen projektiven Ebene eine Gerade bilden.

Der Leser kann ohne sonderliche Schwierigkeit beweisen, daß je zwei endliche projektive Ebenen zweiter Ordnung isomorph sind. Gleichfalls isomorph sind je zwei projektive Ebenen der Ordnung n im Falle $n=3, 4, 5, 7$ und 8 (der Beweis wird aber immer schwerer). Für $n=9$ ist die entsprechende Behauptung jedoch nicht mehr richtig: es gibt 4 wesentlich verschiedene (also paarweise nichtisomorphe) endliche projektive Ebenen der Ordnung 9. Es ist bekannt, daß es für $n=p^k>8$ (p prim, $k>1$) stets wenigstens zwei nichtisomorphe endliche projektive Ebenen n-ter Ordnung gibt. Ungelöst ist jedoch das folgende

Problem 3: Sind je zwei endliche projektive Ebenen der Ordnung p(p prim) isomorph?

Die Frage nach der Existenz und Isomorphie endlicher projektiver Ebenen stellt freilich nur einen kleinen Teil der hier untersuchten Fragen dar. Die am ausgiebigsten untersuchte (und natürlichste) Frage ist die, wie die existierenden endlichen projektiven Ebenen beschaffen sind. Ein solches Problem möchte ich als Kostprobe angeben.

Wir möchten eine solche Teilmenge der Punkte einer endlichen projektiven Ebene n-ter Ordnung auswählen, daß jede Gerade mindestens einen der ausgewählten Punkte enthält. (Wir wollen eine solche Punktmenge repräsentierendes Punktesystem nennen.)

Es ist leicht zu sehen, daß ein repräsentierendes Punktesystem mindestens $n+1$ Punkte enthalten muß. Man sieht auch leicht ein, daß man stets ein aus $n+1$ Punkten bestehendes repräsentierendes Punktesystem finden kann: wir bekommen nämlich ein solches Punktesystem, wenn wir sämtliche Punkte irgendeiner Geraden der Ebene wählen (dies stellt eine unmittelbare Folgerung aus dem 2. Axiom dar). Offensichtlich wird dann auch jede Punktmenge, die eine ganze Gerade enthält, ein repräsentierendes Punktesystem sein. Daher nennen wir ein repräsentierendes Punktesystem nichttrivial, wenn es keine ganze Gerade enthält. Es fragt sich, wieviel Elemente ein nichttriviales repräsentierendes Punktesystem mindestens besitzt. 1969 habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3: In einer endlichen projektiven Ebene n-ter Ordnung ($n \geqq 3$) ist die Elementezahl eines nichttrivialen repräsentierenden Punktesystems größer als

$$n+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}.$$

2. Orthogonale lateinische Quadrate

Wir nehmen an, in jedes Feld eines Schachbretts von $n \cdot n$ Feldern sei irgendeine der natürlichen Zahlen von 1 bis n so eingeschrieben, daß in jeder Zeile und auch in jeder Spalte jede der Zahlen von 1 bis n genau einmal vorkommt. Ein solches Gebilde heißt *lateinisches Quadrat der Reihenzahl n.* Ein lateinisches Quadrat der Reihenzahl 4 ist in Bild 4 dargestellt.

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

Bild 4

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

Bild 5

Wir wollen jetzt zwei lateinische Quadrate der Reihenzahl n betrachten. Wir nehmen ein drittes Schachbrett von $n \cdot n$ Feldern und tragen in jedes Feld desselben dasjenige Zahlenpaar ein, dessen erstes Glied die Zahl ist, die im ersten lateinischen Quadrat in diesem Feld steht, während dessen zweites Glied diejenige Zahl ist, die im zweiten lateinischen Quadrat in diesem Feld steht. Wenn wir auf diese Weise jedes der möglichen n^2 Zahlenpaare genau einmal bekommen, so sagen wir, daß die beiden lateinischen Quadrate der Reihenzahl n zueinander orthogonal sind. In Bild 5 ist ein solches lateinisches Quadrat der Reihenzahl 4 dargestellt, das zu dem in Bild 4 dargestellten lateinischen Quadrat orthogonal ist; aus Bild 6 geht hervor, daß sie tatsächlich orthogonal sind.

[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]
[2, 4]	[1, 3]	[4, 2]	[3, 1]
[4, 3]	[3, 4]	[2, 1]	[1, 2]
[3, 2]	[4, 1]	[1, 4]	[2, 3]

Bild 6

Wenn nicht nur zwei, sondern mehrere lateinische Quadrate der Reihenzahl n vorliegen, so heißen diese paarweise orthogonal, wenn je zwei von ihnen orthogonal sind. Es stellt sich die Frage, wieviel lateinische Quadrate der Reihenzahl n sich höchstens angeben lassen, die paarweise orthogonal sind. Die Antwort hierauf gibt der folgende Satz, den der Leser auch selbst leicht beweisen kann:

Satz 4: Die Anzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Reihenzahl n beträgt höchstens $n-1$.

Wieder stellt sich die Frage, ob sich tatsächlich $n-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n angeben lassen. Es ist schon keineswegs trivial, ob es zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n gibt. Wenn n bei Division durch 4 nicht 2 als Rest gibt (und $n \geqq 3$ ist), so kann man mit ein wenig Geschick beweisen, daß zwei orthogonale Quadrate der Reihenzahl n existieren.

Der große Mathematiker des 18. Jahrhunderts *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) hat 1782 vermutet, daß keine zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n existieren, wenn n bei Division durch 4 als Rest 2 ergibt. Diese Vermutung konnte sogar im einfachsten Falle ($n=6$) erst nach über 100 Jahren bewiesen werden. Erst 1900 ist es *G. Tarry* gelungen nachzuweisen, daß es in der Tat keine zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl 6 gibt. Der folgende Fall $n=10$ blieb noch beinahe weitere 60 Jahre lang ungelöst. Um so größer war die Überraschung, als *E. T. Parker* 1959 zeigte, daß zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl 10 existieren. Später haben *R. C. Bose*, *S. S. Shrikhande* und *E. T. Parker* 1960 nachgewiesen, daß es auch für jede Zahl n größer als 10 von der Form $4k+2$ zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n gibt. Der große *Euler* hatte sich also diesmal geirrt!

Die berühmte Konstruktion von *Parker*, die beiden orthogonalen Quadrate der Reihenzahl 10, sind in Bild 7 dargestellt. (Anstelle von 10 haben wir in der Abbildung überall 0 geschrieben.) Gibt es drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate? Niemand weiß es.

0	4	1	7	2	9	8	3	6	5
8	1	5	2	7	3	9	4	0	6
9	8	2	6	3	7	4	5	1	0
5	9	8	3	0	4	7	6	2	1
7	6	9	8	4	1	5	0	3	2
6	7	0	9	8	5	2	1	4	3
3	0	7	1	9	8	6	2	5	4
1	2	3	4	5	6	0	7	8	9
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7
4	5	6	0	1	2	3	9	7	8

Bild 7

0	7	8	6	9	3	5	4	1	2
6	1	7	8	0	9	4	5	2	3
5	0	2	7	8	1	9	6	3	4
9	6	1	3	7	8	2	0	4	5
3	9	0	2	4	7	8	1	5	6
8	4	9	1	3	5	7	2	6	0
7	8	5	9	2	4	6	3	0	1
4	5	6	0	1	2	3	7	8	9
1	2	3	4	5	6	0	9	7	8
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7

Der Leser mag sagen: das ist zwar alles interessant, aber doch eigentlich ein Spiel, bloßer Selbstzweck, denn es hat mit anderen mathematischen Problemen nichts zu tun, d. h., es ist nicht *anwendbar*. Vermutlich wird sich jedoch die Meinung des Lesers ändern, wenn er den folgenden Satz durchliest:

Satz 5: Dann und nur dann gibt es eine endliche projektive Ebene n-ter Ordnung, wenn es $n-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n gibt.
Die Aussage, daß keine projektive Ebene der Ordnung 6 existiert, folgt also aus dem obenerwähnten Ergebnis von *Tarry*, und auch allgemein stellt die Frage nach der Maximalzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Reihenzahl n eine Verfeinerung der Frage nach der Existenz einer endlichen projektiven Ebene n-ter Ordnung dar. Das folgende Problem ist dagegen Verfeinerung des 2. Problems:
Problem 4: Wie groß ist die Maximalzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Reihenzahl 10?
Wie wir nach dem Obigen wissen, ist gegenwärtig nur bekannt, daß die Antwort hierauf mindestens 2 und höchstens 9 lautet.

3. Blockpläne

Wir wollen annehmen, von einer v-elementigen Menge seien gewisse k-elementige Untermengen so ausgewählt, daß je zwei Elemente der v-elementigen Menge in genau λ ausgewählten Teilmengen enthalten sind. Dann ist nicht schwer zu beweisen, daß jedes der v Elemente in ebensoviel ausgewählten Teilmengen liegt. Diese Anzahl bezeichnen wir mit r, die Anzahl der ausgewählten Teilmengen dagegen mit b. (Die ausgewählten Teilmengen werden wir im folgenden Blöcke nennen.) Eine solche Struktur werden wir *Blockplan* nennen oder, wenn wir auch die Parameter hervorheben wollen, (v, b, r, k, λ)-Blockplan. Um die trivialen Fälle auszuschließen, wollen wir im weiteren annehmen, daß die Parameter den Ungleichungen $2 \leqq k < v$, $\lambda \geqq 1$ genügen. Dieser Begriff stellt eine Verallgemeinerung des Begriffs einer endlichen projektiven Ebene dar, denn jede endliche projektive Ebene n-ter Ordnung ist zugleich auch ein (v, b, r, k, λ)-Blockplan mit

$$v = b = n^2 + n + 1$$
$$r = k = n + 1$$
$$\lambda = 1.$$

Zwischen den Parametern bestehen die folgenden Beziehungen:
Satz 6: Für jeden (v, b, r, k, λ)-Blockplan gilt:

$$bk = vr$$
$$r(k-1) = \lambda(v-1)$$
$$b \geqq v.$$

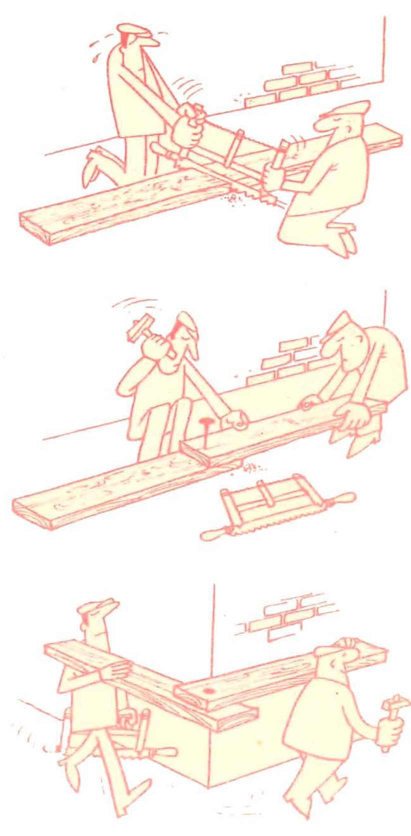
Die beiden Gleichungen kann der Leser leicht selbst beweisen, der Beweis der dritten Ungleichung (der sogenannten Fisherschen Ungleichung) ist dagegen schwerer.
Die in Satz 6 genannten Bedingungen stellen wiederum lediglich notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für die Existenz eines (v, b, r, k, λ)-Blockplans dar. Beispielsweise sind im Falle $v = b = 43$, $r = k = 7$, $\lambda = 1$ die Beziehungen in Satz 6 erfüllt, und doch gibt es keinen (43, 43, 7, 7, 1)-Blockplan (dies folgt aus Satz 2, denn von einem solchen Blockplan kann man unschwer nachweisen, daß er eine endliche projektive Ebene der Ordnung 6 bilden würde, siehe Satz 7). Die Frage nach der Existenz von Blockplänen ist sehr viel untersucht worden, doch auch weiterhin gibt es noch recht viele unentschiedene Fragen. Unbekannt ist beispielsweise (wir wollen ein aus relativ kleinen Parametern bestehendes Beispiel erwähnen), ob ein Blockplan mit den Parametern $(v, b, r, k, \lambda) = (22, 33, 12, 8, 4)$ existiert. Übrigens sind Blockpläne erstmalig in Zusammenhang mit praktischen Anwendungen aufgetreten, und zwar in der mathematischen Statistik, bei der Versuchsplanung.
In einem Blockplan ist die Anzahl der zwei Blöcken gemeinsamen Elemente im allgemeinen nicht für je zwei Blöcke dieselbe.
Dagegen gilt der folgende
Satz 7: Wenn in einem (v, b, r, k, λ)-Blockplan $v = b$ ist (dann ist notwendig auch $r = k$), so haben je zwei Blöcke λ Elemente gemein.
Von solchen speziellen Blockplänen handelt
Satz 8: Wenn in einem (v, b, r, k, λ)-Blockplan $v = b$ eine gerade Zahl ist, so ist $k - \lambda$ ein vollständiges Quadrat.
Aus diesem Satz geht hervor, daß zu den Parametern $(v, b, r, k, \lambda) = (22, 22, 7, 7, 2)$ beispielsweise kein Blockplan existiert, obgleich die Parameter den in Satz 6 genannten Bedingungen genügen.
Ähnlich zur Definition der Blockpläne ist die eines t-Blockplans ($t \geqq 2$): Gewisse k-elementige Untermengen (die wir Blöcke nennen) einer Menge von v Elementen bilden einen t-Blockplan, wenn jede Untermenge von t Elementen der v-elementigen Menge in genau λ Blöcken enthalten ist. (Die Blockpläne ergeben sich hieraus im Spezialfall $t = 2$.) Es ist unschwer zu erkennen, daß jeder t-Blockplan zugleich auch für alle Werte $t' < t$ ($t' \geqq 2$) einen t'-Blockplan darstellt (als t'-Blockplan betrachtet hat freilich λ einen anderen Wert). Insbesondere ist jeder t-Blockplan auch ein Blockplan schlechthin. Trivial soll ein t-Blockplan heißen, der sich dadurch ergibt, daß man als Blöcke sämtliche k-elementige Untermengen der v-elementigen Menge wählt ($t \leqq k \leqq v$). Insgesamt sind zwei nichttriviale 5-Blockpläne bekannt (für den einen ist $v = 24$, $k = 8$, für den anderen $v = 12$, $k = 6$); ungelöst ist dagegen das folgende
Problem 5: Gibt es einen nichttrivialen 6-Blockplan?
Oben haben wir nur einen ganz kleinen Bruchteil der sich auf hochsymmetrische kombinatorische Strukturen beziehenden Fragen berührt. Nicht einmal erwähnt haben wir beispielsweise die fehlerkorrigierenden Kodes, die in der Informationstheorie sowie in der Theorie (und der Praxis!) der Nachrichtenübermittlung außerordentlich wichtig sind.
Zum Schluß wollen wir erwähnen, daß der Beweis all derjenigen Sätze, von denen wir nicht besonders angegeben haben, daß sie auch vom Leser leicht bewiesen werden können, ausnahmslos mit algebraischen Methoden zu führen ist (die über den Stoff der Oberschule hinausgehen). Das bedeutet gleichzeitig, daß die kombinatorischen Probleme eng mit anderen Zweigen der Mathematik zusammenhängen.

J. Pelikán

aufgepaßt – mitgemacht

Liebe alpha-Leser!
Hier legen wir euch eine lustige Vignette vor. Wer findet dazu eine Mathematikaufgabe aus der gesellschaftlichen Praxis?
Vielleicht sendet ihr uns auch selbst lustige Vignetten (aus Zeitschriften) und dazu ein mathematisches Problem. Die besten Einsender erhalten Buchprämien. Wir wünschen viel Freude und Erfolg!

Redaktion alpha,
7027 Leipzig, PSF 14



XVIII. Internationale Mathematikolympiade Lienz/Wien, Juli 1976

Aufgaben **1. Tag**

1. In einem ebenen konvexen Viereck mit dem Flächeninhalt 32 cm² sei die Summe der Länge der einen Diagonale und der Längen zweier einander gegenüberliegenden Seiten gleich 16 cm.
Man bestimme alle möglichen Längen der anderen Diagonale.
(ČSSR, 5 Punkte)

2. Sei $P_1(x)=x^2-2$; $P_i(x)=P_1[P_{i-1}(x)]$; $i=2, 3, \ldots$
Man zeige, daß für beliebiges natürliches n alle Lösungen der Gleichung
$$P_n(x)=x$$
reell und paarweise verschieden sind.
(Finnland, 7 Punkte)

3. Eine quaderförmige Schachtel sei derart, daß sie vollständig mit Einheitswürfeln (Kantenlänge 1) gefüllt werden kann. Legt man möglichst viele Würfel des Volumens 2 so in die Schachtel, daß ihre Kanten parallel zu Kanten der Schachtel liegen, so füllt ihr Gesamtvolumen genau 40% des Hohlraumes der Schachtel.
Man bestimme die Innenmaße aller Schachteln mit dieser Eigenschaft. ($\sqrt[3]{2}=1{,}2599\ldots$)
(Niederlande, 8 Punkte)

2. Tag

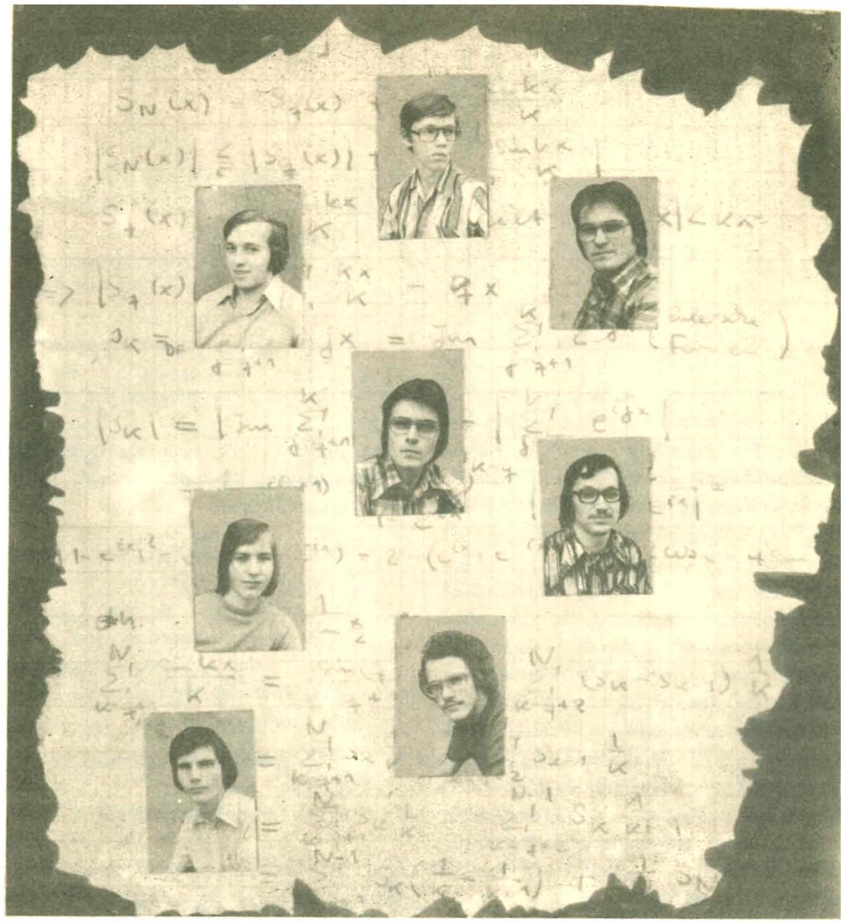
4. Man bestimme den größten Wert des Produktes positiver ganzer Zahlen, deren Summe 1976 ist.
(USA, 6 Punkte)

5. Gegeben sei folgendes System von p Gleichungen mit $q=2p$ Unbekannten
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1q}x_q=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2q}x_q=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pq}x_q=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$
wobei $a_{ij}\in\{0, -1, +1\}$, $i=1, 2, \ldots, p$,
$j=1, 2, \ldots, q$.
Man beweise, daß eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ von (1) mit folgenden Eigenschaften existiert:
a) alle x_j $(j=1, 2, \ldots, q)$ sind ganzzahlig,
b) mindestens eines der x_j $(j=1, 2, \ldots, q)$ ist ungleich Null,
c) $|x_j|\leqq q$ $(j=1, 2, \ldots, q)$.
(Niederlande, 7 Punkte)

6. Eine Zahlenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sei wie folgt definiert:
$u_0 \;=2$,
$u_1 \;=\frac{5}{2}$,
$u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1 \qquad (n=1, 2, \ldots)$
Man zeige, daß
$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ gilt. $\qquad (n=1, 2, \ldots)$
$[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.
(Großbritannien, 7 Punkte)

alpha stellt die DDR-Mannschaft vor:

Michael Marczinek, EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Kl. 11 (2. Preis) · oben Mitte;
Thomas Hoffmann, EOS „Geschwister Scholl", Apolda, Kl. 12 · oben links;
Norbert Schieweck, EOS „Otto v. Guericke", Magdeburg, Kl. 12 · oben rechts;
Friedhelm Schieweck, EOS „Otto v. Guericke", Magdeburg, Kl. 12 (3. Preis) · Mitte;
Uwe Risch, EOS „Geschwister Scholl", Burg, Kl. 12 (2. Preis) · Mitte links;
Jens-Uwe Löbus, EOS „Romain Rolland", Dresden, Kl. 12 (3. Preis) · Mitte rechts;
Roger Labahn, EOS „Geschwister Scholl", Anklam, Kl. 11 · unten rechts;
Klaus Brinckmann, EOS „Bertolt Brecht", Dresden, Kl. 12 (3. Preis) · unten links.



● In diesem Jahr wurden 42% der insgesamt erreichbaren Punkte erzielt (1975: 55%). Das zeigt den hohen Schwierigkeitsgrad der gestellten Aufgaben. Preise wurden vergeben:

1. Preis: 40 bis 34 Punkte
2. Preis 33 bis 23 Punkte
3. Preis 22 bis 15 Punkte.

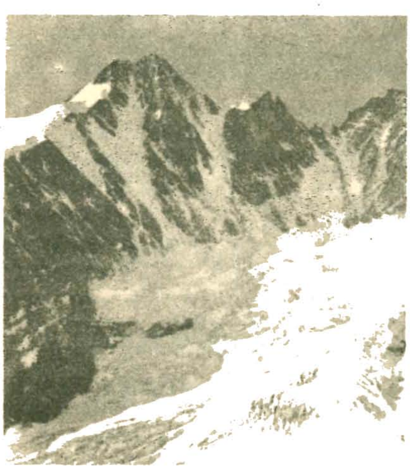
● Die Auszeichnung der Sieger fand in Wien statt. Sie wurde vom Bundesminister für Unterricht und Kunst der Rep. Österreich vorgenommen. Die Preisträger erhielten Medaillen und Sachpreise.

● Die Preisträger der DDR-Mannschaft werden zum Studium delegiert. Sie erhalten für das 1. Studienjahr ein zusätzliches Stipendium.

● Die XIX. IMO findet Anfang Juli 1977 in der SFR Jugoslawien (Belgrad) statt.

In der Osttiroler Stadt Lienz fanden die Klausuren statt (siehe Bild rechts).

Die Gastgeber führten mit den Teilnehmern der IMO zahlreiche Exkursionen durch, z. B. zum Großglockner



● In diesem Jahr nahmen fünf Mädchen teil: Je ein Mädchen aus der Soz. Rep. Vietnam, der UdSSR, der Rep. Frankreich, der SR Rumänien und der Rep. Kuba. Die sowjetische Schülerin erreichte mit 39 Punkten einen ersten Preis, die vietnamesische Schülerin einen 2. Preis. Beide Teilnehmerinnen nahmen bereits an der XVII. IMO teil (siehe alpha 6/75) und waren diesmal die Besten ihrer Mannschaft.

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	Gesamtpunktzahl	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	250	4	3	1	–
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	214	2	4	1	1
Vereinigte Staaten von Amerika	188	1	4	1	–
Volksrepublik Bulgarien	174	–	2	6	–
Republik Österreich	167	1	2	5	–
Republik Frankreich	165	1	3	1	–
Ungarische Volksrepublik	160	–	3	4	–
Deutsche Demokratische Republik	142	–	2	3	–
Volksrepublik Polen	138	–	–	6	–
Sozialistische Republik Rumänien	118	–	1	3	–
Königreich Schweden	118	–	1	2	–
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	116	–	1	3	–
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	116	–	1	3	–
Sozialistische Republik Vietnam	112	–	1	3	–
Königreich der Niederlande	78	–	–	1	–
Republik Finnland	52	–	–	1	–
Republik Griechenland	50	–	–	–	–
Republik Kuba	16 (nur 3 Teilnehmer)	–	–	–	–

Mathematatik und Musik

Melodien ordnen

„Schlaf, Kindlein, schlaf...“

Es kommt vor, daß einem eine bekannte Melodie einfällt; nur man weiß gerade nicht, wie der Text dazu heißt oder aus welchem Stück sie stammt oder wer der Komponist ist. Dann wünscht man sich, daß man in einem Buch nachschlagen könnte, in welchem viele Melodien registriert sind und dazu nähere Angaben wie Titel und Herkunft stehen. Jedoch müßten die musikalischen Zitate so geordnet sein, daß man das Gesuchte leicht finden oder gegebenenfalls entscheiden kann, ob es überhaupt darin enthalten ist.

Wörter können wir nach den Buchstaben ordnen, weil jeder Buchstabe im Alphabet einen festen Platz hat. Indem wir also jedem Buchstaben eine natürliche Zahl zuordnen, übertragen wir die Ordnungsrelation der natürlichen Zahlen auf die Menge der Buchstaben und damit auf die der Wörter.

Bei Melodien geht das nicht so einfach. Beim Notieren einer Melodie werden den Tönen Noten zugeordnet. In einer Note sind zwei Aussagen verschlüsselt:

1. die absolute Tonhöhe
2. die relative Tondauer.

Die Tonhöhe erkennen wir an der Stellung des Notenkopfes bezüglich der Notenlinien (in Abhängigkeit vom Notenschlüssel und von der Vorzeichnung); die relative Dauer wird durch den Notenwert ausgedrückt. Die Pausenzeichen kann man als Pseudonoten verstehen: Sie sind Noten ohne Höhe mit Dauer.

Nun suchen wir eine Abbildung, die uns erlaubt, Melodien zu ordnen, indem eine Ordnungsrelation übertragen werden kann. Die im Notenblatt vorhandene Fixierung der Melodien in absoluten Tonhöhen ist für jeden Instrumentalisten Grundlage für sein Spiel. Tatsächlich spielt aber für das hörende Erfassen die absolute Tonhöhe keine Rolle. Der erste Ton ist also frei wählbar, von ihm hängt der weitere Verlauf ab. Dieses Prinzip der Transponierbarkeit (Übertragbarkeit) findet im Musikunterricht durch die relativ orientierten Tonsilben und Handzeichen seine Anwendung; die damit ausgedrückten Tonrelationen widerspiegeln sich in den entsprechenden Lagebeziehungen der Notenköpfe.

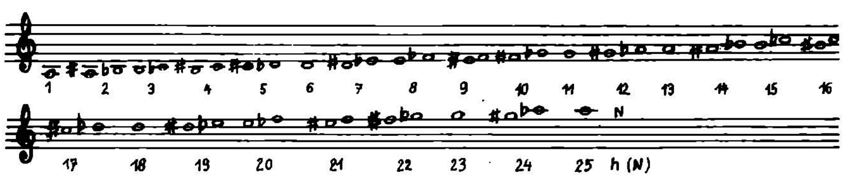
Wir müssen uns demzufolge eine Zuordnung wählen, die in bezug auf Transpositionen invariant ist; das bedeutet: Das Ergebnis der Abbildung darf nicht von der Tonart abhängen.

Dafür brauchen wir zwei Komponenten: Tonschritte und Rhythmusfaktoren. Dazu einige Bezeichnungen.

N die absolute Tonhöhe, z. B. der Ton c' oder cis' oder b oder d''

$h(N)$ eine ganze Zahl, die jeder Tonhöhe (jeder Note) zugeordnet wird, und zwar so, daß sich zwei benachbarte Halb-Töne der chromatischen Leiter um 1 unterscheiden, z. B.

$h(\text{c}')=4$, $h(\text{cis}')=5$, $h(\text{d}')=6$,
$h(\text{dis}')=7$, $h(\text{e}')=8$,
$h(\text{c}'')=16$ (*siehe Beispiel 1*)



Beispiel 1

(Die Noten des Beispiels 1 heißen:
1) a, 2) ais oder b, 3) h oder ces',
4) his oder c', 5) cis' oder des',
6) d', 7) dis' oder es',
8) e' oder fes', 9) eis' oder f',
10) fis' oder ges', 11) g',
12) gis' oder as', 13) a',
14) ais' oder b', 15) h' oder ces'',
16) his' oder c'',
17) cis'' oder des'' usw.)

$t(N)$ eine positive rationale Zahl, die den (Zeit-)Wert jeder Note und jeder Pause ausdrückt, nämlich die relative Dauer, z. B.

$t(𝅗𝅥)=\frac{1}{2}$, $t(♩)=\frac{1}{4}$, $t(♪)=\frac{1}{8}$,

$t(♩.)=\frac{3}{8}$,

$t(𝅝)=1$, $t(𝄽)=\frac{1}{4}$, $t(𝄾)=\frac{1}{8}$,

$t(𝄿)=\frac{1}{16}$.

$h(N)$ vermittelt eine Abbildung aus der Menge der Noten in den Ring der ganzen Zahlen, $t(N)$ vermittelt eine Abbildung aus der Menge der Noten in den Körper der rationalen Zahlen. Beide Bildmengen sind geordnete Mengen. Nun können wir die folgenden Definitionen verstehen.

Definition: Ein Tonschritt, genauer: das Fortschreiten von einem Ton zum folgenden einer Melodie (nämlich Tonwiederholung, Tonschritt oder Tonsprung), $s(N_1, N_2)$ ist das Intervall von N_1 nach N_2.

$$s(N_1, N_2)=h(N_2)-h(N_1).$$

Den Intervallen von der Prime bis zur Oktave entsprechen die Zahlen 0 bis 12 oder 0 bis −12, je nachdem, ob der zweite Ton höher oder tiefer ist.

Tabelle der Intervalle innerhalb einer Oktave

Intervall	Beispiel	s
reine Prime	c' c'	0
kleine Sekunde	h' c''	1
große Sekunde	c' d'	2
kleine Terz	e' g'	3
große Terz	c' e'	4
reine Quarte	c' f'	5
übermäßige Quarte	f' h'	6
verminderte Quinte	h' f''	6
reine Quinte	c' g'	7
kleine Sexte	e' c''	8
große Sexte	c' a'	9
kleine Septime	g' f''	10
große Septime	c' h'	11
reine Oktave	c' c''	12

Mit dieser Abbildung ordnen wir jedem Notenpaar eine ganze Zahl zu, und es gilt

$$s(N_1, N_2)=-s(N_2, N_1).$$

Beispiel 2 zeigt ein Melodienstück mit seinen Tonschritten.

Die Tonschritte erhält man so:

$h(\text{e}')=8$
$h(\text{c}')=4$ $\quad s_1=4-8=-4$
$h(\text{d}')=6$ $\quad s_2=6-4=\ \ 2$
$h(\text{e}')=8$ $\quad s_3=8-6=\ \ 2$

usw.

Zur Kontrolle, ob man richtig gerechnet hat, kann man folgende Tatsache ausnutzen:

Die Summe der Tonschritte zwischen dem ersten und dem letzten Ton einer Folge ist gleich dem Tonschritt vom ersten zum letzten Ton

$$\sum_{i=1}^{n-1} s(N_i, N_{i+1})=s(N_1, N_n).$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n-1} s(N_i, N_{i+1})=\sum_{i=1}^{n-1} h(N_{i+1})-h(N_i)$$

$$=h(N_n)-h(N_1)=s(N_1, N_n).$$

Für die ersten vier Noten unseres Beispiels ergibt sich

$$N_1=\text{e}', N_2=\text{c}', N_3=\text{d}', N_4=\text{e}'$$
$$s_1+s_2+s_3=-4+2+2=0$$
$$=h(N_4)-h(N_1)$$

Beispiel 2

Beispiel 3

Definition: Ein Rhythmusfaktor $r(N_1, N_2)$ ist der Quotient der Notenwerte

$$r(N_1, N_2) = \frac{t(N_2)}{t(N_1)}$$

Mit dieser Abbildung ordnen wir eindeutig jedem Notenpaar (eine der beiden Noten darf eine Pause sein) eine positive rationale Zahl zu, z. B.

$N_1 = ♩$ $\quad t(N_1) = \frac{3}{8}$

$$r = \frac{1}{8} : \frac{3}{8} = \frac{1}{3}.$$

$N_2 = ♪$ $\quad t(N_2) = \frac{1}{8}$

Für Beispiel 2 ergeben sich folgende Rhythmusfaktoren:

$1, \frac{1}{2}, 1, 2, 1, 1, 2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 2, 1, 2.$

Zur Kontrolle kann man hier die analoge Tatsache ausnutzen:

Das Produkt aller Rhythmusfaktoren ist gleich dem Rhythmusfaktor vom ersten zum letzten Ton

$$\prod_{i=1}^{n-1} r(N_i, N_{i+1}) = r(N_1, N_n).$$

Beweis:

$$\prod_{i=1}^{n-1} r(N_i, N_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{t(N_{i+1})}{t(N_i)} = \frac{t(N_n)}{t(N_1)}$$

$$= r(N_1, N_n).$$

Nun können wir eine (pausenlose) Melodie, aufgefaßt als Folge geordneter Notenpaare, mittels einer Vektorfolge beschreiben; die erste Komponente ist der Tonschritt, die zweite Komponente ist der Rhythmusfaktor

$$\mathfrak{m}_i = (s_i, r_i).$$

Für das Thema des Beispiels 2 ergibt sich:

$(-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), (2, 1), (1, 2), (-1, 1),$

$(-2, 1), (0, 2), \left(2, \frac{1}{2}\right), (-4, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right),$

$(2, 1), (2, 2), (-4, 1), (-2, 2).$

Wenn innerhalb des musikalischen Zitats eine Pause auftritt, nehmen wir als Tonschritt zur Pause den Buchstaben P (oder irgendein anderes Zeichen) und als nächsten Tonschritt den Schritt von der Note vor der Pause zur Note nach der Pause; beim Berechnen der Rhythmusfaktoren jedoch nehmen wir jedesmal den Zeitwert der Pause, als ob da eine Note wäre.

Beispiel 3 ergibt dann:

$\left(P, \frac{1}{2}\right), (-5, 1), (5, 2), \left(P, \frac{1}{2}\right), (-5, 1),$

$(5, 1), (-5, 1), (5, 1), (4, 1), (3, 4).$

Diese Zuordnung – Melodie→Vektorfolge $\{\mathfrak{m}_i\}$ ist eindeutig – zu verschiedenen Melodien gehören verschiedene Vektorfolgen – und invariant – eine Melodie in verschiedenen Tonarten ergibt dieselbe Vektorfolge. Diese Abbildung ist auch umkehrbar eindeutig – verschiedene Vektorfolgen ergeben verschiedene Melodien. Für die Vektoren $\mathfrak{m}_i \in \mathfrak{B}_2$ muß vorausgesetzt werden:

$\mathfrak{m} = (s_i, r_i)$, s_i ganze Zahl oder P, $|s_i| < K$ (die Schranke K hängt vom Tonvorrat ab, etwa $k = 100$), r_i rationale Zahl > 0 (nach meiner Erfahrung $2^{-8} < r < 2^8$).

Die Anfangsnote muß vorgegeben werden, sie ist frei wählbar; von $h(N_1)$ und $t(N_1)$ gelangt man zu den Werten der nächsten Note so:

$$h(N_2) = h(N_1) + s_1$$
$$t(N_2) = t(N_1) \cdot r_1.$$

Falls $s_i = P$ vorkommt $(1 \leq i < n)$, ist N_{i+1} eine Pause mit dem Zeitwert

$$t(N_{i+1}) = t(N_i) \cdot r_i$$

und für die folgende Note gilt dann:

$$h(N_{i+2}) = h(N_i) + s_{i+1}$$
$$t(N_{i+2}) = t(N_{i+1}) \cdot r_{i+1}$$

Ein Beispiel für die Umkehrung.

Gegeben ist die Vektorfolge

$(4, 1), (3, 1), (0, 1), (P, 1),$

$(0, 1), (0, 1), (P, 1), (-3, 1), (0, 3);$

gesucht ist die Melodie.

1. Anfangswerte $N_1 =$ as' als $\frac{1}{16}$-Note $h(N_1) = 12$ (ich gebrauche die Werte des Beispiels 1), $t(N_1) = \frac{1}{16}$
2. $h(N_2) = h(N_1) + s_1 = 12 + 4 = 16 = h(\text{c}'')$
   $t(N_2) = t(N_1) \cdot r_1 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16} = t(\;\;)$
3. $h(N_3) = h(N_2) + s_2 = 16 + 3 = 19 = h(\text{es}'')$
   $t(N_3) = t(N_2) \cdot r_2 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$
4. $h(N_4) = h(N_3) + s_3 = 19 + 0 = 19$
   $t(N_4) = t(N_3) \cdot r_3 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$
5. $h(N_5) = h(N_4) + s_4 = 19 + P = h(P)$
   $t(N_5) = t(N_4) \cdot r_4 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$
   also: $N_5 =$ 𝄿
6. $h(N_6) = h(N_4) + s_5 = 19 + 0 = 19$
   $t(N_6) = t(N_5) \cdot r_5 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$

…

9. $h(N_9) = \quad = 16$
   $t(N_9) = \quad = \frac{1}{16}$
10. $h(N_{10}) = h(N_9) + s_9 = 16 + 0 = 16 = h(\text{c}'')$
    $t(N_{10}) = t(N_9) \cdot r_9 = \frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{3}{16} = t(♪.)$

Erkennen wir die Melodie? – Es ist das bekannte Motiv des Strauß-Walzers „An der schönen blauen Donau", originalgetreu im *Beispiel 5* notiert (mit den Anfangswerten $h(N_1) = 6$, $t(N_1) = \frac{1}{4}$).

Nun brauchen wir noch eine Ordnungsrelation. Es sei $(s_1, r_1) < (s_2, r_2)$ genau dann, wenn die erste der nicht verschwindenden Differenzen $s_2 - s_1$, $r_2 - r_1$ positiv ist. Mit anderen Worten:

Wenn $s_1 < s_2$, dann sei $(s_1, r_1) < (s_2, r_2)$; und wenn $s_1 = s_2$ und $r_1 < r_2$, dann sei $(s_1, r_1) < (s_2, r_2)$.

Für den Fall $s = P$ setzen wir, damit wir vergleichen können, willkürlich $-\infty$ fest.

Jetzt haben wir unser Ziel erreicht: wir können die angeführten drei Motive ordnen (ansteigend)

1. $\left(P, \frac{1}{2}\right)$ … Beispiel 3
2. $(-4, 1)$ … Beispiel 2
3. $(4, 1)$ … Beispiel 4 und 5.

Darüber hinaus kann man aus gegebenen Melodien neue gewinnen, indem man Operationen mit diesen besonderen Vektoren erklärt:

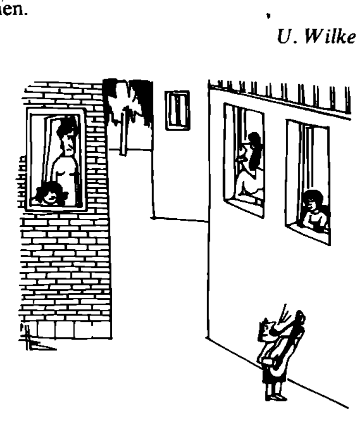
$\mathfrak{m}_1 = (s_1, r_1)$, $\mathfrak{m}_2 = (s_2, r_2)$,

g ganze Zahl

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = (s_1 + s_2, r_1 \cdot r_2)$$
$$\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 = (s_1 - s_2, r_1 : r_2)$$
$$g \cdot \mathfrak{m}_1 = \left(g \cdot s_1, r_1^g\right)$$

Die Ergebnisse der Verknüpfungen sind (theoretisch) wieder Vektoren des „Melodienbereichs" von $\mathfrak{B}_2$. Dieser Bereich – praktischerweise haben wir uns auf eine endliche Menge von Vektoren beschränkt – läßt sich zu einem kontinuierlichen – und damit unendlichen – Teilbereich erweitern, wenn man als Komponenten beliebige reelle Zahlen zuläßt, die wenigstens nach unten beschränkt sind (durch $-K$ oder 0). Dem entspricht eine kontinuierliche Tonerzeugung mit „maßlosen" Rhythmen. Wenn man r durch $\log r$ ersetzt, kann man mit den Vektoren auf bekannte Weise rechnen.

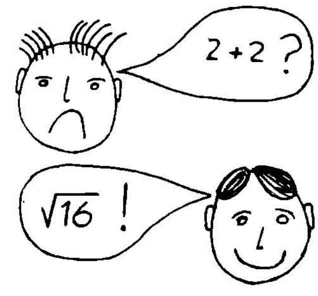
U. Wilke



Beispiel 4

Beispiel 5

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1977

Ma 5 ■1538 Fußgänger verursachen durch impulsives, unbedachtes Überqueren der Fahrbahn oftmals Verkehrsunfälle, die vermeidbar sind. In der DDR wurde im Jahre 1974 etwa ein Siebentel aller Verkehrsunfälle durch Fußgänger hervorgerufen; dabei fanden 618 Fußgänger den Tod, 8492 Fußgänger wurden verletzt. Wie hoch sind die durchschnittlichen Kosten eines Verkehrsunfalles (Fahrzeugschäden, Krankengeld, medizinische Hilfe, volkswirtschaftlicher Verlust durch Ausfall im Produktionsprozeß), wenn unserer sozialistischen Gesellschaft im Jahre 1974 durch Verkehrsunfälle ein Gesamtschaden von 624946000 M entstand? *Sch.*

Ma 5 ■1539 Eine Zeitungsmeldung lautete wie folgt: „Statt 10 kg Altpapier, wie es im Pionierauftrag heißt, wird jeder Pionier durchschnittlich 15 kg abliefern. Das sind an unserer Schule 2140 kg mehr."
Wieviel *Junge Pioniere* gehören dieser Schule an? Wieviel Kilogramm Altpapier werden insgesamt abgeliefert?

Schülerin Gudrun Tappert, Guben

Ma 5 ■1540 In einem Kasten liegen 100 verschiedenfarbige Kugeln, und zwar 28 rote, 20 grüne, 12 gelbe, 20 blaue, 10 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wieviel Kugeln muß man mindestens dem Kasten entnehmen, ohne dabei hineinzuschauen, um mit Sicherheit fünfzehn gleichfarbige Kugeln zu erhalten?

Aus der sowjetischen Broschüre „Mathematische Aufgaben", übersetzt von Cordula Becher, Moskau

Ma 5 ■1541 Die Gruppenratsvorsitzenden und deren Stellvertreter von drei Pioniergruppen beraten ein gemeinsames Arbeitsvorhaben. Wir wissen von ihnen folgendes:
a) Ist der Gruppenratsvorsitzende ein Mädchen, dann ist der Stellvertreter ein Junge oder umgekehrt.
b) Zur Beratung sitzen die sechs Pioniere im Kreis an einem runden Tisch, aber in keinem Falle sitzen die beiden Pioniere aus einer Gruppe nebeneinander.
c) Wilfried sitzt Günter gegenüber.
d) Edith und Günter sind Sigrids Platznachbarn.
e) Monika und Wilfried sind nicht in der gleichen Pioniergruppe.
f) Lutz wird mit der Leitung der Beratung beauftragt.
Welche Pioniere kommen jeweils aus einer Pioniergruppe?

OL Diplomlehrer Karl Becker, Lübtheen

Ma 5 ■1542 Von zwei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen ist die eine um soviel kleiner als 10, wie die andere größer als 10 ist. Die Summe aus den Quadraten dieser Zahlen beträgt 218. Um welche Zahlen handelt es sich? (Stelle eine Tabelle auf!)

Lehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 5 ■1543 Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen mit der dekadischen Darstellung $\overline{abcd}$, von denen keine die Ziffer 0 enthält, zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
Faßt man jede der vier Ziffern für sich als Zahlen auf, dann ist a der Nachfolger von c und d der Nachfolger von a; multipliziert man d mit der Summe aus a und c, so erhält man b. *Rolf Kamieth, Kakerbeck (Kl. 7)*

Ma 6 ■1544 Von vier Schülern mit den Vornamen Andreas, Christian, Jürgen, Michael und den Familiennamen Anders, Constantin, Jordan, Matuschewski ist uns folgendes bekannt:
a) Genau zwei dieser Schüler sind 10, genau zwei 12 Jahre alt.
b) Bei keinem dieser Schüler beginnt der Vorname mit dem gleichen Buchstaben wie der Familienname.

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens *10* Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

c) Der Schüler Michael ist nicht so alt wie der Schüler mit dem Familiennamen Anders.
d) Andreas ist jünger als Jürgen.
e) Michael und Jürgen sind gleichaltrig.
f) Bei den gleichaltrigen Schülern beginnt jeweils der Vorname des einen mit dem gleichen Buchstaben wie der Familienname des anderen.
Welchen Vor- und Familiennamen und welches Alter hat jeder dieser vier Schüler?

Christina Bauer, Babst (Kl. 6)

Ma 6 ▪1545 Von zwei Uhren möge die zweite gegenüber der ersten innerhalb einer Stunde um $1\frac{1}{2}$ Minuten vorgehen. Nach welcher Zeit zeigen beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit an, wenn sie beide gegenwärtig die Uhrzeit 12.00 Uhr anzeigen?

Schülerin Ellen Backhaus, Silberhausen

Ma 6 ▪1546 Ein Einweckglas mit einem Inhalt von 720 g Kirschen bzw. Kirschsaft wird von Petra geöffnet. Zum Belegen des Bodens einer Kirschtorte benötigt Petra die Hälfte der Masse des Glasinhaltes. Der Rest wird zu gleichen Teilen in drei Kompottschalen gegeben. Von der in 12 gleiche Teile zerlegten Kirschtorte verzehrte Petra drei Stück und von dem Nachtisch den Inhalt einer Schale. Wieviel Gramm Kirschen bzw. Kirschsaft hat Petra zu sich genommen? (Die Kirschen seien auf dem Tortenboden gleichmäßig verteilt.)

Schülerin Marlies Faupel, OS III Heiligenstadt (Kl. 10)

Ma 6 ▪1547 Bei einem Orientierungsmarsch der GST mußten die Teilnehmer bis zum ersten Kontrollpunkt 2 km weniger als die Hälfte der gesamten Marschstrecke zurücklegen. Nach weiteren 7 km erreichten sie den zweiten Kontrollpunkt. Bis zum Ziel waren es dann noch 3 km. Wieviel Kilometer betrug die gesamte Marschstrecke?

Schülerin Ingrid Wolf, 2. OS Berlin-Köpenick (Kl. 7)

Ma 6 ▪1548 Von den Schülern einer 6. Klasse haben im Monat Januar doppelt soviel, im Monat Mai viermal soviel Schüler Geburtstag wie im Monat März. Im Monat Juli haben vier Schüler weniger Geburtstag als im Monat Mai. Im Monat Oktober haben halb soviel Schüler Geburtstag wie im Monat Juli. In den nicht genannten Monaten hat kein Schüler dieser Klasse Geburtstag. Zur Klasse gehören mehr als 30, aber weniger als 40 Schüler. Wieviel Schüler umfaßt diese Klasse?

Sch.

Und ich bin Euer neuer Chemielehrer!

Ph 6 ▪1 Gegeben sei ein quadratisches Prisma mit der Grundkante $a = 10$ cm und der Körperhöhe $h = 15$ cm. Dieses Gefäß ist mit Schnee gefüllt. Die Dichte von Schnee ist $0{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. (Experimentell bestimmt.)
a) Wieviel Gramm Schnee befinden sich in dem Gefäß?
b) Wie hoch steht nach dem Schmelzen das Wasser im Gefäß?
$\left(\text{Die Dichte des Wassers beträgt } 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.\right)$

Schüler Bernd-Peter Günther, OS Sachsendorf (Kl. 8)

Ma 7 ▪1549 Aus der Bibliotheksreihe „Mathematische Schülerbücherei" wurden von den 85 Schülern der Klassen 7a, 7b und 7c einer Oberschule im Verlaufe eines Monats insgesamt 26 Bücher entliehen. Jeder dritte Schüler der Klasse 7a, jeder dritte Schüler der Klasse 7b und jeder vierte Schüler der Klasse 7c entliehen je eines dieser Bücher. Der 10. Teil der Anzahl der Schüler der Klasse 7b nahm an der Mathematikolympiade des Kreises teil. Wieviele Schüler gehören der Klasse 7a an?

Frank Bergner, OS Großenhain (Kl. 10)

Ma 7 ▪1550 Das Produkt aus fünf aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen beträgt 3840. Wie heißen diese Zahlen?

Schülerin Gabriele Orgis, Bernsbach

Ma 7 ▪1551 Gegeben sei ein rechter Winkel mit seinem Scheitel S und den Schenkeln p und q. Ein innerer Punkt B dieses rechten Winkels habe von p den Abstand $m = 3$ cm und von q den Abstand $n = 4$ cm. Es ist ein gleichseitiges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Eckpunkt A auf dem Schenkel p, dessen Eckpunkt C auf dem Schenkel q des rechten Winkels liegt und dessen Eckpunkt B mit dem gegebenen inneren Punkt B des rechten Winkels zusammenfällt.

Sch.

Ma 7 ▪1552 Welche Zahl ist zu jedem Faktor der beiden Produkte $15 \cdot 20$ und $9 \cdot 32$ zu addieren, damit die so erhaltenen neuen Produkte gleich sind?

Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ph 7 ▪2 Welche Druckkraft verschließt den Deckel eines Konservenglases, wenn von innen der Dampfdruck des Wassers mit 0,025 at und von außen der Luftdruck mit 765 Torr wirken. Der Durchmesser des Konservenglases beträgt 75 mm.

B.

Ch 7 ▪1 Ein Güterzug mit 40 Waggons Magneteisenstein aus der VR Polen wird im Eisenhüttenkombinat Ost entladen. Gleichzeitig trifft ein Güterzug mit 60 Waggons Roteisenstein ein. Je Waggon sind 40 t Erz geladen. Magneteisenstein besteht aus rund Dreiviertel seiner Masse aus Eisen. Roteisenstein enthält rund ein Drittel Eisen. Wieviel Tonnen Eisen können aus der gelieferten Menge
a) Magneteisenstein,
b) Roteisenstein gewonnen werden?
c) Welche Schlußfolgerung ergibt sich daraus für die Industrie?

Ma 8 ▪1553 Es sind alle negativen ganzen Zahlen k anzugeben, für die die Zahl
$$z = k(k+5)(k+7)$$
nicht negativ ist.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1554 Es seien A und B zwei Punkte der Ebene, die den Abstand $c = 5$ cm voneinander haben.
Es sind zwei parallele Geraden g und h zu konstruieren, von denen die Gerade g durch den Punkt A und die Gerade h durch den Punkt B geht, wobei diese Parallelen den Abstand $a = 4$ cm voneinander haben sollen.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1555 Es ist zu untersuchen, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die die Gleichung
$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{2(a-b)} = \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{a^2-b^2}{a}$$
erfüllt ist.

Schüler Olaf Raeke, Neubrandenburg

Ma 8 ▪1556 Nach Beendigung einer Fußball-Turnierrunde, an der die Mannschaften A, B, C, D teilnahmen und bei der jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal spielte, ergaben sich die folgenden Punkte- und Tor-Verhältnisse:

	Punkte-Verhältnis	Tor-Verhältnis
A	5:1	4:1
B	4:2	4:1
C	2:4	1:2
D	1:5	0:5

Dabei gibt das Punkte-Verhältnis für jede Mannschaft an, wie viele Spiele diese Mannschaft gewonnen (je 2 Punkte) und unentschieden gespielt (je 1 Punkt) hat bzw. wie viele Spiele sie verloren (je 2 Punkte) und unentschieden gespielt (je 1 Punkt) hat. Das Tor-Verhältnis gibt jeweils an, wie viele Tore die Mannschaft insgesamt erzielt hat bzw. wie viele Tore sie entgegennehmen mußte. Es soll nun aus den obigen Angaben ermittelt werden, wie jedes der 6 Spiele ausfiel und welches Torverhältnis sich dabei ergab.

Andreas Fittke, Rosa-Thälmann-OS Berlin (Kl. 8)

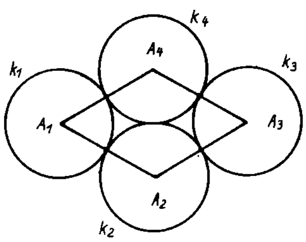
Ph 8 ▪3 Eine Glühlampe trägt die Angabe 6 V und 3 W.
a) Wie groß ist die Stromstärke?

b) Wie groß ist der Widerstand?
c) Wie groß ist die elektrische Arbeit, wenn die Glühlampe 24 Stunden lang in Betrieb war?

Schülerin Ramona Otto, 73. OS Dresden

Ch 8 ▪2 Je 5 g Kupfer(II)-oxid werden durch
a) Wasserstoff,
b) Eisen,
c) Zink reduziert.
Wieviel Gramm der Oxide erhält man bei diesen chemischen Reaktionen?

Ma 9 ▪1557 Es seien k_1, k_2, k_3, k_4 vier kongruente Kreise mit dem Radius $r=2$ cm und den Mittelpunkten A_1, A_2, A_3, A_4. Dabei mögen die Kreise k_2 und k_4 jeweils die anderen drei Kreise von außen berühren (siehe Bild).



Ferner seien K_1, K_2, K_3, K_4 die Mengen der inneren und Randpunkte der Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 und M die Menge der inneren und Randpunkte des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$. Man berechne den Flächeninhalt der durch die Punktmenge $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup M$ gegebenen Figur, also des Gebietes, das durch die außerhalb des Vierecks gelegenen Kreisbögen der vier Kreise begrenzt ist.

Andreas Schmidt,
Hans-Marchwitza-OS Dahlewitz
(Kl. 9)

Ma 9 ▪1558 In dem folgenden Schema ist für jedes Sternchen eine der Grundziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 so einzusetzen, daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. (Dabei darf am Anfang jeder der Zeilen nicht die Grundziffer 0 stehen.)

```
********  :  ***  =  *****
***
 ****
  ***
  ****
  8***
```

Holger Brodmann,
OS Paul Herrmann, Hettstedt (Kl. 8)

Ma 9 ▪1559 Man beweise, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Längen der Katheten gleich der Summe der Längen der Durchmesser des Umkreises und des Inkreises ist.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1560 Man beweise, daß es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, die sich nicht in der Form
$$z=p+n^3,$$
wobei p eine Primzahl und n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, darstellen lassen.

Herwig Gratias, stud. phys., Jena

Ph 9 ▪4 Mit einem 57 cm vom Auge entfernt gehaltenen Lineal wurde ein scheinbarer Durchmesser des Mondes von etwa 5,2 mm gemessen. Der wahre Durchmesser des Mondes sei mit 3476 km gegeben. Man bestimme die Entfernung des Mondes von der Erde und den prozentualen Fehler des ermittelten Wertes. (Die Entfernung Erde–Mond beträgt 384400 km.)

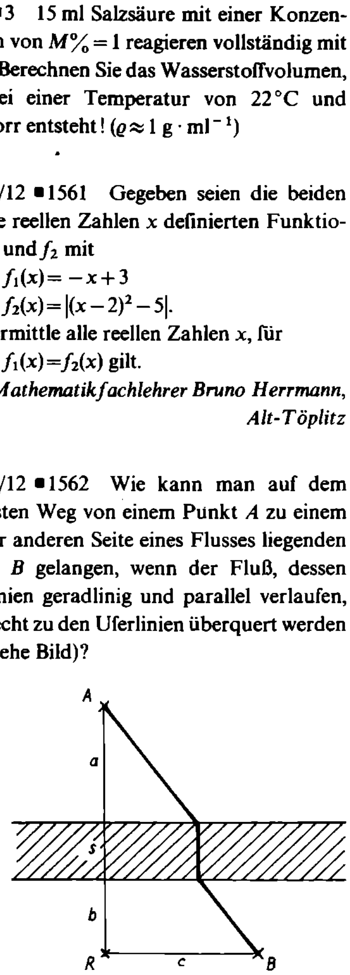
Rainer Maschke, Sprachheil-OS Weimar
(Kl. 9)

Ch 9 ▪3 15 ml Salzsäure mit einer Konzentration von $M\% = 1$ reagieren vollständig mit Zink. Berechnen Sie das Wasserstoffvolumen, das bei einer Temperatur von 22 °C und 760 Torr entsteht! ($\varrho \approx 1\ \mathrm{g \cdot ml^{-1}}$)

Ma 10/12 ▪1561 Gegeben seien die beiden für alle reellen Zahlen x definierten Funktionen f_1 und f_2 mit
$$f_1(x) = -x+3$$
$$f_2(x) = |(x-2)^2 - 5|.$$
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $f_1(x) = f_2(x)$ gilt.

Mathematikfachlehrer Bruno Herrmann,
Alt-Töplitz

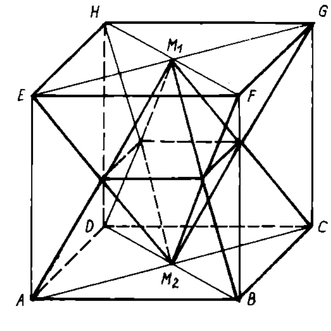
Ma 10/12 ▪1562 Wie kann man auf dem kürzesten Weg von einem Punkt A zu einem auf der anderen Seite eines Flusses liegenden Punkt B gelangen, wenn der Fluß, dessen Uferlinien geradlinig und parallel verlaufen, senkrecht zu den Uferlinien überquert werden soll (siehe Bild)?



a) Man konstruiere mit Zirkel und Lineal den Streckenzug, auf dem der kürzeste Weg verläuft.
b) Man berechne die Länge dieses kürzesten Weges, wenn der Abstand des Punktes A von dem nächstgelegenen Flußufer $a = 500$ m, der Abstand des Punktes B von dem anderen Flußufer $b = 300$ m, die Flußbreite $s = 200$ m und der Abstand des Punktes B von der durch A gehenden Senkrechten zur Uferlinie $BR = c = 600$ m beträgt.

Michael Marczinek,
EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 12)

Ma 10/12 ▪1563 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge a. M_1 sei der Mittelpunkt der Deckfläche und M_2 der Mittelpunkt der Grundfläche dieses Würfels (siehe Bild).



Die Menge aller inneren und Randpunkte der quadratischen Pyramide $ABCDM_1$ werde mit P_1 und die Menge aller inneren und Randpunkte der quadratischen Pyramide $EFGHM_2$ mit P_2 bezeichnet. Man berechne
a) das Volumen des geometrischen Körpers, der aus allen Punkten der Durchschnittsmenge $P_1 \cap P_2$ besteht und dessen Kanten in dem Bild schwarz gezeichnet sind,
b) das Volumen des geometrischen Körpers, der aus allen Punkten der Vereinigungsmenge $P_1 \cup P_2$ besteht und dessen Kanten in dem Bild rot gezeichnet sind.
c) Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Körper zueinander?

Mathematikfachlehrer Alois Weninger,
Knittelfeld, Österreich

Ma 10/12 ▪1564 Man beweise, daß es keine rationalen Zahlen x und y gibt, für die $x^2+y^2=7$ gilt.

Dipl.-Math. Wolfgang Moldenhauer, Rostock

Ph 10/12 ▪5 Man läßt einen Stein in den Brunnen fallen. Der Aufschlag auf das Wasser ist nach 3,8 Sekunden zu hören. Wie tief ist der Brunnen, wenn man eine Schallgeschwindigkeit von $340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ annimmt? $\left(g=9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$

Ch 10/12 ▪4 Wieviel Gramm Essigsäureäthylester kann man aus 16 g Äthansäure herstellen, wenn die Ausbeute 85% beträgt?

Hinweis: Alle Kollektive, die ihre Lösungen geschlossen einsenden, bitten wir, diese vorher nach Aufgabennummern zu sortieren. Damit wird die Arbeit der Redaktion, bestehend aus dem Chefredakteur und der Redaktionsassistentin, wesentlich erleichtert. Außerdem bitten wir alle *alpha*-Wettbewerbsteilnehmer, ihre Lösungen nicht erst zum letzten Wettbewerbstermin einzureichen, und es wäre gewährleistet, daß die aufwendige Sortierarbeit eher abgeschlossen und mit der Korrektur früher begonnen werden kann.

Nobelpreisträger L. W. Kantorowitsch

Mit *Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch* erhielt 1975 erstmals ein Wissenschaftler aus einem sozialistischen Land, der UdSSR, einen der beiden Nobelpreise für Wirtschaftswissenschaften. Leninpreisträger Prof. *L. W. Kantorowitsch*, Geburtsjahr 1912, Akademiemitglied, Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften, hatte Ende der dreißiger Jahre einen Lösungsweg für einen Aufgabentyp gefunden, der dem *Institut für Mathematik und Mechanik der Leningrader Staatlichen Universität* vom *Laboratorium des Furniertrusts* gestellt worden war. Hierbei handelte es sich, ausgehend von den Zielstellungen des dritten sowjetischen Fünfjahrplans, um Aufgaben der besten Arbeitsverteilung auf Maschinen und mechanische Einrichtungen, der maximalen Verringerung von Abfällen, der bestmöglichen Nutzung von Rohstoffen, Brennstoffen, Transportraum, örtlichen Reserven u. a. Dieser Aufgabentyp ist dadurch charakterisiert, daß stets aus einer Menge möglicher Varianten oder zulässiger Lösungen (z. B. der Belegung von Werkbänken, des Rohstoffeinsatzes, der Ausnutzung unterschiedlicher technologischer Verfahren usw.) jene bestimmt werden, die bezüglich eines definierten Kriteriums die besten sind. Diese besten Lösungen bzw. Varianten werden als optimal bezeichnet. Es ist das Verdienst von Kantorowitsch, das Optimalitätskriterium für einen bestimmten Aufgabentyp in die ökonomisch-mathematische Untersuchung eingeführt zu haben.
Die von ihm 1939 veröffentlichte Arbeit über „Mathematische Methoden bei der Organisation und Planung der Produktion" gilt daher als die Grundlegung einer neuen ökonomisch-mathematischen Richtung, der linearen Optimierung. Sowohl Kantorowitsch als auch Wirtschaftsmathematiker anderer Länder haben in den vierziger und fünfziger Jahren eine umfangreiche Arbeit zur Ausformung dieses neuen mathematischen Gebiets geleistet, das im Arsenal moderner mathematischer Verfahren zur Formulierung und Lösung ökonomischer Aufgabenstellungen einen hervorragenden Platz einnimmt.
Wie der Name sagt, handelt es sich bei der linearen Optimierung um ein Teilgebiet der Mathematik, welche die Theorie und die numerischen Methoden zur Bestimmung von Extremwerten einer linearen Funktion mehrer Variabler mit linearen Restriktionen umfaßt und entwickelt. Ihr Ausgangspunkt war und ihr Anwendungsgebiet ist vorrangig die Wirtschaft auf ihren verschiedenen Ebenen. Der Vorzug der linearen Optimierung gegenüber der bereits in den zwanziger Jahren im Zusammenhang mit der Aufstellung von Volkswirtschaftsplänen in der UdSSR entwickelten Methode der Verflechtungsbilanzierung besteht darin, daß sie die zwischen den einzelnen Zweigen und Sektoren bestehenden ökonomischen Verflechtungen als technisch-technologische Beziehungen im Rahmen der bestmöglichen Ausnutzung der vorhandenen Ressourcen, ausgehend von einem vorgegebenen Kriterium, betrachtet.
Das Standardproblem der linearen Optimierung besteht darin, eine vorhandene Menge von Ressourcen (Arbeitskräfte, Arbeitsmittel, Arbeitsgegenstände) unter Beachtung der technologisch bedingten Aufwandskoeffizienten je Erzeugniseinheit so auszuschöpfen, daß der Erzeugnisvektor im Sinne des definierten Zielkriteriums maximal ist.
Zur Lösung dieses Aufgabentyps entwickelte *Kantorowitsch* zunächst die sogenannte Methode der Auflösungsmultiplikatoren, die später zur Simplexmethode weiterentwickelt wurde. Dieses Lösungsverfahren basiert auf speziellen Optimalitätsbedingungen, die die Existenz von sogenannten mit den Lagrangeschen Multiplikatoren vergleichbaren Dualvariablen implizieren. Mathematisch stellen sie die Ableitungen des optimalen Zielfunktionswertes nach den Ressourcen dar, sie zeigen also an, um wieviel Einheiten sich der optimale Zielfunktionswert bei entsprechender Variierung der Ressourcen um eine Einheit verändert. In diesem Sinne bezeichnet man die Dualvariablen als die optimalen Bewertungen der Ressourcen. Eine wichtige Entdeckung bestand darin, daß zu jedem linearen Optimierungsproblem ein sogenanntes duales Problem existiert, für das die gleichen Optimalitätsbedingungen gelten und dessen Unbekannte die Dualvariablen sind. Von Bedeutung ist hierbei die Tatsache, daß sowohl die Optimalitätsbedingungen als auch das duale Problem zu neuen Erkenntnissen über die Gesetzmäßigkeiten der optimalen Planung führen.
Kantorowitsch hat mit diesen Entdeckungen der ökonomischen Theorie entscheidende Impulse gegeben. Die streng mathematische Abbildung einer typischen wirtschaftlichen Entscheidungssituation und die Entwicklung entsprechender Lösungsverfahren verdeutlichen vor allem: Ein echter Beitrag zur Lösung ökonomischer Probleme im Sinne von Entscheidungsobjektivierung und -vorbereitung ist nur zu erwarten, wenn die entscheidenden Einflußfaktoren des Reproduktionsprozesses in ihrem wechselseitigen Aufeinanderwirken erfaßt und betrachtet werden, wenn die Ziel-Mittel-Relationen hinreichend abgebildet werden und eine einheitliche, aufeinander abgestimmte Betrachtung der Natural- und Wertprozesse erfolgt.
Kantorowitsch hat mit der Entwicklung eines ersten Lösungsverfahrens für lineare Optimierungsaufgaben und der von ihm vorgenommenen ökonomischen Interpretationen maßgeblich den Weg geebnet für die Optimalplanung, die sich seit den fünfziger Jahren in allen sozialistischen Ländern entwickelt, als auch für die sich gegenwärtig konstituierende automatisierte Planberechnung.
Zusammen mit den Leninpreisträgern *W. S. Nemtschinow* und *W. W. Nowoshilow* hat er einen entscheidenden Anteil bei der Schaffung effektiver Forschungszentren in Moskau, Nowosibirsk und Leningrad und einer auf alle sozialistischen Länder befruchtend wirkenden sowjetischen Schule.

H. Schilar/K. Schwarz,
aus: Spektrum 3/76

Über das Signet der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Das Signet (Handsiegel, Abzeichen) enthält folgende Bestandteile:
den hebräischen Buchstaben Aleph, einen Kreis und die Inschrift MGDDR.

- Der Buchstabe Aleph wurde von *G. Cantor* (1845 bis 1918; ab 1879 ord. Professor für Mathematik an der Universität Halle) als Bezeichnung für die Kardinalzahl einer wohlgeordneten Mengen eingeführt. Aleph soll daher die sogenannte *Reine Mathematik* repräsentieren.

- Der Kreis stellt den Zusammenschluß der Mathematiker aus den verschiedenen Bereichen in unserer Gesellschaft und die Einheit von *Reiner Mathematik* und *Angewandter Mathematik* dar.

- Die Inschrift stellt die neue Form der Abkürzung des Namens der Gesellschaft dar. Aus sprachlichen Gründen wurde ein „d" weggelassen.

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Zirkel für wissenschaftlich-praktische Arbeit

Wir sind sechs Schüler der EOS Greifswald und haben uns $1^1/_2$ Jahre lang im *Zirkel für wissenschaftlich-praktische Arbeit* mit Fragen der Kombinatorik und Graphentheorie beschäftigt. Die Leitung hatte *Dr. Christoph Bandt* von der Sektion Mathematik der Universität Greifswald, IMO-Preisträger 1967 und 1968.
Den Beitrag über das *Käsekästchen-Spiel* haben *Thomas Fiedler* und *Christian Schulz* erarbeitet. Wir haben eine begründete Vermutung über die Gewinnchancen bei diesem Spiel. – *Dr. Schreiber* gab uns dazu einen wichtigen Hinweis – aber wir konnten nur in Sonderfällen eine Gewinnstrategie angeben.

Das Käsekästchenspiel

Auf einem Blatt Papier werden n Punkte beliebig festgelegt, so daß nicht drei auf einer Geraden liegen. Die beiden Spieler I und II machen abwechselnd je einen Zug, der darin besteht, zwei beliebige Punkte durch eine Strecke zu verbinden, so daß bereits vorhandene Strecken nicht geschnitten werden. Spieler I beginnt. Zieht ein Spieler die dritte Seite eines Dreiecks, in dem sich kein Punkt mehr befindet, so gehört es ihm. Das Spiel ist beendet, wenn unter den gegebenen Bedingungen kein Zug mehr möglich ist. Derjenige Spieler, der im Verlauf des Spiels die meisten Dreiecke „erbeutet“ hat, gewinnt.
Nach jedem Spiel liegt ein zusammenhängendes Netz (Graph, siehe alpha 6/72) vor, das aus n-Eckpunkten, k Strecken (k ist auch die Gesamtzahl der Züge des Spiels) und d Dreiecksflächen besteht. Von den n Eckpunkten gibt es p äußere Punkte, die ein konvexes Vieleck bilden, in dem die restlichen Punkte liegen.
An einem einfachen Beispiel sei der Spielverlauf erläutert:
$n = p = 4$

—— von I gezogene Kante
----- von II gezogene Kante
* mit diesem Zug schließt der Spieler ein Dreieck

1. Variante (siehe Bild 1)

	I	II
1.	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$

Zieht I eine Seite des Vierecks, so ist es für II günstig, die gegenüberliegende Kante zu ziehen

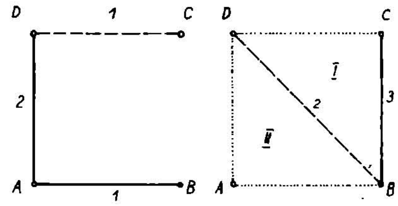


Bild 1

2.	$\overline{AD}$	$\overline{BD}$*

I muß jetzt ein Dreieck anbieten, kann dann aber im nächsten Zug selbst ein Dreieck schließen – Unentschieden

3.	$\overline{CB}$*	

2. Variante (siehe Bild 2)

	I	II
1.	$\overline{AC}$	$\overline{AD}$
2.	$\overline{CD}$*	$\overline{AB}$
3.	$\overline{BC}$*	

Zieht I zu Beginn die Diagonale des Vierecks, so muß II mit jedem seiner Züge I ein Dreieck anbieten, das dieser dann schließt – Sieg für I (mit zwei Dreiecken Vorsprung)

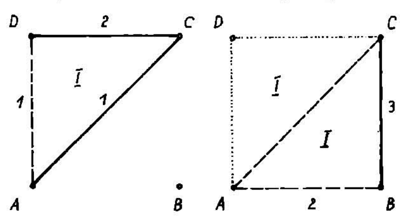


Bild 2

Hier noch zwei Aufgaben:
1. $n = 4$ $p = 3$ (siehe Bild 3)
II kann immer gewinnen. Überzeugt euch selbst davon!

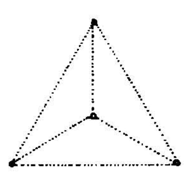


Bild 3

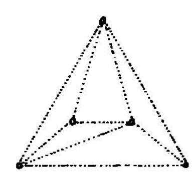


Bild 4

2. $n = 5$ $p = 3$ (siehe Bild 4)
Wie muß I anfangen, damit er gewinnt? Es gibt für ihn vier günstige Anfangszüge, bei den anderen verliert er.
Es stellt sich nun die Frage, ob d und k bei fest vorgegebenen Punkten vom Spielverlauf abhängen. Für unser Netz gilt der Eulersche Polyedersatz (siehe auch alpha 2/69 und „Kleine Enzyklopädie Mathematik“): Flächenzahl (einschließlich der äußeren Fläche) + Eckpunktzahl = Kantenzahl + 2. Da wir die äußere Fläche nicht mitzählen, ergibt sich für das Netz

$$d + n = k + 1. \tag{1}$$

Jedes Dreieck wird von genau drei Kanten begrenzt, wobei jede der $k - p$ inneren Kanten zwei Dreiecken gemeinsam ist. Daraus folgt

$$3d = 2(k - p) + p \text{ und daraus}$$
$$3d = 2k - p. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich durch Einsetzen

$$d = 2n - p - 2 \tag{3}$$
und
$$k = 3n - p - 3. \tag{4}$$

Es folgt also der
Satz: Die Anzahl d der Dreiecke und die Anzahl k der möglichen Züge sind nur durch die Anzahl und Lage der Punkte bestimmt, sie sind also vom Spielverlauf unabhängig.
Ist p ungerade, so ist auch d ungerade (Gleichung (3)), und es gibt kein Unentschieden, einer der beiden Spieler muß gewinnen. Die folgende Vermutung hat sich bei unseren Untersuchungen bestätigt, wir haben jedoch noch keinen schlüssigen Beweis gefunden.
Vermutung: Wenn d ungerade ist, so gewinnt der Spieler, der den letzten Zug macht. Mit den Gleichungen (3) und (4) bedeutet das
- Wenn n und p ungerade sind, kann Spieler I immer den Gewinn erzwingen.
- Wenn n gerade und p ungerade ist, kann Spieler II immer Gewinner werden.

Es sei noch kurz auf den interessanten Spezialfall $n = p$ hingewiesen (alle Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Vielecks).
Aus der Gleichung (4) ergibt sich hier $k = 2n - 3$, die Anzahl der Züge ist also immer ungerade und I macht immer den letzten Zug. Es läßt sich zeigen, daß I immer gewinnt, es gibt sogar mehrere Gewinntaktiken für ihn. Er kann beispielsweise „Ecken abschneiden“ (siehe Bild 5). Da I immer den letzten Zug macht, ist II einmal gezwungen, die zweite Kante des „abgeschnittenen“ Dreiecks zu ziehen, so daß I es vervollständigen kann. Isoliert I mehrere Eckpunkte, gewinnt er entsprechend viele Dreiecke.

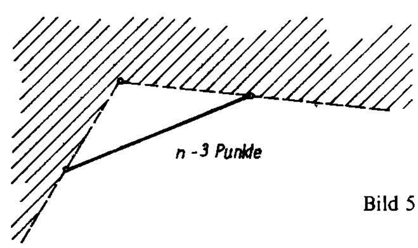


Bild 5

Im schraffierten Teil liegen keine weiteren Punkte.

Es würden den Rahmen dieses Artikels sprengen, wenn wir noch auf weitere Probleme und Fragestellungen eingehen würden, die sich bei diesem Spezialfall ergeben (andere Gewinnstrategien für I, Vorsprung, mit dem I bei festem n gewinnt). Vielleicht knobelt ihr selbst, wir haben jedenfalls viel Spaß an solchen Problemen gehabt.

Th. Fiedler/Ch. Schulz

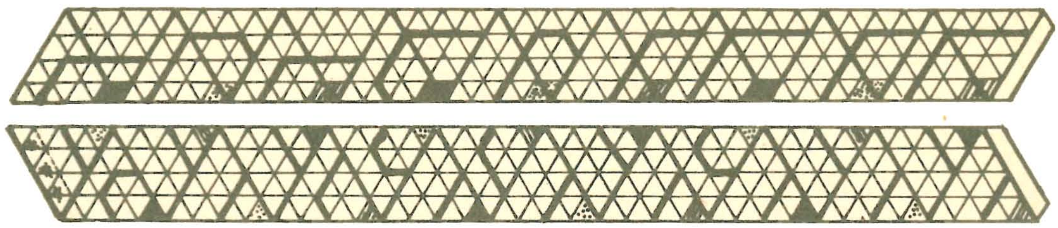
Ludus sexterni sexanguli

(Das Spiel des sechsfachen Sechsecks)

Bild 3

Bauanleitung

Vorderseite: Bild 1
Rückseite: Bild 2



Bei *Luxusausführung* die 18 Dreiecke nicht in durchgehendes Grundmuster eintragen, sondern einzeln konstruieren und etwa 1 mm breite Falzstreifen zum Umknicken zwischen den einzelnen Dreiecken vorsehen; ferner alle Dreieckseiten ein wenig stutzen, z. B. wie in Bild 3.

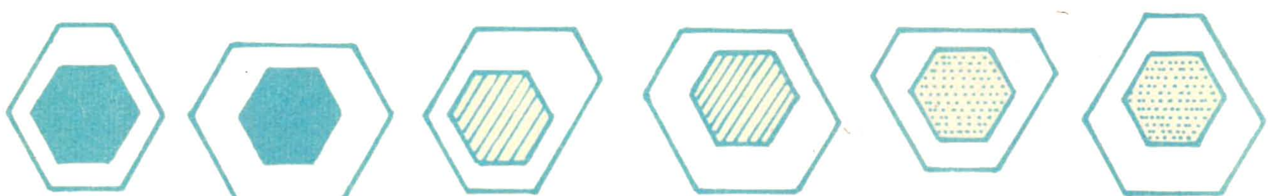
Zusammensetzung

1. Erstes Dreieck nach vorn klappen.
2. Streifen der letzten 15 Dreiecke nach vorn klappen. Wenden.
3. Streifen der letzten 13 Dreiecke nach vorn klappen.
4. Streifen der ersten 2 Dreiecke (= 4 Einzeldreiecke, bereits zu je 2 übereinanderliegend) nach vorn klappen. Wenden.
5. Streifen der letzten 11 Dreiecke nach vorn klappen. Wenden.
6. Streifen der letzten 9 Dreiecke nach vorn klappen. Wenden.
7. Streifen der letzten 7 Dreiecke nach vorn klappen.
8. Streifen der letzten 7 Dreiecke (von denen eines aus 2 übereinanderliegenden Einzeldreiecken besteht) nach vorn klappen.
9. Letztes Dreieck nach vorn klappen.
10. Streifen der letzten 2 Dreiecke (= 3 Einzeldreiecke, von denen 2 bereits übereinanderliegen) nach vorn klappen.
11. Streifen der letzten 3 Dreiecke (= 5 Einzeldreiecke, von denen zweimal je 2 bereits übereinanderliegen) nach vorn klappen.
12. Letztes Dreieck (= 2 übereinanderliegende Einzeldreiecke) nach vorn klappen.
13. Den nach oben herausragenden Anschlußstreifen durch die Lücke nach unten schieben und auf die mit *** gekennzeichnete Stelle kleben.

Frei bearbeitet von Dr. L. Stammler, Halle nach: Lothar Prengel: Geduldsspiel aus Fotografien, Fotokinomagazin 11/75.

Aufgabe: Durch leichtes, gewaltloses Falten sind folgende sechs Sechsecke zu erreichen.

Bild 4



Wenn 250 Kalorien 1046,7 Joule sind

Innerhalb der sozialistischen Staatengemeinschaft des RGW soll bis in die achtziger Jahre die vollständige Einführung und Anwendung eines neuen Maßeinheitensystems mit der Bezeichnung SI (abgeleitet von *Système International d'Unités*) abgeschlossen sein. Natürlich bedeutet die Einführung von SI-Maßeinheiten für jeden von uns einen mehr oder weniger großen Prozeß des Lernens und Umdenkens. Aber die gewaltigen wirtschaftlichen Vorteile, die sich durch die steigende Integration innerhalb des RGW ergeben, machten einheitliche Maße notwendig.

Das internationale Maßeinheitensystem (SI) wird eine Vielzahl von historisch entstandenen Maßeinheiten ablösen. Durch die konsequente Anwendung der SI-Maßeinheiten entfallen viele der oft schwierig zu merkenden Umrechnungsfaktoren, die man bisher beim Rechnen mit Maßeinheiten beachten muß. Als Grundeinheiten des SI wurden schon 1960 von der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht folgende Maßeinheiten für die ganze Welt bestätigt:

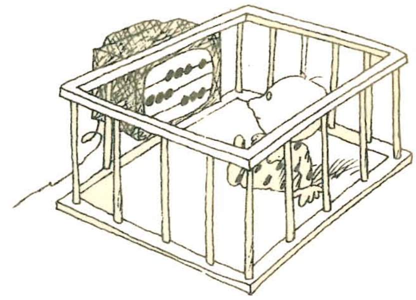
Das Meter (m) für die Länge, das Kilogramm (kg) für die Masse, die Sekunde (s) für die Zeit, das Ampère (A) für die elektrische Stromstärke, das Kelvin (K) für die Temperatur und die Candela (cd) für die Lichtstärke. Ab 1. 1. 1980 sollen dann solche Maßeinheiten wie Kalorie, das Kilopond, das Torr und die Pferdestärke und viele andere heute noch gebrauchte Maßeinheiten abgelöst werden. An Stelle der alten Maßeinheiten treten dann die SI-Maßeinheiten wie das Joule, das Newton, das Pascal und das Watt.

In der DDR sind nur relativ wenige Einheiten, wie das Kilopond, die technische Atmosphäre, die Kalorie und das Curie, betroffen. Um den unvermeidbaren volkswirtschaftlichen Aufwand für die notwendigen Veränderungen so niedrig wie möglich zu halten, werden die Maßnahmen zur schrittweisen Einführung der neuen Maßeinheiten mit allen Ministerien, aber auch mit den Maßmittelherstellern abgestimmt. Für die Umstellung der Einheiten auf allen Gebieten reicht die Zeit bis 1980 nicht aus. Es werden deshalb für einen Zeitraum von etwa 10 Jahren die „alten" und die „neuen" Maßeinheiten nebeneinander zu finden sein.

Umfangreiche Maßnahmen sind bis dahin noch durchzuführen: Veränderungen der Skalen von Meßgeräten, Neuformulierungen von Festigkeitswerten für Werkstoffe und auch die Neuausgaben von Joule-Tabellen für Lebensmittel anstatt der bisher gebräuchlichen Kalorien-Tabellen. 100 Gramm Brot enthalten 250 Kalorien, was in SI-Maßeinheiten ausgedrückt gleichbedeutend mit 1046,7 Joule ist...

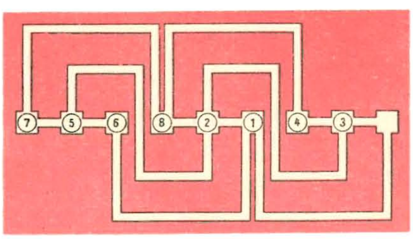
K.-H. Kraass

In freien Stunden alpha heiter



Die Truhen im Keller

Bei der Ausgrabung eines alten verfallenen Schlosses wurden neun unterirdische Kammern entdeckt, die durch Gänge miteinander verbunden sind. In acht Kammern standen Truhen mit wertvollen Dokumenten, die neunte Kammer war leer. Die Truhen waren von 1 bis 8 numeriert und standen in folgender Ordnung:
7, 5, 6, 8, 2, 1, 4, 3 (siehe Bild). Um die Dokumente mit dem anderen Material zu vergleichen, das sich noch in den Kammern befand, war es notwendig, die Truhen in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 umzustellen.



Wie ist das mit der geringsten Zahl von Umstellungen möglich? Durch die Gänge kann man jeweils nur eine Truhe tragen, die vorübergehend in der leeren Kammer abgestellt wird. In jeder Kammer darf nur eine Truhe stehen.
Für die Lösung dieser Aufgabe zeichnet man sich die Abbildung in einem vergrößerten Maßstab ab und verwendet am besten Damesteine, die man mit den Nummern 1 bis 8 versieht. Diese kann man dann beliebig auf den Gängen verschieben, bis man die richtige Reihenfolge erhält.

E. Minskin, Moskau

Neues aus Buntstadt

In Buntstadt wohnt jede Familie in einem anderen Haus. Eines schönen Tages wollten alle Familien umziehen. Um diesen Tag zu feiern, beschloß der Rat der Stadt, alle Häuser frisch zu streichen, und zwar rot, blau und gelb. Das sollte so geschehen, daß für keine Familie die Farbe des alten und des neuen Wohnhauses zusammenfiel. Was glaubt ihr, hat der Stadtrat das geschafft?

Aus: Quant 2/75, Moskau

Superluxusseife Rubin

Wie Fritzchen Klug aus Klugsdorf durch geschickten Seifeneinkauf für seine Familie sein Taschengeld erhöhte, seine Erfahrungen an seine Schüler weitergab und sich Florena wunderte, daß in Klugsdorf die 2er und 3er Packungen der Superluxusseife Rubin keinen Absatz fand.
Wer findet den Druckfehler in der Werbe-Annonce der „Jungen Welt" vom 20. 1. 1976?

ABC der Mathe

Die Buchstaben A, B, C sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

$$A^B = A$$
$$AA^B = ABA$$
$$ACA^B = ACBCA$$
$$ACCA^B = ACCBCCA$$

3 + 2 = 5

In dem nachfolgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
  D R E I
+ Z W E I
---------
  F Ü N F
```

Ramona Werner, OS Buttelstedt, Kl. 5b

Kennst du den?

● Der Lehrer fragt einen Schüler: „Wenn du sieben Stück Schokolade hast, und der Peter verlangt zwei davon, wieviel bleiben dir noch?"
„Sieben, Herr Lehrer!"

● Ein Vater zu seinem Sohn: „Soll ich dir bei den Mathe-Aufgaben helfen?" „Ach laß mal, Vati, der Lehrer sieht es lieber, wenn wir die Fehler selbst machen."

● Fritzchen ist verzweifelt, und schließlich fragt er seinen Papa: „Papa, wie berechnet man einen Kegel?"
„Einen Kegel", echot der Papa, „das kommt ganz auf die Kegelbahn an!"

● „Monika hat mir erzählt, daß Du ihr mein Geheimnis verraten hast, obwohl ich Dich darum bat, es ihr nicht zu erzählen." –
„Na, so was! Dabei hatte ich sie doch darum gebeten, daß sie es Dir nicht sagen solle." –
„Ach so! Na dann darfst Du ihr aber auch nicht sagen, daß ich Dir verraten habe, daß sie es mir erzählt hat."

● „Bitte, einen Film für eine Spiegelreflexkamera." –
„Sechs mal Sechs?"
„Sechsunddreißig. Aber wieso fragen Sie mich? Das müssen Sie doch in der Schule gelernt haben."

● „Gestern habe ich Holz gemacht. Da riß sich die Axt los, schlug mir an den Kopf, ich verlor das Bewußtsein. Ich habe auf die Uhr gesehen: genau zwanzig Minuten lag ich besinnungslos am Boden!"

● „Bitte zwei Pfund Tomaten." –
„Das heißt Kilo." –
„Na gut, dann also zwei Pfund Kilo, bitte."

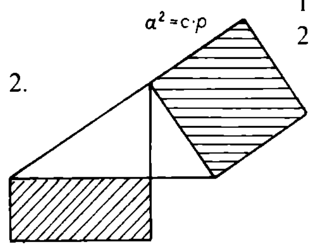
„Zum Lösen komplizierter Mathematikaufgaben muß man geboren sein." –
„Du hast recht, denn, wenn man nicht geboren ist, kann man nicht einmal einfache Mathematikaufgaben lösen."

Bilderrätsel

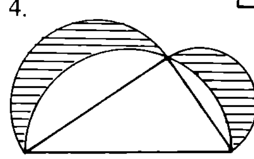
Jedes der folgenden zehn Bilder steht im Zusammenhang mit dem Leben und Werk eines bedeutenden Mathematikers. Die Namen dieser Persönlichkeiten sind (in anderer Reihenfolge) unten angegeben. Ordne jedem Bild den richtigen Namen zu! Die Anfangsbuchstaben ergeben dann als Lösungswort einen dir aus dem Mathematikunterricht bekannten Gegenstand.
Archimedes – Henry Briggs – Georg Cantor – Eratosthenes – Euklid – Hippokrates – Adam Ries – Isaac Newton – Michael Stifel – Thales

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

1.
Rechenung auff der Linien und Federn

2.


3.
$M_1 \cap M_2 = \emptyset$

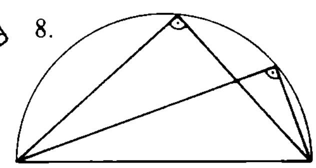
4.


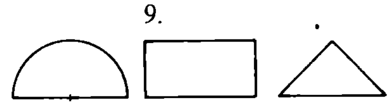
5.
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7
~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~

6.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

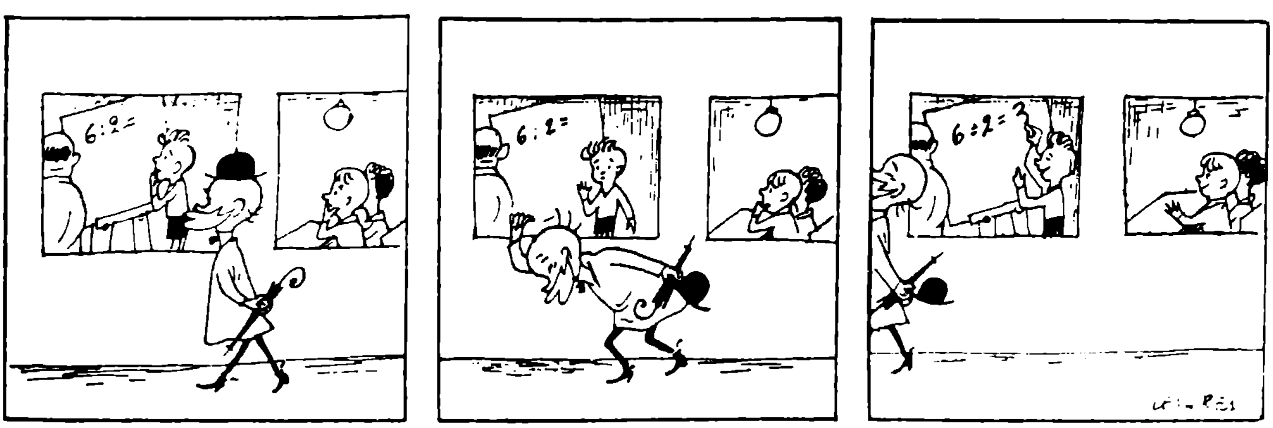
7.

1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128

8.


9.


10.
$x = \log_a b$



Wir arbeiten mit Venn-Diagrammen

Mengendiagramme, die auch als *Venn-Diagramme* bezeichnet werden, sind recht abstrakte Darstellungen, da Mengen als Ovale und ihre Elemente als Punkte dargestellt werden, wobei die Natur der Elemente keine Rolle spielt. Sie bringen aber die Elementbeziehungen sehr anschaulich zum Ausdruck. Zwei Beispiele sollen unsere Leser mit ihrer Verwendung vertraut machen:

1. Beispiel: Gegeben sind

M: Menge aller natürlichen Zahlen;

M_1: Menge aller Teiler von 12;

M_2: Menge aller Teiler von 20.

Man bilde die Durchschnittsmenge, wobei die Grundmenge mit M bezeichnet sei.

$D \;\; = M_1 \cap M_2$

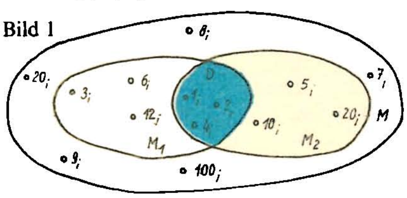
$M \;\; = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$

$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$M_2 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$D \;\; = \{1, 2, 4\}$

Bild 1



2. Beispiel: Gegeben sind

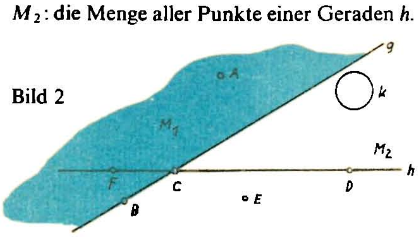
G: alle Figuren einer Zeichenebene.

(Dazu gehören alle Punkte, Geraden, Kreise, Vielecke usw. der Ebene. Alle diese Figuren werden nicht als Punktmengen, sondern als selbständige Gebilde betrachtet.)

M_1: die Punktmenge einer Halbebene, die durch eine Gerade g gebildet wird, indem sie die Ebene in zwei Halbebenen teilt. Die Punkte von g sollen nicht mit zu M_1 gezählt werden.

M_2: die Menge aller Punkte einer Geraden h.

Bild 2



Es sollen G und $M_1 \cup M_2$ als Venn-Diagramm gezeichnet werden. Dann sind die in der Abbildung angegebenen Punkte A, B, C, D, E, F, die Kreislinie k und die Geraden g und h in das Venn-Diagramm einzutragen.

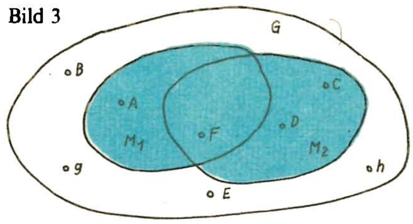
$V \;\; = M_1 \cup M_2$

$G \;\; = \{A, B, C, D, E, F, k, g, h, \ldots\}$

$M_1 = \{A, F\} \;\; M_2 = \{F, C, D\}$

$V \;\; = \{A, F, C, D\}$

Bild 3



Nachdem wir uns aus dem Buch von Frau Prof. Dr. Lilly Görke – Mengen, Relationen, Funktionen – mit dem Begriff Venn-Diagramm vertraut gemacht haben, können wir nun sicher den Beitrag „Eine einfachere Lösung bei Venn-Diagrammen", entnommen unserer tschechoslowakischen Schwesternzeitschrift *rozhledy matematicko fyzikální* (5/75), gut verstehen (übersetzt und bearbeitet von O. Langer, Döbeln).

Venn-Diagrammen begegnen wir oft bei der Lösung von Aufgaben aus der Kombinatorik, bei denen einige endliche Mengen betrachtet werden. In solchen Aufgaben sind teilweise Angaben über die Anzahl der Elemente von Mengen enthalten. Ferner werden aus den gegebenen Mengen mit Hilfe der Operationen *Durchschnitt* und *Vereinigung* weitere Mengen gebildet. Es sollen nun aus den vorhandenen Zahlenangaben die Elementangaben der neugebildeten Mengen bestimmt werden. Ein Lösungsverfahren für solche Aufgaben besteht darin, daß wir die betrachteten Mengen als ebene Punktmengen darstellen, wobei diese Punktmengen innere Punkte einfacher geometrischer Gebilde wie Kreis, Oval u. ä., sind.

Ein solches Gebilde mit den markierten inneren Punkten bezeichnen wir als Venn-Diagramm. Informationen über die Anzahl der Elemente beim Mengendurchschnitt bzw. bei der Vereinigungsmenge sind dann Informationen über die Anzahl der Elemente in den verschiedenen Teilen (Feldern) des zugehörigen Diagramms. Wenn bei einer Aufgabe die Anzahl der beteiligten Mengen gering ist (siehe 1. Beispiel bzw. 2. Beispiel), dann ist so ein Diagramm noch ausreichend übersichtlich, d. h., wir können daraus leicht ablesen, wie die gegebenen Informationen mit den gesuchten zusammenhängen.

Das soeben beschriebene Verfahren ist jedoch bei manchen Aufgaben schwerfällig, es existieren elegantere Lösungswege. Wir betrachten dazu eine Aufgabe der 23. Mathematikolympiade der ČSSR, Kategorie C.

Aufgabe: Einige Schüler einer Schule beteiligten sich an der Biologie-, an der Chemie- und an der Physik-Olympiade. Es gab doppelt soviel Teilnehmer bei der Physik-Olympiade wie bei der Chemie-Olympiade. Bei der Chemie-Olympiade waren es dreimal soviel Teilnehmer wie bei der Biologie-Olympiade. 12 Schüler beteiligten sich nur an einer Olympiade. 4 Schüler nahmen an zwei Olympiaden teil, jedoch nahm davon keiner sowohl an der Physik-Olympiade als auch an der Biologie-Olympiade teil. Die Anzahl der Schüler, die nur an der Biologie-Olympiade teilnahm, war die gleiche wie die Anzahl der Schüler, die Teilnehmer sowohl bei der Chemie-Olympiade als auch bei der Biologie-Olympiade waren.

Es soll bestimmt werden, wieviel Schüler an den einzelnen der drei genannten Olympiaden und wieviel Schüler insgesamt an diesen Olympiaden teilgenommen haben.

Lösung: Bezeichnen wir die Anzahl der Elemente in den einzelnen Teilen (Bereichen) des Diagramms derart, wie in Bild 4 angegeben, so erhalten wir dadurch ein äquivalentes Problem. Es seien $a, b, \ldots, g$ nichtnegative ganze Zahlen; es gelten dann folgende Beziehungen:

$$b+e+f+g=2(c+d+f+g),$$
$$a+b+c=12,$$
$$e+g=0,$$
$$c+d+f+g=3(a+d+e+g),$$
$$d+e+f+g=4$$
$$a=d+g.$$

Es sind zu bestimmen: $a+d+e+g$, $c+d+f+g$, $b+e+f+g$ sowie $a+b+c+d+e+f+g$.

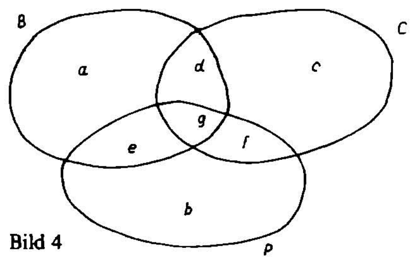


Bild 4

Wir können aber auch anders vorgehen. Wir bezeichnen mit b, c, p die Anzahl der Elemente der Mengen B, C, P sowie mit g_i bzw. m_i die Anzahl der Elemente, die genau bzw. mindestens in i dieser Mengen ($i=1, 2, 3$) liegen. Dann ist u. a. gegeben:

$p=2c$, $c=3b$, $g_1=12$, $m_2=4$;

die übrigen Angaben werden nicht benötigt.

Offensichtlich gilt: $m_1=g_1+m_2=12+4=16$, ferner $p \leq m_1 \leq b+c+p$ oder $6b \leq 16 \leq 10b$. Diese Ungleichung kann nur durch eine einzige ganze Zahl erfüllt werden, und zwar $b=2$. Daher ist $b=2$, $c=6$, $p=12$.

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Zwei Bedingungen haben wir überhaupt nicht benötigt:

- $P \cap B = \emptyset$ (leere Menge).
- Die Anzahl der Elemente der Menge B, die in keiner anderen Menge liegen, ist gleich der Anzahl der Elemente der Durchschnittsmenge $B \cap C$.

Ähnlich ist das folgende Beispiel:

Aufgabe: Ein Reisebüro organisierte vier Arten von Wochenendfahrten, die sämtlich an verschiedenen Wochenenden stattfinden. Wir bezeichnen mit A, B, C, D die genannten vier

Arten von Wochenendfahrten. Die Mitarbeiterin des Reisebüros stellte folgende Teilnehmerzahlen fest:
$A=195$, $B=203$, $C=105$, $D=329$. Davon hatte sich kein Teilnehmer für drei Fahrten gemeldet; an allen vier Fahrten nahmen zwei Personen teil. 267 Personen hatten zwei Fahrten gebucht; dabei gab es folgende Aufgliederung: A und B 64 Personen; A und C 58 Personen; B und C 32 Personen; C und D 14 Personen; B und D 51 Personen.
Kann die Mitarbeiterin aus diesen Angaben feststellen,
a) wieviel Personen genau eine der vier Arten von Wochenendfahrten gebucht hatten;
b) wieviel Personen sich insgesamt für die genannten vier Arten von Fahrten gemeldet hatten?
Lösung: Aus dem Bild 5 entnehmen wir:

$$k+o+s+t+u+v+x+y=195,$$
$$l+o+p+q+u+v+w+y=203,$$
$$m+q+r+t+u+w+x+y=106,$$
$$n+p+r+s+v+w+x+y=329,$$
$$u+v+w+x=0,$$
$$o+p+q+r+s+t=267,$$
$$o=64, t=58, q=32, r=14, p=51, y=2.$$

Zu bestimmen sind entsprechend der Fragestellung
a) $k+l+m+n$,
b) $k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y$.

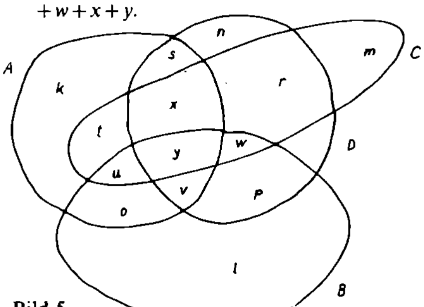


Bild 5

Auch diese Aufgabe wollen wir auf ähnliche Weise lösen wie die erste. Wir bezeichnen mit a, b, c, d die Anzahl der Teilnehmer für die Fahrten A, B, C, D; ferner sollen g_i und m_i ($i=1, 2, 3, 4$) die gleiche Bedeutung besitzen wie bei der ersten Aufgabe. Es sind daher (u. a.) folgende Angaben bekannt:
$a=195$, $b=203$, $c=106$, $d=329$, $g_2=267$, $g_3=0$, $g_4=2$; andere Angaben werden nicht benötigt. Zu bestimmen sind die Zahlen g_1 und m_1. Offensichtlich gilt
$a+b+c+d=g_1+2g_2+3g_3+4g_4$,
also $195+203+106+329=g_1+2\cdot 267+4\cdot 2$; das ergibt $g_1=291$.
Weiterhin ist $m_1=g_1+g_2+g_3+g_4=291+267+2=560$. Damit ist die Aufgabe gelöst; die Angaben über die Anzahl der Teilnehmer, die zwei Fahrten gebucht hatten, wurden nicht benötigt.
Als Schlußfolgerung erkennen wir, daß es sich lohnt, über die verschiedenen möglichen Lösungswege nachzudenken, ehe man die Zahlen in die sich aus dem Venn-Diagramm ergebenden Beziehungen einsetzt. *A. Vrba*

Lösungen

alpha-Wettbewerb aus Heft 2/76 (Fortsetzung)

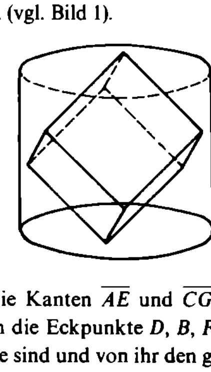
Ch 9 ▪1526 $x:2300=100:0{,}1$
$x=2\,300\,000$
Es müssen täglich mindestens 2300 t Rohsalz gefördert werden.

Ma 10/12 ▪1527 Wir setzen
$$z=0{,}35-(a-3{,}5)(4{,}5-a)$$
und erhalten
$$z=0{,}35-(4{,}5a-a^2+3{,}5a-15{,}75)$$
$$=0{,}35-8a+a^2+15{,}75$$
$$=16{,}1+(a^2-8a+16)-16$$
$$=(a-4)^2+0{,}1.$$
Da das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ ist, gilt stets $(a-4)^2\geqq 0$, also $z\geqq 0{,}1>0$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ▪1528 Da der Oberflächeninhalt A des offenen Blechbehälters gleich der Summe aus dem Flächeninhalt der Grundfläche und dem Inhalt des Mantels ist, gilt
$$A=\frac{\pi}{4}d_1^2+\frac{\pi}{2}s(d_1+d_2). \qquad (1)$$
Ist D der Platinendurchmesser, so gilt für den Flächeninhalt der Platine
$$A'=\frac{\pi}{4}D^2. \qquad (2)$$
Wegen $A=A'$ folgt aus (1) und (2)
$$\frac{\pi}{4}D^2=\frac{\pi}{4}d_1^2+\frac{\pi}{2}s(d_1+d_2),$$
$$D^2=d_1^2+2s(d_1+d_2),$$
$$D=\sqrt{d_1^2+2s(d_1+d_2)}. \qquad (3)$$
Diese Formel ist die in der Aufgabe c) verlangte allgemeine Formel.
a) Wegen $d_1=80\text{ mm}=8\text{ cm}$, $d_2=130\text{ mm}=13\text{ cm}$, $s=140\text{ mm}=14\text{ cm}$ ergibt sich aus (3)
$$D=\sqrt{8^2+2\cdot 14\cdot 21}\text{ cm}=\sqrt{652}\text{ cm},$$
$$D\approx 25{,}53\text{ cm}=255{,}3\text{ mm}.$$
Der Platinendurchmesser beträgt also rund 255 mm.
b) Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, so gilt nach dem Satz des Pythagoras
$$h^2=s^2-\left(\frac{d_2-d_1}{2}\right)^2,$$
$$h=\sqrt{14^2-2{,}5^2}\text{ cm}=\sqrt{189{,}75}\text{ cm},$$
$$h=13{,}77\text{ cm}.$$
Daher gilt für das Volumen des Blechbehälters
$$V=\frac{\pi}{12}h(d_1^2+d_2^2+d_1d_2),$$
$$V\approx\frac{\pi}{12}\cdot 13{,}77(8^2+13^2+8\cdot 13)\text{ cm}^3,$$
$$V\approx\frac{\pi}{12}\cdot 13{,}77\cdot 337\text{ cm}^3,$$
$$V\approx 1215\text{ cm}^3.$$
Das Volumen des Blechbehälters beträgt also 1215 cm^3, d. s. 1,215 l.

Ma 10/12 ▪1529 Es sei x eine Lösung der Gleichung
$$a^{2x}+(ab)^x-b^{2x}=0. \qquad (1)$$
Wegen $b\neq 0$ kann man durch b^{2x} dividieren und erhält
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+\left(\frac{a}{b}\right)^x-1=0. \qquad (2)$$
Setzt man
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=t, \qquad (3)$$
so ist $t>0$, und man erhält aus (2) die quadratische Gleichung für t
$$t^2+t-1=0. \qquad (4)$$
Diese quatratische Gleichung hat genau eine positive reelle Lösung, nämlich
$$t=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (5)$$
Wäre nun x eine ganze Zahl, so wäre, da a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, $t=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ eine rationale Zahl im Widerspruch zu (5). Daher hat die Gleichung (1) keine ganzzahlige Lösung, w. z. b. w.
Bemerkung: Die Gleichung hat aber im Falle $a\neq b$ eine reelle Lösung x, die man aus (3) und (5) erhält. Es gilt nämlich
$$x\lg\frac{a}{b}=\lg t,$$
$$x=\frac{\lg t}{\lg a-\lg b},$$
$$x=\frac{\lg(\sqrt{5}-1)-\lg 2}{\lg a-\lg b}.$$

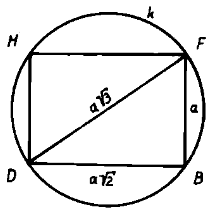
Ma 10/12 ▪1530 a) Es sei $ABCDEFGH$ der Würfel mit der Kantenlänge a, dem ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius r und der Höhe h so umbeschrieben ist, daß die Kante $\overline{AE}$ in der Grundfläche, die Kante $\overline{CG}$ in der Deckfläche des Zylinders und die Eckpunkte D, B, F, H auf dem Mantel des Zylinders liegen (vgl. Bild 1).



Da die Kanten $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ parallel zu der durch die Eckpunkte D, B, F, H bestimmten Ebene sind und von ihr den gleichen Abstand haben, liegen diese Punkte sämtlich auf einem Kreis k, der in einer der Grundfläche des Zylinders parallelen Ebene liegt und den gleichen Radius r wie der die Grundfläche begrenzende Kreis hat.
Nun sind die Seitenlängen $\overline{BF}$ und $\overline{DH}$ des

Rechtecks $DBFH$ gleich der Kantenlänge a des Würfels, während die Seitenlängen $\overline{DB}$ und $\overline{FH}$ gleich der Länge $a\sqrt{2}$ der Diagonale des Quadrates $ABCD$ sind (vgl. Bild 2). Für den Durchmesser $\overline{DF} = 2r$ des Kreises k, der gleich der Länge der Diagonale dieses Rechtecks ist, gilt daher nach dem Satz des Pythagoras

$$2r = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2}$$
$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$



Der Radius des Zylinders ist daher gleich

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Ferner ist die Höhe des Zylinders gleich der Länge der Diagonale $\overline{AC}$ des Quadrats $ABCD$, also

$$h = a\sqrt{2}.$$

Das Volumen des Zylinders beträgt daher

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{3}{4} a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{2} a^3.$$

Da das Volumen des Würfels gleich $V' = a^3$ ist, erhält man

$$V : V' = \frac{3}{4}\pi\sqrt{2} : 1 \approx 3{,}33 : 1.$$

Das Volumen des umbeschriebenen Zylinders ist also mehr als 3mal so groß wie das Volumen des Würfels.

Ph 10/12 ■1531 Gegeben: $y_{max} = 1{,}5$ m; $T = 10$ s; $t_1 = 2$ s; $t_2 = 5{,}1$ min $= 306$ s
Gesucht: a) l b) y_1 und y_2
Es gelten die Gesetze des mathematischen Pendels und der harmonischen Schwingungen.

a) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$
$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$
$$l = \frac{100\,\mathrm{s}^2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m}}{4\pi^2 \cdot \mathrm{s}^2}$$
$$l = 24{,}9\,\mathrm{m}$$

b) $$y_1 = y_{max} \cdot \cos\omega t_1$$
$$y_1 = y_{max} \cdot \cos\frac{2\pi t_1}{T}$$
$$y_1 = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos\frac{2\pi \cdot 2\,\mathrm{s}}{10\,\mathrm{s}}$$
$$y_1 = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos\frac{2}{5}\pi \quad \frac{2}{5}\pi = 72^\circ$$
$$y_1 = 0{,}463\,\mathrm{m}$$
$$y_2 = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 306\,\mathrm{s}}{10\,\mathrm{s}}\right)$$
$$y_2 = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos\left(30 \cdot 2\pi + \frac{6}{5}\pi\right)$$
$$y_2 = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos\frac{6}{5}\pi$$
$$y_2 = -1{,}21\,\mathrm{m}$$

Die Länge des Seils beträgt 24,9 m, und die Elongationen sind 0,463 m bzw. $-1{,}21$ m.

Ch 10/12 ■1532 $FeS_2 \rightarrow 2SO_3$
$$119{,}97x = 44{,}8 \cdot 3 \cdot 10^6$$
$$x = 1\,120\,028$$
Aus 3 t Pyrit können rund $1120\,\mathrm{m}^3$ SO_3 hergestellt werden.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. Schmetterer (Heft 3/76)

▲1534▲
Zu 1) Wenn der n-te Verbraucher die Wassermenge $a_n \geq 0$ entnimmt, gilt offenbar
$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq a_{n+1}, \quad 1 \leq n.$$ Also ist $a_1 \geq a_2$ und wenn $a_1 \geq a_i$, $1 \leq i \leq n$ schon gezeigt ist, folgt sofort $a_1 \geq a_{n+1}$.
Zu 2) Zu zeigen ist für jedes $n \geq 1$ die Ungleichung
$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1}$$
Dies ist gleichbedeutend mit
$$(n+1)(a_1 + \ldots + a_n) \geq n(a_1 + \ldots + a_n) + na_{n+1}$$
also mit $a_1 + \ldots + a_n \geq na_{n+1}$. Das ist aber die unter 1. formulierte Ausgangsungleichung in anderer Schreibweise.
Zu 3) Man wähle $a_n = 10 + \frac{C_n}{n}$, $n \geq 1$, $n \neq 2^{3^m}$, $m \geq 1$ und $a_n = 1 + \frac{C_n}{n}$, $n = 2^{3^m}$.
Dabei kann man $C_n = 10 - 1 = 9$ wählen. Gilt nämlich $2^{3^m} \leq n \leq 2^{3^{m+1}}$, dann ist $m \leq \log\log n/\log 3$, so daß man in der Folge $a_1, \ldots, a_n$ höchstens $\log\log n/\log 3$ Glieder der Gestalt $1 + \frac{C_k}{k}$ zählt. Überdies ist $1 + \ldots + \frac{1}{n} \geq \log n$.
Für $n \geq 2$ ist die Ungleichung
$$\frac{1}{n}\left(10n + 9\log n - 9\frac{\log\log n}{\log 3}\right) \geq 10 + \frac{9}{n+1}$$
erfüllt, da ja sogar $\log n - \frac{\log\log n}{\log 3} \geq 1$ für $n \geq 2$ gilt. Die Ungleichung $a_1 \geq a_2$ folgt aber aus der Definition. ●

Lösung der Aufgabe von W. Redtenbacher (Heft 3/76)

▲1535▲ a) Es sei (x_1, x_2) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt $x_1^4 \geq 0$ und $(x_1x_2)^4 \geq 0$, also wegen (1)
$$x_1^4 = 1 - (x_1x_2)^4 \leq 1,$$
$|x_1| \leq 1$ und $|x_1x_2| \leq 1$, also $|(x_1x_2)^5| \leq 1$.
Nun folgt aus (2)
$$x_1^5 = 1 - (x_1x_2)^5 \geq 0, \text{ also } x_1 \geq 0$$
und wegen (1) sogar $x_1 > 0$, also $0 < x_1 \leq 1$.
Ist nun $x_1 = 1$, so folgt aus (1)
$$(x_1x_2)^4 = 1 - x_1^4 = 0, \text{ also } x_2 = 0.$$
Dann ist aber auch die Gleichung (2) erfüllt. Damit haben wir eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) erhalten, nämlich $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.
Wir zeigen jetzt, daß das Gleichungssystem (1), (2) keine weiteren reellen Lösungen hat. Wäre nämlich $0 < x_1 < 1$, so wäre
$$x_1^5 < x_1^4 \text{ und } (x_1x_2)^5 \leq (x_1x_2)^4,$$
wobei die letztere Ungleichung auch für negative x_2 gilt. Daraus folgt
$$1 = x_1^5 + (x_1x_2)^5 < x_1^4 + (x_1x_2)^4 = 1,$$
also ein Widerspruch.
Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau eine reelle Lösung, nämlich (1, 0).
b) Es sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann erhält man wie oben $0 < x_1 \leq 1$. Ferner sind die beiden Gleichungen (1), (2) für
$$x_1 = 1, \; x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$
erfüllt; das Gleichungssystem (1), (2) hat also die Lösung
$$(1, 0, 0, \ldots, 0).$$
Wir zeigen jetzt, daß das Gleichungssystem keine weiteren Lösungen hat. Wäre nämlich $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Lösung mit $x_1 < 1$, so wäre $x_1^{2n} < 1$ und $x_1^{2n+1} < x_1^{2n}$. Ferner wäre wegen
$$(x_1x_2)^{2n+1} \leqq (x_1x_2)^{2n}, \ldots$$
$$(x_1x_2 \ldots x_n)^{2n+1} \leqq (x_1x_2 \ldots x_n)^{2n}$$
analog wie im Falle a)
$$1 = x_1^{2n+1} + (x_1x_2)^{2n+1} + \ldots + (x_1x_2 \ldots x_n)^{2n+1}$$
$$x_1^{2n} + (x_1x_2)^{2n} + \ldots + (x_1x_2 \ldots x_n)^{2n} = 1,$$
was einen Widerspruch ergibt.
Daher hat auch im Falle b) das Gleichungssystem (1), (2) genau eine reelle Lösung, nämlich (1, 0, 0, ..., 0).

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Bachmann (Heft 4/76)

▲1536▲ Durch Transformation (vgl. Lösungshinweis) folgt aus den in der Aufgabenstellung gegebenem Produkt und Bedingungen das zu maximierende Produkt
$$2^{2x_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 2^{3x_3} \cdot 2^{x_4} \cdot 2^{2x_5}$$
sowie das System der Bedingungen
$$2^{x_1} \cdot 2^{2x_2} \cdot 2^{x_3} \cdot 2^{x_5} \leq 2^{100},$$
$$2^{x_2} \cdot 2^{x_3} \cdot 2^{x_4} \cdot 2^{x_5} \leq 2^{80},$$
$$2^{x_1} \cdot 2^{x_3} \cdot 2^{x_4} \leq 2^{50},$$
$$0 \leq x_j \; (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$
Durch Logarithmieren zur Basis 2 ergibt sich das folgende lineare Optimierungsproblem: Es wird das Maximum der Zielfunktion $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$ unter den Bedingungen
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 + x_5 \leq 100,$$
$$0 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 80,$$
$$x_1 + 0 + x_3 + x_4 + 0 \leq 50,$$
$$0 \leq x_j \; (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$
gesucht.
Mit Hilfe der Simplexmethode ergibt sich folgende Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	1	2	1	0	1	100
u_2	0	1	1	1	1	80
u_3	1	0	1	1	0	50
	2	1	3	1	2	0

$x_1 = 0$, $u_1 = 100$,
$x_2 = 0$, $u_2 = 80$,
$x_3 = 0$, $u_3 = 50$,
$x_4 = 0$,
$x_5 = 0$, $z = 0$.

	x_1	x_2	u_3	x_4	x_5	
u_1	0	2	−1	−1	1	50
u_2	−1	1	−1	0	1	30
x_3	1	0	1	1	0	50
	−1	1	−3	−2	2	−150

$x_1=0,\quad u_1=50,$
$x_2=0,\quad u_2=30,$
$x_3=50,\quad u_3=0,$
$x_4=0,$
$x_5=0,\quad z=150.$

	x_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
u_1	$\boxed{1}$	1	0	−1	−1	20
x_5	−1	1	−1	0	1	30
x_3	1	0	1	1	0	50
	1	−1	−1	−2	−2	−210

$x_1=0,\quad u_1=20,$
$x_2=0,\quad u_2=0,$
$x_3=50,\quad u_3=0,$
$x_4=0,$
$x_5=30,\quad z=210.$

	u_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
x_1	1	1	0	−1	−1	20
x_5	1	2	−1	−1	0	50
x_3	−1	−1	1	2	1	30
	−1	−2	−1	−1	−1	−230

$x_1=20,\quad u_1=0,$
$x_2=0,\quad u_2=0,$
$x_3=30,\quad u_3=0,$
$x_4=0,$
$x_5=50,\quad z=230.$

Weil in der letzten Zeile der Simplextabelle nur negative Zahlen stehen, ist das Maximum erreicht und außerdem eine eindeutige Lösung vorhanden. Das Produkt $a_1^2\cdot a_2\cdot a_3^3\cdot a_4\cdot a_5^2$ nimmt also seinen größten Wert, d. h. 2^{230}, unter den gegebenen Bedingungen genau für $a_1=2^{20}$, $a_2=1$, $a_3=2^{30}$, $a_4=1$ und $a_5=2^{50}$ an.

Lösungen und Lösungshinweise zu: Kombinatorik und binomischer Satz (Heft 4/76)

▲28▲ C_{20}^2 ▲29▲ V_{20}^2
▲30▲ V_9^5 ▲31▲ C_{10}^4
▲32▲ V_{15}^3 ▲33▲ C_{15}^3
▲37▲ a) $32a^{10}-240a^9+720a^8-1080a^7+810a^6-243a^5$
b) $99-70\sqrt{2}$
▲39▲ Wir lösen diese Aufgabe in drei Etappen:
1. $\frac{C_n^3}{C_n^5}=\frac{5}{8}$, daraus ergibt sich $n=12$
2. $T_{k+1}=C_{12}^k(\sqrt{z})^k\left(\frac{1}{z}\right)^{12-k}=C_{12}^k z^{\frac{k}{2}}\cdot z^{k-12}$

Da das Glied nicht z enthalten soll, ergibt sich: $\frac{k}{2}+k-12=0$.
Hieraus ergibt sich $k=8$.
3. $T_{8+1}=C_{12}^8=495$

▲40▲ *Hinweis:* Weil die Summe der Binominalkoeffizienten gleich $128=2^7$ ist, ergibt sich hieraus $m=7$.

▲41▲ *Hinweis:* Man muß das vierte Glied in der Zerlegung des ersten Binoms, das dritte Glied in der Zerlegung des zweiten Binoms, das zweite Glied in der Zerlegung des dritten Binoms bestimmen und danach diese Glieder jeweils mit x, mit x^2 bzw. mit x^3 multiplizieren. *Lösung:* 550.

▲42▲ *Hinweis:* Wenn man die genannten Glieder aufschreibt, so erhält man drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Dieses System löst man am einfachsten durch gliedweise Division (die linke Seite durch die linke Seite, die rechte durch die rechte).
Lösung: $x=2$, $y=3$, $z=5$.

Lösungen zu: IMO-Teilnehmer der DDR stellen Aufgaben (Heft 3/76)

▲1▲ 1. Es ist $a=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}>0$ wegen $a_i>0$.
Also gilt, weil das geometrische Mittel von m positiven reellen Zahlen nicht größer als deren arithmetisches Mittel ist,

$$\sqrt[m]{\frac{a_1}{a}}=\sqrt[m]{\frac{a_1}{a}\cdot 1^{m-1}}\leqq\frac{\frac{a_1}{a}+(m-1)\cdot 1}{m},$$
$$\sqrt[m]{\frac{a_2}{a}}=\sqrt[m]{\frac{a_2}{a}\cdot 1^{m-1}}\leqq\frac{\frac{a_2}{a}+(m-1)\cdot 1}{m},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt[m]{\frac{a_n}{a}}=\sqrt[m]{\frac{a_n}{a}\cdot 1^{m-1}}\leqq\frac{\frac{a_n}{a}+(m-1)\cdot 1}{m}. \qquad (2)$$

Die Addition dieser n Ungleichungen ergibt

$$\sqrt[m]{\frac{a_1}{a}}+\sqrt[m]{\frac{a_2}{a}}+\ldots+\sqrt[m]{\frac{a_n}{a}}\leqq\frac{1}{m}\left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a}+n(m-1)\right],$$
$$\sqrt[m]{a_1}+\sqrt[m]{a_2}+\ldots+\sqrt[m]{a_n}\leqq\frac{n+mn-n}{m}\sqrt[m]{a}=n\sqrt[m]{a}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\sqrt[m]{a_1}+\sqrt[m]{a_2}+\ldots+\sqrt[m]{a_n}}{n}\leqq\sqrt[m]{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}, \text{ w.z.b.w.} \qquad (3)$$

2. Das Gleichheitszeichen gilt in (3) und damit auch in (1) genau dann, wenn in allen Ungleichungen (2) das Gleichheitszeichen gilt, wenn also

$$\frac{a_1}{a}=1,\ \frac{a_2}{a}=1,\ \ldots,\ \frac{a_n}{a}=1 \text{ ist,}$$

d. h. $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$.

▲2▲ Für alle natürlichen Zahlen k mit $k=1, 2, \ldots, n$ gilt

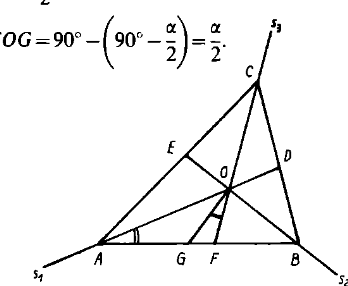
$$\frac{1}{(k-1)m+1}-\frac{1}{km+1}=\frac{km+1-(k-1)m-1}{((k-1)m+1)(km+1)}=\frac{m}{((k-1)m+1)(km+1)}, \text{ also}$$
$$\frac{1}{((k-1)m+1)(km+1)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{(k-1)m+1}-\frac{1}{km+1}\right).$$

Daraus folgt

$$s=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2m+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(k-1)m+1}-\frac{1}{km+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)m+1}-\frac{1}{nm+1}\right)\right],$$
$$s=\frac{1}{m}\left[1-\frac{1}{nm+1}\right]=\frac{nm}{m(nm+1)},$$
$$s=\frac{n}{mn+1}, \text{ w.z.b.w.}$$

▲3▲ Es sei ABC ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ, das die verlangten Eigenschaften hat. Dann liegt A auf s_1, und die Winkelhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ liegen auf den Strahlen s_1, s_2 bzw. s_3 (siehe Bild), sie schneiden sich in dem Punkt O, der im Innern des Dreiecks ABC liegt. Die Senkrechte auf BE in O möge die Seite $\overline{AB}$ in G schneiden. Dann ist $\sphericalangle BOF$ ein spitzer Winkel, und es gilt

$$\sphericalangle BOF=\sphericalangle OBC+\sphericalangle BCO=\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}<90^\circ, \text{ also}$$
$$\sphericalangle FOG=90^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$



Daraus ergibt sich die Konstruktion. Man errichtet in O auf dem Strahl s_2 die Senkrechte. Dann ist der Winkel zwischen dieser Senkrechten und der Verlängerung von s_3 über O hinaus gleich $\frac{\alpha}{2}$. Dieser Winkel wird in A an AO nach beiden Seiten angetragen. Die freien Schenkel dieser angetragenen Winkel schneiden s_2 in B und s_3 in C, womit das Dreieck ABC konstruiert ist.

Bemerkung: Die Konstruktion ist unter den angegebenen Bedingungen immer ausführbar. Denn nach Voraussetzung sind $\sphericalangle BOF$ und $\sphericalangle FOA$ spitze Winkel. Setzt man $\sphericalangle GOA=\phi$, so gilt daher $\phi+\frac{\alpha}{2}<90^\circ$, also $\frac{\alpha}{2}+90^\circ+\phi<180^\circ$, d. h., der freie Schenkel des in A an

AO angetragenen Winkels von der Größe $\frac{\alpha}{2}$ schneidet den Strahl s_2, und man erhält den Punkt B. Entsprechendes gilt für den Schnittpunkt C des anderen in A an AO angetragenen Winkels.

▲4▲ Es sei k eine natürliche Zahl, die sich nicht als Potenz von 2 darstellen läßt. Dann läßt sich k als Produkt von Primfaktoren darstellen, wobei mindestens ein ungerader Primfaktor auftritt.

Es gilt also

$$k=2^r\cdot m, \qquad (1)$$

wobei r eine natürliche Zahl ($r=0, 1, 2, \ldots$) und m eine ungerade natürliche Zahl mit $m\geqq 3$ ist. Daraus folgt

$$2^k+1=2^{2^r\cdot m}+1=(2^{2^r})^m+1=x^m+1 \qquad (2)$$

mit $x=2^{2^r}\geqq 2$ und $m\geqq 3$.

Da m eine ungerade Zahl ist, gilt

$$x^m+1=(x+1)(x^{m-1}-x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+1)=(x+1)b, \text{ wobei } b \qquad (3)$$

eine natürliche Zahl ist. Dabei gilt

$x+1\geqq 2+1=3$ und wegen $x\geqq 2, m\geqq 3$

$x+1<x^m+1$.

Also sind beide Faktoren $x+1$ und b auf der rechten Seite von (3) größer als 1, d. h., die Zahl x^m+1 und daher auch die Zahl 2^k+1 ist nicht Primzahl, w. z. b. w.

Bemerkung: Die Umkehrung des obigen Satzes gilt aber nicht, d. h., nicht jede Zahl von der Form $2^{2^s}+1$ ist Primzahl. Zwar sind die Zahlen $2^{2^0}=2^1+1=3$, $2^{2^1}=2^2+1=5$, $2^{2^2}=2^4+1=17$, $2^{2^3}+1=2^8+1=257$, $2^{2^4}=2^{16}+1=65537$ Primzahlen, jedoch nicht die Zahl $2^{2^5}+1=2^{32}+1$; denn, wie bereits Euler nachgewiesen hat, ist diese Zahl durch 641 teilbar.

▲5▲ a) Setzt man $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

so gilt $0<a<2$ und $-1<b<0$. (1)

Ferner gilt für $n=1, 2, 3, \ldots$

$$u_n=\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{u_n}{2^n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n-\left(\frac{b}{2}\right)^n\right], \text{ also} \qquad (2)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^k-\left(\frac{b}{2}\right)^k\right],$$

$$s_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{2}\right)^k\right]. \qquad (3)$$

Wegen $0<\frac{a}{2}<1$ und $-\frac{1}{2}<\frac{b}{2}<0$

existieren die Summen der folgenden unendlichen geometrischen Reihen

$$s'=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^k=\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a}{2}\right)^k+\ldots$$

$$=\frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}}=\frac{a}{2-a}, \qquad (4)$$

$$s''=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2}\right)^k=\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{b}{2}\right)^k+\ldots$$

$$=\frac{\frac{b}{2}}{1-\frac{b}{2}}=\frac{b}{2-b}. \qquad (5)$$

Daher existiert auch der Grenzwert

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(s'-s'')=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{2-a}-\frac{b}{2-b}\right).$$

Wegen (1) erhält man hieraus

$$s=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5-3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{4}=2. \text{ Es gilt also}$$

$$s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^k}=2. \qquad (6)$$

b) Wir geben aus Platzmangel hier nur einen Hinweis zur Lösung und das Resultat an.

Man erhält, wenn man $q=\frac{b}{a}=-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ setzt, nach einigen Umformungen die folgende alternierende Reihe, bei der die Beträge der Glieder streng monoton abnehmen und gegen Null kongruieren und die daher kongruent ist:

$$\bar{s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_k}=\sqrt{5}\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{\frac{a}{q}-1}+\ldots+\frac{1}{\frac{a}{q^s}-1}+\ldots\right)$$

$\bar{s}=3{,}36+\delta$,

wobei für den durch Rundungen und die Berechnung von nur 7 Gliedern der Reihe entstandenen Fehler δ gilt:

$|\delta|<0{,}015$, d. s. weniger als $\frac{1}{2}$%.

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 5/76:

Die Truhen im Keller

Es sind mindestens 26 Züge erforderlich. Die Truhen werden in folgender Ordnung bewegt (jeweils auf den freien Platz):

1, 2, 3, 1, 2, 6, 5, 3, 1, 2, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 8, 7, 1, 2, 4, 8, 7, 4, 5 und 6.

Neues aus Buntstadt

Ja. Wenn eine gerade Anzahl von Familien in Buntstadt wohnt, reichen sogar zwei Farben aus. Man tauscht „im Kreis" und streicht die Häuser abwechselnd. Bei einer ungeraden Anzahl muß ein Haus in der dritten Farbe gestrichen werden.

Superluxusseife Rubin

Hier hatte sich der Druckfehlerteufel eingeschlichen. Es muß 3,20 statt 2,30 heißen.

ABC der Mathe

$A=1;\ B=2;\ C=0$

$1^2=1$

$11^2=121$

$101^2=10201$

$1001^2=1002001$

3 + 2 = 5

Eine Lösung lautet: $1243+5743=6986$

Bilderrätsel

Lösungswort: Rechenstab

Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Karl-Marx-Stadt

Die Mathematische Gesellschaft der DDR führte vom 28. 6. bis 2. 7. 1976 ihre Wissenschaftliche Haupttagung unter der Thematik „Mathematische Probleme der Modellbildung" an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt durch.

Entsprechend der Aufgabenstellung der MGDDR diente die Tagung der Weiterbildung und dem Erfahrungsaustausch der in Forschung, Lehre und Praxis tätigen Mathematiker sowie auch der Weiterbildung der Mathematiklehrer. Ein besonderes Anliegen dieser Tagung war die Erhöhung der Praxiswirksamkeit der Mathematik. Die Mathematiker berieten über ihren Beitrag zur Erhöhung der Effektivität der Wissenschaft, wie sie in der Direktive zum Fünfjahrplan 1976 bis 1980 gefordert wird.

Die Tagung diente der weiteren Annäherung von Theorie und Praxis, indem sie neue Forschungsergebnisse zielgerichtet vermittelte und der Forschung durch Aufgabenstellungen aus der Praxis neue Anregungen gab. Teilnehmer waren etwa 1000 Wissenschaftler und Praktiker aus allen Bereichen der Volkswirtschaft, der Bildungseinrichtungen und der Akademie der Wissenschaften der DDR sowie zahlreiche Gäste aus dem Ausland.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem BSB B. G. Teubner

Verlagsgesellschaft Leipzig

I. J. Bakelmann

Spiegelung am Kreis

Grundlagen und Anwendungen

132 S., 67 Abb., kartoniert,
Preis: 7,00 M
Bestell-Nr. 665 735 8

In der Geometrie spielen verschiedene Transformationen von Figuren eine grundlegende Rolle. In der Schule wird sich ausführlich mit den Bewegungen und Streckungen, aber auch mit ihren Zusammensetzungen beschäftigt. Die wichtigste Besonderheit dieser Transformationen besteht darin, daß bei ihnen die einfachsten geometrischen Figuren erhalten bleiben:
Geraden werden in Geraden und Kreise in Kreise überführt. Die Inversion stellt eine kompliziertere Transformation der geometrischen Figuren dar, bei der Geraden in Kreise und umgekehrt überführt werden können. Ein solches Konzept gibt, angewandt auf Aufgaben der Elementargeometrie, eine einheitliche Untersuchungsmethode. Das bezieht sich vor allem auf Konstruktionsaufgaben und auf die Theorie der Kreisbüschel. Wir bemerken dazu, daß eine Betrachtung wesentlicher Teile der Elementargeometrie ohne das Heranziehen der Inversion verbunden ist mit der Benutzung vielfältiger, größtenteils auch oft künstlicher Konstruktionen, die stets nur Teilcharakter tragen. Außerdem wird die Inversion auch auf einige Grenzfragen der elementaren und der sogenannten höheren Geometrie angewandt. Wir meinen damit die Interpretation der Geometrie von Lobatschewski in einer euklidischen Ebene. Es ist auch interessant, die Inversion mit den komplexen Zahlen zu verbinden, genauer, mit den einfachsten Funktionen, deren Argumente und Werte komplexe Zahlen sind.

Das vorliegende Buch widmet sich dem Studium der Inversion und einer Reihe ihrer Anwendungen. Im Interesse einer übersichtlichen Darbietung wurde der Stoff auf Hauptabschnitte aufgeteilt.
Im ersten Hauptteil untersuchen wir die Transformation der Inversion ausführlich und betrachten dazu einige Anwendungen auf Fragen der Elementargeometrie.
Im zweiten Hauptteil zeigen wir, daß die im ersten Teil betrachteten Transformationen in einem engen Zusammenhang mit den linearen und gebrochenen linearen Funktionen einer komplexen Veränderlichen stehen. Wir beweisen ebenfalls, daß auch umgekehrt diese Funktionen diejenigen Transformationen der Ebene beschreiben, die sich zurückführen lassen auf die aufeinanderfolgende Ausführung von Bewegungen, Streckungen und Inversionen. Im dritten Hauptteil schließlich legen wir den gruppentheoretischen Standpunkt für die Begründung der Geometrie dar, mit dessen Hilfe wir, gestützt auf die Ergebnisse der Teile eins und zwei, kurz die ebene euklidische Geometrie und die ebene Geometrie Lobatschewskis aufbauen.

P. Borneleit

Gleichungen

Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4
225 S., zahlr. Abb., kartoniert,
Preis: 6,50 M
Bestell-Nr. 665 788 4

Nach einer Einleitung, in der für das Gebiet Gleichungen wichtige Begriffe zusammengestellt werden, folgen Gleichungen verschiedener Typen, für die „Musterlösungen" anschließend an die Aufgaben oder Lösungen in einem besonderen Lösungsteil angegeben werden. Damit wird der Leser aufgefordert, nach dem Studium der Musterlösung ähnliche Aufgaben selbst zu bearbeiten.

Aufgaben

▲1▲ Manbestimme alle reellen x, die der Gleichung
$a+bx=c+dx \quad (a, b, c, d \in P)$
genügen!

▲2▲ Man gebe alle reellen Zahlen x an, die der Gleichung
$\sqrt[3]{25+x}+\sqrt{200-x}=0$
genügen!

▲3▲ Es sind alle rationalen x zu bestimmen, die der Gleichung
$7\cdot 4^{x+1}+4\cdot 5^{x+2}=3\cdot 4^{x+1}+5^{x+3}$
genügen!

▲4▲ Man bestimme alle positiven reellen x, für die
$\log_{81} x+\log_9 x+\log_3 x=\frac{21}{4}$
gilt!

E. Kolman

Die vierte Dimension

64 S., 30 Abb., kartoniert
Preis: 6,50 M
Bestell-Nr. 665 710 4

Aus dem Inhalt:
Empirische und rationale Erkenntnis – Herausbildung des Raumbegriffs – Der reale, perzeptible und konzeptionelle Raum – Übergang zur vierten Dimension – Mobilisierung des räumlichen Vorstellungsvermögens – Hyperkuben und andere Hyperkörper – Andere „anschauliche" Zugänge zur vierten Dimension – Wir phantasieren weiter – „Wunderdinge" des Vierdimensionalen – Nichteuklidische Räume – Weitere Wege der Bildung mehrdimensionaler Räume – Axiomatik – Bemerkungen über einen symbolischen Kalkül – Vorgeschichte der Idee der Mehrdimensionalität – Entwicklungsgeschichte der n-dimensionalen Geometrie – Anwendung der vierdimensionalen Geometrie – Voraussetzungen für die Interpretation – Die vierdimensionale Minkowskische Welt – Noch einmal über die Bedeutung der mehrdimensionalen Geometrie – Die Anregung Kants – Vierdimensionalität und Spiritismus – Der Wissenschaftler Zöllner in der Welt der Geister – Noch einmal „Beweise" – Phantasie, Phantastik und Phantasterei – Wissenschaft ist unvereinbar mit Mystik – Ziehen wir Schlußfolgerungen

N. J. Wilenkin

Methoden der schrittweisen Näherung

108 S., 34 Abb., kartoniert,
Preis: 5,90 M
Bestell-Nr. 665 723 5

Aus dem Inhalt: Schrittweise Näherung – Achilles und die Schildkröte – Wie dividiert eigentlich ein Rechenautomat? – Quadratwurzelziehen durch sukzessive Approximation – Berechnung der Wurzel mit beliebigem Wurzelexponenten – Die allgemeine Iterationsmethode – Kontraktive Abbildungen – Die Sekantenmethode (regula falsi) – Ein verbessertes Sekantenverfahren – Das Newtonsche Verfahren für algebraische Gleichungen – Geometrische Interpretation der Ableitung – Die Ableitung einer nichtalgebraischen Funktion – Wie findet man eine Ausgangsnäherung? – Eine kombinierte Methode zur Lösung von Gleichungen – Die Lösung eines Systems nichtlinearer Gleichungen mit der Methode der sukzessiven Approximation – Aufgaben – Lösungen

Übung macht den Meister

Aus Abschlußprüfungen der Oberschulen der DDR (Kl. 10)

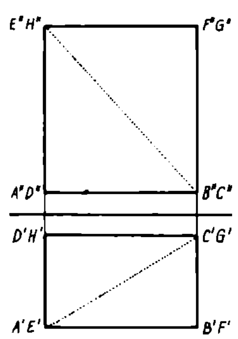
Darstellende Geometrie

1976

Kohlereserven werden in Halden gelagert. Aus Gründen des Brandschutzes hat eine solche Halde angenähert die Form eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche. Seine Abmessungen sind:
Seitenlänge der Grundfläche $a_1 = 19{,}0$ m
Höhe des Pyramidenstumpfes $h = 4{,}5$ m
Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche $\alpha = 45°$.
a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf in senkrechter Zweitafelprojektion in einem geeigneten Maßstab dar!
b) Berechnen Sie die Seitenlänge a_2 der Deckfläche!
c) Berechnen Sie das Volumen dieses Pyramidenstumpfes! (Hierbei ist die Verwendung der Näherungsformel unzulässig.)

1975

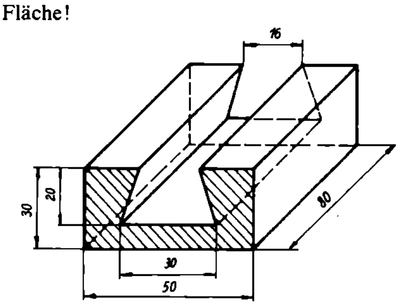
Die nachfolgende Skizze zeigt einen Körper in senkrechter Zweitafelprojektion. Die punktierten Linien stellen eine seiner Raumdiagonalen dar.
Dabei sind
$\overline{AB} = 6{,}5$ cm, $\overline{BC} = 4{,}2$ cm, $\overline{BF} = 8{,}2$ cm



a) Stellen Sie diesen Körper in Kavalierperspektive dar, und bezeichnen Sie alle Eckpunkte!
b) Zeichnen Sie die vorgegebene Raumdiagonale ein!
c) Berechnen Sie die Länge dieser Raumdiagonalen!

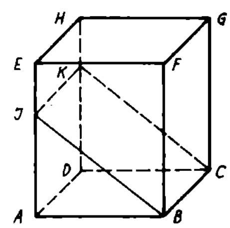
1974

Die Skizze zeigt das Schrägbild eines Werkstücks.
a) Stellen Sie dieses Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 1 dar! (Benennen der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)
b) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche!



1973

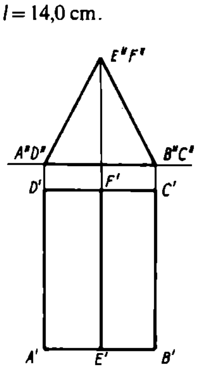
Gegeben ist ein gerades Prisma *ABCDEFGH* mit quadratischer Grundfläche, das von einer Ebene in den Punkten *I*, *B*, *C*, *K* geschnitten wird (siehe Bild).
$\overline{AB} = \overline{BC} = 5{,}0$ cm, $\overline{AE} = \overline{DH} = 6{,}0$ cm,
$\overline{AI} = \overline{DK} = 4{,}0$ cm



a) Stellen Sie das Prisma einschließlich der Schnittfigur in Zweitafelprojektion dar!
b) Berechnen Sie die Länge der Seite *IB* der Schnittfigur!
c) Zeichnen Sie die Schnittfigur in wahrer Größe!

1972

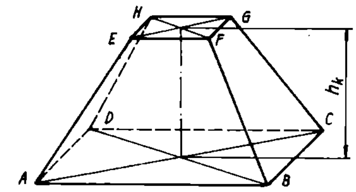
Das Bild zeigt ein gerades Prisma im Grund- und Aufriß. Die Maße des Prismas sind:
$\overline{AB} = a = 5{,}0$ cm, $\overline{AE} = \overline{BE} = s = 6{,}5$ cm,
$\overline{BC} = l = 14{,}0$ cm.



a) Stellen Sie diese Körper in Kavalierperspektive, d. h. in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}$ dar!
b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas!

1971

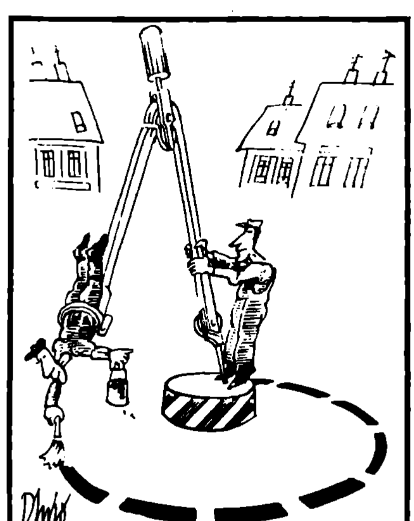
Das Bild zeigt das Schrägbild eines geraden Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und und Deckfläche.
$\overline{AB} = \overline{CD} = 72$ mm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 48$ mm,
$\overline{EF} = \overline{GH} = 24$ mm, $\overline{FG} = \overline{EH} = 16$ mm,
$h_k = 40$ mm



a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf im Grund-Aufriß-Verfahren unter Verwendung der angegebenen Originalmaße dar!
Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rißachse!
b) Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!
c) Konstruieren Sie eine der Seitenflächen des Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und kennzeichnen Sie die wahre Länge einer Seitenkante des Pyramidenstumpfes!

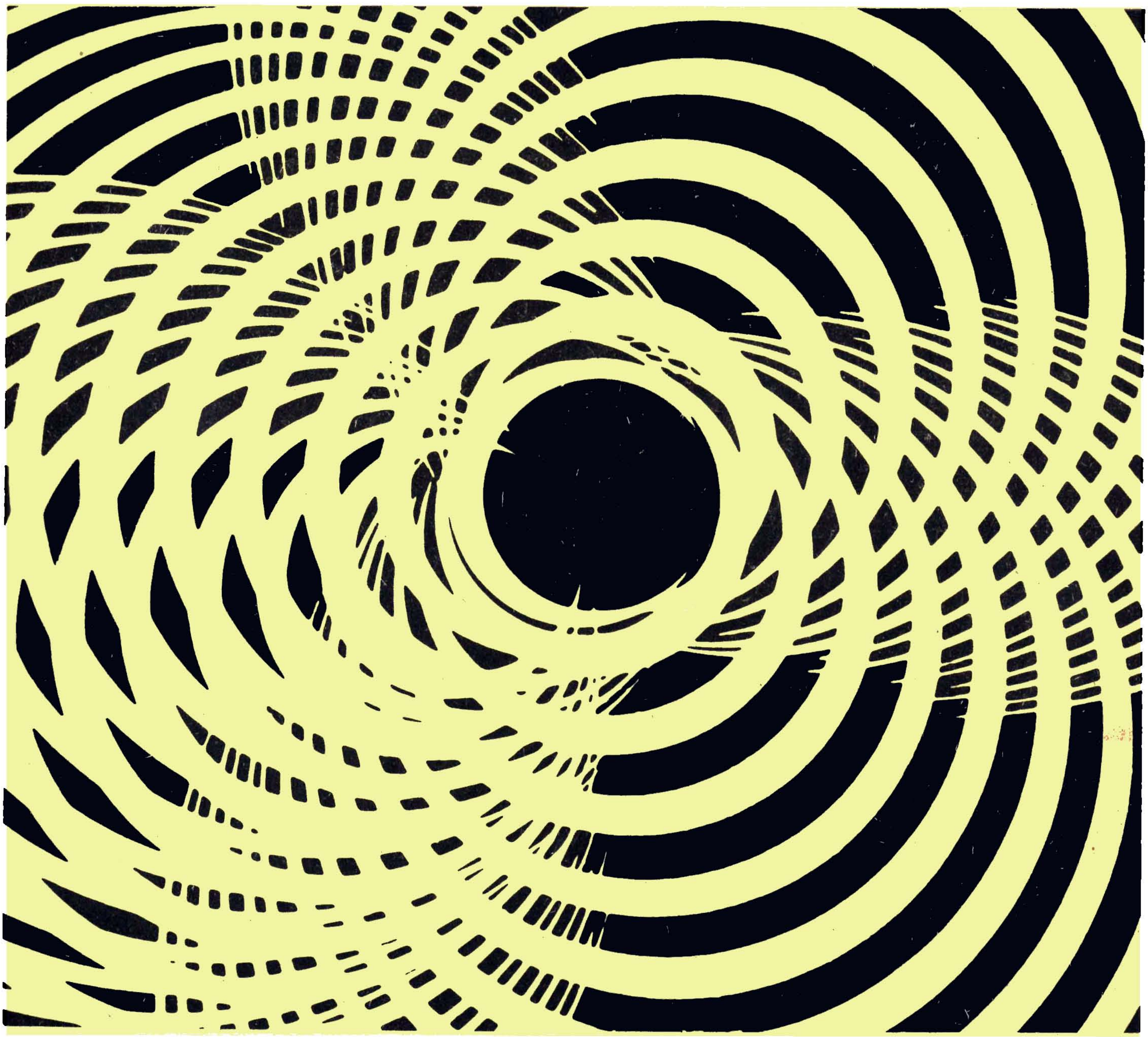
1970

Eine gerade Pyramide mit der Spitze *S* hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck *ABCDEF* mit einer Seitenlänge von 25 mm; die Körperhöhe beträgt 60 mm.
a) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriß-Verfahren dar! Benennen Sie die Bilder aller Eckpunkte der Pyramide!
b) Ermitteln Sie unter Verwendung Ihrer Zeichnung die wahre Länge einer Seitenkante, und kennzeichnen Sie diese Strecke farbig!
c) Berechnen Sie außerdem die wahre Länge dieser Seitenkante!



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Flisak, Warschau (S. 126); Učitelské noviny, Prag (S. 127); W. Tschischikow, Moskau (S. 132, S. 144); J. Lehmann Leipzig (S. 134); H. Hardenberg, Stralsund (S. 134); H. Fink, Magdeburg (S. 138)
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 17. August 1976

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Halblogarithmisches und logarithmisches Netz

1. Die allgemeine Form einer exponentiellen Abhängigkeit von y von t wird durch die Formel

$$y = y_0 a^t \qquad (1)$$

beschrieben, wo y_0 der Wert der Größe y bei $t = 0$ ist. Setzen wir

$$k = \lg a,\ z = \lg y,\ b = \lg y_0,$$

so erhalten wir aus (1) $z = kt + b$.

Wir sehen, daß z linear von t abhängt. Graphisch wird diese Abhängigkeit durch eine Gerade wiedergegeben. Zeichnen wir diese auf die übliche Weise, so können wir auf der z-Achse (oder auf einer zu ihr parallelen Geraden) die entsprechenden Werte $y = 10^z$ kennzeichnen. Dann kann man an unserer graphischen Darstellung zu beliebig vorgegebenem t unmittelbar die Größe y ablesen.

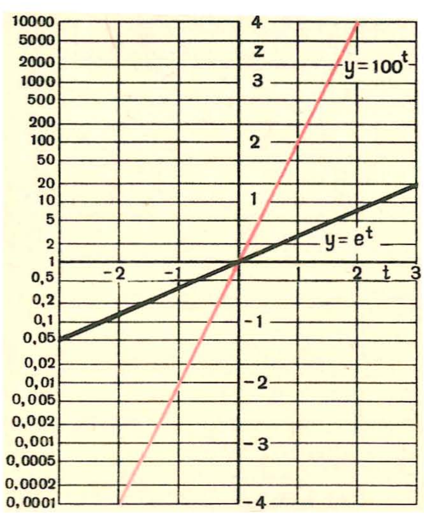


Bild 1

In Bild 1 haben wir ein solches Verfahren angewendet, um die Funktionen $y = 100^t$ und $y = e^t$ ($e = 2{,}718\ldots$) graphisch darzustellen. In einem kartesischen Koordinatensystem sind diese Funktionen in Bild 2 dargestellt.

Im Handel gibt es *halblogarithmisches Papier*. Auf diesem Papier sind wie auf gewöhnlichem Millimeterpapier im Abstand von 1 mm vertikale Linien aufgetragen, die horizontalen Linien sind jedoch so angeordnet, daß ihr Abstand vom unteren Rand gleich $100 \lg y$ ist, wobei y die Werte

1	1,05	1,10	1,15	…
2	2,1	2,2	2,3	… durchläuft.

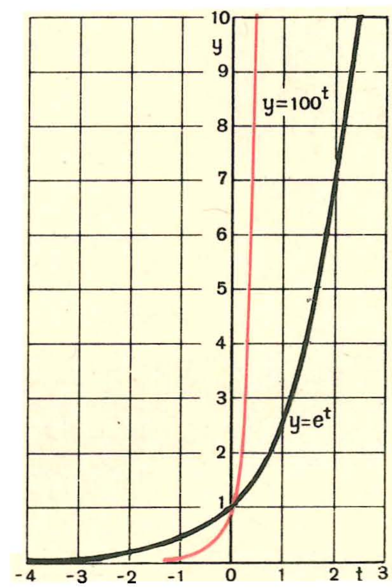


Bild 2

● Untersucht an Hand des Bildes 3, wie diese Skala angelegt ist!

Im unteren Teil des Bildes 3 zeigen wir, wie man an Hand zweier Punkte ($t = 0$, $y = y_0$), ($t = 1$, $y = y_0 a$) auf *halblogarithmischem Papier* graphische Darstellungen von Funktionen der Form (1) konstruieren kann.

Einem Zuwachs von $\Delta t = 1$ entspricht auf *halblogarithmischem Papier* 10 cm. Denselben Maßstab haben wir auf dem Bild 3 bezüglich der y-Achse gewählt. Daher ist der Anstieg unserer Geraden gleich $k = \lg a$. Das ist aber nichts anderes als die *Relativgeschwindigkeit*, mit der sich y mit t ändert:

$$\frac{1}{y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \lg a = k$$

(hier ist y' die Ableitung der Funktion $y = f(t) = y_0 a^t$).

Wird der Maßstab auf der y-Achse anders gewählt, so wird eine Umrechnung erforderlich, die ihr euch leicht selbst überlegen könnt.

Man benutzt *halblogarithmisches Papier* zur graphischen Darstellung, wenn es darauf ankommt festzustellen, ob von einer durch eine Tabelle gegebenen Abhängigkeit $y = f(t)$ angenommen werden kann, daß sie näherungsweise einem *exponentiellem Wachstumsgesetz* unterliegt (oder ob $f(t)$ exponentiell fällt).

Wir wollen als Beispiel den Umfang der Industrieproduktion in der UdSSR betrachten, ausgedrückt in Prozenten zur Produktion des Jahres 1940:

1937	1940	1945	1950
77	100	92	173
1955	1960	1965	1970
320	524	791	1190

Eine halblogarithmische Darstellung ist in Bild 4 wiedergegeben (eine Darstellung in natürlichem Maßstab auf der Vertikalen könnt ihr selbst zum Vergleich zeichnen.). An Hand der graphischen Darstellung ist ersichtlich, daß das Wachstum der industriellen Produktion mit Ausnahme des Kriegsjahrfünfts 1940 bis 1945 angenähert einem Exponentialgesetz folgt. Findet selbst heraus, wieviel Prozent Zuwachs im Jahr die mittlere Neigung der Graphik entspricht! Aus der graphischen Darstellung ist ersichtlich, daß das Wachstumstempo in den Jahren 1945 bis 1955 etwas größer als in den Jahren 1960 bis 1970 ist. Es ist interessant, daß wir, wenn wir die den Jahren 1945 und 1950 entsprechenden Punkte außer Betracht lassen, fast eine gerade Linie erhalten. Im Verlauf der Jahre 1945 bis 1955 hat unsere Industrie das in den Kriegsjahren Versäumte aufgeholt.

● Bestimmt den mittleren jährlichen Produktionszuwachs in den Jahren 1947 bis 1970 (in Prozenten pro Jahr)!

2. Es ist klar, daß eine Abhängigkeit der Form

$$y = A \lg t + B$$

auch dann durch eine Gerade graphisch dargestellt wird, wenn man auf der Abszissenachse $s = \lg t$ und auf der Ordinatenachse y abträgt. Als Beispiel wollen wir die in Bild 5 wiedergegebene Abhängigkeit der Geschwindigkeit u vom Wandabstand y bei einer turbulenten Strömung einer Flüssigkeit längs einer ebenen Wand betrachten. Hier sind δ und u_τ geeignet gewählte Längen- und Geschwindigkeitsmaßstäbe. Die Messungen erfolgten bei Werten von $\frac{y}{\delta}$ zwischen 10 und 56000. Daher waren zur graphischen Darstellung der Meßergebnisse drei Graphiken mit verschiedenen Maßstäben auf der Abszissenachse notwendig. Nach Übergang zu einem logarithmischen Maßstab für $\frac{y}{\delta}$ ließen sich alle diese Daten in einer einzigen graphischen Darstellung unterbringen (Bild 6).

Dabei nahm die Kurve eine mehr gerade Form an. Die Gerade in Bild 6 wird durch die Gleichung

$$\frac{u}{u_\tau} = 5{,}5 + 5{,}75 \lg \frac{y}{\delta} \qquad (2)$$

wiedergegeben. Wir sehen, daß diese Gesetzmäßigkeit von $\frac{y}{\delta} = 100$ an sehr genau eingehalten wird. Bei kleineren $\frac{y}{\delta}$ werden systematische Abweichungen bemerkbar, und bei $\frac{y}{\delta} < 15$ werden diese Abweichungen so bedeu-

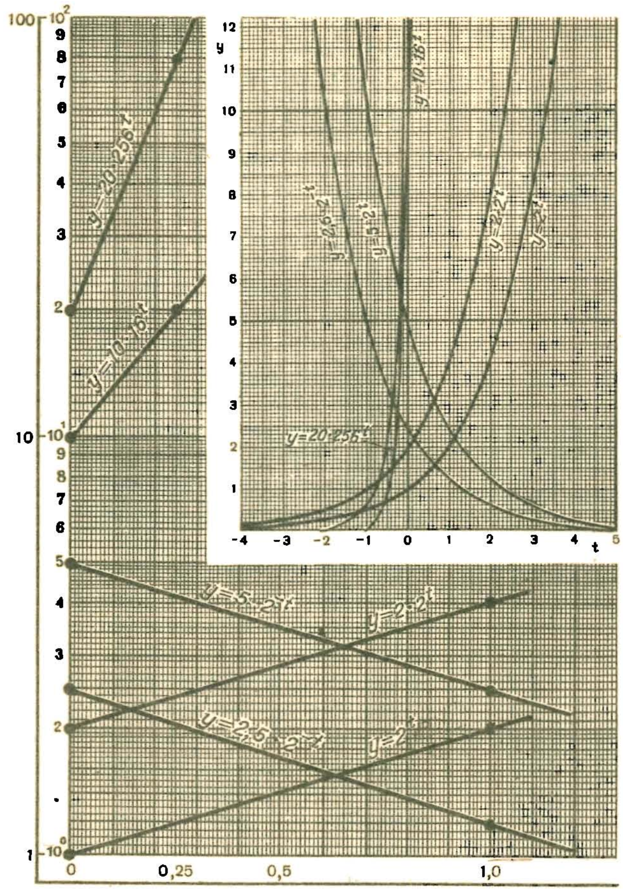
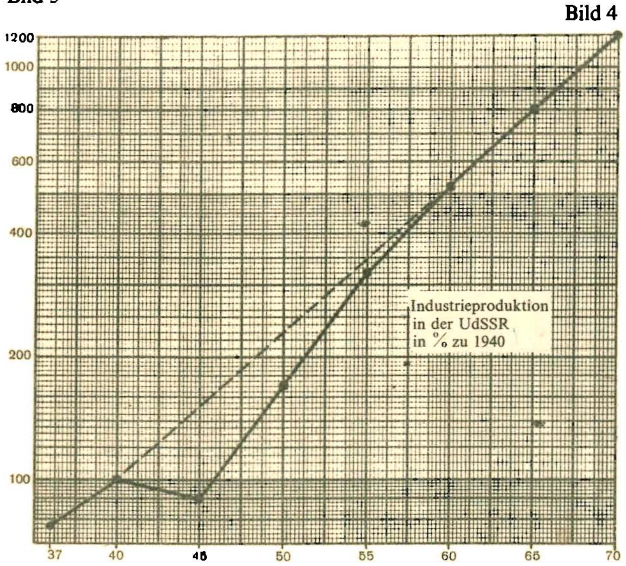


Bild 3

Bild 4



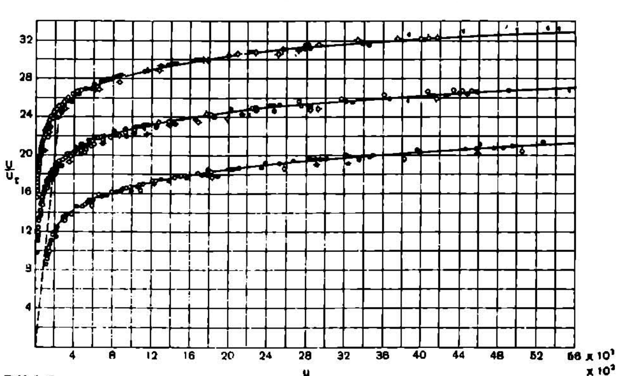


Bild 5

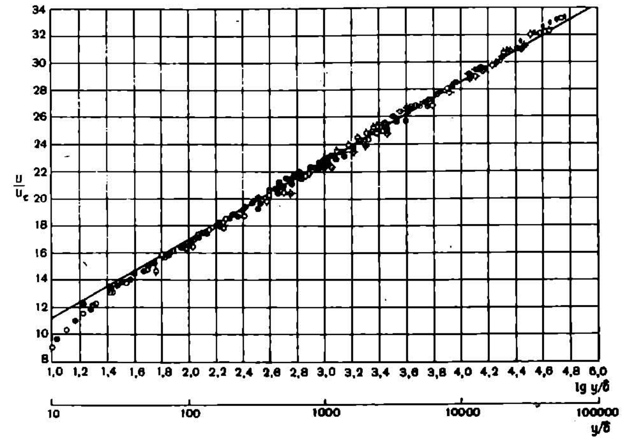


Bild 6

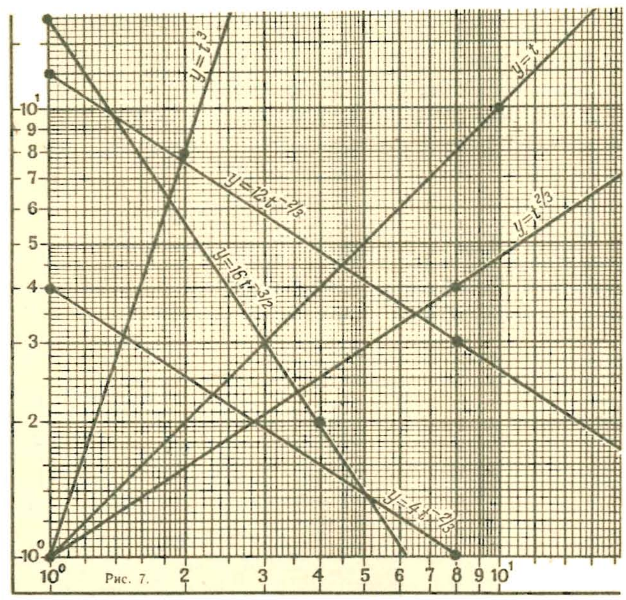


Bild 7

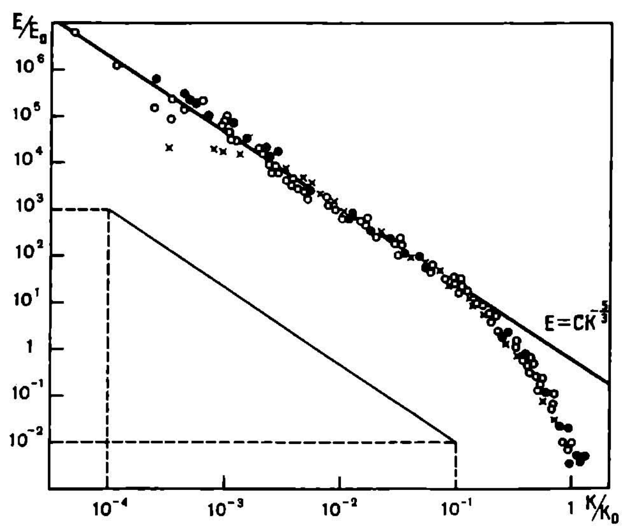


Bild 8

tend, daß hier die Beziehung (2) als überhaupt falsch anzusehen ist.
Eine Abhängigkeit der Form

$$y=ct^{\alpha} \qquad (3)$$

wird durch den Übergang zu den Variablen

$$s=\lg t,\ z=\lg y$$

gleichfalls *geradegebogen*.
In der Tat folgt aus (1)

$$z=\alpha s+b \qquad (4)$$

mit $b=\lg c$. Um Abhängigkeiten der Form (5) durch Geraden darzustellen, benutzt man ein *logarithmisches Netz. Doppeltlogarithmisches Papier* ist gleichfalls im Handel erhältlich. In Bild 7 sind Beispiele für graphische Darstellungen auf doppeltlogarithmischem Papier wiedergegeben. Es ist leicht zu sehen, daß hierbei der Anstieg gleich α ist.
Man benutzt immer dann ein logarithmisches Netz zur graphischen Darstellung, wenn Grund zu der Annahme vorliegt, daß eine gewisse empirische Abhängigkeit näherungsweise einem Gesetz der Form (3) folgt. In Bild 8 sind in einem logarithmischen Netz empirische Daten über die Energieverteilung der Pulsation in einer turbulenten Strömung eingetragen. Hier ist $E(k)$ die Spektraldichte der Pulsationsenergie, die zu der Frequenz k gehört; E_0 und k_0 sind willkürliche Einheiten für E und k. Wir sehen, daß sich unsere Abhängigkeit bei

$$10^{-4}k_0 \leqq k \leqq 10^{-1}k_0$$

gut durch eine Formel der Form

$$E=ck^{-\frac{5}{3}}$$

ausdrücken läßt, die auf Grund theoretischer Überlegungen von *A. M. Obuchov* vorgeschlagen worden ist.
Hier sind die Maßstäbe für $\lg k$ und $\lg E$ verschieden: Daher ist der Anstieg der einem vorgegebenen α entspricht, nicht gleich α. In dem Bild wird gezeigt, wie man graphisch eine Gerade konstruieren kann, deren Anstieg $\alpha=-\frac{5}{3}$ entspricht.

Aufgabe:

Stellt auf halblogarithmischem Papier die Daten der Tabelle (siehe Bild) über das Wachstum der Industrieproduktion der UdSSR an Hand zweier Gruppen dar: Gruppe A – Produktion von Produktionsmitteln, Gruppe B – Produktion von Konsumgütern (in Prozenten, auf das Jahr 1913 bezogen)!

Jahr	Gruppe A	Gruppe B	Jahr	Gruppe A	Gruppe B
1913	100	100	1945	1504	273
1917	81	67	1950	2746	566
1928	155	120	1955	5223	996
1932	424	187	1960	8936	1498
1937	1013	373	1965	14156	2032
1940	1340	460	1970	21359	3281

In welchen Jahren hat das Wachstum der Produktion in der Gruppe A das Wachstum der Produktion in der Gruppe B eingeholt, und in welchen Jahren liegen sie auf gleichem Niveau? Vergleicht die Besonderheiten der Kriegsjahre des ersten und zweiten Weltkriegs!
Bemerkung: Innerhalb der ganzen industriellen Produktion machte die Gruppe A im Jahre 1913 35,1%, im Jahre 1970 dagegen 74,84% aus. *A. N. Kolmogorow*

Kurzbiographie

Prof. Dr. Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow

Am 25. April 1977 wird einer der hervorragendsten Mathematiker unserer Zeit, Akademiemitglied A. N. *Kolmogorow* 74 Jahre alt. Schon frühzeitig erwachte das Interesse Kolmogorows an der Mathematik. Bereits mit fünf Jahren erkannte er mit Verwunderung, daß

$$1+3+5+\ldots+(2n+1)=n^2$$

ist. Daneben interessierte er sich in den späteren Schuljahren unter anderem für russische Geschichte.
Unter schweren Bedingungen begann er 1920 sein Mathematikstudium. Während seiner Studienzeit entwickelte er eine allgemeine Theorie der *Operationen auf Mengen* und löste ein schwieriges Problem aus der *Theorie der Konvergenz trigonometrischer Reihen*. Daneben interessierte er sich stets (auch heute noch) in starkem Maße für pädagogische Fragen.
Nach seinem Eintritt in die Aspirantur wandte er sich hauptsächlich der wissenschaftlichen Arbeit zu, die er mit dem Unterricht an höheren Lehranstalten, insbesondere an der Moskauer Universität verband, und wurde 1931 dort zum Professor berufen.
Kolmogorow schrieb grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Topologie und Mechanik. Neben seiner fruchtbaren wissenschaftlichen Tätigkeit widmete er viel Zeit der Arbeit mit seinen Schülern, von denen sich viele durch bedeutende Arbeiten einen Namen gemacht haben.
Der wissenschaftliche Kontakt mit seinen Schülern spielt sich nicht nur im Institut, sondern auch zu Hause, auf Spaziergängen und touristischen Exkursionen ab. Viele tausend Kilometer ist er schon mit seinem engsten Freund, Akademiemitglied P. S. Alexandroff, und mit anderen Gelehrten gesegelt, gerudert und gepaddelt.
Für seine Verdienste wurde A. N. Kolmogorow mit dem Leninpreis, dem Staatspreis, viermal mit dem Leninorden, mit dem Orden Rotes Banner der Arbeit sowie Medaillen ausgezeichnet. 1963 erhielt er den Ehrentitel eines Helden der Sozialistischen Arbeit.

M. L. Smoljanskij, Chefredakteur der math. Schülerzeitschrift „Quant", Moskau

Wie man in der Sowjetunion Mathematiker wird

Die Wissenschaft hatte wieder einmal ihre Sensation: Das *zehnte Problem Hilberts* war gelöst worden. An der Jahrhundertwende hatte der große deutsche Mathematiker Grundprobleme formuliert, die dann die Mathematiker des 20. Jahrhunderts lösen sollten. Die Lösung eines jeden dieser Probleme wurde zu einem Ereignis. Mit dem 10. Problem, demgegenüber sich namhafte Mathematiker geschlagen gegeben hatten, war nun der 22jährige Doktorand (heute Dr. rer. nat. habil.) *Juri Matijassewitsch* fertig geworden. Schon vor dieser Leistung, die seinen Namen in wissenschaftlichen Kreisen bekannt werden ließ, hatte der Student *Matijassewitsch* eine Jahresarbeit über mathematische Logik verfaßt, über die er auf einem internationalen Kongreß berichtete.
Der junge talentierte Wissenschaftler ist Absolvent der *Physik-Mathematik-Internatsschule*, die sich unweit der Moskauer Universität befindet. Diese Nachbarschaft ist nicht zufällig: Gegründet haben die Schule Wissenschaftler der Universität, die der Ansicht sind, daß sich mathematische Fähigkeiten bei Kindern bereits im Alter von 14 bis 15 Jahren entwickeln, zu dem Zeitpunkt also, da diese in die 7. oder in die 8. Klasse gehen. An die Schule werden – nach dem 8. Schuljahr – Schüler aus dem ganzen Lande aufgenommen. Hier gibt es nur die beiden Oberklassen: die 9. und die 10. Die Schüler wohnen in einem gemütlichen Wohnheim, für alle Ausgaben kommt der Staat auf. Der Lehrplan entspricht dem der allgemeinbildenden Schule, desgleichen das Reifezeugnis. Nur erhalten hier die Schüler umfangreichere Kenntnisse in Mathematik und Physik.
Es ist bereits zur Tradition geworden, daß jedes Frühjahr unter den sowjetischen Schulkindern Mathematikolympiaden durchgeführt werden. Bei diesen Olympiaden sind Vertreter der Moskauer Universität zugegen, die alle, die an die Physik-Mathematik-Schule aufgenommen zu werden wünschen, einer schriftlichen Prüfung unterziehen.
Auf diese Prüfung folgt noch eine mündliche, die eher einer Unterhaltung gleicht. Auf diese Weise werden mathematisch begabte Kinder ausfindig gemacht. Man lädt sie dann für einen Monat in eine vorbereitende *Sommerschule* ein, die unweit Moskaus in einer malerischen Gegend am Ufer eines Stausees liegt. Vor dem Unterricht wird geturnt, gebadet, an freien Tagen rudern oder wandern

die Kinder, spielen sie Fußball oder Volleyball. Alles ist wie in einem gewöhnlichen Pionierferienlager, doch kann man hier Vorlesungen führender Mathematiker der UdSSR, solcher wie Akademiemitglied *Andrej Kolmogorow* und anderer, hören.
Am 1. September beginnt das Schuljahr. Neben den allgemeinbildenden Fächern werden die Schüler in die Anfänge der höheren Mathematik, in moderne mathematische und physikalische Theorien sowie in Ideen und Probleme der heutigen Wissenschaft eingeweiht. Nach dem obligatorischen Unterricht können die *Jungen Mathematiker* nachmittags nach Wahl an einem der Lehrgänge *Mathematische Logik*, *Relativitätstheorie*, *Radioelektronik* oder *Wahrscheinlichkeitstheorie* teilnehmen. Diese Lehrgänge werden von Studenten und Doktoranden der Moskauer Universität geleitet, von denen einige selbst Absolventen dieser Schule sind.
Auch der Schulunterricht selbst ist hier anders organisiert als in der gewöhnlichen Oberschule: Hier werden Vorlesungen gehalten, hier gibt es Seminargruppen, außerdem Semester, und am Ende jedes Semesters eine Zwischenprüfung. Die Ferien fallen mit den Hochschulferien zusammen.
Die Schüler befassen sich nicht ausschließlich mit Physik und Mathematik. Sie besuchen Museen, Theatervorstellungen und Konzerte, nehmen an einem zweijährigen Kursus über russische Kunst, der von der Tretjakow-Galerie veranstaltet wird, teil. Einmal lud Akademiemitglied *Kolmogorow* eine Gruppe Neulinge zu sich auf die Datsche ein. Alle dachten, daß sie sich dort über Mathematik unterhalten werden. Das Gespräch drehte sich jedoch um Musik, Malerei und Architektur. Die Kinder kannten sich in der Kunst nicht besonders gut aus und waren ein wenig verlegen.
Mehrmals beteiligte sich *Kolmogorow* an Fuß- und Skiwanderungen der Schulkinder, und jedesmal wußte er ihnen viel Interessantes über die Moskauer Umgebung zu erzählen. Einmal hielt er in der Schule einen Vortrag über *Michelangelo*. Auch machte er den Kindern eine Phonotek mit Werken klassischer Musik zum Geschenk. Seit der Gründung der Schule haben sie über 2000 Schüler absolviert, 95 Prozent der Abiturienten bestanden die Hochschulaufnahmeprüfungen und studierten weiter.
Die Fenster der Schule sind bis spät erleuchtet. Der eine ist in die Lösung einer interessanten Aufgabe vertieft, der andere kann es nicht über sich bringen, einen Zukunftsroman beiseite zu legen, ein anderer wieder denkt an seine Nächsten zu Hause. Wer weiß, vielleicht wächst in diesem großen und gemütlichen Haus ein *Kurtschatow* oder ein *Kolmogorow* heran?

Lew Kokin,
(aus: Sozialistitscheskaja Industrija)

$9 \circ 5 = 2$

Die „Uhr-Addition" und andere Verknüpfungen

Wir alle wissen, es gilt: $9+5=14$. Was also bedeutet $9 \circ 5=2$ in der Überschrift?
Aus dem Unterricht kennen wir die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Sie alle haben gemeinsam, daß zwei zu verknüpfenden Zahlen wieder genau eine dritte Zahl zugeordnet wird:

$$a, b \xrightarrow{+} c, \quad a, b \xrightarrow{-} d,$$
$$a, b \xrightarrow{\cdot} e, \quad a, b \xrightarrow{:} f.$$

In gewohnter Weise schreiben wir dafür (kürzer):

$$a+b=c, \quad a \cdot b=e,$$
$$a-b=d, \quad a:b=f.$$

Wir sehen aber auch, daß wir wegen der Subtraktion und Division unsere eben festgestellte Gemeinsamkeit präzisieren müssen. Sie muß lauten:
Zwei zu verknüpfenden Zahlen in *vorgegebener Reihenfolge* wird eindeutig eine dritte Zahl zugeordnet.
(Denn im allgemeinen gilt ja $a-b \neq b-a$, $a:b \neq b:a$.)
Wenn die Reihenfolge zweier Zahlen a und b wichtig ist, sprechen wir von den *geordneten Paaren* (a, b) bzw. (b, a).
Auch das Potenzieren können wir als eine Abbildung verstehen, die jedem Paar natürlicher Zahlen wieder genau eine natürliche Zahl zuordnet. Als Zeichen für das Potenzieren wählen wir einen Pfeil

$$(a, b) \xrightarrow{\uparrow} g \text{ oder } a \uparrow b=g.$$

Lesen wir den Pfeil als „hoch", erhalten wir die uns vertraute Schreibweise $a \uparrow b=a^b$.
Beispiel: $2 \uparrow 3=8$, $3 \uparrow 2=9$.
(Wie zuvor beim Dividieren betrachten wir auch hier nur die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null. Warum?)
Allgemein definieren wir jetzt:
$\circ$ heißt eine *Verknüpfung* über einer (nichtleeren) Menge M,
$=_{Df}$ $\circ$ ist eine eindeutige Abbildung von $M \times M$ in M.
Dabei ist das Kreuzprodukt $M \times M$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a, b \in M$. D. h. also mit anderen Worten, eine Verknüpfung $\circ$ ist eine spezielle, nämlich zweistellige Funktion:
Jedem Paar $(a, b) \in M \times M$ wird eindeutig ein Element $c \in M$ zugeordnet:

$$(a, b) \xrightarrow{\circ} c \text{ oder } \circ:(a, b) \to c;$$

wir schreiben (wie bei den vier Grundrechenarten und beim Potenzieren) dafür $a \circ b=c$.
Der Definitionsbereich $D_\circ$ dieser Funktion $\circ$ besteht aus der Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a, b \in M$:

$$D_\circ = M \times M.$$

Für den Wertevorrat $W_\circ$ gilt:

$$W_\circ \subseteq M.$$

Natürlich ist in unserer Definition auch stets der Fall $a=b$ zugelassen, d. h., die zwei zu verknüpfenden Elemente müssen nicht notwendig verschieden sein.
Die Definition läßt sich besonders einprägsam mit Hilfe eines sogenannten *Automaten* veranschaulichen: (Bild 1).

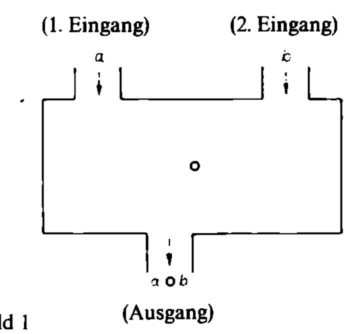


Bild 1

Dabei interessiert uns weniger die innere Wirkungsweise des Automaten als vielmehr, welches Ergebnis die Verknüpfung liefert.
Ob es uns gelingt, über einer Menge M eine Verknüpfung $\circ$ zu definieren, hängt wesentlich von dieser Menge M selbst ab. So ist z. B. die Subtraktion zwar eine Verknüpfung, wenn wir für M die Menge G der ganzen Zahlen wählen, nicht aber, wenn wir die Menge N der natürlichen Zahlen zugrunde legen. Bekanntlich existiert $3-7$ in N nicht. D. h., wenn wir entscheiden sollen, ob die Abbildung $\circ$ eine *eindeutige* Abbildung *von* $M \times M$ *in* M ist, dann steht vor der Frage nach der Eindeutigkeit (von $a \circ b$) erst einmal die Frage der Existenz von $a \circ b$ in M für alle $a, b \in M$.
Ist letzteres gesichert, sagen wir, M ist bezüglich $\circ$ abgeschlossen oder $\circ$ führt nicht aus M hinaus.
Ist $\circ$ eine Verknüpfung über einer Menge M, so nennen wir $(M, \circ)$ ein *Verknüpfungsgebilde* mit der *Trägermenge* M und der Verknüpfung $\circ$. Verknüpfungsgebilde sind z. B. $(N, +)$, $(P, -)$, $(G, \cdot)$ und $(R \setminus \{0\}, :)$. Wählen wir dagegen z. B. die Menge der Primzahlen als Trägermenge M, so liefert uns keine der vier Grundrechenarten ein Verknüpfungsgebilde:
$7+3 \notin M$, $7 \cdot 3 \notin M$, $7-3 \notin M$, $7:3 \notin M$.

Aufgabe 1

Welche Zahlbereiche liefern bzgl. einer der vier Grundrechenarten weitere Verknüpfungsgebilde?
Sei $M=\{1, 2, \ldots, 12\}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 und $\circ$ eine Verknüpfung, die auf die folgende Weise über M definiert ist:

Für alle $x, y \in M$:

$$x \circ y =_{Df} \begin{cases} x+y, \text{ falls } x+y \leqq 12 \\ x+y-12, \text{ falls } x+y > 12. \end{cases}$$

Beispiel:

$x=3, y=7: x+y=10 \leqq 12$,
also $3 \circ 7 = 10$,
$x=9, y=5: x+y=14 > 12$,
also $9 \circ 5 = 2$.

Diese scheinbar ungewöhnliche Verknüpfung vollziehen wir täglich; dazu brauchen wir nur einmal auf unsere Uhr zu schauen! Wir nennen $\circ$ deshalb die *Uhr-Addition* und wollen sie deshalb auch mit $+\oplus$ bezeichnen.

Aufgabe 2

a) Zeige, daß $(M, +\oplus)$ ein Verknüpfungsgebilde ist, d. h., zeige, daß die Definition von $+\oplus$ eine Verknüpfung über M liefert!
b) Welche dir bekannten Eigenschaften der Addition besitzt die *Uhr-Addition*?

Aufgabe 3

Sei $M=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ die Menge der geraden (natürlichen) Zahlen von 0 bis 8. Für alle $x, y \in M$ definieren wir $x \circ y$ als die einstellige Zahl z, deren Ziffer mit der Endziffer der Summe von x und y identisch ist.
Beispiel: $2 \circ 4 = 6$, $4 \circ 8 = 2$, $8 \circ 8 = 6$.
a) Zeige, daß $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde ist!
b) Untersuche, ob die Menge $M' = \{0, 2, \ldots, 8, 10\}$ bezüglich $\circ$ abgeschlossen ist!
c) Vergleiche die Eigenschaften von $\circ$ (über M) mit denen der *Uhr-Addition*!
d) Versuche, die Definition von $\circ$ (über M) in zur *Uhr-Addition* analoger Weise anzugeben: $x \circ y =_{Df} \ldots$!
e) Konstruiere selbst Verknüpfungsgebilde nach dem Muster der Aufgaben 2 und 3.

Um mit den Begriffen *Verknüpfung*, *Trägermenge*, *Verknüpfungsgebilde* ein wenig vertrauter zu werden, bedarf es nun keineswegs eines Ausfluges in uns unbekannte Gebiete – wie man anhand der Aufgabe 3 vielleicht vermuten könnte. Schon im Mathematikunterricht begegnen uns viele Verknüpfungen. Es gilt nur, sie aufzuspüren, zu erkennen! Beginnen wir unsere Entdeckungsreise in Klasse 5/6, so stoßen wir auf die Berechnung des Umfanges eines Rechtecks bzw. Parallelogramms. *Übersetzen* wir die Umfangsformel in unsere *Sprache der Verknüpfungen*, erhalten wir:

Zwei natürlichen bzw. gebrochenen Zahlen a und b wird ihre doppelte Summe zugeordnet.

Wir überzeugen uns leicht davon, daß sowohl $(N, \circ)$ als auch $(R^*, \circ)$ mit
$x \circ y =_{Df} 2 \cdot (x+y)$ für alle $x, y \in N$ (bzw. R^*)
Verknüpfungsgebilde sind, denn Abgeschlossenheit der jeweiligen Trägermenge gegenüber $\circ$ und Eindeutigkeit des Ausdrucks $2 \cdot (x+y)$ sind offensichtlich gesichert.

Aufgabe 4

Ermittle $1 \circ 1$, $2 \circ 1$, $4 \circ 0$, $2 \circ 3$, $0 \circ 3$ und $0 \circ 0$!

Aufgabe 5

In Klasse 6 begegnen uns Flächeninhalt eines Dreiecks sowie Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks. Zu welchen Verknüpfungen (genauer: Verknüpfungsgebilden) führen uns diese Begriffe?

Auch hinter dem *Durchschnitt zweier Zahlen* verbirgt sich eine Verknüpfung, nämlich die Bildung des *arithmetischen Mittels:* Für alle $x, y \in R^*$ wird definiert: $x \Delta y =_{Df} \frac{x+y}{2}$.

Neben dem arithmetischen Mittel, das uns auch an die Berechnung der Länge der Mittellinie eines Trapezes erinnert, kennen wir (aus Klasse 9) noch das *geometrische* und das *harmonische Mittel:*

Für alle positiven reellen Zahlen x, y wird definiert:

$x * y =_{Df} \sqrt{x \cdot y}$ und $x \square y =_{Df} \frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y}$.

Aufgabe 6

Ermittle $x \Delta y$, $x * y$ und $x \square y$ (über P^+) für
a) $x=2, y=1$,
b) $x=2, y=2$ und
c) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{8}$.

Aufgabe 7

a) Welche der dir bekannten Zahlbereiche sind bezüglich der Bildung des arithmetischen Mittels (Δ) abgeschlossen; welche nicht?
b) Warum kann für das geometrische Mittel ($*$) nicht N, G, R, R^* oder P als Trägermenge gewählt werden?
c) Sind $(R^* \setminus \{0\}, \square)$ und $(R \setminus \{0\}, \square)$ Verknüpfungsgebilde?

Aufgabe 8

Beweise, daß für die Mittelwerte die folgende Ungleichung gilt!
Für alle $x, y \in P^+$:

$$x \square y \leqq x * y \leqq x \Delta y.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Auch der Satz des Pythagoras (Klasse 9/10) liefert uns über der Menge P^+ der positiven reellen Zahlen eine Verknüpfung:
$x \bullet y =_{Df} \sqrt{x^2+y^2}$ für alle $x, y \in P^+$.

Aufgabe 9

a) Ergänze die Ungleichung aus Aufgabe 6 derart, daß auch die Verknüpfung $\bullet$ berücksichtigt wird!
b) Untersuche, ob auch $(P^+ \cup \{0\}, \bullet)$ ein Verknüpfungsgebilde ist!

Wiederum schon aus Klasse 6 sind uns die Bildung des *größten gemeinsamen Teilers* sowie des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* geläufig. Um die Eindeutigkeit zu sichern, stützen wir uns dabei auf die Menge N der natürlichen Zahlen.

Für alle $x, y \in N$ wird definiert:
$x \sqcap y =_{Df} \text{ggT}(x, y)$ und $x \sqcup y =_{Df} \text{kgV}(x, y)$.
Beispiele: $136 \sqcap 300 = 4$, $144 \sqcap 189 = 1$,
$1125 \sqcup 35 = 7875$, $45 \sqcup 18 = 90$.

Aufgabe 10

a) Wie lautet eine genaue Definition für $x \sqcap y$ und $x \sqcup y$?
In der Definition von $\sqcap$ und $\sqcup$, die du aufschreibst, sollst du die Wörter *größer* ($>$) und *kleiner* ($<$) nicht verwenden, sondern nur von Teilbarkeit sprechen.
b) Ermittle für $a_1=24$, $b_1=180$ und $a_2=476$, $b_2=714$ sowohl $a_i \sqcap b_i$ als auch $a_i \sqcup b_i$ $(i=1, 2)$!
c) Untersuche, wie sich 0 und 1 bezüglich der beiden Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ verhalten!
d) Beweise, daß für alle $x, y \in N$ gilt:

$$(x \sqcap y) \cdot (x \sqcup y) = x \cdot y.$$

Wie lautet diese Beziehung, wenn x und y teilerfremd sind?
e) Für alle $x, y \in N$ gilt:
$(x \sqcup y) \sqcap x = x$ und $(x \sqcap y) \sqcup x = x$
Veranschauliche dir diese Sätze mittels Automaten!

Aufgabe 11

a) Suche passende Zahlen für die freien Ein- und Ausgänge im folgenden Automaten-*Baum*! (Bild 2)

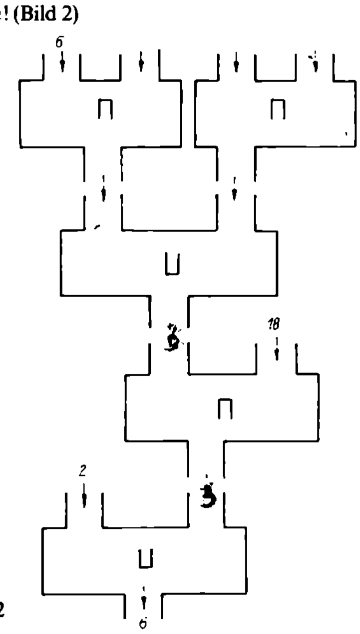


Bild 2

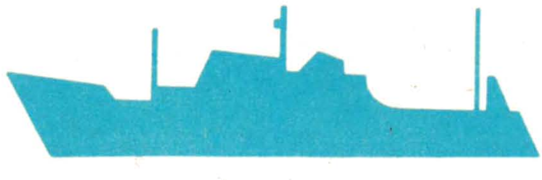
b) Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Abschließend wollen wir anhand von zwei weiteren Verknüpfungen zeigen, daß die Trägermenge eines Verknüpfungsgebildes nicht notwendig aus Zahlen bestehen muß. Das sind einerseits die Bildung des *Durchschnitts* (in Zeichen: $\cap$ – Klasse 9) und andererseits die der *Vereinigung* (in Zeichen: $\cup$) zweier Mengen. Sei M eine beliebige (nichtleere) Menge. Dann wählen wir als Trägermenge jeweils die sogenannte *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(M)$. Sie besteht aus allen Teilmengen von M, also einschließlich M selbst und der leeren Menge (denn $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$). Die Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M), \cap)$ und $(\mathfrak{P}(M), \cup)$ verhalten sich ähnlich wie die zuvor betrachteten Verknüpfungsgebilde $(N, \sqcap)$ und $(N, \sqcup)$ – worauf wir mit der Bezeichnung der Verknüpfungen hinweisen wollten.

Ingmar Lehmann

Vollmatrose der Handelsschiffahrt

Berufsbild



Der ständig wachsende Warenaustausch mit vielen Ländern der Erde, insbesondere mit der Sowjetunion und den anderen sozialistischen Staaten, stellt hohe Anforderungen an das Verkehrs- und Transportwesen. Der wichtigste Verkehrsträger im Überseehandel der Deutschen Demokratischen Republik ist die Handelsflotte. Der Transportprozeß wird durch den steigenden Umfang der Teilautomatisierung und Automatisierung der Schiffe bestimmt. Der technische Ausrüstungsgrad an Bord erfordert Vollmatrosen der Handelsschiffahrt, die als vielseitig ausgebildete sozialistische Facharbeiter jederzeit in der Lage sind, die verschiedenen seemännischen Tätigkeiten weitgehend selbständig zu verrichten. Dazu gehören Arbeiten zur

- Gewährleistung einer sicheren Fahrt des Schiffes
- Vorbereitung des Lade- und Löschprozesses sowie zur Betreuung der Ladung
- Aufrechterhaltung und Wiederherstellung der Funktionstüchtigkeit des Schiffes sowie seiner Einzelaggregate und Anlagen.

Die Vollmatrosen der Handelsschiffahrt werden auf allen Schiffen unserer Hochseehandelsflotte eingesetzt. Die Arbeiten im Schiffsbetriebsdienst verlangen eine unbedingte Einordnung in das Kollektiv sowie bewußte, disziplinierte Arbeits- und Befehlsausführung.

Alle Arbeiten müssen mit Umsicht, Entschlußkraft und ständiger Einsatzbereitschaft ausgeführt werden. Speziell im Ladungs- und Betriebsdienst werden hohe Forderungen an die Aufmerksamkeit und das Verantwortungsbewußtsein gestellt, da Unterlassungen und Fehler schwerwiegende Folgen für Besatzung, Schiff und Ladung haben.

Die Vollmatrosen der Handelsschiffahrt müssen in der Lage sein, die mit dem zunehmenden Automatisierungsgrad in den Schiffen installierten Maschinen und Anlagen zu bedienen, zu warten sowie unter Anleitung von Ingenieuren instandzuhalten. Das erfordert eine breite technische Grundlagenbildung, exaktes Wissen und Können auf einem Spezialgebiet sowie Bereitschaft, die Kenntnisse und Fertigkeiten stets dem neuesten Stand anzupassen. Die notwendige Zusammenarbeit mit Werktätigen anderer Länder verlangen ein klassenbewußtes Auftreten im Ausland und das Beherrschen von Fremdsprachen.

Besondere psychische und physische Belastungen ergeben sich aus der Arbeit unter den extremen Bedingungen während der Fahrt bei jedem Wetter und aus dem ständigen Klimawechsel. Die Seefahrt erfordert hohe moralische Qualitäten, Liebe zur Arbeit, Patriotismus, sozialistisches Bewußtsein, Achtung des gesellschaftlichen Eigentums sowie Rücksichtnahme auf Sitten und Gebräuche fremder Völker und Kenntnis ihrer Gesetze.

Voraussetzung zum Erlernen dieses Berufes ist der erfolgreiche Abschluß der 10. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule, verbunden mit guten Leistungen in Mathematik, Physik, Chemie, Fremdsprachen und im polytechnischen Unterricht. Weitere Voraussetzungen sind die Ablegung der A-Prüfung (Seesport) im Anschluß an die seemännische Ausbildung bei der GST, die erfolgreiche Teilnahme an einer Ausbildung in der Ersten Hilfe sowie der Nachweis der physischen Voraussetzungen entsprechend den Anforderungen, die in den Bestimmungen des Medizinischen Dienstes des Verkehrswesens der DDR für die Seetauglichkeitsgruppe 1 festgelegt sind.

Der Beruf Vollmatrose der Handelsschiffahrt ist für Mädchen nicht geeignet.

Die Ausbildung dauert zwei Jahre. Sie erfolgt landseitig und an Bord der Ausbildungsschiffe bzw. der Handelsschiffe. Im ersten Lehrjahr werden neben den Grundlagen der Datenverarbeitung, der BMSR-Technik und der Elektronik Gebiete der breiten technischen Grundlagenbildung in Seemannschaft, mechanischer Technologie und allgemeiner Maschinenkunde, Decksbetriebstechnik und Maschinenbetriebstechnik vermittelt.

Im zweiten Lehrjahr erfolgt die Ausbildung in einer der drei beruflichen Spezialisierungsrichtungen Deckbetriebstechnik, Maschinenbetriebstechnik od. Elektrotechnik/Elektronik.

Dieser Beruf ist Voraussetzung für die Ausbildung zum Schiffsoffizier für Deckbetriebstechnik, für Schiffbetriebstechnik bzw. für Elektrotechnik an der Fachschule. Bei landseitigem Einsatz ist die Qualifizierung zum Meister für Schiffsanlagen oder zum Erprobungsingenieur für Kooperationsbetriebe des Schiffbaus möglich.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. J. Flachsmeyer

Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

▲1565a▲ Das um eine Raumdiagonale ergänzte Eckpunkt-Kantensystem eines Würfels stelle das Verdrahtungsschema eines elektrischen Netzwerkes dar.

Man begründe, daß sich die Schaltung nicht als gedruckte Schaltung realisieren läßt, d. h., der durch Bild 1 bzw. Bild 2 dargestellte Graph läßt sich nicht in der Ebene kreuzungsfrei als Verbindungssystem von Kurven darstellen, daß dabei nur die gewünschten 8 Knotenpunkte auftreten.

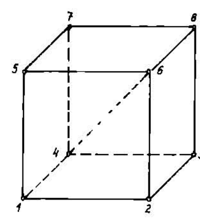


Bild 1

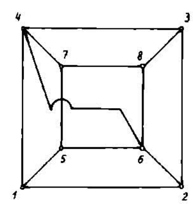


Bild 2

Dabei benutze man die Tatsache, daß der folgende – in zwei gleichwertigen Realisierungen gezeigte – Sechseckgraph nicht plättbar ist, d. h. dieser besitzt keine kreuzungsfreie, ebene Realisierung, wo also nur die 6 Knotenpunkte als Schnittpunkte vorkommen und in jedem nur jeweils 3 Kurven einmünden.

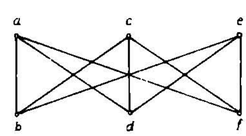


Bild 3

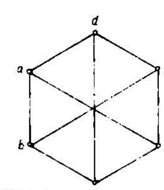


Bild 4

▲1565b▲ Den Koordinateneinheitswürfel denke man sich im Nullpunkt angeheftet und um diesen frei beweglich. Die Endpunkte der 3 Koordinateneinheitsvektoren seien wohlunterschieden markiert.

a) Wieviel verschiedene Lagen des Würfels im ersten Oktanten sind möglich?

b) Man stelle jede der ermittelten Lagen aus der Ausgangslage durch eine Aufeinanderfolge von zwei Drehungen um Koordinatenachsen her!

c) Man stelle jede der ermittelten Lagen durch eine einzige Drehung um eine geeignete Achse (welche?) her!

Mit welchem Winkel muß dabei um diese Achse gedreht werden? (Bild s. S. 143)

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1977

Ma 5 ■1566 Im Jahre 1975 stellt Ute fest, daß sie und ihr sechs Jahre älterer Bruder Axel zusammen 30 Jahre alt sind (in ganzen Zahlen). Utes Mutter ist zwei Jahre jünger als ihr Vater. Alle vier Familienmitglieder werden in diesem Jahr zusammen 120 Jahre alt. Wie alt sind Ute, Axel, deren Vater und Mutter im Jahre 1975 geworden?

Schülerin Gudrun Tappert, Guben

Ma 5 ■1567 Auf einer Geburtstagsfeier wurden von den Gästen 10 Glas Kirschlimonade getrunken, die wie folgt zubereitet waren: Sieben Teile Selterswasser wurden mit einem Teil Kirschsirup vermischt. Die Trinkgläser faßten bis zum Eichstrich genau 0,2 Liter und waren bis dahin gefüllt. Wieviel Liter Kirschsirup wurden verbraucht?

Schülerin Gudrun Tappert, Guben

Ma 5 ■1568 Auf alle Seitenflächen eines Pappwürfels wurden gleichgroße Pappwürfel so aufgeklebt, daß jeweils zwei quadratische Begrenzungsflächen zur Deckung kommen.

a) Wieviel quadratische Flächen begrenzen den so entstandenen Körper?

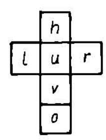
b) Angenommen, alle verwendeten Würfel wären Spielwürfel und diese Würfel wären so aneinandergeklebt, daß die Gesamtaugenzahl der Flächen, die nicht überklebt sind, möglichst groß ist; wie groß ist in diesem Fall die Gesamtaugenzahl?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

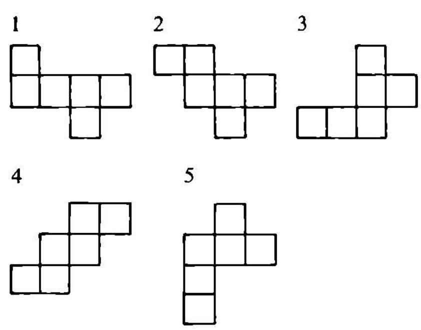
Ma 5 ■1569 Zwei Autobusse fuhren die eingetroffenen Pioniere vom Bahnhof in ihr Sommerlager. Der erste Autobus fuhr dreimal, der zweite fünfmal. Mit dem zweiten Autobus wurden insgesamt 86 Pioniere mehr befördert als mit dem ersten. Jeder der beiden Autobusse beförderten bei jeder Fahrt gleichviel Pioniere; nur bei der letzten Fahrt waren in den zweiten Autobus vier Pioniere weniger als während der Fahrten zuvor eingestiegen. Wieviel Pioniere waren insgesamt eingetroffen?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1570 Die sechs Begrenzungsflächen eines Würfels seien durch die Abkürzungen u, o, l, r, v, h für unten, oben, links, rechts, vorn, hinten bezeichnet. Das Netz eines Würfels könnte dann wie folgt aussehen:



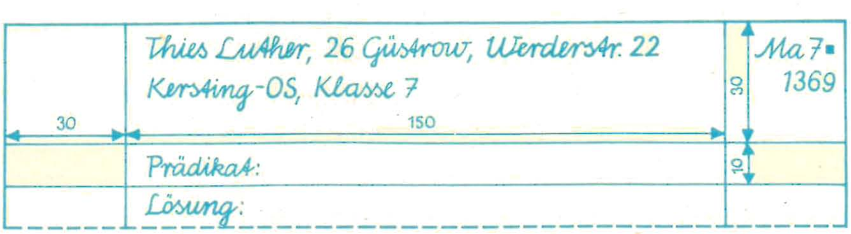
Beschrifte die nachstehend abgebildeten fünf Netze eines Würfels auf gleiche Weise! Aus welchem dieser Netze läßt sich kein Würfel herstellen?



Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1571 Wenn man die beiden Ziffern einer zweistelligen natürlichen Zahl ebenfalls als Zahlen auffaßt, aus ihnen die Differenz bildet und davon 1 subtrahiert, so erhält man den dreizehnten Teil der ursprünglichen zweistelligen natürlichen Zahl. Wieviel Zahlen dieser Art gibt es, wie lauten sie?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens *10* Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1572 In einem Regal einer Bibliothek befinden sich mehr als 340, aber weniger als 350 Bücher. Genau der vierte Teil dieser Bücher besteht aus Kinderbüchern, genau der dritte Teil aus Erzählungen, die restlichen Bücher sind Romane. Wieviel Kinderbücher, Erzählungen und Romane enthält dieses Regal?

Schülerin Karin Sukowski, Neukloster

Ma 6 ▪1573 Ein Schüler, nach dem von ihm auf einem mathematischen Wettbewerb erreichten Platz befragt, antwortete scherzhaft: „Addiert man zu der Zahl, die der von mir erreichten Platzziffer entspricht, noch 5, dividiert man diese Summe durch 10, vermehrt man diesen Quotienten um 3 und multipliziert man die nunmehr erhaltene Summe mit 5, so erhält man eine Zahl, die um 10 größer ist, als diejenige Zahl, die der von mir erreichten Platzziffer entspricht." Welchen Platz hatte dieser Schüler auf dem mathematischen Wettbewerb erreicht?

Schülerin Carola Senft, Wingerode

Ma 6 ▪1574 Eine Fluglinie verbindet zwei Orte A und B, die 2240 km voneinander entfernt sind. Ein Flugzeug legt drei Viertel der Flugstrecke $\overline{AB}$ mit einer mittleren Geschwindigkeit von $840\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Während der restlichen Flugstrecke beträgt die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeuges $800\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es ist die Dauer der gesamten Flugzeit zu berechnen.

Schüler Jörg Bruchertseifer, Dubna, UdSSR

Ma 6 ▪1575 Auf einem Sportfest errang Ursula mehr als 1475, aber weniger als 1500 Punkte. Sabine schaffte nur den dritten Teil der von Ursula erzielten Punktzahl. Auf einer früheren Spartakiade hatte Ursula nur den neunten Teil der Punktzahl erreicht, die sie gegenwärtig auf dem Sportfest erkämpfte. Die auf der früheren Spartakiade von Ursula erzielte Punktzahl war ein Vielfaches der Zahl 5. Wieviel Punkte errang Sabine auf dem Sportfest?

Schülerin Ines Schulze, Milmersdorf

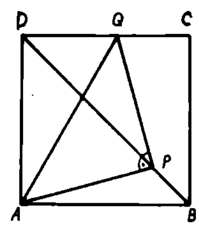
Ma 6 ▪1576 Ein Kraftfahrer fährt mit seinem Wartburg auf der Autobahn mit der durchschnittlichen und höchst zulässigen Geschwindigkeit von $100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Er wird von einem Moskwitsch, der mit einer überhöhten Geschwindigkeit von $120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ fährt, überholt. An einer Raststätte am Kilometerstein 87 hält der Wartburg. Dort stand bereits der Moskwitsch, dessen Fahrer den Wartburg am Kilometerstein 54 überholt hatte. Um wieviel Minuten ist der Moskwitsch an der Raststätte früher angekommen als der Wartburg, wenn er die Geschwindigkeit von $120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ beibehalten hat? *Sch.*

Ph 6 ▪1577 An zwei rechtwinklig angeordneten Spiegeln wird jeder in der Ebene der beiden Spiegelnormalen einfallende Strahl nach zweimaliger Reflexion parallel zu sich selbst zurückgeworfen.
Dies ist zu beweisen! *H. B.*

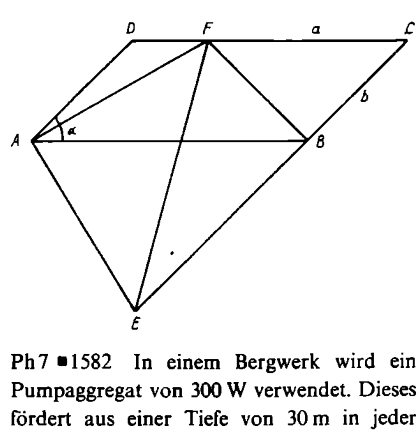
Ma 7 ▪1578 Für welche Paare (a, b) natürlicher Zahlen a und b mit $a \leq b$ ist ihr Produkt zehnmal so groß wie ihre Summe?

Ma 7 ▪1579 Sammelkarten für die Benutzung von Straßenbahnen enthalten bei einem einheitlichen Preis von 1 Mark pro Sammelkarte in Berlin fünf, in Leipzig sechs und in Halle acht Fahrabschnitte. Jemand, der in diesen drei Orten häufig beruflich zu tun hat, verbrauchte während eines Monats insgesamt 12 Sammelkarten mit insgesamt 77 Fahrabschnitten. Wieviel Sammelkarten jeder dieser drei Städte könnten von ihm innerhalb dieses Monats verbraucht worden sein? *Sch.*

Ma 7 ▪1580 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ dar. Ein innerer Punkt P der Diagonale $\overline{BD}$, der nicht mit dem Mittelpunkt von $\overline{BD}$ zusammenfällt, wurde mit dem Punkt A verbunden. Durch P wurde die Senkrechte zu AP konstruiert, die CD in Q schneidet, und es wurde A mit Q verbunden. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck APQ gleichschenklig ist. *Sch.*

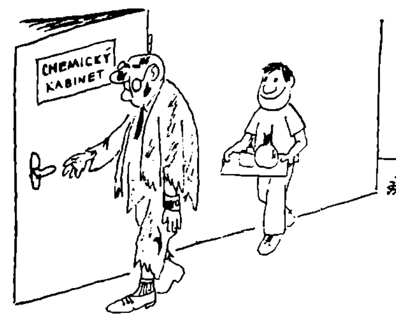


Ma 7 ▪1581 Die abgebildete Figur stellt ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = \alpha < 90°$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$ dar. Um D wurde ein Kreis mit dem Radius $\overline{CD} = a$ geschlagen, der BC in E schneidet. Um B wurde ein Kreis mit dem Radius $\overline{BC} = b$ geschlagen, der CD in F schneidet. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck AEF gleichschenklig ist. *Sch.*



Ph 7 ▪1582 In einem Bergwerk wird ein Pumpaggregat von 300 W verwendet. Dieses fördert aus einer Tiefe von 30 m in jeder Minute 40 l Wasser.
Berechne den Wirkungsgrad des Pumpaggregats! *H. B.*

Ch 7 ▪1583 Je 0,5 kg Eisen(II)-oxid, Eisen(III)-oxid und Eisen(II, III)-oxid werden durch Aluminium reduziert. Berechne, wieviel Gramm Eisen bei jeder Redoxreaktion entstehen!



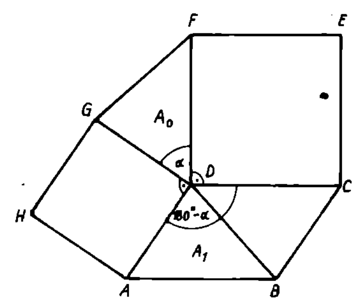
Nach dem Lehrerexperiment

Ma 8 ▪1584 Es soll die Zahl

$$z = \frac{970^2 + 971^2 + 972^2 + 973^2 + 974^2 + 975^2 + 976^2}{972 \cdot 974 + 5}$$

auf eine möglichst einfache Weise berechnet werden.
Anleitung zur Lösung: Man setze $a = 973$ und wende die binomischen Formeln an. *L.*

Ma 8 ▪1585 Über den Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ eines Parallelogramms $ABCD$ wurden die Quadrate $DCEF$ und $ADGH$ nach außen konstruiert (vgl. das Bild), und es wurden B mit D und F mit G verbunden.

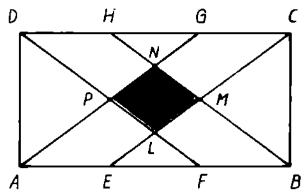


Es seien A_0 der Flächeninhalt des Dreiecks DFG und A_1 der Flächeninhalt des Dreiecks ABD. Welche der nachfolgenden Beziehungen trifft zu:
$A_0 < A_1$ oder $A_0 = A_1$ oder $A_0 > A_1$? *Sch.*

Ma 8 ▪1586 Im Jahre 1948 wurde bei dem Achterrennen der Olympischen Spiele erstmalig eine Zeit von 6 min unterschritten. Das Siegerboot legte die 2000 m lange Strecke in 5 min 56,7 s zurück. Im Jahre 1970, also 22 Jahre später, benötigte der Berliner Dynamo-Achter bei den Weltmeisterschaften in Kanada für die 2000 m lange Rennstrecke nur noch 5 min 36,1 s und wurde Weltmeister.
a) Um wieviel Prozent verringerte sich gegenüber 1948 die Zeit im Jahre 1970?
b) Wie groß waren die Geschwindigkeiten $\left(\text{in}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ 1948 und 1970?

c) Um wieviel Prozent erhöhte sich gegenüber 1948 die Geschwindigkeit im Jahre 1970?
d) Warum ist der unter a) zu berechnende Prozentsatz kleiner als der unter c) zu berechnende Prozentsatz?
(Die Prozentsätze sollen mit 1 Stelle nach dem Komma berechnet werden, die Geschwindigkeiten jedoch mit 2 Stellen.) *L.*

Ma 8 ▪1587 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$. Jede der beiden Rechteckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei in drei gleiche Teile geteilt, d. h., es gilt $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}$ und $\overline{DH}=\overline{HG}=\overline{GC}$ (vgl. das Bild).



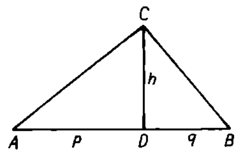
Wie verhält sich der Flächeninhalt A_1 des von den Verbindungsgeraden AG, EC, FD und BH begrenzten Vierecks $LMNP$ zu dem Flächeninhalt A_0 des Rechtecks $ABCD$? *Sch.*

Ph 8 ▪1588 Eine Sauerstoffflasche mit 50 l Inhalt steht unter einem Überdruck von 28 at. Wieviel Sauerstoff kann bei einem Barometerstand von 750 Torr entweichen? *H. B.*

Ch 8 ▪1589 Die Kosten für Umschlag und Ausbringen von Dünger betragen a M je Hektar im agrochemischen Zentrum (ACZ), b M je Hektar in der LPG; sie sind proportional der Größe der landwirtschaftlichen Nutzfläche (LN) in Hektar.
a) Stelle die Funktionsgleichungen auf!
b) In einem ACZ mit 15000 ha Einsatzbereich sind für PK-Dünger die Selbstkosten $a=27{,}42\,\frac{\text{M}}{\text{ha}}$, in der LPG lag der Selbstkostensatz bei $b=47\,\frac{\text{M}}{\text{ha}}$.
Um wieviel Prozent gingen die Selbstkosten zurück?
Wie hoch sind die Kosten im ACZ, und wie groß ist die Ersparnis?
c) Stelle die Kosten für die PK-Düngung in Abhängigkeit von der Größe der LN graphisch dar!

Ma 9 ▪1590 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems
$$xy=4, \quad (1)$$
$$yz=16, \quad (2)$$
$$zx=9 \quad (3)$$
zu ermitteln.
Bemerkung: Diese Aufgabe stammt von dem griechischen Mathematiker ***Diophantos von Alexandria*** (um 250 u. Z.), der nicht nur die nach ihm benannten diophantischen Gleichungen (Gleichungen im Bereich der ganzen Zahlen) behandelt hat. *L.*

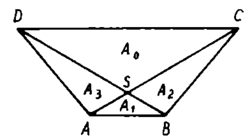
Ma 9 ▪1591 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge $c=20$ cm hat (vgl. das Bild).



Man berechne die Längen der Hypotenusenabschnitte $\overline{AD}=p$ und $\overline{DB}=q$, wenn die zugehörige Höhe $\overline{CD}=h$ gegeben ist, und zwar für die Fälle:
a) $h=6$ cm, b) $h=10$ cm, c) $h=11$ cm.
Klaus Meier, Osternienburg
Fachlehrer für Mathematik und Physik

Ma 9 ▪1592 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung
$$\frac{a^4+b^4+1}{2}\geqq a^2+b^2-a^2b^2$$
erfüllt ist. *F. Sprang, Rochlitz,*
Fachlehrer für Mathematik

Ma 9 ▪1593 Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, dessen Grundseite $\overline{CD}$ dreimal so lang wie die Grundseite $\overline{AB}$ ist. S sei der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Trapezes. Ferner seien A_0, A_1, A_2 und A_3 die Flächeninhalte der Dreiecke SCD, SAB, SBC und SDA (vgl. das Bild).

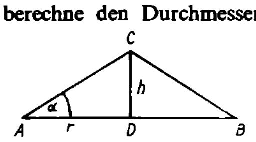


Wie verhält sich die Summe der Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 zu dem Flächeninhalt A_0? *Rolf Kamieth, OS Kakerbeck, Kl. 9*

Ph 9 ▪1594 Welchen Durchmesser müssen zwei Bleikugeln haben, wenn sie sich berühren und sich gegenseitig mit einer Kraft von 0,1 p anziehen sollen? *H. B.*

Ch 9 ▪1595 Durch Eindampfen einer wäßrigen Kalziumnitratlösung werden 10 g festes Salz erhalten.
a) Wieviel Gramm Kalziumhydroxid werden zur Neutralisation benötigt, damit sich diese Masse Salz bildet?
b) Wieviel Gramm 20%ige Säure werden gebraucht, um die gleiche Masse an festem Salz herzustellen?

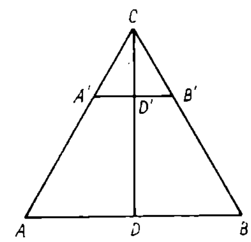
Ma 10/12 ▪1596 Die Ladung eines Lastkraftwagens, der mit 5 t Sand beladen ist, soll zu einem „Schüttkegel" aufgeschüttet werden, d. h. einem geraden Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ABC (vgl. das Bild) ist, mit dem Böschungswinkel $\sphericalangle CAB=\alpha=33°$. Dabei beträgt die Dichte des Sandes $\varrho=2{,}4\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.
Man berechne den Durchmesser und den Umfang des Grundkreises sowie die Höhe des Schüttkegels.



Helmut Engelmann, Sachsendorf
Fachlehrer für Mathematik

Ma 10/12 ▪1597 Man beweise, daß die Zahl
$z=2^{300}-(2^{150}+2^{100}+2^{60})+(2^{50}+2^{30}+2^{20})-2^{10}$ durch 300 teilbar ist.
Eva Kertesz, OS Kecskemet (Kl. 12),
Ungarische VR

Ma 10/12 ▪1598 a) Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei durch eine Parallele zur Basis ein Dreieck $A'B'C$ so abgeschnitten, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ zu dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC wie 1 : 64 verhält (vgl. das Bild).



Wie verhalten sich die Höhen dieser beiden Dreiecke zueinander?
b) Von einem geraden Kreiskegel K sei durch eine zur Grundfläche parallele Ebene ein Kreiskegel K' so abgeschnitten, daß sich das Volumen des Kegels K' zu dem Volumen des Kegels K wie 1 : 64 verhält.
Wie verhalten sich die Höhen der Kegel K' und K zueinander? *L.*

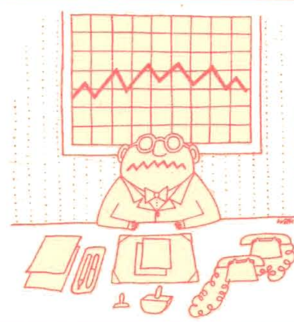
Ma 10/12 ▪1599 Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Von den folgenden 7 Bedingungen ist *genau eine* erfüllt; die anderen sind nicht erfüllt:
$x^2<\frac{1}{2}$, (1) $\quad x^4>\frac{1}{4}$, (2) $\quad x<0$ (3)
$-1\leqq x\leqq 1$, (4) $\quad x>1$, (5)
x ist eine rationale Zahl. (6)
x ist Lösung der Gleichung $x^3=a$, wobei a eine ganze Zahl ist. (7) *L.*

Ph 10/12 ▪1600 Ein Kraftwagen durchfährt eine Kurve von 150 m Krümmungsradius mit einer Geschwindigkeit von $81\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Seine Gesamtmasse beträgt 1,2 t.
a) Berechnen Sie die Zentrifugalkraft!
b) Berechnen Sie die Mindestgröße der Haftreibungszahl, damit das Fahrzeug nicht ins Rutschen gerät!
c) Welchen Winkel gegenüber der Horizontalen müßte die Straße haben, damit bei der angegebenen Geschwindigkeit die Lage des Fahrzeugs genauso stabil ist wie bei der Geradeausfahrt? *H. B.*

Ch 10/12 ▪1601 Berechnen Sie, wieviel Gramm Kaliumnitrat man theoretisch zersetzen müßte, um
a) 2,45 l, b) 3,78 l, c) 4,96 l Sauerstoff (Normzustand) herzustellen!

10 Jahre alpha-Wettbewerb

alpha-Wettbewerb 1975/76

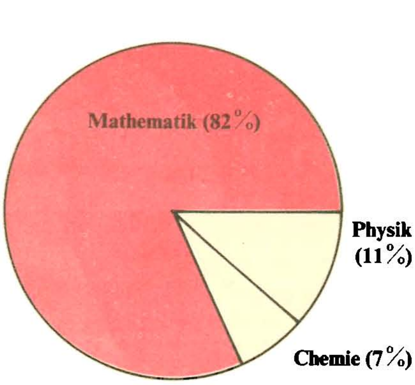


Preisträger

Bodo Heise, Görlitz; **Jürgen Gräfenstein,** Dresden; **Gunter Rothämel,** Steinbach-Hallenberg; **Ines Bauer,** Leipzig; **Guntram Türke,** Auerbach; **Uwe Würker,** Mülsen; **Jens Pönisch,** Karl-Marx-Stadt; **Annette Meurer,** Dietzhausen; **Steffen Ewald,** Frankenberg; **Matthias Kasparek, Yvonne Pforr,** beide Rotta; **Ralf Hortig,** Cottbus; **Frank Blinkrei,** Boizenburg; **Steffen Romeneik,** Dresden; **Heike Macionga,** Hammerbrücke; **Axel Schüler,** Kleinmachnow; **Thomas Brückner,** Vacha; **Carolin Engel,** Dresden; **Kerstin Zirnstein,** Pirna; **Frank Eisenhaber,** Güstrow; **Susanne Zöllner,** Halle; **Gabriele Schubert,** Zittau; **Andreas Hempler,** Rüdnitz; **J.-Uwe Sprengel, Uta Klose,** Wolgast; **Henri Kriechling,** Asbach; **Thomas Gerth,** Schmalkalden; **Jürgen Lembcke,** Dresden; **Matthias Bernstein,** Wernshausen; **Evelin Schmidt,** Kieselbach; **Petra Zachert,** Sachsendorf; **Rainer Nolte,** Dingelstädt; **Falk Holland-Nell,** Steinbach-Hallenberg; **Birgit Uhlmann,** Oberlungwitz; **Uwe Welz,** Wesenberg; **Silke Behrends,** Potsdam; **Meike Pfützenreuter,** Niederorschel; **Kerstin Schulze,** Halle; **Susanne Stadler,** Leimbach; **Ute Großkopf,** Ahlbeck; **Karsten Ihlenburg,** Kairo (AR Ägypten) (Kl. 4); **Steffen Beck,** Kuhfelde; **Kerstin Wickner,** Hermannsdorf; **Kerstin Fey, Ingeborg Rehm,** beide Unterbreizbach; **Karsten Meißner,** Forst (Kl. 2); **Peter Seifert,** Pinnau (Kl. 4)

alpha-Wettbewerb 1975/76

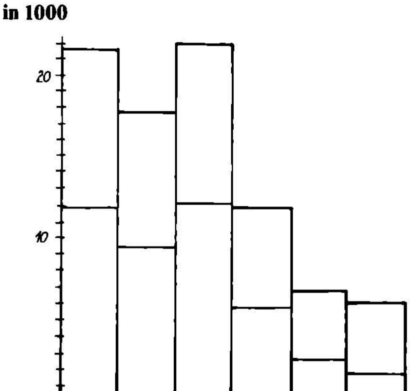
Eingesandte Lösungen: 86000



Vorbildliche Leistungen

Evelyn Heyer, Aue; Sabine Sentker, Hettstedt; Heidi Seidel, Bernsbach; Harry Höfer, Dorndorf; Gabriele Orgis, Bernsbach; Uwe Schulz, Pirna-Jessen; Heinz Roitner, Linz (Österreich); Jörg Hempelt, Radebeul; Frank Herzel, Güstrow; Burkhard Fleck, Geisa; Dirk-Thomas Orban, Erfurt; Gabriele Sprotte, Döbeln; Thomas Jez, Herzberg; Holger Nörenberg, Teltow; Frank Eiselt, Dresden; Birger Wirth, Nermsdorf; Peggy Unger, Hammerbrücke; Steffen Grützner, Burkau; Jens-Uwe Schlüßler, Cottbus, Rainer Schmidt, Vacha; Torsten Töpfer, Rotta; Uwe Zscherpel, Meerane; Andreas Schütte, Halle; Kerstin Wegner, Braunsbedra; Klaus Baumgart, Dresden; Dietmar Berthold, Crimmitschau; Uwe Maaz, Arnstadt; Reinhard Brettschneider, Falkensee; Detlef Christ, Schmalkalden; Sabine Ender, Trusetal; Delia Krech, Springstille; Andrea Schulze, Glindow; Antje Wulf, Teltow; Peter Wenzel, Zittau; Bärbel Häfner, Knut Enter, Anette Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Susanne Watterott, Andrea Milke, beide Großbodungen; Karsten Mielke, Ahlbeck; Dirk Honsu, Caputh; Fred Völz, Teltow; Silke Marquardt, Meiningen; Angela Illing, Gersdorf; Guido Bluhm, Altentreptow; Cornelia Schädlich, Floh; Egbert Tzschoppe, Horka; Dagmar Schunck, Dingelstädt; Sven Rißmann, Wesenberg; Dirk Hörschelmann, Kieselbach; Katrin Gerber, Sondershausen; Carmen Schwaab, Christine Hatzky, beide Haynrode; Kerstin Sperling, Oranienburg; Kerstin Manß, Eisenach; Simone Hennecke, Ines Linsert, beide Timmenrode; Volkmar Schütze, Tünschütz; Anke Müller, Sachsendorf; Christine Reuter, Rüdnitz; Michael Wagner, Fambach; Andreas Kraska, Breitenworbis; Sylvia Linke, Lobenstein; Jens Gollmer, Schmalkalden; Annette Rennhack, Beate Engelhaupt, beide Roßdorf; Karla Kemlein, Wernshausen; Birgit Reilinger, Goldberg; Steffen Gaßmann, Bleicherode; Andrea Knies, Klausdorf; Kerstin Ziesch, Rico Hentsche, Kathrin Merz, alle Burkau; Hartmut Lipke, Ribnitz-Damgarten; Kerstin Thämlitz, Angela Metscher, beide Stralsund; Kerstin Meister, Zschornewitz; Birgit Georgi, Karl-Marx-Stadt; Peer Forberg, Dresden; Volker Hiebsch, Bad Gottleuba; Heike Ender, Lössau; Ralf-Torsten Scheel, Ziddorf; Gerlach Pfitzenreuter, Leinefelde; Ines Linke, Menteroda; Jürgen Fenzal, Schmalkalden; Andre Kühnhardt, Oberschönau; Ina Graul, Leinefelde; Silvio Milek, Kamsdorf; Kerstin Tietze, Riesa; Almut Nehring, Rolf Brada, beide Wiehe; Torsten Zahn, Kandelin; Heike Thurley, Töplitz; Birgit Fischer, Deutschenbora; Silke Mimel, Westewitz; Marko Schmidt, Michendorf

in 1000



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn in %	44	45	44	52	61	72
Mä in %	56	55	56	48	39	28

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1975/76

P.-Neruda-OS Ahlbeck; E.-Schneller-OS Altentreptow; OS Altenweddingen; OS Alt-Töplitz; OS Asbach; AG Math. 7. OS Aschersleben; AG Math. OS I Auerswald; Os Bad Bibra; *alpha*-Zirkel OS Bad Gottleuba; EOS Ernst Thälmann, Otto-Grotewohl-Schule, Th.-Neubauer-OS, alle Bad Salzungen; AG Math. (Kl. 5) OS Bärenstein; *alpha*-Club Bergwitz; 11. OS V. Tereschkowa Bernburg; AG Jg. Math. OS Berlingerode; OS Bernterode; AG Jg. Math. J.-Gagarin-OS Blankenstein; OS Fr.-Schiller Bleicherode; F.-Weineck-OS Blumberg; OS Boddin; H.-Matern-OS Boizenburg; AG Math. (Kl. 6) OS Breddin; OS Bregenstedt; OS Breitenworbis; OS II Breitungen; M.-Poser-OS Bürgel; TOS Büttstedt; OS Burkau; H.-Grundig-OS Cossebaude; Klub Jg. Math. Cottbus; Station Jg. Naturf. Cottbus; AG Math. OS Cunersdorf; OS Dambeck; OS Deutschenbora; Oberschulkombinat Diedorf –Fischbach–Klings; OS Diesdorf; K.-Kollwitz-OS, OS Makarenko, beide Dingelstädt; AG Prakt. Math. OS Domersleben; Klub Jg. Math., 73. OS H. Rothbarth, beide Dresden; OS M. Poser Drognitz; OS Friedrich Engels Effelder; 9. OS Geschw. Scholl Eisenach; J.-Schehr-OS Eisleben; OS Ellrich; OS Fambach; OS Floh; OS Frankfurt (OT Booßen); Schiller-OS Freital; OS Friedeburg; OS V H. Günther Fürstenwalde; OS Gammelin; R.-Arnstadt-OS Geisa; E.-

Hartsch-OS Gersdorf; K.-Gräpler-OS Gnoien; OS Görlsdorf; E.-und-Ch.-Garske-OS Görsdorf; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; O.-Drews-OS Greifswald; OS Juri Gagarin Greußen; OS Großbodungen; OS Großfurra; Lessing-Schule Großpostwitz; OS Großtreben; Dr.-S.-Allende-OS Großweitzschen; OS Güsen; OS II Hainichen; Friedens-OS Halberstadt; Diesterwegschule Halle; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; Schule der DSF Heiligengrabe; OS Th. Müntzer Hermannsdorf; Goethe-OS Hohenleipisch; *alpha*-Club OS Horka; Goethe-OS Ilsenburg; OS Immelborn; OS Kaltennordheim; OS A. Becker Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS Kandelin; K.-Liebknecht-OS, OS Rottluff, P.-Tschaikowski-OS, alle Karl-Marx-Stadt; Th.-Neubauer-OS Kieselbach; E.-Schneller-OS Kirchberg; OS Kirchworbis; OS Kitzen; B.-Tesch-OS Klausdorf; EOS Kleinmachnow; Station Jg. Naturf. Köthen; OS Küllstedt; Klub Jg. Math. OS Kuhfelde; Schulkomb. Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS Leimbach; Dr.-Salvador-Allende-OS, Karl-Liebknecht-OS, beide Leinefelde; 29. OS Leipzig; OS Lichte; OS Lichtenhain; OS Liebstadt; Diesterweg-OS Lobenstein; OS W. Wallstab Löderburg; *alpha*-Club OS Lössau; OS Lüderitz; R.-Baumsch-OS Meiningen; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS Naundorf; TOS Neuenhofe; OS Neukloster; Dr.-Th.-Neubauer-OS Niederorschel; OS Nordhausen-Niedersalze; Pestalozzischule Oberlungwitz; OS E. Weinert Oberschönau; OS Olbersdorf; Comeniusschule Oranienburg; E.-Vogel-OS Oschatz; OS Osternienburg; OS Otto Grotewohl Pappenheim; AG Math. Goethe-OS Parchim; AG Math. EOS R. Fetscher Pirna; Schule 16 Potsdam; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; AG Jg. Math. OS Raguhn; Cl.-Zetkin-OS Raschau; OS Geschw. Scholl Rathenow; EOS Goethe Reichenbach; Juri-Gagarin-OS Ribnitz-Damg.; OS Röbel; OS Rossdorf; Haus der JP Rostock; *alpha*-Club OS Rotta; OS Rüdnitz; OS M. Kirchner Rudolstadt; OS Sachsendorf; Wilhelm-Pieck-OS Sangerhausen; OS Schernberg; OS Schlatkow; EOS, J.-G.-Seume-OS, Karl-Marx-OS, OS H. Danz, alle Schmalkalden; J.-R.-Becher-OS Schneeberg; OS Schweina; Schule d. DSF Schorssow; F.-Reuter-OS Siedenbollentin; OS A. Saefkow, AG Math. OS Geschw. Scholl, beide Sondershausen; OS Springstille; EOS Staßfurt; OS E.-Thälmann Steinbach-Hallenberg; Haus d. JP, Klub Jg. Math., W.-Heinze-OS, beide Stralsund; OS Struth-Helmersdorf; OS Sünna; H.-Rieke-Schule Tangerhütte; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner Teterow; *alpha*-Club OS Timmenrode; *alpha*-Zirkel OS Treben; OS Tripkau; OS Wilhelm Pieck Trusetal; H.-Beimler-OS Unterbreizbach; OS J. G. Seume Vacha; OS Vitte; OS Viernau; EOS J. Fučik Waldheim; OS Wedendorf; OS Wernshausen; J.-Haerder-OS Wesenberg; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; OS Wingerode; OS Wörmlitz; OS VI Wolgast; EOS Worbis; Spezialistenlager Math. d. Kreises Worbis; OS Wredenhagen; H.-Eisler-OS Wusterhusen; Geschw.-Scholl-OS Zaatzke; Pestalozzi-OS Zeithain; Lutherschule Zella-Mehlis; 5. OS, EOS, Pestalozzi-OS, alle Zittau; Goethe-OS Zossen; OS Zschornewitz; Elke Specht, OS Mittelstille

Preisträger

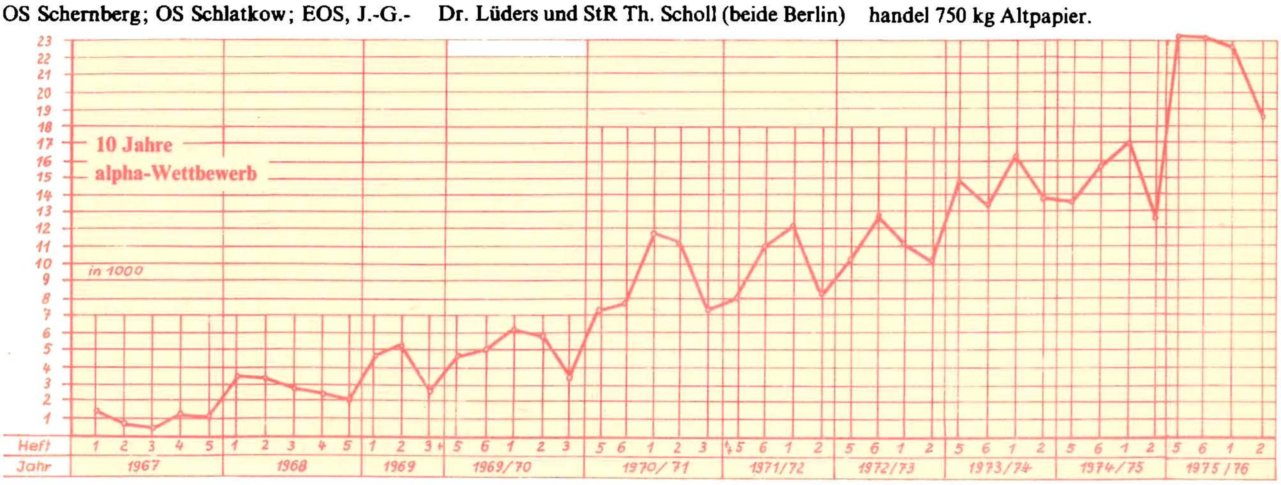
Chemie-Wettbewerb (Heft 4/76)
Annegret Kirsten, Ernst-Haeckel-Schule, Merseburg; Thomas Köhler, EOS Erich Weinert, Flöha; Michael Reissig, Halle; Ulf Krabisch, Leipzig; Michael Weicker, Mügeln

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2500,– M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Uraniaverlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig.

Wußtest du schon?

- Im Schuljahr 1975/76 gingen 86000 Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb ein (davon 1600 von unseren 2000 ausländischen Lesern).
- 5600 Lösungen erhielten das Prädikat „falsch gelöst".
- Alle Lösungsblätter, ausgebreitet, ergeben eine Fläche von 7500 m² (dreiviertel Hektar), aneinandergereiht ein Band von 30 km Länge.
- Die 90000 bereitgestellten Antwortkarten wiegen rund 320 kg, ihr Satz und Druck kostet 2200 M, ein Abzeichen 0,48 M, eine Urkunde 0,05 M.
- Für den Versand der Antwortkarten, Urkunden und Preise wurden der Post 4500 M überwiesen.
- 75 Prozent aller veröffentlichten Aufgaben stammen aus der Feder unserer Leser. OStR Dr. Lüders und StR Th. Scholl (beide Berlin) sichteten, bearbeiteten und ordneten die Aufgaben den Klassenstufen zu, steuerten selbst welche bei. OStR G. Schulze, Herzberg (Kl. 8 bis 10/12) und StR J. Lehmann, Leipzig (Kl. 5 bis 7) korrigierten die Lösungen.
- Die schönsten Briefmarken von den rund 20000 Briefen, die 1975/76 eingingen, wurden von Philatelisten abgelöst, in kleine Tüten verpackt und im Rahmen von Solidaritätsbasaren verkauft.
- Zum Öffnen und Sortieren der pro Heft eingehenden rund 21000 Lösungen sind rund 40 Arbeitsstunden nötig. Fleißige Helfer der Redaktionssekretärin waren Schüler des *alpha*-Clubs der 29. OS. Sie verkürzten die Zeit für den Beginn der Korrektur.
- Die Redaktion *alpha* übergab dem Altstoffhandel 750 kg Altpapier.



ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Aus der Arbeit der AG Mathematik der Oberschule I Königs Wusterhausen

Die AG Mathematik besteht seit über zehn Jahren. 5 bis 6 Schüler der Klassenstufe 5 bis 8 arbeiten in diesem Jahr in jeweils einer Gruppe nach einem gesonderten Wochenplan bzw. Wochenprogramm. Die Aufgaben und Themen werden zum überwiegenden Teil der Zeitschrift *alpha* entnommen. Wir verfügen über ein lückenloses Archiv der *alpha* von der Erstausgabe des Jahres 1967 bis zum letzten Heft des Jahres 1976.
Bei Diskussionen über die verschiedenen Lösungsvarianten versuchen die Schüler unter Anleitung des AG-Leiters, nach Zusammenhängen zu anderen Stoffgebieten zu suchen. Dabei bietet sich oft die Möglichkeit, selbständig neue Aufgaben in einer anderen Variante zu entwickeln. Zur Zeit arbeiten die beiden Gruppen aus der 5. und 7. Klasse an einer Zusammenstellung von Aufgaben dieser Art, die sie als *Messeexponat* auf der *MMM* der Schule ausstellen werden.
1972 wurden die Mitglieder der AG für ihr Messeexponat auf der Bezirksmesse in Potsdam mit einer Urkunde und einer Geldprämie ausgezeichnet. Die AG gestaltete mit diesem Geld den ersten Fachunterrichtsraum für Mathematik an unserer Schule. Vieles wurde selbst gebaut.

G. Stolz

An einem Beispiel möchten wir zeigen, wie wir versuchen, die in der *alpha* veröffentlichten Aufgaben nicht nur zu lösen, sondern dabei auch Zusammenhänge zu anderen Stoffgebieten zu erkennen. Dabei ergeben sich weiterführende Untersuchungen, die uns als Ergebnis neue Erkenntnisse bringen.

W6 ▪1050 *Eine sechsstellige natürliche Zahl z_1 beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten wieder an, so erhält man eine sechsstellige Zahl z_2, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Wie heißen die beiden Zahlen?*

Lösung:
$$\begin{aligned} 3(100000+x) &= 10x+1 \\ 300000+3x &= 10x+1 \\ 7x &= 299999 \\ x &= 42857 \end{aligned}$$

Die Zahl z_1 lautet somit 142857 und die Zahl z_2 lautet 428571, und es gilt
$3 \cdot 142857 = 428571$.
Die Ziffernfolge von x ergibt einen Teil der Periode des Bruches von $\frac{1}{7}$.

$\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$ $\frac{4}{7}=0,\overline{571428}$
$\frac{2}{7}=0,\overline{285714}$ $\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$
$\frac{3}{7}=0,\overline{428571}$ $\frac{6}{7}=0,\overline{857142}$

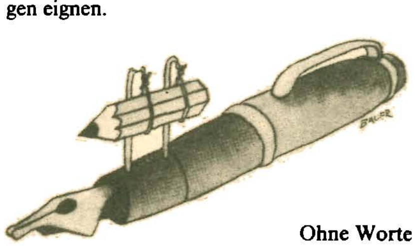
Beim genauen Betrachten der Perioden der echten Brüche mit dem Nenner 7 läßt sich folgende Aufgabe entwickeln:
Eine sechsstellige Zahl z_1 beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 2. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten wieder an, so erhält man eine sechsstellige Zahl z_2, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung:
$$\begin{aligned} 3(200000+x) &= 10x+2 \\ 7x &= 599998 \\ x &= 85714 \end{aligned}$$

Die Zahl z_1 lautet somit 285714 und die Zahl z_2 lautet 857142, und es gilt
$3 \cdot 285714 = 857142$.
Die Gleichungen für die anderen Perioden der echten Brüche mit dem Nenner 7 lauten:
$$\begin{aligned} 400000+x &= (10x+4)\,1{,}5 \\ 1{,}25(500000+x) &= 10x+5 \\ 700000+x &= (10x+7)\,5 \\ 800000+x &= (10x+8)\,1{,}5 \end{aligned}$$
Versucht, zu jeder dieser Gleichungen selbst einen Aufgabentext zu verfassen! Löst die Gleichungen, und kontrolliert die Ergebnisse!
Wenn man nun die Perioden der echten Brüche mit dem Nenner 13 betrachtet, müßte es euch nicht schwerfallen, selbst die entsprechenden Gleichungen zu finden.

$\frac{1}{13}=0,\overline{076923}$ $\frac{7}{13}=0,\overline{538461}$
$\frac{2}{13}=0,\overline{153846}$ $\frac{8}{13}=0,\overline{615384}$
$\frac{3}{13}=0,\overline{230769}$ $\frac{9}{13}=0,\overline{692307}$
$\frac{4}{13}=0,\overline{307692}$ $\frac{10}{13}=0,\overline{769230}$
$\frac{5}{13}=0,\overline{384615}$ $\frac{11}{13}=0,\overline{846153}$
$\frac{6}{13}=0,\overline{461538}$ $\frac{12}{13}=0,\overline{923076}$

(Lösung siehe Seite 142.)
Wir verraten kein Geheimnis, wenn wir euch sagen, daß es noch weitere Perioden von echten Brüchen gibt (z. B. mit dem Nenner 21), die sich für eure selbständigen Untersuchungen eignen.



Ohne Worte

Ein Gespräch in der Straßenbahn

Speziell für Klasse 5/6

Mit meinem Enkel *Mischa* stieg ich in Leningrad in die Straßenbahn ein. Ich warf 6 Kopeken in die Zahlbox und riß zwei Fahrscheine ab. „Gib mir den zweiten!" forderte *Mischa*. „Bitte, nimm dir den, der dir besser gefällt. Aber sie sind doch völlig gleich, mit jedem von ihnen kann man die gesamte Strecke fahren." „Das stimmt, aber ganz gleich sind sie dennoch nicht. Das hier ist ein ganz gewöhnlicher Fahrschein mit der Nummer 286357. Der nächste aber ist ein *glücklicher* – die Summe der ersten drei Ziffern ist gleich der Summe der letzten drei: 286358."
Da erinnerte ich mich, daß wirklich oft gesagt wird, ein Fahrschein mit gleichen Ziffernsummen bringe Glück. „Hast du oft solche *glücklichen* Fahrscheine?" fragte ich. „Aber nein, sehr selten. Etwa einmal im Monat. Ich fahre täglich ins Institut und zurück, mit Ausnahme der freien Tage natürlich, und so kommt also im Mittel ein *glücklicher* auf 50 gewöhnliche Fahrscheine." „Unsinn", mischte sich ein Fahrgast ein, „ich bin an der vorletzten Haltestelle zugestiegen, und habe aus derselben Box auch einen *glücklichen* Fahrschein gezogen – Nummer 286349. Ja, und jetzt müßte gerade jemand die Nummer 286367 ziehen und bald kommt 286376, danach 286385, alles *glückliche* Nummern. Also gibt es unter 10 Fahrscheinen mindestens einen *glücklichen*." „Das stimmt nicht ganz", widersprach der Besitzer des *glücklichen* Fahrscheins Nummer 286367. „Ihr Beispiel beweist noch gar nichts. Von Nummer 286394 bis 286439 gibt es keinen *glücklichen* Fahrschein, zwischen zwei *glücklichen* also ein Intervall von 45 Fahrscheinen. Solche Beispiele gibt es noch mehrere. In unserer Fahrscheinrolle, deren Anfangsziffern 286 sind, liegt zwischen den *glücklichen* Fahrscheinen 286097 und 286169 ein Intervall von 71 *normalen* Fahrscheinen. „Sag ich doch", freute sich *Mischa*, „ein *glücklicher* Fahrschein kommt im Mittel auf fünfzig normale." „Das ist auch eine wacklige Hypothese", bemerkte ich. „Um die Frage richtig zu beantworten, müßte man sie erst einmal sorgfältig untersuchen. Vor allem ist sie richtig zu formulieren. Sagen wir, so: ,Wieviel *glückliche* sechsstellige Zahlen, d. h. Zahlen, für die die Summe der ersten drei Ziffern

gleich der Summe der letzten drei ist, gibt es zwischen 000000 und 999999?" „Nun ja", sagte Mischa nach kurzem Überlegen, „genau kann ich jetzt nicht antworten, aber ich kann eine Lösungsmöglichkeit angeben. Wir schreiben alle Zahlen von 000000 bis 999999 der Reihe nach auf und prüfen jede von ihnen. So finden wir die Anzahl der *glücklichen* unter ihnen." „So eine Methode ist möglich. Damit kann man Aufgaben lösen, die Eigenschaften einer endlichen Anzahl von Zahlen oder anderer Objekte zum Inhalt haben. Allerdings hat diese Methode zwei Unzulänglichkeiten:

Erstens ist sie sehr aufwendig. Sieh selbst, man hat eine Million Zahlen zu überprüfen! Wenn du für die Kontrolle jeder Zahl eine Sekunde rechnest, so gibt das 1000000 Sekunden oder fast 278 Stunden. Das wären bei acht Stunden Arbeit täglich 35 Tage."

„Aber das kann doch eine elektronische Rechenanlage tun?" „Natürlich, aber lohnt es sich wirklich, mit der Kanone auf Spatzen zu schießen? Außerdem hat diese Methode eine zweite Schwäche, welche auch eine Rechenmaschine nicht beseitigt. Du löst jedesmal nur eine konkrete Aufgabe, kannst also meist nicht verallgemeinern oder Gesetzmäßigkeiten finden. Darum ist diese Methode mathematisch uninteressant." „Erlauben Sie mir, mich nochmals einzumischen", sagte da der Besitzer des *glücklichen* Fahrscheins Nummer 286367, „ihre Aufgabe interessiert mich, und ich habe bereits eine Lösung. Nicht die genaue Lösung, das gebe ich zu, eher das, was wir Mathematiker Näherungslösung nennen. Ach, ich vergaß, mich vorzustellen: *Georgi Wladimirowitsch*, ich bin Dozent am Lehrstuhl für Mathematik einer technischen Hochschule.

Also, junger Mann", wandte er sich an *Mischa*, „führen wir erst einmal eine neue Definition ein. Unter einem *hübschen* Fahrschein wollen wir einen Fahrschein verstehen, dessen Summe der ersten drei Ziffern den gleichen Rest bei Teilung durch 9 gibt, wie die Summe der letzten drei. Klar?" „Klar!", antwortete *Mischa*, „aber warum durch 9?"

„Weil in unserem Dezimalsystem jede Zahl bei Division durch 9 den gleichen Rest hat wie die Summe ihrer Ziffern. Diese Eigenschaft ermöglicht es uns, die Zahl der *hübschen* Fahrscheine relativ leicht zu finden: Unter den Zahlen von 1 bis 999 gibt es genau 111, die bei Division durch 9 den Rest 1 lassen, ebensoviele für den Rest 2 und so weiter. Wieviel verschiedene *hübsche* Zahlen mit dem Rest 1 gibt es nun aber? Für die erste Dreiergruppe gibt es 111 Möglichkeiten, für die zweite nochmals 111. Es gibt demnach $111 \cdot 111 = 12321$ *hübsche* Fahrscheine mit dem Rest 1. Ebensoviele Fahrscheine gibt es mit dem Rest 2, 3 usw. Zu den Zahlen mit dem Rest 0, oder, wie wir sagen, die sich ohne Rest teilen, muß noch 000 hinzugefügt werden, so daß sich hier $112 \cdot 112 = 12544$ Möglichkeiten ergeben. Insgesamt erhalten wir somit $8 \cdot 12321 + 12544 = 111112$ *hübsche* Fahrscheine." „Nun ja, aber die Anzahl der *glücklichen*, die ist doch anders?" „Es ist doch so: Wenn die Ziffernsumme gleich sind, so sind auch die Reste bei Division durch 9 gleich.

Folglich ist jeder *glückliche* Fahrschein gleichzeitig auch ein *hübscher*. Allerdings ist nicht jeder *hübsche* Fahrschein auch ein *glücklicher*. Der Fahrschein 100748 ist zum Beispiel *hübsch*, aber nicht *glücklich*. Wenn wir die Anzahl der *glücklichen* Fahrscheine mit C bezeichnen, gilt also die Ungleichung $C < 111112$." „Aber damit ist doch die Aufgabe noch nicht vollständig gelöst", sagte *Mischa*, „wir erfahren, daß die Zahl der *glücklichen* Fahrscheine kleiner als 111112 ist, aber nicht, um wieviel. Kann man vielleicht zeigen, daß C größer als irgendeine Zahl ist? Ich hörte, man nennt das *Näherung von unten*." „Das geht auch", antwortete *Georgi Wladimirowitsch*, „ich fürchte nur, sie wird ziemlich grob. Nennen wir *schöne* Fahrscheine alle die, deren Nummer aus zwei völlig gleichen Hälften besteht, zum Beispiel 287287. Fahrscheine dieser Art gibt es genau 1000, und zwar 000000, 001001, 002002 usw. bis 999999. *Schöne* Fahrscheine gibt es weniger als glückliche, also gilt $1000 < C < 111112$. Hierbei ist die Näherung von oben das mehr als Hundertfache der Näherung von unten. So eine Abschätzung kann man schwerlich als befriedigendes Resultat der Aufgabe ansehen." „Ich glaube, die Näherung von oben kann etwas verfeinert werden", sagte ich darauf, „wenn man die Teilbarkeit durch 11 benutzt." „Gibt es da eine Teilbarkeitsregel?" fragte *Mischa*, „wir haben keine in der Schule kennengelernt."

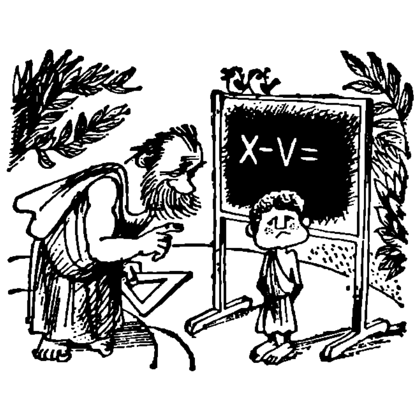
„Die Regel ist sehr einfach: Wir addieren alle Ziffern auf ungeraden Positionen (Einer, Hunderter, ...). Danach addieren wir alle Ziffern auf geraden Positionen. Wenn die Differenz dieser Summen sich durch 11 teilt, teilt sich die Zahl durch 11 und umgekehrt, alle durch 11 teilbaren Zahlen weisen diese Eigenschaft auf."

„Was hat denn das mit unseren *glücklichen* Fahrscheinen zu tun?" fragte verwundert *Mischa*. „Wirst du gleich hören. Aber sag mal, weißt du, daß in Moskau andere Fahrscheine als *glückliche* bezeichnet werden, als bei uns in Leningrad?" „Ja, die Moskauer *glücklichen* Fahrscheine haben gleiche Ziffernsummen auf geraden und ungeraden Positionen." „Siehst du, und da ist es leicht zu zeigen, daß die Nummern der *glücklichen* Fahrscheine der Moskauer sich durch 11 teilen." „Stimmt", sagte Mischa. „Und solche Fahrscheine gibt es nicht mehr als durch 11 teilbare Zahlen von 0 bis 999999." „Also nicht mehr als 90910!" rief verwundert *Georgi Wladimirowitsch*. „Gibt es eigentlich mehr *glückliche* oder mehr *glückliche Moskauer Art* unter unseren Fahrscheinen?" fragte *Mischa*. „Na, das ist nicht schwer festzustellen. Ihre Anzahl ist gleich." „Wie denn das?" wunderte sich *Mischa*, „wir kennen ja weder die Anzahl der einen, noch der anderen." „Muß man denn die Anzahl genau kennen?", gab *Georgi Wladimirowitsch* zu bedenken, „setz die ersten drei Ziffern eines *glücklichen* Fahrscheins auf die geraden Positionen, die letzten drei auf die ungeraden, und du erhältst einen *Moskauer glücklichen* Fahrschein. Umgekehrt erhält man aus einem *Moskauer glücklichen* einen *glücklichen* Fahrschein, wenn man die Ziffern auf geraden Positionen in der ersten Hälfte der Zahl versammelt und die auf ungeraden in der zweiten. Wir haben also eine umkehrbar eindeutige Verbindung oder, wie wir sagen, eine eineindeutige Abbildung zwischen beiden Fahrscheinarten festgestellt. Daraus folgt, daß ihre Anzahl gleich ist. Stimmt das?" „Stimmt!" rief *Mischa*, „wir wissen also, daß es weniger als 90910 *glückliche* Fahrscheine gibt!"

„Wie wird denn die Ziffernsumme, wenn man im *glücklichen* Fahrschein die drei letzten Ziffern durch die Differenz von 9 und diesen Ziffern ersetzt?" fragte *Georgi Wladimirowitsch*. „Moment", bat *Mischa*, „soo, ... dreimal drei – siebenundzwanzig ... minus ... plus ... 27! Und wieder eine eineindeutige Abbildung! *Georgi Wladimirowitsch*, die Zahl der *glücklichen* Fahrscheine ist gleich der Anzahl der Fahrscheine mit der Ziffernsumme 27!"

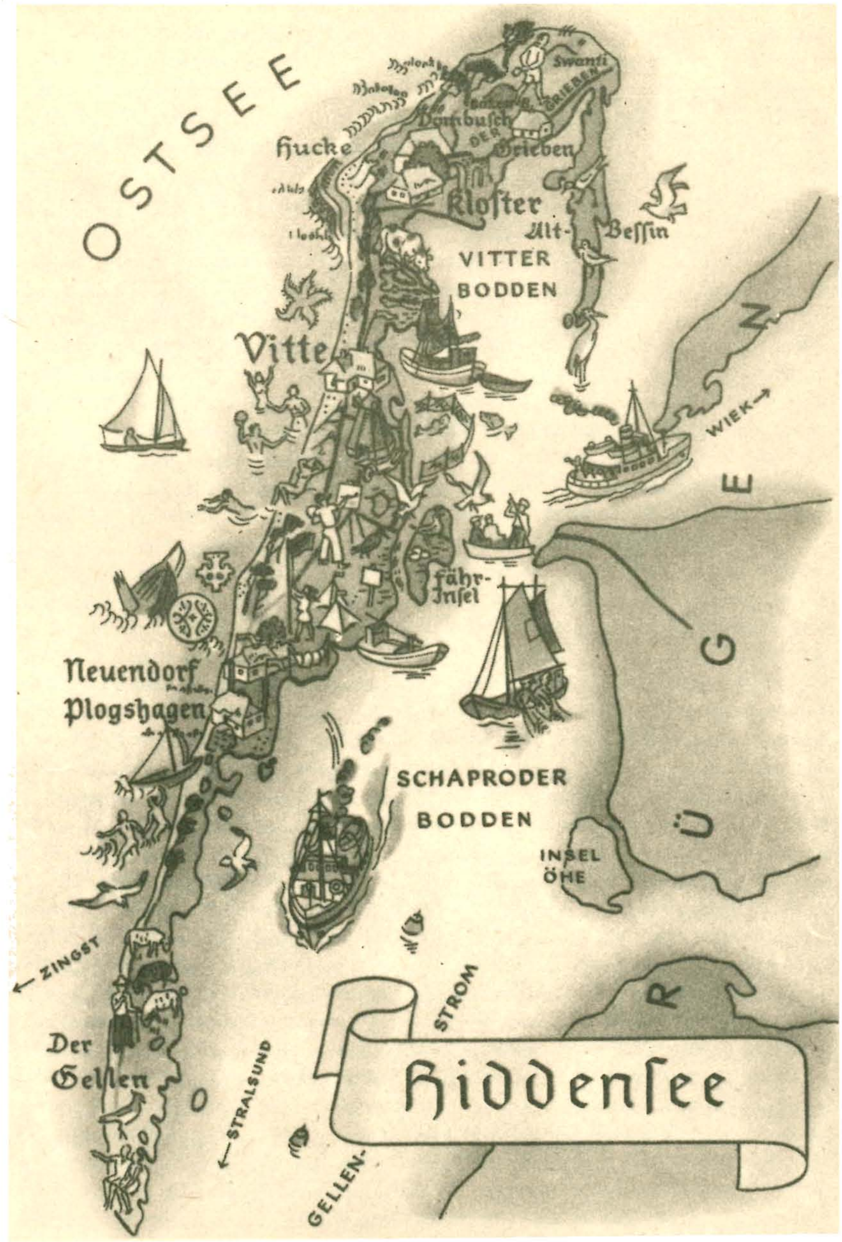
„Richtig!" antwortete er. „Aber wieviele *glückliche* Fahrscheine gibt es denn nun wirklich?" wandte sich *Mischa* an mich. „Nun die Antwort lautet 55252, also etwa jeder achtzehnte Fahrschein. Wie man darauf kommt? Nun ... verabschiede dich von *Georgi Wladimirowitsch*, wir müssen aussteigen!"

A. P. Sawin, L. M. Fink
aus: Quant 7/1975



„Was schweigst du, Demosthenes? Hast du Kaugummi im Mund?" – „Nein, Steine!"

Hiddenseer Mathe-Skizzen



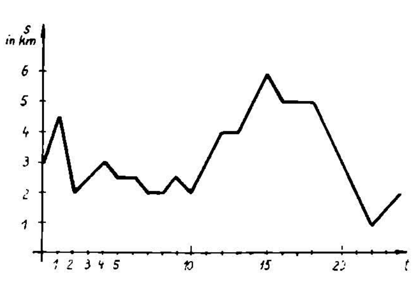
Aufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis

▲1▲ Das Heimatmuseum auf Hiddensee ist vom 1. Juni bis 30. September 1976 täglich geöffnet. Man erwartet in den einzelnen Monaten täglich die folgenden Besucherzahlen:
1. 6. bis 30. 6. täglich 500 Besucher,
1. 7. bis 31. 7. täglich 850 Besucher,
1. 8. bis 31. 8. täglich 900 Besucher,
1. 9. bis 30. 9. täglich 350 Besucher.
Der Eintritt pro Person kostet 0,50 M. Ein Viertel der Besucher sind Rentner, Schüler und Studenten, die nur die Hälfte des Eintrittspreises zahlen.
Wieviel Besucher werden durchschnittlich an jedem Tag der Saison erwartet?
Mit welcher Gesamteinnahme rechnet die Museumsleitung?

Maria Rosenow, Klasse 6

▲2▲ Das Nebelhorn der *Station Dornbusch* wird automatisch von einem elektrischen Sichtmesser ein- und ausgeschaltet. Der Sichtmesser prüft jede 20 s die Sicht. Ist diese unter 3,5 km, so schaltet sich automatisch das Nebelhorn ein. Bessert sich die Sicht, wird es auch wieder automatisch abgeschaltet. Das Nebelhorn hat eine Nachlaufzeit von 20 min. An einem kühlen Oktobertag legte der Sichtmesser das folgende Diagramm dar. Berechne nach dem Diagramm die Betriebszeit des Nebelsignals!

Jörg Hoerenz, Klasse 6



▲3▲ An Tagesausflüglern kommen täglich von Stralsund etwa 600 Personen, von Schaprode etwa 450 Personen, von Lietzow etwa 100 Personen und von Zingst etwa 180 Personen nach Hiddensee.
Wieviel Personen sind es täglich insgesamt? Und wieviel Tagesausflügler werden es im Sommer bei 150 Tagen insgesamt und wieviel aus jedem Ort sein? *Sylvia Krüger, Klasse 6*

▲4▲ Feriengäste auf Hiddensee:

1900 – 320	1954 – 18674
1902 – 500	1960 – 24000
1935 – 8500	1970 – 31300
1947 – 46	1974 – 33252
1951 – 8500	

Stelle diese Entwicklung in Streifendiagrammen dar!

▲5▲ In der Arbeitsgemeinschaft *Mathematik* der OS Vitte sind 10 Schüler der 6. und 7. Klasse. Die Anzahl der Mädchen ist größer als $\frac{1}{3}$ der Anzahl der Jungen und kleiner als die Hälfte der Anzahl der Jungen.
Wieviel Jungen und Mädchen arbeiten in der Arbeitsgemeinschaft mit?

▲6▲ Die neue Straße zwischen Vitte und Neuendorf ist 5,5 km lang, 2 m breit und 22 cm dick.
Wieviel Kubikmeter Beton wurden zu ihrer Herstellung verbraucht?

▲7▲ 1974 beringten in der DDR 319 Mitarbeiter 134900 Vögel. Auf Hiddensee arbeiten fünf Beringer, die 1974 8400 Vögel beringten.
Vergleiche die durchschnittlichen Leistungen!
Die durchschnittliche Wiederfundrate beträgt 2,5%. Errechne die Anzahl der Vögel!

▲8▲ Ein Stellnetz zum Fangen der Vögel besteht aus quadratischen Maschen von 22 mm Seitenlänge.
Aus wieviel Maschen besteht ein Netz, das 6 m lang und 2 m hoch ist?

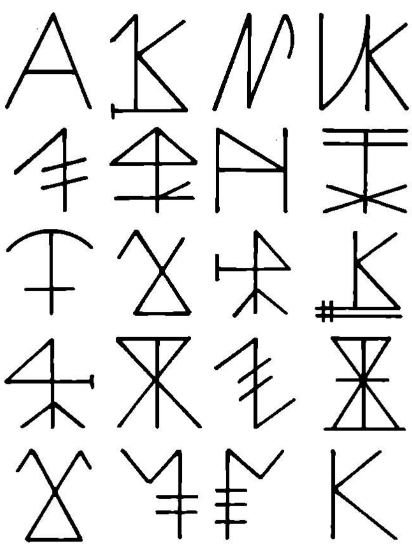
▲9▲ Eine Fischkiste hat folgende Maße: Länge 85 cm, Breite 50 cm, Höhe 29 cm. Sie ist oben offen.
Wieviel m^2 Holz werden für eine Kiste benötigt?

▲10▲ Die FPG verarbeitete 1975 67 t Hering zu Salzhering.
Wieviel Kilogramm Salzhering konnten verkauft werden, wenn die Salzzugabe 20% beträgt und man mit einem Masseverlust von 12% des Rohfisches rechnen muß?

▲11▲ Eine Kolonie Seeschwalben besteht aus 25 Paaren.
Mit wieviel Nachwuchs ist zu rechnen, wenn man bei jedem Paar mit drei Eiern rechnet und einen Verlust von $\frac{1}{5}$ der Eier durch den Fuchs einkalkuliert?

▲12▲ Der Präparator der Vogelwarte Hiddensee stellt für die Sammlung Standpräparate und Vogelbälge her. Für ein Standpräparat benötigt er 3 Stunden und für einen Balg 35 Minuten.
In einer Woche stellt er 16 Präparate her und brauchte dafür eine Arbeitszeit von 19 Stunden. Wieviel Standpräparate und wieviel Bälge waren es?

▲13▲ Ein Rotkehlchen wurde innerhalb der Aktion „Baltic“ am 18. 9. 74 auf Hiddensee beringt und am 13. 11. 74 in Algerien gefangen.
Wieviel Kilometer legte das Rotkehlchen durchschnittlich pro Tag zurück, wenn die Entfernung rund 2000 km beträgt?



AG „Mathematik“ in Vitte/Hiddensee

Die AG *Mathematik* der OS Vitte besteht seit drei Jahren. Ursprünglich waren es fünf Mitglieder, und inzwischen hat sich ihre Anzahl auf 10 erhöht.
Der größte Erfolg der Arbeitsgemeinschaft war der zweite Platz eines Mitgliedes bei der Kreisolympiade der Klasse 6 im Jahre 1974. Dieser Schüler ist seitdem Mitglied des Kreisclubs.
Die Mitglieder beteiligen sich am *alpha*-Wettbewerb, vier Schüler errangen 1974 das „alpha-Abzeichen“, fünf Schüler 1975. Im letzten Jahr nahmen fünf Schüler an der Kreisolympiade teil, und zwei fuhren zum Spezialistenlager.

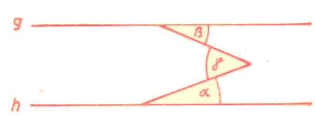
9. Mathematik-Leistungsvergleich Greifswald–Rügen–Stralsund (30. Mai 1976 in Vitte/Hiddensee)

Mit dem Schiff waren 80 *Junge Mathematiker* der Klassenstufen 7 und 8 nach Hiddensee gekommen, um in einer zweistündigen Klausur ihre Kräfte zu messen, ein Stück der Insel Hiddensee kennenzulernen und einen Vortrag über die *XVII. Internationale Mathematikolympiade* vom Chefredakteur der *alpha* zu hören. Gastgeber des 10. Leistungsvergleichs ist Greifswald (Frühjahr 1977).

Aufgaben: Klassenstufe 7

1. Bezogen auf seine Masse enthält Meerwasser 5% Salz.
Mit wieviel Kilogramm Süßwasser muß man 80 kg Meerwasser mischen, damit der Salzgehalt der Mischung 2% beträgt?

2. Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$).
Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ?
Beweise deine Behauptung!



3. Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
a) Wieviel Schnitte muß man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein!)
b) Wieviel Würfel erhält man?

Klassenstufe 8

1. Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

2. Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende drei Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr ist, die beiden anderen sind falsch:
1. Anna hat den Ball
2. Brigitte hat den Ball nicht
3. Claudia hat die Schere nicht.
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

3. Von dem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gegeben:
$\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 4{,}5$ cm, $\overline{DA} = 3$ cm.
Konstruiere das Trapez, und begründe deine Entscheidung!

alpha-Wandzeitung

Das sind sie, die beiden Mathematiklehrer der OS Vitte, das Ehepaar Jeschek. (Frau Jeschek ist AG-Leiterin Mathe.) Sie trugen mit ihren Schülern die Aufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis zusammen.

Würfeleien

Jeder von Euch kennt einen Spielwürfel: ein Würfel, auf dessen Seitenflächen ein bis sechs Punkte aufgemalt wurden.

In verschiedenen Ländern sind Würfelspiele schon von jeher verbreitet. Gewürfelt haben d'Artagnan und Hodscha Nasreddin, byzantinische Kaufleute und die Goldgräber von Nevada, erlauchte Grafen und gewöhnliche Seeräuber. Vor allem wurde mit zwei Würfeln gespielt: jeder der Partner warf seinen Spielwürfel auf den Tisch oder ein spezielles Würfelbrett; gewonnen hatte derjenige, bei dem sich die Summe der Augen als größer erwies.

Beim Würfeln verlor man nicht selten sein ganzes Vermögen. Das Spiel zog deshalb gewöhnlich viele Fanatiker an, die mitunter nicht weniger mitgerissen wurden als die Spieler selbst.

Vor mehr als 20 Jahren bemerkte ich in einem Park zwei Jungen, die allen Interessenten anboten, mit ihnen zu würfeln. Als Spielregel gaben sie aber etwas Ungewöhnliches an:

„Jeder kann 100 Rubel gewinnen! Bezahle einen Zehner und Du gewinnst einen Hunderter!", rief der eine und warf drei Würfel hoch.

Der zweite erklärte die Spielregel: „Wer zu spielen wünscht, zahlt zehn Rubel, wirft die drei Würfel und liest ab, wieviel Augen er hat. Gewonnen wird nach Tabelle, von 15 Rubel bis 100 Rubel." Der Junge zeigte auf eine große Tabelle auf einer Sperrholzplatte.

3 Punkte gewinnen 100 Rubel
4 Punkte gewinnen 50 Rubel,
5 Punkte gewinnen 25 Rubel
6 Punkte gewinnen 20 Rubel
7 Punkte gewinnen 15 Rubel
8, 9, 10, 11, 12, 13 Punkte gewinnen nichts
14 Punkte gewinnen 15 Rubel
15 Punkte gewinnen 20 Rubel
16 Punkte gewinnen 25 Rubel
17 Punkte gewinnen 50 Rubel
18 Punkte gewinnen 100 Rubel.

Ein Zehner entsprach in der damaligen Zeit einem heutigen Rubel (≙ 3,20 M). Die Zahl derer, die eine solche Summe riskierten, war nicht gering. Aber vor meinen Augen gingen die Beteiligten mit bitterer Miene einer nach dem anderen davon und hinterließen auf dem Würfelbrett 10 Rubel. Es fand sich auch eine große Zahl Fanatiker ein, die nicht mit guten Ratschlägen sparten.

Einige Leute, die 7 oder 14 Augen warfen, gewannen 5 Rubel über ihren Einsatz; einzelne warfen 6, 15 oder 16 Augen; nur ein einziger gewann 50 Rubel. Dabei hatten schon mehr als vierzig Leute ihre Zehner eingesetzt.

Die Verlierer schauten mürrisch drein, sie überprüften mißtrauisch die Würfel, doch diese hatten eine streng kubische Form und waren völlig homogen, mit einem Wort – sie waren nicht präpariert.

Nach etwa einer halben Stunde hatten die Jungen an die zweihundert Rubel „gewonnen". Sie trollten sich die Allee entlang und man hörte die Rufe: „Jeder kann 100 Rubel gewinnen! Bezahle einen Zehner und Du gewinnst einen Hunderter!"

Das Geheimnis des Gewinns in diesem Spiel ist denkbar einfach. Wenn wir einen Würfel werfen, können wir 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen bekommen, d. h., wir haben 6 verschiedene Möglichkeiten (6 Varianten). Wenn der Würfel eine kubische Form hat und aus einem homogenen Material besteht, sind alle 6 Varianten gleichmöglich („gleichwahrscheinlich") und bei einer Vielzahl Würfe wird jede Augenzahl ungefähr gleich oft fallen.

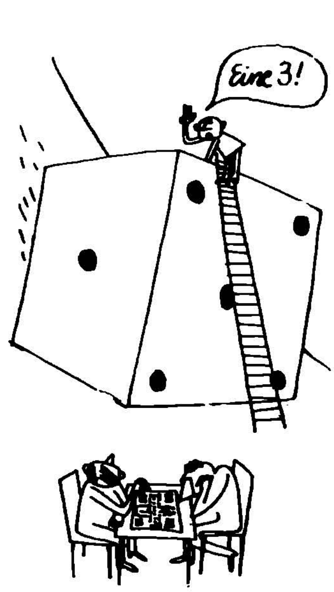
Werfen wir den Würfel zweimal (oder zwei Würfel gleichzeitig), ergeben sich 36 verschiedene mögliche Varianten:

$1+1$;
$1+2$;
$1+3$;

.

$6+5$;
$6+6$.

Dabei tritt die Summe 2 nur einmal auf; 4 Augen ergeben sich dreimal, aber 7 Augen schon in 6 Varianten. Damit sind unterschiedliche Summen *nicht gleichwahrscheinlich:* die Summe von 4 Augen kommt *im Durchschnitt* doppelt so oft vor, wie die von 2 Augen, aber die Summe von 7 Augen tritt 6mal so oft auf, wie die Summe von 12 Augen. Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, wenn er viele Male (nicht weniger als 100mal) gleichzeitig 2 Würfel wirft und exakt mitschreibt, wie oft jede Summe von Augen gefallen ist.



Es ist nicht schwer zu errechnen, daß sich, wenn man 3 Würfel wirft, 216 (oder 6^3) *verschiedene Möglichkeiten* ergeben: und nur eine von diesen ergibt die Summe von drei Augen:

$1+1+1=3.$

Fünf Augen ergeben sich in 6 verschiedenen Varianten:

$1+1+3=5$
$1+3+1=5$
$3+1+1=5$
$1+2+2=5$
$2+1+2=5$
$2+2+1=5.$

Für zehn Augen existieren 27 Varianten (findet sie selbst!). Das heißt, *im Durchschnitt* werden 10 Augen 27mal so oft fallen wie 3 Augen. Genau so oft können auch 11 Augen fallen. Für 9 oder 12 Augen ergeben sich 25 Varianten und für 8 oder 13 Augen 21. (Prüfe nach!) In 146 von 216 möglichen Fällen erhält man zwischen 8 und 13 Augen. Und Ihr trauert tief um die verlorenen Rubel!

Natürlich kann jemand zufällig 3 oder 18 Augen werfen, aber das bleibt ein außergewöhnlich seltenes Ereignis. Bei fortwährendem Spiel garantiert Euch die Wahrscheinlichkeitstheorie einen ständigen Verlust. *Im Durchschnitt* verliert Ihr bei 216 Würfen 510 Rubel.

Wenn Ihr also diesen beiden Jungen begegnen solltet – spielt nicht mit ihnen!

A. Halameisär

Leseproben aus:
A. Kitaigorodski: Unwahrscheinliches – möglich oder unmöglich?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit?

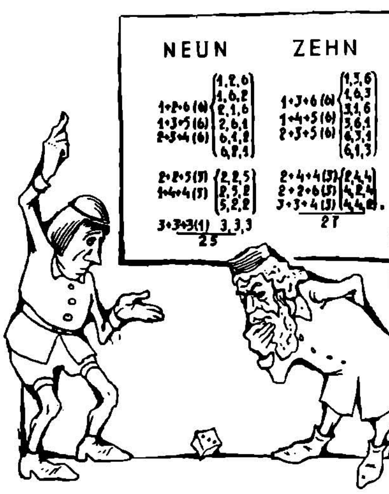
Der Fall des Würfels ist das klassische Beispiel für ein zufälliges Ereignis. Dennoch bleibt die Frage interessant, ob man das Resultat eines solchen Ereignisses im voraus erraten, vorhersehen und schließlich auch berechnen kann, und wie man so etwas macht. Die Gruppe möglicher Ergebnisse des Ereignisses umfaßt den Fall einer Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf oder Sechs. „Ergebnis eines Ereignisses" klingt etwas geschwollen, und wir hoffen, daß niemand in Verwirrung gerät, weil das erste Wort meist weggelassen wird. Wir haben also eine Gruppe von 6 Ereignissen; 6 ist die vollständige Anzahl der Ereignisse.

Die Frage, die man sich nun zu stellen hat, lautet: Wie viele von diesen Ereignissen sind im gegebenen Fall von Interesse?
Nehmen wir an, uns interessiert die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine Drei würfelt, das heißt, uns liegt am Eintreffen eines Ereignisses aus einer Gruppe von 6. Dann müssen wir die Anzahl günstiger Varianten (1 – der Wurf einer Drei) durch die Gesamtzahl Ereignisse teilen und erhalten die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des uns interessierenden Ereignisses. In unserem Beispiel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, eine Drei zu würfeln, die Zahl $\frac{1}{6}$. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß eine gerade Zahl gewürfelt wird? Offenbar $\frac{3}{6}$, denn man teilt 3 günstige Fälle durch die Gesamtzahl möglicher Ereignisse, nämlich 6. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Vielfaches von 3 beim Würfeln ergibt, ist demzufolge gleich $\frac{2}{6}$.
Spielt man aber mit 3 oder auch nur mit 2 Würfeln, gibt es sofort Probleme, und man kann einmal die folgende Frage stellen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 2 Sechsen geworfen werden? Jede von ihnen unabhängig erscheint mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$. Wenn der eine Würfel eine Sechs zeigt, kann der andere 6 verschiedene Zahlen zeigen. Also ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser-Pasch gleich dem Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten $(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$. Das ist ein Beispiel für die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten. Aber damit sind noch nicht alle neuen Probleme gelöst.
Anfang des 17. Jahrhunderts erschien bei Galilei ein Bekannter und bat ihn um die Aufklärung eines seltsamen Widerspruchs. Er hatte beim Würfelspiel mit 3 Würfeln bemerkt, daß die Summe der Augen auf den 3 Würfeln häufiger 10 ergibt als 9. „Wie kann das sein", fragte er, „es gibt doch sowohl im Falle der Neun als auch im Falle der Zehn die gleiche Anzahl, nämlich 6 mögliche Kombinationen aus 3 Zahlen?" Damit hatte der Bekannte Galileis völlig recht. Sehen wir auf Bild 2 – so ist dort gezeigt, wie man die Neun und die Zehn als Summe aus 3 Zahlen erhalten kann.
Galilei fand den Grund für diesen Widerspruch und löste damit eine der ersten Aufgaben der sogenannten Kombinatorik, eines Hauptinstruments bei Wahrscheinlichkeitsrechnungen.
Wie ist das nun also mit den 3 Würfeln? Wichtig ist nicht, auf wie viele Arten man die Summe in Summanden zerlegen kann, sondern auf wie viele Arten die 3 Würfel fallen können, um in der Summe „9" oder „10" zu ergeben. Galilei stellte fest, daß es für „10" 27 Arten, für „9" 25 Arten gibt. Damit hatte er die theoretische Erklärung für eine empirisch beobachtete Tatsache gefunden. Was ist aber nun der Unterschied zwischen der Anzahl Darstellungen einer Summe durch Summanden und der Anzahl der Varianten beim Würfeln?

Dieses Buch, Umfang 253 Seiten, 38 lustige Vignetten, erschien als Gemeinschaftsausgabe des Verlags Mir, Moskau und des VEB Fachbuchverlag Leipzig
Preis: 5,50 M; Bestellnummer: 546 051 0
A. Kitaigorodski, ein bekannter sowjetischer Wissenschaftler, hat die Gabe, populär schreiben zu können. Mit wachsendem Interesse lesen wir Originelles und Wissenswertes über die Wahrscheinlichkeitstheorie. Wichtige Grundbegriffe, z. B. werden im Zusammenhang mit Spielen, wie dem Würfel- oder Kartenspiel, erläutert. Wir verstehen bald, daß wir Wahrscheinlichkeiten von etwa einem Millionstel zwar vernachlässigen dürfen (also kaum mit einem Lottogewinn zu rechnen haben), dennoch aber Wahrscheinlichkeiten von einem Tausendstel beachten müssen. Kitaigorodski bedient sich interessanter Beispiele: Soll man den Urlaub abbrechen, wenn es ununterbrochen regnet? Muß es Familienkrach geben, wenn braunäugige Eltern ein blauäugiges Kind bekommen?
Alles in allem: ein fesselndes Buch, das unterhält und unauffällig belehrt.

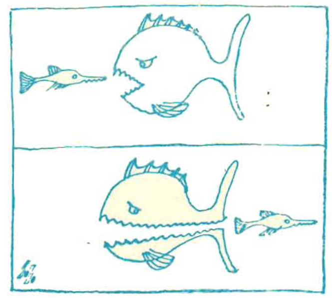
Varianten beim Würfeln?

Hier muß man eine besondere Feinheit beachten. Nehmen wir zuerst den Fall, daß die 3 Würfel 3 verschiedene Ziffern, z. B. eine Eins, eine Zwei und eine Sechs zeigen. Dieses Resultat kann in 6 Varianten auftreten – eine Eins auf dem ersten, eine Zwei auf dem zweiten und eine Sechs auf dem dritten Würfel; Eins auf dem ersten, Sechs auf dem zweiten, Zwei auf dem dritten; genauso gibt es 2 Varianten mit einer Zwei und noch zwei mit einer Sechs auf dem ersten Würfel (in der Abbildung sind alle Möglichkeiten gezeigt).
Anders ist die Sache, wenn die Summe 2 gleiche Summanden enthält, z. B. $1+4+4$. Wenn beim ersten Würfel die Eins kommt, gibt es bei dieser Verteilung nur eine Variante mit der Vier auf den beiden anderen, denn ein Austausch der Ziffern des zweiten und dritten Würfels ergibt keine neue Variante. Die zweite Variante haben wir, wenn die Eins auf dem zweiten Würfel erscheint, und die dritte, wenn sie auf dem dritten Würfel zu sehen ist, insgesamt also 3 Möglichkeiten.
Klar ist schließlich, daß die Verteilung $3+3+3$ beim Würfeln nur durch eine einzige Variante realisiert werden kann.



Die Anzahl Varianten ist in unserer Tabelle hinter den Summanden in Klammern angegeben. Wenn wir die Zahlen in den Klammern addieren, erhalten wir 25 bzw. 27, dasselbe wie auch Galilei. Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summen 9 bzw. 10 zu erzielen, verhalten sich wie 25 zu 27.
Diese auf den ersten Blick einfache Erklärung ist gar nicht so offensichtlich. Als Illustration kann dienen, daß Leibniz der Meinung war, man könne mit 2 Würfeln mit gleich großer Wahrscheinlichkeit 11 oder 12 würfeln. Galileis Arbeit macht deutlich, daß diese Annahme falsch ist: 12 ist nur auf eine einzige Art (durch 2 Sechsen) zu erzielen, 11 ergibt sich jedoch in 2 Fällen, nämlich wenn der erste Würfel Sechs und der zweite Fünf zeigt und umgekehrt.
Mit 2 Würfeln ergibt sich am häufigsten die Summe 7, dafür gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten. Die Summen 6 und 8 sind nur durch 5 Kombinationen darstellbar. Wenn du willst, kannst du diese Behauptung selbst nachprüfen.

In freien Stunden alpha heiter



alpha-Kurzweil

Die Buchstaben sind so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

(1) $\alpha \cdot U \cdot UE = \alpha\alpha\alpha$
(2) $K \cdot U \cdot UE = KKK$
(3) $U \cdot U \cdot UE = UUU$
(4) $R \cdot U \cdot UE = RRR$
(5) $Z \cdot U \cdot UE = ZZZ$
(6) $W \cdot U \cdot UE = WWW$
(7) $E \cdot U \cdot UE = EEE$
(8) $I \cdot U \cdot UE = III$
(9) $L \cdot U \cdot UE = LLL$

Wer sich in der Teilbarkeit von natürlichen Zahlen auskennt, kann die Gleichungen in wenigen Sekunden lösen.
Folgende Hinweise sollten erst nach mehrmaligen Lösungsversuchen in Anspruch genommen werden:
a) Beginne mit Gleichung (3) oder mit Gleichung (7)! (Jede dieser Gleichungen besitzt genau eine Lösung. Die übrigen Gleichungen besitzen je 7 Lösungen.)
b) U, E und UE sind Primzahlen
c) Beachte, daß $\alpha\alpha\alpha : \alpha = KKK : K = \ldots = LLL : L = U \cdot UE$ gilt!

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Maße und Gewichte

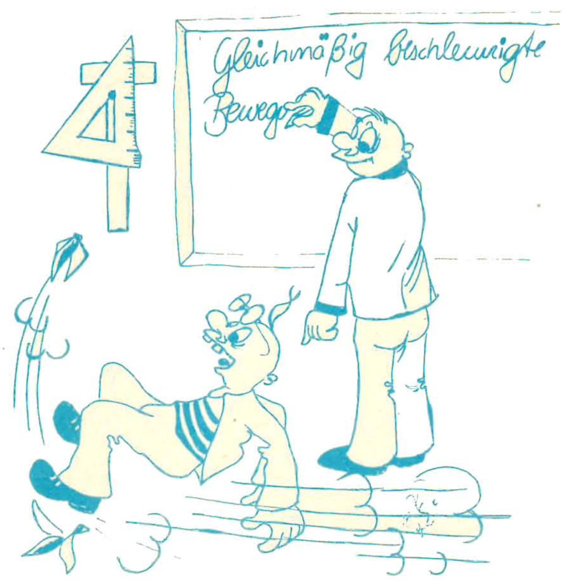
Peter kam aufgeregt vom Pioniernachmittag am Kindertag nach Hause und sprudelte auch gleich los: „Heute war's gut, Vati! Ich habe drei *Gläser* Limonade getrunken und vier *Stücken* Kuchen gegessen! Und mindestens zehn *Kilos* Bonbons hat Frau Meier aus den Tüten verstreut! Und beim Rollerrennen waren die Kurven mit 20 *Säcken* Stroh abgesichert. Das war gut so..."
„Nun höre erst einmal auf", unterbrach ihn der Vater. „Vor Aufregung erzählst du gleich vieles falsch."
„Wieso? So war es doch!"
„Das bestreite ich gar nicht, aber höre einmal zu: Du kannst für die Altstoffsammlung von uns mehrere *Gläser* bekommen, aber du kannst nur drei *Glas* Limonade trinken, weil in diesem Zusammenhang Glas nicht für das Gefäß steht, sondern als Maßeinheit. Ebenso hast du vier *Stück* Kuchen gegessen, und deine Lehrerin hat 10 *Kilo* Bonbons gehabt, und zu eurem Sackhüpfen habt ihr vielleicht 20 *Säcke* benutzt, aber die Rollerstrecke war mit 20 *Sack* Stroh abgesichert. Maßeinheiten werden nämlich fast immer in der Einzahl gebraucht!"
„Also habe ich für die Bockwurst auch nicht 85 *Pfennige*, sondern 85 *Pfennig* bezahlt?"
„Falls du nicht 85 einzelne 1-Pfennig-Stücke hingelegt hast, stimmt das. Aber du scheinst ja mächtig viel gegessen und getrunken zu haben! Außerdem ist es Zeit, ins Bett zu gehen.
Es ist gleich 21 *Uhr* – und nicht 21 *Uhren*!"

nach Hansgeorg Stengel von Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Kryptarithmetik

MOON	TWO
+ MAN	+ THREE
+ CAN	+ SEVEN
REACH	TWELVE

aus: Mathematical log, USA



Wie viele Möglichkeiten?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Wort „Dreieck“ zu lesen?
(Eine Möglichkeit ist angeführt.)

D-R-E I E C K
R E I-E C K
E I E C-K
I E C K
E C K
C K
K

aus: Quant 5/75, Moskau

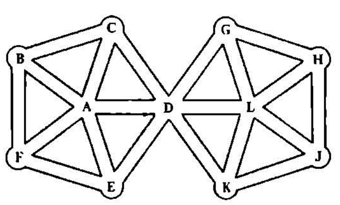
Sekunde hoch 4

Man nehme von vielen nur eine Sekunde
und beschäftigt sich mit ihr nur eine Stunde.
Man sollte sie ins Quadrat ergänzen
und erhebe sie in die vierten Potenzen.
Man sollte ihre Form erklären
und sich mit ihr in der Praxis bewähren.
Wie befreiend wirkt dann das Klingelzeichen.
Man kann endlich dieser Sekunde entweichen.
Man schließt schnell hinter sich die Tür,
und trotzdem verfolgt uns die Sekunde hoch vier.
Man sieht sie in allen Ecken lauern
und des Nachts auf unserem Bette kauern.
Der Traum wird schrecklich,
man träumt von ihr, von der Sekunde hoch vier.
Man sieht sie dann als Mathematikerschreck
und schiebt sie schnell aus dem Gedächtnis weg.

stud. phil. Hannelore Helbig,
Karl-Marx-Universität Leipzig

Festung Eulersburg

Eulersburg ist eine spätmittelalterliche Festung, die nach italienischen Vorbildern aus zwei zusammenhängenden regelmäßigen Fünfecken besteht. Jedes dieser Fünfecke hat in seiner Mitte einen Bergfried, von dem aus gedeckte Gänge nach den Eck-Basteien laufen. Die Basteien sind durch Wehrmauern (Eskarpen) untereinander verbunden. Die Länge der Gänge beträgt 60 m, die der Wehrmauern 70 m.



Die Wache hat Befehl, jede Stunde einmal sämtliche Gänge und Wehrmauern abzuschreiten. Dies wäre ein Gesamtweg von 1 300 m, doch zeigt sich, daß der Weg der Wache tatsächlich größer ist, da in Ausführung des Befehls nicht zu vermeiden ist, daß einige Strecken mehrfach gegangen werden müssen.
Wie lang ist der kürzest mögliche Weg der Wache, bei dem alle zwanzig Kontrollstrecken mindestens einmal begangen werden?

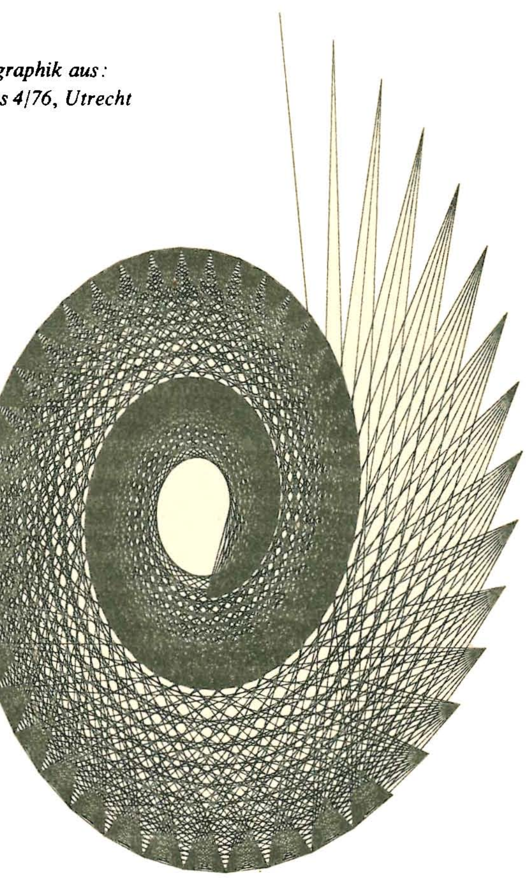
D. St. P. Barnard, London

Eine wahre Begebenheit

Vater erklärt der staunend zuhörenden Familie den Begriff der *Dimension.*
„Also, die *erste Dimension* ist eine Gerade, wie z. B. die Tischkante hier. Verständlich, nicht wahr?!
– Die *zweite Dimension* stellt eine Ebene dar, wie z. B. der Tisch, an dem wir sitzen. Klar!
– Die *dritte Dimension* spannt einen Raum auf, wie unser Zimmer z. B. von drei gedachten Koordinatenachsen bestimmt wird.
– Ja, das ist alles noch einzusehen, wie aber soll man sich die *vierte Dimension* vorstellen???“
Tante Trudchen, für jeden Fortschritt zu begeistern, wirft dazwischen: „Ganz einfach – das ist unser Haus!“

Mathematikfachlehrer F.-J. Fischer, Dresden

Computergraphik aus:
Pythagoras 4/76, Utrecht



Lösungen

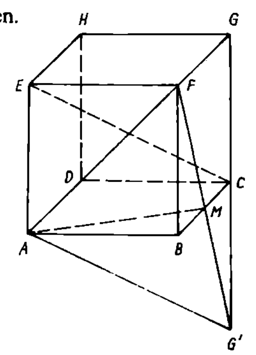
XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen

DDR-Olympiade

Olympiadeklasse 10

1. (Lösung des Schülers Peter Dittrich, EOS *Dr. Th. Neubauer*, Rudolstadt)

Der Punkt auf der Geraden $g(GC)$, der vom Punkt C den Abstand a hat und auf der anderen Seite von C als G liegt, sei G'. Die Punkte A, G', C, E liegen in der Ebene, die durch die beiden Geraden $g(EA)$ und $g(GC)$ aufgespannt wird, und wegen $EA \parallel GC$ und $\overline{EA}=\overline{G'C}=a$ gilt $AG' \parallel EC$. Daraus folgt, daß die Schnittebenen, die A enthalten und zu EC parallel sein sollen, auch die Gerade $g(AG')$ und somit den Punkt G' enthalten müssen.



Die erste der in der Aufgabe genannten Schnittebenen wird demnach durch die Punkte A, F und G', die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig festgelegt. Hieraus ergibt sich, daß sie die Ebene durch F, B, C und G, in der auch G' liegt, in der Geraden $g(FG')$ schneidet und folglich, wie man durch Anwendung des Strahlensatzes leicht erkennt ($\overline{FB}=\overline{CG'}$, $FB \parallel CG'$), die Kante BC in deren Mittelpunkt M; sie trennt also vom Würfel genau das Tetraeder $ABFM$ ab.

Sieht man das Dreieck ABF als Grundfläche und BM als Höhe dieses Tetraeders an, so folgt für sein Volumen V_T die Formel

$$V_T=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{12}a^3.$$

Analog erhält man für die beiden anderen Schnitte ebenfalls als abgetrennte Körper Tetraeder mit dem Volumen V_T, wobei je zwei dieser Tetraeder keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Daher gilt für das Volumen des Restkörpers

$$V_R=a^3-\frac{3}{12}a^3,$$
$$V_R=\frac{3}{4}a^3.$$

Bemerkungen: Die Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand nicht im Errechnen der Formel für V_R, sondern in korrekten Begründungen für die als Ergebnis naheliegenden Sachverhalte. Dabei lag die eigentliche Klippe in dem Nachweis, daß der Punkt M, in dem die durch A und F parallel zu EC verlaufende Ebene ε die Strecke BC schneidet, gerade der Mittelpunkt von BC ist.

Dies konnten nur wenige Schüler beweisen. Viele gingen vom Mittelpunkt M_1 des Quadrates $ABFE$ aus und betrachteten entweder die Gerade $g(M_1M)$ oder die Parallele h zu $g(EC)$ durch M_1; im ersten Fall fehlte oft eine korrekte Begründung dafür, daß $g(EC)$ und $g(M_1M)$ parallel sind, was keineswegs mit einem Hinweis auf die Parallelität zwischen der Geraden $g(EC)$ und der Ebene ε abgetan werden kann, und im zweiten Fall wurde als selbstverständlich angenommen, daß h die Strecke BC schneidet.

Im weiteren Lösungsgang unterblieb vielfach die Bemerkung, daß die drei abgetrennten Teilkörper keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Die folgende Tabelle über die erreichten Punktzahlen bestätigt, daß die Aufgabe angemessen schwer war.

Punkte	0	1	2	3	4	5
Anzahl	19	23	18	11	22	6

Dr. Klaus-Dieter Drews,
W.-Pieck-Universität Rostock

2. Ein Quadrat besitzt genau vier Symmetrieachsen: zwei enthalten die Diagonalen, und zwei gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.

Im vorliegenden Fall liegen auf den Symmetrieachsen, die die Diagonalen enthalten, jeweils sechs Gitterpunkte. Hätte ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3), eine die Diagonale d enthaltende Symmetrieachse, so gäbe es in s einen Teilstreckenzug t von einem der sechs Punkte auf d zu einem anderen, wobei t außer seinen Endpunkten keinen weiteren Punkt auf d enthielte. Dann käme in s auch der durch Spiegelung an d aus t entstehende Streckenzug t_1 vor. Dieser aber würde mit t zusammen bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, ohne daß alle gegebenen Punkte auf ihm liegen. Deshalb scheiden die die Diagonalen enthaltenden Geraden als Symmetrieachsen aus.

Die restlichen zwei Achsen teilen das Quadrat in vier Teilquadrate. Angenommen, ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) könnte, nachdem er einmal (aus einem anderen Teilquadrat kommend) in das linke obere Teilquadrat q, das die Punkte 1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15 enthält, eingetreten ist und dort einen Teilstreckenzug t durchlaufen hat, q wieder verlassen, ohne alle neun Punkte von q durchlaufen zu haben. Dann enthielte s auch den durch Spiegelung an der einen Symmetrieachse aus t entstehenden Streckenzug t_1 sowie die durch Spiegelung an der anderen Symmetrieachse aus t und t_1 entstehenden Streckenzüge t_2 und t_3. Die Streckenzüge t, t_1, t_2 und t_3 würden bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, der nicht alle gegebenen Punkte enthielte. Daher genügt es, diejenigen Teilstreckenzüge zu untersuchen, die alle neun Punkte von q durchlaufen. Der gesamte Streckenzug liegt aus Symmetriegründen dann fest und hat die geforderten Eigenschaften.

Der Streckenzug von 2 nach 1 und von dort nach 7 kann bereits eingezeichnet werden, da der Punkt 1 nicht anders erreichbar ist. Der Streckenzug s komme vom rechten oberen Teilquadrat.

Fall 1: s erreiche den Punkt 3; dann gibt es genau die folgenden vier Möglichkeiten:

a) Verläuft s dann zu 2, 1, 7 und von dort weiter zu 13, so liegt der restliche Verlauf eindeutig fest, da vom letzten der neun Punkte das linke untere Quadrat erreicht werden muß: 13, 14, 8, 9, 15, (21).

b) Verläuft s dann zu 2, 1, 7 und von dort weiter zu 8, so liegt der restliche Verlauf ebenfalls eindeutig fest: 8, 9, 15, 14, 13, (19).

c) Verläuft s zu 9 und von dort weiter zu 15, so ergibt sich ein Streckenzug, der aus dem im Fall 1 b) erhaltenen Streckenzug durch Spiegelung an einer Diagonale hervorgeht.

d) Verläuft s zu 9 und von dort weiter zu 8, so ist der übrige Verlauf wieder eindeutig festgelegt: 8, 2, 1, 7, 13, 14, 15, (21).

Fall 2: s erreiche den Punkt 9; bei der Weiterführung über die Punkte 8 oder 15 wäre der Punkt 3 nicht mehr erreichbar, wenn der Streckenzug zum linken unteren Teilquadrat weitergeführt werden soll. Der Streckenzug könnte also nur über die Punkte 9, 3, 2, 1 und 7 verlaufen. Bei der Weiterführung nach 13 könnte 8 nicht mehr einbezogen werden. Bei der Weiterführung nach 8 würde 13 oder 15 unerreichbar sein. Es gibt in diesem Fall also keinen derartigen Streckenzug.

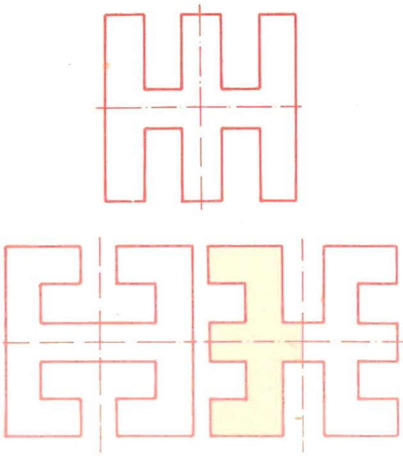
Fall 3: s erreiche den Punkt 15; dann gibt es genau die folgenden zwei Möglichkeiten:

a) Verläuft s dann zu 9, so ergibt sich ein Streckenzug, der aus dem im Fall 1 d) erhaltenen Streckenzug durch Spiegelung an einer Diagonalen hervorgeht.

b) Verläuft s nach 14, so ergibt sich ein Streckenzug, der aus dem im Fall 1 a) erhaltenen Streckenzug durch Spiegelung an einer Diagonalen hervorgeht.

Damit ist gezeigt, daß es drei und nicht mehr als drei Streckenzüge der geforderten Art gibt. Die geschlossenen Streckenzüge haben folgende Formen:

Bemerkungen: Das gestellte Problem war als Olympiadeaufgabe sehr geeignet, da fast jeder Schüler durch mehr oder weniger systematisches Probieren zumindest einen Lösungs-



ansatz finden konnte. Eine wesentliche Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand aber darin, eine vollständige Fallunterscheidung vorzunehmen, d. h. alle Fälle zu erkennen und jeden dieser Fälle zu diskutieren.

Punktabzüge gab es jedoch vor allem auch dadurch, daß unzureichend bzw. fehlerhaft begründet wurde, daß die die Quadratdiagonalen enthaltenden Geraden nicht als Symmetrieachsen für die entstehende Figur möglich sind, und warum es ausreichend ist, nur die „nach unten und rechts offenen" Streckenzüge zu untersuchen, die alle neun Punkte von q durchlaufen. Von sehr vielen Schülern wurde ferner von vornherein davon ausgegangen, daß die entstehende Figur genau und nicht mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt. Einige Schüler erkannten auch nicht die Kongruenz von Figuren.

Ergebnisspiegel:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	6	8	10	11	16	29	15	4

Dr. M.-Rehm, Humboldt-Universität Berlin

3A. Offensichtlich gilt $[x^2]=[x]^2$ für alle ganzen Zahlen x.

Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Betrachtung reeller Zahlen x, die nicht ganz sind.

1. $x<0$: Dann läßt sich x in der Form $x=g+a$ mit g negativ, ganz und $0<a<1$ darstellen. Es gilt $x^2=g^2+2ag+a^2$ und damit $[x^2]=[x]^2$ genau dann, wenn $0\leqq 2ag+a^2<1$. Letzteres ist aber ein Widerspruch zu den Voraussetzungen, da ja gilt $0>2g+a$. Die Gleichung $[x^2]=[x]^2$ wird also von keinem negativen nicht ganzzahligem x erfüllt.

2. $x>0$: a) Es gelte $g<x<\sqrt{g^2+1}$ (1) (mit $g\geqq 0$ und g ganz). Da dann $\sqrt{g^2+1}\leqq\sqrt{g^2+2g+1}=g+1$ gilt, folgt $[x]=g$ und $[x]^2=g^2$. Andererseits folgt aus (1) auch $g^2<x^2<g^2+1$ und damit $[x^2]=g^2$. Damit ist die Gleichung $[x^2]=[x]^2$ für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt, für die (1) gilt.

b) Es gelte $\sqrt{g^2+1}\leqq x<g+1$. Dann gilt ebenso wie unter a), daß $[x]^2=g^2$. Andererseits aber $[x^2]=g^2+1$. Für diesen Fall ist also $[x^2]=[x]^2$ nicht erfüllbar.

Insgesamt gilt $[x^2]=[x]^2$ genau dann, wenn x eine negative ganze Zahl ist oder eine Zahl aus einem der Intervalle $g\leqq x<\sqrt{g^2+1}$ (mit $g\geqq 0$ und g ganzzahlig).

Die weitere Bedingung $-10\leqq x\leqq 2$ ergibt eine Einschränkung auf die Lösungsmenge $\{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 2\}\cup\{x: 0\leqq x<\sqrt{2}\}$.

Bemerkungen: Der obige Lösungsweg ist gewählt worden, um zu zeigen, daß die Aufgabe auch ohne die zusätzliche Einschränkung für die 4. Stufe angemessen gewesen wäre. Keiner der Schüler versuchte aber eine solche Verallgemeinerung. Vorherrschend war vielmehr eine Unterteilung in die Intervalle $g\leqq x<g+1$ im angegebenen Gesamtintervall und die Durchführung von Überlegungen in jedem der Teilintervalle. Dabei traten die größeren Schwierigkeiten im Fall $x<0$ auf. Zu bemängeln ist der logisch unklare Aufbau der Lösungen bei vielen Schülern. So wurde die Äquivalenz von Umformungen häufig nicht erkannt oder zumindest nicht beachtet. Prinzipielle Schwierigkeiten traten wohl nur bei sehr wenigen Schülern auf. Auch die Tatsache, daß etwa 75% der Schüler diese von den beiden Wahlaufgaben zu lösen versuchten, spricht dafür, daß der Schwierigkeitsgrad nicht zu hoch war.

So ergab sich auch ein guter Durchschnitt für die erreichte Punktzahl:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	5	3	6	3	7	6	8	21	14

Dr. Hans-Jürgen Sprengel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

3B. Wie aus dem Aufgabentext hervorgeht, ist zweierlei zu zeigen. Erstens die Existenz einer Zahl c, für die die Punkte von k die gegebene Beziehung zwischen den Abständen erfüllen. Zweitens ist nachzuweisen, daß alle Punkte der Ebene, für die die gegebene Relation zwischen den Abständen von F_1, F_2 mit c erfüllt ist, auf k liegen. Wir geben für den ersten Teil die mehrfach von den Schülern – mit geringfügigen Modifikationen – gefundene Lösung. Für den zweiten Teil zitieren wir die Lösung der Aufgabenkommission, die auch bei einigen Schülern anzutreffen ist.

Teil 1: Für einen Punkt P auf k mit den Koordinaten $\left(x;\frac{1}{x}\right)$ gilt

$$d_1=\overline{F_1P}=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2},$$

$$d_2=\overline{F_2P}=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2}.$$

Damit erhält man nach einigen Umformungen

$$(d_1-d_2)^2=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+4+2\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+4-2\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+4\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right|.$$

Wegen $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geqq 4\,(x\neq 0)$ folgt

$(d_1-d_2)^2=8$ und somit $c=2\sqrt{2}$.

Teil 2: Wenn ein Punkt P mit den Koordinaten $(x;y)$ die Eigenschaft $|\overline{F_1P}-\overline{F_2P}|=2\sqrt{2}$ hat, so folgt

$$\left|\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right|=2\sqrt{2}$$ und hieraus

$$2x^2+2y^2+8-8=2\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2-16xy+16},$$

$$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2-16xy+16,$$

$$16xy=16,$$

also $x\neq 0$ und $y=\frac{1}{x}$, d. h., P liegt auf k. Somit ist k die Menge aller Punkte, für die $|\overline{F_1P}-\overline{F_2P}|=c=2\sqrt{2}$ gilt.

Bemerkungen: Diese Wahlaufgabe wurde von 26 der insgesamt 99 Teilnehmer gewählt. Häufig wurde übersehen, daß zur Lösung dieser Aufgabe – wie oben angegeben – zweierlei zu zeigen ist.

Von vielen Schülern wurde nur Teil 1 erledigt. Eine vollständige Lösung haben lediglich die Schüler B134 und B102 vorgelegt. Trotzdem dürfte der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe für eine DDR-Olympiade angemessen sein.

Bei dieser Aufgabe waren 8 Punkte zu erreichen, über die Verteilung der Punkte mag folgende Tabelle Aufschluß geben:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	5	5	1	0	1	12	0	0	2

Dr. Klaus Zacharias, Zentralinstitut f. Math. u. Mechanik, Berlin

4. Wenn die natürlichen Zahlen x, y den Bedingungen der Aufgabe genügen, o.B.d.A. sei dabei $x>y$, so gibt es natürliche Zahlen $a, b\leqq 9$ mit $\frac{x+y}{2}=10a+b$ und $xy=(10b+a)^2$.

Somit ist

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=4(10a+b)^2-4(10b+a)^2$
$=4\cdot 9\cdot 11(a^2-b^2)$

eine Quadratzahl und da $x\neq y$ gilt, ist $a>b$.

Folglich muß

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

durch 11 teilbar sein. Da $0<a-b<9$ und $0<a+b<18$ gilt, erhalten wir: $a+b=11$, $b>1$ und $a-b=11-2b$ ist eine Quadratzahl. Daraus folgt, daß $b=5$ und $a=6$ ist.

Wir erhalten somit
$x+y=2(10a+b)=130$ und
$x-y=2\cdot 3\cdot 11=66$, woraus $x=98$ und $y=32$ folgt. Damit erfüllt also höchstens das ungeordnete Paar (98, 32) die Bedingungen der Aufgabe.
In der Tat gilt

$$\frac{x+y}{2}=65 \text{ und } \sqrt{xy}=\sqrt{3136}=56.$$

Damit ist das ungeordnete Paar (98, 32) die einzige Lösung.
Bemerkungen: Die Aufgabe kann, wie auch der Ergebnisspiegel ausweist, als relativ leicht eingeschätzt werden. Dennoch traten einige Fehlschlüsse auf, von denen hier zwei genannt werden sollen:
Seien x, y, n, r, s, p natürliche Zahlen und p prim.
1. Fehlschluß: Wenn $xy=n^2$ ist, so ist $x=r^2$ und $y=s^2$.
2. Fehlschluß: Wenn $xy=p^2$ ist, so ist $x=y=p$.

Des weiteren wurde des öfteren nur nachgewiesen, daß höchstens (98, 32) Lösung ist.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	19	17	5	5	1	18	34

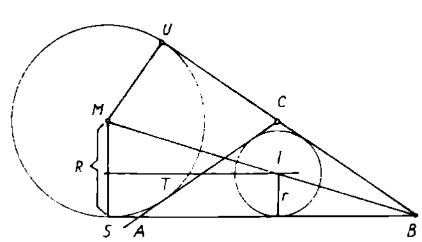
Dr. W. Harnau,
W.-Pieck-Universität Rostock

5. Als Lösung einer Konstruktionsaufgabe ist die Lösung wie allgemein üblich in Analyse (I), Konstruktion (II), Beweis der Konstruktion (III) und Determination, d. h. Diskussion von Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion (IV) gegliedert.
I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Berührungspunkt des Ankreises mit der Seite AC sei T, die Berührungspunkte dieses Ankreises mit den Strahlen aus B durch C bzw. aus B durch A seien U bzw. S. Der Mittelpunkt des Ankreises sei M, der des Inkreises I. Dann gilt nach dem Satz über Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis:

$$\overline{BS}=\overline{BU},\ \overline{AS}=\overline{AT},\ \overline{CT}=\overline{CU}.$$

Ferner gilt
$\overline{AB}=\overline{BS}-\overline{AS}=\overline{BU}-\overline{AS}$, $\overline{BC}=\overline{BU}-\overline{CU}$,
$\overline{CA}=\overline{CT}+\overline{AT}=\overline{CU}+\overline{AS}$ und mithin
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BU}-\overline{AS}+\overline{BU}-\overline{CU}+\overline{CU}+\overline{AS}=2\overline{BU}$, also
$s=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\overline{BU}$.

Da die Strahlen aus B durch S bzw. U die genannten Kreise mit den Mittelpunkten M und I berühren, liegen M und I nach einem bekannten Satz auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle SBU$ (siehe Bild).



Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
II. (1) Man zeichnet eine Strecke der Länge s mit den Endpunkten B und S.
(2) Man errichtet in S die Senkrechte auf SB und trägt darauf eine Strecke der Länge R ab. Der andere Endpunkt dieser Strecke sei M.
(3) Man spiegelt SB an MB und erhält UB.
(4) Man zeichnet zu SB die Parallele im Abstand r. Schneidet sie MB in einem Punkt zwischen B und M, so sei I dieser Schnittpunkt.
(5) Man zeichnet die Kreise um M bzw. I mit den Radien R bzw. r.
(6) Man konstruiert, falls die unter (5) konstruierten Kreise sich nicht schneiden, eine ihrer inneren Tangenten. Ist das der Fall, so seien A bzw. C die Schnittpunkte dieser Tangente mit SB bzw. BU.
III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Laut Konstruktion hat das Dreieck ABC einen Inkreis vom Radius r und einen Ankreis an die Seite AC vom Radius R. Laut Konstruktion gilt ferner

$$s=\overline{BS}=\overline{BU}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) und (5) sind stets eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt (4) ist genau dann ausführbar, wenn $R>r$ gilt, und in diesem Falle eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (6) ist genau dann ausführbar, wenn $\overline{MI}\geqq R+r$ gilt. Wegen $\overline{MI}=\overline{MB}-\overline{BI}$ und $\overline{MB}=\sqrt{s^2+R^2}$ (Pythagoras) sowie $\overline{BI}=\frac{\overline{MB}\cdot r}{R}$ (Strahlensatz) ist diese Bedingung gleichwertig mit $\overline{MB}-\overline{BI}\geqq R+r$, also auch mit $\sqrt{s^2+R^2}\left(1-\frac{r}{R}\right)\geqq (R+r)$. (*)
Für $\overline{MI}=R+r$ erhält man genau eine gemeinsame Tangente und damit auch genau ein Dreieck ABC.
Für $\overline{MI}>R+r$ erhält man genau zwei gemeinsame Tangenten und genau zwei spiegelbildlich zu MB liegende kongruente Dreiecke. Daher existiert genau dann ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, wenn (*) gilt; und ist dies der Fall, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.
Bemerkungen: Wie aus der Tabelle unten ersichtlich ist, konnte an etwa ein Drittel der Schüler kein Punkt erteilt werden; diese Schüler fanden keinen Zugang zur Lösung. Den Schülern, die drei oder vier Punkte erhielten, gelang es, den Teil (I) der Lösung im wesentlichen zu erbringen, sie erkannten also, daß die Länge der Strecke $\overline{BU}$ gleich dem halben Umfang des Dreiecks ist und hatten hiermit den „springenden Punkt" bewältigt, um an die anderen Teile der Lösung gehen zu können. Sie scheiterten im allgemeinen daran, die Konstruktion exakt anzugeben und vor allem an Teil (IV) der Lösung, für den eine neue Idee notwendig war, nämlich die Erkenntnis, daß der Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar ist genau dann, wenn $\overline{MI}\geqq R+r$ ist. Bei Vorhandensein der beiden skizzierten Ideen hing dann der Erfolg nur noch von der gewissenhaften Handhabung des „mathematischen Handwerkzeugs" ab, das für solche Aufgaben beherrscht werden muß. Und hierbei ist festzustellen, daß es leider eine ganze Reihe von Schülern gab, die durch Unexaktheit oder Unvollständigkeit wertvolle Punkte verschenkten.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	30	5	8	11	17	11	8	9

Dr. Monika Noack,
Humboldt-Universität Berlin

6. Wir zeigen: Ist f eine für alle reellen Zahlen x definierte nullstellenfreie Funktion, so folgt daraus nicht die Nullstellenfreiheit der Funktion $F(x)=f(2x)+f(3x)$.
Es sei z. B. $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ für } x<3 \\ -1 \text{ für } x\geqq 3. \end{cases}$
Diese Funktion entspricht den Bedingungen der Aufgabe: sie ist für alle reellen Zahlen x definiert und nullstellenfrei.
Für $F(x)=f(2x)+f(3x)$ gilt aber:

$$F(1)=f(2)+f(3)=1+(-1)=0.$$

Es gibt also eine reelle Zahl x, nämlich $x=1$, mit $F(1)=0$, d. h. $F(x)$ ist nicht nullstellenfrei. q. e. d.
Bemerkungen: Fast die Hälfte der Schüler untersuchte nur solche Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x stets dasselbe Vorzeichen besitzen. Typische Fehler waren auch das Gleichsetzen von $f(2x)$ mit $2f(x)$ bzw. von $(-1)^x$ mit -1^x bei der Konstruktion eines Beispiels.
Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	24	18	22	3	5	3	5	20

Dr. Ingeborg Bartsch,
Institut für Lehrerbildung Rostock

Lösungen zu: AG's im Blickpunkt (S. 132)
Lösung für den Nenner 13

$$\frac{7}{2}(100000+x)=10x+1;$$
$$\frac{4}{3}(200000+x)=10x+2;$$
$$300000+x=(10x+3)\cdot 4;$$
$$\frac{11}{5}(300000+x)=10x+3;$$
$$\frac{4}{3}(400000+x)=10x+4;$$
$$500000+x=(10x+5)\frac{7}{5};$$
$$600000+x=(10x+6)\cdot 4;$$
$$\frac{4}{3}(600000+x)=10x+6;$$
$$700000+x=(10x+7)\cdot\frac{10}{9};$$
$$900000+x=(10x+9)\cdot 4.$$

Lösungen zu: Abschied von 1976 (6/76)

▲1▲ (2) $48 \cdot 39+(1+2+5)(6+7)$; (3) $2^{11}-2^6-2^3$; (4) $3^7-3^5+3^2+3^3-3^1-3^0$; (5) $44 \cdot 44+44-4$; (6) 45^2-7^2; (7) $13^3-6^3-2^3+1^3+1^3+1^3$.

▲2▲ Es gilt:

$$Z=1976^{1976}-1976=1976(1976^{1975}-1)$$
$$=1976(1976-1)(1976^{1974}+1976^{1973}+\ldots+1)$$
$$=1976 \cdot 1975 \cdot P$$

wobei P die Summe der Glieder in der letzten Klammer ist. Die Klammer enthält 1975 Summanden, wovon 1974 die Endziffer 6 haben und einen Summanden 1. Daher endet P auf die Ziffer 5: $P=5 \cdot R$

Wir haben also

$$1976 = 8 \cdot 247$$
$$1975 = 25 \cdot 79$$
$$P = 5 \cdot R$$

Somit ist Z durch 8 und 125, also auch durch 1000 teilbar.

Lösungen zu: alpha-heiter 6/76

alpha-Kurzweil

$1 \cdot 3 \cdot 37=111$ $\quad 6 \cdot 3 \cdot 37=666$
$2 \cdot 3 \cdot 37=222$ $\quad 7 \cdot 3 \cdot 37=777$
$3 \cdot 3 \cdot 37=333$ $\quad 8 \cdot 3 \cdot 37=888$
$4 \cdot 3 \cdot 37=444$ $\quad 9 \cdot 3 \cdot 37=999$
$5 \cdot 3 \cdot 37=555$

Kryptarithmetik

$9552+902+382=10836$

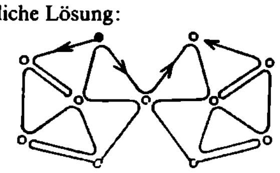
Wir suchen Einsender der Lösungen für das zweite Kryptogramm!

Wieviele Möglichkeiten?

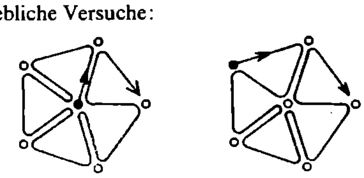
Es gibt genau 64 Lösungen.

Festung Eulersburg

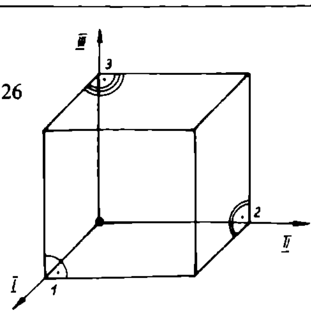
Mögliche Lösung:



Vergebliche Versuche:



zu S. 126



Junge Mathematiker, Physiker und Chemiker an Universitäten und Hochschulen

Die zielstrebige Förderung besonderer Begabungen und Interessen junger Menschen auf den verschiedensten Gebieten ist in unserem Staat nicht nur Gesetz, sondern in der Praxis bewährte Realität. Viele Schüler konnten zum Beispiel bei den Mathematikolympiaden, in Mathematikzirkeln und Arbeitsgemeinschaften diesen Vorzug unserer Gesellschaftsordnung selbst erleben.

Ein Beispiel für die zielgerichtete Förderung von Schülern, die sich bei insgesamt guten schulischen Leistungen besonders durch sehr gutes mathematisches und naturwissenschaftliches Wissen und Können auszeichnen, ist die Ausbildung von Schülern der Klassenstufen 11 und 12 in Spezialklassen an Universitäten und Hochschulen. Außerdem werden in einigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Spezialschulen z. B. der *Heinrich Hertz*-Oberschule in Berlin, Schüler der Klassen 9 bis 12 unterrichtet.

Die Spezialklassen bestehen nunmehr 12 Jahre und können auf eine sehr erfolgreiche Tätigkeit zurückblicken. Beispielsweise kommt seit mehreren Jahren etwa ein Viertel aller Preisträger der Bezirks-Mathematik-Olympiade in Berlin aus der Spezialklasse der Humboldt-Universität, und auch im DDR-Maßstab und bei den *Internationalen Mathematikolympiaden* findet man Angehörige von Spezialklassen unter den Preisträgern. Fast alle Spezialklassenschüler konnten bisher nach dem Abitur ein Studium aufnehmen, und zwar vorwiegend in den Grundstudienrichtungen Mathematik, Physik, Chemie, in technischen Grundstudienrichtungen, ein Lehrerstudium bzw. ein Studium in anderen naturwissenschaftlichen oder gesellschaftswissenschaftlichen Fachrichtungen. Die überwiegende Mehrheit der ehemaligen Spezialklassenschüler kann auf hervorragende Studienergebnisse und aktive gesellschaftliche Arbeit in ihren Studienkollektiven verweisen.

Die Ausbildung in den Spezialklassen entspricht bis auf die Spezialfächer (Mathematik, Physik bzw. Chemie) der Ausbildung in den Erweiterten Oberschulen. In den Spezialfächern wird besonderer Wert auf die Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens, die sehr gründliche Behandlung des Stoffes und die Selbständigkeit der Schüler gelegt. Der Unterricht wird vorwiegend durch Wissenschaftler der Universitäten und Hochschulen durchgeführt, die langjährige Erfahrungen in der Ausbildung von Schülern haben. Auch die musische und sportliche Betätigung kommt nicht zu kurz.

Selbstverständlich stellt die Ausbildung in den Spezialklassen hohe Anforderungen. Deshalb kommen nur solche Schüler der 10. Klassen der Oberschule und der Vorbereitungsklassen für die Abiturstufe zur Eignungsprüfung für die Spezialklasse an die Hochschule, die bereits zur Aufnahme in die Abiturstufe bestätigt worden sind. Die Vorschläge für die Aufnahme von Schülern in die Spezialklassen erfolgen nach Auswahl durch die Direktoren der Oberschulen und werden über die Kreis- und Bezirksschulräte jeweils bis zum 31. 12. für das kommende Schuljahr an die Universitäten und Hochschulen eingereicht. Die Hochschulen können von Schülern Bewerbungen, denen die Zustimmung der Eltern beiliegt, unmittelbar entgegennehmen. Sie fordern in solchen Fällen vom zuständigen Bezirksschulrat das Einverständnis zur Aufnahme des Schülers in die Spezialklasse sowie die entsprechenden Unterlagen an.

Die Arbeitsweise von Spezialklassen ist in einer Anweisung (15/76) des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen vom 14. Juni 1976 geregelt, die in den „Verfügungen und Mitteilungen des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen" veröffentlicht wurde.

J. Geburtig, Berlin

Übersicht über die bestehenden Spezialklassen

- Schwerpunkt Mathematik/Physik:
  - Humboldt-Universität zu Berlin
  - Martin-Luther-Universität Halle
  - Die Bildung einer Spezialklasse an der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock wird vorbereitet
- Schwerpunkt Mathematik/Physik/Technik:
  - Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
- Schwerpunkt Chemie:
  - Technische Hochschule Carl Schorlemmer Leuna-Merseburg

Übung macht den Meister

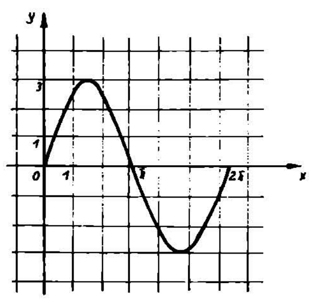
1972
Ermitteln Sie alle Winkel x im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$, für die gilt: $\sin x = 0{,}6600$!

1970
Ermitteln Sie $\cos 120°$! Bestimmen Sie x in $x = \log_5 125$!

1969
Ermitteln Sie die Winkel α, für die gilt: $\sin\alpha = 0{,}9011$, $0° \leqq \alpha \leqq 360°$!

Arbeit mit trigonometrischen Funktionen

1976
a) Durch die Gleichung $y = \frac{3}{2}\sin 2x (x \in P)$ ist eine Winkelfunktion gegeben.
Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion genau im Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$, und geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!
b) In dem nachfolgenden Bild ist eine Winkelfunktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ (a, b, $x \in P$) im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ dargestellt. Wie lautet die Gleichung in diesem speziellen Fall?



c) Gegeben sei der Term $\frac{1}{1-\sin x}$ $(x \in P)$.
Für welchen Wert von $x (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ ist dieser Term nicht definiert?

1975
Skizzieren Sie den Graph der Funktion $y = \sin\frac{1}{2}x$ $(x \in P)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 4\pi$!

1974
Gegeben sind Funktionen durch die folgenden Gleichungen:
$y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$
a) Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$! Benutzen Sie dabei ein und dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem, und kennzeichnen Sie jeden Graph durch die entsprechende Gleichung!
b) Geben Sie für $y = 2\sin x$ alle im angegebenen Intervall auftretenden Nullstellen an!
c) Geben Sie für $y = \sin 2x$ die kleinste Periode an!

1973
Skizzieren Sie den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = 2\sin x$ $x \in P$, im Intervall $0 \leqq x \leqq 3$! Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

Ärger, nichts als Ärger

Mein Bruder hat sich über die 5 in der Mathearbeit geärgert, und dann hat er sich über mich geärgert,
weil ich mich nicht auch über seine 5 in der Mathearbeit geärgert habe.
Dann hat er sich über sich selbst geärgert, weil er sich über mich geärgert hat,
weil ich mich nicht über seine 5 in der Mathearbeit geärgert habe.

K. Koch, Schmalkalden

Abschied von $1-9+7+6 = -\sqrt{(1^9)^7}+6$

$-1-9+7+6 = \sqrt{1+9-7+6}$
$= \frac{-1+9+7+6}{-1+9-7+6}$

Matthias Heinewetter, Heilbad Heiligenstadt

$1 \cdot 9 \cdot 7\dot{6} = \sqrt{19}(-7+6+19) \cdot \sqrt{76}$

Sabine Bruns, Braunschweig

$(19 \cdot 76) - (19 \cdot 7 \cdot \dot{6}) - (1 \cdot 97 \cdot 6) = (1+9) \cdot 7 - 6$

Helmut Hörmeyer, Innsbruck

$(\sqrt{19} \cdot \sqrt{76}) \cdot (1+9+7 \cdot 6) = 1976$

Sven Malies, Berlin (West)

$(1+97+6) \cdot (1 \cdot \sqrt{9}!+7+6) = 1976$

Rudolf Gutsch, Wien

$\frac{1976}{19} + \frac{1976}{76} = (1+9) \cdot (7+6)$

Prof. Dr. M. Wilke, Frankfurt (Main)

Zwei Aufgaben für unsere alpha-Leser:

▲1▲ Die Zahl 1976 läßt sich durch Zahlen, die durch die vier Grundrechenarten verknüpft sind und ganz bestimmten Bedingungen genügen, darstellen:

(1) Nur mit Hilfe von Zahlen, die mit der Ziffer 1 gebildet werden können:

1976 = (1111 − 111 − 11 − 1) · (11 + 11) : 11

(2) durch Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 9 vorkommen (jede Ziffer darf dabei nur einmal verwendet werden)

(3) nur mit Hilfe von Potenzen mit der Basis 2

(4) nur mit Hilfe von Potenzen mit der Basis 3

(5) nur mit Zahlen, die mit der Ziffer 4 gebildet werden können

(6) nur als Summe von Quadratzahlen

(7) nur als Summe von Kubikzahlen

Mathematikfachlehrer H. Kampe, Neuseddin

▲2▲ Man zeige, daß $1976^{1976} - 1976$ durch 1000 ohne Rest teilbar ist.

H. Oehl, München

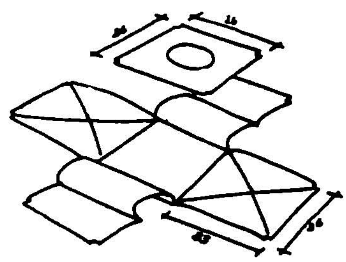
(Lösungen siehe S. 143)

Laßt Euer Licht leuchten!

Vliseline ist ein Material, das in der Schneiderei Verwendung findet. Es ist zwar nicht sonderlich steif, hat aber dafür schöne Transparenz.

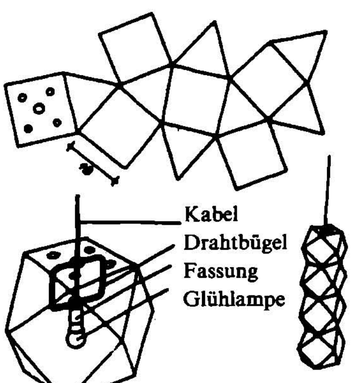
Modell 1

Dieses Modell ist denkbar einfach. Der Zuschnitt erfolgt wie in Bild 1. Man kann noch einige Bügelfalten anbringen. Es empfiehlt sich evtl. Bemalung vor der Montage vorzunehmen. Die acht Holzstäbchen sind etwa 28 cm lang und werden mit der Vliseline verklebt und an den Enden zusammengebunden. *L. Brandt, Berlin*



Modell 2

Das Material ist Zeichenkarton, eine Schere und etwas Duosan. Der Schnitt setzt sich aus sechs Quadraten und sechs gleichseitigen Dreiecken zusammen. Wenn du das Modell gleich viermal baust, kann sogar eine Art Stehlampe, die von der Decke hängt, werden. *L. Brandt*

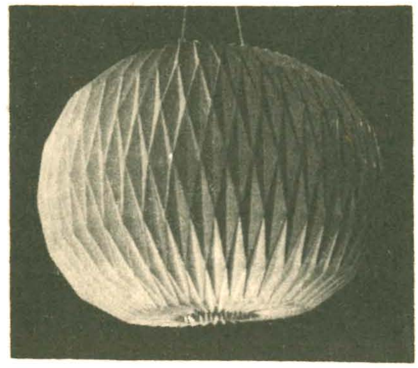


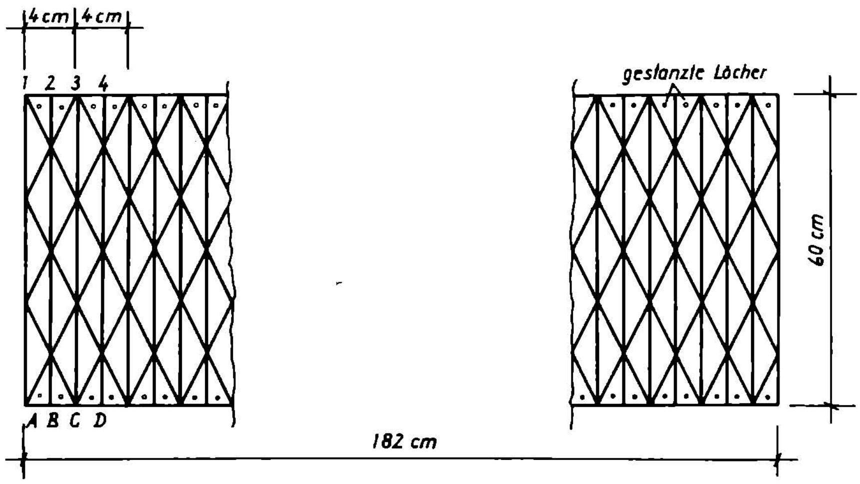
Modell 3

Zur Herstellung des auf dem Bild sichtbaren Lampenmodells führe die folgenden Arbeitsgänge aus.

Schneide von einer Rolle Zeichenkarton einen Bogen etwa vom Format 2,00 m mal 0,70 m ab. Darauf zeichne mittig ein Rechteck mit den Abmessungen 1,82 m × 0,60 m. Markiere auf der oberen und unteren Rechteckseite von dem linken oberen bzw. linken unteren Eckpunkt aus in 4 cm Abstand Punkte.

Bezeichne den linken oberen Eckpunkt und die 3 folgenden markierten Punkte der oberen Rechteckseite mit 1, 2, 3, 4 und den linken unteren Eckpunkt und die drei folgenden markierten Punkte der unteren Rechteckseite mit *A*, *B*, *C*, *D*.





Ritze mit einer Ziehfeder

a) zu $\overline{1, D}$ parallele Geraden (1. Parallelenschar) und

b) zu $\overline{A, 4}$ parallele Geraden (2. Parallelenschar) durch alle markierten Punkte in den Zeichenkarton ein;

c) im Abstand von 2 cm Parallele zur kleinen Rechteckseite in den Zeichenkarton ein (3. Parallelenschar).

Schneide das gezeichnete Rechteck (1,82 m mal 0,60 m) aus. Stanze am oberen und unteren Rand des Rechteckes Löcher aus (siehe Skizze).

Falte den Zeichenkarton längs jeder eingeritzten Geraden.

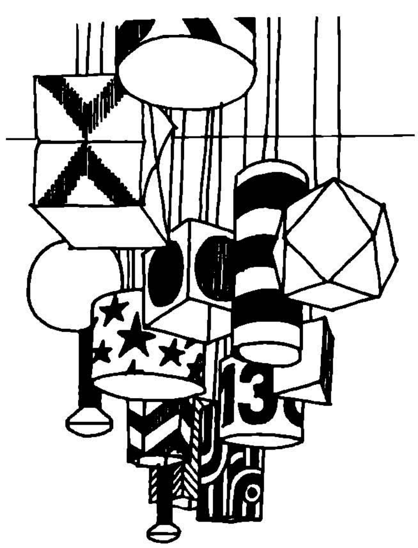
a) der 1. und dann der 2. Parallelenschar, so daß die eingeritzte Gerade innerhalb des gefalteten Zeichenkartons liegt;

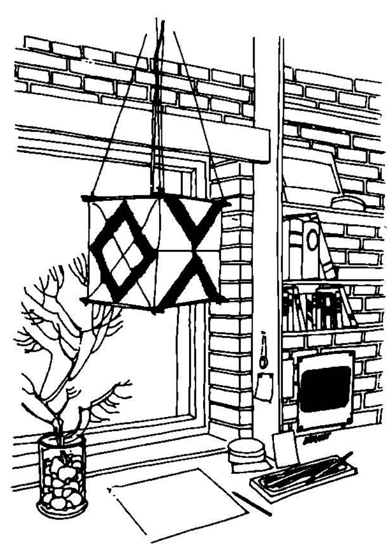
b) der 3. Parallelenschar, so daß bei jeder Faltung die eingeritzte Gerade von außen sichtbar ist.

Klebe die beiden kleinen Rechteckseiten längs eines möglichst schmalen Streifens zusammen. Die geritzten Linien sind von außen nicht sichtbar.

Fädele durch die vorhandenen Löcher zwei Fäden, ziehe sie jeweils zu einem kleinen Kreis zusammen und verknote sie.

E. Kühn, Weimar





Porträt eines Wissenschaftlers

Zum 500. Todestag von Johannes Müller

(Regiomontanus) 1436 bis 1476

Regiomontanus ist der herausragende europäische Mathematiker des 15. Jahrhunderts. Seine Zeit war durch ein Anwachsen der antifeudalen Klassenkämpfe in Stadt und Land und die Entwicklung neuer Elemente in der Wirtschaft auf Grundlage einer breiten Entfaltung der Warenproduktion gekennzeichnet. Auf geistigem Gebiet zeigten sich erste antifeudale Gedanken in der Philosophie des *Nicolaus Cusanus*. Die äußerten sich vor allem in seiner Hinwendung zu den Naturwissenschaften, zur dialektischen Betrachtungsweise aller Erscheinungen und zu humanistischen Gedanken. Gleichzeitig eröffnete die bahnbrechende Erfindung des Buchdrucks mit beweglichen Lettern durch *J. Gutenberg* um 1445 völlig neue Möglichkeiten zur Verbreitung des Wissens.

Als theoretische Grundlage für die Entwicklung der Produktivkräfte und als ideologische Waffe des Bürgertums formte sich in dieser Zeit die wissenschaftliche Naturforschung. Zudem wurden mathematische Methoden vervollkommnet und neu entdeckt. Zu den bedeutenden mathematischen Disziplinen entwickelten sich *Trigonometrie* und *Algebra* als Vorstufe der modernen Algebra. Die Herausbildung der Trigonometrie als mathematische Disziplin war eng mit dem Wirken von *Regiomontanus* verknüpft.

Johannes Müller wurde am 6. Juni 1436 in Königsberg oder im nahegelegenen Dorf Unfinden geboren. Nach der Stadt Königsberg nannte er sich latinisiert *Regiomontanus* oder auch *Johannes de monte Regio*.

Bereits mit elf Jahren nahm er ein Studium an der Universität Leipzig auf, das er drei Jahre später in Wien fortsetzte. Die Universität Wien zeichnete sich durch eine besondere Pflege der Mathematik aus. Gleichzeitig nahmen staatlich-politische Aufgaben einen vorrangigen Platz ein, da Wien die Residenzstadt der Habsburger war. Auf diese Weise konnte *Regiomontanus* in Wien nicht nur seine mathematischen Kenntnisse vervollständigen, sondern kam in noch stärkerem Maße mit Fragen des Kalenderwesens, der Zeit- und Ortsbestimmung und der Astrologie in Berührung. Außerdem übte der Mathematiker und Astronom *Georg Peuerbach* (1423 bis 1461) als Anhänger der neuen humanistischen Bildung einen maßgeblichen Einfluß auf den Werdegang *Regiomontanus*' aus. *Peuerbachs* besonderes Verdienst bestand darin, daß er seine Schüler auf die Auswertung des antiken Wissens lenkte.

1461 ging *Regiomontanus* im Gefolge des Kardinals *Johannes Bessarion*, der in der Kirchenpolitik eine bedeutende Rolle spielte und besonderes Interesse für Mathematik, Astronomie und das antike Erbe zeigte, für mehrere Jahre nach Italien. Das war eine der wissenschaftlich fruchtbarsten Zeiten für *Regiomontanus*. Hier setzte er die Neubearbeitung und Übersetzung des „Almagest" von *Ptolemäus* fort, die sein inzwischen verstorbener Lehrer *Peuerbach* begonnen hatte. In Verbindung mit diesem Werk, das ausführliche Kapitel über trigonometrische Berechnungen enthält, fertigte *Regiomontanus* seine bedeutende Arbeit über Trigonometrie an. Die Beschäftigung mit der historischen Entwicklung mathematischer Kenntnisse befähigten *Regiomontanus*, das bis zu seiner Zeit angesammelte Wissen über Trigonometrie zu ordnen und zum Teil weiterzuentwickeln.

In den folgenden Jahren setzte *Regiomontanus* seine Tätigkeit in Nürnberg, eine der größten Handelsstädte Deutschlands, fort. Mit Unterstützung des wohlhabenden Nürnberger Patriziers, des Instrumentenbauers *Bernhard Walther*, errichtete er eine eigene Druckerei und eine Werkstatt zur Anfertigung astronomischer Geräte. Gemeinsam betrieben sie astronomische Beobachtungen und nutzten die Vorzüge des Buchdrucks, um antike Schriften, die Werke *Regiomontanus*' und *Peuerbachs* zu verbreiten. In Nürnberg berechnete und vervollständigte *Regiomontanus* eine Reihe von „Ephemeriden", astronomische Tafelwerke, die für jeden Tag eines gewissen Zeitraumes die Stellung der Planeten angaben. Die Genauigkeit seiner Berechnungen übertraf alle vorhergehenden weit.

Die erfolgreiche Tätigkeit in Nürnberg, seine umfangreichen wissenschaftlichen Vorhaben wurden 1475 durch eine Reise nach Italien unterbrochen. Der Papst hatte *Regiomontanus* nach Rom gerufen, um sein Urteil über die notwendige Kalenderform zu erfahren.

In Rom starb *Johannes Müller* am 6. Juli 1476 im Alter von vierzig Jahren.

Dr. Renate Tobies, aus: technikus 6/76

Mathematiker aus 37 Jahrhunderten

Carl Friedrich Gauß behauptete von sich, daß er eher rechnen als sprechen gelernt hätte. Und es ist überliefert, daß er mit drei Jahren in einer Lohnabrechnung seines Vaters einen Fehler aufspürte. Mit neun oder zehn Jahren machte er seine erste mathematische Entdeckung: Als der Lehrer die Aufgabe stellte, die Zahlen eins bis einhundert zu addieren, sah er auf einen Blick:

$1+2+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+(50+51)=50\cdot 101=5050$, und fand somit die Summenformel für die arithmetische Reihe.

Im Laufe seines Lebens vollbrachte Gauß, einer der größten Wissenschaftler, hervorragende Leistungen auf allen Gebieten der Mathematik, aber auch in der Statistik, Astronomie, Geodäsie, Physik und Geophysik.

Gauß ist einer von rund 50 Gelehrten, deren Leben und Werk in den „Biographien bedeutender Mathematiker" ausführlich vorgestellt werden. Das Buch aber bringt mehr, als sein Titel aussagt. Überblick zur Mathematik in einzelnen Perioden, von der Antike bis zum 20. Jahrhundert, beleuchten diese Wissenschaft vor dem gesellschaftlichen Hintergrund der jeweiligen Zeit. So ist das Werk, auch wenn es diesen Anspruch nicht erheben will, fast eine „Geschichte der Mathematik", denn es wird immerhin auf das Wirken von rund 50 Mathematikern und anderen Persönlichkeiten eingegangen. Eine solche Darstellung hat in unserer Fachliteratur seit langem gefehlt. Der historische Bogen ist, wie das bei der Mathematik nicht anders sein kann, weit gespannt. Er beginnt schon lange vor dem ersten namentlich bekannten Mathematiker, dem ägyptischen Königsschreiber *Ahmes* aus dem 17. Jahrhundert vor unserer Zeit und erfaßt schließlich hervorragende sowjetische Mathematiker, die heute entscheidend diese Wissenschaft beeinflussen.

Das Buch soll nicht nur Schülern, Lehrern, Studenten und Dozenten empfohlen werden, sondern allen, die sich für die Geschichte einer Wissenschaft interessieren. Es bringt eine Menge interessanter Fakten und ist in verständlicher Form geschrieben.

Dr. Christian Heermann