

alpha

C. F. Gauss



1777

1977

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31 059

1

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat D. R. Lüders (Ber-
lin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz);
Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132 626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv des *alpha*-Clubs der 29. OS,
Leipzig (S. 1, 7)

Vignetten: K.-H. Guckuck, H. Teske, Leipzig;
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluss: 23. Oktober 1976

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) [5]*
Biographie (Leseprobe)
Nationalpreisträger Prof. Dr. H. Reichardt, Humboldt-Universität zu Berlin
 - 4 Quadratische Reste, Teil I [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut Math./Mech. der Akademie der Wi. der DDR
 - 6 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Förste [9]
Institut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR
 - 7 Das Mathematische Tagebuch von C. F. Gauß [7]
Dr. R. Thiele, Lektor, BSB B. G. Teubner, Leipzig
 - 8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Autorenkollektiv
 - 11 Nachgedacht – mitgemacht [5]
Aufgaben, die das Leben schreibt
Dr. E. Stöckel, Sektion Mathematik/Physik, Päd. Hochschule „N. K. Krupskaja“, Halle
 - 12 Logeleien [5]
speziell für Klasse 5/6 · *alpha*-Wandzeitung
Dr. R. Thiele, BSB B. G. Teubner, Leipzig
 - 14 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: StR L. Lehmann, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
 - 16 XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Kreisolympiade (17. 11. 1976)
 - 18 Lösungen [5]
 - 23 *alpha*-Wettbewerb · Abzeichen in Gold [5]
Träger des Abzeichens in Gold
- IV. Umschlagseite:
Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Vorbildliche Oberschule: Steinbach-Hallenberg

Die mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ wurde
anlässlich ihres 10jährigen Bestehens vom Zentralrat der FDJ
am 13. 12. 1976, dem 28. Geburtstag
der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“, mit der Artur-Becker-
Medaille in Gold ausgezeichnet.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Carl Friedrich Gauß

1777 bis 1855



Im letzten Viertel eines Jahrhunderts, in dem sich die Entwicklung der Mathematik weitgehend außerhalb von Deutschland vollzogen hatte, wuchs in Braunschweig Carl Friedrich Gauß zum größten Mathematiker seiner Zeit heran. Nach seinem Tode wurden auf Veranlassung des Königs von Hannover Münzen geprägt, auf denen Gauß als „Princeps mathematicorum“ (Fürst der Mathematiker) bezeichnet wurde. Dieser Titel wurde allgemein anerkannt. Man kann Gauß als einen der größten Wissenschaftler überhaupt ansehen. Gauß kam aus ganz einfachen Verhältnissen. Sein Vater, Gerhard Dietrich Gauß, hat eine ganze Reihe von Berufen ausgeübt; so war er zum Beispiel Gärtner, „Weißbinder“ und Kassierer einer Versicherung.

Gauß' Mutter Dorothea geb. Benze hatte vor ihrer Ehe, die die zweite ihres Mannes war, als Magd gearbeitet. Carl Friedrich war ihr einziges Kind. Gauß schilderte seinen Vater als rechtschaffenen und geachteten Mann und als guten Rechner, der allerdings zu Hause herrisch und rauh gewesen sei.

Die mathematische Begabung zeigte sich bei Gauß sehr früh. Er hat später einmal von sich behauptet, daß er eher rechnen als sprechen gelernt hätte. Von ihm wird erzählt, daß er mit drei Jahren beim Anhören einer Lohnabrechnung seines Vaters einen Fehler entdeckt und sofort das richtige Resultat angegeben habe. Als er auf der Volksschule mit etwa neun oder zehn Jahren in die Rechenklasse kam, löste

er die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen, in wenigen Augenblicken folgendermaßen:

$$1 + 2 + \dots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050,$$

das heißt, er entdeckte das Prinzip der Summenformel für die arithmetische Reihe. Seine Lehrer wurden bald auf ihn aufmerksam. Vor allem interessierte sich der Gehilfe des Lehrers Büttner, D. M. Chr. Bartels, der nur acht Jahre älter als Gauß und mathematisch sehr aktiv war, für ihn und unterstützte Gauß bei dessen mathematischer Entwicklung sehr tatkräftig. Gauß kam 1788 von der Volksschule auf das Gymnasium Catharineum. Bartels, der gleichzeitig eine Stelle im Collegium Carolinum, der späteren Technischen Hochschule, bekam und später Professor der Mathematik in Kasan und Dorpat war, wurde auf Gauß aufmerksam. Gauß fiel aber nicht nur durch seine mathematischen Leistungen, sondern durch seine schnellen Fortschritte in den Fremdsprachen auf und wurde 1791 durch v. Zimmermann dem Herzog von Braunschweig vorgestellt, der ihm Stipendien für den Besuch des Gymnasiums, später für das Studium in Göttingen und auch noch für die anschließende Zeit gewährte, bis Gauß im Jahre 1807 Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen wurde. Bis dahin hatte sich Gauß längst als überragender Mathematiker ausgewiesen. 1791 beschäftigte er sich mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel von zwei positiven reellen Zahlen α und β , das man erhält, wenn

$$\text{man zu } \alpha' = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ und } \beta' = \sqrt{\alpha\beta} \text{ übergeht und}$$

diesen Prozeß beliebig oft wiederholt. 1792 vermutete er auf Grund von Abzählungen in Primzahltafeln den Primzahlsatz, nach dem die Anzahl der Primzahlen unterhalb von x asymptotisch gleich $\frac{x}{\ln x}$ ist, und der erst

mehr als 100 Jahre später nach einer langen Entwicklung der Funktionentheorie bewiesen werden konnte. Außerdem beschäftigte er sich mit dem Parallelen-Axiom. Schon damals, also im Alter von 15 Jahren, untersuchte er, wie eine Geometrie aussehen müsse, in der das Parallelen-Axiom nicht gilt.

Von 1795 bis 1798 studierte Gauß in Göttingen, und zwar zunächst Mathematik und Philologie. Den endgültigen Entschluß, ausschließlich Mathematik zu studieren, faßte Gauß aber erst, als er 1796 erkannt hatte, welche regelmäßigen Vielecke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Er löste damit ein Problem, das seit der Antike keinen Schritt einer Lösung näher gebracht worden war.

Die Ankündigung der Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks war Gauß' erste wissenschaftliche Publikation, und von dem Tage der Entdeckung an führte er sein wissenschaftliches Tagebuch, in das er seine wichtigsten Ergebnisse viele Jahre lang eintrug.

Während Gauß in diesem Zusammenhang die komplexen Zahlen ohne Bedenken benutzte, vermied er sie, da sie damals noch kein „Bürgerrecht“ in der Mathematik hatten, in seiner Dissertation systematisch, in der er den ersten strengen Beweis für den Fundamentalsatz der klassischen Algebra gab, der in seiner „reellen“ Formulierung besagt, daß sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in ein Produkt ebensolcher Polynome 1. und 2. Grades zerlegen läßt. Er promovierte damit Ende 1799 in Helmstedt, und zwar in Abwesenheit, wurde aber von dem dortigen Mathematiker J. F. Pfaff zu einem Aufenthalt für einige Monate eingeladen, der sehr harmonisch und fruchtbar verlief.

Inzwischen hatte Gauß eine Leistung vollbracht, die wohl einzigartig in der Geschichte der Mathematik dasteht: In den Jahren 1796 bis 1798, also im Alter von 19 bis 21 Jahren, schrieb er sein erstes Buch, die „Disquisitiones arithmeticae“ (Arithmetische Abhandlungen). Bis dahin war die Zahlentheorie eine Sammlung von zahlreichen interessanten, schönen und größtenteils auch recht tief liegenden Einzelergebnissen gewesen, die aber kaum miteinander zusammenhängen. Die sehr inhaltsreiche und äußerst lebendig geschriebene „Vollständige Anleitung zur Algebra“ von L. Euler bietet dafür ein Musterbeispiel. Durch die „Disquisitiones arithmeticae“ aber wurde die Zahlentheorie mit einem Schlag zu einer einheitlichen und systematischen Wissenschaft; in der Theorie der Kongruenzen (1. Hauptteil) erhielt sie eine durchsichtige und tragfähige Grundlage, auf der sich die Theorie der quadratischen Formen (2. Hauptteil) und der Kreisteilung (3. Hauptteil) errichten ließ.

Zwar befanden sich im 2. und 3. Hauptteil lange und komplizierte Rechnungen sowie schwierige rechnerische Ansätze, so daß es als Wunder erscheinen könnte, daß dabei überhaupt interessante Ergebnisse herauskamen. Studiert man aber das Werk gründlicher, so erkennt man, welch tiefes strukturelles Denken dahinter steckt, durch das die Fragestellungen und Ansätze erst motiviert und die Rechnungen durchsichtig werden. Während des Druckes der „Disquisitiones arithmeticae“, der sich bis 1801 hinzog, beschäftigte sich Gauß damit, eine Theorie der elliptischen Funktionen, der ϑ -Reihen und der Modul-funktionen aufzubauen, ohne davon etwas zu veröffentlichen. Später waren dann Mathematiker wie Abel und Jacobi viele Jahre unabhängig von Gauß damit beschäftigt, die gleiche Theorie zu durchforschen. Die Zurückhaltung von Gauß ist vielleicht damit zu

Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

C. F. Gauß

begründen, daß seine Theorie seinen Prinzipien „*Pauca sed matura*“ (Weniges, aber Reifes), mathematische Strenge wie bei den alten Griechen, und „*ut nihil amplius desiderandum relictum sit*“ (daß nichts mehr zu wünschen übrig bleibe) noch nicht genüge; wahrscheinlich vermiste er noch die Möglichkeit einer Einordnung in allgemeinere Gesetzmäßigkeiten.

Im Jahre 1801 wurde dann Gauß nach dem Erscheinen der „*Disquisitiones arithmeticae*“ unter den Mathematikern weltberühmt, und die Petersburger Akademie wählte ihn zu ihrem korrespondierenden Mitglied.

Im gleichen Jahr begann aber auch seine Wirkung als Astronom (Weltberühmtheit sich allgemein durchzusetzen). In der Neujahrsnacht zum 19. Jahrhundert, am 1. Januar 1801, war der erste kleine Planet „Ceres“ durch den italienischen Astronomen G. Piazzi beobachtet worden, doch ging er zunächst nach 40tägiger Beobachtung wieder verloren. Den damaligen Astronomen war es nicht möglich, aus diesen wenigen Daten eine Bahn einigermaßen exakt zu bestimmen. Gauß wandte sich diesem Problem zu und entwickelte neue Methoden, um eine Keplerbahn aus nur drei Beobachtungen zu berechnen. Da aber mehr Beobachtungen vorlagen, hatte er die Möglichkeit, seine Prinzipien der Ausgleichsrechnung anzuwenden, und bestimmte die Bahnelemente so genau, daß Ceres von mehreren Astronomen Ende 1801 und Anfang 1802 wieder aufgefunden werden konnte. Seine Mitteilung an den Verleger, dieses Buch werde noch nach Jahrhunderten studiert werden, war berechtigt; noch heute erfolgt die Bahnbestimmung nach den Gaußschen Methoden, wobei natürlich der Rechengang wegen des Einsatzes der elektronischen Rechenmaschinen modifiziert worden ist.

Astronomie und Zahlentheorie fesselten von nun an Gauß in gleichem Maße. Einerseits nannte er die Mathematik die Königin der Wissenschaften und die Zahlentheorie die Königin der Mathematik, andererseits aber betrachtete er – wie er sich in einem Briefe an seinen Jugendfreund W. Bolyai vom 20. Juni 1803 ausdrückte – die reine Größenlehre (Zahlentheorie) und die Astronomie als die beiden Pole seiner wissenschaftlichen Wirksamkeit, „nach denen sich mein Geisteskompaß immer wendet“. Außerdem ergänzten sich beide Wissenschaften für ihn insofern, als er die geringe Anwendbarkeit der Zahlentheorie kannte und sich seinem Staat gegenüber für die Förderung seiner zahlentheoretischen Forschungen dadurch dankbar erweisen wollte, daß er sich auch Dingen mit aller Kraft zuwandte, die unmittelbaren praktischen Nutzen brachten.

Im Jahre 1803 lehnte er einen Ruf auf eine Professur in St. Petersburg ab, da ihm der Herzog von Braunschweig seine finanzielle Lage verbesserte und den Bau einer eigenen

Sternwarte in Aussicht stellte. Jedoch wurde der Herzog 1806 in der Schlacht gegen Napoleon bei Jena und Auerstedt tödlich verletzt. 1807 wurde Gauß Professor in Göttingen und blieb dort in dieser Stellung bis zu seinem Lebensende.

Seine erste Ehe schloß Gauß 1805 mit Johanna Osthoff aus Braunschweig. Sein erster Sohn, geboren 1806, wurde Artillerieoffizier und Oberbaurat an der Eisenbahndirektion in Hannover, und seine erste Tochter, geboren 1808, heiratete 1830 den Professor G. H. Ewald, einen bedeutenden Göttinger Philologen, der 1837 nach Tübingen ging, wo seine Frau indessen schon 1840 starb. Ewald war einer der „Göttinger Sieben“, das heißt ein von sieben Göttinger Universitätsprofessoren, die 1837 dem König den Treueid verweigerten, als dieser die neue Verfassung außer Kraft setzte und auf die reaktionäre alte zurückgriff. Dieser Protest wurde vom König mit der Entlassung der sieben Professoren beantwortet.

Bald nach der Geburt des dritten Kindes, 1809, starb Gauß' Frau, und das Kind überlebte sie nur wenige Monate. Trotz dieses schweren Schlages heiratete Gauß der Kinder wegen bereits im Jahre 1810 Wilhelmine Waldeck, die Tochter eines Göttinger Professors der Rechte. Dieser Ehe entstammen zwei Kinder. Der 1811 geborene Sohn wurde von seinem Vater als „Taugenichts“ bezeichnet, wanderte 1830 nach Amerika aus und starb dort 1896 als wohlhabender Farmer. Die Tochter Therese, geboren 1816, blieb im Hause des Vaters und pflegte ihn bis zu dessen Tode; Gauß' zweite Frau starb schon 1831. Therese selbst überlebte ihren Vater nur neun Jahre. Zu erwähnen ist noch, daß Gauß' Mutter im Alter von 75 Jahren zu ihm in die Dienstwohnung der Sternwarte zog, wo sie noch 22 Jahre lebte.

Schon als Student war Gauß 1799 bei der trigonometrischen Vermessung von Westfalen konsultiert worden. 1818 erhielt er den ministeriellen Auftrag, die Hannoversche Triangulierung durchzuführen.

Gauß begnügte sich aber nicht mit der Vermessung eines solchen Gebietes, sondern war äußerst interessiert an der Bestimmung der Gestalt der Erde durch weltweite Vermessungen. Diese Bestrebungen waren für ihn der Anlaß zur Beschäftigung mit zwei wichtigen theoretischen Fragestellungen, nämlich zunächst der Frage nach den konformen Abbildungen einer Fläche des Raumes auf eine andere, und dann der Frage nach den Schlüssen, die man aus Ergebnissen von Messungen, die sich nur auf die Längen von Kurven auf einer gegebenen Fläche und den Winkeln zwischen ihnen beziehen, über die Gestalt der Fläche im Raum ziehen kann. Flächen, die ineinander ohne Dehnung verbogen werden können, unterscheiden sich in ihrer Metrik nicht; die neue Gaußsche „innere Geometrie“ einer Fläche beschäftigt

sich also mit Biegungsvarianten. Aufs engste mit Gauß' Interessen für Astronomie und Geodäsie hingen seine potentialtheoretischen Untersuchungen zusammen. Zunächst behandelte er 1813 ein spezielles Problem, nämlich die bis dahin nur unvollständig beantwortete Frage nach der Anziehung eines allgemeinen homogenen Ellipsoids, wobei er Integralsätze benutzte.

Die regelmäßige Lektüre auswärtiger Zeitungen, die in einer Göttinger Lesestube auslagen, gab ihm die Möglichkeit, die Börsen Nachrichten systematisch auszuwerten und daraufhin sehr erfolgreiche Börsengeschäfte abzuschließen, so daß seine so gewonnenen Einnahmen sein Gehalt als Göttinger Professor wesentlich überstiegen. Andererseits hat er von 1845 bis 1850 sehr langwierige Untersuchungen und Berechnungen zur Reorganisation der Göttinger Professoren-Witwenkasse angestellt, die dadurch in Schwierigkeiten gekommen war, daß 1844 die Anzahl der Professorenwitwen stark angestiegen war und die vorgesehenen Pensionen nicht mehr gezahlt werden konnten.

Wie schon erwähnt, hat sich Gauß schon im Alter von 15 Jahren damit beschäftigt, die Eigenschaften einer Geometrie zu untersuchen, in der alle Axiome des Euklid mit Ausnahme des Parallelenaxioms gelten. Man hatte seit der Antike versucht, das Parallelenaxiom seiner besonderen Struktur wegen aus den anderen Axiomen herzuleiten. Alle vermeintlichen Beweise waren aber daran gescheitert, daß an irgendeiner unauffälligen Stelle eine scheinbare Selbstverständlichkeit benutzt wurde, zum Beispiel, daß es Dreiecke mit beliebig großem Flächeninhalt gibt, die aber in Wirklichkeit nur mit Hilfe des Parallelenaxioms zu beweisen war. Gauß hat eine ganze Reihe solcher Fehler aufgedeckt.

Da es nun bisher nicht gelungen war, die Abhängigkeit des Parallelenaxioms von den anderen euklidischen Axiomen direkt zu beweisen, konnte man versuchen, eine Geometrie aufzubauen, in der durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mindestens zwei Geraden hindurchgehen, die die gegebene Gerade nicht schneiden, in der Hoffnung, dabei zu einem Widerspruch zu kommen. Gauß aber kam bei solchen Untersuchungen immer weiter vorwärts und erhielt so interessante und weitgehende Resultate, daß er immer mehr zur Überzeugung kam, eine solche Geometrie könne in sich frei von Widersprüchen sein. Er hat darüber nichts veröffentlicht.

Im Gegenteil: Einige vertraute Bekannte, denen er seine Ansichten darüber mitteilte, hat er gebeten, völliges Stillschweigen zu bewahren, da er das Geschrei der Böötier (ein altgriechischer Volksstamm, der als denkfaul, schwerfällig und unkultiviert galt) fürchtete. Er warnte sie, solche Ideen zu publizieren, da sie sonst – wie er sich in einem Brief an Chr. L. Gerling ausdrückte – ein Wespennest aufstören würden. Zu Anfang des 19. Jahr-

hundreds arbeiteten unabhängig voneinander und etwa gleichzeitig zwei junge Mathematiker die nichteuklidische Geometrie aus und veröffentlichten sie. Ab 1829 erschien darüber in Kasan in Rußland eine Serie von Abhandlungen von N. I. Lobatschewski, und 1823 publizierte J. Bolyai in Ungarn seine Geometrie als Anhang eines Mathematikbuches seines Vaters W. Bolyai, der ein Studienfreund von Gauß war, von diesem die Schwierigkeiten der Bemühungen um das Parallelenaxiom kannte und seinen Sohn dringend beschworen hatte, von seinen Untersuchungen abzulassen, weil sie aussichtslos seien.

Gauß erfuhr zunächst von Bolyais Resultaten. In einem Brief an Chr. L. Gerling bezeichnete er J. Bolyai als ein Genie erster Größe.

An den Vater Bolyais aber schrieb er, er dürfe dessen Sohn nicht loben, da das hieße, sich selbst zu loben; denn der ganze Inhalt sei ihm, zum Teil schon seit fast 30 Jahren, aus eigenen Untersuchungen bekannt. Auf den jungen Bolyai wirkte dieser Brief natürlich niederschmetternd, und besonders in Ungarn hat man Gauß' Reaktion sehr übelgenommen.

Erst allmählich, etwa ab 1841, kamen die an deutschen Universitäten schwer zugänglichen, noch dazu russisch geschriebenen ersten Arbeiten von Lobatschewski zu Gauß' Kenntnis. Gauß begriff sofort die Bedeutung dieser Publikationen und begann, um sie genauer studieren zu können, mit bestem Erfolg russisch zu lernen, was er gleichzeitig als Erprobung der Elastizität seines Geistes (er stand ja damals schon im 7. Jahrzehnt seines Lebens) ansah.

Im Jahre 1828 nahm Gauß als Gast von A. v. Humboldt an einer großen Naturforscherversammlung in Berlin teil und kam dort mit dem Physiker W. E. Weber in Kontakt, der sich nach Weßers Berufung 1831 nach Göttingen zu einer engen Zusammenarbeit ausgestaltete. Ihr erstes gemeinsames Thema war der Erdmagnetismus. Zwar organisierten sie eine weltweite Beobachtung des Erdmagnetismus, aber für Gauß waren die theoretischen Eroberungen die Hauptsache. Trotzdem kümmerte sich Gauß aber auch um neue Beobachtungsmethoden, die eine wesentliche Erhöhung der Meßgenauigkeit mit sich brachten (Erfindung des Magnetometers). Gauß und Weber erfanden 1833 gemeinsam den elektromagnetischen Telegraphen, den sie gleich zu einem Nachrichtendienst zwischen dem Physikalischen Institut und der Sternwarte benützten.

Sonstige physikalische Arbeiten bezogen sich auf die Mechanik, wo Gauß das Prinzip des kleinsten Zwangs aufstellte, und auf die Optik, wo er die bisherigen Berechnungsmethoden für den Durchgang von Lichtstrahlen durch ein Linsensystem wesentlich verbesserte.

Die Wirkung von Gauß auf die Mathematiker seiner Zeit erfolgte fast ausschließlich

durch seine Publikationen. Gegen Vorlesungen hegte er einen großen Widerwillen, direkte Schüler der Mathematik hatte er nicht, und die Korrespondenz mit mathematischen Kollegen war äußerst gering im Vergleich mit dem sehr umfangreichen Briefwechsel, den er mit seinen Bekannten und Freunden aus dem Bereich der Astronomie führte.

So waren zu seinem 50jährigen Doktorjubiläum 1849 nur zwei Mathematiker, Dirichlet und Jacobi, nach Göttingen gekommen.

Bei dieser Gelegenheit erhielt er das Ehrenbürgerrecht der Stadt Göttingen, und darüber hat er sich mehr gefreut als über die vielen Ehrungen, die er etwa 50 Jahre lang in Gestalt von Berufungen an andere Universitäten – er blieb aber in Göttingen – und von Wahlen in wissenschaftliche Akademien und gelehrte Gesellschaften empfing. Im Wintersemester

1850/51 hielt er noch Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate; unter den wenigen Hörern befand sich der damals 19jährige Dedekind, der von Gauß' Gesamtpersönlichkeit aufs tiefste beeindruckt wurde. In den folgenden Jahren verschlechterte sich der Gesundheitszustand von Gauß immer mehr, bis sein Leben am 23. Februar 1855 erlosch.

H. Reichardt (gekürzt aus: „Biographien bedeutender Mathematiker“ – als Leseprobe)

Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist.
C. F. Gauß

Lebensdaten zu Carl Friedrich Gauß

1777	30. April, Carl Friedrich Gauß in Braunschweig geboren
1784	Besuch der Volksschule
1788	Eintritt ins Gymnasium Chatarineum
1792	Aufnahme in Collegium Carolinum
1795	Beginn des Studiums in Göttingen
1796	Mit der Entdeckung der Konstruktion des regulären 17-Ecks beginnt Gauß, sein wissenschaftliches Tagebuch zu führen
1799	Promotion in Abwesenheit in Helmstedt; anschließend dort Aufenthalt bei J. F. Pfaff bis Ostern 1800
1801	Die „Disquisitiones arithmeticae“ erscheinen Gauß berechnet die Bahnelemente der Ceres
1805	Heirat mit Johanna Osthoff
1807	Gauß wird Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen
1809	„Theoria motus corporum coelestium...“ erscheint im Druck Tod von Frau Johanna und des dritten Kindes
1810	Gauß schlägt eine Berufung nach Berlin aus Heirat mit Wilhelmine Waldeck
1811	Ausbau der Göttinger Sternwarte beginnt
1812	Studien zur Reihenlehre
1818	Gauß erhält den Auftrag zur Vermessung des Königreiches Hannover
1820	Gauß erfindet den Heliotropen
1821 bis 1825	Gauß leitet die geodätischen Arbeiten im Gelände
1824	Endgültiges Scheitern der Berufungsverhandlungen nach Berlin
1827	Erscheinen der „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ im Druck
1828	Teilnahme an der Naturforscherversammlung in Berlin, zu Gast bei Alexander von Humboldt, Bekanntschaft mit Wilhelm Weber
1829	Gauß stellt das physikalische Prinzip des kleinsten Zwanges auf
1831	Seine zweite Frau stirbt. Wilhelm Weber wird nach Göttingen berufen
1832	Gauß und Weber stellen ein absolutes physikalisches Maßsystem auf Erdmagnetische Untersuchungen
1839	Gauß stellt die Grundlagen einer allgemeinen Potentialtheorie dar
1841	Gauß lernt die Arbeiten von N. I. Lobatschewski kennen und erlernt die russische Sprache
1849	Feier des 50jährigen Doktorjubiläums von Gauß in Göttingen Die letzte Abhandlung
1855	23. Februar, Tod in Göttingen

Quadratische Reste

Teil 1

1. Die Zahlen

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

heißen *ganze Zahlen*. Man kann ganze Zahlen multiplizieren und erhält wieder ganze Zahlen. Wenn man jedoch ganze Zahlen dividiert, ergeben sich nicht immer ganze Zahlen. Ist dies doch der Fall, so liegt eine besondere Eigenschaft vor. Sind a und b ganze Zahlen und ist ihr Quotient $\frac{a}{b}$ wieder eine ganze Zahl,

so heißt b ein Teiler von a oder a ein Vielfaches von b . Dieses drücken wir kurz durch das Zeichen „ $b \mid a$ “ aus. Wir schreiben „ $b \nmid a$ “, wenn b nicht Teiler von a ist, also der Quotient $\frac{a}{b}$ keine ganze Zahl ist.

Beispiele:

$37 \mid 111$, $-7 \mid 1001$, $1 \mid -1973$, $1979 \mid 1979$, $2 \nmid -1977$, $3 \nmid 1977$, $9 \nmid 66$. Jede Zahl a ($a \neq 0$) hat die vier Teiler $+1$, -1 , $+a$, $-a$. Es gibt Zahlen p , die nur die vier Teiler $+1$, -1 , $+p$, $-p$ (und keine anderen) haben.

Beispiele:

$+2$, -2 , $+3$, -3 , $+37$, -37 , $+997$, -997 , $+1973$, -1973 , $+1979$, -1979 , $+3989$, -3989 .

Solche Zahlen p , die genau vier Teiler (nämlich $+1$, -1 , $+p$, $-p$) haben, heißen *Primelemente*; die Zahlen $+1$, -1 gehören also nicht zu den Primelementen. Die positiven Primelemente heißen *Primzahlen*. Die Folge der Primzahlen beginnt mit

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Die größte bekannte Primzahl ist $2^{19937} - 1$. Je größer die Zahlen werden, um so seltener treten Primzahlen auf. Daß die Folge der Primzahlen jedoch nicht abbricht, hat zuerst *Euklid* bewiesen. Man kann sogar in einem gewissen Sinne sagen, daß es wesentlich „mehr“ Primzahlen als Quadratzahlen gibt.

Die Folge der Quadratzahlen beginnt mit

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

Die (unendliche) Summe über alle Reziproken der Quadratzahlen

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \dots$$

liegt zwischen $\frac{5}{4}$ und $\frac{7}{4}$ (sie ist genau $\frac{\pi^2}{6}$). Die (unendliche) Summe über alle Reziproken der Primzahlen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \dots$$

ist jedoch unendlich groß!

2. Es sei nun eine Primzahl p gegeben. Wir betrachten alle ganzzahligen Vielfachen von p , welche nicht größer als eine gegebene Zahl a sind.

Beispiele:

1) $p=7$, $a=66$. Die Vielfachen von 7, welche nicht größer als 66 sind, sind

..., -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.

2) $p=11$, $a=-18$. Die Vielfachen von 11, welche nicht größer als -18 sind, sind

..., -55, -44, -33, -22.

Unter diesen gibt es ein größtes Vielfaches, etwa qp mit einer ganzen Zahl q . (In den Beispielen: 1) $9 \cdot 7$, 2) $(-2)11$).

Es ist also qp nicht größer als a (d. h. $qp \leq a$), jedoch $(q+1)p > a$. $qp \leq a$ bedeutet, daß es eine Zahl $r \geq 0$ gibt, die zu qp addiert gerade a ergibt, also

$$a = qp + r, \text{ wobei } r \geq 0 \text{ ist.}$$

(In den Beispielen: 1) $66 = 9 \cdot 7 + 3$,

2) $-18 = (-2)11 + 4$.)

$a < (q+1)p$ besagt, daß $r < p$ sein muß; denn wäre $r \geq p$, so müßte

$r = a - qp \geq p$ sein, d. h. $a \geq p + qp = (q+1)p$, was $a < (q+1)p$ widerspricht.

Es gibt also genau eine ganze Zahl r mit $0 \leq r < p$, so, daß

$$(1) \quad a = qp + r$$

mit einer ganzen Zahl q ist. (Die Aussage $p \mid a$ ist natürlich gleichbedeutend mit $r=0$.)

Die Zahl r heißt der Rest der Division von a durch p oder *Rest von a modulo p* .

(Dividiert man eine natürliche Zahl a durch p , so ergibt sich als Quotient gerade dieses q , und es bleibt ein Rest r mit $0 \leq r < p$.) Der Rest von a modulo p ist stets eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., $p-1$.

Beispiele:

$$-28 = (-4) \cdot 7 + 0$$

$$71 = 10 \cdot 7 + 1$$

$$-103 = (-15) \cdot 7 + 2$$

$$-67 = (-10) \cdot 7 + 3$$

$$81 = 11 \cdot 7 + 4$$

$$145 = 20 \cdot 7 + 5$$

$$216 = 30 \cdot 7 + 6$$

(Es ist auch $216 = 31 \cdot 7 + (-1)$; dies ist aber nicht die gewünschte Zerlegung (1), da in (1) ein positiver Rest gefordert wird.)

3. Der Rest einer Quadratzahl modulo p ist natürlich auch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$. Es gibt aber einen Unterschied, je nachdem wir beliebige ganze Zahlen oder nur Quadratzahlen zulassen.

Ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$ gegeben, so kann man natürlich stets eine ganze Zahl a finden, deren Rest modulo p die gegebene Zahl ist. Es gibt sogar unendlich viele solcher Zahlen. Ist a eine solche, so sind $a+p$, $a+2p$, ... weitere.

Beispiel:

$p=7$. Gegeben sei die Zahl 5. Ganze Zahlen, für die 5 der Rest modulo 7 ist, sind: 5, 12, 19, 26, 33, 40, ... und -2, -9, -16, -23, ...

Ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$ gegeben, so kann es jedoch vorkommen, daß keine Quadratzahl existiert, die bei der Division durch p die gegebene Zahl als Rest hat (also die gegebene Zahl als Rest modulo p hat).

Beispiele:

$p=7$. Gegeben sei die Zahl 2. Dann gibt es eine Quadratzahl, die bei der Division durch 7 den Rest 2 hat:

$$3^2 = 1 \cdot 7 + 2.$$

$p=7$. Gegeben sei die Zahl 3. Dann gibt es keine Quadratzahl, deren Rest modulo 7 die Zahl 3 ist. Als Reste der Division von Quadratzahlen durch 7 treten nämlich nur die Reste auf, die sich bei der Division der speziellen Quadratzahlen 0^2 , 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 , 6^2 durch 7 ergeben (wie im Beweis des untenstehenden Satzes 1 allgemein gezeigt wird). Es sind dies nur die Zahlen 0, 1, 2, 4, nicht jedoch 3 (und 5, 6). Auch für 5 (bzw. 6) kann es keine Quadratzahlen geben, die bei der Division durch 7 den Rest 5 (bzw. 6) haben. Für 0, 1, 4 gibt es entsprechende Quadratzahlen:

$$7^2 = 7 \cdot 7 + 0, \quad 6^2 = 5 \cdot 7 + 1, \quad 5^2 = 3 \cdot 7 + 4.$$

Es ist eine besondere Eigenschaft, wenn eine Zahl unter den p Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ..., $p-1$ als Rest bei der Division einer Quadratzahl durch p auftritt.

Definition 1: Gibt es für die natürliche Zahl $a \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ eine Quadratzahl x^2 so, daß x^2 bei der Division durch p den Rest a läßt ($x^2 = q \cdot p + a$), so heiße a *quadratischer Rest von p* (Bezeichnung nach Gauß: aRp); gibt es eine solche Quadratzahl nicht, so heiße a *quadratischer Nichtrest von p* (Bezeichnung: aNp).

Beispiele: $1Rp$, $2Rp$, $3Np$, $4Rp$, $5Np$, $6Np$.

Ist zunächst p die einzige gerade Primzahl 2, dann sind die Zahlen 0, 1 beide quadratische Reste von 2; 0 tritt als Rest gerader Quadratzahlen, 1 als Rest ungerader Quadratzahlen bei der Division durch 2 auf.

Es sei von jetzt an $p \neq 2$. Dann gilt

Satz 1: Unter den p Zahlen 0, 1, 2, ..., $p-1$ können nicht mehr als $\frac{p+1}{2}$ Zahlen quadratischer Rest von p sein.

Beweis: Als Reste der Division von Quadratzahlen durch p treten nur die Reste auf, die sich bei der Division der Quadratzahlen 0^2 , 1^2 , 2^2 , ..., $(p-1)^2$ durch p ergeben: Ist nämlich x^2 eine Quadratzahl und gilt $x = q \cdot p + r$ mit $0 \leq r < p$, so wird $x^2 = q^2 p^2 + 2qpr + r^2 = (q^2 \cdot p + 2qr)p + r^2$ und x^2 hat den gleichen Rest bei der Division durch p wie r^2 . Es treten sogar nur die Reste auf, die sich bei der Division der Quadratzahlen 0^2 , 1^2 , 2^2 , 3^2 , ..., $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ durch p ergeben.

Es gilt nämlich:

$\left(\frac{p-1}{2} + 1\right)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie

$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Analog gilt:

$\left(\frac{p-1}{2} + 2\right)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie

$\left(\frac{p-1}{2} - 1\right)^2$,

..... usw.

$(p-2)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie 2^2 ,

$(p-1)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie 1^2 ,

p^2 läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie 0^2 .

Es gibt also unter den Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, p-1$ höchstens $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ quadratische Reste von p . Genauer gilt:

Satz 2: Die Hälfte der Zahlen $1, 2, 3, \dots, p-1$ wird zu quadratischen Resten von p , die übrigen werden zu Nichtresten (d. h., es gibt unter den Zahlen $1, 2, 3, \dots, p-1$ genau $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und $\frac{p-1}{2}$ quadratische Nichtreste von p).

Beweis: Die Zahlen

$1^2, 2^2, 3^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

haben bei der Division durch p genau $\left(\frac{p-1}{2}\right)$

verschiedene Reste, denn hätten zwei Quadratzahlen x^2, y^2 (wobei z. B. $x > y$ sei und die natürlichen Zahlen x, y nicht größer als $\frac{p-1}{2}$ sind) den gleichen Rest bei der Division

durch p , so müßte $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ positiv und durch p teilbar sein. Dies ist aber unmöglich, da jeder der Faktoren $x-y$ und $x+y$ kleiner als p ist. Es gibt unter den Zahlen $1, 2, 3, \dots, p-1$ also $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ quadratische Reste

und nicht mehr, weil nach Hinzunahme der Null $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ entstehen, und dies ist nach Satz 1 die obere Grenze für die Anzahl der Reste. Folglich gibt es genau $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste von p , und die übrigen $\frac{p-1}{2}$

Zahlen sind quadratische Nichtreste von p .

Beispiel: $p=13$. Es ist

$1^2=0 \cdot 13+1, 2^2=0 \cdot 13+4, 3^2=0 \cdot 13+9,$

$4^2=1 \cdot 13+3, 5^2=1 \cdot 13+12, 6^2=2 \cdot 13+10.$

Folglich gilt $1R13, 4R13, 9R13, 3R13, 12R13, 10R13$, aber $2N13, 5N13, 6N13, 7N13, 8N13, 11N13$.

Es ist also sehr leicht, bei gegebener Primzahl p alle Zahlen unter den Zahlen $1, 2, 3, \dots, p-1$ anzugeben, die quadratische Reste oder

Nichtreste von p sind. Es müssen einfach die Quadrate

$1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

und deren Reste bei der Division durch p bestimmt werden. Alle Zahlen, die dabei als Reste auftreten, sind quadratische Reste von p ; die übrigen quadratische Nichtreste von p .

Wir definieren nun allgemeiner:

Definition 2: Es sei a eine ganze Zahl. Gibt es eine Quadratzahl x^2 so, daß $x^2 = g \cdot p + a$ ist (g sei dabei eine ganze Zahl), so heiße a quadratischer Rest von p .

Wir wollen zeigen: Die ganze Zahl $a = qp + r$ ist quadratischer Rest von p genau dann, wenn ihr Rest r modulo p quadratischer Rest von p ist. (Letzteres können wir dann mit Hilfe der Sätze 1 und 2 leicht entscheiden.)

Ist $a = qp + r$ mit $0 \leq r < p$, und ist r quadratischer Rest von p (nach Def. 1), so gibt es ein x mit $x^2 = q'p + r$. Dann ist aber $a = qp + r = qp + (x^2 - q'p) = (q - q')p + x^2$, d. h.

$x^2 = (q - q')p + a$,

also a quadratischer Rest von p .

Führe selbständig den Beweis für die Umkehrung!

Ist a quadratischer Rest von p , so ist r ebenfalls quadratischer Rest von p .

Beispiel:

Ist -33 quadratischer Rest von 13 ?

Der Rest von -33 modulo 13 ist 6 , da $-33 = (-3)13 + 6$. Da $6N13$, ist auch $-33N13$.

4. Die umgekehrte Aufgabe hingegen, alle Primzahlen anzugeben, für die eine vorgelegte ganze Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest ist, erfordert weit tiefere Untersuchungen: Gegeben sei eine ganze Zahl a . Von welchen ungeraden Primzahlen p ist a quadratischer Rest?

Die Zahl 1 ist als Quadratzahl quadratischer Rest von allen Primzahlen. Für die Zahl -1 gilt der Satz A (wir bezeichnen Sätze, die hier nicht bewiesen werden, mit großen Buchstaben).

Satz A: Für alle Primzahlen von der Form $4m+1$ ist -1 quadratischer Rest; für alle Primzahlen von der Form $4m+3$ ist -1 quadratischer Nichtrest.

Beispiele:

-1 ist quadratischer Rest der Primzahlen

$5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, \dots$

Die entsprechenden Quadrate sind

$2^2, 5^2, 4^2, 12^2, 6^2, 9^2, 23^2, 11^2, 27^2, 34^2, 22^2,$

$\dots$, nämlich $2^2 = 1 \cdot 5 + (-1), 5^2 = 2 \cdot 13$

$+ (-1), 4^2 = 1 \cdot 17 + (-1), 12^2 = 5 \cdot 29 + (-1),$

$\dots$ usw.

-1 ist Nichtrest der Primzahlen

$3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, \dots$

Unter den Primzahlen bis 100 befinden sich folgende, für die 2 quadratischer Rest ist: $7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79, 89, 97$. Die entsprechenden Quadrate sind $3^2, 6^2, 5^2, 8^2, 17^2, 7^2, 12^2, 32^2, 9^2, 25^2, 14^2$. (Beispielsweise:

$25^2 = 7 \cdot 89 + 2$ oder $17^2 = 7 \cdot 41 + 2$.) Unter diesen Primzahlen kommt keine von der Form $8m+3$ oder $8m+5$ vor. Man kann beweisen:

Satz B: Für alle Primzahlen von der Form $8m+3$ oder der Form $8m+5$ ist 2 Nichtrest.

Satz C: Für alle Primzahlen von der Form $8m+1$ oder der Form $8m+7$ ist 2 quadratischer Rest.

(Zahlen der Form $8m+0, 8m+2, 8m+4, 8m+6$ können keine Primzahlen sein, da sie durch 2 teilbar sind.)

Zu den Primzahlen bis 100 , für die -2 quadratischer Rest ist, gehören die folgenden: $3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73, 83, 89, 97$.

Die gesuchten Quadrate sind nämlich

$2^2, 3^2, 7^2, 6^2, 11^2, 27^2, 36^2, 47^2, 12^2, 74^2, 49^2,$

17^2 . (Beispielsweise $27^2 = 729 = 17 \cdot 43 + (-2),$

$47^2 = 2209 = 33 \cdot 67 + (-2), 74^2 = 66 \cdot 83$

$+ (-2).$)

Es sind dies nur Primzahlen von der Form $8m+1$ oder $8m+3$. Man kann beweisen

Satz D: Für alle Primzahlen der Form $8m+5$ oder der Form $8m+7$ ist -2 Nichtrest.

Satz E: Für alle Primzahlen der Form $8m+1$ oder $8m+3$ ist -2 quadratischer Rest.

Nachdem wir das Problem für die Zahlen $+1, -1, +2, -2$ gelöst haben, müssen wir jetzt die ganzen Zahlen $+3, -3, +4, -4, +5, -5, +6, -6, +7, -7, +8, -8, \dots$ untersuchen. Dabei können wir uns jedoch auf Primelemente beschränken. Irgendeine ganze Zahl läßt sich ja (eindeutig) als Produkt von Primelementen schreiben. Weiß man, von welchen ungeraden Primzahlen p diese Primelemente quadratische Reste sind, so weiß man auch, von welchen Primzahlen die gegebene ganze Zahl (also das Produkt dieser Primelemente) quadratischer Rest ist. Es gilt nämlich für Primzahlen p der folgende

Satz F:

a) Das Produkt zweier quadratischer Reste von p ist ein quadratischer Rest von p .

b) Das Produkt zweier Nichtreste von p ist ein quadratischer Rest von p .

c) Das Produkt eines quadratischen Restes mit einem Nichtrest ist ein Nichtrest von p .

(Wir geben weiter unten Beispiele für die Anwendung dieses Satzes.)

Die Primzahlen bis 100 , für die 3 quadratischer Rest ist, sind $3, 11, 13, 23, 37, 47, 59, 61, 71, 73, 83, 97$.

Die Quadrate, die bei der Division durch diese Primzahlen den Rest 3 liefern, sind

$3^2, 5^2, 4^2, 7^2, 22^2, 12^2, 11^2, 8^2, 28^2, 21^2, 13^2,$

10^2 . (Beispielsweise: $3^2 = 2 \cdot 3 + 3, 5^2 = 2 \cdot 11$

$+ 3, 4^2 = 1 \cdot 13 + 3, 22^2 = 13 \cdot 37 + 3.$)

Unter diesen Primzahlen kommt keine vor, die sich in einer der Formen $12m+5$ (wie z. B. 17 oder 41) oder $12m+7$ (wie z. B. 19) schreiben läßt. Man kann beweisen:

Satz G: Für alle Primzahlen der Formen $12m+5$ oder $12m+7$ ist 3 Nichtrest.

Satz H: Für alle Primzahlen der Formen

$12m+1$ oder $12m+11$ ist 3 quadratischer Rest.

(Zahlen der Formen $12m+0$, $12m+2$, $12m+3$, $12m+4$, $12m+6$, $12m+8$, $12m+9$, $12m+10$ sind keine Primzahlen, da sie durch 12, 2, 3, 4, 6, 4, 3, 2 teilbar sind.)

Untersuchen wir nun, für welche Primzahlen -3 quadratischer Rest ist. Es ist

$$3^2 = 4 \cdot 3 + (-3), \quad 2^2 = 1 \cdot 7 + (-3), \quad 6^2 = 3 \cdot 13 + (-3), \quad 15^2 = 225 = 12 \cdot 19 + (-3), \quad 11^2 = 4 \cdot 31 + (-3), \quad 16^2 = 7 \cdot 37 + (-3), \quad 13^2 = 4 \cdot 43 + (-3), \quad 27^2 = 12 \cdot 61 + (-3), \quad 8^2 = 1 \cdot 67 + (-3), \quad 17^2 = 4 \cdot 73 + (-3), \quad 32^2 = 13 \cdot 79 + (-3), \quad 26^2 = 7 \cdot 97 + (-3).$$

Zu den Primzahlen bis 100, deren quadratischer Rest -3 ist, gehören somit 3, 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97. Diese Zahlen (außer 3) haben die Form $3m+1$.

Satz 3: Für alle Primzahlen von der Form $3m+2$ ist -3 Nichtrest.

Satz 4: Für 3 und für alle Primzahlen der Form $3m+1$ ist -3 quadratischer Rest.

Die Sätze 3 und 4 lassen sich mit Satz F aus den Sätzen G und H sowie A herleiten. Als Beispiel beweisen wir Satz 4:

Nach Satz F gilt: $-3Rp$ genau dann, wenn entweder

a) $-1Rp$ und $3Rp$ oder

b) $-1Np$ und $3Np$. Nach Satz A ist $-1Rp$ für alle Primzahlen der Form $4m+1$. Nach Satz H ist $3Rp$ für alle Primzahlen der Form $12m+1$ oder $12m+11$. Nach Satz A ist $-1Np$ für alle Primzahlen p der Form $4m+3$. Nach Satz G ist $3Np$ für alle Primzahlen p der Form $12m+5$ oder $12m+7$. Die Zahlen der Form $12m+11$ haben nicht die Form $4m+1$. Die Zahlen der Form $12m+5$ haben nicht die Form $4m+3$. Daher gilt: Es ist $-3Rp$ für alle Primzahlen p , für die gilt entweder a) p ist von der Form $12m+1$ (diese Zahlen sind auch von der Form $4m+1$) oder b) p ist von der Form $12m+7$ (diese Zahlen sind auch von der Form $4m+3$).

Die Primzahlen der Form $12m+1$ oder $12m+7$ sind aber genau die Primzahlen der Form $3m+1$. (Die übrigen Primzahlen haben ja die Form $12m+5$ oder $12m+11$ und sind nicht von der Form $3m+1$).

Daraus folgt Satz 4.

Beweise ganz analog Satz 3!

Man hätte übrigens ähnlich umgekehrt die Sätze G und H mittels Satz F aus den Sätzen 3 und 4 und A herleiten können. Wer versucht es? Jetzt fragen wir, für welche Primzahlen $+4$ und -4 quadratische Reste sind.

Für alle Primzahlen p gilt $2^2 = 0 \cdot p + 4$, d. h., 4 ist quadratischer Rest für alle Primzahlen.

Aus Satz Fa) und b) zusammen mit Satz B und Satz C folgt noch einmal, daß 4 quadratischer Rest für alle Primzahlen ist. Ferner folgt aus Satz Fa) und c), daß -4 quadratischer Rest für alle Primzahlen ist, für die -1 quadratischer Rest ist (letzteres wird in Satz A beschrieben).

Satz 5:

a) 4 ist quadratischer Rest für alle Primzahlen.

b) -4 ist quadratischer Rest für alle Primzahlen von der Form $4m+1$ und Nichtrest für alle Primzahlen von der Form $4m+3$. Wir gehen nun zu den Resten $+5$ und -5 über.

Zu den Primzahlen bis 100, deren quadratischer Rest $+5$ ist, gehören die folgenden: 5, 11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, 89. (Man bestimme die entsprechenden Quadrate!)

Diese Zahlen >5 haben die Form $5m+1$ oder $5m+4$. Tatsächlich gilt

Satz I: Für 5 und alle Primzahlen der Form $5m+1$ oder $5m+4$ ist 5 quadratischer Rest.

Satz K: Für alle Primzahlen von der Form $5m+2$ oder $5m+3$ ist 5 Nichtrest.

Nach Satz F ist -5 quadratischer Rest für alle Primzahlen p , für die gilt: a) $-1Rp$ und $5Rp$ oder b) $-1Np$ und $5Np$. Für -1 muß man die Primzahlen in der Form $4m+1$ oder $4m+3$ schreiben, für 5 muß man die Primzahlen in der Form $5m+1$, $5m+2$, $5m+3$, $5m+4$ schreiben.

Zu den Primzahlen der Form $4m+1$ bis 100, deren quadratischer Rest -5 ist, gehören: 29, 41, 61, 89. (Die entsprechenden Quadrate sind 13^2 , 35^2 , 19^2 , 23^2 ; z. B. $23^2 = 6 \cdot 89 + (-5)$.) Sie sind von der Form $5m+1$ oder $5m+4$. Unter ihnen kommen jedoch keine Primzahlen von der Form $5m+2$ oder $5m+3$ vor.

Zu den Primzahlen der Form $4m+3$ bis 100, deren quadratischer Rest -5 ist, gehören 3, 7, 23, 43, 47, 67, 83. (Die entsprechenden Quadrate sind 1^2 , 3^2 , 8^2 , 9^2 , 18^2 , 14^2 , 24^2 ; z. B. $18^2 = 7 \cdot 47 + (-5)$.) Diese Primzahlen sind von der Form $5m+2$ oder $5m+3$.

Für die Primzahl 5 ist -5 Nichtrest. Alle anderen ungeraden Primzahlen haben eine der Formen $20m+1$, $20m+3$, $20m+7$, $20m+9$, $20m+11$, $20m+13$, $20m+17$, $20m+19$.

Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+1$ und $5m+1$ bzw. $5m+4$ sind, haben die Form $20m+1$ bzw. $20m+9$. Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+3$ und $5m+2$ bzw. $5m+3$ sind, haben die Form $20m+7$ bzw. $20m+3$.

Aus den Sätzen F und I folgt

Satz 6: Für alle Primzahlen von einer der Formen $20m+1$, $20m+3$, $20m+7$, $20m+9$ ist -5 quadratischer Rest.

Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+1$ und $5m+2$ bzw. $5m+3$ sind, haben die Form $20m+17$ bzw. $20m+13$. Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+3$ und $5m+1$ bzw. $5m+4$ sind, haben die Form $20m+11$ bzw. $20m+19$.

Aus den Sätzen F und K folgt

Satz 7: Für 5 und alle Primzahlen von einer der Formen $20m+1$, $20m+13$, $20m+17$, $20m+19$ ist -5 Nichtrest.

Für die Zahl 6 folgt aus Satz F: 6 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, für die gilt:

a) $2Rp$ und $3Rp$ oder b) $2Np$ und $3Np$.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Förste

Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR, Leiter der Abt. Theoretische Strömungsmechanik

▲1566▲ Wenn ein Gas durch ein kreiszylindrisches Rohr strömt, gelten für Geschwindigkeit, Druck und Dichte in zwei nahe beieinanderliegenden Querschnitten auf Grund der Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie die Gleichungen

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1,$$

$$\rho_2 u_2^2 + p_2 = \rho_1 u_1^2 + p_1,$$

$$\frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1},$$

dabei ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen γ eine Konstante.

a) Man stelle $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ als Funktion von $\frac{p_2}{p_1} \geq 1$ dar.

b) Welches Verdichtungsverhältnis $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ kann für Luft ($\gamma = 1,4$) nicht überschritten werden?

Es gilt $2Rp$, falls p von der Form $8m+1$ oder $8m+7$ ist; $3Rp$, falls p von der Form $12m+1$ oder $12m+11$ ist. Diese Primzahlen sind von einer der Formen $24m+1$, $24m+23$. Es gilt $2Np$, falls p von der Form $8m+3$ oder $8m+5$ ist, ferner $3Np$, falls p von der Form $12m+5$ oder $12m+7$ ist. Diese Primzahlen sind von einer der Formen $24m+5$, $24m+19$.

Satz 8: Für alle Primzahlen von einer der Formen $24m+1$, $24m+5$, $24m+19$, $24m+23$ ist 6 quadratischer Rest.

Satz 9: Für 3 und alle Primzahlen von einer der Formen $24m+7$, $24m+11$, $24m+13$, $24m+17$ ist 6 Nichtrest.

(Alle ungeraden Primzahlen, außer 3, haben eine der Formen $24m+1$, $24m+5$, $24m+7$, $24m+11$, $24m+13$, $24m+17$, $24m+19$, $24m+23$.)

Für die Zahl -6 folgt aus Satz F: -6 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen p , für die gilt:

a) $-1Rp$ und $2Rp$ und $3Rp$ oder
b) $-1Rp$ und $2Np$ und $3Np$ oder
c) $-1Np$ und $2Np$ und $3Rp$ oder
d) $-1Np$ und $2Rp$ und $3Np$.

Aufgabe: Leite daraus den Satz 10 ab!

Satz 10: Für 3 und alle Primzahlen von einer der Formen $24m+1$, $24m+5$, $24m+7$, $24m+11$ ist -6 quadratischer Rest.

(Fortsetzung des Beitrags folgt in Heft 2/77.)

H. Pieper

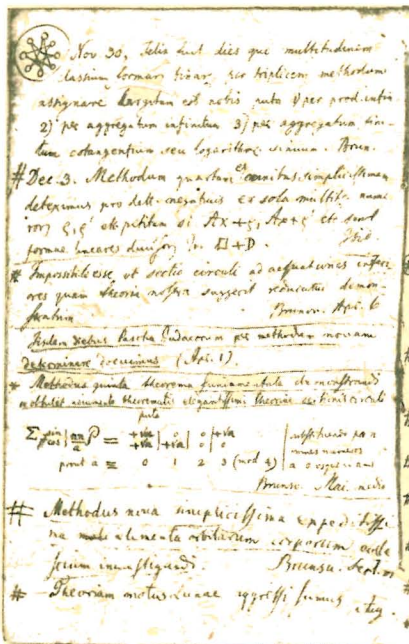
Das Mathematische Tagebuch von C. F. Gauß

C. F. Gauß (1777 bis 1855), der von seinem Zeitgenossen Laplace als der größte Mathematiker aller Zeiten und Völker bezeichnet wurde, drang bei seinen Forschungen tief in mathematische Probleme ein und leistete Grundlegendes. Durch seine Veröffentlichungen und Vorlesungen erhält man jedoch keinen vollständigen Einblick in sein Schaffen, denn Briefe und Notizen belegen, daß Gauß einige seiner wesentlichsten Ideen nicht veröffentlichte (wie z. B. die sehr weit fortgeschrittenen Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie). Sein wiederholt ausgesprochener Grundsatz war, nichts übereilt zu publizieren, sondern nur Vollkommenes. Damit wurde in der Regel jede Spur verwischt, die den Weg hätte zeigen können, wie Gauß zu diesen Ergebnissen gekommen war. Sein wissenschaftlicher Nachlaß, der erstaunliche Sachen ans Licht brachte, hat uns mitunter Einblicke in seine Arbeitsweise gegeben, wie ihn beispielsweise das Rechnen mit konkreten Zahlen auf allgemeine Gesetze führte. Einen Fall von unschätzbarem Wert bildet der Fund des „Notizjournals“, der *Stäckel* 1898 auf Grund einer Erwähnung in einem Gaußschen Brief mit kriminalistischem Spürsinn gelang. Das 19seitige Oktavheft wurde mit zwei Unterbrechungen von 1796 bis 1814 geführt. Die erste Eintragung bezieht sich auf eine Entdeckung, die nach 2000jährigem Steckenbleiben das Problem der Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke für $n=17$ voran-

Geburtshaus C. F. Gauß' in Braunschweig



trieb und wenig später das Problem für beliebiges n einer Lösung zuführte. Diese Erkenntnis, die von Gauß am 30. März 1797 schon vor dem Aufstehen gewonnen wurde, bewog ihn, sich endgültig der Mathematik und nicht der klassischen Philologie zu widmen. Das Tagebuch, während der Studienzeit in Göttingen (1795 bis 1798) kurz vor dem 19. Geburtstag begonnen, ist für uns deshalb so interessant, weil es Einblick in die Entwicklung eines auf sich gestellten mathematischen Genies gibt, das Ringen um Neues zeigt, aufsehenerregende Entdeckungen neben längst Bekanntes stellt, Gauß' Entdeckerfreude widerspiegelt, seine Vermutungen enthält und auch über Empfindungen des Verfassers berichtet.



Eine Seite aus dem Tagebuch C. F. Gauß'

Eine Durchsicht des Tagebuches erfordert umfangreiche mathematische Kenntnisse, denn vieles, was Gauß notierte, gehört zum Bestand der Mathematik. Aber auch der Zweck des Buches, als persönliches Notizheft zu dienen, macht eine Deutung aller in lateinisch und unter reichlicher Verwendung von Abkürzungen (z. B. „Zahl= $\Delta + \Delta + \Delta$ “) vorgenommenen Eintragungen schwierig, so daß noch nicht alle 146 Notizen restlos geklärt sind. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Notiz vom 21. 10. 1796 „Wir haben GEGAN bezwungen“. Das Buch läßt uns u. a. die Entstehungsgeschichte der grundlegenden Ideen von Gauß in der Zahlentheorie (Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste), der lemniskatischen und elliptischen Funktionen verfolgen. Es zeigt klar, daß sich Gauß schon 1797 im Besitz der geometrischen Interpretation von komplexen Zahlen befand, die sie später ihres mystischen Charakters entkleiden sollten. Viele Notizen

beziehen sich auf das arithmetisch-geometrische Mittel, mit dem sich Gauß bereits seit 1792 befaßte.

Das Mathematische Tagebuch von C. F. Gauß ist von der Akademischen Verlagsgesellschaft Geest und Portig in ihrer berühmten Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften“ als Band 256 herausgegeben worden. Es enthält neben dem lateinischen Text und einem Faksimile-Abdruck eine deutsche Übersetzung, einen kurzen Kommentar sowie eine historische Einführung.

R. Thiele

Gauß und die Zahlen

Bereits als 15jähriger begann Gauß, Primzahlentabellen aufzustellen, um Ordnung in das Chaos ihrer Verteilung zu bringen, und er berechnete die reziproken Werte von Primzahlen bis über einhundert Stellen nach dem Komma, um die Perioden zu ermitteln. So kann es nicht verwundern, daß Gauß sich beispielsweise die Zahl der Gewitter pro Jahr notierte oder die Anzahl der Schritte von der Göttinger Sternwarte zu Orten festhielt, die er häufig besuchte. In einem Heft finden sich u. a. folgende Angaben:

1600	Jan 1	0
1642	Dec 25	16709
1727	März 20	46475
1769	Sept 14	61983
1853	Dec 9	92749

In der zweiten Zeile ist das Geburtsdatum und in der dritten Zeile der Sterbetag von Isaac Newton aufgeschrieben. Die dritte Spalte gibt die Anzahl der seit dem 1. Januar 1600 verflossenen Tage an, so daß Newtons Alter $46475 - 16709 = 30766$ Tage betrug. In der vierten Zeile befindet sich A. v. Humboldts Geburtsdatum, während die fünfte Zeile in der dritten Spalte $61983 + 30766 = 92749$ zeigt, also offensichtlich das Datum für A. v. Humboldt ermittelt, an dem er älter als Newton wird. Dies ist der 9. Dezember 1853, und Gauß gratuliert dem erstaunten A. v. Humboldt. Drei Tage vor seinem Tod zählt Gauß die Zahl seiner Tage: 28419.

R. Thiele

Gauß, C. F.

Wissenschaftliches Tagebuch 1796 bis 1814

(Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften)

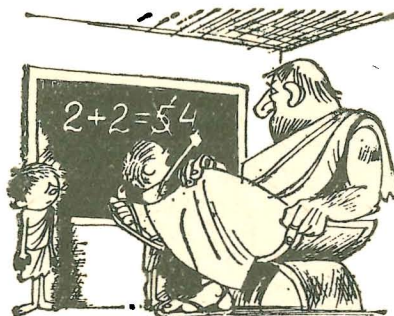
96 S., 22 Abb., kartoniert 12,- M

Bestell-Nr. 669 721 0

Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 2. Mai 1977



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 5 ■ 1567 Vier Schülerinnen, und zwar Ina, Katrin, Andrea und Carola, bilden einen Timurtrupp. Sie helfen den Rentnerinnen Frau Neumann, Frau Peter, Frau Heller und Frau Weise. Jede dieser vier Schülerinnen hilft genau einer dieser Frauen. Nun wissen wir folgendes:

- a) Ina hilft weder Frau Heller noch Frau Peter,
- b) Carola hilft Frau Neumann,
- c) Andrea hilft nicht Frau Peter.

Wie lauten die Vornamen derjenigen Schülerinnen, die Frau Peter, Frau Heller bzw. Frau Weise helfen?

Schülerin Birgit Weyh, Fambach

Ma 5 ■ 1568 Eine Gemüseverkaufsstelle erhielt eine Lieferung von 964 kg Kartoffeln. Nach einer Woche war nur noch der vierte Teil dieser angelieferten Kartoffelmenge vorrätig.

Wieviel Mark waren für die bereits verkauften Kartoffeln eingenommen worden, wenn 1 kg Kartoffeln 16 Pf kostet?

Fachlehrer Dieter Knappe, Jessen

Ma 5 ■ 1569 Hans und Uwe sollen für ihre Klassenkameraden anlässlich einer Disko-Veranstaltung 30 Flaschen Fruchtsaftgetränk zum Einzelpreis von 0,40 M einschließlich Pfandgeld und für den Rest des verbleibenden Geldes einige Päckchen Salzsticks zum Einzelpreis von 0,75 M einkaufen. Ihnen stehen genau 19,- M für den Einkauf zur Verfügung. Wieviel Päckchen Salzsticks könnten sie höchstens einkaufen?

Schülerin Ines Rakette, Lommatzsch

Ma 5 ■ 1570 Ein Betrieb richtete zwei Kinderferienlager ein. Es wurden insgesamt 385 Betten angeschafft. Die Unkosten für die Betten betrugen für das erste Lager 10250,- M, für das zweite Lager 1250,- M weniger als für das erste. Wieviel Betten wurden für jedes

für das erste. Wieviel Betten wurden für jedes dieser zwei Lager angeschafft?

Fachlehrer Dieter Knappe, Jessen

Ma 5 ■ 1571 Die Durchführung eines Wandertages für eine Schulklasse war mit Unkosten verbunden. Hätte jeder Schüler dieser Klasse 80 Pf entrichtet, so hätten noch 1,50 M zur Deckung der Unkosten gefehlt. Wenn hingegen jeder Schüler 90 Pf gezahlt hätte, so wären 1,50 M übrig geblieben. Wieviel Schüler beteiligten sich am Wandertag?

Schüler Roland Kampe, Rostock

Ma 5 ■ 1572 Ein Autobus war während einer Stadtrundfahrt mit 50 Personen besetzt. Im Autobus befanden sich 26 Erwachsene mehr als Kinder und zwei Männer weniger als Frauen. Wieviel Männer, Frauen und Kinder nahmen an dieser Stadtrundfahrt teil?

Schüler Roland Kampe, Rostock

Ma 6 ■ 1573 Im Jahre 1970 war Peter 8 Jahre, sein Vater 31 Jahre alt. In welchem Jahr wird Peters Vater doppelt so alt sein wie Peter selbst?

Schülerin Kerstin Funke, Großbörner

Ma 6 ■ 1574 Günter fragt seinen Bruder Hans, wieviel Mark er im letzten Monat von seinem Taschengeld gespart habe. Hans erwidert: „Wenn du halb soviel Mark gespart hättest wie ich und noch 1,50 M mehr, dann hättest du 4,- M gespart. Nun sage mir, wieviel Mark ich gespart habe!“

Schüler Roland Kampe, Rostock

Ma 6 ■ 1575 Vier ehemalige Schulkameraden, und zwar Herr A., Herr B., Herr C. und Herr D., treffen sich einige Jahre nach dem Abschluß der Oberschule. Ihrem Gespräch ist zu entnehmen, daß je einer von ihnen in Dresden, Halle, Leipzig und Suhl wohnt. Von diesen vier Personen wissen wir:

Thies Luther, 26 Güstrow, Wiedersgr. 22		Ma 7 ■ 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

a) zwei Personen, und zwar Herr A. und der Leipziger, sind von Beruf Elektriker,
 b) zwei Personen, und zwar Herr B. und der Suhler, sind von Beruf Dreher,
 c) zwei Personen, und zwar Herr C. und der Suhler, sind begeisterte Schachspieler,
 d) zwei Personen, und zwar Herr B. und der Dresdener, üben verschiedene Berufe aus.
 In welcher Stadt wohnt jeder dieser vier Herren? Schülerin Monika Müller, Fambach

Ma6 ■ 1576 Multipliziert man das Produkt zweier natürlicher Zahlen mit der Summe aus diesen Zahlen, so erhält man 8602.

Um welche Zahlen handelt es sich?

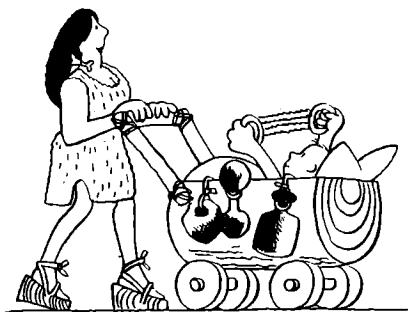
Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma6 ■ 1577 Ein Dreieck ABC habe die Innenwinkelgrößen α , β und γ . Ein Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 10° kleiner als ein Außenwinkel mit dem Scheitel C . Ein Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 50° größer als α . Wie groß sind alle Innen- und Außenwinkel dieses Dreiecks? Sch.

Ph6 ■ 1578 Ein Ballen Glaswolle von $0,6 \text{ m}^3$ hat eine Masse von $57,5 \text{ kg}$. Wieviel % Glas enthält sein Volumen, wenn die Dichte des Glases $2,5 - \frac{8}{\text{cm}^3}$ beträgt?

Ma7 ■ 1579 Jemand kauft in einer Buchhandlung 10 Bücher für insgesamt $36,80 \text{ M.}$ Es sind Bücher zum Einzelpreis von $4,30 \text{ M.}$, $6,30 \text{ M.}$ und $2,60 \text{ M.}$ Wieviel Bücher von jeder Preislage hat dieser Käufer erworben?

Schüler Andreas Fittke, Berlin



Ma7 ■ 1580 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 421200. Wie heißen diese vier Zahlen?

Schülerin Anne Schmücking, Sondershausen

Ma7 ■ 1581 Bei den XII. Olympischen Winterspielen 1976 in Innsbruck erzielten die Sportler der DDR in der Nationenwertung mit 135 Punkten den zweiten Platz hinter der UdSSR. Für eine Gold-, Silber-, Bronzemedaille, einen 4., 5. bzw. 6. Platz wurden jeweils 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben. Die Anzahl der von den Sportlern aus der DDR erkämpften Goldmedaillen war gleich der Anzahl der errungenen Bronzemedaillen und gleich der Anzahl der erzielten vierten

Plätze. Die Anzahl der erkämpften Silbermedaillen stimmte mit der Anzahl der erzielten fünften Plätze überein. Jede der Anzahlen der erkämpften Gold-, Silber-, Bronzemedaillen, 4., 5. und 6. Plätze ist gleich einer einstelligen Primzahl. Wieviel Gold-, Silber-, Bronzemedaillen, 4., 5. bzw. 6. Plätze gingen an die Sportler aus der DDR?

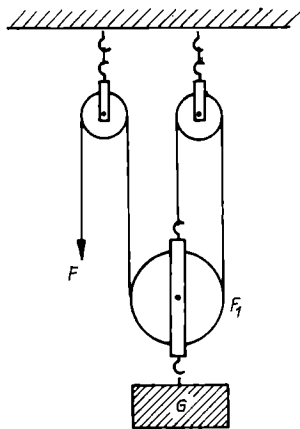
Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma7 ■ 1582 Katja erhielt von ihrer Mutter $3,80 \text{ M}$ zum Einkauf von Kuchen. Sie kaufte Butterkuchen zu 25 Pf , Pflaumenkuchen zu 35 Pf und Törtchen zu 70 Pf je Stück. Von einer dieser Kuchensorten kaufte Katja genau zwei Stück, von einer weiteren genau drei Stück und von der verbleibenden genau vier Stück.

Von welcher Sorte Kuchen hat Katja genau zwei, drei bzw. vier Stück gekauft, wenn sie das erhaltene Geld restlos ausgegeben hat?

Schülerin Ilona Kleff, Vetschau

Ph7 ■ 1583 Welche Kraft F hält die Last $G = 120 \text{ kp}$ im Gleichgewicht, wenn jede Rolle 6 kp wiegt?



Ch7 ■ 1584 Zum aluminothermischen Schweißen einer Straßenbahnschiene werden 3 kg Eisen benötigt.

a) Wieviel Gramm Aluminium sind mit Eisen(II, II)-oxid zu mischen, damit die gewünschte Menge Eisen entsteht?

b) Wieviel Gramm Aluminiumoxid entstehen dabei? Prof. Dr. W. Renneberg, Leipzig



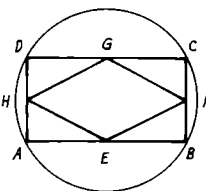
Und schön aufpassen, daß die Säure nicht auf die Textilien läuft!

Ma8 ■ 1585 Es sind alle natürlichen Zahlen z zu erm. folgenden Eigenschaften haben:

1. Die beiden Grundziffern von z sind einander verschieden;
2. das Quadrat von z ist eine dreistellige Zahl;
3. die letzte Grundziffer des Quadrats von z stimmt mit der ersten Grundziffer der Zahl z überein. Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

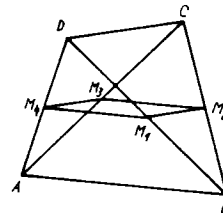
Ma8 ■ 1586 Einem Kreis mit dem Radius $r = 5 \text{ cm}$ sei ein Rechteck $ABCD$ einbeschrieben (siehe Bild). Es seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA dieses Rechtecks. Es ist der Umfang des Vierecks $EFGH$ zu berechnen.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma8 ■ 1587 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Seiten AB und CD nicht parallel sind. Ferner seien M_1 und M_3 die Mittelpunkte der Diagonalen BD und AC , M_2 und M_4 die Mittelpunkte der Seiten BC und AD dieses Vierecks (siehe Bild).

Es ist zu beweisen, daß das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm ist. Sch.



Ma8 ■ 1588 Es ist zu untersuchen, ob es vier natürliche Zahlen a, b, c, d mit $a > b > c > d > 0$ gibt, die die folgende Eigenschaft haben:

Die sechs Differenzen

$a - b, a - c, a - d, b - c, b - d, c - d$

können so geordnet werden, daß sie die Folge der Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden.

Bejahendenfalls sind vier solche Zahlen a, b, c, d anzugeben. L.

Ph8 ■ 1589 Wie groß muß die Leistung eines elektrischen Kochers sein, wenn 2 l Wasser in 25 min von 10°C auf 100°C erhitzt werden sollen? Dabei wird die aufgenommene elektrische Leistung nur zu 70% für die Erwärmung des Wassers wirksam.

H. B., Leipzig

Ch8 ■ 1590 Kupfer(II)-oxid reagiert mit Eisen, wobei Eisen(II, III)-oxid entsteht.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf, aus der man den Verbrauch an Eisen zur vollständigen Umsetzung bekannter Massen Kupfer(II)-oxid berechnen kann!

b) Berechne mit Hilfe der aufgestellten Funktionsgleichung den Verbrauch an Eisen zur vollständigen Umsetzung von 4 g, 7 g und 11 g Kupfer(II)-oxid!

c) Stelle die Ergebnisse graphisch in einem Koordinatensystem dar!

Ma 9 ■ 1591 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 8x - 9}$$

erfüllt ist.

Klaus Beck,

EOS Kleinmachnow, Kl. 10

Ma 9 ■ 1592 Gegeben seien in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Länge der Hypotenuse $AB = c = 25$ cm und die Länge der Höhe $CD = h = 12$ cm. Man berechne die Längen der Katheten a und b .

Fachlehrer für Mathematik und Physik

Klaus Meier, Osternienburg

Ma 9 ■ 1593 Es seien A, B, C Mengen, die natürliche Zahlen als Elemente enthalten und von denen folgendes bekannt ist:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad (1)$$

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}, \quad (2)$$

$$C \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}, \quad (3)$$

$$A \cap B = \{2\}, \quad (4)$$

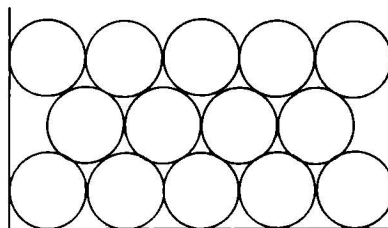
$$B \cap C = \{2, 4, 8\}, \quad (5)$$

$$C \cap A = \{2\}. \quad (6)$$

Man gebe die Elemente jeder der Mengen A, B, C an.

Hinweis: Unter $A \cup B$ versteht man die Vereinigung der Mengen A und B , d. h. die Menge aller Elemente, die der Menge A oder der Menge B angehören. Unter $A \cap B$ versteht man den Durchschnitt der Mengen A und B , d. h. die Menge aller Elemente, die sowohl der Menge A als auch der Menge B angehören (vgl. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9, S. 58).

1 m lang, 1 m breit und höchstens 1 m hoch ist. (Im Bild sind nur drei Schichten des Stapels mit je fünf bzw. vier Stämmen gezeigt.)



a) Wieviel Stämme können gestapelt werden?

b) Wie groß ist das Gesamtvolumen der gestapelten Stämme? L.

Ph 9 ■ 1595 Ein leichtsinniger Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ eine abschüssige Straße hinab und prallt, ohne daß er vorher bremsen kann, gegen ein festes Hindernis. Aus welcher Höhe würde ein Sturz im freien Fall die gleiche Wirkung haben? Dr. G. Hesse, Radebeul

Ch 9 ■ 1596 Berechnen Sie die Menge 10%ige Äthansäure, die theoretisch zum Lösen von 32,7 g Zink benötigt wird! Wieviel Liter Wasserstoff entstehen bei dieser Reaktion?

Ma 10/12 ■ 1597 Man beweise, daß die Gleichung

$$x^{2n+1} + 2x^{2n} + 2^2x^{2n-1} + 2^3x^{2n-2} + \dots$$

+ $2^{2n+1} = 0$, wobei n eine natürliche Zahl ist, genau eine reelle Lösung hat, und ermittle diese.

Fachlehrer für Mathematik Erwin Huth, Schulpforte

Ma 10/12 ■ 1598 Man berechne

$$z = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot 100 \cdot \frac{100}{101}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100}$$

Studienrat Johannes Lehmann, Leipzig

Ma 10/12 ■ 1599 Es sind alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen x, y zu ermitteln, für die die folgenden drei Ungleichungen erfüllt sind:

$$x + y < 3, \quad (1)$$

$$x - y < 1, \quad (2)$$

$$2x + y > 2. \quad (3)$$

Man löse diese Aufgabe

a) graphisch

b) rechnerisch (durch eine geeignete Umformung der Ungleichungen (1), (2), (3)).

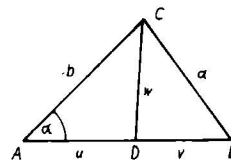
Studienrat H.-J. Kerber,

Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 1600 Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$.

a) Man berechne die Länge der Winkelhalbierenden $CD = w$ aus a, b, c .

b) Man gebe den Wert der Länge dieser Winkelhalbierenden an, wenn $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm.



Hinweis zur Lösung: Man benutze den Satz, wonach die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, und berechne u aus $u:v = b:a$ sowie $u+v=c$ (vgl. das Bild). Dann ermittle man mit Hilfe des Kosinussatzes w^2 in dem Dreieck ADC und ferner $\cos \alpha$ mit Hilfe des Kosinussatzes in dem Dreieck ABC . Sch.

Ph 10/12 ■ 1601 Verkürzt man ein mathematisches Pendel um die Hälfte seiner Länge, so vergrößert sich seine Frequenz um $\frac{1}{2}$ Hertz.

Wie lang ist das Pendel, und wie groß ist seine Frequenz? H. B., Leipzig

Ch 10/12 ■ 1602 In unserer Republik werden nach dem Gips-Schwefelsäure-Verfahren aus einheimischen Rohstoffen Schwefeldioxid und Zement hergestellt. Berechnen Sie, wieviel Kubikmeter Schwefeldioxid beim Einsatz von 204 t Kalziumsulfat theoretisch hergestellt werden können!



Und heute besprechen wir den freien Fall

Ma 9 ■ 1594 Es sollen Holzstämme von zylindrischer Form, die jeweils einen Durchmesser von 100 mm und eine Länge von 1 m haben, so gestapelt werden, wie das im Bild im Querschnitt gezeigt wird, wobei der Stapel



„Er wird doch wohl kein Intellektueller werden wollen!“

Nachgedacht – mitgemacht

Aufgaben, die das Leben schreibt

Klasse 5

Die gesellschaftlichen Fonds aus Mitteln unseres Staates werden unter anderem auch zur Stützung der niedrigen Mieten in unserer Republik verwendet.

So betragen die Mietkosten für einen Quadratmeter Wohnfläche in einer Neubauwohnung oder modernisierten Wohnung durchschnittlich 3 Mark im Monat. Der Bürger trägt davon im Durchschnitt nur 1,05 Mark.

a) Eine Familie mit drei Personen bewohnt eine Neubauwohnung mit 63 Quadratmetern Wohnfläche. Welche Miete muß diese Familie etwa in einem Monat bezahlen, und wie hoch ist etwa der Zuschuß aus den gesellschaftlichen Fonds?

b) Welchen Zuschuß aus gesellschaftlichen Fonds erhält eine Familie allein durch diese Maßnahme im Jahr, die für eine Neubauwohnung monatlich 58 Mark Miete zahlt?

Klasse 6

Bis 1980 sollen in der DDR durch Rekultivierung ehemaliger Abbaugelände des Braunkohlenbergbaus 12 500 ha Ackerland geschaffen werden.

a) Wieviel Getreide könnte einmal von dieser Fläche bei einem Hektarertrag von 41 dt geerntet werden?

b) Welche Länge hätte ein flächengleiches Rechteck, wenn es 1 km breit wäre?

Klasse 7

Das Sammeln von Altstoffen (Metallschrott, Altpapier usw.) erlangt auch im Fünfjahrplan 1976 bis 1980 große Bedeutung, da sie zunehmend zur Herstellung neuer Produkte verwendet werden. Der Erfassungsgrad dieser Altstoffe, d. h. der Anteil der Altstoffe, der tatsächlich zur Wiederverwendung zur Verfügung steht, ist von 24% im Jahre 1975 auf 30% im Jahre 1980 zu erhöhen. Dadurch können 1980 gegenüber 1975 zusätzlich Sekundärrohstoffe in Höhe von 350 Mill. Mark genutzt werden.

a) Für wieviel Mrd. Mark werden im Jahre 1980 Sekundärrohstoffe in der Volkswirtschaft genutzt?

b) Wieviel Mark sind das pro Kopf der Bevölkerung der DDR, wenn wir eine Bevölkerungszahl von 16,8 Mill. annehmen?

c) Welchen Wert in Mark haben die nicht erfaßten Altstoffe pro Kopf der Bevölkerung der DDR?

Klasse 8

Über den Neubau von Unterrichtsräumen im Zeitraum 1976 bis 1980 wissen wir, daß im Bezirk Halle 550 mehr als im Bezirk Leipzig, im Bezirk Magdeburg 150 mehr als im Bezirk Leipzig und im Bezirk Dresden genauso viele wie im Bezirk Halle geschaffen werden. Insgesamt sollen in diesen vier Bezirken 5650 Unterrichtsräume neu entstehen. Wieviel sind es in jedem einzelnen Bezirk?

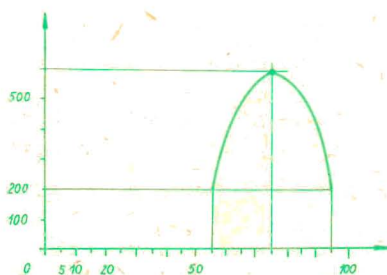
Klasse 9

Die Forstwirtschaft hat einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung und Nutzung der Waldbestände zu leisten. Dabei sollen bis 1980 in größerem Umfang wissenschaftlich-technische Erkenntnisse genutzt werden.

Für die Entwicklung von Jungpflanzen spielt die Intensität der Lichteinstrahlung eine wesentliche Rolle.

Für das Wachstum gibt es einen Optimalwert. Seine Kenntnis gibt die Möglichkeit einer entsprechend günstigen Umweltgestaltung.

Beschreiben Sie anhand der Abbildung den Zusammenhang zwischen Lichteinstrahlung und Wachstum, der hier näherungsweise dargestellt ist! Geben Sie für die Kurve einen analytischen Ausdruck an!



Lichtoptimumkurve einer Schattenpflanze
h... Wuchshöhe in mm.
x... Lichteinstrahlung in %

Klasse 10/12

Zur Sicherung des Wohnungsbauprogramms und der anderen Vorhaben der Bauindustrie ist die Zementproduktion bis 1980 auf 125 bis 127 Prozent zu steigern. Bereits im Jahr 1976 soll eine Tagesproduktion von etwa 31 400 t Zement erreicht werden, was einer Steigerung auf das 1,4fache gegenüber 1970 entspricht. Die Deutsche Reichsbahn verwendet zum Zementtransport Behälterwagen Uce(s) mit zwei der in der Abbildung dargestellten Behälter. Die zulässige Höchstbelastung eines solchen Waggons wird gerade erreicht, wenn beide Behälter vollständig mit Schüttgut einer Dichte von $1,1 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ gefüllt sind. Bei größerer Dichte (Zement hat eine Dichte zwischen $0,9$ und $1,5 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$) muß der Füllstand entsprechend niedriger sein.

a) Berechnen Sie das Volumen!

b) Berechnen Sie die zulässige Höchstbelastung eines Behälterwagens Uce(s)!

c) Wie viele solcher Waggons sind für den Transport einer Tagesproduktion mindestens erforderlich? Wie lang wäre der entstehende Zug, würde man alle Waggons aneinanderreihen (Länge über Puffer etwa 9 m)?

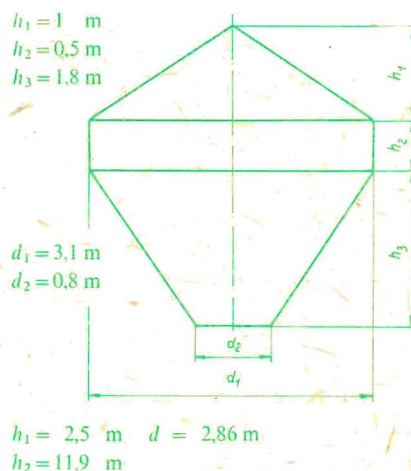
d) Berechnen Sie das Volumen des Zements in einem Behälter und die Füllstandhöhe, wenn Zement einer Dichte von $1,4 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ unter Ausnutzung der zulässigen Höchstbelastung befördert werden soll! Beide Behälter werden gleichmäßig gefüllt.

e) Die Abbildung zeigt in senkrechter Einzelfeldprojektion ein im VEB Baumechanik Halle-Ost hergestelltes Zementsilo für Baustellen. Berechnen Sie sein Volumen!

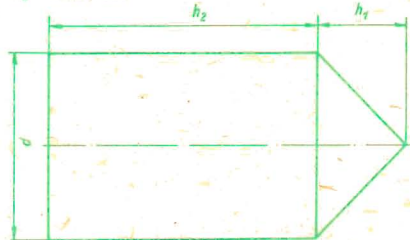
f) Wie viele Zement-Behälterwagen Uce(s) werden für das möglichst vollständige Füllen eines solchen Silos mit Zement einer Dichte von $1,4 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ benötigt?

g) Bis zu welcher Höhe kann ein solches Silo mit dem Inhalt eines Zement-Behälterwagens (Dichte $1,4 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$) gefüllt werden?

E. Stöckel



h1 = 2,5 m d = 2,86 m
h2 = 11,9 m



Logeleien

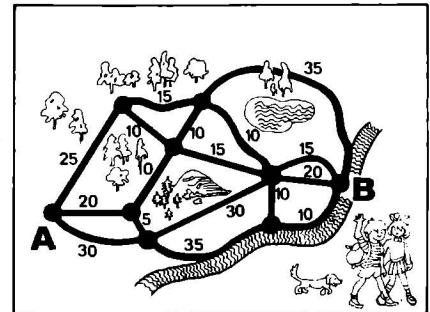
speziell für Klasse 5/6

alpha-Wandzeitung



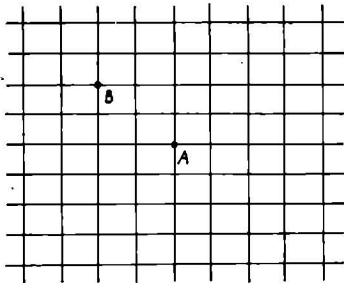
Kürzester Weg gesucht!

Gesucht ist der kürzeste Weg von A nach B. (Die angegebenen Zahlen geben die benötigten Wegzeiten an.)



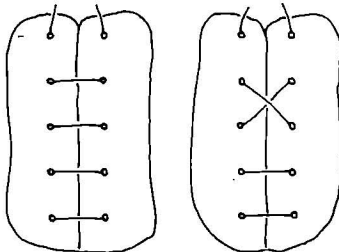
Orthopolis

Orthopolis ist eine Stadt, in der sich die Straßen in gleichen Abständen rechtwinklig kreuzen. Um auf einem kürzesten Weg von A nach B zu gelangen, benötigt man 20 Minuten. Zeichne in Orthopolis alle Punkte ein, die man von A auf den kürzesten Wegen ebenfalls in 20 Minuten erreicht!



Zugeschnürt

Wie sieht der Verlauf der Schnürsenkel von der anderen Seite aus?



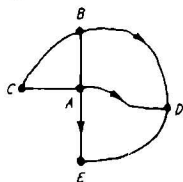
a)

b)

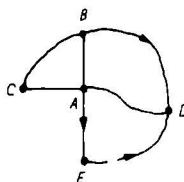
Achtung, Einbahnstraße!

In den Abbildungen sind jeweils fünf Plätze gezeichnet, die durch sieben Einbahnstraßen verbunden sind. Dabei ist für einige Einbahnstraßen die Richtung bereits festgelegt. Ist es möglich, die anderen Einbahnstraßen so zu legen, daß man von jedem Platz zu jedem fahren kann?

a)

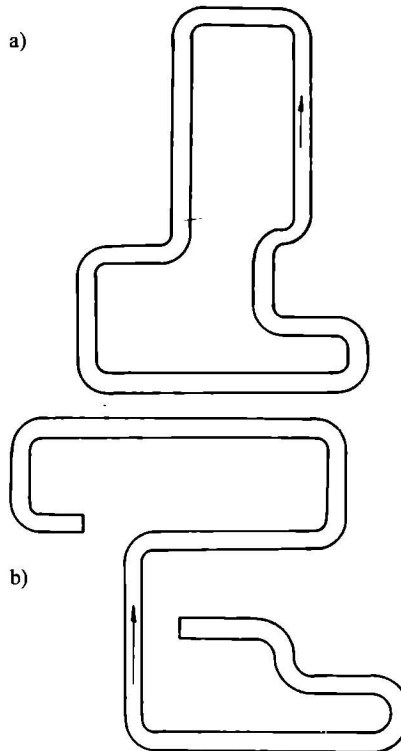


b)



Gleiche Länge gesucht

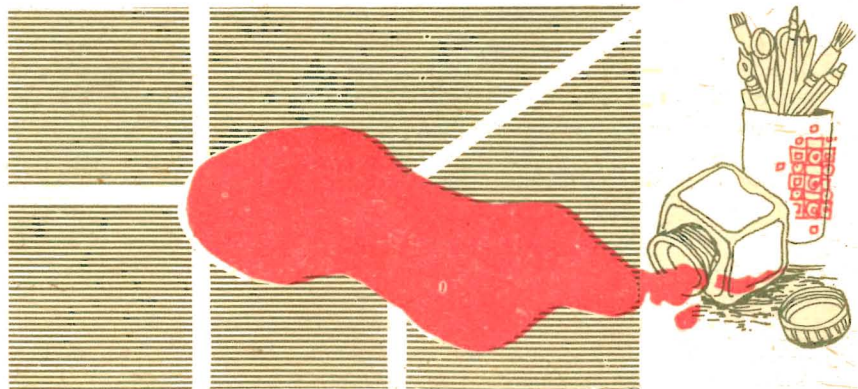
Bei welcher der gezeichneten Straßenbahnlinien haben beide Schienen die gleiche Länge?



b)

Verkleckster Stadtplan

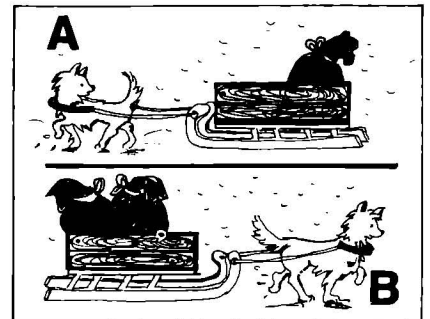
Die Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Stadtplans. Auf ihm befindet sich ein Tintenkleck, der den Verlauf der unter ihm befindlichen Straßen nicht mehr erkennen läßt. Es



Transport mit Hundeschlitten

Die Wissenschaftler einer Polarstation A erhalten die Aufgabe, am Punkt B einige Messungen vorzunehmen. Um B von der Station A zu erreichen, benötigt man mit Hundeschlitten vier Wochen. Ein Hundeschlitten kann für vier Wochen Proviant mit sich führen. Auf der Station gibt es drei Hundeschlitten.

Wie muß man sie einsetzen, damit die Wissenschaftler B erreichen?

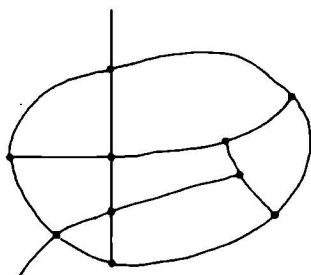


ist bekannt, daß in dem Viertel, das der Ausschnitt zeigt, keine Sackgassen vorhanden sind.

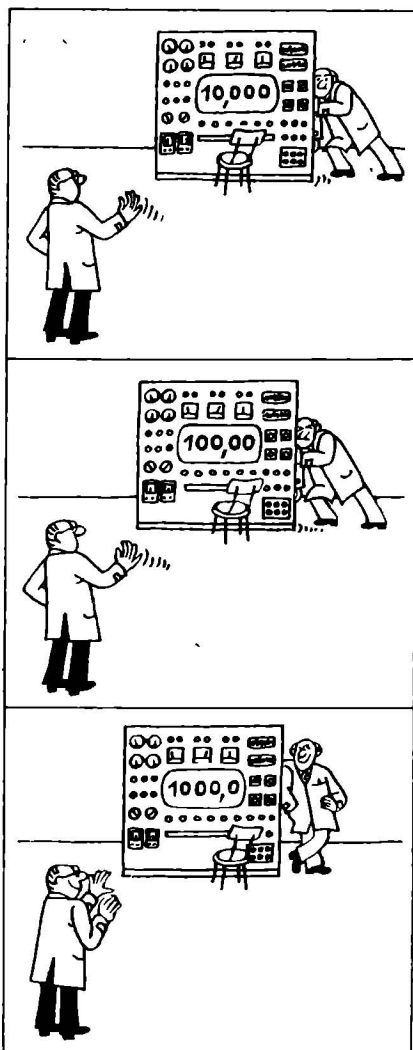
Kann der Kleck zwei oder vier y-förmige Straßengabelungen (je aus genau drei Straßen) verdecken?

Reger Busverkehr

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Straßennetz einer Stadt. Auf den eingezeichneten Straßen sollen Buslinien so verkehren, daß man von jeder Haltestelle des Busnetzes zu jeder anderen Haltestelle kommt, gegebenenfalls durch Umsteigen. Dabei sollen die Busse so eingesetzt werden, daß verschiedene Buslinien keine Teilstücke von Straßen gemeinsam haben. An Kreuzungen von Buslinien haben jeweils beide Linien eine Haltestelle. Wie viele Buslinien braucht man wenigstens?



Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik.
C. F. Gauß

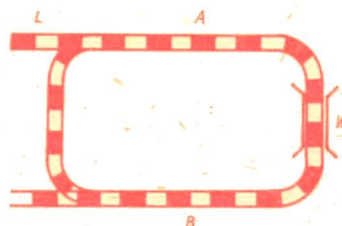


WÜRFEL ELLIPSE PARALLELEN QUADRATE DREIECKE EINS ZWEI STEBEN

H. Pätzold

Wir rangieren

Die Abbildung zeigt zwei schwer beladene Eisenbahnwagen *A* und *B* sowie eine Rangierlok *L*. Die Positionen von *A* und *B* sollen vertauscht werden, wonach sich die Lokomotive *L* wieder an der alten Stelle befinden soll. Die Lokomotive kann beiderseitig ankuppeln, bei Bedarf können auch *A* und *B* aneinandergekuppelt werden. Allerdings ist die Brücke *W* nur für die leichtere Rangierlok befahrbar. Zwischen der Brücke und den Weichen und auf den beiden Anschlußgleisen ist für die Rangierlok und beide Wagen Platz.



L = Lokomotive; *A*, *B* = Wagen (Güter-);
W = Brücke

R. Thiele



Ein logischer Krimi

Im Alltagsleben begegnen wir komplizierten Schlußfolgerungen nur höchst selten. Sherlock Holmes hat aber auch komplizierte Schlußfolgerungen zu ziehen. Betrachten wir einmal den folgenden kleinen Krimi.

„Von dem Bankeinbruch in der Sit-Down Street erfuhr Sherlock Holmes aus den Morgenblättern. Es fiel mir auf, daß er in der einen Zeitung die meines Erachtens unbedeutendsten Einzelheiten des polizeilichen Verhörs der vier im Kassensaal arbeitenden Angestellten mit einem Blaustift unterstrich: »Timid: Bitte ich weiß nichts, ich hab' ja den Saal als erster verlassen...«
»Unfair: Von uns vier bin nicht ich als letzter weggegangen...«
»Coxford: Ich war beim Nachhausegehen weder der erste noch der letzte...«
»Psmith: Ich verließ den Kassensaal als letzter...«

Ich konnte Holmes einige Aufklärungen über Lage und Zugang zu dem Bankgebäude geben sowie einige Skizzen von dessen Räum-

lichkeiten im Innern anfertigen. Eine halbe Stunde später waren wir an Ort und Stelle. Ich sah, daß Holmes' Plan fertig war...“

„... Nun ging mir ein Licht auf, wie Holmes die erste Spur entdeckte.

– Die Gangster haben in der Bank einen Spießgesellen. Der Spießgeselle ist der, der den Kassensaal als erster verließ.

– Also Timid...

– Watson, seien Sie nicht oberflächlich. Während ich dieses Telegramm aufgebe, fragen Sie den Pförtner, in welcher Reihenfolge die vier Beamten des Kassensaals gestern nachmittag die Bank verließen.

Nachdem ich vom Pförtner die Wahrheit erfahren hatte, die ein wenig von den von Holmes unterstrichenen Geständnissen abwich, eilte ich zu Holmes zurück.

– Holmes! Von den vier hat genau einer gelogen. Sie werden überrascht sein...

– Well – unterbrach mich Holmes – also ist Unfair der Spießgeselle.“

Wie gelangte Holmes zu diesem Resultat, ohne Watsons Antwort bis zu Ende gehört zu haben? Prof. Dr. Imre Rusza, Budapest



OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

[illegible]

1. Lied, bes. im Kabarett
2. Begriff aus der Trigonometrie
3. Fremdwort für Drehkörper
4. Einteilung auf einem Rechenstabteil
5. Bekannter Satz, den erstmalig C. F. Gauß in seiner Dissertation bewies
6. Definition, zu der die klassische Problemstellung der Integralrechnung führte

7. Beruf, der umfangreiche mathematische Kenntnisse erfordert
8. Grundbegriff der Geometrie
9. Eigenschaft zweier verschiedener Rechenoperationen, in ihrer Hintereinanderfolge vertauschbar zu sein
10. Deutscher Rechenmeister
11. Es existiert in jeder Gruppe und hat die Eigenschaft $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$
12. Zeichen für Hyperbelkosinus
13. Abk. für honoris causa
14. Genialer deutscher Mathematiker
15. Begriff der darstellenden Geometrie
16. Nachtraubvogel
17. Griech. Buchstabe
18. Eine Bewegung

Diagonale Verkettung

In jeder Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter folgender mathematischer Bedeutung so einzutragen, daß immer der eingetragene Buchstabe der letzte Buchstabe des ersten Wortes und gleichzeitig der erste Buchstabe des zweiten Wortes ist.

1		G					
2			A				
3				U			
4					S		
5						S	

1. Zeile: Zeichen für Logarithmus – Italienischer Naturforscher (1564 bis 1642)
2. Zeile: Fläche (lat.) – Im Altertum benutztes Rechenbrett
3. Zeile: Fehlerlos, nicht abweichend – Teil der Uhr
4. Zeile: griech. Mathematiker des Altertums – Zeichen für Hyperbelsinus
5. Zeile: eine Winkelfunktion – Zeichen für Sinus

Kryptarithmetik

Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. *Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

HERON	HEGEL
+HEGEL	+GAUSS
<u>84971</u>	<u>81297</u>
GAUSS	EULER
+EULER	+HERON
<u>68003</u>	<u>7167N</u>

GAUSS
+ GAUSS
+ GAUSS
+ GAUSS
KLASSE
D. Völzke

Gaußsche Lebensdaten

$$\begin{array}{r} \textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{O}} + \textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{X}} = \textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}} \\ + \quad + \quad + \\ \textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}} + \textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}} = \textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}} \\ \hline \textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{O}} + \textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}} = \textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{X}}\textcircled{\text{O}}\textcircled{\text{O}} \end{array}$$

D. Völzke

Kreuzzahlrätsel

1977: Gedenkjahr für zwei berühmte Mathematiker.
In jedes freie Kästchen ist eine Ziffer zu setzen.
Keine Zahl beginnt mit Null.
Die Zahlen in den Reihen bzw. Spalten bedeuten:

Waagerecht:

1. Geburtsjahr von Gauß (Primzahl)
4. Eine Primzahl, deren einzelne Ziffern keine Primzahlen sind
5. Das Quadrat von 12. senkrecht
6. Die Quersumme ist gleich $2a$
9. Das Doppelte einer Quadratzahl
11. Eine Primzahl, deren einstellige Quersumme wieder eine Primzahl ergibt.
13. Ein Vielfaches von a^3
14. a^5
16. Eine Primzahl, deren Quersumme gleich $2a$ ist
17. Todesjahr von Newton

1		2	3		4	
		5				
6	7					8
			9	10		
11		12		13		
	14		15			
16			17			

Senkrecht:

1. a^3
2. Ein Vielfaches von a^3
3. Eine Primzahl, die zugleich die Postleitzahl der *alpha*-Redaktion ist
4. Eine Quadratzahl
7. Zahl aus gleichen Ziffern
8. a^4
10. Eine Primzahl, deren einzelne Stellen ebenfalls Primzahlen sind, und zwar in steigender Folge
12. Eine Primzahl
15. Eine Zahl, deren erste Stelle größer als die zweite ist.

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (17. 11. 1976)

Olympiadeklasse 5

$$\begin{array}{r} 1. \quad A \cdot A = B \\ + \quad \cdot \quad - \\ C \cdot D = E \\ F - G = H \end{array}$$

In das obenstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind. Stelle fest, ob es eine solche Eintragung gibt, ob sie die einzige ist und wie sie in diesem Falle lautet!

2. Zwei Junge Pioniere legten in ihrem Ruderboot stromabwärts in 10 Minuten eine Strecke zurück, deren Länge insgesamt 1 km und 200 m betrug.

Wievell Zeit brauchten sie um dieselbe Strecke gegen den Strom zurückzurudern, wenn sie dabei durchschnittlich in jeder Minute 40 m weniger zurücklegten als auf der Hinfahrt?

3. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 4$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overline{PQ}$, der 5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch A und C in Richtung von A nach C verläuft!

Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei der Verschiebung $\overline{PQ}$!

Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

4. Jeder Schüler braucht im Jahr 15 Hefte. Aus 1 Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden.

Wie viele Schüler insgesamt kann man unter diesen Umständen aus 3 Tonnen Papier für ein Jahr mit Heften versorgen?

Olympiadeklasse 6

1. Ludwig sagt: „Ich kann die Leserzahl 58 125 der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} \text{ALPHA} \\ + \text{HEI} \\ + \text{TER} \\ \hline 58125 \end{array}$$

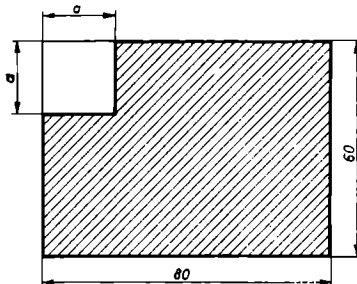
erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für

gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, daß $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben. Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen? Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

2. In einem Pionierlager wurden in vier Räumen 65 Thälmann-Pioniere untergebracht. Der eine Raum hat 68 m^2 Bodenfläche, der zweite 76 m^2 , der dritte 64 m^2 und der vierte 52 m^2 . Die Pioniere wurden so untergebracht, daß auf jeden von ihnen die gleiche Anzahl von Quadratmetern Bodenfläche kam.

Ermittle für jeden der vier Räume die Anzahl der Thälmann-Pioniere, die jeweils untergebracht wurden!

3. Die abgebildete schraffierte Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde. Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm^2 . Aus den im Bild angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.



4. Ein Kraftfuttermischung für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist die Hälfte des Gemischs Haferschrot,

$\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie, $\frac{1}{4}$ des

Gemischs ist Gerstenschrot, $\frac{1}{100}$ des

Gemischs sind Mineralstoffe,

der Rest ist Wasser. Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttermischs enthalten!

Olympiadeklasse 7

1. Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus. Wieviel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

2. Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.

Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?

Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

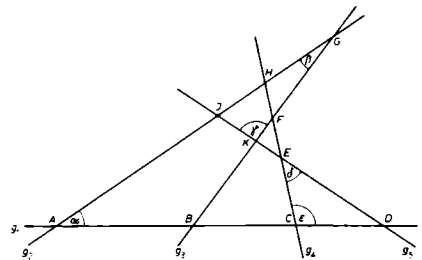
3. Konstruiere aus $a = 5,0 \text{ cm}$ und $b = 7,0 \text{ cm}$ ein Dreieck ABC , bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC .

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\angle BAJ, \angle HGF, \angle FKJ$ und $\angle DEC$, in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.

Ermittle die Größe ϵ des Winkels $\angle DCE$!



Olympiadeklasse 8

1. Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor. Wieviel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

2. Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1 .

Um wieviel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

3. In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet.

Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, daß die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

4. Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt: Die Größe β des Innenwinkels $\angle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60° . Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm. Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.

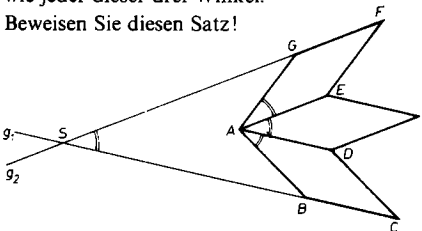
Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3,5 cm. Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

1. Karlheinz betrachtet die im Bild dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, daß der Winkel $\angle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\angle BAD$, $\angle DAE$, $\angle EAG$. Nach einigem Nachdenken behauptet er, daß der folgende Satz gilt: „Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, daß die Winkel $\angle BAD$, $\angle DAE$ und $\angle EAG$ gleichgroß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\angle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel.“

Beweisen Sie diesen Satz!



2. Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß

a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

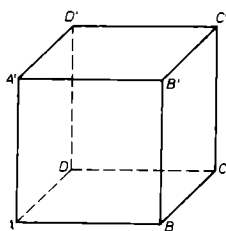
b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.

Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, daß es alle verlangten Eigenschaften hat!

3. Gegeben sei ein Würfel $ABCD A' B' C' D'$ (siehe Bild). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartigen Punkte X, Y, Z, T so gibt, daß der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen



a) minimale b) maximale Gesamtlänge besitzt!

4. In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{ccccc} ab & X & ab & = & cad \\ Y & & Y & & Z \\ ae & X & ae & = & ffe \\ ff & Y & ff & = & gg \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, daß jeweils wahre Aussagen entstehen.

Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen „+“, „-“, „·“ und „:“. Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.

Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

Olympiadeklasse 10

1. Es sei q eine ganze Zahl.

Beweisen Sie, daß dann $\frac{q^3 - q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC , in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b = AC = 4$ cm, und die Länge $p = \overline{BD} = 1,8$ cm gegeben.

Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $\overline{CD} = h$ und die Länge $q = AD$.

3. In der Aufgabe

$$\begin{array}{c} \text{LOTTO} \\ + \text{ TOTO} \\ \hline \text{SPIEL} \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

4. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ (Bild wie Kl. 9/3):

Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben:

1. Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A .

2. Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.

Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufungsrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

Olympiadeklassen 11/12

1. Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A , den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d . Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d .

Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A .

2. Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d. h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.

Für jedes $n = 1, 2, \dots$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n , und es sei $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

a) Man ermittle das Volumen V_{10} .

b) Man ermittle S_{10} .

c) Man berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, falls dieser Grenzwert existiert.

Hinweis: Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

3. In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.

Man beweise, daß es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

4. Es seien x und y

a) nichtnegative reelle Zahlen,

b) nichtnegative ganze Zahlen,

für die die Ungleichungen

$$8x + 3y \leq 25, \quad (1)$$

$$-2x + 3y \leq 10 \quad (2)$$

erfüllt sind.

Man weise nach, daß für die Summe

$$z = 2x + y \quad (3)$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.

Lösungen



Lösungen zu: 905 = 2 (siehe Seite 124)

Aufgabe 1: z. B. Addition: $(G, +), (R^*, +), (R, +), (P, +)$

Subtraktion: $(G, -), (R, -)$

Multiplikation: $(N, \cdot), (R^*, \cdot), (R, \cdot), (P, \cdot)$

Division: $(R^* \setminus \{0\}, :), (P \setminus \{0\}, :)$

Aufgabe 2: a) Die Abgeschlossenheit von M bezüglich $+$ ist leicht zu prüfen: z. z. ist für alle $x, y \in M: x + y \in M$. Die Eindeutigkeit von $+$ folgt aus der Definition.

b) Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elements ($n = 12$), ...

Aufgabe 3: a) wie 2a)

b) z. z. ist für alle $x, y \in M': x \circ y \in M'$ (leicht zu prüfen). Kurios ist dabei, daß 0 und 10 fast die gleichen Eigenschaften besitzen:

Für alle $x \in M' (x \neq 10)$ gilt

$x \circ 10 = 10 \circ x = x$ und $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, weiterhin gilt $0 \circ 0 = 10 \circ 0 = 0 \circ 10 = 10 \circ 10 = 0$.

c) $\circ$ besitzt die gleichen Eigenschaften wie $+$.

d) $x \circ y =_{df} \begin{cases} x + y, & \text{falls } x + y < 10 \\ x + y - 10, & \text{falls } x + y \geq 10 \end{cases}$

e) weitere Restklassenadditionen, -multiplikationen

Aufgabe 4: $1 \circ 1 = 4, 2 \circ 1 = 6, 4 \circ 0 = 8, 2 \circ 3 = 10, 0 \circ 3 = 6, 0 \circ 0 = 0$

Aufgabe 5: $(R^*, \circ_1)$ mit $x \circ_1 y =_{df} \frac{x \cdot y}{2}$

bzw. $(R^*, \circ_2)$ mit $x \circ_2 y =_{df} 2x + y$ für alle $x, y \in R^*$.

Aufgabe 6: a) $2 \Delta 1 = 1, 5, 2 * 1 = \sqrt{2}, 2 \square 1 = 1, 3;$

b) $2 \Delta 2 = 2, 2 * 2 = 2, 2 \square 2 = 2;$

c) $\frac{1}{2} \Delta \frac{5}{8} = \frac{5}{16}, \frac{1}{2} * \frac{5}{8} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \square \frac{5}{8} = \frac{1}{5}.$

Aufgabe 7: a) $R^*, R, P, P^+, \dots$, nicht aber z. B. N, G

b) $2 * 1 \notin N, \notin G, \notin R^*, R: 2 * (-1) \notin P$

c) $(R^* \setminus \{0\}, \cdot)$ – ja, da Summe $(x + y)$, Produkt $(2xy)$ und Quotient $\left(\frac{2xy}{x+y}\right)$ positiver rationaler Zahlen eindeutig bestimmt sind und wieder in $R^* \setminus \{0\}$ liegen.

$(R \setminus \{0\}, \square)$ – nein, da z. B. $2 \square (-2)$ nicht

Aufgabe 8: Wir zeigen, daß $x \square y \leq x * y$ für alle $x, y \in P^+$ gilt:

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \text{ gdw. } \frac{2xy}{\sqrt{xy}} \leq x+y \text{ gdw.}$$

$$4xy \leq (x+y)^2 \text{ gdw. } 0 \leq (x-y)^2.$$

Analog zeigt man den zweiten Teil. Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = y$.

Aufgabe 9f a) $x \square y \leq x * y \leq x \Delta y < x \cdot y$

b) ja, $x \circ 0 = 0 \circ x = \sqrt{x^2} = x$ für alle $x \in P^+$.

Aufgabe 10: a) $x \sqcap y = g$ genügt den beiden Bedingungen:

1. $\frac{g}{x}$ und $\frac{g}{y}$, d. h. g ist ein gemeinsamer Teiler von x und y .

2. Für alle natürlichen Zahlen t gilt:

$$\text{Wenn } \frac{t}{x} \text{ und } \frac{t}{y}, \text{ so } \frac{t}{g}.$$

$x \sqcup y = k$ genügt den beiden Bedingungen:

1. $\frac{x}{k}$ und $\frac{y}{k}$, d. h. k ist ein gemeinsames Vielfaches von x und y .

2. Für alle natürlichen Zahlen v gilt:

$$\text{Wenn } \frac{x}{v} \text{ und } \frac{y}{v}, \text{ so } \frac{k}{v}.$$

b) $24 \sqcap 180 = 12, 24 \sqcup 180 = 360;$

$476 \sqcap 714 = 238, 476 \sqcup 714 = 1428.$

c) Für alle $x \in N$ gilt:

$$x \sqcap 0 = 0 \sqcap x = x \quad x \sqcup 0 = 0 \sqcup x = 0$$

sowie

$$x \sqcap 1 = 1 \sqcap x = 1 \quad x \sqcup 1 = 1 \sqcup x = x;$$

insbesondere gilt also:

$$0 \sqcap 0 = 0, \quad 0 \sqcap 1 = 1 \sqcap 0 = 1, \quad 0 \sqcup 0 = 0, \quad 1 \sqcup 0 = 0 \sqcup 1 = 0.$$

d) Zum Beweis vergleiche E. Lehmann: *Übungen für Junge Mathematiker 1*, Leipzig 1968, S. 46

Wenn x und y teilerfremd sind, erhalten wir $x \sqcup y = x \cdot y$.

Aufgabe 11: a) $6 \ 9 \ 8 \ 12$

$$3 \quad 4$$

$$12 \quad 18$$

$$2 \quad 6$$

6, also

$$2 \sqcup \{[(6 \sqcap 9) \sqcup (8 \sqcap 12)] \sqcap 18\} = 6.$$

b) Ersetzen wir in der vorletzten Zahlenreihe 6 durch 3, ergeben sich neben 12 und 6 (in der 3. Reihe) weitere zwei Möglichkeiten: 3 und 15, usw.

Aufgabe 12: $(\Psi(M), \cap): M$ übernimmt die Rolle der 0 aus $(N, \cap)$:

$$X \cap M = M \cap X = X;$$

$\emptyset$ übernimmt die Rolle der 1 aus $(N, \cap)$:

$$X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$$

$(\Psi(M), \cup): M$ übernimmt die Rolle der 0 aus $(N, \cup)$:

$$X \cup M = M \cup X = M;$$

$\emptyset$ übernimmt die Rolle der 1 aus $(N, \cup)$:

$$X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X.$$

Auch für den Durchschnitt und die Vereinigung gelten die Verschmelzungssätze:

Für alle $X, Y \in \Psi(M)$ gilt:

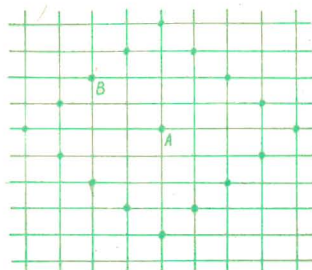
$$(X \cup Y) \cap X = X \text{ und } (X \cap Y) \cup X = X.$$

Zum Beweis vergleiche M. Hasse: *Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik*, Leipzig, 1968 (Band 2 der Math. Schülerbücherei), S. 21.

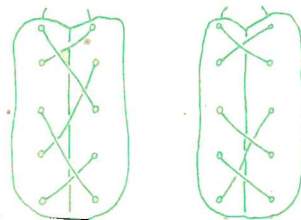
Lösungen zu: Logeleien

(in diesem Heft S. 12/13)

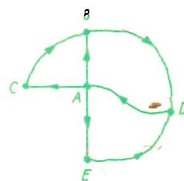
Orthopolis



Zugeschnürt



Achtung, Einbahnstraße!



In der Abbildung a) kann ein Fahrer den Platz D oder E nicht mehr verlassen. Die Festlegung der Straßen in der Abbildung b) läßt Lösungen zu. Wir legen die Einbahnstraßen so, wie es die Abbildung zeigt. Dann kann man von A alle anderen Plätze erreichen. Andererseits ist auch A von den Plätzen B, C, D und E erreichbar. Damit kommt man ganz sicher (wenn auch nicht auf dem kürzesten Weg) von einem Platz X zu einem Platz Y, indem man von X nach A und dann von A nach Y fährt.

Gleiche Länge gesucht

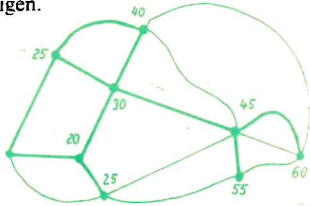
Auf den geraden Straßenteilen haben beide Schienen die gleiche Länge. Damit interessieren uns nur noch die Kurven. Wie aus der Zeichnung hervorgeht, sind sämtliche Kurvenstücke einander kongruent (deckungsgleich). Bei einer Rechtskurve (in Fahrtrichtung gesehen) ist die innere Schiene kürzer als die äußere Schiene, bei einer Linkskurve ist es genau umgekehrt. Wenn auf eine Rechtskurve (bzw. Linkskurve) eine Linkskurve (bzw. Rechtskurve) folgt, so gleichen sich die Längenunterschiede aus.

In der Abbildung a) gibt es sieben Links- und drei Rechtskurven. Deshalb ist der rechte Straßenrand (in Fahrtrichtung = Pfeil) länger (und zwar um $2b\pi$ mit dem Schienenabstand b).

Die in Abbildung b) gezeigte Straßenbahnlinie hat je fünf Links- und Rechtskurven, also sind beide Schienen gleich lang.

Kürzester Weg gesucht

Die Ziffern an den einzelnen Orten geben die kürzeste Zeit an, die man benötigt, um von A aus zu ihnen zu gelangen. Die zugehörigen Wege sind stärker hervorgehoben. Der kürzeste Weg von A nach B ist in 60 Minuten zu bewältigen.



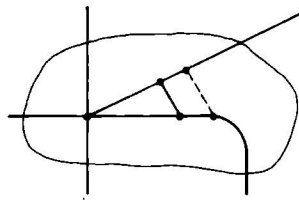
Transport mit Hundeschlitten

Zunächst fahren alle drei Schlitten mit Proviant für vier Wochen ab. Nach einer Woche hat sich ihr Proviant verringert und reicht nur noch für drei Wochen. Um die Station A wieder zu erreichen, benötigt der erste Schlitten Proviant für eine Woche. Bevor er umkehrt, gibt er den überschüssigen Proviant für zwei Wochen zu gleichen Teilen an den zweiten und dritten Schlitten ab, die jetzt wieder Proviant für vier Wochen haben. Nach einer weiteren Woche hat der erste Schlitten wieder A erreicht, der zweite und dritte Schlitten haben jeweils Proviant für drei Wochen. Der zweite Schlitten braucht Proviant für zwei Wochen, damit er zurück zur Station kann. Deshalb kann er dem dritten Schlitten Proviant für eine Woche geben und gefahrlos umkehren. Der dritte Schlitten hat jetzt wieder Proviant für vier Wochen. In zwei Wochen erreicht er den Punkt B, und der zweite Schlitten ist in A angekommen. Nachdem in B die Messungen ausgeführt wurden, kehrt der dritte Schlitten mit Proviant für zwei Wochen um. Zur gleichen Zeit macht sich der gerade in A angekommenene zweite Schlitten mit Proviant für vier Wochen auf den Weg nach B. Er trifft nach zwei Wochen auf den dann proviantlosen, dritten Schlitten und gibt ihm die Hälfte seines Proviantes ab, wodurch beide noch eine Woche in Richtung A fahren können. Wenn sich der zweite und dritte Schlitten treffen, fährt ihnen der erste Schlitten mit Proviant für vier Wochen entgegen. Er trifft

sie nach einer Woche, wobei er noch Proviant für drei Wochen hat, so daß alle drei Schlitten zur Station A zurückkehren können. Die Abbildung zeigt eine graphische Darstellung der Fahrt. Die Kurve für die Rückfahrt ist das Spiegelbild der Hinfahrt in bezug auf eine Gerade, die durch die Proviantmenge für zwei Wochen gezogen wurde. Die Zahlenangaben beziehen sich auf die Wochen, die seit der Abfahrt des 3. Schlittens von A verstrichen sind.

Regel Busverkehr

Wir betrachten die Punkte, an denen mehrere Straßen zusammentreffen. Wenn an einem Punkt vier Straßen aufeinandertreffen (Kreuzung), so lassen wir dort die Buslinien sich kreuzen. Diese Punkte beachten wir deshalb nicht weiter. Interessant sind die Punkte, von denen eine ungerade Anzahl von Straßen ausgeht, denn hier muß eine Buslinie anfangen oder enden. Im Plan gibt es sechs Punkte, wo drei Straßen sich treffen, und zwei Punkte, von denen Straßen ausgehen bzw. enden. Wir haben also acht Punkte, die gleichzeitig End- bzw. Anfangspunkte von Buslinien sind. Also benötigen wir vier Linien.



Wir rangieren

Die Lokomotive kuppelt an A an und fährt bis zu B. Dann wird A auf das untere Anschlußgleis gefahren. Die Lok fährt über die Brücke an B heran. Alle Wagen werden an die Lok gekuppelt und nach oben gebracht, wo A abgekuppelt wird. Die Lok fährt mit B wieder nach unten und schiebt B auf das untere Abstellgleis. Dann fährt die Lok über die Brücke zu A zurück und schiebt A nach unten, wo A stehen bleibt. Jetzt zieht die Lok B nach oben, läßt B stehen und fährt in die Ausgangsposition zurück.

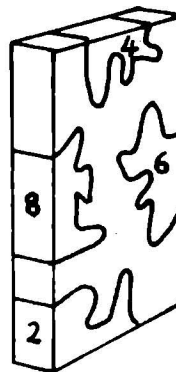
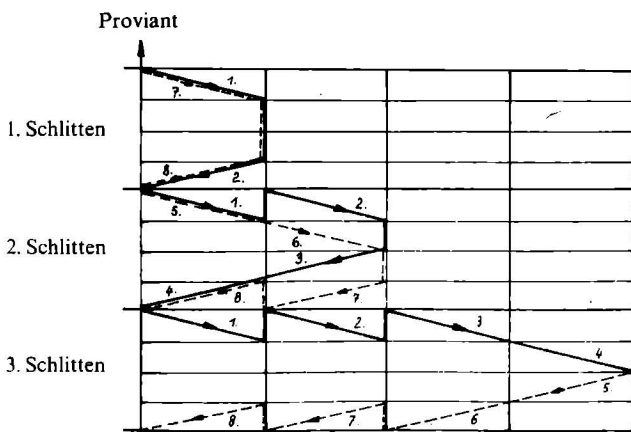
Ein logischer Krimi

Holmes' Gedankengang war folgender: Von den vier Geständnissen ist eines falsch, die übrigen sind wahr. Welches mag wohl falsch sein? Das des Beamten Psmith nicht, denn wenn die drei anderen Geständnisse wahr sind, so könnte nur Psmith den Saal als letzter verlassen haben (und das behauptete er ja gerade). Wenn Coxford lügt, so war er entweder der erste oder der letzte. Timid behauptet aber, daß er der erste, und Psmith, daß er der letzte war; wenn Timid und Psmith die Wahrheit sagen, konnte also Coxford weder der erste noch der letzte sein, demnach hat auch er richtig ausgesagt. Auch Unfair log nicht. Denn wenn Psmith die Wahrheit sagte, war er der letzte, somit sagte Unfair die Wahrheit, indem er behauptete, daß er nicht als letzter wegging. Es bleibt also nichts anderes übrig, als daß Timid gelogen hat, was auch damit vereinbar ist, daß die drei anderen Beamten die Wahrheit sagten. Timid behauptete nämlich, er sei als erster gegangen. Die Falschheit dessen wäre nur dann mit der Wahrheit der drei anderen Geständnisse unvereinbar, wenn sich von den drei anderen Geständnissen herausstellte, daß keiner der drei Angestellten der erste sein konnte (dann müßte nämlich doch Timid der erste gewesen sein). Nun, weder Psmith noch Coxford war (nach ihrem eigenen Geständnis) der erste. Unfair aber hatte nur gesagt, er sei nicht der letzte gewesen. Es ist also mit der Wahrheit seines Geständnisses vereinbar, daß er der erste war. Da die Meldung Watsons, daß von den vier Geständnissen genau eines falsch sei, nur mit der Kombination vereinbar ist, daß Timid gelogen hat, somit bleibt nur eine einzige Möglichkeit übrig: Unfair hat sich als erster entfernt. Da Holmes schon herausgefunden hat (wie er das anstellte, darüber fehlen leider die aufregenden Einzelheiten), daß er, der den Saal als erster verließ, der Spießgeselle war, wußte Holmes auf Grund der Information Watsons sofort, daß kein anderer als Unfair der Spießgeselle sein konnte.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, (Heft 5/76)

Ma 5 ■ 1538 Im Jahre 1974 wurden durch Fußgänger (618 + 8492) Unfälle, also 9110 Unfälle verursacht. Insgesamt gab es in diesem Jahr in der DDR $7 \cdot 9110 = 63770$ Verkehrsunfälle. Aus $624946000 : 63770 = 9800$ folgt, daß die durchschnittlichen Kosten, die ein Verkehrsunfall verursacht, etwa 9800 M betragen.

Ma 5 ■ 1539 Aus $15 \text{ kg} - 10 \text{ kg} = 5 \text{ kg}$ folgt, daß jeder Pionier 5 kg Altpapier mehr abliefern will, als im Pionierauftrag vorgesehen ist. Dieser Schule gehören somit $2140 : 5 = 428$ Pioniere an. Insgesamt werden $15 \text{ kg} \cdot 428 = 6420 \text{ kg}$ Altpapier abgeliefert.



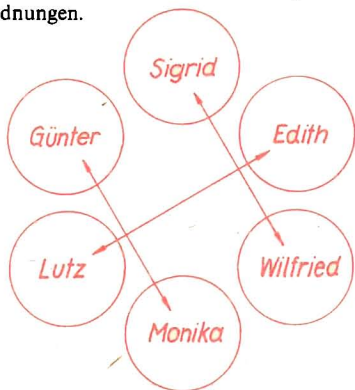
Ma5 ■1540 Nach der Entnahme von 74 Kugeln könnten wir im ungünstigsten Falle 10 schwarze, 10 weiße, 12 gelbe, 14 rote, 14 grüne und 14 blaue Kugeln haben. Im Kasten befinden sich dann weder schwarze, noch weiße, noch gelbe Kugeln. Beim Entnehmen einer weiteren Kugel ist diese entweder rot oder grün oder blau. Nach der Entnahme von 75 Kugeln erhalten wir also mit Sicherheit 15 gleichfarbige; sie sind entweder rot oder grün oder blau.

Ma5 ■1541 Aus d) folgt: Edith sitzt (links oder rechts) neben Sigrid; Günter sitzt (rechts oder links) neben Sigrid.

Aus c) folgt: Wilfried sitzt neben Edith.

Aus b) und e) folgt: Entweder sitzt Monika neben Günter, oder Monika sitzt neben Wilfried. Wenn Monika neben Günter sitzt, dann würde Monika mit Wilfried derselben Gruppe angehören, was wegen e) nicht möglich ist. Folglich sitzt Monika neben Wilfried und somit Lutz zwischen Monika und Günter.

Aus a) folgt: Monika und Günter, Edith und Lutz, Sigrid und Wilfried gehören jeweils der gleichen Pioniergruppe an. Die folgende Graphik veranschaulicht eine der möglichen Sitzordnungen.



Ma5 ■1542 Die beiden Zahlen seien a und b . Alle für diese Zahlen möglichen Fälle sind in der nachstehenden Tabelle erfaßt.

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
9	11	81	121	202
8	12	64	144	208
7	13	49	169	218
6	14	36	196	232
5	15	25	225	250
4	16	16	256	272
3	17	9	289	298
2	18	4	324	328
1	19	1	361	362

Nur $a=7$ und $b=13$ erfüllen die gestellten Bedingungen.

Ma5 ■1543 Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Aus den Angaben folgt $a=c+1$, $d=a+1=c+2$, $b=(a+c) \cdot d$.

a	b	c	d
2	9	1	3
3	20	2	4
4	35	3	5

Wegen $1 \leq b \leq 9$ entfallen $c=2, 3, 4, \dots$, da in diesen Fällen $b > 9$. Es gibt nur eine Zahl, die die Bedingungen erfüllt; sie lautet 2913.

Ma6 ■1544 Aus a) und d) folgt: Andreas ist zehn, Jürgen zwölf Jahre alt. Aus e) folgt: Michael ist ebenfalls zwölf Jahre alt. Somit ist Christian zehn Jahre alt.

Aus b) und c) folgt: Michael hat weder den Familiennamen Matuschewski noch den Familiennamen Anders. D. h., Michael hat entweder den Familiennamen Constantin oder Jordan.

Aus e) und f) folgt: Michael hat den Familiennamen Jordan; Jürgen hat den Familiennamen Matuschewski. Somit hat Andreas den Familiennamen Constantin, Christian hat den Familiennamen Anders.

Ma6 ■1545 Nach einer Stunde zeigt die zweite Uhr gegenüber der ersten eine um $\frac{1}{2}$ Minuten vorausgeeilte Uhrzeit an. Nach 24 Stunden bzw. nach einem Tag zeigt die zweite Uhr gegenüber der ersten eine um $24 \cdot \frac{1}{2}$ Minuten = 36 Minuten vorausgeeilte

Uhrzeit an. Damit beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit anzeigen, müßte sich die zweite Uhrzeit gegenüber der ersten um 12 Stunden unterscheiden. Aus $12 \text{ h} = 12 \cdot 60 \text{ min} = 720 \text{ min}$ und $720 : 36 = 20$ folgt, daß 20 Tage vergehen, bis beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit anzeigen.

Ma6 ■1546 Wir rechnen $720 \text{ g} : 2 = 360 \text{ g}$; Petra hat $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ der Torte verzehrt und dabei $360 \text{ g} : 4 = 90 \text{ g}$ Kirschen gegessen. Eine Schale enthält $360 \text{ g} : 3 = 120 \text{ g}$ Kirschen. Petra hat insgesamt $90 \text{ g} + 120 \text{ g} = 210 \text{ g}$ Kirschen verzehrt.

Ma6 ■1547 Angenommen, die gesamte Marschstrecke betrug x Kilometer. Bis zum ersten Kontrollpunkt waren $\left(\frac{x}{2} - 2\right)$ km zurückzulegen. Nun gilt

$$\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 7 + 3 = x, \quad 8 = \frac{x}{2}, \quad x = 16.$$

Die gesamte Marschstrecke betrug 16 km.

Ma6 ■1548 Angenommen, im Monat März haben x Schüler Geburtstag; ihren Geburtstag haben dann $2x$ Schüler im Januar, $4x$ Schüler im Mai, $(4x-4)$ Schüler im Juli und $(2x-2)$ Schüler im Oktober. Zusammen sind das $(13x-6)$ Schüler. Nun gilt aber

$$30 < 13x - 6 < 40, \\ 36 < 13x < 46.$$

Nur die natürliche Zahl $x=3$ erfüllt diese Ungleichung. Zur Klasse gehören somit $13 \cdot 3 - 6 = 33$ Schüler.

Ph6 ■1 Gegeben: $a = 10 \text{ cm}$
 $h = 15 \text{ cm}$

$$q = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Gesucht: a) m

b) Höhe des Wasserspiegels

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad V &= a^2 h \\ V &= 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} \\ V &= 1500 \text{ cm}^3 \\ m &= q \cdot V \\ m &= 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1500 \text{ cm}^3 \\ m &= 300 \text{ g} \end{aligned}$$

In diesem Gefäß befinden sich 300 g Schnee.

b) Die Dichte vom Wasser zur Dichte des Schnees verhält sich wie $1:0,2 = 5:1$. Da sich die Höhen in den quadratischen Prismen bei gleicher Grundfläche ebenfalls wie $5:1$ verhalten, gilt:
 $5:1 = 15:3$, d. h., das Wasser steht 3 cm hoch.

Ma7 ■1549 Angenommen, a Schüler gehören der Klasse 7a, b Schüler der Klasse 7b und c Schüler der Klasse 7c an, dann gilt

$$a + b + c = 85, \quad (1)$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 26. \quad (2)$$

Multiplizieren wir Gleichung (2) mit 3 und subtrahieren die so erhaltene Gleichung von Gleichung (1), so erhalten wir

$$c - \frac{3}{4} \cdot c = 85 - 78,$$

$$\frac{1}{4} \cdot c = 7,$$

$$c = 28.$$

Für $c=28$ erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (1)

$$a + b + 28 = 85,$$

$$a + b = 57.$$

Nun ist b ein Vielfaches von 3 und von 10, also ein Vielfaches von 30. Da a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, kann deshalb nur $b=30$ und somit $a=27$ gelten. Der Klasse 7a gehören 27 Schüler an.

Ma7 ■1550 Die kleinste dieser fünf geraden natürlichen Zahlen sei $2k$ mit $k=1, 2, 3, \dots$; dann gilt

$$\begin{aligned} 2k \cdot (2k+2) \cdot (2k+4) \cdot (2k+6) \cdot (2k+8) &= 3840, \\ 2k \cdot 2(k+1) \cdot 2(k+2) \cdot 2(k+3) \cdot 2(k+4) &= 3840, \\ 32 \cdot k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) &= 3840, \quad (1) \\ k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) &= 120, \\ k^5 &< 120. \end{aligned}$$

Wegen $2^5 = 32 < 120 < 243 = 3^5$ folgt daraus $k=1$ oder $k=2$.

Für $k=1$ erhalten wir aus Gleichung (1)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

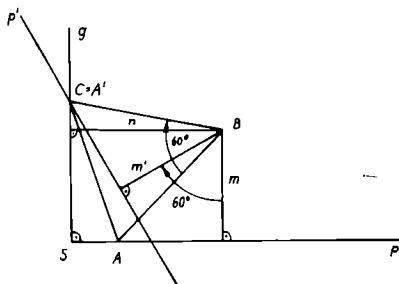
für $k=2$ erhalten wir aus Gleichung (1)

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 > 120.$$

Die Aufgabe besitzt somit genau eine Lösung, nämlich $k=1$, und wir erhalten

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840.$$

Ma7 ■1551 Wir drehen die Figur um B als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinne um einen Winkel von 60° . Dann wird der Eckpunkt A des zu konstruierenden gleichseitigen Dreiecks ABC auf den Punkt C abgebildet. Folglich schneidet das Bild p' von p den Schenkel q in $A' = C$, und es ist $\overline{BC}$ die gesuchte Seite des zu konstruierenden gleichseitigen Dreiecks ABC .



Ma 7 ■ 1552 Aus $(15+x) \cdot (20+x) = (9+x) \cdot (32+x)$ folgt
 $300 + 15x + 20x + x^2 = 288 + 9x + 32x + x^2$,
 $35x + 300 = 41x + 288$,
 $6x = 12$
 $x = 2$.

Wir erhalten die Produkte $17 \cdot 22$ und $11 \cdot 34$, für diese gilt $17 \cdot 22 = 11 \cdot 34 = 374$.

Ph 7 ■ 2 Gegeben:

$$p_1 = 765 \text{ Torr} = \frac{765 \cdot 1,36}{1000} \text{ at} \approx 1,04 \text{ at}$$

$$p_2 = 0,025 \text{ at}$$

$$d = 75 \text{ mm} = 7,5 \text{ cm}$$

$$\pi = 3,14$$

Gesucht: F

Die Druckkraft F ergibt sich aus

$$F = p \cdot A$$

$$F = \frac{(p_1 - p_2) \pi d^2}{4}$$

$$F = \frac{(1,04 - 0,025) \text{ at} \cdot 3,14 \cdot 7,5^2 \text{ cm}^2}{4}$$

$$F \approx 44,82 \text{ kp}$$

$$p = p_1 - p_2$$

$$A = \frac{d^2}{4}$$

Der Deckel wird mit einer Druckkraft von 44,82 kp verschlossen.

Ch 7 ■ 1 a) 1 t Magneteisenstein enthält $0,75 \cdot 0,7 \text{ t} = 0,525 \text{ t Eisen}$. $40 \cdot 40 \text{ t Erz}$ enthalten $1600 \cdot 0,525 \text{ t} = 840 \text{ t Eisen}$.

b) 1 t Roteisenstein enthält $\frac{1}{3} \text{ t Eisen}$.

$60 \cdot 40 \text{ t Erz}$ enthalten $2400 \cdot \frac{1}{3} \text{ t} = 800 \text{ t Eisen}$.

Aus den gelieferten Mengen können a) 840 t, b) 800 t Eisen gewonnen werden.

c) Die Verarbeitung von Magneteisenstein ist wegen des höheren Eisengehalts wirtschaftlicher.

Ma 8 ■ 1553 Es sei k eine negative ganze Zahl, wobei wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $k < -7$.

Dann gilt $k < 0$, $k+5 < 0$ und $k+7 < 0$,

also $z = k(k+5)(k+7) < 0$,

da alle drei Faktoren negativ sind.

2. Fall: $-7 \leq k \leq -5$

Dann gilt $k < 0$, $k+5 \leq 0$ und $k+7 \geq 0$,

also $z = k(k+5)(k+7) \geq 0$,

da von den drei Faktoren entweder einer gleich Null ist oder zwei negativ und einer positiv sind. In diesem Fall ist also z nicht negativ.

3. Fall: $-5 < k < 0$

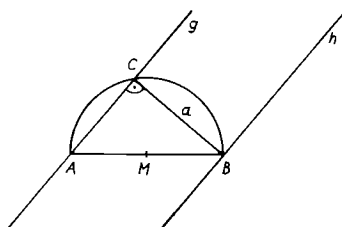
Dann gilt $k < 0$, $k+5 > 0$, $k+7 > 0$,

also $z = k(k+5)(k+7) < 0$,

da ein Faktor negativ und die beiden anderen Faktoren positiv sind. Die Zahl $z = k(k+5)(k+7)$ ist also für negative ganze Zahlen k genau dann nicht negativ, wenn $-7 \leq k \leq -5$ gilt, wenn also

$k = -7$, $k = -6$ oder $k = -5$ gilt.

Ma 8 ■ 1554 Es seien g und h zwei parallele Geraden, die durch Punkte A bzw. B gehen und den Abstand $a = 4 \text{ cm}$ haben (siehe Bild). Ferner sei C der Fußpunkt des von B auf die Gerade g gefällten Lotes. Dann ist $\angle BCA = 90^\circ$.



Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt dann C auf einem der beiden Halbkreise mit $\overline{AB}$ als Durchmesser. Daraus ergibt sich die Konstruktion:

Man konstruiert einen der beiden Halbkreise mit $\overline{AB}$ als Durchmesser und schlägt um B einen Kreis mit dem Radius $a = 4 \text{ cm}$, der den Halbkreis in C schneidet. Dann ist AC die verlangte Gerade g und die Parallele zu g durch B die verlangte Gerade h .

Bemerkung: Die Aufgabe hat noch eine zweite Lösung. Zeichnet man nämlich den „unteren“ Halbkreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, so erhält man den Schnittpunkt C' sowie zwei parallele Geraden g' und h' , die zu g und h bezüglich $\overline{AB}$ spiegelbildlich liegen und im Bild nicht gezeichnet sind.

Ma 8 ■ 1555 Angenommen, es gäbe zwei rationale Zahlen a und b , für die die Gleichung

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a+b}{2(a-b)} = \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{a^2 - b^2}{a} \quad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt $a \neq 0$,

$a-b \neq 0$ und $a+b \neq 0$ und daher auch

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \neq 0,$$

da sonst nicht alle Nenner in der Gleichung (1) von Null verschieden wären.

Da der Hauptnenner in (1) gleich $2a(a^2 - b^2)$ ist, folgt weiter $(a^2 + b^2)2a - (a+b)^2a$

$$= (a-b)^2a - (a^2 - b^2)2(a^2 - b^2),$$

$$2(a^2 - b^2)^2 = a[(a-b)^2 + (a+b)^2 - 2(a^2 + b^2)],$$

$$2(a^2 - b^2)^2$$

$$= a[a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2],$$

$$2(a^2 - b^2)^2 = 0,$$

$$a^2 - b^2 = 0,$$

$$(a+b)(a-b) = 0.$$

Also ist $a+b=0$ oder $a-b=0$, was der obigen Voraussetzung widerspricht. Daher gibt es keine rationalen Zahlen a und b , für die die Gleichung (1) erfüllt ist.

Ma 8 ■ 1556 Da die Mannschaft D das Punkte-Verhältnis 1:5 und das Torverhältnis

0:5 erreichte, spielte sie einmal unentschieden mit 0:0 und verlor die übrigen beiden Spiele. Nunmehr sind zunächst die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: A spielte gegen D 0:0.

Dann hätte A gegen B und C zusammen 4 Tore erzielt, was der Voraussetzung widerspricht, wonach B und C zusammen nur 3 Gegentore hinnehmen mußten. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Fall: B spielte gegen D 0:0.

Dann hätte B gegen A und C zusammen 4 Tore erzielt, was wieder der Voraussetzung widerspricht. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

Daher kann nur der folgende Fall eintreten:

3. Fall: C spielte gegen D 0:0.

Da C und D gegeneinander keine Tore erzielten, aber zusammen 7 Gegentore hatten, entfällt eines der 8 Tore, die A bzw. B erzielten, auf das Spiel A gegen B , das daher mit einem Torverhältnis 1:0 oder 0:1 endete. Da aber A 2 Spiele gewann und ein Spiel unentschieden spielte, gewann A gegen B mit dem Torverhältnis 1:0.

Die übrigen drei Tore erzielte A mit den Spielen gegen C und D . Daher mußte A gegen D mindestens ein Tor erzielen, konnte also, da D überhaupt kein Tor erzielte, nicht gegen D unentschieden spielen. Daher spielte A gegen C unentschieden, und zwar mit dem Torverhältnis 1:1, ferner gewann A gegen D mit dem Torverhältnis 2:0. Daraus folgt weiter, daß B das Spiel gegen C mit dem Torverhältnis 1:0 und das Spiel gegen D mit dem Torverhältnis 3:0 gewann. Daher fielen die sechs Spiele wie folgt aus:

A gewann gegen B mit dem Torverhältnis 1:0. A spielte unentschieden gegen C mit dem Torverhältnis 1:1. A gewann gegen D mit dem Torverhältnis 2:0. B gewann gegen C mit dem Torverhältnis 1:0. B gewann gegen D mit dem Torverhältnis 3:0. C spielte unentschieden gegen D mit dem Torverhältnis 0:0.

Ph 8 ■ 3 Gegeben: $U = 6 \text{ V}$; $P = 3 \text{ W}$.

Gesucht: a) I , b) R , c) W_{el}

$$a) P = U \cdot I$$

$$b) R = \frac{U}{I}$$

$$I = \frac{P}{U} \quad R = \frac{6 \text{ V}}{0,5 \text{ A}}$$

$$I = \frac{3 \text{ W}}{6 \text{ V}} \quad R = 12 \Omega$$

$$I = 0,5 \text{ A}$$

$$c) W_{el} = U \cdot I \cdot t$$

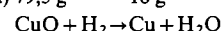
$$W_{el} = 6 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} \cdot 24 \text{ h}$$

$$W_{el} = 3 \text{ W} \cdot 86400 \text{ s}$$

$$W_{el} = 259200 \text{ Ws}$$

Bei der Glühlampe beträgt die Stromstärke 0,5 A, der Widerstand 12Ω und die elektrische Arbeit 259200 Ws.

Ch 8 ■ 2 a) 79,5 g 18 g



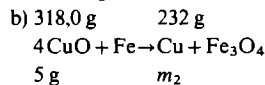
$$5 \text{ g} \quad m_1$$

$$NR: 1 \text{ mol} \cdot 79,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 79,5 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 18 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_1 = 1,13 \text{ g}$$

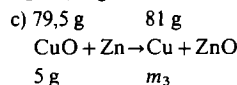


$$NR: 4 \text{ mol} \cdot 79,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 318,0 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 232 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 232 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_2 = 3,65 \text{ g}$$



$$NR: 1 \text{ mol} \cdot 79,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 79,5 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 81 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 81 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_3 = 5,09 \text{ g}$$

Man erhält a) 1,1 g Wasser, b) 3,7 g Eisen-(II, III)-oxid, c) 5,1 g Zinkoxid.

Lösungen zu alpha-heiter (Heft 1/77)

Gauß-Anekdote

1. Berechnung, 2. Rechnung, 3. also, 4. untere, 5. nicht, 6. statt, 7. Chronik, 8. hoffen, 9. Weg, 10. eine, 11. ihnen
 Braunschweig Göttingen

Verkettungsrätsel

1. Zeile: Drehung – Gradmaß
 2. Zeile: Algebra – Ankreis
 3. Zeile: Ungenau – Umkreis
 4. Zeile: Numerus – Sekante
 5. Zeile: Rhombus – Strecke
- Lösungswort: Gauss

Silbenrätsel

1. Chanson, 2. Ankathete, 3. Rotationskörper,
 4. Läuferstrich, 5. Fundamentalsatz der Algebra,
 6. Riemannscher Integralbegriff, 7. Ingenieur,
 8. Ebene, 9. Distributiv, 10. Ries,
 11. Inverse, 12. Cosh, 13. h. c., 14. Gauß,
 15. Aufriß, 16. Uhu, 17. Sigma, 18. Spiegelung
- Carl Friedrich Gauß – Gaußsches Verfahren

Diagonale Verkettung

1. Zeile: Log – Galilei
2. Zeile: Area – Abakus
3. Zeile: Genau – Unruh
4. Zeile: Thales – Sinh
5. Zeile: Tangens – Sin

Kryptarithmetik

A=8	G=3	L=0	O=5	S=7
E=2	H=4	N=1	R=6	U=9

80166	Es bedeuten: A=0	U=1
+ 80166	L=2	K=3
+ 80166	E=4	S=6
+ 80166	G=8	
<u>320664</u>		

Gaußsche Lebensdaten

$$\begin{array}{r} 1777 + 78 = 1855 \\ + \quad + \quad + \\ 200 + 222 = 422 \\ \hline 1977 + 300 = 2277 \end{array}$$

Kreuzzahlrätsel

Ein Lösungsweg:
 (w = waagrecht, s = senkrecht)

1	7	7	7		8	9
2		5	0	4	1	
5	3	0	2			6
	3		7	2		2
1	3	7		3	7	5
	3	1	2	5		
7	3		1	7	2	7

Zunächst die Jahreszahlen w1) 1777 und w17) 1727, dann die Postleitzahl s3) 7027. 1s) nur 125, somit a=5 und w14) 3125, s2) 750, s8) 625, s7) 33333, w16) 73. w9) kann nur 72 sein. Dann ist s10) 2357 und w13) 375. Da w5) das Quadrat von s12) ist, muß s12) 71 und w5) 5041 sein. Dann ist w11) 137, ferner s4) 81 und w4) 89. Die Zahlen in den vier Ecken des Rätsel-feldes ergeben zeilenweise gelesen das Gedenkjahr 1977!

1977

$$\begin{aligned} 0 &= (1+9)(7-7) \\ 1 &= 1^9 + 7 - 7 = \sqrt{1+9 \cdot (7-7)} \\ 2 &= \sqrt{-1-9+7+7} = 1 \cdot 9 - \sqrt{7 \cdot 7} \\ 3 &= 1\sqrt{9+7-7} = \sqrt{1 \cdot 9 \cdot 7:7} \\ 4 &= -1-9+7+7 = 1 - \sqrt{9+7+7} \\ 5 &= -1 \cdot 9 + 7 + 7 = 1 + \sqrt{9+7:7} \\ 6 &= 1-9+7+7 = 1-9+7+7 \\ 7 &= 1^9 + 7 \cdot 7 = (1-9+7) \cdot 7 \\ 8 &= 1^9 \cdot 7 + 7 = 1 \cdot 9 - 7:7 \\ 9 &= 1 \cdot 9 + 7 - 7 \\ 10 &= 1+9+7-7 \end{aligned}$$

Schüler A. Fittke, Berlin

$d = 1 \cdot 9 - \sqrt{7 \cdot 7}$
 $A \approx (1 + \sqrt{9 \cdot 7}) : 7$

H. Decker

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 + (1 \cdot 9 + 7 - 7)} \\ A &= (19 - 7) \cdot 7 - (1 + 9 + 7 + 7) \end{aligned}$$

H. Förg-Rob, Schwaz (Österreich)

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1^9 + 7 \cdot 7} \\ 9 &= 1 \cdot 9 + (7 - 7) \\ 7 &= -1 + 9 - (7:7) \\ 7 &= 1 + \sqrt{9 + (7:7) + 1^9 + (7:7)} \\ 19 &= 1 + \sqrt{9 + 7 + 7 + 1 - 9 + 7 - 7} \\ 197 &= (1 + \sqrt{9}) \cdot 7 \cdot 7 + 1 \\ 1977 &= 19 \cdot (7 + 7) \cdot [-1 + 9 - (7:7)] \\ &\quad + (1 \cdot 9 + 7 + 7) \cdot [1 + \sqrt{9 + (7:7)}] \end{aligned}$$

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke

$$\begin{aligned} 19 + 77 &= \sqrt{1 \cdot 9 \cdot 77} - 19\sqrt{7 \cdot 7} - 1 \cdot 9 + \sqrt{7 \cdot 7} \\ \sqrt{1 \cdot 9 + \sqrt{7 \cdot 7}} &= 1 + 9 - 7 + 7 \\ \sqrt{1 \cdot 9 - \sqrt{7 \cdot 7}} &= 1 + 9 - 7 - 7 \\ \sqrt{1 \cdot 9 \cdot \sqrt{7 \cdot 7}} &= (1 + 9 - 7) \cdot 7 \\ \sqrt{1 \cdot 9 : \sqrt{7 \cdot 7}} &= (1 + 9 - 7) : 7 \\ 1977 &= 12(34 + 56) + 7 + 890 \end{aligned}$$

Ing. H. Decker, Köln

$$1977 - 1777 = (1 + 9)(7 + 7) - 17 + 77 = 197 - 7 - 1 + 77:7$$

$$1 + 7 + 7 + 7 = -1 + 9 + 7 + 7$$

$$(1 + 7)(7 + 7) = (-1 + 9)(7 + 7)$$

$$1777 = (1 - 9 + 7 \cdot 7)^2 + (1 + 9 + 7 - 7)^2 - (1 \cdot 9 - \sqrt{7 \cdot 7})^2$$

$$1855 - 1777 = 1^9 + 77$$

$$1977 = \text{MCMLXXVII}$$

$$\begin{aligned} \text{MC} - \text{ML} &= \text{XXV} \cdot \text{II} \\ \text{M} + \text{C} - \text{M} &= \text{L} + \text{XXV} \cdot \text{II} \\ \text{M} : \text{C} \cdot \text{M} &= \text{L} \cdot \text{XX} \cdot \text{V} \cdot \text{II} \\ (\text{MC} - \text{ML}) : \text{XXV} &= \text{II} \\ \sqrt{\text{M} - \text{C} + \text{M} : \text{L}} &= \text{XXV} \cdot \text{II} \end{aligned}$$

$A = 1977 - 1777$

$19 + 7:7$

$A = 1977 - 1777$

$19 + 7:7$ $-1 + 7 + 7 + 7$

$A = 1977 - 1777$

$1 + 9 + 7 - 7$ $-1 + 7 + 7 + 7$

alpha-Wettbewerb

Abzeichen in Gold

Für neunjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau; **Kerstin Bachmann**, Halle; **Lutz Püffeld**, Hennigsdorf; **Uwe Lewandowski**, Leipzig; **Annegret Kirsten**, Leuna; **Ralph Lehmann**, Petershagen; **Henrik Frank**, Greifswald; **Eckhard Schadow**, Oranienburg

Für achtjährige Teilnahme

Detlef Poppe, Mühlhausen; **Kirsten Helbig**, Frankfurt; **Bernd Hanke**, Großschweidnitz; **Ute und Ines Greiner**, Wurzen; **Astrid Rösel**, Zittau; **Michael Schnelle**, Calau; **Martin Ermrich**, Elbingerode; **Guido Blossfeld**, Halle; **Gerlinde Koch**, Trusetal

Für siebenjährige Teilnahme

Holger Jurack, Burkau; **Hermann Tenor**, Dessau; **Ulf Hutschenreiter**, Dresden; **Birgit Kühnstedt**, Erfurt; **Ulrike Bandemer**, Freiberg; **Angelika Müller**, Greifswald; **Falk Bachmann**, **Wilfried Carl**, **Birgit Krötenheerdt**, alle Halle; **Dirk Sprengel**, Potsdam; **Peter Herrlich**, Radebeul; **Ilona Drews**, Wöbbelin; **Hellfried Schumacher**, Ahlbeck; **Birgit Weiß**, Bernau; **Ullrich Riedel**, Flöha; **Lars Luther**, Güstrow; **Rainer Gutsche**, Herzberg; **Torsten Waldeck**, Karl-Marx-Stadt; **Jens-Uwe Richter**, Kemtau; **Andreas Neubert**, Schwarzenberg; **Bernd Redlich**, Wernburg; **Stephan Fleischmann**, Zella-Mehlis

Für sechsjährige Teilnahme

Borwin Wegener, Berlin; **Jürgen Sommer-schuh**, Bischofswerda; **Arno Feuerherdt**, Brandenburg; **Uwe Rieckert**, Cottbus; **Elke Seidel**, Dresden; **Marid Helbig**, Frankfurt; **Andreas Illing**, Gersdorf; **Thies Luther**, Güstrow; **Frank Schulze**, Himmelsberg; **Ulv Krabisch**, **Bernd Kreußler**, beide Leipzig; **Lew Dimenstein**, Leningrad (UdSSR); **Sybill Baumgart**, Löderburg; **Karl Krause**, Mansfeld (Rentner); **Wolfgang Huschmann**, Oelsnitz; **Volker Lerche**, Schmalkalden; **Gudrun Drews**, Wöbbelin; **Manuela Lehmert**, Worbis; **Regina Kupfer**, Belgershain; **Thomas Jarosch**, Berlin; **Ralf Mayas**, Ingo Fietze, Manfred Seidler, Helga Schuster, alle Cottbus; **Carola Zimmermann**, Joachim Ernst, beide Döbeln; **Andreas Wenzel**, Dorfchemnitz; **Wolfram Flämig**, Eva Gerstner, Klaus Schlegel, alle Dresden; **Uwe Beck**, Falkensee; **Wolfgang Seeber**, Gehren; **Thomas Jakob**, Gera; **Isolde Kehr**, Gospenroda; **Ursula Märker**, Greifswald; **Matthias Heinevetter**, Heiligenstadt;

Sabine Pohl, Jena; **Roland Kaschner**, Lauchhammer; **Norbert Littig**, Lichtenberg; **Bernhard Tschada**, Löbau; **Ulrike Zinke**, Lützen; **Uwe Bormann**, Magdeburg; **Carola Fechter**, Neubrandenburg; **Kornelia Poike**, Neukirch; **Karla Eberlein**, Niederfrauendorf; **Stefan Kaiser**, Niederschmalkalden; **Berthold Wettengel**, Oelsnitz; **Thomas Maiwald**, Olbersdorf; **Frank ABmus**, Oranienburg; **Rainer Seifert**, Pinnau; **Andreas Fischer**, Radebeul; **Beate Brandtner**, Schildau; **Lutz Thorwarth**, Schmalkalden; **Karin Kutsche**, Steinbach-Hallenberg; **Kerstin Utke**, Stralsund; **Dietmar Glanz**, Worbis

Für fünfjährige Teilnahme:

Andreas Fittke, **Audrey Hoffmann**, **Jens Peter Mönch**, alle Berlin; **Ulf Ritschel**, Booßen; **Andreas Mempel**, Clingen; **Dieter Kratsch**, Göhren; **Arnild und Dagmar Lorenz**, Görlitz; **Andreas Kasperek**, Gräfenhainichen; **Stefan Krötenheerdt**, Halle; **Eckard Liebscher**, Ilmenau; **Claudia Kummer**, Leipzig; **Reinhard Koeppe**, Loburg; **Wolfgang Taubert**, **Gerald Werner**, beide Meiningen; **Petra Beck**, Potsdam; **Birgit Rosenberger**, Suhl; **Matthias Ohm**, Ahlbeck; **Ralf Heinze**, Arnstadt; **Wolfgang Schippel**, **Andrea Nießen**, **Christian Kolliwer**, alle Berlin; **Jörg Kunzmann**, Uta Weidauer, beide Bernsbach; **Klaus Harms**, Bobzin; **Uwe Lumm**, Clingen; **Cornelia Güntzel**, **Clemens Jaunich**, **Jürgen Sägenschnitter**, **Peter Röhl**, **Frank Mayas**, **Jörg Kaiser**, alle Cottbus; **Ralph Scharf**, Döbeln; **Rainer Grünert**, **Karl-Heinz Jünger**, beide Dresden; **Michael Schalle**, Drogitz; **Udo Grünert**, Freital; **Andrej Jendrusch**, Glienicke; **Karin Kramer**, **Claudia Endtricht**, beide Görlitz; **Irmhild Bittner**, **Michael Fukarek**, **Sylke und Bengt Nölting**, alle Greifswald; **Cornelia Thiel**, Güstrow; **Ingo Lenz**, Hagenow; **Uta Gutsche**, Herzberg; **Leonore Weise**, **Thomas Göpfert**, beide Karl-Marx-Stadt; **Uwe Klaus**, **Stefan Kasper**, beide Leipzig; **Lothar Gruber**, Linz (Österreich); **Ute Busch**, Lobenstein; **Hans-Joachim Berger**, **Andreas Erben**, **Rüdiger Tanzke**, alle Löderburg; **Wolfgang Blachnik**, Lübbenau; **Uwe Finke**, Magdeburg; **Matthias Breitbarth**, Mühlhausen; **Volker Schulz**, Nauen; **Winfried Glöde**, Neubrandenburg; **Uwe Trautvetter**, Neuenhofe; **Thomas Richter**, Neuhausen; **Elke Gräfe**, Oberlichtenau; **Axel Müller**, Oberlungwitz; **Steffen Krebs**, Radebeul; **Ilona Wünsche**, Rodewitz; **Iris Schulz**, Rotta; **Erika Krüger**, Sangerhausen; **Sabine Peter**, Schmalkalden; **Dieter Hornawsky**, Silbach; **Walter Rempel**, Sonneberg; **Kerstin Schubert**, **Petra Thomzik**, **Stefan Meingast**, alle Steinbach-Hallenberg; **Thomas Luschnitz**, Stralsund; **Petra Henkel**, Töplitz; **Roland Löffler**, Weida; **Detlef Kohn**, Weimar; **Falk Pankau**, Wildpark; **Manfred Häußler**, **Jörg Keitel**, beide Westgreußen; **Rolf Kuhn**, Wintzingerode; **Katrin Richter**, Wittenberg; **Heidrun Schön**, Worbis; **Manfred Zimmer**, Volstedt; **Karsten König**, Zeuthen; **Evelin**

Ebert, Zschocken; **Kurt Oertel**, Zschornowitz (Rentner); **Andreas Bernert**, Zwickau

Für vierjährige Teilnahme

Volkmar Türke, Auerbach; **Christine Spiegelberg**, **Peter Pörs**, beide Berlin; **Martina Menge**, Bernburg; **Gudrun Billig**, Coswig; **Werner Jeroch**, Dresden; **Barbara Gehb**, Fambach; **Wolfgang Umlauf**, Freital; **Frank Kratsch**, Göhren; **Jens Negever**, Grimma; **Günter Mosel**, Gülze; **Torsten Musiol**, Güstrow; **Andrea Herrmann**, Hammerunterwiesenthal; **Ute Schilling**, Hoyerswerda; **Torsten Busch**, Klausdorf; **Armin Körner**, Leipzig; **Steffen Langbein**, Lichte; **Michael Thränhardt**, Oranienbaum; **Wilfried Röhnert**, Radebeul; **Thomas Apel**, Reichenbach; **Andreas Matthus**, Rostock; **Jörg und Aldo Bojarski**, **Roland Schlesinger**, alle Saßnitz; **Torsten Löwe**, Schleiz; **Heiko Müller**, Schmalkalden; **Bernadette Domaschke**, Seiffhennersdorf; **Andrea Hönemann**, Stützerbach; **Dirk Herrmann**, Töplitz; **Katrin Wahn**, Uebigau; **Christine Stüber**, Alsleben; **Birgit Oelschlegel**, **Arndt Gläßer**, beide Altenbeuthen; **Steffen Roch**, Annaberg; **Roger Labahn**, Anklam; **Peter Möller**, **Carmen Schwebmeyer**, beide Bad Doberan; **Katrin Rurainsky**, **Bad Langensalza**; **Annette Pötschke**, Bautzen; **Torsten Flade**, Beierfeld; **Andreas Kopf**, **Claudia Ziehm**, **Valeska Heymann**, **Frank Thienert**, **Andreas Gude**, alle Berlin; **Dirk Markgraf**, **Peter Wiehe**, **Marion Heise**, alle Bischofferode; **Silke Kornisch**, Böhlitz-Ehrenberg; **Bärbel Island**, Brehme; **Friedemann Vetter**, Buckow; **Uwe Grätzschmann**, **Annette Schulz**, beide Cottbus; **Ina Daberkow**, **Ralf Ott**, beide Demmin; **Thomas Kollowa**, D.-Kirchhain; **Ralf Kretschmer**, **Uwe Hanisch**, **Michael Apitz**, **Andreas Schlegel**, **Reinhard Pohl**, **Frank Regensburger**, **Uwe Hartig**, alle Dresden; **Regina Klingebiel**, Ecklingerode; **Andrea Puckert**, Eichicht; **Heidlore Stallbohm**, Eldena; **Sabine Lützkendorf**, **Eberhard Georgy**, **Annette Lasar**, alle Erfurt; **Monika Müller**, **Anke Ilgen**, **Klaus Ullrich**, alle Fambach; **Astrid Umlauf**, **Steffi Haucke**, beide Freital; **Dieter Bahlmann**, **Friedrichsgrün**, **Sylvia Schimanski**, **Gademow**; **Dietmar Richter**, **Garitz**; **Beatrix Seeböth**, **Gernrode**; **Kurt Wiechmann**, **Glasing**; **Peter Brauer**, **Gnoien**; **Uwe Reimann**, **Dagmar Klatte**, beide Görlitz; **Christian Wolf**, **Wolfgang Fukarek**, beide Greifswald; **Holger Heydrich**, **Carola Berger**, beide Grimma; **Axel Schulz**, **Jens Siemoneit**, beide Grimmen; **Burkhard Rahn**, **Groß-Naundorf**; **Beate Kuhle**, **Gr. Schwarzlosen**; **Torsten Ueberdick**, Halle; **Steffen Wendt**, **Haida**; **Lutz Wenert**, **Hartau**; **Ute Sonnenburg**, **Hennigsdorf**; **Kerstin Schmelzer**, **Hettstedt**; **Lutz Dietrich**, **Hohenstein-E.**; **Grit Kiefel**, **Holzendorf**; **Ulrike Otto**, **Ilmenau**; **Reinhardt Rascher**, **Ronald Rösch**, beide Karl-Marx-Stadt; **Eva Kertész**, **Kecskemét (UVR)**; **Christian Gürlich**, **Ketzin**; **Christiane Jordan**, **Frauke Apel**, **Susanne Burda**, **Petra Hansche**, **Detlef Dum-**

jahn, Steffen Apel, alle Klausdorf; Matthias Marx, Klepzig; Olaf Gutschker, Kolkwitz; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Dagmar Laux, Holger Hentze, beide Leipzig; Rolf Busch, Lobenstein; Bernd Ehrlich, Löderburg; Birgit Boldt, Ludwigslust; Ines Quast, Lübbendorf; Elke Klein, Lüderitz; Adrian Schubert, Lugau; Ina Greiner-Petter, Malchin; Gabriele Otto, Steffen Trapp, beide Meißen; Holger Kreil, Mittelbach; Rainer Bauer, Mittweida; Cordula Becker, Moskau (UdSSR); Michael Weicker, Mügeln; Ines Pahl, Neuenhofe; Andreas Massanek, Neusornzig; Achim Troll, Kerstin Klingbeil, beide Oberlungwitz; Henri Hofmann, Oberschöna; Thomas Köhler, Oederan; Michael Monse, Olbersdorf; Ulrich Kammer, Pirna; Jürgen Krah, Plauen; André Wortha, Pletitz; Sabine Einert, Pockau; Hilmar Müller, Postlin; Regina Grube, Potsdam; Carmen Henze, Pratau; Steffi Förtsch, Reitzengeschwenda; Armin Hoell, Achim Bastian, beide Ribnitz; Michael Zwicke, Riesa; Gert Mielke, Rolofshagen; Ulf Günther, Ronneburg; Hardy Eich, Frank Wegner, Anke Bartsch, alle Rostock; Viola Forner, Rotta; Ruth Klingbeil, Salow; Ralf Briesemeister, Siegfried Müller, beide Sachsendorf; Harald Schlesinger, Saßnitz; Jürgen Rolle, Schlegel; Heike Gernschke, Annette Seidel, Katrin Bauer, Antje Tischer, Constanze Prause, Peter Heide, Peter Gaudian, Andreas Mäder, Uwe Schleicher, Frank Schaft, Claudia Pansold, Petra Weichler, Falk Oelschläger, alle Schmalkalden; Eberhard Förster, Söllichau; Hans-Dietrich Schwabe, Thomas Sroka, Hubertus Mund, alle Sondershausen; Gerald Manske, Christine Döll, Katrin Döll, Sabine Holland-Nell, Cornelia Horn, Heidrun Päckert, Heike Sauer, Bernd Enter, Sigrun Bahner, Sigrun Bickel, Sabine Henkel, Kerstin Holland, Liane Jäger, Petra Pfannschmidt, Anette Recknagel, Christine Recknagel, Reinhold Beckmann, Beate Wursch, Frank Hoffmann, Eva Hausdörfer, Claudia Holland, Katja Kohlhas, Petra Krätschmer, Iris Ruck, Thomas Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Holger Hoppe, Stendal; Thomas Reuscher, Stralsund; Günter und Bert Carlsen, Titschendorf; Antje Lorenz, Töplitz; Sylvia Zipf, Waldheim; Bettina Schade, Waren; Thomas Weiß, Gunter Reißig, Jürgen Lehmann, alle Weimar; Christine Kindt, Wendisch Priborn; Uli Meier, Sylvia Kunze, beide Weißenfels; Manuel Richter, Wilthen; Carola Senft, Wingerode; Holger Schnabel, Wismar; Angela Schlegel, Sabine Klatzsche, Barbara Höpfner, alle Wolgast; Ralf Becker, Wolmirstedt; Bernd Haase, Wünschendorf; Andreas Pietsch, Stefan Zimmermann, beide Zella Mehlis; Ute Scharkowski, Zepernick; Steffen Heinrich, Zittau; Birgit Baldauf, Zschornowitz

Für dreijährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; **Arno Jeromin**, Altentreptow; **Olaf Rausch**, Aue; **Lutz Hein-**

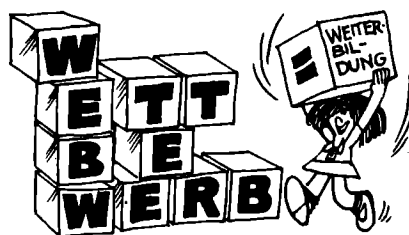
rich, Bad Langensalza; **Wolfgang Spielke**, Bad Salzungen; **Kerstin Schade**, Berlingerode; **Vera Schulze**, Brandis; **Jens Schumann**, Coswig; **Grit Schulze**, **Andrea Dreyer**, **Claudia Kerstan**, alle Cottbus; **Jürgen Anders**, Dahle-witz; **Frank Meurer**, Dietzhausen; **Jens Paetzold**, Demmin; **Klaus-Dieter Gloe**, **Uwe Krebs**, **Frank Wittwer**, **Heike-Karen Bochmann**, **Peter-Alexander Pöhler**, alle Dresden; **Thomas Böhme**, Eisleben; **Uwe Kintzel**, Erfurt; **Birgit Weyh**, Fambach; **Thomas Gerlach**, Friedeburgerhütte; **Ricarda Kremmer**, Floh; **Sylvio Klose**, Gera; **Birgit Thiele**, Gerstungen; **Astrid Strauch**, Greifswald; **Gudrun Tappert**, Guben; **Ruth Jacobs**, Halle-Neustadt; **Doris Planer**, Hohendorf; **Andreas Schimmang**, Hohenleipisch; **Michael Eckhardt**, **Sylvia Fischer**, beide Hoyerswerda; **Rolf Kamieth**, Kakerbeck; **Kerstin Rudorf**, Karl-Marx-Stadt; **Jörg Pöhlend**, Klingenthal; **Frank Jeschek**, Kloster; **Alois Weninger**, Knittelfeld (Österreich); **Ute-Barbara Heuer**, Leisnig; **Karola Näther**, Leipzig; **Bärbel Wintzler**, Lobenstein; **Bernd Küchau**, **Rüdiger Brandt**, beide Lübben; **Peter Weingart**, Mühlhausen; **Volkmar Riemer**, Neubrandenburg; **Andrea Thranhardt**, Oranienbaum; **Rüdiger Düsniß**, Osterburg; **Klaus Beck**, Potsdam; **Frank Hadamik**, **Falk Breuer**, **Ulrike Baumann**, **Dagmar Herrlich**, alle Radebeul; **Andreas Kundt**, Ribnitz; **Ronald Bracholdt**, Riesa; **Christine Schober**, **Birgit und Heiko Lehmann**, alle Rostock; **Peter Dittrich**, Rudolstadt; **Manuela Wilke**, Rüditz; **Ina und Uwe Ebert**, Ruppendorf; **Ralf Bahrman**, **Mario Primas**, **Ronald Zichert**, alle Sachsendorf; **Heinz-Olaf Müller**, Schmalkalden; **Lutz Möller**, Schmiedeberg; **Ina Spanaus**, Schleusingen; **Thomas Bienek**, Schwepnitz; **Eckart Möbius**, **Roderich Winkler**, beide Schwerin; **Annelie Meyer**, Silberstraße; **Ramona Willfarth**, **Angelika Hensel**, beide Sondershausen; **Gerd Birnbaum**, Spitzkunnersdorf; **Almut Beckmann**, **Petra Recknagel**, beide Steinbach-Hallenberg; **Jürgen Wage**, Springstille; **Simone Teichmüller**, Stöckey; **Bernd Kasch**, Stralsund; **Beate Nahler**, Weimar; **Iris Reinhold**, **Aloys Werner**, beide Wingerode; **Frank Höpfner**, Wolgast; **Frank Lohmeyer**, **Birgit Thomas**, **Steffen Pankow**, alle Zittau; **Frank Erdmann**, Zeitz; **Marion Herzfeldt**, Ahlbeck; **Torsten Pautzsch**, **Simone Brod**, **Kerstin Dorenburg**, **Thomas Vohla**, **Jörg Schüttler**, **Kerstin Hubrich**, **Diana Hiller**, **Jens Lohse**, **Manuela Meyer**, **Andreas Schnabel**, alle Altenburg; **Frank Maschke**, **Altendorf**; **Antje Lange**, **Kirsten Rosenow**, **Bernd Bethke**, **Martina Meister**, alle Altentreptow; **Uwe Simon**, **Apolda**; **Dieter Koch**, **Henri Koch**, beide Arnstadt; **Jens-Peter Finke**, **Aschersleben**; **Hans-Jürgen Kopf**, **Bad Frankenhausen**; **Margit Weibrecht**, **Jana Michaelis**, **Kirsten Wettstein**, alle Bad Salzungen; **Jörg Schmidt**, **Steffen Schröter**, **Andreas Zschiesche**, alle Bergwitz; **Michael Prescher**, **Marion Breitschuh**, **Jutta Schöwel**, **Jörg Rudolph**,

Dagmar Fischer, **Mike Sandau**, **Katrin Kollmer**, **Gabi Stage**, **Sylvia Röße**, **Christina Ziehm**, alle Berlin; **Steffi Kraus**, **Margaretha Kott**, **Astrid Leineweber**, **Manuela Apel**, **Manfred Kahlert**, **Werner König**, alle Berlingerode; **Uwe Kassner**, **Bernau**; **Sylvia Neubert**, **Gabriele Stiehler**, **Jörg Günthel**, **Cerstin Berger**, **Uwe Weißflog**, **Sybill Fechler**, **Volker Wesely**, **Andrea Nestmann**, alle Bernsbach; **Iris Buchardt**, **Heidi Hanke**, beide Bernterode; **Renate Dietrich**, **Bisdorf**; **Sabine Wukasch**, **Bischofswerda**; **Andreas Bohne**, **Borna**; **Heike Wätzig**, **Braunsdorf**; **Ute Wehr**, **Heinz-Wilfried Böttcher**, beide Breitenworbis; **Corina Eckstein**, **Breitungen**; **Birgit Butters**, **Kerstin Wiefel**, beide Breternitz; **Reiner John**, **Peter Krabbe**, beide Britz; **Péter Surj n**, **Budapest (UVR)**; **Adelbert Heddergott**, **Büttstedt**; **Corina Baake**, **Bützer**; **Ingolf Greß**, **Beeskow**; **Ralf Lehmann**, **Burgstädt**; **Iris Grinda**, **Calbe**; **Carola Kunze**, **Callenberg**; **Thomas Seifert**, **Camberg**; **Arno Roßform**, **Chorin**; **Gisbert Ehrlich**, **Conradsdorf**; **Ines Fietze**, **Detlef Kaiser**, **Ilka Kohlstock**, **Uwe Ring**, **Achim und Toralf Kling**, **Jens Purand**, **Ellen Harnath**, **Steffen Rücker**, **Iris Grundke**, alle Cottbus; **Karin Pehler**, **Daßlitz**; **Mario Binkowski**, **Demmin**; **Ingolf Hoffmann**, **Döbeln**; **Birgit Remane**, **Döllnitz**; **Sylvia Schwenke**, **Dohna**; **Regina Bricks**, **Dorfilm**; **Benno Blase**, **Falk Kutschbach**, **Ralf Kunze**, **Gundula Göllner**, **Egmar Schmidt**, **Bärbel Wendt**, **Angela Jircik**, **Sabine Rahn**, **Annett Körner**, **Thomas Keßler**, **Matthias Apitz**, **Norbert Koksche**, **Thomas Uhlig**, **Uta Oelschlägel**, **Lutz Friedemann**, **Grit Hartmann**, **Birgit Wendt**, **Christian Dahl**, **Ulrike Schneider**, alle Dresden; **Jörg Bruchertseifer**, **Dubna (UdSSR)**; **Annett Riehl**, **Egeln**; **Jürgen Kachold**, **Eichicht**; **Matthias Arbeiter**, **Eisenach**; **Thomas Dittrich**, **Eisenhüttenstadt**; **Angelika Zielke**, **Engertsdorf**; **Petra Hebecker**, **Erfurt**; **Romy Sorge**, **Uwe Kucharz**, beide Falkenberg; **Rainer Fabianski**, **Falkensee**; **Kornelia Möller**, **Heike Reckenbeil**, **Thomas Kassel**, **Ellen Reum**, **Thomas Wingeß**, **Lutz Mittelsdorf**, **Marita Heß**, **Harald Laabs**, **Sabine Erb**, **Heiko Möller**, **Wolfgang Hensel**, alle Fambach; **Kathrin Meißner**, **Forst**; **Angela Marks**, **Frankenthal**; **Beret Brabec**, **Bernd Jäger**, beide Frankfurt; **Eva-Maria Anske**, **Freiberg**; **Falk Kehling**, **Freist**; **Heike Brüggemann**, **Friedeburgerhütte**; **Steffen Fleischer**, **Fockendorf**; **Sabine Blossey**, **Gademow**; **Viola Richter**, **Garitz**; **Christina Hesse**, **Claudia Hartung**, **Erika Schunke**, **Jörg Gärtner**, **Sybill Trümper**, **Robert Heise**, alle Gerstungen; **Astrid Bauer**, **Gnoißen**; **Angelika Brose**, **Sylvia Kittelmann**, **Andreas Endtricht**, **Jens-Peter Würfel**, alle Görlitz; **Ralph Waldert**, **Gotha**; **Manuela Jarzinka**, **Heike Polley**, beide Grapzow; **Uwe Schindler**, **Martina Schmidt**, beide Gräfenhainichen; **Kerstin Hiller**, **Christof Herrmann**, **Torsten Abs**, **Franka Wölfel**, **Johanna Meuche**, **Detlef Riedel**, **Sabine Weinert**, **Si-**

mone Lütt, Evelyn Schmidt, alle Greifswald; Frank Rahnfeld, Greiz; Steffen Horbert, Grimma; Frank Grzeca, Grimmen; Bernd Dübe, Groß-Bademeusel; Bettina Glorius, Großbodungen; Uwe Müller, Gröbers; Wolfgang Müller, Großfurra; Matthias Weser, Großenhain; Ines Fabian, Groß Schacksdorf; Kerstin Voigtländer, Großweitzschen; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; Karola Mau, Groß Zarnewan; Martina Ullrich, Uwe Bias, beide Guben; Bettina Dähn, Christine Bülow, beide Güstrow; Uwe Friedrich, Jens Folgmann, beide Halle; Jörg Uhlmann, Halle-Neustadt; Andreas Tölke, Heringen; Michael Schwarzkopf, Hettstedt; Christine Naß, Hinternah; Hartmut Müller, Hohen Neuendorf; Knut Bauer, Hohenstein-E.; Jörg Grohmann, Alf Droth, Michael Dietrich, Undine Nathan, Andreas Tetschke, Violetta Czok, Mathias Grundmann, alle Hoyerswerda; Matthias Riebisch, Ilmenau; Bernd Fliegner, Jarmen; Hardy Tempel, Jessen; Simone Winkler, Jemitz-Thumitz; Marina Richter, Jeßnigk; Hannelore Zschutzschke, Jüdenberg; Uwe Lüttig, Kalkstein; Dorit Zahn, Kandelin; Ulf Krause, Petra Quasdorf, Kathrin Bauer, Marko Hanke, Arnd Rösch, Ralf Hennig, Katrin Kempe, Wolfgang Riehl, alle Karl-Marx-Stadt; Christina Michel, Kaulsdorf; Gudrun Genzel, Kirchhofmelfeld; Kerstin Vogel, Kmehlen; Matthias Heinz, Dagmar Melzer, beide Kolochau; Mathias Mauermann, Krepta; Heiko Moritz, Kreischa; Olaf Kasten, Axel Hansow, beide Kloster; Joachim Richter, Anja Montag, beide Küllstedt; Ines Neubert, Krölpa; Klaus Breitsprecher, Krien; Armin Kaschner, Lauchhammer; Andrea Kellert, Leest; Andreas Bernstein, Lehmitz; Thomas Reimann, Eva Godehardt, Heimo Woitek, Peter Damaschke, Ute Kanngießer, Ines Weiß, alle Leinefelde; Gunnar Heller, Leisnig; Thomas Richter, Thomas Könze, Annette Göhde, Jens Rudolf, Birgit Hentze, Uwe Haberlandt, Uwe Körner, alle Leipzig; Roland Zippe, Leizen; Steffen Riemer, Silvia Görmer, Jörg Steinbach, Limbach-Oberfrohna; Günther Bronner, Harald Richter, beide Linz (Österreich); Jörg Teschner, Ludwigsfelde; Peter Witte, Löwenberg; Frank Kernbach, Lobenstein; Anne Brünner, Annett Weise, Katleen Weise, alle Löderburg; Peter Timm, Lübbtheen; Torsten Jahnke, Lübz; Martina Lorenz, Lunow; Martina Wolf, Magdeburg; Detlev und Uwe Schröder, Malchow; Udo Kretschmann, Markneukirchen; André Wenzel, Meiningen; Gabriele Schüler, Mengersgereuth-H.; Andreas Cott, Menteroda; Elke Weiß, Merseburg; Ines Schulze, Christiana Pydde, beide Milmersdorf; Gunter Fix, Mittelbach; Eva-Maria Hille, Mittelndorf; Heike Dietzel, Frank Demczenko, Jens Güth, Lutz Neike, alle Mittelstille; Peter Stolze, Möhlau; Michael Schmidt, Mühlhausen; Kerstin Mauerhof, Nattwerder; Klaus Bolze, Naundorf; Liane Krümming, Erika Trautvetter,

beide Neuenhofe; Sula Hempel, Neusalza; Detlef Krohn, Neustrelitz; Michael Andrä, Niederspierz; Frank Beilicke, Nordhausen; Volker Röckel, Oberlungwitz; Frank Böhm, Ramona Orlikowski, Sylvia Marr, Dagmar Motz, Brita Häfner, Cornelia Pfannschmidt, Petra Zimmermann, Peter Hucke, Brigitte Schmidt, Uwe Marr, Michael Peter, Marion Kern, Annette Johannes, Ingo Roßnick; Thomas Voigt, Bärbel Baumbach, Mathias Weisheit, alle Oberschöna; Matthias Theurich, Helga Lange, Annette Lange, Uta Röbber, alle Olbersdorf; Birgit Beran, Jörg Vetter, Klaus Meier, Petra Denkwitz, Doris Basler, Uwe Kusmirek, Peter Massag, Andrea Fesser, alle Osternienburg; Antje Langer, Uwe Langer, beide Oybin; Arno Rockmann, Pansfelde; Ute Möllhoff, Piesau; Holger Haußner, Peuschen; Klaus-Michael Bull, Penzlin, Bernd Sollmann, Pirna; Annegret Naumann, Dagmar Naumann, Angela Kusmirek, alle Pißdorf; Jens Kipping, Plottendorf; Barbara Jendrezjeska, Poggendorf; Heidrun Thiel, Popitz; Karsten Freye, Reinhard Mummelthey, Rainer Nizze, Jens Jacobi, alle Potsdam; Jens-Peter Planke, Sigrid Planke, beide Premnitz; Bärbel Kenner, Pulsnitz; Sylvia Bollinger, Raddingsdorf; Uwe Poppe, Frank Berndt, beide Radeburg; Gunter Bürschnick, Rackwitz; Uwe Hadamik, Radebeul; Michael Thamm, Sybille Behrens, Kerstin Neubert, alle Ribnitz; Jana Walter, Röbel; Heike Jentsch, Rödern; Volker Siebenhaar, Roßdorf; Hans-Georg Lobert, Roßleben; Dörthe und Mathias Bethge, Wolfram Bütow, alle Rostock; Petra Forner, Bodo Pfuhl, Kerstin Meier, alle Rotta; Matthias Reinhardt, Rudolstadt; Beate Floeter, Bernd-Peter Günther, Helmut Engelmann, alle Sachsendorf; Anne Baumgart, Salow; Angela Sakowski, Saßnitz; Jens-Uwe Otto, Sangerhausen; Kurt Rödiger, Scherba; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Marina Herzog, Schlottwitz; Carmen Güth, Dietmar Müller, Claudia Pansold, Martin Tengler, Peter Hucke, alle Schmalkalden; Torsten Jeschke, Schwarzhede; Frank Templin, Schwerin; Angela Beinio, Kerstin Reich, beide Siedenbollentin; Volker Böhme, Silberhausen; Heike Hohnstein, Uta Pfeiffer, Sabine Moldauer, Barbara Tschada, Ronald Bandisch, Karsten Libbertz, Simone Mahlow, Ronald Süß, alle Sondershausen; Christine Kosmehl, Senftenberg; Volker Steuer, Spremberg; Bodo Ußfeller, Roswitha Nattermann, Birgit Wilhelm, Hartmut Beran, Udo Büchner, alle Springstille; Claudia Schlegel, Stadtröda; Thomas Eichhorn, Steinach; Petra Kiehm, Annedore Döll, Andrea Möller, Gerald Manske, Tamara König, Jens Hoffmann, Sabiene Bahner, Christine Munk, Carmen Döll, Andrea Hoffmann, Peter Nickel, Frank Reumschüssel, Birgit Hoffmann, Sabine Menz, Ines Semmelrogge, Monika Simmnik, Marion König, Kerstin Nothnagel, Kerstin

Rothämel, Carola Holland-Letz, Angela Bieber, Sabine Munk, Marion Wolff, Petra Koch, Anita Knoth, Bärbel Margraf, Anette Mänger, Birgit Heidenreich, Silvia Frank, Steffi Marr, Heike Wilhelm, Andreas Holland-Moritz, Rudi Holland-Moritz, Eberhard Wahl, Sabine Wilhelm, Kerstin Scheerschmidt, Andreas Günnel, alle Steinbach-Hallenberg; Angela Tertin, Bianca Lettow, Silvia Heidrich, Lutz Dettmann, Marion Buckmann, Bernd Bethge, Andreas Wallmann, Viola Becker, Carola Franck, Carmen Hein, Viola Frank, Thorsten Ladwig, Andrea Reinhard, Torsten Perleberg, alle Stralsund; Beate Balla, Strausberg; Andreas Wilk, Suhl; Matthias Sievert, Thomas Hantel, beide Teterow; Michael Hauff, Teuchern; Hans Creutzburg, Ruth Tschernenka, beide Thal; Bernd Hartwig, Ute Ribbe, Ingrid Esch, Henry Ribbe, alle Thaldorf; Heike Carlsen, Titschendorf; Carola Zinger, Lothar Hennig, beide Töplitz; Detlef Barop; Michael Rehm, beide Torgau; Detlef Müller, Sylke Meier, beide Torgelow; Roland Franke, Tornau; Kathrin Ebeling, Manuela Ritsche, beide Trebbichau; Ingo Lämmel, Ursula Klimpke, Andrea Neyer, alle Treben; Annegret Wolf, Ina Reich, beide Trusetal; Bettina Wassermann, Ellen Krüger, Jürgen Graf, Andrea Wolter, Roland Lehmann, alle Uebigau; Dietmar Ulbricht, Velten; Jürgen Prestin, Waren; Sabine Stolpe, Andreas Möckel, Ralf Kurch, Dorit Lehmann, alle Weimar; Karin Seidel, Kerstin Koch, Frank Grabein, Yvonne Ruß, alle Weißwasser; Olaf Lenz, Anett Klengel, Birgit Kohn, alle Weixdorf; Steffen Grunewald, Werder; Uwe Schantora, Wernshausen; Christiane Kern, Bodo Vogel, Babette Rudolph, Ilona Thierbach, alle Wellmitz; Anette Blödnier, Wiederitzsch; Matthias Keßler, Steffi Voigt, Heike Vießmann, alle Wilkau-Haßlau; Gabriele Lawrenz, Wittenberge; Heike Senft, Wingerode; Anke Müller, Cordula Genseburg, beide Wolgast; Elisabeth Giese, Volker Bergner, Uwe Felsberg, alle Worbis; Antje Schultheiß, Wüstenbrand; Jens Mucke, Christoph Chojetzki, beide Zeithain; Stefan Möbius, Zella-Mehlis; Michael Gruhn, Zepernick; Michael Kändler, Ines Grigoleit, Stefan Gondlach, Michael Steurich, Udo Matzner, Roger Voigt, Gerald Sommer, Angelika Schubert, Heike Grigoleit, Gabriele Herzig, Bettina Lehmann, Uta Hochberger, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken; Ramona Franke, Zschornowitz; Jörg Georgi, Zwickau; Dirk Dalisda.





Vorbildliche Schule

Schüler und Mathematiklehrer der Oberschule Ernst Thälmann in Steinbach-Hallenberg legten zu Ehren des IX. Parteitag und des X. Parlaments der FDJ Rechenschaft über ihre Arbeit in den zurückliegenden Jahren ab. Sie konnten stolz auf eine erfolgreiche Bilanz sein:

24 1. Preise bei den Kreisolympiaden, vier 1. Preise, zwei 2. und drei 3. Preise bei den Bezirksolympiaden. Zwei Schüler nahmen an einer DDR-Olympiade teil und belegten einen 4. Platz bzw. erhielten eine Anerkennungsurkunde für die originelle Lösung einer Aufgabe.

Was sind die Gründe für diese erfreulichen Ergebnisse?

Als im Jahre 1962 der „Mathematikbeschluß“ veröffentlicht wurde, begann man an der OS Steinbach-Hallenberg sofort, ma-

thematisch interessierte und talentierte Schüler für jeweils sechs Arbeitsgemeinschaften zu gewinnen und systematisch zu fördern. Die im Jahre 1967 erstmals erscheinende *alpha* fand in Steinbach-Hallenberg sofort viele Freunde und wurde zu einem ständigen Helfer in Unterricht, Arbeitsgemeinschaft und Freizeit. Die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb wurde dabei nicht dem Selbstlauf überlassen. Alle Teilnehmer erkannten den Vorteil der regelmäßigen Beteiligung für die Entwicklung mathematischen Wissens und Könnens und lösten durch ihre Initiative eine Wettbewerbsatmosphäre zwischen den einzelnen Klassen aus. Um den Wettbewerb beobachten und steuern zu können, wurden die Namen der Teilnehmer, die Anzahl der abgegebenen Lösungen und die erteilten Prädikate durch einen verantwortlichen Schüler erfaßt und an einer Wandzeitung veröffentlicht.

Mit Abschluß des Schuljahres 1975/76 wurde im *alpha*-Wettbewerb folgendes Ergebnis erzielt: 11 298 eingereichte richtige Lösungen, 964 Urkunden und Abzeichen, davon 245 in Gold und 719 in Silber.

Damit ist diese Schule seit Bestehen des *alpha*-Wettbewerbs die aktivste in der DDR. Für diese hervorragende kollektive Leistung sprechen wir allen Jungen Mathematikern und ihren Betreuern unseren Dank und unsere Anerkennung aus und wünschen weiterhin viel Erfolg in der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik

Redaktion *alpha*

Könnt Ihr nicht die Aufgaben noch mehr bildlich (auch witzig) darstellen?

Birgit Barth, Wolfen

● ... Ich fand das „kleine Sprachlexikon“ sehr gut. Eure Zeitschrift war mir eine sehr gute Hilfe für die Olympiaden und die Abschlußprüfung in Mathematik (Übung macht den Meister).

Volker Schulz, Nauen

● ... Von 250 Schülern unserer Schule sind 40 Leser der *alpha*. Wir senden Euch in Kürze Aufgaben, die die Schüler selbst erdacht haben.

AG-Leiter K. Schulz, Himmelsberg

● Das mathematische Sprachlexikon stellte für mich eine große Hilfe dar, denn ich lerne in einer R-Klasse seit dem dritten Schuljahr Russisch und seit der siebenten Klasse Englisch. Ich möchte ja auch einmal mathematische Bücher in der Originalsprache lesen und daraus lernen.

Frank Erdmann, Zeitz

● ... Ich würde es begrüßen, wenn die angewandte Mathematik z. B. in Physik, Chemie oder Wirtschaftsstatistik in der *alpha* noch mehr berücksichtigt würde.

Guido Blossfeld, Halle

● Die *alpha*, schon oft half sie mir, doch ebenso viele Male stellte sie mich vor Probleme. – Ich will auch nicht verschweigen, daß ich, wenn diese gelöst, auch etwas Stolz verspüre. Alles ist vergessen, wenn ich in ihr lese. Es macht einfach Spaß, neues Wissen zu erwerben, neue Wege zu gehen.

Aber wer denkt, in ihr stünde nur Theorie, der irrt sich! Sogar der Humor spielt bei ihr eine Rolle. Lies sie! Und du wirst staunen, was du aus der *alpha* alles lernen kannst.

Ilona Wünsche, Rodewitz

● Ich komme aus der Mongolischen Volksrepublik. In Leipzig kaufte ich mir die *alpha*. Die Aufgaben sind für mich sehr interessant. Ich übersende Ihnen vier Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb.

P. Altanzog, z. Z. Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

Mit dieser Vignette sagen wir Dank all den fleißigen Helfern, die unsere Jungen Mathematiker mit Rat und Tat unterstützen.

„Es ist mein AG-Leiter!“

Leser schreiben an *alpha*



● Der *alpha*-Wettbewerb hat mich stets zum Denken angeregt. Weiter so!

Diana Hiller, Altenburg

● 5. Sept. 76: Anbei sende ich Euch 79 Karten des *alpha*-Wettbewerbs. Ich löse die Aufgaben sehr gern. Sie haben mir geholfen, als Schüler der 6. Klasse in der Klassenstufe 8 erster Preisträger der Kreis- und Bezirksolympiade in Görlitz, Dresden, Jelenia Góra und Luban (VR Polen) zu werden.

Bodo Heise, Görlitz

● Ich finde die *alpha* sehr vielseitig und interessant. Ich löse die Aufgaben jedes Heftes sehr gern. Sie trugen dazu bei, daß ich im Fach Mathematik auf einer glatten Eins stehe.

Sabine Marx, Karl-Marx-Stadt

● Im Mathe-Club der Stadt Wismar nehme ich mit viel Freude teil. Wir begeistern immer mehr Mitglieder aus der AG für die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb.

Silke Gabriel, Wismar

● Liebe *alpha*! Ich lese Dich noch nicht lange. Ich finde Deine Beiträge interessant. Ich bin begeistert, daß im Wettbewerb nun auch Physik- und Chemieaufgaben enthalten sind.

Heiko Richter, Elsterwerda

● Die *alpha* gefällt mir eigentlich ganz gut. Aber vielleicht könnten Sie mehr Berufsbilder bringen?

Kerstin Geisler, Neu-Prenzlitz

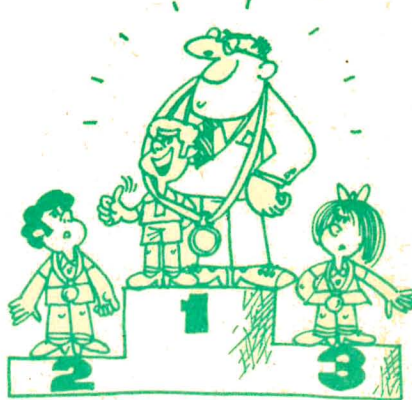
● Das Lösen der *alpha*-Aufgaben macht allen Zirkelteilnehmern sehr viel Spaß und regt die Schüler an, für den Wandzeitungswettbewerb unserer Schule Aufgaben zu stellen. Einige dieser Aufgaben stellen wir dem *alpha*-Wettbewerb zur Verfügung.

AG Mathematik Deutschendorf

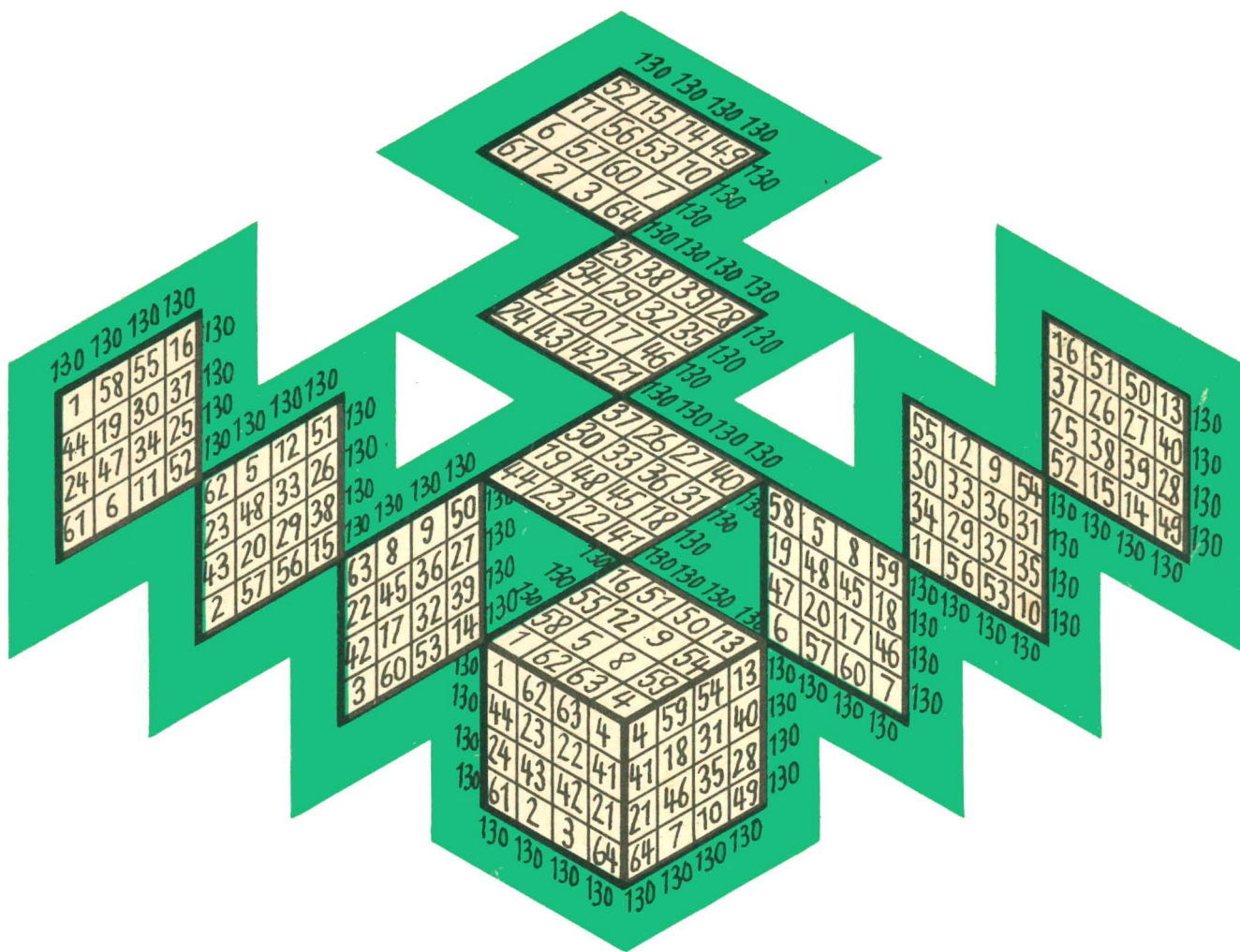
● Mir gefällt die *alpha* gut! Oft rechnet bei uns sogar die ganze Familie mit!

Maria Schönfeld, Karl-Marx-Stadt

● Ich finde die *alpha* schön knifflig und interessant...



alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat D. R. Lüders (Ber-
lin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz);
Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: alpha-Club, 29. OS Leipzig (S. 26, 27,
39); K. G. Steinert, Dresden (S. 26)

Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluss: 22. Dezember 1976

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie [8]*
Dr.-Ing. K.-G. Steinert, Technische Universität Dresden
- 28 Die Konstruktion regelmäßiger n -Ecke [7]
Dr. R. Thiele, Lektor im BSB B. G. Teubner, Leipzig
- 30 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Le Van Thiem [9]
Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der SR Vietnam
- 31 Gauß und die nicht-euklidische Geometrie [9]
Dorothea Ziegler, Verantwortl. Lektor für Mathematik, BSB B. G. Teubner, Leipzig
- 31 Ein Beweis, geführt von C. F. Gauß [8]
- 32 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Autorenkollektiv
- 34 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Autorenkollektiv
- 36 Gauß und das 8-Damen-Problem [7]
V. Beyes, Berlin/Dr. R. Thiele, Leipzig
- 38 Quadratische Reste, Teil 2 [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akad. der Wissensch.
der DDR
- 40 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Versuche mit 10 Münzen [5] – Leseprobe aus einem ungar. Unter-
haltungsbuch
Prof. Dr. T. Varga, Budapest
- 42 XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]
Aufgaben der Bezirksolympiade (5./6. Februar 1976)
- 44 · Zum Titelbild [8]
Dipl.-Ing. M. Thumser, Dresden
- 44 Lösungen [5]
- III. Umschlagseite: Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mathematikwettbewerbe in Greifswald [4]
Sonnenfinsternis 1976 [9]
Diplomlehrer A. Dietzel, Jena
- IV. Umschlagseite: Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1976 [5]
Studienrat J. Lehmann, VLdV, Leipzig



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie

Um das Jahr 1770 stellten der Mathematiker J. D. Titius und der Astronom J. E. Bode eine empirisch gewonnene Beziehung auf, die es gestatten sollte, die mittleren Abstände a_i der Planeten von der Sonne zu berechnen. Diese Beziehung lautet

$$a_i = 0,4 + 0,3 \cdot 2^i,$$

worin der Index i einem bestimmten Planeten zugeordnet ist (vgl. Aufg. 1). Die Größe a_i wird in astronomischen Einheiten erhalten (die astr. Einheit AE ist der mittlere Abstand Erde–Sonne; $1 \text{ AE} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$). Beim Vergleich der aus obiger Formel erhaltenen Zahlen mit den Beobachtungen schien es, daß offenbar zwischen Mars und Jupiter ein weiterer, bisher unbekannter Planet die Sonne umlaufen müsse. Diese Feststellung regte die Astronomen zu einer systematischen Suche nach dem vermuteten Planeten an, der sich nach obiger Formel in einem Abstand von 2,5 bis 3,0 AE von der Sonne befinden mußte.

Noch bevor die geplante systematische Suche in Gang gekommen war, fand der italienische Astronom Piazzi in der Neujahrsnacht 1801 ein schwaches Objekt 8. Größe von sternähnlichem Aussehen, das wegen beobachteter Bewegungen als Körper des Sonnensystems eingestuft wurde und den Namen Ceres erhielt. Um die Bahn des neuentdeckten Himmelskörpers berechnen und damit aus der Bahnform entscheiden zu können, ob es sich um einen Planeten (elliptische Bahnform) oder Kometen (vorwiegend parabolische Bahnform) handelte, waren zahlreiche Positionsbeobachtungen über einen genügend großen Zeitraum hinweg erforderlich. Leider konnte das Objekt Ceres von seinem Entdecker Piazzi nur etwa 6 Wochen lang beobachtet werden, weil es dann in der Abenddämmerung verschwand. Aus diesem geringen Beobachtungsmaterial war es mit den bis dahin üblichen Methoden nicht möglich, eine Bahn so zu berechnen, daß eine Wiederauffindung des Objektes möglich gewesen wäre. Nur langsam verbreitete sich unter den damaligen Verkehrs- und Nachrichtenverhältnissen die Kunde von der Neuentdeckung. Im Sommer 1801 berechneten neben anderen F. X. v. Zach, Leiter der zu dieser Zeit berühmten Sternwarte Seeberg bei Gotha und der Arzt und Amateurastronom H. W. Ol-

bers aus Bremen Bahnen für Ceres und stellten fest, daß es sich nicht um einen Kometen, sondern um einen Planeten handeln müsse. Die Kreisbahn, die von ihnen zur Vereinfachung der Berechnungen als Ersatz für eine Keplerellipse¹⁾ angenommen wurde, genügte jedoch nicht. Natürlich konnte man um 1800 elliptische Planetenbahnen berechnen, aber für vorläufige Berechnungen aus einer kleinen Zahl von Beobachtungen zum Zwecke der Wiederauffindung eines Planeten war die Annäherung der Bahn durch einen Kreis damals üblich, und im allgemeinen war sie auch ausreichend gewesen. Es stellte sich übrigens heraus, daß die Ceres nicht der nach Titius und Bode zu erwartende Planet war. Sie war viel kleiner als die bis dahin bekannten Planeten. Man entdeckte in der Folgezeit hunderte und bis heute tausende dieser Art, die als kleine Planeten oder Planetoiden bezeichnet werden.

Auch der junge Mathematiker C. F. Gauß in Braunschweig hatte durch die von Zach herausgegebene „Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ von dem neu entdeckten Planeten Kenntnis erhalten. Das Problem, aus Beobachtungen, die nur ein Bahnbogenstück von 9° überdecken, die Bahn so exakt zu berechnen, daß der Planet nach Monaten wieder aufgefunden werden konnte, interessierte Gauß sehr. Es gelang ihm, der der Astronomie bis dahin relativ fern gestanden hatte, eine mathematische Lösung zu finden, die die Wiederauffindung der Ceres ermöglichte und Gauß mit einem Schlage in die erste Reihe der Astronomen stellte, so daß wir ihn heute in gleicher Weise als einen der bedeutendsten Mathematiker, Physiker, aber auch Astronomen und Geodäten der Vergangenheit achten. Die erfolgreiche Beschäftigung mit Problemen der Astronomie bewirkte, daß diese Wissenschaft während der ersten beiden Jahrzehnte des vorigen Jahrhunderts in Gauß' Leben eine wichtige Rolle spielte. Im Ergebnis dieser Forschungserfolge wurde er 1807 als Direktor der Sternwarte Göttingen berufen und bekleidete dieses Amt bis zu seinem Tode 1855.

Gauß stellte sich die Aufgabe, die Bahnkurve des kleinen Planeten Ceres ohne die willkürliche und die Lösungsmöglichkeit einengende Ersetzung der Ellipse durch einen Kreis zu berechnen. Im Vergleich mit den meisten großen Planeten, deren Bahnen zu jener Zeit bekannt waren, stellte die Bahn der Ceres eine relativ stark abgeplattete Ellipse dar. Die Bahnexzentrizität

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (a, b: \text{große bzw. kleine}$$

Halbachse der Bahnellipse) beträgt für die Ceres 0,08, während für die Erde 0,02 gilt. Wegen dieser recht großen Exzentrizität (später stellte sich allerdings heraus, daß bei den Planetoiden Werte von $e = 0,2$ keine Selten-

heit sind) konnte die bis dahin bei Vorausberechnungen in ähnlichen Fällen angewendete Annäherung durch eine Kreisbahn nicht zum Erfolg führen.

Aus dem Vorwort zu dem wichtigen Werk von Gauß aus dem Jahre 1809 „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“ (Theorie der Bewegung der die Sonne in Kegelschnitten umkreisenden Himmelskörper) erfahren wir, daß er sich zur Zeit des Bekanntwerdens der Suche nach der Ceres gerade damit beschäftigte, aus nur wenigen Punkten eine Ellipse völlig hypothesenfrei zu berechnen. Die Lösung des Problems führte Gauß auf eine Gleichung achten Grades. Sie ließ sich auf die Bahnbestimmung der Ceres unter den oben genannten Umständen (geringes Beobachtungsmaterial) anwenden. Das Ergebnis war so präzise, daß der Planetoid genau am ersten Jahrestag seiner Entdeckung wieder aufgefunden wurde. Die Wiederentdeckung fand nicht an dem Ort am Himmel statt, den der ausgewiesene Astronom Zach berechnet hatte, sondern 7° daneben, an der Stelle, die der junge Mathematiker Gauß gefunden hatte. Zach fand anerkennende Worte über die Leistung des jungen Kollegen. Olbers bedrängte ihn, der Öffentlichkeit die neu erfundene und erstmals so erfolgreich angewendete Methode vorzustellen.

Gauß zögerte noch lange mit der Publikation, weil er zu dieser Zeit an vielen neuen Ideen arbeitete und weil er die Theorie noch weiter ausarbeiten wollte. Heute ist diese sogenannte „Methode der kleinsten Quadrate“ Gemeingut der angewandten Mathematik²⁾. Die Methode der kleinsten Quadrate ist ein Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungen, die mit zufälligen Meßfehlern behaftet sind. Das Prinzip der Methode soll im folgenden an einem ganz einfachen Beispiel erläutert werden.

Von einer Größe (z. B. einer Strecke), deren wahrer Wert X nicht bekannt ist, sollen n Messungen l_i vorliegen. Der wahrscheinlichste Wert X dieser Größe ist bekanntlich das arithmetische Mittel und wird berechnet nach der Formel

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n}.$$

¹⁾ Kepler veröffentlichte in den Jahren 1609 und 1619 die drei von ihm gefundenen und nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung, deren erstes besagt, daß sich die Planeten in Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen, die in dem einen Brennpunkt der Bahnellipse steht.

²⁾ Die Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrate“ stammt von Legendre, der sie unabhängig von Gauß fand, aber als erster publizierte.

Die Begründung dafür, daß x der wahrscheinlichste aus den Messungen ableitbare Wert der Größe X ist, wird durch die Methode der kleinsten Quadrate gegeben. x wird nämlich nach dieser Methode so bestimmt, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelmessungen l_i vom Mittelwert x ein Minimum ist, daß also gilt

$$\sum_{i=1}^n (x - l_i)^2 = \text{Minimum.}$$

Neben dem wahrscheinlichsten Wert einer gemessenen Größe liefert die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate auch eine Angabe über die Genauigkeit der ausgeführten Messungen und des daraus abgeleiteten Mittelwertes, nämlich den mittleren Fehler. Der mittlere Fehler m_0 einer einmaligen Messung l_i der gesuchten Größe ist

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum (x - l_i)^2}{n-1}} \text{ und der mittlere}$$

Fehler m des Mittelwertes x ist

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum (x - l_i)^2}{n(n-1)}} = \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

(vgl. Aufgabe 2).

Natürlich ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei der Berechnung der Bahnellipse eines Planeten wesentlich schwieriger als bei dem angeführten Beispiel, aber prinzipiell ist es dasselbe. An die Stelle des konstanten Wertes X in unserem Beispiel, der durch Messungen approximiert wird, treten bei der Bahnbestimmung veränderliche Werte X_i , die jeweils durch mehrere für einen bestimmten Zeitpunkt geltende Meßgrößen erfaßt werden.

Die glänzenden Ergebnisse, die Gauß mit der neuen Rechenmethode bei der Suche nach dem Planetoiden Ceres erzielt hatte, machten ihn im Kreise der Gelehrten sehr schnell bekannt. Der Fünfundzwanzigjährige erhielt eine Berufung als Leiter der Sternwarte Petersburg, der Vorgängerin der heutigen berühmten Hauptsternwarte der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Pulkovo bei Leningrad. Gauß blieb jedoch in Braunschweig, wo er sehr günstige Bedingungen

für eine intensive wissenschaftliche Arbeit hatte. Auch die Berufung als Direktor der Sternwarte Göttingen (Bild 1) nahm er erst 1807 an.

In den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts wurden weitere kleine Planeten entdeckt, deren Bahnen alle nach dem bewährten Gaußschen Verfahren berechnet wurden. Von diesen Arbeiten ausgehend beschäftigte sich Gauß mehrere Jahre lang mit der Berechnung von Bahnstörungen der kleinen Planeten Ceres und Pallas unter dem Einfluß der Gravitationskräfte der massereichen Nachbarplaneten, insbesondere durch Jupiter. Der Aufwand an Zahlenrechnungen war hierbei enorm, da Gauß ja keinerlei mechanische Hilfsmittel oder gar Computer zur Verfügung standen. Durch Untersuchungen an den Bahnstörungen kleiner Planeten – insbesondere von Pallas, die eine große Bahnneigung gegen die Ekliptik (35°) hat – sah Gauß die Möglichkeit, die Masse des störenden Jupiter zu berechnen.

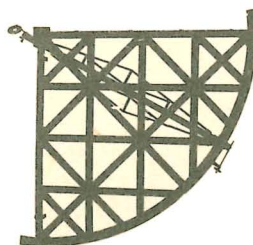


Bild 2
Mauerquadrant aus dem 18. Jahrhundert in der Sternwarte Göttingen

Die Aufgaben als Direktor der Sternwarte Göttingen verlangten von Gauß auch praktische Meßtätigkeit in der Astronomie. Die meisten Sternwartenleiter der damaligen Zeit waren durch ihre Beobachtungserfolge berühmt geworden. Gauß dagegen hatte sich bis zum Beginn seiner Göttinger Zeit als rechnender Astronom und Theoretiker ausgezeichnet. Auf diese neue Tätigkeit mit dem Winkelmeßgerät (Sextant, Theodolit) bereitete er sich mit der gleichen Gründlichkeit vor, die ihm auch bei seinen theoretischen Arbeiten eigen war. Vorhandene und neu erworbene Meßinstrumente behandelte er geradezu mit Ehrfurcht, wohl wissend, welche handwerkliche Kunst zur Herstellung derartiger Geräte nötig ist. In der Göttinger Sternwarte hängt noch heute der von Gauß' Vorgänger Tobias Mayer angeschaffte und verwendete Mauerquadrant, der auch für Gauß Bedeutung besaß (Bild 2).

Durch die praktische Meßtätigkeit beeinflusst, hat Gauß von Göttingen aus beachtliche Arbeiten zur Vermessung des Landes Niedersachsen selbst durchgeführt und in späteren Jahren angeleitet. Beachtlich ist, daß der Theoretiker Gauß jahrelang (1821–25) als praktischer Geodät gearbeitet und dabei als

Mann von fast 50 Jahren die ganzen Strapazen einer solchen Arbeit bei Wind und Wetter, bei Hitze und Kälte auf sich genommen hat. Die Wechselwirkung zwischen Praxis und Theorie, ein bedeutendes Element des dialektischen Materialismus, hatte Gauß bereits als wichtige Triebfeder des Fortschritts erkannt. Die Vermessung von Dreiecksnetzen auf möglichst großen Teilen der Erdoberfläche war vom 18. Jahrhundert an ein grundlegender Beitrag zur Ableitung von Größe und Figur der Erde, also der Parameter des Erdellipsoids. Gauß erhielt den Auftrag, im Rahmen des Gradmessungsunternehmens die Grundlage einer Landesvermessung für Niedersachsen (das damalige Königreich Hannover) zu schaffen, bestehend aus mehr als 30 Punkten, zwischen denen Dreiecke gebildet wurden (Bild 4). In diesem Dreiecksnetz wurden alle Winkel gemessen und außerdem eine Seite als Basis, die bei der Berechnung des Dreiecksnetzes den Maßstab lieferte. Die Winkel wurden damals, wie es auch heute noch üblich ist, mit dem Theodolit gemessen. Bild 3 zeigt den von Gauß verwendeten Theodolit. Wie aus Bild 4 hervorgeht, stellt der von Gauß bearbeitete Teil der niedersächsischen Triangulation das Kernstück und zugleich das Bindeglied zu den in allen vier Himmelsrichtungen angrenzenden Dreiecksnetzen dar.

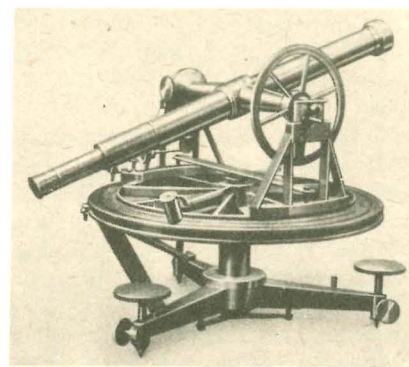
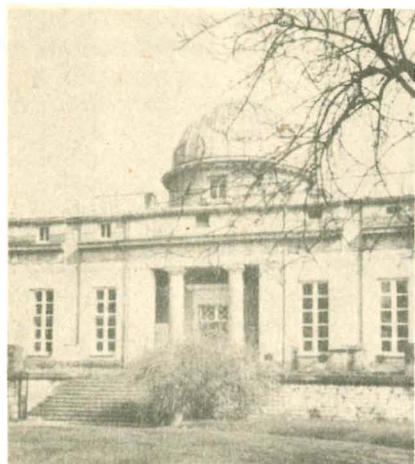


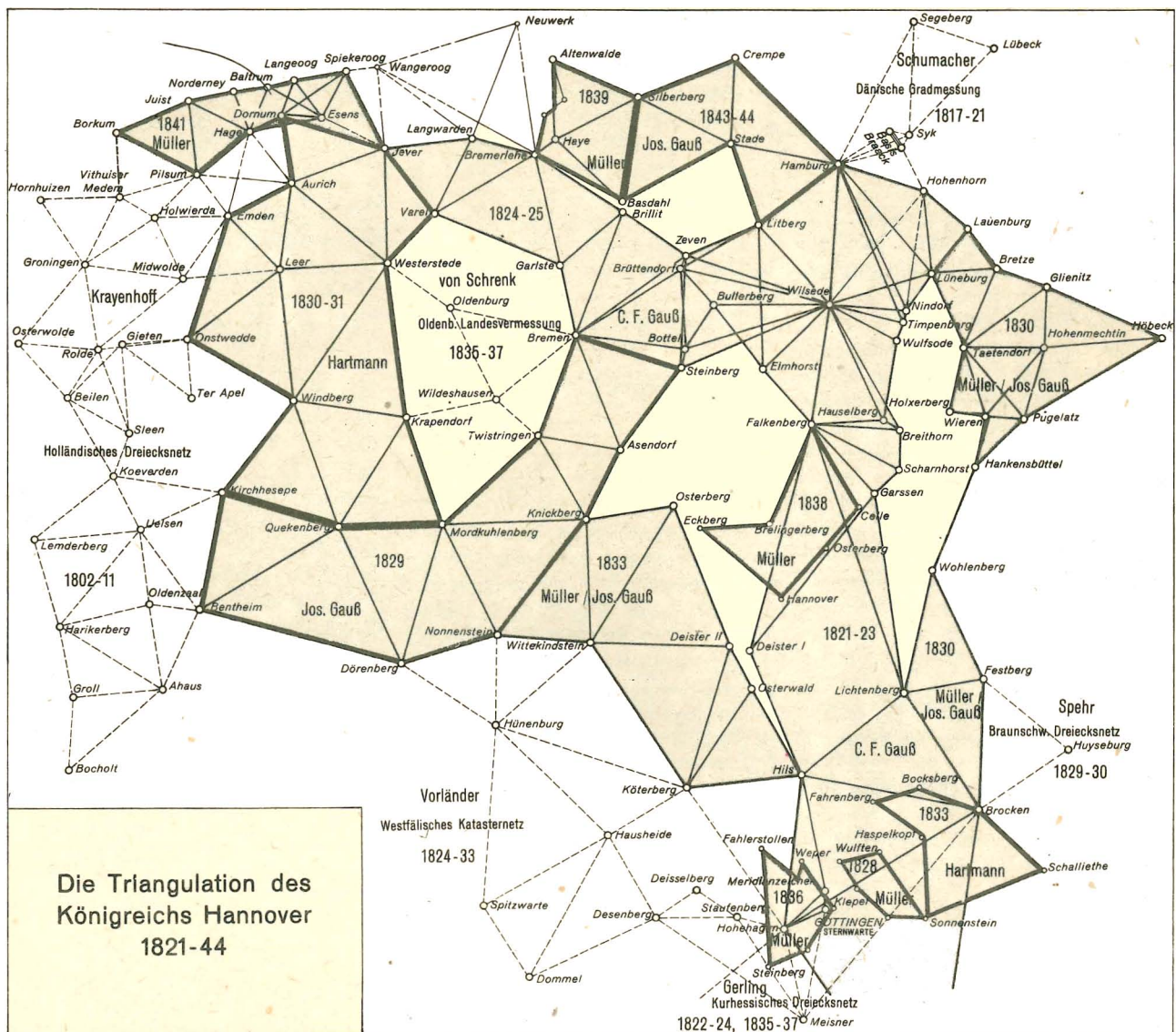
Bild 3
Theodolit, den Gauß 1822–25 benutzte

Bei der Messung des Winkels zwischen den Punkten Hamburg und Hohenborn von Lüneburg aus (s. Bild 4) störte Gauß die Spiegelung des Sonnenlichts in der Fensterscheibe einer Hamburger Kirche. Dieses Beobachtungserlebnis gab ihm den Anstoß zur Erfindung des Heliotrops. Das ist ein Hilfsgerät, bei dem durch einen beweglichen Spiegel das Sonnenlicht von einem Zielpunkt nach einem Meßpunkt reflektiert wird. Das südliche Dreieck des Netzes (in Bild 4 nur teilweise dargestellt) enthält die Seite Brocken–Inselberg mit über 100 km Länge. Diese Tatsache regte Gauß an, den Gültigkeitsbereich der euklidischen Geometrie zu prüfen. Es ist dies ein weiteres Beispiel für C. F. Gauß' Bestreben, stets praktische und theoretische Fragen

Sternwarte Göttingen

Bild 1





im Zusammenhang zu untersuchen. Im Rahmen der kartographischen Darstellung der Ergebnisse der Landesvermessung behandelte Gauß die allgemeine Aufgabe der Abbildung einer gegebenen Fläche auf eine andere in der Weise, daß das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Aus dem Studium der astronomischen und geodätischen Arbeiten von C. F. Gauß ist eine Reihe von Prinzipien erkennbar, die auch für unsere heutige Generation hohe Bedeutung besitzen: Die bereits erwähnte fruchtbare Verbindung von Praxis und Theorie, die Beharrlichkeit bei der Durchführung aller durchzuführenden Arbeiten, die Gründlichkeit bei Untersuchungen, die auch nicht die kleinste Unklarheit zuläßt.

Klaus-Günter Steinert

Aufgaben

▲ 1 ▲ Gegeben seien die mittleren Abstände a_i der folgenden Planeten von der Sonne in Astronomischen Einheiten:

Venus $a_1=0,72$; Erde $a_2=1,00$; Mars $a_3=1,52$; Jupiter $a_4=5,20$; Saturn $a_5=9,54$; Uranus $a_6=19,18$. Für jeden dieser Planeten

ist der ganzzahlige Exponent n_i in der Titius-Bodeschen Beziehung

$$a_i = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n_i}$$

so zu bestimmen, daß die nach der Beziehung berechneten a_i möglichst gut mit den gegebenen übereinstimmen.

▲2▲ Eine Strecke s ist $n_1=10$ mal unter gleichen Bedingungen gemessen worden. Die Meßergebnisse sind:

$s_1 = 24,35$ m, $s_2 = 24,39$ m, $s_3 = 24,36$ m,
 $s_4 = 24,32$ m, $s_5 = 24,35$ m, $s_6 = 24,37$ m,
 $s_7 = 24,31$ m, $s_8 = 24,33$ m, $s_9 = 24,34$ m,
 $s_{10} = 24,38$ m.

a) Zu berechnen sind der wahrscheinlichste Wert von s nach der Methode der kleinsten Quadrate sowie der mittlere Fehler m_s von s und der mittlere Fehler m_0 einer Einzelmessung s_i .

b) Wie viele Einzelmessungen n_2 wären nötig, damit ein mittlerer Fehler $m_s = 0,005$ m erreicht wird?

▲3▲ Der kleine Planet Ceres hat einen mittleren Abstand von der Sonne $a_{\text{Ceres}} = 2,77 \text{ AE}$.

a) Welchen Exponenten n_{Ceres} bekäme der kleine Planet nach der Titius-Bodeschen Beziehung? (Vgl. Aufgabe 1)

b) Wie lange dauert ein Umlauf U_{Ceres} des Planeten um die Sonne?

Es ist das dritte Keplersche Gesetz

$$\frac{U_{Ceres}^2}{a_{Ceres}^3} = \frac{U_{Jupiter}^2}{a_{Jupiter}^3}$$

mit $U_{\text{Jupiter}} = 11,86$ Jahre $a_{\text{Jupiter}} = 5,20$ AE anzuwenden. Zur Kontrolle ist U_{Ceres} ein zweites Mal mit den Werten U und a für die Erde zu rechnen.

Lösungen siehe Seite 47

**Es ist nicht das Wissen,
sondern das Lernen,
nicht das Besitzen,
sondern das Erwerben,
nicht das Da-Sein,
sondern das Hinkommen,
was den größten Genuß gewährt.**

C. F. Gauß an Bolyai

Die Konstruktion regelmäßiger n -Ecke

Ein Streifzug durch ihre Geschichte
von den Ägyptern bis zu C. F. Gauß

Eine ebene Figur, die durch Geradenstücke berandet wird, heißt *Vieleck* oder *Polygon*. Nach der Anzahl der Ecken unterscheidet man Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, ..., n -Ecke. Die Abbildung 1 zeigt einige Vielecke. Unter den Vielecken ist das Dreieck das wichtigste, denn alle Vielecke mit mehr als drei Eckpunkten lassen sich in Dreiecke zerlegen. Die Gestalt eines Vielecks ist dann vollständig festgelegt, wenn alle seine Seiten und Innenwinkel (d. h. die Winkel zwischen seinen Seiten) gegeben sind. Das 3-Eck bildet übrigens in bezug auf die Konstruktion eine Ausnahme; da bekanntlich bereits drei Seiten zur Konstruktion eines Dreiecks ausreichen, werden durch die Seiten hier auch die Winkel mitbestimmt. Die Gleichheit der Seiten allein reicht zur Konstruktion von n -Ecken mit $n > 3$ nicht mehr aus, wie z. B. für 4-Ecke die Beispiele Quadrat und Rhombus zeigen (Abbildung 3).

Bild 1

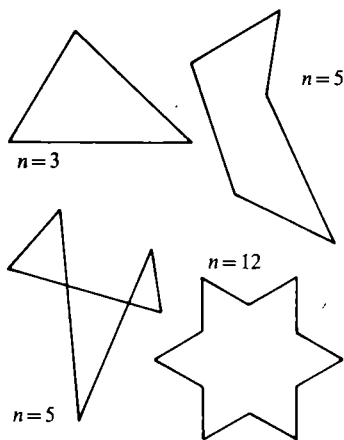


Bild 3

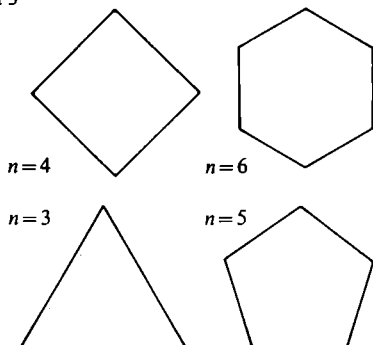
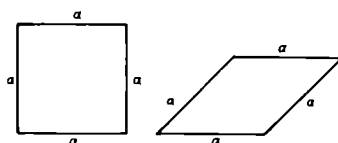


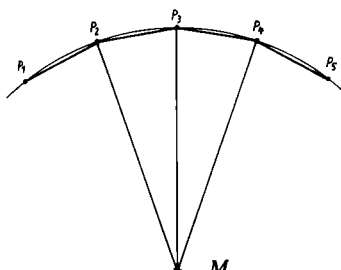
Bild 2



Wie unter den Dreiecken und Vierecken gibt es allgemein unter den Vielecken solche, für die alle Seiten gleich lang sind und alle Winkel gleich groß sind. Sie werden *regelmäßige n -Ecke* genannt. Das regelmäßige 3-Eck bzw. 4-Eck wird üblicherweise als gleichseitiges Dreieck bzw. Quadrat bezeichnet. In der Abbildung 2 sind für $n=3, 4, 5$ und 6 regelmäßige n -Ecke gezeichnet.

Wir untersuchen im folgenden eine sehr wichtige Eigenschaft regelmäßiger Vielecke. Drei Punkte einer Ebene bestimmen genau einen Kreis, der durch sie hindurch geht. Also kann man insbesondere durch die drei Eckpunkte jedes regelmäßigen 3-Ecks einen Kreis (Umkreis) ziehen. Beim regelmäßigen 4-Eck (Quadrat) haben die Ecken vom Schnittpunkt der Diagonalen den gleichen Abstand. Also läßt sich auch um das Quadrat ein Kreis ziehen. Wie sieht es beim regelmäßigen 5-, 6- bzw. allgemein beim regelmäßigen n -Eck aus? Wir zeigen, daß jedes regelmäßige n -Eck einen Umkreis besitzt. Dazu nehmen wir an, daß wir ein regelmäßiges n -Eck ($n > 4$) mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \dots, P_n$ gegeben haben (Abbildung 4). Wir zeichnen die Winkelhalbierende der Winkel $P_1P_2P_3$ und $P_2P_3P_4$, die sich im Punkt M schneiden, und verbinden M mit den restlichen Eckpunkten des Vielecks. Da in regelmäßigen n -Ecken die Winkel bei P_2 und P_3 gleich sind, ist $\sphericalangle MP_2P_3 = \sphericalangle MP_3P_2$. Mithin ist das Dreieck MP_2P_3 gleichschenkelig bzw. $\overline{MP_2} = \overline{MP_3}$. Da $\overline{MP_3}$ den Winkel bei P_3 halbiert, gilt $\sphericalangle P_2P_3M = \sphericalangle MP_3P_4$. Damit sind in den Dreiecken MP_2P_3 und

Bild 4



MP_3P_4 zwei Seiten ($\overline{MP_3}, \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$) und der eingeschlossene Winkel gleich, also sind die Dreiecke MP_2P_3 und MP_3P_4 kongruent (sws). Wir haben also $\overline{MP_2} = \overline{MP_3} = \overline{MP_4}$. Ferner ist

$$\sphericalangle MP_3P_4 = \sphericalangle MP_4P_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle P_1P_2P_3$$

$$= \frac{1}{2} \sphericalangle P_3P_4P_5 = \sphericalangle MP_4P_5,$$

und hieraus ergibt sich wie eben $\overline{MP_4} = \overline{MP_5}$. Indem wir so fortfahren, kommen wir schließlich zu den Gleichheiten $\overline{MP_1} = \overline{MP_2} = \dots = \overline{MP_{n-1}} = \overline{MP_n}$. Das bedeutet aber, daß die n Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ vom Punkt M alle den gleichen Abstand haben bzw. auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{MP_1} = \dots = \overline{MP_n}$ liegen. Damit ist gezeigt

Satz 1: Um jedes regelmäßige n -Eck läßt sich genau ein Kreis (Umkreis) zeichnen.

Da gleiche Bogen auch gleiche Sehnen in einem Kreis haben, gilt folgende Umkehrung Satz 2: Die Punkte $P_1, \dots, P_n$ teilen den Kreis in n gleiche Teile, d. h. je zwei der Bogenstücke $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ haben die gleiche Länge. Dann sind die Punkte $P_1, \dots, P_n$ Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks.

Die Konstruktion eines regelmäßigen n -Ecks läuft aus der Sicht von Satz 2 darauf hinaus, einen Kreisumfang in n gleiche Teile zu zerlegen. Das bereitet uns anschaulich gar keine Schwierigkeiten, so daß wir voreilig der Behauptung, daß sich jedes regelmäßige n -Eck mit den üblichen Konstruktionsmitteln der Geometrie, dem Zirkel und dem Lineal, konstruieren läßt, zustimmen würden. Die Mathematik hat über 2000 Jahre benötigt, um die Richtigkeit oder Falschheit dieser Behauptung zu ermitteln.

Wir haben oben gesehen, daß sich jedes regelmäßige n -Eck in n kongruente gleichschenkelige Dreiecke MP_1P_2, MP_2P_3 usw. zerlegen läßt, so daß sich die Konstruktion eines regelmäßigen n -Ecks auch über die Konstruktion dieser „Grunddreiecke“ ausführen läßt. Wir wollen die Zerlegung eines regelmäßigen n -Ecks in die Grunddreiecke dazu benutzen, die Winkelsumme σ_n eines regelmäßigen n -Ecks zu berechnen. Da in einem Dreieck die Summe der Winkel 180° beträgt, erhalten wir für das regelmäßige n -Eck die Winkelsumme, wenn wir die Dreieckswinkel aller Grunddreiecke addieren ($= n \cdot 180^\circ$) und davon die n Winkel an der Spitze M der Grunddreiecke, die zusammen 360° ergeben, abziehen:

$$\sigma_n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Der Winkel α_n an der Spitze eines Grunddreiecks beträgt offenbar

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n} \text{ und}$$

die Basiswinkel β_n eines Grunddreiecks

$$\beta_n = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n} = 90^\circ \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

In der folgenden Tabelle haben wir einige Werte ausgerechnet.

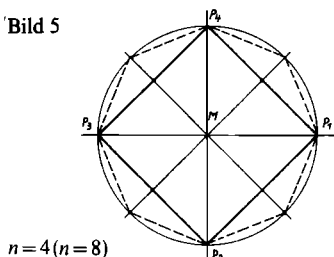
n	α_n	β_n	σ_n
4	90°	45°	360°
5	72°	54°	540°
6	60°	60°	720°
10	36°	72°	1440°

Wir wenden uns nun der Konstruktion einiger regelmäßiger n -Ecke zu, die wir einem gegebenen Kreis einbeschreiben wollen.

a) Das regelmäßige 4-Eck und die von ihm ausgehende Reihe

Um ein regelmäßiges 4-Eck zu erhalten, müssen die Grunddreiecke an der Spitze M einen rechten Winkel besitzen. Dies erreichen wir, indem wir in dem gegebenen Kreis zwei zueinander senkrechte Durchmesser ziehen (Abb. 5). Durch Halbieren der Bogen $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_2P_3}$, $\widehat{P_3P_4}$ und $\widehat{P_4P_1}$, was konstruktiv durch das Halbieren der Seiten P_1P_2 , ..., P_4P_1 erfolgt, gelangen wir zum regelmäßigen 8-Eck. Wiederholtes Halbieren führt schließlich auf das regelmäßige 16-Eck, 32-Eck, ..., $4 \cdot 2^n$ -Eck. Die ältesten Aufschlüsse über regelmäßige Vielecke geben altägyptische Wandgemälde, die anfänglich ausschließlich regelmäßige 4- und 8-Ecke zeigen.

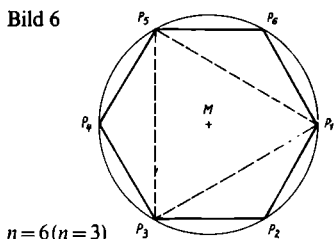
Bild 5



b) Das regelmäßige 6-Eck und die von ihm ausgehende Reihe

Da der Winkel α_6 an der Spitze des gleichschenkligen Grunddreiecks 60° beträgt, die Grunddreiecke also gleichseitig sind, ist die Seite des regelmäßigen 6-Ecks gleich dem Radius des Umkreises. Wir erhalten die Eckpunkte folglich durch sechsmaliges Abtragen des Radius am Kreisumfang (Abb. 6). Halbieren wir wiederholt die zu den Seiten des regelmäßigen 6-Ecks gehörigen Bogen, so gelangen wir zum regelmäßigen 12-, 24-, ..., $6 \cdot 2^n$ -Eck. Durch Überspringen jeweils einer Ecke erhalten wir übrigens das regelmäßige

Bild 6



3-Eck. Auf späteren altägyptischen Wandgemälden treten regelmäßige 6- und 12-Ecke auf (z. B. in Wagenrädern), und es hat den Anschein, daß die Ägypter diese Konstruktionen von den Babyloniern gelernt haben. Der griechische Mathematiker Archimedes hat durch das regelmäßige 96-Eck ($96 = 6 \cdot 2^4$) zum ersten Mal die Fläche des Kreises (hier des zum regelmäßigen 96-Eck gehörigen Umkreises) verlässlich nach unten abgeschätzt und dabei für das Verhältnis π von Kreisumfang zum Durchmesser näherungsweise $\frac{10}{3} \frac{1}{71}$ erhalten.

c) Das regelmäßige 10-Eck und die von ihm ausgehende Reihe

Der Winkel α_{10} an der Spitze eines Grunddreiecks beträgt jetzt 36°, die Basiswinkel β_{10} 72°. Es ist also $\alpha_{10} = \beta_{10}/2$. Zeichnen wir für einen dieser Basiswinkel, sagen wir bei P_1 (Abb. 7), die Winkelhalbierende, die die Seite $\widehat{MP_2}$ in P schneiden möge, so sind die Winkel $\widehat{MP_1P}$ und $\widehat{PP_1M}$ gleich. Das Dreieck PP_1M ist gleichschenkelig:

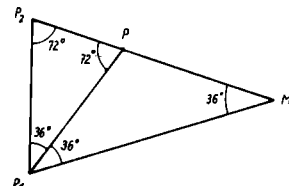
$\widehat{PP_1} = \widehat{PM}$. Weiter ist aber auch $\angle P_1PP_2 = \angle P_1P_2P$, also ist auch das Dreieck PP_1P_2 gleichschenkelig und damit $\widehat{PP_1} = \widehat{P_1P_2}$. Mithin gilt $\widehat{MP} = \widehat{P_1P_2}$. Auf Grund der Winkelgleichheit in den Dreiecken MP_1P_2 und PP_1P_2 sind diese ähnlich. Deshalb ist

$$\frac{\widehat{MP_2}}{\widehat{P_1P_2}} = \frac{\widehat{P_1P_2}}{\widehat{P_2P}} \quad (*)$$

bzw. wegen $\widehat{MP} = \widehat{P_1P_2}$

$$\frac{\widehat{MP_2}}{\widehat{MP}} = \frac{\widehat{MP}}{\widehat{P_2P}}.$$

Bild 7



Die Gleichung (*) bedeutet in geometrischer Sprechweise, daß der Radius $r = \widehat{MP_2}$ des Umkreises durch den Punkt P stetig geteilt wird und daß der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke gleich der Zehneckseite s_{10} ist. Mit den neuen Bezeichnungen erhalten wir für

$$(*) : r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}) \text{ bzw.}$$

$$s_{10} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$$
 (die negative Wurzel entfällt wegen $s_{10} > 0$). Nach dem Satz des Pythagoras ist $\sqrt{r^2/4 + r^2}$ gleich der Hypotenuse AC eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit den Seiten $\widehat{AB} = r$ und $\widehat{CB} = r/2$ (Abb. 8). Um s_{10} zu erhalten, ist von AC die Strecke $r/2$ zu subtrahieren, so daß $\widehat{AD} = \widehat{AE}$ die gesuchte Seite s_{10} bildet. Das regelmäßige 10-Eck wird also konstruiert, indem man den Radius des Umkreises stetig teilt und den größeren Abschnitt zehnmal am Kreisumfang abträgt. Das regelmäßige 5-Eck ergibt sich durch Überspringen jeweils

eines Eckpunktes. Gauß teilte folgende einfache Bestimmung der Seite s_5 des regelmäßigen 5-Ecks als Entdeckung eines seiner Schüler mit, die wir ohne Beweis nennen (Abb. 8): Ziehe durch B und D eine Gerade, die den Kreis um A mit dem Radius r in F schneidet. Dann ist $\widehat{BF} = s_5$. Durch Halbieren der Bogen, die zu den Seiten des regelmäßigen 10-Ecks gehören, erhalten wir nacheinander das regelmäßige 20-, 40-, ..., $5 \cdot 2^n$ -Eck. Die Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks ist eine Entdeckung der griechischen Mathematiker; das Sternfünfeck (Abb. 9) diente der Schule des Pythagoras als Geheimzeichen.

Bild 8

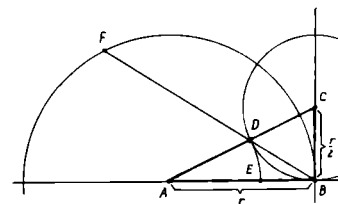
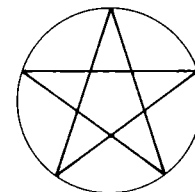


Bild 9



d) Weitere konstruierbare regelmäßige n -Ecke

Es ist $\alpha_{15} = 24^\circ$. Dieser Winkel – und damit das regelmäßige 15-Eck – kann konstruiert werden, indem man $24^\circ = 60^\circ - 36^\circ = \alpha_6 - \alpha_{10}$ bildet, also zwei bekannte Winkel subtrahiert. Daraus folgt die Konstruierbarkeit der $15 \cdot 2^n$ -Ecke. Auch diese Konstruktion finden wir bereits in der klassischen griechischen Mathematik. Bis zum Schluß des 18. Jahrhunderts hielt man damit den Bestand der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regelmäßigen n -Ecke für erschöpft.

Am 1. 6. 1796 erschien in der „Allgemeinen Literaturzeitung“ folgende Mitteilung, die die erste Veröffentlichung von C. F. Gauß ist: Neue Entdeckungen. Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, daß verschiedene regelmäßige Vielecke, namentlich das Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, daß das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern. Desto mehr dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß außer jenen regelmäßigen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig

ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium (Corollarium, lat. = Folgesatz eines Beweises) einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden.

C. F. Gauß, q. Braunschweig,
Stud. d. Mathematik zu Göttingen

Die Lösung einer 2000jährigen Fragestellung der Mathematik gelang Gauß durch eine algebraische Formulierung, die er für das geometrische Problem fand. Die algebraische Behandlung der Aufgabe erfordert umfassende mathematische Kenntnisse, so daß wir hier darauf nicht eingehen. Für denjenigen aber, der Lust hat, ein regelmäßiges 17-Eck zu konstruieren, geben wir wenigstens die Konstruktionsbeschreibung an. Vorher nennen wir noch das von Gauß gefundene Resultat. Ein Kreis kann dann und nur dann mit Zirkel und Lineal in n gleiche Teile zerlegt werden, wenn n eine Primzahl der Gestalt $2^{2^m} + 1$ ist. Für $m=0$ ist $n=3$, für $m=1$ ergibt sich $n=5$ und für $m=2$ erhält man überraschenderweise $n=17$. Gauß hat die wirkliche geometrische Durchführung der Konstruktion zunächst anderen überlassen, später gab auch er eine Konstruktionsbeschreibung. Für $m=3$ ist $n=257$, also eine Primzahl. Richelot hat 1832 diese Aufgabe bearbeitet. Auch für $m=4$ ergibt sich eine Primzahl, nämlich $n=65537$. Diese umfangreichen Untersuchungen hat Hermes vorgenommen. Gauß benötigte für seine Überlegungen eine Schiefertafel, Richelot schon 80 Seiten und Hermes gar einen Koffer, um sein Manuskript aufzubewahren. Für $m=5$ ist $n=641 \cdot 6700417$, also keine Primzahl. Bis jetzt sind noch keine weiteren Primzahlen der Art $2^{2^m} + 1$ bekannt. Eins ist jedoch klar: wenn es eine weitere Primzahl gibt, so muß sie astronomische Ausmaße haben.

Nun aber die versprochene Konstruktion. Im Mittelpunkt des gegebenen Kreises K , in den das regelmäßige 17-Eck eingezeichnet werden soll, errichten wir zwei zueinander senkrechte Geraden g und h . Wir teilen den Radius $r = \overline{MA}$ (vgl. Abb. 10) in vier Teile. Es sei

$\overline{MC} = \frac{1}{4} \overline{MA}$. Um C schlagen wir einen Kreis-

bogen mit dem Radius $\overline{BC}$ (wobei B ein Schnittpunkt der Geraden h mit dem Kreis K ist), der die Gerade g in D und E schneidet. Um D schlagen wir einen Kreis mit dem Radius $\overline{DB}$, der g außerhalb des Kreises K in F schneidet; um E schlagen wir ebenfalls einen Kreis mit dem Radius $\overline{EB}$, der auf g innerhalb des Kreises K den Punkt G liefert. Wir halbieren die Strecke $\overline{MF}$ und erhalten den Punkt H . Über $\overline{AG}$ wird der Thaleskreis errichtet, der h in I schneidet. Der Kreis um I mit dem Radius $\overline{MI}$ schneidet g in L . Wir tragen auf g von M aus nach rechts die Strecke $\frac{1}{2} \overline{HL}$ ab, im Endpunkt dieser Strecke

errichten wir eine Senkrechte zur Geraden g , die den Kreis in P_2 und P_{17} schneidet. Mit $A=P_1$ haben wir drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des regelmäßigen 17-Ecks. Damit lassen sich alle weiteren leicht konstruieren.

Für den eiligen Leser, dem diese exakte Konstruktion zu langwierig ist, teilen wir noch eine einfache Näherungslösung mit (Abb. 11): Wie eben werden in M zwei senkrechte Geraden g und h eingezeichnet. Die Gerade g schneidet den Kreis in A und B . Wir teilen $\overline{AB}$ in 17 Teile und zeichnen rechts von A einen Punkt C mit $\overline{AC} = \overline{AB}/17$. Auf h wird oberhalb von D ein Punkt E mit $\overline{DE} = \overline{AB}/17$ eingezeichnet und C mit EF . Der dritte, links von A liegende Teilungspunkt G der Strecke $\overline{AB}$ wird mit F verbunden. Dann ist mit sehr guter Näherung die Seite s_{17} des regelmäßigen 17-Ecks gleich $\overline{GF}$.

Wir wollen uns abschließend das merkwürdige Ergebnis plausibel machen, warum einige regelmäßige n -Ecke mit Zirkel und Lineal und andere nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Zirkel und Lineal sind beim praktischen Zeichnen die wichtigsten Instrumente. Deshalb wird die auf den griechischen Mathematiker Plato zurückgehende Forderung, bei geometrischen Konstruktionen nur

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Le Van Thiem

Universität Hanoi

Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der Sozialistischen Republik Vietnam

▲ 1621 ▲ Es seien m, n zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $m < n$ und p, q zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $p < q$, für die $\arctan \frac{m}{n} + \arctan \frac{p}{q} = 45^\circ$ gilt.

1. Gegeben sind m und n . Man ermittle p und q .
2. Gegeben sind m und p . Man ermittle n und q .
3. Gegeben sind m und q . Man ermittle n und p .

Bemerkung: $\alpha = \arctan \frac{m}{n}$ bzw. $\beta = \arctan \frac{p}{q}$ sind die Größen derjenigen Winkel zwischen 0° und 90° , für die

$$\tan \alpha = \frac{m}{n} \text{ bzw. } \tan \beta = \frac{p}{q} \text{ gilt.}$$

Zirkel und Lineal zu benutzen, nicht als Einschränkung der Hilfsmittel empfunden. Wenn wir jedoch die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionsschritte näher betrachten, dann stellen wir fest, daß sich entweder Geraden mit Geraden oder Kreise mit Kreisen schneiden. Verfolgen wir diese Konstruktionsschritte rechnerisch (am besten mit Hilfe der analytischen Geometrie), so zeigt sich, daß wir nur Strecken konstruieren können, die zu einer Einheitsstrecke (dem Umkreisradius) ein rationales Verhältnis haben oder sich über eine Folge von Quadratwurzeln aus rationalen Vielfachen dieser Einheitsstrecke ergeben. Aus rechnerischer Sicht zeigen sich deutlich die Einschränkungen, die wir uns durch alleinige Verwendung von Zirkel und Lineal auferlegen, da z. B. Strecken, die gleich einer dritten Wurzel aus der Einheitsstrecke sind, mit Zirkel und Lineal nicht mehr konstruiert werden können. (Daher sind die klassischen Probleme der Würfelveerdopplung und der Dreiteilung eines Winkels unlösbar.) Es ist nun nicht mehr erstaunlich, daß Zirkel und Lineal nicht mehr ausreichen, um alle regelmäßigen n -Ecke zu konstruieren bzw. den Kreis in n gleiche Teile zu zerlegen. Ein moderner Geometer hat diesen Sachverhalt sehr drastisch ausgedrückt, indem er erklärte, daß eine Sense kein geeignetes Instrument zum Rasieren ist.

R. Thiele

(Aus Platzgründen wurde z. T. ein Schrägstrich als Bruchstrich verwendet.)

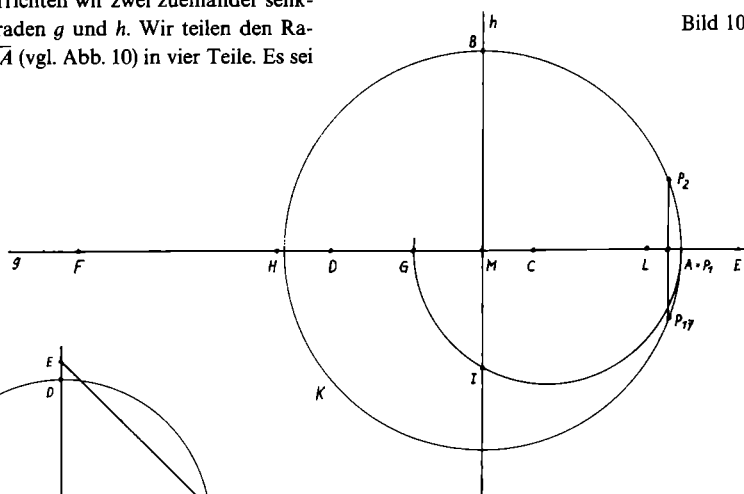
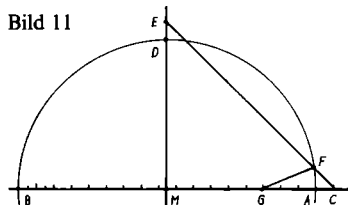


Bild 10

Bild 11



Gauß und die nicht-euklidische Geometrie

Gauß hat nur das veröffentlicht, was er selbst für völlig ausgereift hielt. Aus seiner umfangreichen Korrespondenz, seinem Tagebuch und anderen Aufzeichnungen geht hervor, daß er sich mit vielen Fragen befaßt hat, deren endgültige Lösung zwar erst Mathematikern späterer Zeit vorbehalten war, zu deren Erforschung er jedoch wesentliche Gedanken beigetragen hat. Ein solches Gebiet ist die *nicht-euklidische Geometrie*. Obwohl sich Gauß über viele Jahre mit diesem Problem beschäftigt hat und obwohl er die von *J. Bolyai* und *N. I. Lobatschewski* erreichten Ergebnisse schon vor den beiden gefunden hatte, ließ er nichts davon an die Öffentlichkeit dringen.

Als Festgabe zum Jubiläum erschien im Teubner-Verlag Leipzig ein Buch unter dem Titel „Gauß und die nicht-euklidische Geometrie“.

Der Autor, Nationalpreisträger Professor Dr. Hans Reichardt, der – selbst Geometer – sich viel mit mathematikhistorischen Fragen befaßt, hat dieses eigenartige Kapitel der Mathematikgeschichte untersucht. Es ist ihm gelungen, aus Aufzeichnungen, Notizen und Bemerkungen, aus Briefen, Rezensionen und anderen Stellungnahmen zu verschiedenen Arbeiten von Geometern dieser Zeit ein Bild von dem Anteil zu entwerfen, den Gauß selbst zur Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie beigetragen hat.

Worum geht es bei der nicht-euklidischen Geometrie?

Im 4. Jh. v. u. Z. hatte *Euklid* das damalige mathematische Wissen systematisiert und in seinem Werk „Die Elemente“ zusammengefaßt. Die ersten vier Bücher dieses Werkes sind der Geometrie gewidmet. Sie enthalten Axiome, mit deren Hilfe die gesamte Geometrie aufgebaut und alle weiteren Sätze bewiesen werden. Ein solches Axiom ist z. B. (in unserer heutigen Sprechweise ausgedrückt): „Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.“ Eines dieser Axiome jedoch, das fünfte, war nicht so kurz und auch nicht so offensichtlich. Es lautete folgendermaßen:

„Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei

Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.“

Das ist inhaltlich gleichbedeutend mit den Aussagen „Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt genau eine Parallele“ oder „Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich 180° “.

Viele Mathematiker haben sich im Laufe der Jahrhunderte mit diesem *Parallelenaxiom* beschäftigt. Sie glaubten, es sei gar kein Axiom, sondern ein Satz, der sich aus den anderen Axiomen ableiten läßt, und haben deshalb versucht, ihn zu beweisen. Es ist keinem gelungen. Auch Gauß und viele seiner Zeitgenossen haben sich mit solchen Beweisversuchen abgequält, z. B. sein Studienfreund *Wolfgang Bolyai* aus Ungarn und dessen Sohn *Johann* und auch *N. I. Lobatschewski* aus Rußland. Bei diesen Beweisversuchen wandte man auch das indirekte Beweisverfahren an, d. h., man nahm an, das Parallelenaxiom sei falsch, und hoffte, damit auf einen Widerspruch zu stoßen. Das geschah jedoch nicht; im Gegenteil, man konnte daraus eine ganz neue Geometrie ableiten. So wurde eigentlich gegen den Willen der Mathematiker selbst und entgegen aller Anschauung eine nicht-euklidische Geometrie, die sog. *hyperbolische Geometrie* gefunden.

Wie aus den verschiedenen Aufzeichnungen zu schließen ist, hat wohl Gauß als erster diese Konsequenz gezogen. Er hat jedoch seine Ergebnisse nicht veröffentlicht. Auch als später *N. I. Lobatschewski* und *J. Bolyai* unabhängig voneinander diese neue, nicht-euklidische Geometrie entdeckten, hat er sich nur sehr zurückhaltend geäußert.

Wahrscheinlich waren es mehrere Gründe, die Gauß zu diesem merkwürdigen Verhalten veranlaßten. Einmal war es ihm (und auch *J. Bolyai* und *N. I. Lobatschewski*) nicht gelungen, die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie nachzuweisen. Zum anderen war es natürlich sehr schwer, diese Ideen zu vertreten, für die den meisten Mathematikern damals jedes Verständnis fehlte und die der Anschauung widersprachen. Das haben auch *J. Bolyai* und *N. I. Lobatschewski* zu spüren bekommen, deren Veröffentlichungen keinesfalls die verdiente Würdigung fanden, wohl aber Anfeindungen und Spott hervorriefen. Diesem „Geschrei der Böltier“ wollte sich Gauß nicht aussetzen, wie aus seinen Bemerkungen hervorgeht, wahrscheinlich besonders deshalb, weil ihm der Nachweis der Widerspruchsfreiheit fehlte.

In dem Buch „Gauß und die nicht-euklidische Geometrie“ wird diese Entwicklung sehr lebendig dargestellt, werden die Verdienste und das Verhalten von Gauß gezeigt und mit vielen Zitaten belegt. Darüber hinaus wird die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie weiter verfolgt, ihre Bedeutung ge-

würdigt und die vollständige Lösung dieses Problems mit einbezogen. Namen wie *Felix Klein*, *Sophus Lie* und *Bernhard Riemann* vervollständigen das Bild. Den Abschluß bilden im Zusammenhang mit dem pseudo-euklidischen Modell der nicht-euklidischen Geometrie eigene Arbeiten des Autors.

Damit bringt das Buch ein abgerundetes Bild über die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie und ihre Beeinflussung durch Gauß, wie es in der Literatur bisher noch nicht zu finden ist.

Das Buch wendet sich nicht nur an Mathematiker mit dem Spezialgebiet Geometrie, sondern an alle, die sich für die Entwicklung der Mathematik oder für Fragen der Geometrie interessieren und die über diesen großen Mathematiker, über seine Arbeitsweise und seine Charakterzüge etwas erfahren wollen.

D. Ziegler

Prof. Dr. Hans Reichardt

Gauß und die nicht-euklidische Geometrie

116 Seiten mit 8 Fotos und
21 Zeichnungen. Leinen mit Schutzumschlag.
29,50 M

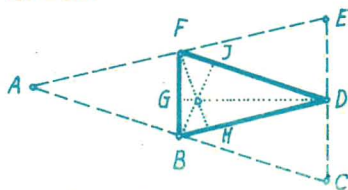
Ein Beweis, geführt von C. F. Gauß

„Daß die Perpendikel in einem Dreieck aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten sich in einem Punkte schneiden, kann man sehr einfach so zeigen: Das gegebene Dreieck sei *BDF* und die erwähnten Perpendikel *BJ*, *DG*, *FH*. Man ziehe durch jeden Scheitelpunkt des Dreiecks Parallelen mit der gegenüberstehenden Seite, die sich in den Punkten *A*, *C*, *E* schneiden, und es steht folglich *FH* auch auf *AE*, *GD* auf *CE*, *BJ* auf *AC* senkrecht, und zwar ist

$$AB = BC$$

$$ED = DC$$

$$AF = FE.$$



Beschreibt man nun um das Dreieck *ACE* einen Kreis, so liegt sein Mittelpunkt sowohl in *BJ*, als in *DG*, als in *FH*, diese drei Linien müssen sich also in einem Punkte schneiden.“

$$\begin{array}{r} \text{UUU} \\ + \text{UUSU} \\ \hline \text{GAUSS} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{AAGG} \\ + \text{AGGG} \\ \hline \text{GAUSS} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ASUA} \\ + \text{ASGA} \\ \hline \text{GAUSS} \end{array}$$

$$\sqrt{\text{GGA}} = \text{GAUSS}$$

$$\text{AGGA} = \text{GAUSS}$$

G · A · U · S · S

Man ersetze die Buchstaben im Namen von C. F. Gauß so durch natürliche Zahlen, daß nachfolgende Bedingungen erfüllt werden.

$$(1) C \cdot F \cdot (G + A + U + S + S) + A \cdot U = 1777$$

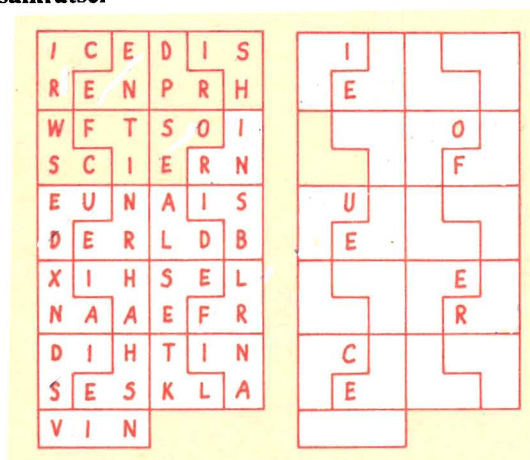
$$(2) G \cdot A \cdot U \cdot S \cdot S = 1855$$

$$(3) G > C > A > U > F > S$$

Wie viele und welche Lösungen gibt es?

K. Koch

Mosaikrätsel



Die Buchstabengruppen der linken Figur sind so in die rechte Figur zu übertragen, daß sich ein Ausspruch von C. F. Gauß ergibt.

Anekdote

Ein Jugendfreund von C. F. Gauß hatte sich zu der Bemerkung „Die Hälfte unserer Gemeinderatsmitglieder sind Dummköpfe“ hinreißen lassen.

Der Bürgermeister, über diese Äußerung erbost, verlangte die Zurücknahme der beleidigenden Worte.

Zur nächsten Sitzung erschien auch prompt der junge Mann und erklärte:

„Ich bedaure meine Bemerkung, die Hälfte der Gemeinderatsmitglieder seien Dummköpfe. Ich nehme sie zurück und widerrufe: Die Hälfte der Gemeinderatsmitglieder sind keine Dummköpfe.“

Im Sitzungssaal zunächst Schweigen, dann aber brach der Bürgermeister, ein Mann mit Sinn für geistvollen

Humor, in schallendes Gelächter aus. Die Ratsmitglieder schlossen sich wohl oder übel an, und einer aus dem Publikum meinte: „Wenn hinter diesem Widerruf nicht der Carl Friedrich steckt?!“

Krypto-Gleichungssystem

Den Buchstaben im Namen von CFGAUSS sind Ziffern von 0 bis 9 so zuzuordnen, daß die Gleichungen (I) bis (IV) zu wahren Aussagen werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Das Gleichungssystem kann sowohl durch systematisches Probieren als auch mit Hilfe äquivalenter Umformungen gelöst werden.

(C, G ≠ 0)

$$(I) \frac{(\sqrt[5]{\text{GAUSS}})^C - C^C \cdot G}{C \cdot G} = 1 + 7 + 7 + 7$$

$$(II) \frac{(\sqrt[5]{\text{GAUSS}})^C - G \cdot G^C}{C \cdot G} = 1 + 8 + 5 + 5$$

$$(III) \frac{(\sqrt[5]{\text{GAUSS}})^C}{C \cdot G} = 1 + 9 + 7 + 7$$

$$(IV) (\sqrt[5]{\text{GAUSS}})^C = \sqrt[5]{\text{GAUSS}}$$

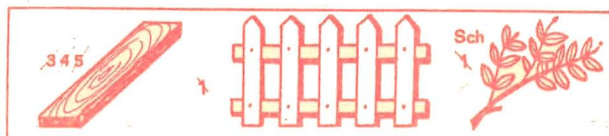
Rösselsprung

mit Ausspruch von C. F. Gauß

tun	Nichts	was
et-	tan	übrig
ist	zu	noch
wenn	ist	ge-

Bilderrätsel

K. Koch



Krypto-Arithmetik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

DrCFGauß · D · ß = DDDDDDDDD

DrCFGauß · r · ß = r r r r r r r r r r

DrCFGauß · C · ß = CCCCCCCCC

DrCFGauß · F · ß = F F F F F F F F F F

DrCFGauß · G · ß = G G G G G G G G G G

DrCFGauß · a · ß = a a a a a a a a a a

DrCFGauß · u · ß = u u u u u u u u u u

DrCFGauß · ß · ß = ß ß ß ß ß ß ß ß ß ß

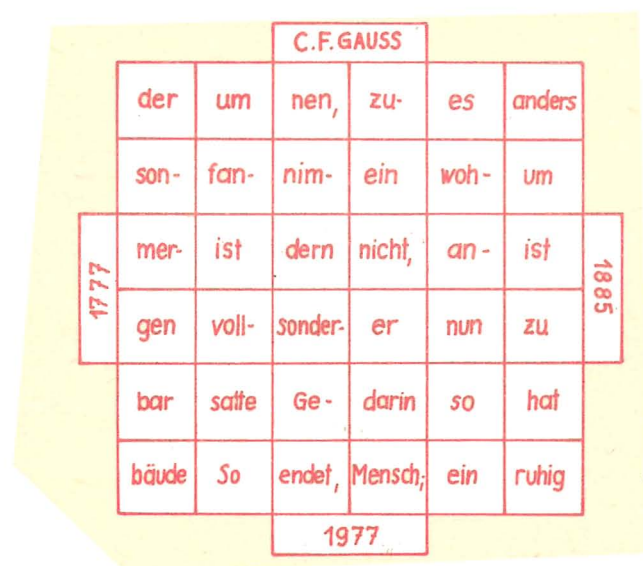
C. F. Gauß erwarb 1799 die Doktorwürde an der damaligen Landesuniversität Helmstedt. Professor Pfaff war von der Dissertation, die den ersten strengen Beweis für den sogenannten Fundamentalsatz der Algebra lieferte, so begeistert, daß die Promotion in Abwesenheit erfolgte.

K. Koch

Rösselsprung

mit Zitat von C. F. Gauß

K. Koch

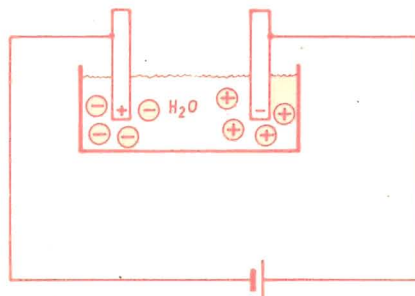


Ein „geschmecktes“ Telegramm

Am 9. August 1834 wurde in den Göttingischen gelehrten Anzeigen die Erfindung eines elektromagnetischen Telegraphen durch die Professoren Gauß und Weber bekannt gemacht. Weniger bekannt ist die Idee eines elektrochemischen Telegraphen von Gauß, der den Geschmack zur Zeichengebung benützt und auf der Zerlegung des Wassers beruht (Elektrolyse). Gauß schreibt darüber 1835: „Eine ganz artige Entdeckung oder Bemerkung habe ich vor etwa sechs Wochen gemacht, daß man den Sinn (ob + oder —) eines galvanischen Induktionsimpulses ganz bestimmt

mit den Lippen unterscheiden kann, so daß wir zum Spaß schon so telegraphiert haben, daß die Depesche aufgeschmeckt wurde.“

Dr. R. Thiele, Leipzig



Wie viele Möglichkeiten?

Auf wie viele Arten läßt sich der Name C. F. Gauß von der Mitte C aus nach den vier Ecken ß lesen?

ß u a u ß

R. Thiele

u a G a u

a G F G a

G F C F G

a G F G a

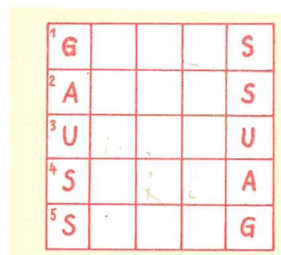
u a G a u

ß u a u ß

Kreuzworträtsel

1. Genialer deutscher Mathematiker
2. Bogenmaß eines Winkels
3. Bauliche Veränderung
4. Maßeinteilung, z. B. auf dem Rechenstab
5. Nachlässige Umgangssprache

D. Völzke, Greifswald



Frontseite der Gauß-Weber-Medaille



Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1977



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden. Format A 4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 5 ■ 1622 Zwei Boote fahren auf einem Fluß stromaufwärts. Sie sind gegenwärtig 6 km voneinander entfernt. Nachdem das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot in der gleichen Zeit nur 3 km zurückgelegt.

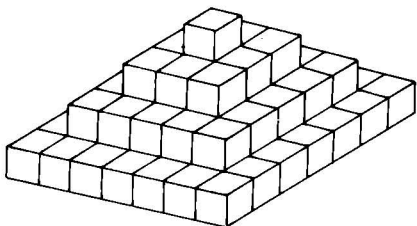
- Welchen Abstand haben die beiden Boote nun noch voneinander?
- Wieviel Kilometer müßte das hintere Boot noch zurücklegen, um das vordere einzuholen, wenn beide Boote jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit weiterfahren?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1623 In einem Park soll eine rechteckige Rasenfläche von 12 m Breite und 25 m Länge von einem 2 m breiten Weg umsäumt werden. Dieser Weg soll mit quadratischen Platten von 50 cm Seitenlänge belegt werden. Wieviel solcher Platten werden dazu benötigt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1624 Auf einem Tisch steht, wie aus dem Bild ersichtlich, eine aus 84 gleichgroßen Würfeln gebaute „Pyramide“. Die unterste quadratische Schicht besteht aus $7 \cdot 7 = 49$ Würfeln, die zweite aus $5 \cdot 5 = 25$ Würfeln, die



dritte aus $3 \cdot 3 = 9$ Würfeln und die vierte aus nur einem Würfel. Wie viele quadratische Begrenzungsflächen sind zu sehen, wenn man die Pyramide von oben und von allen Seiten betrachtet?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1625 In einer Ebene sind vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 so zu zeichnen, daß sie

- genau 3 Schnittpunkte,
- genau 4 Schnittpunkte,
- genau 5 Schnittpunkte haben.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1626 Eine zwei Meter lange Kette besteht aus lauter gleichgroßen ringförmigen Gliedern. Der äußere Durchmesser eines solchen Ringes beträgt 2,4 cm; die Stärke jedes Ringes beträgt 2,5 mm. Aus wieviel Gliedern (Ringern) ist diese Kette zusammengesetzt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1627 Der sechste Teil der Anzahl der Aufgaben einer Klassenarbeit im Fach Mathematik waren Geometriaufgaben, der dritte Teil Gleichungen und die Hälfte Knobelaufgaben. Peter löste insgesamt vier Aufgaben, das waren zwei Drittel der Anzahl aller gestellten Aufgaben. Wieviel Geometriaufgaben, Gleichungen bzw. Knobelaufgaben waren insgesamt zu lösen?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ■ 1628 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{O P A} \\ + \text{O M A} \\ \hline \text{P A A R} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Sch.

Ma 6 ■ 1629 Jeder von zwei befreundeten Schülern hat sich in einer Bibliothek ein Buch mit dem gleichen Titel ausgeliehen. Nachdem der erste von ihnen 150 Seiten und der zweite 350 Seiten gelesen hatte, stellten sie fest, daß der erste bis zum Durchlesen des Buches noch dreimal so viele Seiten zu lesen hatte wie der zweite. Wieviel Seiten umfaßt dieses Buch?

Fachlehrer Dieter Knappe, Jessen

Thies LuAher, 26 Güstrow, Werdersstr. 22		Ma 7 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

Ma 6 ■ 1630 Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang dieses Dreiecks sei um 35 cm länger als die längste Dreiecksseite. Wie lang ist jede der drei Seiten dieses Dreiecks? Sch.

Ma 6 ■ 1631 Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen natürlichen Zahl, so erhält man eine um 9 größere Zahl als die ursprüngliche. Wie viele Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt es, und wie lauten sie? Schülerin Heidrun Stengel, Dautzschen

Ma 6 ■ 1632 Gegeben sind zwei Geraden g und h , die in derselben Ebene liegen, und nicht parallel zueinander verlaufen. Es ist eine dritte Gerade k zu konstruieren, die die Gerade g in einem Punkte P und die Gerade h in einem Punkte Q derart schneidet, daß $\overline{PQ} = e = 3$ cm gilt und daß der von den Geraden g und k eingeschlossene Winkel 60° beträgt. Sch.

Ph 6 ■ 16 Zwei Spiegel schließen miteinander den Winkel α ein. Bei der Reflexion an beiden Spiegeln ist der ausfallende Strahl gegenüber dem einfallenden um $360 - 2\alpha$ verdreht. Dies ist zu beweisen.



Ma 7 ■ 1633 Heinz fuhr mit seinem Fahrrad vom Ort A nach dem Ort B. Als er zwei Drittel des Weges zurückgelegt hatte, platzte ein Reifen. Den restlichen Weg legte er zu Fuß zurück.

Für den Fußmarsch benötigte er doppelt so viel Zeit wie für die bisherige Fahrt mit dem Fahrrad. Wie verhält sich die Geschwindigkeit während des Radfahrens zur Geschwindigkeit während des Fußmarsches, wenn beide Geschwindigkeiten konstant waren? Schüler Norbert Albrecht, Schweina

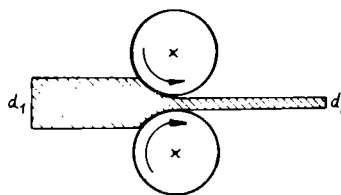
Ma 7 ■ 1634 Die Summe aus drei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c mit $a < b < c$ beträgt 54. Die Zahl b ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Zahlen a und c . Jede dieser drei Zahlen ist ein Vielfaches von 6. Wie viele Lösungen besitzt diese Aufgabe? Wie heißen diese Zahlen? Fachlehrer Dieter Knappe, Jessen

Ma 7 ■ 1635 Addiert man 6 zum k -fachen einer natürlichen Zahl n , so erhält man das gleiche, als wenn man 6 vom $2k$ -fachen dieser natürlichen Zahl subtrahiert. Welche natürlichen Zahlen k und n erfüllen diese Bedingungen? Schülerin Manuela Wiemuth, Weißenborn-Lüderode

Ma 7 ■ 1636 Es sind alle sechsstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

- die Zahl, die der Ziffer der Einerstelle entspricht, ist größer als 3.
- Streicht man die Ziffer der Einerstelle und setzt man diese Ziffer links vor die verbleibende fünfstellige Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl. Sch.

Ph 7 ■ 17 Beim Walzen von Aluminium unterscheiden wir zwischen Arbeits- und Stützwalze. Die Arbeitswalze habe einen Durchmesser von 240 mm, die Stützwalze von 560 mm; die Bandgeschwindigkeit betrage $350 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Wie viele Umdrehungen je Minute machen in diesem Fall Arbeits- und Stützwalze? Dipl.-Lehrer E. Knauth, OS Rackwitz



Ch 7 ■ 13 In einem Hochofen sollen 1200 t Roheisen hergestellt werden.

- Der Kühlwasserverbrauch beträgt, auf eine hergestellte Tonne Roheisen berechnet, 30 bis 65 m^3 . Wieviel Kubikmeter Wasser werden zur Kühlung benötigt?
- Wieviel Tonnen Kohlenmonoxid sind erforderlich, wenn Eisen(II, III)-oxid reduziert werden soll?
- Wieviel Tonnen Kohlenstoff sind bereitzustellen?

Ma 8 ■ 1637 Wenn man zum Zähler und zum Nenner einer gebrochenen Zahl jeweils den Nenner addiert, so ist das Ergebnis neunmal so groß wie die ursprüngliche gebrochene Zahl. Um welche Zahl handelt es sich? Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 8 ■ 1638 Gegeben seien drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3 . Der Abstand zwischen g_1 und g_2 betrage 1 cm, zwischen g_2 und g_3 2 cm und zwischen g_1 und g_3 3 cm. Es ist ein Dreieck ABC mit den Innenwinkeln $\angle BAC = \alpha = 30^\circ$ und $\angle ACB = \gamma = 50^\circ$ so zu konstruieren, daß A auf g_1 , B auf g_2 und C auf g_3 liegt. Die Konstruktion ist zu begründen! Lehrer Adalbert Schatz, Leipzig

Ma 8 ■ 1639 In der inoffiziellen Länderwertung der Olympischen Sommerspiele 1976 in Montreal belegte die DDR mit 638 Punkten hinter der siegreichen UdSSR den zweiten Platz. Dabei wurden für eine Goldmedaille 7 Punkte, für eine Silbermedaille 5 Punkte, für eine Bronzemedaille 4 Punkte, für einen 4., 5. bzw. 6. Platz jeweils 3, 2 bzw. 1 Punkt vergeben. Für 40 Goldmedaillen und die Anzahl der 6. Plätze erhielt die DDR zusammen 294 Punkte. Die Anzahl der erworbenen Silbermedaillen, Bronzemedaillen und 4. Plätze war gleich groß. Die Anzahl der 5. Plätze war größer als 20, aber kleiner als die Anzahl der 4. Plätze. Wieviel Silber- und Bronzemedaillen, vierte, fünfte und sechste Plätze errang die DDR? Mathematikfachlehrer Wilfried Adler, EOS Neugersdorf

Ma 8 ■ 1640 Frank fragte Andreas nach der Kraftfahrzeugnummer des PKW seines Vaters. Andreas erwiderte scherzhaft: „Die erste Ziffer der vierstelligen Zahl ist gleich der zweiten Ziffer, die dritte ist gleich der vierten. Außerdem ist die Kraftfahrzeugnummer eine Quadratzahl. Nun finde sie selbst.“ Schülerin Hilkka Wenzel, Dresden

Ph 8 ■ 18 Ein Kupferseil besteht aus sieben Einzeldrähten von je 1,6 mm Durchmesser. a) Wie groß ist der gesamte Widerstand des Seils bei einer Länge von 1000 m?

b) Aus dem Seil wird eine Doppelleitung hergestellt, die am Anfang eine Spannung von $U_1 = 220 \text{ V}$ aufweist.

Wie groß wird die Spannung U_2 am Leitungsende sein, wenn durch den Leiter ein Strom von 10 A fließt?

c) Welche Stromstärke I_K wird diese Doppelleitung aufnehmen, wenn an ihrem Ende ein Kurzschluß auftritt? H. B.

Ch 8 ■ 14 Berechne, wieviel Kubikmeter Äthin man aus 2 g; 3,4 g; 6,6 g Kalziumkarbid herstellen kann!

Ma 9 ■ 1641 Für welches n ist die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ genau fünfmal so groß wie die Summe $1 + 2 + 3 + \dots + n$ dieser Zahlen? Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 1642 Man beweise, daß für alle konvexen Fünfecke $ABCDE$

$$2p > u > \frac{1}{2}p \text{ gilt.}$$

Dabei ist u der Umfang und p die Summe aus den Längen aller Diagonalen des Fünfecks. Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 1643 Ein Raum soll mit 12 Glühlampen so ausgestattet werden, daß sich eine Gesamtleistung von 720 Watt ergibt. Es stehen Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W in beliebiger Anzahl zur Verfügung. Wieviel Glühlampen zu 40 W, 60 W und 75 W werden benötigt, wenn Glühlampen mit jeder dieser unterschiedlichen Leistungen verwendet werden? Sch.

Ma9 ■1644 Es ist nachzuweisen, daß die Zahl $z = \frac{n^5}{120} + \frac{n}{30} - \frac{n^3}{24}$ für jede natürliche Zahl n ebenfalls eine natürliche Zahl ist!

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ph9 ■19 Förderkörbe besitzen Fangvorrichtungen. Diese greifen beim Reißen des Seils sofort ein. Ein Bremsversuch ergab, daß ein 25 Mp schwerer Förderkorb nach 4,5 m zum Stillstand kam. Bei welcher Geschwindigkeit griffen die Fänger ein, wenn die Bremskraft der Fangvorrichtung 65000 kp beträgt?

H. B.

Ch9 ■15 Wieviel Stärke muß verwendet werden, wenn bei der Spaltung 260 kg Glukose entstehen sollen und nur 95% des Ausgangsstoffes umgesetzt werden?

Ma10/12 ■1645 Es ist nachzuweisen, daß die Volumina eines geraden Kreiskegels, einer Kugel und eines geraden Kreiszylinders, die einem Würfel einbeschrieben sind, sich wie 1:2:3 verhalten.

Ma10/12 ■1646 Man ermittle alle Paare (x, y) von reellen Zahlen x und y , für die die Gleichung $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ erfüllt ist!

Ma10/12 ■1647 Man ermittle alle reellen Zahlen x , für die gilt

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

Ma10/12 ■1648 Für welche reellen Zahlen a, b ist $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$?

Ph10/12 ■20 Das geschmolzene Aluminium wird in Behältern von kegelstumpfförmiger Gestalt transportiert, die folgende Innenmaße besitzen:

$d_1 = 1000$ mm, $d_2 = 1130$ mm, $h = 1150$ mm.

a) Es ist der Flächeninhalt (Innenseite) des Behälters zu berechnen, der mit Schamottsteinen ausgekleidet ist.

b) Welches Füllvolumen besitzt dieser Behälter, wenn er bis zu einer inneren Höhe von 50 cm mit flüssigem Aluminium gefüllt ist?

Ch10/12 ■16 Durch quantitative Fällung aus 10 ml Schwefelsäure wurden 0,4669 g weißes Bariumsulfat erhalten. Wieviel Mol sind in einem Liter der untersuchten Schwefelsäure enthalten?

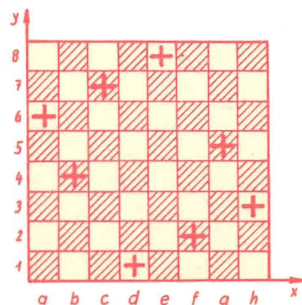
alpha-Wettbewerb

Mit Heft 5/76 gingen zum alpha-Wettbewerb über 24000 Lösungen ein, das ist neuer Rekord. In Heft 6/76 und 1/77 wurden versehentlich gleiche Aufgabennummern verwendet.

Die Redaktion

Gauß und das 8-Damen-Problem

Aufgabe: Es sind acht Königinnen so auf dem Schachbrett aufzustellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.



Eine der herausragenden Fähigkeiten von C. F. Gauß war es, scheinbar zusammenhanglose Dinge in Verbindung zu bringen. Das zeigt sich selbst bei kleinen Problemen. 1850 hatte Nauck die Aufgabe gestellt, acht Damen auf dem Schachbrett so aufzustellen, daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Nauck gab 60 Lösungen an. Gauß benutzte zur Lösung des Problems komplexe Zahlen und fand 72 Varianten. Insgesamt gibt es 92 Lösungen, die sich aus 12 Grundlösungen durch Drehungen und Spiegelungen des Bretts herleiten lassen. Aus jeder Grundstellung lassen sich acht Lösungen ableiten. Bei der gezeichneten Lösung (und nur bei dieser!) unterscheiden sich jedoch einige der abgeleiteten Lösungen nicht, so daß es nur 92 anstatt $8 \cdot 12 = 96$ Lösungen gibt.

Mitgeteilt von R. Thiele, Leipzig

Lösung: 1. Durch systematisches Probieren kann man sämtliche Lösungen finden. Dabei hat sich folgende Methode als brauchbar erwiesen: Man hat 8 Figuren – die Damen – und ein Schachbrett vor sich, die senkrechten Spalten (Linien) a bis h von links nach rechts, die waagerechten Zeilen (Reihen) 1 bis 8 von unten nach oben. Zunächst stellt man eine Dame auf die a-Spalte, aber nur so hoch wie unbedingt erforderlich, d. h. zunächst auf a1. Die zweite Dame stellt man auf die b-Spalte, ebenfalls nur so hoch wie unbedingt erforderlich, um die zuvor hingestellte Dame nach den Regeln der Dame-Gangart im Schach nicht zu bedrohen, also auf b3. Die nächsten Damen stellt man in gleicher Weise der Reihe

nach auf die c-, d-, usw. Spalte, jeweils nur so hoch wie gerade erforderlich, um keine der vorher hingestellten Damen zu bedrohen. Auf diese Weise braucht man beim Stellen der einzelnen Damen nur deren drei Schlagrichtungen nach links zu verfolgen, siehe Bild 1.

In der f-Spalte ergibt sich erstmalig der Fall, daß keine Dame mehr hingestellt werden kann. Dann muß die vorangehende Dame höher geschoben werden, aber wieder nur so weit wie unbedingt erforderlich, hier also bis e8. Aber auch so läßt sich in der f-Spalte keine Dame mehr unterbringen. Daher muß die Dame der e-Spalte noch höher geschoben werden, und da dies nicht möglich ist, muß sie zunächst ganz entfernt und die Dame der vorangehenden d-Spalte höher geschoben werden, usw. – siehe Bild 2 –, ganz systematisch, bis alle 8 Damen zum Stehen kommen, ohne sich gegenseitig zu bedrohen.

So findet man als erste die Lösung a1, b5, c8, d6, e3, f7, g2, h4. Und wenn man in beschriebener Weise fleißig und systematisch fortfährt, so findet man schließlich alle 92 Lösungen des Problems. In der Tabelle sind nur die Zeilen der Lösungen angegeben, die Buchstaben der Spalten jeweils von a bis h sind zur Vereinfachung fortgelassen.

V. Beyer

Bild 1

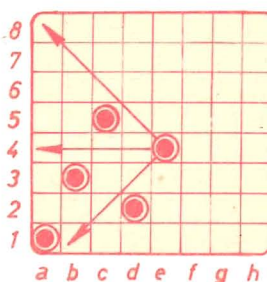
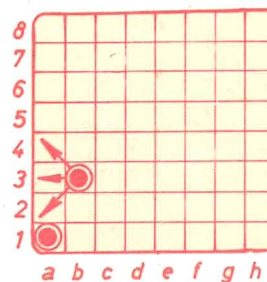
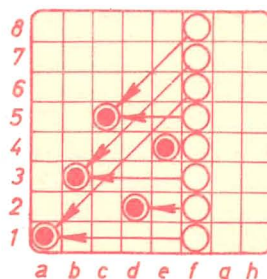
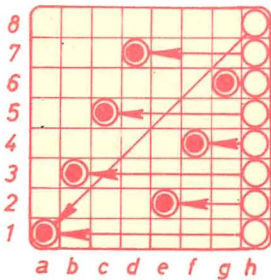
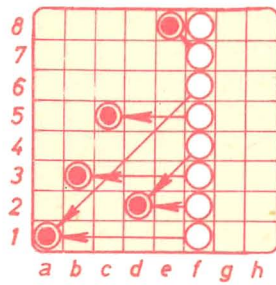


Bild 2





**Tabelle der 92 Lösungen
des Acht-Damen-Problems**

abcde fgh	Nr.	abcde fgh	Nr.
15863724	E-4	51468273	A-7
16837425	F-2	51842736	L-6
17468253	F-5	51863724	J-8
17582463	E-7	52468317	C-5
24683175	D-5	52473861	F-6
25713864	G-1	52617483	D-4
25741863	L-3	52814736	K-1
26174835	H-4	53168247	G-3
26831475	A-4	53172864	B-1, B-3
27368514	C-8	53847162	H-8
27581463	J-1	57138642	D-1
28613574	C-7	57142863	I-5
31758246	H-7	57248136	K-2
35281746	B-6, B-8	57263148	E-2
35286471	F-1	57263184	J-6
35714286	H-5	57413862	A-8
35841726	I-2	58413627	C-6
36258174	K-3	58417263	G-2
36271485	G-6	61528374	D-2
36275184	L-8	62713584	A-5
36418572	J-5	62714853	I-6
36428571	E-3	63175824	I-7
36814752	L-7	63184275	K-6
36815724	K-4	63185247	L-1
36824175	I-1	63571428	E-5
37285146	I-4	63581427	J-3
37286415	A-3	63724815	L-2
38471625	D-8	63728514	G-4
41582736	G-8	63741825	K-5
41586372	C-4	64158273	I-8
42586137	A-2	64285713	H-3
42736815	J-4	64713528	F-7
42736851	E-8	64718253	B-2, B-4
42751863	K-8	68241753	H-1
42857136	I-3	71386425	C-1
42861357	D-7	72418536	J-7
46152837	H-2	72631485	C-2
46827135	B-5, B-7	73168524	A-6
46831752	G-5	73825164	H-6
47185263	K-7	74258136	L-5
47382516	D-6	74286135	G-7
47526138	F-4	75316824	D-3
47531682	C-3	82417536	E-1
48136275	J-2	82531746	F-3
48157263	L-4	83162574	F-8
48531726	A-1	84136275	E-6

2. Hat man mit dieser Methode oder irgendwie anders eine Lösung gefunden, so lassen sich im allgemeinen Fall daraus noch 7 weitere Lösungen ableiten: da man die gefundene Lösung von vier Seiten betrachtet und von jeder dieser vier Seiten aus auch noch ein Spiegelbild konstruieren kann, hat man jeweils acht Lösungen auf einen Schlag – siehe Bild 3.

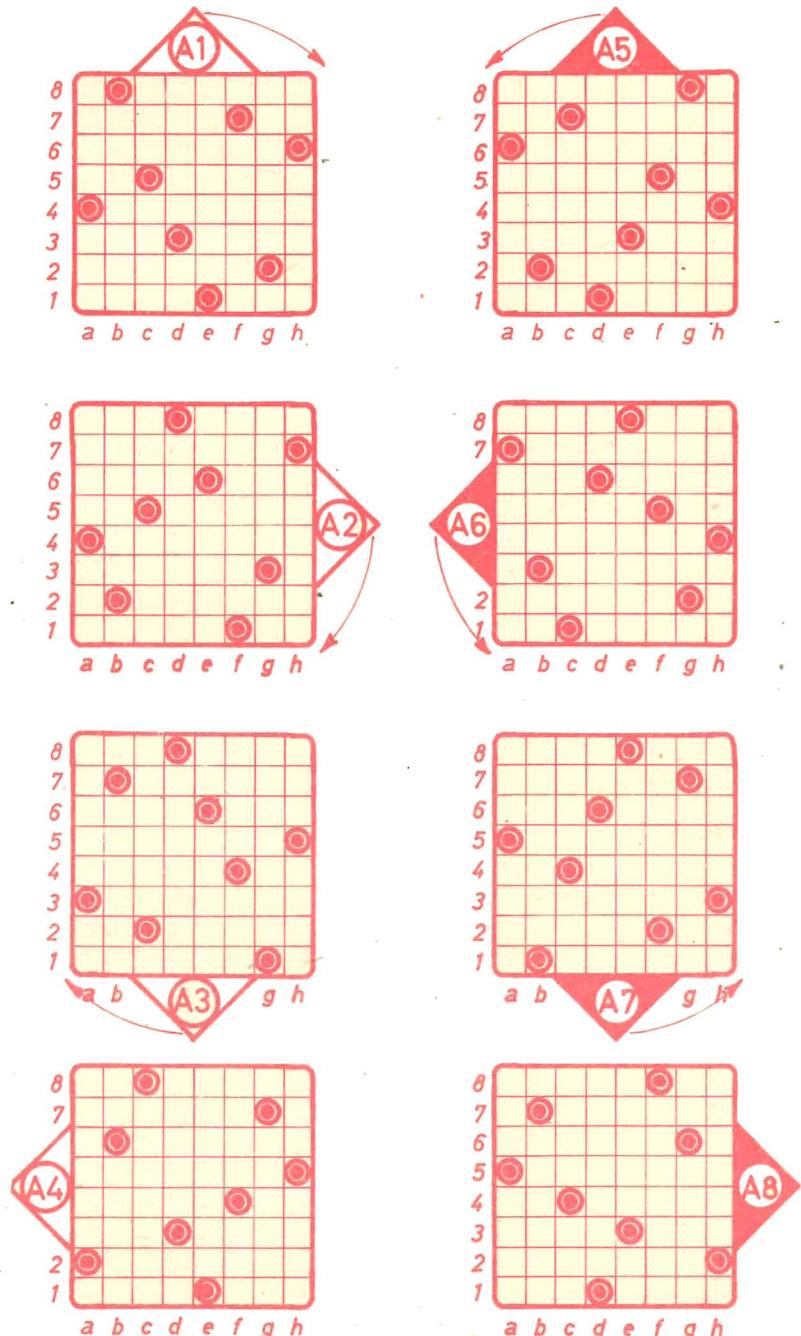
3. Lösungen, die sich nicht, wie unter 2. beschrieben, auseinander gewinnen lassen, sollen voneinander unabhängige Lösungen heißen. Es gibt insgesamt 12 solche voneinander unabhängige Lösungen. Aus 11 davon lassen sich, wie unter 2. beschrieben, je 7 weitere Lösungen ableiten. Eine aber ist in Bezug auf

das Schachbrett symmetrisch, deshalb lassen sich daraus nur noch 3 weitere Lösungen ableiten. Insgesamt ergeben sich somit $11 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 92$ Lösungen, siehe Tabelle.

4. Bei der Herleitung der obigen Lösungsmethode ist davon auszugehen, daß die Unterscheidung von schwarzen und weißen Feldern auf dem Schachbrett für die Lösung des vorliegenden Problems belanglos ist; daß jede Lösung voraussetzt, daß auf jeder Spalte und auf jeder Zeile genau eine Dame steht; daß die eigentlichen Schwierigkeiten des Problems erst aus der notwendigen Berücksichtigung der Diagonalen in beiden Richtungen erwachsen.

Fortsetzung des Beitrags: Seite 48

Bild 3 Aus Lösung A1 lassen sich 7 weitere Lösungen ableiten



Quadratische Reste

Teil 2

Satz 11: Für alle Primzahlen von einer der Formen $24m+13$, $24m+17$, $24m+19$, $24m+23$ ist -6 Nichtrest. Für die Primzahl 7 kann man folgendes beweisen:

Satz L: Für alle Primzahlen von einer der Formen $28m+1$, $28m+3$, $28m+9$, $28m+19$, $28m+25$, $28m+27$ ist 7 quadratischer Rest.

Satz M: Für alle Primzahlen von einer der Formen $28m+5$, $28m+11$, $28m+13$, $28m+15$, $28m+17$, $28m+23$ ist 7 Nichtrest. Hieraus kann man entsprechende Resultate für -7 herleiten. Aus Satz F folgt: -7 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen p , für die gilt

a) $-1Rp$ und $7Rp$ oder b) $-1Np$ und $7Np$.

Es gilt $-1Rp$, falls p die Form $4m+1$ hat; $7Rp$, falls p eine der Formen $28m+1$, $28m+3$, $28m+9$, $28m+19$, $28m+25$, $28m+27$ hat.

Hieraus folgt

$-7Rp$, falls p eine der Formen $28m+1$, $28m+9$, $28m+25$ hat. Es ist $-1Np$, falls p die Form $4m+3$ hat; $7Np$, falls p eine der Formen $28m+5$, $28m+11$, $28m+13$, $28m+15$, $28m+17$, $28m+23$ hat. Dies ergibt: $-7Rp$, falls p eine der Formen $28m+11$, $28m+15$, $28m+23$ hat.

Die Primzahlen der Formen $28m+1$, $28m+9$, $28m+11$, $28m+15$, $28m+23$ oder $28m+25$ sind genau die der Form $7m+1$, $7m+2$ oder $7m+4$.

Satz 12: Für alle Primzahlen der Form $7m+1$, $7m+2$, $7m+4$ ist -7 quadratischer Rest.

Satz 13: Für alle Primzahlen der Form $7m+3$, $7m+5$ oder $7m+6$ ist -7 Nichtrest.

Aus den bisherigen Ergebnissen kann man mit Hilfe von Satz F z. B. für die Zahl 21 herleiten, für welche Primzahlen sie quadratischer Rest ist und für welche Nichtrest. Man sieht, daß genau für die Primzahlen von einer der Formen $21m+1$, $21m+4$, $21m+5$, $21m+16$, $21m+17$, $21m+20$ die Zahl 21 quadratischer Rest ist, während 21 Nichtrest für die Primzahlen einer der Formen $21m+2$, $21m+8$, $21m+10$, $21m+11$, $21m+13$, $21m+19$ ist. Versucht, das nachzuprüfen!

Für die Primelemente $+2$, -2 , $+3$, -3 , $+5$, -5 , $+7$, -7 haben wir alle Primzahlen gefunden, für die sie quadratische Reste sind.

Welches Gesetz gilt nun aber allgemein? Scheint es nicht immer komplizierter zu werden, die Primzahlen zu charakterisieren, für die ein gegebenes Primelement quadratischer Rest ist? Sehen wir uns noch einmal die Ergebnisse an. Sie sind besonders einfach für -3 , 5 , -7 :

-3 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen der Form $3m+1$. 5 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen der Formen $5m+1$ oder $5m+4$.

-7 ist quadratischer Rest genau für alle Primzahlen der Formen $7m+1$ oder $7m+2$ oder $7m+4$.

(Aus den Ergebnissen über -3 , 5 , -7 lassen sich mittels Satz A und Satz F Resultate über $+3$, -5 , $+7$ gewinnen.)

Lassen sich die hier jeweils auftretenden Primzahlen nicht eventuell anders charakterisieren, so daß sie alle eine gemeinsame Eigenschaft bezüglich des vorgegebenen Primelements besitzen? Das ist möglich!

Die Primzahlen der Form $3m+1$ sind genau die, die quadratische Reste von 3 sind (weil $1R3, 2N3$).

Die Primzahlen der Formen $5m+1$, $5m+4$ sind genau die, die quadratische Reste von 5 sind (weil $1R5, 2R5, 2N5, 3N5$).

Wir können also formulieren:

-3 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, die quadratische Reste von 3 sind.

5 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, die quadratische Reste von 5 sind.

-7 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, die quadratische Reste von 7 sind.

Ähnliche Resultate könnte man für -11 , 13 , 17 , -19 , -23 , 29 , -31 , 37 , 41 , -43 , -47 , 53 , -59 , 61 , -67 , -71 , 73 , -79 , -83 , 97 , ... finden.

Man erkennt, daß die Primzahlen unter diesen, die die Form $4m+1$ haben, mit positivem Vorzeichen, diejenigen hingegen, welche die Form $4m+3$, mit negativem Vorzeichen versehen vorkommen.

Allgemein gilt der folgende Satz N, der hier nicht bewiesen werden kann.

Satz N: (Quadratisches Reziprozitätsgesetz) Ist p eine Primzahl von der Form $4m+1$, dann gilt

$+p$ ist quadratischer Rest aller Primzahlen, welche quadratische Reste von p sind;

$+p$ ist Nichtrest aller Primzahlen, welche Nichtreste von p sind.

Ist q eine Primzahl von der Form $4m+3$, dann gilt:

$-q$ ist quadratischer Rest aller Primzahlen, welche quadratische Reste von q sind;

$-q$ ist Nichtrest aller Primzahlen, welche Nichtreste von q sind. Zusammen mit den Sätzen A und F bekommt man aus diesem Satz auch eine Übersicht darüber, von welchen Primzahlen $-p$ bzw. $+q$ quadratische Reste sind.

Damit hat man dann (wie schon erwähnt)

eine Antwort auf das eingangs gestellte Umkehrproblem.

Warum der Satz als Reziprozitätsgesetz bezeichnet wird, erkennt man gut aus der folgenden Formulierung, die man mittels Satz A unmittelbar aus Satz N bekommt:

Es seien k und l Primzahlen.

Hat eine dieser Primzahlen die Form $4m+1$, so gilt $1Rk$ genau dann, wenn kRl . Sind k , l beide von der Form $4m+3$, so gilt lRk genau dann, wenn kNl .

5. Weil sich überhaupt fast alles, was über quadratische Reste ausgesagt werden kann, auf diesen Satz stützt, gab Gauß ihm die Bezeichnung „Fundamentaltheorem“. Die Bezeichnung „Quadratisches Reziprozitätsgesetz“ stammt von Legendre.

Das Gesetz ist zuerst von Euler entdeckt worden (was erst 1875 von Kronecker bemerkt wurde). Es ist in Abhandlungen aus den Jahren 1744 bis 1746 im Wesentlichen enthalten und in vollendeter Form in einer Arbeit, die Euler 1783 in Petersburg publiziert hat. Später wurde es von Legendre erneut ermittelt und von ihm, jedoch nicht vollständig, bewiesen (1785 und 1798 in Paris publiziert).

Den ersten vollständigen Beweis gab 1796 der 18jährige Gauß (1801 in den „Disquisitiones arithmeticae“ veröffentlicht). Er schreibt darüber: „Auf den Satz kam ich völlig selbstständig im Jahre 1795, zu einer Zeit, da ich mich in völliger Unkenntnis über alles befand, was in der höheren Arithmetik bereits erreicht worden war, und zugleich nicht die mindesten literarischen Hilfsmittel besaß. Ein ganzes Jahr quälte mich dieser Satz und entzog sich den angestrengtesten Bemühungen, bis ich endlich den ... Beweis erlangte.“

Gauß hat das Gesetz also 1795 ohne Kenntnis der Arbeiten von Euler und Legendre entdeckt.

Schon der 15- bis 17jährige Gauß hatte sich zahlreiche Zahlentabellen aufgeschrieben und sich mit rechnerischen Versuchen beschäftigt, die hauptsächlich auf die Teilbarkeit der Zahlen, auf die Eigenschaften der Primzahlen, auf die Reste, welche die Potenzen (speziell also Quadrate) anderer Zahlen durch Primzahlen geteilt lassen, gerichtet gewesen sind. Gauß stellte mit großer Gewandtheit und Ausdauer eine Tabelle auf, die die Primzahlen von 2 bis 997 als Reste in bezug auf die Primzahlen von 3 bis 503 als Teiler enthält. Hierbei mußte über 16000mal untersucht werden, ob eine Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest war!

Das zahlentheoretische Ergebnis seiner Mühe war eben die Erkenntnis seines „Fundamentaltheorems der quadratischen Reste“. Zuerst (Anfang des Jahres 1795) bemerkte er eine Gesetzmäßigkeit für den quadratischen Charakter von -1 :

-1 ist quadratischer Rest von allen Prim-

zahlen der Form $4m + 1$, und Nichtrest von allen Primzahlen der Form $4m + 3$. Er suchte die tieferen Gründe für dieses Verhalten und fand aus diesen bald den Beweis. Bereits im März 1795 entdeckte er aus seinem numerischen Beobachtungsmaterial, aus den Zahlentabellen, induktiv auch das *Quadratische Reziprozitätsgesetz*.

„Daß *Gauß* sich zu Beginn seiner Forscher-tätigkeit mit umfangreichen Zahlenrechnungen beschäftigte, ist nicht verwunderlich. Die Mathematiker der damaligen Zeit waren vielfach Empiriker; sie ermittelten neue Sätze und Eigenschaften von Zahlen und Funktionen vorwiegend durch Induktion.“ (P. Maennchen: *Gauß als Zahlenrechner*, *Gauß-Werke X*, 2. Abh. 6.)

Gauß schreibt: „Das Fundamentaltheorem über die quadratischen Reste, welches zu den schönsten Wahrheiten der höheren Arithmetik zu rechnen ist, wurde durch Induktion entdeckt, allein sein Beweis war außerordentlich schwierig.“

In diesem Zweige der Mathematik geschieht es häufig, daß sich dem Forscher einfache Wahrheiten durch Induktion von selbst aufdrängen, daß aber ihre Beweise sehr tief versteckt sind und erst nach vielen vergeblichen Versuchen, auf einem ganz anderen Wege als man sie vermutete, ans Licht gezogen werden können. Ferner geschieht es nicht selten, daß, wenn erst ein Weg aufgefunden ist, sich dann mehrere öffnen, die zu demselben Ziele führen; einige kürzer und direkter, andere gewissermaßen von der Seite her und aus so verschiedenen Prinzipien entspringend, daß man kaum eine Verbindung zwischen ihnen und der vorgelegten Frage vermutet haben würde. Dieser merkwürdige Zusammenhang zwischen versteckten Wahrheiten leiht solchen Betrachtungen nicht nur einen eigentümlichen Reiz, sondern verdient auch deshalb eifrig durchforscht und ergründet zu werden, weil aus ihm nicht selten neue Hilfsmittel oder Bereicherungen der Wissenschaft selbst fließen.“

Am 8. April 1796 fand *Gauß* seinen ersten Beweis des *Fundamentaltheorems der quadratischen Reste*. Er beruht auf der Methode der vollständigen Induktion und operiert völlig innerhalb der Begriffsbildungen der Theorie der quadratischen Reste.

Gauß gab noch sechs weitere Beweise des Gesetzes, die auf sehr verschiedenen Grundlagen (quadratische Formen, höhere Kongruenzen, Gaußsches Lemma, Kreisteilung) beruhen. Seitdem sind nahezu hundert andere Beweise von Mathematikern wie *Cauchy*, *Jacobi*, *Eisenstein*, *Kummer*, *Zolotareff*, *Kronecker*, *Dedekind*, *Hilbert* u. a. gegeben worden. Es handelt sich (nach *Hasse*) meistens nur um Varianten der Gaußschen Beweise. Es sei bemerkt, daß das *Quadratische Reziprozitätsgesetz* ein wesentliches Bindeglied zwischen elementarer und algebraischer Zahlentheorie darstellt. Die Beschäftigung mit

den entsprechenden Fragestellungen ist richtungsgebend bis in die heutige Zeit gewesen. Zunächst lag die Frage nahe, ob nicht auch ähnliche Gesetzmäßigkeiten bestehen, wenn man statt der quadratischen Reste die n -ten Potenzreste für Exponenten $n > 2$ nimmt (statt Quadratzahlen x^2 betrachtet man n -te Potenzen x^n). Es zeigt sich, daß man für die Verallgemeinerung des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes auf die n -ten Potenzreste nicht nur die Zahlentheorie der ganzen und rationalen Zahlen benötigte, sondern allgemeiner eine Arithmetik der algebraischen Zahlen. Es entstand eine arithmetische Theorie der sogenannten algebraischen Zahlkörper. Die Grundlagen der sog. Abelschen algebraischen Zahlkörper (Klassenkörpertheorie) wurden um 1930 mit dem von *Takagi*, *Furtwängler* und *Artin* bewiesenen allgemeinen Reziprozitätsgesetz (das Quadratische Reziprozitätsgesetz ist ein Spezialfall dieses allgemeinen Gesetzes) abgeschlossen. Die Theorie wurde von *Hasse*, *Chevalley*, *Šafarevič*, *Serre*, *Tate* u. v. a. ausgebaut. Gegenwärtig stehen die nichtabelschen Zahlkörper im Brennpunkt der Forschung der

algebraischen Zahlentheorie. Ziel ist ein Reziprozitätsgesetz für diese Zahlkörper.

6. Wir geben nun noch einige Ergebnisse der elementaren Zahlentheorie an, bei deren Beweis das Quadratische Reziprozitätsgesetz benutzt wird.

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $10k - 1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Mit anderen Worten, es gibt unendlich viele Primzahlen, deren letzte Ziffer 9 ist.

(2) Jede Primzahl p der Form $6m + 1$ ist in der Form

$$p = 3x^2 + y^2$$

mit natürlichen Zahlen x, y darstellbar.

(Beispiele: $7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2$, $13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2$, $19 = 3 \cdot 1^2 + 4^2$, $31 = 3 \cdot 3^2 + 2^2$, $37 = 3 \cdot 2^2 + 5^2$, $43 = 3 \cdot 3^2 + 4^2$, $61 = 3 \cdot 2^2 + 7^2$, $67 = 3 \cdot 1^2 + 8^2$)

(3) Eine ganze Zahl a ist eine Quadratzahl genau dann, wenn aRp für jede Primzahl p ist.

(4) Es gibt keine Lösungen in rationalen Zahlen der Gleichung

$$x^4 - 17 = 2y^2 \text{ (Reichardt-Gleichung).}$$

H. Pieper

Ein eigentümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maß und Harmonie im anscheinend Reglosen.

C. F. Gauß an A. v. Humboldt

Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin.

C. F. Gauß

Du, Natur, bist meine Gottheit. Deinen Gesetzen diene ich.

C. F. Gauß

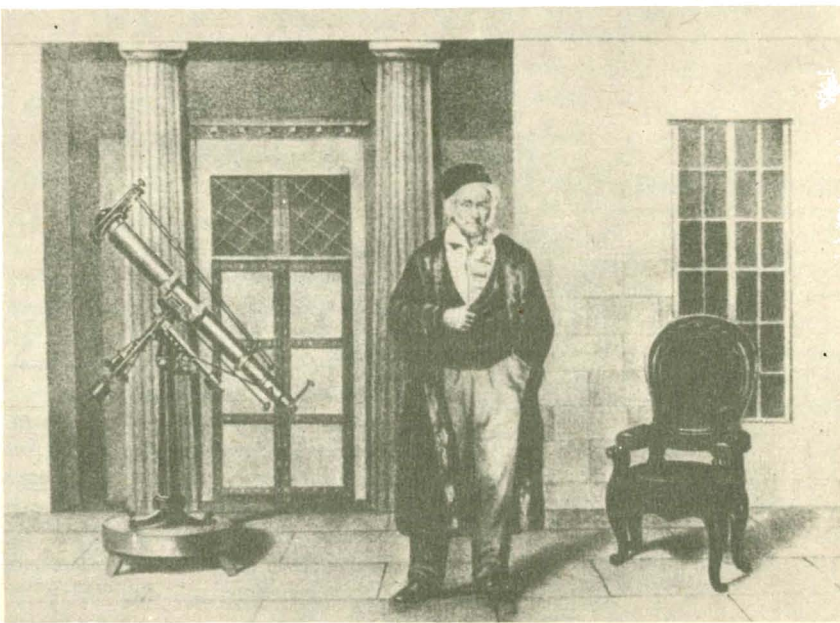
Gauß auf der Terasse der Sternwarte in Göttingen

Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur dann zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf.

C. F. Gauß

Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehen; so sonderbar ist der nimmersatte Mensch, hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um ruhig darin zu wohnen, sondern ein anderes anzufangen.

C. F. Gauß





Versuche mit 10 Münzen

Wenn du eine Münze wirfst, gibt es zwei Möglichkeiten:
Kopf oder Zahl

Bild 1



Nun wirf einmal 10 Münzen! Stelle fest, bei wievielen der Kopf und bei wievielen die Zahl oben liegt! Zeigt die eine Hälfte Kopf, die andere Zahl? Sind alle gleich? Vielleicht zwei das eine und acht das andere oder vier das andere und sechs das eine? Oder ist es irgendwie anders? Schreib es auf, wie viele zeigen Kopf, wie viele Zahl:

Bezeichne diejenige der 4 Zeichnungen im nächsten Bild, die deiner Meinung nach das wahrscheinlichste Ergebnis zeigt, mit 1, die anderen mit 2, 3 oder 4, je nachdem du sie für weniger wahrscheinlich hältst!

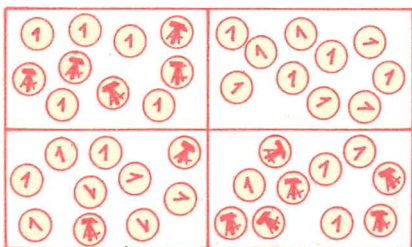


Bild 2

Die Zeichnungen zeigen:

5 Kopf, 5 Zahl	10 Zahl
2 Kopf, 8 Zahl	4 Zahl, 6 Kopf

Bild 3

Im Text haben wir aber folgende Fälle erwähnt:

Bild 4

Zur Hälfte Kopf, zur Hälfte Zahl (also fünfmal Kopf und fünfmal Zahl)	Alle gleich (Das könnte zehnmal Kopf sein)
Zweimal das eine, achtmal das andere (das könnte zweimal Zahl und achtmal Kopf sein).	Viermal das eine, sechsmal das andere (also beispielsweise viermal Kopf und sechsmal Zahl)

Es ist also nicht wichtig, was viermal auftritt (Kopf oder Zahl), sondern daß das eine viermal, das andere aber sechsmal vorkommt. Ist dieser Fall deiner Meinung nach wahrscheinlicher, als daß sowohl fünfmal Kopf als auch fünfmal Zahl oben liegt?

Welcher Fall käme am häufigsten vor, wenn du die Münzen sehr oft würfdest? Wenn du Geduld hast, kannst du es versuchen. Aber wenn du die Münzen nicht oft genug wirfst, kannst du ein anderes Resultat erhalten, als wenn sie sehr oft geworfen werden. Wie kann man feststellen, was nach vielen Würfen zu erwarten ist?

Mit Wahrscheinlichkeitsrechnung!

Wenige Versuche ergeben manchmal ganz andere Ergebnisse als die Rechnung. Bei vielen Versuchen kommt man aber ziemlich genau auf das gleiche Resultat. Vor den Versuchen lohnt es sich immer, darüber nachzudenken, was wir erwarten, nach den Versuchen aber darüber, ob wir erhalten haben, was wir erwarteten, oder etwas anderes, ob unser Ergebnis gesetzmäßig ist oder nur ein außerordentlicher Zufall. Wie können wir begründen, was wir mehr erwarten und was weniger?

1. Aufgabe

Wie oft kommen deiner Meinung nach die erwähnten Fälle vor, wenn du 10 Münzen wirfst? Trage in die folgende Tabelle auch ein, welche Fälle noch möglich wären und wie oft diese Fälle deiner Meinung nach vorkommen könnten! (Schreibe diese Schätzungen unter das Wort „Geraten“!) Mache dann Versuche mit 20 Würfeln, und schreibe die Ergebnisse unter das Wort „Versuche“!

	Geraten	Versuch
Alle zeigen die gleiche Seite		
Fünfmal das eine, fünfmal das andere		
2 und 8		
4 und 6		
Insgesamt	20	20

Bild 5

Wenn du derartige Versuche machst, lohnt es sich, die Ergebnisse in dieser Weise zu notieren: Zuerst schreibst du auf, welche Fälle möglich sind, dann führst du die Versuche aus. Du stellst jedesmal fest, welcher Fall aufgetreten ist und machst dann einen Strich neben diesen Fall in der Strichliste.

Wir haben zwanzigmal geworfen.

Sechsmal davon erhielten wir 5mal Kopf und 5mal Zahl. Siebenmal trat 4mal das eine und 6mal das andere auf. Viermal lag 3mal das eine und 7mal das andere oben. Einmal kam 2mal das eine und 8mal das andere vor. Zweimal war 1mal das eine und 9mal das andere vertreten, und nicht einmal waren alle 10 gleich.

Das haben wir z. B. so notiert:

5 und 5		5 und 5	
4 und 6		4 und 6	
3 und 7		3 und 7	
2 und 8		2 und 8	
1 und 9		1 und 9	
0 und 10		0 und 10	

Bild 6

Bild 7

Streichen wir vier Striche mit dem fünften schräg durch, so fällt es uns am Ende leichter, die Striche zu addieren. (Bild 7)

Bei diesen Versuchen können wir 6 Fälle unterscheiden.

2. Aufgabe

Wieviel verschiedene Fälle gibt es, wenn wir Fälle wie z. B. viermal Zahl und sechsmal Kopf und sechsmal Zahl und viermal Kopf gesondert behandeln? Schreibe auf, was für Fälle du gefunden hast!

Das macht insgesamt ... Fälle.

Die richtige Lösung findest du in einer späteren Aufgabe.

Noch mehr Fälle treten auf, wenn man auch berücksichtigt, auf welcher von den Münzen der Kopf und auf welcher die Zahl oben liegt. Das ist natürlich schwer festzustellen, wenn die Münzen nicht klar voneinander unterscheidbar sind. Du kannst aber einfach unterschiedliche Geldstücke verwenden, die sich voneinander klar unterscheiden (Münzen zu 1, 5, 10, 20 und 50 Pfennigen und zu 1, 2, 5, 10 und 20 Mark; statt so wertvoller Münzen nimm aber lieber ältere, ungültige Geldstücke oder Spielgeld).

Was meinst du, wieviel verschiedene Fälle können nun auftreten? Du brauchst es nicht zu beantworten. Es gibt mehr als 1000 (genau 1024) unterschiedliche Fälle. Die Ergebnisse der Versuche, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen, lassen sich von denen, die diese vielen Fälle gut überblicken, am besten schätzen.

3. Aufgabe

Auf der Grundlage der Resultate bei 20 Würfeln können wir einschätzen, wie oft diese Fälle ungefähr bei 10 oder 100 Würfeln vorkommen können. (Wie groß ist die Häufigkeit bei 10 oder 100 Würfeln?)

Trage deine Schätzung in die folgende Tabelle ein! (Bild 8)

Sieh dir nun einmal diese Schätzung an! (Bild 9)

Die Häufigkeit der 6 Fälle bei 10 oder

Fälle:	5 und 5	4 und 6	3 und 7	2 und 8	1 und 9	0 u. 10
Häufigkeit bei 20 Würfeln	6	7	4	1	2	0
Häufigkeit bei 10 Würfeln						
Häufigkeit bei 100 Würfeln						

Bild 8

Fälle:	5 und 5	4 und 6	3 und 7	2 und 8	1 und 9	0 u. 10
Häufigkeit bei 20 Würfeln	6	7	4	1	2	0
Häufigkeit bei 10 Würfeln	3	3 oder 4	2	0 oder 1	1	0
Häufigkeit bei 100 Würfeln	30	35	20	5	10	0

Bild 9

Fälle:	5 und 5	4 und 6	3 und 7	2 und 8	1 und 9	0 u. 10
Mit diesem Anteil an der Gesamtzahl der Würfe traten die Fälle auf	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$				

Bild 10

Fälle:	5 und 5	4 und 6	3 und 7	2 und 8	1 und 9	10
Bei 20 Würfeln etwa	5	8	5	2	0	0

Bild 11

Fälle:	K 0 u. 10	1 u. 9	2 u. 8	3 u. 7	4 u. 6	5 u. 5	6 u. 4	7 u. 3	8 u. 2	9 u. 1	10 u. 0	Insgesamt
Schätzung												20
Versuch												20

Bild 12

Fälle:	5 und 5	4 und 6	3 und 7	2 und 8	1 und 9	0 u. 10
Mit diesem Anteil an der Gesamtzahl der Würfe traten die Fälle auf	0,3	0,35	0,2	0,05	0,1	0
	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	0
	30%	35%	20%	5%	10%	0%

Bild 13

Fälle:	0 u. 10	1 u. 9	2 u. 8	3 u. 7	4 u. 6	5 u. 5	6 u. 4	7 u. 3	8 u. 2	9 u. 1	10 u. 0
Zu erwarten ist	0	0	1	2,5	4	5	4	2,5	1	0	0

Bild 14

100 Würfeln haben wir auf der Grundlage der Häufigkeit bei 20 Würfeln ausgerechnet.

Fünffmal Kopf und fünffmal Zahl kam bei 20 Würfeln z. B. sechsmal, d. h. in einem Verhältnis von $\frac{3}{10}$ zur Gesamtanzahl der Würfe vor. Als wir nun einschätzen wollten, wie oft bei 10 oder 100 Würfeln der Fall „zur Hälfte Kopf, zur Hälfte Zahl“ auftreten könnte, haben wir uns gesagt, daß dieser Fall sicher immer in einem Verhältnis von $\frac{3}{10}$ zur Gesamtanzahl der Würfe auftreten wird, gleichgültig, wie oft wir werfen.

Rechne aus und trage in die Tabelle ein,

welchen Anteil der gesamten Würfe die anderen Fälle ausmachen! (Bild 10)

(Anstatt $\frac{3}{10}$ kannst du auch 0,3 oder $\frac{30}{100}$ oder 30% schreiben.)

Probiere die Schätzung nun einmal aus! Wirf 10 Münzen, dann noch einmal! Deine Ergebnisse stimmen mit der Schätzung nicht immer überein, nicht wahr? Das ist kein Wunder. Die Versuche einzelner Versuchsserien können recht unterschiedlich sein. Sehr große Unterschiede sind aber selten. Die Mehrzahl der Versuche führt zu ziemlich gleichlautenden Resultaten. Es ist auszurechnen – wir

können es aber noch nicht –, ob in der Mehrheit der Versuche mit 20 Würfeln ungefähr die gleiche oder eine nicht sehr abweichende Verteilung zu erwarten ist. (Bild 11)

4. Aufgabe

Wenn wir den Fall 4 und 6 (viermal Kopf, sechsmal Zahl) vom Fall 6 und 4 (sechsmal Kopf, viermal Zahl) unterscheiden, welcher von beiden Fällen tritt dann häufiger auf?

5. Aufgabe

Wenn wir 11 Fälle voneinander unterscheiden (0 und 10, 1 und 9, 2 und 8, ..., 10 und 0), wie oft kommen diese dann bei 20 Würfeln vor? Trage deine Schätzungen in die folgende Tabelle ein, führe Versuche durch, und notiere auch deren Ergebnisse! (Bild 12)

6. Aufgabe

Wenn man 20mal jeweils 10 Münzen wirft, erhält man 200 Ergebnisse (Kopf oder Zahl). Wie oft tritt bei dieser Wurfserie insgesamt jeweils Kopf oder Zahl auf? (Berechne das auf Grund deiner Notizen!)

Wenn du die Versuchsserie sehr oft, beispielsweise hundertmal wiederholst, was meinst du, wie oft der Fall vorkommen wird, daß unter den 200 Ergebnissen genau die Hälfte Kopf, die andere Hälfte Zahl ist? Wie oft wird die Anzahl von „Kopf“ sowohl als auch die Anzahl von „Zahl“ zwischen 90 und 110 liegen? Wie oft wird der Fall eintreten, daß das eine 80mal oder seltener auftritt (dann muß das andere natürlich 120mal oder häufiger vorkommen)?

Es würde für einen Menschen schon zu lange dauern, diese Versuche durchzuführen. Die Rechnung ist auch nicht einfach. Deshalb kann man das Ergebnis nur schätzen. Wenn du die Lösungen studierst, kannst du kontrollieren, wie weit deine Schätzungen an die zu erwartenden Werte herankamen. (Das sind Werte, denen sich der Durchschnitt vieler Versuche nähert.)

7. Aufgabe

Du weißt nun schon, daß beim gleichzeitigen Wurf von 10 Münzen der Fall „5 und 5“ wahrscheinlicher ist als der von „4 und 6“ oder „6 und 4“ einzeln betrachtet, aber weniger wahrscheinlich, als daß von einem 6, vom anderen 4 auftreten (ohne daß festgelegt wird, von welchem dies und von welchem das). Ist das auch dann wahr, wenn du die 10 Münzen nicht gleichzeitig wirfst, sondern eine nach der anderen?

Auch dann, wenn du nicht 10 Münzen, sondern nur eine, diese aber zehnmal nacheinander wirfst? (Wenn du nicht sicher bist, so probiere es ein paarmal aus!)

..... T. Varga

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(5./6. Februar 1977)



Klassenstufe 7

1. Von zwölf Mädchen einer 7. Klasse ist bekannt, daß alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:

Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.

Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

2. Beweise den folgenden Satz:

In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks.

3. Unter „Primzahlrillingen“ wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p , $p+2$, $p+4$ darstellen lassen. Beweise, daß es genau eine Zahl p gibt, für die p , $p+2$, $p+4$ „Primzahlrillinge“ sind, und ermittle diese!

4. Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, daß dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!

b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

5. Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

6. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9,1$ cm, $b = 6,3$ cm, $c = 6,7$ cm und $d = 5,0$ cm.

Dabei sei a die Länge der Seite AB , b die der Seite BC , c die der Seite CD und d die der Seite AD . Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Klassenstufe 8

1. Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, daß er diese Summe nicht „passend“ hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M bzw. 20 M) Uwe hier nach bei sich haben konnte!

2. Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umschrieben, daß alle Trapezseiten den Kreis berühren.

Beweise, daß dann $\angle BMC = 90^\circ$ ist!

($\angle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle ABC$.)

3. In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm^3 Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit einer seiner Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so beträgt die Wasseroberfläche im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm bzw. 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Aufgaben entsprechen!

4. Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z. B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargestellt werden soll:

(1) Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern $7 \cdot 2 = 14$

(2) Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf. (Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.) 1414

(3) Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern $49 + 4 = 53$

(4) Man hängt an das Ergebnis eine Null an 530

(5) Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4) und erhält damit das gesuchte Produkt. $1414 + 530 = 1944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

5. Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S , seine Schenkel seien die Strahlen a, b ; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w . Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

Konstruiere einen Kreis k , der a und b berührt und durch P geht! Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

6. Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1, P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, daß es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k !

b) Ermittle den so entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2 !

Klassenstufe 9

1. Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n -Eck habe die Eigenschaft, daß es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n -Ecks!

2. Man beweise folgenden Satz:

Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt $(a+1)(b+1) \leq 4$. (*) Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (*) das Gleichheitszeichen gilt.

3. Wie betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:

(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.

(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $4\sqrt{2}$.

a) Zeigen Sie, daß zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!

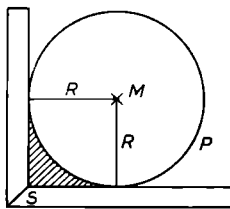
b) Geben Sie für jedes dieser beiden Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

4. Beweisen Sie, daß für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n-1)p^2 + 1$ Primzahl ist.

5. Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien die-

jenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen. Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen.

6. Zwei Holzleisten sind so aneinander gelehmt, daß sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Bild). In den durch Schraffur gekennzeichneten Teilen zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.



- Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
- Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

Klassenstufe 10

1. In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ sei a die Länge der Seiten BC , CD und DA . Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, daß der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E , der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F , der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.

Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P .

Ermitteln Sie die Länge der Seite AB !

2. Von einer Gleichung

$x^4 + 3a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ werde vorausgesetzt, daß alle Koeffizienten a_3 , a_2 , a_1 und a_0 ganze Zahlen sind. Beweisen Sie, daß dann folgender Satz gilt:

Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

3. Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß

I N E S
+ J E N S
+ A M E S

N A M E N

eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch

gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

a) Zeigen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!

b) Zeigen Sie, daß die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!

Hinweis: Sind $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ganze Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ ($i = 0 \dots n$) und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n \dots a_2 a_1 a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl

$z = a_n \cdot 8^n + \dots + a_2 \cdot 8^2 + a_1 \cdot 8^1 + a_0 \cdot 8^0$. Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n \dots a_2 a_1 a_0]_8$ bezeichnen.

4. Beweisen Sie, daß

$$\lg\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{99}\right) = 2 \text{ gilt!}$$

5. Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrunde gelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a . Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.

Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrunde gelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat.

6. Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CB}$ aus $a + b = 12 \text{ cm}$, $f = 9 \text{ cm}$ und $\beta + \delta = 172^\circ$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB , b die Länge der Seite AD , f die Länge der Diagonalen BD , β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und δ die Größe des Winkels $\sphericalangle ADC$.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert und beweisen Sie, daß alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

Klassenstufe 11/12

1. Man gebe alle Paare (x, y) reeller Zahlen an, für die

$$x^2 + y = 2 \quad (1)$$

$$\text{und } y^2 + x = 2 \text{ gilt.} \quad (2)$$

2. In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhenlänge h seien Kugeln so einbeschrieben, daß die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.

Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius r_n der n -ten Kugel aus den gegebenen Längen r und h .

Man weise insbesondere nach, daß die Folge (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = \frac{h - 2r}{h} \text{ ist.}$$

3. Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind. Ein Punkt dieser Menge heiße „außergewöhnlich“, wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.

Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.

Man beweise: Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

4. a) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ die Ungleichung

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2} \text{ gilt.} \quad (1)$$

b) Es sind diejenigen Werte von x, y, z zu ermitteln, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

5. In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, daß der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.

Man beweise, daß für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Von den folgenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Für jede reelle Zahl x mit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P(0, 1)$, $Q(x; \cos x)$ und $R(-x; \cos(-x))$ gelegt.

a) Man gebe eine Funktion f so an, daß für jede dieser Zahlen x der genannte Kreis den Radius $r = f(x)$ hat.

b) Man berechne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.

c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion f mit der Menge aller Zahlen x , für die $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

6B. Es sei M eine Menge, für die folgendes gilt:

- (1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.
- (2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ so, daß $x \circ b = c$ gilt; dieses Element x werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man folgende Aussage:

Wenn für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ die Beziehung

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$$

gilt, dann gilt für alle $p \in M, q \in M, r \in M, s \in M$ die Beziehung

$$\left(\frac{p}{q} \right) \circ \left(\frac{r}{s} \right) = \left(\frac{p \circ r}{q \circ s} \right)$$

Zum Titelbild

Der im Bild dargestellte und in seine horizontalen und vertikalen Zahlenquadrate zerlegte magische Würfel mit $n=4$ ist ein räumliches System natürlicher Zahlen, deren Summe jeder Zeile, Spalte, Quadrat und Würfel-diagonale den gleichen Wert hat.

Mittels Zerlegung der n^3 Glieder der dem magischen Würfel zugrunde gelegten arithmetischen Folge, mit einer konstanten Differenz von $d=1$, in Grundzahl, Additionszahl und Quadratzahl können, wenn $n/2$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, magische Würfel in beliebiger Größe gebildet werden.

Wird die Zahl der Glieder einer Folge von n^3 auf n^4 erweitert, dann lassen sich bei Anwendung mathematisch fundierter Ordnungssysteme n magische Würfel bilden, die insgesamt den Bedingungen einer magischen Zahlenformation genügen. Also, alle n Würfel haben gleiche Summen.

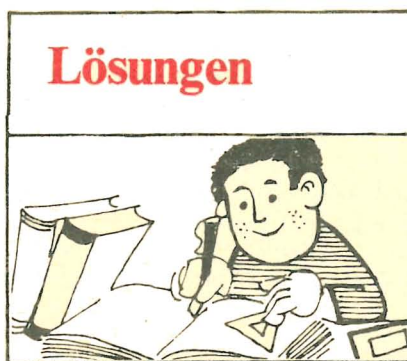
Solchen Erweiterungen sind keinerlei Grenzen gesetzt. Derartige Möglichkeiten der Bildung ganzer magischer Zahlenkomplexe können bei gezielten Aufgabenstellungen einen bedeutenden praktischen Wert bei der Organisation von Verlade- und Sortierprozessen gewinnen.

Die allgemein praktische Bedeutung der Theorie der Bildungsgesetze magischer Zahlenformationen wird durch die Möglichkeit der Anwendung von Zahlenfolgen mit unterschiedlichem „ d “ noch erhöht.

In Verbindung mit praxisverbundenen Ziel-aufgaben wird die Beschäftigung mit der Bildung magischer Zahlenformationen durch solche mathematisch fundierte Methoden vom reinen Denkspiel zum interessanten mathematischen Aufgabengebiet.

Die geheimnisvollen und zauberhaften Rätsel um die Bildung solcher magischer Quadrate und Würfel wurden durch logisches Denken und mathematisches Wissen endgültig entschleiert.

M. Thumser



Ma9 ■ 1557 Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ ist ein Rhombus, da

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_1} \text{ ist.}$$

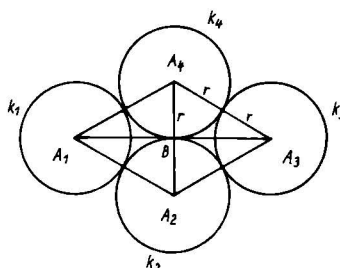
Der Mittelpunkt B dieses Rhombus ist gleichzeitig Berührungspunkt der Kreise k_2 und k_4 .

Ferner gilt

$$\overline{BA_4} = r, \overline{A_3A_4} = 2r$$

und daher nach dem Satz des Pythagoras

$$x = \overline{BA_3} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}.$$



Der Flächeninhalt des Rhombus $A_1A_2A_3A_4$ ist daher gleich

$$F_1 = 2xr = 2r^2\sqrt{3}.$$

Da die Winkelsumme eines jeden Vierecks 360° beträgt, lassen sich die Kreissektoren im Innern des Rhombus zu einer Kreisfläche mit dem Radius r zusammenfügen, deren Flächeninhalt gleich πr^2 ist. Der gesuchte Flächeninhalt der Figur beträgt daher

$$F = 2r^2\sqrt{3} + 4\pi r^2 - \pi r^2 = 2r^2\sqrt{3} + 3\pi r^2 = r^2(2\sqrt{3} + 3\pi) \approx 51,56 \text{ cm}^2.$$

Ma9 ■ 1558 Bezeichnet man den Dividenten mit x , den Divisor mit y und den Quotienten mit z , so gilt

$$x : y = z, \text{ also } x = y \cdot z. \quad (1)$$

Ferner gilt

$$x \geq 10000000. \quad (2)$$

Weiter gilt

$$100 \leq y \leq 999. \quad (3)$$

Nun steht in der letzten Zeile des Schemas ein Vielfaches von y , also $k \cdot y$, und es gilt

$$8000 \leq k \cdot y \leq 8999.$$

Wäre nun $k \leq 8$, so wäre $k \cdot y \leq 8 \cdot 999 = 7992$, was zu einem Widerspruch führt. Daher ist die letzte Grundziffer von z gleich 9. Weiter erhält man

$$\frac{8000}{9} \leq y \leq \frac{8999}{9},$$

$$\text{also } 889 \leq y \leq 999. \quad (4)$$

In der zweiten Zeile steht eine dreistellige Zahl, die nur gleich y sein kann, da jedes andere Vielfache von y bereits vierstellig ist.

Die ersten vier Grundziffern von z sind daher 1, 0, 0, 1; denn auch in der vierten Zeile des Schemas steht 1 $\cdot$ y . Da, wie oben gezeigt wurde, die letzte Grundziffer von z gleich 9 ist, gilt für den Quotienten

$$z = 10019.$$

Daraus folgt

$$y = \frac{x}{z} \geq \frac{10000000}{10019} > 998. \quad (5)$$

Wegen (4) und (5) ist daher $y = 999$.

Daraus folgt

$$x = yz = 999 \cdot 10019 = 10008981.$$

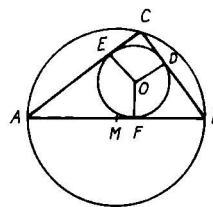
Das Divisionsschema lautet daher:

$$\begin{array}{r} 10008981 : 999 = 10019 \\ 999 \\ \hline 1898 \\ 999 \\ \hline 8991 \\ 8991 \\ \hline \end{array}$$

Ma9 ■ 1559 Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$. Dann liegt der Mittelpunkt M des Umkreises mit dem Radius r auf der Hypotenuse, und es gilt $\overline{AM} = \overline{MB} = r$.

Sind D, E, F die auf den Katheten bzw. der Hypotenuse gelegenen Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten und sind O der Mittelpunkt und ϱ der Radius des Inkreises, so gilt $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \varrho$,

$$\angle ODC = \angle CEO = \angle DCE = 90^\circ.$$



Daher ist das Viereck $ODCE$ ein Quadrat, und es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \varrho.$$

Ferner gilt $\overline{AE} = \overline{AF}$ und $\overline{BD} = \overline{BF}$, da die Abschnitte der von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten gleichlang sind. Daraus folgt für die Summe der Längen der Katheten

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BC} &= \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{BD} + \overline{DC} \\ &= \overline{AF} + \varrho + \overline{BF} + \varrho \\ &= \overline{AB} + 2\varrho = 2r + 2\varrho, \end{aligned}$$

d. h., die Summe der Längen der Katheten ist gleich der Summe der Längen der Durchmesser des Umkreises ($2r$) und des Inkreises (2ϱ), w. z. b. w.

Ma9 ■ 1560 Es sei m mit $m \geq 3$ eine natürliche Zahl, deren dritte Potenz m^3 sich in der Form

$$m^3 = p + n^3, \quad (1)$$

darstellen läßt, wobei p eine Primzahl und n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.

Dann gilt $m > n$ und

$$m^3 - n^3 = p, \quad (2)$$

Dabei ist

$$m^2 + mn + n^2 \geq 9 + 3 + 1 = 13. \quad (3)$$

Wäre nun $m - n > 1$, so wäre p nicht Primzahl,

was der Voraussetzung widerspricht. Daher gilt $m-n=1$, d. h., $n=m-1$, also wegen (2)

$$p = m^2 + m(m-1) + (m-1)^2 = 3m^2 - 3m + 1. \quad (4)$$

Wir müssen nun nachweisen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen m mit $m \geq 3$ gibt, für die $3m^2 - 3m + 1$ nicht Primzahl ist. Das trifft z. B. für jede natürliche Zahl m zu, die bei der Division durch 7 den Rest 2 läßt, also von der Form

$$m = 7k + 2 \text{ ist,} \quad (5)$$

wobei k eine natürliche Zahl ist.

Dann gilt nämlich wegen (4)

$$\begin{aligned} p &= 3(7k+2)^2 - 3(7k+2) + 1 \\ &= 3(49k^2 + 28k + 4) - 21k - 6 + 1 \\ &= 7(21k^2 + 9k) + 7, \end{aligned}$$

d. h. p ist durch 7 teilbar. (6)

Andererseits gilt wegen (4)

$$p = 3m(m-1) + 1 \geq 3 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 19 > 7, \quad (7)$$

p ist also nicht Primzahl im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun gibt es unendlich viele natürliche Zahlen m^3 mit $m \geq 3$ und $m = 7k + 2$, also auch unendlich verschiedene natürliche Zahlen $z = m^3$, die sich nicht in der Form $z = p + n^3$ darstellen lassen, w. z. b. w.

Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen vertraut ist, kann den Schluß von (4) auf (6) schneller vollziehen. Wegen (4) folgt nämlich für $m \equiv 2 \pmod{7}$

$$p \equiv 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7},$$

also p ist durch 7 teilbar.

Ph9 ■4

Gegeben: $\overline{BE} = 5,2 \text{ mm} = 0,52 \text{ cm}$

(scheinbarer Monddurchmesser)

$\overline{AB} = 57 \text{ cm}$ (Entfernung

Aug-Linear)

$\overline{CD} = 3476 \text{ km}$ (wahrer

Monddurchmesser)

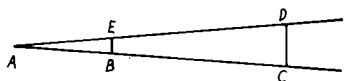
Gesucht: (1) $\overline{AC}$ (Entfernung Erde-Mond)

(2) Prozentualer Fehler

(1) Nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes gilt $\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{AC} : \overline{DC}$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{57 \text{ cm} \cdot 3476 \text{ km}}{0,52 \text{ cm}}$$

$$\overline{AC} \approx 381\,023 \text{ km}$$



Die Entfernung Erde-Mond beträgt 381 023 km.

(2) Der absolute Fehler ergibt sich aus $381\,023 \text{ km} - 384\,400 \text{ km} = -3377 \text{ km}$.

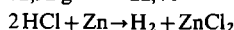
Der relative Fehler ergibt sich aus

$$\left| \frac{-3377 \text{ km}}{384\,400 \text{ km}} \right| \approx 0,00878 \dots \approx 0,88\%$$

Der prozentuale Fehler der hier ermittelten Entfernung beträgt 0,88%.

Ch9 ■3 Masse der Salzsäure 15 g mit 0,15 g Chlorwasserstoff (HCl).

$$72,92 \text{ g} \quad 22,4 \text{ l}$$



$$0,15 \text{ g} \quad V_0$$

$$\text{NR: } 2 \text{ mol} \cdot 36,46 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 72,92 \text{ g,}$$

$$1 \text{ mol} \cdot 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 22,4 \text{ l}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$V_0 = 46,1 \text{ ml}$ bei 0°C und 760 Torr

Nach der Zustandsgleichung für ideale Gase erhält man bei 22°C

$$V = \frac{295^\circ\text{K} \cdot 46,1 \text{ ml}}{273^\circ\text{K}} = 49,8 \text{ ml.}$$

Das Wasserstoffvolumen ist 49,8 ml.

Ma 10/12 ■1561 Es sei x eine reelle Zahl, für die

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ gilt, wobei} \quad (1)$$

$$f_1(x) = -x + 3, \quad (2)$$

$$f_2(x) = |(x-2)^2 - 5| \geq 0. \text{ Dann gilt} \quad (3)$$

$$f_1(x) = -x + 3 \geq 0, \text{ als } x \leq 3 \text{ und} \quad (4)$$

$$1. \text{ entweder } (x-2)^2 - 5 = -x + 3 \quad (5)$$

$$2. \text{ oder } -(x-2)^2 + 5 = -x + 3 \quad (6)$$

Im 1. Falle folgt aus (5)

$$x^2 - 4x + 4 - 5 = -x + 3, \quad (7)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$. Da wegen (4) $x \leq 3$ gilt, kann höchstens $x_2 = -1$ Lösung von (1) sein. Nun gilt

$$f_1(-1) = 4, f_2(-1) = |(-3)^2 - 5| = 4, \text{ also ist } x_2 = -1 \text{ tatsächlich Lösung von (1).}$$

Im 2. Falle folgt aus (6)

$$x^2 - 4x + 4 - 5 = x - 3$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0. \quad (8)$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_3 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} > 3, x_4 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < 3,$$

von denen höchstens x_4 Lösung von (1) sein kann. Nun gilt

$$f_1(x_4) = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2} + 3 = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}$$

$$\begin{aligned} f_2(x_4) &= \left| \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} - 2 \right)^2 - 5 \right| \\ &= \left| \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^2 - 5 \right| = \left| \frac{-\sqrt{17} - 1}{2} \right| \\ &= \frac{\sqrt{17} + 1}{2}, \end{aligned}$$

d. h. x_4 ist tatsächlich Lösung von (1).

Es gibt also genau zwei reelle Zahlen x , für die $f_1(x) = f_2(x)$ gilt, nämlich

$$x = -1 \text{ und } x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

Ma 10/12 ■1562 a) Der kürzeste Weg von A nach B möge auf dem Streckenzug $APQB$ liegen. Dann beträgt die Länge des Weges wegen $\overline{PQ} = s$

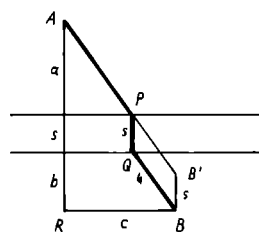
$$z = \overline{AP} + s + \overline{QB}.$$

Führt man nun eine Parallelverschiebung so durch, daß der Punkt Q in den Punkt P übergeführt wird, so wird der Punkt B in einen Punkt B' übergeführt, und es gilt $\overline{BB'} = s, \overline{QB} = \overline{PB'}$, also

$$z = \overline{AP} + \overline{PB'} + s.$$

Liegen nun die Punkte A, P, B' auf einer Geraden, so ist der Weg von A nach B' am kürzesten und daher auch z am kleinsten. Daraus ergibt sich die Konstruktion:

Man errichtet auf RB in B die Senkrechte bis zum Punkt B', so daß $\overline{BB'} = s$. Dann verbindet man B' mit A und erhält den Schnittpunkt P mit der Uferlinie. Nun verbindet man A mit P, errichtet in P auf der Uferlinie die Senkrechte bis zum Punkt Q auf dem anderen Ufer und verbindet Q mit B.



b) Man erhält

$$z = \overline{AB'} + s = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} + s,$$

$$z = (\sqrt{800^2 + 600^2} + 200) \text{ m,}$$

$$z = (\sqrt{1\,000\,000 + 200}) \text{ m} = 1\,200 \text{ m.}$$

Die Länge des kürzesten Weges $APQB$ beträgt also 1,2 km.

Ma 10/12 ■1563 Jedes der Volumina der Pyramiden P_1 bzw. P_2 ist gleich

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{3} a^3.$$

Ist A' der Schnittpunkt von $\overline{AM_1}$ mit $\overline{EM_2}$, B' der Schnittpunkt von $\overline{BM_1}$ mit $\overline{FM_2}$, C' der Schnittpunkt von $\overline{CM_1}$ mit $\overline{GM_2}$ und D' der Schnittpunkt von $\overline{DM_1}$ mit $\overline{HM_2}$, so gilt, da die Dreiecke $A'M_1E$ und $A'M_2$ kongruent sind, $\overline{A'M_1} = \overline{A'A}$, $\overline{B'M_1} = \overline{B'B}$ usw. also nach dem Strahlensatz

$$\overline{A'B'} : a = 1 : 2, \overline{A'B'} = \frac{a}{2}.$$

Ferner haben die Pyramiden $A'B'C'D'M_1$ und $A'B'C'D'M_2$ eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ sowie die Höhe $\frac{a}{2}$.

a) Der Körper, der aus allen Punkten der Durchschnittsmenge $P_1 \cap P_2$ besteht, setzt sich nun aus diesen beiden Pyramiden zusammen. Sein Volumen ist daher gleich

$$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{12} a^3.$$

b) Der Körper, der aus allen Punkten der Vereinigungsmenge $P_1 \cup P_2$ besteht, setzt sich aus zwei quadratischen Pyramidenstümpfen zusammen, bei denen der Flächeninhalt der Grundfläche gleich a^2 , der Deckfläche gleich $\frac{a^2}{4}$ und die Höhe gleich $\frac{a}{2}$ ist. Sein Volumen ist daher gleich

$$\begin{aligned} V_2 &= 2 \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(a^3 - \frac{1}{8} a^3 \right) = \frac{7}{12} a^3. \end{aligned}$$

c) Die Volumina der beiden Körper verhalten sich wie

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{12} a^3 : \frac{7}{12} a^3 = 1 : 7.$$

Ma 10/12 ■1564 Angenommen, es gibt zwei rationale Zahlen x und y , für die

$$x^2 + y^2 = 7 \text{ gilt.} \quad (1)$$

Dann ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, da das Quadrat

einer rationalen Zahl nicht gleich 7 ist. Ferner kann man sogar $x > 0$ und $y > 0$ annehmen, da für $x < 0$ bzw. $y < 0$ auch $-x > 0$ bzw. $-y > 0$ Lösung von (1) wäre. Da x und y positive rationale Zahlen sind, lassen sie sich in der Form

$$x = \frac{p}{q}, \quad y = \frac{r}{q} \quad (2)$$

darstellen, wobei p , r und q von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, deren größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist.

Nun folgt aus (1)

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{q^2} = 7, \text{ also } p^2 + r^2 = 7q^2. \quad (3)$$

Wäre nun eine der Zahlen p oder r durch 7 teilbar, so wäre wegen (3) auch die andere durch 7 teilbar, also wäre $p^2 + r^2$ durch 7^2 teilbar. Dann müßte aber wegen (3) q durch 7 teilbar sein, was der Voraussetzung widerspricht, wonach p , q und r den größten gemeinsamen Teiler 1 haben. Also ist weder p noch r durch 7 teilbar, und es gilt

$$p \equiv a \pmod{7} \text{ mit } 0 < a < 7, \\ r \equiv b \pmod{7} \text{ mit } 0 < b < 7.$$

Daraus folgt

$$p^2 + r^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{7}. \quad (4)$$

Nun gilt

$$a = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ oder } 6,$$

also $a^2 = 1, 4, 9, 16, 25$ oder 36 ,

d. h. $a^2 \equiv 1, 4, 2, 2, 4$ oder $1 \pmod{7}$.

Das Gleiche gilt für b .

a^2 bzw. b^2 sind also modulo 7 kongruent einer der Zahlen 1, 2 oder 4. Daher ist $a^2 + b^2$ kongruent einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6, also niemals kongruent 0.

Daher gilt wegen (4) auch niemals

$$p^2 + r^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

d. h. $p^2 + r^2$ ist nicht durch 7 teilbar, und die Gleichung (3) ist in keinem Fall erfüllt. Daraus folgt, daß auch die Gleichung (1) für keine rationale Zahlen x , y erfüllt ist, w. z. b. w.

Ph 10/12 ■ 5 Gegeben $t = 3,8 \text{ s}$; $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;
 $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

Gesucht: s

Die Tiefe des Brunnens ergibt sich einmal aus dem Weg, den der Schall zurücklegen muß, und zum anderen aus dem Weg, den der Stein im freien Fall zurücklegen muß:

$$s = vt_2 \text{ bzw. } s = \frac{g}{2} \cdot t_1^2, \text{ wobei } t_1 + t_2 = t \text{ gilt.}$$

Es ist also:

$$s = \frac{g}{2} \left(t - \frac{s}{v} \right)^2 \text{ mit } t_1 = t - t_2 \text{ und } t_2 = \frac{s}{v}$$

$$\frac{2s}{g} = t^2 - \frac{2ts}{v} + \frac{s^2}{v^2}$$

$$0 = s^2 - 2v^2 \left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g} \right) \cdot s + v^2 t^2$$

$$= s^2 - \frac{2v}{g} (gt + v) s + v^2 t^2$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{v}{g} (gt + v) \pm \sqrt{\left[\frac{v}{g} (gt + v) \right]^2 - v^2 t^2}$$

$$s_{1,2} = \frac{v}{g} (gt + v \pm \sqrt{v^2 + 2gtv})$$

$$s_{1,2} = \frac{340}{9,81} (9,81 \cdot 3,8 + 340 \pm \sqrt{340^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 3,8 \cdot 340})$$

$$s_{1,2} \approx \frac{340}{9,81} (377,278 \pm 375,43)$$

$$s_1 \approx 64$$

$$s_2 \approx 26088$$

Da $t_2 \leq t$ also $\frac{s}{v} \leq t$ sein muß, gilt nur $s = 64$.

Der Brunnen ist 64 m tief.

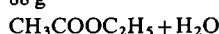
Ch 10/12 ■ 4

60 g



16 g

88 g



m

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 60 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 60 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 88 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 88 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m = 23,4 \text{ g}$$

$$\text{Ausbeute: } 0,85 \cdot 23,4 \text{ g} = 19,9 \text{ g}$$

Man kann 19,9 g Essigsäureäthylester herstellen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/76

Ma 5 ■ 1566 Angenommen, Ute ist im Jahre 1975 genau n Jahre alt; ihr Bruder Axel ist dann $(n+6)$ Jahre alt; nun gilt

$$n + (n+6) = 30,$$

$$2n + 6 = 30,$$

$$2n = 24,$$

$$n = 12.$$

Somit ist Ute 12 Jahre, ihr Bruder Axel 18 Jahre alt. Angenommen, Utes Mutter wird im gleichen Jahr k Jahre alt; dann wird Utes Vater $(k+2)$ Jahre alt; nun gilt

$$k + (k+2) = 120 - 30,$$

$$2k + 2 = 90,$$

$$2k = 88,$$

$$k = 44.$$

Somit wird Utes Mutter 44, Utes Vater 46 Jahre alt.

Ma 5 ■ 1567 Aus $10 \cdot 0,2 = 2$ folgt, daß 2 Liter Kirschlimonade zubereitet worden sind. Der achte Teil der Kirschlimonade bestand aus Kirschsirup. Es wurden somit 2 Liter : 8 = $\frac{1}{4}$ Liter Kirschsirup verbraucht.

Ma 5 ■ 1568 a) Sämtliche sechs Begrenzungsflächen des Ausgangswürfels werden beklebt. Von jedem der sechs aufgeklebten Würfel sind fünf quadratische Begrenzungsflächen nicht überklebt. Insgesamt wird der so entstandene Körper von $6 \cdot 5 = 30$ quadratischen Flächen begrenzt.

b) Ein Spielwürfel besitzt die Augenzahlen von 1 bis 6. Um eine möglichst große Gesamtaugenzahl zu erhalten, wird von den aufzuklebenden Würfeln jeweils die Seiten-

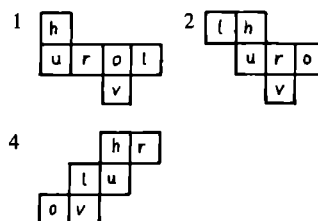
fläche mit der Augenzahl 1 beim Verkleben verwendet. Von jedem der sechs aufzuklebenden Würfel sind somit die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 nicht überklebt. Die Gesamtaugenzahl beträgt deshalb

$$6 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 120 \text{ Aug.}$$

Ma 5 ■ 1569 Hätte der zweite Autobus auf seiner letzten Fahrt vier Pioniere mehr befördert, so wären auf den letzten zwei Fahrten des zweiten Autobusses insgesamt $86 + 4 = 90$ Pioniere befördert worden. Somit war der zweite Autobus auf seiner vierten Fahrt mit $90 : 2 = 45$ Pionieren besetzt. Nun gilt $7 \cdot 45 + 1 \cdot 41 = 315 + 41 = 356$; insgesamt waren also 356 Pioniere eingetroffen.

Ma 5 ■ 1570 Aus den Netzen (3) und (5) läßt sich kein Würfel herstellen; die Beschriftung führt zu Widersprüchen.

Die Netze (1), (2), (4) könnten wie folgt beschriftet werden:



Ma 5 ■ 1571 Für alle in Betracht kommenden zweistelligen natürlichen Zahlen gilt $10 \leq 13 \cdot n \leq 99$, wobei n ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Nur für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ werden diese Ungleichungen erfüllt. Von den Vielfachen 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 der Zahl 13 erfüllen nur die Zahlen 13 und 91 die gestellten Bedingungen, und es gilt

$$(3 - 1 - 1) \cdot 13 = 1 \cdot 13 = 13,$$

$$(9 - 1 - 1) \cdot 13 = 7 \cdot 13 = 91.$$

Ma 6 ■ 1572 Es sei x die Anzahl der im Regal vorhandenen Bücher; dann gilt $340 < x < 350$. Aus $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{7}{12}x$ und $\frac{12}{12}x - \frac{7}{12}x = \frac{5}{12}x$ folgt, daß das Regal $\frac{4}{12}x$ Romane enthält. Nun

muß x ein Vielfaches von 12 sein, also $x = 12 \cdot n$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt weiter $340 < 12 \cdot n < 350$ bzw. $28\frac{1}{3} < n < 29\frac{1}{6}$, also $n = 29$ und somit $x = 12 \cdot 29 = 348$. Im Regal befinden sich somit $348 : 4 = 87$ Kinderbücher, $348 : 3 = 116$ Erzählungen und $348 \cdot \frac{5}{12} = 145$ Romane.

Ma 6 ■ 1573 Angenommen, dieser Schüler habe den n -ten Platz erreicht; dann gilt

$$\left(\frac{n+5}{10} + 3 \right) \cdot 5 = n + 10,$$

$$\frac{n+5}{2} + 15 = n + 10,$$

$$n + 5 + 30 = 2n + 20,$$

$$n = 15.$$

Dieser Schüler belegte auf dem mathematischen Wettbewerb den 15. Platz.

Ma 6 ■ 1574 Wir rechnen $2240 \text{ km} \cdot \frac{3}{4}$

= 1680 km;

$2240 \text{ km} - 1680 \text{ km} = 560 \text{ km}$. Nun gilt

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1680 \text{ km} \cdot h}{840 \text{ km}} = 2 \text{ h};$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{560 \text{ km} \cdot h}{800 \text{ km}} = \frac{7}{10} \text{ h} = 42 \text{ min.}$$

Der Flug von A nach B dauert 2 Stunden und 42 Minuten.

Ma 6 ■ 1575 Angenommen, Ursula habe auf dem Sportfest x Punkte erreicht, dann gilt $1475 < x < 1500$. Während der Spartakiade hatte Ursula nur $\frac{x}{9}$ Punkte erreicht; deshalb

$$\text{gilt } \frac{1475}{9} < \frac{x}{9} < \frac{1500}{9}, \text{ also } 163\frac{8}{9} < x < 166\frac{2}{3}.$$

In diesem Intervall ist nur die Zahl 165 ganzzahlig und durch 5 teilbar. Ursula errang somit auf der Spartakiade 165 Punkte, auf dem Sportfest $9 \cdot 165 = 1485$ Punkte. Sabine schaffte $1485 : 3 = 495$ Punkte.

Ma 6 ■ 1576 Von Kilometerstein 54 bis Kilometerstein 87 sind es 33 km. Aus

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{33}{120} \text{ h} = \frac{11}{40} \text{ h} \text{ und } t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{33}{100} \text{ h} \text{ folgt}$$

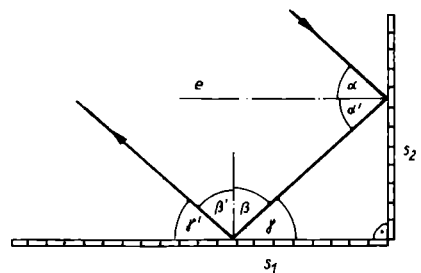
$$t_2 - t_1 = \frac{66}{200} \text{ h} - \frac{55}{200} \text{ h} = \frac{11}{200} \text{ h} = \frac{60 \cdot 11}{200} \text{ min}$$

$$= \frac{33}{10} \text{ min} = 3\frac{3}{10} \text{ min.}$$

Der Moskwitsch kam $3\frac{3}{10}$ min vor dem Wart-

burg an der Raststätte an. Auf 100 km Fahrstrecke hätte der Moskwitsch gegenüber dem Wartburg nur 10 Minuten Zeit herausgefahren. Überhöhte Geschwindigkeiten rufen aber Unfälle und damit Schaden hervor.

Ph 6 ■ 1577 Nach dem Reflexionsgesetz gilt $\alpha = \alpha'$ bzw. $\beta = \beta'$ also auch $\gamma = \gamma'$. Weiterhin ist $\alpha' = \gamma$ (Wechselwinkel an Parallelen wegen $l \parallel s_1$) und damit auch $\alpha = \gamma'$.



Demzufolge ist der einfallende und der reflektierende Strahl um den gleichen Winkel gegen die Horizontale geneigt, und sie laufen parallel, w.z.b.w.

Ma 7 ■ 1578 Aus der Gleichung $a \cdot b = 10 \cdot (a + b)$ erhalten wir durch Umformung

$$ab = 10a + 10b,$$

$$ab - 10a = 10b,$$

$$a(b - 10) = 10b,$$

$$a = \frac{10b}{b - 10}.$$

Nun gilt $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Ferner gilt $a \geq 0$ nur dann, wenn $b \geq 11$. Da a und b natürliche

Zahlen sind, muß $10b$ ein Vielfaches von $b - 10$ sein. Das trifft nur zu für folgende Paare natürlicher Zahlen: (11; 110), (12; 60), (14; 35), (15; 30), (20; 20).

Ma 7 ■ 1579 Angenommen, es waren x Sammelkarten mit je fünf, y mit je sechs und z mit je acht Fahrabschnitten; dann gilt

$$5x + 6y + 8z = 77, \quad (1)$$

$$x + y + z = 12 \quad (2)$$

$$\text{bzw. } x = 12 - y - z.$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2) in Gleichung (1) erhalten wir

$$5 \cdot (12 - y - z) + 6y + 8z = 77,$$

$$60 - 5y - 5z + 6y + 8z = 77,$$

$$y + 3z = 17,$$

$$y = 17 - 3z.$$

Diese Gleichung wird für natürliche Zahlen x, y, z erfüllt durch

$$x_1 = 1, y_1 = 8, z_1 = 3;$$

$$x_2 = 3, y_2 = 5, z_2 = 4;$$

$$x_3 = 5, y_3 = 2, z_3 = 5.$$

Die Aufgabe besitzt somit genau drei Lösungen:

Es könnten entweder eine Sammelkarte aus Berlin, acht aus Leipzig und drei aus Halle oder drei aus Berlin, fünf aus Leipzig und vier aus Halle oder fünf aus Berlin, zwei aus Leipzig und fünf aus Halle verbraucht worden sein.

Lösungen zu: Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie (Seite 27)

$$\blacktriangle 1 \blacktriangle \quad n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = 4,$$

$$n_5 = 5, n_6 = 6.$$

$$\blacktriangle 2 \blacktriangle \quad \text{a) } s = 24,35 \text{ m, } m_s = 0,008 \text{ m,}$$

$$m_0 = 0,026 \text{ m} \quad \text{b) } n_2 = 27.$$

$$\blacktriangle 3 \blacktriangle \quad \text{a) } n_{\text{Ceres}} = 3$$

$$\text{b) } U_{\text{Ceres}} = 4,61 \text{ Jahre.}$$

Lösung zu: Versuche mit 10 Münzen, S. 40

1. Aufgabe: Es gibt zwei Möglichkeiten außerdem:

1 und 9, 3 und 7. In der Tabelle vor der 4. Aufgabe findest du Antwort darauf, welcher Fall mit welcher Häufigkeit bei 20 Würfeln vorkommt. Die Null bei den Fällen 1 und 9 sowie 10 bedeutet, daß diese Fälle bei den 20 Würfeln meist überhaupt nicht vorkommen. (Der erste dieser Fälle kommt nur ungefähr aller 50 Würfe einmal vor, der zweite, daß alle gleich sind, nur etwa aller 500 Würfe einmal.)

2. Aufgabe: Es gibt 11 verschiedene Fälle, sie sind unter der 5. Aufgabe zu finden.

3. Aufgabe: (Bild 13)

4. Aufgabe: Die Versuche zeigen, daß sie ungefähr ebenso häufig sind. Wenn die Münze so beschaffen ist, daß ihre Kopf- oder Zahlseite mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach oben zeigt, so sind auch beide Fälle gleich wahrscheinlich.

5. Aufgabe: Bei 20 Würfeln ist für die einzelnen Fälle das folgende Ergebnis zu erwarten: (Bild 14)

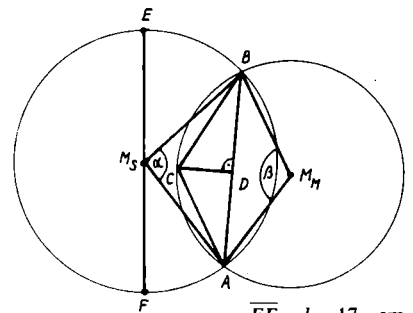
2,5 bedeutet hier, daß ungefähr 2 oder 3 Fälle zu erwarten sind.

7. Aufgabe: Es ist gleichgültig, ob du die 10 Münzen gleichzeitig oder einzeln oder nur eine zehnmal nacheinander wirfst, wenn die Münzen gleichartig sind, gilt für alle drei Fälle das Gleiche.

Lösung zu: Sonnenfinsternis

Bild der Sonne

Bild des Mondes



$$EF = d_s = 17 \text{ cm}$$

$$r_s = 8,5 \text{ cm}$$

Die Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ und $\overline{AC}$ schneiden sich in M_M .

(M_M : Mittelpunkt des Kreises des Bildes des Mondes)

r_M sei der Radius des Bildes des Mondes.

Es gilt für das rechtwinklige Dreieck (ADM_M) mit

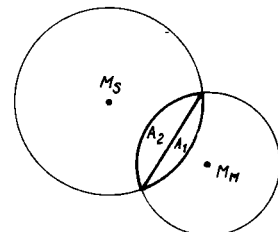
$$\overline{AD} = \frac{a}{2}, \overline{CD} = b, \overline{AM_M} = \overline{CM_M} = r_M$$

$$r_M^2 = \frac{a^2}{4} + (r_M - b)^2 \rightarrow r_M = \frac{a^2}{8b} + \frac{b}{2} \rightarrow r_M = 7,4 \text{ cm}$$

Damit lassen sich weiter die Winkel α und β bestimmen:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2 \cdot r_s} = 0,822 \quad \frac{\alpha}{2} = 55,5^\circ \quad \alpha = 111^\circ$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2r_M} = 0,945 \quad \frac{\beta}{2} = 71^\circ \quad \beta = 142^\circ$$



Daraus lassen sich die Flächen A_1 und A_2 berechnen:

$$A_1 = \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \frac{r_s^2}{2}$$

$$A_2 = \left(\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - \sin \beta \right) \frac{r_M^2}{2}$$

$$A_1 = 35,8 \text{ cm}^2 \quad A_2 = 50,9 \text{ cm}^2$$

Es ergibt sich eine „abgedunkelte“ Fläche $A' = A_1 + A_2 = 86,7 \text{ cm}^2$. Die Fläche der vollen Bildscheibe der Sonne beträgt

$$A = \pi \cdot r_s^2 = 227 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A'}{A} \cdot 100\% = \frac{86,7}{227} \cdot 100\% = 38,2\%.$$

Aus dieser Berechnung ergibt sich, daß in Jena eine 38,2%ige Sonnenfinsternis beobachtet wurde.

Kryptarithmetik

1. $999 + 9989 = 10988$; 2. $9911 + 9111 = 19022$;
3. $9861 + 9819 = 19688$; 4. $112 = \sqrt{12544}$;
5. $288^2 = 82944$

$G \cdot A \cdot U \cdot S \cdot S$

Um die Zahlen für G, A, U, S zu finden, zerlegt man das Produkt 1855 zunächst in seine Primfaktoren: $1855 = 5 \cdot 7 \cdot 53$

Dabei stellt man fest, daß nur drei Faktoren vorhanden sind. Also müssen noch zwei Faktoren ergänzt werden; diese beiden Faktoren können wegen der Ganzzahligkeit nur 1 sein:

$$1855 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53$$

Aus (2) und (3) folgt: $G = 53$, $A = 7$; $U = 5$; $S = 1$ Diese Zahlen werden in (1) eingesetzt:

$$C \cdot F \cdot (53 + 7 + 5 + 1 + 1) + 7 \cdot 5 = 1777$$

$$C \cdot F \cdot 67 + 35 = 1777$$

Durch äquivalente Umformungen ergibt sich:

$$C \cdot F = 26$$

Aus (3) und $26 = 13 \cdot 2$ folgt $C = 13$; $F = 2$

Aus den Darlegungen folgt: Es gibt genau eine Lösung; diese lautet $C = 13$, $F = 2$, $G = 53$, $A = 7$, $U = 5$, $S = 1$.

Mosaikrätsel

„Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin.“

Krypto-Gleichungssystem

Setzt man (IV) in (I), (II), (III) ein, vereinfacht die Terme auf den rechten Seiten der Gleichungen (I), (II), (III) und formt die Quotienten auf den linken Seiten der Gleichungen (I), (II) in Differenzen um, so erhält man das dem ursprünglichen äquivalente Gleichungssystem:

$$(I') \quad \frac{\sqrt{GAUSS}}{C \cdot G} - C^{C-1} = 22$$

$$(II') \quad \frac{\sqrt{GAUSS}}{C \cdot G} - G^{C-1} = 19$$

$$(III') \quad \frac{\sqrt{GAUSS}}{C \cdot G} = 24$$

Setzt man (III') in (I') und (II') ein, so erhält man das Gleichungssystem:

$$(I'') \quad C^{C-1} = 2$$

$$(II'') \quad G^{C-1} = 5 \text{ und hieraus}$$

(1) $C = 2$ und (2) $G = 5$ Aus (IV) erhält man $\frac{C}{F} = \frac{1}{C}$ bzw. $F = C^2$ und wegen $C = 2$, ist $F = 4$,

$C = 2$ und $G = 5$ in (III') eingesetzt, ergibt $\sqrt{GAUSS} = 240$ bzw. $GAUSS = 240^2$

$= 57600$, also lautet die Lösung:

$C = 2$, $F = 4$, $G = 5$, $A = 7$, $U = 6$, $S = 0$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen wird die Richtigkeit der Lösung bestätigt.

Rösselsprung

Ausspruch: „Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist.“ Schema:

10	1	8
7	4	11
2	9	6
5	12	3

Krypto-Arithmetik

$D = 1$; $r = 2$; $C = 3$; $F = 4$; $G = 5$; $a = 6$; $u = 7$; $B = 9$.

Bilderrätsel

Brett, Zaun, Zweig (Schweig);
Braunschweig

Rösselsprung

Zitat: „So sonderbar ist der nimmersatte Mensch; hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um nun ruhig darin zu wohnen, sondern um ein anderes anzufangen.“

Schema:

5	30	27	34	19	32
28	35	6	31	26	21
7	4	29	20	33	18
36	15	2	11	22	25
3	8	13	24	17	10
14	1	16	9	12	23

Wie viele Möglichkeiten?

Betrachtet man den Teil

CFG

FGa

Gau

auß,

so zählt man leicht nach, daß es 10 Möglichkeiten gibt. Das gesamte Viereck ergibt sich aus dem obigen Teil durch Spiegelungen, womit in jedem gespiegelten Teil ebenfalls 10 Möglichkeiten bestehen, den Namen auf verschiedene Art zu lesen. Insgesamt läßt sich der Name deshalb auf 40 verschiedene Arten lesen.

Kreuzworträtsel

1. Gauß; 2. arcus; 3.

4. Skala; 5. Slang

Gauß und das 8-Damen-Problem

Fortsetzung von Seite 37:

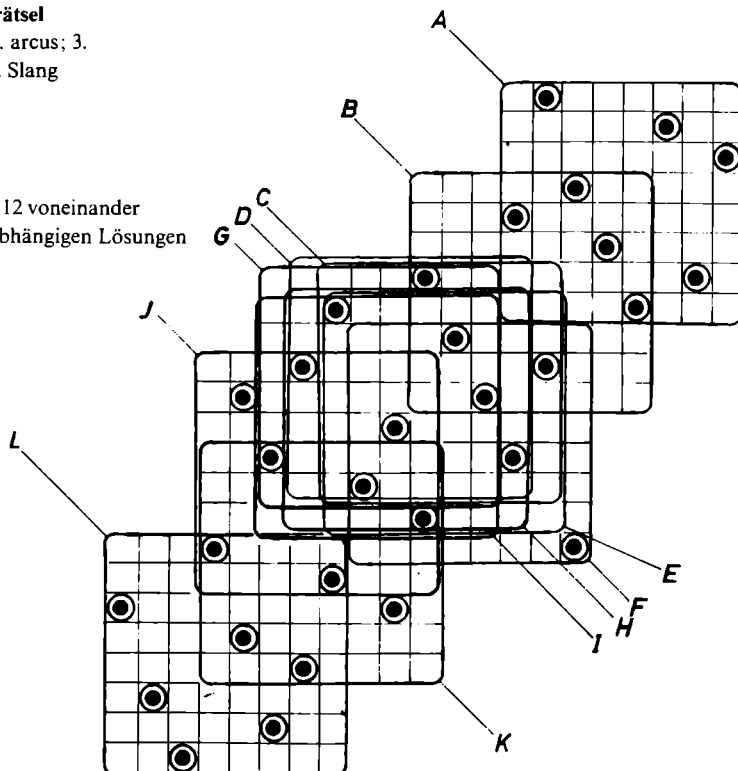
Da das Verfahren auf rationelle Weise alle Stellungen von $a1, b1, \dots, h1$ bis $a8, b8, \dots, h8$ durchläuft, kann keine Lösung unentdeckt bleiben.

5. Im Sinne der Spieltheorie handelt es sich bei der vorliegenden Aufgabe um ein „8-Personen-Spiel“, zu dessen Lösung ein sogenannter „Spielbaum“ gezeichnet werden müßte, aus dem dann die Lösungen unmittelbar abzulesen wären. Allerdings führt die übliche grafische Darstellungsform des Spielbaums bei der vorliegenden Aufgabe zu einem außerordentlich unübersichtlichen Gebilde. Die unter 1. angegebene Methode stellt eine rationalisierte Variante zur Ermittlung so eines Spielbaums dar, die außer den Vorzügen des Spielbaums auch noch Übersichtlichkeit bewahrt. (Über Spieltheorie siehe „Ausgewählte Kapitel der Mathematik“, Autorenkollektiv, Fachbuchverlag Leipzig, 7. Auflage 1973, mit weiteren Literaturangaben.)

6. Ist man mit dem systematischen Verschieben der Damen so weit, daß die Dame der a-Spalte auf a5 muß, ist also die Hälfte aller zu untersuchenden Möglichkeiten erledigt, so kann das Verfahren abgebrochen werden, denn alle noch ausstehenden Lösungen müssen sich nun durch Variierung bereits gefundener Lösungen ergeben.

Die gefundenen 12 voneinander unabhängigen Lösungen lassen sich zu einer kompakten Figur zusammenfügen – siehe Bild 4 – die – zusammen mit ihrem Spiegelbild – dann alle 92 Lösungen als Ausschnitte enthalten.

Bild 4 Die 12 voneinander unabhängigen Lösungen





Olympiade Junger Mathematiker 3. Stadt-Olympiade-Klassenstufe 4 Greifswald, 16. Oktober 1976

In jedem Jahr einmal treffen sich die besten Jungen Mathematiker der Stadt Greifswald zu einem Leistungsvergleich. Er ist eine gute Vorbereitung auf die Teilnahme an den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR. Die Fachkommission Unterstufe der Stadt Greifswald übergab der *alpha* die gestellten Aufgaben (reine Arbeitszeit: 120 Minuten):

▲1▲ Ermittle alle Zahlen a, b, c, d , welche die folgenden Ungleichungen erfüllen!

- a) $5 \cdot 19 < a < 100$ c) $15 < 2 \cdot c - 3 < 25$
b) $21 < 7b < 43$ d) $3 > d : 12 > 0$

▲2▲ Unsere Sportler konnten bei den Olympischen Spielen ihre Leistungen ständig verbessern. Sie feierten in diesem Jahr ihre bisher größten Erfolge.

1968 wurden von den DDR-Sportlern 30 Medaillen erkämpft; genau der dritte Teil davon waren Goldmedaillen.

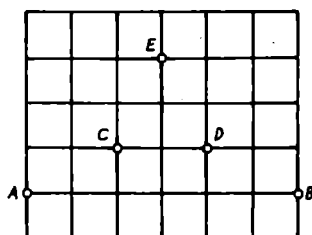
Die Anzahl der Silbermedaillen war um 2 größer als die Zahl der Bronzemedaillen.

Bei den Olympischen Spielen 1976 verdreifachte sich die Gesamtzahl der für unsere Republik errungenen Medaillen gegenüber 1968; die Anzahl der Goldmedaillen stieg auf das Vierfache (gegenüber 1968). Unsere Sportler brachten gleich viele Silber- wie Bronzemedaillen heim.

Übertrage die folgende Tabelle auf dein Arbeitsblatt und fülle sie aus!

	Gold	Silber	Bronze	Gesamtzahl
1968				
1976				

▲3▲ Verbinde jeweils genau zwei Punkte miteinander durch eine Gerade! (Zeichne auf diesem Blatt!)



- a) Wie viele verschiedene Geraden kannst du zeichnen?
b) Zähle sie auf (z. B. AB , ...)!

▲4▲ Die Klassenleiterin einer 4. Klasse macht eine Aufstellung über die Teilnahme ihrer Schüler an Arbeitsgemeinschaften.

10 Schüler sind Mitglieder der Schulsportgemeinschaft; 9 Schüler singen im Chor; 6 Schüler gehören keiner dieser Arbeitsgemeinschaften an; 3 Schüler sind sowohl Chormitglieder als auch in der Sportgemeinschaft tätig.

Wie viele Schüler sind in dieser 4. Klasse?

10. Leistungsvergleich Greifswald-Stadt-Greifswald-Land Stralsund-Wolgast (16. Oktober 1976 in Greifswald)

Klassenstufe 5

▲1▲ Zeichne die Strecken $\overline{AB}$ mit der Länge 2,3 cm, $\overline{CD}$ mit der Länge 18 mm, $\overline{EF}$ mit der Länge 0,03 m!

- a) Konstruiere $\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{EF}$!
b) Überprüfe das Ergebnis der Konstruktion durch Rechnung!

▲2▲ Zeichne eine Strecke $\overline{PQ}$ mit der Länge 6 cm! Zeichne dann um P einen Kreisbogen mit dem Radius 5,2 cm und um Q einen Kreisbogen mit dem Radius 3 cm! Ein Schnittpunkt dieser Kreisbögen sei R .

Trage in P an PQ das Dreifache des Winkels $\angle QPR$ an! Der zuletzt erhaltene Schenkel sei PS .

Was für ein Winkel $\angle QPS$ entsteht?

▲3▲ Bernd denkt sich eine Zahl, multipliziert diese Zahl mit sich selbst, addiert dann 19, dividiert durch 10, subtrahiert 4 und erhält als Endergebnis 10.

Welche Zahl hatte sich Bernd gedacht?

▲4▲ Beim Schulsportfest haben sich Antje, Christiane, Martina und Regine für den 100-m-Endlauf qualifiziert. Es soll getippt werden, wer den Endlauf gewinnt.

Gudrun sagt: Wenn ich nur den Sieger richtig voraussagen will, muß ich höchstens 4 verschiedene Tipscheine schreiben. Wenn ich aber den 1. und 2. Platz in der richtigen Reihenfolge auf einen Tipzettel schreiben soll, muß ich höchstens 10 verschiedene Tipscheine ausschreiben, um mit Sicherheit den richtigen dabei zu haben.

Hat Gudrun recht?

Klassenstufe 6

▲1▲ Welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind Teiler von 1670228?

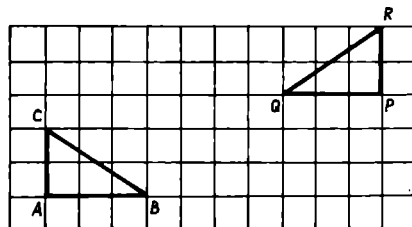
▲2▲ Eine Gruppe Junger Biologen wird gefragt: Wie viele Eidechsen habt ihr in eurem Terrarium? Die Antwort lautete: Im ersten Gefäß ist genau die Hälfte, im zweiten genau ein Drittel, und im letzten Gefäß befinden sich noch 2 Eidechsen.

▲3▲ Angelika und Karin haben Kärtchen, auf denen je eine Ziffer steht. Angelikas Kärtchen tragen die Ziffern 3, 5, 6, 9, Karins die Ziffern 1, 2, 4, 8.

a) Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kann jedes Mädchen mit seinen vier Kärtchen legen?

b) Wie viele davon sind durch 6 teilbar?

▲4▲ Finde eine Bewegung, die das Dreieck ABC auf das Dreieck PQR abbildet! Zeichne auf diesem Blatt!



Sonnenfinsternis 1976

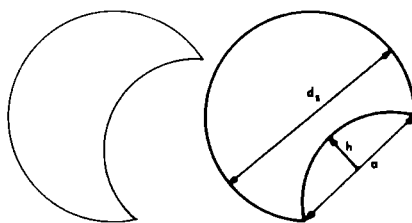
Wie groß war in Jena die Sonnenfinsternis vom 29. 4. 1976?

An der *Spezialschule des VEB Carl Zeiss* wurde die ringförmige Sonnenfinsternis am 29. 4. 76 am Schulfernrohr durch die Projektion des Bildes auf einen Schirm als partielle Finsternis beobachtet. Im Höhepunkt der Bedeckung der Sonne durch den Mond ergab sich auf dem Projektionsschirm das dargestellte Bild.

Wir stellten uns die Frage, wie groß am Beobachtungsort der prozentuale Teil der Sonne sei, der vom Mond überdeckt war.

Zur Lösung der Aufgabe wurden mit einem Lineal folgende Werte am projizierten Sonnenbild gemessen:

1. Durchmesser des Sonnenbildes $d_s = 17$ cm
2. Abstand der Schnittpunkte der Kreisbilder von Sonne und Mond $a = 14$ cm
3. Bogenhöhe über $a \cdot h = 5$ cm



Aus diesen drei Meßwerten wurde die vom Mond überdeckte Fläche der Sonnenscheibe berechnet und in Prozent ausgedrückt. Natürlich muß das Ergebnis mit Fehlern behaftet sein, die sich aus den Messungen mit Lineal am „wandernden“ Bild auf dem Projektionschirm und den Relativbewegungen von Erde, Sonne und Mond ergeben. Wie groß war also die partielle Finsternis in Jena? Welcher Lösungsweg führt zum Ziel? (Hinweis: Für Schüler bis Klasse 9 ist die Lösung nur möglich, wenn benötigte Winkelgrößen einer Zeichnung entnommen werden.)

A. Dietzel

Wissen wo

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1976

Heft 1

- 1 Mathematik und Biologie (D. Rasch/G. Fehling)
- 3 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Bock
- 4 René Descartes – Ein mutiger Geistesriese der jungen Bourgeoisie (K.-H. Kannegießer)
- 5 Übung macht den Meister: Gleichungen aus aller Welt (J. Lehmann)
- 6 Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen, Teil 2 (H. Lemke/W. Stoye)
- 8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 11 Gedanken über die Arbeit eines Mathematikers in der Praxis (J. Pichler)
- 12 Mathematischer Wettbewerb 1975, Stralsund/Bergen (J. Lehmann)
- 14 XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Kreisolympiade
- 16 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 18 *alpha*-Wettbewerb · Träger des Abzeichens in Gold
- 20 Lösungen

Heft 2

- 25 Einige Aufgaben mit rationalen Zahlen (H. Seibt)
 - 27 Übung macht den Meister: Arbeit mit linearen Gleichungen mit zwei Variablen
 - 28 Abu Raihan Biruni (973 bis 1048) – Porträt eines Wissenschaftlers (A. Halameisär)
 - 30 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
 - 31 Berufsbild: Bauzeichner
 - 34 Zwei verwandte geometrische Aufgaben (H. Karl)
 - 36 Aufgaben, speziell für Klasse 4 bis 6
 - 38 Unser natürlicher Digitalrechner (M. Walter)
 - 39 Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen, Teil 3 (H. Lemke/W. Stoye)
 - 39 Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Gläser, Universität Strasbourg
 - 40 In freien Stunden · *alpha*-heiter
 - 42 XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Bezirksolympiade
- IV. U-Seite: Zahlen und Fakten zum IX. Parteitag der SED

Heft 3

- 49 Kombinatorik und binomischer Satz (A. Halameisär)
 - 51 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Leopold Schmetterer, Wien
 - 52 Mit Bewegung geht es besser (E. Quaisser)
 - 53 Konstruktionen in einer begrenzten Zeichenebene (Th. Scholl)
 - 54 Rückblick auf die XVII. Internationale Mathematikolympiade 1975, VR Bulgarien
 - 54 Mathematikolympiaden in Österreich (Th. Mühlgassner/W. Ratzinger)
 - 55 Herleitung der Fläche unter der Parabel ohne Integralrechnung (M. Wilde)
 - 56 Mathematik in der Pädagogischen Hochschule „Wolfgang Ratke“ Köthen (W. Jungk)
 - 57 *alpha*-Spiegelmagazin (J. Lehmann)
 - 59 Spezialistenlager Junger Mathematiker des Bezirkes Leipzig
 - 60 Mathematik und Sport (Ch. Pollmer)
 - 62 Berufsbild: Diplom-Ingenieur für Landtechnik (H. Bausch/E. Schneider)
 - 63 Bei Freunden in Kuba zu Gast (W. Jungk)
 - 64 In freien Stunden · *alpha*-heiter
 - 72 Übung macht den Meister: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- IV. U-Seite: Im Zeichen des IX. Parteitages (J. Golde)

Heft 4

- 73 Bestimmung des Schwerpunktes eines Dreiecks (E. Schröder)
 - 75 Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Bachmann, Päd. Hochschule Halle
 - 75 XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – DDR-Olympiade
 - 77 Aus der Arbeit des NVA-Zirkels des Jugendobjekts der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena
 - 78 Von der Zahl zum Gesetz (Leseprobe)
 - 80 Kombinatorik und binomischer Satz, Teil 2 (A. Halameisär)
 - 82 Olympiadeaufgaben aus der Demokratischen Republik Vietnam
 - 83 Übung macht den Meister: Quadratische Funktionen
 - 84 Mathematik und Sport – Geometrie (Ch. Pollmer)
 - 86 In freien Stunden · *alpha*-heiter
 - 88 Über die Aufgabe, die Anzahl isomerer chemischer Verbindungen zu finden (W. Renneberg)
 - 91 XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Schulolympiade
- III. U-Seite: Proportionaleinstellung des Rechenstabs beim stöchiometrischen Rechnen (W. Renneberg)
- III./IV. U-Seite: Eine Aufgabe – verschiedene Lösungswege (L. Dimenstein/E. Quaisser)

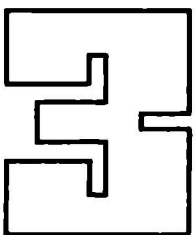
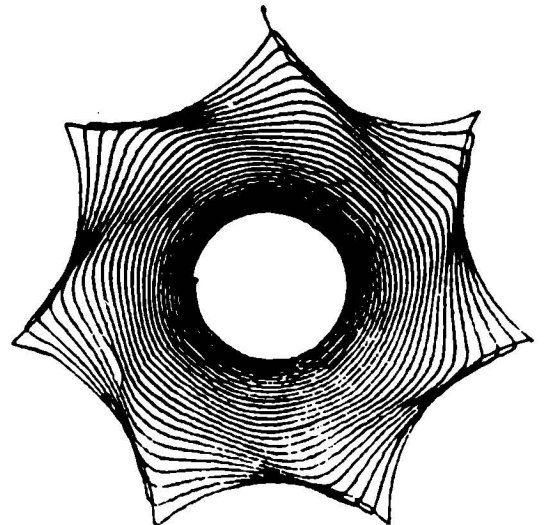
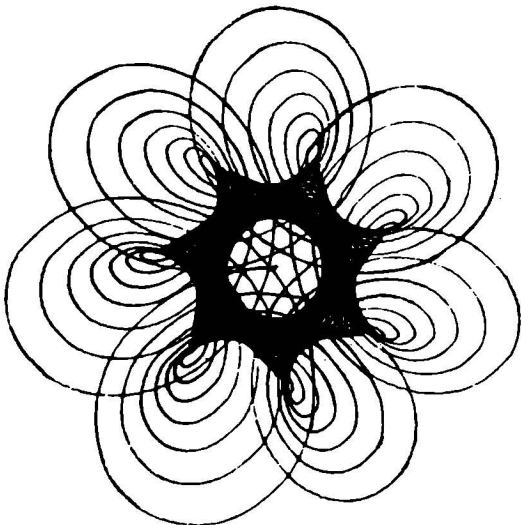
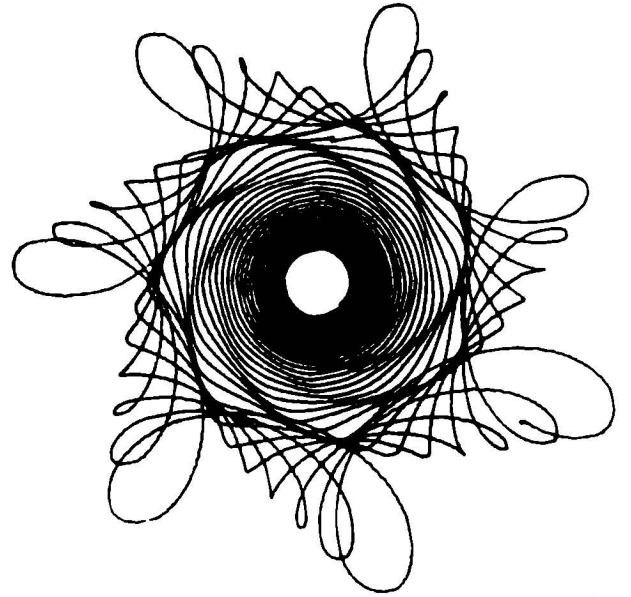
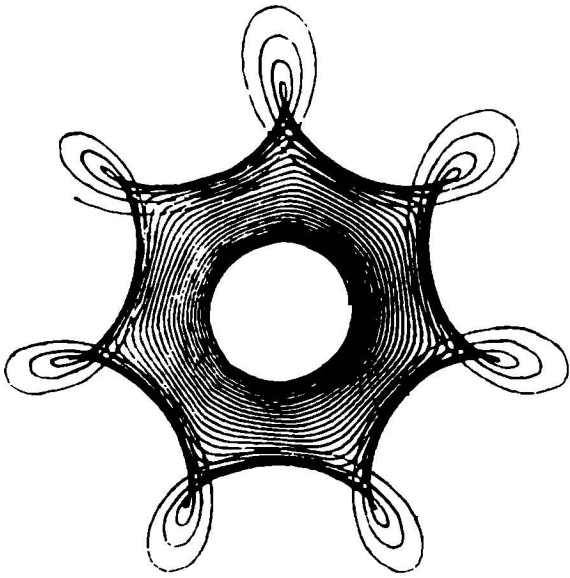
Heft 5

- 97 Mit Zeichenstift und Schablone: Wir lösen Gleichungen mit einer Variablen (J. Gronitz)
 - 99 Eine Aufgabe von Prof. Dr. M. Schneider, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
 - 100 *alpha* stellt vor: Kerstin Rudolf, Karl-Marx-Stadt
 - 101 Hochsymmetrische kombinatorische Strukturen (J. Pelikán)
 - 104 XVIII. Internationale Mathematikolympiade (Lienz/Wien)
 - 106 Mathematik und Musik: Melodien ordnen (U. Wilke)
 - 108 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
 - 111 Nobelpreisträger L. W. Kantorowitsch (H. Schilar/K. Schwarz)
 - 112 Das Käsekästchenspiel (Autorenkollektiv)
 - 113 Das Spiel des sechsfachen Sechsecks (L. Stammler)
 - 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter
 - 116 Wir arbeiten mit Venn-Diagrammen (A. Vrba)
- IV. U-Seite: Übung macht den Meister: Darstellende Geometrie

Heft 6

- 121 Halblogarithmisches und logarithmisches Netz (A. N. Kolmogorow)
 - 123 Wie man in der Sowjetunion Mathematiker wird (L. Kokin)
 - 124 $9 \circ 5 = 2$ Die „Uhr-Addition“ und andere Verknüpfungen (I. Lehmann)
 - 126 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
 - 129 Zehn Jahre *alpha*-Wettbewerb – Preisträger des *alpha*-Wettbewerbs 1975/76
 - 131 Aus der Arbeit der AG Mathematik der Oberschule I, Königs Wusterhausen (G. Schulz)
 - 131 Ein Gespräch in der Straßenbahn (A. P. Sawin/L. M. Fink)
 - 133 Hiddenseer Mathe-Skizzen
 - 135 Berufsbild: Vollmatrose der Handelsschiffahrt
 - 135 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Flachsmeyer, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
 - 136 Würfeleien (A. Halameisär)
 - 136 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit? (Leseprobe)
 - 138 In freien Stunden · *alpha*-heiter
 - 140 Lösungen: XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR, DDR-Olympiade, Klasse 10
 - 144 Übung macht den Meister: Arbeit mit trigonometrischen Funktionen
- III. U-Seite: Wir bauen Lampenmodelle
- IV. U-Seite: Porträt eines Wissenschaftlers
Zum 500. Todestag von Johannes Müller [Regiomontanus] (R. Tobias)

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat D. R. Lüders (Ber-
lin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz);
Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 9. Februar 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Grundgedanken der Netzplantechnik [9]*
Dr. G. Deweß, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 51 Eine Aufgabe von Prof. (em.) Dr. Ing. Dr. techn. h. c. Helmut Hein-
rich [10]
Technische Universität Dresden
- 52 Wir lösen lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorith-
mus, Teil 1 [9]
Dr. J. Gronitz, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 54 Kleine Fehler – große Auswirkungen [8]
Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln
- 57 Flußdiagramme (Leseprobe) [5]
Prof. Dr. Tamás Varga, Budapest
- 59 Magische Spielereien [5]
alpha-Ferienheft, zusammengestellt von StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- 61 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [8]
Korrespondenzzirkel des Bezirks Leipzig
FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig/OL R. Berg-
mann, Döbeln
Ein Verfahren zur mündlichen Lösung von quadratischen Gleichun-
gen mit ganzzahligen Koeffizienten [10]
Oberlehrer L. Dimenstein, Leningrad
- 62 Aufgaben aus der Praxis [5]
Diplomlehrer E. Knauth, Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz
- 63 Berufsbild: Technologe [8]
Dr. M. Wittwer, Ingenieurschule für Maschinenbau, Schmalkalden
- 64 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig; OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 66 In einem Pionierlager südlich von Moskau [5]
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau
Lösungen
alpha-Wettbewerb 6/76 und 1/77
- III. Umschlagseite: Spiele mit Hölzchen [5]
Dr. R. Thiele, Lektor im BSB B. G. Teubner, Leipzig
- IV. Umschlagseite: Nachgedacht – mitgemacht [5]
Aufgaben, die das Leben schreibt
Dr. E. Stöckel, Pädagogische Hochschule „N. K. Krupskaja“, Halle
- Seite I bis VIII: XVI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Lösungen zu den Aufgaben der Kreis- und Bezirksolympiade (Klassenstufen 5 bis 10)

* bedeutet: Artikel beziehungsweise Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Grundgedanken der Netzplan- technik

Es gibt in der Mathematik nur sehr selten Dinge, die innerhalb weniger Jahre von einer Sache der Spezialisten zur allgemein angewandten „Technik“ werden. Eines dieser Gebiete ist das der Netzpläne. Es gehört in die Graphentheorie, eine insgesamt noch junge Disziplin (Ansätze im 18. Jahrhundert, erstes Lehrbuch 1936), die sich heute sprunghaft entwickelt. 1958 begann man, unter den Graphen speziell die Netzpläne zu betrachten, und bereits 1965 gab es mehrere hundert Anwendungen dieser Überlegungen in allen hochindustrialisierten Ländern. Vom mathematischen Schwierigkeitsgrad her hätte die Netzplantechnik bereits einige tausend Jahre früher entwickelt werden können. Aber mathematische Disziplinen entstehen nicht als freie Erfindung weltabgeschiedener Gelehrter – erst in der Mitte unseres Jahrhunderts gab es ein wirkliches gesellschaftliches Bedürfnis für solche Planungsmethoden wie die Netzplantechnik und gab es elektronische Rechenanlagen als materielle Voraussetzung, diese Methoden auch effektiv anzuwenden.

Graphen

Ein Graph (in dem eingeschränkten Sinne, wie er für die Begründung der Netzplantechnik ausreicht) läßt sich durch zwei endliche Mengen charakterisieren: Eine Menge M von Objekten, die wir mit Großbuchstaben A, B, C, D usw. bezeichnen und „Knoten“ nennen, und eine Menge R von geordneten Paaren aus M . Jedes Element von R nennen wir einen „Bogen“ des Graphen. Zum Beispiel kann also (A, B) ein Element von R sein, A heißt dann Anfangsknoten und B Endknoten des Bogens (A, B) . Greifen wir zwei beliebige Knoten aus M heraus, etwa X und Y , und das Paar (X, Y) findet sich in R , so heißt X ein unmittelbarer Vorgänger von Y , Y ein unmittelbarer Nachfolger von X .

Jedem Graphen können wir auf vielerlei Weise Bilder in der Ebene zuordnen: Wir zeichnen die Knoten als kleine Kreise irgendwie in die Ebene und verbinden X mit Y durch einen Pfeil genau dann, wenn der Bogen (X, Y) in R ist.

Zum Beispiel stoßen wir auf einen Graphen, wenn wir von einem Wasserwerk W , einem Gaswerk G und einem Elektrizitätswerk E

je eine Leitung zu jedem der drei Häuser H_1, H_2, H_3 ziehen wollen:

$$M = \{W, G, E, H_1, H_2, H_3\}$$

$$R = \{(W, H_1), (W, H_2), (W, H_3), (G, H_1), (G, H_2), (G, H_3), (E, H_1), (E, H_2), (E, H_3)\}$$

Ein Bild dieses Graphen ist (Bild 1)

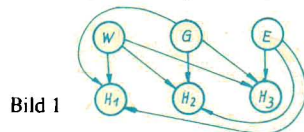


Bild 1

Ein anderes Bild desselben (!) Graphen ist (Bild 2)

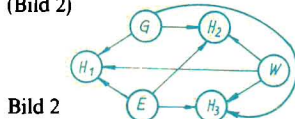


Bild 2

(Mancher Leser wird schon versucht haben, von diesem Graphen ein solches Bild zu zeichnen, bei dem sich die Pfeile nicht schneiden. Man kann beweisen, daß kein solches Bild gefunden werden kann.)

Ein Knoten X , für den es kein Z mit $(Z, X) \in R$ gibt (bei dem im Bild also kein Pfeil endet), heißt eine „Quelle“. In unserem Beispiel sind W, G und E Quellen. Entsprechend heißt ein Knoten X , für den es kein Y mit $(X, Y) \in R$ gibt, eine „Senke“. In unserem Beispiel sind H_1, H_2, H_3 Senken.

Eine Folge von Bögen $(H_1, H_2), (H_2, H_3), (H_3, H_4), \dots, (H_{k-1}, H_k)$ mit der Eigenschaft, daß jeweils der Endknoten eines Bogens der Anfangsknoten des nächsten ist, heißt eine Bahn $[H_1, H_2, \dots, H_k]$. Eine Bahn mit $H_k = H_1$ heißt ein Kreis.

Wir betrachten zur Erläuterung der Begriffe nochmals ein Beispiel (Bild 3):

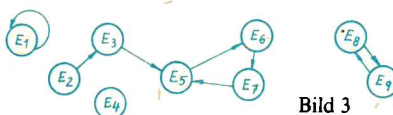


Bild 3

Alle Quellen: E_2, E_4

Alle Senken: E_4

Beispiele für Bahnen: $[E_2, E_3, E_5, E_6]$,

$[E_8, E_9, E_8, E_9]$.

Beispiele für Bahnen, die Kreise sind:

$[E_1, E_1], [E_7, E_5, E_6, E_7], [E_8, E_9, E_8]$

Das sind alle elementaren Kreise, nach Definition ist aber auch $[E_8, E_9, E_8, E_9, E_8]$ ein Kreis.

Definition: Ein Graph ohne Kreise, der genau eine Quelle und genau eine Senke hat, heißt Netzplan.

Netzpläne

Daß gerade die Netzpläne unter den Graphen eine wichtige Rolle spielen, hängt damit zusammen, daß man sie zur Beschreibung komplizierter Abläufe benutzen kann. Wir wollen als Beispiel das Errichten eines Bauwerkes betrachten. Die wichtigsten Ereignisse, die während des Bauprozesses eintreten, fassen

wir als Knoten eines Graphen auf. Es bezeichne etwa F die Fertigstellung der Fundamente und K die Fertigstellung des Kellergeschosses. Natürlicherweise muß erst das Ereignis F eintreten, ehe das Ereignis K eintreten kann. Das drücken wir dadurch aus, daß wir (F, K) in R aufnehmen. Dem Bogen (F, K) ordnen wir die Zeitdauer $d_{F,K}$ zu, die das Montieren des Kellergeschosses erfordert, seien das etwa 2 Tage. Im Bild 4 erscheint somit unter anderem $\rightarrow$ und man kann sofort ablesen, daß nach dem Ereignis F noch mindestens 2 Tage vergehen, bis das Ereignis K eintritt.



Bild 4

So ergibt sich insgesamt ein Graph, die Bögen entsprechen gewissen „Vorgängen“ beim Bau, zum Beispiel ist also (F, K) das „Montieren des Kellergeschosses“.

Logischerweise darf dieser Graph keinen Kreis enthalten, denn etwa der Kreis $[F, K, X, Y, F]$ würde doch bedeuten, daß K erst nach F eintreten kann, X erst nach K , Y erst nach X , F erst nach Y – es könnte also F erst nach F eintreten.

Nimmt man unter die Ereignisse noch „Beginn des Gesamtbauwerkes“ B und „Ende des Gesamtbauwerkes“ E auf, so muß B die einzige Quelle und E die einzige Senke des Graphen sein. Somit ist die Definition eines Netzplanes erfüllt.

Bei großen Bauvorhaben treten oft Hunderte von Ereignissen und Vorgängen auf, also Netzpläne mit Hunderten von Knoten und Bögen. Schon einfachste Fragen sind dann schwer zu beantworten wie etwa: Wann wird das Bauvorhaben abgeschlossen sein? Für welchen Zeitraum müssen bestimmte Zulieferungen bestellt werden? Ist es günstig, bei einem Vorgang Arbeitskräfte abzugeben, damit ein anderer beschleunigt wird? Wir betrachten nun im folgenden nur ein kleines Beispiel.

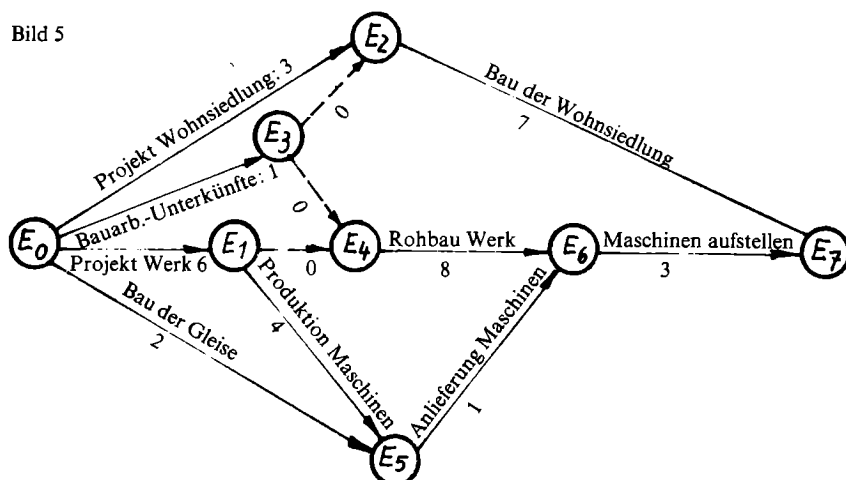
Beim Bau eines Werkes mit zugehöriger Wohnsiedlung treten stark vereinfacht folgende Vorgänge auf – die Dauer sei jeweils in Monaten angegeben:

Tabelle 1

Projektierung des Werkes	6 (E_0, E_1)
Projektierung der Wohnsiedlung	3 (E_0, E_2)
Bau der Gleise für Anlieferung der Maschinen	2 (E_0, E_3)
Aufstellen provisorischer Bauarbeiterunterkünfte	1 (E_0, E_3)
Produktion der Maschinen	4 (E_1, E_3)
Anlieferung der Maschinen	1 (E_3, E_6)
Bau der Wohnsiedlung	7 (E_2, E_7)
Rohbau des Werkes	8 (E_4, E_6)
Aufstellen der Maschinen, Fertigstellen des Werkes	3 (E_6, E_7)

Diese Vorgänge können wir als Bögen eines Netzplanes auffassen, der in Bild 5 dargestellt wird:

Bild 5



Dabei ist E_0 das Startereignis, jedes andere Ereignis E_i ist das Ereignis „Die Vorgänge, die zu den in E_i einmündenden Pfeilen gehören, sind alle beendet“. Zum Beispiel ist E_6 das Ereignis „Das Werk ist rohbaufertig und die Maschinen sind angeliefert“. E_1 ist das Ereignis „Das Werk ist projektiert“. Natürlich kann E_6 erst eintreten, nachdem E_1 eingetreten ist. Den entsprechenden Bogen (E_1 , E_6) kann man einsparen, man sieht das im Bild daran, daß von E_1 nach E_6 eine Bahn $[E_1, E_4, E_6]$ verläuft.

In unserem Bild treten auch (gestrichelt gezeichnet) drei „Scheinvorgänge“ mit der Dauer 0 auf. Scheinvorgänge können notwendig sein, um die Abhängigkeit der Vorgänge richtig wiederzugeben. E_1 bedeutet „Das Werk ist projektiert“, E_3 „Die Bauarbeiterunterkünfte sind aufgestellt“, E_4 „Das Werk ist projektiert, und die Bauarbeiterunterkünfte sind aufgestellt“.

Würde man E_1 und E_4 zu einem Knoten zusammenfassen, so würde E_3 auf einer Bahn vor (E_1 , E_5) liegen, wir würden also behaupten, die Projektion der Maschinen (E_1 , E_5) hätte die Fertigstellung der Bauarbeiterunterkünfte E_3 zur Voraussetzung. Es ist gar nicht so einfach, die Vorgänge richtig zu einem Netzplan zusammenzufassen!

Untersuchungen am Bild des Netzplanes

Man interessiert sich häufig für die frühesten Termine FT_i , zu denen die Ereignisse eintreten können. Die Berechnung beruht auf folgenden Überlegungen:

- Alle Ereignisse können nicht früher als zum Zeitpunkt 0 eintreten, zu dem das Gesamtvorhaben gestartet wird.
- Ist (E_i, E_j) mit Dauer d_{ij} ein Bogen des Netzplanes und E_i kann nicht früher als zum Zeitpunkt t_i eintreten, so kann E_j sicher nicht früher als zum Zeitpunkt $(t_i + d_{ij})$ eintreten. Liegt ein Bild des Netzplans vor, so kann man den Netzplan leicht von der Quelle her durchmustern, so daß man immer dann, wenn man ein t_i braucht, das entsprechende endgültige FT_i schon hat.

Tabelle 2 zeigt schematisch den Rechengang.

E_i , von d. die FT aller Vorgänger bekannt	alle Vorgänger	$FT_i \geq \dots$	$FT_i =$	kritische Vorgänger
E_0	—		0	—
E_3	E_0	$FT_0 + d_{03} = 0 + 1 = 1$	1	E_0
E_1	E_0	$FT_0 + d_{01} = 0 + 6 = 6$	6	E_0
E_5	E_0 E_1	$FT_0 + d_{05} = 0 + 2 = 2$ $FT_1 + d_{15} = 6 + 4 = 10$	10	E_1
E_4	E_1 E_3	$FT_1 + d_{14} = 6 + 0 = 6$ $FT_3 + d_{34} = 1 + 0 = 1$		
E_2	E_0 E_3	$FT_0 + d_{02} = 0 + 3 = 3$ $FT_3 + d_{32} = 1 + 0 = 1$	3	E_0
E_6	E_4 E_5	$FT_4 + d_{46} = 6 + 8 = 14$ $FT_5 + d_{56} = 10 + 1 = 11$		
E_7	E_2 E_6	$FT_2 + d_{27} = 3 + 7 = 10$ $FT_6 + d_{67} = 14 + 3 = 17$	17	E_6

Betrachten wir das an unserem Beispiel:

E_0 ist die Quelle, deshalb ist $FT_0 = 0$.

Nun suchen wir uns einen Knoten, wo die FT für alle Vorgänger schon bekannt sind, etwa E_3 – denn dieser hat nur E_0 als unmittelbaren Vorgänger. Folglich ist $FT_3 = FT_0 + d_{03} = 0 + 1 = 1$. Entsprechend erhalten wir auch für E_1 den Wert $FT_1 = FT_0 + d_{01} = 0 + 6 = 6$.

Als nächstes können wir uns E_5 vornehmen. Da E_0 Vorgänger von E_5 ist, muß nach Regel b) gelten $FT_5 \geq FT_0 + d_{05} = 0 + 2 = 2$. Da aber auch E_1 Vorgänger von E_5 ist, muß auch $FT_5 \geq FT_1 + d_{15} = 6 + 4 = 10$ gelten. Weitere unmittelbare Vorgänger hat E_5 nicht, es ist somit $FT_5 = 10$ der größere der beiden erhaltenen Werte 2 und 10 (da ja alle einmündenden Vorgänge abgearbeitet werden müssen). Wenn wie hier bei E_5 mehrere Vorgänger betrachtet werden mußten, merken wir uns den oder die „kritischen“ Vorgänger an, hier also E_1 . Hat ein Knoten überhaupt nur einen Vor-

gänger, so ist dieser auch kritischer Vorgänger.

Damit kennen wir alle frühesten Termine, insbesondere auch den frühesten Termin der Senke E_7 – frühestens nach 17 Monaten kann das Gesamtvorhaben abgeschlossen werden. Ausgehend von dieser 17 kann man nun „von hinten her“ ausrechnen, wann der späteste Termin ST_i ist, zu dem ein Ereignis eintreten muß, damit die Zeitdauer 17 eingehalten werden kann. Zum Beispiel muß E_2 spätestens nach $17 - 7 = 10$ Monaten eintreten.

Besonders wichtig ist es, von der Senke aus über die kritischen Vorgänger rückwärts zu gehen: Von E_7 war der kritische Vorgänger E_6 , von E_6 war er E_4 usw.:

$$E_7 - E_6 - E_4 - E_1 - E_0$$

Für diese Ereignisse wird sich stets $FT_i = ST_i$ ergeben, die entsprechenden Bögen (E_0, E_1), (E_1, E_4), (E_4, E_6), (E_6, E_7) bilden eine „kritische Bahn“ der Gesamtlänge 17. Verzögert sich einer dieser kritischen Vorgänge, so verzögert sich der Gesamtablauf. Will man den Gesamtablauf verkürzen, muß man auf der (oder, wenn es mehrere gibt, jeder) kritischen Bahn Zeit sparen. Dagegen wirken sich geringe Verzögerungen bei nichtkritischen Vorgängen nicht auf den Abschluß des Gesamtvorhabens aus.

In unserem Beispiel ist (E_2, E_7) nicht kritisch. Auch wenn wir beim entsprechenden Vorgang „Bau der Wohnsiedlung“ einige Arbeitskräfte abziehen, so daß der Vorgang nicht 7, sondern 9 Monate dauert, ändert sich nichts an der Gesamtdauer 17. Diese freigewordenen Arbeitskräfte können wir vielleicht dafür einsetzen, den kritischen Vorgang (E_4, E_6) von 8 auf 6 Monate zu verkürzen – dann

ergibt sich als neuer Abschlußtermin für das Gesamtvorhaben 15 Monate. (Nach jeder Änderung der d_{ij} müssen die FT_i und die kritischen Bahnen neu errechnet werden!) Auf diese Weise dient die Netzplantechnik dazu, Abläufe von Großvorhaben zu planen und die vorhandenen Arbeitskräfte und Maschinen rationell einzusetzen. Diese Technik ist nicht nur im Bauwesen anwendbar, sondern überall dort, wo ein Gesamtvorhaben aus vielen Teilvorgängen besteht. Selbst komplizierte medizinische Operationen sind so schon zeitlich analysiert worden, um im Interesse des Patienten die Dauer der Operation möglichst zu verkürzen.

Berechnung der frühesten Termine unabhängig vom Bild

Unser Verfahren, früheste und späteste Termine an einem Bild des Netzplans zu ermitteln, ist für größere Netzpläne nicht mehr geeignet. Man bearbeitet dann den abstrakten Netzplan selbst mit Hilfe von Rechenautomaten. Wir erläutern das wieder an unserem Beispiel. Wir legen eine Tabelle an (Tabelle 3), wo im Kreuzungspunkt der Zeile zum Knoten E_i mit der Spalte zum Knoten E_j gerade d_{ij} steht, falls $(E_i, E_j) \in R$ ist.

Nach Regel a) beginnen wir als erste Annäherung an die gesuchten FT mit einer Spalte aus lauter Nullen. Entsprechend Regel b) berechnen wir dann weitere Spalten nach folgendem Rezept:

Der nächste Wert in der Zeile E_i ist das Maximum aller folgenden Summen:

$$\left[\begin{array}{l} \text{„vorhandene Zahl“ } d_{ki} \\ \text{in der Spalte } E_i \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{letzter Näherungswert in derjenigen} \\ \text{Zeile } k, \text{ in der diese „vorhandene} \\ \text{Zahl“ steht} \end{array} \right]$$

In der Tabelle haben wir diese Rechnung unterbrochen, als nächste wäre die Zeile E_6 dran: Vorhanden in der Spalte E_6 sind die Zahlen 8 und 1. Letzte Zahl in der Zeile, wo die 8 steht, ist die 6, $8+6=14$. Letzte Zahl in der Zeile, wo die 1 steht, ist die 10, $1+10=11$. Das Maximum dieser Summen ist die 14, diese kommt also an die eingerahmte Stelle.

Mit diesem Rezept rechnen wir solange, bis zwei aufeinanderfolgende Spalten in unserer

Rechnung völlig gleich sind – diese Werte sind dann die FT_i .

Auf den genauen Beweis dafür müssen wir hier verzichten. Die Grundidee ist dieselbe wie bei der Untersuchung am Bild des Netzplans. Auch in Tabelle 2 wurde für E_6 gerechnet: $6+8=14$, $10+1=11$. Da wir in Tabelle 3 mit einer Spalte aus lauter Nullen beginnen, kann es jetzt aber vorkommen, daß wir am Anfang Werte $t_i < FT_i$ herausbekommen und weiterverwenden – erst wenn zwei Spalten der Rechnung völlig gleich sind, haben sich für alle FT die richtigen Werte ergeben. Dafür brauchen wir aber nicht mühsam nach solchen Knoten zu suchen, wo die FT aller Vorgänger schon bekannt sind.

▲ Aufgabe ▲ Im Ferienlager

Im Ferienlager ist fast schon Mittagszeit, da kommt eine Gruppenleitung auf die Idee, für den Nachmittag eine großartige Veranstaltung „Kuchen, Kultur und knifflige Fragen“ vorzubereiten, mit der die Gruppe sich vorgenommen hatte, das Lagerleben zu bereichern. Sie beruft für 13 Uhr eine kurze Gruppenversammlung ein und überlegt sich folgende Vorgangsliste (Zeiteinheit ist die Viertelstunde), s. Tabelle 4.

Tabelle 4

Gruppenversammlung,		
Bildung der Kommissionen	2	(E_0, E_1)
<i>Aufgaben der Kommission „Raum“:</i>		
in Lagerleitung freien Raum		
erfragen	1	(E_1, E_4)
Raum säubern und ausgestalten	2	(E_4, E_7)
Plakate malen und im Lager		
anbringen	2	(E_4, E_8)
Lautsprecherdurchsagen mit		
Hinweis auf Plakate	2	(E_8, E_9)
Gäste hereinlassen	1	(E_9, E_{11})
<i>Aufgaben der Kommission „Ratespiel“:</i>		
Fragen ausdenken		
Fragen für Spielrunden zusammenstellen und Spielrunden mit Kulturprogramm koordinieren	2	(E_6, E_{11})
<i>Aufgaben der Kommission „Kultur“:</i>		
Kulturprogramm ausdenken		(E_1, E_5)
Programm an die Kommission „Ratespiel“ übergeben	0	(E_5, E_6)
Programm üben	5	(E_5, E_{11})

Tabelle 3

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	$t_i^{(1)}$	$t_i^{(2)} \dots \rightarrow FT_i$
E_0		6	3	1		2			0	0
E_1					0	4			0	6
E_2								7	0	3
E_3			0		0				0	1
E_4							8		0	6
E_5						1			0	10
E_6								3	0	
E_7									0	

Eine Aufgabe von Prof. (em.) Dr. Ing. Dr. techn. h. c. Helmut Heinrich

Technische Universität Dresden

▲1631▲ Es seien $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sechs voneinander verschiedene Punkte im Raum und $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ die Mittelpunkte der Strecken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$, und es mögen weder die drei Punkte M_1, M_3, M_5 noch die drei Punkte M_2, M_4, M_6 auf einer Geraden liegen.

Man beweise, daß es einen Punkt P im Raum gibt, durch den alle Seitenhalbierenden des Dreiecks $M_1M_3M_5$ und alle Seitenhalbierenden des Dreiecks $M_2M_4M_6$ gehen.

Aufgaben der Kommission „Kuchen“:

Kaffee in der Lagerküche bestellen	1	(E_1, E_2)
Kaffee abholen	1	(E_{10}, E_{11})
Tassen und Teller besorgen	2	(E_1, E_7)
in Lagerleitung Geld besorgen	1	(E_1, E_3)
Kuchen kaufen	4	(E_3, E_7)
kleine Preise für Raterunden kaufen	4	(E_3, E_{11})
Tische decken	2	(E_7, E_9)
<i>Aufgabe der Lagerküche:</i>		
Kaffee kochen	2	(E_2, E_{10})

a) Zeichne den Netzplan! (Zur Erleichterung wurden schon die Ereignisnummern für alle Vorgänge mit angegeben, wer will, kann es ja mal ohne diese Hilfestellung versuchen.)

b) Bestimme die frühesten Termine für alle Ereignisse in Zeiteinheiten!

c) Die Veranstaltung soll zum frühestmöglichen Zeitpunkt beginnen – um wieviel Uhr kann das sein?

d) Es gibt zwei Vorgänge, die man klugerweise erst zum spätestmöglichen Zeitpunkt beginnt! Was ist mit der Lagerküche also zu vereinbaren?

e) Was ist die kritische Bahn, die der beste Organisator sichert?

Zum Vergleich mit eurer eigenen Lösung: Es gibt ein Bild für den Netzplan, auf dem sich keine Pfeile schneiden. Ohne Netzplantechnik hätte man kaum herausbekommen, daß die Veranstaltung schon um 15.30 Uhr beginnen kann, und ohne exakten Plan wäre das trotz Eifers aller Gruppenmitglieder kaum zu schaffen. Die Thermosbehälter mit Kaffee möchten 15.15 Uhr abholbereit sein. Die kritische Bahn ist $0-1-3-7-9-11$.

G. Deweß

Wir lösen lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus

Teil 1

Gauß hat auf dem Gebiet der praktischen Mathematik wesentliche Ergebnisse erzielt und diese angewandt. Zu diesen wissenschaftlichen Leistungen gehören u. a.:

die Methode des Fehlerausgleichs mittels der Methode der kleinsten Quadrate, das Gaußsche Eliminierungsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme sowie Interpolations- und Integrationsformeln. In diesem Beitrag wollen wir lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminierungsverfahren lösen.

1.1. Ein Beispiel

Der von Gauß entwickelte Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme soll zuerst an einem Beispiel betrachtet werden.

Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 11 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 5y - 3z = 14 \end{cases} \text{ zu lösen.}$$

Die Lösung erfolgt durch schrittweise Elimination der Variablen. Zunächst wird die erste Gleichung so umgeformt, daß bei x der Koeffizient 1 steht (Division durch 3). Dann wird die Variable x aus der zweiten und dritten Gleichung eliminiert (Subtraktion des Zweifachen bzw. Einfachen der neuen ersten Gleichung von der zweiten bzw. dritten Gleichung). Man erhält nach diesem ersten Schritt

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ -\frac{7}{3}y + \frac{8}{3}z &= -\frac{13}{3} \\ \frac{13}{3}y - \frac{8}{3}z &= \frac{31}{3} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird die erste Gleichung beibehalten, und die zweite Gleichung wird so umgeformt, daß bei y der Koeffizient 1 steht (Division durch $-\frac{7}{3}$). Dann wird aus der dritten Gleichung y eliminiert (Subtraktion des $\frac{13}{7}$ -fachen der neuen zweiten Gleichung von der dritten Gleichung). Als Ergebnis der Umformung im zweiten Schritt erhält man

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ y - \frac{8}{7}z &= \frac{13}{7} \\ \frac{48}{21}z &= \frac{48}{21} \end{aligned}$$

Im dritten Schritt werden die ersten beiden Gleichungen beibehalten, und es wird die dritte Gleichung so umgeformt, daß bei z der

Koeffizient 1 steht (Division durch $\frac{48}{21}$):

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ y - \frac{8}{7}z &= \frac{13}{7} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nach dieser äquivalenten Umformung in drei Schritten eine sogenannte „Dreiecksgestalt“ (man spricht auch von einem „gestaffelten System“) und kann sofort aufgelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ y &= \frac{13}{7} + \frac{8}{7} \cdot 1 = 3 \\ x &= \frac{11}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Die Probe (z. B. Einsetzen in das Ausgangsgleichungssystem) zeigt die Richtigkeit der Lösung.

Bei dem vorliegenden Gleichungssystem kann der Eliminationsprozeß auch in anderer und einfacherer Weise durchgeführt werden (man kann z. B. auch das Gleichungssystem umordnen, Gleichungen vertauschen usw.). Die dargelegte Art und Weise der schrittweisen Elimination wurde gewählt, um eine einheitliche Vorgehensweise für beliebige lineare Gleichungssysteme zu haben, um einen Algorithmus für die Lösung linearer Gleichungssysteme anzugeben.

Man kann die Vorgehensweise bei der schrittweisen Elimination der Unbekannten auch in einem Rechenschema (Tabelle 1) erfassen.

Das Ziel des Eliminationsprozesses besteht also darin, das Gleichungssystem durch äquivalente Umformung auf „Dreiecksgestalt“ zu bringen. Die Lösung des Dreieckssystems ist leicht möglich.

Nach der Erläuterung des Eliminierungsverfahrens am Beispiel von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen soll der Algorithmus allgemein für den Fall $n=3$ angegeben werden.

1.2. Der Gaußsche Algorithmus

Es wird ein lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Variablen, das eindeutig lösbar sein soll, betrachtet.

Das System habe die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

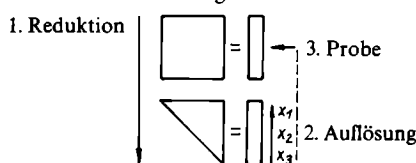
wobei $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{13}, a_2$ und a_3 reelle Zahlen, x_1, x_2 und x_3 die Variablen sind.

Das Ziel des Gaußschen Algorithmus besteht wie bereits angegeben darin, das System äquivalent so umzuformen, daß es in „Dreiecksgestalt“ vorliegt. Das Dreieckssystem wird dann aufgelöst.

Für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergeben sich somit folgende Arbeitsschritte:

1. Reduktion des Systems auf „Dreiecksgestalt“
2. Auflösung des Dreieckssystems
3. Probe

Zur Veranschaulichung dient Bild 1.



Die einzelnen Arbeitsschritte sollen in einem Rechenschema zusammengefaßt werden. Man erhält: 1. Reduktion

1. Schritt: Elimination der Unbekannten x_1 aus der zweiten und dritten Gleichung (Division der ersten Gleichung durch a_{11} liefert Gleichung (1'); Subtraktion des a_{21} -fachen der Gleichung (1') bzw. a_{31} -fachen der Gleichung (1') von (2) bzw. (3) liefert (2') bzw. (3'))

Damit hat man das Gleichungssystem nach dem ersten Schritt.

Falls $a_{11}=0$ gilt, ordnet man vor der Umformung um. Falls einer der Koeffizienten bei x_1 in der zweiten bzw. dritten Gleichung (a_{12}, a_{13}) gleich Null ist, wird im 1. Schritt diese Gleichung ohne Umformung übernommen.

Für die Koeffizienten der Gleichungen nach dem ersten Schritt gilt:

$$\begin{aligned} a_{12}^{(1)} &= \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad a_{13}^{(1)} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad a_1^{(1)} = \frac{a_1}{a_{11}}, \\ a_{22}^{(1)} &= a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}^{(1)}, \\ a_{23}^{(1)} &= a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} &= a_{32} - a_{31} \cdot a_{12}^{(1)}, \\ a_{33}^{(1)} &= a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}^{(1)}, \\ a_2^{(1)} &= a_2 - a_{21} \cdot a_1^{(1)}, \\ a_3^{(1)} &= a_3 - a_{31} \cdot a_1^{(1)}. \end{aligned}$$

2. Schritt: Elimination der Unbekannten x_2 aus der dritten Gleichung (Übernahme der ersten Gleichung ohne weitere Umformung; Division der Gleichung (2') durch $a_{22}^{(1)}$ liefert (2''); Subtraktion des $a_{32}^{(1)}$ -fachen der Gleichung (2'') von (3') liefert (3''))

Damit hat man das Gleichungssystem nach dem zweiten Schritt. Falls $a_{22}^{(1)}=0$ gilt, ordnet man vor der weiteren Umformung um. Für die Koeffizienten der Gleichungen nach dem zweiten Schritt gilt:

Tabelle 1

Schritt Nr.	Gleichung	Koeffizient bei			Absolutglied	Hinweise
		x	y	z		
0	(1)	3	2	-1	11	(1) : 3 = (1')
	(2)	2	-1	2	3	(2) - 2 · (1') = (2')
	(3)	1	5	-3	14	(3) - 1 · (1') = (3')
1	(1')	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	keine weitere Umformung
	(2')	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{13}{3}$	
	(3')	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{31}{3}$	
2	(1'')	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	(3'') : $\frac{48}{21}$ = (3''')
	(2'')	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7}$	
	(3'')	0	0	$\frac{48}{21}$	$\frac{48}{21}$	
3	(1''')	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$x = \frac{11}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2$ $y = \frac{13}{7} + \frac{8}{7} \cdot 1 = 3$ $z = 1$
	(2''')	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7}$	
	(3''')	0	0	1	1	

Tabelle 2

		Koeffizient bei			
		x_1	x_2	x_3	
0	(1)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1
	(2)	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2
	(3)	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3
Ausgangssystem					
1	(1')	1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_1^{(1)}$
	(2')	0	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_2^{(1)}$
	(3')	0	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_3^{(1)}$
Gleichungssystem nach dem 1. Schritt					
2	(1'')	1	$a_{12}^{(2)}$	$a_{13}^{(2)}$	$a_1^{(2)}$
	(2'')	0	1	$a_{23}^{(2)}$	$a_2^{(2)}$
	(3'')	0	0	$a_{33}^{(2)}$	$a_3^{(2)}$
Gleichungssystem nach dem 2. Schritt					
Gleichungssystem nach dem 3. Schritt: gestaffeltes System					
3	(1''')	1	$a_{12}^{(3)}$	$a_{13}^{(3)}$	$a_1^{(3)}$
	(2''')	0	1	$a_{23}^{(3)}$	$a_2^{(3)}$
	(3''')	0	0	1	$a_3^{(3)}$

$$a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)}, a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)}, a_1^{(2)} = a_1^{(1)}$$

$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, a_2^{(2)} = \frac{a_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot \frac{a_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

3. Schritt: Schaffung des Koeffizienten 1 bei x_3 in der dritten Gleichung (Übernahme der Gleichungen (1'') und (2'') ohne Umformung; Division der Gleichung (3'') durch $a_{33}^{(2)}$).

Man erhält das gestaffelte System.

Das gestaffelte System wird nun von unten

nach oben aufgelöst, und es wird eine Probe durchgeführt.

3. Probe: Bei der Probe kann man die errechneten Werte in das Ausgangsgleichungssystem einsetzen. Man kann auch die sogenannte „Spaltensummenprobe“ durchführen.

Es muß nämlich gelten

$$\sum_{i=1}^3 s_i x_i = s \text{ mit } s_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}$$

$$i = 1, 2, 3 \text{ und } s = \sum_{j=1}^3 a_j.$$

Bei einem System von n Gleichungen mit n Variablen, das eindeutig lösbar ist, geht man analog vor:

Im ersten Schritt wird die Unbekannte x_1 aus der zweiten, dritten, ..., n ten Gleichung eliminiert. Im zweiten Schritt wird die Unbekannte x_2 aus der dritten, vierten, ..., n ten Gleichung des Systems, das man nach dem ersten Schritt erhalten hat, eliminiert. Dieser Prozeß wird fortgesetzt, bis man Dreiecksgestalt hat.

Bei der Vielzahl der Rechnungen ist es zweckmäßig, Rechenkontrollen durchzuführen. Solche Rechenkontrollen sind möglich mit Hilfe der sogenannten Zeilensummenprobe. Man bildet die Zeilensummen, wendet auf diese Zeilensummen auch den Gaußschen Algorithmus an und prüft nach, ob der Wert, den man erhält, wenn man den Algorithmus auf die Zeilensumme anwendet, mit der neuen Zeilensumme übereinstimmt.

Im Schritt Nr. 0 z. B. erhält man bei dem oben angegebenen Beispiel ($n=3$) als Zeilensummen

$$s_1 = \sum_{j=1}^3 a_{1j} + a_1,$$

$$s_2 = \sum_{j=1}^3 a_{2j} + a_2$$

$$\text{und } s_3 = \sum_{j=1}^3 a_{3j} + a_3.$$

Der Gaußsche Algorithmus angewandt auf s_1, s_2 und s_3 liefert im 1. Schritt s_1', s_2' und s_3' .

Bei richtiger Rechnung muß gelten

$$s_1' = s_1^{(1)}, s_2' = s_2^{(1)}$$

$$\text{und } s_3' = s_3^{(1)} \text{ mit}$$

$$s_1^{(1)} = 1 + a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} + a_1^{(1)},$$

$$s_2^{(1)} = a_{22}^{(1)} + a_{23}^{(1)} + a_2^{(1)}$$

$$\text{und } s_3^{(1)} = a_{32}^{(1)} + a_{33}^{(1)} + a_3^{(1)}.$$

J. Gronitz

Dieser Beitrag wird in Heft 4/77 fortgesetzt.

Fünfbändige „Mathematische Enzyklopädie“ in Vorbereitung

Der sowjetische Verlag „Sowjetskaja Enziklopedija“ plant in den Jahren 1977–82 die Herausgabe einer fünfbändigen „Mathematischen Enzyklopädie“ in einer Auflage von 100 000 Exemplaren.

Das fundamentale Werk – dem Umfang nach auf dem Gebiet der Mathematik einmalig in der Welt – wird in alphabetischer Ordnung 15 000 Termini und etwa 7 400 Artikel umfassen. Davon entfallen 400 umfangreiche Artikel auf wichtige Teilgebiete und Richtungen in der Mathematik (z. B. „Algebra“), 2 000 auf wichtige mathematische Begriffe (z. B. „Differential“), Probleme (z. B. „Waring-Problem“), Methoden (z. B. „Winogradow-Methode“) und 5 000 auf knappe Definitionen verschiedenartiger mathematischer Begriffe. Der Preis pro Band beträgt 4 Rubel 50 Kopeken.

(Bearbeitet nach Angaben in „Sowjetische Bücher“ von Fachlehrer O. Dietze, Wähltitz)

Kleine Fehler – große Auswirkungen

In den Naturwissenschaften, in der Technik, in der Ökonomie, in der Planung und Leitung der Volkswirtschaft und in vielen anderen Bereichen der Praxis werden in immer größerem Umfang mathematische Verfahren angewandt und benötigt.

Die Kompliziertheit der Aufgaben und der Rechenaufwand zu deren Lösung wachsen ständig. Die Lösung solcher Aufgaben erfolgt meist mit Hilfe von Näherungsverfahren; die Daten, die in die Rechnung eingehen, sind mit Fehlern behaftet (z. B. Meßwerte) und die Fehler pflanzen sich beim Rechnen fort (z. B. durch Rundungen). Es ist deshalb notwendig, Fehlerbetrachtungen durchzuführen und u. a. zu untersuchen, welche Arten von Fehlern auftreten, wie man Fehler erfassen kann, wie sich Fehler fortpflanzen und mit welcher Genauigkeit Ergebnisse vorliegen. In diesem Beitrag wollen wir nach der Betrachtung einiger Beispiele eine Frage untersuchen, nämlich, wie sich in die Rechnung eingehende Fehler (Eingangsfehler) bei einfachen Rechenoperationen fortpflanzen.

An zwei einfachen Beispielen sollen die Auswirkungen kleiner Fehler verfolgt werden:

Beispiel 1: Berechne die Summe

$S = 6,64 \cdot 7,14 + 8,13 \cdot 8,64$ auf eine Stelle nach dem Komma!

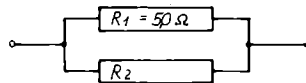
Diese Aufgabe der Näherungsrechnung soll hier auf vier Wegen gelöst werden. Diese vier Wege sind durch folgendes Vorgehen festgelegt: Entweder werden jeweils Teilaufgaben exakt gelöst (Gleichheitszeichen!) oder alle im jeweiligen Term vorkommenden Dezimalzahlen werden auf eine Stelle nach dem Komma gerundet (Zeichen „ $\approx$ “: „genähert gleich“):

$$\begin{aligned} S &\approx 6,6 \cdot 7,1 + 8,1 \cdot 8,6 \\ &= 46,86 + 69,66 = 116,52 \approx 116,5 \\ &\approx 46,9 + 69,7 \\ &= 116,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 47,4096 + 70,2432 = 117,6528 \approx 117,7 \\ &\approx 47,4 + 70,2 \\ &= 117,6 \end{aligned}$$

Dieses einfache Beispiel zeigt, daß unterschiedliche Vorgehensweisen beim Rechnen und Runden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen und daß man unbedingt Fragen der Fehlerfortpflanzung und Genauigkeitsfragen diskutieren muß.

Beispiel 2: Zwei Widerstände R_1 und R_2 sind als Bauelement zu einer Parallelschaltung verlötet. Auf einem ist die Größe aufgedruckt: $R_1 = 5,0 \Omega$. Durch Einschalten dieser Parallelschaltung in einen Stromkreis und Ausführen entsprechender Messungen soll der Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung bestimmt werden und abschließend soll nach der Formel $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ der zweite Teilwiderstand R_2 berechnet werden. Ein Schüler ermittelt $R = 4,9 \Omega$, ein anderer $R = 4,8 \Omega$. Zu welchem Ergebnis führen beide Meßwerte?



Durch Umstellen von $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ nach R_2 ergibt sich:

$$R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$$

Durch Einsetzen des Meßwertes und Berechnen ergibt sich jeweils:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{5,0 \Omega \cdot 4,9 \Omega}{5,0 \Omega - 4,9 \Omega} & R_2 &= \frac{5,0 \Omega \cdot 4,8 \Omega}{5,0 \Omega - 4,8 \Omega} \\ &= \frac{24,5 \Omega^2}{0,1 \Omega} & &= \frac{24,0 \Omega^2}{0,2 \Omega} \\ &= 245 \Omega & &= 120 \Omega \end{aligned}$$

Geringe Änderungen in den Ausgangswerten führen hier zu großen Auswirkungen im Ergebnis.

Nach diesen Beispielen, die die Notwendigkeit von Fehlerbetrachtungen unterstreichen, die die Auswirkungen von Fehlern zeigen, wollen wir die Fortpflanzung von Eingangsfehlern bei einfachen Rechenoperationen näher untersuchen.

In Klasse 7 lernten bzw. lernen wir kennen:

Definition 1: Die Differenz zwischen dem Näherungswert a_F und dem wahren Wert a_W heißt absoluter Fehler Δa : $\Delta a = a_F - a_W$.

Der absolute Fehler Δa hat dieselbe Maßeinheit wie wahrer Wert a_W und Näherungswert a_F . Der absolute Fehler kann sowohl positiv als auch negativ sein.

Definition 2: Der Quotient (das Verhältnis) aus dem absoluten Fehler Δa und dem wahren

Wert a_W heißt relativer Fehler $\frac{\Delta a}{a_W}$.

Der relative Fehler ist eine unbenannte Zahl. Hat z. B. eine Strecke die wahre Länge $a_W = 3,24$ km und ist die Länge dieser Strecke zu $a_F = 3,20$ km gemessen worden, so gilt laut obigen Definitionen:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 3,20 \text{ km} - 3,24 \text{ km} = -0,04 \text{ km} \\ &= -4 \cdot 10^{-1} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta a}{a_W} = \frac{-0,04 \text{ km}}{3,24 \text{ km}} = -0,001 \approx 0,1\%$$

Der relative Fehler wird häufig in Prozent angegeben, wobei $1 \approx 100\%$ gesetzt wird.

Aus den Definitionen 1 und 2 ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

■ Für jede beliebige Zahl s folgt aus $b_W = a_W + s$ und $b_F = a_F + s$ stets $\Delta b = \Delta a$.

Zum Beispiel gilt für $a_W = 0,06$ und $a_F = 0,1$ sowie für $b_W = 6311,86$ und $b_F = 6311,9$

$$\Delta b = \Delta a = 0,04.$$

■ Für jede von 0 verschiedene Zahl s und für $a_W \neq 0$ folgt aus $b_W = s a_W$ und $b_F = s a_F$ stets

$$\frac{\Delta b}{b_W} = \frac{\Delta a}{a_W}.$$

So gilt z. B. für $a_W = 0,15$ und $a_F = 0,12$ sowie für $b_W = 1500$ und $b_F = 1200$

$$\frac{\Delta b}{b_W} = \frac{\Delta a}{a_W} = 0,2 \approx 20\%.$$

Für die Praxis typisch und von großer Bedeutung ist die folgende Problemstellung:

▲ Was kann bei gegebenem Näherungswert a_F und gegebener Abschätzung des absoluten Fehlers $|\Delta a| \leq 10^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ über den zugehörigen wahren Wert a_W ausgesagt werden?

Aus Definition 1 folgt $a_W = a_F - \Delta a$ und aus $|\Delta a| \leq 10^n$ $-10^n \leq \Delta a \leq 10^n$. Hieraus folgt $a_F - 10^n \leq a_W \leq a_F + 10^n$. Das Ergebnis lautet: a_F und a_W stimmen in den Grundziffern, die in $a_F \cdot 10^n$ vor dem Komma stehen, mit einer Einschränkung überein: Eine Änderung dieser Grundziffern von a_W kann höchstens dadurch eintreten, daß die letzte der genannten Grundziffern durch ihren Vorgänger oder Nachfolger ersetzt wird. So folgt aus $a_F = 216341,62$ und $|\Delta a| \leq 10^2$ entweder $a_W = 2163xx,xxx\dots$ oder $a_W = 2162xx,xxx\dots$ oder $a_W = 2164xx,xxx\dots$ sowie aus $b_F = 5,79999999$ und $|\Delta b| < 0,6 \cdot 10^{-6}$ wegen $0,6 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$ entweder $b_W = 5,799999xxx\dots$ oder $b_W = 5,799998xxx\dots$ oder $b_W = 5,800000xxx\dots$. Durch das Zeichen x sind Dezimalstellen fixiert worden, über deren Belegung keine Aussage gemacht werden kann.

Es ist üblich, bei einem Näherungswert die Grundziffern, die für den zugehörigen wahren Wert nichts aussagen, durch Runden wegzulassen und dafür eine etwas größere Fehler-schranke in Kauf zu nehmen.

Die so stehen bleibenden Grundziffern heißen **zuverlässige Grundziffern**. Bei einem Näherungswert a_F mit $|\Delta a| \leq 10^n$ sind alle Grundziffern, deren Stellenwertfaktor gleich oder größer als 10^n ist, zuverlässig.

So wird $a_F = 5,79999999$ mit $|\Delta a| < 0,6 \cdot 10^{-6}$ abgeändert in $a^* = 5,800000$ mit $|\Delta a^*| < 0,61 \cdot 10^{-6} < 0,7 \cdot 10^{-6}$.

Wir lernen die Dreiecksungleichung kennen

Die Dreiecksungleichung werden wir in den folgenden Abschnitten als Hilfsmittel zu Fehlerabschätzungen verwenden.

Satz 1: Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$, (Dreiecksungleichung).

Beweis: Nach der Definition der Addition reeller Zahlen und der Definition des absoluten Betrages gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| + |b|, \text{ falls } a \text{ und } b \text{ gleiche} \\ \quad \text{Vorzeichen haben oder} \\ \quad \text{mindestens eine dieser} \\ \quad \text{Zahlen 0 ist.} \end{array} \right.$$

$$|a+b| = \begin{cases} |a|-|b|, & \text{falls } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen haben und } |a| \geq |b| \text{ gilt.} \\ |b|-|a|, & \text{falls } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen haben und } |a| < |b| \text{ gilt.} \end{cases}$$

Da für beliebige reelle Zahlen a und b stets die Ungleichungen

$$|a|-|b| \leq |a+b| \text{ und } |b|-|a| \leq |a+b| \text{ gelten, folgt}$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|. \text{ W. z. b. w.}$$

Selbständig beweisen wir den folgenden Satz. Die in diesem Satz enthaltene Relation wird ebenfalls als Dreiecksungleichung bezeichnet.

Satz 2: Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $|a-b| \leq |a|+|b|$. Als erste Anwendung der Dreiecksungleichung soll folgende Frage beantwortet werden:

▲▲ Was kann bei gegebenem Näherungswert $a_F \neq 0$ und gegebener Abschätzung des relativen Fehlers $\left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-l}$ mit $l \in \mathbb{F}$ und $l \neq 0$ über den zugehörigen wahren Wert $a_W \neq 0$ ausgesagt werden?

$$\text{Aus } \left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-l} \text{ folgt } |\Delta a| \leq |a_W| \cdot 10^{-l}.$$

Mittels der Dreiecksungleichung (Satz 2) folgt aus $a_W = a_F - \Delta a$ die Ungleichung $|a_W| \leq |a_F| + |\Delta a|$. Die Dezimalzahldarstellung von $|a_F|$ laute $|a_F| = a_N \cdot 10^N + a_{N-1} \cdot 10^{N-1} + \dots$. Dabei sind $a_N, a_{N-1}, \dots$ Grundziffern und N ist die kleinste ganze Zahl, für die $a_N > 0$ gilt. a_F wird nach oben abgeschätzt durch $|a_F| < (a_N + 1) \cdot 10^N$. Durch Einsetzen in $|\Delta a| \leq |a_W| \cdot 10^{-l}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\Delta a| &\leq (|a_F| + |\Delta a|) \cdot 10^{-l} \\ &= |a_F| \cdot 10^{-l} + |\Delta a| \cdot 10^{-l} \\ |\Delta a| &< (a_N + 1) \cdot 10^N \cdot 10^{-l} + |\Delta a| \cdot 10^{-l} \\ &= (a_N + 1) \cdot 10^{N-l} + |\Delta a| \cdot 10^{-l}. \end{aligned}$$

Nach den Regeln für das Umformen von Ungleichungen folgt hieraus schrittweise:

$$\begin{aligned} |\Delta a| \cdot (1 - 10^{-l}) &< (a_N + 1) \cdot 10^{N-l} \\ |\Delta a| &< \frac{a_N + 1}{1 - 10^{-l}} \cdot 10^{N-l} \end{aligned}$$

Wegen $10^{-l} \leq 0,1$ und damit $1 - 10^{-l} \geq 0,9$

$$\text{gilt für } a_N < 9 \quad \frac{a_N + 1}{1 - 10^{-l}} \leq 10 \text{ und}$$

damit $|\Delta a| < 10 \cdot 10^{N-l} = 10^{N-l+1}$. Für $N=9$ ergibt sich $|\Delta a| < 1,2 \cdot 10^{N-l+1}$. a_F und a_W stimmen hiernach in den ersten l Dezimalstellen $a_N, a_{N-1}, a_{N-2}, \dots, a_{N-l+1}$ überein. Eine Änderung dieser Grundziffern bei a_W kann höchstens dadurch eintreten, daß die letzte der genannten Grundziffern im Falle $a_N < 9$ ersetzt wird durch ihren Vorgänger oder Nachfolger und im Falle $a_N = 9$ ersetzt wird durch ihren Vorvorgänger, Vorgänger, Nachfolger oder Nachnachfolger.

$$\text{Ein Näherungswert } a_F \neq 0 \text{ mit } \left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-l}$$

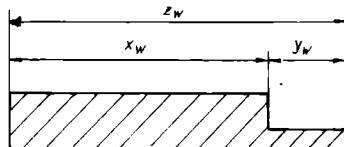
hat also l zuverlässige Grundziffern, deren erste (von links) in a_F die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist.

So folgt z. B. aus $a_F = 0,0007538$ und

$$\left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-4} \text{ entweder } a_W = 0,0007538xxx\dots \text{ oder } a_W = 0,0007537xxx\dots \text{ oder } a_W = 0,0007539xxx\dots \text{ Hier sind wiederum anstelle von } x \text{ beliebige Grundziffern einzusetzen.}$$

Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz

Wir wollen von einem Beispiel ausgehen:



Meßwerte für die wahren Längen x_W und y_W des abgebildeten Werkstückes mögen mit der Schiebelehre ermittelt werden. Wird der Nominus der Schiebelehre mitbenutzt, können mittels Schiebelehre Längen bis auf 0,1 mm genau abgelesen werden. Dies bedeutet, daß der absolute Fehler jeder mittels Schiebelehre bestimmten Länge, sofern keine vermeidbaren Einstellungs- und Ablesfehler begangen werden, höchstens gleich 0,05 mm ist. Mittels Schiebelehre mögen für x_F und y_F die folgenden Meßwerte gefunden werden:

$$\begin{aligned} x_F &= 67,8 \text{ mm}; |\Delta x| \leq 0,05 \text{ mm} \\ y_F &= 13,2 \text{ mm}; |\Delta y| \leq 0,05 \text{ mm} \end{aligned}$$

Was kann auf Grund dieser beiden Messungen über die Gesamtlänge $z = x + y$ unseres Werkstückes ausgesagt werden? Gemäß der Formel $z = x + y$ gelten für den wahren Wert z_W und den zu x_F und y_F gehörigen Näherungswert z_F der Gesamtlänge $z = x + y$ die Formeln $z_W = x_W + y_W$ und $z_F = x_F + y_F$. Hieraus folgt: $\Delta z = z_F - z_W = x_F + y_F - (x_W + y_W) = x_F - x_W + y_F - y_W$, d. h. $\Delta z = \Delta x + \Delta y$. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 3: Der absolute Fehler einer Summe ist gleich der Summe der absoluten Fehler der Summanden:

$$\begin{aligned} z &= x + y \\ \Delta z &= \Delta x + \Delta y \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Dreiecksungleichung (Satz 1) folgt daraus die Ungleichung $|\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 4: Der Betrag des absoluten Fehlers einer Summe ist nie größer als die Summe der Beträge der absoluten Fehler der Summanden:

$$\begin{aligned} z &= x + y \\ |\Delta z| &\leq |\Delta x| + |\Delta y| \end{aligned}$$

Kehren wir zu unserem Beispiel zurück! Da die wahren Werte x_W und y_W nicht bekannt sind, können Δx und Δy nicht berechnet werden und damit auch nicht Δz . Doch gemäß Satz 4 ist eine Abschätzung des absoluten Fehlers möglich:

$$\text{Aus } |\Delta x| \leq 0,05 \text{ mm und } |\Delta y| \leq 0,05 \text{ mm folgt mittels } |\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \quad |\Delta z| \leq 0,05 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,10 \text{ mm. Nunmehr berechnen}$$

wir gemäß $z_F = x_F + y_F$ den zu x_F und y_F gehörigen Näherungswert der Gesamtlänge:

$$z_F = 67,8 \text{ mm} + 13,2 \text{ mm} = 81,0 \text{ mm.}$$

Wegen $|\Delta z| \leq 0,1 \text{ mm}$ gilt

$$81,0 \text{ mm} - 0,1 \text{ mm} \leq z_W \leq 81,0 \text{ mm} + 0,1 \text{ mm.}$$

Die Dezimalzahldarstellung von z_W lautet entweder $z_W = 80,9xxx\dots \text{ mm}$ oder

$$z_W = 81,0xxx\dots \text{ mm oder } z_W = 81,1 \text{ mm.}$$

Anstelle des Zeichens x dürfen wieder beliebige Grundziffern eingesetzt werden. Das erhaltene Ergebnis wird in der Form $z_W = 81,0 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$ fixiert.

Die folgenden Sätze beweisen wir selbständig: **Satz 5:** Der absolute Fehler einer Differenz ist gleich der Differenz der absoluten Fehler von Minuend und Subtrahend:

$$\begin{aligned} z &= x - y \\ \Delta z &= \Delta x - \Delta y \end{aligned}$$

Satz 6: Der absolute Fehler einer Differenz ist betragsmäßig nie größer als die Summe der absoluten Beträge der absoluten Fehler von Minuend und Subtrahend:

$$\begin{aligned} z &= x - y \\ |\Delta z| &\leq |\Delta x| + |\Delta y| \end{aligned}$$

Im Mathematikunterricht rechnen wir mit Näherungswerten, z. B. Rundungswerten, ohne eine Fehlerabschätzung explizit aufzuschreiben. Hier sind also, eventuell bis auf Grundziffern „0“, nur zuverlässige Grundziffern jeweils anzugeben.

Damit wir im Ergebnis wiederum nur zuverlässige Grundziffern angeben, stützen wir uns auf zwei Faustregeln, deren eine jetzt formuliert wird.

▲ **Faustregel 1:** Gehört beim Näherungswert a_F zur letzten zuverlässigen Grundziffer der Stellenwertfaktor 10^a und beim Näherungswert b_F zur letzten zuverlässigen Grundziffer der Stellenwertfaktor 10^b und ist n das Maximum der Zahlen n_a und n_b , so sind in $a_F + b_F$ und $a_F - b_F$ jeweils alle Grundziffern, deren Stellenwertfaktor nicht kleiner als 10^n ist, zuverlässig.

Zum Formulieren der Faustregel wurde der Begriff des Maximums zweier Zahlen benutzt, den wir zumindest implizit vom Bestimmen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen mittels Primfaktorzerlegung kennen:

Definition 3: Als Maximum m zweier Zahlen s und t wird die Zahl m bezeichnet, für die gilt $m = s$, falls $s \leq t$ und $m = t$, falls $s > t$ ist.

Motivation und Grenzen dieser Faustregel folgen aus den Sätzen 4 und 6 und aus der eingangs unter dem Zeichen ▲ betrachteten Problemstellung.

Beispiele für das Rechnen mit Näherungswerten:

$$0,00051 + 7,28 \approx 0,00 + 7,28 = 7,28$$

$$1834,1 - 1834,23874 \approx 1834,1 - 1834,2 = -0,1$$

$$34,1 + 1,7 + 3,8 - 17,2 + 11,3 - 7,2 + 2,7 + 9,3$$

$$+ 11,2 - 11,2 \approx 38$$

Im letzten Beispiel ist es wegen der großen Zahl von Summanden nicht sinnvoll, gemäß Faustregel 1 im Ergebnis eine Stelle nach dem Komma anzugeben: Ist der Betrag des absoluten Fehlers jedes Summanden durch 0,05

nach oben abzuschätzen, so läßt sich der Betrag des absoluten Fehlers des Ergebnisses nur durch $10 \cdot 0,05 = 0,5$ nach oben abschätzen.

Absoluter und relativer Fehler eines Produktes

Den folgenden Betrachtungen legen wir die Formel $z = xy$ zugrunde, wobei bei gegebenen x und y jeweils z zu berechnen ist. Für wahre Werte gelte $z_W = x_W \cdot y_W$ und für ihre Näherungswerte entsprechend $z_F = x_F \cdot y_F$. Aus beiden Gleichungen folgt $\Delta z = x_F \cdot y_F - x_W \cdot y_W$. Wegen $-x_F \cdot y_W + x_F y_W = 0$ läßt sich diese Gleichung in der folgenden Form schreiben: $\Delta z = x_F y_F - x_F y_W + x_F y_W - x_W y_W$. Mittels Distributivgesetz und Definition 1 ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}\Delta z &= x_F(y_F - y_W) + y_W(x_F - x_W) \\ \Delta z &= x_F \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x\end{aligned}$$

(Später werden wir bei der Herleitung einer Formel für den relativen Fehler eines Produktes von dieser Gleichung ausgehen.) Nach Definition 1 gilt $y_W = y_F - \Delta y$. Durch Einsetzen folgt jetzt:

$$\begin{aligned}\Delta z &= x_F \cdot \Delta y + (y_F - \Delta y) \cdot \Delta x \\ \Delta z &= x_F \cdot \Delta y + y_F \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Mittels Dreiecksungleichung und da für alle reellen Zahlen a und b $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ gilt, ergibt sich:

$|\Delta z| \leq |x_F| \cdot |\Delta y| + |y_F| \cdot |\Delta x| + |\Delta x| \cdot |\Delta y|$
Die erhaltenen Ergebnisse fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 7: Für den absoluten Fehler eines Produktes $z = xy$ gilt

$\Delta z = x_F \cdot \Delta y + y_F \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \Delta y$ und
 $|\Delta z| \leq |x_F| \cdot |\Delta y| + |y_F| \cdot |\Delta x| + |\Delta x| \cdot |\Delta y|$
Als Anwendung lösen wir die folgende Aufgabe:

Aufgabe 1: Ein Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Geschwindigkeit und Fahrzeit werden gemessen zu:

$$\begin{aligned}v_F &= 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}; |\Delta v| \leq 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ t_F &= 97 \text{ s}; |\Delta t| \leq 0,5 \text{ s}\end{aligned}$$

Welchen Weg s hat dieses Fahrzeug in der Zeit t zurückgelegt?

Lösung: Wegen $s = v \cdot t$ gilt gemäß Satz 7
 $|\Delta s| \leq |v_F| \cdot |\Delta t| + |t_F| \cdot |\Delta v| + |\Delta v| \cdot |\Delta t|$
Damit gilt erst recht:
 $|\Delta s| \leq 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 0,5 \text{ s} + 97 \text{ s} \cdot 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} + 0,5 \text{ s} \cdot 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Hieraus folgt schrittweise:

$$\begin{aligned}|\Delta s| &\leq \frac{48 \cdot 0,5}{3600} \text{ km} + \frac{97}{3600} \text{ km} + \frac{0,5}{3600} \text{ km} \\ &< \frac{49 \cdot 0,5}{3500} \text{ km} + \frac{105}{3500} \text{ km} + \frac{0,7}{3500} \text{ km} \\ &= \frac{7 \cdot 0,5}{500} \text{ km} + \frac{15}{500} \text{ km} + \frac{0,1}{500} \text{ km} \\ &= 0,007 \text{ km} + 0,03 \text{ km} + 0,0002 \text{ km} \\ &< 0,04 \text{ km}\end{aligned}$$

Aus Geschwindigkeit und Zeit berechnet sich der zurückgelegte Weg zu:

$$\begin{aligned}s_F &= v_F \cdot t_F = 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 97 \text{ s} = \frac{48 \cdot 97}{3600} \text{ km} \\ &= \frac{4656}{3600} \text{ km} = 1,29 \dots \text{ km}.\end{aligned}$$

Die zurückgelegte Fahrstrecke beträgt also

$$s_W = (1,3 \pm 0,05) \text{ km}.$$

Für den relativen Fehler eines Produktes gilt eine einfachere Formel als für den absoluten Fehler. Diese soll jetzt hergeleitet werden. In die oben bei einem Zwischenschritt erhaltene Formel $\Delta z = x_F \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x$ wird jetzt x_F durch $x_W + \Delta x$ ersetzt:

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x_W + \Delta x) \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x \\ \Delta z &= x_W \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Durch Division beider Seiten mit $z_W = x_W \cdot y_W$ und nachfolgendem Kürzen ergibt sich:

$$\frac{\Delta z}{z_W} = \frac{\Delta y}{y_W} + \frac{\Delta x}{x_W} + \frac{\Delta x}{x_W} \cdot \frac{\Delta y}{y_W}$$

Satz 8: Der relative Fehler eines Produktes ist gleich der Summe aus dem relativen Fehler des ersten Faktors, dem relativen Fehler des zweiten Faktors und dem Produkt dieser beiden relativen Fehler.

$$z = xy$$

$$\frac{\Delta z}{z_W} = \frac{\Delta x}{x_W} + \frac{\Delta y}{y_W} + \frac{\Delta x}{x_W} \cdot \frac{\Delta y}{y_W}$$

Mittels Dreiecksungleichung ergibt sich für den relativen Fehler eines Produktes die Ungleichung:

$$\left| \frac{\Delta z}{z_W} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{x_W} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y_W} \right| + \left| \frac{\Delta x}{x_W} \right| \cdot \left| \frac{\Delta y}{y_W} \right|$$

Aufgabe 2: Die eine Rechteckseite a ist mit der Abschätzung für den relativen Fehler $\left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 0,002$, die andere Rechteckseite b entsprechend mit $\left| \frac{\Delta b}{b_W} \right| \leq 0,001$ bestimmt worden. Was folgt hieraus für den relativen Fehler des Flächeninhaltes $A = ab$? Wieviel Dezimalstellen, gezählt von der ersten von „0“ verschiedenen an, sind in A_F zuverlässig?

Aufgabe 3: Berechne den Umfang $u = \pi d$ eines Kreises aus der Kreiszahl $\pi_F = 3,14$; $|\Delta \pi| \leq 0,002$ und dem Durchmesser $d_F = 6,8 \text{ cm}$; $|\Delta d| \leq 0,05 \text{ cm}$!

Aufgabe 4: Berechne den Flächeninhalt $A = a^2$ eines Quadrates aus der Seitenlänge $a_F = 7,34 \text{ dm}$; $|\Delta a| \leq 0,005 \text{ dm}$!

Die Aufgabe 4 zeigt uns, daß oft in guter Näherung für den relativen Fehler eines Produktes $z = xy$ gilt:

$$\frac{\Delta z}{z_W} \approx \frac{\Delta x}{x_W} + \frac{\Delta y}{y_W}$$

Absoluter und relativer Fehler eines Quotienten

Hier sollen wir zunächst den angegebenen Satz selbständig beweisen und die abgedruckte Aufgabe selbständig lösen.

Satz 9: Absoluter und relativer Fehler eines Quotienten $z = \frac{x}{y}$ genügen den Formeln:

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{y_F} - \frac{x_W}{y_W \cdot y_F} \cdot \Delta y; y_F \neq 0; y_W \neq 0$$

$$\frac{\Delta z}{z_W} = \frac{\Delta x}{x_W} - \frac{\Delta y}{y_W} - \frac{\Delta y}{y_F} \cdot \left(\frac{\Delta x}{x_W} - \frac{\Delta y}{y_W} \right); y_F \neq 0; y_W \neq 0; x_W \neq 0$$

Aus Satz 9 folgt, daß für den relativen Fehler eines Quotienten $z = \frac{x}{y}$ oft in guter Näherung

$$\frac{\Delta z}{z_W} \approx \frac{\Delta x}{x_W} - \frac{\Delta y}{y_W} \text{ gilt.}$$

Aufgabe 5: Die Dichte ρ eines homogenen Körpers ist durch die Formel $\rho = \frac{m}{V}$ bestimmt.

Dabei sind m die Masse und V das Volumen des Körpers. Masse und Volumen eines Körpers aus Eisen werden bestimmt zu:

$$\begin{aligned}V_F &= 127 \text{ cm}^3; |\Delta V| \leq 0,5 \text{ cm}^3 \\ m_F &= 1000 \text{ g}; |\Delta m| \leq 0,5 \text{ g}\end{aligned}$$

Berechne nach diesen Angaben die Dichte ρ_W dieses Körpers!

Abschließend wird die bereits angekündigte zweite Faustregel, die sich mittels der Sätze 8 und 9 und der eingangs unter dem Zeichen $\blacktriangle$ betrachteten Problemstellung motivieren läßt, formuliert.

$\blacktriangle$ Faustregel 2: Besitzt der Näherungswert a_F l_a aufeinanderfolgende zuverlässige Grundziffern, deren erste (von links) in a_F die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist, besitzt der Näherungswert b_F l_b Grundziffern mit den gleichen Eigenschaften, und ist l das Minimum der Zahlen l_a und l_b , so besitzen $a_F \cdot b_F$ und $a_F : b_F$ jeweils l aufeinanderfolgende zuverlässige Grundziffern, deren erste (von links) in $a_F \cdot b_F$ bzw. in $a_F : b_F$ die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist. Wenn z. B. der Näherungswert 7,28 drei zuverlässige Grundziffern hat und wenn der Näherungswert 0,0041 zwei aufeinanderfolgende zuverlässige Grundziffern hat, deren erste in 0,0041 die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist, so sind in $7,28 \cdot 0,0041$ und $7,28 : 0,0041$ jeweils zwei aufeinanderfolgende Grundziffern, deren erste im jeweiligen Ergebnis die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist, zuverlässige.

$$7,28 \cdot 0,0041 = 0,0298 \dots \approx 0,030$$

$$7,28 : 0,0041 = 177, \dots \approx 1800$$

W. Träger

Bildmappe: C. F. Gauß

Im September 1977 gibt der Verlag *Bild und Heimat* eine Bildserie über C. F. Gauß heraus. Diese eignet sich besonders für die Gestaltung von Wandzeitungen, Bildserien in Mathematikabinetten, sie kann auch als Anerkennung für gute Leistungen in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern oder für vorbildliche außerunterrichtliche Arbeit überreicht werden.

Technische Daten: Bildmappe mit zweifarbigem Buchdruck-Umschlag sowie einführendem Text; 9 Inhaltsmotive in Bromsilberdruck mit erläuternden Rückseitentexten, Preis: 2,- M. Bestellungen erbeten bis Mitte Juli 1977 an:

Verlag Bild und Heimat, 98 Reichenbach, Roßplatz 15
Red. alpha

Wo benutzt man Flußdiagramme?

Hast du schon einmal von elektronischen Rechenmaschinen gehört? (Der englische Name dieser Maschine lautet Computer, ausgesprochen: Kompjuter.) Es gibt Maschinen dieser Art, die in einer Sekunde mehr Rechenarbeit leisten, als du im ganzen Leben fertigbringen würdest, und solltest du auch zeitlebens immerfort rechnen. Und obendrein erledigen sie derart komplizierte Rechnungen, die der Mensch ohne Maschinen überhaupt nicht bewältigen könnte. Auch was die Arbeitsgenauigkeit und Zuverlässigkeit angeht, steht der Mensch diesen Maschinen sehr nach. Allerdings „verrechnet“ sich auch eine Maschine hier und da, aber ein Mensch würde bei solcher Arbeit viele tausend Fehler machen. Diese Maschinen arbeiten äußerst schnell, genau und zuverlässig und können für die verschiedensten Zwecke verwendet werden; von selbst „können“ sie aber überhaupt nichts. Sie verrichten nur das, worauf man sie eingestellt, programmiert hat. Schleicht sich ins Programm ein ganz kleiner Fehler ein, so stehen sie schon still oder liefern die unsinnigsten Ergebnisse. Sie können nicht begreifen, was man von ihnen verlangt. Sie haben eben keinen Verstand. Deshalb ist es so wichtig, daß wir bei der Programmierung einer Rechenmaschine sehr genau durchdenken, was die Maschine verrichten soll. Wir gliedern die Arbeit der Maschine in Teile, so wie wir es auch bisher bei den Flußdiagrammen getan haben. Die Flußdiagramme sind wichtige Hilfsmittel zur Programmierung von Maschinen.

8

Flußdiagramme

Reihenfolgebestimmung

1. Alles, was du hier siehst, geschieht an einem Morgen. Ordne die Bilder nach der richtigen Reihenfolge, und nummeriere sie mit den Zahlen 1, 2, 3, ...!



Ich wasche mich



Ich stehe auf



Ich wache auf



Ich reibe mir die Zähne



Ich frühstücke



Ich packe meine Sachen zusammen



Ich gehe zur Schule



Ich sehe mich an

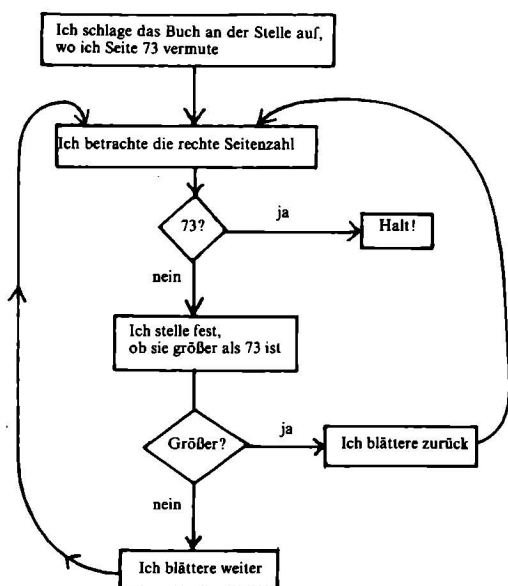


Ich putze mir die Zähne

1

Es ist langweilig, denselben Text noch einmal abzuschreiben. Und nebenbei bemerkt, wievielfach sollen wir es denn tun? Die Wiederholung ist aber auch überflüssig. Es genügt, zwei Pfeile an der richtigen Stelle zu zeichnen, damit wir wissen, wie es weitergeht.

Hier ist die verbesserte Figur:

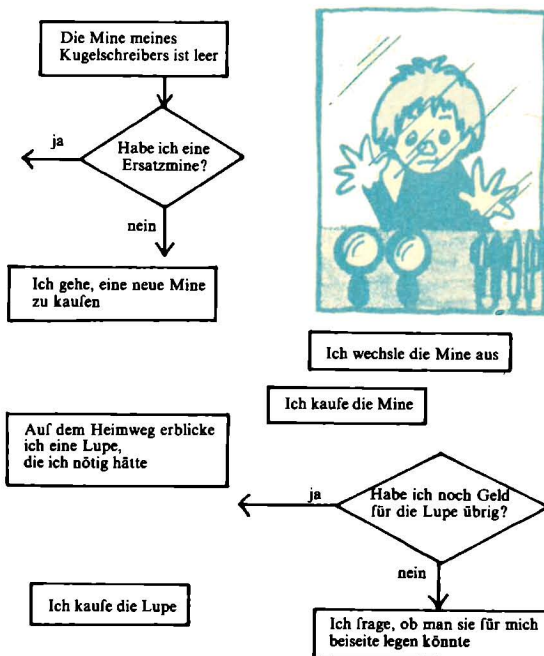


6

Entscheidungen

Setze das Zeichnen von Pfeilen fort!

In den Rahmen mit dieser Form $\diamond$ findest du Fragen, die auf zweifache Weise beantwortet werden können.



3

2. Wie sind die Aufgaben anzuordnen? Du kannst die richtige Reihenfolge durch Pfeile ausdrücken.



2

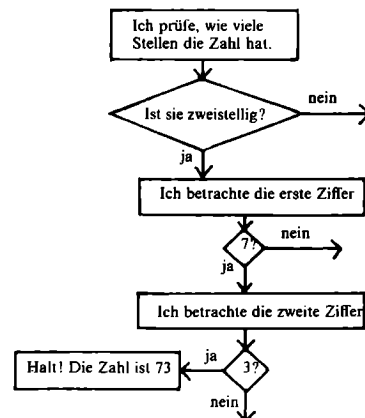
Der Pfeil führt an eine schon berührte Stelle zurück. Wir haben eine Rundreise unternommen, einen Zyklus beschrieben. Wenn du diese (zyklische) Vorschrift befolgst, kannst du die gesuchte Seitenzahl leichter finden, als wenn du nur in einer Richtung oder planlos hin und her blätterst. Auch die Figur fällt einfacher, kürzer aus, wenn wir Zyklen anwenden.

Die Vorschrift ist aber auch so nicht ganz genau, nicht ausführlich genug. Wie stellen wir denn fest, ob eine Zahl gerade 73 oder größer oder kleiner als 73 ist?

Wir zeichnen jetzt das Flußdiagramm (das Anweisungssystem) dieser Aufgabe.

73? Größer? Kleiner?

Setze die Zeichnung bei jedem „nein“-Pfeil fort!



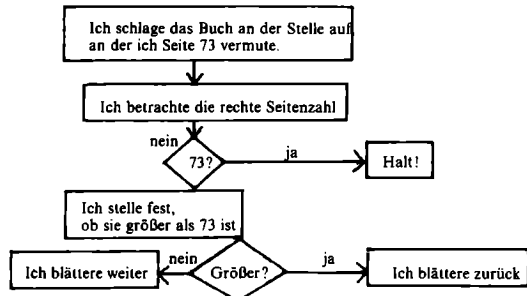
7

Wie suche ich in einem Buch die Seite 73?

Zum Beispiel so:



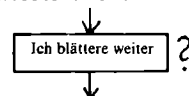
Mit Geduld kommt man auch so zu Seite 73. Es gibt aber noch eine bessere Methode:



Wir sind aber noch nicht fertig. Um weiterzukommen, benötigen wir weitere Anweisungen.

4

1. Aufgabe. Was für einen Rahmen würdest du nach



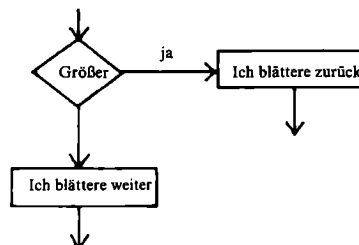
zeichnen? Was würdest du in diesen Rahmen schreiben?

2. Aufgabe. Was für einen Rahmen würdest du nach



zeichnen? Was würdest du in diesen Rahmen schreiben?

3. Aufgabe. Setze die Zeichnung von da an fort!

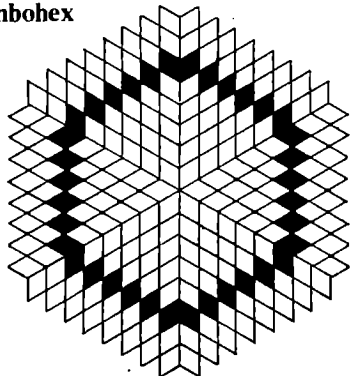


5

Und hier die Lösung der Knochelei:

Die Karte wird so weit gebogen, daß der schmale Streifen durch die runde Öffnung gezogen werden kann. Durch die entstehende Schlaufe wird eine Streichholzschachtel geschoben; die Aufgabe ist gelöst.

Rhombohex



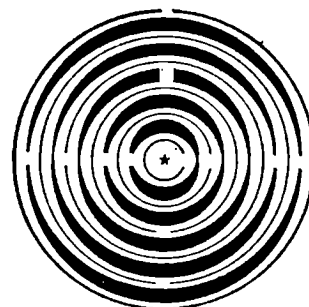
Rhombohex ist ein hexagonales Muster, das mit Rhomben so ausgelegt wird, wie es die Figur zeigt. Es besteht aus einer weißen Innenfläche, einem schwarzen Ring und einer weißen Außenfläche. Das Besondere an der Figur ist, daß die weiße Innenfläche genau so viele Steine haben soll wie die Umrandung. Das Bild zeigt die Lösung der Aufgabe mit der geringst möglichen Zahl von Steinen.

8

Magische Spielereien

alpha-Ferienheft

Irrgarten



Zahlen-Magie

Wir können das Alter eines Freundes erraten. Wir lassen ihn zu diesem Zwecke sein Alter mit 10 multiplizieren und davon das Produkt einer beliebigen einstelligen Zahl mit 9 subtrahieren. Nennt er uns das Ergebnis, sagen wir ihm sofort sein Alter.

Beispiel: Ralph ist 15 Jahre alt; er rechnet: $15 \cdot 10 = 150$; Produkt einer beliebigen einstelligen Zahl, z. B. $5 \cdot 9 = 45$; $150 - 45 = 105$.

Ralph nennt uns die Zahl 105, und wir haben nur die ersten beiden Ziffern als gemeinsame Zahl mit der letzten Ziffer zu addieren, so können wir das Alter nennen. Denn $10 + 5 = 15$.

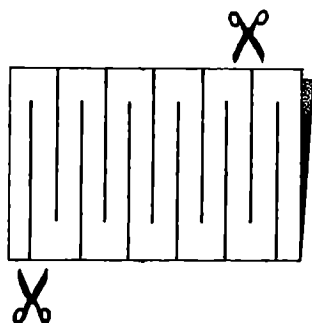
1

Gewandter Kletterer

Allgemeines Gelächter wird ausbrechen, wenn du einen Anwesenden bittest, durch eine Postkarte zu kriechen.

Verschiedene werden lachen, weil sie das für unmöglich halten, andere werden vielleicht deshalb schmunzeln, weil sie diesen Trick schon kennen.

So wird's gemacht: Du faltest eine Postkarte in der Mitte und schneidest sie unserer Abbildung entsprechend ein, abwechselnd einen Schnitt vom Mittelfalz zum Außenrand, dann einen Schnitt vom Außenrand zum Mittelfalz. Achte darauf, daß du nirgends durchschneidest! Abschließend wird der Mittelfalz vom ersten bis zum letzten Einschnitt getrennt. Das Ergebnis dieser Schneiderei ist ein großer Papierring, durch den jeder, selbst der umfangreichste Anwesende, hindurchsteigen kann.



6

Magisches Quadrat

Ein großes Quadrat – wir zeichnen es auf eine Tafel und legen Kreide bereit – ist in 16 kleine Quadrate aufgeteilt.

Wer findet vom Quadrat 13 aus den Weg zum Ausgang (Quadrat 4), ohne ein Feld mehrfach zu benutzen?

Lediglich Quadrat 13 darf mehrmals benutzt werden.

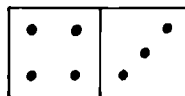
Lösung: Die Quadrate müssen in folgender Reihenfolge benutzt werden:

13, 14, 13, 9, 10, 11, 15, 16, 12, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Gewußt, wie!

Gero sagt zu Bernd: „Nimm einen Dominostein! Ich werde wissen, welchen du genommen hast.“



3

Der Magische Würfel

Nimm einen Würfel und faß ihn oben und unten an! Die oberste, somit zugedeckte Zahl multiplizierst du mit 5, addierst 3, verdoppelst die Summe und addierst die unten zugedeckte Zahl.

Nun nenne mir das Ergebnis, und sofort nenne ich dir die beiden zugedeckten Points.

Beispiel: Nehmen wir an, die Points 1 und 6 wurden zugedeckt.

Der Mitspieler rechnet: $1 \cdot 5 = 5$; $5 + 3 = 8$; $8 \cdot 2 = 16$; $16 + 6 = 22$, wenn die 1 oder $6 \cdot 5 = 30$; $30 + 3 = 33$; $33 \cdot 2 = 66$, $66 + 1 = 67$, wenn die 6 die obere Zahl ist. Er nennt uns als Ergebnis 22 oder 67. In jedem Falle subtrahieren wir die Zahl 6 und erhalten die beiden gesuchten Points des Würfels.

Das Labyrinth



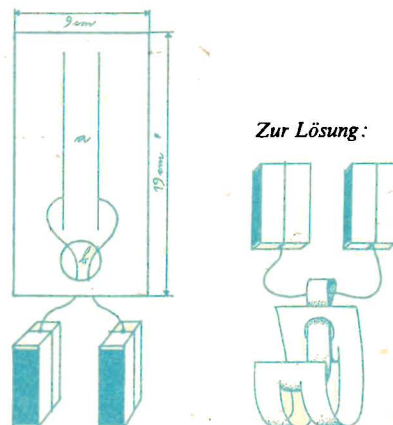
Irrgarten in Hampton Court, England. Dieses Labyrinth ist zu bewältigen, befolgt man die Vorschrift „Gehe immer an der rechten Wand entlang!“

2

Befreite Schachteln

Aufgabe dieser Knobelei ist es, 2 gefesselte Schachteln zu befreien. Die Schachteln sollen, ohne die Schnur von ihnen zu lösen, von der Karte entfernt werden.

Dieses Knobelspiel läßt sich schnell anfertigen.



Du nimmst ein Stück Karton und schneidest den 2,5 Zentimeter breiten Streifen (a) und die runde Öffnung (b) – sie hat einen Durchmesser von 3 Zentimetern – ein. 2 leere Streichholzschachteln verbindest du durch einen Faden.

7

Bernd nimmt den Stein mit den 4 und 3 Augen.

Nun sagt Gero:

„Multipliziere die erste Augenzahl mit 5 und addiere 3! Verdoppele dieses Ergebnis und addiere die zweite Augenzahl! Sag mir dein Ergebnis!“

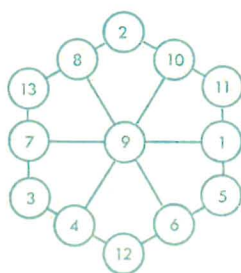
Bernd sagt die Zahl 49.

Gero subtrahiert davon 6, erhält 43 und liest daraus ab, daß Bernd den Stein mit den Augen 4 und 3 genommen hat.

Magische Kreise

Im Sechseck sind die Zahlen 1 bis 13 eingetragen. Je drei der Zahlen liegen auf einer der insgesamt 9 Geraden. Beachte, daß für sechs dieser Geraden die Summe ihrer Zahlen gleich ist:

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 13 &= 13 + 8 + 2 = 2 + 10 + 11 \\ &= 5 + 6 + 12 = 10 + 9 + 4 = 23 \end{aligned}$$

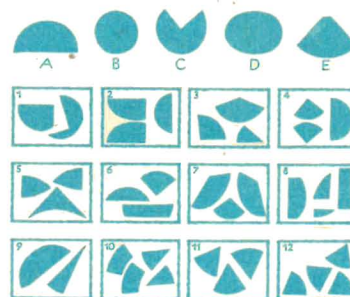


4

Der magische Charakter dieser Figur ist dadurch verdorben, daß die drei anderen Summen nicht ebenfalls 23 ergeben. Die Zahlen sollen derart umgestellt werden, daß alle neun Summen von Zahlen derselben Geraden dieselbe Zahl ergeben. Welche Zahl z (oder Zahlen) muß im Zentrum stehen und wie heißt die magische Konstante M ?

Lösung: $z = 9$, $M = 21$.

Räumliches Vorstellungsvermögen gefragt

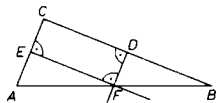


Um ein Ordnen und Neu-Zusammensetzen handelt es sich bei diesem Spiel. Die oben gezeigten Muster sind zerschnitten worden. Die Schnipsel sind in den darunter stehenden Kästchen zu sehen. Welches Kästchen gehört zu welcher Figur?

Lösung: zu A: 8, 9, 11; zu B: 1, 4; zu C: 3, 6, 12; zu D: 2, 7; zu E: 5, 10

5

$\angle ECD (\cong \angle ACB)$ ein rechter Winkel ist. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.

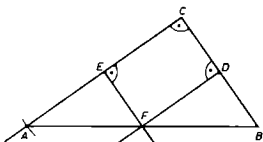


(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 5,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 7,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

II. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge 5,0 cm bzw. 7 cm. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC . Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC .

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.



4. Der Winkel $\angle DBG$ hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha + \beta$. Als Scheitelwinkel von $\angle FKJ$ hat $\angle BKD$ die Größe γ . Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\angle CDE$ im Dreieck BKD zu $180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE , erhält man für die Größe ϵ des Winkels $\angle DCE$:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \\ &= 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta + \gamma - \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta.\end{aligned}$$

Klassenstufe 8

1. Da 3 oder mehr Teile zu 10 M mehr als 29 M kosten, waren es höchstens 2 Teile zu 10 M. Angenommen, es wären genau 2 Teile zu 10 M gewesen. Dann wären genau 9 M für die beiden übrigen Sorten verblieben. Von diesen hätten 1 oder 2 Teile zu 3 M gekauft werden können, wonach 6 bzw. 3 M für die Teile zu 0,50 M geblieben wäre. Das wären 12 bzw. 6 Teile zu 0,50 M und damit insgesamt 15 oder 10 Einzelteile gewesen, also zu wenig. Folglich wurde genau 1 Teil zu 10 M gekauft, und es blieben genau 19 M für die 3-Mark-Teile und 0,50-Mark-Teile.

Angenommen, es wäre nur 1 Teil zu 3 M gekauft worden, dann wären noch 16 M geblieben, wofür 32 Teile zu 0,50 M zu kaufen waren, insgesamt also 34 Teile, im Wider-

spruch zur Aufgabe. Erhöht man nun die Anzahl der Teile zu 3 M immer um 1, so verringert sich, wenn der Gesamtpreis gleich bleiben soll, die Anzahl der Teile zu 0,50 M dabei jeweils um 6, wobei die Gesamtzahl der Teile um genau 5 abnimmt. Die einzige Möglichkeit, auf diese Weise 29 Teile zu erreichen, besteht folglich darin, daß man die Anzahl der Teile zu 3 M um genau 1 erhöht und damit die Anzahl der Teile zu 0,50 M um genau 6 verringert. Also wurden insgesamt genau 1 Teil zu 10 M, genau 2 Teile zu 3 M und genau 26 Teile zu 0,50 M gekauft.

2. Der Flächeninhalt A_1 des gegebenen Rechtecks beträgt $A_1 = a_1 \cdot b_1$.

Er entspricht 100%.

Die um 25% verkleinerte Seite habe die Länge a_2 , dann gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}a_1.$$

Die um 20% verlängerte Seite habe die Länge b_2 , dann gilt

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{5}b_1 = \frac{6}{5}b_1.$$

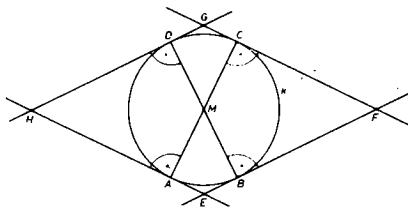
Demnach beträgt der Flächeninhalt des so veränderten zweiten Rechtecks

$$\begin{aligned}A_2 &= a_2 \cdot b_2 = \frac{3}{4}a_1 \cdot \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10}a_1 \cdot b_1 = \frac{9}{10}A_1 \\ &= A_1 - \frac{1}{10}A_1.\end{aligned}$$

Daher wurde der Flächeninhalt des ersten Rechtecks um 10% verkleinert.

3. Werden die in der Aufgabe genannten Durchmesser mit AC und BD sowie die erwähnten Schnittpunkte mit E, F, G, H wie in dem Bild bezeichnet, dann gilt:

$AM = MC = BM = MD$. Folglich gilt $\triangle MBF \cong \triangle MCF$ und $\triangle MAH \cong \triangle MDH$ (s, s , rechter Winkel)



Hieraus folgt

$$\overline{BF} = \overline{CF}, \angle BMF = \angle CMF = \frac{1}{2} \angle BMC,$$

weil B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch M und F liegen, und entsprechend

$$\overline{DH} = \overline{AH}, \angle DMH = \angle AMH = \frac{1}{2} \angle DMA.$$

Da nun als Gleichheit von Scheitelwinkeln $\angle BMC = \angle DMA$ gilt, folgt

$$\angle BMF = \angle DMH \text{ und damit } \triangle MBF$$

$$= \triangle MDH \text{ (s, w, w), also}$$

$$\overline{BF} = \overline{CF} = \overline{DH} = \overline{AH}.$$

Entsprechend erhält man

$$\overline{BE} = \overline{AE} = \overline{DG} = \overline{CG}.$$

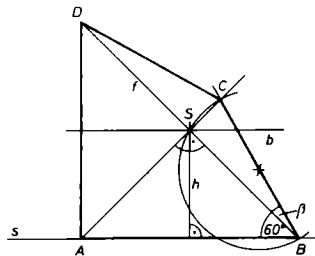
Aus (1) und (2) folgt:

$$\overline{EH} = \overline{EF} = \overline{GF} = \overline{GH},$$

d. h. $EFGH$ ist ein Rhombus.

Im Viereck $AMDH$ sind die Winkel bei A und D rechte. Daher ergänzen sich $\angle AMD$ und $\angle AHD$ zu 180° . Laut Voraussetzung ist $\angle AMD$ kein rechter Winkel. Folglich ist auch $\angle AHD$ kein rechter Winkel und $EFGH$ mithin kein Quadrat.

4. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Bild). Dann liegt der Schnittpunkt S seiner Diagonalen wegen der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales erstens auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC und zweitens auf einer Parallelen, die im Abstand h zur Geraden durch A und B verläuft.



Punkt A liegt erstens auf einem Strahl s , der in B an BC unter einem Winkel der Größe β angetragen wurde, und zweitens auf der Geraden durch C und S . Punkt D liegt erstens auf der Geraden durch B und S und zweitens auf dem Kreis um B mit f als Radius.

Daraus folgt, daß ein Viereck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir zeichnen die Seite BC der Länge b . (2) Wir tragen in B an BC einen Winkel der Größe β an.

Sein freier Schenkel sei s .

(3) Wir zeichnen den Kreis k , der BC als Durchmesser hat.

(4) Wir zeichnen die Parallelen zu s im Abstand h .

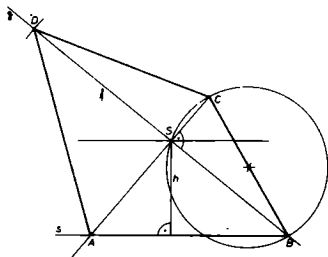
(5) Für jeden Schnittpunkt von k mit einer dieser Parallelen zeichnen wir, wenn der betreffende Schnittpunkt $S \neq C$ ist, die Gerade durch C und S . Schneidet sie den Strahl s , so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(6) Wir zeichnen die Gerade g durch B und S . (7) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius f . Ein Schnittpunkt von g mit diesem Kreis sei mit D bezeichnet, wenn dabei $ABCD$ ein Viereck wird, das den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel hat.

III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

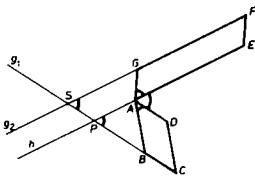
Beweis: Laut Konstruktion hat die Seite BC die Länge $b = 6$ cm. Ebenso hat laut Konstruktion der Innenwinkel $\angle ABC$ die Größe $\beta = 60^\circ$, ferner die Diagonale BD die Länge $f = 12,5$ cm. Weiter hat der Punkt S von AB einen Abstand von $h = 3,5$ cm. Da schließlich Punkt S auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC liegt, schneiden sich die Diagonalen BD und AC unter einem Winkel von 90° , wie es verlangt war.

Das Viereck $ABCD$ ist mithin durch die angegebenen Bedingungen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



Klassenstufe 9

1. Es sei h die Gerade durch A und E . Dann gilt $h \parallel g_2$, da $AEFG$ ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu g_2 nicht parallele Gerade g_1 die Geraden g_2 und h in S bzw. P (siehe Bild).



Nun sind $\sphericalangle BPA$ und $\sphericalangle BSG$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleichgroß. Ebenso sind $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle BPA$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und mithin gleichgroß. Folglich ist der Winkel $\sphericalangle BSG$, den g_1 mit g_2 einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAG$.

Damit ist der Satz bewiesen.

2. a) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

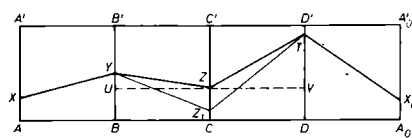
Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.

In $\frac{11}{42}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in $\frac{29}{42}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In $\frac{2}{3}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in $\frac{2}{7}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

3. Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den „Mantel“ aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:



Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

a) Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0 , da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da die so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $AX = BY = CZ = DT = \overline{AOX_0}$ im Innern von BB', CC' bzw. DD' liegen. Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYTZX_0$ ist $\overline{XX_0} = \overline{AA_0}$, also für alle X dieselbe Länge. Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei $XYZTX$ ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug. Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, daß $\overline{CZ} \leq \overline{BY}$ und $\overline{CZ} \leq \overline{DT}$ gilt. Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu AA_0 durch Z dann BB' und CC' in Punkten U bzw. V auf BY bzw. DT . Daher ist $\sphericalangle CZY \geq \sphericalangle CZU = 90^\circ$ und $\sphericalangle CZT \geq \sphericalangle CZV = 90^\circ$. Wählt man nun einen Punkt Z_1 zwischen C und Z , so gehört auch XYZ_1TX zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck Z_1ZY der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z_1 , also gilt $\overline{YZ_1} > \overline{YZ}$.

Ebenso folgt $\overline{Z_1T} > \overline{ZT}$. Daher hat XYZ_1TX eine größere Gesamtlänge als $XYZTX$. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

4. 1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann X nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muß deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

$abXab=cad$ und
 $aeXae=ffe$

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern. Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, kann X auch keins der Zeichen „-“ oder „:“ bedeuten.

Daraus folgt

(1) X steht für das Zeichen „ $\cdot$ “.

Aus $ffYff = gg$ folgt wegen $ff - ff = 0$ und $ff : ff = 1$, daß Y weder das Zeichen „-“ noch das Zeichen „:“ bedeuten kann.

Daraus und aus (1) ergibt sich

(2) Y steht für das Zeichen „+“.

Aus $cadZjfe = gg$ folgt, daß Z nicht für das Zeichen „:“ stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann. Daraus und aus (1) und (2) folgt

(3) Z steht für das Zeichen „—“.

Wegen $32^2 > 1000$ ergibt sich aus $ae \cdot ae = ffe$, daß die durch ae dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann e nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen.

Aus $ab + ae = ff$ folgt, daß e nicht 0 sein kann, weil sonst b und f die gleichen Zahlen darstellen müßten.

Von den somit für ae in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, daß an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrats die gleiche Ziffer steht.

Wäre nun $a=1$ und $e=5$, dann müßte wegen $ab+ae=ff$ mithin $f=3$ und $b=8$ sein. Wegen $18^2=324$ folgte dann aus $ab \cdot ab=cad$ der Widerspruch $a=2$.

Für $a=2$ und $e=1$ folgt $f=4$ und $b=3$. Also kann nur die Ersetzung

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 23 = 529 \\ + \quad + \quad - \\ 21 \cdot 21 = 441 \\ \hline 44 + 44 = 88 \end{array}$$

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

2) Diese Ersetzung hat in der Tat alle verlangten Eigenschaften; denn die für a, b, c, d, e, f, g eingesetzten Zahlen 2, 3, 5, 9, 1, 4, 8 sind verschieden, ebenso die für X, Y, Z eingesetzten Operationszeichen $\cdot, +, -, \div$, die entstehenden Aussagen sind sämtlich wahr.

Klassenstufe 10

1. Es gilt $q^3 - q = q(q^2 - 1) = q(q - 1)(q + 1)$.

Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $q-1, q, q+1$ ist stets eine durch 2 und eine durch 3 teilbar. Mithin ist ihr Produkt $q^3 - q$ durch 6 teilbar, d. h. $\frac{q^3 - q}{6}$ ist eine ganze Zahl.

2. Für die gesuchten Längen $a = \overline{BC}$, $c = \overline{AB}$, h , q gilt

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ (nach dem Satz des Pythagoras),

(2) $cq = b^2$ (nach dem Kathetensatz),

(3) $pq = h^2$ (nach dem Höhensatz),

(4) $p+q=c$ (da D auf AB liegt).

Aus (2), (4) folgt

$q^2 + pq - b^2 = 0$. Für die Maßzahl x der in cm gemessenen Länge q gilt daher $x^2 + 1,8x - 16 = 0$ sowie $x > 0$. Da die quadratische Gleichung genau die Lösungen

$x_{1,2} = -0,9 \pm \sqrt{0,81 + 16} = -0,9 \pm 4,1$ hat, folgt $q = 3,2$ cm.

Hieraus und aus (4) erhält man

$$c = (3,2 + 1,8) \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Aus (1) und $a > 0$ folgt hiernach

$$a = \sqrt{25 - 16} \text{ cm} = 3 \text{ cm}; \text{ aus (3) und } h > 0 \text{ folgt}$$

$$h = \sqrt{1,8 \cdot 3,2} \text{ cm} = 2,4 \text{ cm}.$$

3. 1) Angenommen, eine Ersetzung habe die verlangten Eigenschaften. Die Spalten seien von rechts nach links mit 1 bis 5 nummeriert. Wegen $L \neq S$ folgt aus Spalte 5

$$L + 1 = S \quad (1)$$

und damit aus Spalte 4 zunächst

$$Q + T \geq 9. \quad (2)$$

Wäre nun $T \geq 5$, so ergäbe sich aus Spalte 2 ein Zehnerübertrag, also wegen (2) auch aus Spalte 3, und aus den Spalten 3 und 4 folgte $I = P$. Also ist

$$T \leq 4, \quad (3)$$

in Spalte 2 entsteht kein Zehnerübertrag; wegen $I \neq P$ muß folglich in Spalte 3 ein Übertrag entstehen, d. h., es gilt sogar

$$Q + T \geq 10, \text{ wegen (3) also} \quad (2a)$$

$$Q \geq 6. \quad (4)$$

Daher verbleiben nur folgende Möglichkeiten:

a) Es ist $Q = 9$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 8$ und wegen (1) $S = 9$. Wegen $Q \neq S$ ist dies ein Widerspruch.

b) Es ist $Q = 8$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 6$ und wegen (1) $S = 7$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 2$ oder $T = 3$ oder $T = 4$. Ist $T = 2$, dann folgt $E = 5$, $I = 0$, $P = 1$. Ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$, im Widerspruch zu $S = 7$.

c) Es ist $Q = 7$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 4$ und wegen (1) $S = 5$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 3$ oder $T = 4$. Davon scheidet $T = 4$ wegen $L = 4$ aus, und ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$, im Widerspruch zu $Q = 7$.

d) Es ist $Q = 6$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 2$ und wegen (1) $S = 3$. Wegen (2a) und (3) kann nur noch $T = 4$ gelten, dann folgt $E = 9$, $I = 0$, $P = 1$.

Daher können nur die Ersetzungen

$$\begin{array}{r} 68228 \\ + 2828 \\ \hline 71056 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68448 \\ + 4848 \\ \hline 73296 \end{array} \quad \begin{array}{r} 26446 \\ + 4646 \\ \hline 31092 \end{array}$$

die geforderten Eigenschaften haben.

2) Sie haben diese Eigenschaften; denn in jeder von ihnen wurden für L, Q, T, S, P, I, E verschiedene Ziffern eingesetzt, und es ist jeweils eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entstanden.

4. Jeder der gesuchten Streckenzüge muß genau zwei von A ausgehende Würfelkanten enthalten, also genau zwei der drei Kanten AB, AD, AE . Die Durchlaufung kann so gewählt werden, daß er entweder mit AB oder mit AD beginnt.

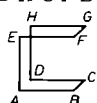
1. Beginnt er mit AB , so kann er nur mit einer der übrigen beiden von B ausgehenden Wür-

felkanten fortgesetzt werden, also entweder als ABC oder als ABF .

1.1. Nach der Fortsetzung ABC verbleiben ebenso nur die Möglichkeiten $ABCD$ und $ABCG$.

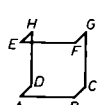
1.1.1. Bei der Wahl von $ABCD$ gibt es sowohl von A als auch von D aus nur noch je eine Möglichkeit der Weiterführung, nämlich zu E bzw. H hin. Von diesen beiden Punkten verbleibt wiederum nur noch je eine Möglichkeit, nämlich zu F bzw. G hin. Dann sind alle Punkte erfaßt, und der Streckenzug kann nur noch durch die Strecke FG geschlossen werden. Also gibt es im Fall 1.1.1. nur die Möglichkeit

$A B C D H G F E A$



1.1.2. Angenommen, bei der Wahl von $ABCG$ könnte auf G nun H folgen. Dann gäbe es, um über einen noch nicht erfaßten Punkt zu F zu gelangen, nur die Fortsetzung $ABCGHEF$, und der nun noch verbleibende Punkt D ließe sich nur auf dem Wege über einen bereits erfaßten Punkt erreichen, da F und D nicht Endpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind. Wegen dieses Widerspruches kann auf $ABCG$ nur F folgen, und als einzige Möglichkeit der Fortsetzung schließt sich an:

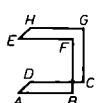
$A B C G F E H D A$



1.2. Nach der Fortsetzung ABF verbleiben nur die Möglichkeiten $ABFE, ABFG$.

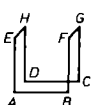
1.2.1. Zu $ABFE$ existiert wie in 1.1.1. nur die Fortsetzung

$A B F E H G C D A$



1.2.2. Zu $ABFG$ existiert mit analoger Begründung wie in 1.1.2. nur die Fortsetzung

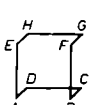
$A B F G C D H E A$



2. Beginnt der Streckenzug mit AD , so kann er nur als ADC oder ADH fortgesetzt werden.

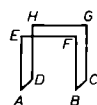
2.1. Nach ADC gibt es nur die Fortsetzungen $ADCB$ und $ADCG$. Zu jeder von ihnen existiert wie in 1.1.1. bzw. 1.1.2. nur eine Weiterführung. Da ein mit $ADCG$ beginnender Streckenzug bereits in 1.2.1. vorkommt, verbleibt außer ihm nur die Weiterführung von $ADCB$, d. i.:

$A D C B F G H E A$



2.2. Nach ADH gibt es nur $ADHE$ und $ADHG$ und dazu wieder nur je eine Weiterführung. Davon kommt $ADHE$ bereits in 1.1.2. vor, und es verbleibt nur

$A D H G C B F E A$.



Damit ist gezeigt, daß nur die sechs aufgezählten Streckenzüge den Forderungen der Aufgabe genügen können. Sie erfüllen in der Tat diese Forderungen; denn jeder enthält jede der Würfelkanten genau einmal, beginnt und endet mit A und verläuft nur längs der Würfelkanten. Ferner sind die Streckenzüge sämtlich verschieden voneinander, wie folgende Tabelle ausweist. Darin ist zu je zwei der genannten Streckenzüge eine Würfelkante angegeben, die in dem einen Streckenzug vorkommt, in dem anderen aber nicht.

	1.1.2.	1.2.1.	1.2.2.	2.1.	2.2.
1.1.1.	CD	BC	BC	AB	AB
1.1.2.		BC	BC	AB	AB
1.2.1.			FE	AB	AB
1.2.2.				AB	AB
2.1.					DC

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Die Lösung läßt sich z. B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde, siehe Tabelle.

Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M).

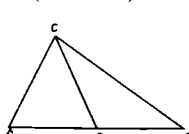
2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K).

Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (J, N).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.

Reihenfolge: Streichung bei B, D, H ; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D ; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H .

2. O. B. d. A. werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (siehe Bild).

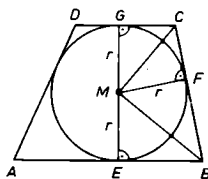


39 M nicht nur aus 20-M-Münzen zusammenstellen; mindestens 19 M müßten in 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen. Darunter wären entweder mindestens fünf 2-M-Münzen oder aber höchstens vier 2-M-Münzen und dann folglich mindestens elf 1-M-Münzen, womit in jedem Falle wiederum 10 M zusammengestellt werden könnten.

4) Also hatte Uwe höchstens eine 1-M-Münze und sonst nur 20-M-Münzen bei sich. Unter diesen Bedingungen lassen sich aber 41 M nur so zusammensetzen, daß genau eine 1-M-Münze und genau zwei 20-M-Münzen vorliegen.

II. Diese Zusammensetzungsmöglichkeit erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, da sich aus diesen Münzen nur die Beträge 1 M, 20 M, 21 M, 40 M und 41 M zusammenstellen lassen, also nicht 31 M.

2. Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten AB, BC, CD seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bezeichnet.



Wegen $\overline{MB} = \overline{ME}$, $\overline{ME} = \overline{MF}$ sowie $\angle BEM = \angle BFM = 90^\circ$ (Berührungsradius) gilt $\triangle BME \cong \triangle BMF$ nach dem Kongruenzsatz (SSW). Analog läßt sich $\triangle CMG \cong \triangle CMF$ zeigen. Folglich gilt

$\angle GMC = \angle CMF$ sowie $\angle FMB = \angle BME$. Da ME und MG die Lote auf die Parallelen AB und CD von dem zwischen ihnen liegenden Punkt M aus sind, ist $\angle GME = 180^\circ$.

Wegen $\angle BME + \angle FMB + \angle CMF + \angle GMC = \angle GME = 180^\circ$, d. h.

$2\angle FMB + 2\angle CMF = 180^\circ$, gilt somit $\angle BMC = \angle FMB + \angle CMF = 90^\circ$, w. z. b. w.

3. I. Wenn die Kantenlänge a, b, c (in Zentimetern) des quaderförmigen Innern des Kastens den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen, so gilt o. B. d. A.

$$(1) \quad a \cdot b \cdot 2 = 600,$$

$$(2) \quad a \cdot c \cdot 3 = 600,$$

$$(3) \quad b \cdot c \cdot 4 = 600.$$

Dividiert man (1) durch (3), so erhält man

$$\frac{a}{2c} = 1 \text{ bzw.}$$

$$(4) \quad a = 2c.$$

Setzt man (4) in (2) ein, so folgt

$$6c^2 = 600, \text{ und daraus wegen } c > 0$$

$$(5) \quad c = 10.$$

Wegen (5) folgt aus (4) $a = 20$ und aus (1) oder (3)

$$b = 15.$$

Also können nur 10 cm, 15 cm, 20 cm als Innenmaße des Kastens und mithin nur der Wert 3000 cm^3 für sein Fassungsvermögen den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen. Wenn man nach der Gleichung (3) des

ersten Lösungsweges folgendermaßen fortfährt, ergibt sich ein weiterer Lösungsweg:

Multipliziert man (1), (2), (3), so erhält man

$$24a^2b^2c^2 = 216000000,$$

$$\text{also } a^2b^2c^2 = 9000000,$$

wegen $abc > 0$ mithin

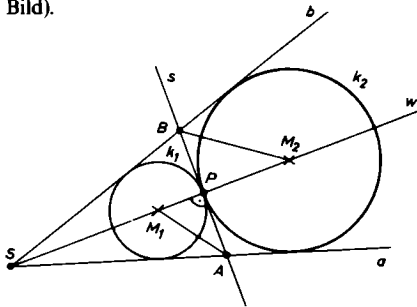
$$abc = 3000.$$

Nun ist aber abc gleich der Maßzahl des Volumens des quaderförmigen Innern des Kastens. Also kann für sein Fassungsvermögen nur der Wert 3000 cm^3 den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen.

4. Sind a und b die beiden Ziffern, so sind die zu multiplizierenden Zahlen $10a + b$ und $10b + a$. Ihr Produkt ist $(10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab$. In Rechenschritt (1) ergibt sich nun ab , in Rechenschritt (2) demnach $100ab + ab$.

In Rechenschritt (3) ergibt sich $a^2 + b^2$, in (4) also $10(a^2 + b^2)$. Somit führt Rechenschritt (5) auf $100ab + ab + 10(a^2 + b^2)$, also, wie behauptet, auf das zu berechnende Produkt.

5. I. Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Bild).



Dann liegt dieser Kreis k in dem gegebenen Winkel; sein Mittelpunkt M hat gleiche Abstände zu a und b und liegt folglich auf w . Daher steht die Senkrechte s zu w durch P senkrecht auf einem Durchmesser von k ; sie ist also die Tangente in P an k . Folglich hat M auch gleiche Abstände zu a und s und liegt demnach auf der halbierenden Geraden eines Winkels, den s mit a bildet. Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

II. (1) Man konstruiert in P die Senkrechte s auf w . Schneidet sie a , so sei der Schnittpunkt A genannt.

(2) Man konstruiert die halbierende Gerade eines Winkels, den s mit a bildet. Schneidet sie w in einem Punkt, so sei dieser M genannt.

(3) Man zeichnet den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MP}$.

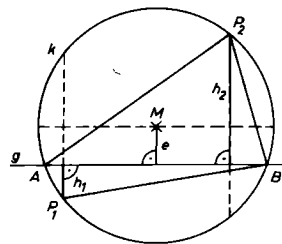
III. Jeder so konstruierte Kreis genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion geht k durch P . Ferner berührt k die Gerade s in P , da M auf w liegt und da sich w und s in P rechtwinklig schneiden. Weiterhin liegt M (auf w , also) in dem gegebenen Winkel sowie auf einer winkelhalbierenden Geraden von a und s ; hier-

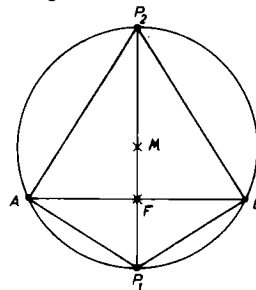
nach hat M gleiche Abstände zu a und s . Endlich hat M auch gleiche Abstände zu a und b , da M auf w liegt, also berührt k außer der Geraden s auch die Strahlen a und b .

IV. Die Konstruktion von s nach (1) ist eindeutig ausführbar. Da w mit a einen spitzen Winkel bildet und auf s senkrecht steht, schneiden sich a und s ; also ist auch A eindeutig bestimmt. Die in (2) zu konstruierenden winkelhalbierenden Geraden, von denen es genau zwei gibt, schneiden beide w ; denn die eine halbiert den Innenwinkel bei A im Dreieck SAP , schneidet also dessen Seite SP zwischen S und P ; die andere steht senkrecht auf der ersten, also bildet ein Strahl von ihr mit dem auf s liegenden Strahl aus A durch P einen spitzen Winkel, während w auf s senkrecht steht. Also entstehen in (2) genau zwei verschiedene Schnittpunkte M_1, M_2 , es gibt mithin zwei Kreise k_1 und k_2 , die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

6. a) Der Flächeninhalt von Viereck AP_1BP_2 ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AP_1B und ABP_2 . Deren Flächeninhalte sind jeweils am größten, wenn die Längen der Lote von P_1 bzw. P_2 auf die Gerade g durch A und B am größten sind. Das ist genau dann der Fall, wenn P_1, P_2 die Schnittpunkte von k mit der Mittelsenkrechten von AB sind, d. h. der zu g senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt M von k .



Beweis: Bezeichnen nämlich e, h_1, h_2 die Abstände von M, P_1 bzw. P_2 zu g und sind die Bezeichnungen so gewählt, daß M und P_2 in derselben von g begrenzten Halbebene liegen, so kann man zunächst zu allen Punkten P_2 , für die $h_2 < e$ ist, auch Punkte P_1 finden, für die $h_2 > e$ gilt, und dann ist stets $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ der Abstand von P_1 bzw. P_2 zu dem zu g parallelen Durchmesser von k ; d. h., $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ ist die halbe Länge der durch P_1 bzw. P_2 gehenden auf AB senkrechten Sehne. Unter allen zu AB senkrechten Sehnen ist aber diejenige am längsten, die durch M geht. Also nehmen auch h_1 und h_2 für diese Lage von P_1, P_2 ihre größten Werte an.

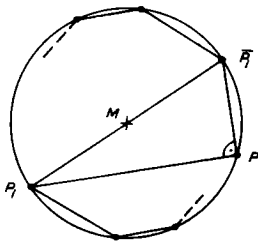


b) Für diese gilt $h_1 + h_2 = 2r$; der größtmögliche Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2 ist mithin

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ar.$$

Klassenstufe 9

1. Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft ist n gerade; zu jedem der Endpunkte gibt es einen anderen, der bezüglich des Mittelpunktes M des Einheitskreises spiegelbildlich zu ihm liegt. Wir können daher die Eckpunkte so mit P_i und $\bar{P}_i$ ($i = 1, \dots, \frac{n}{2}$) bezeichnen, daß P_i und $\bar{P}_i$ jeweils spiegelbildlich zueinander liegen.



Es läßt sich nun zeigen, daß für alle $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$

$$(1) \quad \overline{PP_i}^2 + \overline{P\bar{P}_i}^2 = 4 \text{ gilt.}$$

Ist nämlich $P \neq P_i$ oder $P \neq \bar{P}_i$, so gilt (1) nach der Umkehrung des Satzes des Thales sowie nach dem Lehrsatz des Pythagoras. Ist aber $P = P_i$ oder $P = \bar{P}_i$, so gilt $\overline{PP_i}^2 = 0$ und $\overline{P\bar{P}_i}^2 = \overline{P_i\bar{P}_i}^2 = 4$ bzw. $\overline{P\bar{P}_i}^2 = 0$ und $\overline{PP_i}^2 = \overline{P_iP_i}^2 = 4$, d. h. (1) gilt auch in diesem Falle. Daher ist die zu berechnende Summe

$$s = \frac{n}{2} \cdot 4 = 2n.$$

2. Die Ungleichung (*) ist gleichbedeutend mit $a + ab + b + 1 \geq 4$,

d. h. wegen $ab = 1$ mit

$$a + 1 + b + 1 \geq 4,$$

oder gleichbedeutend hiermit

$$a + b \geq 2.$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen a

$$(1) \quad (a-1)^2 \geq 0, \text{ also}$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0,$$

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

Wegen $a > 0$ folgt daraus durch Division

$$a + \frac{1}{a} \geq 2,$$

woraus man wegen $b = \frac{1}{a}$

$$a + b \geq 2 \text{ erhält, w. z. b. w.}$$

Folglich gilt (*) für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $ab = 1$. Damit ist der Satz bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt in (*), da es in (1) genau für $a = 1$ gilt, genau für $a = b = 1$.

3. a) Da eine der Flächen die eines gleichseitigen Dreiecks sein soll und da genau zwei unterschiedliche Kantenlängen auftreten, sind folgende Fälle möglich:

Fall 1: Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a . Auf der Ebene durch A , B und C werde im Schwerpunkt A von ABC die senkrechte Gerade errichtet und auf ihr ein Punkt D mit $\overline{SD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ gewählt. Wegen

$$\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

gilt dann nach dem Satz von Pythagoras in dem rechtwinkligen

Dreieck ASD , daß $AD = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist.

Ebenso folgt $\overline{BD} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\overline{CD} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Daher ist $ABCD$ ein Tetraeder mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Fall 2: Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a/\sqrt{2}$. Auf der Ebene durch A , B und C werde im Schwerpunkt S von ABC die senkrechte Gerade errichtet und auf ihr ein Punkt D mit $\overline{SD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ gewählt. Wegen

$$\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

gilt dann nach dem Satz von Pythagoras in dem rechtwinkligen

Dreieck ASD , daß $\overline{AD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = a$ ist.

Daher ist $ABCD$ ein Tetraeder mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a/\sqrt{2}$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$.

Da in jedem dieser beiden Tetraeder eine Fläche auftritt, die bei dem anderen nicht vorkommt, sind sie zueinander nicht kongruent.

b) Die Oberfläche des ersten Tetraeders besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a und drei gleichschenkligen Dreiecken, in denen jeweils die Basis die Länge a und die Schenkel die Länge $a/\sqrt{2}$ haben. Deren Höhe ist

$$a \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{7}.$$

Somit hat dieses Tetraeder den Oberflächeninhalt

$$O_1 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{3}{4}a^2\sqrt{7} = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{3} + 3\sqrt{7}).$$

Die Oberfläche des zweiten Tetraeders besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a/\sqrt{2}$ und drei gleichschenkligen Dreiecken, in denen jeweils die Basis die Länge $a/\sqrt{2}$ und die Schenkel die Länge a haben. Diese Dreiecke sind also gleichschenkelig-rechtwinklig; ihr Flächeninhalt ist $\frac{1}{2}a^2$.

Somit hat dieses Tetraeder den Oberflächeninhalt

$$O_2 = \frac{1}{4} \cdot (a/\sqrt{2})^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2(3 + \sqrt{3}).$$

Anmerkung: Die Inkongruenz der beiden Tetraeder kann auch aus der Verschiedenheit ihrer Oberflächeninhalte geschlossen werden.

4. Wegen $n \geq 1$ und $p \geq 2$ gilt

$$(1) \quad (3n-1)p^2 + 1 \geq 9.$$

Wegen $p \neq 3$ und da p Primzahl ist, gibt es entweder eine natürliche Zahl m mit $p = (3m+1)$ oder eine natürliche Zahl m mit $p = (3m-1)$.

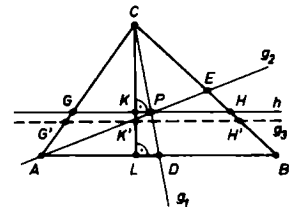
$$\text{Aus } (3n-1)(3m+1)^2 + 1 = 27nm^2 + 18nm + 3n - 9m^2 - 6m = 3(9nm^2 + 6nm + n - 3m^2 - 2m)$$

$$\text{bzw. } (3n-1)(3m-1)^2 + 1 = 27nm^2 - 18nm + 3n - 9m^2 + 6m = 3(9nm^2 - 6nm + n - 3m^2 + 2m)$$

folgt daher in beiden Fällen, daß die zu untersuchende Zahl durch 3 teilbar ist. Wegen (1) kann sie somit keine Primzahl sein.

5. Die Gerade g_1 gehe durch die Punkte C und D , wobei D der Mittelpunkt der Seite AB sei. Dann erfüllt g_1 die Bedingung; denn wegen $\overline{AD} = \overline{DB}$ und der gleichen Höhe sind die Dreiecke ACD und BCD flächengleich.

Die Gerade g_2 gehe durch die Punkte A und E , wobei E der Mittelpunkt der Seite BC sei. Dann erfüllt (Beweis wie oben) g_2 ebenfalls die Bedingung.



Der Schnittpunkt P von g_1 und g_2 ist der Schwerpunkt des Dreiecks, da g_1 und g_2 die Seitenhalbierenden durch C bzw. A enthalten, und es gilt $\overline{PC} = 2\overline{PD}$ bzw. $\overline{CP} : \overline{CD} = 2 : 3$.

Die Gerade h gehe durch P und sei zu AB parallel. Ihre Schnittpunkte mit den Seiten AC bzw. BC seien G bzw. H . Die Fußpunkte des Lotes von C auf h bzw. auf die Gerade durch A und B seien K bzw. L . Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\overline{CK} = \frac{2}{3}\overline{CL}.$$

Die Gerade g_3 sei parallel zu AB und gehe durch denjenigen Punkt K' auf CL , für den $\overline{CK'} = \frac{1}{2}\overline{CL}$ gilt. Ihre Schnittpunkte mit AC

bzw. BC seien G' bzw. H' . Dann gilt nach dem Strahlensatz $\overline{G'H'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Also hat $\triangle G'H'C$

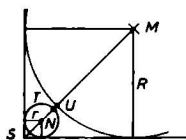
den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\overline{G'H'} \cdot \overline{CK'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{CL} = \frac{1}{8}\overline{AB} \cdot \overline{CL}$, d. h. den halben Flächeninhalt von $\triangle ABC$. Daher erfüllt g_3 die in der Aufgabe genannte Bedingung. Wegen $K' \neq K$ sind die Parallelen g_3 und h voneinander verschieden; sie haben also keinen Punkt gemeinsam. Also geht g_3 nicht durch P .

Somit ist gezeigt, daß es keinen Punkt P gibt, durch den alle beschriebenen Geraden gehen.

6. Berührt ein Kreis die beiden Schenkel eines Winkels, dann liegt sein Mittelpunkt auf der Halbierenden dieses Winkels. Daher ist SM die Halbierende des rechten Winkels, und es sind lediglich Pappscheiben zu betrachten, deren Mittelpunkt auf SM liegt und die die Schenkel berühren.

Es sei r der Radius einer solchen Pappscheibe, und sie berühre die beiden Schenkel des rechten Winkels; ihr Mittelpunkt sei N , und T sei der auf SM liegende Randpunkt, der nicht zwischen S und N liegt (siehe Bild). Dann gilt: $ST = r\sqrt{2} + r = (\sqrt{2} + 1)r$ bzw. $\overline{SN} = r\sqrt{2}$, weil die Größe der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden und einem der Schenkel 45° beträgt. Ist nun U der auf SM gelegene Randpunkt der Scheibe P , der zwischen S und M liegt, dann ist

$$\overline{SU} = R\sqrt{2} - R = (\sqrt{2} - 1)R.$$



Die Scheibe mit dem Radius r berührt die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P genau dann, wenn $\overline{NM} = r + R$ ist; denn auf Grund der Voraussetzungen der Aufgabe müssen sich die beiden Kreise von außen berühren.

Da im vorliegenden Fall $\overline{NM} = \overline{SM} - \overline{SN} = (R - r)\sqrt{2}$ ist, erhält man $R\sqrt{2} - r\sqrt{2} = R + r$, woraus eindeutig

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} R \text{ folgt.}$$

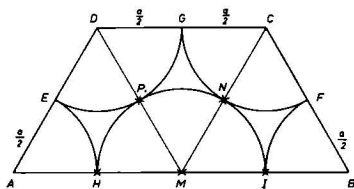
Der Mittelpunkt der Scheibe mit dem so ermittelten Radius r ist mithin der auf SM liegende Punkt N , für den $\overline{SN} = r\sqrt{2}$ gilt.

Klassenstufe 10

1. Wegen $\overline{AE} = \overline{ED}$ beträgt der Radius der vier um die Eckpunkte gezeichneten Kreise $\frac{a}{2}$.

Sei x die gesuchte Länge der Seite AB , dann gilt $\overline{HI} = x - a$ da wegen $\overline{AB} > \overline{CD}$ der Punkt H zwischen A und I liegt.

Sei M der Mittelpunkt von AB und damit auch von HI , so ist $\overline{HM} = \frac{x-a}{2}$ der Radius des Halbkreises über HI .



Da M , N und C auf derselben Geraden liegen, gilt

$$\overline{MC} = \frac{a}{2} + \frac{x-a}{2} = \frac{x}{2}. \text{ Ebenso folgt } \overline{MD} = \frac{x}{2}, \text{ also } \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD}.$$

Somit sind die Dreiecke AMD , DMC und CMB gleichschenkelig und wegen (s, s, s) kongruent. Die Winkel $\sphericalangle AMD$, $\sphericalangle DMC$ und $\sphericalangle CMB$ sind folglich ebenfalls kongruent, und da $\sphericalangle AMD + \sphericalangle DMC + \sphericalangle CMB = 180^\circ$ ist, ist jeder von ihnen 60° groß.

Daher sind die genannten Dreiecke gleichseitig, und somit ist $\overline{MA} = \overline{MB} = a$. Die Seite AB hat also die Länge $2a$.

2. Angenommen, eine rationale Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Gleichung. Dann gibt es ganze Zahlen $q \neq 0$ und p , die zueinander teilerfremd sind und für die $x = \frac{p}{q}$ ist. Hiernach gilt

$$\frac{p^4}{q^4} + a_3 \frac{p^3}{q^3} + a_2 \frac{p^2}{q^2} + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0, \text{ also}$$

$$p^4 = -q(a_3 p^3 + a_2 p^2 q + a_1 p q^2 + a_0 q^3).$$

Daher ist q ein Teiler von p^4 . Da aber q zu p und folglich auch zu p^4 teilerfremd ist, ergibt sich, daß q nur $+1$ oder -1 sein kann.

Also ist $x = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, w. z. b. w.

3. a) Angenommen, es gäbe eine Lösung.

Wir betrachten die einzelnen Spalten der Aufgabe. Es werden jeweils drei einstellige Zahlen (und gegebenenfalls ein Übertrag) addiert. Wegen $3 \cdot 9 = 27$ kann dabei aus der letzten Spalte höchstens ein Übertrag von 2 in die nächstfolgende Spalte erfolgen. Wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ gilt dies auch für die übrigen Spalten. Daher kommt wegen $I + J + A(+\dot{U}) = A + 10N$ und $I + J + \dot{U} = 8 + 9 + 2$ für N nur der Wert 1 in Frage.

Daraus folgte $S = 7$. Nun müßte in der zweitletzten Spalte $2E + 1 + 2 = E + k \cdot 10$ (k ganzzahlig) sein, woraus $E = 7$ folgen würde, im Widerspruch zu $E \neq S$. Daher gibt es im dekadischen System keine Lösung der Aufgabe.

b) Angenommen, die Aufgabe hat im System mit der Basis 8 eine Lösung. Dann gilt wegen $3 \cdot 7 = [25]_8$, $3 \cdot 7 + 2 = [27]_8$, daß ein möglicher Übertrag in jeder Spalte höchstens 2

betragen kann. Analog wie bei a) folgt daraus $N = 1$. Wegen

$$3 \cdot 0 = 0, \quad 3 \cdot 1 = 3, \quad 3 \cdot 2 = 6$$

$$3 \cdot 3 = [11]_8, \quad 3 \cdot 4 = [14]_8, \quad 3 \cdot 5 = [17]_8,$$

$$3 \cdot 6 = [22]_8, \quad 3 \cdot 7 = [25]_8$$

folgt hieraus $S = 3$. Nun gilt in der vorletzten Spalte $2E + 1 + 1 = E + k \cdot [10]_8$ (k ganzzahlig), woraus man $E = 6$ und $k = 1$ erhält. In der zweiten Spalte entsteht daher bei Addition von $1 + N + E + M = 1 + 1 + 6 + M$ ein Übertrag von 1. Die erste Spalte liefert somit $I + J + A + 1 = A + N \cdot [10]_8$, also $I + J + 1 = [10]_8$ bzw. $I + J = 7$. Mit den von N, S, E verschiedenen Ziffern 0, 2, 4, 5, 7 ist dies wegen $I \neq 0$, $J \neq 0$ nur dadurch möglich, daß entweder $I = 2$ und $J = 5$ oder $J = 2$ und $I = 5$ gilt.

Damit verbleiben für $A (\neq 0)$ nur die Ziffern 4 und 7 und für M nur die von A verschiedenen unter den Ziffern 0, 4 und 7. Die Aufgabe kann also höchstens durch die folgenden Ersetzungen im System mit der Basis 8 gelöst werden.

2163	2163	2163	2163
5613	5613	5613	5613
4063	4763	7063	7463
<u>14061</u>	<u>14761</u>	<u>17061</u>	<u>17461</u>
5163	5163	5163	5163
2613	2613	2613	2613
4063	4763	7063	7463
<u>14061</u>	<u>14761</u>	<u>17061</u>	<u>17461</u>

Da diese Ersetzungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind sie die gesuchten Lösungen.

Fortsetzung:

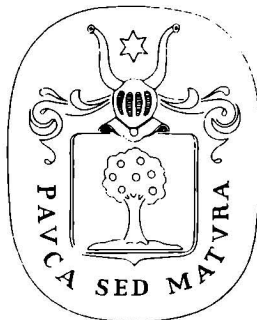
Briefmarke

zu Ehren des 200. Geburtstages von C. F. Gauß



Zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß gab das Ministerium für Post- und Fernmeldewesen der DDR ein Sonderpostwertzeichen heraus. Wert: 20 Pfennig – Farben: Hellblau/schwarz – Motiv: Porträt von C. F. Gauß, Siebzehneck mit Zirkel und gleichschenkligen Dreieck – Signet der Olympiaden Junger Mathematiker in der DDR (siehe in diesem Heft S. I) – Auflage: 8 Millionen – Entwurf: Gerhard Stauff/Leipzig – Druck: VEB Wertpapierdruckerei der DDR, Leipzig – Druck-

verfahren: Offset – Papiergröße: 43 mal 25,5 mm² – Bildgröße: 39 x 21,5 mm² – Zählung: 13:12¹; jeder Bogen enthält 50 Postwertzeichen – Ausgabetag: 19. April 1977 – Ersttagsbriefumschlag siehe Abb.



C.F. Gauß

30. 4.1777-23. 2.1855



Korrespondenzzirkel des Bezirks Leipzig

Seit Anfang 1971 besteht unter der bewährten Leitung von Oberlehrer R. Bergmann aus Döbeln ein Korrespondenzzirkel, in dem *Junge Mathematiker* aus allen Teilen des Bezirks Leipzig zusammengefaßt sind. Die Mitglieder dieses Zirkels nehmen am *alpha*-Wettbewerb teil und lösen darüber hinaus weitere Aufgaben, die sie in fünf Serien pro Jahr zugesandt bekommen. Sie erhalten dazu Literaturhinweise, die bei der Lösung eine wichtige Hilfe sein können und anregen, sich selbständig Wissen anzueignen. Jeder Teilnehmer verpflichtete sich, mindestens eine der gestellten Aufgaben zu lösen. In diesem Kalenderjahr stehen Konstruktionen, Konstruktionsbeschreibungen und Beweise im Mittelpunkt der Arbeit.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Gegeben ist das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{CA} = \overline{CB} = 2$ dm. Um jeden seiner Eckpunkte beschreiben wir eine Kreislinie mit dem Radius 1 dm. Die Bogen dieser Kreislinien schneiden aus dem Dreieck ABC drei Kreisausschnitte heraus, und von dem Dreieck bleibt eine Figur übrig, deren Flächeninhalt x dm² ist.

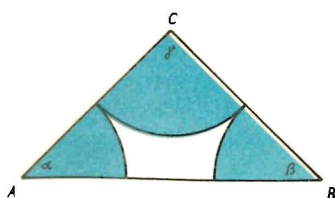
Man berechne, wieviel Prozent x dm² vom Inhalt des gegebenen Dreiecks (y dm²) sind!

Lösung: Laut Aufgabenstellung ist $\overline{CA} = \overline{CB} = 2$ dm und $\angle ABC = 90^\circ$, somit $A_{\Delta ABC} = y$ dm² = $0,5 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0,5 \cdot 2 \cdot 2$ dm², $\Rightarrow y = 2$. Ist A_{Kr} , die Summe der Flächeninhalte der durch die Konstruktion entstehenden drei Kreisausschnitte (gemeinsamer Radius laut Konstruktion 1 dm), so gilt:

$$A_{Kr} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 + \frac{\beta}{360^\circ} \pi r^2 + \frac{\gamma}{360^\circ} \pi r^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \text{ dm}^2$$

($r = 1$ dm laut Aufgabe; $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Innenwinkelsumme des Dreiecks ABC)



Man errechnet nun die Restfläche:

$$x \text{ dm}^2 = \left(y - \frac{1}{2} \pi \right) \text{ dm}^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \pi \right) \text{ dm}^2$$

$$\Rightarrow x \approx 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 2 - \frac{11}{7} = \frac{3}{7}$$

folglich $x : y = p : 100 \rightarrow p$

$$= \frac{100x}{y} \approx \frac{300}{2 \cdot 7} = \frac{150}{7} \approx 21,43$$

Es sind ungefähr 21,43%.

▲ 2 ▲ In einem Abteil des Zuges Moskau–Odessa reisten Fahrgäste aus Moskau, Leningrad, Tula, Kiew, Charkow und Odessa. Ihre Familiennamen begannen mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F. Während der Unterhaltung ergibt sich:

- (1) A und der Moskauer sind Ärzte.
 - (2) E und der Leningrader sind Lehrer.
 - (3) Der Fahrgast aus Tula und C sind Ingenieure.
 - (4) B und F waren Teilnehmer am Großen Vaterländischen Krieg der SU und
 - (5) der Fahrgast aus Tula hatte überhaupt nicht bei der Armee gedient.
 - (6) Der aus Charkow war älter als A und
 - (7) der aus Odessa älter als C.
 - (8) B und der Moskauer stiegen in Kiew aus und
 - (9) C und der Charkower in Winniza.
- Wo wohnt jeder der genannten Fahrgäste, und welchen Beruf hat er?

Und nun geben wir euch noch eine Aufgabenserie so, wie sie die Mitglieder des *Korrespondenzzirkels* zugeschickt bekommen:

1. Die Länge der Seite $\overline{AB} = c$ eines Dreiecks ABC betrage 21 cm, die Länge der Seite $\overline{AC} = b$ dieses Dreiecks betrage 20 cm. Aus diesen beiden Stücken sollen diejenigen Dreiecke konstruiert werden, deren Maßzahlen der Länge ihrer Umfänge durch 7 teilbare natürliche Zahlen sind.

Man bestimme, wieviel einander nicht kongruente Dreiecke dieser Art existieren! Für jedes der möglichen Dreiecke ist die Länge der Seite $\overline{BC} = a$ und die Länge des zugehörigen Umfanges anzugeben!

2. Es sollen alle Werte von m angegeben werden, für die das Gleichungssystem

$$2 + x + y + xy = 0$$

$$x - y = m(1 + xy)$$

reelle Lösungen hat!

3. Man bestimme die Fläche eines Dreiecks, wenn zwei Seitenlängen 27 cm und 29 cm betragen und die Seitenhalbierende der dritten Seite 26 cm lang ist!

Nun noch einige Hinweise zu den Aufgaben:

1. Problem ist relativ einfach zu lösen, wenn man mit einer bekannten Ungleichung arbeitet. Man muß eben nur wissen, mit welcher!

2. Aufgabe 2 führt ebenfalls auf eine Ungleichung, zuvor muß man aber erst eine Gleichung bestimmen, in der z. B. y nicht auftritt. Dann heißt es weiter zu überlegen.

3. Diese Aufgabe hat wieder einmal mit Heron zu tun. Allerdings sollte man zunächst ein geeignetes Viereck bestimmen. Aber aufgepaßt: Jeder Lösungsschritt ist zu begründen bzw. jede Behauptung ist zu beweisen! Denkt daran!

Literaturhinweise:

Kleine Enzyklopädie Mathematik: S. 124, S. 302, S. 187, S. 185, S. 117 bis 121, S. 123 bis 124, S. 102 bis 104!

Und nun viel Erfolg beim Lösen dieser Serie!

Ein Verfahren zur mündlichen Lösung von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung in der Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

gilt bekanntlich der Vietasche Wurzelsatz

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Dieser gestattet es in vielen Fällen, ganzzahlige Lösungen abzulesen, ohne die Lösungsformel benutzen zu müssen.

Beispiel: $x^2 - 27x + 170 = 0$

Man sieht sofort $10 + 17 = 27$

und $10 \cdot 17 = 170$

und hat damit die Lösung $x_1 = 10$ und $x_2 = 17$.

Es gibt auch ein Verfahren, mit dem man allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

im Kopf lösen kann, sofern sie rationale Lösungen besitzen.

Die Lösungsformel für (2) ist

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Man findet nun eine Hilfsgleichung in Normalform

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (3)$$

mit derselben Diskriminante, wenn man $p = b$ und $q = ac$ setzt. Es ist leicht zu überprüfen, daß

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

und damit $x_1 = \frac{z_1}{a}$ und $x_2 = \frac{z_2}{a}$.

Da die Koeffizienten und Lösungen von (3) bei vielen Beispielen leicht im Kopf zu bestimmen sind, hat man in diesen Fällen eine sehr einfache Methode zur Lösung von Gleichungen der Form (2).

Beispiel: $6x^2 - 7x + 2 = 0$

a) Hilfsgleichung $z^2 - 7z + 12 = 0$

b) Wegen $4 + 3 = 7$ und $4 \cdot 3 = 12$ gilt $z_1 = 4$ und $z_2 = 3$

c) Damit hat man $x_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

L. Dimenstein

(Fortsetzung Seite 72)

Aufgaben aus der Praxis

Der VEB Leichtmetallwerk Rackwitz gehört dem VEB Mansfeld-Kombinat Wilhelm Pieck Eisleben an und ist einer der wichtigsten aluminiumverarbeitenden Betriebe unserer Republik. Für hervorragende Leistungen konnten die Beschäftigten dieses Werkes im Jahre 1955 mit dem Orden „Banner der Arbeit“ und im Jahre 1974 mit dem „Karl-Marx-Orden“ ausgezeichnet werden. Ein großer Teil des Produktionsprogramms umfaßt die Herstellung verschiedenster Aluminiumgußlegierungen sowie die Fertigung von Aluminiumfolien; dazu zählt auch die bekannte Haushaltfolie.

Besonderes Gewicht kommt der Produktion von Leichtmetall-Profilen zu, die in der größten und leistungsfähigsten Aluminium-Strangpresserei der DDR hergestellt werden und an viele Betriebe unserer Republik und in die Länder des RGW zur Weiterverarbeitung geliefert werden.

Aus dem breiten Produktionsangebot sind noch die Herstellung von Beschlagteilen für die Deutsche Reichsbahn und die Fertigung von Kühlelementen für die Kühlschränke des DKK Scharfenstein zu erwähnen.

In der Berufsschule des VEB Leichtmetallwerk Rackwitz erhalten jährlich etwa 150 Lehrlinge eine Ausbildung als Instandhaltungsmechaniker, Walzwerker, Metallurgen für Erzeugung bzw. Formgebung, Folienveredler usw.

Außerdem wird in diesem Betrieb für eine große Anzahl von Schülern des Kreises Delitzsch der Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion und der Unterricht im Fach „Einführung in die sozialistische Produktion“ durchgeführt.

Wir stellen nun einige Aufgaben aus der Praxis dieses Betriebes vor:

Während des Unterrichtstages in der sozialistischen Produktion montieren Schüler im VEB Leichtmetallwerk Rackwitz Lautsprecher vom Typ LP 553, die in Kofferradio- und Fernsehgeräte eingebaut werden.

Klasse 5

▲1▲ Von diesen Schülern werden in 4 Stunden 80 Lautsprecher montiert. Nach wieviel Minuten verläßt jeweils ein fertiger Lautsprecher das Montageband?

Klasse 6

▲2▲ Die Membraneinheit eines Lautsprechers wird auf das Lautsprechergehäuse geleimt. Die ellipsenförmige Leimspur wird mit einem Automaten aufgetragen.

Bestimme die Länge der Leimspur ohne Berücksichtigung ihrer Dicke! (Länge der großen Halbachse der Ellipse $a=7,5$ cm, der kleinen Halbachse $b=5$ cm; Umfang der Ellipse $u \approx \pi \cdot (a+b)$; $\pi \approx \frac{22}{7}$).

Klasse 7

▲3▲ Die Spule der Membraneinheit eines solchen Lautsprechers wird von einem Kupferdraht mit 0,3 mm Durchmesser und 2,30 m Länge gebildet, der auf einen Spulenkörper mit einem Durchmesser von 1,5 cm gewickelt wird.

a) Bestimme die Anzahl der Windungen, wenn für beide Anschlüsse jeweils 5 cm Drahtlänge benötigt werden und die Windungen nur in einer Lage gewickelt werden!

b) Berechne die Länge einer Spule, wenn die Windungen in zwei Lagen gewickelt werden, wobei der etwas größere Durchmesser der oberen Lage unberücksichtigt bleiben soll!

Klasse 8

▲4▲ Die Leistung eines solchen Lautsprechers beträgt 2 VA.

a) Bestimme die Stromstärke I , wenn eine Spannung von 2,4 V angelegt wird!

b) Ermittle den Widerstand des Lautsprechers!

In der Barrengießerei des VEB Leichtmetallwerk Rackwitz werden Aluminiumbarren für die weiterverarbeitenden Abteilungen gegossen.

Klasse 5

▲5▲ Wieviel Aluminiumbarren mit einer Masse von je 250 kg können aus 9 t Aluminium gegossen werden?

Klasse 6

▲6▲ Beim Herstellen eines Aluminiumbarrens beträgt die Gießgeschwindigkeit

$$v = 10 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Wie lange dauert der Gießvorgang für einen Aluminiumbarren von 4 m Länge?

Klasse 7

▲7▲ Berechne die Masse eines Aluminiumbarrens von der Form eines geraden Kreiszylinders, der den Durchmesser $d=110$ mm und die Länge $h=4$ m besitzt

$$\left(\rho = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$$

Klasse 8

▲8▲ Von einer Aluminiumlegierung mit einem 3%igen Magnesiumanteil werden 8,5 t benötigt. Es stehen 4 t einer Aluminiumlegierung mit einem 2%igen Magnesiumanteil zur Verfügung. Wieviel Kilogramm

Aluminium und wieviel Kilogramm Magnesium müssen der Schmelze noch zugeführt werden?

Im Folienwalzwerk des VEB Leichtmetallwerk Rackwitz werden Aluminiumfolien für die verschiedensten Bereiche hergestellt. Als Ausgangsmaterial dient eine Rohfolie mit einer Stärke von 500 μm ($1 \mu\text{m} = 0,001$ mm).

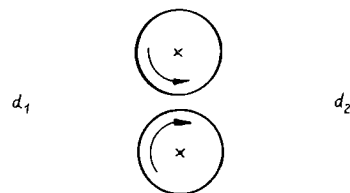
Klasse 6

▲9▲ Beim Walzen der Rohfolie wird die Breite des Aluminiumbandes nicht verändert. Auf welche Länge wird eine 100 m lange Rohfolie gebracht, wenn sie nach einigen Walzvorgängen nur noch eine Stärke von 25 μm besitzt?

Klasse 7

▲10▲ Beim Walzen von Aluminium unterscheiden wir zwischen Arbeits- und Stützwalze. Die Arbeitswalze habe einen Durchmesser von 240 mm, die Stützwalze von 560 mm; die Bandgeschwindigkeit betrage $350 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Wie viele Umdrehungen je Minute machen in diesem Falle Arbeits- bzw. Stützwalze?



Klasse 8

▲11▲ Beim Walzen von Aluminium würde sich das Aluminium auf Grund des hohen Walzendruckes von 50 MPa sehr stark erwärmen, wenn es nicht ständig gekühlt werden würde. An Kühlflüssigkeit werden in einer Minute 1000 Liter benötigt.

Wie groß ist die Geschwindigkeit $\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$ der Kühlflüssigkeit in einem Leitungsrohr mit einem Innendurchmesser von 8 cm?

Im VEB Leichtmetallwerk Rackwitz werden drei verschiedene Arten von Haushaltfolie hergestellt, die alle die gleiche Stärke von 11 μm haben, sich aber in der Breite unterscheiden.

Klasse 5

▲12▲ Berechne die Fläche (in dm^2) einer Rolle Haushaltfolie mit einer Breite von 300 mm und einer Länge von 23 m!

▲13▲ Wie viele Rollen Haushaltfolie mit einer Masse von 250 g können aus 3 t Rohfolie hergestellt werden, wenn durch das mehrmalige Walzen der Rohfolie der zehnte Teil des Ausgangsmaterials verlorengeht?

Berufsbild

Technologe

Ausbildung an der Ingenieurschule für Maschinenbau Schmalkalden

Der IX. Parteitag der SED hat unserem Volk neue, begeisterte Perspektiven gewiesen. Im Bereich der industriellen Entwicklung nehmen der Werkzeug- und Verarbeitungsmaschinenbau eine Schlüsselstellung ein. Mit ihren Erzeugnissen bestimmen sie das Wachstum der Arbeitsproduktivität in allen Bereichen der Produktion. In den kommenden Jahren ergibt sich ein steigender Bedarf des Maschinenbaues an ingenieurtechnischem Personal, insbesondere an Technologen. Die hohen Ziele der weiteren Durchsetzung der Hauptaufgabe des IX. Parteitages der SED fordern die umfassende sozialistische Intensivierung in allen Bereichen der Volkswirtschaft.

Für den Maschinenbau sind dazu noch mehr junge Menschen auszubilden, die als Technologen und Konstrukteure an der Seite der Arbeiter die zehn Faktoren der sozialistischen Intensivierung meistern. Während sich fast jeder vorstellen kann, was ein Konstrukteur zu tun hat, weiß man weniger von den Aufgaben des Technologen. Vereinfacht gesagt: Wenn der Konstrukteur festlegt, was gemacht wird, so muß der Technologe sagen, in welchen Arbeitsgängen, mit welchen Verfahren und mit welchen Maschinen die vom Konstrukteur zeichnerisch festgelegten Teile die gewünschte Gestalt annehmen sollen.

Die Tätigkeiten eines Technologen sind vielseitig. Sie werden übersichtlich, geht man von der dialektischen Einheit der drei verschiedenen Seiten des vollständigen Produktionsprozesses aus:

1. der materiell-technischen,
2. der sozial-ökonomischen,
3. der fertigungsökonomischen Seite.

Ideologische, theoretische und methodologische Grundlage seiner Tätigkeit ist der Marxismus-Leninismus. Deshalb ist das gesellschaftswissenschaftliche Grundlagenstudium ein Eckpfeiler der gesamten Ingenieurausbildung.

Kaum eine ingenieurmäßige Arbeit ist denkbar, bei der nicht gerechnet wird – so stellt die Mathematik eine wesentliche Grundlage der Technolוגenausbildung. Entsprechend den Anforderungsschwerpunkten werden die Akzente gesetzt auf: lineare Algebra, Differential- und Integralrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik.

Die materiell-technische Seite der Technologentätigkeit verlangt von ihm Überlegungen und Entscheidungen zur Rohteil- bzw. Halbzuggestaltung; zur Unterteilung in eine ökonomische günstige Anzahl von Arbeitsgängen und ihre Kopplung; zur Auswahl des geeigneten Bearbeitungsverfahrens und der dazu notwendigen Maschinen, Werkzeuge und Vorrichtungen.

Fertigen bedeutet immer auch Messen. Deshalb gehört der Einsatz einer geeigneten Prüftechnik zu den Aufgaben des Technologen. Die kontinuierliche Zuführung von Rohstoffen und der Abtransport der Fertigteile erfordert Überlegungen auf dem Gebiet der Fördertechnik. Schließlich muß ein ausreichendes Verpackungsverfahren den Erhalt des Gebrauchswertes auf dem Wege zum Verbraucher gewährleisten.

Der politisch so eminent wichtigen Erhöhung der Arbeitsproduktivität dient der Technologe durch Um- und Neugestaltung von Fertigungsabläufen und -verfahren bis hin zum Einsatz von Automatisierungsmitteln.

Die sozial-ökonomische Seite der Berufsaufgaben eines Technologen besteht in der Lösung der komplexen Anforderungen der wissenschaftlichen Arbeitsorganisation.

Hier hinein spielen alle Fragen, die sich darauf richten, im Zusammenspiel von Arbeitsmittel, Arbeitskraft und Arbeitsgegenstand ein Optimum herbeizuführen, bei dem maximale Wirtschaftlichkeit und eine stete Verbesserung der Arbeitsbedingungen der Werktätigen erreicht werden.

Die fertigungsökonomische Seite der Technologentätigkeit erfordert Kenntnisse in der Betriebsökonomik, dem Rechnungswesen, der ökonomischen Modellierung und Optimierung technologischer Varianten sowie Fähigkeiten zur Rationalisierung der eigenen Arbeit. Der Vorbereitung auf die oben grob umrissenen Berufsaufgaben dient ein 3jähriges Studium. Davon werden $2\frac{1}{2}$ Jahre an der Ingenieurschule, das letzte halbe Jahr in wissenschaftlich produktiver Tätigkeit bereits im künftigen Einsatzbetrieb ausgebildet.

Die Lehrveranstaltungen gliedern sich nach folgender Stundentafel:

Marxismus-Leninismus	306 Std.
Sprachen, Sport	360 Std.
Mathematik	306 Std.
Physik, Chemie	234 Std.
Technische Grundlagenfächer	720 Std.
Technische Spezialfächer	1098 Std.

Einem Absolventen der Fachrichtung Technologie der metallverarbeitenden Industrie bieten sich vielfältige Einsatzmöglichkeiten in der Montage-, Fertigungs-, Operativ- und Planungstechnologie; in der Betriebsprojektion, Fertigungsmittelkonstruktion, Produktionsleitung und -lenkung sowie in den betrieblichen Rationalisierungsabteilungen. Nach erfolgreicher Ingenieurausbildung kann durch Fernstudienlehrgänge an technischen Hochschulen der akademische Grad eines Diplomingenieurs erworben werden.

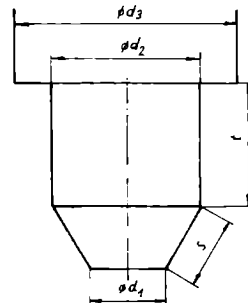
Neben der Fachrichtung Technologie kann an der Ingenieurschule Schmalkalden auch ein Studium in zwei weiteren Fachrichtungen erfolgen:

Instandhaltung und Werkzeugmaschinenbau.

M. Wittwer

Aufgabe:

Beim Arbeitsverfahren Tiefziehen wird aus einem ebenen Blech ein Gefäß gezogen. Das Blechvolumen vor und nach dem Tiefzug ist konstant, desgleichen die Blechstärke. Für zylindrische Ziehteile entspricht der Zugschnitt einem Kreis, der Ronde genannt wird. Es ist der Rondendurchmesser für das in der Skizze dargestellte Tiefziehteil zu ermitteln. Die Ziehradien können vernachlässigt werden.



Zum Titelblatt des Heftes 5/76

Auf dem Titelbild ist die harmonische Synthese der Rechteckkurve dargestellt. Die einzelnen Schwingungen werden addiert, und es ergibt sich die Rechteckkurve als Resultierende der Fourierschen Reihe

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]$$

Für die ersten drei Glieder ergibt sich nur die rot eingezeichnete Kurve als Resultierende.

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right]$$

Klasse 6

▲ 14 ▲ Eine Rolle Haushaltfolie hat eine Masse von 200 g und ist 11 μm stark. Wie groß ist die Masse einer Rolle Grillfolie von gleicher Länge und Breite, die jedoch 25 μm stark ist?

▲ 15 ▲ Die Masse einer 300 mm breiten und 23 m langen Haushaltfolie beträgt 200 g. Wie groß ist die Masse einer 400 mm breiten und nur halb so langen Folie von gleicher Stärke?

E. Knauth

In freien Stunden alpha heiter



„Wem von den Studenten habe ich die Hand gedrückt?“

Für Schnellrechner

Wie man vier dreistellige Zahlen miteinander im Kopf multiplizieren kann:

Ein Rechenkünstler hat 12 dreistellige Zahlen auf Kärtchen aufgeschrieben und in der folgenden Weise in vier Zeilen zu je drei Kärtchen auf den Tisch gelegt:

365	292	146
-----	-----	-----

685	548	274
-----	-----	-----

511	438	219
-----	-----	-----

959	822	411
-----	-----	-----

Nun fordert er vier Personen aus dem Publikum auf, aus jeder Zeile je eine Karte auszuwählen und nebeneinander auf den Tisch zu legen. Es werden z. B. die folgenden vier Karten ausgewählt:

365	548	219	822
-----	-----	-----	-----

Nach einem Blick auf diese Karten kann der Rechenkünstler sofort das Produkt dieser vier dreistelligen Zahlen niederschreiben:

36007200360

Dagegen benötigen die zur Kontrolle aus dem Publikum ausgewählten Personen längere Zeit, um das Produkt in der üblichen Weise mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation auszurechnen.

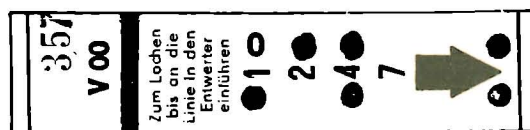
Wie konnte der Rechenkünstler das Produkt der vier dreistelligen Zahlen so schnell ermitteln?

OSTr Dr. R. Lüders, Berlin

Wie viele Lochkombinationen?

Ein Fahrschein für die Straßenbahn in Leipzig wird durch Lochen entwertet, wobei die Löcher in Reihen eingestanzt werden. Dabei können in einer Reihe kein, jeweils rechts oder links ein Loch sowie zwei Löcher erscheinen. Es gibt sechs solcher Reihen (siehe Bild).

- a) Wie viele Lochkombinationen gibt es für einen Schein, wenn in jeder Reihe wenigstens ein Loch erscheint?



- b) Auf wie viele Arten kann ein Fahrschein entwertet werden, wenn für die Reihen auch die Möglichkeit besteht, kein Loch einzustanzn?

Dr. R. Thiele, Leipzig

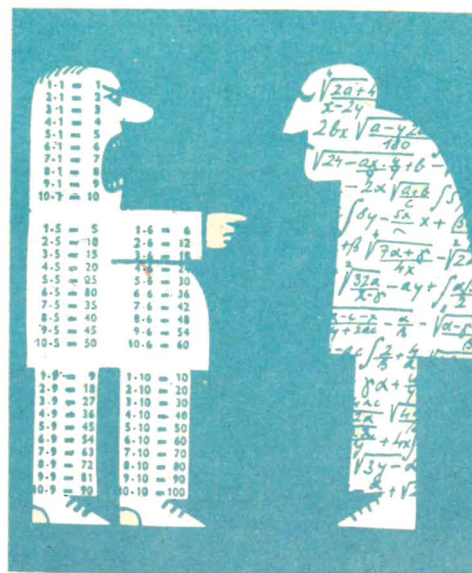
Kopftausch

Verändert man bei den folgenden Wörtern in geeigneter Weise den Anfangsbuchstaben, so erhält man jeweils einen Begriff, der im Mathematikunterricht vorkommt.

Die neuen Anfangsbuchstaben ergeben, von oben nach unten gelesen, ein Teilgebiet der Geometrie.

Haar – Rot – Echt – Kenner – Ankreis – Peter – Liner – Sonne – Dichtung – Anhalt – Ypsilon

OSTr K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



Humorvoller Setzer

Vor mir ein leeres Blatt Papier in der Limonadenflasche,
nur noch wenig Inhalt in meinem Kopf,
kluge Gedanken in meiner rechten Hand,
ein abgebrochener Stift in der Kekspackung,
noch genau zwei zerbrochene Kekse in meinem Gehirn,
eine Lösungsidee im Patronenfüller,
keine Tinte im Tafelwerk,
nichts zu finden.

Der humorvolle Setzer setzte die Kommas schmunzelnd an die falsche Stelle. Setze du sie an die richtige!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Das Kfz-Nummernschild

Es ist ein Kfz-Nummernschild zu bestimmen.

Der erste Buchstabe des Kennzeichens steht an der Stelle im Alphabet, die der Tausender der Nummer angibt, der zweite Buchstabe steht an der Stelle, die der Einer der Nummer angibt. Die Nummer selbst setzt sich aus einem Primzahlzwillings zusammen, dabei steht die kleinere Primzahl vorn. Der Hunderter und der Zehner, in dieser Reihenfolge gelesen, sind 16mal so groß wie die Summe der beiden äußeren Zahlen.

Mathematikfachlehrer H. Engelmann, Sachsendorf

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{AAL} \\ + \text{AAL} \\ \hline \text{FANG} \end{array}$$

Schüler Markus Lauterbach, Gotha

$$\begin{array}{r} abc - cba = dab \\ + \quad + \quad - \\ de - de = f \\ \hline dffg - bfh = dab \end{array}$$

Schüler Willi Rudolf, Wien

$$\begin{array}{r} \text{SCHI} \\ + \text{LIFT} \\ \hline \text{SCHÖN} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{LII} \cdot \text{COKE} \\ \hline \text{KACC} \\ \text{ICKK} \\ \text{BEEE} \\ \hline \text{KAMILLE} \end{array}$$

OL H. Förg-Rob, Schwaz (Österreich)

Wir wägen

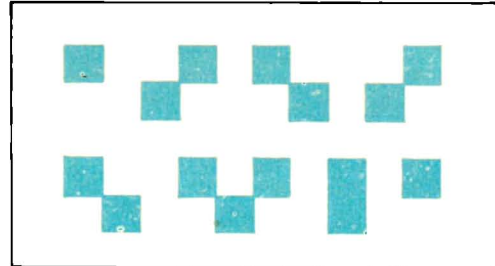
In einem Beutel befinden sich 9 kg Graupen. Wie kann mit einer Schalenwaage und zwei Gewichten zu 50 g und 200 g in Mengen von 2 kg und 7 kg geteilt werden? Es darf nur dreimal gewogen werden!

aus: Quant 3/76 (Moskau)

Geheimschrift

Zur Übermittlung vertraulicher Mitteilungen benutzt man schon seit langer Zeit sogenannte Geheimschriften.

Hier sei eine Methode genannt, Nachrichten zu verschlüsseln. Wir fertigen uns eine Schablone nach folgendem Muster an. Die farbigen Felder werden ausgeschnitten.



Mit dieser Schablone, die Absender und Empfänger haben müssen, läßt sich eine Nachricht von 30 Buchstaben übermitteln. Man notiert zuerst die Hälfte der Nachricht, indem man die Schablone auf ein leeres Blatt legt, dann wird die Schablone gewendet, und der Rest kann notiert werden. Die verbleibenden Lücken werden anschließend ausgefüllt, indem man beliebig Buchstaben einsetzt. Das Muster liefert bei Verwendung der Schablone den Text:

„Komme sofort nach X, bringe Karl mit. M.“

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

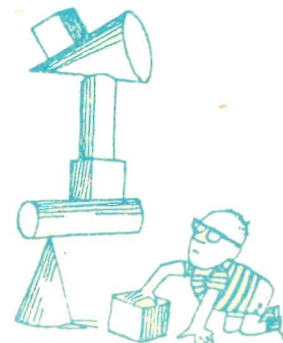
A	K	X	L	O	B	M	C	R	E	M
F	I	Y	E	N	X	G	S	E	O	K
S	Q	Z	N	B	O	E	M	A	J	R
A	F	A	A	O	D	R	R	T	L	N
T	M	A	M	I	C	T	P	H	A	M

Abzählreim

In der linken oberen Ecke beginnend soll im Uhrzeigersinn mit einer bestimmten Zahl ausgezählt werden, so daß die Buchstaben in der Reihenfolge der Auszählung einen mathematischen Begriff ergeben.

BCEIR
E O
N F
O I
MMSLH

Mathematikfachlehrer H. Kampe, Neuseddin



Le Corbusier
Tibor Kajan,
Budapest

In einem Pionierlager südlich von Moskau

Während eines Geländespiels muß ich, Gena Lopuchow, mit sieben anderen Pionieren einen Spähtrupp bilden. Wir heißen die „Blauen“. Unsere Gegner sind die „Grünen“. Unser Lager befindet sich in einem für den Gegner schwer zugänglichen Teil des Waldes. Die „Grünen“ sind irgendwo auf der anderen Seite des Flusses Kalinowka. Der Spähtrupp steht unter meinem Kommando.

Zu ihm gehören Irina, Lena, Tanja, Borja, Serjoscha, Viktor und Kolja.

Wir verlassen das Lager und bewegen uns leise in Richtung des Flusses. Das Ende des Waldes ist bald erreicht, und es sind nur noch kleine Sträucher zu sehen. Aber hinter den Sträuchern können sich feindliche Aufklärer versteckt haben. Ich entscheide, einen Beobachtungspunkt in den Ästen einer hohen Espe einzurichten und teile dies meinen Spähern mit.

„So eine Espe“, wundert sich Viktor. „Sie ist mindestens hundert Meter hoch. Darf ich hinaufklettern?“

„Ich ernenne Viktor Komarow zum Beobachter“, antworte ich darauf.

„Aber zuerst müssen wir die Höhe des Beobachtungspunktes ermitteln.“ „Ich schätze 70 Meter“, meint Lena. „Darf ich auch hoch? Ich kann gut klettern.“

„Wartet mal!“ sage ich. „Zuerst wollen wir die Höhe des Baumes genau bestimmen.“

Um die Höhe zu messen, benutzen wir den Stock, der symbolisch mein Gewehr darstellt. Mit einem Blatt Karopapier aus dem Heft des Melders (die Länge eines Kästchens beträgt 5 mm) ermitteln wir die Länge des Stockes – 86 cm. Wir stoßen den Stock senkrecht in den Boden, so daß er noch 70 cm über der Erde zu sehen ist. Ich lege mich in einer solchen Entfernung auf die Erde, daß ich das Ende des Stockes (E) und die Krone des Baumes (K) auf demselben Strahl sehe

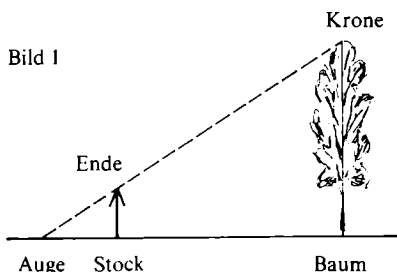


Bild 1

(siehe Bild 1). Mit Hilfe des Stockes und des Papiers finden wir den Abstand zwischen dem Auge (A) und dem Stock (S) und den Abstand zwischen dem Auge und dem Baum (B):

$$AS = 90 \text{ cm} = 0,9 \text{ m}; \quad AB = 36 \text{ m}$$

„Jetzt ist es einfach“, sagt Tanja, die die 8. Klasse absolviert hat. „Die Höhe des Baumes verhält sich zur Höhe des Stockes wie die Entfernung von deinem Auge zum Baum zu der Entfernung von deinem Auge zum Stock.“

„Und wie groß ist das Verhältnis?“ will Irina wissen, die erst in die 6. Klasse kommt.

„Soldat Irina Koslowskaja, ich beauftrage dich, den Quotienten aus 36 m und 90 cm zu berechnen!“ sage ich. Irina sieht nach unten und murmelt etwas Unverständliches. Alle sehen sie an und lachen. „Was ihr nur lacht!“ Irina wird böse. „Vier mal neun ist sechshunddreißig. Also ist der Quotient vier.“

„Nein, nicht vier, sondern vierzig!“ rufen Kolja und Lena, d. h. zuerst Lena und dann Kolja. „Also“, faßt Borja zusammen, „die Espe ist 40mal größer als der Stock. Das heißt, wir müssen 86 cm mit 40 multiplizieren.“ „Nicht 86 cm, sondern 70 cm“, wirft Tanja ein. „Das Stück des Stockes, das in der Erde steckt, dürfen wir nicht mitrechnen. Wir müssen also 70 mit 40 multiplizieren. Die Höhe des Baumes ist 28 m. Und nicht 100 m, mein lieber Vitja“, lächelt Tanja. „Darf ich jetzt hoch, Gena?“ Ich erlaube beiden hochzuklettern. „Nebenbei könnt ihr euch merken, wie man die Höhe eines Baumes ermitteln kann“, füge ich hinzu.

Von dem Beobachtungspunkt kann man den Gegner nicht bemerken. Ich entscheide jetzt, daß wir uns einzeln zum Flußufer bewegen. Auf Vorschlag der Beobachter treffen wir uns bei den Sträuchern gegenüber einer einzelnen Birke, die sich am anderen Flußufer befindet. Von diesem Gebüsch aus beobachten wir das andere Ufer; vom Gegner sehen wir nichts. Nun haben wir Breite und Tiefe des Flusses zu ermitteln.

Den Fluß kennt jeder von uns. An der tiefsten Stelle reicht mir das Wasser bis zur Brust. Es ist aber kalt; baden wollen wir nicht. „Ich habe einen Vorschlag“, sagt Tanja. „Man kann ganz genau die Breite des Flusses ermitteln, ohne sich die Füße naß zu machen.“

„Immer denkt sich Tanja etwas aus. Sie hat nicht umsonst den zweiten Platz in der Mathematik-Olympiade des Bezirkes belegt.“ Nun gibt Tanja das Kommando an. Sie befiehlt Kolja, sich genau gegenüber der Birke aufzustellen. Sie selbst geht am Ufer entlang; geht und zählt die Schritte. Nach 30 Schritten bleibt sie stehen. Wir anderen bleiben auch stehen, obwohl wir nichts verstehen. „Lena, stell dich bitte genau auf meinen Platz!“ befiehlt Tanja. Lena macht dies, und Tanja geht weiter und zählt wieder die Schritte. Nach weiteren 30 Schritten stellt sie Serjoscha auf und dreht sich um 90° und geht vom Fluß in Richtung Wald. Ab und zu blickt sie sich um. Borja, Vitja, Irina und ich gehen hinterher.

Wir verstehen noch immer nichts, aber wir gehen ihr nach. Als Tanja Lena und die Birke auf dem anderen Ufer des Flusses auf demselben Strahl erblickt (siehe Bild 2), bleibt sie stehen.

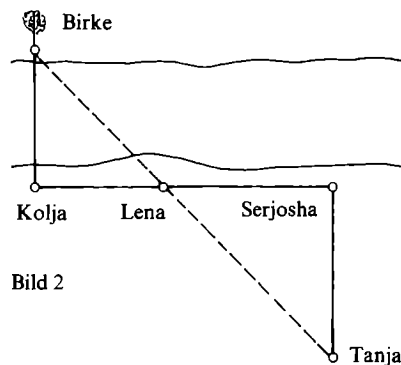


Bild 2

„Wie lange willst du noch messen, und was soll das Ganze?“ fragt Irina. „Nimm dein Gewehr“, Gena, und miß die Entfernung von mir zu Serjoscha!“ Die Entfernung beträgt 39 Stocklängen. Ich nehme Papier und multipliziere 86 cm mit 39. „33,5 m“, sage ich. „Also, von Kolja bis zur Birke sind es auch 33,5 m“, erklärt Tanja. „Davon muß man noch 0,5 m (das ist die Entfernung von Kolja bis zum Fluß) und 1 m (das ist die Entfernung von der Birke bis zum Ufer) subtrahieren. Jetzt notiere: 32 m als Flußbreite. Hast du mein Handeln verstanden?“ „Natürlich, es handelt sich um kongruente Dreiecke. Warum bin ich nur nicht selbst darauf gekommen?“

A. Halameisär

$$\sqrt{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7} = 1 + \sqrt{9!} + 7 + 7$$

$$\bullet (1+9-7+7)-(1-9+7+7) = -1-9+7+7$$

$$(1^9 \cdot 7 - 7) : (1^9 \cdot 7 : 7) = 19 \cdot (7 \cdot 7)$$

$$\sqrt{\frac{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7}{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7}} = (1 + 10 - 7 : 7)$$

Dozent Dr. H. Lohse, Leipzig

■ Man beweise, daß es 1977 natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{1977}$ und eine natürliche Zahl b gibt, so daß

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1977}^2 = b^2 \text{ gilt.}$$

Michail Griestschenko, Student Universität Minsk (UdSSR)

▲ Ist die Zahl

$$z = 1^{1977} + 2^{1977} + \dots + 1977^{1977}$$

durch 1977 teilbar oder nicht?

Egbert Lindner, Student, Erkner

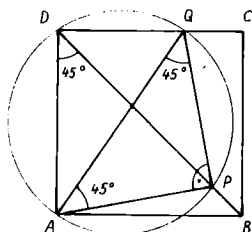
(Lösungen s. Seite 72)

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/76

Ma 7 ■ 1580 Aus $\angle ADQ = \angle APQ = 90^\circ$ folgt, daß das Viereck $APQD$ ein Sehnenviereck ist. Deshalb gilt $\angle ADP = \angle AQP = 45^\circ$ (Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{AP}$), da die Diagonale $\overline{BD}$ den Winkel $\angle ADC$ halbiert. Somit gilt weiter $\angle QAP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Wegen $\angle QAP = \angle AQP = 45^\circ$ gilt auch $\overline{PA} = \overline{PQ}$, d. h., das Dreieck APQ ist gleichschenkelig.



Ma 7 ■ 1581 Auf Grund der Parallelogrammeigenschaften gilt $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$. Nach Konstruktion gilt $\overline{BC} = \overline{BF} = b$; daraus folgt $\angle BFC = \angle BCF = \alpha$. Ferner gilt $\angle BFC = \angle ABF = \alpha$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Nach Konstruktion gilt $\overline{DE} = \overline{DC} = a$; daraus folgt $\angle DCE = \angle DEC = \alpha$. Ferner gilt $\angle CED = \angle ADE = \alpha$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Aus $\overline{AD} = \overline{BF} = b$, $\overline{AB} = \overline{ED} = a$ und $\angle ABF = \angle EDA = \alpha$ folgt $\triangle ABF \cong \triangle EDA$ und somit $\overline{AE} = \overline{AF}$, d. h., das Dreieck AEF ist gleichschenkelig.

Ph 7 ■ 1582 Gegeben:

$$P_{zu} = 300 \text{ W} = 300 \cdot 0,10197 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 30,59 \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$G = 40 \text{ kp (40 l Wasser)}$$

$$h = 30 \text{ m}$$

Gesucht: η

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} \quad W_{ab} = G \cdot h$$

$$\eta = \frac{G \cdot h}{P_{zu} \cdot t} \quad W_{zu} = P_{zu} \cdot t$$

$$\eta = \frac{40 \text{ kp} \cdot 30 \text{ m} \cdot \text{s}}{30,59 \text{ kpm} \cdot 60 \text{ s}}$$

$$\eta \approx 0,654$$

Der Wirkungsgrad des Pumpaggregats beträgt 0,654 = 65,4%.

Ch 7 ■ 1583

$$\text{FeO} \quad \frac{72 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{56 \text{ g}}{m_1} \quad m_1 = 389 \text{ g}$$

$$\text{Fe}_2\text{O}_3 \quad \frac{160 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{112 \text{ g}}{m_2} \quad m_2 = 350 \text{ g}$$

$$\text{Fe}_3\text{O}_4 \quad \frac{232 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{168 \text{ g}}{m_3} \quad m_3 = 362 \text{ g}$$

Aus je 0,5 kg Eisen(II)-oxid, Eisen(III)-oxid und Eisen(II,III)-oxid entstehen 389 g, 350 g bzw. 362 g Eisen.

Ma 8 ■ 1584 Wegen $a = 973$ gilt

$$z = \frac{(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2}{(a-1)(a+1) + 5}$$

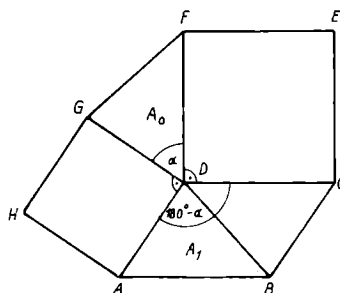
Dabei ist der Zähler gleich

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 = 7a^2 + 28 = 7(a^2 + 4).$$

Der Nenner ist gleich

$$a^2 - 1 + 5 = a^2 + 4. \text{ Daraus folgt } z = \frac{7(a^2 + 4)}{a^2 + 4}, \text{ also } z = 7.$$

Ma 8 ■ 1585 Es sei $\angle DAB = \alpha$; dann ist $\angle CDA = 180^\circ - \alpha$ als entgegengesetzter Winkel. Daraus folgt (siehe Bild) $\angle GDF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha = \angle DAB$.



Ferner gilt nach Voraussetzung

$$\overline{AD} = \overline{GD}. \quad (2)$$

Aus $\overline{AB} = \overline{CD}$ (gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms $ABCD$) und $\overline{CD} = \overline{DF}$ (nach Voraussetzung) folgt weiter

$$\overline{AB} = \overline{DF}. \quad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (sws)

$$\triangle ABD \cong \triangle DFG,$$

d. h., diese beiden Dreiecke sind kongruent und daher auch flächengleich. Es gilt also die Beziehung $A_0 = A_1$.

Ma 8 ■ 1586 a) Bezeichnet man die Länge der Rennstrecke mit

$$s = 2000 \text{ m} = 2 \text{ km},$$

die Zeit von 1948 mit $t_1 = 5 \text{ min } 56,7 \text{ s}$

= 356,7 s, die Zeit von 1970 mit $t_2 = 5 \text{ min } 36,1 \text{ s} = 336,1 \text{ s}$, so erhält man die prozentuale Zeitverringerung

$$p = \frac{t_1 - t_2}{t_1} \cdot 100\% = \frac{20,6 \cdot 100}{356,7} \approx 5,8\%$$

b) Die 1948 erreichte Geschwindigkeit beträgt

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{2 \cdot 3600 \text{ km}}{356,7 \text{ h}} \approx 20,19 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

und die 1970 erreichte Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{2 \cdot 3600 \text{ km}}{336,1 \text{ h}} \approx 21,42 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

c) Daraus ergibt sich die prozentuale Geschwindigkeitserhöhung

$$p' = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100\% = \frac{1,23 \cdot 100}{20,19} \approx 6,1\%.$$

d) Es gilt $p < p'$, weil

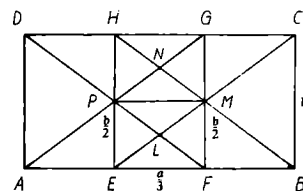
$$\frac{s}{t_2} - \frac{s}{t_1} \cdot 100\% = \frac{s(t_1 - t_2)t_1}{t_1 t_2 s} \cdot 100\%.$$

$$p' = \frac{t_1 - t_2}{t_1} \cdot \frac{t_1}{t_2} \cdot 100\% = p' \cdot \frac{t_1}{t_2} > p, \text{ denn } \frac{t_1}{t_2} > 1.$$

Ma 8 ■ 1587 Wegen $\overline{EB} = \overline{HC} = \frac{2}{3}a$ ist das

Viereck $EBCH$ ein Rechteck; M ist der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Daher sind die Dreiecke EFM und CGM rechtwinklig und kongruent, es gilt also $\overline{MF} = \overline{MG} = \frac{b}{2}$.

Analog zeigt man, daß auch $\overline{PE} = \frac{b}{2}$ gilt.



Daher ist das Viereck $EFMP$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{2}$, das den Flächeninhalt $\frac{ab}{6}$ hat.

Da L der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Rechtecks ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks PLM gleich dem vierten Teil des Flächeninhalts des Rechtecks $EFMP$, also gleich $\frac{ab}{24}$. Analog zeigt man, daß auch das Dreieck PMN den Flächeninhalt $\frac{ab}{24}$ hat. Der Flächeninhalt des Vierecks $LMNP$ ist daher gleich

$$A_1 = 2 \cdot \frac{ab}{24} = \frac{ab}{12},$$

und man erhält das gesuchte Verhältnis

$$A_1 : A_0 = \frac{ab}{12} : ab = 1 : 12.$$

Ph 8 ■ 1588 Gegeben:

$$V_1 = 50 \text{ l}$$

$$p = 28 \text{ at}$$

$$p_0 = 760 \text{ Torr} = 1 \text{ atm} = 1,033 \text{ at}$$

$$p_2 = 750 \text{ Torr} = \frac{750 \cdot 1,36}{1000} \text{ at} = 1,02 \text{ at}$$

Gesucht: ΔV

Der absolute Druck p_1 in der Flasche beträgt

$$p_1 = p + p_0. \quad (1)$$

Nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte ist

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

$$V_2 = \frac{V_1 \cdot p_1}{p_2}$$

$$(1) \text{ eingesetzt: } V_2 = \frac{V_1(p + p_0)}{p_2}.$$

Da in der Flasche $V_1 = 50\text{ l}$ zurückbleiben, entweichen also

$$\Delta V = V_2 - V_1$$

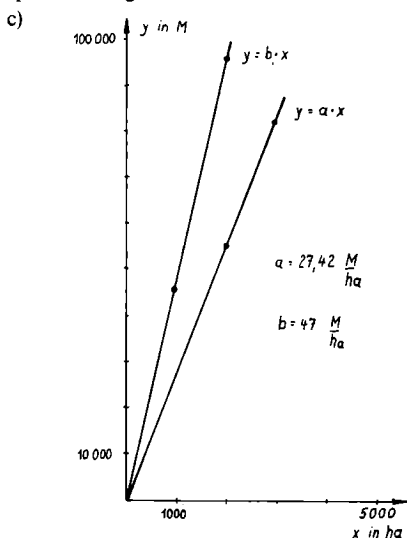
$$\Delta V = \frac{V_1(p+p_0)}{p_2} - V_1 = \frac{V_1(p+p_0-p_2)}{p_2}$$

$$\Delta V = \frac{50\text{ l}(28 + 1,033 - 1,02)}{1,02 \text{ at}} = 1373 \text{ l}$$

Es entweichen 1373 l Sauerstoff.

Ch 8 ■ 1589 a) $y = a \cdot x$ bzw. $y = b \cdot x$, x LN in ha, y Kosten in M

b) Um 41,7% gingen die Selbstkosten zurück. Die Kosten sind im ACZ 411 300 M, die Ersparnis beträgt 293 700 M.



Ma 9 ■ 1590 Es sei (x, y, z) eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann gilt

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0. \quad (4)$$

Daher folgt aus (1)

$$y = \frac{4}{x} \text{ und aus (3)}$$

$$z = \frac{9}{x}. \text{ Wegen (2) gilt daher}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{9}{x} = 16,$$

$$x^2 = \frac{9}{4}.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Für $x_1 = \frac{3}{2}$ erhält man aus (5) und (6)

$$y_1 = \frac{8}{3}, z_1 = 6.$$

Für $x_2 = -\frac{3}{2}$ erhält man

$$y_2 = -\frac{8}{2}, z_2 = -6.$$

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2), (3) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}, 6\right) \text{ und } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}, -6\right) \text{ sein.}$$

Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen sind; denn es gilt

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4, \frac{8}{3} \cdot 6 = 16, 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ usw.}$$

Ma 9 ■ 1591 Nach dem Höhensatz gilt $h^2 = pq$ und wegen $p + q = c$, also $q = c - p$, weiter

$$h^2 = p(c - p),$$

$$p^2 - cp + h^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung für p hat die Lösungen

$$p_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - h^2},$$

$$\text{falls } \frac{c^2}{4} - h^2 \geq 0.$$

a) Für $h = 6 \text{ cm}$ erhält man

$$p_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 - 36}) \text{ cm} = (10 \pm 8) \text{ cm},$$

$$p_1 = 18 \text{ cm, also } q_1 = 2 \text{ cm und}$$

$$p_2 = 2 \text{ cm, also } q_2 = 18 \text{ cm.}$$

b) Für $h = 10 \text{ cm}$ erhält man

$$p_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 - 100}) \text{ cm} = 10 \text{ cm,}$$

also genau eine Lösung

$$p = 10 \text{ cm, } q = 10 \text{ cm.}$$

c) Für $h = 11 \text{ cm}$ wird $\frac{c^2}{4} - h^2 < 0$;

in diesem Falle erhält man also keine reelle Lösung für p .

Ma 9 ■ 1592 Für alle reellen Zahlen a und b gilt:

Die Ungleichung

$$\frac{a^4 + b^4 + 1}{2} \geq a^2 + b^2 - a^2 b^2 \quad (1)$$

ist erfüllt, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$a^4 + b^4 + 1 \geq 2a^2 + 2b^2 - 2a^2 b^2, \quad (2)$$

$$a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 - 2b^2 + 1 \geq 0, \quad (3)$$

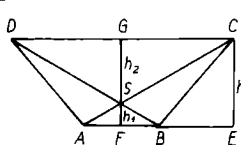
$$(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1 \geq 0, \quad (4)$$

$$(a^2 + b^2 - 1)^2 \geq 0. \quad (5)$$

Nun ist aber die Ungleichung (5) für alle reellen Zahlen a, b erfüllt, da das Quadrat der reellen Zahl $a^2 + b^2 - 1$ niemals negativ ist.

Daher sind auch die Ungleichungen (4), (3), (2) und die gegebene Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen a, b erfüllt, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 1593 Es sei E der Fußpunkt des von C auf AB gefällten Lotes (siehe Bild). Dann ist $CE = h$ die Höhe des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Ferner sei F der Fußpunkt des von S auf AB gefällten Lotes, und es sei $SE = h_1$. Endlich sei G der Fußpunkt des von S auf CD gefällten Lotes, und es sei $SG = h_2$.



Setzt man $AB = a$, so ist $AF = \frac{a}{2}$, $CD = 3a$,

$AE = 2a$. Nach dem Strahlensatz gilt daher

$$h_1 : h = \frac{a}{2} : 2a,$$

$$h_1 = \frac{h}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks SAB ist also gleich

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{8} ah.$$

Wegen $h_2 = h - h_1 = \frac{3}{4}h$ und $CD = 3a$ ist der

Flächeninhalt des Dreiecks SCD gleich

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8} ah.$$

Für die Flächeninhalte A_2 und A_3 der Dreiecke SBC und SDA gilt

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{2} ah - \frac{1}{8} ah = \frac{3}{8} ah.$$

Daraus folgt

$$A_1 + A_2 + A_3 = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) ah = \frac{7}{8} ah$$

und wegen $A_0 = \frac{9}{8} ah$

$$(A_1 + A_2 + A_3) : A_0 = \frac{7}{8} : \frac{9}{8} = 7 : 9.$$

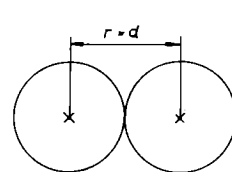
Ph 9 ■ 1594 Gegeben:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$\rho = 11,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 11\,300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$F = 0,1 \text{ p} = 0,000981 \text{ N}$$

Gesucht: d



Nach dem Gravitationsgesetz gilt

$$F = \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ mit } m_1 = m_2 = m = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \rho$$

(Masse der Bleikugel) und $r = d$

$$F = \frac{\gamma \cdot m^2}{d^2}$$

$$F = \frac{\gamma \cdot 4^2 \cdot \pi^2 \cdot d^6 \cdot \rho^2}{3^2 \cdot 2^6 \cdot d^2} = \frac{\gamma \cdot \pi^2 \cdot d^4 \cdot \rho^2}{36}$$

$$d^4 = \frac{36 \cdot F}{\gamma \cdot \pi^2 \cdot \rho^2}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{36 F}{\gamma \cdot \pi^2 \cdot \rho^2}}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{36 \cdot 0,000981 \text{ N} \cdot 10^{11} \cdot \text{kg}^2 \cdot \text{m}^6}{6,67 \cdot \text{Nm}^2 \cdot 3,14^2 \cdot 11300^2 \cdot \text{kg}^2}}$$

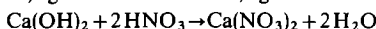
$$= \sqrt[4]{0,42056 \text{ m}^4}$$

$$d \approx 0,805 \text{ m}$$

Der Durchmesser der Bleikugel muß 0,805 m = 80,5 cm betragen.

Ch 9 ■ 1595 a)

$$74,1 \text{ g} \quad 164,1 \text{ g}$$



$$m_1 \quad 10 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 74,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 74,1 \text{ g,}$$

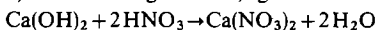
$$1 \text{ mol} \cdot 164,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 164,1 \text{ g}$$

Proportioneinstellung am Rechenstab:

$$m_1 = 4,52 \text{ g.}$$

4,52 g Kalziumhydroxid werden zur Neutralisation benötigt.

$$\text{b) } 126 \text{ g} \quad 164,1 \text{ g}$$



$$m_2 \quad 10 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 2 \text{ mol} \cdot 63 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 126 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_2 = 7,68 \text{ g.}$$

7,68 g 100%iger Säure entsprechen $5 \cdot 7,68 \text{ g} = 39,4 \text{ g}$ 20%ige.

39,4 g 20%ige Säure werden gebraucht.

Ma 10/12 ■ 1596 Da die Masse des Schüttkegels 5 t beträgt und die Dichte $2,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ist sein Volumen gleich

$$V = \frac{5}{2,4} \text{ m}^3 \approx 2,08 \text{ m}^3.$$

Nun gilt, wenn r der Radius und h die Höhe des Kegels sind,

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Ferner gilt $\tan \alpha = \frac{h}{r}$, also $h = r \tan \alpha$

Daraus folgt

$$V = \frac{\pi}{3} r^3 \tan \alpha,$$

$$r^3 = \frac{3V}{\pi \tan \alpha}.$$

Wegen $V \approx 2,08 \text{ m}^3$ und $\tan \alpha = \tan 33^\circ = 0,6494$ erhält man

$$r^3 \approx \frac{3 \cdot 2,08}{\pi \cdot 0,6494} \text{ m}^3 \approx 3,06 \text{ m}^3,$$

$$r \approx \sqrt[3]{3,06} \text{ m} \approx 1,45 \text{ m}.$$

Der Durchmesser des Grundkreises des Schüttkegels beträgt also 2,90 m und sein Umfang 9,11 m.

Wegen $h = r \tan \alpha \approx 1,45 \cdot 0,6494 \text{ m} \approx 0,94 \text{ m}$ beträgt die Höhe des Schüttkegels 0,94 m.

Ma 10/12 ■ 1597 Aus

$$z = 2^{300} - (2^{150} + 2^{100} + 2^{60}) + (2^{50} + 2^{30} + 2^{20}) - 2^{10} \quad (1)$$

folgt, wenn man $2^{10} = a$ setzt,

$$\begin{aligned} z &= a^{30} - a^{15} - a^{10} - a^6 + a^5 + a^3 + a^2 - a \\ &= (a^{30} - a^{10}) - (a^{15} - a^5) - (a^6 - a^2) + (a^3 - a) \\ &= a^{10}(a^{20} - 1) - a^5(a^{10} - 1) - a^2(a^4 - 1) \\ &\quad + a(a^2 - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Nun ist (vgl. Tabellen und Formeln, S. 42) $a^n - b^n$ für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$ durch $a - b$ teilbar.

Also sind die Faktoren auf der rechten Seite von (2) $a^{20} - 1 = (a^2)^{10} - 1$,

$$a^{10} - 1 = (a^2)^5 - 1,$$

$$a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1,$$

$$a^2 - 1$$

sämtlich durch $a^2 - 1$ teilbar.

Daher ist jeder Summand auf der rechten Seite von (2) durch $a^2 - 1$ und außerdem noch durch a teilbar. Daraus folgt, daß die Zahl z teilbar ist durch

$$a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1) = 2^{10} \cdot (2^{10} - 1)$$

$$\cdot (2^{10} + 1)$$

$$= 2^{10} \cdot 1023 \cdot 1025 = 4 \cdot 2^8 \cdot 3 \cdot 341$$

$$\cdot 41 \cdot 25$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 2^8 \cdot 341 \cdot 41$$

$$= 300 \cdot 2^8 \cdot 341 \cdot 41,$$

d. h., die Zahl z ist auch durch 300 teilbar, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 1598 a) Es seien $\overline{AB} = c$ und $\overline{CD} = h$ bzw. $\overline{A'B'} = c'$ und $\overline{C'D'} = h'$ die Grundlinien und Höhen der Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$.

Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c}.$$

Für die Flächeninhalte F' und F der beiden Dreiecke gilt nach Voraussetzung

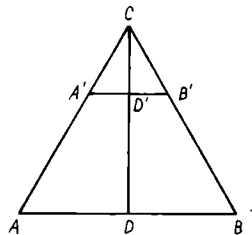
$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{64}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{64} = \frac{\frac{1}{2} c' h'}{\frac{1}{2} c h} = \frac{c'}{c} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{h'^2}{h^2},$$

$$\frac{h'}{h} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}.$$

Die Höhen der beiden Dreiecke verhalten sich also zueinander wie

$$h' : h = 1 : 8.$$



b) Es seien r und h bzw. r' und h' die Radien und Höhen der beiden geraden Kreiskegel K bzw. K' . Da die Achsenschnitte beider Kegel gleichschenklige Dreiecke mit parallelen Grundlinien und gemeinsamer Spitze sind, gilt wie unter a) nach dem Strahlensatz

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}.$$

Für die Volumina V' und V der beiden Kegel gilt nach Voraussetzung

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{64}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{64} = \frac{\frac{\pi}{3} r'^2 h'}{\frac{\pi}{3} r^2 h} = \frac{r'^2}{r^2} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{h'^3}{h^3},$$

$$\frac{h'}{h} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}.$$

Die Höhen der beiden Kegel verhalten sich also zueinander wie

$$h' : h = 1 : 4.$$

Ma 10/12 ■ 1599 1. Angenommen, die Bedingung (1) wäre erfüllt; dann wäre aber auch eine der Bedingungen (3), (4), (5) erfüllt, da für jede reelle Zahl mindestens eine dieser drei Bedingungen erfüllt ist. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Bedingung (1) nicht erfüllt, und es gilt

$$x^2 \geq \frac{1}{2}, \text{ d. h.,}$$

$$x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ oder } x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (8)$$

2. Angenommen, die Bedingung (2) wäre erfüllt; dann ergibt sich wie oben ein Widerspruch; also gilt

$$x \leq \frac{1}{4}, \text{ d. h.,}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt daher

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (10)$$

$$\text{oder } x = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (11)$$

Im Falle (10) wären aber die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, was der Voraussetzung widerspricht. Also kann nur der Fall (11) eintreten, es gilt also

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,707, x^2 = \frac{1}{2},$$

$$x^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2}, x^4 = \frac{1}{4}.$$

Nun sind für $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Bedingungen (1), (2), (3), (5), (6) und (7) nicht erfüllt; dagegen ist genau eine Bedingung, nämlich (4), erfüllt.

Die Zahl $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat also die verlangte Eigenschaft, und zwar nur diese Zahl, was sich aus (8) und (9) ergibt, da für jede andere Zahl ein Widerspruch entsteht.

Ph 10/12 ■ 1600 Gegeben:

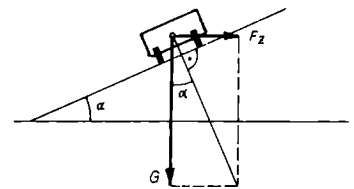
$$m = 1,2 \text{ t} = 1200 \text{ kg}$$

$$r = 150 \text{ m}$$

$$v = 81 \text{ kmh}^{-1} = \frac{81000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 22,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht: a) F_Z b) μ_0 c) α



a) Der Betrag der Zentrifugalkraft ist gleich dem Betrag der Radialkraft. ($F_r = F_Z$)

$$F_r = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_r = \frac{1200 \text{ kg} \cdot 22,5^2 \cdot \text{m}^2}{150 \text{ m} \cdot \text{s}^2}$$

$$F_r = 4050 \text{ N}$$

$$F_r \approx 413 \text{ kp}$$

Die Zentrifugalkraft beträgt 413 kp.

b) Die Haftreibung F_R muß mindestens gleich der Zentrifugalkraft F_Z sein mit $F_R \geq F_Z$. Für die Haftreibung gilt $F_R = \mu_0 F_N$ mit $F_N = G$ bei horizontaler Ebene.

$$F_Z \leq \mu_0 \cdot F_N \text{ mit } F_N = G = mg \text{ und } F_Z = F_r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\mu_0 \geq \frac{F_Z}{F_N}$$

$$\mu_0 \geq \frac{m \cdot v^2}{r \cdot m \cdot g}$$

$$\mu_0 \geq \frac{v^2}{rg} = \frac{22,5^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot 150 \text{ m}}$$

$$\mu_0 \geq 0,344$$

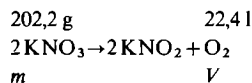
Die Haftreibungszahl beträgt mindestens $\mu_0 = 0,344$.

c) Die resultierende Kraft muß senkrecht zur Fahrtrichtung verlaufen. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{F_z}{G} \\ \tan \alpha &= \frac{mv^2}{mgr} \\ \tan \alpha &= \frac{v^2}{gr} = \frac{22,5^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot 150 \text{ m}} \\ \tan \alpha &= 0,3440 \\ \alpha &= 19^\circ\end{aligned}$$

Die Straße muß um 19° geneigt sein.

Ch 10/12 ■ 1601



$$\text{NR: } 2 \text{ mol} \cdot 101,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 202,2 \text{ g,}$$

$$1 \text{ mol} = 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 22,4 \text{ l}$$

$$m = \frac{202,2 \text{ g}}{22,4 \text{ l}} \cdot V$$

a) $m_1 = 22,1 \text{ g}$, b) $m_2 = 34,1 \text{ g}$, c) $m_3 = 44,8 \text{ g}$
Man muß a) $22,1 \text{ g}$, b) $34,1 \text{ g}$, c) $44,8 \text{ g}$ Kaliumnitrat zersetzen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/77

Ma 5 ■ 1567 Aus a) folgt: Ina hilft entweder Frau Neumann oder Frau Weise. Da nach b) Carola die Helferin von Frau Neumann ist, so hilft Ina Frau Weise. Aus c) folgt: Andrea hilft Frau Heller. Somit hilft Katrin Frau Peter.

Ma 5 ■ 1568 Aus $964 : 4 = 241$ und $964 - 241 = 723$ folgt, daß nach einer Woche 723 kg Kartoffeln verkauft waren. Hierfür wurden $723 : 16 \text{ Pf} = 11\,568 \text{ Pf} = 115,68 \text{ M}$ eingenommen.

Ma 5 ■ 1569 Aus $30 \cdot 0,40 \text{ M} = 12,00 \text{ M}$ und $19,00 \text{ M} - 12,00 \text{ M} = 7,00 \text{ M}$ folgt, daß für den Einkauf von Salzsticks noch 7,00 M zur Verfügung stehen. Nun gilt $n \cdot 75 \leq 700$; wegen $9 \cdot 75 = 675 < 700$ und $10 \cdot 75 = 750 > 700$ könnten Hans und Uwe höchstens neun Päckchen Salzsticks einkaufen.

Ma 5 ■ 1570 Wegen $10\,250,00 \text{ M}$
 $- 1\,250,00 \text{ M} = 9\,000,00 \text{ M}$ betrugen die Unkosten zur Anschaffung der Betten insgesamt $10\,250,00 \text{ M} + 9\,000,00 \text{ M} = 19\,250,00 \text{ M}$. Aus $19\,250 : 385 = 50$ folgt, daß der Preis für ein Bett 50,00 M betrug. Für das erste Lager wurden somit $10\,250 : 50 = 205$ Betten, für das zweite Lager $9\,000 : 50 = 180$ Betten angeschafft.

Ma 5 ■ 1571 Angenommen, es waren n Schüler am Wandertag beteiligt; dann gilt $90 \cdot n - 150 = 80 \cdot n + 150$, $10 \cdot n = 300$, $n = 30$. Am Wandertag beteiligten sich 30 Schüler.

Ma 5 ■ 1572 Aus $50 - 26 = 24$ und $24 : 2 = 12$ folgt, daß an der Stadtrundfahrt 12 Kinder und somit 38 Erwachsene teilnahmen. Aus $38 - 2 = 36$ und $36 : 2 = 18$ folgt, daß unter den erwachsenen Teilnehmern 18 Männer und somit 20 Frauen waren.

Ma 6 ■ 1573 Angenommen, nach n Jahren ist Peters Vater doppelt so alt wie sein Sohn; dann ist Peter $(8+n)$ Jahre, sein Vater $(31+n)$ Jahre alt, und es gilt

$$\begin{aligned}2 \cdot (8+n) &= 31+n, \\ 16+2n &= 31+n, \\ n &= 15.\end{aligned}$$

Nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, wird Peters Vater 46 Jahre, Peter selbst 23 Jahre alt sein, d. h., Peters Vater wird doppelt so alt sein wie sein Sohn Peter.

Ma 6 ■ 1574 Angenommen, Hans hat x Mark gespart; dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot x + 1,5 &= 4, \\ \frac{1}{2} \cdot x &= 2,5, \\ x &= 5.\end{aligned}$$

Somit hat Hans im letzten Monat von seinem Taschengeld 5,00 M gespart.

Ma 6 ■ 1575 Aus d) folgt: Herr B wohnt nicht in Dresden.

Aus b) folgt: Herr B wohnt nicht in Suhl, und Suhl, und er ist von Beruf nicht Elektriker.

Aus a) und b) folgt: Herr B wohnt nicht in Leipzig. Folglich wohnt Herr B in Halle.

Aus c) folgt: Herr C wohnt nicht in Suhl. Er wohnt aber auch nicht in Halle.

Aus c) und b) folgt: Da Herr C nicht in Suhl wohnt, ist er von Beruf nicht Dreher, sondern Elektriker.

Aus a) folgt: Herr C wohnt in Leipzig.

Aus a) folgt: Herr A ist nicht von Beruf Dreher.

Aus b) folgt: Herr A wohnt nicht in Suhl.

Folglich wohnt Herr A in Dresden, und Herr D wohnt in Suhl.

Ma 6 ■ 1576 Es seien m und n die zu ermittelnden natürlichen Zahlen; dann gilt

$$\begin{aligned}m \cdot n \cdot (m+n) &= 8602, \\ m \cdot n \cdot (m+n) &= 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23.\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann man $m < n$ annehmen. Dann sind folgende Möglichkeiten einer Belegung der Variablen m und n zu untersuchen:

m	n	$m+n$
2	11	$13 < 17 \cdot 23$
2	17	$19 < 11 \cdot 23$
2	23	$25 < 11 \cdot 17$
11	17	$28 < 2 \cdot 23$
11	23	$34 = 2 \cdot 17$
17	23	$40 > 2 \cdot 11$

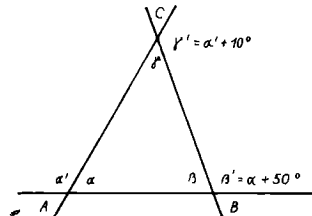
Nur die Zahlen $m=11$ und $n=23$ erfüllen die gestellten Bedingungen, und es gilt $11 \cdot 23 \cdot (11+23) = 11 \cdot 23 \cdot 34 = 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 = 8602$.

Ma 6 ■ 1577 Es seien α' , β' und γ' die Größen der Außenwinkel des Dreiecks ABC . Aus $\alpha + \gamma = \beta'$ (Außenwinkelsatz) und $\beta' = \alpha + 50^\circ$ folgt

$\alpha + \gamma = \alpha + 50^\circ$, also $\gamma = 50^\circ$ und $\gamma' = 130^\circ$ (als Nebenwinkel).

Aus $\gamma' = \alpha' + 10^\circ$ und $\gamma' = 130^\circ$ folgt $\alpha' = 120^\circ$ und somit $\alpha = 60^\circ$. Aus $\beta' = \alpha + 50^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$

folgt $\beta' = 110^\circ$, also $\beta = 70^\circ$. Die Größen der Innenwinkel betragen 60° , 70° und 50° ; die Größen der Außenwinkel betragen 120° , 110° und 130° .



Ph 6 ■ 1578

Gegeben: $V = 0,6 \text{ m}^3 = 600 \text{ dm}^3$

$$m = 57,5 \text{ kg} \quad \rho = 2,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Gesucht: V_1 des Glases in %

Man berechnet zuerst das Volumen V_1 des Glases:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{m}{\rho} \\ V_1 &= \frac{57,5 \text{ kg} \cdot \text{dm}^3}{2,5 \text{ kg}} \\ V_1 &= 230 \text{ dm}^3.\end{aligned}$$

Dann gewinnt man die Volumenprozente des Anteils aus Glas durch

$$\frac{600 \text{ dm}^3}{100\%} \quad \frac{230 \text{ dm}^3}{x\%}$$

$$600 : 230 = 100 : x$$

$$x = 38,3$$

Der Ballen enthält 38,3% Glas.

Ma 7 ■ 1579 Angenommen, es wurden a Bücher zu 4,30 M, b Bücher zu 6,30 M und c Bücher zu 2,60 M gekauft; dann gilt

$$\begin{aligned}4,3a + 6,3b + 2,6c &= 36,8, \\ 43a + 63b + 27c &= 368.\end{aligned} \quad (1)$$

Ferner gilt $a + b + c = 10$, also $c = 10 - a - b$. (2)

Durch Einsetzen von (2) in (1) folgt daraus

$$43a + 63b + 26 \cdot (10 - a - b) = 368,$$

$$43a + 63b + 260 - 26a - 26b = 368,$$

$$17a + 37b = 108,$$

$$37b = 111 - 17a,$$

$$b = 3 - \frac{17a+3}{37}.$$

Nur für $a=2$ wird b ganzzahlig und positiv. Aus $a=2$ folgt $b=2$, also $c=10-2-2=6$.

Es wurden 2 Bücher zu 4,30 M, 2 Bücher zu 6,30 M und 6 Bücher zu 2,60 M gekauft, und es gilt $2 \cdot 4,30 \text{ M} + 2 \cdot 6,30 \text{ M} + 6 \cdot 2,60 \text{ M} = 36,80 \text{ M}$.

Ma 7 ■ 1580 Wegen $20^4 = 160\,000 < 810\,000 = 30^4$ müssen die vier gesuchten Zahlen größer als 20, aber kleiner als 30 sein. Da das Produkt auf die Ziffer 0 endet, muß ein Faktor durch 5 teilbar sein; das trifft in diesem Falle nur zu für die Zahl 25. Da die Quersumme 9 von 421 200 durch 9 teilbar ist, muß ein Faktor durch 9 teilbar sein; das trifft nur zu für den Faktor 27. Da 421 200 sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist, ist diese Zahl auch durch 12 teilbar; deshalb muß ein Faktor ebenfalls durch 12 teilbar sein. Das trifft nur zu für den Faktor 24. Somit lauten diese gesuchten vier Zahlen 24, 25, 26, 27, und es gilt $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 = 421\,200$.

Ma 7 ■ 1581 Angenommen, es wurden a Gold-, b Silber-, c Bronzemedailien, d vierte, e fünfte und f sechste Plätze erzielt; dann gilt $7a + 5b + 4c + 3d + 2e + f = 135$.

Wegen $a = c = d$ und $b = e$ folgt daraus

$$14a + 7b + f = 135,$$

$$7(2a + b) = 135 - f.$$

Da f Primzahl ist und $f < 10$ gilt, ist $135 - f$ nur für $f = 2$ durch 7 teilbar, und wir erhalten

$$7(2a + b) = 133,$$

$$2a + b = 19.$$

Da a und b einstellige Primzahlen sind, folgt $a = 7$ und $b = 5$. Somit gingen an die Sportler aus der DDR sieben Gold-, fünf Silber-, sieben Bronzemedailien, sieben 4., fünf 5. und zwei 6. Plätze.

Ma 7 ■ 1582 Angenommen, Katja hat a Stück Butterkuchen, b Stück Pflaumenkuchen und c Stück Törtchen gekauft; dann gilt

$$25a + 35b + 70c = 380,$$

$$5a + 7b + 14c = 76,$$

$$7 \cdot (b + 2c) = 76 - 5a.$$

Nun sind a, b, c natürliche Zahlen mit $2 \leq a, b, c \leq 4$; deshalb muß $76 - 5a$ durch 7 teilbar sein; das trifft nur zu für $a = 4$. Wir erhalten

$$7 \cdot (b + 2c) = 76 - 5 \cdot 4,$$

$$7 \cdot (b + 2c) = 56,$$

$$b + 2c = 8,$$

$$b = 8 - 2c,$$

$$b = 2 \cdot (4 - c).$$

Folglich muß b eine gerade Zahl sein, also $b = 2$ und somit $c = 3$. Katja hat vier Stück Butterkuchen, 2 Stück Pflaumenkuchen und 3 Stück Törtchen gekauft.

Ph 7 ■ 1583

Gegeben: $F_1 = 6 \text{ kp}$, $n = 3$, $G = 120 \text{ kp}$

Gesucht: F

Für den Flaschenzug gilt die Formel

$$F = \frac{F_2}{n} \quad (n \text{ ist die Zahl der tragenden Seilstücke})$$

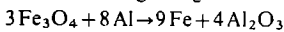
$$F = \frac{126 \text{ kp}}{3} \text{ mit } F_2 = G + F_1 = 120 \text{ kp} + 6 \text{ kp}$$

$$F = 42 \text{ kp}$$

Die Kraft $F = 42 \text{ kp}$ hält die Last im Gleichgewicht.

Ch 7 ■ 1584 a)

$$216 \text{ g } 504 \text{ g}$$



$$m_1 \quad 3000 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 8 \text{ mol} \cdot 27 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 216 \text{ g},$$

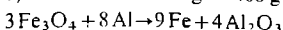
$$9 \text{ mol} \cdot 56 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 504 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_1 = 1286 \text{ g}$$

1286 g Aluminium sind mit Eisen(II,III)-oxid zu mischen.

$$\text{b) } \quad 504 \text{ g } \quad 408 \text{ g}$$



$$3000 \text{ g } \quad m_2$$

$$\text{NR: } 4 \text{ mol} \cdot 102 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 408 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_2 = 2430 \text{ g}$$

2430 g Aluminiumoxid entstehen.

Fortsetzung von: Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt, Seite 61

Zur Übung verwende der Leser die Gleichung $5x^2 - 14x - 3 = 0$.

Mit Hilfe dieses Verfahrens läßt sich leicht beweisen, daß die Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ und $cy^2 + by + a = 0$ reziproke Lösungen haben:

Für beide ist die Hilfsgleichung $z^2 + bz + ac = 0$.

Damit hat man $x_1 = \frac{z_1}{a}$, $x_2 = \frac{z_2}{a}$

$$\text{und } y_1 = \frac{z_1}{c}, y_2 = \frac{z_2}{c}.$$

$$\text{Mithin gilt } x_1 \cdot y_1 = \frac{z_1 \cdot z_2}{ac} = \frac{ac}{ac} = 1$$

$$\text{und } x_2 \cdot y_2 = \frac{z_2 \cdot z_1}{ca} = 1$$

$$\text{und damit } x_1 = \frac{1}{y_2} \text{ und } x_2 = \frac{1}{y_1}.$$

L. Dimenstein, Leningrad/G. Schmidt, Leipzig

Lösungen zu: Aufgaben aus der Praxis, Seite 62

$$\blacktriangle 1 \blacktriangle \quad 4 \text{ h} = 4 \cdot 60 \text{ min} = 240 \text{ min};$$

$240 : 80 = 3$; alle drei Minuten verläßt ein montierter Lautsprecher das Montageband.

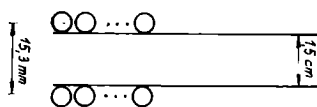
$$\blacktriangle 2 \blacktriangle \quad u \approx \pi \cdot (a + b) = \frac{22}{7} \cdot (7,5 + 5) \text{ cm} = 39,3 \text{ cm}.$$

$$\blacktriangle 3 \blacktriangle \quad \text{a) } 230 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 220 \text{ cm} = 2200 \text{ mm}; n = \frac{2200}{15,3\pi} \approx 46;$$

eine Lage enthält rund 46 Windungen.

b) Werden die Windungen in zwei Lagen gewickelt, so enthält jede Lage 23 Windungen.

$$23 \cdot 0,3 \text{ mm} = 6,9 \text{ mm (Länge der Spule)}$$



$$\blacktriangle 4 \blacktriangle \quad \text{a) Aus } P = U \cdot I = 2 \text{ VA und } U = 2,4 \text{ V}$$

$$\text{folgt } I = \frac{P}{U} = \frac{2 \text{ VA}}{2,4 \text{ V}} = \frac{5}{6} \text{ A}.$$

$$\text{b) Aus } U = R \cdot I \text{ und } U = 2,4 \text{ V und } I = \frac{5}{6} \text{ A}$$

$$\text{folgt } R = \frac{U}{I} = 2,4 \text{ V} : \frac{5}{6} \text{ A} = 2,88 \Omega.$$

$$\blacktriangle 5 \blacktriangle \quad 9 \text{ t} = 9000 \text{ kg}; 9000 \text{ kg} : 250 \text{ kg} = 36; \text{ es können daraus 36 Aluminiumbarren gegossen werden.}$$

$$\blacktriangle 6 \blacktriangle \quad v = \frac{s}{t} \text{ und somit } t = \frac{s}{v} = \frac{400}{10} \text{ min}$$

$$= 40 \text{ min}; \text{ der Gießvorgang dauert 40 Minuten.}$$

$$\blacktriangle 7 \blacktriangle \quad V = \pi r^2 h; m = V \cdot \rho = \pi r^2 h \cdot \rho$$

$$= \pi \cdot 5,5^2 \text{ cm}^2 \cdot 400 \text{ cm} \cdot 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} x$$

$$102\,700 \text{ g} \approx 103 \text{ kg}$$

$$\blacktriangle 8 \blacktriangle \quad 8,5 \text{ t} = 8500 \text{ kg}; 3\% \text{ von } 8500 \text{ kg sind } 255 \text{ kg};$$

$$8500 \text{ kg} - 255 \text{ kg} = 8245 \text{ kg}.$$

Somit werden 255 kg Magnesium und 8245 kg Aluminium insgesamt benötigt.

$$4 \text{ t} = 4000 \text{ kg}; 2\% \text{ von } 4000 \text{ kg sind } 80 \text{ kg}; 4000 \text{ kg} - 80 \text{ kg} = 3920 \text{ kg}.$$

Es sind 80 kg Magnesium und 3920 kg Aluminium bereits vorhanden.

Der Schmelze müssen demnach noch 175 kg Magnesium und 4325 kg Aluminium zugeführt werden.

$$\blacktriangle 9 \blacktriangle \quad 500 \mu\text{m} = 0,0005 \text{ m};$$

$$25 \mu\text{m} = 0,000025 \text{ m};$$

$$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1;$$

$$V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2; V_1 = V_2;$$

$$b_1 = b_2$$

$$0,0005 \text{ m} \cdot b_1 \cdot 100 \text{ m} = 0,000025 \text{ m} \cdot b_2 \cdot c_2;$$

$$c_2 = \frac{0,05}{0,000025} \text{ m} = 2000 \text{ m} = 2 \text{ km}$$

Die Rohfolie wird durch das Walzen auf eine Länge von 2 km gebracht.

$$\blacktriangle 10 \blacktriangle \quad \text{Geg.: } v = 950 \frac{\text{m}}{\text{min}} \quad \text{Ges.: } n_A, n_s$$

$$d_A = 240 \text{ mm}$$

$$d_s = 560 \text{ mm}$$

Man berechnet die Drehzahlen aus

$$n = \frac{V}{\pi \cdot d}; n_A = \frac{V}{\pi \cdot d_A}; n_s = \frac{V}{\pi \cdot d_s}$$

$$n_A = \frac{350 \text{ m}}{0,24 \text{ m} \cdot \pi} \approx 464 \text{ (Umdrehungen je Minute)}$$

$$n_s = \frac{350 \text{ m}}{0,56 \text{ m} \cdot \pi} \approx 199 \text{ (Umdrehungen je Minute).}$$

$$\blacktriangle 11 \blacktriangle \quad (1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3);$$

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 h;$$

$$h = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1\,000\,000}{64 \pi} \text{ m} = \frac{625}{\pi} \text{ m};$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{625 \text{ m}}{60 \pi \text{ s}} \approx 3,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Geschwindigkeit der Kühlflüssigkeit beträgt etwa $3,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\blacktriangle 12 \blacktriangle \quad 300 \text{ mm} = 3 \text{ dm}; 23 \text{ m} = 230 \text{ dm};$$

$$A = a \cdot b = 3 \cdot 230 \text{ dm}^2 = 690 \text{ dm}^2$$

$$\blacktriangle 13 \blacktriangle \quad 3 \text{ t} : 10 = 0,3 \text{ t}; 3 \text{ t} - 0,3 \text{ t} = 2,7 \text{ t};$$

$$2,7 \text{ t} = 2700 \text{ kg} = 2\,700\,000 \text{ g};$$

$$2\,700\,000 \text{ g} : 250 \text{ g} = 10800;$$

aus dem Rohmaterial können 10800 Rollen Haushaltsfolie hergestellt werden.

$$\blacktriangle 14 \blacktriangle \quad x = \frac{25}{11} \cdot 200 \text{ g} = 454 \frac{6}{11} \text{ g}$$

$$\blacktriangle 15 \blacktriangle \quad x = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ g} = 133 \frac{1}{3} \text{ g}$$

Lösungen zu: „1977“, Seite 66

$\blacktriangle 1 \blacktriangle$ a) Bekanntlich gibt es zwei natürliche Zahlen a_1 und a_2 und eine natürliche Zahl b_2 , so daß

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 \text{ gilt;}$$

man erhält nämlich für $a_1 = 3, a_2 = 4, b_1 = 5$
 $3^2 + 4^2 = 5^2$.

b) Wir beweisen nun mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß es zu jeder natürlichen Zahl n mit $n \geq 2$ n natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ und eine natürliche Zahl b_n gibt, so daß $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_n^2$ gilt, was für $n=2$ bereits unter a) gezeigt wurde. Weiter nehmen wir an, daß diese Aussage für $n=k$ mit $k \geq 2$ richtig sei, und beweisen ihre Richtigkeit für $n=k+1$. Dabei nehmen wir ferner an, daß $a_k = 4m$ und $b_k = 4m+1$, wobei m eine natürliche Zahl ist. (Auch diese Annahme wurde für $n=k$ unter a) nachgewiesen.)

Dann gilt

$$b_k^2 = (4m+1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 2 \cdot 4m(2m+1) + 1$$

$$= [4m(2m+1)]^2 + 2[4m(2m+1)] + 1$$

$$= [4m(2m+1)+1]^2$$

$$= [4m(2m+1)+1]^2 - [4m(2m+1)]^2.$$

Setzt man

$$a_{k+1} = 4m(2m+1), b_{k+1} = 4m(2m+1) + 1,$$

so folgt

$$b_k^2 = b_{k+1}^2 - a_{k+1}^2, \text{ also}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = b_{k+1}^2 - a_{k+1}^2,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2 = b_{k+1}^2,$$

d. h., die obige Behauptung ist auch für $n=k+1$ richtig.

Da sie, wie unter a) gezeigt wurde, auch für $n=2$ richtig ist, gilt sie daher für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 2$, insbesondere also auch für $n=1977$, w. z. b. w.

▲ 2 ▲ Bekanntlich gilt für alle ungeraden natürlichen Zahlen n und alle von Null verschiedenen reellen Zahlen a und b (vgl. Tabellen und Formeln, S. 42):

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

d. h., $a^n + b^n$ ist durch $a+b$ teilbar.

Daraus folgt, wenn man $n=1977$ setzt, wegen $1976=2 \cdot 988$

$$z = 1^n + 2^n + \dots + 988^n + 989^n + \dots + 1975^n$$

$$+ 1976^n + 1977^n$$

$$= (1^n + 1976^n) + (2^n + 1975^n) + \dots$$

$$+ (988^n + 989^n) + 1977^n$$

$$= (1 + 1976)a_1 + (2 + 1975)a_2 + \dots$$

$$+ (988 + 989)a_{988} + 1977^n,$$

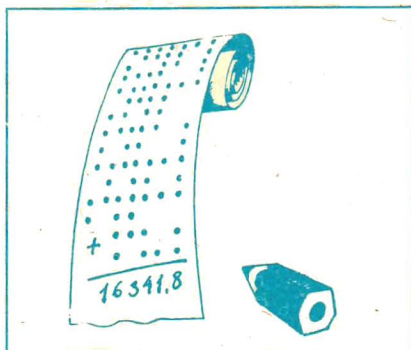
wobei $a_1, a_2, \dots, a_{988}$ natürliche Zahlen sind. Daher gilt

$$z = 1977a_1 + 1977a_2 + \dots + 1977a_{988}$$

$$+ 1977 \cdot 1977^{n-1}$$

$$= 1977(a_1 + a_2 + \dots + a_{988} + 1977^{n-1}).$$

d. h., die Zahl z ist durch 1977 teilbar.



Lösungen zu alpha-heiter, 3/77:

Für Schnellrechner

Prüft man die Zahlen in der ersten Zeile näher, so stellt man fest, daß es sich um Vielfache von 73 handelt. So ist z. B.

$$365 = 5 \cdot 73, 292 = 4 \cdot 73, 146 = 2 \cdot 73.$$

Es wird also eine Karte mit der Zahl $73 \cdot x_1$ ausgewählt, wobei $x_1 = 5, 4$ oder 2 ist.

In der zweiten Zahl liegen Vielfache von 137. Es wird also eine Karte mit der Zahl $137 \cdot x_2$ ausgewählt, wobei $x_2 = 5, 4$ oder 2 ist.

In der dritten Zeile liegen Vielfache von 73. Es wird also eine Karte mit der Zahl $73 \cdot x_3$ ausgewählt, wobei $x_3 = 7, 6$ oder 3 ist.

In der vierten Zeile liegen Vielfache von 137. Es wird also eine Karte mit der Zahl $137 \cdot x_4$ ausgewählt, wobei $x_4 = 7, 6$ oder 3 ist. Nun gilt aber

$$73 \cdot 137 = 10001,$$

$$73 \cdot 137 \cdot 73 \cdot 137 = 10001^2$$

$$= 100020001, \text{ also}$$

$$73x_1 \cdot 137x_2 \cdot 73x_3 \cdot 137x_4$$

$$= 100020001 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4.$$

Der Rechenkünstler hat also nur die vier einstelligen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 miteinander im Kopf zu multiplizieren und ihr Produkt p mit 100020001 zu multiplizieren. Dazu benötigt er aber nicht das Schema der schriftlichen Multiplikation, sondern er schreibt p hin, belegt dann die nächsten vier Stellen mit $2 \cdot p$ und die letzten vier Stellen wieder mit p (falls $2 \cdot p$ bzw. p nur dreistellig ist, setzt er eine Null davor; falls $2 \cdot p$ bzw. p nur zweistellig, zwei Nullen).

Zur Erleichterung ist jeweils auf den Karten durch Punkte unter der Zahl gekennzeichnet, um das Wievielfache von 73 bzw. 137 es sich handelt. Ein Punkt links bedeutet 5 Einheiten, je ein Punkt rechts 1 Einheit.

In unserem Beispiel ist

$$365 = 5 \cdot 73, 548 = 4 \cdot 137,$$

$$219 = 3 \cdot 73, 822 = 6 \cdot 137,$$

also $x_1 = 5, x_2 = 4$

also $x_3 = 3, x_4 = 6,$

$$p = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 360.$$

Man erhält das Produkt der vier dreistelligen Zahlen

$$360 \ 0720 \ 0360$$

oder in der üblichen Weise geschrieben

$$36007200360.$$

Wie viele Lochkombinationen?

a) In der ersten Reihe gibt es drei Möglichkeiten, die Löcher zu verteilen, nämlich je ein Loch rechts oder links sowie zwei Löcher. Für jede Lochkombination in der ersten Reihe können wir eine der drei Möglichkeiten des Lochens der zweiten Reihe auswählen. Das sind für die erste und zweite Reihe insgesamt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ Kombinationen. Für jede der drei Möglichkeiten in der dritten Reihe zu lochen, können wir eine der 9 Kombinationen der ersten beiden Reihen wählen, so daß sich für die ersten drei Reihen insgesamt

$3^2 \cdot 3 = 3^3 = 27$ Kombinationen ergeben. Fahren wir so fort, dann erhalten wir für alle sechs Reihen schließlich $3^6 = 243$ Kombinationen.

b) Durch das Weglassen der Löcher in einer Reihe gibt es jetzt vier Möglichkeiten der Anordnung pro Reihe. Entsprechend unseren vorangegangenen Überlegungen $4^6 = 4096$ Kombinationen. Die Variante, daß alle Reihen kein Loch aufweisen, stellt keine Entwertung dar, so daß nur 4095 Kombinationen bleiben.

Kopftausch

Planimetrie

Humorvoller Setzer

Vor mir ein leeres Blatt Papier, in der Limonadenflasche nur noch wenig Inhalt,

in meinem Kopf kluge Gedanken, in meiner rechten Hand ein abgebrochener Stift, in der Kekspackung noch genau zwei zerbrochene Kekse,

in meinem Gehirn eine Lösungsidee, im Patronenfüller keine Tinte, im Tafelwerk nichts zu finden.

Das Kfz-Nummernschild

Aus dem 16fachen für die mittleren Ziffern ergibt sich:

Summe	0	1	2	3	4	5	6	7...
16fach	0	16	32	48	64	80	96	112...

Nur 96 erfüllt alle Bedingungen.

Primzahlzwilling: 59 61

5. Buchstabe im Alphabet: E, 1. Buchstabe: A
Kennzeichen heißt: EA 59-61

Kryptarithmetik

991	992	993
+ 991	+ 992	+ 993
1982	1984	1986
987 - 789 = 198		
+ + -		
15 - 15 = 0		
1002 - 804 = 198		

$$1054 + 9482 = 10536; 1065 + 9578 = 10643;$$

$$1065 + 9582 = 10647;$$

$$1076 + 9658 = 10734; 1076 + 9682 = 10754;$$

$$1087 + 9745 = 10832;$$

$$1087 + 9756 = 10843$$

$$711 \cdot 4025 = 2861775$$

Wir wägen

Das Wägestück zu 50 g benötigt man gar nicht. Man legt auf eine Schale das 200-g-Wägestück und gibt alle Graupen so auf die Waage, daß sie im Gleichgewicht ist. Dann befinden sich in einer Schale 4,4 kg, in der anderen 4,6 kg. Beim zweiten Wägen teilen wir analog die 4,6 kg in 2,4 kg und 2,2 kg. Nun sind von den 2,2 kg nur noch 200 g abzu ziehen.

Abzählreim

Zahl: 7; Lösungswort: Binomische Formel

Spiele mit Hölzchen

Bedeutende Mathematiker haben schon früh für einzelne Spiele mathematische Theorien geschaffen. Bekannt ist z. B. der 1654 zwischen *Pascal* und *Fermat* geführte Briefwechsel über Glücksspiele (Roulette, Würfeln), den man als den Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung ansehen darf. Aber erst in unserem Jahrhundert entstand die Theorie der Spiele als eine mathematische Disziplin. Diese Theorie betrachtet Spiele, in denen neben dem Zufall der oder die Spieler Einfluß auf das Spiel nehmen (z. B. Skat, Mensch-ärgere-dich-nicht) oder es sogar allein entscheiden (Schach, Go). Dabei versucht die Theorie, das bestmögliche Verhalten eines Spielers, die sogenannte optimale Strategie, zu ermitteln. Die typischen Probleme der Spieltheorie lassen sich oft an einfachen, aber recht interessanten Spielen erläutern. Das haben wir in den zentralen Arbeitsgemeinschaften Mathematik des Saalkreises ausgenutzt, um uns auf spannende Weise mit modernem mathematischem Denken vertraut zu machen. Im folgenden soll über einige Spiele, mit denen wir uns befaßt haben, berichtet werden.

Wir schließen dabei an ein Hölzchenspiel an, über das in der *alpha* 4/76 berichtet wurde. Im Gegensatz zu dem dort beschriebenen Spiel sind die Gewinnmöglichkeiten für die einzelnen Spieler hier unabhängig von der Anzahl der Hölzchen. Eine beliebige Anzahl von Hölzchen ($n > 3$) ist in eine Reihe gelegt worden, so daß sich die Hölzchen, vom ersten und letzten abgesehen, an beiden Enden berühren (Abb. 1). Zwei Spieler *A* und *B* nehmen abwechselnd Hölzchen, und zwar: entweder ein Hölzchen oder zwei sich berührende Hölzchen. Sieger ist, wer das letzte Hölzchen erhält. Hier gibt es eine Anleitung zum Handeln (Gewinnstrategie), die den zuerst waghnehmenden Spieler zum Sieg führt. Um das einzusehen, numerieren wir die Hölzchen von links beginnend von 1 bis n . Wenn n ungerade ist, so liegt rechts und links vom mittleren Hölzchen, das die Nummer $\frac{1}{2}(n+1)$ hat, die gleiche Anzahl von Hölzchen. Entnimmt *A* das mittlere Hölzchen, dann verbleiben zwei gleiche Reihen. Durch die Spielregeln ist *B* gezwungen, nur aus einer Reihe Hölzchen zu entnehmen. *A* kann in der anderen Reihe „symmetrisch“ antworten, indem er dort das-

selbe tut. Führt *A* im weiteren nur symmetrische Züge als Antwort auf die Züge von *B* aus, so wird *A* zwangsläufig den letzten Zug haben. Wenn n gerade ist, so muß *A* die Hölzer mit den Nummern $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}+1$ wegnehmen (Abb. 1), womit wie eben zwei gleich lange zusammenhängende Hölzchenreihen verbleiben.

Bei dem nächsten Hölzchenspiel wird eine beliebige Anzahl von Hölzchen ($n > 4$) in der vorigen Art kreisförmig angeordnet (Abb. 2). Beide Spieler entnehmen wieder abwechselnd ein Hölzchen oder zwei zusammenhängende Hölzchen. Sieger ist wieder, wer das letzte Hölzchen entnimmt. *A* entnimmt als erster aus dem Kreis ein Hölzchen oder zwei zusammenhängende Hölzchen. Danach liegt eine Reihe wie in der ersten Variante vor. *B* entnimmt als erster aus dieser Reihe Hölzchen. Wenn er sich wie der erste Spieler im oben beschriebenen Spiel verhält, so wird er gewinnen.

Abschließend betrachten wir ein Spiel, das den oben beschriebenen Spielen sehr ähnlich ist. Es wird am besten mit Halmasteinen o. ä. gespielt, die auf die Ecken eines Sterns gesetzt werden (Abb. 3). Der Stern in Abb. 3 hat zwölf Ecken. Ihr könnt jedoch auch einen Stern mit mehr oder weniger Ecken wählen. (Wie werden dann die Ecken untereinander verbunden?) Die Spielregeln sind folgende:

A und *B* entnehmen abwechselnd je einen Stein oder zwei Steine, die durch eine gerade Linie verbunden sind. Wer den letzten Stein nimmt, hat das Spiel gewonnen. Der Zusammenhang mit dem eben untersuchten Spiel ergibt sich ganz einfach, wenn wir uns vorstellen, daß die Verbindungsstrecken des Sterns Fäden sind. Dann läßt sich der Stern zu einem Kreis „entwirren“ (Abb. 4). Früher hatten wir einen Kreis aus sich berührenden Hölzchen. Jetzt ist an dessen Stelle ein Kreis aus Halmasteinen getreten, wobei zwei sich berührende Hölzchen nun zwei durch eine Linie verbundenen Steine entsprechen (wie z. B. die Ecken mit den Zahlen 1 und 6). Damit ist die optimale Strategie für den zweiten Spieler klar. Da es auf die Bezeichnung der Ecken nicht ankommt, wollen wir annehmen, daß der erste Spieler *A* entweder den Stein auf der Ecke 1 oder die Steine auf den Ecken 1 und 6 nimmt. Damit zerfällt der Kreis in eine Reihe, und der zweite Spieler *B* nimmt nun die mittleren Steine entweder auf der Ecke 7 oder auf den Ecken 7 und 12. *B* antwortet in der Folge symmetrisch auf die Züge von *A* in der oben näher beschriebenen Art.

Dr. R. Thiele, Vorsitzender
des Mathematikklubs des Saalkreises

Bild 1

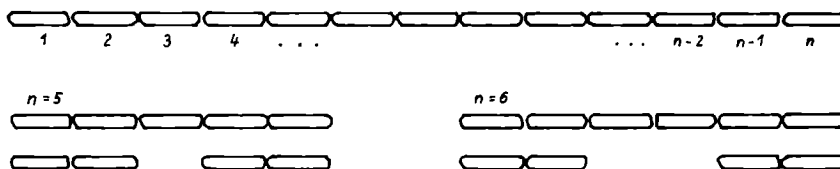


Bild 2

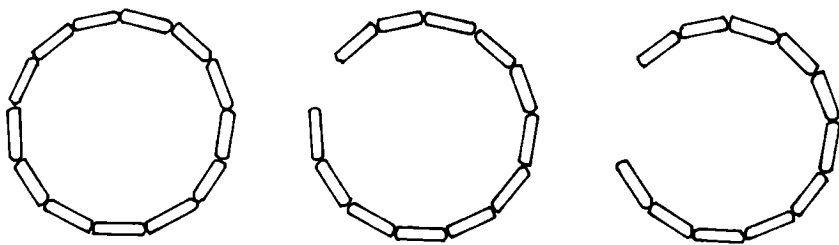


Bild 3

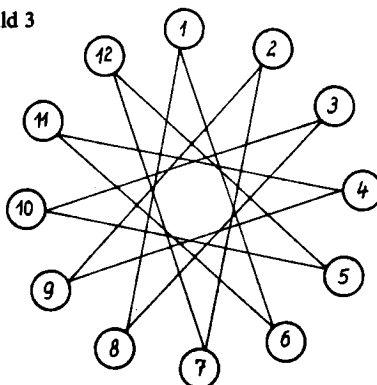
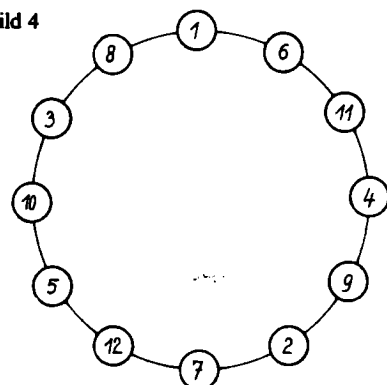


Bild 4



Nachgedacht – mitgemacht

Aufgaben, die das Leben schreibt

Klasse 5

1976 wird in der Volkswirtschaft unserer Republik Material im Werte von 6,8 Mill. Mark eingespart. Darunter fallen z. B. 150 000 t Walzstahl, 3 000 t Kupfer, 1 000 t PVC und 6 000 t Baumwolle.

- Welcher Wert könnte im 5-Jahrplan-Zeitraum bis 1980 erzielt werden, wenn die Einsparung von 1976 von Jahr zu Jahr um 200 000 M überboten würde?
- Wieviel Mill. Tönnen Kupfer könnten beispielsweise von 1976 bis 1980 eingespart werden, wenn die Einsparung von 1976 von Jahr zu Jahr um 100 t überboten würde?

Klasse 6

Zur Erschließung der Rohstoffreserven sollen für die Braunkohleförderung Abraumförderbrücken mit einer Förderleistung von 120 Mill. m³ im Jahr bei einer Abtraghöhe von 60 m bereitgestellt werden.

- Welche Förderleistung wird von einer solchen Brücke täglich erbracht? Rechne mit 360 Tagen im Jahr!
- Welche Strecke rückt die Maschine täglich weiter, wenn die Abtraghöhe 60 m und die Abtragbreite 4 000 m beträgt?

Klasse 7

Jährlich sind im Fünfjahrplan 1976/80 neben dem genutzten Oberflächenwasser etwa 140 Mill. m³ Grundwasser für die Haushalte und die Industrie aufzubereiten bzw. bereitzustellen.

- Berechne die Grundwassermenge, die durchschnittlich für einen Tag bereitzustellen ist!
- Eine Hauptwasserleitung hat einen Durchmesser von 800 mm. Welche Wassermenge fließt täglich durch diese Leitung, wenn eine Geschwindigkeit von 1,8 m/s angenommen wird?
- Wieviel Prozent der täglich bereitzustellenden Grundwassermenge sind das?

Klasse 8

Um den erhöhten Energiebedarf auch in Spitzenbelastungszeiten abzudecken, wurden in einigen Kraftwerken Energieblöcke mit Gasturbinenantrieb aufgebaut, die nur etwa 15 Minuten Anfahrzeit brauchen. Durch den hohen Gasverbrauch während des Betriebes

ist die Versorgung der übrigen Erdgasabnehmer nicht sichergestellt. Deshalb muß ein Gaszwischenpeicher im Kraftwerk gebaut werden; für ihn stehen zwei Möglichkeiten zur Auswahl.

1. Möglichkeit:

Das zu speichernde Erdgas wird auf -160°C abgekühlt, dabei verflüssigt es sich und nimmt nur noch $\frac{1}{625}$ seines ursprünglichen Volumens ein. Es wird in einem gekühlten Kugelbehälter von 5 m Durchmesser aufbewahrt.

2. Möglichkeit:

Das Erdgas wird bei Normaldruck in einem zylindrischen Scheibengasbehälter aufbewahrt. Sein Durchmesser beträgt 20 m, seine Höhe 35 m.

- Wieviel m³ flüssiges Erdgas nimmt der Kugelbehälter auf?
- Wieviel m³ Erdgas sind das bei Normaldruck?
- Wieviel m³ Erdgas nimmt der zylindrische Behälter auf?
- Vergleiche die Fassungsvermögen und die Oberflächen der beiden Behälter!

Klasse 9

Zur weiteren Verbesserung der Arbeits- und Lebensbedingungen der Werktätigen im Bezirk Halle sah die Direktive des VIII. Parteitages der SED zum Fünfjahrplan 1971/75 u. a. die Schaffung von etwa 56 000 Wohnungen durch Neu-, Um- und Ausbau vor. Unsere gewachsene ökonomische Kraft gestattet es, daß in der Direktive des IX. Parteitages eine Zahl von 80 000 Wohnungen genannt werden kann. Beim Neubau soll eine Steige-



1975 Menge	%	Winkel Grad- maß	Bogen- maß	1980 Menge	%	Winkel Grad- maß	Bogen- maß
Stickstoff- düngemittel 720 kt N		134,3		940 kt N	44,3		
Phosphor- düngemittel 500 kt P ₂ O ₅		1,6267		530 kt P ₂ O ₅			1,5708
Kalidüngemittel 710 kt K ₂ O	36,8			650 kt K ₂ O	110,5		



rung um 40,5% und bei Um- und Ausbauten um 50% erreicht werden.

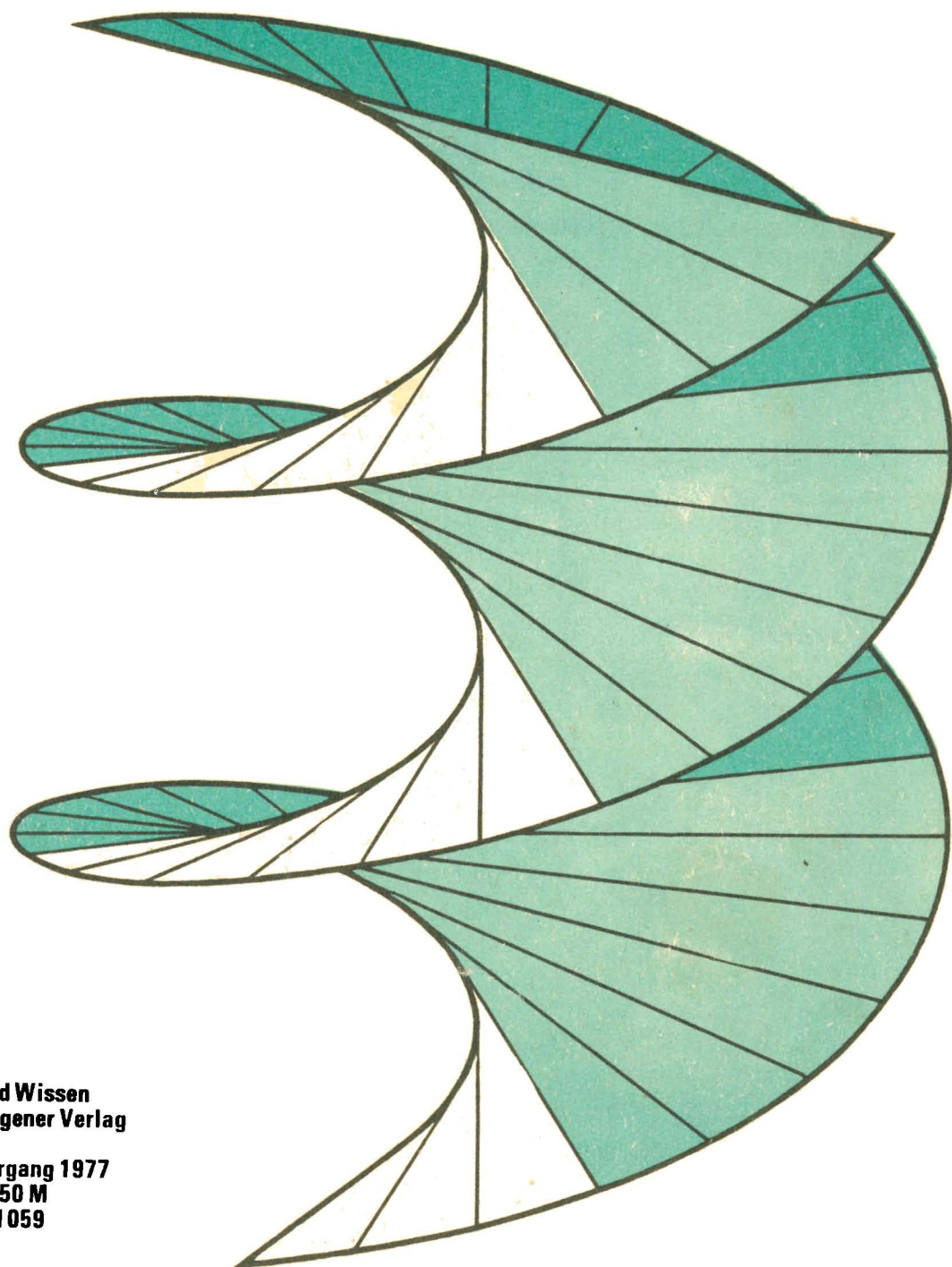
Berechnen Sie die Anzahl der Wohnungen, die durch Neubau bzw. durch Um- und Ausbau auf Grund der Direktiven des VIII. und IX. Parteitages geschaffen werden sollten bzw. sollen! Runden Sie alle Ergebnisse auf eine Genauigkeit von 1 000 Wohnungen!

Klasse 10

Die umfassende Chemisierung der Landwirtschaft ist eine wichtige Voraussetzung für die Intensivierung der landwirtschaftlichen Produktion. Der enorm gestiegene Bedarf an hochwertigen Stickstoffdüngemitteln soll vor allem durch Intensivierungsmaßnahmen im VEB Düngemittelkombinat Piesteritz gedeckt werden.

Stellen Sie in zwei Kreisdiagrammen das in der DDR 1975 bereitgestellte und das für 1980 geplante Aufkommen an Stickstoff-, Phosphor- und Kalidüngemitteln dar! Vervollständigen Sie dazu die Tabelle! E. Stöckel

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat D. R. Lüders (Ber-
lin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz);
Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 204 30.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132 626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin (West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Mathe-AG Osternienburg (S. 78);
Leipniz, Leipzig (S. 81/82); J. Lehmann,
Leipzig (S. 85)

Typographie: H. Tracksdorf



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. April 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 73 Verknüpfungen in der Ebene [7]*
Dr. I. Lehmann, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 75 Eine Aufgabe von Prof. Dr. P. M. Erdniew [7]
Kalmückische Staatliche Universität in Elista
- 75 Zur Fehlerrechnung bei physikalischen Messungen [8]
Dr. Ursula Manthei, Sektion Physik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 79 Wir lösen Gleichungssysteme mit dem *Gaußschen Algorithmus*, Teil 2
[9]
Dr. J. Gronitz, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik
- 80 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klasse 5/6
Interessante Erkenntnisse beim Rechnen mit natürlichen Zahlen [5]
Dr. W. Fregin, Institut für Lehrerbildung *N. K. Krupskaja*, Leipzig
- 81 Berufsbild:
Ingenieur für Technik und Technologie des Fernmeldewesens [7]
Rat Dipl.-Ing. M. Necke, Deutsche Post, Ingenieurschule *Rosa Luxemburg*, Leipzig
- 83 Synchron-optischer Schaukasten [6]
AG Mathematik der Maxim-Gorki-OS Dermbach
- 84 XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
Aufgaben · Preisträger der 4. Stufe (DDR-Olympiade)
- 86 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 88 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [4]
Aus der OS Osternienburg berichtet
Mathematikfachlehrer B. Becker, *alpha*-Club, OS Osternienburg
Zwei mathematische Spiele
Dr. R. Thiele, Lektor, BSB B. G. Teubner, Leipzig; Vors. d. Klubs Jg. Mathematiker der
Station Jg. Naturforscher und Techniker des Saalkreises
- 90 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Schulolympiade
- 92 Lösungen [5]
- III. Umschlagseite: Büchermarkt [5]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- IV. Umschlagseite: Graph einer Funktion oder nicht? [10]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Verknüpfungen in der Ebene

In dem Beitrag „Die ‚Uhr-Addition‘ und andere Verknüpfungen“ (alpha 6/76) haben wir die Begriffe *Verknüpfung*, *Trägermenge* und *Verknüpfungsgebilde* kennengelernt:

Wir sprechen von einer Verknüpfung $\circ$ über einer nichtleeren (Träger-)Menge M , wenn jedem (geordneten) Paar (a, b) von Elementen $a, b \in M$ genau ein Element $c \in M$ zugeordnet wird. Statt

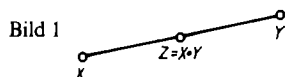
$$a \circ b = c$$

haben wir kürzer (und in Anlehnung der uns durch die vier Grundrechenarten vertrauten Schreibweise)

$$a \circ b = c$$

geschrieben. $(M, \circ)$ wurde dann ein Verknüpfungsgebilde genannt.

Bestand im oben genannten Beitrag unsere Trägermenge M fast ausschließlich aus Zahlen, so wollen wir jetzt zeigen, daß es auch in der „Welt der Punkte“ eine Fülle von Verknüpfungen zu entdecken gibt. Seien deshalb im folgenden X und Y beliebige Punkte einer Ebene. Diese Ebene bezeichnen wir mit ε . Wenn wir $X \circ Y$ als den Mittelpunkt Z der Strecke $\overline{XY}$ definieren, haben wir bereits ein erstes „geometrisches“ Verknüpfungsgebilde gefunden (Klasse 6).



$$X \circ Y = d_f Z \text{ mit } Z \in \overline{XY} \text{ und } \vec{XZ} = \vec{ZY}.$$

(Der Einfachheit halber benutzen wir im folgenden auch *gerichtete Strecken*.)

Daß $(\varepsilon, \circ)$ in der Tat die geforderten Eigenschaften (Abgeschlossenheit von ε bzgl. $\circ$ und Eindeutigkeit von $X \circ Y$) besitzt, ist leicht einzusehen, da die Vorschrift (Definition) nicht aus der Trägermenge hinausführt ($Z \in \varepsilon$) und der Mittelpunkt Z der Strecke $\overline{XY}$ eindeutig bestimmt ist.

Als wir den Begriff der Verknüpfung definiert haben, ist der Fall $X = Y$ ausdrücklich mit einbezogen worden. Es erhebt sich für unser Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \circ)$ deshalb die Frage, was wir unter $X \circ X$ verstehen wollen. Wir legen fest, daß $X \circ X$ wieder der Punkt X selbst sein soll – das kommt unserer Vorstellung entgegen, indem wir nämlich $X \circ X$ als den Mittelpunkt der entarteten Strecke $\overline{XX}$ (die also auf den Punkt X „zusammengeschrumpft“ ist) auffassen.

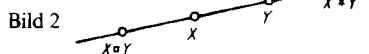
Aufgabe 1:

Vergleiche die Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \circ)$ und (P, Δ) , wobei $x \Delta y = d_f \frac{x+y}{2}$ das arithmetische

Mittel der reellen Zahlen x und y ist! Welche Gemeinsamkeiten kannst du entdecken?

Die Spiegelung von Punkten können wir als Ausgangspunkt für weitere „geometrische“ Verknüpfungen wählen:

Für beliebige Punkte $X, Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \star Y$ als den Spiegelpunkt von X an Y sowie $X \nabla Y$ als den Spiegelpunkt von Y an X . In beiden Fällen vereinbaren wir wieder, daß $X \star X = X$ und $X \nabla X = X$ für alle $X \in \varepsilon$ gelten soll.



$$X \star Y = d_f Z \text{ mit } Z \in \overline{XY} \text{ und } \vec{XZ} = 2 \cdot \vec{XY},$$

$$X \nabla Y = d_f Z \text{ mit } Z \in \overline{XY} \text{ und } \vec{ZY} = 2 \cdot \vec{XY}.$$

Aufgabe 2:

Überlege dir, ob für alle $X, Y \in \varepsilon$ die Beziehungen

$$X \circ (X \star Y) = X \star (X \circ Y) = Y \text{ und } (X \circ Y) \nabla Y = (X \nabla Y) \circ Y = X$$

Veranschauliche dir diese Beziehungen!

Das folgende Beispiel ist dergestalt, daß es uns gleich unendlich viele Verknüpfungsgebilde liefert:

Für alle Punkte $X, Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \bullet Y$ als den Punkt Z der Geraden XY , so daß

$$\vec{XZ} : \vec{ZY} = a : b \text{ gilt,}$$

wobei a und b beliebige, aber feste ganze Zahlen sind mit $b \neq 0$ und $a : b \neq -1$. Auch hier setzen wir für alle $X \in \varepsilon$:

$$X \bullet X = X.$$

Wir sehen sofort, daß das *Teilverhältnis* (Klasse 8) uns im Falle $a : b = 1$ die bereits angeführte Verknüpfung $\circ$ (Konstruktion des Mittelpunktes) liefert.

Aufgabe 3:

a) Zeige, daß die Definition von $\bullet$ neben der Konstruktion des Mittelpunktes ($\circ$) auch die Konstruktion der jeweiligen Spiegelpunkte ($\star$; ∇) beinhaltet!

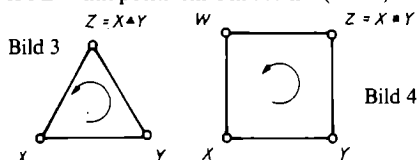
b) Wie läßt sich die Verknüpfung $\bullet$ interpretieren, wenn der Fall $a = 0$ vorliegt?

c) Untersuche die analoge Fragestellung für $b \rightarrow 0$!

Weitere Verknüpfungsgebilde mit ε als Trägermenge erhalten wir z. B. auf die folgende Weise:

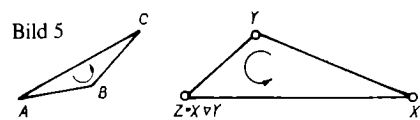
1) Für alle Punkte $X, Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \Delta Y$ als den dritten Punkt Z des gleichseitigen Dreiecks XYZ mit positivem Umlaufsinn (Bild 3).

2) Für alle Punkte $X, Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \blacksquare Y$ als den dritten Punkt Z des Quadrates $XYZW$ mit positivem Umlaufsinn (Bild 4).



3) Sei ABC ein vorgegebenes (festes) Dreieck in ε ; $X, Y \in \varepsilon$, beliebig.

Wir definieren $X \nabla Y$ als den Punkt $Z \in \varepsilon$, so daß die Dreiecke ABC und XYZ gleichsinnig ähnlich sind.



In allen drei Fällen fordern wir wieder, daß für $X = Y$, $X \Delta X = X$, $X \blacksquare X = X$ bzw. $X \nabla X = X$ sein soll.

Aufgabe 4:

a) Warum kann man in den Definitionen für Δ , $\blacksquare$ und ∇ nicht auf die Forderungen „mit positivem (negativem) Umlaufsinn“ bzw. „gleichsinnig“ verzichten?

b) Zeige, daß die Verknüpfung ∇ eine Verallgemeinerung der Verknüpfungen Δ und $\blacksquare$ ist!

c) Gib weitere Möglichkeiten einer Verallgemeinerung von Δ an!

Aufgabe 5*:

Die Verknüpfung ∇ läßt sich auf die folgende Weise in der komplexen Ebene interpretieren: Für die Punkte des vorgegebenen Dreiecks ABC wählen wir

$$A : a = 0, B : b = 1, C : c = r \cdot e^{i\phi},$$

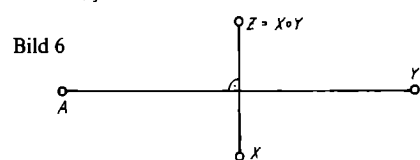
wobei r und ϕ beliebige, aber feste reelle Zahlen mit $\phi \neq k \cdot \pi$, k ganzzahlig, $r \neq 0$, sind. Zeige, daß dann für alle komplexen Zahlen x, y $x \nabla y = (1 - c)x + c y$ gilt!

(Die drei *-Aufgaben sind für diejenigen Schüler aufgenommen worden, die sich bereits mit komplexen Zahlen beschäftigt haben. Zur Lösung dieser Aufgaben verweise ich auf A.I. Markuschewitsch: *Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen*, Berlin 1965 [Kleine Ergänzungsreihe, Band XVI].)

Bisher haben wir für verschiedene Verknüpfungen nach Möglichkeit auch verschiedene Verknüpfungssymbole benutzt (z. B. „ $\circ$ “, „ $\bullet$ “, „ Δ “, „ $\blacksquare$ “, „ ∇ “, „ $\star$ “, „ ∇ “, „ ∇ “, „ ∇ “). Im folgenden wollen wir uns jedoch allein auf das Zeichen „ $\circ$ “ beschränken. Die Gefahr, daß wir dann eventuell Verknüpfungen identifizieren könnten, die voneinander verschieden sind, besteht kaum, da aus dem jeweiligen Zusammenhang immer klar hervorgeht, auf welches Verknüpfungsgebilde wir uns beziehen.

Sei A ein beliebiger, aber fester Punkt in ε . Als Trägermenge wählen wir dann $M = \varepsilon \setminus \{A\}$, d. h., der Punkt A wird ausgeschlossen, er wird zur Verknüpfung nicht zugelassen.

Für alle Punkte $X, Y \in \varepsilon \setminus \{A\}$ definieren wir schließlich $X \circ Y$ als den Spiegelpunkt von X an der Geraden AY . Für $X = Y$ setzen wir $X \circ X = d_f X$.



(Analog liefert natürlich auch die Spiegelung von Y an AX eine Verknüpfung über $\varepsilon \setminus \{A\}$.)

Aufgabe 6*:

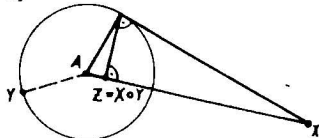
Zeige, daß sich in der komplexen Ebene diese Verknüpfung $\circ$ in dem Ausdruck

$$x \circ y = \frac{y-a}{y-a} \cdot (\overline{x-a}) + a \text{ widerspiegelt!}$$

Auch im nächsten Beispiel schließen wir für die zu wählende Trägermenge einen Punkt A der Ebene ε aus.

Für alle $X, Y \in \varepsilon \setminus \{A\}$ definieren wir diesmal $X \circ Y$ als die Spiegelung (Inversion) von X an dem Kreis, der durch Y geht und A als Mittelpunkt besitzt. Im Falle $X=Y$ setzen wir $X \circ X = d_f X$.

Bild 7



Aufgabe 7*:

a) Zeige, daß in der komplexen Ebene dieser Verknüpfung der Ausdruck

$$x \circ y = \frac{(y-a)(\overline{y-a})}{x-a} + a \text{ entspricht!}$$

b) Verlegen wir den Punkt A in den Ursprung ($a=0$) und fordern wir $|y|=1$, so vereinfacht sich obiger Ausdruck auf

$$x \circ y = \frac{1}{\overline{x}} \quad (\text{Spiegelung am Einheitskreis}).$$

In den bisher betrachteten Beispielen haben wir bei der Wahl der Trägermengen keine oder nur endlich viele Punkte der Ebene ε ausgeschlossen (nämlich in zwei Fällen jeweils einen Punkt). Jetzt werden wir Verknüpfungsgebilde kennenlernen, deren Trägermengen zwar immer noch unendlich viele Elemente (Punkte) enthalten, andererseits aber auch unendlich viele Punkte der Ebene nicht zur „Konkurrenz“ zulassen.

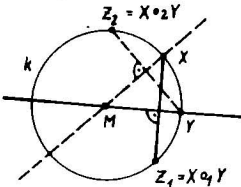
Sei k ein Kreis in ε , M sein Mittelpunkt.

1) Für alle Punkte $X, Y \in k$ definieren wir $X \circ_1 Y$ als den Spiegelpunkt von X an der Geraden MY .

2) Für alle Punkte $X, Y \in k$ definieren wir $X \circ_2 Y$ als den Spiegelpunkt von Y an der Geraden MX .

Für $X=Y$ setzen wir jeweils wieder $X \circ_1 X = X$ bzw. $X \circ_2 X = X$.

Bild 8



Aufgabe 8:

a) Welches Verknüpfungsergebnis liefert der Fall, wenn $X \in MY$ bzw. $Y \in MX$ gilt?

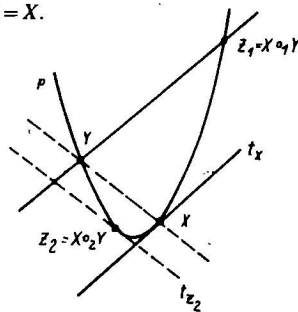
b) Zeige, daß für alle $X, Y \in k$ die Beziehung $(X \circ_1 Y) \circ_1 Y = Y \circ_2 (Y \circ_2 X) = X$ gilt!

Sei p eine Parabel in ε .

1) Für alle Punkte $X, Y \in p$ definieren wir $X \circ_1 Y$ als den Punkt $Z \in p$, so daß die Gerade YZ zur Tangente t_X (im Punkt X) parallel ist.

2) Für alle Punkte $X, Y \in p$ definieren wir $X \circ_2 Y$ als den Punkt $Z \in p$, so daß die Gerade XY zur Tangente t_Z (im Punkt Z) parallel ist. Für alle $X \in p$ setzen wir $X \circ_1 X = X$ sowie $X \circ_2 X = X$.

Bild 9



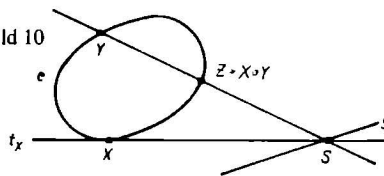
Aufgabe 9:

Zeige, daß für alle $X, Y \in p$ die Beziehung $(X \circ_1 Y) \circ_2 Y = (X \circ_2 Y) \circ_1 Y = X$ gilt!

Sei e eine Ellipse in ε ; g eine Gerade, die mit e keinen Punkt gemeinsam hat.

Für alle Punkte $X, Y \in e$ definieren wir $X \circ Y$ als den Punkt $Z \in e$ mit $Z \neq Y$, so daß die Geraden g, YZ und die Tangente t_X (an e im Punkt X) einen gemeinsamen Schnittpunkt S besitzen. Für $X=Y$ setzen wir $X \circ X = X$; ist YS ebenfalls Tangente an e (in Y), setzen wir $X \circ Y = Y$.

Bild 10



Aufgabe 10:

Veranschauliche dir, ob anstelle von e auch k (Kreis), p (Parabel) oder h (Hyperbel) bzgl. der definierten Verknüpfung $\circ$ abgeschlossen sind!

Fordern wir in unserem Beispiel, daß die Gerade g mit der Ellipse e genau einen Punkt A gemeinsam hat, also Tangente an e ist, gewinnen wir eine weitere Verknüpfung:

Für alle $X, Y \in e \setminus \{A\}$ wird definiert $X \circ_1 Y = d_f Z$ mit $Z \neq Y$ genau dann, wenn $g \cap t_X = g \cap YZ$. Für $X=Y$ fordern wir $X \circ_1 X = X$.

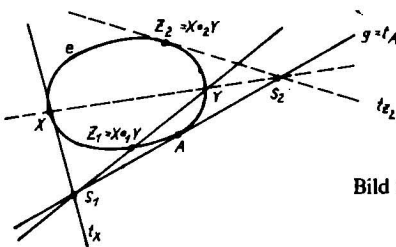


Bild 11

Aufgabe 11:

Auch in diesem Fall können wir einen beliebigen Kegelschnitt als Trägermenge wählen! Veranschauliche dir, daß jeweils Verknüpfungsgebilde vorliegen!

Definieren wir für alle $X, Y \in e \setminus \{A\}$ $X \circ_2 Y$ als den Punkt $Z \in e \setminus \{A\}$, so daß die Geraden g, XY und die Tangente t_Z einen gemeinsamen Schnittpunkt S besitzen, erhalten wir über

derselben Trägermenge wie zuvor eine neue Verknüpfung $\circ_2$ ($X \circ_2 X = d_f X$) – in Bild 11 gestrichelt dargestellt.

Aufgabe 12:

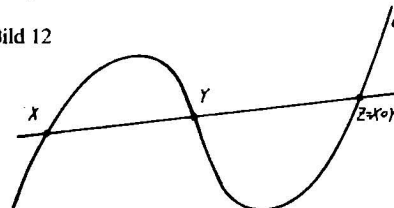
In den vorangegangenen Verknüpfungsgebilden meidet die Gerade g den Kegelschnitt entweder oder sie berührt ihn in genau einem Punkt. Überlege dir, ob auch für den Fall, daß die Gerade g den Kegelschnitt schneidet, eine Trägermenge für die oben definierten Verknüpfungen gefunden werden kann!

Daß auch andere Kurven als nur Kegelschnitte Trägermenge eines Verknüpfungsgebildes sein können, beweist unser letztes Beispiel:

Sei c eine (nichtausgeartete) Kubik in ε (ohne ihre singulären Punkte, falls solche existieren).

Für alle $X, Y \in c$ mit $X \neq Y$ definieren wir $X \circ Y$ als den dritten Schnittpunkt Z der Geraden XY mit c . Für den Fall $X=Y$ definieren wir $X \circ X$ als den zweiten Schnittpunkt Z der Tangente t_X mit c (falls er existiert!).

Bild 12



Aufgabe 13:

a) Überlege dir, wie die ausgezeichneten Punkte der Kubik c (Extrema und Wendepunkte) in die Definition der Verknüpfung $\circ$ einzubeziehen sind!

b) Führe den Nachweis für die Beziehung

$$X \circ (X \circ Y) = (Y \circ X) \circ X = Y$$

für alle $X, Y \in c$.

Ingmar Lehmann

Gauß-Gedenkmünze

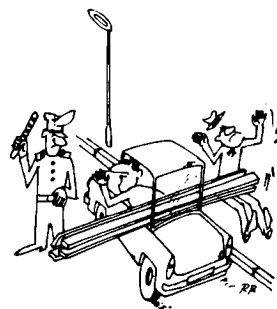


Aus Anlaß des 200. Geburtstages von C. F. Gauß gab die Staatsbank der DDR eine 20-Mark-Gedenkmünze heraus (siehe Foto). Masse: 20,9 g – Durchmesser: 33 mm – Legierung: 500 Ag/500 Cu (siehe auch Text III. U.-Seite rechts unten)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Pjurwja Mutschka- jewitsch Erdnijew

Kalmückische Staatliche Universität
in Elista

Zur Fehlerrechnung bei physikalischen Messungen



▲1632▲ Wir bilden Ketten von Verallgemeinerungen:

Kette 1

a) Gegeben sei ein Rechteck von 9 cm Länge und 4 cm Breite. Dieses Rechteck ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß man daraus ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm zusammensetzen könnte.

b) Gegeben sei ein Rechteck von 8 cm Länge und 4,5 cm Breite. Dieses Rechteck ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß man daraus ein Quadrat zusammensetzen könnte.

(Wovon hängt die Anzahl der Treppenstufen in den Figuren ab? Für welches Verhältnis der Seiten des Ausgangsrechtecks kann die Aufgabe nicht gelöst werden?)

c) Der Leser möge die Aufgabe (siehe oben) für den Fall des Raumes verallgemeinern. Welche kleinste Anzahl von Teilen ist notwendig, in die man einen Quader mit den Kantenlängen 32 mm, 75 mm und 90 mm zerlegen muß, um daraus einen Würfel mit der Kantenlänge 60 mm zusammensetzen zu können?

Kette 2

a) In einer Kiste befinden sich zwei Sorten Äpfel. Es ist die kleinste Anzahl an Äpfeln zu bestimmen, bei der man bei einmaliger Entnahme von Äpfeln aus der Kiste mindestens zwei Äpfel einer Sorte hat!

b) Die Aufgabe ist unter derselben Bedingung zu lösen (d. h., daß bei einmaliger Entnahme mindestens zwei Äpfel einer Sorte aus der Kiste genommen werden), wenn sich in der Kiste Äpfel von 3, 4, n Sorten befinden.

c) Wir verallgemeinern die Aufgabe, indem wir andere Parameter nehmen:

In einer Kiste befinden sich unter den entnommenen Äpfeln bestimmt k Äpfel. Es ist die kleinste Anzahl an Äpfeln zu bestimmen, die entnommen werden muß, damit sich unter den entnommenen Äpfeln bestimmt k Äpfel einer Sorte befinden.

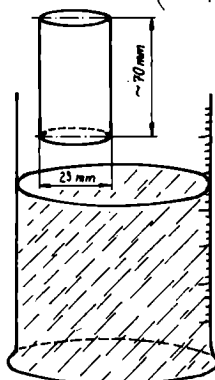
d) Wir schlagen dem Leser vor, diese Aufgabe weiter zu verallgemeinern:

...damit unter den entnommenen Äpfeln bestimmt k Äpfel jeweils aus zwei Sorten sind (die Anzahl der Äpfel in der Kiste ist nicht beschränkt).

Handelt es sich hierbei um die äußerst mögliche Verallgemeinerung, wenn die Aufgabe keine Lösung mehr besitzt?

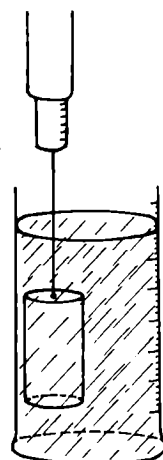
Ein Meßauftrag lautet, das Volumen eines zylindrischen Körpers ($V = \frac{\pi}{4} d^2 h$) zu bestimmen.

Bild 1



$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h$$

Bild 2



$$V = \frac{G_L - G_W}{\sigma_w}$$

Der Körper hat schätzungsweise einen Durchmesser von 23 mm und eine Höhe von 70 mm, also ein Volumen von etwa 30 cm³. Das Volumen des Körpers kann man nach verschiedenen Methoden ermitteln:

1. Methode: aus der Flüssigkeitsverdrängung beim Eintauchen des Körpers in eine Meßflüssigkeit,
2. Methode: durch Berechnung aus den gemessenen geometrischen Größen,
3. Methode: als Quotienten aus dem Auftrieb, den der Körper beim Eintauchen in ein Medium erfährt, und der Wichte dieses Mediums.

Bei der dritten Methode wird der Körper zu meist einmal in Luft und einmal im Wasser gewogen. Der Auftrieb ist dem Betrage nach gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Stoffmenge. Den Auftrieb, den der Körper in Luft erfährt, kann man vernachlässigen, da er weniger als 1 mp ausmacht. Der Auftrieb im Wasser ist dann gleich der Gewichts differenz zwischen beiden Wägungen. Ist die Messung bei $t = 20^\circ\text{C}$ durchgeführt, so beträgt die Dichte des Wassers $\rho = 0,998 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Da das Gewicht eines Körpers von der Masse 1 Gramm für unsere geographische Breite gleich 1 Pond ist, stimmen die Zahlenwerte der in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ gemessenen Dichten und der in $\frac{\text{P}}{\text{cm}^3}$ gemessenen Wichten überein.

Bei der Durchführung der Messungen nach diesen drei Methoden wird man bemerken, daß die Meßergebnisse auf Grund der verschiedenen Meßmethoden sich in ihrer Genauigkeit unterscheiden. Darum ist es für den Physiker und Techniker äußerst wichtig, sich Gedanken über die Genauigkeit einer Messung zu machen. Wie weit kann man dem Meßergebnis vertrauen? Welche Einflüsse verfälschen das Meßergebnis, gehen Fehler zufällig oder systematisch in das Meßergebnis ein? Wie breit ist der Meßunsicherheitsbereich, um bei einer vorgegebenen statistischen Sicherheit den wahren Wert der Meßgröße einzuschließen?

Die Messungen zur Volumenbestimmung des zylindrischen Körpers wollen wir im folgenden in Gedanken nachvollziehen, um einen ersten Einblick in die Grundproblematik der Meßtechnik zu gewinnen und den Sinn einer Fehlerrechnung zu begreifen.

Einfache Fehlerrechnung für zufällige Fehler bei gemessenen Größen

Die einfachste Methode zur Volumenbestimmung des Körpers ist, den Körper in einen Meßzylinder zu tauchen und die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge abzulesen (1. Methode). Man wird dazu einen möglichst schlanken Meßzylinder verwenden, um eine feine Skalenteilung zu haben.

Bei einer Wiederholung des Versuches wird man bemerken, daß man ein etwas anderes

Ergebnis erhält (siehe dazu Beispiel 1). Eine Meßwertreihe zeigt gewisse Schwankungen innerhalb der Meßwerte, die durch eventuell vorhandene Luftblasen am Versuchskörper, herausgerissene Wassertropfen, ungenaues Ablesen der Skale (Parallaxenfehler), unexakte Skalenteilung des Meßzylinders, ungleiche Dicke der Glaswand des Meßzylinders usw. zustandekommen.

Durch die Unzulänglichkeiten des Messenden, durch Einflüsse der Umwelt, durch das gewählte Meßverfahren und durch die Meßapparatur selbst ist diese wie auch jede andere Messung mit Fehlern behaftet. In der Physik gilt deshalb der Grundsatz: Jede Auswertung einer physikalischen Messung, die nicht zugleich mit dem Ergebnis auch eine Angabe des Vertrauensbereiches bei vorgegebener statistischer Sicherheit enthält, ist wertlos.

Halten wir fest, daß bei der Aufnahme einer Meßwertreihe eine Einzelmessung kaum reproduzierbar ist, daß mehrere Messungen insgesamt gesehen streuen. Wenn sich nun die einzelnen Meßwerte um einen mittleren Wert herum gruppieren, dabei große Abweichungen selten, kleine Abweichungen vom mittleren Wert häufig vorkommen, wenn positive und negative Abweichungen vom mittleren Wert gleich oft auftreten, dann spricht man von *zufälligen Fehlern*. Das ist in unserer Messung der Fall (siehe dazu die Meßwertreihe im Beispiel 1).

In unmittelbarer Nähe dieses mittleren Wertes muß der wahre Wert der Meßgröße liegen. Dieser wahre Wert aber bleibt trotz vieler Einzelmessungen unbekannt; er ist ein Grenzwert, dem sich der Physiker durch ausgewählte Meßapparaturen, wohlgedachte Meßmethoden und äußerster Sorgfalt in der Durchführung der Messung zu nähern versucht. Durch kritisches Abwägen der gewonnenen Meßwerte in Hinblick auf Fehlerinflüsse und durch Ansetzen einer Fehlerrechnung bei vorgegebener statistischer Sicherheit gibt der Physiker anstelle des wahren Wertes der Meßgröße einen *wahrscheinlichsten Wert mit seinem Vertrauensbereich* an.

Häufig wird ein Meßergebnis als „richtiger Wert“ bezeichnet. Diese Bezeichnung aber ist problematisch, da sie die logisch einwandfreien Begriffe *wahr* und *wahrscheinlich* verwischt. Wir wollen deshalb den Ausdruck „richtiger Wert“ im folgenden vermeiden.

Natürlich gibt es in der Physik wie in der Mathematik richtige gleich wahre Werte, dann nämlich, wenn sie auf einer Definition beruhen. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° – das ist kein experimentell ermittelter Wert, sondern er beruht auf der Festlegung des Vollkreises zu 360° . Ebenso ist das elektrische Wärmeäquivalent, die Umrechnung von Kalorie in Wattsekunde (oder besser in Joule) definiert und kein experimenteller Wert, $1 \text{ kcal} = 4186,8 \text{ J}$.

● Nach Überlegungen von Gauß ist der *wahrscheinlichste Wert* einer Meßwertreihe das arithmetische Mittel der einzelnen Meßwerte. Um den *Vertrauensbereich* dieses arithmetischen Mittels der einzelnen Meßwerte anzugeben, werden in der Physik die Standardabweichung s (das ist der mittlere quadratische Fehler der Einzelmessungen) und daraus der Vertrauensbereich $\bar{s}$ (das ist der mittlere quadratische Fehler des Mittelwertes) errechnet. Der *Vertrauensbereich* gilt als *das Genauigkeitsmaß für die Meßwertreihe*. Da aber zur Bestimmung der Standardabweichung und des Vertrauensbereiches ein verhältnismäßig großer mathematischer Aufwand nötig ist, werden wir uns im folgenden auf eine einfache Fehlerrechnung, eine Größtfehlerrechnung, beschränken.

Bei der einfachen Fehlerrechnung gilt die *Meßunsicherheit* als das Genauigkeitsmaß für die Meßwertreihe. Hierzu werden als erstes die sogenannten *absoluten Fehler* ermittelt. (Der „wahre“ absolute Fehler ist genauso unbekannt wie der „wahre“ Wert. Man kann nur die scheinbaren Fehler als Differenz zwischen dem einzelnen Meßwert und dem wahrscheinlichsten Wert bilden. Da die Addition der scheinbaren Fehler Null oder einen sehr kleinen Wert ergeben muß, es in der Fehlerrechnung nur auf die *Beträge* der scheinbaren Fehler ankommt, kann man sie im Sinne der mathematischen Operation „absoluter Betrag“ als *absolut* bezeichnen.)

Entsprechend der Definition des wahrscheinlichsten Wertes als arithmetisches Mittel der einzelnen Meßwerte geben wir die Meßunsicherheit u als arithmetisches Mittel der absoluten Fehler an:

● Die *Meßunsicherheit* u ist das arithmetische Mittel der absoluten Fehler (bei Nichtbeachtung der systematischen Fehler).

● Das *Meßergebnis* ist die Summe aus dem wahrscheinlichsten Wert (arithmetisches Mittel der einzelnen Meßwerte) und der Meßunsicherheit (arithmetisches Mittel der absoluten Fehler):

$$V = \bar{V} \pm \Delta V.$$

Eine Meßgröße ist also nur dann sinnvoll angegeben, wenn das Meßergebnis gleich der Summe aus dem wahrscheinlichsten Wert und der Meßunsicherheit ist, da in den Fehlergrenzen der wahre Wert mit großer Wahr-

scheinlichkeit, in unserem Beispiel mit 95% statistischer Sicherheit, liegt.

Neben der Angabe der Meßunsicherheit als additives Glied im Meßergebnis ist es auch üblich, die Meßunsicherheit im Verhältnis zum wahrscheinlichsten Wert auszudrücken, den *prozentualen Fehler* zu bilden:

$$\epsilon = \bar{V} \left(1 \pm \frac{\Delta V}{\bar{V}} \cdot 100\% \right).$$

Zusammenfassend sollen die neuen Begriffe noch einmal an einer graphischen Darstellung verdeutlicht werden: Die Häufigkeit eines Meßergebnisses ist als Funktion des Meßergebnisses aufgetragen. Auf der Abszissenachse sind die Begriffe aus der Fehlerrechnung markiert.

Diese Fehlerrechnungsbegriffe wollen wir nun auf die Meßwertreihe des Beispiels 1 anwenden.

Beispiel 1:

Volumenmessung durch Wasserverdrängung

Nr.	$\frac{V}{\text{ml}}$	$ \frac{V - \bar{V}}{\bar{V}} $
1	30,8	0,14
2	30,7	0,04
3	30,9	0,24
4	30,5	0,16
5	30,6	0,06
6	30,6	0,06
7	30,6	0,06
8	30,7	0,04
9	30,5	0,16
10	30,7	0,04
	30,66	0,10

$$\bar{V} = 30,66 \text{ ml}$$

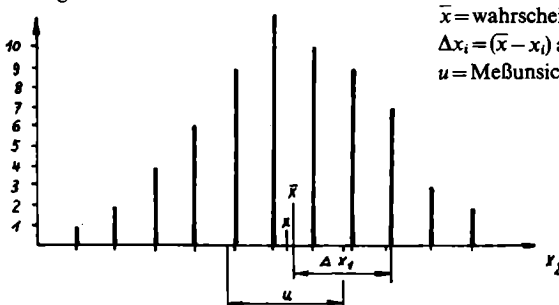
$$\bar{V} = 0,11 \text{ ml}$$

$$V = (30,7 \pm 0,1) \text{ ml}$$

$$\epsilon = \frac{0,10}{30,66} \cdot 100\% = 0,3\%$$

Bei der Berechnung des Meßergebnisses von Beispiel 1 ist darauf zu achten, daß die Meßunsicherheit nicht genauer angegeben wird, als es die Messung zuläßt. Durch Ausrechnen vieler Stellen wird eine Genauigkeit vorgetauscht, die physikalisch nicht realisiert ist. Im allgemeinen sollten Fehler höchstens auf zwei Stellen berechnet werden. Andererseits muß natürlich die Genauigkeit der Messung ausgenutzt werden, und es dürfen nicht durch Run-

Häufigkeit



x = wahrer unbekannter Wert

$\bar{x}$ = wahrscheinlichster Wert

$\Delta x_i = (\bar{x} - x_i)$ absoluter scheinbarer Fehler

u = Meßunsicherheit

Bild 3

den Ziffern wegfallen, die eine physikalische Bedeutung haben. Auf keinen Fall darf man eine Null als kleinste Ziffer einfach weglassen, wenn diese einen physikalischen Sinn hat. *Beispiel:* Eine Länge wird mit einer Meßblatte mit mm-Teilung gemessen. Es läßt sich ein halbes Millimeter schätzen. Dann lautet z. B. der Meßwert: $l = (52,0 \pm 0,5) \text{ mm}$. (Die unterpunktete Ziffer ist fehlerbehaftet.) Der wahrscheinlichste Wert und die Meßunsicherheit werden in gleichen Einheiten angegeben.

Einfache Fehlerrechnung für zufällige Fehler bei berechneten Größen

a) Größen, die durch Produktbildung berechnet werden

Um das Volumen des Körpers aus seinen geometrischen Abmessungen zu bestimmen, muß man seine Höhe und seinen Durchmesser ermitteln. Zur Höhenmessung wird man einen Meßschieber, zur Bestimmung des Durchmessers eine Bügelmeßschraube verwenden. Der Meßschieber erlaubt mit Hilfe des Nonius noch 0,1 mm abzulesen, die Bügelmeßschraube durch ihre Ringteilung 0,01 mm. Die Skalen lassen zu, eine halbe Einheit zu schätzen. Da der zylindrische Körper vermutlich sowohl im Durchmesser als auch in der Höhe kleine Unebenheiten aufweist, sind wiederum Meßwertreihen aufzunehmen (siehe dazu Beispiel 2). Zur Berechnung des Volumens müssen die fehlerbehaftete Höhe und das Quadrat des fehlerbehafteten Durchmessers miteinander multipliziert werden. Es besteht nun die Frage, wie sich der Gesamtfehler einer physikalischen Größe berechnet, die sich aus Meßwertreihen zwischen verschiedenen direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen multiplikativ zusammensetzt.

Es gilt

$$y \pm \Delta y = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

$$y \pm \Delta y = a \cdot b \pm \Delta a \cdot b \pm \Delta b \cdot a \pm \Delta a \cdot \Delta b$$

Das Glied $\Delta a \cdot \Delta b$ als Produkt kleiner Größendifferenzen kann wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden.

Der absolute Fehler beträgt:

$$\pm \Delta y = \pm \Delta a \cdot b \pm \Delta b \cdot a$$

Da $y = a \cdot b$ ist, beträgt der relative Fehler:

$$\pm \frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}$$

● Der relative Größtfehler eines Produktes aus direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen ist gleich der Summe der relativen Fehler ihrer Faktoren.

Bei der Bestimmung der Meßunsicherheit in Beispiel 2 müssen wir diesen Satz anwenden (siehe Beispiel 2).

Physikalische Größen, die als Produkt aus anderen physikalischen Größen gebildet werden, sind in der Physik recht häufig; erinnert sei an die physikalischen Größenarten Kraft, Drehmoment, mechanische Arbeit, elektrische Leistung usw.

Beispiel 2:

a) Volumenbestimmung durch Berechnung aus den gemessenen geometrischen Größen

Nr.	$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{(h-\bar{h})}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{(d-\bar{d})}{\text{mm}}$
1	69,80	0,00	23,620	0,005
2	69,90	0,10	23,615	0,000
3	69,85	0,05	23,605	0,010
4	69,80	0,00	23,620	0,005
5	69,75	0,05	23,625	0,010
6	69,75	0,05	23,610	0,005
7	69,80	0,00	23,610	0,005
8	69,70	0,10	23,605	0,010
9	69,80	0,00	23,620	0,005
10	69,85	0,05	23,620	0,005
	69,80	0,04	23,615	0,006

$$\frac{\Delta \bar{h}}{\bar{h}} \cdot 100\% = 0,06\%$$

$$\frac{\Delta \bar{d}}{\bar{d}} \cdot 100\% = 0,03\%$$

$$\frac{\Delta \bar{V}}{\bar{V}} \cdot 100\% = 0,06\% + 2 \cdot 0,03\% = 0,12\%$$

$$\bar{V} = 30,576 \text{ cm}^3 \approx 30,58 \text{ cm}^3$$

$$V = 30,58 (1 \pm 0,12\%) \text{ cm}^3$$

$$V = (30,58 \pm 0,03) \text{ cm}^3$$

b) Größen, die durch Summenbildung berechnet werden

Setzt sich die berechnete Größe aus additiven Gliedern zusammen, so ist der absolute Fehler einer Summe (oder Differenz) von Meßwertreihen aus direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen gleich der Summe der absoluten Fehler der Summanden.

Bei der Volumenbestimmung nach der 3. Methode ist der Auftrieb gegeben als Gewichts-differenz zwischen der Wägung des Körpers in Luft und der in Wasser. Folglich ist die Meßunsicherheit des Auftriebes gleich der Summe der Meßunsicherheiten der Gewichtsbestimmungen in Luft und in Wasser:

$$u_{\Delta} = u_{GL} + u_{GW}$$

Die Fehlerabschätzung

Bei vielen physikalischen Messungen sind nicht persönliche Unachtsamkeiten und zufällige äußere Einflüsse die entscheidende Fehlerursache, sondern vielmehr die Ables- und Anzeigegenauigkeit der Meßgeräte selbst. Dann müssen die Skalenteilung und die Güteklasse der Meßgeräte beachtet werden; die Aufnahme einer Meßwertreihe erübrigt sich. Bei einer Masse-, Gewichts-, Längen-, Stromstärke- oder Spannungsmessung genügt es, eine korrekte Haupt- und eine Kontrollmessung durchzuführen, die, falls die beiden Ergebnisse voneinander abweichen, nochmals wiederholt werden muß. Die im vorigen Abschnitt behandelte einfache Fehlerrechnung ist dagegen bei Zeitmessungen mit der Stoppuhr (persönliche Gleichung etwa 0,2 s), Volu-

menbestimmungen mit dem Meßzylinder oder bei Dickenmessungen von unebenen Körpern erforderlich. Bei der Fehlerabschätzung bezieht man sich auf die Hauptmessung, der Größtfehler wird in Hinblick auf die Skalenteilung, auf die kleinste Meßeinheit oder auf die Güteklasse des Meßgerätes abgeschätzt.

● Das Meßergebnis bei der Fehlerabschätzung setzt sich als Summe aus dem einen Meßwert und der Meßunsicherheit, dem geschätzten Größtfehler, zusammen.

Im Beispiel 3 ist das Volumen des zylindrischen Körpers als Quotient aus dem Auftrieb und der Wichte der vom Körper verdrängten Stoffmenge zu bestimmen:

$$V = \frac{G_L - G_W}{\sigma_W}$$

Die Gewichtsbestimmungen führen wir über Massenvergleiche an der Analysenwaage durch; am gleichen Ort ($g = \text{const.}$) verhalten sich die Gewichte zweier Körper wie ihre Massen. Die verwendete Waage schlägt bei Überbelastung mit 10 mg nur noch geringfügig aus. Der Größtfehler bei der Wägung ist demnach auf $\pm 5 \text{ mg}$ zu schätzen (siehe Beispiel 3).

Bei der Gesamtfehlerabschätzung des Volumens vernachlässigen wir den Fehler der Dichte (oder Wichte) des Wassers, da er kleiner als $\frac{10^{-3} \text{ g}}{\text{cm}^3}$ ist, so daß nur die beiden additiven Glieder zu beachten sind.

In Beispiel 3 ist das Meßergebnis der Volumenbestimmung durch Auftriebsmessung ausgerechnet.

Beispiel 3:

Volumenbestimmung durch Auftriebsmessung

$$G_L = (42,385 \pm 0,005) \text{ p}$$

$$G_W = (11,840 \pm 0,005) \text{ p}$$

$$\bar{A} = 30,545 \text{ p}$$

$$\sigma_W = 0,998 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$$

$$\bar{V} = 30,606 \text{ cm}^3$$

$$u_V = u_{GL} + u_{GW}$$

$$u_V = \pm 0,005 \text{ p} \pm 0,005 \text{ p}$$

$$u_V = \pm 0,01 \text{ p}$$

$$V = (30,61 \pm 0,01) \text{ cm}^3$$

$$\varepsilon_V = 0,03\%$$

Zusammenfassung

Um die Ergebnisse der Volumenbestimmungen des zylindrischen Körpers nach den drei Meßmethoden vergleichen zu können, sind sie nochmals aufgeführt:

$$V_1 = (30,7 \pm 0,1) \text{ cm}^3$$

$$V_2 = (30,58 \pm 0,03) \text{ cm}^3$$

$$V_3 = (30,61 \pm 0,01) \text{ cm}^3$$

Wir erkennen, daß die Meßergebnisse auf Grund der verschiedenen Meßmethoden sich in ihrer Genauigkeit unterscheiden. Die exakteste Meßmethode ist die durch Auftriebsmessung, die größte die durch Flüssigkeitsverdrängung.

Wo liegen die jeweiligen Fehlergrenzen?

$\frac{(V-u)}{\text{cm}^3}$	$\frac{V}{\text{cm}^3}$	$\frac{(V+u)}{\text{cm}^3}$
30,6	30,7	30,8
30,55	30,58	30,61
30,60	30,61	30,62

Bei einer Wichtung der Messungen würde vermutlich der wahrscheinlichste Wert bei $30,605 \text{ cm}^3$ liegen.

Bei den bisherigen Betrachtungen blieben *systematische Fehler* unberücksichtigt, z. B. beachteten wir nicht die Anzeigenauigkeiten der Meßgeräte (Welche Fehlertoleranz hatte die Bügelmeßschraube? War die Nullstellung sauber justiert?), eventuell beschädigte Wägestücke (oder bei anderen Messungen: mangelnde Reinheit der zu untersuchenden Substanzen, der Wärmeaustausch mit der Umgebung bei kalorischen Versuchen usw.).

● **Systematische Fehler** lassen sich durch Anbringen von Korrekturen berichtigen oder durch eine Größtfehlerabschätzung erfassen. Systematische Fehler haben unter gleichen Bedingungen den gleichen konstanten Wert. Die systematischen Fehler werden zu den zufälligen Fehlern addiert. Der wahrscheinlichste-Wert soll frei von systematischen Fehlern sein, so daß die *Meßunsicherheit* allgemein als *Summe* aus dem arithmetischen Mittel der absoluten Fehler und dem abgeschätzten systematischen Fehler besteht.

Bei der Lösung unseres Meßauftrages, das Volumen eines zylindrischen Körpers nach drei verschiedenen Methoden zu bestimmen, mußten wir auf Grund der verschiedenen Meßmethoden sowohl die Fehlerrechnung als auch die Fehlerabschätzung anwenden. Wir merken uns, daß man sich auf die Fehlerabschätzung beschränken kann, wenn zufällige Fehler, wie die Unzulänglichkeit der Sinnesorgane, die Reibung bei mechanischen Bewegungen, Erschütterungen, Temperaturschwankungen oder Schwankungen der Netzspannung, so klein sind, daß eine Meßwertreihe keinen Fehler anzeigen würde, oder wenn nur wenige, weniger als 6 Meßwerte vorliegen oder wenn die systematischen Fehler des Meßergebnisses nicht korrigiert werden können.

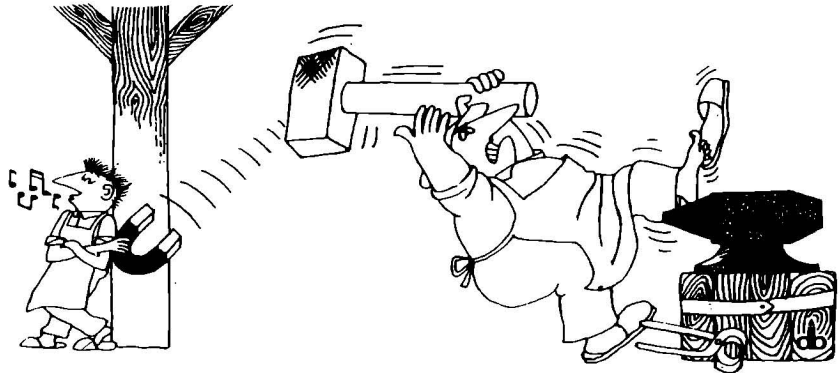
U. Manthei

Aufgaben zur Fehlerrechnung

▲1▲ Das durchschnittliche Fassungsvermögen eines Eßlöffels ist zu ermitteln. Folgende Meßwertreihe wurde aufgenommen: Gib das vollständige Meßergebnis an!

1. 15,5 ml
2. 15,0 ml
3. 15,5 ml
4. 15,7 ml
5. 15,3 ml
6. 16,0 ml
7. 15,5 ml
8. 15,7 ml
9. 15,3 ml
10. 15,5 ml

▲2▲ Wie berechnet sich der Gesamtfehler einer physikalischen Größe, die sich als Quotient aus zwei Meßwertreihen zusammen-



setzt? – Solche physikalischen Größen sind z. B. Wichte, Geschwindigkeit und elektrischer Widerstand.

▲3▲ Die Dichte von Kupfer soll ermittelt werden. Der Meßgegenstand, ein Kupferstück, hat die Masse $\bar{m} = 34,5 \text{ g}$ und das Volumen $\bar{V} = 3,8 \text{ cm}^3$. Die Massebestimmung wurde mit einer Meßunsicherheit $u_m = \pm 0,5 \text{ g}$, die Volumenbestimmung mit einer Meßun-

sicherheit $u_v = \pm 0,3 \text{ cm}^3$ durchgeführt. Prüfe, ob der Tabellenwert für Kupfer $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ innerhalb der Meßunsicherheit liegt!

▲4▲ Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

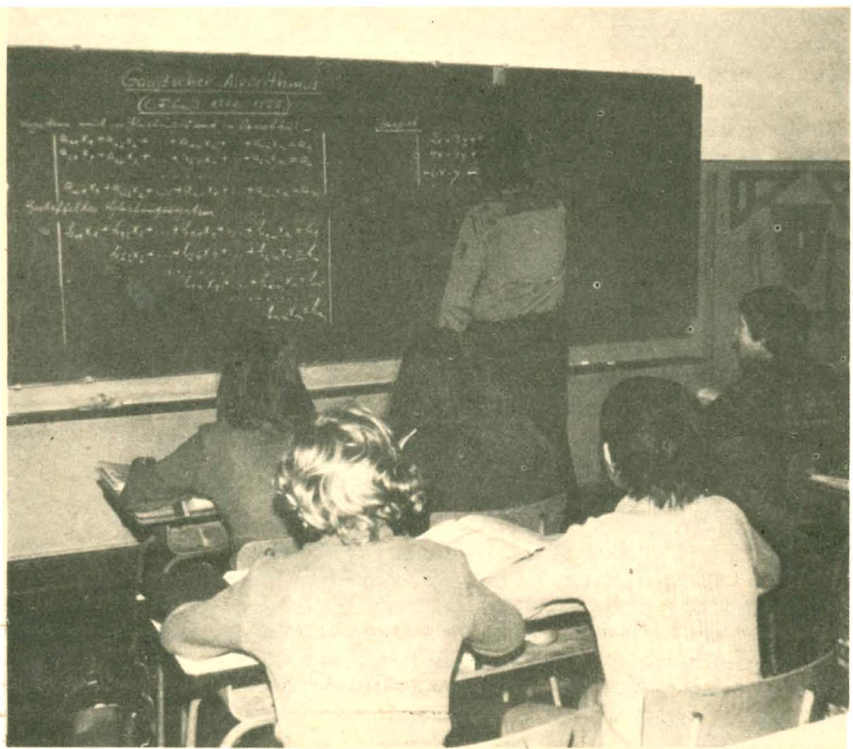
Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man mit $\bar{c} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ rechnet?

Gauß-Erinnerungsplakette

Allen Teilnehmern der zentralen Gauß-Ehrung wurde eine Gauß-Erinnerungsplakette (Böttger-Porzellan, braun, 50 mm Durchmesser, ohne materielle Anerkennung, Auflage 4000 Stück) überreicht (siehe Foto Seite 92). Anlässlich der Olympiade Junger Mathematiker der DDR – 4. Stufe, DDR-Olympiade –

hielt Nationalpreisträger Prof. Dr. H. Reichardt, Berlin einen Festvortrag zu: *Gauß und die Praxis*. Alle Teilnehmer der DDR-Olympiade erhielten die Erinnerungsplakette.

AG Mathematik Osternienburg (Kl. 10) bei der Behandlung des „Gaußschen Algorithmus“



Wir lösen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus

Teil 2

(Fortsetzung aus Heft 3/77)

Bei der Lösung von m Gleichungen mit n Variablen ($m \leq n$) können zwei Fälle auftreten.

1. Fall: Das Verfahren bricht nach $m-1$ Schritten ab, weil keine weiteren Gleichungen vorhanden sind.

Als „reduziertes System“ erhält man das dem Ausgangssystem äquivalente der Form

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= a_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= a_2^{(2)} \\ x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)} x_n &= a_3^{(3)} \end{aligned}$$

$$x_m + a_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + a_{mn}^{(m)} x_n = a_m^{(m)}$$

Die Variablen $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ sind frei wählbar (es sind sogenannte „freie Parameter“); die Variablen $x_m, \dots, x_1$ werden dann in der üblichen Weise berechnet. Man erhält also keine eindeutige Lösung, sondern unendlich viele Lösungen. Im Falle $n=m$ ist die Lösung eindeutig bestimmt.

2. Fall: Das Verfahren bricht nach $(r-1) < (m-1)$ Schritten ab, weil in den restlichen Gleichungen die Koeffizienten aller Variablen verschwinden.

Das „reduzierte“ System hat dann die Form

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_1^{(1)}$$

$$x_r + a_{r,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n = a_r^{(r)}$$

In diesem Falle können nun auch alle restlichen Absolutglieder (rechte Seite) Null sein, d. h., es kann gelten $a_{r+1}^{(r)} = 0, \dots, a_m^{(r)} = 0$. Dann kann man die Variablen $x_{r+1}, \dots, x_n$ frei wählen und die restlichen in der üblichen Weise ausrechnen. Das System ist wiederum lösbar, aber nicht eindeutig.

Falls für mindestens ein Absolutglied $a_i^{(r)} \neq 0$ ($i \in \{r+1, \dots, m\}$) gilt, kommt man zu einem Widerspruch ($0 = a_i^{(r)}$), und das System ist nicht lösbar.

Man kann also feststellen:

1. Ein Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn sich bei der Reduktion keine Widersprüche ergeben, d. h., wenn neben Gleichungen, die wenigstens eine Variable enthalten, höchstens noch Identitäten der Form $0=0$ auftreten.

2. Wenn Lösbarkeit vorliegt, und das Verfahren nach $r-1$ Schritten ($r-1 \leq m-1$) abbricht, dann können $m-r$ Variable frei gewählt werden („freie Parameter“), die restlichen Variablen werden in der üblichen Weise berechnet.

c) Beispiele

1. $3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 1$$

$$5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7$$

liefert als „reduziertes System“

$$x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 - \frac{11}{5}x_3 + \frac{17}{5}x_4 = -\frac{1}{5}$$

$$x_3 - \frac{8}{9}x_4 = -\frac{6}{9}$$

Es liegt der erste Fall vor, x_4 ist frei wählbar.

Als Lösungen erhält man

$$x_3 = \frac{8}{9}x_4 - \frac{2}{3}$$

$$x_2 = -\frac{13}{9}x_4 + \frac{19}{15}$$

$$x_1 = -\frac{4}{9}x_4 + \frac{267}{135}$$

Falls $x_4 = 9$ gewählt wird, erhält man also

$$x_4 = 9, x_3 = 7\frac{1}{3},$$

$$x_2 = -11\frac{11}{15} \text{ und } x_1 = -\frac{273}{135}.$$

2. Bei der Reduktion des Gleichungssystems

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 30$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 6$$

$$-x_1 + 2x_2 - 15x_3 = -42$$

erhält man

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 = 10$$

$$x_2 - 6x_3 = -12$$

$$0=0.$$

Es liegt der zweite Fall vor, und es gilt auch $a_3^{(3)} = 0$ (das restliche Absolutglied ist Null).

Das System ist lösbar, die Variable x_3 ist frei wählbar. Man erhält

$$x_2 = 6x_3 - 12$$

$$x_1 = -3x_3 + 18.$$

Falls $x_3 = 1$ gewählt wird, ergibt sich als spezielle Lösung $x_3 = 1, x_2 = -6$ und $x_1 = 15$.

3. Wenn man das Gleichungssystem

$$7x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$

$$15x_1 + x_2 + 9x_3 = 2$$

reduziert, erhält man

$$x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3 = 1$$

$$x_2 - \frac{6}{11}x_3 = \frac{24}{11}$$

$$0 = -49.$$

Das ist auch der zweite Fall; aber das System ist nicht lösbar, da für $a_3^{(3)} = -49 (\neq 0)$ gilt. Die Reduktion führt also auf einen Widerspruch.

3. Aufgaben

▲ 1 ▲ Es ist das Gleichungssystem

$$x - 2y + z = 0$$

$$2x - 5y + 2z = -2$$

$$2x - 2y + 3z = 7$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus zu lösen.

Führen Sie Rechenkontrollen (Zeilensummenprobe) durch!

Führen Sie die Endprobe mit Hilfe der Spaltensummen durch!

Legen Sie ein geeignetes Rechenschema an!

▲ 2 ▲ Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

a) $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$$2x_1 + 2x_3 = 17$$

$$-9x_1 - 12x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1$$

b) $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$

c) $2x - 3y + 6z = 0$

$$3x + 2y - 4z = 0$$

$$x + 5y - 10z = 0$$

d) $4x - 3y = -2$

$$2y + 5z = 19$$

$$5x - 7z = -16$$

e) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

f) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7$$

g) $7x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$

$$15x_1 + x_2 + 9x_3 = 9$$

h) $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 6$$

$$-x_1 + 2x_2 - 15x_3 = -10$$

J. Gronitz

Unser Titelbild

Das Titelbild dieser Ausgabe zeigt eine gerade, geschlossene Strahlschraubfläche, auch Wendelfläche genannt. Sie findet praktische Anwendung bei der Förderung von Sand, Schüttgut, Wasser, wobei diese in einer Rinne liegt und sich um ihre Achse dreht.



Interessante Erkenntnisse beim Rechnen mit natürlichen Zahlen

Wenn ihr das Mathematik-Lehrbuch der Klasse 4 auf der Seite 158 aufschlägt, findet ihr die Aufgabe 43:

„Schreibe zwei dreistellige Zahlen auf! Dabei soll eine Zahl größer sein als die andere. Bilde dann

a) die Summe, b) das Produkt, c) die Differenz dieser Zahlen! Ein Ergebnis läßt sich durch 3 teilen. Überprüfe diese Behauptung an vier Beispielen!“

Sicher werdet ihr die Aufgabe leicht lösen können. Vielleicht wundern sich aber einige von euch darüber, daß bei dieser Überprüfung verschiedene Fälle auftreten können. Wollen wir dem einmal nachspüren und einige Beispiele bilden!

Beispiel 1:

1. Zahl: 435 2. Zahl: 318

Summe $435 + 318 = 753$

753 ist durch 3 teilbar (Quersumme: $7 + 5 + 3 = 15$ und 15 ist durch 3 teilbar).

Differenz: $435 - 318 = 117$

117 ist durch 3 teilbar.

Produkt: $435 \cdot 318 = 138330$

138330 ist durch 3 teilbar.

Wir stellen fest: Summe, Differenz und Produkt sind durch 3 teilbar.

Beispiel 2:

1. Zahl: 523 2. Zahl: 247

Summe $523 + 247 = 770$

770 ist nicht durch 3 teilbar.

Differenz: $523 - 247 = 276$

276 ist durch 3 teilbar.

Produkt: $523 \cdot 247 = 129181$

129181 ist nicht durch 3 teilbar.

Wir stellen fest: Nur die Differenz ist durch 3 teilbar; Summe und Produkt sind nicht durch 3 teilbar.

Beispiel 3:

1. Zahl: 824 2. Zahl: 352

Summe: $824 + 352 = 1176$

1176 ist durch 3 teilbar.

Differenz: $824 - 352 = 472$

472 ist nicht durch 3 teilbar.

Produkt: $824 \cdot 352 = 290048$

290048 ist nicht durch 3 teilbar.

Wir stellen fest: Nur die Summe ist durch 3 teilbar; Differenz und Produkt sind nicht durch 3 teilbar.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:

Beim 1. Beispiel sind Summe, Differenz und Produkt, beim 2. Beispiel nur die Differenz und beim 3. Beispiel nur die Summe durch 3 teilbar.

Woran mag das wohl liegen? Ihr überlegt richtig, wenn ihr vermutet, daß der Grund dafür in den ausgewählten Zahlen zu suchen ist. Im 1. Beispiel (435 und 318) sind das zwei Zahlen, die beide durch 3 teilbar sind, und wir finden bestätigt:

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a durch 3 teilbar ist und auch b durch 3 teilbar ist, so sind $a + b$, $a - b$ und auch $a \cdot b$ durch 3 teilbar.

Im 2. Beispiel (523 und 247) und im 3. Beispiel (824 und 352) haben wir Zahlen ausgewählt, die sämtlich nicht durch 3 teilbar sind. Wenn wir trotzdem im 2. Beispiel ein anderes Ergebnis erhalten als im 3. Beispiel, so wollen wir auch hierfür die Gründe zu finden versuchen.

Wir müssen einmal feststellen, welche Reste die gewählten Zahlen bei der Division durch 3 lassen. Im 2. Beispiel läßt 523 den Rest 1 und 247 ebenfalls den Rest 1. Es ist nun möglich und auch viel einfacher, mit den Resten zu rechnen. Die Summe der Zahlen 523 und 247 läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie die Summe der Reste. Letztere ist 2. Die Differenz der Reste ($1 - 1 = 0$) beträgt Null, d. h. aber, daß die Differenz der beiden Zahlen durch 3 teilbar sein muß. Da das Produkt der Reste ($1 \cdot 1 = 1$) 1 ist, läßt auch das Produkt beider Zahlen bei der Division durch 3 den Rest 1, d. h. es ist nicht durch 3 teilbar.

Im 3. Beispiel läßt 824 bei Division durch 3 den Rest 2 und 352 den Rest 1.

Summe der Reste: $2 + 1 = 3$. „Rest 3“ bedeutet, daß die 3 noch einmal im Dividenten enthalten ist und dann der Rest 0 bleibt, d. h. die Division aufgeht.

Differenz der Reste: $2 - 1 = 1$.

Produkt der Reste: $2 \cdot 1 = 2$.

Wie wir erkennen, sind Differenz und Produkt beider Zahlen nicht durch 3 teilbar.

Wir wollen uns nun die Frage stellen, welche und wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei dreistellige Zahlen auszuwählen, deren Summe, Differenz oder Produkt durch 3 teilbar ist. Bei jeder Zahl besteht die Möglichkeit, daß sie entweder den Rest 0, 1 oder 2 läßt. Für zwei Zahlen kann man folgende Tabelle aufstellen:

	mögliche Reste bei der Division durch 3								
1. Zahl	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2. Zahl	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Es gibt also

9 verschiedene Möglichkeiten.

Nun genügt es, mit den Resten zu rechnen, um Schlußfolgerungen für die Teilbarkeit der Summe, der Differenz oder des Produktes zweier natürlicher Zahlen durch 3 zu ziehen.

1. Lassen beide Zahlen den Rest 0, so ergibt sich:

$$0 + 0 = 0; 0 - 0 = 0; 0 \cdot 0 = 0;$$

d. h., Summe, Differenz und Produkt sind durch 3 teilbar.

2. Läßt die 1. Zahl den Rest 0 und die 2. Zahl entweder den Rest 1 oder 2, so ergibt sich:

$$0 + 1 = 1 \quad 3 - 1 = 2 \quad 0 \cdot 1 = 0$$

$$0 + 2 = 2 \quad 3 - 2 = 1^* \quad 0 \cdot 2 = 0$$

(* Statt $0 - 1$ bzw. $0 - 2$ schreiben wir $3 - 1$ bzw. $3 - 2$. Das ist möglich, weil wir statt 0 jedes ganzzahlige positive Vielfache von 3 einsetzen können; alle diese Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 0!) In diesen Fällen ist nur das Produkt durch 3 teilbar.

3. Läßt die 2. Zahl den Rest 0 und die 1. Zahl entweder den Rest 1 oder 2, so ergibt sich:

$$1 + 0 = 1 \quad 1 - 0 = 1 \quad 1 \cdot 0 = 0$$

$$2 + 0 = 2 \quad 2 - 0 = 2 \quad 2 \cdot 0 = 0$$

Wie wir erkennen, ist auch in diesen beiden Fällen nur das Produkt durch 3 teilbar.

4. Lassen beide Zahlen gleiche Reste, so ergibt sich:

$$1 + 1 = 2 \quad 1 - 1 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$2 + 2 = 4 \quad 2 - 2 = 0 \quad 2 \cdot 2 = 4$$

In beiden Fällen ist nur die Differenz durch 3 teilbar.

5. Läßt die 1. Zahl den Rest 1 und die 2. Zahl den Rest 2, so ergibt sich:

$$1 + 2 = 3 \quad 4 - 2 = 2^* \quad 1 \cdot 2 = 2$$

und 3 läßt bei Division durch 3 den Rest 0! (* Statt $1 - 2$ schreiben wir $(1 + 3) - 2$, also $4 - 2 = 2$!) Es ist nur die Summe durch 3 teilbar.

6. Läßt die 1. Zahl den Rest 2 und die 2. Zahl den Rest 1, so ergibt sich:

$$2 + 1 = 3 \quad 2 - 1 = 1 \quad 2 \cdot 1 = 2$$

Es ist auch nur die Summe durch 3 teilbar.

Zusammenfassung

1. Sind beide ausgewählten Zahlen durch 3 teilbar, so sind deren Summe, Differenz und Produkt durch 3 teilbar.

2. Ist nur eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so ist nur das Produkt durch 3 teilbar.

3. Lassen beide Zahlen bei Division durch 3 gleiche von Null verschiedene Reste, so ist nur die Differenz durch 3 teilbar.

4. Lassen beide Zahlen bei Division durch 3 verschiedene Reste (kein Rest ist Null!), so ist nur die Summe durch 3 teilbar.

Nun können wir unsere Tabelle ergänzen:

	läßt bei Division durch 3 den Rest								
1. Zahl	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2. Zahl	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Summe	0	1	2	1	2	0	2	0	1
Differenz	0	2	1	1	0	2	2	1	0
Produkt	0	0	0	0	1	2	0	2	1

Rechne so: Wenn die 1. Zahl bei Division durch 3 den Rest 2 läßt und die 2. Zahl auch den Rest 2 läßt, so läßt die Summe beider

Zahlen den Rest $2 + 2 = 4$. Die 4 läßt aber bei Division durch 3 den Rest 1.

Nun könnt ihr nicht nur die Aufgabe 42 auf der Seite 157 des Mathematik-Lehrbuches der 4. Klasse leicht lösen, sondern den dort stehenden Satz sogar beweisen:

„Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 3 teilbar.“

Wenn ihr drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen betrachtet, so können bei der Division durch 3 nur die folgenden Reste auftreten:

Zahlen $\dots, a, a + 1, a + 2, \dots$

mögliche Reste	0	1	2
bei der Division durch 3	1	2	0
	2	0	1

Die Summe der Reste ergibt:

$0 + 1 + 2 = 3$, d. h. Rest 0

$1 + 2 + 0 = 3$, d. h. Rest 0

$2 + 0 + 1 = 3$, d. h. Rest 0

Man erkennt, daß diese Summe stets durch 3 teilbar ist, ganz gleich, welche drei aufeinanderfolgenden Zahlen man ausgewählt hat.

Außerdem kann man der Tabelle noch entnehmen, daß es unter 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets genau eine gibt, die durch 3 teilbar ist.

Aufgabe

Nun versucht, folgende Aufgabe zu lösen:
Gegeben seien zwei vierstellige natürliche Zahlen a und b . Es sei a größer als b .
Unter welchen Bedingungen sind die Summe $a + b$, die Differenz $a - b$ oder das Produkt $a \cdot b$ durch 4 teilbar? Gibt es Fälle (wie viele und welche?), in denen weder $a + b$, noch $a - b$, noch $a \cdot b$ durch 4 teilbar ist?

Bemerkung: Ob die gegebenen natürlichen Zahlen a und b vierstellig sind oder irgendeine andere beliebige Stellenzahl haben, ist für das Lösen der Aufgabe ohne Bedeutung!

W. Fregin

Antje „entdeckt“ eine Rechenprobe

Die elfjährige Schülerin Antje Glaß aus Bernburg, regelmäßige *alpha*-Leserin, überlegte sich folgende Probe für die „Neunerreihe“:
Multipliziere ich 9 mit einer Zahl zwischen 1 und 10, so ist die erste Ziffer des Ergebnisses um 1 kleiner als diese Zahl, und die zweite erhalte ich, wenn ich von meiner Zahl bis 10 ergänze.

Die Richtigkeit ihrer Überlegung zeigt folgender Beweis: Ist ihre Zahl x , so berechnet sie $9 \cdot x$. Der Zehner des Ergebnisses ist $x - 1$, der Einer $10 - x$. Also lautet das Ergebnis ihrer Probe $10 \cdot (x - 1) + (10 - x) = 10 \cdot x - 10 + 10 - x = 9x$.

Vielleicht habt ihr in eurer AG, in der Schule oder zu Hause ähnliche „Entdeckungen“ gemacht?

Teilt sie uns doch einmal mit (Kennwort: Meine Klobelei)! Redaktion *alpha*

Berufsbild: Ingenieur für Technik und Technologie des Fernmeldewesens

Die mathematische Schülerzeitschrift *alpha* kaufen sich viele Leser am Zeitungskiosk, andere können ihre Zeitschrift zweimonatlich dem Hausbriefkasten entnehmen. Aber die wenigsten denken darüber nach, wer ihnen den bequemen Bezug dieser Zeitschrift und vieler anderer Presseerzeugnisse ermöglicht. Es sind die vielen fleißigen Werktätigen der Deutschen Post.

Sie vollbringen jedoch für die Bürger der DDR, für unsere Volkswirtschaft und für die Staatsorgane eine Vielzahl weiterer sehr wichtiger Leistungen, von denen hier nur einige genannt werden können. Allen sind solche postalischen Dienstleistungen, wie Übermitteln von Briefen, Telegrammen, Päckchen, der Verkehr mit Zahlungsmitteln und der Sparkassendienst bekannt. Wenn ihr aber telefoniert, fernseht oder Radio hört, so geschieht das mit Hilfe umfangreicher und komplizierter fernmeldetechnischer Einrichtungen der Deutschen Post. Kurz gesagt, beschäftigen sich die Werktätigen der Deutschen Post mit der Ortsveränderung von Nachrichten. Dabei treten schwierige Aufgaben auf, die nur durch qualifizierte Kader mit hohem politischem Bewußtsein gelöst werden

können. Zur Ausbildung solcher Kader wurde am 1. September 1953 die Fachschule für Post- und Fernmeldewesen in Leipzig gegründet. Am 13. Oktober 1954 wurde der Fachschule der ehrende und verpflichtende Name *Rosa Luxemburg* verliehen. Jetzt trägt sie die Bezeichnung Deutsche Post – Ingenieurschule *Rosa Luxemburg*.

An der Ingenieurschule werden Ingenieure und Ingenieurökonom im dreijährigen Direkt- und fünfjährigen Fernstudium für das sozialistische Nachrichtenwesen ausgebildet. Die Ausbildung erfolgt in den drei Fachrichtungen:

- Technik und Technologie des Fernmeldewesens mit den Vertiefungsrichtungen: Fernsprech- und Fernschreibwesen – Fernmeldebau – Funkwesen
- Technik und Technologie des Post- und Zeitungswesens
- Sozialistische Betriebswirtschaft/Ingenieurökonomie des Nachrichtenwesens.

Die erstgenannte Fachrichtung möchte ich etwas näher vorstellen, weil ein Studium in ihr den mathematisch-naturwissenschaftlich Interessierten ein reiches Betätigungsfeld eröffnet. Studienbewerber für diese Fachrichtung

Das Tonstudio für Ausbildung und Agitationsarbeit des Schulfunks



müssen deshalb solide Kenntnisse in Mathematik und Physik durch den Abschluß der 10. Klasse bzw. durch das Abitur nachweisen können. Sie sollten Facharbeiter für Nachrichtentechnik sein oder einen verwandten Berufsabschluß, z. B. Elektronikfacharbeiter, besitzen und über eine ein- bis zweijährige Berufspraxis verfügen. Der Ausbildungsinhalt des Studiums umfaßt Lehrgebiete mit allgemeinbildendem Charakter und Lehrgebiete, die das technische Grundwissen des Ingenieurs bilden. Zu den letztgenannten gehören u. a.:

Mathematik – Physik – Chemie – Technische Mechanik – Werkstoffkunde – Steuerungs- und Regelungstechnik – Grundlagen der Elektrotechnik – Grundlagen der Elektronik – Elektrische Meßtechnik – Elektrische Netzwerke – Übertragungstechnik.

Dazu kommen in den Vertiefungsrichtungen folgende spezielle Lehrgebiete:

Vertiefungsrichtungen „Fernsprech- und Fernschreibwesen“ und „Fernmeldebau“:

Vermittlungstechnik – Fernschreib- und Datentechnik – Fernmeldebau

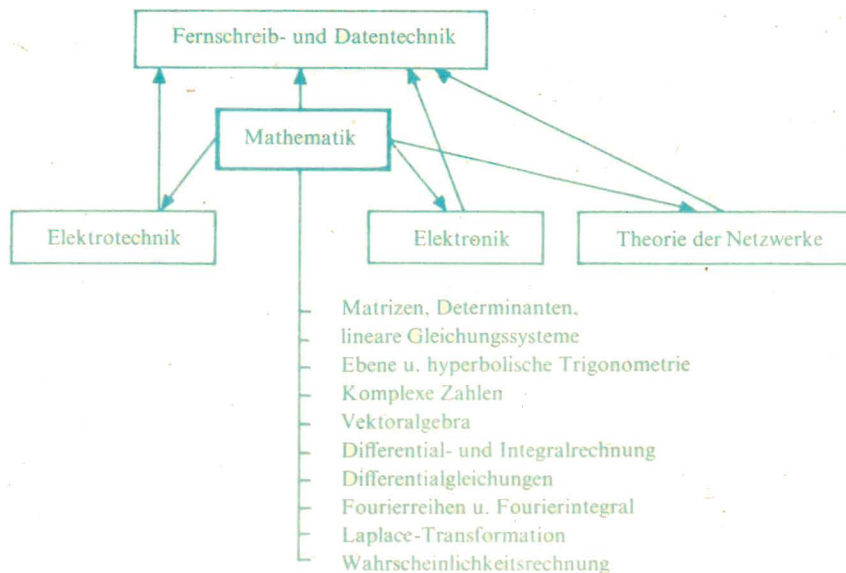
Vertiefungsrichtung „Funkwesen“:

Funksende- und -empfangstechnik – Studio-technik – Spezielle Meßtechnik.

Die Grundlagenausbildung erfolgt im 1. und 2. Studienjahr des Direktstudiums. Im 5. Semester wird das spezielle Fachwissen in den drei Vertiefungsrichtungen vermittelt. Während des Praktikums im 6. Semester sind die Studenten in ihren späteren Einsatzämtern tätig und fertigen ihre Ingenieur-Abschlußarbeit an.

Im Jahr der 200. Wiederkehr des Geburtstages von *Carl Friedrich Gauß* sei daran erinnert, daß er gemeinsam mit dem Physiker *Wilhelm Weber* 1833/34 die elektromagnetische Telegrafie erfand. Die Telegrafie hat sich seitdem zu einem schnellen, zuverlässigen und weltweiten Kommunikationssystem entwickelt. Das Fernschreiben über Selbstwähl-netze und die elektrische Fernübertragung von Daten zwischen Rechenzentren sind in jüngster Zeit dazu gekommen. Es verwundert sicher nicht, daß bei der Ausbildung von Ingenieuren des Fernmeldewesens dem Gebiet der Fernschreib- und Datentechnik ein hoher Rang zukommt. Am Beispiel des Lehrgebietes „Fernschreib- und Datentechnik“ läßt sich zeigen, welches umfangreiche mathematische Rüstzeug ein Student besitzen muß, um in dieses Gebiet erfolgreich und tief einzudringen. Nachstehendes Bild stellt die Zusammenhänge zwischen der Mathematik, den technischen Wissenschaften Elektrotechnik, Theorie der elektrischen Netzwerke und Elektronik und der Fernschreib- und Datentechnik dar.

Auch zur theoretischen Beherrschung der Fernsprech-, Funk- und Fernsehtechnik werden umfangreiche Kenntnisse der elementaren und höheren Mathematik vom Studenten und auch vom späteren Ingenieur erwartet.

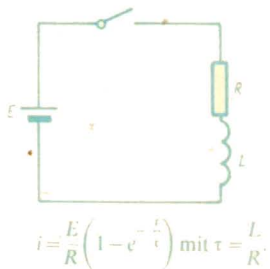


Die rasche Entwicklung der modernen Kommunikationsmittel bedingt ein immer stärkeres Eindringen mathematischer Disziplinen in die theoretischen Zweige dieser Techniken. Die moderne Theorie der Nachrichtenübertragung baut auf der Funktionentheorie, Mengenlehre, Booleschen Algebra und Ereignisalgebra auf. Die Höhen dieser Theorien kann nur derjenige erklimmen, der bereits in der polytechnischen oder erweiterten Oberschule die dort gelehrtten mathematischen Grundlagen beherrschen gelernt hat. Abschließend möchte ich vier kleine mathematische Kostproben geben.

M. Necke

Aufgaben

▲1▲ In dem skizzierten Stromkreis wird durch Betätigen des Kontaktes der Strom für das Telegrafienrelais zum Zeitpunkt $t=0$ eingeschaltet. Das Relais stellt einen Energiespeicher mit der Selbstinduktivität $L=0,5$ H dar. Sein Widerstand beträgt $R=1$ k Ω , der Ansprechstrom $I_{an}=1$ mA und die Urspannung $E=12$ V. Der nach dem Einschalten fließende Strom genügt der Zeitfunktion.



$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ mit } \tau = \frac{L}{R}$$

Berechne die Zeit t , die vom Schließen des Kontaktes bis zum Ansprechen des Relais vergeht!

▲2▲ Der Widerstand einer Fernschreibanschlußleitung erhöht sich durch Verlängerung der Leitung um $R=500$ Ω . Bei einer konstanten Spannung $U=60$ V am Anfang der Leitung sinkt der Strom um $I=10$ mA.

Wie groß war der ursprüngliche Leitungswiderstand?

▲3▲ Die kilometrische Dämpfung α einer Leitung mit geringen Verlusten ist durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z} - G'Z \right) \text{ mit } Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

gegeben. Darin ist R' der Widerstand, G' die Ableitung, L' die Induktivität und C' die Kapazität je Kilometer Leitungslänge.

Für welchen Wert Z wird α ein Minimum?

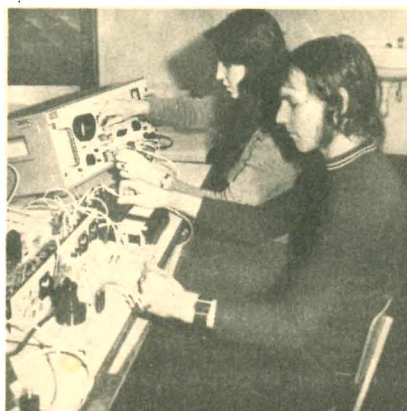
▲4▲ In einem Seekabel kann man nach Lord Kelvin mit der Geschwindigkeit

$$v = a \left(\frac{D}{d} \right)^2 \ln \frac{1}{D}$$

telegrafieren. v ist darin die Anzahl der Zeichen pro Sekunde; a eine Konstante, die von der Drahtlänge und vom Material abhängt; D ist der Kabeldurchmesser; d der Leiterdurchmesser.

Für welches Verhältnis $\frac{D}{d}$ erreicht v ein Maximum?

Nachrichtentechnisches Labor
Untersuchungen an Wechselstromtelegrafie-einrichtungen



Synchron- optischer Schaukasten

Mathematik und Mathematiker unter geschichtlichen Aspekten

So ist das nun mal: Irgendwann werden wir des Gewohnten überdrüssig. Wir ziehen neue Sachen an, obwohl die alten noch in Ordnung sind, wir tapezieren neu, obwohl das alte noch ganz gut ist. Wir räumen zu Hause um, hängen ein neues Bild auf, wechseln die Gardinen. Das Altgewohnte, das ist auch unser Arbeitsplatz, unsere Arbeitsgemeinschaft Mathematik. Gefällt sie uns noch? Fühlen wir uns darin wohl? Könnte man nicht einmal aus dem Gewohnten ausbrechen? Solche und ähnliche Gedanken mögen wohl die meisten 13- bis 16jährigen Schüler an diesem Tage beschäftigt haben, denn mit dem Suchen von Lösungswegen, dem Aufstellen von Logarithmen und dem Finden der Ergebnisse wollte es gar nicht so recht klappen. Viel mehr erfreuten sich alle an einem lustigen Frage- und Antwortspiel. Wie es gar nicht anders sein kann, landeten wir dann auch wieder bei der Mathematik. Wir stellten uns vor, noch einmal mit der Knotentechnik der alten Ägypter rechte Winkel zu konstruieren. Ja, wann war das eigentlich, als man damit ar-

beitete? War das vor oder nach Pythagoras?

Nun entwickelte sich ein echtes Streitgespräch. Jeder Schüler konnte diesem Meinungsstreit etliche Fakten beisteuern. Jeder suchte nach Fragen, die man eventuell noch klären mußte.

Wann kam Pythagoras zu seiner Feststellung? Welche Wissensgebiete – außer Mathematik – waren ebenfalls so früh? Hat man Überlieferungen aus dieser Zeit von Literatur, Kunst oder Philosophie? So viele Fragen! Geklärt werden konnten an diesem Tag aber längst nicht alle.

So kamen wir zu der Erkenntnis, man mußte einen *Wissenspeicher* für verschiedene Wissensgebiete haben, auf dem alles übersichtlich geordnet sei.

Her mit Ideen!

Und die kamen, beim Arbeiten, beim Nachdenken.

Es bildeten sich verschiedene Interessengruppen, die gemeinsam eine Materialsammlung aus den verschiedenen Wissensgebieten zusammentrugen. Da wurden Bücher gewälzt, Bücher ausgeliehen, die Fachlehrer mußten helfen.

Wir waren schon gut vorwärts gekommen.

Es mag manche gegeben haben, die dachten: „Na ja ... vielleicht genügt das ja schon.“ Aber...!

Alle überlegten von neuem: Wer könnte noch helfen?

Wir wandten uns an den Fachgruppenleiter für Mathematik vom Institut für Lehrerbildung in Meiningen, und er konnte uns helfen. Er stellte uns die *Urania-Bildtafeln Rolle der Mathematik in Wissenschaft, Wirtschaft und Technik*, viele Lichtbilder, zahlreiches Schriftmaterial zur Verfügung.

Nun bekamen wir wieder neuen Auftrieb, alles Wissenswerte war zusammengetragen.

Jetzt fragten wir uns, wie soll unser Wissenspeicher aussehen? Nach langem hin und her entschieden wir uns für einen Anschauungskasten, der eine synchron-optische Wiedergabe gewährleistet.

Na dann los!

Sie haben alle an diesen vielen Nachmittagen gearbeitet, gebastelt, geschrieben, nachgedacht. Man fand wieder verschiedene Gruppen, eine, die das Holz besorgte und im Werkraum den Kasten bastelte, eine, die sich mit Elektronik beschäftigte und den Bewegungsrhythmus konstruierte, und eine dritte Gruppe beschriftete in mühevoller Arbeit eine Tapetenrolle. Hier durfte man auch nicht vergessen, zwischen den Zeitabschnitten immer ein Stück Platz zu lassen, damit man noch erweitern bzw. ergänzen kann.

Dann war es endlich soweit, der Wissenspeicher wurde zusammengebaut. Alle waren gespannt, ob die ganze Anlage auch funktionstüchtig war.

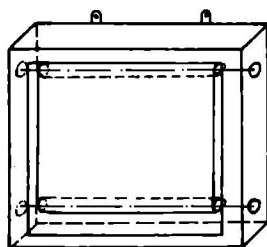
Na ja, es klappte schon, aber ganz zufrieden waren wir noch nicht. Wieder wurde sich regelmäßig getroffen. Es bedurfte noch einiger Stunden mühevoller Kleinarbeit, bis der Wissenspeicher nun endlich funktionierte, wie es sich alle wünschten.

Eine große Arbeit, zugegeben, aber die Freude über das Geschaffene entlohnt alle, die mitgeholfen hatten. Wir hoffen, daß sie uns gelungen ist und vielen etwas gibt.

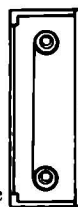
Sicherlich ist aber dieser Anschauungskasten noch verbesserungswürdig. Wir würden uns freuen, wenn wir noch einige Anregungen zur Verbesserung bekommen könnten.

Wir hoffen auch, daß dieses Modell für andere Arbeitsgemeinschaften impulsgebend sein könnte, denn auch an unserer Schule war mit dieser Arbeit die Tätigkeit der AG nicht zu Ende.

Kollektiv der AG Mathematik
der Maxim-Gorki-OS Dermbach

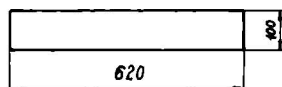
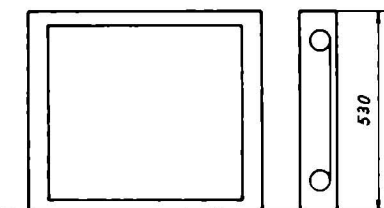


Glasscheibe



Tapetenrolle

Kasten



XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Olympiadeklasse 11/12

1. Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller x mit $a < x < b$ sei I genannt. Eine in I definierte Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion. Unter diesen Voraussetzungen beweise man: Genau dann ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$ gilt.

2. Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, daß jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.

Hinweis: Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

3. Ist $P_1P_2P_3P_4S$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ε_i und die Größe des Winkels zwischen ε_{i-1} und ε_i mit α_i bezeichnet ($i = 1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch 4 ersetzt).

Man beweise: Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

4. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \quad \text{gilt.} \quad (1)$$

5. Man ermittle die Anzahl aller Paare (p, q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, daß die Gleichung $x^5 + px + q = 0$

mindestens eine rationale Lösung hat.

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Es sind alle Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:

Für alle reellen Zahlen x gilt

$$xf(x-1) = (x-2)f(x).$$

6B. Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n -Ecks in eine minimale Anzahl von
a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,
b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.

Hinweis: Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n -Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n -Ecks ist.

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Man beweise den folgenden Satz: Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf der Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf der Verlängerung von OR über R hinaus gelegen, und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX , so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächengleich.

2. Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a+c=13$ cm, $e+f=15$ cm, $\phi=100^\circ$ und $\varepsilon=70^\circ$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB , c die Länge der Seite CD , e die Länge der Diagonalen AC , f die Länge der Diagonalen BD , ε die Größe des Winkels $\angle DAC$ und ϕ die Größe des Winkels $\angle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.

Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen!

3A. Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...). In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, daß die Punktzahlen (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurden und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war. Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.

Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, daß die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge). Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte 16 Punkte erreicht.

In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen)

siegte der Sportler D , Zweiter wurde der Sportler C . Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen.

3B. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p , für die die Gleichung

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

eine Lösungsmenge L hat, die

- leer ist,
- genau ein Element enthält,
- aus mehr als einem Element besteht!

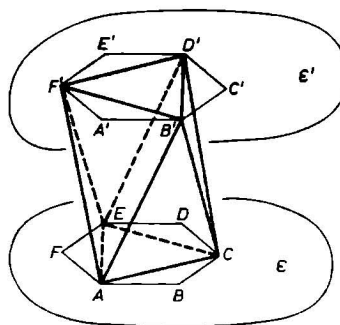
4. Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$xy + 3x - 2y - 3 = 0.$$

5. Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC , ferner sei die Diagonale AC eine q mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F .

Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$.

6. In einer Ebene ε sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ε' sei zu ε parallel. In ε' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, daß die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ε senkrecht stehen. Gegeben seien die Seitenlänge $a = \overline{AC}$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ε und ε' . Man berechne hieraus das Volumen



V des Polyederkörpers, der genau die Strecken $AC, CE, EA, B'D', D'F', F'B', AB', AF', CB', CD', ED'$ und EF' als Seitenkanten hat (siehe Bild).

Preisträger XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:

- 1 Steffen Zopf,
EOS Karl Marx, Leipzig (Kl. 9)
- 2 Bodo Heise,
J.-Gagarin-OS Görlitz (Kl. 7)
- 3 Holger Rücker, EOS Nauen (Kl. 10)
- 4 Dirk Sprengel,
EOS 9, Potsdam (Kl. 10)
- 5 Peter Dittrich,
Spezialklasse Mathematik der Humboldt-
Universität zu Berlin (Kl. 11)
- 6 Werner Hoffmann,
Arbeiter-und-Bauern-Fakultät
Walter Ulbricht, Halle (Kl. 12)
- 7 Joachim Heinitz,
EOS K. Kollwitz, Zwickau (Kl. 12)



Einen zweiten Preis erhielten:

- 6 In Olympiadeklasse 10: Thomas Gundermann, EOS H. Pistor, Sonneberg; Frank Eisenhaber, EOS J. Brinckmann, Güstrow;
- 7 Klaus Beck, Erw. Spezial-OS Kleinmachnow; Hans-Jürgen Heinitz, EOS K. Kollwitz,

Der Chefredakteur der *alpha* im Gespräch mit Teilnehmern der DDR-Olympiade. *alpha* stellt in Heft 6/77 alle 18 Mädchen vor, unter: Mädchen meistern Mathematik.

Einen dritten Preis erhielten:

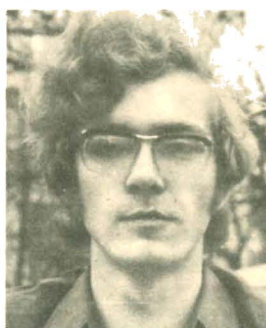
In Olympiadeklasse 10: Burkhardt Götz, 1. EOS Cottbus; Hans-Martin Kühn, Puschkin-EOS, Prenzlau; Andreas Kasperek, EOS Gräfenhainichen; Hermann Tenor, EOS Philanthropinum, Dessau; Knut Franke, EOS Güstrow; Jürgen Lembcke, EOS M. A. Nexö, Dresden; Dietmar Berthold, EOS J. Motteler, Crimmitschau; Matthias Bernstein, EOS Ernst Abbé, Eisenach; Michael Schubert, Kersting-OS Güstrow (aus Kl. 9); Peter Berndt, EOS E.-M.-Arndt, Bergen/Rügen (aus Kl. 9); Erasmus Scholz, EOS M. A. Nexö, Dresden (aus Kl. 9); Torsten Musiol, Kersting-OS Güstrow (aus Kl. 9); Andreas Radtke, EOS Geschw. Scholl, Belzig (aus Kl. 9); Torsten Flade, EOS B. Brecht, Schwarzenberg (aus Kl. 9);

In Olympiadeklasse 11: Wolfgang Würbel, EOS R. Rothkegel, Forst; Bernd Mulansky, EOS M. A. Nexö, Dresden; Dittmar Kurtz, Spezialkl. Math. der M.-Luther-Universität Halle; Hans-Dietmar Gröger, EOS Staßfurt; Uwe Schäfer, Spezialkl. Math. der Humboldt-Universität zu Berlin; Uwe Hostmann, EOS H. Hertz, Berlin; Bernd Kreußler, KJS F. Lesch, Frankfurt (Oder) (aus Kl. 10); Uwe Szyska, EOS Fr. Engels, Neubrandenburg (aus Kl. 10);

In Olympiadeklasse 12: Roger Labahn, EOS Geschw. Scholl, Anklam; Torsten Boseniuk, EOS Brühl.

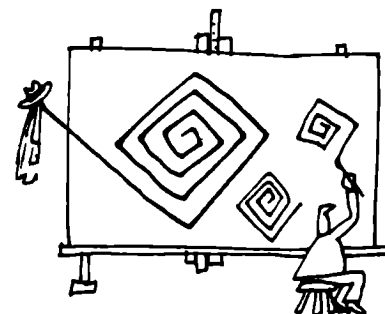
● Weitere 54 Teilnehmer erhielten eine Anerkennungsurkunde für sehr gute Leistungen, drei Schüler ein Diplom für die elegante Lösung einer Aufgabe.

● An der DDR-Olympiade nahmen bei insgesamt 204 Teilnehmern 18 Mädchen teil. *alpha* stellt sie in Wort und Bild in Heft 6/77 vor.



- 6 Zwickau; Ulf Hutschenreiter, EOS B. Brecht, Dresden; Norbert Münch, EOS J. W. Goethe, Bad Doberan (aus Kl. 9);
- In Olympiadeklasse 11: Ilja Schmelzer, Spezialkl. Math. der M.-Luther-Universität Halle; Thomas Maiwald, Spezialkl. Math. der TH Karl-Marx-Stadt; Ralf Becker, EOS W. Seelenbinder, Zielitz; Steffen Thiel, EOS Königs Wusterhausen (aus Kl. 10);
- In Olympiadeklasse 12: Harald Gottstein, EOS Karl Marx, Tangerhütte; Thomas Lushtinetz, Hansa-EOS Stralsund

In freien Stunden **alpha** heiter



alpha-Produkte

$$\begin{aligned}\alpha\alpha \cdot \alpha\alpha &= \alpha P\alpha \\ \alpha P \cdot \alpha\alpha &= \alpha RP \\ \alpha\alpha \cdot \alpha R &= \alpha OR \\ \alpha O \cdot \alpha\alpha &= \alpha DO \\ \alpha\alpha \cdot \alpha D &= \alpha UD \\ \alpha U \cdot \alpha\alpha &= \alpha KU \\ \alpha\alpha \cdot \alpha K &= \alpha TK \\ \alpha T \cdot \alpha\alpha &= \alpha ET\end{aligned}$$

Die Buchstaben sollen so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Multiplikation zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Magisches Quadrat

Die Lösung eines magischen Quadrats ist keine Magie, sondern eine Gesetzmäßigkeit.

Aufgabe: Trage in ein magisches Quadrat mit 25 Feldern Zahlen von 38 bis 62 so ein, daß alle senkrechten, waagerechten und diagonalen Reihen die Summe von 250 ergeben! Beschreibe den Lösungsweg!

Dr. G. Blosfeld, Halle

Gemeinsamer Beruf

Welchen gemeinsamen Beruf haben diese Personen?

Moni P. Dinu Riegel	Rudi M. Neige Lipno
Leo I. Rupig Minden	Emil N. Gorpi Udine

Fachlehrer
D. Knape, Jessen

Aus Zehn ein Raum

Z	E	H	N
R	A	U	M

Schüler H. Völzke,
Greifswald (Kl. 3)

Ohne Worte

$$\begin{aligned}6\frac{2}{5}-N \quad 11\frac{2}{3} \quad 9\frac{2}{3}-T \quad G+7'''' \\ 10 \quad *2\frac{2}{3} \quad 1(\text{englisch}) \\ (\text{englisch}) \quad 2; 1-K; 3 + L \\ \text{Schmerz tangentialwinkel} \\ \text{Oberlehrer Annelies Hetwes,} \\ \text{Burkhardtsdorf}\end{aligned}$$

Knöpfchendrücken

Computer, ach Computer
Du bist ein dummes Luder.
Du stehst in deiner Ecke.
Kennst weiter nichts als Zwecke.
Kannst massig Daten schlucken
und große Töne spucken –
doch überhaupt nicht lachen.
Kannst keinen fröhlich machen.
Vieltausend Teile haste.
Doch fehlt dir eine Taste.
Das Knöpfchen in der Mitte.
Das haben wir. Na bitte.

Manfred Streubel, Leipzig

Zahlenrätsel

$$\begin{aligned}a - b &= c \\ : &- - \\ d \cdot e &= f \\ g + h &= i\end{aligned}$$

- a Summe aller Zahlen von 2 bis 193
- b $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
- c Mittelwert der Zahlen 23 105; 13 830 und 45 25
- d $\sqrt[3]{17576}$
- e 6,25% von 5248
- f $\frac{148}{37} = \frac{34112}{f}$
- g $g^2 = 518400$
- h $(h + 4)13 = 59488$
- i Kleinstes gemeinsames Vielfaches von 4; 27 und 49

R. Schulze, Niederkaina

Zahlenkreuzrätsel

In jedes der 36 Felder ist eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 einzutragen. Die dabei entstehenden zwei- bis vierstelligen Zahlen reichen jeweils von dem numerierten Feld aus waagerecht nach rechts bzw. senkrecht nach unten bis zur nächsten markierten Trennungslinie bzw. bis zum Rand. Sie sind aus den folgenden Angaben zu erschließen:

1		2	3	4	5
6	7	8			
9			10		
11	12	13		14	
	15		17		18
19		20			

Waagerecht:

1. Vielfaches von 3w, 3. 3s im Quadrat, 6. Vielfaches der Quersumme von 7s, 8. Quersumme wie bei 16s, 9. Vielfaches der Quadratwurzel aus 14s, 10. Vielfaches von 14w, 12. wie bei 9w, 14. Primzahl, 15. sowohl Quadrat- als auch Kubikzahl, 17. wie 14s, 19. Primzahl, 20. hat die Quersumme 3s;

Senkrecht:

1. Produkt von 14w und 18s, 2. Vielfaches von 16s, 3. Kubikwurzel von 5s, 5. Vielfaches von 3w, 5. vorwärts = rückwärts, 7. Primzahl, 10. Vielfaches von 14w, 11. Vielfaches von 19w, 13. Primzahl, 14. wie 17w, 16. Quadratwurzel aus 15w, 18. Primzahl (es bedeutet w: waagerecht, s: senkrecht).

Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden

Silbenrätsel

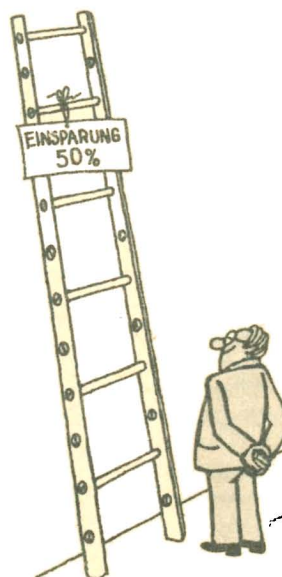
Aus den folgenden Silben sind 18 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben nacheinander gelesen ergeben den Namen eines ganz bekannten griechischen Mathematikers, der etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z. lebte. Eine nach ihm benannte Satzgruppe wird in Klasse 8 behandelt.

a - a - a - al - ar - bel - bel - ber - ble - bra - bus - che - chi - chung - de - des - flä - ga - ge - glei - hy - kan - le - lym - me - me - me - me - null - o - o - o - pa - per - pez - pi - ra - ri - rhom - satz - se - stel - sum - te - ter - tra - va - xiom - yard.

1. Graph einer quadratischen Funktion
2. Engl. und nordamerikanisches Längenmaß (91,4 m)
3. Viereck mit zwei ungleich langen parallelen Seiten
4. Kegelschnitt

5. Einleuchtendes, nicht beweisbares math. Grundgesetz
6. Ausdruck, in dem zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind
7. Letzter Buchstabe des griechischen Alphabets
8. Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind
9. Mathematiker des Altertums (um 287 bis 212 v. u. Z.)
10. Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet
11. Zeichen für ein beliebiges Element aus einem fest vorgegebenen Grundbereich
12. Sportlicher und mathematischer Wettbewerb
13. Schnittpunkt einer Funktion mit der Abszisse
14. Ergebnis einer Addition
15. Teilgebiet der Mathematik
16. Einheit der Länge
17. Begriff aus der Stereometrie
18. Bewiesene Aussage

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald



Harri Parschau

Läufersprung

Läßt man den Läufer nach den Regeln des Schachspiels so über die abgebildete Figur gleiten, daß alle Silben nacheinander erfaßt werden, so erhält man für eine mögliche Folge einen Ausspruch, an den man beim Knobeln von kniffligen Aufgaben denken sollte.

ge	ist	vom	kein
fal	es	him	mei
jen	mei	noch	ster

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald



Aus der OS Osternienburg berichtet

Mathematischer Schülerwettbewerb zu Ehren des 200. Geburtstages von C. F. Gauß

Zu Beginn des Schuljahres 1976/77 diskutierten wir, wie wir den 200. Geburtstag von C. F. Gauß würdigen könnten:

- In allen vier Arbeitsgemeinschaften *alpha* wurde Leben und Werk von C. F. Gauß besprochen. Besonders sind wir dabei auf die Jugend des berühmten Mathematikers eingegangen.
- In Zusammenarbeit mit der Arbeitsgemeinschaft Kunsterziehung entstand im Januar 1977 eine Wandzeitung über C. F. Gauß.
- Die AG Mathematik der Klassenstufe 10 beschäftigte sich mit dem *Gaußschen Algorithmus* (siehe Foto Seite 78).
- Ein Höhepunkt unserer Gauß-Ehrung war der 23. März 1977. Die 60 besten *Jungen Mathematiker* der Klassenstufen 4 bis 10 unserer Schule führten einen Wettbewerb (unter Klausurbedingungen) durch. Jeder erhielt eine Mappe mit dem Bild von C. F. Gauß als Titelblatt, einem Bericht über Leben und Werk sowie den Aufgaben des Wettbewerbs.
- Die besten Schüler des Wettbewerbs erhielten in einer Feierstunde im April 1977 Urkunden und Anerkennungspreise.

Mathematikfachlehrer B. Becker,
alpha-Club der OS Osternienburg

Aufgaben des Wettbewerbs

(*alpha* übernahm die jeweils erste und vierte Aufgabe der Klausur)

Klassenstufe 4

- Welche geraden Zahlen kannst du für n einsetzen, damit die Ungleichungen erfüllt sind?
 $49 < 7 \cdot n < 90$
- Eine Aufgabe von dem Rechenmeister Adam Ries, der von 1492 bis 1559 lebte:
Ein Sohn fragt seinen Vater: „Wie alt bist du?“ Der Vater antwortet: „Wenn du zu meinem Alter noch die Hälfte meines Alters und dazu noch den vierten Teil meines Alters addieren würdest, so würdest du ein Alter von 133 Jahren erhalten.“
Wie alt ist der Vater?

Klassenstufe 5

- Ein Obstgarten hat einen Flächeninhalt von 2880 m^2 . Jeder Baum braucht eine Fläche von 6 m Länge und 6 m Breite.
Wieviele Bäume können gepflanzt werden?
- Eine Aufgabe von dem englischen Mathematiker Alouin, der vor ungefähr 100 Jahren lebte:
Ein Wanderer trifft mit Schülern zusammen. Er fragt: „Wie viele seid ihr in der Schule?“ Da antwortet einer von ihnen: „Nimm unsere Zahl doppelt und multipliziere das Produkt mit 3! Dividiere dieses Ergebnis durch 4! Wenn du dich jetzt dazuzählst, erhältst du genau 100. Weißt Du nun wie viele wir sind?“

Klassenstufe 6

- Franks Vater besitzt ein Kraftfahrzeug vom Typ *Trabant*, das eine vierstellige Autonummer hat. Die vierte Ziffer ist gleich dem Dreifachen der zweiten Ziffer. Die dritte Ziffer ist um 2 kleiner als die erste Ziffer. Die erste Ziffer ist um 3 kleiner als die vierte Ziffer. Addiert man die Ziffern, so erhält man 22.
Wie lautet die Autonummer?
- Aus der Schrift „aldjbr w' almokabala“ des Arabers Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi (um 830):
Ein Tagelöhner erhält 10 Dirhems im Monat, wenn er arbeitet; wenn er aber nichts tut, muß er 6 Dirhems zahlen. Er hat einen Monat so verbracht, daß er nichts erhält und nichts zu zahlen braucht.
Wie viele Tage hat er gearbeitet?
Hinweis: Der Monat besteht aus 24 Arbeitstagen. Berechne Leistung und Gegenleistung für einen Tag!

Klassenstufe 7

- Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!
- Zur Zeit der bekannten Kriege der Armeenier mit den Persern in der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts hat Salirak Kamsarakan eine ungewöhnliche Heldentat vollbracht; nachdem er die persischen Streitkräfte dreimal im Laufe eines Monats überfallen hatte, hatte er beim ersten Mal die Hälfte des Heeres vernichtet. Während der Verfolgung schlug er sie zum zweiten Mal und vernichtete ein Viertel des Heeres, beim dritten Mal schließlich vernichtete er ein Elftel der Feinde. Die am Leben gebliebenen 280 wandten sich zur Flucht.
Aus diesem Rest soll nun ermittelt werden, wie viele Perser vor der Vernichtung vorhanden waren.

Klassenstufe 8

- Die Zahlen 100 und 90 wurden durch ein und dieselbe Zahl geteilt. Im ersten Fall erhielt man den Rest 4 und im zweiten den Rest 18.

Durch welche Zahl wurde geteilt? (Begründe das Ergebnis!)

- Die Lebenszeit des großen Mathematikers Diophantos ist nicht genau bekannt (wahrscheinlich um 250 u. Z.). Aus der Inschrift seiner Grabplatte kannst du das Alter und wichtige Lebensdaten berechnen.
„Hier das Grabmal deckt DIOPHANTOS. Schaut das Wunder! Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein. Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel seines Lebens. Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart. Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe. Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn. Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag. Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer von sich scheuend auch er kam an das irdische Ziel.“
Wie alt ist Diophantos geworden?

Klassenstufe 9

- Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und dem Achtfachen einer anderen sei 310. Die Summe aus dem dritten Teil der ersten und dem achten Teil der zweiten sei 10. Für welche beiden Zahlen gelten diese Bedingungen?
Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, und lösen Sie es!
- In dem Buch des Georgiers Suchan-Saba Orbelians (1658 bis 1725) „Die Weisheit der Lüge“ finden wir die folgende Aufgabe:
Drei Brüder wollten sich voneinander trennen und ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen. Sie sagten:
„Zehn Ziegen haben je ein Zicklein, zehn je zwei Zicklein und zehn je drei; wir wollen sie so unter uns teilen, daß kein Bruder mehr erhält als der andere und auch kein Zicklein von seiner Mutter getrennt wird.“
Wie konnten die drei Brüder ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen?

Klassenstufe 10

- Zwei Funkstationen der Nationalen Volksarmee, die 15,4 km voneinander entfernt sind, peilen einen feindlichen Sender an. Der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_1 und der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Sendern beträgt $\alpha = 35,5^\circ$, der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_2 und der Verbindungsstrecke ist $\beta = 115,7^\circ$.
Berechnen Sie die Entfernung des Senders S von den Funkstationen F_1 und F_2 !
- Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze.
Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in

der Nacht $\frac{1}{4}$ Elle hinunter, solange, bis sich die Tiere in gleicher Höhe befinden. Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Zwei mathematische Spiele

Drei in einer Reihe:

Das Spiel wird auf einem quadratischen Brett mit 3×3 Feldern gespielt (Bild 1). Die Spieler A und B haben je drei weiße bzw. schwarze Steine, die sie abwechselnd auf das Brett setzen. Nachdem alle Steine gesetzt sind, kann jeder Stein waagrecht oder senkrecht, aber nicht diagonal in ein angrenzendes Quadrat ziehen. Sieger ist, wer zuerst eine Reihe von drei Steinen hat, d. h. entweder drei Steine in einer Zeile, Spalte oder Diagonalen.

Bild 1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

In diesem Spiel hat der beginnende Spieler A eine Gewinnstrategie. Er muß zuerst das Feld 5 besetzen. Dann kann B auf zwei Weisen antworten: entweder setzt B auf eine Ecke 1, 3, 7 oder 9 oder B setzt auf ein Feld, das zwischen zwei Ecken liegt, nämlich 2, 4, 6 oder 8. Untersuchen wir zunächst den ersten Fall weiter. Dazu nehmen wir an, daß B auf das Feld 1 gesetzt hat. Das ist keine Einschränkung, denn auf alle anderen Möglichkeiten, eine Ecke zu besetzen, kann A entsprechend antworten. A besetzt nun das Feld 8. Damit muß B sich für das Feld 2 entscheiden, weil sonst A bereits eine Spalte besetzen könnte. Um zu verhindern, daß B eine Zeile mit seinen Steinen füllt, ist A gezwungen, das Feld 3 zu besetzen, wodurch B wiederum genötigt ist, auf Feld 7 zu setzen. Damit sind jetzt alle Steine gesetzt. A ist am Zug und bewegt den Stein vom Feld 5 auf Feld 6, beim nächsten Zug den Stein vom Feld 8 auf Feld 9. Da diagonale Züge verboten sind, kann B nicht vom Feld 2 auf Feld 4 ziehen, um eine volle Spalte zu erhalten (Bild 2a).

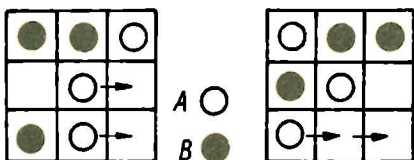


Bild 2a 1. Fall

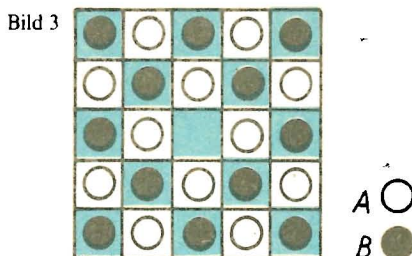
Bild 2b 2. Fall

Hätte B seinen ersten Stein auf Feld 2 gesetzt (entsprechend verlaufen die weiteren Züge für die Felder 4, 6 und 8), so belegt A dann Feld 7. Dann muß B auf Feld 3 setzen und damit A auf Feld 1. B muß mit dem letzten Stein Feld 4 besetzen. A zieht vom Feld 7 auf Feld 8 und dann auf Feld 9. Kein Stein von B (weder auf Feld 2 noch auf Feld 3) kann diese Züge verhindern (Bild 2b).

Versäumt es A, den ersten Stein auf Feld 5 zu setzen, so kann B durch geschicktes Ziehen das Spiel wenigstens unentschieden halten oder sogar gewinnen.

Lewthwaites Spiel:

Wir wollen dieses Spiel für ein quadratisches „Schachbrett“ mit 5×5 Feldern erläutern. Die zwölf weißen und zwölf schwarzen Steine der Spieler A und B sind schachbrettartig auf das Brett gesetzt (Bild 3), d. h. schwarze Steine auf schwarze Felder und weiße Steine auf weiße Felder. Dabei bleibt stets eins der 25 Felder frei, in unserem Beispiel ist es das „mittlere“. A und B ziehen abwechselnd einen Stein auf das gerade freie Feld, wobei nur waagrecht und senkrecht, aber nicht diagonal gezogen werden darf. Auf Grund dieser Regel muß ein Stein beim Ziehen zwangsläufig die Farbe des Feldes wechseln. Das Spiel endet mit der Unfähigkeit eines Spielers zu ziehen, womit er natürlich verloren hat.

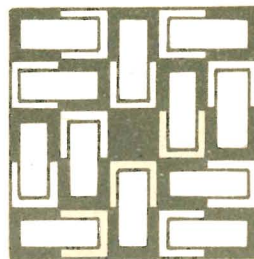


Wir wollen annehmen, daß das Brett – wie in Bild 3 – dreizehn schwarze Felder hat. Damit ist das freie Feld stets schwarz. Wir setzen noch voraus, daß der Spieler A beginnt. Unter diesen Umständen kann der Spieler B die Zugunfähigkeit von A erzwingen. Um das einzusehen, belegen wir das Spielfeld mit 12 Dominosteinen (passender Größe) auf irgendeine Art, jedoch so, daß sich die Steine nicht überlappen und daß das ursprünglich freie Feld frei bleibt (Bild 4).

Zieht nun A, so zieht B mit dem Stein nach, der sich auf dem Dominostein befindet, dessen anderer Stein durch A gerade bewegt wurde. Also ist B in der Lage, auf jeden Zug von A einen eigenen Zug folgen zu lassen. Diese wichtige Schlußfolgerung aus der Dominosteintaktik wollen wir jetzt ausführlich begründen.

A bewegt im ersten Zug seinen Stein von einem weißen auf ein schwarzes Feld. B antwortet mit der Dominosteintaktik, er zieht also den schwarzen Stein von einem schwar-

Bild 4



(Bild 4 liegt das gleiche „Schachbrett“ wie Bild 3 zugrunde. Im Bild 4 sind anstelle der Steine ○ und ● Dominosteine gelegt worden.)

zen auf ein weißes Feld. Damit kann der von A zuerst bewegte Stein, der jetzt auf einem schwarzen Feld steht, nicht auf das gerade frei gewordene schwarze Feld ziehen. Der Stein, den A jetzt nachrückt, muß also von einem noch nicht berücksichtigten Dominostein kommen. B hat deshalb wieder die Möglichkeit, auf den zweiten Zug mit der Dominosteintaktik zu antworten (weil auf dem neuen Dominostein garantiert ein schwarzer Stein ist). Auf das von B gerade freigemachte schwarze Feld kann A die bisher bewegten Steine nicht ziehen, da sich diese auch auf schwarzen Feldern befinden. A wird daher im nächsten Zug einen Stein von einem Dominostein herunterziehen, dessen Steine bisher noch nicht bewegt worden sind. Wir können wieder entsprechende Überlegungen durchführen, um zu zeigen, daß B mit der Dominosteintaktik antworten kann. Das gilt auch für alle folgenden Züge.

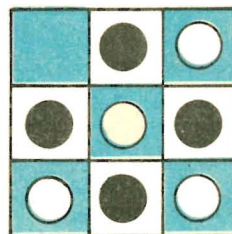
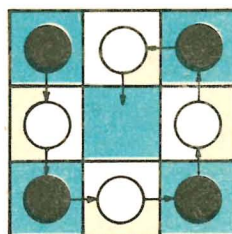
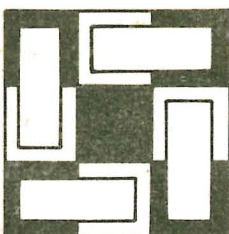
Da sich auf dem Spielfeld nur zwölf Dominosteine befinden, muß A schließlich von dem letzten unberücksichtigten Dominostein seinen Stein herunterziehen, wobei B wieder mit der Dominosteintaktik antworten kann. Alle Steine von A sind genau einmal bewegt worden und damit sämtlich auf schwarzen Feldern. Das eben durch den Zug von B freigewordene Feld ist ebenfalls schwarz. Also kann A keinen Stein auf dieses Feld ziehen, und B hat gewonnen.

Wir verdeutlichen die Dominosteintaktik auf einem Spielfeld mit 3×3 Feldern (Bild 5). Wenn das Mittelfeld frei bleibt, dann gibt es nur zwei mögliche Belegungen des Spielfeldes mit Dominosteinen, die spiegelbildlich auseinander hervorgehen. Eine Möglichkeit zeigt Bild 5a. In Bild 5b ist die Anfangsstellung mit den aufeinanderfolgenden Zügen zu sehen, und Bild 5c zeigt die Endstellung. R. Thiele

Bild 5a Lage der Dominosteine

Bild 5b Anfangsstellung

Bild 5c Endstellung



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 7. Oktober 1977



Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 7. Oktober 1977 veröffentlicht.

Anmerkung: $\angle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\angle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B , während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

1. Die Oberschule „Wilhelm Pieck“ hat genau 314 Jungen und genau 322 Mädchen als Schüler. Ein Sechstel von ihnen gehört der FDJ an, alle anderen sind Mitglieder der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“.

Ermittle die Anzahl der FDJler unter diesen Schülern und die Anzahl der Pioniere unter ihnen!

2. Von drei Pionieren, die sich in einem Rätelager treffen, ist folgendes bekannt:

(1) Ihre Vornamen sind Frank, Gerd und Harald.

(2) Ihre Familiennamen lauten Schulze, Müller und Krause.

(3) Frank heißt mit Familiennamen nicht Krause.

(4) Der Vater von Gerd ist Offizier der NVA.

(5) Gerd besucht die 6. Klasse, der Pionier mit dem Familiennamen Krause geht in die 7. Klasse.

(6) Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Schulze arbeitet als Dreher.

Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Zunamen?

3. Fritz möchte eine Subtraktionsaufgabe aufschreiben, bei der die Differenz zweier natürlicher Zahlen zu bilden ist. Als Ergebnis soll eine dreistellige Zahl entstehen, deren drei Ziffern alle einander gleich sind.

Der Minuend soll eine Zahl sein, die auf Null endet. Streicht man diese Null, so soll sich der Subtrahend ergeben.

Gib alle Subtraktionsaufgaben an, für die das zutrifft!

4. Eine Strecke von 240 m ist so in vier Teilstrecken geteilt, daß folgendes gilt:

(1) Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite Teilstrecke.

(2) Die zweite Teilstrecke ist so lang wie die Summe der Längen der dritten und vierten Teilstrecke.

(3) Die dritte Teilstrecke ist ein Fünftel der Gesamtstrecke.

Ermittle die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Olympiadeklasse 6

1. In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

1950	1960	1970	1974
231 000	334 000	395 000	424 000

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.

Berechne, um wieviel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:

a) von 1951 bis 1960,

b) von 1961 bis 1970,

c) von 1971 bis 1974!

2. Von zwei Häfen A und B , die durch eine Schifffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teiles der Route nur noch 45 km.

Wieviel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

3. Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig. Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.

Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

4. Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich

die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.

(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher sprang als Ernst.

(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.

(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf. Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichten! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

Olympiadeklasse 7

1. Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden: „Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der ČSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen VR. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht.“

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC . Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC .

Beweise, daß dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a=9,7$ cm, $b=7,6$ cm und $\beta+\gamma=115^\circ$!

Dabei sei a die Länge der Seite BC , b die der Seite AC , β die Größe des Winkels $\angle ABC$ und γ die des Winkels $\angle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelförper und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten. Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelförper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.

Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, daß Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

Olympiadeklasse 8

1. Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wieviel Prozent des Anfangspreises müßte eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wieviel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

2. Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm, sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, daß jedes Stück alle fünf anderen berührt. Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!

3. Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben A, B, C, ..., Y, Z des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

4. Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Uwe dagegen meint, daß nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

Olympiadeklasse 9

1. Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene Zahlen als Teiler.

2. Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d. h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

(Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.)

3. Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlaß. Als er zahlen wollte, stellte er fest, daß er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte, zwar so viele, daß das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben. Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlaß.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

4. Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln „Zeichenreihen“ umzuformen. Eine „Zeichenreihe“ sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.

(2) A wird ersetzt durch aAB.

(3) A wird ersetzt durch a.

(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, daß auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird.

Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus. Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, daß der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann

geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:

In jedem regelmäßigen Fünfeck ist jede der Diagonalen parallel zu einer der Fünfeckseiten.

2. Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term

$$\frac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$$

definiert ist.

3. Sind $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ ($i=0, 1, \dots, n$) und gilt $z = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 8 + a_0$, so sagt man, z sei im Oktalsystem durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz

$$z = [a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0]_8.$$

Die natürliche Zahl, die im dekadischen System die Darstellung 135 hat, lautet z. B. im Oktalsystem $[207]_8$; denn es gilt $135 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$ sowie $0 \leq 2; 0; 7 \leq 7$ und $2 > 0$.

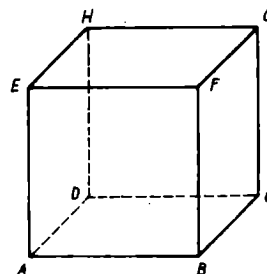
a) Stellen Sie die natürliche Zahl, deren Darstellung im dekadischen System 214 lautet, im Oktalsystem dar!

b) Im Kryptogramm

$$\begin{array}{r} [E I N S]_8 \\ + [E I N S]_8 \\ \hline [ZWEI]_8 \end{array}$$

wird gefordert, für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so einzusetzen, daß im Oktalsystem dargestellte natürliche Zahlen entstehen, für die die angegebene Additionsaussage wahr ist. Geben Sie mindestens eine Lösung dieses Kryptogramms an, und zeigen Sie, daß die angegebene Lösung alle verlangten Eigenschaften hat!

4. Es sei M die Menge aller 12 Kanten und aller 12 Flächendiagonalen eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Bild).



Gibt es einen Streckenzug, bei dem jede in M enthaltene Strecke genau einmal durchlaufen wird?

Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür (durch Angabe der Folge der Eckpunkte des Streckenzuges), und zeigen Sie, daß der so angegebene Streckenzug die verlangte Eigenschaft hat!

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle im dekadischen Positionssystem fünfstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17, 19 und 23 teilbar sind und deren Zehnerziffer 0 lautet.

2. Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$2\sqrt{x+y+x+y}=8 \quad (1)$$

$$x^3+y^3=40. \quad (2)$$

3. Über fünf Punkte A, B, C, D, S im Raum wird vorausgesetzt, daß A, B, C, D in einer Ebene ζ liegen, daß sie die Ecken eines konvexen Vierecks sind und daß S nicht in ζ liegt.

Es ist zu beweisen, daß dann zu der vierseitigen Pyramide $ABCD S$ eine Ebene ε existiert, die die Kanten SA, SB, SC bzw. SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

4. Jemand sucht alle Möglichkeiten, vier Ecken eines gegebenen Würfels schwarz zu markieren. Er betrachtet zwei dieser Markierungsmöglichkeiten genau dann als gleich, wenn es eine Drehung des Würfels gibt, die die eine der beiden Markierungsmöglichkeiten in die andere überführt. Ermitteln Sie alle verschiedenen Markierungsmöglichkeiten!

Gauß-Ehrenplakette



Zu Ehren des 200. Geburtstages von C. F. Gauß wurde vom Gauß-Komitee der Akademie der Wissenschaften der DDR eine Ehrenplakette herausgegeben (Meißner Porzellan, weiß, 80 mm Durchmesser, ohne materielle Anerkennung, Auflage 500 Stück), die als einmalige Auszeichnung an verdienstvolle Persönlichkeiten, Mitarbeiter und Organisatoren auf Beschluß des Gauß-Komitees 1977 verliehen wurde (siehe Foto).



Lösungen zu: Verknüpfungen in der Ebene

▲ 1 ▲ Zum Beispiel gilt für alle $x \in P$ und für alle $X \in \varepsilon$ $x \Delta x = x$ bzw. $X \circ X = X$; Δ und $\circ$ sind beide kommutativ, aber nicht assoziativ...

▲ 2 ▲ Hinweis: Für alle $X, Y, Z \in \varepsilon$ gilt $X \circ Y = Z$ gdw $X * Z = Y$ gdw $Z \circ Y = X$. Daraus folgt die Behauptung.

▲ 3 ▲ a) $\circ : \frac{a}{b} = 1, * : \frac{a}{b} = -2, \cdot : \frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$.

b) $a = 0$: Für alle $X, Y \in \varepsilon$ gilt $X \circ Y = d_f X$.

c) $b \rightarrow 0$: Für alle $X, Y \in \varepsilon$ gilt $X \circ Y = d_f Y$.

▲ 4 ▲ a) Weil sonst die Eindeutigkeit der Verknüpfungen verloren geht.

b) Wenn in 3) das Dreieck ABC gleichseitig ist, erhalten wir $(\varepsilon, \circ)$; ist das Dreieck ABC gleichschenkelig und rechtwinklig ($\angle ABC = 90^\circ$), ergibt sich $(\varepsilon, \cdot)$.

c) Zum Beispiel definieren wir $X \circ Y$ als den dritten Punkt Z des gleichschenkligen Dreiecks XYZ mit positivem Umlaufsinn und $\overline{XY}$ als Basis sowie $\overline{XZ} = \overline{YZ} = k \cdot \overline{XY}$, wobei k eine beliebige, aber feste positive Zahl ist.

▲ 8 ▲ a) $X \circ_1 Y = X, X \circ_2 Y = Y$.

b) Es wird jeweils an derselben Geraden gespiegelt, so daß die Nacheinanderausführung zweier solcher Spiegelungen zum Ausgangspunkt zurückführt.

▲ 9 ▲ Hinweis: Sei $X \circ_1 Y = Z_1, Z_1 \circ_2 Y = Z_2$. Dann gilt $YZ \parallel t_X$ und $Z_1 Y \parallel t_{Z_2}$, so daß $t_X \parallel t_{Z_2}$ folgt, also $X = Z_2$. Analog zeigt man $(X \circ_2 Y) \circ_1 Y = X$.

▲ 10 ▲ Jeder Kegelschnitt ist bezüglich $\circ$ abgeschlossen.

▲ 12 ▲ Schneide die Gerade g den Kegelschnitt f in den Punkten A und B . Auf einem der beiden dadurch entstandenen Bögen b_i ($i = 1, 2$) von $f \setminus \{A, B\}$ wird dann z. B. definiert:
 $X \circ Y = d_f Z$ mit $Z \neq Y$ genau dann, wenn $AB \cap t_X = AB \cap t_Y$ – analog $\circ_1$ in Abbildung 11.

▲ 13 ▲ a) Falls die Gerade XY zugleich Tangente in X oder Y ist, setzen wir für $XY = t_X : X \circ Y = X$ und für $XY = t_Y : X \circ Y = Y$.

Wenn X ein Wendepunkt der Kubik ist, setzen wir $X \circ X = d_f X$.

b) Hinweis: Für alle $X, Y, Z \in c$ gilt $X \circ Y = Z$ gdw $X \circ Z = Y$ gdw $Z \circ Y = X$.

Lösungen zu den Aufgaben zur Fehlerrechnung bei physikalischen Messungen

$$\begin{aligned} \Delta 1 \quad \bar{V} &= 15,5 \text{ ml} \\ \Delta \bar{V} &= 0,2 \text{ ml} \\ V &= (15,5 \pm 0,2) \text{ ml} \\ \varepsilon &= \pm 1,3\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta 2 \quad y \pm \Delta y &= \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} \\ y \pm \Delta y &= \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} \cdot \frac{b \mp \Delta b}{b \mp \Delta b} \\ y \pm \Delta y &= \frac{a \cdot b \pm \Delta a \cdot b \mp \Delta b \cdot a \mp \Delta a \cdot \Delta b}{b^2 - (\Delta b)^2} \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Produkte aus kleinen Größendifferenzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} y \pm \Delta y &= \frac{a \cdot b \pm \Delta a \cdot b \mp \Delta b \cdot a}{b^2} \\ y &= \frac{a}{b} \\ \pm \Delta y &= \pm \frac{\Delta a}{b} \mp \frac{\Delta b \cdot a}{b^2} \\ \pm \frac{\Delta y}{y} &= \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b} \end{aligned}$$

Der relative Größtfehler eines Quotienten aus direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen ist gleich der Summe der relativen Fehler ihrer einzelnen Meßwertreihen.

▲ 3 ▲
Meßergebnis der Massebestimmung
 $m = (34,5 \pm 0,5) \text{ g}$

Meßergebnis der Volumenbestimmung
 $V = (3,8 \pm 0,3) \text{ cm}^3$

Dichte des Kupferwürfels $\bar{\rho}_{Cu} = 9,1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Meßunsicherheit der Dichtebestimmung
 $\varepsilon \% = 1,5\% + 8\% = 9,5\%$

Meßergebnis $\rho_{Cu} = 9,1 (1 \pm 9,5\%) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$$\rho_{Cu} = (9,1 \pm 0,9) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Der Tabellenwert liegt innerhalb der Meßunsicherheit.

$$\begin{aligned} \Delta 4 \quad c &= 0,002 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ c &= \frac{0,2}{3} \% = 0,07\% \\ &\text{(also rund ein Promille!)} \end{aligned}$$

Lösungen zu: Aufgaben zum Berufsbild: Ingenieur für Technik und Technologie des Fernmeldewesens

▲ 1 ▲ Umstellen der Zeitfunktion nach t :

$$\begin{aligned} i - \frac{E}{R} &= -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{i}{1 - \frac{E}{R}} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{i}{R} &= \tau \ln \left(1 - \frac{i}{E} \right) \text{ mit } i = I_{an} \\ t &= -\tau \ln \left(1 - \frac{I_{an}}{E} \right) \end{aligned}$$

Mit den Zahlenwerten:

$$\begin{aligned} t &= -0,5 \text{ ms} \ln \left(1 - \frac{1}{12} \right) \approx -0,5 \text{ ms} \\ t &\approx 0,140 \text{ ms} \quad \ln(1 - 0,835) \end{aligned}$$

Dabei wurde die mechanische Trägheit des Relais nicht berücksichtigt.

▲2▲ Ursprüngliche Länge der Fernschreibanschlußleitung:

$$(I) \quad I_x = \frac{U}{R_x}$$

Verlängerte Fernschreibanschlußleitung:

$$(II) \quad I_x - I = \frac{U}{R_x + R}$$

I in II liefert

$$0 = R_x^2 + RR_x - \frac{UR}{I}$$

$$R_x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{UR}{I}}$$

Mit den Zahlenwerten:

$$R_x = -250 \Omega \pm \sqrt{6,25 \cdot 10^4 \Omega^2 + 300 \cdot 10^4 \Omega^2}$$

$$R_x = -250 \Omega \pm 1750 \Omega$$

Physikalisch sinnvoll ist nur ein positiver Leitungswiderstand.

$$R_x = 2 \text{ k}\Omega$$

$$\Delta 3 \quad \frac{d\alpha}{dZ} = -\frac{1}{2} \frac{R'}{Z^2} + \frac{1}{2} G' = 0$$

$$G' = \frac{R'}{Z^2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{R'}{G'}}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dZ^2} = \frac{R'}{Z^3}; \left(\frac{R'}{G'}\right)^{\frac{3}{2}} > 0 \text{ d. i. Min.}! \quad \left(\frac{R'}{G'}\right)^{\frac{3}{2}} > 0$$

$$\Delta 4 \quad v = ax^2 \ln \frac{1}{x} \quad \frac{D}{d} = x$$

$$v = ax^2 \ln 1 - ax^2 \ln x$$

$$v = -ax^2 \ln x$$

$$\frac{dv}{dx} = -ax - 2ax \ln x = 0$$

$$-ax = 2ax \ln x$$

$$-1 = 2 \ln x^2$$

$$e^{-1} = x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{D}{d}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -a - 2a - 2a \ln x;$$

$$-3a - 2a \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -3a - a \ln \frac{1}{e}$$

$$= -3a + a$$

$$= -2a < 0 \text{ d. i. Max.}!$$

Lösungen zu den Aufgaben

der XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 10

(Bezirksolympiade)

Fortsetzung aus Heft 3/77:

4. Es gilt nach den Logarithmengesetzen

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg(n). \quad (n > 0)$$

Summiert man nun von $n=1$ bis $n=99$, so erhält man

$$\lg\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{98}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{97}\right) + \dots$$

$$+ \lg\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \lg 100 - \lg 99 + \lg 99 - \lg 98$$

$$+ \lg 98 - \dots - \lg 2 + \lg 2 - \lg 1.$$

$$= \lg 100 + (-\lg 99 + \lg 99) + (-\lg 98 + \lg 98)$$

$$+ \dots + (-\lg 2 + \lg 2) - \lg 1.$$

In dieser Zeile sind die in den Klammern

stehenden Summen jeweils gleich Null. Da $\lg 1 = 0$ und $\lg 100 = 2$ gilt, ist damit die Behauptung bewiesen.

5. Da die Pyramide gerade ist, liegt ihre Spitze im Schwerpunkt der Deckfläche des Prismas. Der Mantel der Pyramide besteht aus drei zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a . Bezeichnet man die Länge der zugehörigen Höhe in diesen Dreiecken mit H , so ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2.$$

Also hat der Mantel der Pyramide den Flächeninhalt

$$M_1 = \frac{3}{2}a \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}.$$

Der Mantel des Prismas hat den Flächeninhalt $M_2 = 3ah$.

Daher ist wegen $a > 0$ und $h > 0$ die Forderung $M_1 = M_2$ der Reihe nach gleichwertig mit

$$3ah = \frac{3}{2}a \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2},$$

$$2h = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}, \quad 4h^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2,$$

$$h^2 = \frac{1}{36}a^2,$$

$$h = \frac{1}{6}a.$$

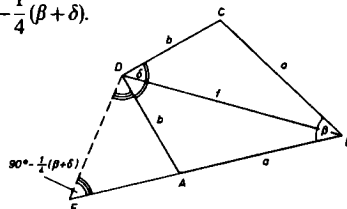
6. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und $\overline{AD} = \overline{CD} = b$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Drachenvierecks halbiert die Diagonale BD die Winkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ADC$. Der Kreis um A mit b schneide die Verlängerung von BA über A hinaus in E . Nach dem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks gilt dann

$$\sphericalangle DAE = \frac{1}{2}(\beta + \delta).$$

Da $\overline{AE} = \overline{AD}$ nach Konstruktion gilt, ist $\overline{BE} = a + b$. Ferner ist das Dreieck ADE gleichschenkl. Für seine Basiswinkel gilt folglich:

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle EDA = \frac{1}{2} \cdot \left(180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \delta)\right)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{4}(\beta + \delta).$$



Daraus ergibt sich, daß das Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn man es durch folgende Konstruktion erhalten kann.

II. (1) Man zeichnet eine Strecke BE mit der Länge $a + b$.

(2) Man trägt an EB in E einen Winkel der Größe

$$90^\circ - \frac{1}{4}(\beta + \delta) \text{ an.}$$

(3) Man zeichnet den Kreis mit f um B . Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so sei D einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an DE in D einen Winkel der Größe

$$90^\circ - \frac{1}{4}(\beta + \delta) \text{ an.}$$

Schneidet sein freier Schenkel die Strecke BE , so sei A der Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise um D mit $\overline{DA}$ und um B mit $\overline{BA}$. Der Schnittpunkt dieser Kreise in der durch BD bestimmten Halbebene, in der A nicht liegt, sei C genannt.

III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $\overline{BD} = f$.

Da an ED gleichgroße Winkel angetragen wurden, folgt, daß das Dreieck EDA gleichschenkl. ist. (*)

Nach Konstruktion, Innenwinkelsatz und Außenwinkelsatz eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Winkelgrößen:

$$\sphericalangle EAD = \frac{1}{2}(\beta + \delta) \text{ und } \sphericalangle ABD + \sphericalangle ADB = \frac{1}{2}(\beta + \delta).$$

Nach Konstruktion sind die Dreiecke BDA und BDC symmetrisch bezüglich BD . (**)

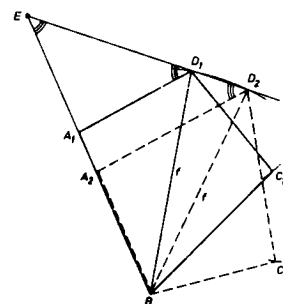
Daraus folgt:

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = \beta + \delta.$$

Aus (**) folgt, daß das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck mit $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CB}$ ist.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Nun gilt laut Aufgabenstellung $f < a + b$, der Winkel $\sphericalangle AED$ liegt also der kleineren Seite gegenüber. Daher ist (3) entweder zweideutig oder eindeutig oder nicht ausführbar. Mit den gegebenen Größen erhält man bei der Konstruktion des Dreiecks ADE zwei verschiedene Punkte D_1 und D_2 . Danach sind die Konstruktionsschritte (4) und (5) jeweils eindeutig ausführbar.

Somit erhält man die beiden Drachenvierecke $A_1BC_1D_1$ und $C_2D_2A_2B$.



Sie sind zueinander (ungleichsinnig) kongruent; denn es gilt:

$$\overline{BD_1} = \overline{BD_2} = f, \quad \sphericalangle BA_1D_1 = \sphericalangle D_2A_2B, \text{ wegen } A_1D_1 \parallel A_2D_2 \text{ als Stufenwinkel, weiter gilt } \sphericalangle BED_1 + \sphericalangle EBD_1 = \sphericalangle D_2D_1B \text{ (Außenwinkelsatz) sowie } \sphericalangle ED_1A_2 + \sphericalangle A_2D_2B = \sphericalangle D_1D_2B, \text{ woraus wegen } \sphericalangle D_2D_1B = \sphericalangle D_1D_2B \text{ dann } \sphericalangle A_1BD_1 = \sphericalangle A_2D_2B \text{ folgt.}$$

**Lösungen zu den Aufgaben
des alpha-Wettbewerbs**
Heft 1/1977 (Fortsetzung):

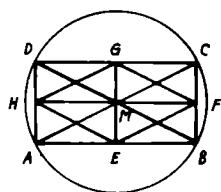
Ma 8 ■ 1585 Es sei $z = 10x + y$ eine zweistellige natürliche Zahl, die die verlangten Eigenschaften hat. Dann ist $x = 1, 2$ oder 3 , da für $x \geq 4$ wegen $z \geq 40$ die Zahl z^2 bereits vierstellig wäre. Da das Quadrat einer natürlichen Zahl niemals auf 2 oder 3 endet, gilt $x = 1$. Also ist auch die letzte Ziffer von z^2 gleich 1. Nun endet das Quadrat einer natürlichen Zahl nur dann auf 1, wenn die Zahl selbst auf 1 oder 9 endet. Da nach Voraussetzung die beiden Grundziffern von z voneinander verschieden sind, endet also z auf 9, und es gilt

$$z = 19.$$

Tatsächlich hat diese Zahl die verlangten Eigenschaften; denn ihre Grundziffern sind voneinander verschieden, $z^2 = 361$ ist eine dreistellige Zahl, und die letzte Grundziffer 1 von z^2 stimmt mit der ersten Grundziffer 1 von z überein.

Ma 8 ■ 1586 Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Dann gilt $MA = MB = MC = MD$. M ist also gleichzeitig Mittelpunkt des Kreises durch A, B, C, D , und es gilt

$$MA = r.$$



Da die Verbindungsgerade des Mittelpunktes M des Kreises mit dem Mittelpunkt E der Sehne AB auf dieser senkrecht steht, gilt $\angle AEM = 90^\circ$. Ebenso gilt $\angle MHA = 90^\circ$ und ferner, weil $ABCD$ ein Rechteck ist, $\angle HAE = 90^\circ$. Daher ist das Viereck $AEMH$ ein Rechteck.

Weil die beiden Diagonalen eines jeden Rechtecks gleichlang sind, gilt also $EH = AM = r$. Analog beweist man, daß auch

$$EF = FG = GH = r \text{ ist.}$$

Der Umfang des Vierecks $EFGH$ ist also gleich $u = 4r = 4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$.

Ma 8 ■ 1587 Zum Beweis benutzen wir den folgenden Satz: „Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist parallel der dritten Dreieckseite.“ (Vgl. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6, S. 131, wo ein entsprechender Satz für das Trapez bewiesen wird.)

Nach diesem Satz gilt

in dem Dreieck ABC $M_2M_3 \parallel AB$,

in dem Dreieck ABD $M_1M_4 \parallel AB$.

Daraus folgt $M_2M_3 \parallel M_1M_4$.

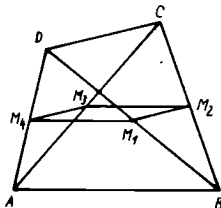
Ferner gilt

in dem Dreieck BCD $M_1M_2 \parallel CD$,

in dem Dreieck ACD $M_3M_4 \parallel CD$,

also $M_1M_2 \parallel M_3M_4$.

Da nach Voraussetzung die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ nicht parallel sind, liegen die vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 nicht auf ein und derselben Geraden. Daher bilden sie ein Viereck, und zwar ein Parallelogramm, weil je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.



Ma 8 ■ 1588 Setzt man $a - b = u$, $b - c = v$, $c - d = w$, wobei u, v, w von Null verschiedene natürliche Zahlen sind (vgl. die graphische Darstellung), so erhält man die sechs Differenzen $a - b = u$,

$$a - c = u + v, \quad (2)$$

$$a - d = u + v + w, \quad (3)$$

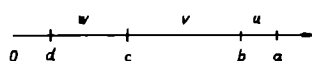
$$b - c = v, \quad (4)$$

$$b - d = v + w, \quad (5)$$

$$c - d = w. \quad (6)$$

Nun soll unter diesen sechs Zahlen jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau einmal vorkommen. Da $u + v + w$ größer als jede der anderen fünf Zahlen ist, gilt

$$u + v + w = 6.$$



Wegen $1 + 2 + 3 = 6$ kommt unter den drei Summanden u, v, w jede der Zahlen 1, 2, 3 genau einmal vor. Nun kann weder u noch w gleich 3 sein, da sonst auch $v + w$ bzw. $u + v$ gleich 3 wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Also gilt $v = 3$.

Dann ist entweder $u = 1, w = 2$ oder $u = 2, w = 1$. Im ersten Fall erhält man die sechs Differenzen

$$u = 1, u + v = 4, u + v + w = 6,$$

$$v = 3, v + w = 5, w = 2,$$

die man so ordnen kann, daß die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6 entsteht. Nun kann man d beliebig positiv annehmen, also z. B. $d = 1$.

Dann erhält man

$$\text{aus (3)} \quad a = 6 + 1 = 7,$$

$$\text{aus (5)} \quad b = 5 + 1 = 6,$$

$$\text{aus (6)} \quad c = 2 + 1 = 3.$$

Es gibt also vier natürliche Zahlen, nämlich

$$a = 7, b = 6, c = 3, d = 1,$$

die die verlangten Eigenschaften haben.

Ihre Differenzen sind nämlich gleich

$$a - b = 1, a - c = 4, a - d = 6,$$

$$b - c = 3, b - d = 5, c - d = 2;$$

diese Differenzen lassen sich so ordnen, daß sie die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden.

Bemerkungen: 1. Setzt man $d = 2, d = 3$ usw., so erhält man weitere Zahlen mit der verlangten Eigenschaft, z. B.

$$a = 8, b = 7, c = 4, d = 2.$$

2. Der oben nicht ausführlich behandelte zweite Fall ($v = 3, u = 2, w = 1$) führt auch noch auf weitere Lösungen, z. B.

$$a = 7, b = 5, c = 2, d = 1.$$

Auch hier sind die sechs Differenzen gleich 2, 5, 6, 3, 4, 1, entsprechen also den gestellten Bedingungen.

Ph 8 ■ 1589 Gegeben: $\Delta\vartheta = 90 \text{ grad}$,

$$c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}, \eta = 70\%, m = 2 \text{ kg} = 2000 \text{ g},$$

$$t = 25 \text{ min} = 1500 \text{ s}$$

Gesucht: P in Watt

Die benötigte Wärmemenge findet man aus

$$W = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$$

$$W = \frac{1 \text{ cal} \cdot 2000 \text{ g} \cdot 90 \text{ grad}}{\text{g} \cdot \text{grad}}$$

$$W = 180000 \text{ cal} = 180 \text{ kcal}.$$

Die Leistung findet man aus

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{180 \text{ kcal}}{1500 \text{ s}} = \frac{180 \cdot 4,1868}{1500} \text{ kW}$$

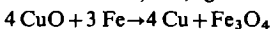
$$P \approx 502 \text{ W}.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{502 \text{ W}}{70\%} = \frac{x \text{ W}}{100\%} \quad 502 : x = 70 : 100$$

Die Leistung des Kochers muß 717 W betragen.

Ch 8 ■ 1590 a) 318,0 g 168 g



$$m_1 \quad m_2$$

$$\text{NR: } 4 \text{ mol} \cdot 79,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 318,0 \text{ g},$$

$$3 \text{ mol} \cdot 56 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 168 \text{ g}$$

$$m_2 = \frac{168 \text{ g}}{318 \text{ g}} \cdot m_1 = \frac{28}{53} m_1$$

Die Funktionsgleichung heißt $m_2 = \frac{28}{53} m_1$.

b) $m_2 = 2,1 \text{ g}; 3,7 \text{ g}; 5,8 \text{ g}$

Der Verbrauch an Eisen ist beziehentlich 2,1 g, 3,7 g, 5,8 g.

Ma 9 ■ 1591 Wir zerlegen zunächst Zähler und Nenner auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 8x - 9} \quad (1)$$

in Faktoren und erhalten

$$x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4$$

$$= (x + 1)^2 - 2^2$$

$$= (x + 1 + 2)(x + 1 - 2)$$

$$= (x + 3)(x - 1)$$

und weiter nach demselben Verfahren

$$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1),$$

$$x^2 - 6x - 7 = (x + 1)(x - 7),$$

$$x^2 - 8x - 9 = (x + 1)(x - 9).$$

Nun sei x eine Lösung der Gleichung (1).

Dann gilt also

$$\frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 5)(x - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 7)}{(x + 1)(x - 9)} \quad (2)$$

dabei ist $x \neq -5, 1, -1, 9$, da sonst die Nenner nicht von Null verschieden wären. Daher kann man kürzen, und man erhält

$$\frac{x + 3}{x + 5} = \frac{x - 7}{x - 9} \quad (x + 3)(x - 9) = (x - 7)(x + 5),$$

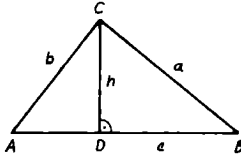
$$x^2 - 6x - 27 = x^2 - 2x - 35,$$

$$-4x = -8,$$

$$x = 2.$$

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt eine reelle Lösung hat, so kann es nur die Lösung $x=2$ sein. Die Probe zeigt, daß das tatsächlich eine Lösung ist, denn für $x=2$ erhält man aus $\frac{5}{7} = \frac{-15}{-21}$, d. i. eine wahre Aussage. (1)

Ma 9 ■ 1592 Wir bezeichnen mit $a, b, c=25$, $h=12$ die Maßzahlen der Längen der Katheten, der Hypotenuse bzw. der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ABC (vgl. das Bild).



Dann gilt für die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks einerseits

$$A = \frac{c \cdot h}{2}, \text{ andererseits}$$

$$A = \frac{a \cdot b}{2}. \text{ Daraus folgt}$$

$$a \cdot b = c \cdot h = 25 \cdot 12 = 300,$$

$$b = \frac{300}{a}.$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 = 625,$$

$$\text{also } a^2 + \frac{90000}{a^2} = 625,$$

$$a^4 - 625a^2 + 90000 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung für a^2 hat die Lösungen

$$a_1^2 = \frac{625}{2} + \sqrt{\frac{625^2}{4} - 90000} = \frac{625 + 175}{2} = 400,$$

$$a_2^2 = \frac{625 - 175}{2} = 225.$$

Daraus folgt wegen $a > 0$

$$a_1 = 20 \text{ und daher } b_1 = \frac{300}{20} = 15;$$

$$a_2 = 15 \text{ und daher } b_2 = \frac{300}{15} = 20.$$

Die Längen der Katheten sind also gleich 20 cm und 15 cm.

Ma 9 ■ 1593 Aus (4) folgt, daß die Zahl 2 sowohl der Menge A als auch der Menge B angehört. Aus (5) folgt, daß die Zahlen 2, 4 und 8 sowohl der Menge B als auch der Menge C angehören.

Die Zahl 2 gehört daher allen drei Mengen an, während die Zahlen 4 und 8 nicht der Menge A angehören, da sonst ein Widerspruch zu (4) entstehen würde.

Nun gehört wegen (1) die Zahl 1 weder der Menge A noch der Menge B an. Wegen (2) und (3) gehört sie daher der Menge C an. Durch eine analoge Überlegung folgt aus (1), (2) und (3), daß

die Zahl 3 nur der Menge A,

die Zahl 5 nur der Menge A,

die Zahl 6 nur der Menge B,

die Zahl 7 nur der Menge A angehört.

Die Mengen A, B, C enthalten daher genau die folgenden Elemente:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, \quad C = \{1, 2, 4, 8\}.$$

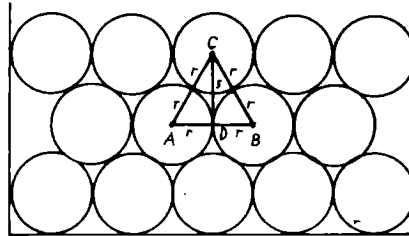
$$B = \{2, 4, 6, 8\},$$

Durch die Probe überzeugt man sich davon, daß die Gleichungen (1) bis (6) erfüllt sind.

Ma 9 ■ 1594 Es seien n die Anzahl der übereinanderliegenden Schichten, $r=5$ cm der Radius eines jeden Holzstammes, s der Abstand je zweier übereinanderliegenden Schichten.

Dann ist das aus den Mittelpunkten A, B zweier nebeneinanderliegender Kreise und aus dem Mittelpunkt C des darüberliegenden Kreises gebildete Dreieck ABC gleichseitig mit der Seitenlänge $2r$ und der Höhe

$$s = \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 2r\sqrt{3} \approx r\sqrt{3} \text{ (vgl. d. Abb.)}.$$



Da die Mittelpunkte der Kreise in der untersten Schicht von dem unteren Rand den Abstand r haben und auch die Mittelpunkte der Kreise der obersten Schicht von dem oberen Rand den Abstand r haben und zwei übereinanderliegende Schichten den Abstand $r\sqrt{3}$ haben, ist die Gesamthöhe des Stapels gleich

$$h = (n-1)r\sqrt{3} + 2r.$$

Daraus folgt

$$(n-1)r\sqrt{3} = h - 2r,$$

$$n-1 = \frac{\frac{h}{r} - 2}{\sqrt{3}}.$$

Dabei gilt $r=5$ cm, $h \leq 100$ cm, also

$$\frac{h}{r} \leq \frac{100}{5} = 20 \text{ und}$$

$$n-1 \leq \frac{20-2}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \approx 10,4.$$

Da n ganzzahlig ist, gilt $n-1 \leq 10$, also $n \leq 11$.

a) Es können also höchstens 11 Schichten übereinander gestapelt werden. Da der Durchmesser eines Stammes $2r=10$ cm und die Stapelbreite 100 cm beträgt, können in der untersten Schicht 10 Stämme liegen, in der zweiten Schicht also 9 Stämme, dann wieder 10 Stämme usw.

Insgesamt können also

$$10 \cdot 6 + 9 \cdot 5 = 105$$

Stämme gestapelt werden.

b) Das Volumen jedes einzelnen Holzstammes beträgt

$$V' = \pi \cdot 5^2 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 2500 \pi \text{ cm}^3.$$

Daher beträgt das Gesamtvolumen der gestapelten Stämme

$$V = 105 \cdot V' = 105 \cdot 2500 \pi \text{ cm}^3,$$

$$V = 262500 \pi \text{ cm}^3 \approx 825000 \text{ cm}^3,$$

$$V \approx 0,825 \text{ m}^3.$$

Bemerkung: In der Forstwirtschaft versteht man unter 1 Raummeter Holz diejenige Holzmasse, die in einem Kubikmeter-Stapel von geschichteten Holzstämmen enthalten ist. Dagegen versteht man unter 1 Festmeter Holz

1 Kubikmeter fester Holzmasse. Im allgemeinen rechnet man auf 1 Raummeter 0,7 bis 0,8 Festmeter, d. h., der Stapel besteht aus 70% bis 80% fester Holzmasse. In dem vorliegenden Falle enthält der Stapel sogar 82,5% fester Holzmasse, da verhältnismäßig günstig gestapelt werden konnte.

$$\text{Ph 9 ■ 1595 Gegeben: } v = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{25}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Gesucht: s

Die Fallhöhe ergibt sich nach der Formel

$$v = \sqrt{2a \cdot s} \text{ mit } a = g$$

$$s = \frac{v^2}{2g}$$

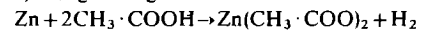
$$s = \frac{25^2 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{3^2 \cdot \text{s}^2 \cdot 2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

$$s \approx 3,54 \text{ m}$$

Die entsprechende Fallhöhe würde rund 3,54 m betragen.

Ch 9 ■ 1596

a) 65,4 g 120 g



$$32,7 \text{ g } m$$

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 65,4 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 65,4 \text{ g.}$$

$$2 \text{ mol} \cdot 60 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 120 \text{ g}$$

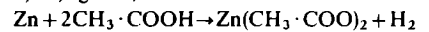
$$m = 60 \text{ g}$$

60 g 100%iger Säure entsprechen $10 \cdot 60 \text{ g}$.

= 600 g 10%ige.

600 g 10%ige Äthansäure werden benötigt.

b) 65,4 g 22,4 l



$$32,7 \text{ g } V$$

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 22,4 \text{ l}$$

$$V = 11,2 \text{ l}$$

11,2 l Wasserstoff entstehen.

Ma 10/12 ■ 1597 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$x^{2n+1} + 2x^{2n} + 2^2x^{2n-1} + 2^3x^{2n-2} + \dots + 2^{2n+1} = 0. \text{ Dann gilt} \quad (1)$$

$$x^{2n}(x+2) + 2^2x^{2n-2}(x+2) + \dots + 2^{2n}(x+2) = 0,$$

$$(x+2)(x^{2n} + 2^2x^{2n-2} + \dots + 2^{2n}) = 0. \quad (2)$$

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen x

$$x^{2n} + 2^2x^{2n-2} + \dots + 2^{2n} > 0,$$

denn $x^{2n} \geq 0$, $x^{2n-2} \geq 0$ usw., $2^{2n} > 0$.

Die Gleichung (2) ist also nur dann erfüllt, wenn $x+2=0$, d. h., $x=-2$.

Daher hat die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) genau eine reelle Lösung, nämlich $x=-2$.

Ma 10/12 ■ 1598 Es gilt

$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2},$$

$$\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3},$$

$$\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4};$$

allgemein gilt für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen k

$$k + \frac{k}{k+1} = \frac{k(k+1)+k}{k+1} = \frac{k(k+2)}{k+1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100} \\ z &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots}{99 \cdot 101 \cdot 100 \cdot 102} \\ z &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 101 \cdot 102}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101} \\ z &= \frac{102}{2} \\ z &= 51. \end{aligned}$$

Berichtigung zu: 9◦5 = 2, Heft 6/76

Auf Seite 125, Mitte, 2. Z. v. u., muß es 144◻89 = 1 heißen.

Bei den Lösungen zu „9◦5 = 2“, alpha 11 (1), 1977, S. 18, war der „Druckfehler“ leider gleich mehrfach am Werk. Richtig heißt es:

Linke Spalte:

6. Z. v. o.: $(R \setminus \{0\}, :), (P \setminus \{0\}, :);$

13. Z. v. u.: $2 \cdot 1 = 1, 3;$

11. Z. v. u.: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8};$

8. Z. v. u.: $\notin R;$

7. Z. v. u.: $(R \setminus \{0\}, :);$

4. Z. v. u.: $R \setminus \{0\};$

3. Z. v. u.: $(R \setminus \{0\},) - \text{nein, da z. B.}$

$2 \cdot (-2)$ nicht existiert;

Mittlere Spalte:

(4. Z. v. o.: nur)

5. Z. v. o.: 9: a) $x \cdot y \leq x \cdot y \leq x \cdot y < x \cdot y;$

9. Z. v. o.: $g \mid x$ und $g \mid y;$

12. Z. v. o.: Wenn $t \mid x$ und $t \mid y$, so $t \mid g.$

14. Z. v. o.: $x \mid k$ und $y \mid k;$

17. Z. v. o.: Wenn $x \mid v$ und $y \mid v$, so $k \mid v.$

(18. Z. v. u.: Aufgabe 12 lautet:

Versuche, die Fragestellungen aus Aufgabe 10c) und e) auf die beiden neuen Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{P}(M), \cap)$ und $(\mathbb{P}(M), \cup)$ zu übertragen! Insbesondere kläre, welche Elemente aus $\mathbb{P}(M)$ die Rolle von 0 und 1 aus $(N, \cap)$ und $(N, \cup)$ spielen!)



Lösungen zu alpha-heiter 4/77:

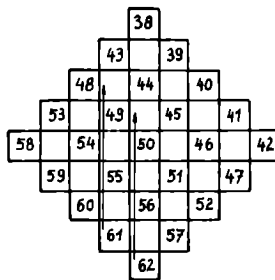
alpha-Produkte

$11 \cdot 11 = 121$	$\alpha = 1$
$11 \cdot 12 = 132$	$P = 2$
$11 \cdot 13 = 143$	$R = 3$
$11 \cdot 14 = 154$	$O = 4$
$11 \cdot 15 = 165$	$D = 5$
$11 \cdot 16 = 176$	$U = 6$
$11 \cdot 17 = 187$	$K = 7$
$11 \cdot 18 = 198$	$T = 8$
	$E = 9$

Magisches Quadrat

Das 25 Felder umfassende Quadrat wird um je 4 Felder links, rechts, oben und unten erweitert. Im obersten Feld wird die niedrigste Zahl (38) eingesetzt. Dann wird von dort beginnend fortlaufend die geforderte Zahlenreihe 38, 39, 40...42 und in der zuvor liegenden Schrägen (oben links nach unten rechts) 43...47; usw. 48...52; 53...57; 58...62 eingetragen.

Schließlich werden die außerhalb des magischen Quadrates stehenden Zahlen (z. B. oben 38, 43, 39) so in die leeren Felder (die oberen in die unteren, die unteren in die oberen, die linken in die rechten und die rechten in die



48	61	44	57	40
41	49	62	45	53
54	42	50	58	46
47	55	38	51	59
60	43	56	39	52

linken Felder) übertragen. Das ausgefüllte Quadrat beweist die Richtigkeit der geforderten Lösung.

Gemeinsamer Beruf

Diplomingenieur

Aus Zehn ein Raum

Z	E	H	N
Z	A	H	N
Z	A	U	N
Z	A	U	M
R	A	U	M

Ohne Worte

Sehnentangentenwinkel

Zahlenrätsel

$$\begin{aligned} 18\,720 - 4900 &= 13\,820 \\ : \quad - \quad - \\ 26 \cdot 328 &= 8528 \\ \hline 720 + 4572 &= 5292 \end{aligned}$$

Zahlenkreuzrätsel

6	0	5	1	2	1
9	1	4	1	4	3
7	5	6	1	2	3
6	7	5	6	4	1
7	2	9	4	4	1
9	7	3	0	1	7

Silbenrätsel

1. Parabel, 2. Yard, 3. Trapez, 4. Hyperbel, 5. Axiom, 6. Gleichung, 7. Omega, 8. Rhombus, 9. Archimedes, 10. Sekante, 11. Variable, 12. Olympiade, 13. Nullstelle, 14. Summe, 15. Algebra, 16. Meter, 17. Oberfläche, 18. Satz; Lösungswort: Pythagoras von Samos

Läufersprung

Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.

Lösung zu: Graph einer Funktion oder nicht?

Nr. d. Figur	Funktionsgleichung	Funktionsklasse	Nullstellen	$f(0)$
1	$y = x - 1$	Lineare Funktion	1	-1
2	kein Graph einer Funktion!			
3	$y = (x+1)^2 - 1$	Quadratische Funktion	-2; 0	0
4	$y = \log_{10} x$	Logarithmusfunktion	1	-
5	kein Graph einer Funktion!			
6	$y = 10^x$	Exponentialfunktion	-	1
7	$y = - x + 1$		-1; 1	1
8	kein Graph einer Funktion!			
9	$y = x + 1$ $x \in G$	Lineare Funktion	-1	1
10	$y = 2 \sin 2x$	Trigonometrische Funktion	$k \cdot \frac{\pi}{2}$ $k \in G$	0
11	$y = x^3$	Potenzfunktion	0	0
12	-	-	0	0

Buchmarkt

Autorenkollektiv

Mathematisches Mosaik

Übersetzung aus dem Ungarischen

384 Seiten, 200 Zeichnungen, Pappband cell.

Bestell-Nr. 653 447 0 Preis: 9,80 M

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

P. Borneleit

Übungen für Junge Mathematiker

Teil 4: Gleichungen

128 S. mit 6 Abb., kartoniert

Bestell-Nr. 665 788 4 Preis 6,50 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

J. Lehmann

Mathe mit Pfiff

128 S., 18 farbige Vignetten, 93 z. T. farbige Textzeichnungen

Bestell-Nr. 653 364 6 Preis 4,50 M

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Imre Ruzsa

Die Begriffswelt der Mathematik

Übersetzung aus dem Ungarischen

472 S., 135 Abb., Ganzgewebe

Bestell-Nr. 706 732 5 Preis 21,50 M

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Manfred Rehm

Zahl, Menge, Gleichung

Bestell-Nr. 629 077 9 Preis 5,80 M

Kinderbuchverlag, Berlin

Autorenkollektiv

Studienwunsch Mathematik

Etwa 72 S. mit etwa 5 Abb., kartoniert

Bestell-Nr. 665 781 7 Preis etwa 3,20 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

Fanghänel/Vockenberg

Arbeit mit Mengen für AG's nach Rahmenprogramm

Etwa 150 S., 60 Abb., Broschur

Bestell-Nr. 707 053 2 Preis 3,00 M

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

S. Wollgast/S. Marx

Johannes Kepler

etwa 100 S., 62 Fotos, 7 Zeichnungen

Bestell-Nr. 653 359 0 Preis 9,80 M

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Donat · Maibaum

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fachlich-methodische Hilfen

für den fakultativen Mathematikunterricht

131 S., zahlr. Zeichnungen, Broschur

Bestell-Nr. 00 21 74-1 Preis 4,00 M

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

H. Lohse/R. Ludwig

Statistik für Forschung und Beruf

Ein programmierter Lehrgang

292 Lehrschr. mit 185 Bildern

und 3 Selbstleistungskontrollen

sowie einem Beiheft als Wissensspeicher

Bestell-Nr. Preis 22,00 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Simon/K. Stahl

Mathematik

Nachschlagewerk für Grundlagenfächer

670 S., 508 Bilder, zahlr. Beispiele, Plasteinb.

Bestell-Nr. 545 045 1 Preis 13,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

G. Höfner/M. Wittwer

Wiederholungsprogramm

Elementarmathematik

237 S., 110 Bilder, 6 Leistungskontrollen

Bestell-Nr. 546 131 0 Preis 7,80 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

J. u. H. Henselmann

Das große Buch vom Bauen

(kleine Kulturgeschichte des Bauens)

240 S., zahlr. Abb., Pappband mit Folie

Bestell-Nr. 629 616 9 Preis etwa 17,50 M

Kinderbuchverlag Berlin

G. und H.-G. Mehlhorn

Die Ideenschule

Übungen zum schöpferischen Denken

128 S., zahlr. Abb.

Bestell-Nr. 653 361 1 Preis 4,80 M

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

K.-G. Steinert

Sphärische Trigonometrie

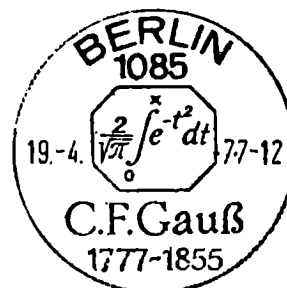
mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie

etwa 160 S., etwa 70 Abb., kartoniert

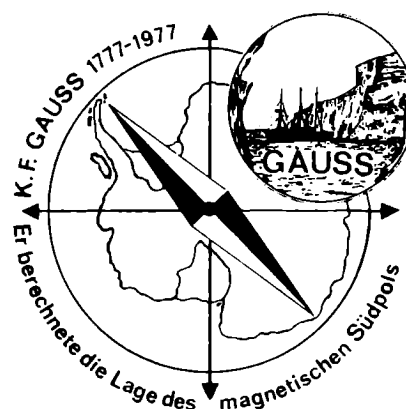
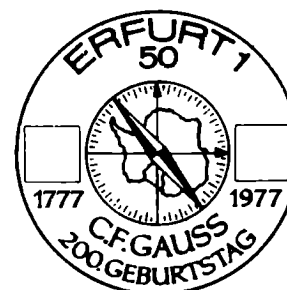
Bestell-Nr. 665 828 9 Preis etwa 9,50 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig



Das Postamt 1085 Berlin verwendete einen Ersttagsstempel, der das *Gaußsche Integral* zum Motiv hat. Einen weiteren Sonderstempel gab es beim Postamt 50 Erfurt, dessen symbolische Darstellung eine *Antarktikskarte* und ein *Kompaß* ist. Mit diesem Motiv soll an die Südpolarexpedition des Forschungsschiffes *Gauß* und an die Entdeckung des *Gaußberges* erinnert werden (siehe Fotos).



Der Arbeitskreis *Polarpost* Erfurt des Philatelistenverbandes der DDR gab anlässlich des 200. Geburtstags einen Sonderumschlag heraus. Das Bild zeigt das Segelschiff „Gauß“ bei Vermessungsarbeiten vor den Eisbarrieren des Südpols.

Text zu Seite 74, rechts unten:

Die Abbildung zeigt die *Gaußsche Fehlerkurve*, auch *Glocken-* oder *Verteilungskurve* genannt. Sie ist die graphische Darstellung des Gaußschen Fehlerverteilungsgesetzes, d. h. der absoluten oder der relativen Häufigkeiten einer großen Anzahl gleichartiger, voneinander unabhängiger Einzelbeobachtungen, deren Unterschiede lediglich durch den Zufall hervorgerufen sind. Die Gaußsche Fehlerkurve spielt in der Statistik und der Fehlertheorie eine bedeutende Rolle.

Graph einer Funktion oder nicht?

● Welche der angegebenen Kurven sind nicht Graph einer Funktion?

● Fertige dir eine Tabelle zu den angegebenen Funktionsbildern an! Sie sollte enthalten: Funktionsgleichung, Funktionsklasse, Nullstellen, $f(0)$. (Lösung S. 96.)

L. Flade

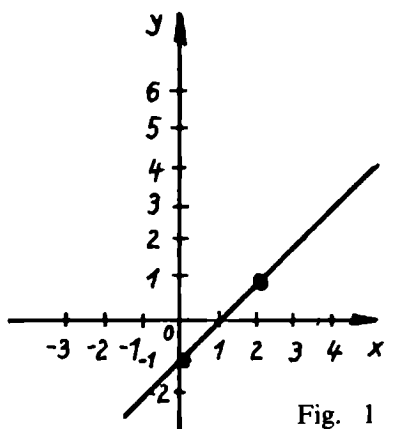


Fig. 1

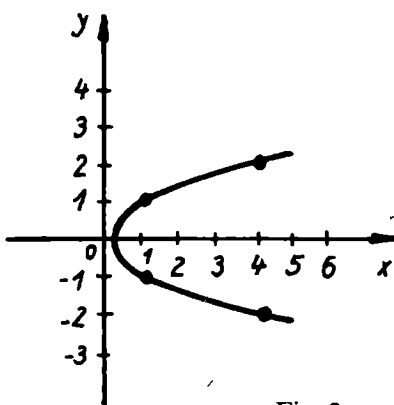


Fig. 2

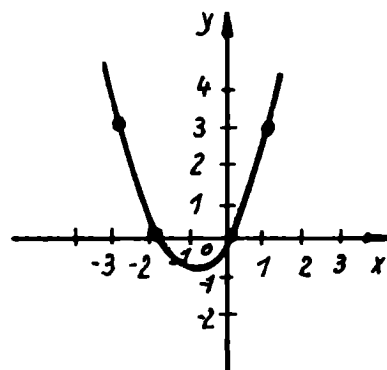


Fig. 3

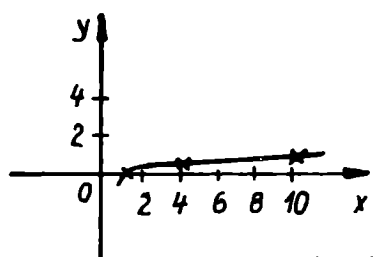


Fig. 4

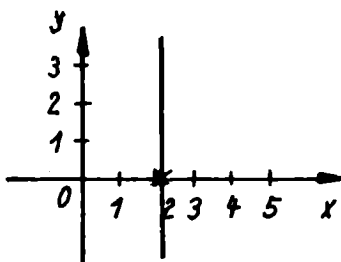


Fig. 5

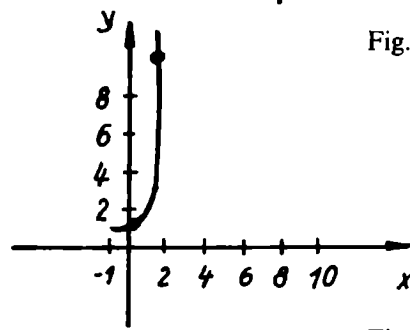


Fig. 6

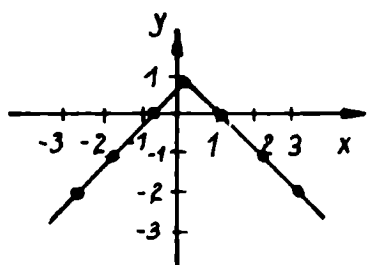


Fig. 7

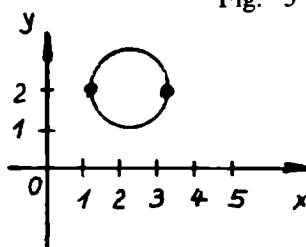


Fig. 8

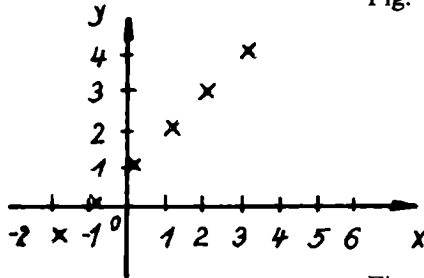


Fig. 9

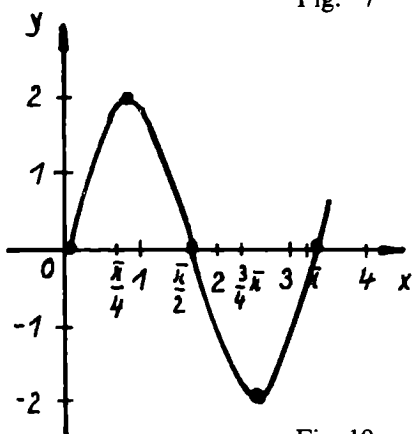


Fig. 10

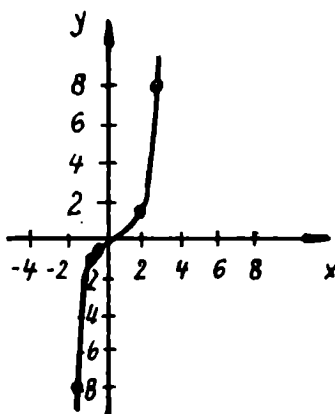


Fig. 11

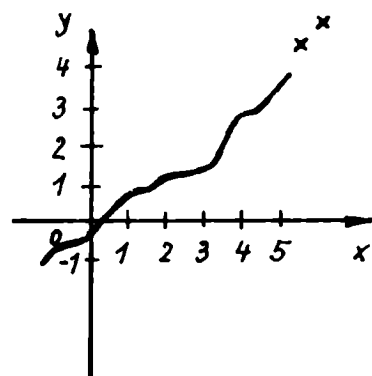
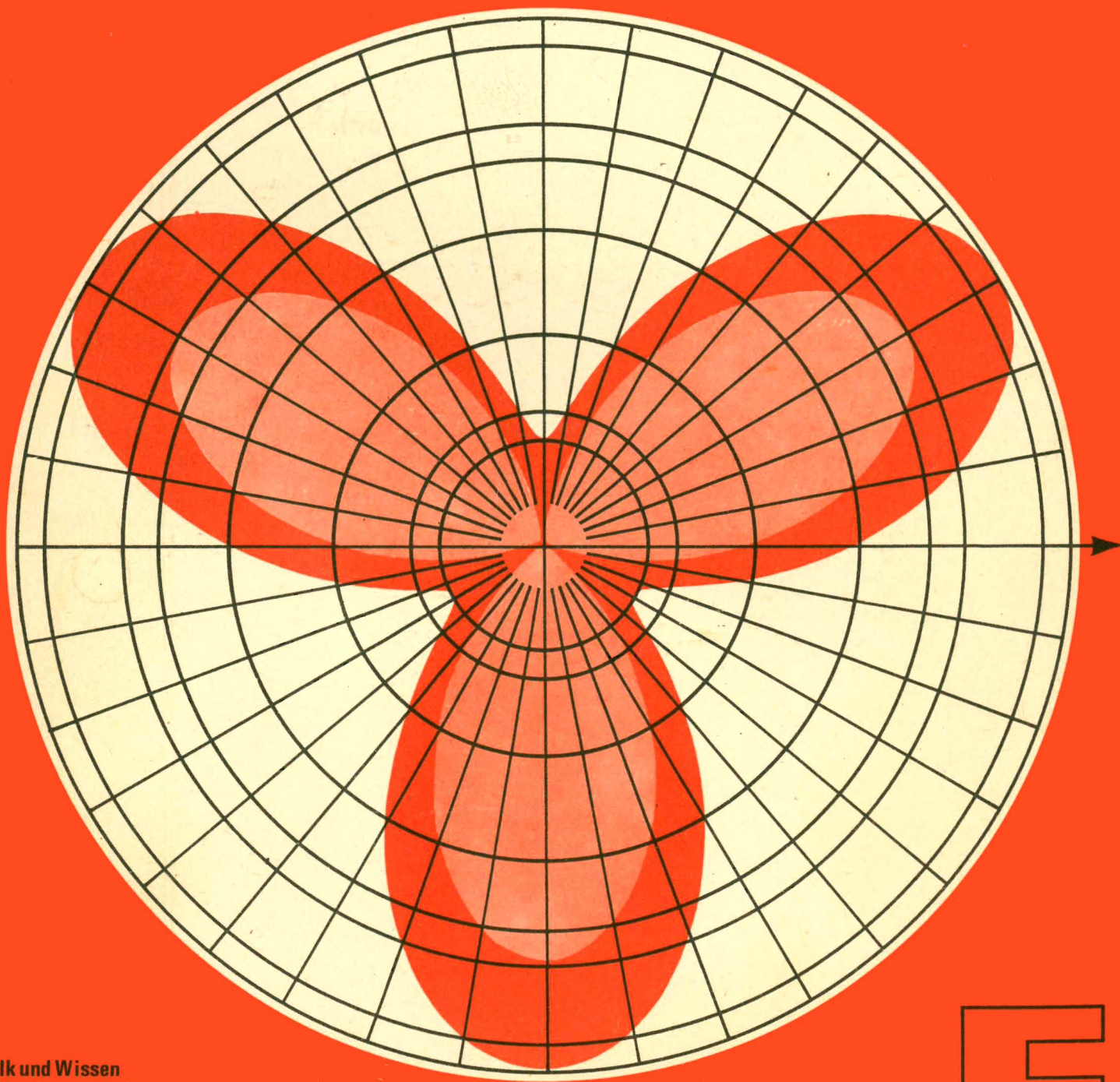


Fig. 12

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059



Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders
(Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-
ritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postcheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten aus sowj. Büchern mit
Unterhaltungsmathematik (S. 99, 100, 104,
112, IV.-U.-Seite); J. Sikojev, Berlin (S. 101);
Repro: zur Verfügung gestellt von Red.
„Wochenpost“ aus: Soviet Life Today
(S. 102); Station Jg. Techniker u. Naturf.,
Saalkreis (S. 105); Piostik, Moskau (S. 110);
Aus: Kalenderblätter des Eulenspiegelver-
lages (S. 111); Zentralbild (III. U.-Seite)

Typographie: H. Tracksdorf

Das Titelblatt wurde (stilisiert) dem Beitrag
auf Seite 107 entnommen.



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 4. Juli 1977

Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Dieses Heft entstand in enger Zusammenarbeit zwischen Wissenschaftlern und Lehrern
der UdSSR und der DDR.

Inhalt

- 97 Polarkoordinaten [10]*
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau
- 99 Aufgaben aus Freundesland [1]
Erst übersetzen, dann lösen!
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau/Dr. L. Flade, Sektion Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle
- 101 Eine Internatsschule der Stadt Ordshonikidse (UdSSR) [7]
Dipl.-Ing. Juri Sikojev, Berlin
- 102 *alpha* stellt vor: Prof. Dr. P. S. Alexandrow [8]
Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR
(gekürzt aus: Wochenpost 1/76)
- 103 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. I. M. Jaglom [9]
Sektion Mathematik der Universität Jaroslawl (UdSSR)
- 104 18 Olympiadeaufgaben aus Freundesland [5]
stud. math. Ottmar Langer, Döbeln; z. Z. Universität Leningrad
- 105 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Begegnung mit Freunden: Aus der Arbeit des Klubs
Junger Mathematiker des Saalkreises [5]
Dipl.-Lehrer H. Rebmann, Station Jg. Naturforscher und Techniker, Saalkreis
(Bez. Halle)
- 106 Rosenkurven – Kurvenkonstruktionen [10]
Prof. Dr. A. P. Domorjad, Moskau
- 108 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klasse 5/6: Zeichnen hilft rechnen [5]
Prof. A. I. Ostrowski/B. A. Kordemski, Moskau
(Leseprobe aus dem gleichnamigen sowjetischen Buch)
- 110 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Unterhaltungsmathematik aus der UdSSR
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- 112 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben: Mathematik, Physik, Chemie · Autorenkollektiv
- 114 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/StR Th. Scholl, Berlin
- 115 Lösungen [5]
- 120 Mathematiker auf sowjetischen Briefmarken [5]
Zusammenstellung: A. Halameisär, Moskau/J. Lehmann, Leipzig
- III. U.-Seite: Graphiken aus Anlaß des 60. Jahrestages
der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution [5]
- IV. U.-Seite: Sowjetische Literatur in deutscher Sprache [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Polarkoordinaten

Während eines Frühstücks im Pionierlager fragte unser Pionierleiter Wolodja: „Wer möchte heute Himbeeren essen? Sie sind jetzt reif, und ich zeige euch den Weg. Ihr müßt aber langärmlige Hemden anziehen, denn es gibt dort viele Brennesseln.“

Nach dem Frühstück warteten zwei Dutzend Himbeerliebhaber ungeduldig auf Wolodja. „Wir kommen zu den Himbeeren, indem wir zunächst die Hauptstraße entlanggehen und dann an der nächsten Schneise rechts abbiegen!“ sagte Wolodja. „Das sind etwas mehr als 2 km. Wenn wir aber direkt quer durch den Wald zu den Himbeeren wandern, dann sind es nur 1,5 km. Also, wie gehen wir?“ wollte Wolodja wissen. „Quer durch den Wald!“ riefen die Himbeerliebhaber im Chor. „Hoffentlich verlaufen wir uns nicht!“ Wolodja war einverstanden und führte uns aus dem Lager heraus. „Jetzt erkläre ich euch unseren Weg: Die Richtung ist 120° gegen die Straße, die Entfernung beträgt 2000 Schritte. Dort beginnt eine Schlucht, in der Himbeeren wachsen.“

„Wessen Schrittmaß wurde verwendet?“ wollte ein kleines Mädchen wissen. „Ich brauche sicher 3000 Schritte.“ Alle lächelten. Wir überquerten die Straße. Als wir den Wald erreichten, krepelte Wolodja die Ärmel hoch. Anstelle einer Armbanduhr trug er einen Kompaß. Mit Hilfe des Kompaß stellten wir fest, daß die Straße in Nord-Süd-Richtung verläuft. Unser Weg zu den Himbeeren bildet mit der Nord-Süd-Richtung einen Winkel von 120° , entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gemessen. Alle betrachteten den Kompaß. „Schaut mal! Wir können als Orientierungspunkt diese hohe Kiefer nutzen. Sie steht in Richtung unseres Weges“, erklärte Wolodja.

Wir gingen los. Nach 20 Minuten erreichten wir die Schlucht. Die Himbeeren waren wirklich sehr süß und saftig.

Als wir ins Lager zurückgekehrt waren, fertigte ich eine Skizze an (siehe Bild 1). Die Südrichtung der Straße bildet mit der Strecke $\overline{AM}$ einen Winkel von 120° , gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Strecke $\overline{AM}$ beträgt 1,4 km: bis zur Schlucht zählte ich 2150 Schritte, und die Länge eines Schrittes von mir entspricht ca. 65 cm. Ich muß mir also nur zwei Zahlen merken, um die Himbeer-

schlucht wiederzufinden: Richtung 120° und Entfernung 1400 m. Auf der Skizze schrieb ich nur: $M(1400; 120^\circ)$. Später fügte ich der Skizze noch den kürzesten Weg zu einem naheliegenden Erholungsheim hinzu, wo wir manchmal Eis essen konnten. Die Lage des Erholungsheimes schrieb ich wie folgt auf: $E(1200; 30^\circ)$.

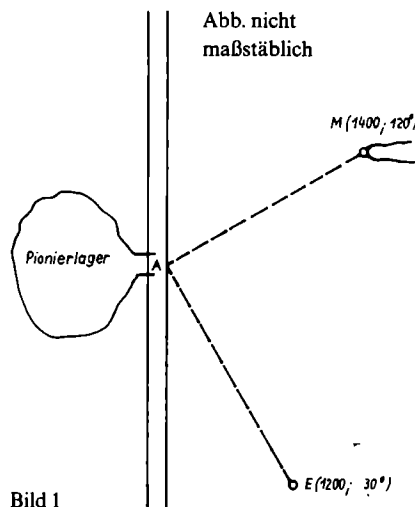


Bild 1

– In der Nähe unseres Lagers war auch ein kleiner See, in dem wir oft badeten. Seine Lage kann man folgendermaßen kennzeichnen: $S(700; 270^\circ)$.

Trage selbst in Bild 1 die Lage des Sees ein! Wenn man in einer Ebene einen Punkt O (Pol) festlegt und von diesem Punkt aus einen Strahl OP (Polarachse), der mit Einheiten versehen ist, zeichnet, so kann man die Lage eines beliebigen Punktes $M \neq O$ der Ebene durch ein Zahlenpaar – Länge der Strecke $\overline{OM}$ (Polarradius) und Größe des Winkels MOP (Polarwinkel) bestimmen (siehe Bild 2), also genauso wie wir die Himbeerschlucht und das Erholungsheim auf dem Bild 1 vermerkten. Die Entfernung OM vom Pol bezeichnet man gewöhnlich mit r , den Polarwinkel mit α . Der Polarwinkel α ist dabei derjenige Winkel, um den man die Polarachse OP entgegen dem Uhrzeigersinn drehen muß, bis sie mit dem Strahl durch OM zusammenfällt. Auf dem Bild 2 entspricht dem Punkt M $r = 8$ Einheiten und $\alpha = 45^\circ$. Das schreibt man so: $M(8; 45^\circ)$. Den Punkt K im Bild 2 kann man analog dazu angeben: $K(4; 120^\circ)$.

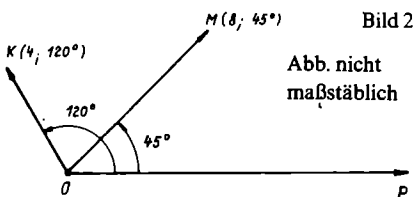


Bild 2

Gib in entsprechender Weise den Punkt A des Bildes 2 an! Damit haben wir eine eindeutige Abbildung zwischen Punkten der Ebene und Zahlenpaaren $(r; \alpha)$. (Mit einer Ausnahme: für den Punkt O haben wir $r = 0$,

aber den Polarwinkel kann man nicht angeben.) Diese Abbildung nennt man Abbildung mit Hilfe eines Polarkoordinatensystems.

Wir wissen schon, daß eine Gleichung in den Variablen x und y im rechtwinkligen Koordinatensystem eine Kurve festlegt, d.h. eine Menge von Punkten, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Eine Gleichung in den Variablen r und α kann im Polarkoordinatensystem auch eine Kurve festlegen:

a) Durch die Gleichung $r = 6$ wird eine Kurve bestimmt, deren Punkte einen Abstand von 6 Einheiten vom Punkt O haben, das heißt einen Kreis mit dem Radius $R = 6$ Einheiten (siehe Bild 3a).

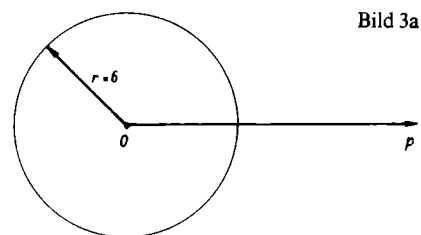
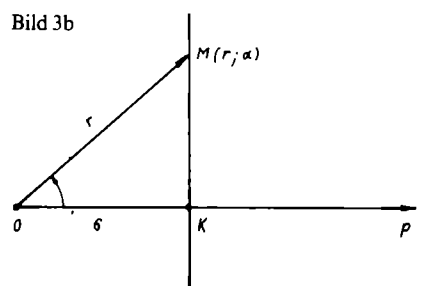
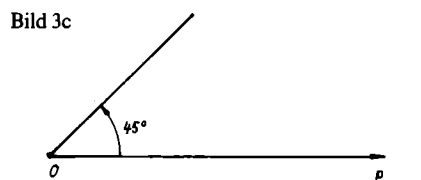


Bild 3a

b) Durch die Gleichung $r \cdot \cos \alpha = 6$ wird eine Gerade bestimmt, die senkrecht zur Polarachse – 6 Einheiten vom Pol entfernt – verläuft (siehe Bild 3b).



c) Durch die Gleichung $\alpha = 45^\circ$ wird eine Gerade definiert, die durch den Pol O und im Winkel von 45° zur Polarachse verläuft (siehe Bild 3c).



d) Durch die Gleichung $r \cdot \cos(\alpha - 60^\circ) = 6$ wird eine Gerade festgelegt, welche einen Winkel von 150° mit der Polarachse bildet und die Polarachse im Abstand von 12 Einheiten bezüglich des Punktes O schneidet (siehe Bild 3d).

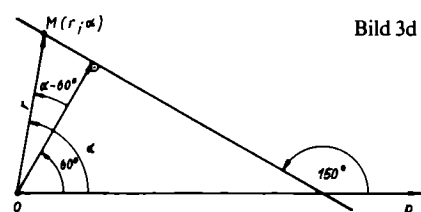
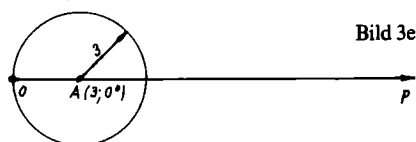
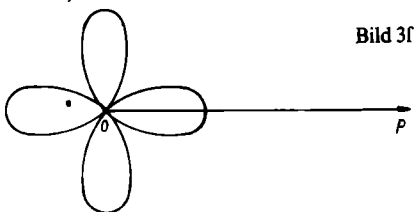


Bild 3d

e) Durch die Gleichung $r = 6 \cdot \cos \alpha$ wird ein Kreis mit dem Radius 3 Einheiten und dem Mittelpunkt $A(3; 0^\circ)$ festgelegt (siehe Bild 3e).



f) Durch die Gleichung $r = 6 \cdot \cos 2\alpha$ wird eine „Blume“ mit 4 Blütenblättern festgelegt (siehe Bild 3f).



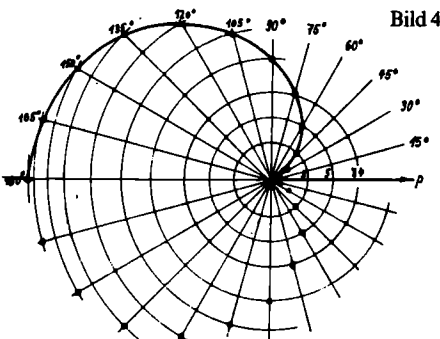
Die Kurven im Polarkoordinatensystem kann man genauso wie im rechtwinkligen Koordinatensystem punktweise ermitteln. D. h., die Winkelgröße α legt man fest und die dazugehörige Größe r ist zu berechnen. Dazu eignet sich eine Werttabelle. Als Beispiel fertigen wir uns eine für die Kurve mit der Gleichung $r = a(1 - \cos \alpha)$ an. Die Größe a sei 10 Einheiten (im Bild 4 entspricht 1 Einheit 0,5 cm).

α	$\cos \alpha$	$1 - \cos \alpha$	$r = 10(1 - \cos \alpha)$
0°	1	0	0
15°	0,97	0,03	0,3
30°	0,87	0,13	1,3
45°	0,7	0,3	3
60°	0,5	0,5	5
75°	0,26	0,74	7,4
90°	0	1	10
105°	-0,26	1,26	12,6
120°	-0,5	1,5	15
135°	-0,7	1,7	17
150°	-0,87	1,87	18,7
165°	-0,97	1,97	19,7
180°	-1	2	20

Verbinden wir die erhaltenen Punkte, so ergibt sich das Bild 4, d. h. eine Hälfte der Kurve, nämlich den Teil, der über der Polarachse liegt. Wenn wir die Tabelle bis $\alpha = 360^\circ$ fortsetzen, erhält man die zweite Hälfte der Kurve. Eine solche Kurve nennt man Kardioiden. Weil $\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$, ist die untere Hälfte der Kurve symmetrisch zur oberen bezüglich der Polarachse.

Es sei noch bemerkt, daß im rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen x-Achse mit der Polarachse und dessen Ursprung mit O zusammenfällt, durch die Gleichung $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$ dieselbe Kurve festgelegt wird. Wenn wir aber die Wurzel vermeiden wollen, erhalten wir eine Gleichung 4. Grades, also eine viel kompliziertere Gleichung als für das Polarkoordinatensystem.

Jedem Punkt M der Ebene entsprechen jetzt zwei Zahlenpaare: im rechtwinkligen Koordinatensystem – Abszisse x und Ordinate y ; im



Polarkoordinatensystem – die Strecke $OM = r$ und der Polarwinkel α .

Wenn unser Pol des Polarkoordinatensystems mit dem Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfällt und die x-Achse mit der Polarachse übereinstimmt, dann bestehen zwischen den Polarkoordinaten und den entsprechenden x-y-Koordinaten folgende Beziehungen (siehe Bild 5):

$$\overline{OA} = x = r \cos \alpha \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{AM} = y = r \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Diese Gleichungen ermöglichen einen Übergang von der einen Koordinatenschreibweise in die andere. Berechnen wir z. B. die Polarkoordinaten der Punkte $M(3; 4)$ und $K(4; -3)$, $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$; $\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$.

Daraus entnimmt man mit der Tafel $\alpha = 53,1^\circ$; also $M(5; 53,1)$. Der positive Wert des Kosinus und der negative Wert des Sinus vom Winkel α_k zeigt, daß der Winkel α_k im 4. Quadranten liegt. Entsprechend der Quadrantenbeziehungen finden wir $\alpha_k = 323,1^\circ$ und daraus folgt $K(5; 323,1^\circ)$.

Von den Polarkoordinaten kann man auch leicht zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, z. B.:

Der Punkt $M(8; 45^\circ)$ hat folgende rechtwinklige Koordinaten

$$x_M = 8 \cos 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2};$$

$$y_M = 8 \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \sqrt{2}.$$

– Ermittle selbst die Polarkoordinaten für den Punkt $B(-12; 5)$ und die x-y-Koordinaten für den Punkt $F(4; 120^\circ)$!

Aufgaben

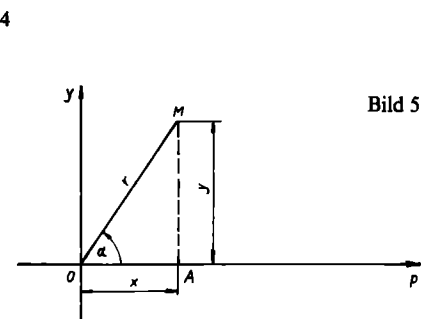
▲ 1 ▲ Die Gleichung $r = a \sin 2\alpha$ legt auch ein „Vierblättriges Blütenblatt“ fest. Konstruiere punktweise die Kurve für $a = 10$!

▲ 2 ▲ Konstruiere folgende Kurven!

a) $r = a \sin 3\alpha$; c) $r = a \sin 4\alpha$;

b) $r = 1 \cos 3\alpha$; d) $r^2 \cos 2\alpha$.

▲ 3 ▲ Konstruiere eine Parabel mit der Gleichung $r(1 + \cos \alpha) = a$. Wie lautet eine entsprechende Gleichung für ein x-y-Koordinatensystem?



▲ 4 ▲ Konstruiere folgende Spiralen!

a) Spirale von Archimedes: $r = a \cdot \alpha$;

b) Hyperbolische Spirale: $r = \frac{a}{\alpha}$;

c) Logarithmische Spirale: $r = a^{\alpha}$;

Bei Aufgabe 4 ist α im Bogenmaß zu verwenden! A. Halameisär

Lösungen

▲ 1 ▲ vierblättriges Blütenblatt $r = a \cdot \sin 2\alpha$

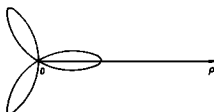


▲ 2 ▲ a) dreiblättriges Blütenblatt:

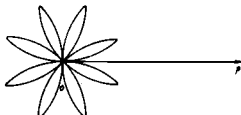
$$r = a \cdot \sin 3\alpha$$



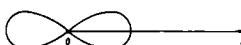
b) dreiblättriges Blütenblatt: $r = a \cdot \cos 3\alpha$



c) achtblättriges Blütenblatt: $r = a \cdot \sin 4\alpha$



d) Lemniskate: $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\alpha$



▲ 3 ▲ Die Konstruktion bleibt dem Leser überlassen.

▲ 4 ▲ a) Spirale von Archimedes: $r = a \cdot \alpha$



b) hyperbolische Spirale: $r = \frac{a}{\alpha}$



c) logarithmische Spirale: $r = a^{\alpha}$!



Der interessierte Leser sei auf die Konstruktionen von Kurven in der *Kleinen Enzyklopädie Mathematik* S.443ff. hingewiesen, d. Red.



**Erst
übersetzen,
dann lösen!**

Aufgaben aus Freundesland

I класс

1. У мальчика было 15 копеек. Когда он купил марки, ему дали сдачи 3 копейки. Сколько стоили марки? Какие марки он мог купить (рис. 1).



2. У Веры было 12 переводных картинок. Мама подарила ей на 3 картинки больше, чем у нее было. Сколько картинок стало у Веры?

3. Школьники посадили деревья: 38 берез, 29 лип, а дубов на 15 меньше, чем берез и лип вместе. Сколько дубов посадили дети?

II класс

1. Коля поймал 10 рыб, а Сережа поймал в два раза больше. Сколько рыб поймали оба мальчика вместе?

2. Во время отпуска папа сделал 92 фото-снимка, в том числе на 2 цветных пленки по 30 снимков на каждой и одну черно-белую пленку. Сколько снимков на черно-белой пленке сделал папа?

3. Мама купила один арбуз весом в 3 кг, а другой — весом в 2 кг. Сколько стоят оба арбуза, если за 1 кг нужно платить 15 копеек?

III класс

1. В первый день туристского похода пионеры прошли 12 км, а во второй день — еще 15 км. Всего они за оба дня были в пути 9 часов. Сколько часов пионеры были в пути каждый день?

2. В школьную столовую привезли 7 ящиков яблок и 9 ящиков груш, всего 96 кг фруктов. Вес фруктов в каждом ящике один и тот же. Сколько килограммов яблок и сколько кг груш привезли в школу?

3. В первый день школьных каникул в музей пошли 5 групп учеников, а во второй день — еще 4 таких же группы. Всего за два дня в музей ходили 180 учеников. Сколько учеников ходили в музей в каждый из двух дней?

IV класс

1. Пароход проходит по течению 26,5 км в час, а против течения — только 18,5 км в час. Найти скорость течения и собственную скорость парохода.

2. Сплав содержит 3 части меди и 2 части олова, причем меди на 34,2 г больше, чем олова. Сколько меди и сколько олова в сплаве?

3. Геологи проделали путь в 2450 км. 10% пути они летели в самолете, 60% пути плыли в лодке, а остальной путь прошли пешком. Сколько км геологи прошли пешком?

V класс

1. Доклад ученика продолжался $\frac{2}{3}$ урока, рассказ учителя $\frac{2}{15}$ урока, остальное время учащиеся решали задачу. Сколько времени учащиеся решали задачу (1 урок = 45 мин.)?

2. Мастер может выполнить порученную работу за 20 дней, а ученик — за 30 дней. За сколько дней выполнят эту работу мастер и ученик совместно?

3. Собрали 100 кг грибов, влажность которых составляет 90%. Когда грибы подсушили, их влажность оказалась 80%. Сколько весят грибы после подсушки?

VI класс

1. Сплав меди и цинка содержит 82% меди. После добавления 18 кг цинка сплав стал содержать только 70% меди. Сколько меди и сколько цинка было в сплаве вначале?

2. Миша купил 10 конвертов и 8 видовых открыток с марками за 82 копейки, а Вера купила 3 конверта и 5 открыток за 35 коп. Сколько стоит конверт с маркой и сколько стоит видовая открытка с маркой?

3. Токарь и его ученик должны были изготовить за смену 65 деталей. Но токарь перевыполнил задание на 10%, а ученик — на 20%, поэтому они изготовили вместе 74 детали. Сколько деталей должен был сделать каждый из них?

VII класс

1. Турист проплыл на лодке 24 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь путь 7 часов. Скорость его лодки в стоячей воде 7 км/час. Найдите скорость течения реки.

2. Поезд Москва — Харьков отправился с опозданием на 1 час. Но он прошел этот путь (720 км) со скоростью, на 10 км/час больше, чем предусмотрено расписанием, и прибыл в Харьков своевременно. С какой скоростью шел этот поезд?

VIII класс

1. Найдите сумму всех нечетных натуральных чисел, меньших 1000.

2. Что больше: а) $4\sqrt{3}$ или 7? б) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?

3. В чем сходство и в чем различие между уравнениями $\sqrt{2x+1}+x=7$ и $\sqrt{2x+1}+7=x$?

IX класс

1. В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см нужно вписать прямоугольник так, чтобы одна из его сторон лежала на основании треугольника. При какой высоте прямоугольника его площадь будет максимальной?

2. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды 7 см, стороны оснований 10 см (внизу) и 2 см (вверху). Найти длину бокового ребра пирамиды.

3. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3$ в точке, где $x = -2$.

X класс

1. Доказать, что $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 0,25$.

2. Решить уравнение $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = 0,25$.

3. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y = 1$.

Schüler einer Internatsschule
in Ordshonikidse, s. Beitrag S. 101





Aufgaben aus sowjetischen Lehrbüchern

Klasse 1

▲1▲ Ein Schüler hatte 15 Kopeken. Als er Briefmarken kaufte, erhielt er 3 Kopeken zurück.

Wieviel kosteten die Briefmarken? Was für Marken konnte er kaufen (siehe Bild 1)?

▲2▲ Vera hatte 12 Abziehbilder. Die Mutti schenkte ihr noch 3 Abziehbilder mehr, als sie schon hatte.

Wieviel Bilder hatte Vera nun?

▲3▲ Schüler pflanzten Bäume: 38 Birken, 29 Linden; Eichen pflanzten sie 15 weniger als Birken und Linden zusammen.

Wieviel Eichen pflanzten die Kinder?

Klasse 2

▲1▲ Kolja angelte 10 Fische, aber Serjoscha angelte zweimal mehr.

Wieviel Fische angelten beide Jungen zusammen?

▲2▲ Während des Urlaubs machte Vati 92 Fotos, darunter waren 2 Farbfilme zu jeweils 30 Bildern und ein Schwarz-Weiß-Film. Wieviel Fotos machte Vati auf dem Schwarz-Weiß-Film?

▲3▲ Mutti kaufte eine Wassermelone von 3 kg und eine andere von 2 kg.

Wieviel kosten beide Wassermelonen, wenn man für ein Kilogramm 15 Kopeken bezahlen muß?

Klasse 3

▲1▲ Am 1. Tag der Touristenwanderung legten die Pioniere 12 km zurück und am zweiten Tag noch 15 km. Insgesamt waren sie an den beiden Tagen 9 Stunden unterwegs.

Wieviel Stunden wanderten die Pioniere an jedem Tag?

▲2▲ In die Schulküche brachte man 7 Kisten Äpfel und 9 Kisten Birnen, insgesamt 96 kg Früchte. Das Gewicht der Früchte in jeder Kiste war ein und dasselbe.

Wieviel kg Äpfel und wieviel kg Birnen brachte man in die Schulküche?

▲3▲ Am ersten Tag der Schulferien gingen 5 Schülergruppen ins Museum und am zweiten Tag noch vier solcher Gruppen. Insgesamt waren an den zwei Tagen 180 Schüler im Museum.

Wieviel Schüler waren an jedem der zwei Tage im Museum?

Klasse 4

▲1▲ Ein Dampfer bewegt sich mit der Strömung mit einer Geschwindigkeit von

$$26,5 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$18,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Gib die Geschwindigkeit der Strömung und die Eigengeschwindigkeit des Dampfers an!

▲2▲ Eine Legierung besteht zu 3 Teilen aus Kupfer und zu 2 Teilen aus Zinn, wobei 34,2 g Kupfer mehr als Zinn vorhanden sind.

Wieviel Kupfer und wieviel Zinn sind in der Legierung?

▲3▲ Geologen legten einen Weg von 2450 km zurück. 10% des Weges flogen sie im Flugzeug, 60% des Weges fuhren sie im Boot und den Rest liefen sie zu Fuß.

Wieviel km gingen die Geologen zu Fuß?

Klasse 5

▲1▲ Der Schülervortrag dauerte $\frac{2}{5}$ der Unterrichtsstunde, der Lehrervortrag $\frac{2}{15}$ der Stunde, in der restlichen Zeit lösten die Schüler Aufgaben.

Wie lange lösten die Schüler Aufgaben (1 Unterrichtsstunde $\hat{=}$ 45 min)?

▲2▲ Ein Meister kann den Arbeitsauftrag in 20 Tagen schaffen, ein Lehrling in 30 Tagen.

In wieviel Tagen erfüllen diese Arbeit Meister und Lehrling zusammen?

▲3▲ Man sammelte 100 kg Pilze, die 90% aus Feuchtigkeit bestanden. Als die Pilze etwas getrocknet waren, betrug ihre Feuchtigkeit 80%.

Wieviel wiegen die Pilze nach dieser Trocknung?

Klasse 6

▲1▲ Eine Legierung aus Kupfer und Zink enthält 82% Kupfer. Nach einem Zusatz von 18 kg Zink enthält die Legierung nur noch 70% Kupfer.

Wieviel Kupfer und wieviel Zink waren am Anfang in der Legierung?

▲2▲ Michael kaufte 10 Briefumschläge und 8 Ansichtskarten (jeweils mit Briefmarke) für 82 Kopeken, und Vera kaufte 3 Briefumschläge und 5 Karten (jeweils mit Briefmarke) für 35 Kopeken.

Wieviel kostet ein Briefumschlag mit Briefmarke, und wieviel kostet eine Ansichtskarte mit Briefmarke?

▲3▲ Ein Dreher und sein Lehrling mußten in einer Schicht 65 Werkstücke anfertigen. Der Dreher schaffte 10% und der Lehrling 20% über den Plan, so stellten sie zusammen 74 Werkstücke her.

Wieviel Werkstücke mußte jeder von ihnen herstellen?

Klasse 7

▲1▲ Ein Tourist fuhr in einem Boot 24 km stromabwärts auf einem Fluß und anschließend zurück entgegengesetzt der Strömung. Für den ganzen Weg benötigte er 7 Stunden.

Die Geschwindigkeit des Bootes in stehendem Wasser beträgt $7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gib die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses an!

▲2▲ Der Zug Moskau–Charkow fuhr mit einer Verspätung von einer Stunde ab. Er legte diese Strecke (720 km) mit einer um $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ höheren Geschwindigkeit als fahrplanmäßig vorgesehen zurück und erreichte Charkow pünktlich.

Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Zug?

Klasse 8

▲1▲ Finde die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 1000 sind!

▲2▲ Was ist größer a) $\sqrt[3]{3}$ oder 7; b) $\sqrt[3]{2}$ oder $\sqrt[3]{3}$?

▲3▲ Worin besteht die Gemeinsamkeit und worin besteht der Unterschied zwischen den Gleichungen

$$\sqrt{2x+1} + x = 7 \text{ und } \sqrt{2x+1} + 7 = x?$$

Klasse 9

▲1▲ In einem gleichschenkligen Dreieck mit einer Grundseite von 20 cm und einer Höhe von 8 cm soll ein Rechteck so eingezeichnet werden, daß eine seiner Seiten auf der Grundseite des Dreiecks liegt.

Bei welcher Höhe des Rechtecks ist die Rechtecksfläche am größten?

▲2▲ Die Höhe eines regelmäßigen vier-eckigen Pyramidenstumpfes beträgt 7 cm, die Grundseiten betragen (unten) 10 cm und (oben) 2 cm. Finde die Länge der Seitenkante der Pyramide!

▲3▲ Aufzustellen ist die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = x^3$ im Punkt $x = -2$.

Klasse 10

▲1▲ Zu beweisen ist, daß $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 0,25$.

▲2▲ Zu lösen ist die Gleichung $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = 0,25$.

▲3▲ Bestimme die Fläche der Figuren, die begrenzt wird durch die Kurven $y^2 = 2x + 1$ und $x - y = 1$!

L. Flade/A. Halameisär

Eine Internatsschule der Stadt Ordshonikidse

Eine normale Internatsschule ist es, wie es viele im Nordkaukasus gibt. Sie befindet sich in einem der Stadtteile von Ordshonikidse, nimmt jedoch eine ziemlich große Fläche ein. Dazu gehören neben den Unterrichtsräumen die Gebäude mit den Schlafsälen, der Speiseraum und eine Vielzahl Hilfsgebäude. Die Schule besitzt einen großen Sportkomplex. Und obwohl sie, wie bereits erwähnt, eine ganz gewöhnliche Schule ist, unterscheidet sie sich doch von ähnlichen anderen Schulen: hier werden *Spezialklassen in Mathematik* geführt, und zwar für achttes, neuntes und zehntes Schuljahr. Die Schule existiert seit 1972. In ihr werden rund 500 Kinder unterrichtet, von denen fast 300 von außerhalb kommen und deshalb die Woche über hier wohnen. Die Auswahl in die Mathematikklassen erfolgt auf der Grundlage der regelmäßig in den Kreisen durchgeführten Mathematikolympiaden. Die besten Schüler – die Sieger dieser Olympiaden – werden in diese Klassen aufgenommen. Nicht selten weilen hier Gäste aus der Moskauer Staatlichen Universität, die talentierte Kinder für die Mathematik-Internatsschulen der Moskauer Staatlichen Universität auswählen.

Der Direktor der Schule, *Asylgirej S. Godshijew*, erzählt über das Leben an der Schule und bemerkt, daß sie wegen ihrer Jugend noch keine eigenen bekannten Mathematiker nachweisen kann, da diese noch in Moskau studieren, jedoch hofft das Lehrerkollektiv, in naher Zukunft unter den berühmten sowjetischen Mathematikern auch die Namen ihrer ehemaligen Schüler wiederzuerkennen.

Einer der vielen Schüler – *Boris Mildsichow* aus der 9. Klasse – ist Sieger der russischen Mathematikolympiade und fährt in diesem Jahr wieder zur Allunionsmathematikolympiade. Seine Mathematiklehrerin, *Raisa K. Demidowa*, hofft auf die Erfolge ihres Zöglings.

Für den Spezialunterricht in Mathematik an der Schule werden Dozenten der *Nord-Ossetischen Kosta-Chetagurrow-Universität* der Stadt Ordshonikidse verpflichtet. Natürlich arbeiten auch die Mathematik-Zirkel aktiv. Interne Schul-Mathematik-Olympiaden werden durchgeführt.

Genosse *Godshijew* ist der Meinung, daß die große Aufmerksamkeit, die der Schule durch

die Regierung der SOASSR zuteil wird und die großen Mittel, die für die Schulbedürfnisse bereitgestellt werden, es auch in Zukunft ermöglichen werden, die mathematische Spezialisierung der Schule bedeutend zu vertiefen. Alle Klassen sind bereits mit modernen Unterrichtsmitteln ausgestattet (Programmierung des Abfragens mit Hilfe von Spezialapparaturen, moderne Projizier- und Filmapparaturen).

Zweifelloos – sagt Genosse *Godshijew* – kann man noch vieles tun. Die Hauptsache ist, Erfahrungen im Unterricht zu sammeln. In diesem Zusammenhang drückte er den Wunsch aus, mit entsprechenden Einrichtungen in der DDR in Erfahrungsaustausch zu treten. Für den Briefwechsel teilt er seine Adresse mit: SOASSR

Ordshonikidse, ul. Minina 15
Internatsschule Nr. 2

Aufgaben der Kreis-Mathematikolympiade

Klassenstufe 7

▲1▲ Berechne das Ergebnis des Ausdrucks:

$$3\frac{1}{117} \cdot 4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117} \cdot 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119} ! \quad (5 \text{ Punkte})$$

▲2▲ In einer zweistelligen Zahl wurde eine Ziffer gestrichen, wobei sich die Zahl um das 31fache verringerte.

Welche Ziffer und an welcher Stelle wurde gestrichen? (5 Punkte)

▲3▲ Ist die Zahl 111...1 (1977 Einsen hintereinander) das Quadrat einer ganzen Zahl? (4 Punkte)

▲4▲ Mit wie vielen Nullen endet das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 50$? (4 Punkte)

Klassenstufe 9

▲1▲ Löse die Gleichung

$$\left[\frac{8x+19}{7} \right] = \frac{16(x+1)}{11}$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer eine ganze Zahl ist! (5 Punkte)

▲2▲ Entwickle die Formel des Kreisbogens um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α ! (5 Punkte)

▲3▲ Auf dem Umfang eines Kreises mit einer Länge von 60m bewegen sich gleichmäßig und in gleicher Richtung zwei Punkte. Ein Punkt durchläuft einen vollen Umkreis 5 Sekunden schneller als der andere, wobei er diesen jede Minute einmal einholt. Bestimme die Geschwindigkeit der Punkte! (4 Punkte)

▲4▲ In einer Urne befinden sich 500 Kugeln mit den laufenden Nummern von 1 bis 500.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl einer beliebig gezogenen Kugel durch 10 teilbar ist? (4 Punkte)

Klassenstufe 10

▲1▲ Löse die Ungleichung

$$3|x-2| - 4|x+5| - |3x+9| < 3!$$

▲2▲ Löse die Gleichung (5 Punkte)

$$\left[\frac{8x+19}{7} \right] = \frac{16(x+1)}{11}$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer eine ganze Zahl ist! (4 Punkte)

▲3▲ Entwickle die Formel des Kreisbogens um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α ! (4 Punkte)

▲4▲ Löse die Gleichung

$$4\sin^2 3x - 2\cos 2x + 2,1 = 0!$$

J. Sikojev (5 Punkte)

Stundenplan der allgemeinbildenden Oberschulen in der UdSSR

Fach	Anzahl der Wochenstunden nach Klassen									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1. Muttersprache	12	10	10	6	6	3	3	2	2/0	–
2. Literatur	–	–	–	2	2	2	2	3	4	3
3. Mathematik	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5
4. Geschichte	–	–	–	2	2	2	2	3	4	3
5. Gesellschaftskunde	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2
6. Naturkunde	–	2	2	2	–	–	–	–	–	–
7. Erdkunde	–	–	–	–	2	3	2	2	2	–
8. Biologie	–	–	–	–	2	2	2	2	0/2	2
9. Physik	–	–	–	–	–	2	2	3	4	5
10. Astronomie	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1
11. techn. Zeichnen	–	–	–	–	–	1	1	1	–	–
12. Fremdsprache	–	–	–	–	4	3	3	2	2	2
13. Chemie	–	–	–	–	–	–	2	2	3	3
14. Zeichenunterricht	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–
15. Gesang u. Musik	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–
16. Turnen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
17. Produktionsausbildung	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Wochenstunden (oblig.)	24	24	24	24	30	30	30	30	30	30
Unterricht (fak.)	–	–	–	–	–	–	2	4	6	6
insgesamt	24	24	24	24	30	30	32	34	36	36

alpha stellt vor: Prof. Dr. P. S. Alexandrow

Mitglied der Akademie
der Wissenschaften der UdSSR,
Held der sozialistischen Arbeit
Moskauer Staatliche Universität

Professor *Pawel Sergejewitsch Alexandrow* ist gleichermaßen bekannt durch seine wissenschaftlichen Leistungen, durch seine Arbeit als Hochschullehrer – und durch die Musik- und Vortragsabende, die der 80jährige in einem der Hörsäle der mechanisch-mathematischen Fakultät veranstaltet. Der sowjetische Wissenschaftsjournalist *W. Jankulin*, selbst Mathematiker, zeichnete Bemerkungen von Prof. *Alexandrow* über „den Wissenschaftler“ auf:

Sein Ziel

Das Prestige (Ansehen), das seit alters her die Tätigkeit und den Titel eines Wissenschaftlers begleitet, beruht auf zweierlei: erstens, daß die Wissenschaft die Wahrheit sucht als eines der höchsten Ziele, die der Mensch anstrebt, und zweitens, daß die Arbeit eines Wissenschaftlers untrennbar verbunden ist mit der Heranführung anderer, vor allem junger Menschen, an diese Wahrheit.

Wenn ein Mensch, der sich mit Wissenschaft beschäftigt, seine Tätigkeit unter diesen zwei Aspekten (Gesichtspunkten) begreift und danach handelt – die Suche nach der Wahrheit und die Heranführung an sie –, dann wird es die Gefahr eines ungehemmten, bloß quantitativen Wachstums der wissenschaftlichen Produktion kaum geben.

Seine Motive

Es ist von Übel, wenn das Verfassen einer wissenschaftlichen Arbeit zum Selbstzweck wird. Für das Schreiben von wissenschaftlichen Arbeiten will ich nur zwei Motive anerkennen:

unmittelbaren Nutzen zu liefern, oder das uneigennützige Interesse an Erkenntnis, besser gesagt, leidenschaftliche wissenschaftliche Neugierde, die den Menschen so lange nicht ruhen läßt, bis er sie befriedigt hat.

Natürlich können beide Motive – das Streben nach praktischem Nutzen und wissenschaftlicher Neugierde – wunderbar miteinander existieren, wie das *Euler* und *Gauß* und in der neueren und jüngsten Zeit *Tschebyschow*, *Poincaré*, *Shukowski* und viele andere zeigen. Der Funke wissenschaftlicher Kreativität (Schöpfungstum) entflammt erst dann, wenn das Interesse für die zu lösende Frage einen solch kritischen Stand erreicht, daß der Mensch

nicht mehr umhin kann, sich damit zu beschäftigen, wenn er von dem Streben nach ihrer Lösung völlig beherrscht wird. Der Anstoß dazu mag sehr verschieden sein. Nehmen wir ein Beispiel aus dem Leben eines der größten Wissenschaftler der Neuzeit, des Astronomen und Mathematikers *Johannes Kepler*, der von 1571 bis 1630 lebte.

Er wurde mit ungefähr vierzig Jahren Witwer, und er beschloß zwei Jahre darauf, wieder zu heiraten. Seine neue Frau war die Tochter eines Weinhändlers. Bald nach der Heirat kam ein Kaufmann, der den Inhalt von Weinfässern messen wollte, um den Preis zu bestimmen. Ein schwieriges Unterfangen, denn Fässer haben keine regelmäßige zylindrische Form. Am einfachsten könnte man ihren Inhalt messen, indem man sie mit Eimern füllt – oder eimerweise entleert. Das ist einem Weinhändler aber nicht mehr möglich.

Kepler fühlte sich herausgefordert durch das Problem der Berechnung des Inhalts von Fässern. Das Ergebnis war eine geniale mathematische Arbeit, die den Untertitel trug: „Eine neue Stereometrie von Weinfässern“. Dabei hatte *Kepler* am Beispiel von Weinfässern allgemeingültige Methoden zur Bestimmung von Volumina entwickelt, die durch gekrümmte Oberflächen begrenzt sind. So wurde er einer der Begründer der Integralrechnung.

Seine Qualen

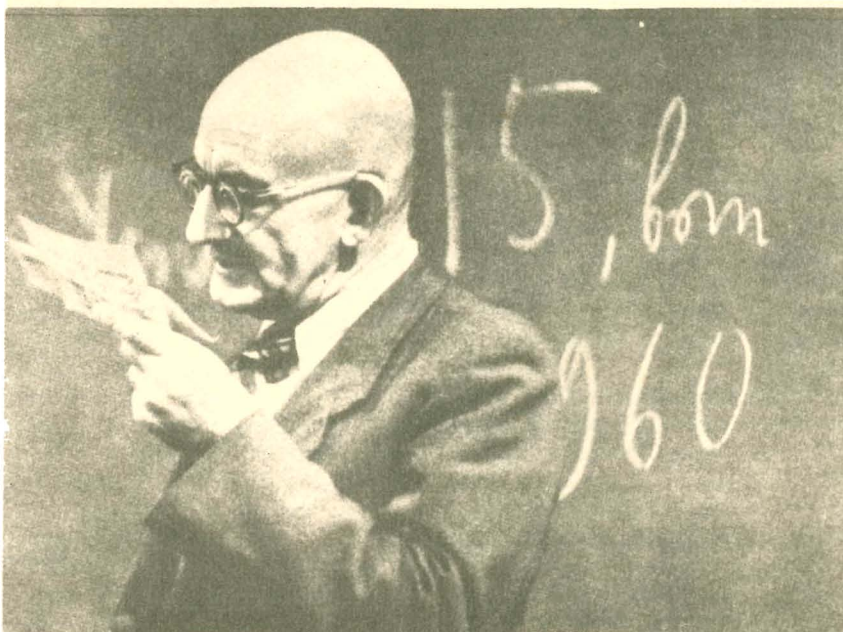
Wissenschaftler, deren Beruf eine Berufung ist, verspüren den inneren Zwang, sich mit ihrem Problem zu beschäftigen. Das wird ihnen zur Qual. Dieser Ausdruck „Qual“ in bezug auf wissenschaftliche Arbeit stammt nicht von mir, sondern von dem Mathematiker *Kurant*, einem der großen Mathematiker unserer Zeit. Diese Qual – so sagte er mir in einem Gespräch – erklärt, warum die meisten

Mathematiker verhältnismäßig früh ihre eigene schöpferische Arbeit beenden: Sie halten einfach die ständige innere Spannung, mit der ihre Arbeit verbunden ist, nicht sehr lange aus. Wenn ich von wissenschaftlicher Arbeit spreche, dann stütze ich mich selbstverständlich auf meine eigene Erfahrung. Und obwohl diese Erfahrung die Mathematik ist, glaube ich nicht, daß sie in anderen Wissenschaften, zumindest in den sogenannten exakten Wissenschaften, wie der Physik, der Chemie und anderen, eine wesentlich andere wäre. Wenn es um echte wissenschaftliche Arbeit geht und nicht um das Schreiben einer notwendigen Anzahl von Seiten, dann ist die sogenannte ruhige wissenschaftliche Arbeit ein Mythos.

Wissenschaftliche Arbeit, das ist die Suche nach der Wahrheit, und sie ist immer unruhig und besteht immer aus dem Übergang von einem mißglückten Versuch zum anderen, bis man schließlich einen erfolgreichen Weg findet – wenn man ihn überhaupt findet. Diese Arbeit ist genauso unruhig wie die Arbeit eines Musikers, der so lange nach dem Klang eines musikalischen Satzes sucht, bis er ihn gefunden hat. Noch unruhiger kann höchstens die Arbeit des Chirurgen sein, der sich zu alledem noch bewußt ist, daß jeder Mißgriff das Leben eines Patienten kosten kann.

Seine Freude

Eines der wesentlichen Momente für einen Wissenschaftler besteht meiner Meinung nach darin, daß er sich als Beteiligter am gesamten geistigen Leben seiner Epoche und seines Landes betrachtet, daß er sich an der geistigen Auseinandersetzung seiner Zeit beteiligt. Dann spürt er auch seinen Anteil an Verantwortung. Darin liegt eine der Ursachen für das Bestreben des Wissenschaftlers, seine Kenntnisse seinen Schülern zu übermitteln.



Ein Streben, das letztlich auch eine unmittelbare emotionale (gefühlsmäßige) Quelle hat – die Freude daran, daß es diese Schüler gibt.

Seine Freunde

In diesem Zusammenhang einige Bemerkungen über zwei hervorragende Mathematiker der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts:

Über den Deutschen *Hausdorff* und den Holländer *Brouwer*. Beide vertraten jene sehr allgemeine und sehr abstrakte Richtung der höheren Mathematik, die unter der Bezeichnung *Theoretische Mengenrichtung* bekannt ist. *Brouwer* und *Hausdorff* waren einander ganz und gar unähnlich, hatten aber doch gemeinsame Züge. Sowohl der eine als auch der andere wollte in jungen Jahren, bevor er Mathematiker wurde, Musiker werden: *Hausdorff* Komponist und *Brouwer* Pianist. Zweitens interessierten sich beide bis zum Ende ihrer Tage für Fragen der Ethik, der Moral und der Philosophie.

Ihre musikalischen Neigungen behielten sie ihr ganzes Leben lang. Im Arbeitszimmer eines jeden stand ein Flügel. Bei meiner ersten Begegnung mit *Brouwer* zum Beispiel hörte ich von ihm die Violinkonzerte *Vivaldis*, die *Bach* fürs Fortepiano umgeschrieben hatte.

Ich hatte auch Gelegenheit, *Hausdorff* musizieren zu hören. Er hatte umfassende und subtilste (feinste) kulturelle Interessen. Als er Mathematiker wurde, schrieb er Theaterstücke, die in den zwanziger Jahren mit Erfolg auf deutschen Bühnen gespielt wurden. Sein Beitrag zur Mathematik besteht hauptsächlich darin, daß er zum ersten Mal den Inhalt einiger neuer mathematischer Objekte erfaßt hatte: Dies sogenannten topologischen Räume, die er in die Mathematik einführte, womit er den Grundstein für die Erforschung ihrer Eigenschaften legte.

Der umfassende Charakter sowohl der mathematischen als auch der kulturellen Interessen verlieh der Lehrtätigkeit *Hausdorffs* Glanz und Universalität. Mein Umgang mit *Hausdorff* brach mit der Machtergreifung Hitlers ab. *Hausdorff* fand ein tragisches Ende. Zu Beginn des Jahres 1943 erfuhr *Hausdorff* von einem seiner früheren Schüler, daß er in ein Vernichtungslager transportiert werden sollte. Er zog es vor, mit seiner Frau in seinem Haus dem Leben ein Ende zu machen...

Sein Standpunkt

Gewiß, es gibt auch Menschen, die sich mit Wissenschaft beschäftigen, ohne Zweifel begabt sind und sogar wichtige wissenschaftliche Ergebnisse gewinnen, doch von dem, was ich unter „Wissenschaftler“ verstehe, weit entfernt sind. Sie sehen ihre Wissenschaft nur vom Standpunkt ihrer eigenen Erfolge. Um ein bekanntes Wort *Stanislawskis* über die Kunst abzuwandeln, sie sehen nicht die Wissenschaft in sich, sondern sich in der Wissenschaft.

Diese egozentrische (alles auf das Ich beziehende) Haltung überträgt sich zuweilen auf die pädagogische Tätigkeit, wodurch schon die Schüler verdorben werden können. Solche Erscheinungen sind zu unserem Glück Ausnahmen, aber es gibt sie. Manchmal ist es so, daß sich eine derartige Haltung erst in den späteren Jahren zu entwickeln beginnt und in wissenschaftliche Ruhmsucht und Eigensucht übergeht. Was ist die Ursache einer solchen Fehlentwicklung? Meiner Meinung nach der Mangel an einer tiefgehenden allgemeinen Kultur und das Fehlen der Angewohnheit, über Dinge nachzudenken, die außerhalb der unmittelbaren Beziehung zum enggefaßten Gegenstand der eigenen Arbeit stehen.

Ich glaube deshalb, daß kein Lehrender, ganz gleich, ob er sich Professor, Dozent oder Lehrer nennt, das Recht hat, auf eine umfassende kulturelle und natürlich auch eine gesellschaftliche Erziehung seiner Schüler zu verzichten.

Die Kultur besteht in der Kunst zu lesen, Musik zu hören, die Werke der Natur und der darstellenden Kunst zu betrachten. Lesen können, das bedeutet, über das Geschriebene nachdenken zu können. Bücher werden ja geschrieben, um über sie nachzudenken, und nicht nur die Fabel aufzunehmen. Zum Lesen lernen, zum Hören und zum Sehen braucht man Erfahrung, braucht man Training.

Sein Jahrhundert

Man nennt unser Jahrhundert oft *das Jahrhundert der Technik*. Das ist richtig. Die Technik hat gerade jetzt ein prinzipiell neues Niveau erreicht, das uns ermöglicht, Probleme zu lösen, von denen man noch vor einigen Jahrzehnten im besten Falle träumen konnte. Und wir Mathematiker können stolz darauf sein, daß die Mathematik dabei eine große Rolle spielt.

Heute ist völlig klar, daß die moderne Technik ausreicht, um den materiellen Wohlstand der Menschheit zu gewährleisten. Aber der Fortschritt zu einem höheren Ziel ist eine Frage der Umgestaltung der menschlichen Gesellschaft, lösbar nur durch die Verwirklichung der Ideale der kommunistischen Gesellschaft. Deshalb ist es auch offensichtlich, daß die Technik selbst und der technische Fortschritt für die Menschheit nur ein Mittel und nicht Selbstzweck sind.

In der kommunistischen Gesellschaft wird die Arbeit Lebensbedürfnis sein. Ich hoffe, daß die Menschen dann Zeit haben und aufhören werden, in Hektik und Hast zu leben.

Man sagt, daß die moderne Musik den Rhythmus der modernen Epoche, die Epoche der Technik widerspiegelt. Mag sein, daß die Musik in der Epoche des Kommunismus den Rhythmus der Epoche widerspiegeln wird, in der die Menschheit begreift, daß nicht die Menge der Eindrücke, sondern ihre Tiefe die

Eine Aufgabe von
Prof. Dr. sc.

I. M. Jaglom

Universität Jaroslawl, Sektion Mathematik

▲1677▲ Zwei verschiedene natürliche Zahlen bezeichnen wir als GUTE, wenn diese sich in dieselben Primzahlen zerlegen lassen (im allgemeinen mit verschiedenen Potenzen, z. B.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$).

Diese Zahlen heißen dann SEHR GUTE, wenn die beiden nächsten natürlichen Zahlen auch GUT sind (z. B. $6 = 2 \cdot 3$ und $48 = 2^4 \cdot 3$ sind SEHR GUT, weil $6 + 1 = 7$ und $48 + 1 = 49 = 7^2$ auch GUT sind).

Ist die Anzahl (Menge) der SEHR GUTEN Zahlenpaare endlich oder unendlich?

I. M. Jaglom

Ungewöhnliche Algebra

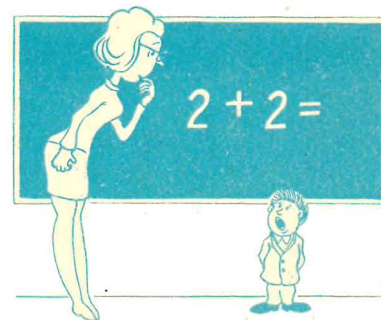
94 Seiten (1976) Preis: 5,50 M

L. I. Golowina/I. M. Jaglom

Vollständige Induktionen in der Geometrie

144 Seiten (1973) Preis: 6,00 M

(beide Titel erschienen bei BSB B. G. Teubner, Leipzig)



„Ich muß erst das Kollektiv befragen!“

Möglichkeit für eine wahre Aufnahme der Welt in ihrer ganzen Schönheit eröffnet. Diese Freude an der Welt, das grenzenlose Entzücken, von dem der russische Dichter *Alexander Blok* sprach, von dem *Skrjabin* und *Beethoven* und *Shubert* sangen, von dem aber auch die von mir erwähnten Mathematiker wußten – all das wird dann der Menschheit, diesem befreiten Prometheus, eigen sein.

18 Olympiade- aufgaben aus Freundesland

Ma 5▲1▲ In den Term $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ sind Klammern so einzufügen, daß man

- die Zahl 50,
- die kleinstmögliche Zahl,
- die größtmögliche Zahl erhält.

Ma 5▲2▲ Es ist die kleinste durch 36 teilbare natürliche Zahl zu finden, in der alle 10 Ziffern vorkommen.

Ma 6▲3▲ Auf einer gegebenen Geraden g ist ein solcher Punkt zu bestimmen, für den die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B der Ebene am kleinsten ist.

Ma 6▲4▲ Im Innern eines konvexen Vierecks konstruiere man einen Punkt, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten am kleinsten ist.

Ma 6▲5▲ Ein Wanderer geht von A nach B und zurück. Den gesamten Weg legt er in 3 Std. 41 Min. zurück. Der Weg von A nach B führt zunächst bergauf, dann auf ebenem Gebiet und danach bergab. Wie lang ist der Teil des Weges, der durch das ebene Gebiet führt, wenn die Geschwindigkeit des Wanderers bergauf $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, in ebenem Gebiet

$5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und bergab $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt und der Weg von A nach B die Länge von 9 km hat?

Ma 6▲6▲ Gegeben sind ein Winkel und ein Punkt M im Innern des Winkels. Durch diesen Punkt konstruiere man eine Gerade derart, daß der Abschnitt der Geraden zwischen den Schenkeln des Winkels durch den gegebenen Punkt in zwei gleiche Teile geteilt wird.

Ma 6▲7▲ Auf wieviel verschiedene Arten kann man ein 20-Kopekenstück in Münzen der Werte von 10, 5, 3 und 2 Kopeken wechseln?

Ma 6▲8▲ Man beweise, daß $9^{1972} - 7^{1972}$ durch 10 teilbar ist.

Ma 7▲9▲ Man beweise, daß aus $a + b + c = 0$ folgt

- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,
- $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$.

Ma 7▲10▲ a und b sind ganze positive Zahlen. Es ist bekannt, daß von den folgenden vier Behauptungen

- $a + 1$ ist teilbar durch b ,
 - $a = 2b + 5$,
 - $a + b$ ist teilbar durch 3,
 - $a + 7b$ ist eine Primzahl,
- drei Behauptungen wahr und eine unwahr ist. Es sind alle möglichen Paare $(a; b)$ zu finden.

Ma 7▲11▲ Man bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Abstände von den Geraden, die durch die vier Seiten des Einheitsquadrats führen, gleich 4 ist.

Ma 7▲12▲ Kann man alle zehnstelligen Zahlen, deren Ziffern nur aus Einsen und Zweien bestehen, so in zwei Teilmengen zerlegen, daß die Summe zweier beliebiger Zahlen aus einer Teilmenge nicht weniger als zwei Dreien enthält (alle Zahlen im Zehner-Positionssystem)?

Ma 7▲13▲ Angenommen, es seien die folgenden beiden Behauptungen wahr:

- Unter den Leuten, die einen Fernseher besitzen, gibt es solche, die keine Maler sind;
- die Leute, die jeden Tag schwimmen gehen, und keine Maler sind, besitzen keinen Fernseher.

Folgt hieraus, daß die Behauptung c) wahr ist?

c) Nicht alle Besitzer eines Fernsehers gehen jeden Tag schwimmen.

Ma 8▲14▲ Welche Zahl ergibt das Produkt

$$\frac{101 \cdot 100001 \cdot 100000001 \cdot \dots \cdot 100 \dots 001}{2^n - 1 \text{ Nullen}}$$

Ma 8▲15▲ Welche ganzzahligen Lösungen besitzt die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

Ma 8▲16▲ Zur Gleichung $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ sind die ganzzahligen Lösungen zu bestimmen.

Ma 8▲17▲ Man beweise: wenn die positiven ganzen Zahlen m und n relativ prim sind, dann existiert eine natürliche Zahl k , so daß die Zahl $m^k - 1$ durch n teilbar ist!

Ma 9▲18▲ Es haben sich n Menschen versammelt. Einige von ihnen sind miteinander bekannt. Je zwei Nicht-Bekannte haben

genau zwei gemeinsame Bekannte. Zwei Bekannte haben keine weiteren gemeinsamen Bekannten. Man beweise, daß die Anzahl der Bekannten für jeden der Versammelten gleich ist.

Aus: „Aufgaben aus Mathematikolympiaden“ von I. L. Babinskaja, Verlag Nauka Moskau.

Zur Verfügung gestellt, übersetzt und bearbeitet von stud. math. Otmar Langer z. Z. Student an der Universität Leningrad.

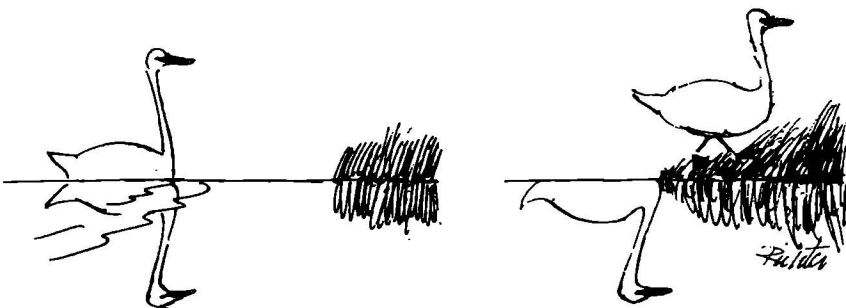
Auf der Spur eines sowjetischen Diploms

Aus meiner Adresse können Sie entnehmen, daß ich wieder an den Ort meiner Aspirantur zurückgekehrt bin – nach Minsk an die Belorussische Staatliche Lenin-Universität. Das Thema unserer mathematischen Forschungen ist im Freundschaftsvertrag der Jenaer und Minsker Universität verankert, die Konzeption für eine Monografie darüber hinaus bereits erarbeitet. Mein Freund *Mischa Kowaljow*, Kandidat der mathematisch-physikalischen Wissenschaften und Dozent am Lehrstuhl, und ich wollen sie in der DDR veröffentlichen. Wir stecken also mitten in der Arbeit. Und das ist wohl der beste Beweis, daß die Verbindung zu meiner Universität nicht abgerissen ist.

Sie fragen aber auch nach Erinnerungen. Viele sind verbunden mit meiner Funktion als Parteisekretär der Studentengrundorganisation der SED. Damals haben wir den jetzigen Sekretär der Aspiranten in unsere Reihen aufgenommen, jetzt konnte ich als Gast an der Wahlversammlung teilnehmen. Der gute Kontakt zu *Mischa Kowaljow* und zu meinem Doktorvater *Wladimir Aleksejewitsch Jemelitschew* ging und geht weit über die Arbeit hinaus. Gemeinsame Wanderungen und Naturbeobachtungen ließen uns einander nahekommen. Besonders beeindruckt war ich vom ersten Sprossergesang, dem Schlag der „Nachtigall des Nordens“, auf den mich *Wladimir Aleksejewitsch* hinwies...

Dr. Eberhard Girlich, wiss.

Oberassistent der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität, Jena





Begegnung mit Freunden

Seit einigen Jahren bestehen für die *Jungen Mathematiker* des Saalkreises (Bezirk Halle) zentrale Arbeitsgemeinschaften. Die Zirkel für die Klassen 5 bis 8 werden im Haus des Lehrers in Halle 14tägig durchgeführt. In den Veranstaltungen werden die Mathematikolympiaden vorbereitet und Knobelaufgaben gelöst. Die Entwicklung des mathematischen Denkens steht immer im Vordergrund. Alle Schüler arbeiten systematisch mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* und beteiligen sich zu einem großen Teil am *alpha*-Wettbewerb. Die jeweils zwei AG's einer Klassenstufe treffen sich an verschiedenen Wochentagen, um eine bessere Teilnahme zu sichern.

Die FDJler der 9. und 10. Klasse beschäftigen sich gemeinsam mit Komsomolzen der 55. sowjetischen Mittelschule mit der *Angewandten Mathematik*. Sie arbeiten 14tägig im Rechenzentrum der Martin-Luther-Universität Halle unter der Leitung eines Dipl.-Mathematikers. Neben dem Aufstellen kleiner Programme dürfen die Schüler selbst an den Organisations-Apparaten arbeiten. Unser Bild zeigt Komsomolzen und FDJler am Dupliziergerät. Dipl.-Math. Bergmann gibt Hinweise für die Kontrolle des Lochstreifens.

Im September 1975 wurde der *Kreisklub Mathematik* gegründet. Zum Klub gehören alle Schüler der zentralen Arbeitsgemeinschaften. Die Klubleitung bilden die Aktivvorsitzenden aus den AG's. Den Vorsitz der



Klubleitung übernahm Dr. Thiele vom Teubner-Verlag Leipzig. Ziel des Mathe-Klubs ist es, über die AG-Tätigkeit hinaus die Schüler mit Problemen der *Angewandten Mathematik* in der Praxis vertraut zu machen und interessante mathematische Höhepunkte zu organisieren.

In den Herbstferien kommen die *Jungen Mathematiker* zum Mathe-Treff. Am Vormittag wird die Kreisolympiade vorbereitet, und am Nachmittag stehen mathematische Spiele auf dem Programm. In den Winterferien werden differenzierte Veranstaltungen für jede Klassenstufe durchgeführt. So beschäftigen sich z. B. die 6. Klassen mit der *Mathematik im Bauwesen*. Nachmittags sind Lichtbildervorträge bzw. Kinobesuche eingeplant. In den Sommerferien fahren die besten Schüler aus den Arbeitsgemeinschaften der Klassen 5 bis 8 in das Spezialistenlager. Für die Klassen 9 und 10 sind Exkursionen mit Komsomolzen in Naherholungsgebieten unseres Bezirkes eingeplant.

Neben der Festigung der Sprachkenntnisse wird die Freundschaft zwischen den beiden Jugendverbänden vertieft.

Höhepunkt der AG-Tätigkeit sind die Veranstaltungen anlässlich des *Roten Oktobers*.

H. Rebmann

Aufgaben aus der zentralen Arbeitsgemeinschaft Mathematik des Saalkreises (Klassenstufe 5)

▲1▲ In einer Reihe stehen sechs Gläser, davon sind die ersten drei mit Wasser gefüllt. Indem nur ein Glas bewegt wird, soll erreicht werden, daß sich ein gefülltes und ein leeres Glas abwechseln.



▲2▲ Rekonstruiert folgende Multiplikation, wenn in dem Multiplikationsschema g eine gerade Ziffer und u eine ungerade Ziffer ($0 \leq g \leq 9$; $0 \leq u \leq 9$) bedeutet:

$$\begin{array}{r} u u \cdot g g u \\ \hline g u g u \\ g u u \\ \hline u u u u u \end{array}$$

(An verschiedenen Stellen des Schemas brauchen g bzw. u nicht verschiedene Ziffern zu sein!)

▲3▲ Wir stellen uns vor, daß längs des Äquators die Erde mit einem Fahrrad umrundet werden kann. Der Äquator ist 40000 km lang, der Umfang der Räder soll 2 m betragen. Beim Fahren sollen die Räder abrollen, d. h. weder rutschen noch gleiten. Wie oft drehen sich die Räder bei einer Umrundung?

▲4▲ In einem Buchlager ist ein bestimmtes Buch entweder in Paketen zu je drei Exemplaren oder in Paketen zu je fünf Exemplaren abgepackt vorhanden. Der Lagerverwalter erklärt, daß damit jede beliebige Anzahl von Büchern (die größer als sieben ist) zusammengestellt werden kann, ohne daß die Pakete geöffnet werden.

R. Thiele

Mein Zusatzstudium in der UdSSR

Im vergangenen Jahr hatte ich das große Glück, sechs Monate zu einem Zusatzstudium in die UdSSR fahren zu dürfen. Mein neuer Arbeitsplatz war das *Labor für Mathematik des Instituts für Inhalt und Methoden des Unterrichts an der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der UdSSR in Moskau*. Ein Ziel meines Aufenthaltes bestand darin, die Erfahrungen sowjetischer Pädagogen auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts zu studieren. Da in jüngster Zeit in der Sowjetunion neue Lehrpläne und Lehrbücher für das Fach Mathematik in Kraft getreten sind, war es für mich besonders interessant, mit einigen Autoren der neuen Mathematiklehrbücher wie *Schwarzburd*, *Semuschin*, *Neschkow*, *Rudnizkaja* und anderen ins Gespräch zu kommen.

Für die *alpha*-Leser habe ich einige Aufgaben aus den neuen sowjetischen Lehrbüchern für die Klassenstufen 4 und 5 mitgebracht.

▲1▲ Setze in die Zeichenreihe $1*2*3*4*5$ anstelle der Sternchen Operationszeichen oder Klammern so ein, daß der entstandene Term die Zahl 100 bezeichnet!

▲2▲ Setze zwischen die Zeichen 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Plus- oder Minuszeichen so ein, daß der entstandene Term die Zahl 100 bezeichnet!

▲3▲ Ersetze in dem Bild 1 alle freien Kästchen durch Zahlen so, daß die Summe dreier benachbarter horizontaler und vertikaler Zahlen 12 ergibt!

	5				
				1	
6					
			2		

▲4▲ Kann man der Tabelle (Bild 2) fünf Zahlen so entnehmen, daß deren Summe 20 ist?

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7

Dr. Lothar Flade, Sektion
Mathematik der Martin-Luther-Universität
Halle

Rosenkurven

Kurvenkonstruktionen

Die Liebhaber schöner geometrischer Figuren können sich mit der Konstruktion von Kurven beschäftigen, deren Gleichungen in Polarkoordinaten $r = a + b \sin \frac{m\phi}{n}$ lauten, worin a, b, m, n gewisse gegebene Zahlen sind. Um ein Polarkoordinatensystem festzulegen, wählt man eine Einheitsstrecke e , einen Pol O und eine Polarachse Ox . Die Lage eines beliebigen Punktes M wird dann durch den Polarradius OM und den Polarwinkel ϕ bestimmt, den die Strahlen OM und Ox miteinander bilden. Die Zahl r , die die Länge OM durch e ausdrückt ($OM = re$), und der im Grad- oder Bogenmaß ausgedrückte Zahlenwert des Winkels ϕ heißen *Polarkoordinaten des Punktes M*.

Für einen beliebigen Punkt, der vom Pol O verschieden ist, kann man $0 \leq \phi < 2\pi$ und $r > 0$ annehmen. Bei der Konstruktion von Kurven, die zu Gleichungen der Form $r = f(\phi)$ gehören, ist es jedoch sachgemäß, für die Variable ϕ beliebige Werte zuzulassen (unter anderem auch solche, die negativ oder größer als 2π sind), während r sowohl positiv als auch negativ sein darf.

Um den Punkt (ϕ, r) zu finden, zeichnen wir den Strahl mit dem Anfangspunkt O , der mit der Achse Ox den Winkel ϕ bildet und tragen auf ihm (bei $r > 0$) oder auf seiner Verlängerung in entgegengesetzter Richtung (im Falle $r < 0$) die Strecke $|r|e$ ab. Eine erhebliche Vereinfachung kann man dadurch erzielen, daß man vorher ein Koordinatennetz einzeichnet, das aus konzentrischen Kreisen mit den Radien $e, 2e, 3e$ usw. (mit dem Mittelpunkt im Pol O) und aus den Strahlen besteht, für die $\phi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 340^\circ, 350^\circ$ ist. Diese Strahlen sind dann auch für $\phi < 0^\circ$ und für $\phi > 360^\circ$ verwendbar: bei $\phi = 740^\circ$ und bei $\phi = -340^\circ$ beispielsweise haben wir es mit dem Strahl zu tun, für den $\phi = 20^\circ$ ist. [Siehe in d. Abb. die Punkte $M(40^\circ, 3)$, $N(120^\circ, -3)$ und $P(-1230^\circ, 2)$.]

Wir wollen die folgenden Kurven untersuchen:

$$\begin{aligned} \text{I. } r &= \sin 3\phi, & \text{II. } r &= \frac{1}{2} + \sin 3\phi, \\ \text{III. } r &= 1 + \sin 3\phi, & \text{IV. } r &= \frac{3}{2} + \sin 3\phi. \end{aligned}$$

Dazu stellen wir eine Tabelle auf:

ϕ	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$\sin 3\phi$	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0
$\frac{1}{2} + \sin 3\phi$	-0,5	-0,37	0	0,5	1	1,37	1,5	1,37	1	0,5
$1 + \sin 3\phi$	0	0,13	0,5	1	1,5	1,87	2	1,87	1,5	1
$\frac{3}{2} + \sin 3\phi$	0,5	0,63	1	1,5	2	2,37	2,5	2,37	2	1,5

ϕ	70°	80°	90°
$\sin 3\phi$	-0,5	-0,87	-1
$\frac{1}{2} + \sin 3\phi$	0	-0,37	-0,5
$1 + \sin 3\phi$	0,5	0,13	0
$\frac{3}{2} + \sin 3\phi$	1	0,63	0,5

(Hier ist 0,87 ein Näherungswert der Zahl $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Wir nennen Sektor (α, β) den Teil der Ebene, für dessen Punkte $\alpha \leq \phi \leq \beta$ ist. Verbinden wir die Punkte $(0^\circ, 0)$, $(10^\circ, 0,5)$, $(20^\circ, 0,87)$, $(30^\circ, 1)$, $(40^\circ, 0,87)$, $(50^\circ, 0,5)$, $(60^\circ, 0)$ durch eine glatte Kurve, so erhalten wir im Sektor $(0^\circ, 60^\circ)$ ein „positives Blatt“ (1) der Kurve I (Bild 2a). Setzen wir die Tabelle bis $\phi = 360^\circ$ fort und verbinden auf der Zeichnung die Punkte $(60^\circ, 0)$, $(70^\circ, -0,5)$, $(80^\circ, -0,87)$, $(90^\circ, -1)$, $(100^\circ, -0,87)$, $(110^\circ, -0,5)$, $(120^\circ, 0)$, die im Sektor $(240^\circ, 300^\circ)$ liegen, so bekommen wir in diesem Sektor ein „negatives Blatt“ (2) der Kurve I.

Es ist leicht zu erkennen, daß hierauf ein „positives Blatt“ (3) im Sektor $(120^\circ, 180^\circ)$, ein negatives Blatt (4) im Sektor $(0^\circ, 60^\circ)$, ein positives Blatt (5) im Sektor $(240^\circ, 300^\circ)$ und schließlich ein negatives Blatt (6) im Sektor $(120^\circ, 180^\circ)$ folgt.

Bei der Kurve I fallen die Blätter (1) und (4), (2) und (5), (3) und (6) paarweise zusammen. Aus den letzten drei Zahlen der Tabelle ist jedoch ersichtlich, daß

- 1) sich das erste positive Blatt (1) der Kurve II (siehe die $r = \frac{1}{2} + \sin 3\phi$ entsprechende Zeile der Tabelle) im Sektor $(-10^\circ, 70^\circ)$ befindet (größtes $r = 1,5$), das hierauf folgende negative Blatt (2) im Sektor $(250^\circ, 290^\circ)$ liegt (größtes $|r| = 0,5$) usw. (Bild 2a),
- 2) die Kurve III nur positive Blätter in den Sektoren $(-30^\circ, 90^\circ)$, $(90^\circ, 210^\circ)$ und $(210^\circ, 330^\circ)$ besitzt (Bild 2b),
- 3) im Falle der Kurve IV der kleinste Wert $r = 0,5$ beträgt und die Blätter „unfertig“ aussehen (Bild 2b). Ganz ähnlich verhält es sich mit den Kurven

$$r = a + \sin \frac{5\phi}{3} \text{ für } a = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}.$$

Hier läßt man den Winkel ϕ zweckmäßigerweise in Schritten von 18° (von 0° bis 1080°) variieren. Bei $a = 0$ befinden sich das erste (positive) und das zweite (negative) Blatt in den Sektoren $(0^\circ, 108^\circ)$ und $(288^\circ, 396^\circ)$ (Bild 3a), bei $a = \frac{1}{2}$ dagegen in den Sektoren $(-18^\circ, 126^\circ)$ und $(306^\circ, 378^\circ)$ (Bild 3b). Bei $a = 1$ gibt es nur fünf positive Blätter in den Sektoren $(-54^\circ, 162^\circ)$, $(162^\circ, 378^\circ)$ usw.; das-

selbe, aber mit „unfertigen Blättern“, gilt für $a = \frac{3}{2}$ (Bild 3c).

Im allgemeinen Falle der Kurve $r = \sin \frac{m\phi}{n}$ liegt das erste positive Blatt innerhalb des Sektors $(0^\circ, \frac{180^\circ n}{m})$, weil in diesem Sektor $0^\circ \leq \frac{m\phi}{n} \leq 180^\circ$ ist. Bei $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 1$ nimmt das Blatt einen Sektor ein, der zwischen 180° und 360° liegt, während für $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ ein „Sektor“ benötigt wird, der oberhalb 360° liegt (in Bild 4 ist dargestellt, wie die Blätter bei $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ aussehen).

Wir wollen die Gleichung $r = \sin \frac{m\phi}{n}$ für den Fall betrachten, daß m und n teilerfremd sind. Dann können folgende Fälle eintreten:

- 1) m gerade, n ungerade. Ändert sich ϕ von 0 bis $360^\circ n$, so erhalten wir eine vollausgebildete Rosette aus $2m$ Blättern $(360^\circ n : \frac{180^\circ n}{m} = 2m)$, von denen das letzte negativ ist; daher
- 2) m ungerade, n gerade. Ändert sich ϕ von 0 bis $n \cdot 180^\circ$ (eine ganze Zahl von Vollwinkeln!), so erhalten wir m Blätter $(n \cdot 180^\circ : \frac{180^\circ n}{m} = m)$, von denen aber das letzte positiv ist;

ändert sich ϕ weiter von $n \cdot 180^\circ$ bis $n \cdot 360^\circ$, so ergeben sich infolgedessen Blätter, die zu den bereits konstruierten diametral entgegengesetzt sind; im großen und ganzen entsteht wiederum eine Rosette aus $2m$ Blättern (in Bild 5b ist $m = 5, n = 2$).

- 3) m und n ungerade. Ändert sich ϕ von 0° bis $n \cdot 180^\circ$, so ergeben sich m Blätter, und das letzte derselben positiv ist, wird das folgende $(m+1)$ -te Blatt negativ und fällt mit dem allerersten positiven Blatt zusammen. Insgesamt bekommen wir, wenn ϕ von $n \cdot 180^\circ$ bis $n \cdot 360^\circ$ variiert, wieder alle m bereits konstruierten Blätter, nur daß diejenigen von ihnen, die beim „ersten Durchgang“ positiv waren, jetzt negativ werden und umgekehrt (in Bild 5c ist $m = 5$ und $n = 3$).

A. P. Domorjad

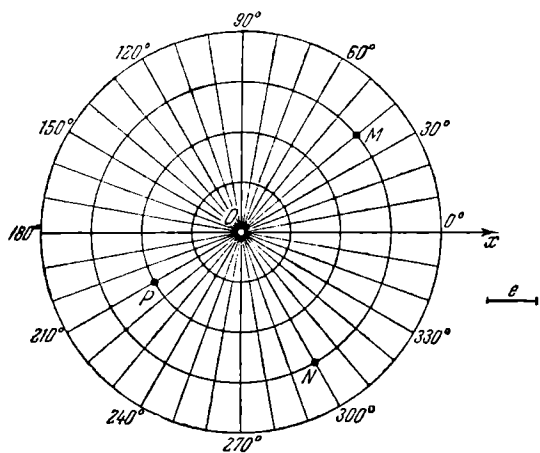


Bild 1

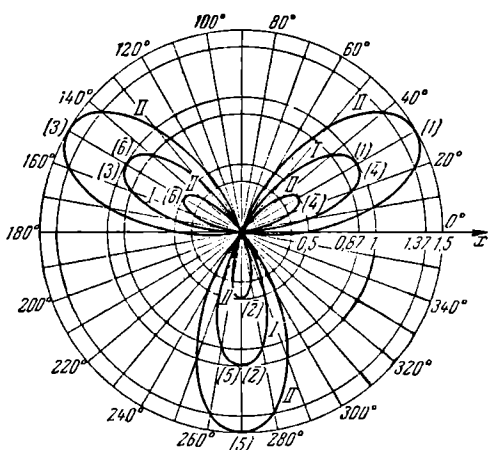


Bild 2a

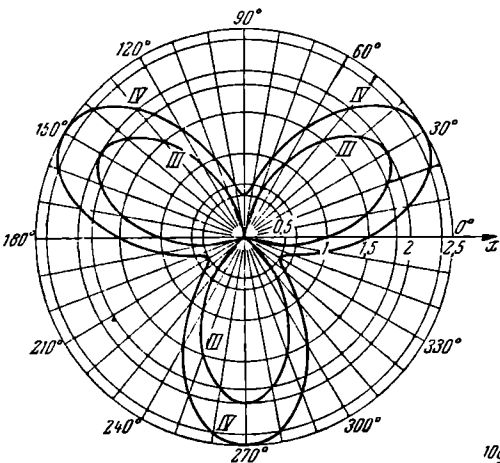


Bild 2b

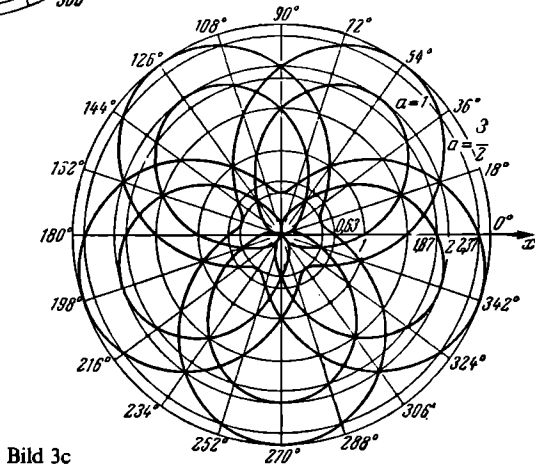


Bild 3c

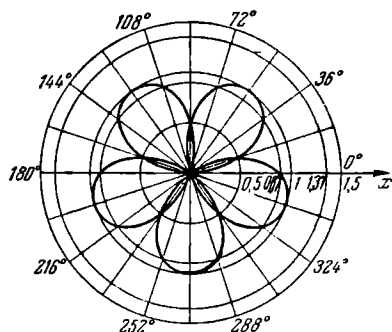


Bild 3a

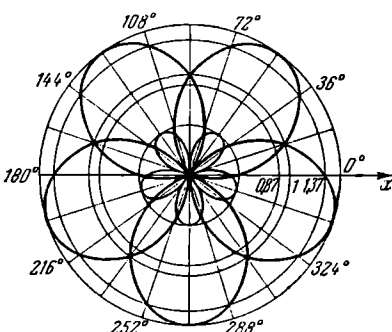


Bild 3b

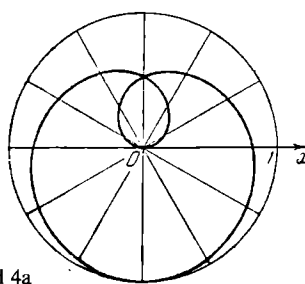


Bild 4a

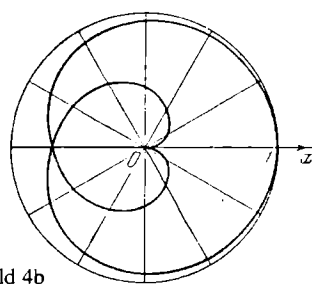


Bild 4b

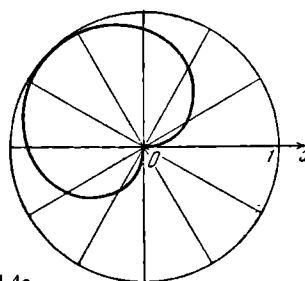


Bild 4c

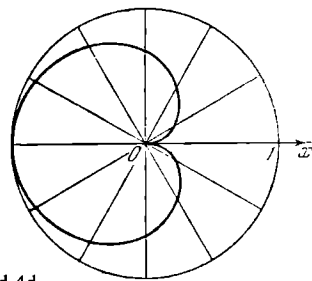


Bild 4d

Bild 5a

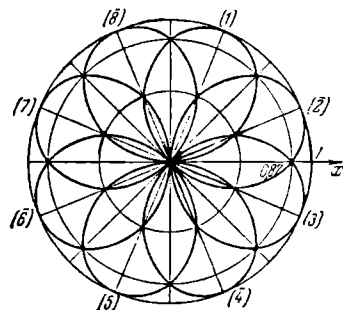


Bild 5b

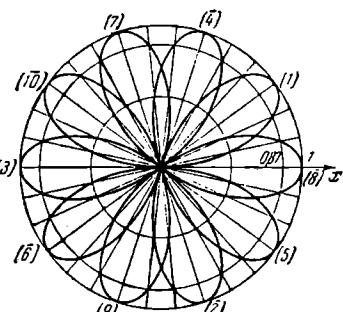
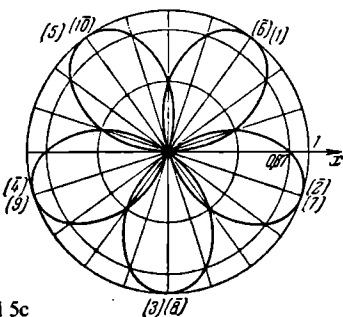


Bild 5c





Zeichnen hilft rechnen

Über die Anwendung von Diagrammen

Im einfachsten Falle werden die Größen einer mathematischen Aufgabe als *eindimensionales Diagramm* dargestellt. Ein solches Diagramm – oft nennt man es auch *Linien-* oder *Streckendiagramm* – besteht gewöhnlich aus einigen Strecken, deren Längen den Maßzahlen der zu betrachtenden Größen entsprechen. Häufig lassen sich aus den Bedingungen einer Aufgabe verschiedene Diagramme konstruieren, deren Vergleich zu einer Lösung führt.

Manchmal werden die Strecken, um sie deutlicher sichtbar zu machen, durch Rechtecke ersetzt. Ihre Breite kann dabei beliebig gewählt werden, sie muß nur bei allen Rechtecken gleich sein; von Bedeutung ist allein ihre Länge.

Mittagessen zu dritt

Klaus bezahlte an der Kasse der Werksküche drei Portionen Mittagessen, und Bernd bezahlte zwei Portionen (wobei alle fünf Portionen den gleichen Preis haben). Die beiden hatten sich gerade an den Tisch gesetzt, als Jürgen sich zu ihnen gesellte; und sie aßen zu gleichen Teilen alle fünf Portionen auf. Als die Freunde miteinander abrechneten, wurde klar, daß Jürgen für das, was er verzehrt hatte, 2,50 M bezahlen mußte.

Wieviel von diesem Geld gehört Klaus und wieviel Bernd?

Lösung

Wir nehmen dazu ein Blatt Kästchenpapier. Das erleichtert uns die Arbeit beim Zeichnen des Diagramms, das die Bedingungen der Aufgabe widerspiegelt. Da wir wissen, daß der Gesamtpreis des Essens gleichmäßig unter allen drei Freunden aufzuteilen ist, stellen wir den Preis für jede einzelne Portion als Strecke mit einer Länge von drei Kästchen dar (siehe Bild). Die obere blaue Strecke entspricht dem Preis für die drei Portionen, die Klaus bezahlte; die obere gelbe Strecke veranschaulicht den Preis für jene zwei Portionen, die von Bernd bezahlt wurden.

Folglich bedeuten beide Strecken zusammen den Preis für alle fünf Portionen, die von den drei Freunden gemeinsam verzehrt wurden. Nach den Bedingungen der Aufgabe beträgt Jürgens Schuld für sein Essen 2,50 M. Wieviel davon muß er nun Klaus und wieviel Bernd geben?

Die Antwort erhält man leicht aus demselben Diagramm. Wir teilen die gesamte Strecke in drei gleich lange Abschnitte. Jeder dieser Teile entspricht dem Preis des von jedem der drei Freunde verzehrten Essens. Dabei soll die mittlere dieser Strecken Jürgens Schuld für sein Essen – also 2,50 M – darstellen. Aus dem Diagramm geht hervor, daß jedes Kästchen auf der Zeichnung 0,50 M bedeutet. Ziehen wir jetzt durch den Punkt, in dem sich die obere blaue (Klaus) und die obere gelbe Strecke (Bernd) berühren, eine senkrecht verlaufende Gerade, so teilt diese die mittlere der drei Strecken (Jürgens Schuld) in zwei Teile:

Der linke Teil, der sich an die Schuld von Klaus anschließt, hat eine Länge von 4 Kästchen, während der rechte Teil, der sich an die Schuld von Bernd anschließt, nur aus einem einzigen Kästchen besteht.

Folglich muß Klaus von Jürgen 2,00 M bekommen, Bernd dagegen 0,50 M. Dieses Ergebnis, das anschaulich auf geometrischem Wege gefunden wurde, kann man mit Hilfe einfacher Berechnungen überprüfen.

Jürgen bezahlte für seinen Anteil am Essen 2,50 M. Folglich ist der Gesamtpreis für das ganze Essen gleich

$$2,50 \text{ M} \cdot 3 = 7,50 \text{ M}.$$

Daraus ergibt sich der Preis für eine Portion zu $7,50 \text{ M} : 5 = 1,50 \text{ M}$.

Klaus bezahlte an der Kasse $1,50 \text{ M} \cdot 3 = 4,50 \text{ M}$, Bernd bezahlte an der Kasse $1,50 \text{ M} \cdot 2 = 3,00 \text{ M}$. Demnach muß Jürgen an Klaus $2,00 \text{ M}$ ($4,50 - 2,50 = 2,00$) und an Bernd $0,50 \text{ M}$ ($3,00 - 2,50 = 0,50$) geben.

Wie wir sehen, kommt man auf diesem Weg zum gleichen Ergebnis.

Brüder und Schwestern

Ein Junge wurde gefragt, wie viele Brüder und Schwestern er habe. Er antwortete: „Ebenso viele Brüder wie Schwestern.“ Darauf fragte man seine Schwester, wie viele Brüder und Schwestern sie habe. Sie antwortete: „Ich habe halb soviel Schwestern wie Brüder.“

Wie viele Brüder und Schwestern waren es insgesamt?

Lösung

Wir skizzieren nach den Angaben der beiden Geschwister Diagramme. Dabei wollen wir die Anzahl der Jungen durch blaue Strecken und die der Mädchen durch rote Strecken darstellen. Wir müssen noch beachten, daß der Junge und das Mädchen bei ihren Antworten sich selbst nicht mitzählten.

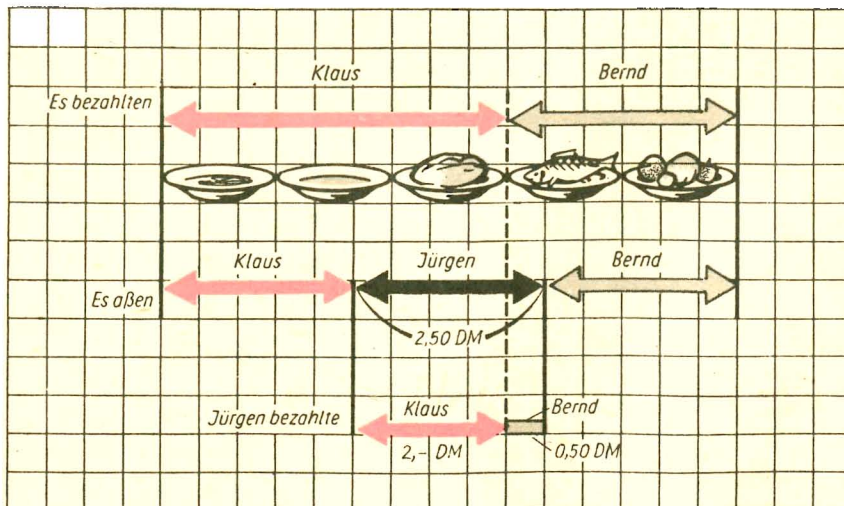
Der Junge sagte: „Ich habe ebenso viele Brüder wie Schwestern.“

Wir zeichnen also den Jungen und legen links von ihm eine Strecke fest, die alle seine Brüder veranschaulicht; rechts von ihm ziehen wir eine *gleich lange* Strecke, die allen seinen Schwestern entspricht (siehe Bild). Dabei stellt die Strecke „Meine Schwestern“ (die Schwestern des Jungen) die unbekannte Anzahl aller Mädchen dar.

Das Mädchen sagte: „Ich habe halb so viele Schwestern wie Brüder.“

Wir zeichnen deshalb das Mädchen (natürlich auf der „Mädchenseite“) und geben links von ihr eine Strecke für alle Brüder des Mädchens und rechts eine Strecke für alle Schwestern des Mädchens an. In diesem Diagramm (siehe Bild) muß die Strecke „Meine Brüder“ *doppelt so lang* sein wie die Strecke „Meine Schwestern“. Hier stellt die Strecke „Meine Brüder“ (die Brüder des Mädchens) die unbekannte Anzahl aller Jungen dar. Da die Gesamtzahl der Jungen und Mädchen in beiden Fällen eindeutig bestimmt (wenn auch noch nicht bekannt) ist, so muß die Länge des gesamten Diagramms *a* (zusammen mit der Strecke, die von der Figur des Jungen ein-

Bild 1



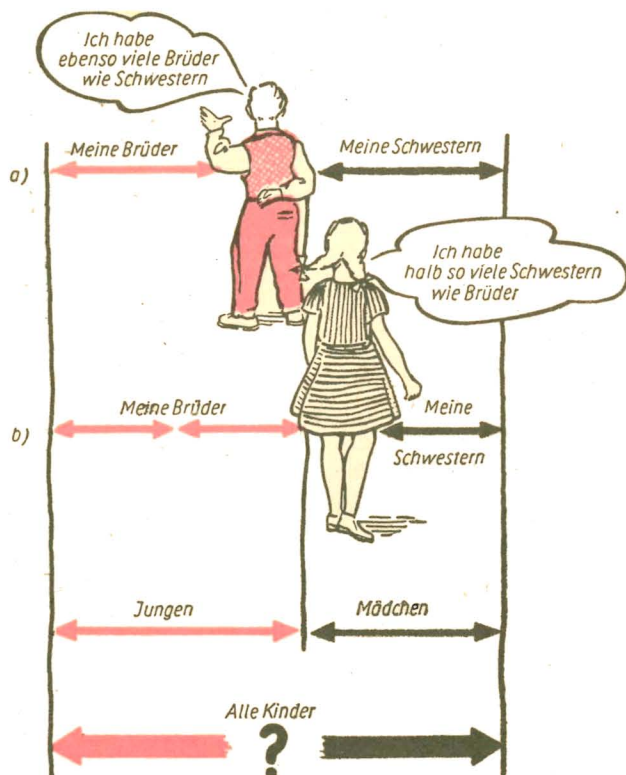


Bild 2

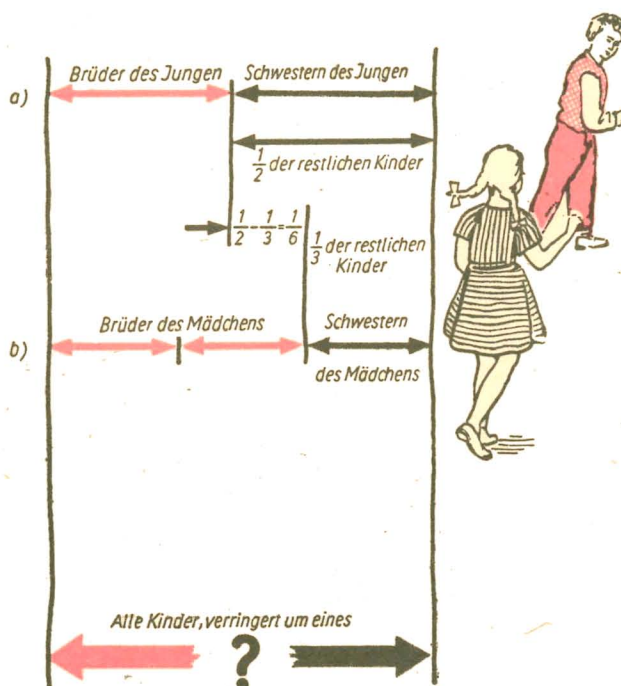


Bild 3

genommen wird) gleich sein der Länge des ganzen Diagramms *b* (zusammen mit der Strecke, die von der Figur des Mädchens eingenommen wird).

Jetzt lassen wir den Jungen und das Mädchen aus den Diagrammen „herausgehen“. Dadurch ergeben sich zwei neue Diagramme (siehe Bild) von wiederum gleicher Länge, da sie in beiden Fällen die Anzahl der restlichen Kinder darstellen. Sie bedeuten also jeweils eine um 1 kleine Zahl als die tatsächliche Anzahl aller Geschwister. Wenn der Junge weggegangen ist (Diagramm *a*), so stellen die Mädchen (rote Strecke) die Hälfte der restlichen Kinder; ist aber nicht der Junge weggegangen, sondern das Mädchen (Diagramm *b*), dann stellen die Mädchen (rote Strecke) nur ein Drittel der restlichen Geschwister. Daraus folgt, daß die Differenz der roten Strecken auf dem Bild ein Mädchen darstellt, das den 6. Teil der Anzahl der restlichen Geschwister ausmacht, denn

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Daher ist die Gesamtzahl aller Kinder, verringert um 1, gleich 6. Insgesamt waren es also 7 Geschwister, denn $6 + 1 = 7$;

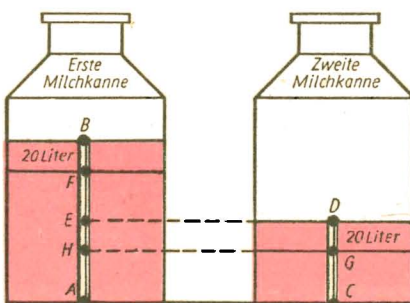
davon 3 Mädchen $\left(\frac{1}{2} \cdot 6 = 3\right)$ und 4 Jungen $(7 - 3 = 4)$.

Zwei Milchkanne

In einer Milchkanne ist doppelt soviel Milch wie in einer anderen. Wenn man aus beiden Kannen je 20 Liter Milch herausgießt, so ist in der ersten Kanne dreimal soviel Milch wie in der zweiten.

Wieviel Liter Milch waren anfangs in jeder Milchkanne?

Bild 4



Lösung

Wir zeichnen eine Gerade AC und errichten auf ihr zwei Senkrechte, AB und CD , die erste doppelt so lang wie die zweite (siehe Bild). Der Punkt E sei die Mitte der Strecke AB ; dann ist $AE = EB = CD$. Die Strecke AB und CD zeigen die Anfangsmengen an Milch in jeder der beiden Kannen. Von den Punkten B und D tragen wir willkürlich gewählte, aber gleiche Strecken BF und DG nach unten ab, die je 20 Liter Milch darstellen, welche aus jeder der Kannen ausgegossen wurden.

Dann bedeuten die Strecken AF und CG die restliche Milchmengen in den Kannen; dabei muß, in Übereinstimmung mit der Aufgabe, $AF = 3 \cdot CG$ sein, das heißt, die Strecke CG muß sich dreimal in die Strecke AF legen lassen.

Entfernen wir jetzt aus der Strecke AF die Strecke EF , die gleich der Strecke CG ist (überlege, warum $EF = CG$ ist!), dann muß die verbleibende Strecke AE in sich nur noch 2 CG enthalten. Wir verbinden die Punkte D und E durch eine gerade Linie. Parallel zu dieser Verbindungslinie legen wir eine Gerade durch den Punkt G , welche die linke Senkrechte im Punkt H schneidet. Nehmen wir nun $AH = CG$ von der Strecke AE weg, dann ist die verbleibende Strecke HE ebenfalls gleich CG . Da aber HE einer Menge von 20 Litern entspricht, muß die Strecke CG ebenfalls 20 Liter darstellen.

Folglich enthielt die zweite Milchkanne anfangs 20 Liter + 20 Liter = 40 Liter;

in der ersten Milchkanne waren anfangs

40 Liter $\cdot 2 = 80$ Liter.

Es ist offensichtlich, daß in unserer Skizze die Strecken BF und DG für eine genaue Darstellung von 20 Litern etwas zu kurz geraten sind. Dies hat die Zeichnung ein wenig verdorben, denn sie ist nicht maßstabgerecht; aber es hat nicht verhindert, daß wir die richtige Lösung fanden. Nachdem wir das Ergebnis kennen, ist es natürlich möglich, eine genaue Zeichnung anzufertigen.

Ostrowski/Kordemski



Aus der Schule geplaudert

Welche Zensuren hatten die Schüler?

Ein Lehrer hat die Arbeit von drei Schülern, Alexejew, Wassiljew und Sergejew, durchgesehen, aber nicht mitgebracht. Er sagte zu den Schülern: „Ihr habt in euren Arbeiten unterschiedliche Leistungen gezeigt („3“, „4“, „5“). Sergejew hat keine „5“ und Wasiljew hat keine „4“. Aber ich glaube, Alexejew hat eine „4“. Später stellte sich heraus, daß der Lehrer dem einen Schüler die richtige Zensur gesagt, sich aber bei den beiden anderen geirrt hatte.

Welche Zensuren hatten die Schüler?

Mathematischer Wettstreit

Man wollte den klügsten von drei Siegern eines mathematischen Wettstreites, die alle die gleiche Punktzahl hatten, auswählen. Dies geschah folgendermaßen: Man zeigte ihnen fünf Mützen, drei weiße und zwei graue. Dann verband man ihnen die Augen und setzte jedem eine Mütze auf. Die übriggebliebenen zwei wurden beiseitegelegt. Danach nahm man ihnen die Binden von den Augen und erklärte, daß derjenige der Sieger des Wettstreites sei, der als erster herausfindet, welche Farbe die Mütze habe, die er trägt. Die Teilnehmer des Wettstreites betrachteten sich eine Zeitlang schweigend. Schließlich war einer von ihnen überzeugt, daß er eine weiße Mütze trägt.

Wie kam er zu dieser Überlegung?

Wer zerschlug den Spiegel?

Zum Direktor einer Schule wurden neun Schüler gebracht. Einer von ihnen hatte einen Spiegel auf dem Flur zerschlagen. Wer war der Übeltäter? Die Schüler gaben folgende Antworten:

Lednjow: „Dima war's!“

Aljoscha: „Nein, Dima war gar nicht mit dabei.“

Boris: „Ich habe den Spiegel zerschlagen!“

Kostja: „Weder Boris noch Sergejew waren es.“

Dima: „Aljoscha lügt!“

Wasja: „Boris war's!“

Tolja: „Boris war's nicht!“

Sergejew: „Weder ich noch Boris haben den Spiegel zerschlagen.“

Panin: „Sergejew lügt! Und Dima war gar nicht mit dabei.“

Wer zerschlug den Spiegel, wenn von den neun Antworten nur drei wahr sind?

Die drei Lehrer

In einer Schule wurden die Fächer Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von den Lehrern Morosow, Wassiljew und Tokarew unterrichtet. Jeder von ihnen unterrichtete zwei Fächer. Der Geographielehrer und der Französischlehrer waren Nachbarn. Morosow war der jüngste von den dreien. Tokarew, der Biologielehrer und der Französischlehrer hatten einen gemeinsamen Schulweg. Der Biologielehrer war älter als der Mathematiklehrer. In der Freizeit spielten der Englischlehrer, der Mathematiklehrer und Morosow häufig mit einem vierten Partner Domino.

Welche Fächer unterrichteten die Lehrer?

K. A. Rupassow, Tambow

M. Ljapunow

Die Buchstaben in dem Namen des russischen Mathematikers M. Ljapunow (1857 bis 1918) und der Buchstabe x sind so durch die Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß nachfolgende Gleichungen zu wahren Aussagen werden. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{aligned}L \cdot L + A &= J J \\L J \cdot L + P &= J J J \\L J A \cdot L + U &= J J J J \\L J A P \cdot L + N &= J J J J J \\L J A P U \cdot L + O &= J J J J J J \\L J A P U N \cdot L + W &= J J J J J J J \\L J A P U N O \cdot L + M &= J J J J J J J J \\L J A P U N O W \cdot L + X &= J J J J J J J J J\end{aligned}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

FrISChe Pilze

Katja und Petja haben so viele Pilze gesammelt, daß sie diese kaum tragen konnten. Die Pilze bestehen aber zu 85% aus Wasser. Nachdem die Pilze getrocknet waren, wurden sie 15 kg leichter; jetzt enthielten sie nur noch 40% Wasser.

Wieviele kg frISChe Pilze hatten die Kinder gesammelt?

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau



Der Elefant und die Mücke

Ein Liebhaber der mathematischen Spielereien beschäftigte sich mit verschiedenen Umwandlungen algebraischer Ausdrücke und kam zu der sonderbaren Schlußfolgerung, daß das Gewicht eines Elefanten gleich dem Gewicht einer Mücke ist.

Er machte es so: er bezeichnete das Gewicht des Elefanten mit x , das Gewicht der Mücke mit y , die Summe dieser Gewichte mit $2v$. Dann ist $x + y = 2v$. Aus dieser Gleichung kann man zwei andere ableiten:

$$\begin{aligned} x - 2v &= y, \\ x &= -y + 2v. \end{aligned}$$

Dann multiplizierte er die linken und die rechten Seiten der beiden Gleichungen miteinander:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$$

Dann addierte er auf beiden Seiten v^2 und erhielt:

$$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$$

oder $(x - v)^2 = (y - v)^2$.

Dann zog er die Quadratwurzel aus beiden Seiten und erhielt: $x - v = y - v$ oder $x = y$,

d. h., das Gewicht des Elefanten (x) ist gleich dem Gewicht der Mücke (y).

Untersuche einmal, was hier los ist!

N. A. Gerasumowa/E. S. Nowgorobowa, Moskau

Magisches Quadrat

4	+		-		=	2
+		-		+		+
	-	2	+	0	=	
-		+		-		-
	+		-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-		=	3

A. A. Masanik,
Minsk

Auf der Wolga

● Nachdem ein Dampfer die Hälfte des Weges zurückgelegt hatte, vergrößerte er seine Geschwindigkeit um 25%, so daß er eine halbe Stunde früher als vorgesehen am Endpunkt ankam. In wieviel Stunden durchfuhr der Dampfer den ganzen Weg?

● Ein Dampfer soll eine bestimmte Flußstrecke bei gleichbleibender Maschinenleistung stromab in 3 Stunden und stromauf in $4\frac{1}{2}$ Stunden zurücklegen. In wieviel Stunden durchschwimmt ein nur von der Strömung getragenes leeres Fäßchen diese Entfernung?

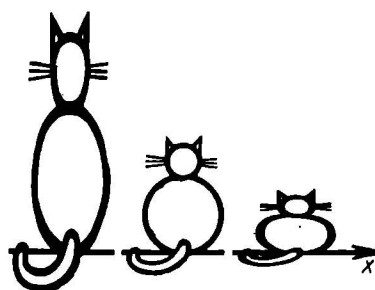
P. J. Germanowitsch

Kryptarithmetik aus Quant



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1978



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

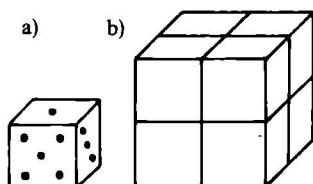
Redaktion *alpha*
7027 Leipzig, Postfach 14.

Mathematik

Ma 5 ■ 1650 Hans kaufte 3 Buntstifte und 4 Hefte und mußte dafür insgesamt 1,08 M bezahlen. Erwin kaufte 7 Buntstifte und 6 Hefte der gleichen Preislage und mußte dafür 2,12 M bezahlen. Wieviel kostete ein Buntstift bzw. ein Heft? *Sch.*

Ma 5 ■ 1651 Das Bild a) stellt die Anordnung der ungeraden Augenzahlen eines Spielwürfels dar. Acht gleichgroße Spielwürfel seien, wie aus Bild b) ersichtlich, zu einem größeren Würfel zusammengesetzt. Ein Betrachter dieses Würfels möge genau drei in einer Ecke zusammenstoßenden quadratischen Flächen sehen. Wie sind die acht Spielwürfel zu setzen, damit der Betrachter nur ungerade Augenzahlen sieht und

1. die Summe der Augenzahlen möglichst klein,
2. die Summe der Augenzahlen möglichst groß ist?



Wie groß ist in jedem der beiden Fälle die Summe aus allen sichtbaren Augenzahlen? Zeichne die erforderlichen Skizzen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1652 In der Subtraktionsaufgabe

$$\begin{array}{r} ****6 \\ - **** \\ \hline * \end{array}$$

ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 1653 Zeichne eine Gerade g_1 , lege auf ihr zwei verschiedene Punkte A und B fest, zeichne durch A die Senkrechte g_2 zu g_1 und durch B die Senkrechte g_3 zu g_1 ! Konstruiere schließlich alle diejenigen Punkte, die von den Geraden g_1 , g_2 und g_3 den gleichen Abstand haben!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1654 Ein Rechteck habe den Umfang $u = 14$ cm und den Flächeninhalt $A = 10$ cm². Welche Länge (in ganzen Zahlen) haben die Rechteckseiten a und b ?

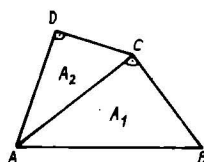
Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle! *Sch.*

Ma 5 ■ 1655 Eine Verkaufsstelle für Oberbekleidung erhielt eine Lieferung von 45 preisgleichen Anzügen und 20 preisgleichen Kleidern von einem Gesamtwert von 10825,- M. In der ersten Woche wurden von dieser Lieferung 25 Anzüge und alle Kleider verkauft und dafür insgesamt 6725,- M eingenommen. Wie hoch ist der Preis für einen Anzug bzw. für ein Kleid?

Fachlehrer Dieter Knappe, Jessen

Ma 6 ■ 1656 Die abgebildete Figur stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b = 2a$ dar. Über der Kathete $\overline{AC}$ wurde ein gleichschenklighrechtwinkliges Dreieck ACD mit $\overline{AC}$ als Basis konstruiert. Es sei A_1 der Flächeninhalt des Dreiecks ABC , A_2 der Flächeninhalt des Dreiecks ACD . Welche der drei Beziehungen $A_1 < A_2$, $A_1 = A_2$, $A_1 > A_2$ trifft zu?

Lehrer H. Engelmann, Sachsendorf



Skizze
 $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{BC}$
 $\overline{AD} = \overline{CD}$

Thies Luther, 26 Güstrow, Werdersstr. 22		Ma 7 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Dem Kreis k seien ferner ein Durchmesser $\overline{DE}$ und eine senkrecht auf diesem stehende Sehne $\overline{AB}$ von der Länge 6 cm eingezeichnet. Der Mittelpunkt von $\overline{DM}$ sei C . Das Viereck $ACBD$ nennt man ein Deltoid. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Deltoids $ACBD$ und die Größe des Winkels $\angle ADB = \delta$! *Fr.*

Ma 10/12 ■ 1676 Gegeben sei das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = c = 5$ cm, $\overline{BC} = a = 4$ cm und $\overline{AC} = b = 3$ cm. Unter welchem Winkel schneidet die Mittelsenkrechte auf der Seite $\overline{BC}$ die Gerade, auf der die Höhe h_c liegt? *Fr.*

Physik

Ph 6 ■ 21 Sportlehrer Müller fährt mit einer Schülergruppe in der Eisenbahn zu einem Sportfest. Während der Fahrt fragt Klaus, wie schnell der Zug wohl im Augenblick fahre. Herr Müller holt eine Stoppuhr aus der Tasche und mißt zwischen den Kilometersteinen mit den Angaben 50,2 und 51,6 eine Zeit von 70 Sekunden. Als er das den Schülern mitteilt, sagt Peter: „Und ich habe in der gleichen Zeit genau 36 Telegrafmasten gezählt, an denen wir vorbeigefahren sind.“

„Gut“, erwidert Herr Müller, „Dann sagt mir, welchen Abstand die Telegrafmasten voneinander haben und welche Geschwindigkeit unser Zug hat!“ *Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph 7 ■ 22 Bei einem Gewehr verläßt ein Geschos den Lauf innerhalb von $\frac{1}{900}$ s und besitzt eine Energie von 350 kpm. Berechne die Leistung, die in dem Gewehr erzielt werden muß, in kW!

Ph 8 ■ 23 1 kWh (Kilowattstunde) Elektroenergie kostet nach dem Haushaltstarif 0,08 M. In welcher Zeit verbraucht eine 60-Watt-Glühlampe für einen Pfennig Elektroenergie? *Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ph 9 ■ 24 Wie groß ist die Sichtweite für einen erwachsenen Menschen (Augenhöhe 1,70 m) auf dem Mond (Radius 1738 km)?

Schüler Uwe Kassner, Bernau

Ph 10/12 ■ 25 Die magnetische Feldstärke H im Zentrum einer stromdurchflossenen, langen Zylinderspule ohne Ferromagnetikum (auch Luftspule genannt) ist nur durch den Strom I , die Windungszahl N und die Spulenlänge l bestimmt. Dann gilt $H = \frac{I \cdot N}{l}$. Zur Aufrechterhaltung dieses Feldes ist eine elektrische Leistung P als Produkt aus einer angelegten Spannung U und fließendem Strom I nötig, also $P = U \cdot I$. Gegeben sei eine Spule mit dem äußeren Durchmesser der Wicklung von $D = 5$ cm, die je Wicklungslage $N_l = 300$ Windungen eines Kupferdrahtes mit $d = 0,1$ cm Durchmesser hat. Der Ohmsche Widerstand des Spulendrahtes wurde mit

einer Meßbrücke zu $R_{gem} = (9,6 \pm 0,1)$ Ohm bestimmt. Nach einer Tabelle hat ein 100 m langer Kupferdraht von 1 mm Durchmesser einen Widerstand von 2,27 Ohm.

Gesucht sind:

1. die Anzahl M der Wicklungslagen dieser Spule,
2. der maximal zulässige Meßfehler des Drahtwiderstandes, um sicher für eine Lagenanzahl entscheiden zu können,
3. die magnetische Feldstärke H in $\frac{AN}{m}$ im Spuleninnern, wenn der Spulendraht mit $I = 10$ A beaufschlagt wird und
4. die Wärmeleistung in Watt, die von einem Kühlaggregat aufgebracht werden muß, um die Temperatur der Spule bei einem Strom von $I = 10$ A konstant zu halten.

Hinweis: Man stelle den Ausdruck für den Gesamtwiderstand $R(M)$ bei M Wicklungslagen auf und variiere M , bis $R(M)$ dem gemessenen Widerstand R_{gem} am nächsten kommt; $R(M)$ ist nur für ganze M (es gibt nur vollständige Lagen) definiert. Zur Bestimmung des maximal zulässigen Meßfehlers beachte man das ungünstigste Vorzeichen dieses Fehlers. *Dr. U. Rösler, Berlin*

Chemie

Ch 7 ■ 17 Zur motorischen Verbrennung von 1 dm³ Kraftstoff gehören 8430 dm³ Luft. a) Ein Kleinroller „Schwalbe“ fährt 200 km und verbraucht dabei 6 l Kraftstoff. Wieviel dm³ Luft werden dabei benötigt?

b) Zum besseren Verständnis des benötigten Luftvolumens soll folgender Vergleich angestellt werden:

Würde die Luft eines Wohnzimmers (5 m × 3,50 m × 2,50 m) ausreichen, um diese Menge Kraftstoff vollständig verbrennen zu können?

Ch 8 ■ 18 Durch zusätzliche Auslieferung von Stickstoffdüngemitteln (3000 t bei Jahresende) wollen die Schwedter Chemiewerker den Werktätigen der DDR-Landwirtschaft helfen, Ertragsausfälle durch Trockenheit auszugleichen. 1 kg Stickstoff ermöglicht 80 kg Grünfutter mehr zu erzeugen.

a) Wieviel Tonnen Grünfutter können zur Stabilisierung der Futterversorgung der Landwirtschaft unserer Republik zusätzlich erzeugt werden?

b) Diese zusätzlich erzeugte Grünfuttermenge bedeutet eine jährliche Mehrproduktion von 4% (vier Hundertstel). Wieviel Tonnen Grünfutter werden in einem Jahr in unserer Republik erzeugt?

Ch 9 ■ 19 Durch die Produktion von mineralischen Düngemitteln trägt unsere chemische Industrie zur besseren Versorgung der Landwirtschaft bei. Kaliumsulfat ist der Hauptbestandteil des Düngemittels „Schwefelsaures Kali“. Berechnen Sie:

- a) wieviel Gramm der drei Elemente sind in 1 Sg Kaliumsulfat enthalten,
- b) die prozentuale Zusammensetzung für die im Kaliumsulfat enthaltenen Elemente,
- c) wieviel Gramm Kalium sind in 20 g einer 10%igen Lösung von Kaliumsulfat enthalten!

Ch 10/12 ■ 20 Wieviel Liter bzw. Kubikmeter Luft sind zur völligen Verbrennung von 1 m³ Stadtgas erforderlich, wenn dieses die folgende Zusammensetzung hat?

50% Wasserstoff, 35% Methan, 3% Äthylen, 8% Kohlenmonoxid, 3% Stickstoff, 1% Kohlendioxid.

Es sei angenommen, daß Luft und Stadtgas gleichen Druck und gleiche Temperatur haben und daß die Luft $\frac{1}{5}$ Volumen Sauerstoff enthält.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Liebe Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*!

Groß ist die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb. In unserer Redaktion gehen dabei zu einer Aufgabe unterschiedliche Lösungen ein. Da eine Lösungsidee oftmals interessanter ist als die Aufgabenstellung selbst, wollen wir eingegangene Lösungen zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen. Wir hoffen, damit Anregungen zu geben, wie man mathematische Probleme anpacken und erfolgreich lösen kann. Im Heft 6/1976 wurde folgende Aufgabe gestellt:

Ma 6 ■ 1572 In einem Regal einer Bibliothek befinden sich mehr als 340, aber weniger als 350 Bücher. Genau der vierte Teil dieser Bücher besteht aus Kinderbüchern, genau der dritte Teil aus Erzählungen, die restlichen Bücher sind Romane.

Wieviel Kinderbücher, Erzählungen und Romane enthält dieses Regal?

Schülerin Karin Sukowski, Neukloster

Zu dieser Aufgabe wurde von uns eine Lösung in Heft 2/1977 veröffentlicht. Nun stellen wir weitere Lösungen von *alpha*-Lesern vor, die uns besonders gefallen haben.

Redaktion alpha

Kirsten Brandt, Rosa-Luxemburg-Oberschule, Jena-Neulobeda, Kl. 6c:

Von den Zahlen 341, 342, ..., 348, 349 sind nur die Zahlen 344 und 348 durch 4 teilbar. Von diesen beiden Zahlen ist nur 348 außerdem auch durch 3 teilbar.

$348 : 4 = 87$; $348 : 3 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$.

Das Regal enthält 87 Kinderbücher, 116 Erzählungen, 145 Romane.

Unser Kommentar:

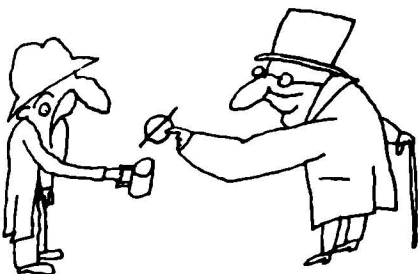
In der Kürze liegt die Würze!

Holger Laube, Dr.-Theodor-Neubauer-Schule, Schlotheim, Kl. 5c:
 $340 < n < 350$;
 Menge der durch 4 teilbaren Zahlen n :
 $M_1 = \{344, 348\}$;
 Menge der durch 3 teilbaren Zahlen n :
 $M_2 = \{342, 345, 348\}$;
 Durchschnittsmenge: $M_1 \cap M_2 = \{348\}$
 $\frac{1}{4} \cdot 348 = 87$; $\frac{1}{3} \cdot 348 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$.

(Antwortsatz wie oben)

Unser Kommentar:

Holger verdient besonderes Lob! Als Schüler einer 5. Klasse löst er bereits Aufgaben aus der Klassenstufe 6, und er hat sich bereits mit der Mengenlehre beschäftigt.



Holger Friedrich, W.-Komarow-Oberschule, Karl-Marx-Stadt, Kl. 6a:

Die Anzahl der Bücher sei n . Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $3|n$ und $4|n$. Das k.g.V. von 3 und 4 ist 12. Folglich muß gelten $12|n$. Im vorgegebenen Intervall (340, 350) natürlicher Zahlen ist genau eine Zahl, nämlich die Zahl 348, durch 12 teilbar.

$348:4 = 87$; $348:3 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$.

Unser Kommentar:

Knapp und präzise, also lobenswert.

Silke Vogel, POS Lohmen, Kl. 6:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + x = 1$; $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + x = \frac{12}{12}$; $x = \frac{5}{12}$.

$348:4 = 87$; $348:3 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$. (Antwortsatz)

Unser Kommentar: So geht's auch.

Katrin Lippuner, Salvador-Allende-Oberschule, Rheinsberg, Kl. 6:

Katrin findet eine ähnliche Lösung wie Holger Laube. Sie ergänzt diese Lösung noch durch eine anschauliche Graphik.

Lösungsgrundbereich:

$M = \{341, 342, \dots, 348, 349\}$

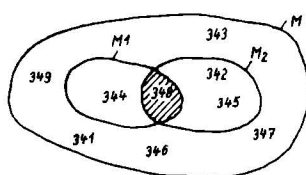
Menge der durch 4 teilbaren Zahlen:

$M_1 = \{344, 348\}$

Menge der durch 3 teilbaren Zahlen:

$M_2 = \{342, 345, 348\}$

Veranschaulichung



Unser Kommentar: Prima, mach weiter so!



Das sind sie, die 24000 Lösungen des Heftes 5/1976 (Höhe: 2,30 m) gebündelt nach Aufgabennummern, gehalten von dem Chefredakteur und der Redaktionsassistentin. (Sie bilden die Redaktion *alpha*.) Der Stapel zeigt die zu leistende Arbeit, um all den fleißigen Teilnehmern des *alpha*-Wettbewerbs eine Antwort zukommen zu lassen:

- Abtransport von etwa fünf Säcken Post vom Postamt 7027 Leipzig zur Redaktion.

- Öffnen der Briefe und Sortieren der Lösungen nach Nummern durch die Redaktionsassistentin – Schüler des *alpha*-Clubs der 29. OS helfen dabei.

- Korrektur der Lösungen durch Studienrat J. Lehmann, VLdV (Kl. 5, 6, 7) und OStR G. Schulze, Herzberg (Kl. 8, 9, 10/12).

- Schreiben der 24000 Antwortkarten durch Rentner und Schüler des *alpha*-Clubs der 29. OS Leipzig (insgesamt etwa 250 Arbeitsstunden).

- Übergabe der 24000 Antwortkarten an das Briefpostamt 701 Leipzig.

- Abtransport der Lösungen zum Altstoffhandel.

- Auswertung des Wettbewerbs (Analyse der Aufgaben und Lösungen, Statistik).

Um einen termingerechten Ablauf zu sichern, bitten wir, die Wettbewerbsbedingungen gewissenhaft einzuhalten.

Unser besonderer Wunsch: • Die Lösungen nicht erst kurz vor dem letzten Einsendetermin einsenden! • Jede Lösung auf Blatt für sich schreiben, da die Lösungen vor Beginn der Korrektur nach Nummern sortiert werden. • Jedes Lösungsblatt muß die Adresse des Einsenders tragen.

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb:

Heft 1/77 (Fortsetzung)

Ma 10/12 ■ 1599 a) Es sei (x, y) ein Paar von ganzen Zahlen, für das die Ungleichungen

$$x + y < 3, \quad (1)$$

$$x - y < 3, \quad (2)$$

$$2x + y > 2 \quad (3)$$

erfüllt sind. Dann gilt

$$y < -x + 3, \quad (4)$$

$$y > x - 3, \quad (5)$$

$$y > -2x + 2, \quad (6)$$

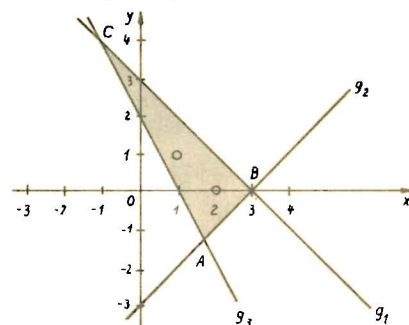
Zeichnet man die Graphen der folgenden drei Geraden

$$g_1: y = -x + 3,$$

$$g_2: y = x - 3,$$

$$g_3: y = -2x + 2,$$

so erhält man die im Bild gezeigte Abbildung mit den drei Geraden g_1, g_2, g_3 , die ein Dreieck ABC bilden, in dessen Innern alle Punkte mit den Koordinaten (x, y) liegen, für die die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt sind. Denn wegen (4), (5) und (6) liegen diese Punkte unterhalb der Geraden g_1 sowie oberhalb der Geraden g_2 und g_3 .



Im Innern des Dreiecks ABC liegen aber nur die folgenden Punkte mit ganzzahligen Koordinaten: (1, 1) und (2, 0). Daher erfüllen nur die Paare (1, 1) und (2, 0) die Bedingungen der Aufgabe.

b) Aus (1) und (2) folgt durch Addition

$$2x < 6, \text{ also } x < 3 \text{ und,}$$

$$\text{da } x \text{ ganzzahlig ist, } x \leq 2.$$

Ferner folgt aus (1)

$$-x - y > -3$$

und daher aus (3) und (7) durch Addition

$$x > -1, \text{ also, da } x \text{ ganzzahlig ist,}$$

$$x \geq 0.$$

Es gilt daher $0 \leq x \leq 2$, also $x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = 2$.

Aus (4), (5) und (6) folgt

für $x = 0$: $y < 3$, $y > -3$, $y > 2$,

was zu einem Widerspruch führt, da y ganzzahlig ist;

für $x = 1$: $y < 2$, $y > -2$, $y > 0$,

also, da y ganzzahlig, $y = 1$;

für $x = 2$: $y < 1$, $y > -1$, $y > -2$,

also $y = 0$.

Wenn also das gegebene Ungleichungssystem überhaupt ganzzahlige Lösungen hat, so können es nur die Paare (1, 1) und (2, 0) sein. Die Probe zeigt, daß diese Paare die gegebenen Ungleichungen erfüllen, daß sie also tatsächlich Lösungen sind.

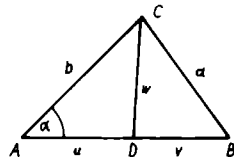
Ma 10/12 ■ 1600 a) Aus $u : v = b : a$ folgt

$v = \frac{au}{b}$ und daher wegen $u + v = c$

$$u + \frac{au}{b} = c, \quad u = \frac{bc}{a+b}. \quad (1)$$

Ferner erhält man durch Anwendung des Kosinussatzes in dem Dreieck ADC

$$w^2 = b^2 + u^2 - 2bu \cos. \quad (2)$$



Dabei gilt nach dem Kosinussatz (Dreieck ABC)

$$\cos = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (3)$$

Daher folgt aus (2) und (3)

$$w^2 = b^2 + u^2 - \frac{2bu(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

und weiter wegen (1)

$$\begin{aligned} w^2 &= b^2 + \frac{b^2 c^2}{(a+b)^2} - \frac{b(b^2 + c^2 - a^2)}{a+b} \\ &= \frac{b}{(a+b)^2} [b(a+b)^2 + bc^2 - (a+b) \cdot (b^2 + c^2 - a^2)] \\ &= \frac{b}{(a+b)^2} [a^2 b + 2ab^2 + b^3 + bc^2 - ab^2 - ac^2 + a^3 - b^3 - bc^2 + ab^2] \\ &= \frac{b}{(a+b)^2} [a^3 + 2a^2 b + ab^2 - ac^2] \\ &= \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}, \text{ also} \end{aligned}$$

$$w = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}.$$

b) Für $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm erhält man

$$w = \frac{1}{11} \sqrt{30 \cdot 18 \cdot 4} \text{ cm} = \frac{12}{11} \sqrt{15} \text{ cm},$$

$$w \approx 4,23 \text{ cm}.$$

Ph 10/12 ■ 1601

Gegeben: $l' = l - \frac{1}{2}l = 0,5l$

$$\Delta f = 0,5 \text{ Hz}, \quad g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Gesucht: l ; f

Es ergibt sich die Gleichung

$$f + \Delta f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l'}} \quad \text{mit } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und } l' = 0,5l.$$

$$f + \Delta f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l'}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} + \Delta f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{0,5l}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} + \Delta f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,5}} \quad | \cdot 2\pi \sqrt{0,5}$$

$$\sqrt{0,5} \sqrt{\frac{g}{l}} + 2\pi \sqrt{0,5} \Delta f = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$2\pi \sqrt{0,5} \Delta f = \sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{0,5} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$2\pi \sqrt{0,5} \Delta f = \sqrt{\frac{g}{l}} (1 - \sqrt{0,5})$$

$$4\pi^2 \cdot 0,5 \cdot \Delta f^2 = \frac{g}{l} (1 - \sqrt{0,5})^2$$

$$l = \frac{g(1 - \sqrt{0,5})^2}{4\pi^2 \cdot 0,5 \cdot \Delta f^2}$$

$$l = \frac{9,81 \text{ m} (1 - \sqrt{0,5})^2 \cdot \text{s}^2}{s^2 \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2}$$

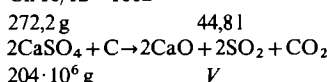
$$l \approx 0,17 \text{ m}. \quad \text{Weiterhin ist}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{9,81 \text{ m}}{0,17 \text{ s}^2 \cdot \text{m}}} \approx 1,21 \text{ Hz}$$

Das Pendel hat eine Länge von 0,17 m und eine Frequenz von 1,21 Hz.

Ch 10/12 ■ 1602



$$\text{NR: } 2 \text{ mol} \cdot 136,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 272,2 \text{ g},$$

$$2 \text{ mol} \cdot 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 44,81$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$V = 33,6 \cdot 10^6 \text{ l}$$

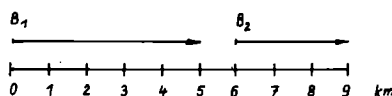
33600 m³ Schwefeldioxid können hergestellt werden.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb:

Heft 2/77

Ma 5 ■ 1622 a) Während das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot nur 3 km zurückgelegt. Darum gilt 6 km – 5 km + 3 km = 4 km. Die Boote haben nun einen Abstand von 4 km.

b) Während das hintere Boot 5 km zurücklegte, hat sich der Abstand zwischen beiden Booten um 2 km verringert. Um den noch vorhandenen Abstand von 4 km auszugleichen, muß das hintere Boot noch 2 · 5 km = 10 km fahren.



Ma 5 ■ 1623 Die Fläche des Weges beträgt $A = (16 \cdot 29 - 12 \cdot 25) \text{ m}^2 = 164 \text{ m}^2 = 1640000 \text{ cm}^2$. Jede Platte hat einen Flächeninhalt von $50 \cdot 50 \text{ cm}^2 = 2500 \text{ cm}^2$. Aus $1640000 : 2500 = 656$ folgt, daß 656 solcher Platten zum Auslegen des Weges benötigt werden.

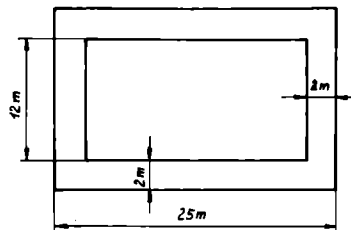
Ma 5 ■ 1624 Von der untersten Schicht sind $4 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 52$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar. Von der zweiten Schicht sind

$4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 36$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar. Von der dritten Schicht sind

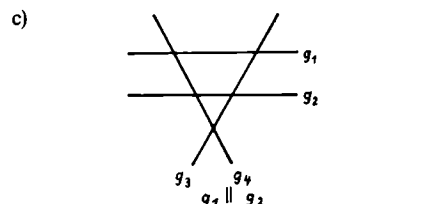
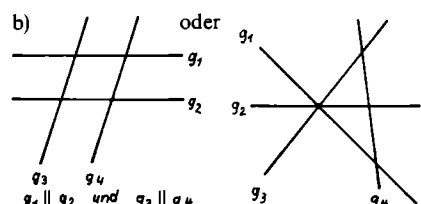
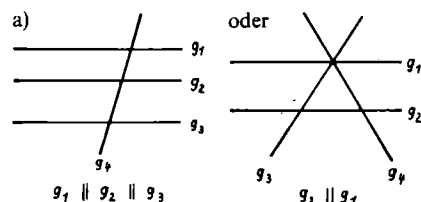
$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 20$ und von der vierten Schicht

$4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar.

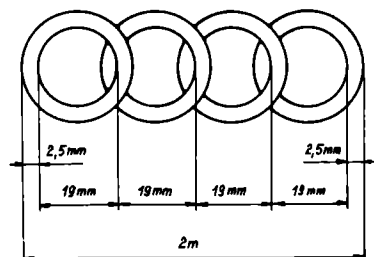
Insgesamt sind also $52 + 36 + 20 + 5 = 113$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar.



Ma 5 ■ 1625



Ma 5 ■ 1626 Aus dem Bild wird ersichtlich, daß man die Anzahl der Kettenglieder (Ringe) erhält, wenn man von der Länge der Kette die doppelte Stärke eines Ringes subtrahiert und das so erhaltene Ergebnis durch den inneren Durchmesser eines Ringes dividiert.



$$2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}; \quad 2,4 \text{ cm} = 24 \text{ mm}.$$

$$2000 \text{ mm} - 2 \cdot 2,5 \text{ mm} = 2000 \text{ mm} - 5 \text{ mm} = 1995 \text{ mm};$$

$$1995 : (24 - 5) = 1995 : 19 = 105.$$

Die Kette besteht aus 105 Kettengliedern.

Ma 5 ■ 1627 Angenommen, es waren insgesamt n Aufgaben zu lösen; dann gilt $\frac{2}{3} \cdot n = 4$, also $n = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Insgesamt waren somit eine Geometrieaufgabe, zwei Gleichungen und drei Knobelaufgaben zu lösen.

Ma 6 ■ 1628 Aus $0+0=PA$ bzw. $0+0+1=PA$ folgt $P=1$. Aus $A+A=R$ bzw. $A+A=10+R$ und $A \neq R$ folgt $A \neq 0$. Aus $P=1$ folgt $A \neq 1$.

Wenn $A=2$, so $R=4$ und $0=6$. Wegen $P+M=A$ muß dann $M=1$ sein. Das steht im Widerspruch zu $P=1$. Also $A \neq 2$. Wenn $A=3$, so $R=6$. Dann muß aber auch $0=6$ sein. Das führt zu einem Widerspruch, also $A \neq 3$. Wenn $A=4$, so $R=8$ und $0=7$. Daraus folgt $m=3$. Wir erhalten

$$\begin{array}{r} 714 \\ + 734 \\ \hline 1448 \end{array}$$

Durch analoge Überlegungen erhalten wir eine weitere Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 816 \\ + 846 \\ \hline 1662 \end{array}$$

Ma 6 ■ 1629 Angenommen, dieses Buch habe x Seiten; dann gilt

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-350) &= x-150, \\ 3x-1050 &= x-150, \\ 2x &= 900, \\ x &= 450. \end{aligned}$$

Das Buch umfaßt 450 Seiten.

Ma 6 ■ 1630 Die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks seien $n, n+1$ und $n+2$; die Maßzahl des Umfangs des Dreiecks beträgt dann $(n+2)+35=n+37$. Nun gilt

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= n+37, \\ 3n+3 &= n+37, \\ 2n &= 34, \\ n &= 17. \end{aligned}$$

Die Seiten des Dreiecks sind somit 17 cm, 18 cm und 19 cm lang.

Ma 6 ■ 1631 Die ursprüngliche Zahl sei dargestellt in der Form $10a+b$; die durch Vertauschen der Ziffern erhaltene Zahl hat dann die Form $10b+a$. Dabei gilt $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 10a+b &= 10b+a-9, \\ 9b-9a &, \\ b-a &= 1, \\ b &= a+1. \end{aligned}$$

Es gibt somit acht Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, sie lauten

12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Probe: $12 = 21 - 9$,

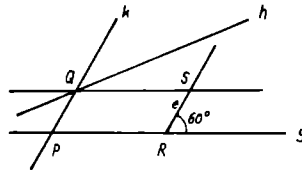
$$23 = 32 - 9,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$89 = 98 - 9.$$

Ma 6 ■ 1632 In einem beliebigen Punkt R der Geraden g tragen wir einen Winkel von 60° an die Gerade g an, auf dessen freiem

Schenkel tragen wir $e = 3$ cm von R bis S ab. Durch S zeichnen wir eine Parallele zu g , die h in Q schneiden möge. Durch Q zeichnen wir eine Parallele zu RS , die g in P schneiden möge. Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck $PRSQ$ ein Parallelogramm, und es gilt $PQ = RS = e = 3$ cm und $\angle QPR = 60^\circ$.



Ph 6 ■ 16 Im $\triangle ABC$ gilt nach dem Satz über die Außenwinkel und wegen $\beta = \beta'$ bzw. $\gamma = \gamma'$ $360^\circ - \delta = 2\beta + 2\gamma$. (1)

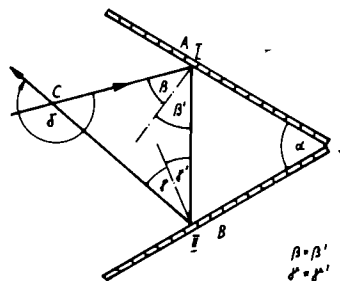
Im $\triangle ASB$ ist

$$180^\circ = \alpha + (90^\circ - \beta') + (90^\circ - \gamma')$$

$$\alpha = \beta' + \gamma'$$

also $\alpha = \beta + \gamma$ und schließlich

$$2\alpha = 2\beta + 2\gamma.$$



In (1) eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} 360^\circ - \delta &= 2\alpha \\ \delta &= 360^\circ - 2\alpha \text{ w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Ma 7 ■ 1633 Es seien v_1, s_1, t_1 bzw. v_2, s_2, t_2 die Geschwindigkeit, der zurückgelegte Weg, die dafür benötigte Zeit beim Radfahren bzw. beim Fußmarsch. Dann gilt $s_1 = 2s_2$ und $t_2 = 2t_1$. Daraus folgt

$$v_1 : v_2 = \frac{s_1}{t_1} : \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1 t_2}{s_2 t_1} = \frac{2s_2 \cdot 2t_1}{s_2 \cdot t_1} = 4 : 1.$$



Ma 7 ■ 1634 Es sei $a = 6x, b = 6y$ und $c = 6z$.

Nun gilt $b = \frac{a+c}{2}$ bzw. $6y = \frac{6x+6z}{2}$, also

$$y = \frac{x+z}{2} \text{ und somit } 2y = x+z. \quad (1)$$

Aus $6x+6y+6z=54$ folgt $x+y+z=9$. (2)

Durch Einsetzen erhalten wir aus (1) und (2) schließlich

$$\begin{aligned} y+2y &= 9, \\ 3y &= 9, \\ y &= 3, \text{ also } b = 6y = 6 \cdot 3 = 18. \end{aligned}$$

Aus $b = 18$ und $b = \frac{a+c}{2}$ folgt $a+c = 36$.

Wegen $a < b < c$ könnte nur $a=6$ oder $a=12$ und $c=24$ oder $c=30$ gelten.

Diese Aufgabe besitzt daher genau zwei Lösungen:

$a_1 = 6, b_1 = 18, c_1 = 30; a_2 = 12, b_2 = 18, c_2 = 24$.

Ma 7 ■ 1635 Aus $2k \cdot n - 6 = k \cdot n + 6$ folgt durch Umformen

$$\begin{aligned} 2k \cdot n - k \cdot n &= 12, \\ k \cdot n &= 12. \end{aligned}$$

Nun gilt $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12 \cdot 1$.

Wir erhalten somit sechs Lösungen, und zwar die geordneten Paare (k, n) :

$(1; 12), (2; 6), (3; 4), (4; 3), (6; 2), (12; 1)$.

Probe: $2 \cdot 12 - 6 = 1 \cdot 12 + 6 = 18$,

$$4 \cdot 6 - 6 = 2 \cdot 6 + 6 = 18,$$

$$6 \cdot 4 - 6 = 3 \cdot 4 + 6 = 18,$$

$$8 \cdot 3 - 6 = 4 \cdot 3 + 6 = 18,$$

$$12 \cdot 2 - 6 = 6 \cdot 2 + 6 = 18,$$

$$24 \cdot 1 - 6 = 12 \cdot 1 + 6 = 18.$$

Ma 7 ■ 1636 Es sei $z = abcdef$ die dekadische Darstellung der zu ermittelnden sechsstelligen Zahl, und es gelte $3 < f < 10$. Dann erhalten wir durch Streichen und Voranstellen der Einerstelle die Zahl $z' = fabcde$. Für $abcde = x$ gilt dann

$$\begin{aligned} (10x+f) \cdot 4 &= 100000f+x, \\ 40x+4f &= 100000f+x, \\ 39x &= 99996f, \\ x &= 2564f. \end{aligned}$$

Für $f = 4$ gilt $x = 2564 \cdot 4 = 10256$,

für $f = 5$ gilt $x = 2564 \cdot 5 = 12820$,

für $f = 6$ gilt $x = 2564 \cdot 6 = 15384$,

für $f = 7$ gilt $x = 2564 \cdot 7 = 17948$,

für $f = 8$ gilt $x = 2564 \cdot 8 = 20512$,

für $f = 9$ gilt $x = 2564 \cdot 9 = 23076$.

Wir erhalten somit genau sechs Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen; sie lauten

$z_1 = 102564, z_2 = 128205$,

$z_3 = 153846, z_4 = 179487$,

$z_5 = 205128, z_6 = 230769$.

Ph 7 ■ 17 Gegeben: $v = 350 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

Gesucht: n_A, n_S

$$d_A = 240 \text{ mm} = 0,24 \text{ m}$$

$$d_S = 560 \text{ mm} = 0,56 \text{ m}$$

Man berechnet die Drehzahl nach der Formel $n = \frac{v}{\pi \cdot d}$. Für die Drehzahl der Arbeitswalze ergibt sich

$$n_A = \frac{v}{\pi d_A}$$

$$n_A = \frac{350 \text{ m}}{0,24 \text{ m} \cdot 3,14 \cdot \text{min}} = 464 \frac{1}{\text{min}}.$$

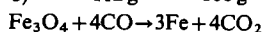
Für die Drehzahl der Stützwalze ergibt sich

$$n_S = \frac{v}{\pi d_S}$$

$$n_S = \frac{350 \text{ m}}{0,56 \text{ m} \cdot 3,14 \cdot \text{min}} = 199 \frac{1}{\text{min}}.$$

Ch 7 ■ 13 a) Für 1 t Roheisen $30 \dots 65 \text{ m}^3$ Kühlwasser, für 1200 t Roheisen $1200 \cdot 30 \dots 1200 \cdot 65 \text{ m}^3$ Kühlwasser. Zur Kühlung werden $36000 \dots 78000 \text{ m}^3$ Kühlwasser benötigt.

b) $112 \text{ g} \quad 168 \text{ g}$



$$m_1 \quad 12 \cdot 10^8 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 4 \text{ mol} \cdot 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 112 \text{ g},$$

$$3 \text{ mol} \cdot 56 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 168 \text{ g}$$

$m_1 = 800 \text{ t}$
 800 t Kohlenmonoxid sind erforderlich.

$$c) \frac{28 \text{ g}}{12 \text{ g}} = \frac{800 \text{ t}}{m_2}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_2 = 343 \text{ t}$$

343 t Kohlenstoff sind bereitzustellen.

Ma 8 ■ 1637 Die ursprüngliche gebrochene

Zahl sei $\frac{m}{n}$; dann gilt

$$\frac{m+n}{n+n} = \frac{9m}{n},$$

$$\frac{m+n}{2n} = \frac{9m}{n},$$

$$\frac{m+n}{2} = 9m,$$

$$m+n = 18m,$$

$$n = 17m.$$

Daraus folgt $\frac{m}{n} = \frac{m}{17m} = \frac{1}{17}$. Die gesuchte

gebrochene Zahl lautet $\frac{1}{17}$, und es gilt

$$\frac{1+17}{17+17} = \frac{18}{34} = \frac{9}{17} = 9 \cdot \frac{1}{17}.$$

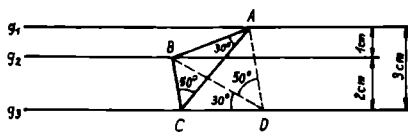
Ma 8 ■ 1638 Der Umkreis des zu konstruierenden Dreiecks ABC möge g_3 außer in A noch in D schneiden. Dann gilt

$$\angle BAC = \angle BDC = \alpha$$

(Peripheriewinkel über der Sehne BC) und

$$\angle BCA = \angle BDA = \gamma$$

(Peripheriewinkel der Sehne AB). Deshalb ergibt sich folgende Konstruktion:



In einem beliebigen Punkt D auf g_3 ist der Winkel $\alpha = 30^\circ$ an g_3 anzutragen; sein freier Schenkel schneide g_2 in B . In D ist an DB der Winkel $\gamma = 50^\circ$ anzutragen; sein freier Schenkel schneide g_1 in A . Es ist A mit B zu verbinden. In A ist an AB der Winkel $\alpha = 30^\circ$ anzutragen; sein freier Schenkel schneide g_3 in C . Es ist B mit C zu verbinden.

Ma 8 ■ 1639 Für 40 Goldmedaillen wurden $7 \cdot 40 = 280$ Punkte vergeben. Aus $294 - 280 = 14$ folgt, daß die DDR 14 sechste Plätze belegte. Es verbleiben noch $638 - 294 = 344$ Punkte. Es sei m die Anzahl der fünften Plätze und n die Anzahl der erworbenen Silbermedaillen. Da diese gleich der Anzahl der Bronzemedailles bzw. der vierten Plätze ist,

$$\text{gilt } 5n + 4n + 3n + 2m = 344,$$

$$12n + 2m = 344,$$

$$6n + m = 172.$$

Wegen $m < n$ erhalten wir daraus

$$6m + m < 17 \cdot 2,$$

$$7m < 172,$$

$$m < \frac{172}{7} = 24 \frac{4}{7},$$

$$m \leq 24.$$

Wegen $m > 20$ könnte m gleich 21, 22, 23 oder 24 sein. Nur für $m = 22$ wird die Gleichung

$6n + m = 172$ im Bereich der natürlichen Zahlen erfüllt. Wir erhalten somit

$$6n = 172 - m,$$

$$6n = 172 - 22 = 150,$$

$$n = 25.$$

Gesamtergebnis:

40 Goldmedaillen zu je 7 P.: 280 P.

25 Silbermedaillen zu je 5 P.: 125 P.

25 Bronzemedailles zu je 4 P.: 100 P.

25 vierte Plätze zu je 3 P.: 75 P.

22 fünfte Plätze zu je 2 P.: 44 P.

14 sechste Plätze zu je 1 P.: 14 P.

638 P.

Ma 8 ■ 1640 Die vierstellige Zahl läßt sich in der Form

$$z = 1000a + 100a + 10b + b,$$

$$z = 1100a + 11b,$$

$$z = 11(100a + b) \text{ darstellen.}$$

Nun gilt $11(100a + b) = n^2$; deshalb muß

$100a + b$ ein Vielfaches von 11 sein. Wegen

$100a + b = 99a + (a + b)$ trifft das zu, wenn

$a + b$ durch 11 teilbar ist. Wegen $0 < a \leq 9$

und $0 \leq b \leq 9$ kann nur $a + b = 11$ sein. Wir erhalten somit

$$z = 11(99a + 11),$$

$$z = 11^2(9a + 1).$$

Da $9a + 1$ nur für $a = 7$ eine Quadratzahl ist,

lautet die Kraftfahrzeugnummer 7744, und es

$$\text{gilt } 7744 = 88^2.$$

Ph 8 ■ 18

Gegeben: a) $d = 1,6 \text{ mm}$

Gesucht: a) R

$$l = 1000 \text{ m}$$

b) U_2

$$\rho = 0,016 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$$

c) I_K

$$b) U_1 = 220 \text{ V}$$

$$I = 10 \text{ A}$$

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \text{ mit } A = 7 \cdot \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$R = \frac{\rho \cdot l \cdot 4}{7 d^2 \pi}$$

$$R = \frac{4 \cdot 0,016 \text{ mm}^2 \cdot 1000 \text{ m}}{7 \cdot 1,6^2 \text{ mm}^2 \cdot \pi \cdot 3,14}$$

$$R \approx 1,14 \Omega$$

a) Der Gesamtwiderstand der Leitung ergibt sich aus

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \text{ mit } A = 7 \cdot \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$R = \frac{\rho \cdot l \cdot 4}{7 d^2 \pi}$$

$$R = \frac{4 \cdot 0,016 \text{ mm}^2 \cdot 1000 \text{ m}}{7 \cdot 1,6^2 \text{ mm}^2 \cdot \pi \cdot 3,14}$$

$$R \approx 1,14 \Omega$$

b) Der Spannungsabfall U_A ergibt sich aus

der Differenz der Spannung U_1 am Leitungsanfang und U_2 am Leitungsende.

$U_A = U_1 - U_2$ sowie nach dem Ohmschen

Gesetz $U_A = I \cdot 2R$ (Doppelleitung)

$$\text{Also ist } I \cdot 2R = U_1 - U_2$$

$$U_2 = U_1 - I \cdot 2R$$

$$U_2 = 220 \text{ V} - 10 \text{ A} \cdot 2,28 \Omega$$

$$U_2 = 197,2 \text{ V}$$

Nun ist $U_A = U_1 - U_2$

$$U_A = 220 \text{ V} - 197,2 \text{ V}$$

$$U_A = 22,8 \text{ V}$$

c) Bei Kurzschluß ist I_K nach dem Ohmschen

Gesetz

$$I_K = \frac{U}{2R} = \frac{220 \text{ V}}{2,28} = 96,5 \text{ A}$$

Ch 8 ■ 14

$$64,1 \text{ g}$$

$$22,4 \text{ l}$$



$$m$$

$$V$$

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 64,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 64,1 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 22,4 \text{ l}$$

$$V = \frac{22,4 \text{ l}}{64,1 \text{ g}} \cdot m$$

$$V = 0,71; 1,21; 2,31$$

Man kann $0,0007 \text{ m}^3$; $0,0012 \text{ m}^3$; $0,0023 \text{ m}^3$

Äthin herstellen.

Ma 9 ■ 1641 Wegen $1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \text{ und } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ gilt } \frac{5n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ Wegen } n > 0 \text{ erhalten wir}$$

$$\text{daraus } \frac{5}{2} = \frac{2n+1}{6},$$

$$30 = 4n + 2,$$

$$4n = 28,$$

$$n = 7.$$

Somit gilt $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2$

$$= 5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 7).$$

Ma 9 ■ 1642 Es sei $ABCDE$ ein konvexes

Fünfeck; nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\text{dann } a + b > p_1,$$

$$b + c > p_2,$$

$$c + d > p_3,$$

$$d + e > p_4,$$

$$e + a > p_5,$$

$$\text{also } 2(a + b + c + d + e)$$

$$> p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = p,$$

$$2u > p \text{ bzw. } u > \frac{1}{2}p. \text{ Ferner gilt}$$

$$a < p_2 + p_4,$$

$$b < p_3 + p_5,$$

$$c < p_1 + p_4,$$

$$d < p_2 + p_5,$$

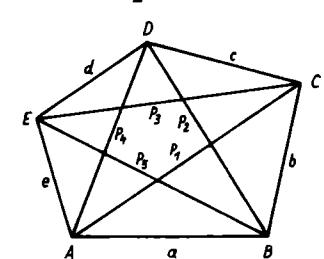
$$e < p_1 + p_3,$$

$$\text{also } a + b + c + d + e$$

$$< 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5),$$

$$u < 2p \text{ bzw. } 2p > u.$$

$$\text{Somit gilt } 2p > u > \frac{1}{2}p.$$



Ma 9 ■ 1643 Angenommen, es wurden x

Glühlampen zu 40 W, y Glühlampen zu 60 W

und z Glühlampen zu 75 W verwendet; dann

$$\text{gilt } 40x + 60y + 75z = 720$$

$$x + y + z = 12 \quad | \cdot (-40)$$

$$40x + 60y + 75z = 720$$

$$-40x - 40y - 40z = -480$$

$$20y + 35z = 240 \quad | : 5$$

$$4y + 7z = 48$$

$$4y = 48 - 7z - 3z$$

$$y = 12 - z - \frac{3z}{4}.$$

Da x , y und z natürliche Zahlen sind, wird diese Gleichung nur für $z = 4$ erfüllt. Wir erhalten $y = 12 - 4 - 3 = 5$ und $x = 12 - 5 - 4 = 3$.

Der Raum ist mit 3 Glühlampen zu 40 W, 5 Glühlampen zu 60 W und 4 Glühlampen zu 75 W auszustatten.

$$\begin{aligned} \text{Ma 9} \blacksquare 1644 \quad & \text{Es gilt } z = \frac{n^5}{120} + \frac{n}{30} - \frac{n^3}{24}, \\ & z = \frac{n^5 + 4n - 5n^3}{120} \\ & z = \frac{n(n^4 - 5n^2 + 4)}{120} \end{aligned}$$

Ferner gilt $n^4 - 5n^2 + 4 = (n^2 - 4)(n^2 - 1)$,
 $n^4 - 5n^2 + 4 = (n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$.

Daraus folgt

$$z = \frac{(n - 2)(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)(n + 2)}{120}$$

Der Zähler von z stellt das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dar. Von diesen fünf Zahlen ist wenigstens eine durch 4, wenigstens eine weitere durch 2, eine durch 3 und eine durch 5 teilbar. Wegen $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ist deshalb der Zähler für jede natürliche Zahl n durch 120 teilbar, das heißt, z ist ebenfalls eine natürliche Zahl. Für $n = 0$ oder $n = 1$ oder $n = 2$ erhalten wir $\frac{0}{120} = 0$.

Lösungen zu alpha-heiter:

(Heft 5/77):

Welche Zensuren hatten die Schüler?

Wir nehmen an, daß die ersten beiden Aussagen nicht stimmen und die dritte stimmt. Wenn es nicht stimmt, daß Sergejew keine „5“ hat und Wassiljew keine „4“, dann hat Sergejew eine „5“ und Wassiljew eine „4“. Aus der Richtigkeit der dritten Aussage folgt, daß Alexejew ebenfalls eine „4“ hat. Dies ist aber nicht möglich, da die Zensuren der Schüler nach den Bedingungen der Aufgabe verschieden sind. Aus der Annahme, daß die erste und die dritte Aussage nicht stimmen und die zweite stimmt, ergibt sich, daß Sergejew eine „5“ hat, Wassiljew keine „4“ und Alexejew keine „4“. Dies ist wiederum nicht möglich, weil dann entweder Wassiljew oder Alexejew gewiß eine „4“ haben muß, da Sergejew eine „5“ hat. Die einzige Möglichkeit ist daher: Die erste Behauptung des Lehrers ist richtig, und die anderen beiden Male hat er sich geirrt. Somit erhalten wir: Sergejew hat keine „5“, Wassiljew hat eine „4“ und Alexejew hat keine „4“. Daraus ergibt sich, daß Wassiljew eine „4“ hat, Sergejew hat keine „5“ (und keine „4“), also eine „3“, und Alexejew hat keine „4“, sondern eine „5“.

Mathematischer Wettstreit

Der Sieger des Wettstreites war derjenige, der schneller als die anderen überlegte. Nehmen wir an, daß ich eine graue Mütze trage. Jeder von meinen Nachbarn sieht ihre Farbe und muß folgendermaßen denken: „Wenn ich eine graue Mütze auf dem Kopf hätte, dann müßte der dritte von uns, indem er

sieht, daß beide grauen Mützen schon vergeben sind, sofort, nachdem man die Tücher von ihren Augen entfernt hatte, bemerken, daß er eine weiße Mütze trägt. Beide Nachbarn schweigen jedoch. Also trage ich eine weiße Mütze auf dem Kopf“.

Wer zerschlug den Spiegel?

Wenn wir annehmen, daß Sergejew den Spiegel zerschlagen hat, so sind genau drei Antworten wahr, die von Aljoscha, Kostja und Tolja. In allen übrigen Fällen sind die Antworten von vier Schülern wahr, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Die drei Lehrer

Morosow gibt Französisch- und Geschichtsunterricht, Wassiljew Biologie- und Englischunterricht und Tokarew Geographie- und Mathematikunterricht.

M. Ljapunow

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\ 98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\ 987 \cdot 9 + 5 &= 8888 \\ 9876 \cdot 9 + 4 &= 88888 \\ 98765 \cdot 9 + 3 &= 888888 \\ 987654 \cdot 9 + 2 &= 8888888 \\ 9876543 \cdot 9 + 1 &= 88888888 \\ 98765432 \cdot 9 + 0 &= 888888888 \end{aligned}$$

bzw. $L = 9, J = 8, A = 7, P = 6, U = 5, N = 4, O = 3, W = 2, M = 1, X = 0$

Frische Pilze

x kg sei das Gewicht der gesammelten Pilze, darunter sollen $(0,85x)$ kg Wasser sein. Die trockenen Pilze wiegen $(x - 15)$ kg darunter sind $(0,85x - 15)$ kg Wasser, welches 40% von dem Gesamtgewicht bildet. Also gilt:

$$\frac{0,85x - 15}{x - 15} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

Daraus folgt $x = 20$ (kg), oder:

Die Kinder hatten 20 kg frische Pilze gesammelt.

Magisches Quadrat

4	+	7	-	9	=	2
+	■	-	■	+	■	+
9	-	2	+	0	=	7
-	■	+	■	-	■	-
12	-	0	-	6	=	6
=	■	=	■	=	■	=
1	+	5	-	3	=	3

Der Elefant und die Mücke

Als der „Mathematiker“ die Quadratwurzel aus den beiden Seiten der Gleichung $(x - v)^2 = (y - v)^2$ zog, verstand er nicht, daß es für das Resultat zwei Möglichkeiten gibt: entweder $x - v = y - v$ oder $x - v = v - y$. Richtig ist nur das zweite Resultat: x und y sind positive Zahlen und aus der Ausgangsgleichung $x + y = 2v$ folgt, daß dann, wenn $x > v$ ist, $y < v$ (erster Fall), und dann, wenn $x < v$ ist, $y > v$ (zweiter Fall).

Im ersten Fall ist $x - v > 0$ und $y - v < 0$, was der Gleichung $x - v = y - v$ widerspricht. Die zweite Gleichung $x - v = v - y$ jedoch widerspricht weder den Bedingungen des ersten Falles noch den Bedingungen des zweiten Falles. Aus der Gleichung $x - v = v - y$ folgt wieder die Ausgangsgleichung $x + y = 2v$.

Auf der Wolga

● Für die zweite Hälfte des Weges wendete der Dampfer $\frac{100}{125} = \frac{4}{5}$ der Zeit auf, die er für die erste Hälfte des Weges benötigte. Die Zeitdifferenz aus den Fahrzeiten der ersten und zweiten Hälfte beträgt $\frac{1}{5}$ und entspricht gemäß der Aufgabenstellung einer halben Stunde. Das bedeutet, daß die erste Hälfte des Weges in $\frac{1}{2}$ Std. $\cdot 5 = 2\frac{1}{2}$ Stunden und der ganze Weg in $2\frac{1}{2}$ Std. + 2 Std. = $4\frac{1}{2}$ Stunden zurückgelegt wurde.

● Stromab legt der Dampfer in einer Stunde $\frac{1}{3}$ der Entfernung zurück, stromauf dagegen nur $\frac{2}{9}$. Die Differenz $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)$ entspricht der doppelten Strömungsgeschwindigkeit. Je Stunde legt das Fäßchen also $\frac{1}{18}$ des Weges zurück und die gesamte Strecke in 18 Stunden.

Kryptarithmetik aus Quant

- 95846 · 95846 = 9186455716.
- 26953 · 26953 = 726464209.
- 26157 · 68351 = 1787857107.
- 24153 · 24153 = 583367409.
- 18594 · 18594 = 345736836.
- 48957 · 24751 = 1211734707.
- 52903 · 52903 = 2798727409.
- 46027 · 46027 = 2118484729.
- 12 · 7 = 84 10 · 39 + 8 = 47
- 29 · 3 = 87 96 : 2 = 48.





Nikolai Jegorowitsch Shukowsky (1847–1921)
Begründer der gegenwärtigen Hydro- und Aeromechanik; ist auch als erster Leiter des Zentralen Aero- und Hydrodynamischen Instituts, als „Vater der russischen Aviatik“ bekannt; Prof. Dr. sc. der (angewandten) Mathematik; Vizepräsident (1903) und Präsident (1905) der Mathematischen Gesellschaft in Moskau.



Sofia Wassiljewna Kowalewskaja (1850–1891)
Hervorragende russische Mathematikerin; erste Professorin der Mathematik in Europa (Stockholm, 1884), Privatschülerin von *Weierstraß* in Berlin; bedeutende Arbeiten über die Theorie der Differentialgleichungen, über die Funktionentheorie und die Kinetik.



Leonard Euler (1707 bis 1783)
Genialer Schweizer Mathematiker, ging 1729 nach Petersburg, 1741 an die Akademie der Wissenschaften nach Berlin, 1766 erneut nach Petersburg; höchst produktiv auf allen Gebieten der Mathematik und mathematischer Physik (bes. Variationsrechnung, Analysis des Unendlichen, Algebra); verfaßte 45 Bände sowie 950 Abhandlungen.



Michail Wassilowitsch Ostrogradski (1801 bis 1861)
Russischer Mathematiker und Hochschullehrer; bedeutende Arbeiten über mathematische Analyse, Begründer der „Petersburger Schule“.



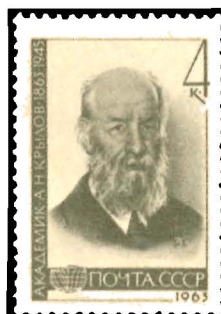
Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 bis 1856)
Russischer Mathematiker und materialistischer Denker; entwickelte eine nichteuklidische (d. h. eine das Parallelenpostulat nicht voraussetzende) Geometrie: „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ 1829/30.



Mathematiker auf sowjetischen Briefmarken



Otto Julijewitsch Schmidt (1891 bis 1956)
Hervorragender Mathematiker, Astronom und Geophysiker sowie Arktisforscher; Absolvent der Universität Kiew (1913), ab 1926 ord. Professor an der Lomonossow-Universität Moskau. Begründer und Leiter der algebraischen Schule; ord. Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (ab 1935) und Vizepräsident dieser Akademie (1939 bis 1942); Held der Sowjetunion (seine besonderen Verdienste liegen in der Arktisforschung). Chefredakteur der *Großen Sowjetischen Enzyklopädie*.



Alexey Nikolajewitsch Krylow (1863 bis 1945)
Berühmter russischer Mathematiker, Mechaniker und Schiffbauingenieur, Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (1916), Held der sozialistischen Arbeit (1943); sein „Lehrgang des Näherungskalküls“ (1947) ist weltbekannt. Seine wichtigsten wissenschaftlichen Ergebnisse erzielte er auf den Gebieten: Schiffsbau, Schwimmsfähigkeit, Kippsicherheit, Deviation, Hiroskopentheorie.



Iwan Georgijewitsch Petrowsky (1901 bis 1973)
Sowjetischer Mathematiker, Absolvent der Lomonossow-Universität Moskau (1927), an der er später Professor (1933) und Rektor (1951) wurde. Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (1946). Hervorragender Experte auf dem Gebiet der Differentialgleichungen. Seine drei Lehrbücher (Lehrgang der Differentialgleichungen, der Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen und der Integralgleichungen) wurden in viele Sprachen der Welt übersetzt.



**Buchtips für
Junge
Mathematiker**

Sowjetische Literatur in deutscher Sprache

**Bücher aus dem
VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften**

I. S. Sominski
**Die Methode der voll-
ständigen Induktion**
56 Seiten (1965) Preis: 2,00 M

A. I. Markuschewitsch
Flächeninhalte und Logarithmen
54 Seiten (1965) Preis: 4,25 M

P. S. Alexandroff
Einführung in die Gruppentheorie
118 Seiten (1967) Preis: 4,30 M

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski
**Mathematische Unterhaltungen I
Mehrfarbenprobleme**
65 Seiten (1968) Preis: 5,10 M

**Mathematische Unterhaltungen II
Aufgaben aus der Zahlentheorie**
124 Seiten (1968) Preis: 6,10 M

**Mathematische Unterhaltungen III
Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeits-
rechnung**
84 Seiten (1968) Preis: 4,10 M

A. I. Markuschewitsch
Rekursive Folgen
48 Seiten (1968) Preis: 2,80 M

W. G. Scherwatow
Hyperbel-Funktionen
54 Seiten (1969) Preis: 3,80 M

I. P. Natanson
**Summierung unendlich
kleiner Größen**
60 Seiten (1969) Preis: 3,25 M

L. A. Kaloujnine
Primzahlzerlegung
40 Seiten (1971) Preis: 2,40 M

W. G. Boltjanski/I. Z. Gochberg
**Sätze und Probleme
der kombinatorischen Geometrie**
128 Seiten (1971) Preis: 6,80 M

A. O. Gelfond
**Die Auflösung von Gleichungen
in ganzen Zahlen
(Diophantische Gleichungen)**
59 Seiten (1973) Preis: 3,80 M

P. P. Korowkin
Ungleichungen
56 Seiten (1973) Preis: 2,45 M

N. N. Worobjow
Teilbarkeitskriterien
85 Seiten (1973) Preis: 4,20 M

A. S. Solodownikow
Lineare Ungleichungssysteme
98 Seiten (1973) Preis: 5,00 M

B. W. Gnedenko/A. J. Chintschin
**Elementare Einführung in
die Wahrscheinlichkeitsrechnung**
174 Seiten (1973) Preis: 4,50 M

**Bücher aus dem
BSB B. G. Teubner Verlags-
gesellschaft Leipzig**

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/
A. A. Kirillow
Die Koordinatenmethode
75 Seiten (1968) Preis: 3,40 M

J. S. Wentzel
Elemente der Spieltheorie
66 Seiten (1970) Preis: 4,20 M

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa
**Funktionen und ihre graphische
Darstellung**
128 Seiten (1971) Preis: 7,00 M

N. J. Wilenkin
Unterhaltsame Mengenlehre
184 Seiten (1973) Preis: 6,50 M

I. J. Bakelman
Spiegelung am Kreis
Grundlagen und Anwendung
132 Seiten (1976) Preis: 7,00 M

A. Kolman
Die vierte Dimension
116 Seiten (1976) Preis: 6,50 M

**Bücher aus dem Volkseigenen
Verlag Volk und Wissen Berlin**

Autorenkollektiv
**Algebraische Aufgaben aus
der Technik**
102 Seiten (1964) Preis: 3,90 M

A. A. Kolosow
**Kreuz und quer
durch die Mathematik**
202 Seiten (1965) Preis: 6,00 M

J. I. Perelman
Unterhaltsame Algebra
148 Seiten (1965) Preis: 4,65 M

Autorenkollektiv
**Aufgaben von Mathematik-
olympiaden in der UdSSR
und in der ČSSR**
292 Seiten (1965) Preis: 8,20 M

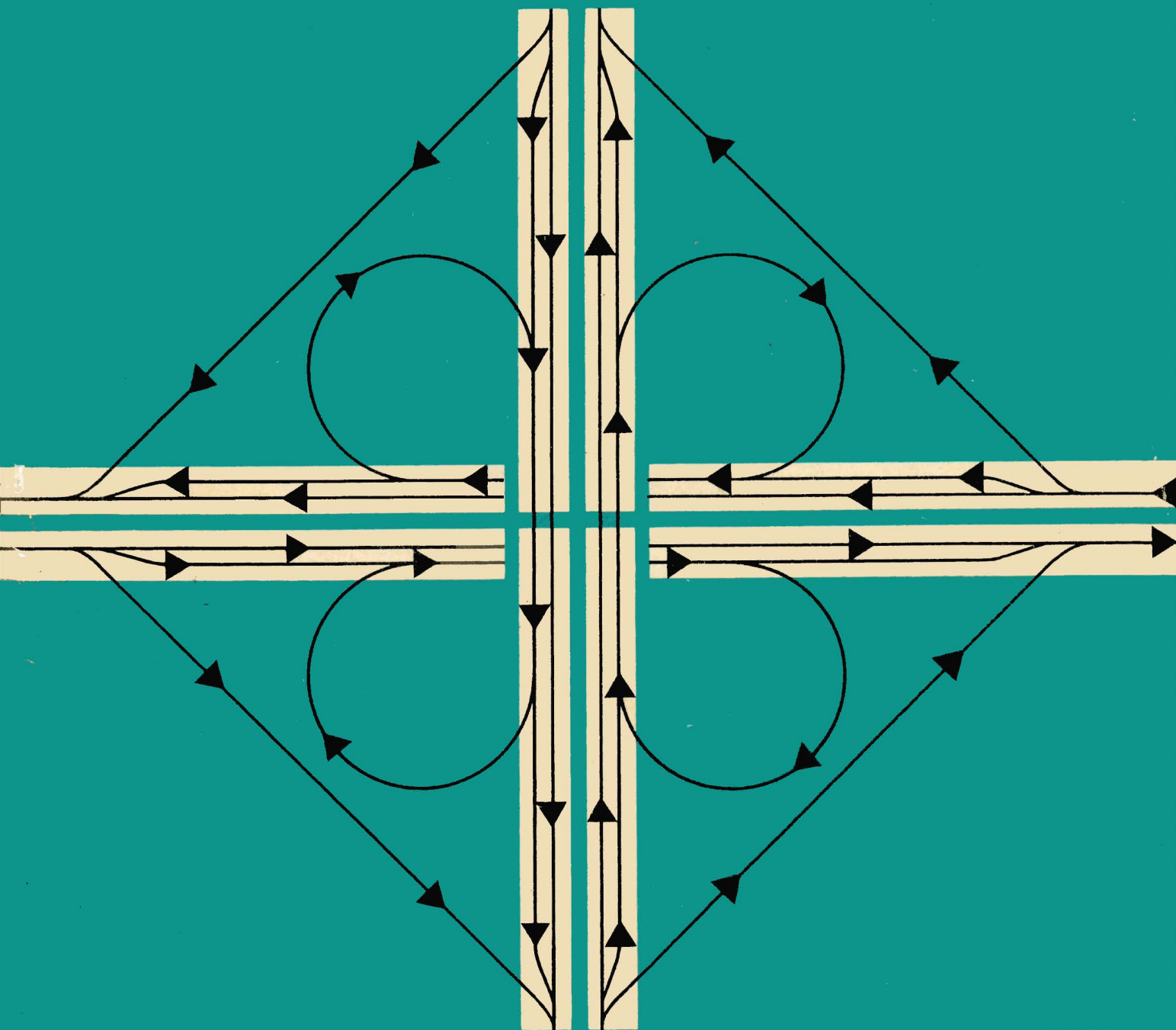
K. A. Rupassow
Mathematische Denkaufgaben
56 Seiten (1965) Preis: 1,60 M

**Bücher aus dem Urania-Verlag
Leipzig · Jena · Berlin**

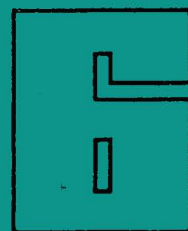
Autorenkollektiv
**Bausteine des Wissens
Streifzug durch die Mathematik**
Band 1: 207 Seiten (1965) Preis: 12,00 M
Band 2: 227 Seiten (1965) Preis: 12,00 M

B. A. Kordemski
Köpfchen, Köpfchen
328 Seiten (1976) Preis: 12,00 M

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059



Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders
(Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-
ritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 204 30.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 129, 131,
134/135, 140)

Vignetten: R. Schwalme aus „Für Dich“
8/74; Horst Schrade, Berlin (S. 127); Duvan,
Beograd (S. 130); D. Sowa, Leipzig, Eigen-
foto (S. 137); H. Büttner, L. Otto, beide
Berlin (S. 138).

Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig
alpha – Träger der Artur-Becker-Medaille in
Gold



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluss: 24. August 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Das macht Pythagoras verlegen [9]*
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 125 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik – Physik – Chemie
Autorenkollektiv
- 128 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Bastelarbeiten für Kl. 5/6, Text dazu für Kl. 9/10
Wir bauen Sternpolyeder [5]
Mathematikfachlehrer U. Sonnemann, EOS Ludwigslust
- 129 Eine Aufgabe von Prof. Dr. F. Tóth
Mathematisches Institut der Ungarischen Akademie
der Wissenschaften, Budapest
- 130 XIX. Internationale Mathematikolympiade Beograd, Juli 1977 [10]
Autorenkollektiv
- 132 *alpha*-Wettbewerb 1976/77 [5]
Preisträger · Vorbildliche Leistungen · Kollektive Beteiligung · Statistik
Redaktion *alpha*
- 134 Mädchen meistern Mathe [5]
alpha stellt die 18 Teilnehmerinnen der Olympiade *Junger Mathematiker* vor
- 136 Porträt eines Mathematikers und Naturwissenschaftlers:
Isaac Newton (1643 bis 1727) [8]
Dipl.-Physiker Dorit Sowa, Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-
Universität Leipzig
- 137 Speziell für Klasse 5/6
Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
Lösungsvarianten zu Aufgabe 6 ■ 1629 (aus Heft 2/77)
StR J. Lehmann, Leipzig/StR Th. Scholl, Berlin
- 138 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: StR. J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold,
Waren/Müritz
- 140 X. Internationale Physikolympiade/IX. Internationale Chemie-
olympiade (Kurzberichte) [12]
- 141 Lösungen [5]
- III./IV. Umschlagseite: Die geometrische Konstruktion eines
regelmäßigen 17-Ecks
Anleitungsmaterial für Arbeitsgemeinschaften (IV. U.-Seite, geeignet als Vorlage für
Arbeit mit Polylux)
Dr. R. Thiele, Lektor im BSB B. G. Teubner-Verlag, Leipzig, Leiter der Zentralen
AG's Mathematik des Saalkreises

Alle Titelblätter des Jahrgangs 1977 gestaltete W. Fahr, Berlin. Das Titelblatt zu Heft 6/77
wurde aus dem *Lexikon der Technik* entnommen. Es stellt ein Autobahnkreuz dar.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das macht Pythagoras verlegen

Teil I

So lange es auf der Welt lehrende und lernende Menschen gibt, besteht bei den Lernenden wohl auch die Neigung, den Lehrenden einmal in Verlegenheit zu bringen. Dies läßt sich zuweilen schon mit unbequemen Fragestellungen herbeiführen. Vielfach kann eine solche Verlegenheit der Ausgangspunkt einer für beide Seiten anregenden Diskussion sein. Ist die Differenz zwischen Lehrendem und Lernendem nicht zu beheben, dann wird das gegenseitige Mißverstehen manchmal als ein Generationenproblem abgetan. Der Ältere meint vom Jüngeren, er wird es später noch einsehen. Hingegen denkt der Jüngere, dem „Alten“ ist nicht mehr zu helfen.

Für schwerwiegende Meinungsverschiedenheiten zwischen Lehrendem und Lernendem gibt es auch auf „höherer Ebene“ treffende Beispiele. Von einem für die geschichtliche Entwicklung der Mathematik recht interessanten soll hier berichtet werden. Der Lehrmeister ist kein geringerer als Pythagoras von Samos (um 580–496 v. u. Z.). Mit seinem Namen verbindet sich untrennbar der pythagoreische Lehrsatz. Er lautet: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenlänge gleich der Summe der Quadrate der Kathetenlängen.

An dieser konkreten Aussage gibt es nichts zu rütteln. Neben der Mathematik beschäftigte sich Pythagoras auch mit Politik und Philosophie. Nach seiner philosophischen Lehre ist die (natürliche) Zahl das Urprinzip aller Dinge. Alles läßt sich auf natürliche Zahlen oder das Verhältnis von natürlichen Zahlen zurückführen. Der Lehrsatz über das rechtwinklige Dreieck bietet hierzu einige leicht nachprüfbare Beispiele. Verhalten sich in einem Dreieck die Seitenlängen wie 3:4:5, so ist das Dreieck rechtwinklig. Auch bei Vorgabe der Seiten im Verhältnis 5:12:13 ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Drei natürliche Zahlen a , b , c , die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel. Die Pythagoreer waren überzeugt, daß sich für jedes rechtwinklige Dreieck ein derartiges Zahlentripel (a , b , c) bei geeigneter Festlegung der Maßeinheit finden läßt.

Zunächst sei noch einiges über Pythagoras selbst und die von ihm begründete Schule berichtet. Auf der Insel Samos geboren,

wandte sich Pythagoras wegen der in seiner Heimat herrschenden Tyrannei nach dem in Süditalien liegenden Kroton, das in dieser Zeit zu Großgriechenland gehörte. Pythagoras und sein Schülerkreis bildeten eine verschworene Gemeinschaft, die zu jedem Opfer füreinander bereit waren. Zum Beispiel waren Damon und Phintias aus Syrakus Pythagoreer. Der Freundestreue in diesem Kreis hat Schiller in seinem Gedicht „Die Bürgschaft“ ein literarisches Denkmal gesetzt. (Ich lasse den Freund dir als Bürgen, ihn magst Du, entrinn' ich, erwürgen.) Dabei darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Mitglieder dieser Gemeinschaft hochmütig auf das Volk herabsahen, das seinen Lebensunterhalt durch mühselige Arbeit verdienen mußte. Ideell unterstützte diese politisch-religiöse Gemeinschaft die damals herrschende Sklavenhaltergesellschaft, zu deren Aristokratie sich ihre Mitglieder rechneten. Dieser Hochmut gegenüber dem Volk sollte den Pythagoreern später teuer zu stehen kommen.

Für die griechische Führungsschicht der damaligen Zeit waren Handwerker und Bauern Banausen, während der freie Mann grübelte, diskutierte, lehrte und spekulierte. Er beschäftigte sich zunächst mit den drei Künsten Grammatik, Rhetorik und Dialektik. Ergänzend zu diesem Unterbau der Wissenschaft, dem Trivium, pflegten die Pythagoreer die vier Mathemata Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie. Diese vier Fächer bildeten das Quadrivium ihres Lehrgebäudes. Die Bezeichnung der Angehörigen dieser Philosophenschule als Pythagoreer geht auf Aristoteles zurück. Bis dahin hatte man jede sich um einen Meister scharende Schule nach dem Ort ihres Wirkens benannt. Auch dies ist ein Zeichen für die Autorität, welche Pythagoras im Kreise seiner Schüler und geistigen Mitstreiter besaß.

Ein Paradebeispiel für die Tragfähigkeit der pythagoreischen Lehre bot die Akustik. Den experimentellen Befund dazu lieferte ein Monochord. Es besteht aus einem Kasten mit hoher Resonanzwirkung und einer darüber gespannten Saite der Länge l . Im Ausgangszustand ertönt beim Anzupfen der Saite der Grundton. Halbiert man die Länge der Saite durch Einschieben eines Steges, ohne dabei die Spannung der Saite zu ändern, so ergibt sich die Oktave zum Grundton. Setzt man $\frac{2}{3}l$

zur Schwingung frei, ergibt sich die Quinte. Setzt man $\frac{3}{4}l$ zur Schwingung frei, ergibt sich die Quarte. Das Verhältnis zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave heißt in der Musiktheorie „pythagoreisches Komma“. Erst viel später erkannte man, daß auch für die Schwingungszahlen der Töne entsprechende Proportionen bestehen, da die Frequenz einer Saite im reziproken Verhältnis zu ihrer Länge steht. Halbiert man etwa die Länge der schwingenden Saite, so ver-

doppelt sich die Schwingungszahl. Der Aufbau einer klangvollen Tonleiter aus 8 Tönen ließ sich nun mathematisch durch ganze Zahlen fassen. Den sieben Tonschritten der pythagoreischen Tonleiter sind folgende Proportionen von Schwingungszahlen zugeordnet:

$$\frac{9}{8} \frac{9}{8} \frac{256}{243} \frac{9}{8} \frac{9}{8} \frac{9}{8} \frac{256}{243}^*)$$

Wesentlich war hierbei für die Pythagoreer eine Bestätigung ihrer philosophischen Grundhaltung, daß sich harmonische Zusammenklänge von Tönen auf Verhältnisse kleiner ganzer Zahlen zurückführen lassen.

Die Pythagoreer wollten ihre philosophische Lehre von den Zahlen im Sinne einer Allaussage verstanden wissen. Für den Beweis einer Allaussage ist jedoch die Bestätigung durch eine auch noch so große Anzahl von Beispielen nicht hinreichend. Als Erfinder einer Allaussage muß man sich davor hüten, daß eines Tages ein vom Wahrheitsdrang besessener Schüler ein Gegenbeispiel aufsticht. Ein solcher Schüler fand sich – allerdings nicht mehr zu Lebzeiten von Pythagoras – im unteritalienischen Metapontion. Pythagoras war in diese Stadt gezogen und hatte auch dort einen Schülerkreis um sich geschart.

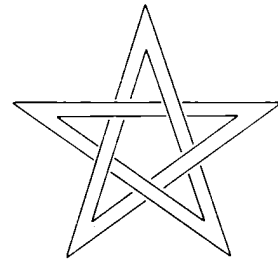


Bild 1
Pentagramm, Geheimzeichen der Pythagoreer

Der Bund der Pythagoreer, dessen Mitglieder in verschiedenen Städten Unteritaliens lebten, besaß ein geheimes Zeichen der Zusammengehörigkeit. Es war ein regelmäßiger Fünfstern. Hippias von Metapontion mag als Neuling in dem Bunde einmal das Geheimzeichen in sein Wachstäfchen eingegraben haben. Hierbei kann ihm der Gedanke gekommen sein, gemäß der Lehre seines Meisters jenes Paar natürlicher Zahlen aufzusuchen, welches das Verhältnis der Längen von Diagonale zu Seite im regelmäßigen Fünfeck erfaßt. Heute ist nicht mehr rekonstruierbar, mittels welcher Hilfslinien am Pentagramm Hippias klar wurde, daß sich für die Längen dieser beiden Strecken ein gemeinsames Maß finden läßt. Im heutigen Sprachgebrauch würden wir sagen: Hippias

*) Man vergleiche hierzu auch den Aufsatz „Mathematik im Reich der Töne“, 6. Jahrgang (1972), Heft 6, und 7. Jahrgang (1973), Heft 2.

entdeckte die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck. Vermutlich hat ihn das Prinzip der Wechselwegnahme (Kettendivision) von Strecken zu dieser umwälzenden Erkenntnis geführt. Dies mag sich um 430 v. u. Z. ereignet haben.

Pythagoras war inzwischen in Metapontion verstorben, aber die Autorität des Meisters blieb über seinen Tod hinaus unter seinen Jüngern bestehen. Erschreckt, aber auch von Wahrheitsdrang besessen, verbreitete Hippasos die Kunde über seine Entdeckung, die der philosophischen Lehre des Meisters den Todesstoß versetzte. Am meisten verübten ihm die Bundesmitglieder, daß er seine Erkenntnis auch Fremden mitteilte, die dem Bunde nicht angehörten. Sie reagierten damit, daß sie den Hippasos aus ihrem Orden verstießen. Man errichtete ihm symbolisch eine Grabstätte, und eine spätere Sage weiß zu berichten, daß Hippasos auf einer Seefahrt in dem vom Sturm aufgewühlten Meer untergegangen sei.

Unabhängig davon blieb diese neue Erkenntnis nicht ohne Rückwirkungen auf den Orden der Pythagoreer. Er spaltete sich in zwei Gruppen auf. Die eine Gruppe, Akusmatiker genannt, schwor weiterhin auf die philosophischen Lehren des Meisters. Sie trieb rationale Arithmetik an Spielsteinen. Die Mathematiker hingegen zogen die Konsequenzen aus der unbequemen Entdeckung des Hippasos. Sie pflegten vor allem die Geometrie und waren bereit, neue Abenteuer mit künftigen mathematischen Entdeckungen auf sich zu nehmen. Die Entdeckung des Hippasos löste die erste Grundlagenkrise in der Mathematik aus. Mit den uns zur Verfügung stehenden mathematischen Schulkenntnissen stellt sich die Frage, wo die Pythagoreer ihr Selbstbewußtsein und ihre Selbstsicherheit bezüglich ihrer philosophischen Lehre hernahmen. Die natürlichen Zahlen lassen sich auf der Zahlengeraden durch Punkte veranschaulichen. Als Bild ergibt sich eine gleichabständige Punktreihe. Daraus kann man sich mittels des Strahlensatzes die Punkte jeder beliebigen rationalen Zahl konstruieren.

Hat man nun zwei rationale Punkte r_1 und r_2 , so läßt sich stets ein weiterer rationaler

Zwischenpunkt konstruieren. Zum Beispiel

ist $r_3 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ ein solcher Punkt. Aber auch

$r_3 = \frac{8r_1 + 5r_2}{13}$ ist ein zwischen r_1 und r_2 liegender rationaler Punkt, der nach dem Strahlensatz aus r_1 und r_2 konstruierbar ist. Dabei können r_1 und r_2 schon beliebig dicht benachbart sein. Man sagt auch, die rationalen Punkte liegen auf der Zahlengeraden dicht.

Derartige Gedankengänge waren den Pythagoreern bereits geläufig. Daher erschien es ihnen unbegreiflich, daß zwischen diesen rationalen Punkten noch „Lücken“ bestehen, die sich nicht mit rationalen Zahlen schließen lassen. Erst Hippasos wies von dieser auf den ersten Blick sehr plausibel erscheinenden Überlegung nach, daß sie auf einem Trugschluß beruhte. Die noch bestehenden Lücken in der Menge der rationalen Zahlen bezüglich der reellen Zahlen werden von den irrationalen Zahlen geschlossen. Diese kann man nicht auf konstruktivem Wege mittels des Strahlensatzes aus den natürlichen Zahlen gewinnen. Sie lassen sich daher auch nicht durch Division zweier auch noch so großer ganzer Zahlen erzeugen. Als Schulbeispiel für den Nachweis der Existenz irrationaler Zahlen muß in der Regel die Zahl $\sqrt{2}$ herhalten.

Die große Zeit der Pythagoreer, die von sich glaubten, den Schlüssel zur Erkenntnis der Welt zu besitzen, nannte man auch das Goldene Zeitalter der Griechen. Sie deckte sich etwa mit der Regierungszeit des Perikles (500–429 v. u. Z.). Mit der Entdeckung irrationaler Zahlen war der Glaube an die eigene Stärke erschüttert. Eine Vorstellung von der Resonanz, die bei den Zeitgenossen durch die Feststellung der Unhaltbarkeit der pythagoreischen Lehre ausgelöst wurde, kann man an dem Reisebericht des Platon von Athen (427–347 v. u. Z.) ermesen. Dieser war zunächst noch ein Anhänger der Lehren des Pythagoras. Als er um 400 v. u. Z. bei dem Mathematiker Theodoros in Kyrene (Nordafrika) weilte, demonstrierte ihm dieser die Inkommensurabilität der Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$. Die Kunde von der Existenz irrationaler Zahlen hatte Platon als mathematischen Laien offenbar sehr erregt. Er schrieb darüber: „Ich habe ja wohl auch selbst erst recht spät etwas davon vernommen und mußte mich über diesen Übelstand bei uns höchlich wundern. Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern nur etwa bei Schweinevieh. Und da schämte ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen.“

Bevor wir die Gedankengänge des Hippasos am Pentagramm und regelmäßigen Fünfeck zu rekonstruieren versuchen, sollen einige Ergebnisse aus der naturwissenschaftlichen Forschung angeführt werden, die weniger zur Verlegenheit sondern mehr zur Bestätigung der pythagoreischen Lehre beizutragen scheinen.

1. Kalenderrechnung

Als die Völker damit begannen, ihre Geschichte aufzuzeichnen, boten sich vor allem die Umlaufzeiten von Sonne, Mond und Sternen – aus geozentrischer Sicht – als Zeiteinheiten an. Die Sonne lieferte den Tag, der Mond den Monat und die Fixsterne das (siderische) Jahr als Zeiteinheiten. Da die Umlaufbewegung der Erde um die Sonne, die Eigenrotation der Erde und die Umlaufbewegung des Mondes um die Erde nicht wie durch die Räder eines Uhrwerkes miteinander verzahnt sind, boten sich bei der Einteilung des Jahres als längste Zeiteinheit in Monate und Tage einige Schwierigkeiten. Zum Beispiel war in Ägypten an den jährlich sehr regelmäßig einsetzenden Nilüberschwemmungen zu beobachten, daß sich einem (tropischen) Jahr weder eine ganze Zahl von Monaten noch eine ganze Zahl von Tagen zuordnen läßt. Der Mond spielte jedoch bei den Anrainern des Mittelmeeres eine wichtige Rolle zur Festlegung von Festen und ritualen Handlungen. Andererseits war die Länge des Jahres mit dem Wechsel der Jahreszeiten und dem Eintreten von Überschwemmungen und Dürreperioden für die Bauern zur Feldbestellung und Einbringung der Ernten von lebenswichtiger Bedeutung.

Bereits im fünften Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung lagen über die Umlauf- und Rotationszeiten der Gestirne so genaue Beobachtungen vor, daß man ein recht brauchbares Zeitmaß als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Monat und Jahr berechnen konnte. Der von Meton eingeführte Zyklus umfaßt 19 (tropische) Jahre. In diesem Zeitraum finden 235 Mondwechsel (Lunationen) statt. Zwischen beiden besteht eine Zeitdifferenz von 2 Stunden. Allerdings läßt sich diesem Zyklus nicht eine ganze Zahl von Tagen zuordnen. 19 tropische Jahre (Zeit zwischen zwei Frühjahrsäquinoktien) umfassen 6939 Tage und 14,5 Stunden. 235 Lunationen entsprechen 6939 Tagen und 16,5 Stunden.

Zur Zeit Cäsars (100–44 v. u. Z.) war bekannt, daß ein tropisches Jahr etwa 365,25 Tagen gleichzusetzen ist. Der auf dieser Erkenntnis fußende Julianische Kalender galt über 16 Jahrhunderte. Da das tropische Jahr jedoch in Wirklichkeit 11,25 Minuten kürzer ist, kam dieser Kalender im Laufe der Jahrhunderte ins Rutschen. Der 1582 eingeführte Gregorianische Kalender differenzierte noch genauer die Verteilung der 366 Tage umfassenden Schaltjahre. Das aus dem Gregorianischen Kalender resultierende Jahr ist noch 26 Sekunden zu lang gegenüber dem tropischen Jahr. Diese Differenz ist jedoch belanglos und bewirkt erst in 3000 Jahren eine Verschiebung um einen Tag.

Jede noch so kluge künftige Kalenderreform kommt an der Aufgabe nicht vorbei, eine den astronomischen Gegebenheiten möglichst gut angepaßte rationale Beziehung zwischen der

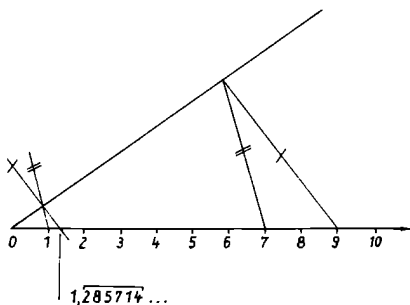


Bild 2

Konstruktion der Zahl $1,285714...$ mittels des Strahlensatzes aus ganzen Zahlen

Dauer eines tropischen Jahres und eines Tages herzustellen. Der vor fast 2500 Jahren aufgestellte Metonische Zyklus leistet noch heute zur Festlegung des Ostertermins seine Dienste.

2. Astronomie

Kalenderrechnung und Astronomie sind eng miteinander verquickt. Der Aufbau des Kalenders fußt auf astronomischen Beobachtungen. Hier soll an zwei Beispielen gezeigt werden, wie die philosophische Lehre der Pythagoreer bewußt oder unbewußt die astronomische Forschung nach zweitausend Jahren noch beeinflusste.

Das Hauptwerk des Astronomen und Mathematikers Johannes Kepler (1571–1630) trägt den Titel „*Harmonices mundi*“, zu deutsch „Weltharmonien“. Von den darin enthaltenen drei Keplerschen Gesetzen ist hier das dritte von Interesse. Es lautet: Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Kepler fand dieses Gesetz auf spekulativem Wege durch Auswertung der von Tycho Brahe vorliegenden Beobachtungsdaten. Begeistert über seine Entdeckung schreibt er selbst: „Endlich habe ich das ans Licht gebracht und über all mein Hoffen und Erwarten als wahr befunden, daß die ganze Natur der Harmonien in ihrem ganzen Umfang und nach all ihren Einzelheiten in den himmlischen Bewegungen vorhanden ist...“ Die Übereinstimmung des dritten Keplerschen Gesetzes mit der Wirklichkeit zeigt die folgende Tabelle, in der die mittleren Planetenentfernungen auf die Einheit der mittleren Erdfernung und die Umlaufzeiten auf das Erdenjahr bezogen sind.

Planeten	T	r	T^2	r^3
Merkur	0,241	0,387	0,058	0,058
Venus	0,615	0,723	0,378	0,378
Erde	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars	1,881	1,524	3,538	3,540
Jupiter	11,86	5,203	140,7	140,8
Saturn	29,46	9,539	867,9	868,0

Der Quotient $T^2:r^3$ stimmt für die zu Keplers Lebzeiten bekannten Planeten fast exakt überein. Heute sind wir Erdbewohner in der Lage, Raumsonden nach anderen Planeten zu schicken. Vielfach schwenken diese Sonden nach Erfüllung ihrer Aufgabe in selbständige Umlaufbahnen um die Sonne ein. Bei störungsfreiem Umlauf um unser Zentralgestirn ist auch für künstliche Sonden die Zahl $T^2:r^3$ mitbestimmend für die Art ihrer Umlaufbewegung.

An dem von Kepler auf spekulativem Wege gefundenen Gesetz ist noch eine Korrektur anzubringen. Wie sich mittels der von Newton begründeten Himmelsmechanik zeigen läßt, fließen auch die Massen der an der Bewegung beteiligten Körper mit ein. Ist M die Masse

der Sonne, m_i die Masse, r_i der mittlere Abstand und T_i die Umlaufzeit des i -ten Planeten, so ist die Zahl

$$Q = \frac{r_i^3}{T_i^2(M + m_i)}$$

unabhängig von i , das heißt, sie ist für sämtliche Planeten des Sonnensystems gleich. Der Fehler tritt in unserer Übersicht nicht in Erscheinung, weil die Sonnenmasse außerordentlich groß gegenüber der Masse der Planeten ist.

Auch die Planetenabstände waren für viele Astronomen der Neuzeit noch Gegenstand spekulativer Überlegungen. Ein Schönheitsfehler bezüglich der Abstandsskala von der Sonne paßte zunächst nicht in die Vorstellungen vom harmonischen Aufbau des Planetensystems. Zwischen Mars und Jupiter klaffte eine weite Lücke. So suchte man gegen Ende des 18. Jahrhunderts diesen fraglichen Gürtel um die Sonne systematisch nach einem vielleicht verborgen gebliebenen kleineren Planeten ab. Am 1. Januar 1801, dem ersten Tag des neunzehnten Jahrhunderts, wurde endlich ein sehr kleiner Himmelskörper in diesem Bereich entdeckt und auf den Namen Ceres getauft. Der Entdecker dieses Planetoiden, Piazzi, verfolgte Ceres noch sechs Wochen lang und mußte dann die Beobachtung wegen einer schweren Erkrankung abbrechen. Bis dahin hatte kein zweiter Astronom die Entdeckung von Piazzi bestätigen können. Gauß berechnete auf Grund der Beobachtungsdaten nach einem von ihm entwickelten Verfahren die Bahn des Himmelskörpers. Dank dieser Berechnungen konnte Ceres nach einem Jahr mit dem Fernrohr genau anvisiert und gesichtet werden. Nun begann eine regelrechte Jagd nach gleichartigen Himmelskörpern, da man Ceres als das Bruchstück eines vor langer Zeit in Trümmer gegangenen größeren Planeten ansah.

Heute kennt man die Bahnen von über 4000 Planetoiden, welche die Hypothese über den zerborstenen größeren Planeten zwischen Mars und Jupiter zu stützen scheinen. Mit diesem Ersatzplaneten ließ sich nun auch die Abstandslücke zwischen Mars und Jupiter zwanglos schließen. Der Wittenberger Professor Titius stellte die folgende Zahlenfolge als Hypothese für die Planetendistanzen auf.

Planet	hypothetische Distanz	wirkliche Distanz
Merkur	$0 + 4 = 4$	3,9
Venus	$3 + 4 = 7$	7,2
Erde	$6 + 4 = 10$	10,0
Mars	$12 + 4 = 16$	15,2
Planetoiden	$24 + 4 = 28$	15–53
Jupiter	$48 + 4 = 52$	52,0
Saturn	$96 + 4 = 100$	95,5
Uranus	$192 + 4 = 196$	192,2
Neptun	$384 + 4 = 388$	301,1

Die hypothetischen Distanzen bilden – von der Venus ausgehend – eine Zahlenfolge, die

durch Zufügen einer additiven Konstanten zu den Gliedern einer geometrischen Folge konstruierbar ist. Bis zum Uranus halten sich die Abweichungen von den tatsächlichen Distanzen in angemessenen Grenzen. Diese Reihe wurde von Bode (1747–1826) veröffentlicht und ist unter dem Namen Titius-Bodesche Reihe in die Fachliteratur eingegangen.

Bemerkenswert ist noch, daß Titius bei Aufstellung der Reihe im Jahre 1766 noch nichts von der Existenz der Planeten Uranus und Neptun wußte. Diese wurden erst 1781 bzw. 1846 entdeckt. Die Suche nach dem Neptun, der zunächst nur indirekt durch Bahnstörungen am Uranus registriert worden war, konnte mittels der Titius-Bodeschen Reihe gezielter angesetzt werden. Auch die Jagd der Astronomen nach Planetoiden vor allem im 19. Jahrhundert ließ sich bei Kenntnis dieser Reihe auf einen beschränkten Raum konzentrieren. Für die Distanz des sonnenfernsten, erst 1930 entdeckten Pluto ergibt sich eine wesentliche Abweichung von der Titius-Bodeschen Regel.

3. Geometrie und Stereometrie

In das sogenannte Goldene Zeitalter fallen drei Problemstellungen, an deren Lösungsbemühungen die griechische Mathematik wuchs. Dies sind 1. die Quadratur des Kreises; 2. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels; 3. die Verdoppelung des Würfels. Die Unmöglichkeit der Lösung dieser drei Probleme mit Zirkel und Lineal wurde erst im 19. Jahrhundert zwingend bewiesen. Versagten in der Antike diese elementaren Mittel zur Lösung, so wurden neue erfunden. Dies trug zur Bereicherung der Kenntnisse über ebene Kurven bei.

In diesem Zusammenhang soll unser Interesse der Kreisrektifikation gelten. Gleichwertig damit ist die Fragestellung nach der Verhältniszahl von Umfang zu Durchmesser eines Kreises, also $\pi = U:d$. Die gesuchte Zahl π tritt zwangsläufig auch beim Problem der Kreisquadratur ($A = \frac{1}{4}\pi d^2$) auf. Ein bemerkenswertes Ergebnis lieferte Hippokrates (um 400 v. u. Z.), der nachwies, daß es Kreismöndchen gibt, deren Inhalte auf die Inhalte von Dreiecken zurückführbar sind. Dies mag ermutigend für die unmittelbaren Nachfolger gewesen sein, für die Verhältniszahl π einen rationalen Zugang ausfindig zu machen. Von Archimedes läßt sich nachweisen, daß er die Zahl π in folgende Grenzen eingeschlossen hat:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Nach einem Bericht von Heron soll Archimedes sogar folgende verschärfte Abschätzung gegeben haben:

$$\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$$

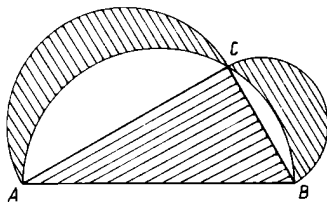


Bild 3
Möndchen des Hippokrates

Hierdurch ist π bis auf fünf Stellen nach dem Komma festgelegt. Jedoch wurden schon in dieser Zeit Vermutungen laut, daß der exakte Wert für π unter den rationalen Zahlen nicht zu finden sei.

Archimedes wagte sich auch an die Aufgabe, die Inhalte krummlinig begrenzter Flächenstücke zu bestimmen. An derartige Problemstellungen wurde erst im 17. Jahrhundert wieder angeknüpft. Zum Beispiel berechnete er den Inhalt des Parabelsegmentes und setzte es in Beziehung zum Inhalt des dieses Segment einschließenden Parallelogramms. Diese Untersuchung führte ihn auf das Zahlenverhältnis

$$A_{\text{Parabelsegment}} : A_{\text{Parallelogramm}} = 2 : 3.$$

Er zog auch Vergleiche zwischen den Volumina der Halbkugel mit dem umbeschriebenen Drehzylinder und dem eingeschriebenen Drehkegel (s. Bild 5). Durch Anwendung eines Zerlegungsverfahrens, das man als Schichtenmethode bezeichnen kann, kam er zu folgendem Ergebnis:

$$V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Halbkugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1.$$

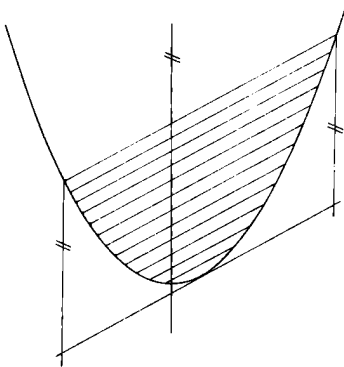
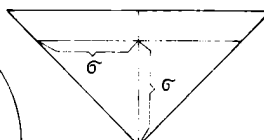
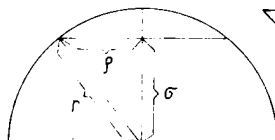
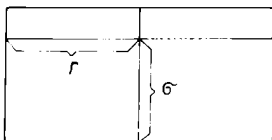


Bild 4
Inhalte von Parabelsegment und umbeschriebenem Parallelogramm



$$r^2 = \sigma^2 + x^2 \Rightarrow \pi r^2 = \pi \sigma^2 + \pi x^2 \Rightarrow v_1 = v_2 + v_3$$

Bild 5
Anwendung der Schichtenmethode zur Ermittlung der Inhaltsbeziehung von Drehzylinder, Halbkugel und Drehkegel

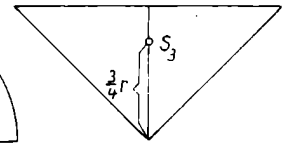
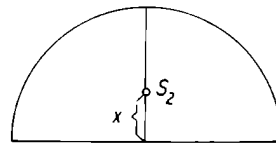
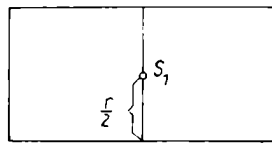


Bild 6
Schwerpunktbestimmung bei der Halbkugel

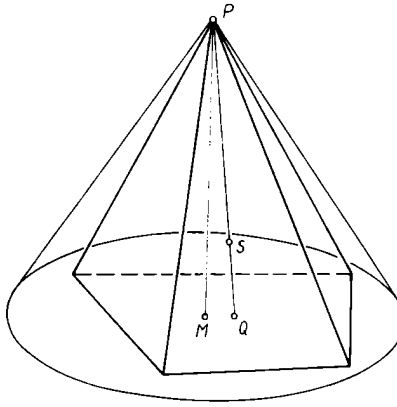


Bild 7
Schwerpunktbestimmung bei der Pyramide

Zu beachten ist hierbei, daß die Inhalte der Basisflächen und die Längen der Höhen für alle drei Drehkörper gleich sind.

Archimedes wandte seine Schichtenmethode auch erfolgreich auf statische Probleme an. Zum Beispiel teilt der Schwerpunkt S des Drehkegels die Körperhöhe r im Verhältnis 1 : 3. Da der Zylinderschwerpunkt die Körperachse halbiert, ergibt sich nach statischen Überlegungen für den Abstand x des Schwerpunktes S der Halbkugel von der Basis folgende Gleichung:

$$\frac{r}{2} = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{3}{4}r \right)$$

Hieraus folgt $x = \frac{3}{8}r$. Der Schwerpunkt S der Halbkugel teilt also die Drehachse des Körpers im Verhältnis 3 : 5 (s. Bild 6).

Die Schichtenmethode gestattet auch eine Verallgemeinerung der Aussage über die Lage des Schwerpunktes beim Drehkegel. Legt man mehrere ebene Schnitte durch die Kegelspitze P, so bleibt als Restkörper eine schiefe

Pyramide. Die Inhalte der Schichten der Pyramide sind proportional zu den Schichten des Drehkegels. Folglich hat der Schwerpunkt des Restkörpers von der Basisfläche gleichfalls den Abstand $r/4$. Außerdem liegt er auf der Schwerlinie des Körpers durch die Körperspitze P. Diese ausgezeichnete Schwerlinie von Pyramiden und Kegeln findet man durch Verbinden des Schwerpunktes Q der Basisfläche mit der Kegelspitze P (s. Bild 7).

Archimedes bewältigte mit seiner Schichtenmethode auch die Volumenbestimmung des Drehparaboloides. Er erkannte, daß die Volumina der Schichten gleicher Stärke eines Drehparaboloides eine arithmetische Folge bilden, deren Glieder sich leicht summieren lassen. Mittels eingeschriebener und umbeschriebener Zylinderschichten schätzte er das Volumen des Drehparaboloides nach unten und oben ab. Durch Grenzbetrachtung schloß Archimedes weiter, daß das Volumen eines Drehparaboloides gerade halb so groß ist wie das Volumen des dem Paraboloid umschriebenen Drehzylinders. Es gilt also $V_{\text{Paraboloid}} : V_{\text{Zylinder}} = 1 : 2$.

Aus statischen Überlegungen läßt sich mittels der Schichtenmethode weiter folgern, daß der Schwerpunkt S des Drehparaboloides die Drehachse im Verhältnis 1 : 2 teilt (s. Bild 8).

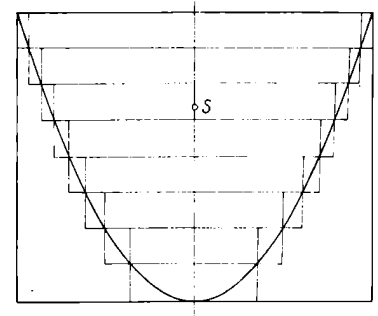


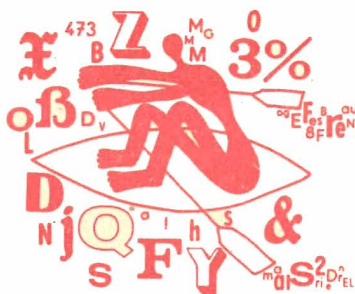
Bild 8
Volumen des Drehparaboloids

Die Beispiele zeigen, daß sich auch in der Geometrie viele Größenbeziehungen durch kleine ganze Zahlen erfassen lassen. Der zahlentheoretische Gehalt, der im Problem der Kreisrektifikation und damit auch der Kreisquadratur verborgen liegt, konnte erst mit den Mitteln der modernen Mathematik im 19. Jahrhundert voll aufgedeckt werden.

E. Schröder

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1978



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

Mathematik

Ma 5 ■ 1679 Katrin besitzt 12 Buntstifte, und zwar doppelt soviel rote wie grüne, genau soviel gelbe wie blaue. Wieviel Buntstifte jeder dieser Farben sind es? *Schülerin Birgit Weyh, Fambach, Kl. 7*

Ma 5 ■ 1680 In einem Ferienlager bewohnen Andreas, Bert, Christian und David gemeinsam ein Zelt. Sie kommen aus verschiedenen Orten, und zwar aus Gotha, Erfurt, Sömmerda und Weimar. Aus ihren Gesprächen erfahren wir folgendes:

- a) Der Junge aus Weimar ist älter als die Jungen aus Erfurt und Sömmerda.
- b) David ist älter als der Erfurter.
- c) Andreas, der älteste von ihnen, wohnt nicht in Gotha.
- d) Christian ist noch nicht so alt wie der Junge aus Erfurt, aber mit dem Jungen aus Sömmerda gleichaltrig.

Ordne jedem Vornamen den richtigen Wohnort zu! Ordne die Jungen nach ihrem Lebensalter; beginne mit dem Jüngsten!

Schüler T. Weiß, Weimar

Ma 5 ■ 1681 Ein Zimmer von 4,80 m Länge und 3,60 m Breite, dessen Fußboden die Form eines Rechtecks hat, soll mit quadratischen Teppichfliesen, die eine Seitenlänge von 40 cm besitzen, ausgelegt werden. Die dafür benötigten Teppichfliesen, die 4 mm dick sind, werden übereinander gestapelt. Wie hoch wird dieser Stapel aus Teppichfliesen, wenn sie sich insgesamt durch ihr Eigengewicht um 2 cm zusammenpressen?

Schüler Holger Nörenberg, Teltow, Kl. 7

Ma 5 ■ 1682 Auf einer Weide grasen Pferde, Kühe und Schafe; zusammen sind es mehr als 90, aber weniger als 100 Tiere. Es sind doppelt soviel Kühe wie Pferde, und viermal soviel Schafe wie Kühe. Wieviel Pferde,

Kühe bzw. Schafe befinden sich auf dieser Weide?

Schüler Thomas Böhme, Eisleben, Kl. 7

Ma 5 ■ 1683 Bei einer Exkursion sollen 87 Schüler mit drei Bussen befördert werden. Nachdem alle Schüler eingestiegen waren, stellte man fest, daß die Busse ungleichmäßig besetzt waren. Da in jedem Bus die gleiche Anzahl von Schülern fahren sollte, stiegen aus dem ersten Bus sechs Schüler in den zweiten und drei Schüler in den dritten Bus um. Außerdem stiegen noch vier Schüler vom zweiten in den dritten Bus um. Wieviel Schüler befanden sich vor dem Umsteigen in jedem dieser drei Busse?

Fachlehrer H. Kampe, Neuseddin

Ma 5 ■ 1684 An einer Klassenarbeit im Fach Mathematik waren mehr als 20, aber weniger als 30 Schüler beteiligt. Der fünfte Teil der Anzahl dieser Schüler erhielt die Note 1. Die Note 2 erhielten drei Schüler mehr als die Note 1. Die Note 3 erhielten doppelt soviel Schüler wie die Note 1. Die restlichen Schüler erhielten die Note 4. Wieviel Schüler erhielten die Note 1, 2, 3, 4?

Schülerin Martina Ullrich, Guben, Kl. 7

Ma 6 ■ 1685 Ein gleichschenkliges Dreieck habe einen Umfang von 14 cm. Eine der Seiten ist dreimal so lang wie eine zweite der drei Seiten. Welche Länge hat jede Dreiecksseite? *Schüler Thomas Böhme, Eisleben, Kl. 7*

Ma 6 ■ 1686 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren fünfter Teil gleich ihrer Quersumme ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 1687 Auf einem Tisch stehen drei Schalen mit Äpfeln. In der ersten Schale sind halb so viele Äpfel, wie in jeder der beiden anderen. Nimmt man aus der ersten Schale zwei Äpfel und legt sie in die zweite, nimmt

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm · 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Thies Luther, 26 Güstrow, Werdersstr. 22		Ma 7 ■ 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

man danach aus der zweiten Schale vier Äpfel und legt sie in die dritte, nimmt man schließlich aus der dritten Schale sechs Äpfel und legt sie in die erste, so sind in jeder Schale gleich viele Äpfel. Wieviel Äpfel waren anfangs in jeder dieser Schalen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 1688 Die Sportler der Volksrepublik Bulgarien errangen bei den Olympischen Sommerspielen 1976 in Montreal insgesamt 24 Medaillen, und zwar eine Goldmedaille weniger, aber eine Bronzemedaille mehr als Silbermedaillen. Wieviel Gold-, Silber- bzw. Bronzemedailien waren es?

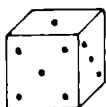
Schüler Uwe Würker,
POS Mülsen St. Micheln

Ma 6 ■ 1689 Großvater, Vater und Sohn gingen in den Wald, um Pilze zu sammeln. Der Großvater fand zwei Pilze mehr als der Vater, der Sohn fünf Pilze mehr als der Großvater. Insgesamt brachten sie 78 Pilze mit nach Hause. Wieviel Pilze haben Großvater, Vater bzw. Sohn geerntet?

Schüler Frank-Michael Wegner,
Lenin-OS Greifswald, Kl. 5

Ma 7 ■ 1690 Das Bild stellt die Anordnung der ungeraden Augenzahlen auf einem Spielwürfel dar. Acht solche Spielwürfel werden zu einem größeren Würfel zusammengesetzt. Ein Betrachter dieses Würfels möge genau drei in einer Ecke zusammenstoßende quadratische Flächen sehen. Jede sichtbare quadratische Fläche der ursprünglichen Spielwürfel habe nur ungerade Augenzahlen. Die Summe aus allen dem Betrachter sichtbaren Augenzahlen betrage 30. Es ist zu zeigen, daß die Augenzahl 1 mindestens viermal vorkommt!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ■ 1691 Während der Olympischen Sommerspiele 1976 in Montreal bewältigte die Athletin Johanna Schaller aus der DDR den 100-m-Hürdenlauf der Damen in 12,77 Sekunden. Sie war damit um nur $\frac{1}{100}$ Sekunde

schneller als Tatjana Anissimowa aus der UdSSR. Wieviel Meter Vorsprung hatte Johanna Schaller gegenüber Tatjana Anissimowa, als sie über die Ziellinie lief, wenn die Laufgeschwindigkeiten beider Läuferinnen als konstant angenommen werden?

stud. chem. Annegret Kirsten,
Leuna/Merseburg

Ma 7 ■ 1692 Ute kaufte in einem Schreibwarengeschäft Hefte, Schnellhefter und Filzstifte, wofür sie zusammen 7,20 M bezahlen mußte. Der Preis für einen Filzstift beträgt 1,20 M, für ein Heft 12 Pf und für einen Schnellhefter 1,05 M. Der Preis für die gekauften Filzstifte macht den dritten Teil des

Gesamtpreises aus. Wieviel Hefte, Schnellhefter bzw. Filzstifte hat Ute eingekauft?

Schüler Heiko Lehmann,
Herderschule Rostock, Kl. 6b

Ma 7 ■ 1693 Es sind alle gebrochenen Zahlen $x = \frac{a}{b}$ zu ermitteln, für die $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ und $b - a = 12$ gilt! StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 1694 Drei Männer heißen mit Vornamen Bernd, Günter und Dieter. Ihre Familiennamen sind Krüger, Dahlen und Lohe; ihre Berufe Elektriker, Lehrer und Gärtner. Über sie ist folgendes bekannt:

- (1) Krüger ist mit Bernd befreundet.
- (2) Der Elektriker und Bernd helfen Lohe beim Hausbau.
- (3) Der Lehrer, Dieter und Dahlen spielen gern Skat.
- (4) Dahlen, der von Beruf Gärtner ist, und Günter haben einen Garten.

Wie heißt jeder einzelne mit vollem Namen, und welchen Beruf übt er aus? Welche der vier Angaben ist überflüssig?

Sabine Neumann, Wusterwitz, Kl. 6

Ma 8 ■ 1695 Es ist zu beweisen: Wenn die Summe von vier beliebigen natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist das Produkt aus diesen vier Zahlen eine gerade Zahl. Schüler Frank Erdmann, Zeitz, Kl. 9

Ma 8 ■ 1696 Gegeben sei ein Winkel von 63° . Man teile diesen Winkel mit Zirkel und Lineal

- a) in drei gleiche Teile
- b) in sieben gleiche Teile!

Schüler Andreas Fittke, EOS H. Hertz, Berlin

Ma 8 ■ 1697 In einen Kreis k mit einem Durchmesser von 20 cm Länge seien zwei zueinander parallele Sehnen von 10 cm und 5 cm Länge gezeichnet. Es ist der Abstand dieser beiden Sehnen zu berechnen.

Schüler Wolfgang Hensel, Fambach

Ma 9 ■ 1698 Finden Sie reelle Zahlen x und y , deren Summe gleich ihrem Produkt ist, und beweisen Sie, daß x und y nur dann rationale Zahlen sind, wenn das Quadrat ihrer Summe vermindert um das Vierfache dieser Summe eine Quadratzahl ist!

Schüler Michael Schreckenbach,
Remtengrün, Kl. 11

Ma 9 ■ 1699 Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \neq 0$ gilt:

$$\frac{n \cdot \sqrt{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}}{n} = \frac{n}{\sqrt{n}}$$

Schüler Ralf Kröner, Vetschau, Kl. 8

Ma 9 ■ 1700 Es ist zu beweisen: Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 läßt!

Schüler Horst Szillat, Berlin, Kl. 9

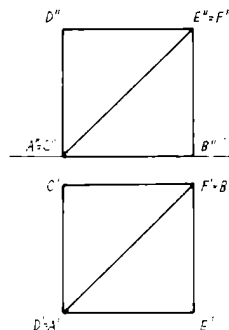
Ma 9 ■ 1701 Gegeben sind drei kongruente Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = r_2 = r_3 = r$ und genau einem gemeinsamen Randpunkt.

Die Mittelpunkte der Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die Vereinigungsmenge der Menge aller Randpunkte und der Menge aller inneren Punkte dieser drei Kreise wird durch ein Flächenstück dargestellt, dessen Inhalt mit A bezeichnet sein soll.

- a) Wie groß ist A ?
- b) Wie groß ist r , wenn $A = 80 \text{ cm}^2$ beträgt?

Schüler Heiko Müller, Schmalkalden

Ma 10/12 ■ 1702 Stellen Sie den in senkrechter Zweitafelprojektion abgebildeten Körper in Kavalierperspektive dar, und entwickeln Sie eine Formel für die Berechnung seines Volumens!



Dipl.-Lehrer f. Math. Helmut Engelmann,
Sachsendorf

Ma 10/12 ■ 1703 Man ermittle alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ mit } x \neq 0 \text{ und } x \geq y \geq z \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y &\neq 0 \\ z &\neq 0 \end{aligned}$$

in natürlichen Zahlen! U. Spittel, Jena

Ma 10/12 ■ 1704 Gegeben sei eine Kugel, deren Oberflächeninhalt (in cm^2) die gleiche Maßzahl besitzt wie ihr Volumen (in cm^3). Dieser Kugel sei ein Würfel derart eingeschrieben, daß jeder seiner Eckpunkte auf der Kugeloberfläche liegt.

In welchem Verhältnis stehen

- a) die Maßzahlen der Oberflächeninhalte dieses Würfels und dieser Kugel?
 - b) die Maßzahlen der Volumina dieses Würfels und dieser Kugel?
- (Das Verhältnis soll stets in der Form $1:x$ angegeben werden.)

Schüler Frank Erdmann, Zeitz, Kl. 9

Ma 10/12 ■ 1705 In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt der Höhen. Spiegelt man das Dreieck ABC an der Geraden, die durch A und B geht, so erhält man das Dreieck $A'B'C'$.

- a) Man beweise, daß die Punkte A, C', B und D auf einem Kreis liegen!
- b) Veranschaulichen Sie den Beweis durch eine entsprechende Konstruktion!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Physik

Ph 6 ■ 26 Der stählerne Antennenmast eines Rundfunksenders ist bei einer Temperatur von $+10^\circ\text{C}$ genau 200 Meter hoch.

- a) Berechne die Höhe des Mastes bei einer Temperatur von -15°C und $+30^{\circ}\text{C}$!
 b) Berechne die Längendifferenz des Mastes zwischen den unter a) genannten Temperaturen!

Hinweis: Entnimm die Formel zur Berechnung der Längenänderung dem Buch „Tabellen und Formeln“! Der Längendehnungskoeffizient für Stahl ist $\alpha = 0,0000117 \frac{1}{\text{grd}}$. Die

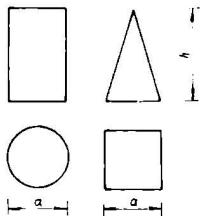
Maße sind auf volle Zentimeter zu runden.

Ing. A. Körner, Leipzig



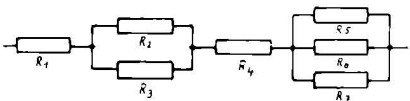
- Ph 7 ■ 27 Ein Zylinder und eine quadratische Pyramide haben die gleiche Masse. Ebenfalls sind die dargestellten Abmessungen gleich. Der Zylinder besteht aus Wachs (Dichte $0,95 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$).

Ist die Pyramide aus Nadelholz, Aluminium, Quarzglas oder Marmor?



- Ph 8 ■ 28 Berechne den Gesamtwiderstand der nach dem Bild geschalteten Teilwiderstände!

$R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$; $R_3 = 500 \Omega$;
 $R_4 = 1 \Omega$; $R_5 = 10 \Omega$; $R_6 = 100 \Omega$;
 $R_7 = 1000 \Omega$.

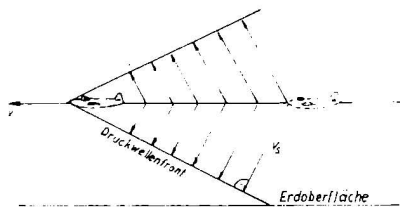


- Ph 9 ■ 29 Zwei kleine Kugeln tragen eine Ladung gleichen Vorzeichens, und ihre Mittelpunkte sind 2 cm voneinander entfernt. Die Abstoßungskraft beträgt 0,25 p. Berechnen Sie die Ladung der einzelnen Kugeln!

- Ph 10/12 ■ 30 Ein Flugzeug überfliegt mit Überschallgeschwindigkeit in einer Höhe von h (Meter) zwei Beobachtungspunkte B_1 und B_2 , die mit einer unmittelbaren Nachrichtenverbindung (Funk oder Telefon) ausgerüstet sind und voneinander die Entfernung $a = 18,5 \text{ km}$ haben. Der Beobachter B_2 mißt

laufend den Höhenwinkel α des sich nähernden Flugzeuges. In dem Moment, als der Beobachter B_1 dem Beobachter B_2 das Wahrnehmen des vom Flugzeug hervorgerufenen „Überschallknalles“ meldet (Zeitpunkt t_1), betätigt B_2 eine Stoppuhr und liest gleichzeitig einen Höhenwinkel von $\alpha = 85,2^{\circ}$ ab. Als der Überschallknall bei B_2 zu hören ist (Zeitpunkt t_2), liest B_2 auf der Stoppuhr eine Zeit von 37 Sekunden ab.

- a) Wie schnell flog das Flugzeug?
 b) In welcher Höhe flog das Flugzeug? Die Schallgeschwindigkeit sei $v_s = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Hinweis: Ein mit Überschallgeschwindigkeit fliegendes Flugzeug ruft in der Luft eine ständige Druckwelle hervor, die sich von der Flugzeugspitze kegelförmig im Raum ausbreitet, der sogenannte Machsche Kegel, und beim Auftreffen auf das Ohr als Knall wahrgenommen wird. Diesen Druckkegel schleppt das Flugzeug während des Überschallfluges ständig hinter sich her.

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie



- Ch 7 ■ 21 In einem Betrieb sollen täglich 200 kg Mangan aus Braunstein (MnO_2) gewonnen werden. In 250 mg des angelieferten Braunsteins sind 140 mg Mangan enthalten. a) Wieviel kg Braunstein müssen dem Betrieb täglich für die Produktion zur Verfügung stehen?

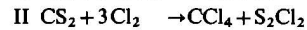
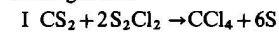
- b) Wieviel t Braunstein muß der Betrieb monatlich erhalten, wenn täglich gearbeitet wird (1 Monat = 30 Tage)?

- Ch 8 ■ 22 In einem Labor müssen 100 g reines Magnesiumphosphat hergestellt werden. Es stehen Phosphorsäure, Magnesium, Magnesiumoxid und Magnesiumkarbonat zur Verfügung. Errechnen Sie unter Berücksichtigung der Kosten die ökonomischste Methode! (Kosten für Phosphorsäure werden nicht einbezogen.)

Kosten: Magnesium: 23,28 M je kg, Magnesiumoxid: 11,16 M je kg, Magnesiumkarbonat: 6,12 M je kg.

- Ch 9 ■ 23 Das für unsere Landwirtschaft als Dünger sehr wichtige Ammoniumsulfat kann im VEB Leunawerke „Walter Ulbricht“ völlig aus einheimischen Rohstoffen hergestellt werden. Hierzu wird Gips mit Ammoniak und Kohlensäure versetzt. Berechnen Sie, a) wieviel Tonnen Ammoniak, b) wieviel Tonnen Gips und c) wieviel Tonnen Kohlendioxid zur Herstellung von 1000 t Ammoniumsulfat gebraucht werden!

Ch 10/12 ■ 24 Tetrachlormethan wird durch Chlorieren von Schwefelkohlenstoff gewonnen. Nebenprodukt ist hierbei Dischwefeldichlorid (S_2Cl_2). Die Chlorierung von Schwefelkohlenstoff wird in zwei Stufen durchgeführt.

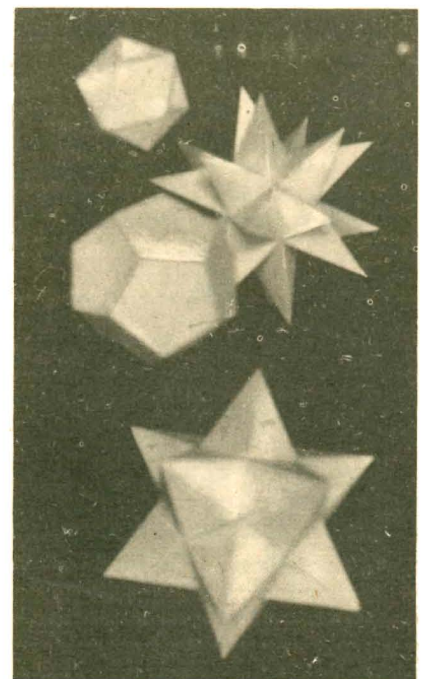


Dabei wird aber nur ein 58%iger Umsatz in der ersten Stufe erreicht. Es sollen 1,5 t Schwefelkohlenstoff vollständig zu Tetrachlormethan umgesetzt werden. Berechnen Sie

- a) die Gesamtmenge des entstehenden Tetrachlormethans in Tonnen,
 b) die Menge des in der ersten Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoffs in Tonnen,
 c) die Chlorgasmenge in Tonnen, die zur Chlorierung der unter b) ermittelten Schwefelkohlenstoffmenge erforderlich ist!

Zusammenstellung der vier Chemieaufgaben:
 Diplomlehrer Christel Reuter, 29. OS Leipzig

Sternpolyeder (siehe Beitrag S. 128/129)

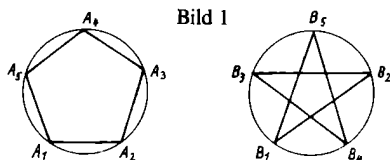




Wir bauen zwei Sternpolyeder

In der Weihnachtszeit verwendet man als Raumschmuck häufig regelmäßig geformte geometrische Körper, die nach außen von einer großen Anzahl regelmäßiger Pyramiden begrenzt werden (siehe Foto Seite 127 rechts unten). In der Mathematik bezeichnen wir diese Körper als Sternpolyeder. Wir werden in diesem Beitrag für zwei reguläre Sternpolyeder eine einfache Bauanleitung angeben. Zum Basteln der Modelle benötigen wir Zeichenkarton im Format A3, Zeichengeräte, Schere und Klebstoff. Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen sind regelmäßige Fünfecke. Als *Fünfeck* bezeichnen wir einen geschlossenen Streckenzug, d. h. eine Menge von Strecken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$, wobei A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 paarweise verschiedene Punkte einer Ebene sind, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen. Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 heißen Ecken, die Strecken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$ heißen Seiten des Fünfecks. Die Winkel des Fünfecks sind $\sphericalangle A_1A_2A_3, \sphericalangle A_2A_3A_4, \sphericalangle A_3A_4A_5, \sphericalangle A_4A_5A_1, \sphericalangle A_5A_1A_2$. Wir nennen das Fünfeck *regelmäßig*, wenn alle seine Winkel gleich groß und alle seine Seiten gleich lang sind.

Zur Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks brauchen wir nur den Umfang eines Kreises in fünf gleiche Teile zu zerlegen und die Teilpunkte miteinander zu verbinden. Dafür gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten.



Das erste Fünfeck $A_1A_2A_3A_4A_5$ heißt *einfach*. Zwei Seiten besitzen höchstens einen gemeinsamen Eckpunkt. Das zweite Fünfeck $B_1B_2B_3B_4B_5$ ist nicht einfach. Die Seiten überschneiden sich. Es gibt außer den Eckpunkten gemeinsame Punkte verschiedener Fünfeckseiten. Wir bezeichnen dieses Fünfeck als *Sternfünfeck*.

Aufgabe 1

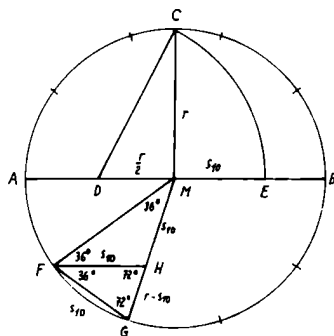
Zeichnet einen Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm! Konstruiert durch Teilung des Kreises die beiden verschiedenen regelmäßigen Fünfecke!

Anleitung: Zur Konstruktion könnt ihr mit dem Winkelmesser fünf Zentriwinkel von je 72° aneinander abtragen. Die Schnittpunkte der Schenkel mit dem Kreis ergeben die Eckpunkte der gesuchten Fünfecke.

Die Konstruktion ist aber auch auf folgende Weise unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal möglich:

Tragt in den Kreis mit dem Mittelpunkt M einen Durchmesser $\overline{AB}$ ein! Zeichnet in M einen zu $\overline{AB}$ senkrechten Radius $\overline{MC}$! Konstruiert den Mittelpunkt D der Strecke $\overline{AM}$! Schlagt um D mit $\overline{DC}$ einen Kreisbogen, der $\overline{MB}$ in E schneidet! Dann ist die Strecke $\overline{ME}$ gleich der Seite des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen einfachen Zehnecks. Tragt diese Strecke auf den Umfang des Kreises ab! Jeder zweite Schnittpunkt liefert die Eckpunkte der gesuchten Fünfecke.

Bild 2



Die angegebene Konstruktion können wir folgendermaßen begründen:

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$\overline{DM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{DC}^2.$$

$$\text{Hieraus folgt } \overline{DC} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5} \text{ und}$$

$$\overline{ME} = \overline{DE} - \overline{DM} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Verbindet man eine Zehneckseite $\overline{FG}$ mit dem Mittelpunkt und zeichnet die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle GFM$, so sind die Dreiecke $\triangle GFM$ und $\triangle HGF$ ähnlich, da die sich entsprechenden Winkel gleich groß sind. Also ist $s_{10} : r = (r - s_{10}) : s_{10}$.

Als positive Lösung der quadratischen Gleichung $s_{10}^2 + rs_{10} - r^2 = 0$ erhalten wir

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = \overline{ME}. \text{ Damit ist obiges Konstruktionsverfahren bewiesen.}$$

Hinweis: Die Seitenlänge im einfachen Fünfeck beträgt $a = 2r \cdot \sin 36^\circ$, also für $r = 4$ cm ist $a \approx 4,7$ cm.

Die Seitenlänge im Sternfünfeck beträgt $b = 2r \cdot \sin 72^\circ$, also für $r = 4$ cm ist $b \approx 7,6$ cm.

Wir wollen nun aus einfachen regelmäßigen Fünfecken das Modell eines Körpers zusammensetzen.

Aufgabe 2

Zeichnet das folgende Körpernetz, und fertigt ein Modell des zugehörigen Körpers an! Schneidet hierzu das bereits konstruierte einfache regelmäßige Fünfeck aus, und verwendet es als Schablone!

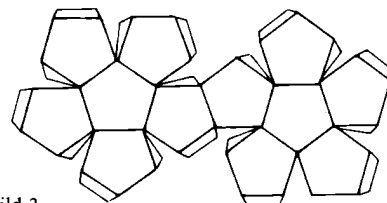
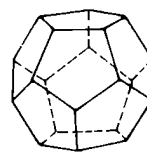


Bild 3

Wir erhalten einen Körper, der von 12 einfachen regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird, den *Dodekaeder*.

Bild 4



Aus regelmäßigen Sternfünfecken lassen sich in analoger Weise zwei verschiedene Sternpolyeder zusammensetzen. Da sich die einzelnen Sternfünfecke hierbei gegenseitig durchdringen, ist es zweckmäßig zur Anfertigung eines Modells dieser Körper etwas anders vorzugehen.

Im ersten Fall gehen wir vom Modell unseres Dodekaeders aus und setzen auf jede seiner Flächen eine fünfseitige Pyramide, so daß die Fünfeckflächen des Dodekaeders durch die Seitenflächen der Pyramiden jeweils zu Sternfünfecken ergänzt werden.

Aufgabe 3

Ermittelt zeichnerisch die Länge s der Seitenkanten der Pyramiden! Zeichnet dazu eine Fläche des Dodekaeders, und bringt die Verlängerungen der Seiten zum Schnitt!

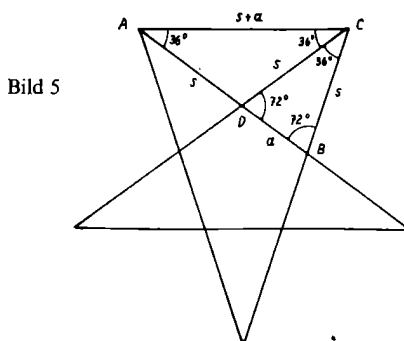


Bild 5

Hinweis: Betrachten wir die Winkel in obiger Figur, so folgt $\triangle ABC \sim \triangle CDB$. Also ist $(s+a) : s = s : a$. Daraus berechnen wir

$$s = a \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Für } a = 4,7 \text{ cm erhalten wir } s \approx 7,6 \text{ cm.}$$

Aufgabe 4

Zeichnet das Netz des Mantels der gleichseitigen Pyramiden, und klebt auf alle zwölf Seitenflächen des Dodekaeders je eine solche Pyramide!

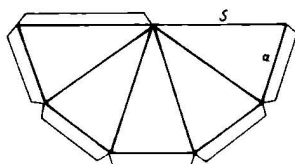


Bild 6

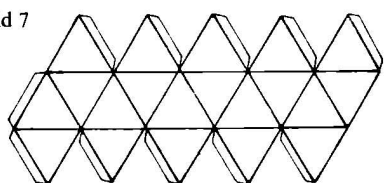
Damit erhalten wir einen Sternpolyeder. Es ist das zwölfkockige Sterndodekaeder, dessen Seitenflächen zwölf regelmäßige Sternfünfecke sind (siehe Foto auf Seite 127 unten).

Einen weiteren Sternpolyeder erhalten wir, wenn wir vom Ikosaeder ausgehen und auf jede Seitenfläche eine dreiseitige Pyramide setzen.

Aufgabe 5

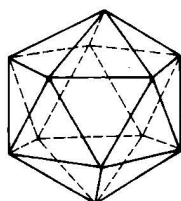
Zeichnet das folgende Körpernetz, verwendet als Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke $a=4,7$ cm und fertigt ein Modell des Ikosaeders an!

Bild 7



Der Ikosaeder wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Bild 8



Wir betrachten einen Eckpunkt des Ikosaeders. In ihm treffen je zwei Seiten von fünf aneinandergrenzenden gleichseitigen Dreiecken zusammen. Die dritten Seiten dieser Dreiecke bilden jeweils ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge $a=4,7$ cm.

Wir setzen nun auf jede Ikosaederfläche eine dreiseitige Pyramide, so daß diese Fünfecke des Ikosaeders durch die Seitenflächen der Pyramiden zu Sternfünfecken ergänzt werden. Dann sind die Pyramidenkanten Verlängerungen der Kanten des Ikosaeders. Die Kantenlänge der dreiseitigen Pyramiden beträgt für $a=4,7$ cm wiederum $s=7,6$ cm.

Aufgabe 6

Klebt auf alle zwanzig Seitenflächen des Ikosaeders dreiseitige Pyramiden!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Laó Fejes Tóth

Direktor des Mathematischen Instituts der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

▲ 1678 ▲ Wie groß ist die sphärische Abstandssumme zwischen den Ecken eines einer Einheitskugel einbeschriebenen regelmäßigen Dodekaeders?



L. Fejes Tóth wurde 1915 in Szeged geboren. Er besuchte in Budapest Grundschule und Gymnasium und studierte von 1933 bis 1938 Mathematik und Physik an der Universität Budapest. Dort legte er auch die Lehramtsprüfung ab und promovierte 1938 zum Doktor. Anschließend leistete er in der ungarischen Armee seinen Militärdienst ab und war 1941 bis 1944 Assistent am geometrischen Institut der Universität Klausenburg. Von 1945 bis 1948 wirkte er als Gymnasiallehrer in Budapest. 1946 wurde er Privatdozent an der Universität Budapest. Von 1948 bis 1964 war er Professor für Mathematik an der Universität Veszprém. Seit 1965 ist er Professor am Mathematischen Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und seit 1970 Direktor dieses Institutes. Er nahm mehrfach Gastprofessuren an auswärtigen Hochschulen wahr, so an den Universitäten Freiburg i. Br., Heidelberg, Salzburg und Ilmenau, sowie an verschiedenen Hochschulen der Vereinigten Staaten von Amerika und Kanadas.

1957 wurde ihm der Ungarische Nationalpreis, der Kossuth-Preis, 1973 der Ungarische Staatspreis, 1977 die Carl-Friedrich-Gauß-Medaille der Braunschweigischen wissenschaftlichen Gesellschaft verliehen. 1964 erhielt er einen Ruf auf ein Ordinariat der Universität Zürich, das er jedoch nicht annehmen konnte.

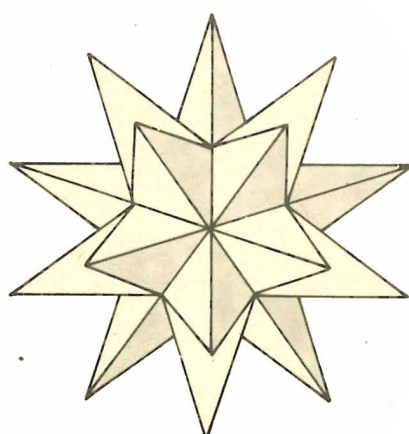
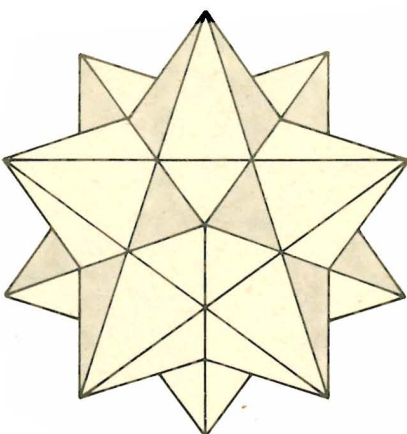
L. Fejes Tóth ist ordentliches Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und auswärtiges Mitglied der Akademie der Wissenschaften der DDR sowie der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

Wir erhalten das zwanzigkockige Sterndodekaeder, dessen Seitenflächen ebenfalls zwölf regelmäßige Sternfünfecke sind.

Die beiden von uns gebastelten Sternpolyeder wurden bereits 1619 von Johannes Kepler beschrieben, der von der Harmonie dieser Körper stark beeindruckt war.

Außer den beiden Sterndodekaedern gibt es weitere Sternpolyeder. Für ein weiterführendes Studium empfehlen wir das in die mathematische Schülerbücherei aufgenommene Buch von T. Roman: „Reguläre und halbreguläre Polyeder“.

U. Sonnemann



XIX. Internationale Mathematikolympiade Beograd, Juli 1977



Aufgaben

1. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Auf seinen Seiten werden nach innen die gleichseitigen Dreiecke ABK , BCL , CDM , DAN errichtet. Man beweise, daß die Mittelpunkte der vier Strecken KL , LM , MN und NK zusammen mit den Mittelpunkten der acht Strecken AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN und AN die Eckpunkte eines regelmäßigen 12-Ecks sind. (Niederlande, 6 Punkte)

2. In einer endlichen Folge reeller Zahlen ist die Summe von jeweils sieben unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern negativ, während die Summe von jeweils elf unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern negativ, wäh- Bestimme die größte Anzahl der Glieder in einer solchen Folge! (Soz. Republik Vietnam, 6 Punkte)

3. Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl mit $n > 2$. Wir betrachten die Menge V_n mit

1. Tag

den Elementen $1 + kn$ mit $k = 1, 2, \dots$. Eine Zahl $m \in V_n$ heißt *unzerlegbar* in V_n , wenn es in V_n keine Zahlen p, q gibt, so daß $m = p \cdot q$ ist.

Man beweise, daß es in V_n eine Zahl r gibt, die man auf mehr als eine Weise als Produkt von in V_n unzerlegbaren Faktoren darstellen kann. (Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren aus V_n unterscheiden, gelten als gleich.) (Niederlande, 7 Punkte)

4. Seien a, b, A und B gegebene reelle Zahlen und
 $f(x) = 1 - a \cdot \cos x - b \cdot \sin x - A \cdot \cos 2x - B \cdot \sin 2x$.

Es sei bekannt, daß $f(x) \geq 0$ für alle reellen x ist.

Man beweise, daß dann

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ und } A^2 + B^2 \leq 1 \text{ gilt.}$$

(Großbritannien, 6 Punkte)

2. Tag

5. Es seien a, b positive ganze Zahlen. Dividiert man $a^2 + b^2$ durch $a + b$, dann erhält man den Quotienten q und den Rest r . Man bestimme alle Paare (a, b) , für die $q^2 + r = 1977$ gilt. (BRD, 7 Punkte)

6. Es sei f eine Funktion, die für alle natürlichen Zahlen n definiert ist und deren Funktionswerte natürliche Zahlen sind. Es gelte $f(n+1) > f(f(n))$

für alle n .

Man beweise, daß dann

$$f(n) = n$$

für jede natürliche Zahl n gilt.

(VR Bulgarien, 7 Punkte)

alpha stellt die DDR-Mannschaft vor:

Peter Dittrich, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin, Kl. 11 (3. Preis);

Lutz Gärtner, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin, Kl. 12 (1. Preis);

Werner Hoffmann, ABF „W. Ulbricht“ der MLU Halle, Kl. 12

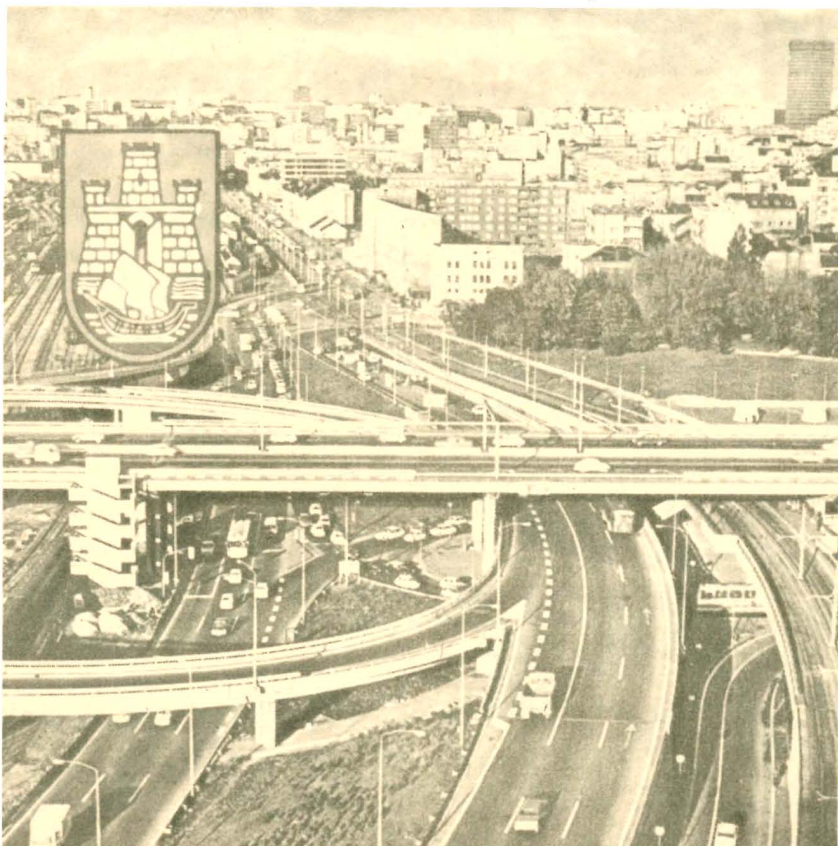
Roger Labahn, EOS „Geschwister Scholl“, Anklam, Kl. 12;

Michael Marczinek, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin, Kl. 12 (1. Preis);

Bernd Mulansky, EOS „Martin Andersen Nexö“, Dresden, Kl. 11 (2. Preis);

Ilya Schmelzer, Spezialklasse der MLU Halle, Kl. 11

Steffen Thiel, EOS Königs Wusterhausen, Kl. 10.



● In diesem Jahr wurden 44% der insgesamt erreichbaren Punkte erzielt (1975: 55%, 1976: 42%). Das zeigt den Schwierigkeitsgrad der gestellten Aufgaben. Preise wurden vergeben:

1. Preis: 40 bis 34 Punkte

2. Preis: 33 bis 24 Punkte

3. Preis: 23 bis 17 Punkte.

● Erstmals wurde ein Symposium „Jugend und Mathematik“ durchgeführt.

● Die Teilnehmer der DDR-Mannschaft (12. Klasse) werden zum Studium delegiert. Die Preisträger unter ihnen erhalten für das 1. Studienjahr ein zusätzliches Stipendium.

● Die XX. IMO findet Anfang Juli 1978 in der Sozialistischen Republik Rumänien statt.

● Unter den 155 Teilnehmern der XIX. IMO waren zwei Mädchen, eins aus der Mongolischen Volksrepublik und eins aus der Volksrepublik Bulgarien.

● Die Abschlußfeier der XIX. IMO fand in der Universität Beograd statt. Zu Ehren der XIX. IMO gab der Bürgermeister von Beograd für die Delegationsleiter im Rathaus einen Empfang.

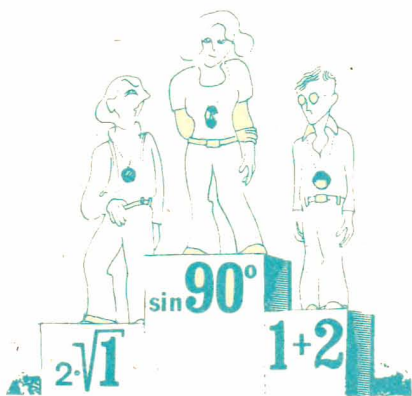
● Exkursionen wurden durchgeführt in die erst kürzlich eröffnete Höhle *Revaska Pecina* und eine zum mittelalterlichen Kloster *Manasija*, das wertvolle Fresken enthält.

● Alle Teilnehmer unternahmen einen Tagesausflug mit Tragflügelbooten zum „Eisernen Tor“.

● Die Klausuren (je 4 Stunden Arbeitszeit) fanden in den Räumen der Pionirski Grad, der Pionierstadt am Rande von Beograd bei hochsommerlichen Temperaturen statt. Die Pionierstadt war gleichzeitig Unterkunft für die IMO-Teilnehmer.

● Es wurden 7 Spezialpreise für die ausgezeichnete Lösung einer Lösung vergeben, und zwar an zwei amerikanische, zwei englische, je einen ungarischen, bulgarischen und tschechischen Teilnehmer.

● Fünf der beteiligten Schüler erreichten die volle Punktzahl.



Hobby und Beruf

Porträt des IMO-Teilnehmers Michael Marczinek (DDR)

Die Klausur ist beendet. Einzeln oder in Grüppchen, in sich gekehrt oder lebhaft diskutierend, verlassen die *Jungen Mathematiker* die Wettkampfstätte.

Die acht Jungen unserer DDR-Mannschaft tauschen erst mal ihre Ergebnisse aus, bevor sie zu Tischtennisschlägern greifen oder durch *Pionirski Grad*, die Pionierstadt am Rande Belgrads, die für mehrere Tage Austragungsort der XIX. Internationalen Mathematikolympiade ist, streifen. Wie bist du an die zweite Aufgabe herangegangen? Primzahlen, Plus und Minus, endliche und unendliche Reihen, Minimal- und Maximalwerte. Erleichterung bei *Steffen Thiel*, dem jüngsten unserer Mannschaft, er hat bei der zweiten Aufgabe das gleiche Ergebnis wie *Michael Marczinek*, und *Michael* hat immerhin von

den acht die meisten Olympiadeerfahrungen. In Belgrad ist er zum dritten Mal dabei. Sein Tip für die anderen am Abend vor dem Wettbewerb: „Lest euch die Aufgaben richtig durch, bevor ihr anfangt.“ *Micha* spricht aus Erfahrung. Durch falsches Verstehen einer Aufgabe hatte er sich bei der IMO im vergangenen Jahr einen ersten Preis verpatzt.



Für *Michael*, der gerade sein Abitur an der Spezialschule *Heinrich Hertz* in Berlin mit Auszeichnung bestanden hat, ist die Mathematik Hobby und späterer Beruf. Er wird ab September an der Moskauer Lomonossow-Universität Mathematik studieren. Die Vorbereitung auf ein Studium in der Sowjetunion hat für den Agitator der ehemaligen 12/1 eigentlich schon im Schulungslager für FDJ-Funktionäre im vergangenen Jahr angefangen. Dort waren auch Ehemalige seiner Schule, die jetzt in der Sowjetunion studieren. „Wir haben sie über das Leben und Treiben an der Universität ausgefragt“, sagt *Michael*. „Sicher ist es schwer, das Studium, aber aufgegeben hat noch keiner.“

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	Gesamtpunktzahl	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom
Vereinigte Staaten von Amerika	202	2	3	1	–
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	192	1	2	4	1
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	190	1	3	3	2
Ungarische Volksrepublik	190	1	3	2	1
Königreich der Niederlande	185	1	2	3	–
Volksrepublik Bulgarien	172	–	3	3	1
Bundesrepublik Deutschland	165	1	1	4	–
Deutsche Demokratische Republik	163	2	1	1	–
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	161	–	3	2	1
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	159	–	3	3	–
Volksrepublik Polen	157	1	2	2	–
Republik Österreich	151	1	1	2	–
Königreich Schweden	137	1	1	2	–
Republik Frankreich	127	1	–	–	–
Sozialistische Republik Rumänien	122	–	1	2	–
Republik Finnland	88	–	–	1	–
Mongolische Volksrepublik	48	–	–	–	–
Republik Kuba (4)*	38	–	–	–	–
Königreich Belgien (7)	32	–	–	–	–
Republik Italien (5)	22	–	–	–	–
Republik Algerien (3)	17	–	–	–	–

* Diese Länder delegierten keine volle Mannschaft, sondern nur die angegebene Anzahl von Teilnehmern

Mathematik?

Er hätte jeden für verrückt erklärt

Wenn zu *Michael* jemand in der 9. Klasse gesagt hätte, daß er sich einmal so der Mathematik verschreiben würde, er hätte ihn für verrückt erklärt. Einer, der seine Fähigkeiten erkannte, war Mathelehrer Bernd Fein. Er hat *Michael* in der 9. Klasse dazu überredet, in der Klassenstufe 10 zu starten. Er bestärkte ihn darin, es in der 10. Klasse als „Frühstarter“ bei der XVII. IMO in Bulgarien zu versuchen. Von dort brachte *Michael Marczinek* einen dritten Preis mit.

Der blonde lang aufgeschossene FDJler ist selbstbewußter geworden, weiß, was er kann und wo er seine Stärken und Schwächen hat. In einem Kollektiv, in dem man sich untereinander gut versteht, in dem jeder offen seine Meinung sagt und jeder auf den anderen achtgibt, auf den anderen achtet, fühlt er sich wohl. „Das hilft einem auch, Durchhänger zu überwinden, daß bei Leuten, die der Mathematik frönen, besonders wichtig ist, den Anschluß an das Kollektiv nicht zu verlieren.“

Elke Schilling (JW)

alpha-Wettbewerb 1976/77

Preisträger

Achim Saft, Bad Liebenstein; **Kathrin Hintz**, **Katrin Wießner**, beide Bernburg; **Uta Boldt**, Burg Stargard; **Steffen Grützner**, Burkau; **Dietmar Berthold**, Crimmitschau; **Petra Sarodnik**, Dallgow; **Astrit Kullmann**, **Astrit Schunck**, beide Dingelstädt; **Gabriele Sprotte**, Döbeln; **Olaf Hein**, Eisenach; **Jürgen Tosse**, Engerda; **Cornelia Voigt**, **Ronald Voigt**, beide Friedeburg; **Torsten Knaust**, Gossa; **Hartmut Hildebrandt**, Hainichen; **Kerstin Frank**, Hammerbrücke; **Kerstin Wickner**, Hermannsdorf; **Sabine Sentker**, Hettstedt; **Frank Thümmeler**, Horka; **Karsten Ihlenburg**, Kairo (AR Ägypten); **Angela Hoyer**, Kamsdorf; **Andreas Berner**, Karl-Marx-Stadt; **Manuela Wohlfahrt**, Kieselbach; **Hannes Kubr**, Klosterneuburg (Österreich); **Jens Dette**, Leinefelde; **Doris Grüner**, Lössau; **Michael Seifert**, Menteroda; **Delia Krech**, Mittelstille; **Heidi Teidge**, Neubrandenburg; **Liane Helmbold**, **Heike Meinelcke**, beide Neuenhofe; **Sabine Hartung**, Niederorschel; **Uwe Schulze**, Pirna; **Anne Klausnitzer**, **Petra Baldauf**, beide Potsdam; **Karsten Gischer**, Rotta; **Claudia Lieske**, Saalfeld; **Petra Zachert**, Sachsendorf; **Michael Gerth**, Schmalkalden; **Michael Hruschka**, Senftenberg; **Astrid Keller**, **Christine Mangold**, **Manuela Recknagel**, **Corina Kaiser**, alle Steinbach-Hallenberg; **Antje Wulf**, Teltow; **Dagmar Streit**, Vacha; **Ralph Nemitz**, Wittenförden

Vorbildliche Leistungen

Simone Kitscha, Ahlbeck; Wolfgang Federwisch, Bad Frankenhausen; Andreas Gedat, Bad Liebenstein; Margret Detsch, Bad Salzungen; Kerstin Pöthig, Bernburg; Karin Gröger, Berlin; Uwe Fischer, Grit Köder, Elke Schubert, Gabi Roth, Hans-Jörg Schubert, Heike Espig, Bernd Förster, Jens Zille, Ina Ficker, Heike Berger, alle Bernsbach; Christine Fischer, Breitenungen; Karola Ernst, Britz; Petra Edelman, Büttstedt; Carmen Schwab, Buhla; Georg Lang, Burg; Kristine Roeke, Andreas Harnath, Katrin Pannewitz, alle Cottbus; Uwe Sauerbrei, Dietlas; Petra Bülow, Mario Dette, Gabi Stöber, alle Dingelstädt; Elmar Hartenstein, Matthias Liebig, Frank Eiselt, alle Dresden; Petra

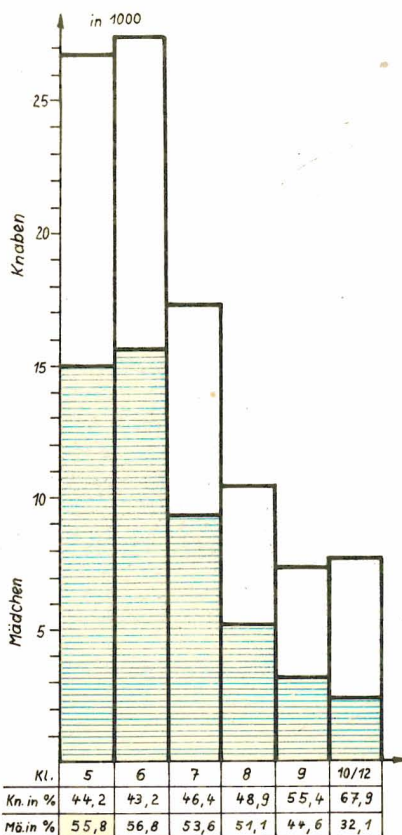
Menches, Kerstin Maß, beide Eisenach; Thomas Schmidt, Erfurt; Simone Oetzel, Fambach; Sabine Körtig, Frankfurt (Oder); Carla Müller, Ralf Vater, beide Friedeburg; Angela Illing, Gersdorf; Birgit Reilinger, Goldberg; Christian Madeja, Lydia Lange, Yveth Daetz, alle Greifswald; Kerstin Steinicke, Großbodungen; Kerstin Tresemer, Ute Bräuer, Sabine Nebe, alle Greußen; Andreas Thiele, Güterglück; Peggy Unger, Michaela Jakob, beide Hammerbrücke; Hardy Kastius, Hennigsdorf; Frank Eberlein, Hermannsdorf; Christiane Berg, André Holubek, beide Horka; Marion Endrigkeit, Jessen; Christiane Kumpel, Bettina Dreßler, beide Kalttenordheim; Katrin Oelert, Simone Heublein, AG Math. (Unterstufe), alle Kamsdorf; Birgit Georgi, Eske Röhrich, Frank Winzer, alle Karl-Marx-Stadt; Thomas Baer, Evelyn Schmidt, beide Kieselbach; Axel Schüler, Kleinmachnow; Gabi Paschold, Lauscha; Susanne Stadler, Carola Durner, beide Leimbach; Jörg Drechsel, Leinefelde; AG Mathe (Kl. 5b), Lichte; Bettina Grabs, Anett Rechenberger, beide Lichtenhain; Heike Nowara, Lössau; Ute Fischer, Lübbenau; Torsten Harnisch, Lützen; Torsten Schulz, Merseburg; Stefan Schöbe, Menteroda; Sven Winkler, Minkwitz; Andrea Dietz, Manuela Möller, beide Mittelstille; Jörg Schmidt, Kathrin Scholl, beide Neubrandenburg; Annett Jennrich, Anne-Kathrin Pätz, Beatrice Pätz, alle Neuenhofe; Kerstin Paul, Nord-

hausen; Michael Döll, Oberschöna; Dieter Seifert, Pinnau; Ines Freyholdt, Axel Schulz, Michael Hänsch, alle Potsdam; Katrin Ungethüm, Reinsdorf; Andrea Tisch, Jürgen Schmalisch, beide Reuden; Gitta Schöne, Ulrike Martin, beide Rostock; Steffi Lehmann, Rothschnberg; Mathias Brandt, Detlef Christ, Sonja Gramann, Heiko Weiner, alle Schmalkalden; Fred Radau, Thomas Tiedtke, beide Schorssow; Ralf Wenig, Schweina; Thomas Plennigsschmidt, Schwin; Jens Hoffmann, Sebnitz; Claudia Häfner, Katrin Danz, Silke Albrecht, Iris Campesato, alle Steinbach-Hallenberg; Ute Siebert, Trusetal; Annette Stephan (Kl. 3), Silke Raßmann (Kl. 4), beide Unterbreizbach; Katrin Haring, Vacha; Evelin Beyer, Wegfarth; Beate Hentschke, Weißwasser; Birgit Wenderott, Wingerode; Guid Köhnke, Wittstock; Steffen Heyn, Wolgast; Michael Mönch, Zittau; Viola Nakoinz, Zschornowitz

Kollektive Beteiligung

am alpha-Wettbewerb 1976/77

P.-Neruda-OS Ahlbeck; Zetkin-OS Altenburg; Haus der JP Altenburg; OS Alsleben; W.-Ulbricht-OS Altwigshagen; Karl-Marx-Schule Anklam; OS Asbach; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; H.-Duncker-OS Bad Kleinen; EOS Ernst Thälmann, Otto-Grotewohl-Schule, Th.-Neubauer-OS, M.-Poser-OS, alle Bad Salzungen; R.-Schwarz-OS Bad Liebenstein; *alpha*-Zirkel OS Bahratal; C.-Blenke-OS, Berlin; 10. OS Berlin-Mahlsdorf; OS Fr. Mehring, 11. OS V. Tereschkova, beide Bernburg; OS Bernsbach; OS der Orthopäd. Klinik Birkenwerder; OS Birkungen; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; M.-Planck-OS Bleicherode; OS Blowatz; Fr.-Weineck-OS Blumberg; H.-Matern-OS Boizenburg; K.-Marx-OS Borna; 19. OS AG Math. Booßen; AG Math. OS Bregenedt; OS II Breitenungen; OS Breitenworbis; P.-Neruda-OS Britz; OS Brotterode; M.-Poser-OS Bürgel; TOS Büttstedt; AG Math. OS Burkau; H.-Grundig-OS Cossebaude; Klub Jg. Math. Cottbus; Station Jg. Naturf. Cottbus; OS Culitzsch; M.-Gorki-OS Dermbach; OS Deuna; OS Deutschenbora; Oberschulkombinat Diedorf-Fischbach-Klings; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Bürger Dobbertin; OS Dolgeln; OS H. Rothbarth, Pionierpalast-Klub Jg. Math., beide Dresden; G.-Dimitroff-OS Dreveskirchen; OS Dubna (UdSSR); F.-Wolf-OS Ebersdorf; OS Fr. Engels Effelder; OS Eichhof; 9. OS Geschw. Scholl Eisenach; OS Ellrich; OS E. André Elsterwerda; H.-Joachim-OS Espenhain; OS Fambach; OS Floh; OS Frauensee; OS Friedeburg; OS Fr. Reuter Friedland; R.-Armstadt-OS Geisa; E.-Hartsch-OS Gersdorf; H.-Beimler-OS Glasin; E.-u.-Ch.-Garske-OS Görsdorf; J.-Brinckmann-OS Goldberg; OS Gossa; Kreisclub Jg. Math. Gräfenhainichen; 10. OS O.



Drews Greifswald; H.-Beimler-OS Greiz; OS J. Gagarin, EOS Karl Marx, OS H. Beimler, alle Greußen; A.-Müller-OS Grimma; OS Großbodungen; G.-Dimitroff-OS Groß Kōris; Lessingschule Großpostwitz; Dr.-S.-Allende-OS AG Math. Großweitzschen; OS Grünhain; Diesterweg-OS Guben; Th.-Müntzer-OS Gumpelstadt; AG Math. OS Gutenswegen; OS II Hainichen; Diesterwegschule Halle; K.-E.-Ziolkowski-OS Halle-Neustadt; Friedens-OS Halberstadt; OS Hammerbrücke; OS Harbke; OS Haynrode; Schule der DSF Heiligengrabe; P.-Schreier-OS Hennigsdorf; OS Th. Müntzer Hermannsdorf; 1. OS H. Beimler, EOS E. Weinert, 2. OS, alle Herzberg; Goethe-OS Hohenleipisch; Math.-Zirkel OS Horka; N.-Kopernikus-OS 17, OS IV E. Schneller, beide Hoyerswerda; OS Hundeshagen; OS Ilmenau; Goethe-OS Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS Immelborn; AG Math. der Botschaft der DDR in Kairo; OS Kaltennordheim; OS A. Becker Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS Kandelin; Pionierhaus J. Gagarin AG Math. Karl-Marx-Stadt; P.-Tschakowski-OS Karl-Marx-Stadt; Th.-Neubauer-Schule Kieselbach; Dr.-Th.-Neubauer-OS Kirchberg; Br.-Tesch-OS Klausdorf; EOS Kleinmachnow; OS Th. Müntzer Klettenberg; OS Könitz; Station Jg. Naturf. u. Technik Köthen; K.-Kresse-OS Kriebitzsch; OS Küllstedt; AG Math. OS Kuhfelde; L.-Furnberg-OS Laage; G.-Schumann-OS Lauchhammer; Schulkombinat Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, beide Leinefelde; 27. OS, 29. OS, 146. OS, alle Leipzig; Math.-Zirkel OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS Lichte; OS Lichtenhain; OS Liebstadt; OS I, EOS A. Becker, OS A. Diesterweg, alle Lobenstein; Pestalozzi-OS Löbau; E.-Schneller-OS Löbnitz; OS W. Wallstab Löderburg; *alpha*-Club OS Lössau; OS Löwenberg; OS Lubmin; OS IV Lübbenau; Spezialschule Glückauf, OS J. Gagarin, beide Merkers; A.-Dürer-OS I Merseburg; Geschw.-Scholl-OS Meyenburg; AG Math. OS Mittelherwigsdorf; OS Mittel-Springstille; OS Naundorf; Schulklub Math. OS Neetzow; W.-Pieck-OS, OS 10, 13. OS, alle Neubrandenburg; TOS Neuenhofe; OS Neukloster; 3. OS Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-Schule Nieder-

orschel; EOS W. Humboldt Nordhausen; OS Nordhausen-Niedersalza; Pestalozzischule Oberlungwitz; OS E. Weinert Oberschöna; OS Olbersdorf; Comeniuschule Oranienburg; *alpha*-Club OS Osternienburg; Goethe-OS AG Math., E.-André-OS Ferien-AG, Pionierhaus P. Göring, Station Jg. Naturf. u. Technik, alle Parchim; EOS R. Fetscher AG Math. Kl. 9 Pirna; OS 16 Potsdam; A.-Becker-OS Prenzlau; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; Geschw.-Scholl-OS Rathenow; J.-Gagarin-Schule Ribnitz-D.; Spezialschule Riesa; K.-Liebknecht-Schule Ringleben; Tagesschule Roßdorf; Haus d. JP Rostock; *alpha*-Club Rotta; OS Rüditz; AG Math. OS II Saalfeld; *alpha*-Club OS Sachsendorf; W.-Pieck-OS Sangerhausen; OS Sanitz; OS H. Matern Schernberg; OS M. Gorki Schkölen; OS Schlattkow; EOS Dr. K. Duden AG Prakt. Math. Schleiz; OS Karl Marx, EOS, OS H. Danz, J.-Gottfried-Seume-OS, alle Schmalkalden; J.-R.-Becher-OS Schneeberg; Station J. Naturf. u. Technik Schönwalde; OS Schorssow; OS VII, Haus d. JP E. Schneller, beide Schwedt; Fr.-Reuter-OS Siedenbollentin; Fr.-Schiller-Schule Solpke; OS A. Saefkow Sondershausen; OS Stadtlengsfeld; EOS Staßfurt; OS E. Thälmann Steinbach-Hallenberg; OS Steinsdorf; Klub Jg. Math. Haus d. JP, W.-Heinze-OS, O.-Grotewohl-OS, alle Stralsund; OS Sünna; E.-Thälmann-OS Suhl; EOS Karl Marx, Heinrich-Rieke-Schule, beide Tangerhütte; OS Teistungen; *alpha*-Club OS Timmenrode;

OS Titschendorf; OS Töplitz; *alpha*-Zirkel OS Treben; E.-Thälmann-OS Treben; OS W. Pieck Trusetal; OS Unterbreizbach; OS J.-G.-Seume Vacha; OS Viernau; OS Vitte; EOS J. Fucik Waldheim; Mathe-Club Fr.-Engels-OS, Goetheschule, beide Waren; OS Wedendorf; H.-Matern-OS Weida; OS Weilar; E.-Thälmann-OS, Sprachheil-OS, beide Weimar; OS Weißenborn-Lüderode; Goethe-OS Welzow; OS Wernshausen; J.-Harder-OS Wesenberg; OS Westgreußen; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; OS Wingerode; Haus d. JP AG Math. Kl. 5 Wismar; A.-Bebel-OS Wittenberg; Goethe-OS Wittenberg-Piesteritz; OS IV Wittstock; OS Wörlitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS Wohlmirstedt; EOS, Spezialistenlg. Jg. Math., beide Worbis; Th.-Müntzer-OS Wulfen; H.-Eisler-OS AG Math. Wusterhusen; Pestalozzi-OS Zeithain; Lutherschule Zella-Mehlis; Pestalozzi-OS, EOS, 1. OS, 5. OS, Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, alle Zittau; Goethe-OS Zossen; OS Zschornowitz

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000 Mark für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten:

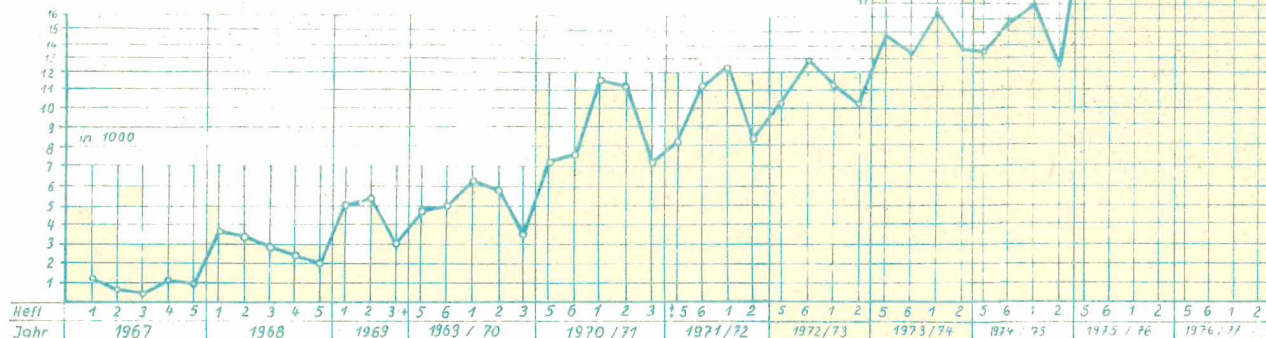
BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Uraniaverlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig; Leipziger Volkszeitung.

Abzeichen in Gold

Alle Träger des *alpha*-Abzeichens in Gold werden in Heft 1/78 veröffentlicht.

Eingegangene Lösungen (pro Wettbewerb)

1967	5 100
1968	14 100
1969	12 400
1970	25 400
1971	44 800
1972	39 500
1973	44 300
1974	58 000
1975	58 800
1976	87 400 (davon 9 400 Ph (11 %); 6 600 Ch (7 %))
1977	97 500 (davon 5 400 Ph (6 %); 4 400 Ch (5 %))
	487 300



+ umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

! ab Wettbewerbsjahr 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe im Jahr

Entwicklung des „alpha“-Wettbewerbes (absolut)

Mädchen meistern Mathe



Brathuhn, Heike



Spilecke, Bärbel



Kolbatz, Marlies



Roy, Antje



Böhme, Christine



Helbig, Kirsten



Herbst, Sigrun



Grinda, Iris



Werner, Grit



Starke, Uta



Lang, Beate



Prietzel, Andrea



Rudolf, Kerstin



Mitzenheim, Christel



Lehmert, Manuela



Kühmstedt, Birgit



Krüger, Ute



Schubert, Sibylle

alpha-aktuell

An der XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR nahmen Junge Mathematiker aus allen Teilen der DDR teil. Mit dieser Doppelseite stellt *alpha* die 18 Mädchen vor, welche im Wettbewerb ihre Kräfte mit den Jungen gemessen haben.

Name	Brathuhn, Heike	Spilecke, Bärbel	Kolbätz, Marlies	Roy, Antje
Bezirk	Cottbus	Cottbus	Neubrandenburg	Potsdam
Schule	EOS A. Becker, Jena (Kl. 10)	EOS W. Komarow, Elsterwerda (Kl. 11)	3. OS Neustrelitz (Kl. 10)	EOS G. Dimitroff, Falkensee (Kl. 10)
Berufswunsch	Math.-Physik-Lehrer	Dipl.-Mathematiker	Zootechniker	Ing. f. Verfahrenstechnik
Beruf d. Vaters	Dipl.-Lehrer f. Geographie	Notar	Maschinenmeister	Hochschullehrer
Beruf d. Mutter	Dipl.-Lehrer f. Biologie	Hausfrau	Poststellenverwalterin	Dipl.-Lehrer f. Deutsch
Preise (Bez.- Olymp.)	77: 3. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: Anerkennung	74/75: 3. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: 2. Preis	76/77: 2. Preis
Hobbys	Philatelie	Musik, Sport	Reiten	Chor, Leichtathletik
Name	Böhme, Christiane	Helbig, Kirsten	Herbst, Sigrun	Grinda, Iris
Bezirk	Frankfurt	Frankfurt	Magdeburg	Magdeburg
Schule	Spezialschule ph.-techn. Richtung, Frankfurt (Kl. 10)	Spezialschule ph.-techn. Richtung, Frankfurt (Kl. 10)	EOS B. Brecht, Halberstadt (Kl. 11)	EOS Karl Marx, Calbe (Kl. 10)
Berufswunsch	Dipl.-Mathematiker	Dipl.-Mathematiker	Statistiker	Physiker
Beruf d. Vaters	Dipl.-Lehrer Math./Physik	Lehrer	Dipl.-Lehrer f. Musik	Kraftfahrer
Beruf d. Mutter	Lehrerin (Betriebsök.)	Sekretärin	Dipl.-Lehrer f. Musik	Dipl.-Lehrer f. Ch/Bio
Preise (Bez.- Olymp.)	73/74: 3. Preis 75/76: 3. Preis 76/77: 1. Preis	74/75: 2. Preis 75/76: 3. Preis 76/77: 4. Preis	72/73: 2. Preis 73/74: 2. Preis 74/75: 3. Preis	76/77: 2. Preis
Hobbys	Musik	Sport, Nähen, Musik	Klassische Musik	Sport
Name	Werner, Grit	Starke, Uta	Lang, Beate	Prietz, Andrea
Bezirk	Magdeburg	Karl-Marx-Stadt	Karl-Marx-Stadt	Karl-Marx-Stadt
Schule	OS Komarow, Magdeburg (Kl. 8)	EOS Th. Neubauer, Karl-Marx-Stadt (Kl. 10)	V.-Tereschkowa-OS, Karl-Marx-Stadt (Kl. 9)	OS Frohnau (Kl. 10)
Berufswunsch	ohne	Rechtsanwalt	Studium: Informations- technik	Transporttechnik
Beruf d. Vaters	Dipl.-Ing. (wiss. Mitarb.)	Ing. (wiss.-techn. Mitarb.)	Programmentwerfer (Dipl.-Math.)	Fahrdienstleiter (DR)
Beruf d. Mutter	Organisator (Ing. f. Inf.-Verarbeitung)	Verkäuferin	Wiss. Oberass. (Dr. rer. nat.)	Expedient (Reichsbahn)
Preise (Bez.- Olymp.)	75/76: 1. Preis 76/77: 1. Preis	76/77: 3. Preis	74/75: 1. Preis 76/77: 2. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 1. Preis 76/77: 2. Preis
Hobbys	Musik	Literatur	Elektronik	Literatur, Kunst
Name	Rudorf, Kerstin	Mitzenheim, Christel	Lehmert, Manuela	Kühmstedt, Birgit
Bezirk	Karl-Marx-Stadt	Gera	Erfurt	Erfurt
Schule	W.-Komarow-OS, Karl-Marx-Stadt (Kl. 10)	Spezialschule Carl Zeiß, Jena (Kl. 9)	EOS Worbis (Kl. 10)	BS H. Jahn, Funkwerk Erfurt (2. Lj.)
Berufswunsch	Bauingenieur	Dipl.-Mathematiker	Medizin	Dipl.-Ing. f. Elektronik
Beruf d. Vaters	Bauing. (Hauptabtl.-Ltr.)	Hochschullehrer	Fachl. f. Math. (Bauing.)	Lehrer im Hochschuldienst
Beruf d. Mutter	Arbeitshygieneinspektor	Direktor einer OS	Kontoristin	Hausfrau
Preise (Bez.- Olymp.)	75/76: 1. Preis 76/77: 1. Preis 74/75: DDR-Olymp. 3. Preis	74/75: 1. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: 1. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: 2. Preis	71/72: 3. Preis 74/75: 3. Preis 76/77: 3. Preis
Hobbys	Sport, Lesen	Musik, Literatur	Schwimmen	Elektrotechnik
Name	Krüger, Ute	Schubert, Sibylle		
Bezirk	Berlin	Halle		
Schule	EOS H. Hertz, Berlin (Kl. 10)	Goethe-EOS, Roßleben (Kl. 10)		
Berufswunsch	Veterinärmedizin	Wirtschaftsmathematiker		
Beruf d. Vaters	Dipl.-Ökonom, Vertriebs- direktor	Ltr. einer Ökon.-Gruppe (Dipl.-Landwirt)		
Beruf d. Mutter	Organisator masch. Rechnen	Mitgl. d. Koop.-Rates VEG (Dipl.-Landwirt)		
Preise (Bez.- Olymp.)	76/77: 3. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 1. Preis 76/77: 2. Preis		
Hobbys	Kaninchenzucht	Naturwissenschaften		

Porträt eines Mathematikers und Naturwissenschaftlers Isaac Newton

Im 17. und 18. Jahrhundert wurde England zur größten Kolonialmacht der Welt. Damit war eine stürmische Entfaltung der kapitalistischen Produktionsweise verbunden. Das aufstrebende Bürgertum erfaßte schnell die Bedeutung der Naturwissenschaften als Instrument zur Produktionssteigerung. In dieser Zeit wurden auch die lange von der Kirche bekämpften neuen wissenschaftlichen Lehren Copernicus', Galileis und Keplers gesellschaftlich anerkannt. Das moderne Weltbild, das die Sonne in den Mittelpunkt unseres Planetensystems gerückt hatte, hatte sich durchgesetzt, und das Problem der Kräfte und Bewegungen am Himmel und auf der Erde wurde auf verschiedene Weise untersucht und diskutiert.

In diese Zeit wurde am 4. Januar des Jahres 1643 der Pächterssohn *Isaac Newton* hineingeboren. Der Vater war schon vor der Geburt des Jungen gestorben. Bereits als Kind unterschied sich der kleine *Isaac* von seinen Altersgenossen durch einen unbezähmbaren Experimentier- und Basteltrieb. Er entzückte seine Spielgefährten mit selbstgebasteltem komplizierten mechanischen Spielzeug und einer hölzernen Uhr. Gemeinsam erschreckten die Kinder nachts die Dorfbewohner mit *Isaacs* leuchtendem Drachen.

Zum Kummer seiner Mutter interessierte sich der kleine *Newton* kaum für die Landwirt-

schaft und las und bastelte lieber. Glücklicherweise ermöglichte ein verständnisvoller Onkel *Isaac* eine gute Schulbildung im Nachbarstädtchen Grantham. 1661 finden wir den jungen *Newton* als frischgebackenen Studenten an der berühmten Universität Cambridge. Da *Newton* nur wenig bemittelt war, wurde er als „subserver“ immatrikuliert. Das bedeutete, daß er reicheren Studenten viele Dienste erweisen mußte, dafür aber ohne Bezahlung essen und wohnen durfte.

In Cambridge führte ihn sein Lehrer *Isaac Barrow* in die Geheimnisse der Naturwissenschaften und der Mathematik ein. Schon in den ersten Studienjahren trat *Isaacs* große Begabung ans Licht. Als *Newton* in den Jahren 1666/67 eine zweijährige „Zwangspause“ vom Studium in seinem Heimatdorf Woolsthorpe verbringen mußte, da in Cambridge eine verheerende Pestepidemie wütete, fand er Zeit und Muße, sich mit vielen ungelösten wissenschaftlichen Problemen zu beschäftigen. Der Legende nach soll *Newton* durch einen vom Baum fallenden Apfel im Garten seines Heimathauses zu ersten Überlegungen über die Schwerkraft angeregt worden sein, die ihn zu solchen Fragen, wie z. B.:

„Welche Kraft hält die Planeten auf ihrer Bahn?“ und „Ist diese Kraft vergleichbar mit der Schwerkraft auf der Erde?“ führten (siehe Stempel auf Ersttagsbrief). Inwieweit *Newton* diese Fragen schon beantworten konnte, wissen wir heute nicht genau. Bekannt ist uns aber, daß er in den Jahren 1666/67 zu vielen mechanischen, optischen und mathematischen Problemen seine Grundideen entwickelt hatte und beispielsweise schon in der Lage war, das Gravitationsgesetz aus den von *Kepler* gefundenen Gesetzen der Planetenbewegung abzuleiten.

Wieder nach Cambridge zurückgekehrt, beschäftigte sich *Newton* neben dem fleißigen Studium der Naturwissenschaften auch mit

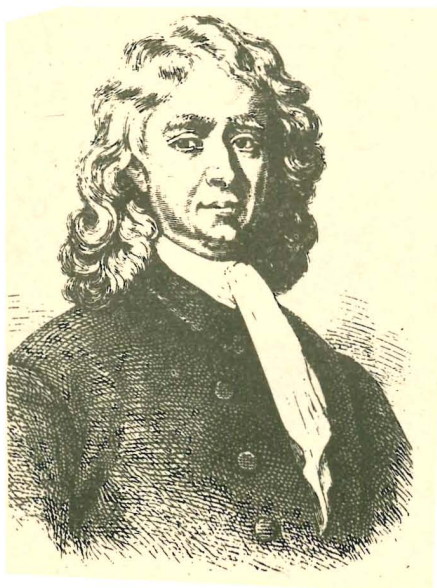
der experimentellen Tätigkeit, die er ebenfalls meisterhaft beherrschte. Für die erstmalige Konstruktion eines Spiegelteleskopes wurde er sogar 1672 zum Mitglied der *Royal Society*, der englischen Akademie, gewählt.

Als *Newton* 1669 mit 26 Jahren Professor in Cambridge wurde, gehörte er bereits zu den bedeutendsten Gelehrten seiner Zeit. 1687 krönte er sein wissenschaftliches Werk mit seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaften“, in denen er unter anderem die Gravitationstheorie und die klassische Mechanik mit den bekannten Axiomen darlegte. Noch heute bildet die klassische Mechanik die Grundlage für die Berechnung der Kräfte und Bewegungen in der Technik.

Zu seinen herausragenden physikalischen Erkenntnissen wäre *Newton* wohl kaum gelangt, wenn er nicht auch ein hervorragender Mathematiker gewesen wäre und die Mathematik als „Werkzeug“ seiner physikalischen Forschungen nicht ständig weiterentwickelt hätte. Besonders bei seinen mechanischen Untersuchungen benötigte *Newton* die Vorstellung zeitabhängiger Variablen, die er „fließende Größen“ nannte. Er erarbeitete so die Methode der Differential- und Integralrechnung, die sich von der heute benutzten nur durch ihre kompliziertere Symbolik unterscheidet. In *Newtons* 1671 veröffentlichtem mathematischem Hauptwerk finden wir auch seine bedeutenden Ergebnisse zur Reihenlehre. Hervorzuheben ist seine *Theorie der unendlichen Reihen*, die u. a. die Reihenentwicklung der Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$ und $y = e^x$ ermöglicht. *Newton* selbst betrachtete die *Binomialreihe* als seine größte mathematische Leistung. Die Formel dieser Reihe schmückt deshalb sein berühmtes Grabmal in der Londoner Westminsterabtei.

Aufgabe

Folgende kleine Aufgabe, die zu *Newtons* Lebzeiten noch an Universitäten gerechnet



Ersttagsbrief
aus der
Ungarischen VR



wurde, soll uns *Newton* auch als Algebraiker zeigen. Versucht euch doch einmal an der Lösung!

Newtons Aufgabe von den Wiesen und Kühen: a Kühe weiden b Wiesen in c Tagen ab, a' Kühe weiden b' Wiesen in c' Tagen ab, a'' Kühe weiden b'' Wiesen in c'' Tagen ab; welche Beziehung besteht zwischen den neun Größen a bis c'' ? (Voraussetzung: Alle Wiesen liefern gleich viel Gras; das tägliche Wachstum der Wiesen ist gleich; alle Kühe fressen täglich gleich viel.)

Newtons mathematische Forschungen zeigen uns ihn auch als einen Mathematiker von erstem Rang. Trotzdem war *Newton* vor allem Physiker. Seine große Leistung besteht darin, daß er dem Aufschwung der Naturwissenschaften in England sowohl wissenschaftlich als auch organisatorisch, letzteres besonders als langjähriger Präsident der *Royal Society*, große Impulse geben konnte. Zu seinem Todestag, der sich in diesem Jahre zum 250. Male jährt, ehren wir ihn besonders als den Begründer der klassischen Mechanik, um deren Ausbau sich die Physiker und Mathematiker zweier Jahrhunderte bemühten. Erst um 1900 erkannte A. Einstein die bis dahin uneingeschränkt geltende Mechanik als Grenzfall eines weitaus umfassenderen Systems der Relativitätstheorie.

Dorit Sowa



Kurzbiographie der Autorin

Dorit Sowa, geb. 1951 in Nordhausen, verheiratet, zwei Kinder

• Besuch der OS und EOS in Nordhausen, Abitur 1970

Interesse für Naturwissenschaften und Sprachen

• Ab 1970 Physik-Studium an der Karl-Marx-Universität Leipzig, Abschluß als Diplom-Physiker

• Ab 1975 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften der Karl-Marx-Universität Leipzig

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Liebe Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*!

In Heft 5/77 haben wir unter dieser Überschrift bereits unterschiedliche Aufgabenlösungen von Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb vorgestellt. Da das Kennenlernen von Lösungsvarianten von großem Nutzen und sicherlich auch von Interesse für alle *Jungen Mathematiker* ist, setzen wir diese begonnene Artikelserie fort.

In Heft 1/1977 stellten wir die Aufgabe Ma 6 ■ 1573, die wie folgt lautet:

Im Jahre 1970 war Peter 8 Jahre, sein Vater 31 Jahre alt. In welchem Jahr wird Peters Vater doppelt so alt sein wie Peter selbst?

Die von uns in Heft 3/1977 veröffentlichte Lösung lautet:

Angenommen, nach n Jahren ist Peters Vater doppelt so alt wie sein Sohn; dann ist Peter $(8+n)$ Jahre, sein Vater $(31+n)$ Jahre alt, und es gilt

$$2 \cdot (8+n) = 31+n,$$

$$16+2n = 31+n,$$

$$n = 15.$$

Nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, wird Peters Vater 46 Jahre, Peter selbst 23 Jahre alt sein, das heißt, Peters Vater wird doppelt so alt sein wie sein Sohn Peter.

Unserer Redaktion gingen zu dieser Aufgabe insgesamt 2102 Lösungen zu, 1237 Lösungen von Mädchen (bravo!) und 865 Lösungen von Jungen.

• Die Schülerin der 6. Klasse, *Carola Dumer*, Leimbach, übersandte uns folgende Lösung: Der Altersunterschied zwischen Peters Vater und dessen Sohn beträgt 31 Jahre—8 Jahre = 23 Jahre. Also ist Peters Vater doppelt so alt wie Peter selbst, wenn Peter 23 Jahre alt ist. Nun gilt $8+x=23$, also $x=15$. Das heißt,

Peter wird nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, das Alter von 23 Jahren erreichen. Sein Vater wird nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, dann 46 Jahre ($31+15=46$) alt sein, also doppelt so alt wie Peter.

Unser Kommentar: Eine lobenswerte Denkleistung! Carola, mach weiter so.

• Die Schülerin der 6. Klasse, *Manuela Schicht*, Zittau, übersandte uns folgende Lösung:

Wir gehen am besten von den Geburtsjahren aus. Wegen $1970-31=1939$ wurde Peters Vater im Jahre 1939 geboren. Wegen $1970-8=1962$ wurde Peter selbst im Jahre 1962 geboren. Wegen $1962-1939=23$ war Peters Vater 23 Jahre alt, als Peter geboren wurde. Folglich ist der Vater nach weiteren 23 Jahren, also im Jahre 1985 doppelt so alt wie Peter, denn $1962+23=1985$.

Unser Kommentar: Eine verblüffend einfache Lösung bei zwingender Logik. Sie verdient besonderes Lob.

• Die Schülerin der 6. Klasse, *Monika Storch*, Hintersee, übersandte uns folgende Lösung:

Jahr	Alter des Vaters in m Jahren	Alter von Peter in n Jahren	$2 \cdot n = m$ Bedingung
1970	31	8	$2 \cdot 8 = 16 < 31$
1971	32	9	$2 \cdot 9 = 18 < 32$
1984	45	22	$2 \cdot 22 = 44 < 45$
1985	46	23	$2 \cdot 23 = 46$
1986	47	24	$2 \cdot 24 = 48 > 47$

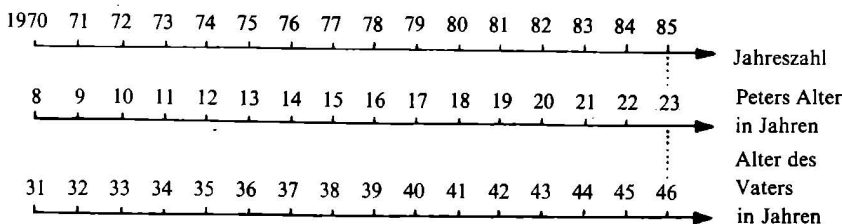
Im Jahre 1985 wird Peters Vater genau doppelt so alt sein wie Peter selbst.

Unser Kommentar: Probieren gehört zum Studieren! Eine zeitaufwendige, aber exakte Lösung.

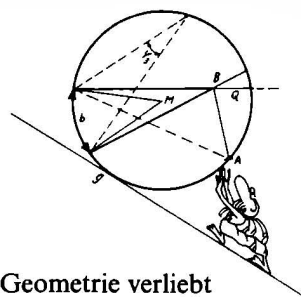
• Der Schüler der 5. Klasse, *Torsten Kühn*, Potsdam-Babelsberg, übersandte uns folgende graphische Lösung:

Die Bedingung, daß der Vater doppelt so alt ist wie sein Sohn Peter, wird im Jahre 1985 erfüllt. Peter ist dann 23 Jahre, sein Vater 46 Jahre alt.

Unser Kommentar: Unsere Hochachtung! Eine vorbildliche Leistung für einen Schüler der Klassenstufe 5.



In freien Stunden **alpha** heiter



Sisyphus, in die Geometrie verliebt

Kryptarithmetik

NEWTON
NEWTON
+NEWTON

GENIUS

D. Völzke, Greifswald

$$\begin{array}{r} A + L \cdot P \cdot H \cdot A = A \\ + \quad + \quad - \quad - \quad : \quad \cdot \\ A \cdot L + P \cdot H \cdot A = L \\ - \quad - \quad + \quad \cdot \quad + \quad + \\ A - L + P + H + A = P \\ \cdot \quad + \quad + \quad \cdot \quad \cdot \quad + \\ A \cdot L - P + H + A = H \\ : \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \\ A \cdot L \cdot P \cdot H + A = A \\ \hline A + L + P - H \cdot A = X \end{array}$$

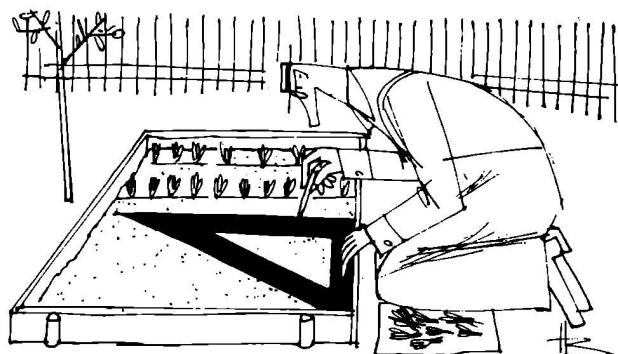
Ellen Raeck, OS Wolmirstedt, Kl. 9

Nicht begriffsstutzig werden!

Von den in jeder Zeile angegebenen fünf Begriffen paßt jeweils einer nicht in die Gruppe hinein. Schreibt man diese Begriffe heraus, so ergeben ihre Anfangsbuchstaben den Namen eines deutschen Mathematikers.

- A: Differenz, Quotient, Summand, Produkt, Summe
B: Strecke, Tangente, Strahl, gerade Linie, Gerade
C: Vollwinkel, spitzer Winkel, Innenwinkel, rechter Winkel, gestreckter Winkel
D: Abstand, Länge, Höhe, Flächeninhalt, Breite
E: Ries, Cantor, Gauß, Leibniz, Euklid
F: Meter, Lichtjahr, Längeneinheit, Seemeile, Zentimeter

OSrR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben bilde man 21 Wörter, deren erste und dritte Buchstaben jeweils von oben nach unten gelesen, den größten englischen Mathematiker und einen Teil seiner Verdienste nennen.

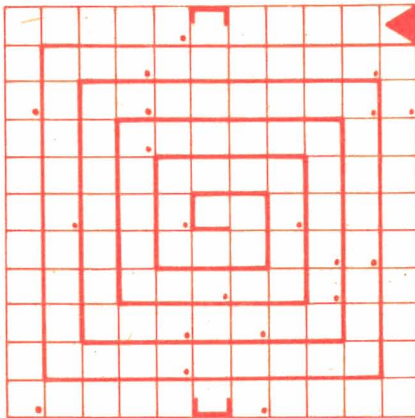
an - an - ber - ce - che - del - der - dif - druck - ei -
ei - elch - en - ex - fe - fen - flä - gat - gen - go -
gung - hang - in - kel - kel - kel - kel - ker - ku - la -
las - leit - ler - li - ma - me - ment - na - när - ne - nei -
nei - nen - ner - nie - no - non - o - on - or - ques -
renz - ri - ri - ta - ta - ta - te - the - ti - tri - tri - trie -
tung - um - ve - waf - win - win - win.

1. Er wird gebildet von einer Geraden und einer Ebene, wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben.
2. Stellenwert im Dezimalsystem
3. Bezeichnung für die Hauptteile der Land-, Luft- und Seestreitkräfte
4. Lehre von der Dreiecksberechnung
5. Schmuckwerk, besonders an Bauwerken und Möbeln
6. Sie existiert bei der schiefen Ebene
7. Tierarzt
8. Begriff der Stereometrie
9. Mathematiker (1868 bis 1941), bedeutendster deutscher Schachmeister
10. Feste Gerade, die bei der Ortsdefinition der Parabel auftritt
11. Streichung aus der Matrikel, d. h. aus der Liste der Studierenden
12. Altsteinzeitlicher Mensch
13. Griech. Buchstabe
14. Italienischer Geometer (1871 bis 1946)
15. Griech. Buchstabe
16. Ein Hirsch
17. Cape
18. Zeitungsanzeige
19. Kraft, die senkrecht auf eine Flächeneinheit wirkt
20. Ihre Summe beträgt bei jedem Dreieck 180°
21. Begriff, der beim Interpolieren auftritt

D. Völzke, Greifswald

Rätselschlange

Rechts oben beginnend sind die erforderlichen Lösungswörter von Punkt zu Punkt in das Schema einzutragen. Dabei steht in den mit einem Punkt versehenen Feldern der letzte Buchstabe des einen Wortes, der zugleich der erste Buchstabe des folgenden Wortes ist. Richtig gelöst ergibt die angedeutete Senkrechte den Namen eines hervorragenden Mathematikers, der sich u. a. mit der Approximation von Funktionen durch Polynome befaßte.



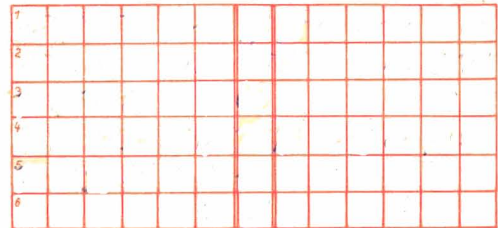
Math. des Altertums – eine Bewegung – Teilgebiet der Mathematik – Begriff aus der Mengenlehre – Lehre von der Dreiecksberechnung – griech. Buchstabe – x -Achse – ein Kegelschnitt – Teil einer Potenz – Teilgebiet der Geometrie – schweizerischer Mathematiker – Mathematiker (1826 bis 1866), auf den der Integralbegriff zurückgeht – Schnittpunkt einer Funktion mit der x -Achse – griech. Buchstabe – weiblicher Vorname – Flächenmaß – Addition – Stadt im Bezirk Neubrandenburg, die durch das Bergringrennen bekannt ist – Trinkbranntwein – im Altertum benutztes Rechenbrett – Zahlwort.

D. Völzke, Greifswald



Verkettungsrätsel

In jede Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter der folgenden Bedeutung so einzutragen, daß immer der letzte Buchstabe des ersten Wortes mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes übereinstimmt. Bei richtiger Lösung ergeben die sechs markierten Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen des größten englischen Mathematikers.



1. Griech. Buchstabe – kleiner als Null
2. Ein Kegelschnitt – Teil von Größenangaben
3. Stadt im Bezirk Neubrandenburg, die durch das Bergringrennen bekannt ist – er verwendete in seinem Rechenbuch erstmals die Rechenzeichen + und –
4. Ergebnis der Multiplikation – eine Winkelfunktion
5. Beethovens einzige Oper – griech. Buchstabe
6. Vieleck (lat.) – Begriff der Logarithmenrechnung

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Aus der Skatwelt

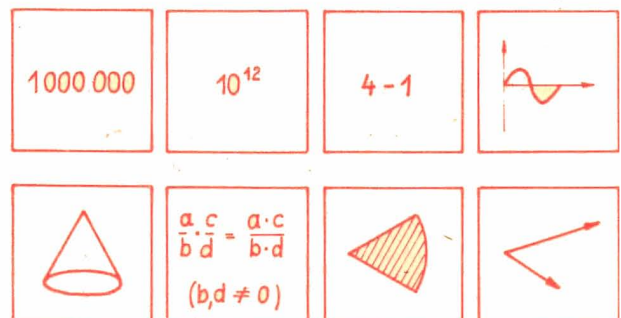
Der niedrigste Augenstich beim Skat beträgt 2 Augen (1 Bube, 2 leere Karten) und der höchste 33 Augen (3 Dause). Sind Augenstiche von 2 bis 33 durchgehend möglich?

Fachlehrer O. Dietze, Wöhlitz

Begriffspaare gesucht!

Es gibt mathematische Begriffe, die sich ausschließlich im ersten Buchstaben ihrer Bezeichnung unterscheiden. Die folgenden Bilder sollen euch helfen, vier derartige Paare von Begriffen zu finden.

OSrR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



X. Internationale Physikolympiade Juli 1977, Hradec Králové

Am 15. Juli ging mit der Siegerehrung in Prag die 10. Internationale Physikolympiade zu Ende. Sie fand vom 8. bis 15. Juli 1977 in der ostböhmisches Bezirksstadt Hradec Králové statt. An die 60 Teilnehmer aus 12 Ländern wurden von der Jury insgesamt sieben 1., sechzehn 2. und siebzehn 3. Plätze vergeben. Die fünf Jungen der DDR-Mannschaft holten sich zwei 1. Plätze, die Reinhard Meinel von der Spezialschule Carl Zeiss Jena und Ralf Glaser von der Spezialschule „Martin Andersen Nexö“ in Dresden errangen. Zwei 3. Plätze kommen auf das Konto von *Mathias Hegner* aus der Berliner Heinrich-Hertz-EOS und *Stefan Schuster* aus Meißen. Stefan erhielt von der Jury den Sonderpreis für den jüngsten Olympiadeteilnehmer.

In der inoffiziellen Länderwertung belegten die DDR-Olympioniken mit insgesamt 177 Punkten einen 5. Platz. Die ersten drei Plätze erzielten die ČSSR, die Sowjetunion und die BRD.

Am 16. Juli wurden unsere vier Preisträger auf einem kleinen Empfang in Dresden für ihr hervorragendes Endergebnis mit dem Titel „Jungaktivist“ geehrt. Ein Leistungsstipendium erhalten ferner die Abiturienten *Ralf Glaser*, *Mathias Hegner* und *Reinhard Meinel*. Alle drei waren bereits im letzten Jahr bei der 9. Internationalen Physikolympiade in Budapest erfolgreich.

IX. Internationale Chemieolympiade Juli 1977, Bratislava

Am 12. Juli 1977 wurden die 48 Teilnehmer der IX. Internationalen Chemie-Olympiade im Spiegelsaal des Bratislaver Rathauses empfangen. Hier überreichte der Minister für Volksbildung der Slowakischen Sozialistischen Republik, Prof. Dr. *Juraj Busa* und der Präsident der Internationalen Jury, Prof. Dr. *Jan Gazo*, den Siegern die Medaillen.

Insgesamt konnten – durch den hohen Wissensstand der Schüler – sechs Goldmedaillen, zehn Silbermedaillen und 23 Bronzemedaillen vergeben werden. Als stärkste Mannschaft erwies sich die des Gastgeberlandes. Sie erkämpfte drei Goldmedaillen. Für unsere Republik holten *Thomas Wandlowski*, Erweiterte Oberschule Pirna, eine Silbermedaille und *Michael Schulz*, Technische Hochschule Merseburg, *Thomas Luschtinetz*, Erweiterte Oberschule Stralsund, Bronzemedaillen. *Lutz Krichauski*, Erweiterte Oberschule Stralsund, erhielt ein Diplom.

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/77:

Ph 9 ■ 19

Gegeben: $F = 65000 \text{ kp}$

$s = 4,5 \text{ m}$

$G = 25 \text{ Mp} = 25000 \text{ kp}$

$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Gesucht: v

Die Gesamtenergie des Förderkorbes während des Abbremsens setzt sich zusammen aus seiner Bewegungsenergie W_{kin} und seiner Lageenergie W_{pot} . Diese Energie setzt sich um in Reibungsarbeit W_R . Nun ist $W_{kin} = \frac{mv^2}{2}$,

$W_{pot} = Gs$ und $W_R = Fs$.

Es gilt also

$$W_R = W_{kin} + W_{pot}$$

$$Fs = \frac{mv^2}{2} + Gs$$

$$\frac{mv^2}{2} = Fs - Gs$$

$$v^2 = \frac{2s(F - G)}{m} \quad \text{mit } m = \frac{G}{g}$$

$$v^2 = \frac{2s(F - G)g}{G}$$

$$v = \sqrt{\frac{2s(F - G)g}{G}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5 \text{ m} (65000 - 25000) \text{ kp} \cdot 9,81 \text{ m}}{25000 \text{ kp} \cdot \text{s}^2}}$$

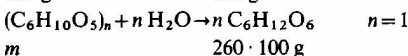
$$v \approx 11,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Fänger griffen bei einer Geschwindigkeit von $11,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ein.

Ch 9 ■ 15

162 g

180 g



m

260 · 100 g

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 162 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 162 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 180 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 180 \text{ g}$$

$$m = 234 \text{ kg}$$

$$234 \text{ kg} \triangleq 95\%$$

$$m_1 \triangleq 100\%, m_1 = 246 \text{ kg}$$

246 kg Stärke müssen verwendet werden.

Ma 10/12 ■ 1645 Es sei a die Kantenlänge des Würfels. Das Volumen des dem Würfel eingeschriebenen Kegels beträgt dann

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{12} \pi a^3.$$

Das Volumen der dem Würfel eingeschriebenen Kugel beträgt

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi a^3.$$

Das Volumen des dem Würfel eingeschriebenen Zylinders beträgt

$$V_3 = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{4} \pi a^3.$$

Nun gilt $V_1 : V_2 = 6 : 12 = 1 : 2$ und

$$V_2 : V_3 = 4 : 6 = 2 : 3$$

und folglich $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2 : 3$.

Ma 10/12 ■ 1646 Wegen der für alle reellen

α und β gültigen Beziehungen $\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$

$$\cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ist $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ äquivalent mit

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},$$

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} - 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 0,$$

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} \right) = 0. \quad (1)$$

Da ferner für alle reellen α und β auch

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{gilt,}$$

ist (1) äquivalent mit

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot (-2) \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} = 0,$$

$$-4 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt genau dann, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\sin \frac{x+y}{2} = 0, \text{ d. h., } x + y = 2k\pi \text{ oder}$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \text{ d. h. } x = 2k\pi \text{ oder}$$

$$\sin \frac{y}{2} = 0, \text{ d. h., } y = 2k\pi.$$

Ma 10/12 ■ 1647 Die Ungleichungen bzw.

die Gleichung sind nur für $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$ und

$x \neq -1$ definiert.

Zu b): Durch Umformen erhalten wir aus

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1} = 0,$$

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = 0.$$

Der linke Term dieser Gleichung wird für keinen Wert von x gleich Null; also besitzt die Gleichung b) keine reellen Lösungen.

Zu a): $\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} > 0$ genau dann, wenn

$$„x > 0“ \text{ oder } „x > -1 \text{ und } x < -\frac{1}{2}“, \text{ d. h., die}$$

Ungleichung gilt für alle x mit $-1 < x < -\frac{1}{2}$ oder $0 < x$.

Zu c): Es gilt $\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} < 0$ genau dann,

wenn „ $x < 1$ “ oder „ $x < 0$ und $x > -\frac{1}{2}$ “, d. h.,
die Ungleichung gilt für alle x mit $-\frac{1}{2} < x < 0$
oder $x < -1$.

Ma 10/12 ■ 1648 Aus der gegebenen Ungleichung erhalten wir durch äquivalentes Umformen

$$\begin{aligned} 4(a^3 + b^3) &\geq (a+b)^3, \\ 4(a^3 + b^3) &\geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ 3(a^3 + b^3) &\geq 3ab(a+b), \\ a^3 + b^3 &\geq ab(a+b), \\ a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 &\geq 0, \\ a^2(a-b) - b^2(a-b) &\geq 0, \\ (a-b)(a^2 - b^2) &\geq 0, \\ (a-b)(a-b)(a+b) &\geq 0. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $a+b \geq 0$ oder wenn $a=b$ ist.

Ph 10/12 ■ 20

Gegeben: a) $d_1 = 1000 \text{ mm}$ b) $h_0 = 50 \text{ cm}$
 $r_1 = 50 \text{ cm}$ $d_1 = 1000 \text{ mm}$
 $d_2 = 1130 \text{ mm}$ $r_1 = 50 \text{ cm}$
 $r_2 = 56,5 \text{ cm}$
 $h = 1150 \text{ mm} = 115 \text{ cm}$

Gesucht: a) A_1 b) V

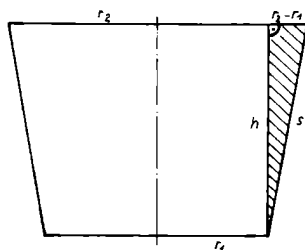
a) Der Flächeninhalt der Innenseite A_1 ergibt sich aus

$$A_1 = A_M = \pi(r_1 + r_2) \text{ und}$$

$$A_G = \pi r_1^2.$$

$$A_1 = A_M + A_G$$

$$A_1 = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 \quad s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \quad (\text{nach Pythagoras})$$



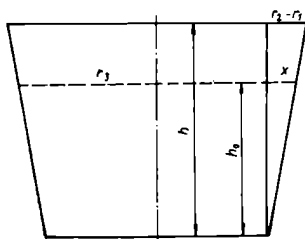
$$\begin{aligned} A_1 &= \pi[(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} + r_1^2] \\ A_1 &= 3,14[(50 + 56,5) \text{ cm} \cdot \sqrt{115^2 + 6,5^2} \text{ cm} + 50^2 \text{ cm}^2] \end{aligned}$$

$$A_1 \approx 46369 \text{ cm}^2 \approx 4,64 \text{ m}^2.$$

Es müssen 4,64 m² mit Schamottesteinen ausgekleidet werden.

b) Das Füllvolumen ist ebenfalls ein Kegelsumpf. Um den oberen Radius zu berechnen, gilt nach dem Strahlensatz

$$\begin{aligned} h : h_0 &= (r_2 - r_1) : x \\ 115 : 50 &= 6,5 : x \\ x &= 2,8. \end{aligned}$$



Dann ist der obere Radius $r_3 = r_1 + x$

$$r_3 = 50 \text{ cm} + 2,8 \text{ cm}$$

$$r_3 = 52,8 \text{ cm}.$$

Das Volumen berechnet man nach

$$V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_3^2 + r_1 r_3)$$

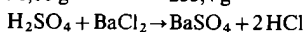
$$V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 50 \text{ cm} (50^2 + 52,8^2 + 50 \cdot 52,8) \text{ cm}^2$$

$$V = 0,415 \text{ m}^3.$$

Das Füllvolumen des Behälters beträgt 0,415 m³.

Ch 10/12 ■ 16

$$98,08 \text{ g} \quad 233,4 \text{ g}$$



$$m \quad 0,4669 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 98,08 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 98,08 \text{ g},$$

$$1 \text{ mol} \cdot 233,4 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 233,4 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m = 0,1962 \text{ g}$$

In 1 l Schwefelsäure sind $100 \cdot 0,1962 \text{ g}$

$$= 19,62 \text{ g H}_2\text{SO}_4 \text{ enthalten.}$$

$$98,08 \text{ g sind 1 mol H}_2\text{SO}_4$$

$$19,62 \text{ g sind } x \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$

$$x = \frac{1 \text{ mol} \cdot 19,62 \text{ g}}{98,08 \text{ g}} = 0,2 \text{ mol}$$

In einem Liter Schwefelsäure sind etwa 0,2 mol H₂SO₄ enthalten.

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

1. Hat ein Polygon die Ecken $E_1, E_2, \dots, E_n$ und den Flächeninhalt F , so setzen wir

$$F = A_{E_1 E_2 \dots E_n}.$$

Es gilt:

$$(1) A_{OPY} + A_{OXR} = 2A_{OPSR} + A_{RSY} + A_{PXS}.$$

Da die Dreiecke $\triangle OPY$ und $\triangle OQY$ gleiche Grundlinie und wegen $\overline{PQ} \parallel \overline{OY}$ gleiche zugehörige Höhe haben, erhalten wir

$$A_{OPY} = A_{OQY}$$

und analog

$$A_{OXR} = A_{OXS}.$$

$$\text{also } A_{OPY} + A_{OXR} = A_{OQY} + A_{OXS}.$$

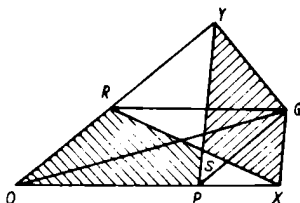
Ausgehend von (1) ergibt sich:

$$2A_{OPSR} + A_{RSY} + A_{PXS} = A_{OQY} + A_{OXS}$$

$$= A_{OPSR} + A_{PXS} + A_{SXQY} + A_{RSY},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$A_{OPSR} = A_{SXQY}.$$



Bemerkungen: Mit 23 ist die Anzahl der Schüler ohne Lösungsversuche sehr groß. Dennoch muß der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe als angemessen bezeichnet werden.

Punkte 0 1 2 3 4 5

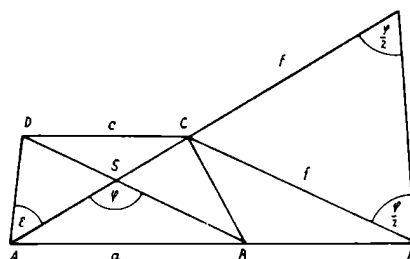
Anzahl 54 6 2 3 9 44

Dr. Ingeborg Bartsch,

Institut für Lehrerbildung Rostock

2. I Analysis

Sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.



E liege

1. auf der Verlängerung von AB über B hinaus und

2. auf der Parallelen zu BD durch C .

Dann gilt nach dem Satz über Stufenwinkel

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACE = \phi. \text{ Da } BECD$$

ein Parallelogramm ist, gilt weiter

$$\overline{BE} = \overline{CD} = c,$$

$$\text{also } \overline{AE} = a + c \text{ und } \overline{CE} = \overline{BD} = f.$$

F liege

1. auf der Verlängerung von AC über C hinaus und

2. auf dem Kreis um C mit f .

Dann gilt

$$\overline{AF} = e + f,$$

und nach dem Satz über gleichschenklige Dreiecke und dem Außenwinkelsatz ist

$$\sphericalangle CFE = \sphericalangle FEC = \frac{\phi}{2}.$$

Daraus ergibt sich folgende Konstruktionsvorschrift:

II Konstruktionsbeschreibung

(1) Man zeichnet eine Strecke AF der Länge $e + f$.

(2) Man trägt an FA in F einen Winkel der Größe $\frac{\phi}{2}$ an.

(3) Man zeichne den Kreis mit dem Radius $a + c$ um A . Schneidet dieser Kreis den freien Schenkel des Winkels, so sei E einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an EF in E einen Winkel der Größe $\frac{\phi}{2}$ nach der Seite an, auf der A liegt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu AC durch C .

(6) Man trägt AF in A einen Winkel der Größe ϵ nach der Seite an, auf der E nicht liegt. Schneidet der freie Schenkel dieses Winkels die Parallele, so sei D der Schnittpunkt.

(7) Man zeichnet die Parallele zu EC durch D . Schneidet sie AE , so sei B der Schnittpunkt.

III Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Laut Konstruktion gilt $AB \parallel CD$ und $\sphericalangle DAC = \epsilon$. Aus der Konstruktion und aus den Sätzen über gleichschenklige Dreiecke, Dreiecksaußenwinkel und Stufenwinkel folgt

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACE = 2 \cdot \sphericalangle AFE = 2 \cdot \frac{\phi}{2} = \phi.$$

Schließlich ergibt sich aus der Konstruktion, daß $BECD$ ein Parallelogramm ist; also gilt: $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE} = a + c$, $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AE} = a + c$.

IV Determination

Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ein rechnerischer Vergleich der entstehenden Strecken ergibt, daß das Lot von A auf den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels eine Länge l mit

$$l = 15 \text{ cm} \cdot \sin 50^\circ < 15 \text{ cm} \cdot 0,8 < 12 \text{ cm} = a + c \text{ hat.}$$

Da für die gegebenen Werte $a + c < e + f$ ist, führt Konstruktionsschritt (3) zu genau zwei verschiedenen Punkten E_1, E_2 . Für beide ergibt Konstruktionsschritt (4) je genau einen Punkt C_1 bzw. C_2 . Konstruktionsschritt (5) ist jeweils eindeutig durchführbar. Da für die gegebenen Werte $\varepsilon < \phi$, also erst recht

$$\varepsilon < \frac{\phi}{2} + \angle FE_1A \quad (i = 1, 2)$$

ausfällt, ergibt sich auch in Konstruktionsschritt (6) je genau ein Schnittpunkt D_i ($i = 1, 2$). Ferner folgt aus $\varepsilon < \phi$:

Trägt man wie in (6) anstelle von ε einen Winkel der Größe ϕ an, so ergibt sich mit der Parallelen aus (5) ein Schnittpunkt Z_i ($i = 1, 2$) auf der Verlängerung von C_iD_i über D_i hinaus. Für ihn ist $AE_iC_iZ_i$ ein Parallelogramm, also gilt

$$\overline{C_iZ_i} = \overline{AE_i},$$

und es folgt

$$\overline{C_iD_i} < \overline{AE_i}.$$

Folglich schneidet die in (7) zu konstruierende Parallele jeweils AE_i in einem zwischen A und E_i gelegenen Punkt B_i .

Somit existieren bis auf Kongruenz genau die Trapeze $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Beide sind zueinander nicht kongruent, denn

$$\angle C_1AB_1 \neq \angle C_2AB_2.$$

Dabei sind B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 als gleichliegende Punkte aufgefaßt. Auch bei anderer Auffassung folgt die Inkongruenz der beiden Trapeze aus

$$\angle C_2D_2A < \angle B_1DA_1.$$

Bemerkungen: Alle Schüler haben eine Lösung versucht. Obwohl die Aufgabenstellung allen Schülern verständlich war, traten eine Reihe erheblicher Schwierigkeiten auf, die sich in folgenden typischen Fehlern äußerten:

1. Vielen Schülern war der Lösungsmechanismus (Analysis, Konstruktion, Determination) entweder nicht bekannt oder sie konnten ihn auf die gegebene Situation, die durch die Aufgabe 161036 der Bezirksolympiade vorbereitet worden war, nicht anwenden.

2. Etwa 20% der Teilnehmer beschränken sich bei der Analysis auf eine Planfigur und gingen dann ohne Kommentar sofort zur Konstruktion über, wobei die einzelnen Schritte mitunter nicht motiviert oder sogar falsch waren.

3. Der Nachweis, daß die Konstruktion mit den gegebenen Stücken zwei nicht kongruente Trapeze liefert, bereitete in fast allen Fällen Schwierigkeiten und führte zu Punktabzügen. Hier wird die Notwendigkeit, bei ähnlichen Aufgaben besonderes Gewicht auf eine vollständige Determination zu legen, deutlich.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	42	8	6	17	19	16	6	4

Dr. K. Rosenbaum, Päd. Hochschule Erfurt

3A. Nach den Angaben über die Punktbewertung gibt es ganze Zahlen $a, b, c > 0$ so, daß die Punktbewertung folgendermaßen lautet:

Platzziffer:	1	2	3	4	5
Punktzahl	$a + 3b + c$	$a + 3b$	$a + 2b$	$a + b$	a

Wenn ein Sportler in zwei Sportarten die in der folgenden Tabelle genannten Platzziffern erreichte, so erhält er demnach die hierbei genannte Punktzahl:

Platzziffern	Punktzahl
1,1	$2a + 6b + 2c$
1,2	$2a + 6b + c$
1,3	$2a + 5b + c$
2,2	$2a + 6b$
2,3	$2a + 5b$
3,3	$2a + 4b$

Nur dann können zwei Punktzahlen, die hier in verschiedenen Zeilen stehen, einander gleich sein, wenn dies die Zahlen $2a + 5b + c$ und $2a + 6b$ sind; dann aber ist diese Zahl gerade. Daher können A und C nur dadurch je 17 Punkte erreicht haben, daß sie in den beiden Sportarten dasselbe Paar von Platzziffern hatten, nur in entgegengesetzter Reihenfolge. Dies kann nicht der 2. und 3. Platz gewesen sein; denn dann hätte C zweimal den 1. Platz, also eine höhere Punktzahl erreicht. Es kann auch nicht der 1. und 2. Platz gewesen sein; denn dann hätte C zweimal den 3. Platz, also eine nicht nur um 1 kleinere Punktzahl erreicht. Daher hatten A und C (zweimal, nur in entgegengesetzter Reihenfolge) die Plätze 1 und 3 erreicht, und C kam zweimal auf Platz 2. Hiernach gilt

$$2a + 5b + c = 17. \quad (1)$$

$$2a + 6b = 16. \quad (2)$$

Aus (2) folgt $3b = 8 - a < 9$, also $b < 3$; daher und wegen (2), (1) verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten

Fall I) $b = 1, a = 5, c = 2$:

Platzziffer	1	2	3	4	5
Punktzahl	10	8	7	6	5

Fall II) $b = 2, a = 2, c = 3$:

Platzziffer	1	2	3	4	5
Punktzahl	11	8	6	4	2

Fall I: Da C noch A und B in der Gesamtpunktzahl übertraf, muß er im 3. Wettkampf Punkte bekommen haben. Die geringste Punktzahl, die vergeben wurde, betrug 5. Also hatte C insgesamt mindestens $16 + 5 = 21$ Punkte. D mußte folglich mindestens 22 Punkte haben. D kann in den ersten beiden Wettkämpfen höchstens zweimal den vierten Platz (12 Punkte) und im 3. Wettkampf höchstens

den ersten Platz (10 Punkte) belegt haben. Damit konnte er höchstens 22 Punkte erhalten. Also hatte er genau 22 Punkte, und C hatte genau 21 Punkte.

Fall II: Mit der analogen Begründung (zu Fall I) mußte C mindestens $16 + 2 = 18$ Punkte haben. D konnte höchstens $4 + 4 + 11 = 19$ Punkte haben. Da er C in der Gesamtpunktzahl übertraf, mußte er also 19 Punkte haben und C genau 18 Punkte; als Platzverteilung ergibt sich wieder die unten angegebene. In beiden Fällen erhalten wir also als einzig mögliche Angabe über die gesuchten Platzziffern:

	Wettkampf	1	2	3
Vom Sieger D belegter Platz		4.	4.	1.
Vom Zweiten C belegter Platz		2.	2.	5.

Lösungsvorschlag von der Jury der OJM

3B. Die Gleichung

$$(1) \quad \frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

kann nur eine Lösung besitzen, wenn x von p verschieden ist. Wegen

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} = x + p + \frac{4p^2 - p}{x - p}$$

(Division mit Rest) ist Gleichung (1) äquivalent mit

$$(2) \quad 3x + p + \frac{4p^2 - p}{x - p} = 3.$$

α) Für $4p^2 - p = 0$ ist Gleichung (2) äquivalent mit der linearen Gleichung

$$(3) \quad 3x + p = 3,$$

die genau die Lösung $x = 1 - \frac{p}{3}$ besitzt.

$4p^2 - p = 0$ ist aber genau für $p = 0$ oder $p = \frac{1}{4}$ erfüllt.

β) Es sei nun $4p^2 - p \neq 0$. Unter Berücksichtigung von $x \neq p$ ist Gleichung (1) äquivalent mit

$$(4) \quad x^2 - p + 3p^2 + 2x^2 - 2px = 3x - 3p.$$

Diese quadratische Gleichung wird auf die sogenannte Normalform

$$(5) \quad x^2 - \left(\frac{2}{3}p + 1\right)x + \frac{2}{3}p + p^2 = 0$$

gebracht, aus der die Diskriminante

$$D = \left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}p + p^2\right) = -\frac{8}{9}p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{4}$$

abgelesen wird.

Eine quadratische Gleichung besitzt keine reelle Lösung im Falle $D < 0$, also für

$$p^2 + \frac{3}{8}p - \frac{9}{32} = \left(p + \frac{3}{16}\right)^2 - \frac{81}{256} < 0.$$

Das ist jeweils äquivalent mit

$$\left|p + \frac{3}{16}\right| < \frac{9}{16},$$

$$-p - \frac{3}{16} < \frac{9}{16} < p + \frac{3}{16},$$

$$p > \frac{3}{8} \quad p < -\frac{3}{4}.$$

Gleichung (5) besitzt genau eine Lösung im

Falle $D = 0$, also für $p = \frac{3}{8}$ oder $p = -\frac{3}{4}$.

Schließlich besitzt (5) genau dann zwei verschiedene reelle Lösungen, wenn $D > 0$, also

$$-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{8} \text{ ist.}$$

Die Zusammenfassung der Fälle α) und β) liefert:

a) Die Lösungsmenge L der Gleichung (1) in der Menge der reellen Zahlen ist genau dann leer, wenn $p > \frac{3}{8}$ oder $p < -\frac{3}{4}$ zutrifft.

b) L besteht genau dann aus einem Element, wenn p Element der Menge $\left\{-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\}$ ist.

c) L besteht genau dann aus zwei Elementen, wenn p Element der Menge $\left\{z \mid z \in \mathbb{R} \wedge -\frac{3}{4} < z < \frac{3}{8} \wedge z \neq 0 \wedge z \neq \frac{1}{4}\right\}$ ist.

Bemerkungen: Von den 118 Startern wählten 93 diese Aufgabe. Die volle Punktzahl erreichten nur 5 Schüler. 15 Schüler erhielten je 6 bzw. 7 Punkte und 54 Schüler je 4 bzw. 5 Punkte. Das zeigt, daß die meisten Schüler über die Lösungsmöglichkeiten einer quadratischen Gleichung Bescheid wußten, aber nicht beachteten, daß für gewisse Werte des Parameters p die gegebene Gleichung in eine lineare entarten kann.

Dr. Hans-Jürgen Vogel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam

4. (Entsprechend der Lösung von Lutz Möller, EOS Dippoldiswalde, Kl. 9, die mit einem Diplom ausgezeichnet wurde):

Angenommen, es gibt ein ganzzahliges Zahlenpaar (x, y) , das die vorgegebene Gleichung (1) $xy + 3x - 2y - 3 = 0$ erfüllt. Dann ist

$$(2) \quad x(y+3) = 2y+3.$$

Mit der Annahme $y+3=0$ folgt daraus die Aussage $0=-3$, die falsch ist; folglich ist $y \neq -3$.

Wir können nun $y = -3 + a$ setzen, wobei a eine von Null verschiedene ganze Zahl ist. Dann geht (2) über in

$$x-2 = \frac{-3}{a}.$$

Da x ganzzahlig ist, muß auch $\frac{-3}{a}$ ganzzahlig und demnach a ein Teiler von -3 sein; d. h., es ist a genau eine der Zahlen $1, -1, 3, -3$. Damit erhalten wir

a	1	-1	3	-3
x	-1	5	1	3
y	-2	-4	0	-6

Eine Lösung kann nach unseren bisherigen Überlegungen nur eine dieser vier Zahlenpaare sein. Durch eine Probe bestätigt man, daß alle diese Paare auch Lösungen sind.

Bemerkungen: Ein geringer Teil der Schüler formte (1) äquivalent um in $(x-2)(y+3) = -3$.

Demnach müssen dann $x-2$ und $y+3$ Teiler von -3 sein; und daraus ergibt sich das obige Tabellenergebnis. Diese Lösung ist durchaus naheliegend, wenn man mit diophantischen Gleichungen der obigen Art etwas vertraut ist. Die meisten Schüler lösten (1) nach x bzw. y auf, etwa

$$(3) \quad y = \frac{-3(x-1)}{x-2}.$$

Dabei wurde oft übersehen, daß dazu $x-2 \neq 0$

vorausgesetzt werden muß, und damit (1) für den Fall $x=2$ gesondert zu diskutieren ist. Von vielen Teilnehmern wurden gleich an (3) Teilbarkeitsuntersuchungen angeschlossen. Damit wird der Lösungsweg unnötig verkompliziert. Zum Teil wurde eine unvollständige Fallunterscheidung durchgeführt, indem nur die Fälle $(x-2) \mid 3$ und $(x-2) \mid (x-1)$ diskutiert wurden. (Das reicht offenbar nicht aus, denn beispielsweise gilt $153 \cdot 25$, jedoch weder $15 \mid 3$ noch $15 \mid 25$.)

Die Untersuchung von (3) wird wesentlich einfacher durch die Umformung

$$y = \frac{-3(x-1)}{x-2} = \frac{-3(x-2)-3}{x-2} = -3 - \frac{3}{x-2},$$

daß $x-2$ ein Teiler von 3 sein.

Kritisch zu bemerken ist noch die unzureichende Darstellung des logischen Gangs einiger vorgelegter Lösungen: es fehlt eine deutliche Hervorhebung von Voraussetzungen und Ergebnissen (Folgerungen) sowie von Äquivalenzen. Dann hätten u. a. einige Schüler bemerkt, daß ihre Untersuchung erst durch eine Probe vollständig ist.

Die Aufgabe war leicht; der Ergebnisspiegel unterstreicht dies nachdrücklich. Es ergab sich folgende Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	5	7	17	20	21	47

Dr. Erhard Quaisser,

Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

5. Von den Schülern wurden zwei verschiedene Lösungswege beschritten. Einmal wurde der gesuchte Flächeninhalt als $\overline{FD} \cdot \overline{FE}$ berechnet, zum anderen als Differenz aus der Fläche des Rechtecks und den entsprechenden Dreiecksflächen dargestellt.

Zunächst muß $q > 1$ gefordert werden, damit $\overline{AC} > \overline{BC}$ ist. Nach dem Kathetensatz ist im Dreieck ACD $\overline{AD}^2 = a^2 = \overline{AF} \cdot \overline{aq}$, also $\overline{AF} = \frac{a}{q}$ und damit aus Symmetriegründen auch $\overline{CE} = \frac{a}{q}$. Ist $\overline{AB} > \overline{BC}$, also $q > \sqrt{2}$, so liegen die Punkte A, F, E und C in dieser Reihenfolge auf $\overline{AC}$, und es ist $\overline{FE} = aq - \overline{AF} - \overline{CE} = a\left(q - \frac{2}{q}\right)$.

Ist jedoch $\overline{BC} > \overline{AB}$, also $1 < q < \sqrt{2}$, so lautet diese Reihenfolge A, E, F und C , und es ist $\overline{FE} = \overline{AF} + \overline{CE} - aq = a\left(\frac{2}{q} - q\right)$. Für $\overline{BC} = \overline{AB}$ wird $ABCD$ ein Quadrat. E und F fallen mit hin zusammen, da die Diagonalen eines Quadrates senkrecht aufeinander stehen.

Zusammenfassend ist also: $\overline{EF} = a \left| \frac{2}{q} - q \right|$. Für $\overline{DF}$ ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras im Dreieck AFD :

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AF}^2} = \frac{a}{q} \sqrt{q^2 - 1}.$$

$$A(FBED) = \overline{FD} \cdot \overline{FE} = \frac{a^2}{q^2} \sqrt{q^2 - 1} |q^2 - 2|,$$

wobei $A(\dots)$ den Flächeninhalt der jeweiligen Figur bezeichnet.

Beim zweiten Lösungsgedanken wird hier nur der Fall $\overline{AB} > \overline{BC}$ dargestellt. Die Überlegungen im Fall $\overline{AB} > \overline{BC}$ verlaufen analog, und der entartete Fall ist bereits oben betrachtet worden. Es ist $A(FBED) = A(ABCD) - A(AFB) - A(BCE) - A(ECD) - A(AFD)$.

Aus Symmetriegründen ist $A(ABF) = A(ECD)$ bzw. $A(BCE) = A(ADF)$. Weiterhin gilt sogar $A(ABF) = A(BCE)$, denn beide Dreiecke haben wegen $\overline{AF} = \overline{EC}$ eine gleichlange Grundseite und die Höhe $\overline{BE}$. Damit ist $A(FBED) = A(ABCD) - 4A(ADF)$. Die konkreten Größen zur Berechnung sind bereits im ersten Lösungsgedanken bestimmt worden. Ergänzt werden muß noch $\overline{AB} = a/\sqrt{q^2 - 1}$.

Bemerkungen: Die Aufgabe erscheint angemessen. Als typischer Fehler muß das Nichterkennen der Fallunterscheidungen angesehen werden, den die Punkteverteilung deutlich widerspiegelt. Ja nicht einmal die Forderung, daß der Radikand nicht negativ sein darf, wurde von vielen Schülern erkannt. Dies ist um so bedauerlicher, da die Fallunterscheidung praktisch aus dem Ergebnis ablesbar ist.

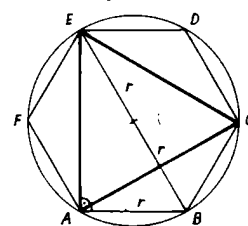
Kritisiert werden muß ferner die Unsitte, die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Bezeichnungen individuell abzuändern, da im strengen Sinne ein individuell bezeichnetes Rechteck nicht mit dem vorgegebenen $ABCD$ übereinstimmen muß.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	0	1	10	64	20	10	3	10

Dipl.-Math. Wolfgang Moldenhauer,
W.-Pieck-Universität Rostock

6. Auf Grund der Voraussetzungen in der Aufgabenstellung spannen die Punkte $A, B, C, D, E, F, A', B', C', E', F'$ ein gerades sechseckiges Prisma mit der Höhe h und dem Volumen V_0 auf. Um das gesuchte Volumen V des in der Aufgabe beschriebenen Polyeders zu erhalten, genügt es offenbar, die Volumina der dreiseitigen Pyramiden $AB'F'A', CD'B'C', EF'D'E', B'ABC, D'CDE$ und $F'EFA$ von V_0 zu subtrahieren. Auf Grund der Regelmäßigkeit der Sechsecke sind die in den Ebenen ε bzw. ε' liegenden Grundflächen dieser Pyramiden paarweise zueinander kongruent. Da die Höhe jeder Pyramide auf die entsprechende Grundfläche gleich der Höhe h des Prismas ist, haben die genannten sechs Pyramiden das gleiche Volumen V_p . Damit ergibt sich:

$$V = V_0 - 6V_p.$$



Sei A_0 der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ und A_p der Flächeninhalt des Dreiecks ABC . Dann gilt

$$V = A_0 h - 6 \cdot \frac{1}{3} A_p h = (A_0 - 2A_p) h.$$

Die Differenz $A_o - 2A_p$ entspricht offenbar dem Flächeninhalt des Drachenvierecks $ABCE$, wobei $\overline{BE}$ gleich dem Durchmesser $2r$ des Umkreises des Sechsecks ist. Dann gilt:

$$A_o - 2A_p = a \cdot \frac{\overline{BE}}{2} = ar.$$

Da im regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ $\angle EAB = 90^\circ$ und $\overline{AB} = r$ gilt, ergibt sich

$$a^2 + r^2 = (2r)^2, \\ r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

und somit für das gesuchte Volumen V

$$V = \frac{1}{3}a^2h\sqrt{3}.$$

Bemerkungen: Das gute Ergebnis dieser Aufgabe – 74 der 118 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl – belegt, daß hier eine leichte Aufgabe zu lösen war.

Ein offensichtlicher Vorzug der Aufgabe bestand darin, daß man das gesuchte Volumen auf verschiedenste Weise darstellen und berechnen konnte. In den Schülerlösungen wird eine breite Palette von Lösungsvarianten angegeben. Die Mehrzahl der Schüler entschied sich jedoch dafür, entsprechend obiger Lösung das gesuchte Volumen V als Differenz des Volumens des Prismas und der Volumina abgetrennter Teilpyramiden darzustellen. Nur einige wenige Schüler zerlegten den angegebenen Polyeder in Teilkörper. Punktabzüge hatten bei dieser leichten Aufgabe ihre Ursache fast nur in Rechenfehlern, das aber in einem bedenklich hohen Anteil an der Gesamtzahl der Lösungen.

Punkte 0 1 2 3 4 5 6 7

Anzahl 1 0 3 3 7 9 21 74

Dipl.-Math. Bernd Noack, Amt für Erfindungs- und Patentwesen, Berlin

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Heft 12/77 veröffentlicht.

Aus dem Programm der DDR-Olympiade:

- Vortrag von Nationalpreisträger Prof. Dr. Reichardt, Berlin: Theorie und Praxis bei Gauß
- Forum mit Prof. Dr. W. Engel, Vors. der Mathematischen Gesellschaft der DDR und Dipl.-Math. J. Geburtig: Über die Studienrichtung Diplom-Lehrer für Mathematik/Physik
- Vortrag von Dipl.-Math. Oberleutnant Wasic Nasie, Kriminalistisches Institut der Deutschen Volkspolizei, Berlin: Die Anwendung der Mathematik in der Kriminalistik
- Forum mit Oberleutnant H.-G. Äschenbach, Olympiasieger und Weltmeister im Spezialsprunglauf: Die Sportpolitik unserer DDR
- Simultanschach mit dem Internationalen Großmeister stud. math. Rainer Knaack, Leipzig
- Kulturveranstaltung mit der Gruppe „Neue Generation“
- Besuch der Mahn- und Gedenkstätte Sachsenhausen
- Abschlußfeier im Auditorium maximum der Humboldt-Universität zu Berläh.
- 70 Wissenschaftler und Lehrer nahmen die Korrektur der 204 Arbeiten (d. h. der 1224 Lösungen) vor. Unter den Wissenschaftlern waren neun ehemalige IMO-Teilnehmer.

Unser Schnappschuß: Mitten aus der Korrektur kamen sie – bei wildem Aprilwetter – um sich durch dieses Foto den *alpha*-Lesern vorzustellen (v. l. n. r.):

Dr. Wolfgang Burmeister, Technische Universität Dresden, Sektion Mathematik (IX., X., XI., XII., XIII. IMO); Dr. Hans-Ulrich Schwarz, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Sektion Mathematik (V. IMO); Dr. Hans-Görg Roos, Technische Hochschule Magdeburg, Sektion Math./Phys. (X. IMO); Dr. Monika Noack (geb. Titze), Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik (VI., VII. IMO); Dr. Manfred Krüppel (VII. IMO), Päd. Hochschule „Liselotte Herrmann“, Sektion Mathematik; Dipl.-Math. Hans-Dietrich Gronau, W.-Pieck-Universität Rostock, Sektion Mathematik (XI. IMO); Dipl.-Math. Bernd Noack, Amt für Erfindungs- und Patentwesen der DDR, Berlin (V. IMO).



Lösungen zu *alpha*-heiter, Heft 6/77

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} 250812 \\ +250812 \\ +250812 \\ \hline 752436 \end{array}$$

$$A=1; L=2; P=3; \\ H=0; X=6$$

Nicht begriffsstützig werden!

Summand – Tangente – Innenwinkel – Flächeninhalt – Euklid – Längeneinheit – STIFEL

Silbenrätsel

1. Neigungswinkel, 2. Einer, 3. Waffengattung, 4. Trigonometrie, 5. Ornament, 6. Neigung, 7. Veterinär, 8. Oberfläche, 9. Lasker, 10. Leitlinie, 11. Exmatrikulation, 12. Neandertaler, 13. Delta, 14. Enrique, 15. Theta, 16. Elch, 17. Umhang, 18. Annonce, 19. Druck, 20. Innenwinkel, 21. Eigendifferenz. Newton vollendete u. a. die Infinitesimalrechnung.

Rätselschlange

Euklid – Drehung – Geometrie – Element – Trigonometrie – Eta – Abszisse – Ellipse – Exponent – Topologie – Euler – Riemann – Nullstelle – Eta – Anna – Ar – Rechenart – Teterow – Wodka – Abakus – Sieben. Isaak Newton

U	H	E	R	D	I	L	K	U	E
N	L	L	E	S	S	I	Z	B	A
G	I	U	N	N	A	M	E	I	R
E	P	L	T	R	A	N	E	H	E
O	S	L	E	U	K	A	B	C	L
M	E	S	T	S	N	E	A	E	U
E	X	T	E	I	E	B	K	R	E
T	P	E	R	O	W	O	D	A	I
R	O	L	L	E	T	A	N	N	G
I	N	E	N	T	O	P	O	L	O
E	L	E	M	E	N	T	R	I	G

Verkettungsrätsel

1. Epsilon – Negativ
 2. Ellipse – Einheit
 3. Teterow – Widmann
 4. Produkt – Tangens
 5. Fidelio – Omikron
 6. Polygon – Numerus
- NEWTON

Aus der Skatwelt

27, 28 und 29 Augen sind nicht möglich.

Begriffspaare gesucht!

Million – Billion; Kegel – Regel; Minus – Sinus; Sektor – Vektor.

Die geometrischen Konstruktionen eines regelmäßigen 17-Ecks

$$\cos \frac{360^\circ}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

Beweise für mathematische Sätze sind stets zwingend, jedoch gibt es viel Freiheiten in der Art des Beweisens. Für den bekannten Satz des Pythagoras gibt es bis heute über 100 Beweise. Auch für die geometrische Konstruktion eines regelmäßigen 17-Ecks gibt es eine Reihe von verschiedenen Möglichkeiten. Die strenge griechische Auffassung einer geometrischen Konstruktion, die auf Plato zurückgeht, läßt als Konstruktionsmittel nur Zirkel und (maßstabloses) Lineal zu. C. F. Gauß hat 1796 theoretisch die Frage beantwortet, welche regelmäßigen n -Ecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind; er hat sich aber zunächst nicht um die tatsächliche Konstruktion gekümmert.

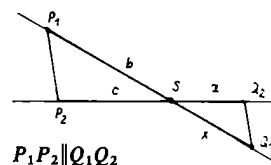
Die erste Konstruktion mit Zirkel und Lineal wurde 1802 durch von Pfeiderer ausgeführt. Legendre wiederum war der erste, der die Siebzehnteilung durch Rechnung ausführte. Alle geometrischen Konstruktionen, die sich mit Zirkel und Lineal ausführen lassen, können auch bereits mit dem Zirkel durchgeführt werden (Mohr-Mascheronische Geometrie). Ein Lineal allein reicht dazu andererseits nicht aus. Ist jedoch neben dem Lineal noch ein fester Kreis gegeben, so lassen sich wieder alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen erledigen (Steinersche Geometrie). Die entsprechenden Konstruktionen für das regelmäßige 17-Eck gaben 1896 Gérard und 1842 von Staudt. Eine Konstruktion ist praktisch um so genauer, je weniger und einfachere Konstruktionsschritte erforderlich sind. Eine in diesem Sinn ausgeführte Konstruktion gab 1903 Güntsch an. Gauß selbst führte schließlich auf Drängen seines Freundes Gerling ebenfalls eine Konstruktion durch. Die Koordinaten des Eckpunkts P_1 des regelmäßigen 17-Ecks in einem Koordinatensystem (vgl. Bild 6) sind $\left(\cos \frac{360^\circ}{17}, \sin \frac{360^\circ}{17}\right)$.

Gauß zeigte

$$\cos \frac{360^\circ}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

und alle in diesen Formeln vorkommenden Ausdrücke lassen sich elementar konstruieren (vgl. „Grundkonstruktionen“). Wir geben nachfolgend eine sehr einfache Konstruktion eines regelmäßigen 17-Ecks an, die auch auf den obigen Formeln beruht und 1909 von dem Engländer Richmond angegeben worden ist.

R. Thiele



Sonderfälle:

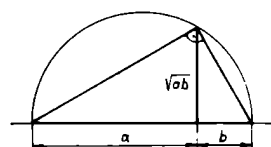
- a) für $c = 1$ ist $x = ab$
- b) für $b = 1$ ist $x = \frac{a}{c}$

Konstruktionsbeschreibung:

1. Durch den Mittelpunkt O des Kreises werden zwei zueinander senkrechte Durchmesser x und y gezeichnet, die den Kreis A bzw. C schneiden. Auf OC wird die Strecke $\overline{OB} = \frac{\overline{OC}}{4}$ von O aus abgetragen.
2. Der Winkel ABO wird geviertelt. Der Schenkel, der mit der Geraden y ein Viertel des Winkels ABO ($=\alpha$) einschließt, schneide OA in D . An den Schenkel BD werden nach links 45° angetragen, wodurch sich E ergibt.
3. Über EA wird der Halbkreis errichtet. Er schneide OC in F .
4. Um D wird ein Kreis mit dem Radius DF geschlagen, der die Gerade x in Q_3 und Q_5 schneide.
5. In Q_3 und Q_5 werden die Senkrechten bezüglich x errichtet, die den Kreis in P_3 und P_{14} sowie P_5 und P_{12} schneiden.
6. Der Winkel P_3OP_5 wird halbiert, wodurch sich P_4 ergibt. $P_3P_4 = P_4P_5$ ist die gesuchte Seitenlänge des regelmäßigen 17-Ecks.

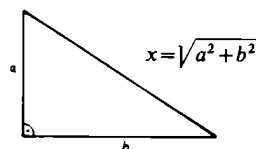
4. Mittlere Porportionale

$x = \sqrt{ab}$ (bzw. $x : a = b : x$) (Bild 4)

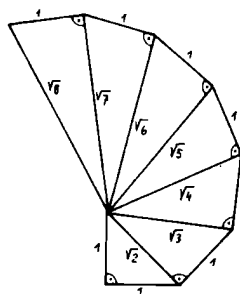


Sonderfälle:

- a) $x = a\sqrt{n}$ ($=\sqrt{a \cdot an}$) (n natürliche Zahl), d. h. x ist mittlere Proportionale zu a und an .
 - b) $x = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ (m, n natürliche Zahlen)
5. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Satz des Pythagoras) (Bild 5)

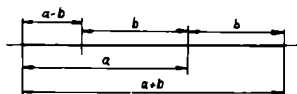


Sonderfall: sukzessive Konstruktion von $a\sqrt{n}$ (im Bild 6 ist $a = 1$)



Geometrische Grundkonstruktionen

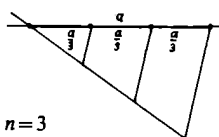
1. Addition und Subtraktion von Strecken (Bild 1)



Sonderfall: $x = m \cdot a$ (m natürliche Zahl)

2. Teilung von Strecken (Bild 2)

$x = \frac{1}{n}a$ (n natürliche Zahl)

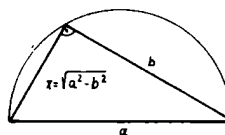


Sonderfall: $x = m \cdot \frac{a}{n} = \frac{m}{n} \cdot a$ (m, n natürliche Zahlen)

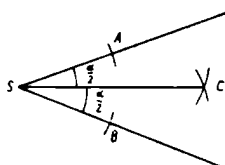
3. Vierte Proportionale

$x = \frac{ab}{c}$ (bzw. $x : a = b : c$) (Bild 3)

6. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (Satz des Pythagoras) (Bild 7)



7. Winkelhalbieren (Bild 8)



Konstruktion eines regelmäßigen 17-Ecks

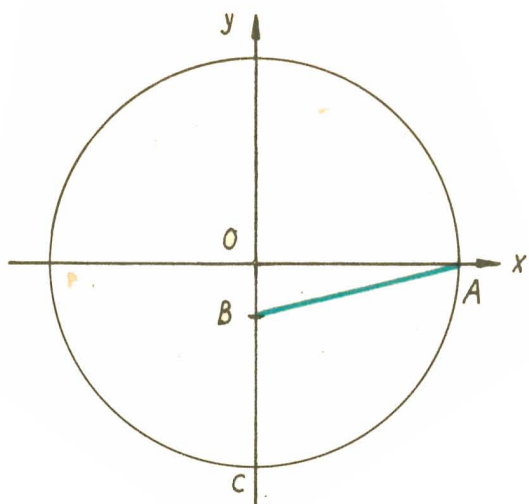


Bild 1

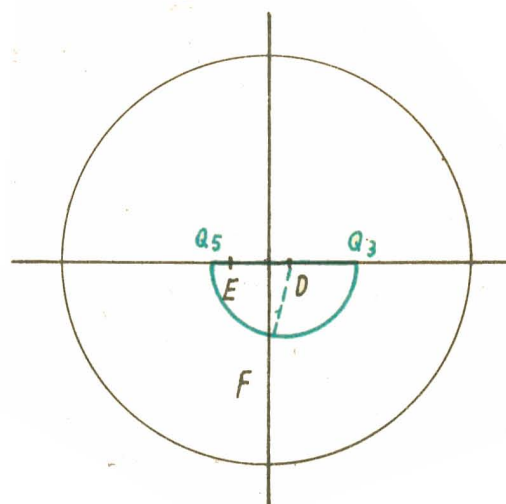


Bild 4

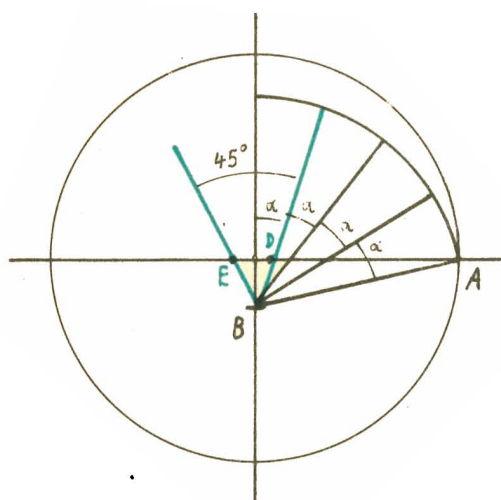


Bild 2

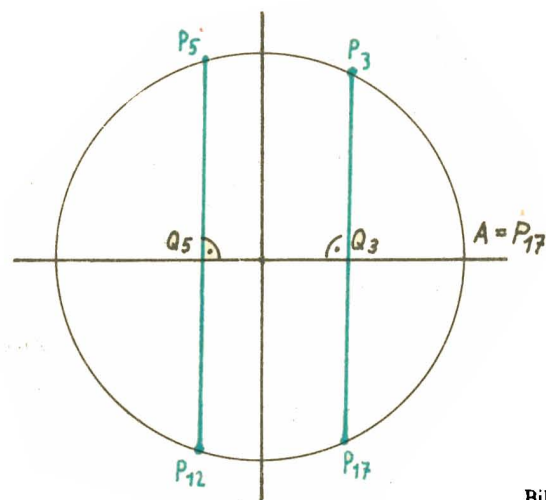


Bild 5

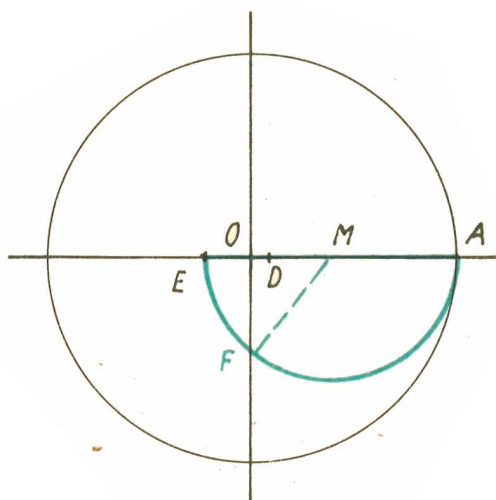


Bild 3

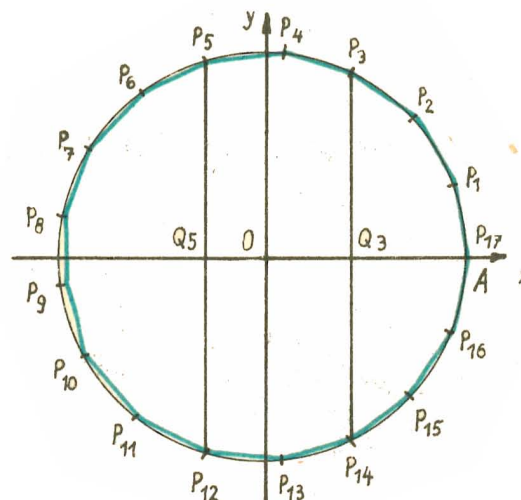


Bild 6