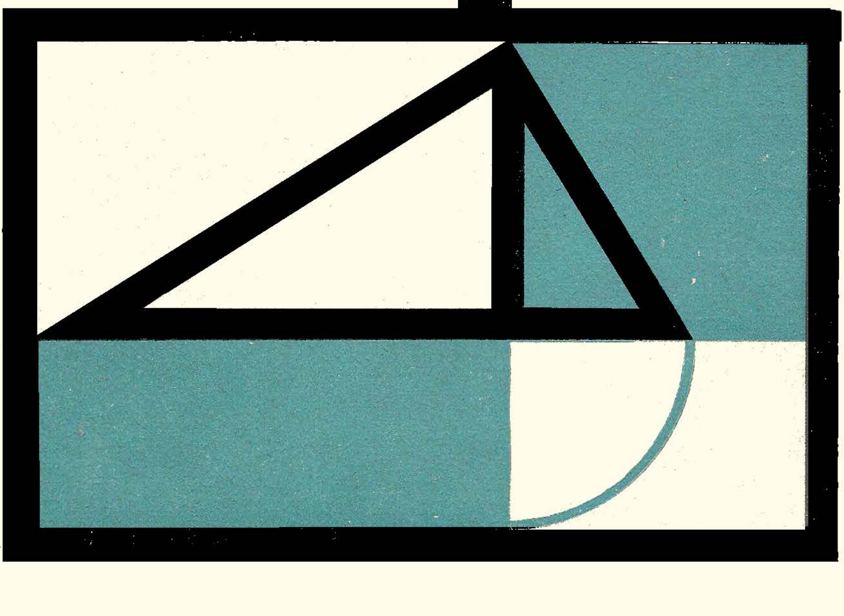
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 1

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41

Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Aus d. Buch: Raketen-Schild und Schwert (S. 1 bis 3); Archiv: OBM Weidauer, Dresden (S. 6), Vignetten: J. Jordan, Leipzig
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 1. 12. 67

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

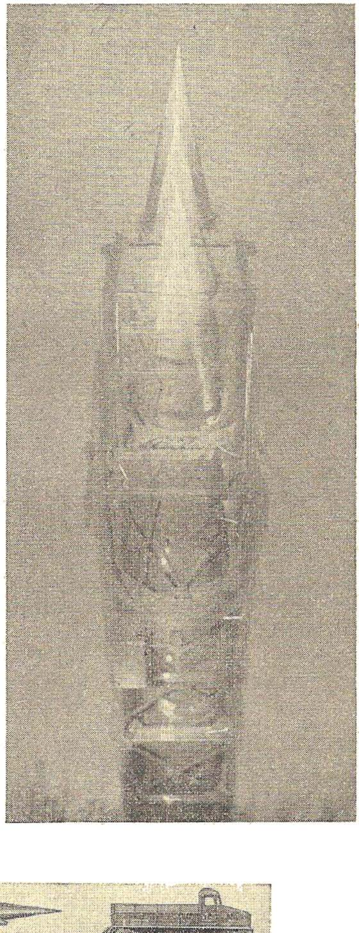
50 Jahre Rote Armee

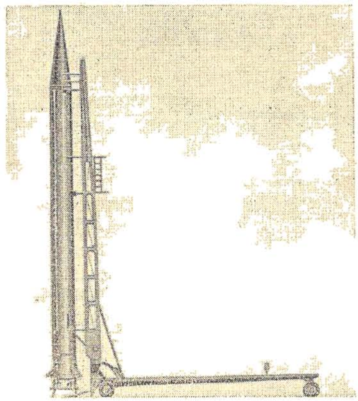
23. Februar 1918

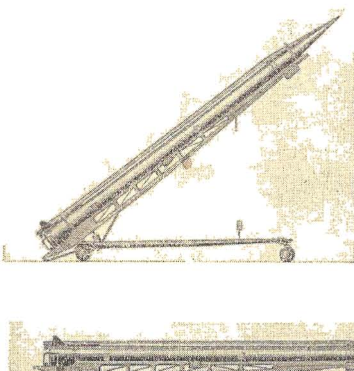
23. Februar 1968

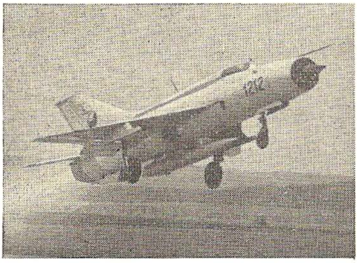
Das Fundament der Macht der Sowjetarmee bilden die Strategischen Raketenwaffen. Sie wurden dank der großen Errungenschaften der sowjetischen Wissenschaft und Technik geschaffen.

Rodion J. Malinowski († 30. 3. 1967)
Marschall der Sowjetunion

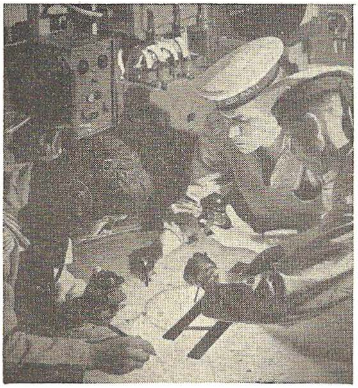






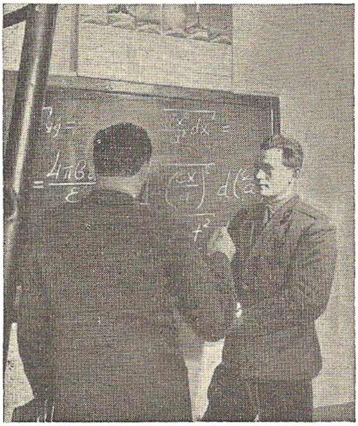


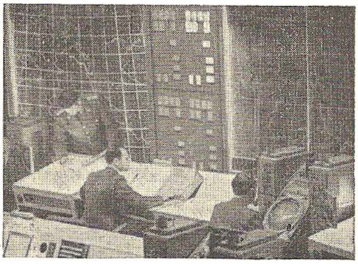
Mod. Abfangflugzeug (theor. Anfangssteigleistung zwischen 10000 und 15000 m/min) mit Luftkampfrakete



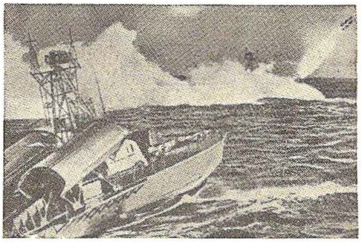
Radiometristen bei der Festlegung der Koordinaten des Zieles

Raketensoldaten beim Mathematikunterricht



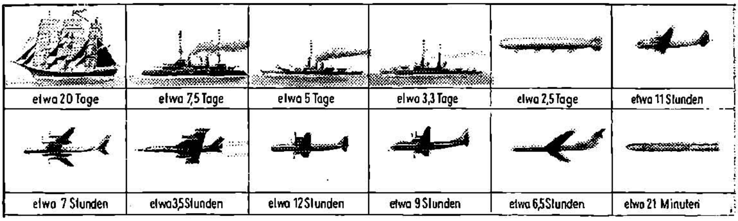


Herzstück moderner Militärtechnik: Die Elektronik; Baustein der Feuerleit-, Zielsuch- und Führungssysteme

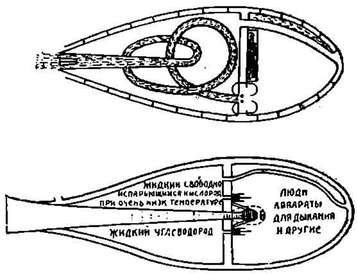


Sowjetisches Schnellboot mit zwei Raketen-Abschußrampen an Deck im Angriff. Im Hintergrund eines der Boote beim Abfeuern einer Rakete.

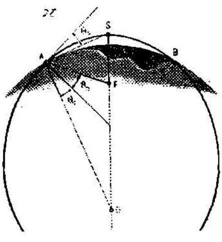
Hauptschlagkraft der Landstreitkräfte: raketentragende Kettenfahrzeuge



Wie heute interkontinentale Distanzen — z. B. Sowjetunion — USA: 6000 km — im Zeitbegriff auf wenige Minuten zusammenschrumpfen, zeigt die Tabelle über die Entwicklung der Waffenträger für weiträumige Operationen



Ziolkowski-Projekte für Raketen und Raumschiffe

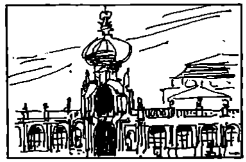


Schöpfer mächtiger Raketensysteme: Professor Sergej Pawlowitsch Koroljow. Als Schüler Tupolews entwarf er Flugzeuge, als Freund und Sachwalter Ziolkowskis leitete er den Bau sowjetischer Großraketen. Sein Name ist eng verbunden mit den Wörtern: *Sputnik und Wostok*

Raketen bewegen sich auf Ellipsenbahnen, deren einer Brennpunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt

Stellvertretend für die 304 Seiten des Buches wurden alle mathematischen Begriffe aus den Seiten 63 und 64 herausgezogen. Sie allein zeigen die Bedeutung der Mathematik als wichtige Grundlage für die Entwicklung und Handhabung von Raketen:
Steuerung, Schußweite, optimale Bahn, Anfangsgeschwindigkeit, Erdumfang, Geschwindigkeit, Abweichungen, Flugbahn, Startmasse, Keplersche Gesetze, Umlaufzeit, Ellipse, Parameter, große Achse, Brennpunkt, Mittelpunkt, Kreis, Ebene im Raum, Flughöhe, Erhöhungswinkel, Abschußwinkel, Entfernung.

Dresden in Zahlen



Die Stadt Dresden hat die schweren Wunden des Krieges und der Bombardierung längst überwunden und ist auf dem besten Wege, eine sozialistische Großstadt zu werden. Sie hat selbst den Entwicklungsstand der besten Jahre vor 1945 um ein Mehrfaches überschritten. Für Euch, liebe junge Leser, stellte ich Zahlen und Fakten zusammen (Stand 31. 12. 1966), die sicher anregen werden, Vergleiche mit Eurer Heimatstadt, Eurem Heimatkreis zu ziehen.

Mit freundlichen Grüßen

W. Weidauer, Oberbürgermeister a. D.

Einwohnerzahl	505189
d. s. männlich	223093
weiblich	282096
Einwohner je km²	2237
Haushalte	219497
Berufstätige	277099
Fläche (in km²)	225,8
Straßenlänge, gesamt (in km)	ca. 933
Länge der Stadtgrenze (in km)	ca. 101
Höhenlage (Elbspiegel, über NN, in m)	105,7
Geographische Lage	
nördliche Breite	51° 02′ 55″
östl. von Greenwich	13° 44′ 29″
Niederschlagsmenge (in mm)	781
Lufttemperatur °C	
Höchsttemperatur	34,6
Tiefsttemperatur	— 18,0
Monatsmittel	9,7
1966 gab es in Dresden	
Kinderkrippen	48
Plätze	3035
Kindergärten	139
Plätze	10085
Allgemeinbildende Oberschulen	92
Schüler	59667
Ingenieur- und Fachschulen	6
Hochschulen	6
Stud. an Hoch- und Fachschulen	32845
Krankenhäuser	11
Betten in Krankenhäusern	5153

Theater	5
Plätze	3781
Lichtspielhäuser	24
Plätze	10646
Kultur- und Klubhäuser	14

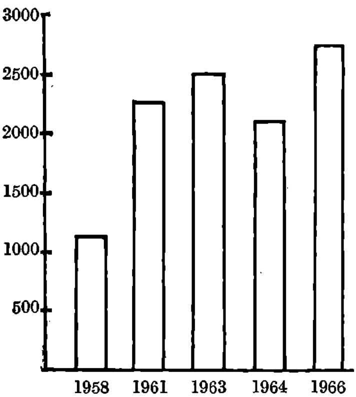
- Die Nahverkehrsmittel beförderten
  - 1938 — 155500000 Personen
  - 1966 — 367200000 Personen
- Wohnungsbau im Jahre 1966
  - 1795 Wohnungen mit 72710 m² Wohnfläche
- Geschaffene Werte im NAW
  - geleistete Stunden — 3205457 Std.
  - geschaffene Werte — 16,3 Mio M
- Besucherzahlen
  - Deutsches Hygienemuseum — 118486
  - Math.-Physikalischer Salon — 40000
  - Gemäldegalerie — 1169284
  - Verkehrsmuseum — 143368
  - Zoologischer Garten — 935000
- Industrielle Bruttoproduktion
  - 1955 — 1,782 Milliarden M
  - 1966 — 3,341 Milliarden M
- Einzelhandelsumsatz
  - 1958 — 1,295 Milliarden M
  - 1966 — 1,826 Milliarden M
  - davon entfielen 1966 auf Nahrungs- und Genußmittel — 1,001 Milliarden M
  - Industriewaren — 0,825 Milliarden M

Was Dresden in einem Jahr verzehrte

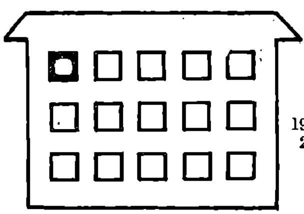
(Warenbereitstellung wichtiger Nahrungs- und Genußmittel)

Kartoffeln	59111 t
Frischgemüse	ca. 23000 t
Frischobst	9509 t
Südfrüchte	5613 t
Zucker	7721 t
Kakaoerzeugnisse	1212 t
Zuckerwaren	1376 t
Fleisch, Fleisch- u. Wurstw.	26777 t
Frischfisch u. Fischw.	4117 t
Trinkvollmilch u. Sahne	35939 t
Fettkäse	1980 t
Butter	6739 t
Tierische Fette	1193 t
Pflanzenöle u. Fette	778 t
Margarine	2749 t
Röstkaffee	1279 t
Wein und Sekt	27626 hl
Eier	78739700 St

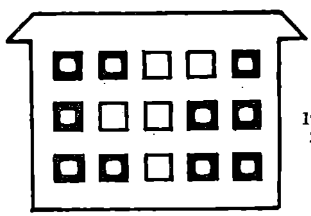
Bereitstellung von Personenkraftwagen



Fernsehteilnehmer je 1000 Einwohner



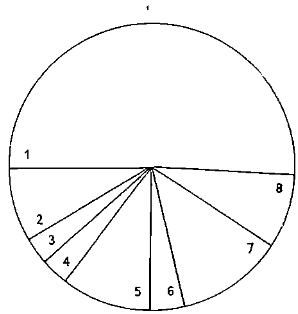
1958
23



1966
245

Lehrlinge nach Wirtschaftsbereichen 1966

1	Industrie	8072
2	Bauwirtschaft	1205
3	Prod. Handwerk	488
4	Land- und Forstwirtschaft	478
5	Verkehr	1651
6	Post und Fernmeldewesen	553
7	Handel	1863
8	Bereiche außerhalb der materiellen Produktion	1403
	zusammen	15713



Ausgaben aus dem Staatshaushalt 1966 in M

Insgesamt pro Kopf der Bevölkerung	538
Pro Kind im Kindergarten	885
Pro Schüler in Allgemeinb. OS	684
Pro Kind in Kinderkrippen	2839

Liebe Leser!
Nutzt die Statistischen Jahrbücher, die in der DDR jährlich herausgegeben werden!

Inferno Dresden

Am 13./14. Februar jährt sich zum 22. Male der Tag der Bombardierung Dresdens. Innerhalb kurzer Zeit wurde eine der schönsten Städte Deutschlands zerstört. Zahlen und Fakten sollen uns das Ausmaß der Zerstörungen zeigen. Sie sollen eine Mahnung sein, für Frieden und Fortschritt zu kämpfen.

An den drei Angriffen am 13./14. Februar 1945 auf Dresden haben 773 viermotorige englische *Lancaster*-Bomber und 311 amerikanische *Fliegende Festungen* teilgenommen. Außerdem waren am letzten Angriff über 200 amerikanische Langstreckenjäger beteiligt. Es wurden 3761 t Bomben (darunter 600000 Stabbrandbomben) abgeworfen.

Von den vorhandenen 222000 Wohnungen wurden

75000 total zerstört,
11000 schwer beschädigt,
7000 mittelschwer beschädigt und
81000 leicht beschädigt.

Das waren 79% der Wohnungen in 70% der vorhandenen Wohnhäuser. Von 30 bedeutenden kulturhistorischen Gebäuden wurden

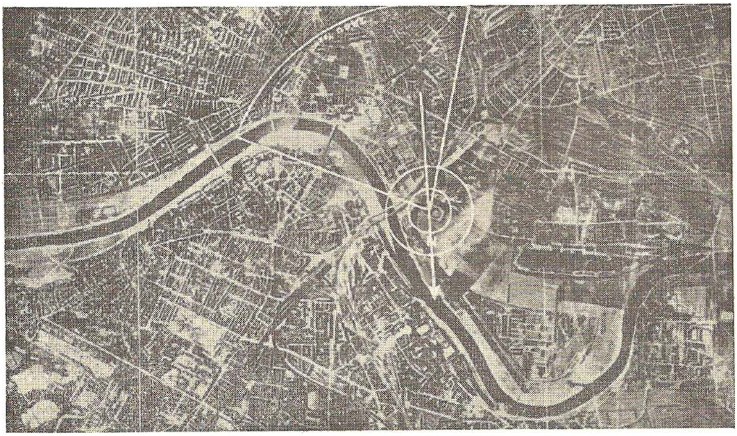
11 zerstört,
9 sehr schwer beschädigt,
10 schwer beschädigt.

Vollständig zerstört wurden außerdem:

20 Kirchen,
8 Kapellen,
40 Krankenhäuser und Lazarette,
35 Schulen,
68 sonstige Kulturstätten sowie
114 öffentliche Gebäude.

Das Kanalisationsnetz hatte an 605 Stellen Bombenschäden. 35000 Menschen kamen bei diesen drei Angriffen ums Leben. Dresden hatte 1939 rund 629000 Einwohner. Im Sommer 1945 waren es nur noch 454000. Neben den 35000 Luftkriegstoten sind 110000 Einwohner evakuiert worden. Den Rest bildeten gefallene oder noch kriegsgefangene Soldaten sowie Kriegsverbrecher und Faschisten, die sich nach dem Westen abgesetzt hatten. Die Zerstörung der Dresdner Innenstadt hatte keinerlei militärischen Wert. Rüstungsbetriebe kamen nur minimal zu Schaden. Der Terrorangriff sollte, wie der damalige englische Premierminister Churchill sagte, für die Angloamerikaner in Jalta günstigere Verhandlungspositionen schaffen. Churchill wollte Stalin erschrecken. Aber die Sowjetunion hat sich nicht erpressen lassen.

W. Weidauer



Luftbildaufnahme Dresdens aus dem Jahre 1943, von einem Aufklärer der *Royal Air Force* angefertigt. Sie diente als Angriffsplan für die Nachtangriffe im Jahre 1945. Das Gebiet des weiß eingezeichneten Viertelkreissektors (mit Zentrum: heutiges *Heinz-Steyer-Stadion*) sollte bombardiert werden. Es enthielt keine strategischen Ziele.

Abstand zweier Punkte im Raum

Bei Betrachtung des nächtlichen Sternhimmels vermittelt uns das Auge zunächst den Eindruck, als seien sämtliche Fixsterne auf einer großen, die Erde überspannenden Halbkugel angeordnet. Gemäß dieser Vorstellung faßte man bereits im Altertum gewisse Sterngruppierungen zu Bildern zusammen, nach denen man sich auch heute noch am Sternhimmel orientiert. Hierbei besteht jedoch nicht immer Klarheit darüber, daß auf diese Weise auch Sterne zu Bildern vereinigt werden, deren Abstände vom menschlichen Auge sich wie 1 : 1000000 verhalten. Mit unserem Auge allein sind wir nicht in der Lage, uns von der Tiefe des Raumes, in dem gewisse Dinge angeordnet sind, eine Vorstellung zu verschaffen. Da jedoch die Astronomie heute zum Teil recht genaue Angaben über die Entfernung von Fixsternen machen kann, erhebt sich die Frage, wie diese Größen bestimmt werden.

Der Schlüssel für die Distanzbestimmung von Fixsternen liegt in der Tatsache begründet, daß wir über die jährliche Eigenbewegung unserer Erde um die Sonne recht gut Bescheid wissen. Auf der angenäherten Kreisbahn, die die Erde um die Sonne beschreibt, sehen wir die Fixsterne von verschiedenen Standorten im Weltraum aus. Der Abstand zweier innerhalb eines halben Jahres von der Erde durchlaufener Standorte beträgt maximal etwa 300 Millionen Kilometer. Nach unseren irdischen Erfahrungen zeigt unsere Umgebung bereits nach einem Standortwechsel von wenigen Metern ein anderes Bild. Wie verhält es sich nun mit den Bildern des Fixsternhimmels, z. B. des Großen Bären, von dem wir im Frühjahr und im Herbst je eine Aufnahme gemacht haben? Mit gewöhnlichen Mitteln werden wir an den beiden Bildern keine Unterscheidung bezüglich der Stellung der Sterne zueinander registrieren können. Dies liegt daran, daß der Erdbahndurchmesser (300000000 km) außerordentlich klein gegenüber den Entfernungen ist, die zwischen den Fixsternen bestehen, und es bedarf gut ausgeklügelter Methoden, um eine solche „parallaktische" Verschiebung eines Fixsternes innerhalb eines halben Jahres messen zu können. In der Tat gelang es erstmals dem Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846) durch eine fortlaufende Beobachtungsreihe von August 1837 bis Oktober 1838, eine Fixsternparallaxe (scheinbare Verschiebung eines Fixsternes innerhalb eines halben Jahres infolge der Umlaufbewegung der Erde) mit 0,35″ zu bestimmen. Zur Messung dieses außerordentlich kleinen Winkels benutzte er ein von Fraunhofer hergestelltes Heliometer. Da einer parallaktischen Verschiebung von 1″ die Entfernung von 206265 Erdbahnhalbmessern entspricht, hatte der von Bessel beobachtete Stern eine Entfernung von etwa 600000 Erdbahnhalbmessern. (Größe der parallaktischen Verschiebung und Abstand eines Fixsternes stehen im umgekehrten Verhältnis!)

Heute kennt man die Parallaxen und damit auch die Entfernungen von Tausenden von Fixsternen. Darüber hinaus hat man mit anderen Methoden die Entfernungen von Sternnebeln erschlossen, die auf dem hier beschriebenen Wege nicht bestimmbar sind.

Wir wollen als Ergebnis festhalten: Die Entfernungsbestimmung von gewissen Fixsternen geschieht dadurch, daß man die von verschiedenen Beobachtungsorten aus aufgenommenen Bilder der Sterne rechnerisch auswertet.

Die Praxis stellt uns oft vor die Aufgabe, die Entfernung zweier Punkte eines Gegenstandes zu bestimmen, wenn zwei Bilder des Gegenstandes und ein darin befindlicher Maßstab als gegeben vorliegen. Am einfachsten läßt sich die Aufgabe lösen, wenn die Bilder des Körpers in zugeordneten Normalrissen gegeben sind.

Am Beispiel eines durch Grund- und Aufriß im Maßstab 1 : 1 gegebenen Werkstückes interessiert uns der Abstand der Spitzen A und B (Bild 1). Dieser Abstand läßt sich gewiß nicht dem Grundriß entnehmen, da die ersten Tafelabstände von A und B nicht übereinstimmen. Auch aus dem Aufriß ist der Abstand nicht ablesbar, weil die zweiten Tafelabstände von A und B verschieden sind. Es ist leicht einzusehen, daß die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ bei Normalprojektion genau dann im Bild in wahrer Größe erscheint, wenn sie parallel zur Bildebene liegt. Dies läßt sich in vorliegendem Fall bei der Strecke $\overline{AB}$ sehr leicht durch eine Drehung erreichen. Wir halten etwa den Punkt A fest und drehen die Strecke $\overline{AB}$ um eine Achse durch A senkrecht zur Bildebene π_1 so weit, bis die zweiten Tafelabstände von A und B_0 übereinstimmen. Nach Drehung der Strecke $\overline{AB}$ in die Stellung $\overline{AB_0}$ kann man im Aufriß die wahre Länge der Strecke $\overline{AB} = d$ ablesen.

Die Bahn der Drehbewegung von B nach B_0 erscheint im Grundriß als ein Kreisbogen und im Aufriß als eine Parallele zur Rißachse durch B''. Das hier angewandte Verfahren zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke (Abstand zweier Punkte) bezeichnet man als die „Methode des Paralleldrehens." Dieses Verfahren kommt mit den wenigsten Konstruktionslinien aus und ermöglicht noch zusätzlich die Bestimmung des Neigungswinkels einer Strecke gegen die Bildebenen. Wir stellen das Wesentliche der Konstruktion nochmals heraus: (Bild 2)

1. Kreisbogen um A' mit der Strecke $\overline{A'B'}$ als Radius.
2. Parallele zur Rißachse durch A'. Sie schneidet den Kreisbogen in B_0'.
3. Parallele zur Rißachse durch B''.
4. Ordnungslinie durch B'_0. Sie schneidet die unter Punkt 3 gezeichnete Parallele zur Rißachse in B''_0.

Aus $A''B_0''$ ergibt sich der gesuchte Abstand d der Punkte A und B. Der Winkel $\gamma_1 = \sphericalangle\, A''B_0''B''$ ist gleich dem Neigungswinkel der Geraden durch die Punkte A und gegen die Bildebene π_1.

Abschließend sei vermerkt, daß man die Drehachse auch durch A senkrecht zur Bildebene π_2 ansetzen könnte. Man erhielte nach entsprechender Vertauschung der Konstruktion die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ im Grundriß und außerdem den Neigungswinkel γ_2 der Geraden durch A und B gegen die Aufrißtafel. Auch die Wahl des Drehpunktes auf der Geraden ist im Prinzip gleichgültig. Man wird seine Lage jedoch stets so wählen, daß ein Minimum an Konstruktionsaufwand erforderlich ist. (Bild 3)

E. Schröder

Aufgaben

☐ An einem durch Grund- und Aufriß gegebenen Quader bestimme man konstruktiv die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ (Raumdiagonale des Quaders). Ferner ist der Neigungswinkel der Diagonalen gegen die Bildebene π_1 zu ermitteln. (Bild 4)

☐ Bestimme die wahre Gestalt des Dreiecks ABC, indem Du zunächst die wahren Längen der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ ermittelst und mit den gefundenen Stücken das Dreieck konstruierst.
Zeichne in das gefundene Dreieck die Höhe h_c ein. Wie bildet sich h_c in Grund- und Aufriß ab? (Bild 5)

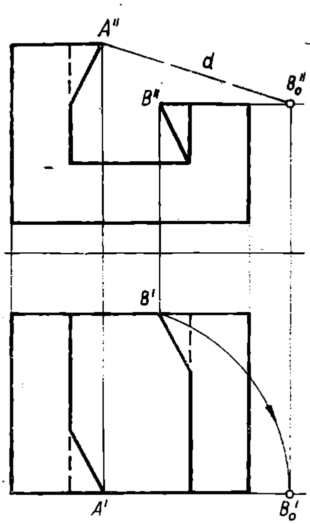


Bild 1

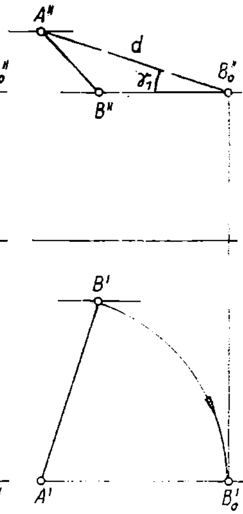


Bild 2

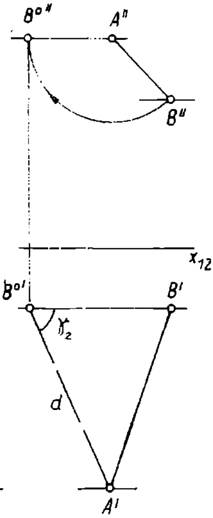


Bild 3

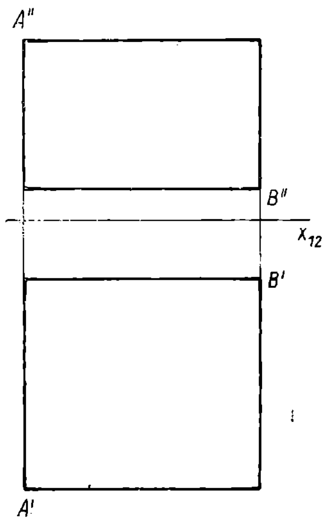


Bild 4

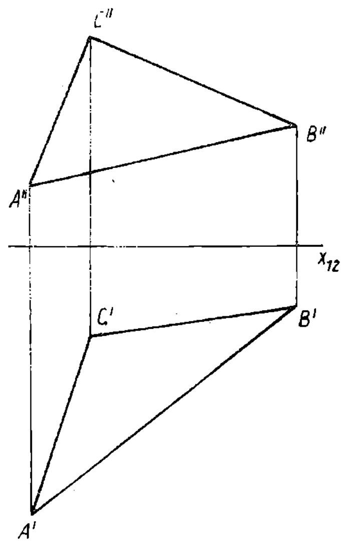


Bild 5

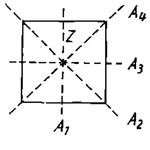
Nichts Einfacheres als ein Quadrat!

(trotzdem erst für Schüler ab Klasse 8)

Wir wollen gemeinsam eine merkwürdige Eigenschaft des Quadrats kennenlernen. Man könnte meinen, das Quadrat sei eine so einfache geometrische Figur, daß es gar nichts gäbe, was daran „des Merkens würdig" ist. Das Quadrat wird ja definiert als ein gleichseitiges und gleichwinkliges Viereck. Daß es gleichlange Seiten und gleichgroße Winkel hat, liegt also schon in seiner Definition. Nicht in der Definition steckt allerdings, daß alle Winkel *rechte* Winkel sein müssen. Es ergibt sich zwar sehr leicht, muß aber doch bewiesen werden. Versucht es! Nehmt Zirkel, Zeichendreieck und Bleistift zur Hand, ich brauche Eure aktive Mitarbeit!

Aufgabe 1: Beweise, daß in jedem Quadrat die Winkel rechte Winkel sind!
Hinweis: Benutze dazu am einfachsten den Satz über die Summe der Winkel in jedem Viereck! Den kennst Du doch. Wenn nicht, dann finde zunächst diesen Satz!

Jedes Quadrat hat vier *Symmetrieachsen* (Figur 1).



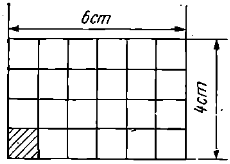
Ob wir also das Quadrat an der Achse A_1, A_2, A_3 oder A_4 spiegeln, immer geht es in sich über. Nennen wir den Schnittpunkt dieser Symmetrieachsen Z, so gibt es auch einige *Drehungen* um Z, die das Quadrat in sich selbst übergehen lassen.

Aufgabe 2: Wieviel Drehungen um Z gibt es, die das Quadrat in sich überführen? Beachte dabei, daß man angeben muß, um welchen Winkel man dreht! (Eigentlich muß man auch noch beachten, ob man links herum oder rechtsherum dreht.)

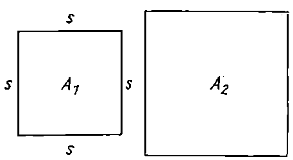
Gewiß habt Ihr auch schon gemerkt, daß die *Diagonalen* des Quadrats einige einfache Gesetzmäßigkeiten aufweisen. Diese will ich Euch nicht nennen; findet sie selbst!

Aufgabe 3: Finde und beweise wenigstens fünf Sätze über die Diagonalen im Quadrat und die dadurch entstehenden Teildreiecke!

(1) Schließlich erinnere ich Euch daran, daß Quadrate als sogenannte „Einheitsquadrate" zur *Flächenmessung* gebraucht werden. Wenn ich sage: „Dieses Rechteck hat den Flächeninhalt 24 cm²", so bedeutet das, daß ich das Rechteck aus 24 Quadraten von der Seitenlänge 1 cm zusammensetzen kann. Figur 2 zeigt *eine* Möglichkeit.



Daran wollen wir uns erinnern, wenn ich Euch nun folgende Geschichte erzähle.
Im alten Griechenland gab es zwischen zwei Männern einen Streitfall, wem ein Esel gehöre. Jeder brachte Argumente zur Bekräftigung seiner Ansicht vor; es konnte aber keine Einigung zwischen ihnen erzielt werden. Da brachten sie den Fall vor das *Orakel von Delphi*. Die Sage erzählt jedenfalls, daß es damals in der Stadt Delphi eine Frau gegeben habe, die weissagen konnte. Das Orakel hörte sich die Männer an und sagte dann: „Wer von Euch in der Lage ist, ein Quadrat zu verdoppeln, der bekommt den Esel!" Die Männer machten sich mit Eifer an die Sache, und wir wollen es ihnen nachmachen. Unsere Aufgabe soll also lauten: *Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratfläche verdoppelt?* (Fig. 3)



1. Quadrat 2. Quadrat

Den Flächeninhalt des 1. Quadrates nennen wir A_1, den des 2. Quadrates entsprechend A_2. Dann soll gelten

$$A_2 = 2A_1$$

Wer macht einen Vorschlag? Versuchen wir es zuerst damit, die Seite s des 1. Quadrats zu verdoppeln!

Aufgabe 4: Berechne A_2, wenn die Seite des 2. Quadrats gleich $2s$ ist!

Lösung: $A_2 = 4s^2$

Aufgabe 5: Ermittle, ob A_2 jetzt das Doppelte von A_1 ist!

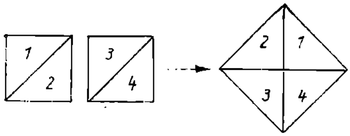
Lösung: Nein, A_2 ist das *Vierfache* von A_1!

Dieser erste Versuch ist also fehlgeschlagen. Ich sagte Euch ja, daß wir eine merkwürdige Eigenschaft des Quadrats kennenlernen wollen. Sie ist schuld daran, daß wir gescheitert sind. Ich hoffe aber, daß Ihr gemerkt habt, warum bei der Verdopplung der Seite des Quadrats gerade eine Vervierfachung des Flächeninhalts herauskam!

Aufgabe 6: Beweise allgemein, daß sich bei n-facher Quadratseite der n^2-fache Flächeninhalt ergibt! ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

Aufgabe 7: Wie verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren? (Alle Quadrate sind untereinander ähnlich!)

Wir brauchen also eine neue Idee! Vielleicht versuchen wir es einmal mit Schere und Papier (Figur 4):



Da das neue Quadrat den *doppelten* Flächeninhalt des Ausgangsquadrates haben soll, zerschneiden wir *zwei* Ausgangsquadrate längs je einer Diagonalen. Die entstehenden vier rechtwinkligen Dreiecke kann man tatsächlich zu einem Quadrat zusammensetzen!

Aufgabe 8: Beweise, daß das aus den rechtwinkligen Dreiecken 1,2,3 und 4 zusammengesetzte Viereck ein Quadrat ist! Beweise dazu (a), daß die Seiten dieses Vierecks gleichlang sind!
Beweise (b), daß die Winkel gleichgroß sind!

Aufgabe 9: Trage zusammen, welche der Eigenschaften des Quadrates zum Beweis verwendet werden mußten!

Aufgabe 10: Genügt es, anstelle von (b) in Aufgabe 8 folgendes zu beweisen:
(b'): Die Winkel des Vierecks sind rechte Winkel?

Beim Lösen der Aufgabe 8a habt Ihr bestimmt etwas Neues entdeckt: *Die Seite des neuen Quadrats muß gerade die Diagonale des alten Quadrats sein!* Das ist ein wichtiges Ergebnis, auf das wir mit Recht stolz sind. Haben wir damit unsere Ausgangsfrage beantwortet? Sie lautete: Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratfläche verdoppelt? Wir können eine vorläufige Antwort geben: Die Quadratseite muß so lang wie die Quadratdiagonale gemacht werden. Wie Ihr seht, ist damit unser Problem leider noch nicht gelöst, sondern nur anders formuliert:
Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratdiagonale ergibt?
Darüber werden wir uns im nächsten Beitrag unterhalten.

H. Wiesemann

$1 + 9 + 6 + 8 = 1 \quad 9 \quad 6 \quad 8$

Setze auf der rechten Seite dieser Gleichung Rechenzeichen und Klammern zwischen die Ziffern so, daß eine wahre Aussage entsteht! Dabei darf aber das Zeichen + nicht benutzt werden.

Viel Spaß beim Knobeln wünscht

Studienrat H.-J. Kerber

Bezirksklub Jg. Mathematiker Neubrandenburg

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Werner Renneberg

Professor mit Lehrstuhl an der Philosophischen Fakultät der Karl-Marx-Universität
Leiter der Fachgruppe Mathematik am Institut für Pädagogik

168 Ein PKW *Trabant* (W_1) fährt auf gerader, ebener Straße mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. Ein PKW *Wartburg* (W_2) mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 > v_1$ ist im Begriff, ihn zu überholen. In der schematischen Darstellung wird W_1 als ruhend angenommen, die Abmessungen der Wagen sind vernachlässigt (Abb. 1).

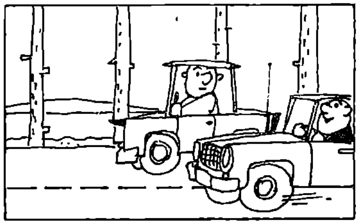
a) Wie lange dauert das Überholen (Zeit t)?

b) Welche Länge l hat die Strecke, auf der dieser Vorgang stattfindet (Abb. 2)? (Das Ausweichen des überholenden Kraftwagens aus der Fahrspur wird nicht berücksichtigt.)

c) Wie hängen t und l von v_1 und v_2 ab?

d) Den beiden Wagen kommt ein PKW *Moskwitsch* (W_3) mit der konstanten Geschwindigkeit v_3 entgegen. In welcher Mindestentfernung l_{min} von W_3 muß W_2 mit dem Überholen beginnen, damit dieser Vorgang beendet ist, wenn sich beide begegnen (siehe Abb. 2)?

e) An Hand der aufgestellten Beziehungen ist vorauszusagen, welchen Einfluß die folgenden Änderungen der Geschwindigkeiten auf die Zeit t und die Strecke l des Überholens sowie auf die Mindestentfernung l_{min} haben (bei konstanten e_1 bis e_4).



(1) Die Geschwindigkeit v_1 des zu überholenden Wagens wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ (bei unveränderten v_2 und v_3).

(2) Die Geschwindigkeit v_2 des überholenden Wagens wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ (bei unveränderten v_1 und v_3).

(3) Die Geschwindigkeit v_3 des entgegenfahrenden Wagens wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ (v_1 und v_2 bleiben fest).

Zahlenfälle:

f) $e_1 = 15$ m, $e_2 = 5$ m, $e_3 = 10$ m, $e_4 = 20$ m. $v_1 = 40\ \text{km h}^{-1}$, $v_2 = 50\ \text{km h}^{-1}$.

g) $e_1 = 30$ m, $e_2 = 10$ m, $e_3 = 20$ m, $e_4 = 40$ m. $v_1 = 60\ \text{km h}^{-1}$, $v_2 = 80\ \text{km h}^{-1}$, $v_3 = 70\ \text{km}^{-1}$.

h) e_1 bis e_4 wie g). $v_1 = 65\ \text{km h}^{-1}$, $v_2 = 75\ \text{km h}^{-1}$, $v_3 = 70\ \text{km h}^{-1}$.

i) Der Abstand der Wagen W_2 und W_3 beträgt 1 km. Darf der Wartburg überholen?

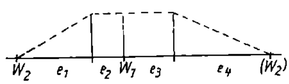


Abb. 1

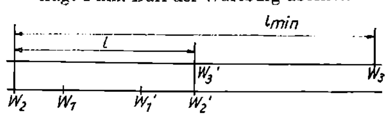


Abb. 2

Mehr Mathematikstudentinnen

Ende August 1967 erhielten die jüngsten Kommilitonen der *Alma mater lipsiensis*, nachdem sie sich traditionsgemäß in die ausgelegten Matrikelbücher eingeschrieben hatten, Studentenausweis und Studienbuch. 1800 Direktstudenten erwartet eine Zeit hoher Anforderungen, die ihnen vielfach Gelegenheit zum Erringen wissenschaftlicher Erkenntnisse und zu politischer Bewährung bietet.

Erfreulich ist, daß erstmalig in der Universitätsgeschichte der Karl-Marx-Universität Leipzig auffallend viele Mädchen Mut zur Mathematik fanden. Beispielsweise sind in der Fachkombination Geographie/Mathematik 58 Prozent, Chemie/Mathematik 62 Prozent weibliche Studierende immatrikuliert worden. Entdeckte man in den Vorjahren unter den künftigen Diplommathematikern nur vereinzelt Studentinnen, so ist in diesem Jahr jeder vierte Kommilitone dieser Fachrichtung ein Mädchen.

Ausgewählte Aufgaben aus dem

18. Mathematischen Jahreswettbewerb der USA 1967

Eighteenth Annual Mathematics Examination 1967

1. Zur dreistelligen Zahl $2a3$ ist die Zahl 326 zu addieren. Als Summe erhält man die dreistellige Zahl $5b9$, die durch 9 teilbar ist. Es ist die Summe $a + b$ zu ermitteln. Welche der folgenden fünf Lösungen ist richtig?

a 2	*b* 4	*c* 6	*d* 8	*e* 9

2. Der Term

$$\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x} \text{ mit } x \neq 0,\ y \neq 0$$

ist so weit wie möglich zu vereinfachen. Aus den folgenden fünf Lösungen ist die richtige zu ermitteln!

a 1	*b* $2xy$	*c* $2x^2y^2 + 2$	*d* $2xy + \frac{2}{xy}$	*e* $\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$

3. Einem gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge s ist ein Kreis, diesem wiederum ein Quadrat einbeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrates ist durch s auszudrücken. Welche der fünf angeführten Lösungen ist richtig?

a $\frac{s^2}{24}$	*b* $\frac{s^2}{6}$	*c* $\frac{s^2\sqrt{2}}{6}$	*d* $\frac{s^2\sqrt{3}}{6}$	*e* $\frac{s^2}{3}$

4. Gegeben ist ein Dreieck, dessen Umfang p cm und dessen Flächeninhalt k cm² beträgt. Der Inkreis dieses Dreiecks habe den Radius ϱ cm. Es ist der Quotient $\frac{p}{k}$ durch den Inkreisradius ϱ auszudrücken. Aus den fünf angegebenen Lösungen ist die richtige herauszufinden.

a $\frac{\sqrt{2}}{\varrho}$	*b* $\frac{2}{\sqrt{\varrho}}$	*c* $\frac{2}{\varrho}$	*d* $\frac{\varrho}{2}$	*e* der Quotient ist unabhängig von ϱ

5. Der Umfang eines Rechtecks $ABCD$ beträgt 20 cm. Es ist die Maßzahl der kleinsten Diagonale $\overline{AC}$ eines solchen Rechtecks, die möglich ist, zu ermitteln. Entscheiden Sie, welche der nachstehenden fünf Lösungen richtig ist!

a 0	*b* $\sqrt{50}$	*c* 10	*d* $\sqrt{200}$	*e* keine der Zahlen *a* bis *d*

6. Die Gleichung $x^2 + px + 8 = 0$ habe die beiden voneinander verschiedenen reellen Wurzeln r_1 und r_2. Welche der fünf über die Wurzeln der Gleichung gemachten Aussagen ist richtig?

a $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$ *b* $|r_1| > 3$ oder $|r_2| < 3$

c $|r_1| > 2$ und $|r_2| > 2$ *d* $r_1 < 0$ und $r_2 < 0$ *e* $|r_1 + r_2| < 4\sqrt{2}$

7. Es seien die Ungleichung $x^2 - 5x + 6 < 0$ und die Gleichung $p = x^2 + 5x + 6$ beide zugleich erfüllt. Welches der angegebenen fünf Lösungsintervalle trifft für p zu?

a p kann jede reelle Zahl sein *b* $20 < p < 30$ *c* $0 < p < 20$

d $p < 0$ *e* $p > 30$

8. Es seien p, d, q, r, d', q', r' natürliche Zahlen. Die Zahl p ergebe bei Division durch d den Rest r: $p = qd + r$. Die Zahl q ergebe bei Division durch d' den Rest r': $q = q'd' + r'$. Dividiert man jetzt p durch dd', so entsteht der folgende Rest:

a $r + r'd$ *b* $r' + rd$ *c* rr' *d* r *e* r'

Welche dieser fünf Lösungen ist richtig?

9. Gegeben ist die Gleichung $3x + 5y = 501$; es ist die Anzahl aller geordneten Paare $(x; y)$ von positiven ganzen Zahlen x, y zu ermitteln, welche diese Gleichung erfüllen. Aus den folgenden fünf Lösungen ist die richtige herauszufinden!

a 33 *b* 34 *c* 35 *d* 100 *e* keine der Zahlen unter *a* bis *d*

10. Zwei Kerzen gleicher Länge sind aus verschiedenen Rohstoffen hergestellt. Werden beide Kerzen zur gleichen Zeit angezündet, so brennt die eine in drei, die andere in vier Stunden völlig ab. Um welche Uhrzeit müssen beide Kerzen zugleich angezündet werden, so daß um 16 Uhr ein Kerzenstumpf doppelt so lang wie der andere ist?

a 13^{24} Uhr *b* 13^{28} Uhr *c* 13^{36} Uhr *d* 13^{40} Uhr *e* 13^{48} Uhr

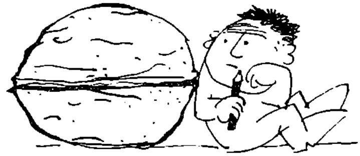
---

Der 18. Mathematische Schülerwettbewerb der USA wurde am 9. März 1967 durchgeführt; er steht allen Klassenstufen der höheren Schulen offen. Die insgesamt 40 Aufgaben sind in drei Schwierigkeitsstufen eingeteilt, entsprechend sind auch die Punktzahlen gestaffelt (erreichbare Höchstpunktzahl: 150).
Für die Lösung aller Aufgaben stehen 80 Minuten zur Verfügung. Diese Zeitspanne erscheint sehr kurz, wenn man das angewandte Verfahren der Ergebnisangabe nicht kennt. Die Lösungen sind vorprogrammiert, und zwar nach der Methode des Mehrfach-Auswahlantwort-Prinzips. Der Schüler hat auf einem Antwortbogen lediglich anzukreuzen, welches der fünf vorgegebenen Ergebnisse *a, b, c, d, e* (von denen genau eines richtig ist) er für das richtige hält. Dieses Prinzip hat für die Auswertung enorme Vorteile, für die objektive Messung der tatsächlich gezeigten Leistungen allerdings auch Nachteile. Es gibt aber Möglichkeiten, programmierte Wettbewerbe oder Leistungskontrollen durchzuführen, bei denen diese Nachteile auf ein Minimum reduziert sind. (Wir kommen später auf solche Möglichkeiten zurück.) Die Zahl von 285000 Schülern aus den USA (180 Mill. Einw.) und einer Reihe anderer Länder, die sich am Wettbewerb beteiligen, ist nicht sehr hoch, wenn man bedenkt, daß sich an der 1. Stufe unserer Mathematikolympiaden etwa 1000000 Schüler beteiligen. Darüber hinaus sollte nicht vergessen werden, daß es bei uns allen Schülern möglich ist, am Wettbewerb teilzunehmen, in den USA aber nur denen, die eine höhere Schule besuchen können. — Die beiden amerikanischen Schüler Yen und Gutman wurden mit 98,75 bzw. 82,00 Punkten die besten. — Die vorliegende Auswahl von 10 Aufgaben soll die Unterschiede zu dem bei uns angewandten System zeigen. Das Material wurde uns freundlicherweise von Frau Prof. Nora D. Turner zur Verfügung gestellt.

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

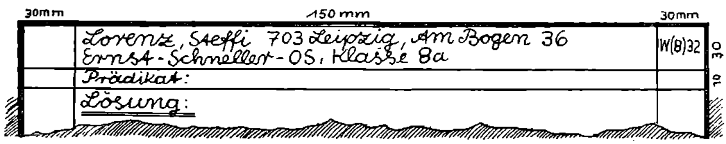
letzter Einsendetermin 1. 5. 68



Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 12. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer in Klammern, z. B. (7) vorgesetzt (d. h., für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung. Schüler der 11./12. Klassen lösen die Aufgaben, welche mit W (10/12) gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12. (Wir kommen damit einem vielfach geäußerten Wunsch bisheriger Teilnehmer und Schülern der Klassen 11/12 nach.)
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf dieser Seite angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 298 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert. Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur den Antwortsatz oder das Endergebnis!) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst" oder „gut gelöst". Wer keine Nachricht erhält, hat die Aufgabe unvollständig, teilweise, nicht gelöst oder die vorgegebene Form nicht beachtet.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Zwischen dem 15. und 31. Januar 1969 sind alle im Jahre 1968 erworbenen Antwortkarten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury wertet diese Antwortkarten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.
9. Aussicht auf Preise und namentliche Veröffentlichung haben Teilnehmer, die im Laufe des Jahres 1968 Antwortkarten mit einem der beiden Prädikate erhalten haben. Anerkennung wird also der Teilnehmer finden, der regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitarbeitet.

So muß der Kopf der Lösung einer Wettbewerbsaufgabe aussehen!



5 **169** Herr Meier betritt ein Fachgeschäft für Fotoartikel. Er weist auf einen Fotoapparat und fragt die Verkäuferin: „Wieviel kostet diese Kamera?" „Mit Bereitschaftstasche zusammen 235 M", entgegnet die Verkäuferin. „Und wieviel kostet die Kamera ohne Tasche?" fragt Herr Meier weiter. Verschmitzt erwidert die Verkäuferin: „185 M mehr als die Tasche". Daraufhin kauft dieser Kunde die Kamera ohne Tasche. Welchen Betrag muß Herr Meier bezahlen?

170 Die Schüler einer fünften Klasse sollen das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnen. Heinz schlägt sein Heft auf und will diese Aufgabe schriftlich lösen. Da flüstert ihm sein Banknachbar zu: „Rechenvorteil beachten!" Sofort erkennt Heinz einen Lösungsweg, der es ihm ermöglicht, die Aufgabe im Kopf zu rechnen. Wie rechnet Heinz?

171 Ein Düsenflugzeug legt in 3 Stunden die Flugstrecke von 2550 km zurück, ein Propellerflugzeug schafft dagegen in einer Flugzeit von 5 Stunden nur eine Strecke von 2125 km. Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges im Vergleich zu der des Propellerflugzeuges?

W(5)172 Jedes der zwanzig Klassenzimmer einer Schule ist mit der gleichen Anzahl an Stühlen ausgestattet. Aus jedem Klassenzimmer trägt man zehn Stühle in die Aula.

In den Klassenzimmern verbleiben danach insgesamt soviel Stühle, wie vorher in fünfzehn Zimmern standen. In den übrigen Räumen der Schule befinden sich außerdem noch zusammen 60 Stühle. Wieviel Stühle besitzt diese Schule insgesamt?

W(5)173 Eine Bibliothek mußte 1200 Bücher neu einbinden lassen. Drei Buchbindereien erklärten sich bereit, diesen Auftrag zu übernehmen. Die erste wollte den gesamten Auftrag in 12 Tagen, die zweite in 20 Tagen und die dritte in 30 Tagen erledigen. Um das Einbinden der Bücher so schnell wie möglich zu beenden, wurden die drei Werkstätten beauftragt, den Auftrag sofort gemeinsam zu übernehmen. Nach wieviel Tagen standen der Bibliothek diese Bücher wieder zum Verleih an die Leser zur Verfügung?

6 **174** Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5 u. 6 jeweils den Rest 1 läßt, aber durch 7 teilbar ist. Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solcher Zahlen erhalten kann.

175 Warum können zwischen zwei benachbarten Zahlen der Zehnerfolge 10, 20, 30, 40, ... nie mehr als vier Primzahlen liegen?

176 Eine Schülerin kauft in einem Schreibwarengeschäft 6 Hefte zu je 8 Pf, 4 Bleistifte zu je 18 Pf, 4 Hefte zu je 15 Pf und drei Kopierstifte. Der Verkäufer sagt ihr, daß sie 2,30 M zu zahlen habe. Ohne nachzurechnen, sagt das Mädchen, daß der Verkäufer sich verrechnet habe. Der Verkäufer rechnet nach und entdeckt seinen Fehler. Wie konnte die Schülerin, ohne nachzurechnen, diesen Fehler bemerken?

W(6)177 Die Länge der Seite $\overline{BC} = a$ eines Dreiecks ABC betrage 5 cm, die Länge der Seite $\overline{AC} = b$ dieses Dreiecks betrage 3 cm. Aus diesen beiden Stücken sollen alle diejenigen Dreiecke konstruiert werden, deren Maßzahlen der Längen ihrer Umfänge durch 3 teilbare natürliche Zahlen sind. Wieviel einander nicht kongruente Dreiecke dieser Art lassen sich konstruieren? Gib für jedes mögliche Dreieck die Länge der Seite $\overline{AB} = c$ und die Länge des zugehörigen Umfanges an.

W(6)178 Nach Abschluß eines Sportfestes vergleichen Heinz, Uwe, Gerd und Jochen ihre im Hochsprung erzielten Leistungen. Dabei ergibt sich folgendes: Jochen sprang höher als Gerd. Die Summe der Maßzahlen der Sprunghöhen von Heinz und Uwe war gleich der Summe der Maßzahlen der von Jochen und Gerd erreichten Höhen. Dagegen war die Summe der Maßzahlen der Sprunghöhen von Uwe und Gerd größer als die Summe der von Heinz und Jochen geschafften Höhen. Ordne auf Grund dieser Angaben die Schüler nach ihrer Sprungleistung, indem du mit dem Schüler, der am niedrigsten sprang, beginnst!

179 Ein Sohn fragt seinen Vater, wie alt er 7
sei. Der Vater antwortet: „Wenn du wärest auch so alt wie ich und halb so alt und ein Viertel so alt und ein Jahr dazu, so wärest du 134 Jahre alt.“ Wie alt ist der Vater? (Die Aufgabe ist einem Rechenbuch von Adam Ries, der von 1492 bis 1559 lebte, entnommen.)

180 Der Produktionsplan eines Betriebes sah vor, daß zehn Werkstücke in einer bestimmten Zeit hergestellt werden sollten. Durch Rationalisierungsmaßnahmen gelang es jedoch, in der gleichen Zeit zwölf Werkstücke zu produzieren; dadurch wurde die ursprünglich für die Herstellung eines dieser Werkstücke vorgesehene Zeit um zwei Minuten unterboten. Welche Zeit war für die Fertigung eines solchen Werkstückes ursprünglich geplant?

181 Die Summe von drei natürlichen Zahlen beträgt 185. Die zweite Zahl ist um 9 größer als die erste, die dritte Zahl ist um 19 kleiner als die erste Zahl. Wie groß sind die Zahlen?

W(7)182 Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, bei dem die Seite $\overline{BC}$ die Länge a, die zugehörige Seitenhalbierende die Länge s_a und die vom Eckpunkt C des Dreiecks ausgehende Höhe die Länge h_c hat. Welchen Bedingungen müssen die Größen a, s_a und h_c genügen, damit die Konstruktion ausführbar ist?

W(7)183 Die Schüler der Klassenstufe 7 einer Merseburger Oberschule, die drei Parallelklassen mit insgesamt 95 Schülern umfaßt, beschlossen, einen Wettbewerb durchzuführen! Das Ziel dieses Wettbewerbs war, die Leistungen in allen Fächern zu verbessern. Eine Zwischenauswertung des Wettbewerbs erfolgte auf Grund der Leistungskontrollen in den Fächern Deutsch, Mathematik und Russisch; sie ergab, daß mit Ausnahme eines Schülers alle übrigen Schüler in mindestens einem dieser drei Fächer bessere Noten als zuvor erreichten. Eine Leistungssteigerung erzielten — genau zwei Schüler nur im Fach Russisch, — genau drei Schüler nur im Fach Deutsch, — genau drei Schüler nur in den beiden Fächern Russisch und Mathematik, genau 6 Schüler nur in den beiden Fächern Deutsch und Mathematik, genau 50 Schüler nur in den beiden Fächern Russisch und Deutsch, genau 25 Schüler in allen drei Fächern. Ermittle aus diesen Angaben, wieviel Schüler insgesamt ihre Noten im Fach Mathematik verbesserten und wieviel Schüler nur in einem Fach, und zwar in Mathematik, ihre Leistungen steigerten!

Mathematikfachlehrer Waldemar Hermann, V.L.d.V
Altenburger OS, Merseburg

8 **184** Gegeben sind die beiden rationalen Zahlen

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$$

und $$b = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{99} \cdot \frac{99}{101}.$$

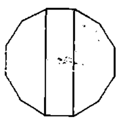
Es ist zu entscheiden, ob $a > b$, $a = b$ oder $a < b$ gilt. Ferner ist die Differenz $a - b$ zu berechnen.

185 Zwei Freunde, die in den 36 km voneinander entfernten Orten A und B wohnen, fahren gleichzeitig mit dem Fahrrad von ihren Wohnorten ab und auf der schnurgeraden Landstraße zwischen diesen Orten einander entgegen. In welcher Entfernung von dem Ort A werden sie einander treffen, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit fahren und sich die Geschwindigkeit des von A abfahrenden zu der Geschwindigkeit des von B abfahrenden Freundes wie $5 : 7$ verhält?

Volker Kugelberg 35. OS, Leipzig, Kl 7a

W(8)186 Vor zwei Jahren lasen wir in der Zeitung die folgende lustige Nachricht: „Als dieser Tage ein Kleintierhalter im Kreis Wittstock ein Huhn schlachtete, gab es neben dem Sonntagsbraten auch noch eine Summe Bargeld als Zusatz. Im Magen des Huhnes befanden sich nämlich 17 Münzen, insgesamt 34 Pfennig. Irren ist nicht nur menschlich.“ Wir nehmen an, daß die 17 Münzen gültige Münzen waren, also nur 1-Pfennigstücke, 5-Pfennigstücke, und 10-Pfennigstücke. Wieviel Münzen von jeder Sorte befanden sich in dem Magen des Huhns?

W(8)187 Ein regelmäßiges Zwölfeck ist, wie die nebenstehende Abbildung zeigt, in drei Teilfiguren zerlegt worden. Welche Teilfigur hat den größeren Flächeninhalt, die mittlere oder eine der beiden äußeren?



9 **188** Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - y^2 = a$$
$$x - y = b$$ anzugeben. (Fallunterscheidung!)

189 Der neue sowjetische Personenkraftwagen *Moskwitsch* erreicht 16 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 km/h.
a) Wieviel Meter hat er in dieser Zeit zurückgelegt, wenn man eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung annimmt?
b) In wieviel Sekunden nach dem Start erreicht der *Moskwitsch* die Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h, und wieviel Meter hat er in dieser Zeit zurückgelegt, wenn man wieder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung wie unter a) annimmt?

W(9)190 Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, bei dem die Summe aus der Länge einer Seite und der Länge der Höhe 7,5 cm beträgt.

Günther Mann, EOS Helmholtz, Leipzig, Kl. $10b_3$

W(9)191 Eine Familie besteht aus sieben Personen, nämlich dem Vater, der Mutter, einem Sohn, zwei Töchtern, einem Großvater und einer Großmutter. Alle zusammen sind 248 Jahre alt. Der Vater und der Sohn sind zusammen 62 Jahre alt. Vor drei Jahren war der Vater dreimal so alt wie der Sohn. Vor fünf Jahren war der Sohn doppelt so alt wie die ältere Tochter. In vier Jahren wird die Mutter dreimal so alt wie die ältere Tochter sein. In einem Jahr wird der Sohn dreimal so alt wie die jüngere Tochter sein. Der Großvater ist doppelt so alt wie seine drei Enkelkinder zusammen. Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Jutta Schmidt, EOS Helmholtz, Leipzig Kl. $10b_3$

192 Ein gerader Kreiskegel mit dem Grund- 10
kreisradius $r = 6$ cm und Höhe $h = 6$ cm wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in einen Kegel und einen Kegelstumpf zerlegt. Der Rauminhalt des Kegels verhält sich zu den Rauminhalt des Kegelstumpfes wie $1 : 7$. Wie groß ist der Abstand der Schnittebene von der Grundfläche des gegebenen Kegels?

OStR Dr. Rolf Lüders, Berlin

193 Für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b gilt

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2};$$

d. h., das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen a und b.
Beweisen Sie diese Behauptung a) algebraisch, b) geometrisch!

StR Dr. Walter Schramm, V.L.d.V. Berlin

W(10/12)194 Gegeben sind zwei reelle Zahlen, deren Differenz 6 und deren Produkt 91 beträgt. Wie lauten die Zahlen? Hat die Aufgabe mehrere Lösungen?

OStR Dr. Rolf Lüders, Berlin

Zweite Wettbewerbsaufgabe W(10/12)195 siehe Seite 21!

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

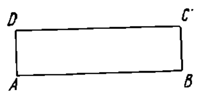
Aufgaben der Kreisolympiade (6./7.12.1967)

Klassenstufe 5

1. Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft.*
Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

2. Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.
Wie lautet z im Dezimalsystem?

3. Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit folgenden Seitenlängen: $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 2$ cm.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck $\triangle DAD_1$, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\sphericalangle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

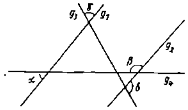
4. Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus: „Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten. Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben. Die Anzahl aller richtigen Lösungen (siehe Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen."

	I Anzahl der richtigen Lös. pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lös. insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

* In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.

Klassenstufe 6

1. Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abb. ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei
$\alpha = 50°$ $\beta = 130°$ $\gamma = 70°$. Ermittle δ!



2. Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm. Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muß, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

3. Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schußleistungen. Es ergab sich folgendes:
(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.
Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

4. Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben. Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.
Gib die Zahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

Klassenstufe 7

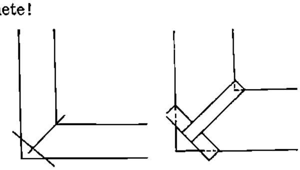
1. Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.
2. Horst sagte zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistellige Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen! Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!
3. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkte N.
Beweise, daß N der Mittelpunkt der Seite BC ist!
4. Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232.
In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzen dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als 1 Schüler saß.)

Klassenstufe 8

1. Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6. Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, daß die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.
2. Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$cm) Beide Kreise berühren einander von außen.
Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!
Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!
3. Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurfe zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.
Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!
4. Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geqq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

Klassenstufe 9

1. Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die
$m + n = 111$ gilt!
2. Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen $a + b \neq 3$; $a - b \neq 10$; $a \cdot b \neq 5$; $a : b \neq 18{,}75$. Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!
3. In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist. Die gesuchte Lösung ist (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter), die in der Abb. gezeichnete!



a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, daß diese Lösung richtig ist!
b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abb. gezeigten Lage haben?

(Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.)

4. Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umbeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

Klassenstufe 10

1. In

$$\begin{array}{r} \mathrm{FUENF} \\ +\ \mathrm{ZWEI} \\ \hline \mathrm{SIEBEN} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Untersuchen Sie, wieviele Lösungen die Aufgabe hat!

2. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit M und A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.
Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle SMC$!

3. Beweisen Sie, daß für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

4. Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, daß ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden. Auf die entstehende mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt. Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischebene an!

Klassenstufe 11/12

1. Tag

1. Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leqq x_k \leqq 2$ und $0 \leqq y_k \leqq 2$ erfüllen.

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k\,(x_k; y_k)$ wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!
(Dabei gelten zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ genau dann als gleich, wenn jede Ecke von $\triangle_1$ auch Ecke von $\triangle_2$ ist.)

b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

2. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat. Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter diesen Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

3. Beweisen Sie, daß für alle nicht negativen Zahlen a, b, c

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ac} + c^2 \cdot \sqrt{ab}$$

gilt!

2. Tag

4. Beweisen Sie, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

5. Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x\,(ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y\,(ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$.

6. Gegeben sei eine regelmäßige sechseckige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft. Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufen 5 bis 10 werden im Heft 4/68 veröffentlicht, d. Red.

Fortsetzung von S. 18:

W(10/12)195 Ein Autofahrer will in die Stadt fahren. An einer Straßenkreuzung, an der die Wegweiser fehlen, kann er seine Fahrt auf drei verschiedenen Wegen, die wir als a, b und c bezeichnen wollen, fortsetzen. Es führt jedoch nur einer dieser drei Wege in die Stadt. An der Straßenkreuzung stehen drei Personen, nämlich Klaus, Horst und Günter, die dem Autofahrer je drei Auskünfte geben:

Klaus:
1. Der Weg c führt nicht in die Stadt
2. der Weg b führt in die Stadt;
3. Horst macht immer wahre Aussagen.

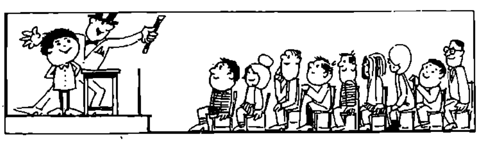
Horst:
1. Klaus irrt, wenn er sagt, der Weg b führe in die Stadt,
2. der Weg a führt in die Stadt;
3. Günter macht nie falsche Aussagen.

Günter:
1. Der Weg c führt in die Stadt;
2. Klaus macht immer falsche Aussagen;
3. Ich mache immer wahre Aussagen.

Nun wissen wir, daß von diesen drei Personen genau eine Person nur wahre Aussagen und genau eine Person nur falsche Aussagen gemacht hat. Welcher der drei Wege führt in die Stadt? Peter Euskonatus, stud. math., Berlin

Hinter die Kulissen geschaut!

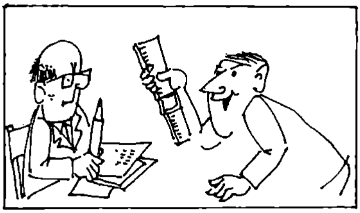
Jörg besuchte auf dem Rummelplatz seiner Heimatstadt eine Schaubude, in der unter anderem ein Zuschauer in einen Blumenstrauß verwandelt werden sollte. Jörg beobachtete: Nachdem im Zuschauerraum das Licht erloschen war, betrat die Versuchsperson einen auf der Bühne stehenden großen Kasten, in dessen erleuchtetes Oberteil man hineinsehen konnte. Ganz plötzlich war dann anstelle der Versuchsperson ein Strauß Kunstblumen zu sehen. Die Verwandlung war geglückt. Sauber gearbeitet, dachte Jörg. Die „Rückverwandlung“ wurde langsam vollzogen: Während der Blumenstrauß immer undeutlicher zu sehen war, wurde gleichzeitig die Versuchsperson zunächst verschwommen und dann immer deutlicher genau an der Stelle sichtbar, an der sich der Blumenstrauß „auflöste“. Die Rückverwandlung war noch imponierender!
Da Jörg aus diesen Beobachtungen das Rätsel nicht lösen konnte, besuchte er die Schaubude ein zweites Mal und meldete sich dabei als Versuchsperson. Er betrat den Kasten und bemerkte, daß er im Kasten von oben angeleuchtet wurde. Jetzt können mich also die Zuschauer sehen, dachte er . . . Da stand er mit einem Male im Dunkeln. Die ihn von oben anstrahlenden Lampen im Kasten mit schwarzen Innenwänden waren plötzlich erloschen. Die Zuschauer, so dachte er, meinen jetzt an der Stelle, an der ich mich befinde, einen Blumenstrauß zu sehen, der sich gar nicht hier befindet! Noch während sein Hirn diesen Gedanken verarbeitete, gewöhnten sich Jörgs Augen langsam an die Dunkelheit. Jörgs Gedanken arbeiteten schnell: „Mittels eines Spiegels muß den Zuschauern das Trugbild des Blumenstraußes vorgegaukelt werden.“ Wo kam der Spiegel plötzlich her?
„Ich verspürte keinen Luftzug und sah auch nichts sich bewegen.“ Endlich hatte Jörg den entscheidenden Gedanken: Eine Glasplatte läßt nicht nur Licht durch sich hindurchtreten, sondern wirkt zugleich ebenso wie eine Wasseroberfläche als Spiegel. „Sollte sich zwischen mir und dem Zuschauerraum eine Glasplatte befinden?“ Da er eine solche nicht erkennen konnte, tasteten seine Blicke die Seitenwände des Kastens ab. Kaum merklich erkannten seine Blicke an den Seitenwänden eine unter 45° gegen die Waagerechte geneigte Nut. „Aha, also doch! Eine Glasplatte ist des Rätsels Lösung!“ Jetzt begannen über ihm die Lampen langsam wieder aufzuflammen. Für die Zuschauer beginnt jetzt die „Rückverwandlung“, dachte er. Also müssen die Lampen, die den Blumenstrauß anleuchten, jetzt langsam erlöschen, schloß Jörg.

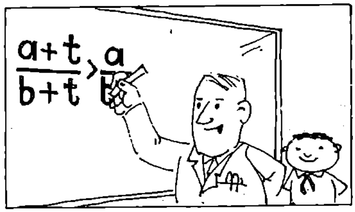


Zu Hause angelangt, fertigte sich Jörg eine Zeichnung des Kastens an, in die er die Versuchsperson, den Blumenstrauß und die Glasplatte einzeichnete. Probiert das auch! Überlegt euch weiterhin einen Schaltplan der elektrischen Anlage!

W. Träger

Eine schwierige Hausaufgabe





Neulich kam Herr Schlottermann zu Herrn Windwebel und klagte ihm sein Leid: „Es ist doch furchtbar, welche schwierigen Hausaufgaben die Schüler heutzutage lösen müssen. Da kam mein Enkel zu mir und bat mich, ihm zu helfen. Er sollte entscheiden, welche der beiden Zahlen

$$x = \frac{365\,000\,001}{783\,000\,001} \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{365\,000\,000}{783\,000\,000}$$

größer sei. Ich habe zwei Stunden lang gerechnet, mich dreimal verrechnet und schließlich

$$x = 0{,}4661558116\ldots \qquad \text{und} \qquad y = 0{,}4661558109\ldots$$

herausbekommen. Also ist wohl x größer als y.
Zu meiner Zeit waren die Schüler besser dran, da ging die Division immer auf, und der Divisor war höchstens dreistellig."
Darauf sagte Herr Windwebel: „Ich hätte das einfacher gemacht; ich hätte mit dem Rechenstab gerechnet und $x = y$ herausbekommen, und das stimmt ja auch ungefähr."
Herr Pfiffikus, der an dem Gespräch teilnahm, bemerkte dazu:
„Ihr beide habt von der Mathematik nicht viel Ahnung. Ihr rechnet entweder zu umständlich oder sogar falsch. So eine Aufgabe löst man nämlich einfacher mit Variablen. Sind a und b zwei positive reelle Zahlen mit $a < b$ und ist t eine positive reelle Zahl, so würde aus

$$\frac{a+t}{b+t} \leqq \frac{a}{b} \text{ folgen}$$

$$(a+t)\,b \leqq a\,(b+t),$$

$$ab + bt \leqq ab + at,$$

$$(b-a)\,t \leqq 0.$$

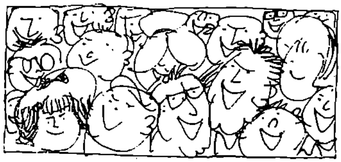
Das ist aber ein Widerspruch, weil $b - a$ und t positive Zahlen sind. Also gilt

$$\frac{a+t}{b+t} > \frac{a}{b}, \text{ d. h., in unserem Falle } x > y,$$

womit ohne eine umständliche Rechnung die gestellte Aufgabe gelöst ist."

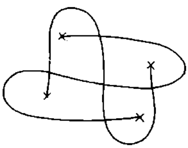
R. Lüders

In freien Stunden alpha heiter



Ein Trick

Stelle deinen Freunden folgende Aufgabe: In der Ebene sind 4 Punkte gegeben (Eckpunkte eines Rechtecks). Je zwei Punkte sollen durch einen Linienzug derart verbunden werden, daß jeder der 4 Punkte eingeschlossen ist. Ihr könnt die Lösung sogar verraten, trotzdem wird man die Linienzüge kaum nachzeichnen können.



Raten und Rechnen

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, daß in den Zeilen und Spalten wahre Aussagen entstehen.

ba	:	c	=	d
+		:		+
b	·	b	=	c
bc	:	b		eb

Waltraut Kühne, EOS Helmholtz, Leipzig, Kl. 10b₂

Für „Junge Gärtner“

Ein Platz, der die Form eines regelmäßigen Sechseckes hat, soll so mit Bäumen bepflanzt werden, daß auf jeder der sechs Seiten drei Bäume stehen. Wieviele Möglichkeiten der Anordnung gibt es? (Spiegelungen und Drehungen bleiben unberückrücksichtigt!)

Jäger und Hasen

Auf einer Hasenjagd stellte man nach dem ersten Kessel fest, daß man die Schützen genau in Gruppen zu je drei Mann ordnen konnte, so daß jeder Erste einer jeden Gruppe genau einen, jeder Zweite genau zwei und jeder Dritte genau drei Hasen geschossen hatte. Außerdem sei bekannt, daß gerade jeder dritte Hase aller im Kessel vorhandenen Hasen geschossen wurde. In welchem Verhältnis standen Jäger und Hasen?

Erika bekommt den falschen Brief

Klaus schreibt 5 Briefe und die 5 notwendigen Briefumschläge. Als er die Briefe verschlossen hat, weiß er nicht mehr genau, ob er die Briefe richtig in die Umschläge gesteckt hat.
Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Briefe falsch einzustecken, so daß kein Brief im richtigen Umschlag steckt?

Aus dem Physikunterricht

Der Lehrer fragt die Schüler, bei welcher Temperatur Wasser siedet und erhält von einem Schüler die Antwort: „Wasser siedet bei 90°!“ Er berichtigt das falsche Ergebnis, worauf der Schüler sagt: „Natürlich, ich hatte das verwechselt mit dem rechten Winkel!“

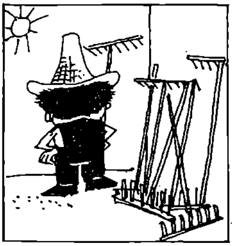
Anekdote

Während der Vorlesung soll der Berliner Mathematiker *E. E. Kummer* (29. 1. 1810 bis 14. 5. 1893) einmal auf die schwierige Aufgabe 7 · 9 gestoßen sein.
Er bittet die Studenten um Hilfe. Einer ruft: „62“, ein anderer: „65“. Prof. Kummer: „Aber meine Herren, das ist doch unmöglich, 7 · 9 kann doch nur 62 *oder* 65 sein!“

Zu jedem der 12 mathematischen Begriffe ist die jeweilige Figur zu suchen. Die Buchstaben ergeben — aneinandergereiht — einen im FDJ-Leben wichtigen Begriff.

W. Weber, EOS Schkeuditz bei Leipzig, Mathematikfachl.

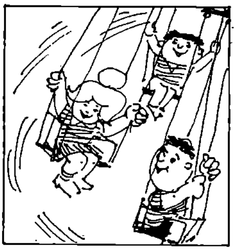
1 Archimedische Spirale	7 Pyramide
2 Astroide	8 Sehnentangentenwinkel
3 Bogen	9 Sekante
4 Diagonale	10 Satz des Thales
5 Innenwinkel	11 Trapez
6 orthogonale Geraden	12 Umkreis



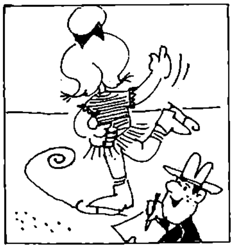
Rechenzentrum

Wurzelkriterium

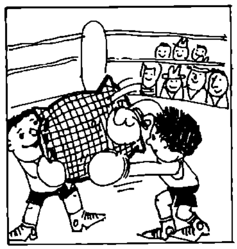
unendlich ferner Punkt



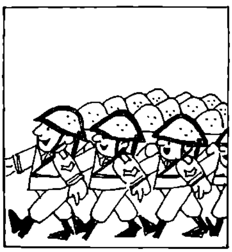
Rotationskörper



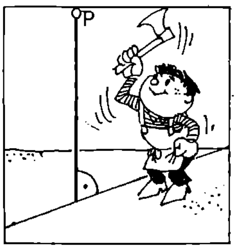
Kurvendiskussion



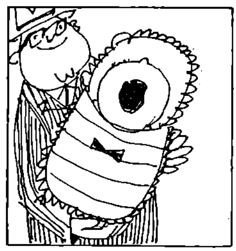
gedämpfte Schwingung



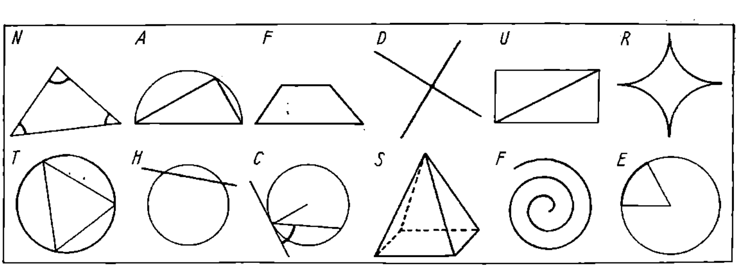
wohl geordnete Menge



das Lot fällen



k. g. V.



Lösungen

102 Wir können diese Aufgabe durch systematisches Probieren leicht lösen. Denn die zweite Bäuerin hat, da bei Division durch 10 jeweils der Rest 7 verbleibt,
7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87 oder 97 Eier.
Dann hätte die erste Bäuerin
93, 83, 73, 63, 53, 43, 33, 23, 13 oder 3 Eier, da die Gesamtzahl der Eier 100 beträgt. Unter den Zahlen der zweiten Zeile lassen aber nur die Zahlen 63 und 23 bei Division durch 8 den Rest 7.
Die Aufgabe hat daher die folgenden beiden Lösungen:

a) Die erste Bäuerin hat 63 Eier, die zweite 37 Eier.
b) Die erste Bäuerin hat 23 Eier, die zweite 77 Eier.

Bemerkung: Das obige Verfahren ist nur dann brauchbar, wenn nicht zu viele Fälle untersucht werden müssen. Euler gibt daher ein anderes Verfahren an, das im Prinzip stets anwendbar ist:
Die erste Bäuerin habe $8x + 7$ Eier und die zweite $10y + 7$ Eier. Dann ist

$$\begin{aligned} 8x + 7 + 10y + 7 &= 100 \\ 8x &= 86 - 10y, \\ 4x &= 43 - 5y \\ &= 40 + 3 - 4y - y, \\ x &= 10 - y - \frac{y-3}{4}. \end{aligned}$$

$y - 3$ ist also durch 4 teilbar; man setzt daher $y - 3 = 4z$ und erhält $y = 4z + 3$
$x = 10 - (4z + 3) - z = 7 - 5z.$
Da x eine positive ganze Zahl ist, sind nur die Fälle $z = 0$ und $z = 1$ möglich. Man erhält daher:
I. $z = 0$: $x = 7$, $y = 3$. Die erste Bäuerin hat 63 Eier, die zweite 37 Eier.
II. $z = 1$: $x = 2$, $y = 7$. Die erste Bäuerin hat 23 Eier, die zweite 77 Eier.

103 Euler gibt hier zwei Lösungswege an; die folgende Lösung ist besonders elegant: Es seien x und y die gesuchten positiven reellen Zahlen; dann gilt:

$$x + y = xy, \tag{1}$$
$$x^2 - y^2 = x + y. \tag{2}$$

Aus (2) folgt
$(x + y)(x - y) = x + y$ und, da
$x + y \neq 0$ ist, $x - y = 1$, d. h., $y = x - 1$.
Man erhält daher aus (1)

$$x + x - 1 = x(x - 1),$$
$$x^2 - 3x + 1 = 0. \tag{3}$$

Die quadratische Gleichung (3) ist erfüllt, wenn entweder

a) $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, d. h.,
$y = x - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ oder
b) $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, d. h., $y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ist.

Nur die Lösung zu a) entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Man erhält für $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2{,}618$ und
$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$
$x + y = xy = x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}.$
Im Fall b) ist $y < 0$, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

104 Es sei x die Anzahl der Pferde und y die Anzahl der Ochsen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 31x + 21y &= 1770 \\ 21y &= 1770 - 31x \\ &= 1764 + 6 - 21x - 10x, \\ y &= 84 - x - \frac{10x - 6}{21}. \end{aligned}$$

$10x - 6$ ist also durch 21 teilbar, mithin auch $5x - 3$.
Man setzt daher $21z = 5x - 3$
und erhält $y = 84 - x - 2z,$

$$x = \frac{21z + 3}{5} = 4z + \frac{z + 3}{5}.$$

Man setzt ferner $5u = z + 3$, d. h., $z = 5u - 3$ und erhält

$$x = 4(5u - 3) + u = 21u - 12,$$
$$y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u.$$

Da y eine positive Zahl ist und u wegen $z = 5u - 3$ nicht gleich Null sein kann, sind nur die Fälle $u = 1$, $u = 2$ und $u = 3$ möglich.
Man erhält daher die folgenden drei Lösungen
1. $u = 1$: $x = 9$, $y = 71$,
2. $u = 2$: $x = 30$, $y = 40$,
3. $u = 3$: $x = 51$, $y = 9$.
Man überzeugt sich leicht davon, daß in allen drei Fällen $31x + 21y = 1770$ ist.

W(5)106 Es gilt:
$1680 : 4 = 420$; $2 \cdot 420 - 185 = 655$;
$1680 - (420 + 655) = 605$.
Die Jungen Pioniere der 4. Klasse sammelten 420, die der 5. Klasse 655 und die der 6. Klasse 605 Flaschen.

W(6)107 Zwischen den 5 Schlägen der Uhr liegen vier Zeitintervalle von je $1\frac{1}{4}$ Sekunden Dauer, da $5 : 4 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Zwischen den 10 Schlägen liegen neun Zeitintervalle von je

$1\frac{1}{4}$ Sekunden Dauer. Aus $9 \cdot \frac{5}{4} = 11\frac{1}{4}$ folgt, daß die Uhr zu den 10 Schlägen um 10 Uhr die Zeit von $11\frac{1}{4}$ Sekunden benötigt.

W(7)108 Beim Numerieren der Seiten des Lehrbuches werden die Zahlen von 3 bis 195 gedruckt. Für die Zahlen von 3 bis 9 benötigen wir 7 Ziffern; für die Zahlen von 10 bis 99 braucht man $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern; für die Zahlen von 100 bis 195 dagegen $96 \cdot 3 = 288$ Ziffern; das sind insgesamt 475 Ziffern. Die Ziffer 0 kommt dabei 29mal vor.

W(8)109 Ist x die Anzahl der Äpfel, die die Frau geerntet hat, so erhält der erste Wächter $\frac{x}{2}$, der zweite $\frac{x}{4}$, der dritte $\frac{x}{8}$ und der vierte Wächter $\frac{x}{16}$ Äpfel. Nun gilt:

$$\frac{x}{16} = 10, \text{ also } x = 160.$$

Die Frau hat 160 Äpfel geerntet.

W(9)110 Bezeichnet man die Anzahl der Goldmedaillen, die die einzelnen Länder erhielten, in der gegeben Reihenfolge mit s, d, n, f, g und i, so gilt

$$i + g + f + n + d + s = 23, \quad (1)$$
$$s \geqq 12, \quad (2)$$

also $$i + g + f + n + d \leqq 11. \quad (3)$$

Andererseits ist wegen $i = g \geqq 1$, $f \geqq 2$, $n \geqq 3$, $d \geqq 4$

$$i + g + f + n + d \geqq 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $i + g + f + n + d = 11$. Das ist aber nur möglich, wenn

$$i = g = 1, \quad f = 2, \quad n = 3, \quad d = 4, \quad s = 12 \text{ ist.}$$

Es erhielten also die UdSSR 12, die DDR 4, die Niederlande 3, Frankreich 2, Großbritannien 1 und Italien 1 Goldmedaillen.

W(10)111 Die Geschwindigkeit des Schiffes flußaufwärts beträgt

$$\frac{8{,}6}{\frac{55}{60}}\,\text{km/h} = \frac{8{,}6 \cdot 60}{55}\,\text{km/h} = 9{,}38\,\text{km/h},$$

dagegen flußabwärts

$$\frac{8{,}6}{\frac{30}{60}}\,\text{km/h} = \frac{8{,}6 \cdot 60}{30}\,\text{km/h} = 17{,}20\,\text{km/h}.$$

Bezeichnet man die Maßzahl der Geschwindigkeit (in km/h) des Schiffes in ruhendem Gewässer mit x und die Maßzahl der Strömungsgeschwindigkeit mit y, so gilt

$$x - y = 9{,}38,$$
$$x + y = 17{,}20;$$

also $2x = 26{,}58$, $x = 13{,}29$ und $y = 3{,}91$. Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt also 3,91 km/h, die Geschwindigkeit des Schiffes in ruhendem Gewässer 13,29 km/h.

Lösungen: Mathematikolympiade, Schulstufe, Sofia 1967

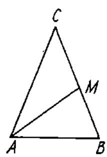
Klassenstufe 5

1. $[6264 - (4690 + 56 \cdot 112 - 5360)] \cdot 101 - 16862 = [6264 - (4690 + 6272 - 5360)] \cdot 101 - 16862 = (6264 - 5602) \cdot 101 - 16862 = 662 \cdot 101 - 16862 = 66862 - 16862 = \underline{\underline{50000}}$

$50000 : 125 = \underline{\underline{400}}$

W(5)112 Die Zahl der Schüler dieser Klasse muß durch 6 und durch 4 teilbar sein; die Klasse umfaßt weniger als 50 Schüler. Es kommen also nur die folgenden Zahlen in Betracht: 12, 24, 36, 48. Scheidet ein Schüler aus der Marschkolonne aus, so verbleiben für die Anzahl der übrigen Schüler nur die folgenden Möglichkeiten: 11, 23, 35, 47. Von diesen Zahlen ist nur die Zahl 35 durch 5 teilbar. Die Klasse umfaßt daher 36 Schüler.

3. Für das gleichschenklige Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{MC}$; $\overline{AC} + \overline{MC} = 3 \cdot \overline{MC}$; $3 \cdot \overline{MC} = 15$ cm; $\overline{MC} = 5$ cm.



Jeder Schenkel des Dreiecks ist also 10 cm lang. $\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \overline{MC}$; $\overline{AB} + \overline{MC} = 11$ cm; $\overline{AB} = 6$ cm.
Die Basis des Dreiecks ist 6 cm lang.

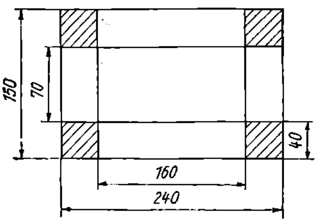
Klassenstufe 6

1. $$3{,}7 + \frac{3}{2}\left(2{,}04 - \frac{47}{30} + \frac{3}{50}\right) \cdot [19{,}21 - (4{,}26 - 0{,}35)]$$
$$= 3{,}7 + \frac{3}{2}\left(\frac{102}{50} + \frac{3}{50} - \frac{47}{30}\right) \cdot (19{,}21 - 3{,}91)$$
$$= 3{,}7 + \frac{3}{2}\left(\frac{21}{10} - \frac{47}{30}\right) \cdot 15{,}3$$
$$= 3{,}7 + \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{153}{10}$$
$$= 3{,}7 + 12{,}24 = 15{,}94$$
$$15{,}94 \cdot \frac{3}{20} = 15{,}94 \cdot 0{,}15 = 2{,}391.$$

W(6)113 0,5 t Rosenblüten liefern 1 kg Rosenöl, 0,1 t Rosenblüten liefern 0,2 kg Rosenöl, 0,8 t Rosenblüten liefern 1,6 kg Rosenöl. 0,001 kg Rosenöl ergeben 25 Tropfen Rosenöl, 1,6 kg Rosenöl ergeben 40000 Tropfen Rosenöl. 2 Tropfen Rosenöl werden für 1 l Parfüm benötigt, 40000 Tropfen Rosenöl sind in 20000 l Parfüm enthalten.

Es lassen sich also 200 hl Parfüm herstellen.

3. $A = (24 \cdot 15 - 4 \cdot 4^2)\ \text{cm}^2$
$\quad = (360 - 64)\ \text{cm}^2 = 296\ \text{cm}^2;$
$V = 7 \cdot 16 \cdot 4\ \text{cm}^3 = 448\ \text{cm}^3.$



Zur Herstellung des Kastens werden 296 cm² Zinkblech benötigt; er faßt 448 cm³, das sind 0,448 l Flüssigkeit.

Klassenstufe 7

$$1.\ z = \left(0{,}3a - \frac{1}{3} - b - \frac{a}{3} - \frac{2}{3} + b\right) - \left[4{,}6c^2 - 201{,}75a^3 + 7 - \left(7 + \frac{a^3}{4} - 8{,}5c^2 - d\right)\right]$$
$$= \left(-\frac{1}{30}a - 1\right) - \left(4{,}6c^2 - 201{,}75a^3 + 7 - 7 - \frac{a^3}{4} + 8{,}5c^2 + d\right)$$
$$= -\frac{1}{30}a - 1 - (13{,}1c^2 - 202a^3 + d)$$
$$= -\frac{1}{30}a - 1 - 13{,}1c^2 + 202a^3 - d$$
$$= 202a^3 - \frac{1}{30}a - 13{,}1c^2 - d - 1.$$

Für die Belegung mit $a = -0{,}1$, $c = 3\frac{1}{3}$ und $d = -1\frac{1}{9}$ erhalten wir:

$$z_1 = 202 \cdot (-0{,}1)^3 - \frac{1}{30} \cdot (-0{,}1) - 13{,}1 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(-\frac{10}{9}\right) - 1 = -0{,}202 + \frac{1}{300} - \frac{1310}{9} + \frac{10}{9}$$
$$- 1 = -0{,}202 + \frac{1}{300} - \frac{1300}{9} - 1 = -1{,}202$$
$$- \frac{129997}{900} = -1{,}202 - 144{,}44\overline{1} \approx -145{,}643.$$

2. Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich:

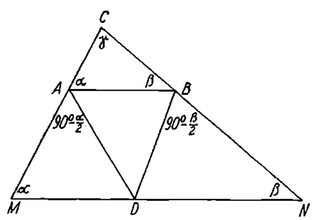
$\sphericalangle\, CAB = \sphericalangle\, AMD = \alpha$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);

$\sphericalangle\, CBA = \sphericalangle\, BND = \beta$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);

$\sphericalangle\, MAD = \sphericalangle\, DAB = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ (die Gerade AD halbiert den Winkel MAB);

$\sphericalangle\, NBD = \sphericalangle\, DBA = 90° - \frac{1}{2}\beta$ (die Gerade BD halbiert den Winkel NBA);

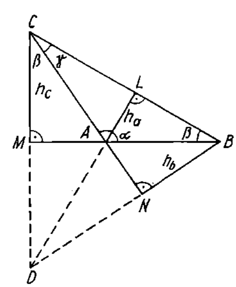
$$\sphericalangle MDA = 180° - \left(\alpha + 90° - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90° - \frac{1}{2}\alpha;$$
$$\sphericalangle NDB = 180° - \left(\beta + 90° - \frac{1}{2}\beta\right) = 90° - \frac{1}{2}\beta.$$



Daraus folgt: $\sphericalangle\, MAD = \sphericalangle\, MDA$ und $\sphericalangle\, NBD = \sphericalangle\, NDB$.

Die Dreiecke MDA und DNB sind also gleichschenklig; es gilt $\overline{AM} = \overline{DM}$ und $\overline{BN} = \overline{DN}$. Damit gilt die Beziehung $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN}$ bzw. $\overline{MN} = \overline{AM} + \overline{BN}$.

W(7)114 Die Summe der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 90°.



Für das rechtwinklige Dreieck MBC gilt: $\sphericalangle\, BCM = 90° - \beta$. Für das rechtwinklige Dreieck LCD gilt: $\sphericalangle\, BCM + \sphericalangle\, CDL = 90°$. Daraus folgt: $\sphericalangle\, CDL = \beta$.
Für das rechtwinklige Dreieck NBC gilt: $\sphericalangle\, NBC = 90° - \gamma$. Für das rechtwinklige Dreieck LDB gilt: $\sphericalangle\, NBC + \sphericalangle\, LDB = 90°$. Daraus folgt: $\sphericalangle\, LDB = \gamma$.
Die verlängerten Höhen h_a und h_c schließen den Winkel β ein; die verlängerten Höhen h_a und h_b schließen den Winkel γ ein; die verlängerten Höhen h_b und h_c schließen den Winkel $\beta + \gamma$ ein.

W(8)115 Das Passagierflugzeug habe die mittlere Geschwindigkeit v km/min und benötigt die Flugzeit t min. Dann hat das Militärflugzeug die mittlere Geschwindigkeit $2{,}5v$ km/min und benötigt die Flugzeit $(t - 35)$ min. Man erhält die Gleichung

$$tv = (t - 35)\, 2{,}5v = 400,$$

also

$$t = 2{,}5t - 87{,}5,$$

$$1{,}5t = 87{,}5, \quad \text{d. h.,} \quad t \approx 58{,}3.$$

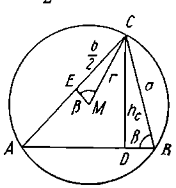
Das Passagierflugzeug landet also in Varna um 11,58 Uhr, das Militärflugzeug um 11,53 Uhr.
Aus (1) erhält man ferner

$$v = \frac{400}{t} \approx \frac{400}{58{,}3} \approx 6{,}86.$$

Die mittlere Geschwindigkeit des Passagierflugzeuges betrug also rd. 6,86 km/min, d. s. rd. 412 km/h und die mittlere Geschwindigkeit des Militärflugzeuges rd. 1030 km/h.

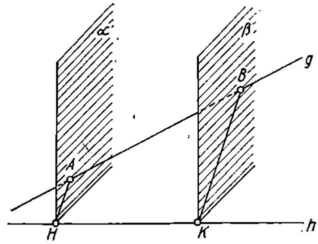
W(9)116 Es seien ABC ein Dreieck, M der Mittelpunkt seines Umkreises, r die Maßzahl des Radius des Umkreises, h_c die Maßzahl der Höhe $\overline{CD}$, sowie a und b die Maßzahlen der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. E sei der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke DBC und EMC

$$a : h_c = r : \frac{b}{2}, \quad \text{also } ab = 2r \cdot h_c, \text{ w. z. b. w..}$$

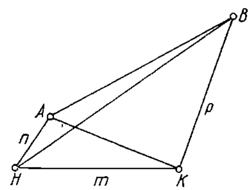


Die verlangte Konstruktion ist sehr einfach. Man zeichnet einen Kreis mit den gegebenen Durchmesser, nimmt auf der Peripherie einen beliebigen Punkt C an und schlägt um C Kreise mit den Radien b und a, die den Kreis in A bzw. B schneiden. ABC ist dann das verlangte Dreieck.

W(10)117 Es sei α eine Ebene, die senkrecht auf der Geraden h steht und durch den Punkt A geht. Dann ist H der Schnittpunkt von h mit α. Ferner sei β eine Ebene, die senkrecht auf der Geraden h steht und durch den Punkt B geht. Dann ist K der Schnittpunkt von h mit β. (In der Abb. sind die Ebenen α und β durch Schraffur angedeutet).



a) Die Punkte H und K fallen zusammen, wenn die Ebenen α und β zusammenfallen, d. h., wenn die Gerade g orthogonal (senkrecht) zur Geraden h verläuft.
b) $AH \parallel BK$, wenn die Geraden g und h in einer Ebene liegen.
c) Die Geraden AH und BK fallen zusammen, wenn die Geraden g und h einander schneiden und senkrecht aufeinander stehen.
d) Da die Fälle a), b) und c) nicht zutreffen, sind die Geraden h und g zusammen windschief. Man legt daher durch h eine Ebene, auf der g senkrecht steht. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit g ist der gesuchte Punkt A.



e) Das Viereck $AHKB$ (vgl. Abb.) ist nicht notwendig ein ebenes Viereck; jedoch sind die Dreiecke

AHK mit $\sphericalangle\, AHK = 90°$,
HKB mit $\sphericalangle\, HKB = 90°$
und BAH mit $\sphericalangle\, BAH = 90°$ nach Voraussetzung rechtwinklig. Man erhält daher

$$\overline{AK} = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad \overline{BH} = \sqrt{m^2 + p^2},$$
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 - n^2} = \sqrt{m^2 + p^2 - n^2}.$$

118 $20 \cdot 4 = 80$; mit dem ersten Lkw wurden 80 t Ware befördert. $170 - 80 = 90$; mit dem zweiten Lkw wurden 90 t Ware befördert. $90 : 5 = 18$; der zweite Fahrer machte 18 Fahrten.

119 810 t sind 8100 dt; 640 t sind 6400 dt. 8100 : 180 = 45; das erste Feld ist 45 ha groß. 6400 : 200 = 32; das zweite Feld ist 32 ha groß. Das erste Feld ist um 13 ha größer als das zweite.

120 Aus $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ folgt, daß der Quader in 60 Würfel zerschnitten wurde. Bei 8 Würfeln waren drei, bei 24 Würfeln waren zwei, bei 22 Würfeln war eine quadratische Fläche gefärbt. Bei 6 Würfeln war die Oberfläche ungefärbt.

121 Es seien α und β die beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks; aus $\alpha + \beta = 90°$ und $\alpha = 2\beta$ folgt $\beta = 30°$. Die Winkel des Dreiecks betragen also 30°, 60° und 90°.

122
$$\begin{aligned} &107 \cdot \{700 - [48 - 72 : 9] \cdot 5 - 495\} - 135 \\ &= 107 \cdot \{700 - [48 - 8] \cdot 5 - 495\} - 135 \\ &= 107 \cdot \{700 - 200 - 495\} - 135 \\ &= 107 \cdot 5 - 135 = 535 - 135 = 400. \end{aligned}$$

123

	Bruttogewicht	Tara	Nettogewicht
1. Behälter	12,500 kg	2,375 kg	10,125 kg
2. Behälter	11,750 kg	2,375 kg	9,375 kg

19,5 — 9,8 = 9,7; dem Koch standen am zweiten Tag noch 9,7 kg Fleisch zur Verfügung.

124 $0{,}3 : \frac{3}{200} = 20$; bei Planerfüllung hätte der Betrieb für 20 Millionen Rubel Waren erzeugt.

125 $A = 4 \cdot \frac{g \cdot h}{2} = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 2{,}8 = 21{,}28$

Zur Anfertigung des Zeltes wurden 21,28 m² Stoff verbraucht.

126 $\frac{23{,}4}{11{,}7} + \frac{1{,}5}{1{,}2} = 2 + \frac{5}{4} = 3\frac{1}{4}$

127 $V = \pi r^2 h;\quad h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{12}{\pi \cdot 1{,}41^2} \approx 2\,.$

Die Höhe des Wasserspiegels über der Grundfläche beträgt nahezu 2 dm.

128 Aus $u = 2\pi r$ folgt $r = \frac{u}{2\pi}$ und $r^2 = \frac{u^2}{4\pi^2}$

Aus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ und $r^2 = \frac{u^2}{4\pi^2}$ folgt

$V = \frac{u^2 h}{12\pi} = \frac{625}{3\pi}$.

Das Gewicht des kegelförmig aufgeschütteten Schotters beträgt demnach $G = \frac{375}{\pi}$ Tonnen.

Aus $x : 100 = \frac{375}{\pi} : 3{,}5$ folgt $x = \frac{75000}{7\pi}$.

$\frac{75000}{7\pi} : 6 \approx 570$.

Mit dem vorrätigen Schotter können ungefähr 570 m Straßenlänge asphaltiert werden.

129 Im ersten Speicher lagerten ursprünglich x Tonnen, im zweiten $p - x$ Tonnen Korn. Dem ersten Speicher wurden $a \cdot t$ Tonnen, dem zweiten $b \cdot t$ Tonnen Korn entnommen.

$$\begin{aligned} x - at &= p - x - bt \\ 2x &= at - bt + p \\ x &= \frac{1}{2}[t(a - b) + p]. \end{aligned}$$

Im ersten Speicher lagerten ursprünglich $\frac{1}{2}[p + t \cdot (a - b)]$ Tonnen, im zweiten

$p - \frac{1}{2}[t \cdot (a - b) + p] = \frac{1}{2}[p - t(a - b)]$

Tonnen.

130 $3 + 2 + 2 = 7;\quad 2{,}8 : 7 = 0{,}4;$
$3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2;\quad 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8.$

2,8 kg der Mischung enthalten 1,2 kg Kalk, 0,8 kg Roggenmehl und 0,8 kg Öl.

Gedenktage

Georg Cantor (3. 3. 1845 bis 6. 1. 1919)
(Siehe unsere Beiträge in Heft 1, 2, 3/67)
Wirkte in Halle. Schöpfer der Mengenlehre.

Hendrik A. Lorentz (18.7.1853 bis 4.2.1928)
Wirkte in Leyden. Schöpfer der klassischen Elektronentheorie und der Bewegungsgleichung des Elektrons. Durch seine Arbeiten zur Elektrodynamik ist er der unmittelbare Vorgänger Einsteins in der Relativitätstheorie.

David Hilbert (23. 1. 1862 bis 14. 2. 1943)
Wirkte in Königsberg und Göttingen. Seine grundlegenden Arbeiten auf fast allen Gebieten der Mathematik waren für deren weitere Entwicklung von tiefgehendem Einfluß, insbesondere waren es die 23 mathematischen Probleme, auf die H. in seinem aufsehenerregenden Pariser Vortrag (1900) hingewiesen hat und die das Interesse der mathematischen Welt bis heute besitzen.

Edmund Landau (14. 2. 1877 bis 19. 2. 1938)
Wirkte hauptsächlich in Göttingen. Grundlegende Arbeiten zur analytischen Zahlentheorie und zur Funktionentheorie. Verfasser des *Handbuches über die Verteilung der Primzahlen.*

Gekürzt aus: J. Naas, H. L. Schmidt, Mathematisches Wörterbuch

Wissen, wo ...

Eine Anleitung zum Selbststudium

(Siehe Artikel Heft 2/67, S. 48/49)

alpha (Zeitschrift alpha)

2/67	*Wissen, wo ... (Eine Anleitung zum Selbststudium)*	*H. Herzog / J. Lehmann*

***alpha*-Wettbewerb**

1/67	*Bedingungen und Hinweise*	*Redaktion*
4/67	*Bedingungen und Hinweise*	*Redaktion*
6/67	*Information zum alpha-Wettbewerb, Vorstellung der Jury*	

Ähnlichkeitslehre

4/67	*Guter Mond, du gehst so stille ...*	*L. Görke*

Berichte

1/67	*Bericht über die VIII. IMO 1966*	*J. Lehmann*
1/67	*Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten*	*S. Günther*
1/67	*Internationaler Mathematikerkongreß 1966 (Moskau)*	*D. Ziegler*
2/67	*alpha berichtet aus aller Welt*	
2/67	*Mathematischer Leistungsvergleich Praha – Neubrandenburg*	*J. Lehmann*
3/67	*Mathematischer Mannschaftswettbewerb*	*M. Mäthner / G. Schulze*
3/67	*Schwankt der Fernsehturm?*	*W. Zill*
3/67	*Der Berliner Fernsehturm*	*W. Zill*
3/67	*Mathematische Wettbewerbe in England*	
4/67	*Auf den Spuren Roald Amundsens*	*S. Meier*
4/67	*Mathematikolympiaden in Bulgarien*	*S. Bodurow*
5/67	*Nowosibirsk*	*W. Friedrich*
5/67	*Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR*	*O. Prinits*
5/67	*Aus der Sowjetunion berichtet*	
5/67	*Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk)*	*H. Werner*
6/67	*Als Diplommathematiker in Dubna*	*G. Laßner*
6/67	*Als Mathematiklehrer in Tansania*	*H. Büchel*
6/67	*Ernährung und Leistungsfähigkeit*	*W. Kraack*

Berufe

3/67	*Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium*	*W. Zill*
6/67	*Als Diplommathematiker in Dubna*	*G. Laßner*
6/67	*Als Mathematiklehrer in Tansania*	*H. Büchel*

Beweise

2/67	*Beweise durch vollst. Induktion (1)*	*W. Stoye*
3/67	*Beweise durch vollst. Induktion (2)*	*W. Stoye*

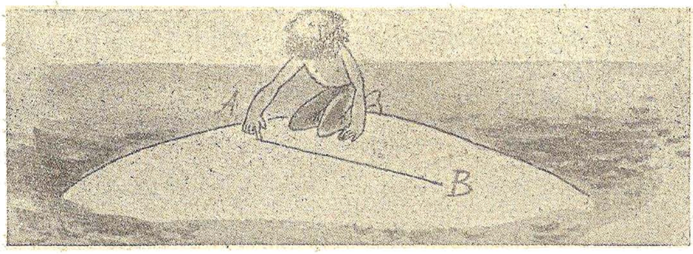
Biographien

2/67	*G. Leibniz als Mathematiker (250. Todestag)*	*W. Purkert*

Schlagwortübersicht

HUGO STEINHAUS **100 Aufgaben** (Arbeitstitel)

Übersetzung aus dem Polnischen
1. Auflage 1968, etwa 240 Seiten, etwa 125 zweifarbige Zeichnungen im Text, 12,5 cm × 20 cm, Halbleinen zelloph. etwa 7,50 M
Erscheint voraussichtlich im 2. Halbjahr 1968



Diese Sammlung elementarer Aufgaben soll den Leser in die Praxis jener universellen Methoden der Behandlung von Erscheinungen einführen, welche die Griechen „Mathematik" nannten; sie soll ihm den Übergang von der Praxis der Schule zur modernen Mathematik erleichtern und ihm diese Wissenschaft an einem Stoff zeigen, der ihm zugänglich ist. Dementsprechend ist diese Sammlung von „100 Aufgaben" vor allem für fortgeschrittene Schüler und Lehrer bestimmt. Der Autor bemühte sich, Aufgaben zu stellen, die ganz naturgemäß aus geometrischen Erscheinungen oder aus realen Umständen hervorgehen, und die so die Aufmerksamkeit auf die Wechselbeziehungen der Mathematik mit der Wirklichkeit lenken.

Die vollständigen Lösungen sind jeder Aufgabe beigegeben und lassen den Geist und die Tendenzen der modernen Mathematik erkennen.

URANIA-VERLAG LEIPZIG · JENA · BERLIN

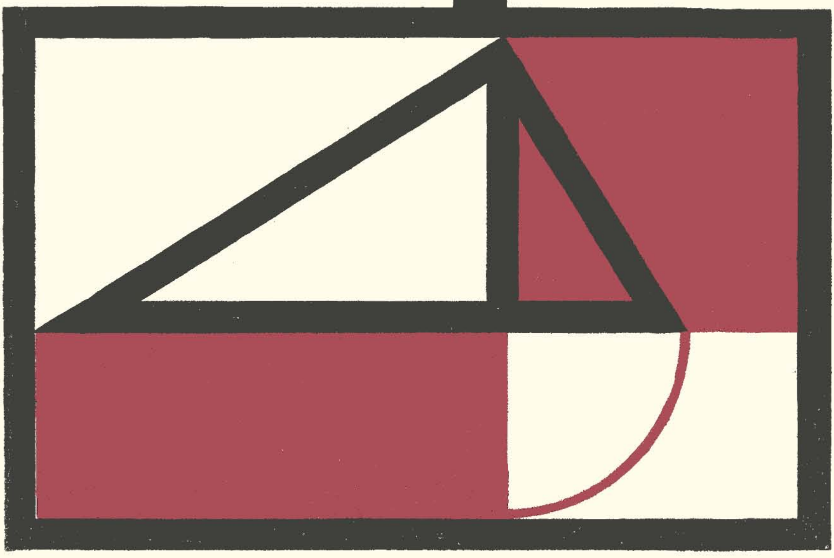
Eine Aufgabe aus dem Buch lautet:

Ein Wort ist zu erraten

Dr. Sylvester X gab öffentlich bekannt, daß er jedes beliebige Wort erraten würde, wenn man ihm zwanzig Fragen stellen ließe, auf die mit *ja* oder *nein* zu antworten wäre, und wenn das fragliche Wort im Wörterbuch stünde.
Wie kann er seine Behauptung begründen?

Mathematische Schüler-zeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

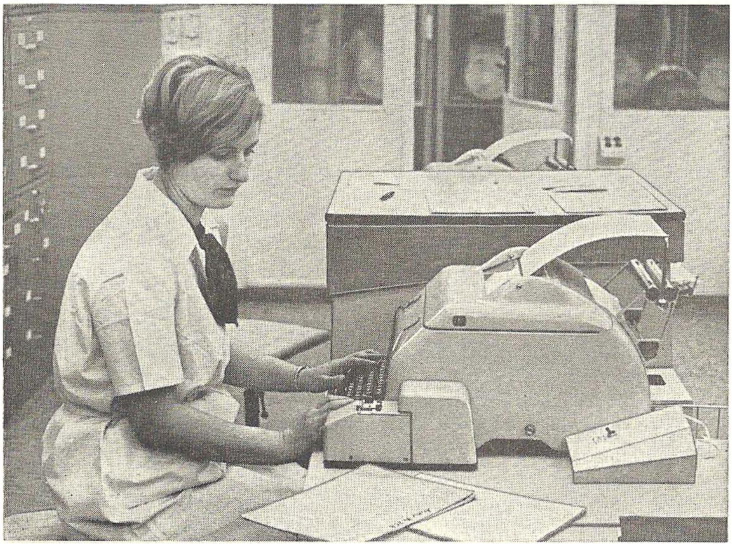
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Naumann, Leipzig (S. 33, 34, 47); Archiv: Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald (S. 40); Foto-Brüggemann, Leipzig (S. 52); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1645 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 2. 2. 1968

Inhalt

(*) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Elektronische Datenverarbeitung – eine Perspektive



Operateur beim Bedienen einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage

Diplom-Wirtschaftler Wolfram Metzner (links) mit dem Chefredakteur von *alpha* bei der Vorbereitung der Artikelserie: Datenverarbeitung — eine Perspektive

Verkäuferin (Centrum-Warenhaus Leipzig) beim Bedienen einer Kasse mit Magnetbandanschluß

Tabelliererin bei der Arbeit

Wer morgen bestehen will, muß heute beginnen!

Die verstärkte Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung in der sozialistischen Volkswirtschaft zum Nutzen aller vorbereiten zu helfen, betrachtet die Schülerzeitschrift *alpha* als ihr Anliegen. Ab Heft 3/68 machen wir in einer Artikelserie unsere Leser mit einigen wichtigen Berufen auf dem Gebiet der Datenverarbeitung bekannt.

Joachim Große, Klasse 10, 7. Oberschule Leipzig, erlernt ab 1. September 1968 den Beruf: *Facharbeiter für Datenverarbeitung*. — Joachim ist begeisterter Leser von *alpha*

Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage!

Kürzlich hörte ich einen kleinen Streit zwischen Klaus und Jürgen. Klaus hatte von seinem Vater 50 Mark und die Erlaubnis erhalten, einen Fußball für sich zu kaufen. Auf dem Wege zum Geschäft meinte Jürgen: „Na, nun hast du ja das notwendige Kleingeld für den Ball.“ Darauf Klaus: „Was heißt notwendig! Notwendig sind 50 Mark nun gerade nicht, aber sie reichen aus. Notwendig wären höchstens 35 Mark, denn soviel kostet der Ball nämlich. Du verwechselst ja, was ausreichend ist und was notwendig!“ Jürgen: „Das ist doch egal, ob notwendig oder nicht. So genau habe ich das doch nicht gemeint. Hauptsache ist, du kannst dir den Ball kaufen.“

Nun, so egal ist das nicht, wie man sich ausdrückt. Man sollte sich stets bemühen, so genau wie möglich das zu formulieren, was man meint. Das gilt für die Umgangssprache, in viel höherem Maße aber für die Mathematik. Sie ist ohne eine festgelegte Bedeutung der verwendeten Wörter gar nicht denkbar. Auch der Mathematiker verwendet das Wort *notwendig*, aber nur in einem ganz bestimmten Sinn. Ebenso ist es mit *ausreichend*, das allerdings in der Mathematik nicht so gebräuchlich ist; man benutzt im allgemeinen an seiner Stelle das gleichbedeutende Wort *hinreichend*. Mir scheint, Klaus hat schon einmal etwas von der Verwendung dieser Worte in der Mathematik gehört.

Wir wollen uns an einigen Beispielen überlegen, wann der Mathematiker davon spricht, eine Eigenschaft ist hinreichend oder sie ist notwendig. Man sagt beispielsweise: Die Teilbarkeit einer Zahl durch 6 ist hinreichend für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

Mit dieser Formulierung meint man: Die Eigenschaft einer Zahl, durch 6 teilbar zu sein, reicht dafür aus, daß diese Zahl auch durch 3 teilbar ist. Man kann inhaltlich dasselbe auch folgendermaßen, in der „Wenn ..., so ...“-Form angeben:

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, (A)
so ist diese Zahl durch 3 teilbar. (B)

Etwas allgemeiner könnte man also sagen: Die in der Voraussetzung angeführte Eigenschaft A ist hinreichend für die in der Behauptung angeführte Eigenschaft B.

In einem zweiten Beispiel wollen wir von einem Satz in der „Wenn-so“-Form ausgehen und danach den gegebenen Sachverhalt mit Hilfe von *hinreichend* neu formulieren.

(1a) Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, (A)
so sind diese Winkel gleich groß. (B)

Dafür kann man auch sagen:

(1b) Die Eigenschaft, daß zwei Winkel zueinander Scheitelwinkel sind (A), ist hinreichend dafür, daß die Winkel gleich groß sind (B).

Aus diesen Beispielen wird deutlich: Die Ausdrucksweise „Eine Eigenschaft A ist hinreichend für die Eigenschaft B“ besagt genau das gleiche wie „Wenn die Eigenschaft A gilt, so gilt die Eigenschaft B“. Statt „Eigenschaft“ verwendet der Mathematiker in diesem Zusammenhang allerdings meistens das Wort „Bedingung“.

Klaus hatte also vorhin ganz recht mit seinem Einwand. Da der Ball genau 35 Mark kostet, ist die Aussage „Wenn Klaus 50 Mark besitzt, so kann er sich einen Fußball kaufen“ ganz bestimmt richtig. Und das bedeutet ja nichts anderes als: „Die Tatsache, daß Klaus 50 Mark besitzt, ist hinreichend dafür, daß er sich einen Fußball kaufen kann.“

Überlegen wir nun, was der Mathematiker mit dem Wort *notwendig* ausdrücken will. Man sagt zum Beispiel:

(2c) Die Teilbarkeit einer Zahl durch 7 (A) ist notwendig für die Teilbarkeit der Zahl 14 (B).

Damit soll ausgedrückt werden:

(2a) Wenn eine Zahl durch 14 teilbar ist, (B)
so ist sie (notwendigerweise auch) durch 7 teilbar. (A)

Allgemein kann man sagen: „Eine Eigenschaft oder Bedingung A ist notwendig für eine Eigenschaft B" bedeutet also das gleiche wie „Wenn die Eigenschaft B gilt, so gilt die Eigenschaft A".

Wir wollen auch hierzu ein weiteres Beispiel untersuchen. Wir gehen wieder aus von der „Wenn-so"-Form und benutzen noch einmal den Satz (1a):

(1a) Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, (A)
so sind diese Winkel gleich groß. (B)

Inhaltlich dasselbe kann man auch mit Hilfe von *notwendig* ausdrücken, wenn man beachtet, daß die in der Behauptung angegebene Eigenschaft B notwendig ist für die in der Voraussetzung stehende Eigenschaft A, also:

(1c) Die gleiche Größe von zwei Winkeln (B) ist notwendig dafür, daß diese Winkel zueinander Scheitelwinkel sind (A).

An diesem Beispiel wird deutlich, daß man den gleichen Sachverhalt auf drei verschiedene Weisen ausdrücken kann: (a) in der „Wenn-so"-Form, (b) mit Hilfe von *hinreichend*, (c) mit Hilfe von *notwendig*. Fassen wir zusammen:

Ist der Sachverhalt in der Form

(a) „Wenn A, so B" beschrieben, so verwendet der Mathematiker dafür auch die folgenden Sprechweisen:
(b) A ist eine hinreichende Bedingung für B
(c) B ist eine notwendige Bedingung für A.

In (1b) wurde gesagt, daß die im Satz (1a) angegebene Eigenschaft A hinreichend ist für die Eigenschaft B. Ist die Eigenschaft A aber auch notwendig für die Eigenschaft B? Mit anderen Worten: Ist die Aussage „Die Eigenschaft, daß zwei Winkel zueinander Scheitelwinkel sind, ist notwendig dafür, daß diese Winkel gleich groß sind" richtig? Das läßt sich ganz leicht entscheiden, wenn man eine gleichwertige „Wenn-so"-Formulierung benutzt: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie Scheitelwinkel". Dieser Satz ist natürlich falsch. Die Eigenschaft A ist also nur hinreichend, nicht notwendig für die Eigenschaft B. Ob du wohl jetzt auch selbst begründen kannst, warum Jürgen vorhin unrecht hatte, als er meinte, 50 Mark seien für den Kauf des Fußballs notwendig? Überleg dir außerdem noch selbst, warum die in (2c) angegebene Eigenschaft A (Teilbarkeit einer Zahl durch 7) nicht auch hinreichend für die Eigenschaft B (Teilbarkeit der Zahl durch 14) ist.

Aus den letzten Beispielen sieht man, daß eine hinreichende Bedingung (Eigenschaft) nicht notwendig, eine notwendige Bedingung nicht hinreichend sein muß. Anschaulich gesagt, verlangt eine hinreichende Bedingung oft etwas zu viel, eine notwendige dagegen oft etwas zu wenig. Ideal wäre also eine Bedingung, die sowohl notwendig als auch hinreichend ist. Ob es wohl solche „idealen" Bedingungen gibt? Betrachten wir dazu ein Beispiel!

Den Inhalt des Satzes

(3a) Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist,
so ist die Zahl durch 3 teilbar

kann man auch auf die folgenden beiden Arten wiedergeben:

(3b) Die Teilbarkeit der Quersumme einer Zahl durch 3 ist eine hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

(3c) Die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 ist eine notwendige Bedingung für die Teilbarkeit der Quersumme der Zahl durch 3.

Nun ist aber auch (die Umkehrung des Satzes (3a)) richtig:

(4a) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar.

Dafür kann man wiederum sagen:

(4b) Die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 ist eine hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit der Quersumme der Zahl durch 3, oder:

(4c) Die Teilbarkeit der Quersumme einer Zahl durch 3 ist eine notwendige Bedingung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

Vergleicht man nun (3b) und (4c), so stellt man fest:

(5) Die Teilbarkeit der Quersumme einer Zahl durch 3 ist eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

Vergleiche selbst auch noch (3c) und (4b)! Vergleiche dann auch noch deine so gewonnene Feststellung mit dem Satz (5)!

Man sieht also, eine Bedingung kann manchmal sowohl notwendig als auch hinreichend für eine bestimmte Eigenschaft sein. Willst du eine hinreichende Sicherheit in der richtigen Verwendung von *notwendig* und *hinreichend* erlangen, mußt du notwendigerweise viel üben. Benutze dazu Sätze, die in deinem Lehrbuch stehen.

M. Rehm

Aufgaben

1. Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

1.1. Es ist notwendig und hinreichend, ein 10-Pf-Stück in einen Süßwarenautomaten zu werfen, um eine Rolle Drops zu erwerben.

1.2. Dafür, daß ein Oberhemd knitterfrei ist, ist hinreichend, daß es aus Dederon besteht.

1.3. Dafür, daß Klaus in dieselbe Klasse wie Jürgen geht, ist hinreichend, daß beide denselben Mathematiklehrer haben.

1.4. Um in der DDR wählen zu können, ist notwendig und hinreichend, daß man älter als 18 Jahre ist.

1.5. Zum Fotografieren ist Sonnenschein notwendig.

2. 21 t Kartoffeln sind durch 3-t-LKW von A-Dorf nach B-Stadt zu transportieren. Wieviel Fahrten sind dazu notwendig? Wieviel Fahrten sind dazu hinreichend? — Klaus und Jürgen unterhalten sich darüber. Es treten folgende Aussagen auf:

2.1. Es sind dazu 7 LKW-Fahrten notwendig.

2.2. Es sind dazu 3 LKW-Fahrten notwendig.

2.3. Es sind dazu 10 LKW-Fahrten notwendig.

2.4. Es sind dazu 7 LKW-Fahrten hinreichend.

2.5. Es sind dazu 3 LKW-Fahrten hinreichend.

2.6. Es sind dazu 10 LKW-Fahrten hinreichend.

Welche der Aussagen sind wahr?

Wie hätte die Frage heißen können, damit als einzige Antwort „7 LKW-Fahrten" richtig ist?

3. Sprich den Sachverhalt der nachfolgenden Sätze mit Hilfe von *notwendig* bzw. *hinreichend* aus!

3.1. Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es auch gleichschenklig.

3.2. Wenn jeder Summand durch eine bestimmte Zahl teilbar ist, so ist auch die Summe dieser Summanden durch diese Zahl teilbar.

3.3. Wenn in ein und demselben Kreis zwei Zentriwinkel gleich groß sind, so sind auch die zugehörigen Bogen gleich groß.

3.4. Wenn in ein und demselben Kreis zwei Bogen gleich groß sind, so sind auch die zugehörigen Zentriwinkel gleich groß.

4. Gib den Sachverhalt nachfolgender Sätze in einer „Wenn-so"-Formulierung wieder!

4.1. Dafür, daß ein Parallelogramm ein Quadrat ist, ist notwendig, daß ein Innenwinkel des Parallelogramms 90° beträgt.

4.2. Dafür, daß ein Parallelogramm ein Rechteck ist, ist hinreichend, daß ein Innenwinkel des Parallelogramms 90° beträgt.

4.3. Damit $a^2 - 36 \neq 0$ (a rational) erfüllt werden kann, ist hinreichend, daß a ungerade ist.

4.4. Die Kongruenz zweier Dreiecke ist hinreichend für ihre Ähnlichkeit.

5. Ergänze die Textlücken durch *notwendig* oder *hinreichend* oder *notwendig und hinreichend* so, daß eine wahre Aussage entsteht!

5.1. Damit $a^2 - 25 = 0$ (a rational) erfüllt werden kann, ist ...., daß $a = 5$ ist.

5.2. Damit das Quadrat einer gebrochenen Zahl a kleiner ist als 4, ist ...., daß $a < 2$ ist.

5.3. Die Ähnlichkeit zweier Dreiecke ist .... für ihre Kongruenz.

5.4. Dafür, daß ein Viereck ein Quadrat ist, ist ...., daß alle Seiten die Länge 1 haben.

M. Rehm

An unsere neuen Leser!
Durch die Deutsche Post (zuständiges Postamt) oder den Verlag Volk und Wissen, 108 Berlin, Lindenstraße 54a, Abtlg. Vertrieb, können noch die Hefte 3/67, 4/67, 5/67, 6/67 bezogen werden.

Redaktion *alpha*

Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen

In Heft 6/1967 haben wir die Darstellung einer Geraden in zugeordneten Normalrissen kennengelernt. Neben der Geraden spielt die Ebene als Konstruktionselement eine wichtige Rolle. Deshalb wollen wir uns nun mit der zeichnerischen Darstellung der Ebene in zugeordneten Normalrissen vertraut machen.
Zunächst fragen wir nach der Mindestzahl von Punkten, die eine Ebene im Raum festlegen. Wie bereits in Heft 6 gezeigt wurde, kann man durch zwei voneinander verschiedene Punkte eine und nur eine Gerade legen. Nimmt man nun außerhalb dieser Geraden einen weiteren Punkt an, so läßt sich durch diese Gerade eine und nur eine Ebene legen, die auch den zusätzlich angenommenen Punkt enthält.
Wir können daher festhalten: *Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte des Raumes ist genau eine Ebene festgelegt.* Diese Aussage läßt sich an anschaulichen Beispielen illustrieren. Stative für Meßgeräte und Fotoapparate haben in der Regel drei Beine, deren Spitzen eine Ebene, die Standebene, festlegen. Stühle, Tische und Hocker von spezieller Bauart weisen nur drei Beine auf und geben den Möbeln eine hinreichende Standfestigkeit auf ebenem Fußboden.
Wir betrachten nun drei in zugeordneten Normalrissen vorgegebene Punkte A, B und C, die nicht in einer Geraden liegen sollen. Die Punkte A, B und C legen also eine Ebene (ABC) fest. Hierbei wollen wir fünf wesentliche Fälle der Lage von (ABC) bezüglich der Bildebenen π_1 und π_2 herausarbeiten.
In Bild 1 ist der Umlaufsinn der Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ in beiden Rissen positiv. Nun ist zu beachten, daß eine Ebene stets zwei Seiten hat. Bei einer Ebene allgemeiner Lage ist eine dieser Seiten dem Betrachter zugewendet (sichtbar) und die andere ist abgewendet (nicht sichtbar). Da in Bild 1 Grund- und Aufriß des Dreiecks ABC gleichen Umlaufsinn besitzen, ist auch in beiden Rissen die gleiche Seite der Ebene sichtbar. Man sagt, sie ist *gleichwendig.*
In Bild 2 ist der Umlaufsinn des Dreiecks $A'B'C'$ positiv und der des Dreiecks $A''B''C''$ negativ. Folglich sind in Grund- und Aufriß dem Betrachter die zwei verschiedenen Seiten der Ebene zugewendet. Nimmt eine Ebene eine derartige Lage bezüglich der Bildebenen ein, sagt man, sie ist *wechselwendig.*
In Bild 3 liegen $A'B'C'$ in einer Geraden, während die Punkte $A''B''C''$ ein Dreieck bilden. Umläuft man in diesem Fall das Dreieck ABC in dem angegebenen Sinn, so läßt sich nur dem Aufriß des Dreiecks die entsprechende Orientierung entnehmen, im Grundriß ist keine Entscheidung über den Umlaufsinn möglich. Die Ebene ist also weder wechselwendig noch gleichwendig. Da für den Grundriß nicht entscheidbar ist, welche Seite der Ebene man sieht, steht die Ebene senkrecht auf der Grundrißebene π_1. Man sagt, die Ebene ist *erstprojizierend.*

In Bild 4 liegen $A''B''C''$ in einer Geraden, während $A'B'C'$ ein Dreieck bilden. Auch in diesem Fall ist die Ebene weder gleich- noch wechselwendig. Da der Umlaufsinn eines in dieser Ebene liegenden Dreiecks im Aufriß nicht erkennbar ist, steht die Ebene offenbar senkrecht auf der Aufrißtafel, sie ist *zweitprojizierend.*

Erstprojizierende oder zweitprojizierende Ebenen führt man häufig als Hilfsebenen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben, z. B. bei der Durchdringung ebenflächig be-

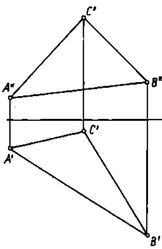


Bild 1

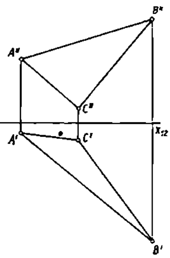


Bild 2

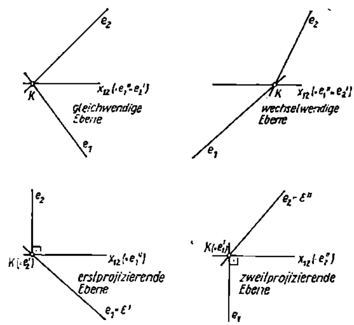


Bild 9

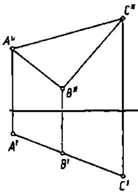


Bild 3

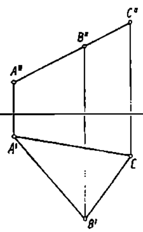


Bild 4

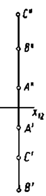


Bild 5

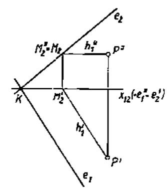


Bild 10

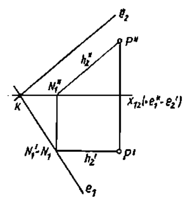


Bild 11

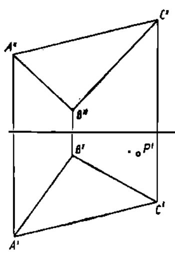


Bild 6

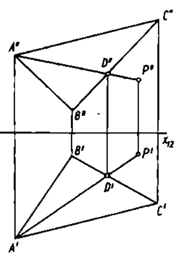


Bild 7

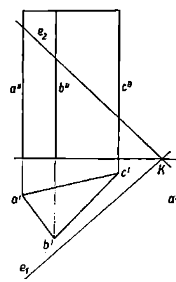


Bild 12

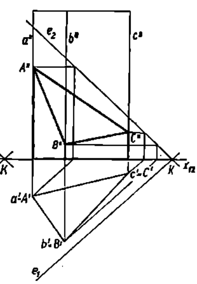
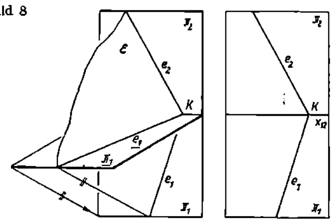


Bild 13

Bild 8



grenzter Körper, ein. Auch als zusätzliche Bildebenen (Seitenrisse) finden die projizierenden Ebenen vielfach Verwendung. Liegen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ in einer Geraden, dann müssen auch A, B und C selbst Punkte einer Geraden sein (vgl. Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen). Dieser Fall ist daher für unsere Betrachtung ohne Bedeutung.
Es ist lediglich noch der Fall zu untersuchen, daß die Punkte $A'B'C'$ und $A''B''C''$ auf einer gemeinsamen Ordnungslinie liegen (Bild 5). Dann steht die Ebene (ABC) senkrecht auf beiden Bildebenen, sie ist erst- und zweitprojizierend. Ebenen dieser Lage verwendet man bei Einführung von *Kreuzrissen*, was aber zunächst noch zurückgestellt werden soll.
Wir stellen uns eine wichtige Grundaufgabe: In einer durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene liege ein Punkt P, von dem nur der Grundriß P' bekannt ist. Bestimme den Aufriß P'' von P (Bild 6)! Vor einer ähnlichen Aufgabe steht etwa ein Tischler, der an einem schadhaften Tisch ein viertes Bein wieder so anfügen muß, daß der Tisch auf einem ebenen Fußboden nicht kippelt.
Zur Lösung dieser Aufgabe mit Bleistift, Zirkel und Lineal verbinden wir zunächst A' mit P' (Bild 7). Die Verbindungsgeraden (AP) und (BC) liegen nach Voraussetzung in der Ebene (ABC). Sie schneiden sich daher auch im Raum in einem Punkt, den wir mit D bezeichnen. Wir finden den Aufriß D'' von D, indem wir durch D' die Ordnungslinie legen. Diese schneidet $(B''C'')$ in D''. Der Aufriß P'' von P liegt nach unseren Überlegungen auf $(A''D'')$ und auf der Ordnungslinie durch P'. (Grund- und Aufriß eines Punktes liegen in Mongescher Lage.) Wir haben die Aufgabe somit durch Einführung einer Hilfsgeraden gelöst, die in der vorgegebenen Ebene (ABC) liegt. Das hier beschriebene Verfahren bezeichnet man als „*Angittern eines Punktes*". Man wendet das Verfahren z. B. an, wenn der Schnitt eines geraden Prismas mit einer Ebene zu konstruieren ist. (Wie vereinfacht sich die Lösung der gestellten Aufgabe, wenn die Ebene (ABC) zweitprojizierend ist?)
Bei den vorangehenden Untersuchungen sind wir davon ausgegangen, daß eine Ebene durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte eindeutig bestimmt ist. Es handelt sich also nicht um eine Abbildung dieser Ebene, sondern nur um eine Darstellung der Ebene durch drei ihrer Punkte. Legen wir nun durch zwei Punktepaare der drei vorgegebenen Punkte je eine Gerade, so erhalten wir ein sich im Raum schneidendes Geradenpaar. Die Gesamtheit jener Geraden, die die Geraden des sich schneidenden Paares trifft, spannt dann gleichfalls die Ebene (ABC) auf. Daher kann man auch sagen: *Eine Ebene ist durch ein Paar sich schneidender Geraden eindeutig bestimmt.*
Von diesem Sachverhalt geht man aus, wenn man eine Ebene durch ihre „*Spuren*" darstellt.

Es gelten die folgenden Definitionen:

Die Spuren einer Ebene ε sind die Schnittgeraden von ε mit den Bildebenen π_1 und π_2.
Die Schnittgerade von ε mit π_1 heißt *erste Spur.* Sie wird mit e_1 bezeichnet.
Die Schnittgerade von ε mit π_2 heißt *zweite Spur.* Sie wird mit e_2 bezeichnet.
Der Schnittpunkt von ε mit der Rißachse x_{12} heißt *Knotenpunkt.* Er wird mit K bezeichnet.

K ist nach diesen Definitionen der Schnittpunkt der Geraden e_1 und e_2. Liegt eine Ebene in dieser Darstellung vor, lassen sich viele Aufgaben, wie z. B. das Bestimmen der wahren Gestalt einer ebenen Figur, bequem lösen. Hierbei ist vor allem zu beachten, daß e_1 in der Bildebene π_1 und e_2 in π_2 liegen. Somit fallen der Aufriß von e_1 und der Grundriß von e_2 in die Rißachse. Dies wird in der Bezeichnung i. a. nicht berücksichtigt, sondern im stillen als bekannt vorausgesetzt (Bild 8).
Ist eine Ebene durch ihre Spuren vorgegeben, so kann man unmittelbar aus der Zeichnung ablesen, ob die Ebene gleichwendig, wechselwendig, erstprojizierend oder zweitprojizierend ist. Bild 9.

Die Art der Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren versagt jedoch für alle Ebenen, die die Rißachse enthalten. Liegt eine Ebene parallel zur Rißachse, so sind auch die Spuren dieser Ebene parallel zur Rißachse. Ebenen dieser Lage bezeichnet man als *Pultebenen.* Hierbei ist zu bemerken, daß eine Ebene im Raum auch durch zwei zueinander parallele Geraden eindeutig bestimmt ist. Das Angittern eines Punktes P in einer Ebene soll nun für den Fall durchgeführt werden, daß die Ebene durch ihre Spuren vorgegeben ist. Bei der Konstruktion ist es vorteilhaft, mit den sogenannten *Spurparallelen* zu arbeiten.

In Bild 10 ist die Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2 dargestellt. Außerdem ist der Grundriß P' des in ε liegenden Punktes P bekannt. Gesucht ist der Aufriß P'' von P. Diese Aufgabe läßt sich im Prinzip mittels jeder beliebigen in ε liegenden Hilfsgeraden durch P lösen. Wir wollen P mit der zu e_1 parallelen Geraden h_1 angittern. Der Grundriß h_1' von h_1 schneidet die Rißachse in einem Punkt M_2'. Dies ist der Grundriß des zweiten Spurpunktes M_2 von h_1. Der Aufriß dieses zweiten Spurpunktes liegt auf e_2, da h_1 in ε liegt. Die Ordnungslinie durch M_2' schneidet also e_2 in $M_2'' = M_2$. Da h_1 parallel e_1 ist, muß h_1'' parallel zu e_1'', d. h. parallel zur Rißachse sein. Die Parallele zur Rißachse durch M_2 schneidet die Ordnungslinie durch P' in P''.

Im vorliegenden Fall haben wir den Punkt P mit einer *ersten Spurparallelen* h_1 angegittert. Völlig analog gestaltet sich das Angittern von P durch eine Parallele h_2 zur zweiten Spur e_2. Bild 11. Das hier abgeleitete Verfahren wollen wir zur Lösung einer einfachen Durchdringungsaufgabe anwenden.

Anwendung

Gegeben ist eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2 und ein auf π_1 senkrecht stehendes dreiseitiges Prisma durch die Kanten a, b, c. Gesucht ist der zwischen ε und π_1 liegende Abschnitt des Prismas (Bild 12).

Lösung: Bezeichnet man die Durchstoßpunkte der Prismenkanten a, b, c durch ε beziehentlich mit A, B, C, so gilt für die Grundrisse dieser Punkte $a' = A'$, $b' = B'$, $c' = C'$. Da A, B und C in ε liegen, erhält man ihre Aufrisse in bekannter Weise durch Angittern mittels der ersten oder zweiten Hauptlinien. Verbindet man die Punkte A'', B'' und C'' miteinander, ergibt sich der Aufriß des gesuchten Prismenabschnittes. Der Grundriß des gesuchten Körpers ist mit dem Dreieck $A'B'C'$ identisch (Bild 13).

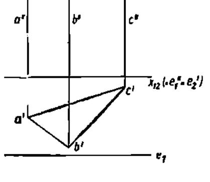
E. Schröder

Aufgaben

□ Übertrage die in Bild 1 bis 4 dargestellten Ebenen $\varepsilon = (ABC)$ auf ein Zeichenblatt (DIN A 4) und suche die Spuren zu jeder der vier Ebenen auf!

Anleitung: Bestimme z. B. zunächst die ersten Spurpunkte von zwei Dreieckseiten. Die Verbindungsgerade dieser Punkte ergibt die erste Spur e_1 und den Knotenpunkt K von ε. Ermittle anschließend den zweiten Spurpunkt von einer Dreieckseite und verbinde diesen mit K. Dies ergibt die zweite Spur e_2.

□ Die durch ihre Spuren e_1 und e_2 vorgegebene Pultebene ε ist mit dem auf π_1 normalstehenden dreiseitigen Prisma zum Schnitt zu bringen (vgl. Bild 14). Der zwischen π_1 und ε liegende Abschnitt des Prismas ist unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit darzustellen.



Nichts Einfacheres als ein Quadrat!

(trotzdem erst für Schüler ab Klasse 8)

2. Teil

(3) Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratdiagonale ergibt?
Schauen wir uns also die Seite s und die Diagonale d eines Quadrats einmal etwas genauer an! (Figur 5)
Das schraffierte Dreieck ist doch rechtwinklig (s. Aufgabe 1)! Kennen wir nicht Sätze, die in rechtwinkligen Dreiecken gelten?

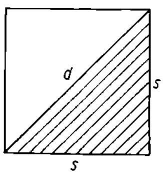


Fig. 5

Aufgabe 11: Formuliere wenigstens drei Sätze, die in rechtwinkligen Dreiecken gelten!

Aufgabe 12: Wer schon weiß, was die Umkehrung eines Satzes ist, formuliert die Umkehrungen der drei Sätze aus Aufgabe 11. Sind diese Umkehrungen wahr?

Ganz gewiß ist unter euren Sätzen der Satz des Pythagoras vorgekommen: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten. Figur 6 zeigt eine Veranschaulichung dieses Satzes für ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

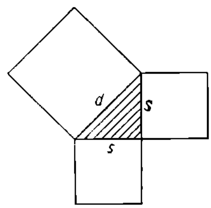


Fig. 6

Merkt ihr etwas? Das ist doch genau unser Problem, das uns nun schon so lange die Köpfe heiß macht! Das große Quadrat hat den doppelten Flächeninhalt eines kleinen Quadrats. Das ist eine Bestätigung unserer auf andere Weise gefundenen Erkenntnis, daß die Seite des neuen Quadrats die Diagonale des alten Quadrats sein muß. Ja, wie lang ist denn aber diese Diagonale, wenn zum Beispiel $s = 1$ cm ist? Wir wenden den Satz des Pythagoras auf unser schraffiertes rechtwinkliges Dreieck an und nehmen zusätzlich zur Vereinfachung an, daß s die Maßzahl 1 hat:

$$d^2 = s^2 + s^2 = 1^2 + 1^2$$
$$\underline{\underline{d^2 = 2}}$$

Wenn s die Maßzahl 1 hat, muß d eine Maßzahl haben, deren Quadrat gleich 2 ist! Das muß doch herauszukriegen sein:

(a) Wir setzen für d die Maßzahl 1,5 oder $\frac{3}{2}$ ein und wollen sehen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \qquad \frac{9}{4} = 2$$

$2{,}25 = 2$; das ist eine falsche Aussage!

(b) Wir versuchen es mit 1,4, da 1,5 sich als zu groß herausgestellt hat:

$$1{,}4^2 = 2$$
$$1{,}96 = 2;$$

wieder entsteht eine falsche Aussage!

Diesmal war die eingesetzte Zahl etwas zu klein.

(c) Wir setzen für d die Zahl 1,45 ein:

$$1{,}45^2 = 2$$
$$2{,}1025 = 2; \text{ falsche Aussage!}$$

Kommt ihr euch auch vor wie ein Mensch mit verbundenen Augen, der mal links, mal rechts mit dem Hammer neben den Nagel haut? Vielleicht haben einige von euch auch schon ein dumpfes Gefühl wie: bei solchen Multiplikationen wie $1{,}45 \cdot 1{,}45$ kann doch niemals 2 herauskommen! Schreiben wir das einmal genau auf:

```
1,45 · 1,45
-----------
145
 580
  725
-----------
2,1025
```

Seht euch die letzte Ziffer des Produkts, die 5, genau an! Wie entsteht sie beim üblichen Verfahren der schriftlichen Multiplikation? Zu ihr wird garantiert keine andere Zahl addiert! Sie kann also bei solchen Zahlen wie 1,45 gar nicht gleich Null werden, und das müßte sie ja, wenn das Produkt 2 werden soll. Gibt es aber vielleicht andere natürliche Zahlen von 1 bis 9, deren Quadrat auf eine Null endet? Nein! (Habt ihr nachgeprüft?)

Ja, was denn nun? Sollte es gar keine Zahl geben, deren Quadrat gleich 2 ist? Gewiß haben viele von euch die Gleichung $d^2 = 2$ „aufgelöst" und gesagt: „d ist gleich $\sqrt{2}$." Was ist denn „$\sqrt{2}$"? In der Zahlentafel steht

$$\sqrt{2} = 1{,}414$$

Überprüfen wir auch das! Ist „$1{,}414^2 = 2$" eine wahre Aussage? 1,414 ist gleich 1,999396, aber nicht gleich 2. Jetzt erinnert ihr euch auch, daß euer Mathematiklehrer sagte, 1,414 wäre ein *Näherungswert* für $\sqrt{2}$. Was bedeutet $\sqrt{2}$ denn aber *genau*? Welche Zahl hat die 2. Potenz 2?

Ihr kennt natürliche Zahlen 0, 1, 2, . . . , gebrochene Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{10}{7}, \ldots$ und rationale Zahlen $-4, -\frac{7}{8}, 0, +7, +\frac{13}{6}, \ldots$. Vielleicht wißt ihr, daß alle natürlichen und gebrochenen Zahlen auch rationale Zahlen sind und alle natürlichen Zahlen auch gebrochene Zahlen. Vielleicht kennt ihr die Zeichnung im neuen Lehrbuch der 7. Klasse, Seite 30 (siehe Figur 7). Also fragen wir wohl am besten: Welche *rationale* Zahl hat die 2. Potenz 2? Vorhin hatten wir die merkwürdige, dunkle Vermutung, daß das mit dem Multiplizieren mit sich selbst nicht gut geht. So viele Versuche, und nun scheint irgend ein Haken an der Sache zu sein! Wir haben bisher keine rationale Zahl gefunden, die uns die Seite eines Quadrates angibt, das den doppelten Flächeninhalt des *Einheitsquadrats* hat (wir hatten für s zur Vereinfachung die Maßzahl 1 gewählt). H. Wiesemann

(Fortsetzung folgt in Heft 3/68.)

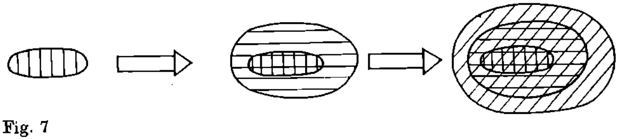


Fig. 7

Bereich der natürlichen Zahlen — Bereich der gebrochenen Zahlen — Bereich der rationalen Zahlen

„Zur Rationalisierung der Planungs- und Leitungsprozesse und der geistigen Arbeit gewinnt die elektronische Datenverarbeitung ständig an Bedeutung. Die Einführung und Anwendung der Datenverarbeitung und der Aufbau des Netzes der Rechenstationen muß mit großer Sachkenntnis geleistet und verbreitet werden, um einen maximalen volkswirtschaftlichen Nutzeffekt zu erzielen."

(Aus Materialien des VII. Parteitages der SED)

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (20./21.1.1968)

7

1. Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert. Wieviel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

2. Beweise folgende Behauptung: Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

3. Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu „bezahlen". Wie müßten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

4. Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}.$$

In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, daß $x = 11$ die Gleichung erfüllt. Wie lautet diese Zahl?

5. Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen. Beweise, daß das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 läßt!

6. Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$ und $\overline{AA'} = \overline{CA}$ abgetragen. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$!

8

1. Konstruiere das Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\sphericalangle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, daß der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

2. Unter der Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: Z. B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$. Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

3. Es seien a und b positive ganze Zahlen. Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{a}{b}$ ist.

4. Es sei a eine positive ganze Zahl. Zeige, daß der Bruch $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a - 1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

5. Beweise: Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$, sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d. h., ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

6. Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.

b) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

9

1. Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils einander gleich sind!

2. Auf einem (rechteckigen) Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel. Nach welchem Punkte von AB muß diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

3. Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben. Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$12345678910111213 14 \ldots 979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, daß die rest-

lichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden. Wie lautet diese?
4. Man ermittle alle Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c), für die $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ gilt!
Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.
5. Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Seitenlängen a, b und c bekannt. Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalb. derSeite AB!
6. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$ erfüllen!

10

1. Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedesDreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.
2 .Es ist zu beweisen, daß $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ist! (Sogenannte Kettenregel für Logarithmen.)
3. Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika: „Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten. Ich weiß zwar noch, daß alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauteten.“ „Welche Maßzahlen meintest du, als du *alle Maßzahlen* sagtest?“ „Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide.“ „Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren also z. B. die Längen in cm, der Oberflächeninhalt in cm² und das Volumen in cm³ angegeben?“ „Ja, so war es.“ Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?
4. Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$(*)\ \sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leqq a_i \leqq 10$ gilt.
5. Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung
$x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?
6. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm! Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

11|12

1. Drei gleichgroße Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte. Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?
2. Es ist das Produkt
$\sin 5° \cdot \sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 45° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 75° \cdot \sin 85°$ in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
$\left(\text{Beispiel dafür: } \sin 30° \cdot \sin 60° = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}.\right)$
3. Wie lauten (in dekadischer Darstellung) die letzten beiden Ziffern der Zahl

7
7 7
7 7
7 — 7 ?

4. Es sei $y = f(x)$ eine für alle positiven reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle x folgende Gleichungen erfüllt:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \quad (1).$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle positiven reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie: Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle positiven reellen x die Gleichung

$$\varphi(x+1) = (x+1) \cdot \varphi(x), \qquad (2)$$

wenn $g(x) = g(x+1)$ ist.
5. In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.) Beweisen Sie, daß man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, daß in ihnen sechs Farben auftreten!
6. Beweisen Sie, daß es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d. h.. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, daß diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. habil. Günter Asser

Direktor der Abteilung Mathematische Kybernetik
an der Sektion Mathematik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

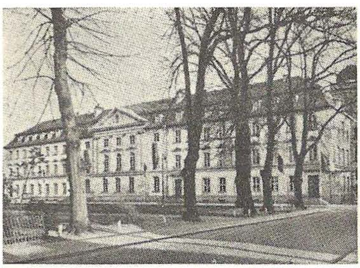
195 Für die Auszeichnung der 1. und 2. Plätze einer Mathematikolympiade stehen insgesamt M Mark zur Verfügung. Es ist festgelegt, daß ein Gewinner eines 2. Platzes ein Drittel dessen erhalten soll, was er erhalten hätte, wenn er einen 1. Platz erreicht hätte. Wie sind die M Mark aufzuteilen, wenn es a Gewinner eines 1. Platzes und b Gewinner eines 2. Platzes gibt?

7 a) Wie groß ist die Auszahlung an die Gewinner des 1. und des 2. Platzes, wenn $M = 226{,}80$, $a = 4$ und $b = 3$ ist?

9 b) Stelle eine allgemeine Formel für die Auszahlungen $\alpha\ (a, b)$ und $\beta\ (a, b)$ an die Gewinner des 1. und 2. Platzes auf!

c) Versuche die Überlegungen auf den Fall auszudehnen, daß die M Mark für die Auszeichnung der 1., 2. und 3. Plätze vorgesehen sind und zusätzlich festgelegt ist, daß ein Gewinner eines 3. Platzes ein Drittel dessen erhalten soll, was er erhalten hätte, wenn er einen 2. Platz erreicht hätte! (Wie groß sind in diesem Fall die Auszahlungen $\alpha\ (a, b, c)$, $\beta\ (a, b, c)$ und $\gamma\ (a, b, c)$ an die Gewinner des 1. bis 3. Platzes, wenn a, b, c die Anzahl der Gewinner eines 1., 2. bzw. 3. Platzes bezeichnet?)

Hinweis: Hätte bei a Gewinnern eines 1. Platzes einer der b Gewinner eines 2. Platzes einen 1. Platz erreicht, so hätte es $a + 1$ Gewinner eines 1. Platzes und nur $b - 1$ Gewinner eines 2. Platzes gegeben!



Die im Jahre 1456 gegründete *alma mater Gryphiswaldensis*, die heute den ehrenvollen Namen des Greifswalder Geschichtsprofessors Ernst Moritz Arndt trägt, gehört zu den ältesten Universitäten in Deutschland. Dem Mut und der Besonnenheit des ehemaligen Greifswalder Stadtkommandanten Rudolf Petershagen („Gewissen in Aufruhr") ist es zu verdanken, daß 1945 die Stadt und damit auch die Universität nicht der sinnlosen Zerstörung zum Opfer fiel. In den kommenden Jahren wird Greifswald einer der Schwerpunkte des industriellen Aufbaus in unserer Republik sein. Bereits in diesem Jahr beginnt der VEB Schiffselektronik in einem hochmodernen Werk mit der Produktion von hydroakustischen Geräten für den Fischfang. In unmittelbarer Nähe von Greifswald wird mit dem Bau eines der größten Kernkraftwerke der Welt begonnen.

An der Universität wird insbesondere die Sektion Mathematik erheblich erweitert. Es werden dort (in den kommenden Jahren in bedeutend steigender Anzahl) Diplom-Mathematiker der Spezialrichtungen *Analysis* und *Mathematische Kybernetik* (5jähriges Studium) und Lehrer der Fachkombination Mathematik/Geographie (4jähriges Studium) ausgebildet.

alpha-Wettbewerb 1967

Das sind sie, die 5101 Lösungen, die im Laufe des Jahres 1967 an die Redaktion eingesandt wurden. Sie zeigen großen Fleiß und Ausdauer. Die Besten (Preisträger) konnten wir mit Büchern, die der Verlag Volk und Wissen sowie der Verlag B. G. Teubner zur Verfügung stellten, auszeichnen. Die Namen weiterer fleißiger Wettbewerbsteilnehmer veröffentlichen wir ebenfalls (in der Reihenfolge ihrer gezeigten Leistungen). Die Jury teilt in Auswertung der Korrekturen mit: Wer 1968 für die Lösungen der Aufgaben seiner Klassenstufe mindestens 7 Karten mit dem Prädikat *gut* bzw. *vorbildlich gelöst* von der Redaktion erhält und diese zwischen dem 15. und 31. 1. 1969 einsendet, bekommt eine Anerkennungsurkunde. Die Besten werden wiederum prämiiert bzw. ihre Namen veröffentlicht. (Natürlich freuen wir uns auch über die Einsendung von Lösungen aus höheren Klassenstufen; siehe Ausschreibung Heft 1/68). Nachdem sich unser Wettbewerb eingespielt hat, werden wir bei der Bewertung der Lösungen besonders auf Vollständigkeit und Übersichtlichkeit der Lösungswege bzw. Beweise, ebenso auch auf die Sauberkeit in der Ausführung achten. Aus technischen Gründen können korrigierte Lösungen nicht zurückgesandt werden. Wir empfehlen daher das Anlegen von Durchschlägen. Aus Platzgründen erscheinen unsere Lösungen oft in Kurzform und sind deshalb nicht immer Richtlinie für Einsendungen unserer Leser. Die Jury wünscht allen *alpha*-Lesern für den Wettbewerb 1968 viel Freude und Erfolg.

Leserstimmen:

Helga Rühlicke, Brandenburg:
... Ich möchte auch weiterhin fleißig mitarbeiten, weil mir *alpha* für den Unterricht sehr geholfen hat ... Meine Eltern rechnen auch gern die Wettbewerbsaufgaben mit. Besonders viel Spaß und Freude bringt uns „*alpha*-heiter". Es fängt bei der Oma an (die Freude) und endet bei unserem 7jährigen Wölfi ...

Ehrenfried Zschech, Bautzen (Klasse 6):
... Mir gefällt *alpha* sehr gut. Bei den Knobelaufgaben lerne ich sehr viel, da bei den Lösungen der Lösungsweg mit enthalten ist. Mir hat *alpha* auch schon sehr viel geholfen, denn ich belegte im Kreisausscheid der Mathematikolympiade den 1. Platz ...

Monika Bartels, Schwerin:
... Das Lösen der Aufgaben macht mir viel Freude, und ich werde mich auch in diesem Jahr wieder am *alpha*-Wettbewerb beteiligen.

Margit Graßnick, Pastow, Kr. Rostock (Kl. 6):
... Mir hat das Lösen dieser Aufgaben viel Freude bereitet. Im Mathematikzirkel unserer Schule benutzten wir Aufgaben aus *alpha* zur Übung ...

Lotti Suchert (Lehrerin), Gottleuba:
... Ich leite einen Mathematikzirkel für Schüler der 6. Klasse. Alle Zirkelteilnehmer möchten auch Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb 1968 werden ...

Jutta Kratzsch, Zeitz (Klasse 8):
(im Auftrage von 13 Mitgliedern des Mathematikzirkels, Kl. 8 bis 10)
... Wir alle sind Leser von *alpha*. Wir treffen uns jede Woche, um die Satzgruppe des Pythagoras zu erforschen. Gleichzeitig sprechen wir über Themen aus *alpha* und lösen einige Aufgaben ... Wir haben an unserer Schule 33 neue Leser für *alpha* geworben. Dadurch gelang es uns, noch mehr Schüler für die Mathematik zu gewinnen ...

Wer löste mit?
alpha-Wettbewerb

Preisträger

Klassenstufe 5/6: Pawel Kröger, 7031 Leipzig, Bamberger Str. 24a — Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen, W.-Fiebiger-Str. 42 — Frank Ihlenburg, 22 Greifswald, Goethestr. 10 — Ulf Brüstel, 7401 Ziegelheim (Kr. Altenburg) — Udo Winkler, 829 Kamenz, Geschw.-Scholl-Str. 25.

Klassenstufe 6/7: Jörg Lehnert, 2034 Tutow — Gernot Spiewok, 22 Greifswald, Grimmerstr. 69 — Bärbel Schulz, 75 Cottbus, Finsterwalder Str. 1 — Hans-Herbert Luchtmann, 2405 Neukloster — Lutz Ranke, 59 Eisenach, Wernickstr. 6.

Klassenstufe 7/8: Jürgen Schefter, 795 Bad Liebenwerda, E.-Thälmann-Pl. 5 — Harald Englisch, 7022 Leipzig, Otto-Nuschke-Str. 40 — Steffen Kossert 1136 Berlin-Friedrichsfelde, Friedenhorster Str. 7 — Frank Täubner, 745 Calau — Claudia Asser, 22 Greifswald, L.-Jahn-Str. 6 — Petra Wußing, 7022 Leipzig, Braunschweiger Str. 39.

Klassenstufe 8/9: Arnulf Möbius, 7124 Holzhausen bei Leipzig — Bernd Oldenburger, 7261 Merkwitz (Kr. Oschatz) — Reinhard Wobst, 806 Dresden, Bautzener Str. 71 — Steffi Lorenz, 703 Leipzig, Am Bogen 36 — Uwe-Peter Sandberg, 28 Ludwigslust, Schweriner Str. 47 — Bernd Nikutowski, 2032 Jarmen.

Klassenstufe 9/10: Ludwig Paditz, 826 Lommatzsch, Kornstr. 4 — Peter Oswald, 8027 Dresden, F.-C.-Weißkopfstr. 73 — Martin Horatschek, 402 Halle, Goethestr. 34 — Eberhard Paschkowski, 48 Naumburg/Saale, Karl-Marx-Str. 10 — Detlef Schulz, 211 Torgelow — Jürgen Hopfe, 42 Merseburg, Siegfriedstr. 1b.

Folgende Schulen nahmen im Rahmen ihrer außerunterrichtlichen Tätigkeit am *alpha*-Wettbewerb teil: OS Bergwitz (Krs. Bitterfeld) — John-Brinkmann-OS Goldberg (Krs. Lübz) — OS Parkentin (Krs. Bad Doberan) — OS Ebersbrunn (Bez. Karl-Marx-Stadt) — OS Heinrich Schiemann, Neubukow (Krs. Bad Doberan) — OS Rüdnitz (Krs. Bernau) — OS Zeitz (Bergsiedlung) — OS Steinbach-Hallenberg (Krs. Schmalkalden) — OS Berlin-Pankow — OS Käthe-Kollwitz, Schönebeck/Elbe — OS Georg-Schumann Mokrehna (Krs. Eilenburg) — OS Andershof (Krs. Stralsund) — OS Tutow (Krs. Demmin) — Ernst-Moritz-Arndt-OS Greifswald — OS Brodersdorf (Krs. Rostock) — OS Gottleuba (Krs. Pirna) — OS Meiningen — OS Alt-Töplitz (Bez. Potsdam) — Ernst-Thälmann-OS Karl-Marx-Stadt — OS Culitzsch (Krs. Zwickau-Land).

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5/6: Claus-Detlev Bauermeister, 8019 Dresden — Sabine Anders, 75 Cottbus — Rolf Böllmann, 5505 Ilfeld — Christoph Scheurer, 9611 Glauchau-Gesau — Stephan Poller, 9533 Wilkau-Haßlau — Bernd Singer, 99 Plauen — Beate Werner, 9906 Syrau — Jürgen Schulze, 793 Herzberg — Gerd Petzold, 9501 Cunersdorf — Hendrik Ladwesen, 63 Ilmenau — Regina Müller, 8027 Dresden — Angelika Jagusch, 1281 Rüdnitz — Reinhold Müller, 9151 Pfaffenhain — Bernd Winkelmann, 1405 Glienicke — Gerald Bach, 90 Karl-Marx-Stadt — Holger Weißgerber, 36 Halberstadt —

Uwe Lewandowski, 705 Leipzig — Kerstin Bachmann, 402 Halle — Wolfgang Cott, 5705 Menteroda — Eberhard Manske, 6088 Steinbach-Hallenberg — Thomas Förster, 23 Stralsund — Doris Rothe, 4332 Sandersleben — Margit Graßnick, 2551 Pastow — Sarina Lietz, 1281 Rüdnitz — Hans-Joachim Wolf, 89 Görlitz — Lutz Bernsdorf, 2862 Goldberg — Monika Schöne, 1281 Rüdnitz.

Klassenstufe 6/7: Tilo Stöckert, 99 Plauen — Steffen Oswald, 8027 Dresden — Karin Krüger, 453 Roßlau — Renate Schulze, 793 Herzberg — Klaus-Jürgen Kreul, 88 Zittau — Jörg Polzehl, 1157 Berlin-Karlshorst — Antje-Christine Keller, 23 Stralsund — Reinhard Liesigk, 44 Bitterfeld — Tilo Kempa, 8361 Ottendorf — Beate Weise, 48 Naumburg — Carmen Hauptmann, 8245 Glashütte — Ingolf Kunath, 825 Meißen — Manfred Riemer, 9306 Elterlein — Jürgen Zabel, 57 Mühlhausen — Iris Zöllner, 1211 Lebus — Erika Heuer, 2301 Neulüdershagen — Andreas Heß, 794 Jessen — Jürgen Niendorf, 7913 Schweinitz — Uwe Schröder, 2806 Conow — Helma Erfuth, 4321 Freckleben — Marina Schulz, 89 Görlitz — Stefan Katzmann, 925 Mittweida — Elke Wiemann, 8245 Glashütte — Gisela Engel, 25 Rostock — Annerose Lehmann, 7027 Leipzig — Lutz Hameister, 3271 Möser — Joachim Selle, 5401 Großfurra — Gabriele Winter, 5401 Großfurra — Wolfgang Fiedler, 57 Mühlhausen — Erwin Grund, 1824 Niemegk — Ingo Runge, 5401 Großfurra — Eveline Günther, 1631 Dabendorf — Monika Heiner, 90 Karl-Marx-Stadt.

Klassenstufe 7/8: Felicitas Bartusch, 79 Falkenberg — Jürgen Reichard, 301 Magdeburg — Rainer Staudte, 9501 Culitzsch — Manfred Schreiter, 7254 Machern — Bernd Hofmann, 8808 Niederoderwitz — Josef Kaufhold, 5601 Silberhausen — Franziska Steinke, 111 Berlin — Frank Kretzschmar, 7043 Leipzig — Peter Hoffmann, 4308 Thale — Renate Reckziegel, 5808 Tabarz — Petra Schönwälder, 703 Leipzig — Regina Oberwinter, 1503 Potsdam-Bornstedt — Roswitha Thommes, 3602 Badersleben — Christiane Stelter, 2551 Lüsewitzer Krug (Kr. Rostock) — Renate Siegert, 9372 Wolkenstein — Gerhard Hoborn, 2861 Wendisch Priborn (Kr. Lübz) — Jutta Geißler, 829 Kamenz — Wolfgang Riedel, 90 Karl-Marx-Stadt — Renate Zimmermann, 8036 Dresden — Dietmar Lein, 521 Arnstadt — Ullrich Galle, 962 Werdau — Wolfgang Zahn, 532 Appolda — Norbert Köppe, 1801 Glienecke — Rautgundis Queisler, 8808 Niederoderwitz — Ursula Gebauer, 6404 Rauenstein — Sabine Kinzel, 7024 Leipzig — Christa Kirsten, 8301 Liebstadt — Arnold Jahnke, 9275 Lichtenstein —-Wolfgang Puhlmann, 1824 Niemegk — Frank-Uwe Simon, 801 Dresden — Wolfgang Keller, 923 Brand-Erbisdorf — Stephan Günther, 705 Leipzig.

Klassenstufe 8/9: Gudrun Bohn, 7022 Leipzig — Beate Täubner, 754 Calau — Jürgen Marx, 728 Eilenburg — Ralf Stephan, 809 Dresden — Karl-Heinz Breitmoser, 20 Neubrandenburg — Evelyn Bach, 90 Karl-Marx-Stadt — Dietmar Tanzer, 7202 Böhlen — Karl-Heinz Müller, 9501 Weißbach — Karin Nowatzki, 1631 Klausdorf (Kr. Zossen) — Annemarie Pötzsch, 7901 Battin (Kr. Jessen) — Jürgen Leyh, 5906 Ruhla — Wolfgang Haase, 1711 Lynow (Kr. Luckenwalde) — Klaus-Dieter Lochotzke, 15 Potsdam — Hans-Jürgen Grundmann, 6508 Weida — Volker Schwandt, 5701 Seebach — Dietmar Wegner, 3601 Dardesheim — Gerd Morgner, 9701 Werda (Kr. Auerbach) — Uwe Treß, 703 Leipzig — Regina Senst, 1823 Görzke — Ulf Weigend, 6503 Gera-Langenberg — Ralf-Dieter Doleschal, 89 Görlitz.

Klassenstufe 9/10: Andreas Swoboda, 9101 Herrenhaide — Wolfgang Weise, 9112 Burgstädt — Ulrike Schmidt, 8027 Dresden — Friedhard Bauer, 6405 Schalkau — Reinhard Scheller, 328 Genthin — Wolfgang Gallinat, 1502 Babelsberg — Helga Persdorf, 729 Torgau — Karl Paul, 1544 Elstal — Manfred Wunderlich, 992 Oelsnitz — Gerd Philipp, 8504 Großhartau — Christoph Clauß, 9163 Gornsdorf — Waltraud Kühne, 701 Leipzig — Christian Philipp, 8506 Ohorn — Thomas Schindler, 75 Cottbus — Jürgen Klix, 1546 Staaken — Andreas Wichmann, 4011 Halle — Gudrun Zschocke, 9112 Burgstädt — Cornelia Burkholdt, 88 Zittau — Matthias Schulz, 8020 Dresden — Wolfgang Kernchen, 402 Halle — Klaus Kerkow, 1546 Staaken.

alpha-Wettbewerb 1967 – Statistik

1. Einsendung von Lösungen (gegliedert nach Aufgaben und Schuljahren):

Heft	Klassenstufe 5				Klassenstufe 6			
	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt
α_1	12	89	99	188	18	81	66	147
	13	75	86	161	19	94	106	200
α_2	50	48	37	85	54	30	46	82
	51	45	36	81	55	41	46	87
α_3	68	27	16	43	69	27	12	39
	81	24	16	40	84	24	13	37
	82	14	12	26	85	21	12	33
	83	15	8	23	86	10	6	16
α_4	106	68	68	136	107	71	54	125
	112	60	52	112	113	62	46	108
α_5	135	34	30	64	141	63	50	113
	136	32	25	57	142	65	42	107
ges.		531	485	1016		595	499	1094

Heft	Klassenstufe 7				Klassenstufe 8			
	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt
α_1	24	121	96	217	32	54	30	84
	25	74	60	134	33	108	54	162
α_2	58	26	19	45	61	29	14	43
	Bez. Oly.	26	24	50	Bez. Oly.	61	43	104
α_3	70	21	6	27	71	11	6	17
	87	7	4	11	90	13	5	18
	88	12	8	20	91	9	4	13
	89	13	12	25	92	4	3	7
α_4	108	69	70	139	109	151	74	225
	114	29	25	54	115	53	16	69
α_5	147	73	42	115	152	45	31	76
	148	55	39	94	153	47	24	71
ges.		526	405	931		585	304	889

Heft	Klassenstufe 9				Klassenstufe 10			
	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt
α_1	38	33	6	39	45	35	4	39
	39	54	21	75	46	42	5	47
α_2	64	23	7	30	67	70	19	89
	Bez. Oly.	39	12	51	Bez. Oly.	37	2	39
α_3	72	29	6	35	73	8	0	8
	93	16	4	20	96	16	2	18
	94	0	0	0	97	0	4	4
	95	0	0	0	98	7	1	8
α_4	110	92	55	147	111	56	8	64
	116	29	3	32	117	9	0	9
α_5	158	69	26	95	164	49	7	56
	159	78	32	110	165	116	40	156
ges.		462	172	634		445	92	537

2. Beteiligung (eingesandte Lösungen, gegliedert nach Bezirken):

Berlin	141	Schwerin	227	Gera	91
Frankfurt	137	Magdeburg	177	Leipzig	495
Potsdam	331	Halle	370	Cottbus	306
Neubrandenburg	159	Erfurt	358	Dresden	801
Rostock	621	Suhl	232	Karl-Marx-Stadt	655

3. Beteiligung (eingesandte Lösungen, gegliedert nach Schuljahren):

Klassenstufe	Jungen	Mädchen	gesamt
5	531	485	1016
6	595	499	1094
7	526	405	931
8	585	304	889
9	462	172	634
10	445	92	537
zusammen	3144	1957	5101

Von den 5101 eingesandten Lösungen wurden nur 386 als falsch bewertet.

An die Redaktion wurden zwischen dem 15. und 31. 1. 1968 zur Bewertung 521 Briefe eingesandt. Sie enthielten 3383 Karten. Im Durchschnitt enthielten die Briefe aus Klassenstufe 5/6 6,5 Karten, aus Kl. 6/7 6,7 Karten, aus Klasse 7/8 7,6 Karten, aus Kl. 8/9 6,8 Karten und aus Kl. 9/10 4,4 Karten. Der beste Schüler in Klassenstufe 5/6 legte 51 Karten, in Kl. 6/7 21 Karten, in Kl. 7/8 38 Karten, in Kl. 8/9 28 Karten und in Kl. 9/10 17 Karten vor. Die genannten Schüler lösten neben Aufgaben ihrer Klassenstufe die höherer Klassenstufen.

Berufsbild

Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur

Inhalt und Umfang des Arbeitsgebietes

Herstellen und Bearbeiten von Einzelteilen aus metallischen Werkstoffen und Zusammenfügen der gefertigten Bauelemente zur chemischen Anlage; Bedienen und Warten von Druckluft- und elektrisch getriebenen Werkzeugen; Anfertigen von Behältern aller Art, Rohren und Rohrleitungssystemen sowie aller Aggregate für Industrieanlagen; Durchführen von Dichtigkeitsproben; Lesen von Kesselbauzeichnungen und Montagezeichnungen; Ausführung von Schweiß- und Brennschneidearbeiten; Anreißen von Werkstattzeichnungen; Bedienung und Wartung von Bohrmaschinen aller Art, Schneidbrennern, E- und A-Schweißanlagen, Abkantbänken, Walzen, Meß- und Kontrollgeräten; Verarbeitung von Plasten. Der Chemieanlagenbauer stellt her und montiert Ausrüstungen für die chemische Industrie und artverwandte Industriezweige. Dazu gehören komplette Anlagen zur Gewinnung und Verarbeitung von anorganischen und organischen Stoffen. Auch Einzelausrüstungen wie Destillationskolonnen, Reaktionsgefäße, Hochdruckapparate, Zentrifugen werden vom Facharbeiter gefertigt und sachgemäß aufgestellt.

Voraussetzungen zum Erlernen des Berufes

Gesunder, kräftiger Körperbau. Widerstandsfähigkeit gegenüber Witterungseinflüssen und Temperaturschwankungen, Schwindelfreiheit und gute Sehschärfe; gute Leistungen in den mathem.-naturwissenschaftlichen Fächern.

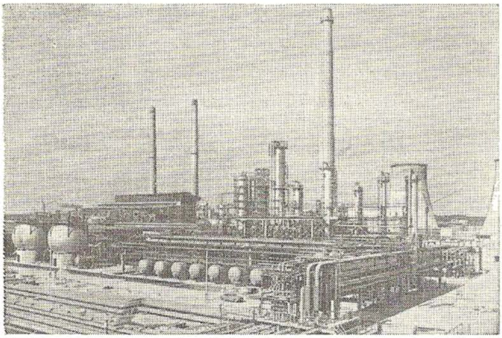
Möglichkeiten der Spezialisierung und Qualifizierung

Die umfassende Ausbildung während der Lehrzeit ermöglicht den Einsatz in allen Betrieben des chemischen Apparatebaus. Nach Bewährung in der Produktion ist die Qualifizierung zum Meister, Ingenieur und Diplomingenieur möglich, weiterhin zum Auslandsmonteur (Meisterqualifikation mit Sprachkenntnissen), Montageleiter (Ingenieurqualifikation mit Sprachkenntnissen), Chefmonteur (Diplomingenieur m. Sprachkenntnissen).

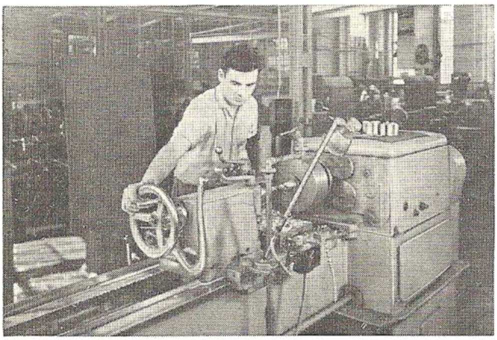
Patenschaft zwischen VEB MAG und 1. Oberschule Grimma

Viele Abgänger der 1. OS Grimma nehmen nach erfolgter Abschlußprüfung eine Lehre als Chemieanlagenbauer, Betriebsschlosser, Dreher, Lichtbogenschweißer, Maschinenbauzeichner oder Stenotypistin in dem VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma auf. Verschiedene Jahrgänge haben im Klassenverband eine berufliche Grundausbildung Chemieanlagenbau erfahren. Für alle Schüler der Schule erfolgt der Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion im VEB MAG.
Unser Patenbetrieb ist Hauptauftragnehmer für den Bau kompletter Chemieanlagen für das In- und Ausland. Neben Anlagen für unsere modernen Chemiebetriebe, z. B. Erdölverarbeitungswerk Schwedt, gehen Erzeugnisse in viele Länder des Erdballs. Erst vor kurzem fanden die Reisextraktionsanlagen, die in Burma installiert wurden, den Beifall der Fachwelt.
Die Berufsausbildung im VEB MAG fordert besonders gute Kenntnisse in den Fächern Mathematik, Physik und Chemie. In Mathematik erwarten die Ausbilder neben guten Grundkenntnissen besonders in der Gleichungslehre, der Trigonometrie und der Stereometrie sehr gute Leistungen. Um den interessierten Schülern einen Einblick in die sie später auf mathematischem Gebiet zu erwartenden Anforderungen zu geben, hat unser Patenbetrieb in vorbildlicher Weise in einer Broschüre über Entwicklung, Aufgaben, Berufsbilder des Betriebes herausgegeben und eine umfassende Aufgabensammlung aus ihrer betrieblichen Praxis angefügt. Sie entstand in Zusammenarbeit zwischen dem Fachzirkel der Mathematiklehrer unserer Schule und Mitarbeitern des Betriebes. Für die Leser von *alpha* wurde eine Auswahl dieser Aufgaben (von insgesamt 48) zusammengestellt. Wir würden uns freuen, entsprechende Aufgabensammlungen aus anderen Berufszweigen zu unserer Information zu erhalten.

J. Pönisch, Stellv. Direktor der 1. OS, 724 Grimma



Rohöldestillationsanlage im Erdölverarbeitungswerk Schwedt



Jungarbeiter an der Drehmaschine

Hinweis: Die zweite Wettbewerbsaufgabe des *alpha*-Wettbewerbs befindet sich auf den Seiten 54/55.

Aufgaben

5 **208** Wenn man die Maßzahlen der Austauschflächen zweier Kondensatoren A und B miteinander multipliziert, so ergibt das 12. Wieviel Quadratmeter Austauschfläche besitzt jeder der beiden Kondensatoren, wenn der Kondensator B eine um 4 m² größere Austauschfläche als der Kondensator A hat?

209 In einer Gießerei fertigen zwei Gießer zusammen 280 Gußstücke. Der erste Gießer stellt 50 Stück mehr her als der zweite. Wieviel Stücke gießt jeder?

W(5)210 Eine Werkstatt ist in einem Raum mit den lichten Abmessungen von 11 m Breite und 36 m Länge untergebracht. In dieser Werkstatt stehen 6 Maschinen. Die Maschinen und die sie bedienenden Arbeiter benötigen zusammen jeweils folgenden Platz:

Maschine 1	15 m²,
Maschine 2	5 m²,
Maschine 3	18 m²,
Maschine 4	60 m²,
Maschine 5	18 m²,
Maschine 6	50 m².

Der Platz für die Lagerung und Bereitstellung der Werkstücke an den Maschinen beträgt:

Maschine 1	14 m²,
Maschine 2	6 m²,
Maschine 3	15 m²,
Maschine 4	21 m²,
Maschine 5	13 m²,
Maschine 6	17 m².

Die restliche Fläche wird für Transportwege benötigt.

a) Wieviel Quadratmeter Bodenfläche verbleiben für die Transportwege?

b) Wie breit können die Transportwege angelegt werden, wenn ihre gesamte Länge 48 m beträgt? (Wir nehmen an, daß eine solche Anordnung der Maschinen und Lagerplätze möglich ist, die es erlaubt, die Transportwege stets gleich breit anzulegen.)

6 **211** Ein Kompressor drückt die Luft in einen Behälter. Damit der Druckluftbehälter und die gesamte Druckluftanlage vor Überlastung geschützt wird, muß der Druckluftbehälter nach den gesetzlichen Bestimmungen mit einem Sicherheitsventil versehen sein. Der einarmige Hebel des Sicherheitsventils ist 40 cm lang. Am Ende des Hebels ist ein Gewicht von 5 kp befestigt. Welche Kraft drückt auf das Ventil, wenn es 8 cm vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist?

212 Ein angerissenes Blech ist 6 cm länger als breit. Verlängert man Länge und Breite dieses rechteckigen Bleches um jeweils 4 cm, so nimmt sein Flächeninhalt um 72 cm² zu. Berechne Länge und Breite des rechteckigen Bleches!

W(6)213 Bei einem Fußpunktabstand von 250 m erscheint der Schornstein des Kesselhauses im VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma unter dem Erhebungswinkel
$\alpha = 11{,}3°$.

a) Wie hoch ist der Schornstein, wenn die Messung des Erhebungswinkels unmittelbar über dem Erdboden in einem ebenen Gelände erfolgte?

b) Um welche Strecke muß man sich dem Fußpunkt des Schornsteins nähern, damit er dem Beobachter unter dem doppelten Erhebungswinkel erscheint?

(Die Aufgabe ist mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung zu lösen!)

7 **214** Ein Werkzeugstahl enthält:
0,9% Kohlenstoff,
2% Silizium,
0,2% Mangan,
0,015% Phosphor,
0,005% Schwefel
und den Rest Eisen.

Wieviel Kilogramm von jedem Stoff sind in 18 kg dieses Werkzeugstahls enthalten?

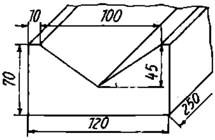
215 Ein Apparatebauer schneidet aus einer 2 m langen und 1 m breiten Blechtafel sechs Rohrmäntel parallel zur kürzeren Seite für Rohrstutzen. Vom Umfang jedes Mantels gehen 1,5 cm für die Schweißnaht ab. Wie groß ist der Durchmesser eines Rohres?

W(7)216 Für eine chemische Anlage sollen vier Behälter gebaut werden mit einem Gesamtinhalt von 10000 Liter. Welchen Rauminhalt haben die einzelnen Behälter (A, B, C und D), wenn die Maßzahlen ihrer Rauminhalte folgende Verhältnisse bilden:
A : B = 1 : 3; C : D = 4 : 13; B : C = 3 : 2?

8 **217** Nach der Eichordnung sollen Meßzylinder innen bis zum Eichstrich doppelt so hoch wie weit sein. In welcher Höhe über dem Boden muß deshalb der Eichstrich eines Fünfliter-Meßzylinders angebracht werden?

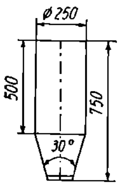
W(8)218 Eine Legierung besteht aus 57,5 g Blei und 114,0 g Zinn. Wie groß ist die Dichte der Legierung, wenn die Dichte von Blei 11,34 kg/dm³ und die Dichte von Zinn 7,28 kg/dm³ beträgt?

219 Wie groß ist die Masse des abge- 9
bildeten prismatischen Werkstückes aus Grauguß? Die Dichte von Grauguß beträgt 7,3 kg/dm³.

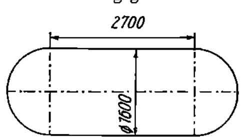


W(9)220 Durch eine konstruktive Verbesserung kann eine Welle aus Stahl von 650 mm Länge schwächer ausgeführt werden. Der Durchmesser für das (zylindrische) Rohrmaterial kann von 80 mm auf 75 mm verringert werden. Wie groß ist die Materialeinsparung in Prozent des ursprünglich benötigten Materials? Warum wird für die Lösung dieser Aufgabe die Angabe der Dichte des Stahls nicht benötigt? Welche Angabe ist außerdem noch überflüssig?

221 Es ist das Volumen des abgebil- 10
deten zylindrischen Behälters mit trichterförmigem Auslauf zu berechnen.



W(10/12)222 Der in der Zeichnung abgebildete Behälter besteht aus einem zylindrischen Teil und zwei halbkugelförmigen Teilen von dem gleichen Radius. Dabei sind die Innenmaße in mm angegeben.



a) Wie groß ist das Volumen des Behälters?

b) Wie groß ist seine Oberfläche?

c) Wie groß sind Durchmesser und Oberfläche eines kugelförmigen Behälters, der dasselbe Volumen hat?

d) Warum ist die Oberfläche im Falle c) kleiner als im Falle b)?

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

letzter Einsendetermin 1. Juli 1968

(Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe befindet sich auf der S. 52/53.)

Liebe Freunde!

An Aufgaben in *alpha* kann es nicht genug geben, das beweisen die zahlreichen Leserbriefe. Diejenigen Leser, welche noch mehr Futter haben möchten, empfehlen wir, sich Aufgabensammlungen anzufertigen. Zahlreiche Tageszeitungen und Zeitschriften veröffentlichen regelmäßig mathematische Probleme. In der Redaktion liegt eine umfassende Dokumentation vor. Als Anreiz zum selbständigen Sammeln (Anfertigen von Karteien) bieten wir 12 Beispiele:

NEUES DEUTSCHLAND

5 **196** Jemand schreibt zuerst alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000, als zweites alle Zahlen von 1 bis 10000 hintereinander auf. Muß er beim zweitenmal mehr oder weniger Nullen schreiben als beim erstenmal Ziffern?

W(5)197 An fünfzehn Arbeiter eines Betriebes wurden Prämien zu 100 M, 200 M, 300 M, 400 M und 500 M ausgegeben. Insgesamt wurden 2500 M vergeben. Wieviel Beschäftigte erhielten je 100 M?

FÜR DICH

Hier wird's knifflig!

6 **198** In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Winkel viermal so groß wie die beiden übrigen zusammen. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

W(6)199 Zur Uraufführung des Puppenspiels „Der gestiefelte Kater" waren viele Zuschauer gekommen. Die Hälfte und einer davon waren Kinder. Ein Viertel und zwei der Anwesenden waren Mütter, und ein Sechstel und drei waren Väter dieser Kinder. Wieviel Frauen, Männer und Kinder waren es?

neues leben

In Mathe eine „Vier"?

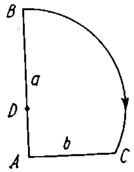
200 Bei einem Fahrrad betrage der 7
Durchmesser des Hinterrades 70 cm, das vordere Kettenrad habe 46 Zähne, das hintere 16 Zähne. Wie oft muß ein Radfahrer (ohne Verwendung des Freilaufes) die Pedalen durchtreten, um 120 km zurückzulegen?

W(7)201 Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 21mal so groß wie die Summe dieser Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich?

Junge Welt

Unsere Mathematikaufgabe

202 Ein rechtwinklig gebogener Stab mit 8
den Schenkellängen $\overline{AB} = a = 3100$ mm und $\overline{AC} = b = 2700$ mm soll in D so abgebogen werden, daß B nach C kommt. Wie groß ist die verbleibende Schenkellänge $\overline{AD}$?



W(8)203 Ein Trapez $ABCD$ ist so beschaffen, daß sich die beiden Kreise, die die Schenkel $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ des Trapezes zum Durchmesser haben, von außen berühren. Es ist zu beweisen, daß in diesem Trapez die Summe der Maßzahlen der parallelen Grundseiten gleich der Summe der Maßzahlen der Schenkel des Trapezes ist!

technikus

9 **204** Fritz hat 1,12 M in seiner Geldbörse, und zwar Zehn-, Fünf- und Einpfennigstücke. Insgesamt sind es 40 Münzen. Wieviel von jeder Sorte befinden sich in seiner Geldbörse?

W(9)205 In einer Klasse werden die Fächer Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Deutsch und Geschichte von den Lehrern Altmann, Brendel und Clausner erteilt. Jeder Lehrer unterrichtet genau zwei Fächer. Der Chemielehrer wohnt in demselben Haus wie der Mathematiklehrer. Herr Altmann ist von den drei Lehrern der jüngste. Der Mathematiklehrer und Herr Clausner spielen häufig Schach miteinander. Der Physiklehrer ist älter als der Biologielehrer, aber jünger als Herr Brendel. Der älteste der drei Lehrer hat einen längeren Heimweg als seine beiden Kollegen. Welche Lehrer unterrichten welche Fächer?

NBI

Arithmetische Gymnastik

206 Im Saal, in welchem eine Gesell- 10
schaft ihren Jahreskongreß abhalten wollte, waren mehr als 90, jedoch weniger als 100 Stühle aufgestellt worden. Doch es erschienen mehr Kongreßteilnehmer, als sich angemeldet hatten. Die Anzahl der Stühle mußte deshalb verdoppelt werden. Allerdings blieb nunmehr ein Zwölftel der Plätze unbesetzt. Wieviel Teilnehmer hatten sich zu dem Jahreskongreß eingefunden?

W(10/12)207 A ist eine 1966 stellige natürliche Zahl, die durch 9 teilbar ist. B ist die Quersumme der Zahl A, und C ist die Quersumme der Zahl B. Finden Sie die Quersumme der Zahl C!

---

alpha berichtet

☐ **Moskau** Vom 7. bis 21. Juli 1968 findet in der Hauptstadt der Sowjetunion die X. Internationale Mathematikolympiade statt.

☐ **Rostock** Die Wissenschaftliche Jahrestagung 1968 der Mathematischen Gesellschaft der DDR wurde vom 12. bis 17. Februar in Rostock durchgeführt. Wir werden in H. 3/68 darüber berichten.

☐ **Cottbus** Ende August eröffnete Bezirksschulrat Oberstudienrat Dr. Fuhrich den *Bezirksklub Junger Mathematiker* in Herzberg.

☐ **Dresden** Wer Mitglied des *Klubs Junger Mathematiker* (Klassenstufe 8) am Institut für Unterrichtsmethodik der Mathem. und Naturw. der TU Dresden werden wollte, mußte eine Aufnahmeprüfung bestehen (Herbst 1967). Seine Teilnehmer kommen alle 14 Tage zusammen, um ihre mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Cornelia Wunderlich, 53. OS Dresden, sandte unseren Lesern eine Aufgabe:

Bilde die Produktmenge $M \times N$!

a) $M = \{a; b; c\}$ $\quad N = \{x; y; z\}$
b) $M = \{1; 2; 3; 4\}$ $\quad N = \{1\}$
c) $M = \{4; 5; 6; 7\}$ $\quad N = \emptyset$

☐ **Budapest** Die Klasse IVb (das entspricht unserem 12. Schlj.) des Móricz Zsigmond Gymnasiums grüßt die Leser von *alpha* herzlich. An dieser Schule bestehen vier Mathematikzirkel, die alle zwei Wochen zusammen kommen, um über die Lösung von Aufgaben, die zu Hause bearbeitet wurden, zu sprechen. Im Programm standen weiterhin: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, algebraische Gleichungen ersten und zweiten Grades, einfache Probleme der Graphentheorie, lineare Optimierung u. a.
Die ungarischen Freunde sandten uns eine Aufgabe und würden sich über Einsendungen direkt nach Budapest freuen:
Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks. Man zeichne die Gerade, die AC im Punkt X und BC im Punkt Y so schneidet, daß gilt: $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YB}$.

Lösungen

105 Lösung der Aufgabe
von Prof. Dr. habil. L. Görke

Für die Lösbarkeit der Aufgabe ist es notwendig, daß das gegebene Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Parallelogramm ist. Begründung:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges konvexes Viereck (Abb. 1). Seine Seitenmittelpunkte bilden dann die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten den Viereckdiagonalen AC bzw. BD parallel sind (Umkehrung des Strahlen-

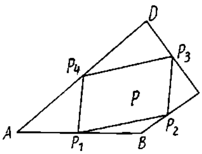


Abb. 1

satzes, angewandt auf die Strahlenbüschel mit den Scheiteln A, bzw. B, C, D). Die nachfolgende Konstruktion mit Beweis zeigt, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, um ein Viereck $ABCD$ der gewünschten Art zu konstruieren.

Konstruktion: Gegeben ist das Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$. Wir wählen einen Punkt A beliebig in derjenigen von der Geraden P_1P_4 gebildeten Halbebene, die das Parallelogramm nicht enthält, verbinden ihn mit P_1, verlängern die Strecke $\overline{AP_1}$ über P_1 hinaus um sich selbst und nennen den so entstandenen Punkt B. Punkt B verbinden wir mit P_2, verlängern wideer BP_2 über P_2 hinaus um sich selbst und erhalten einen Punkt C, den wir mit P_3 verbinden. Die entsprechende Verlängerung führt auf den Punkt D (Abb. 2). Wir verbinden D noch mit A und erhalten ein Viereck, das P_1, P_2, P_3, P_4 zu Seitenmitten hat.

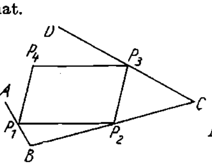


Abb. 2

Beweis:

Nach Konstruktion sind P_1, P_2, P_3 Seitenmitten des Vierecks $ABCD$. Es ist nur noch zu zeigen, daß P_4 auf der Seite $\overline{DA}$ liegt und sie halbiert.

Nehmen wir an, P_4 läge nicht auf $\overline{DA}$. Dann wird $\overline{DA}$ durch die Geraden P_3P_4 und P_1P_4 in den beiden Punkten P' und P'' geschnitten (Abb. 3). Wir haben zu zeigen, daß diese beiden Punkte zusammenfallen.

Wir zeichnen die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und betrachten zunächst das Büschel mit dem Scheitel B und den Strahlen BA und BC. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt aus der Konstruktion, daß $\overline{AC}$ parallel zu $\overline{P_1P_2}$, also auch parall. zu der Geraden P_3P' ist. Auf das Bündel mit dem Scheitel D, den Strahlen DC und DA und den Parallelen AC und P_3P' wenden wir den Strahlensatz an und finden:

$|\overline{DP'}| : |\overline{P'A}| = |\overline{DP_3}| : |\overline{P_3C}| = 1 : 1.$

(Unter $|\overline{XY}|$ ist die Länge der Strecke $\overline{XY}$ zu verstehen.) Der Punkt P' halbiert also die Strecke $\overline{AD}$.

Dasselbe behaupten wir von dem Punkt P'': Auch er halbiert die Strecke $\overline{AD}$. Um dies einzusehen, betrachten wir das Bündel mit dem Scheitel C und den Strahlen CB und CD. Aus der Konstruktion folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes, daß $\overline{BD}$ parallel zu $\overline{P_2P_3}$, also auch parallel zu der Geraden P_1P'' ist. Wir suchen jetzt wieder das gegenüberliegende Bündel mit dem Scheitel A, den Strahlen AB und AD und den Parallelen P_1P'' und BD auf und finden nach dem Strahlens.:

$|\overline{AP''}| : |\overline{P''D}| = |\overline{AP_1}| : |\overline{P_1B}| = 1 : 1.$

Also halbiert auch P'' die Strecke $\overline{AD}$, wie soeben behauptet wurde.

Eine Strecke kann aber nur in einem einzigen Punkt halbiert werden. Daher müssen die Punkte P' und P'' zusammenfallen, also mit P_4 identisch sein. Wäre die Konstruktion in

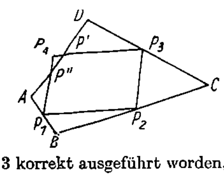


Abb. 3

Abb. 3 korrekt ausgeführt worden, so hätten von vornherein nicht zwei verschiedene Punkte P' und P'' entstehen können. Damit ist gezeigt, daß P_4 auf der Strecke $\overline{AD}$ liegt und sie halbiert. Das Viereck $ABCD$ erfüllt die Forderungen der Aufgabe, die anfangs genannte Bedingung ist hinreichend für die Existenz einer Lösung. Nachbetrachtung: Aus der Konstruktion geht hervor, daß es unendlich viele Vierecke $ABCD$ der verlangten Art gibt, sofern nur das gegebene konvexe Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Parallelogramm ist. Vielleicht findet ihr noch einen anderen Lösungsweg?

Aufgaben aus sowjetischen Mathematiklehrbüchern

131 Die Kosten für 6 Lampen betragen bei einer Brenndauer von 15 Minuten genau 2 Kopeken. Sie betragen für 210 Lampen in der gleichen Zeit 35mal so viel, das heißt 70 Kopeken. Brennen diese 210 Lampen 30 Tage lang täglich 15 Minuten, erhöhen sich die Kosten auf 2100 Kopeken, das sind 21 Rubel. Bei einer unnützen Brenndauer von 5 Minuten täglich ergibt sich demnach für die Schule eine Mehrausgabe von 7 Rubel.

132 Die geordneten Teiler der Zahl 84 sind 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.
Es gilt $1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12 = 84$.

133 Die Quelle liefert in 4 Sekunden 2 Liter Wasser, also in 2 Sekunden 1 Liter Wasser. Ein Tag hat $60 \cdot 60 \cdot 24 = 86400$ Sekunden. Aus $86400 : 2 = 43200$ folgt, daß die Quelle an einem Tag 43200 Liter Wasser liefert.

134 80 Eulen vertilgen in 15 Jahren $80 \cdot 1000 \cdot 15 = 1200000$ Feldmäuse. Durch die Eulen werden also in 15 Jahren 1200000 kg bzw. 1200 t Korn erhalten.

W(5)135 Durch $2 \cdot 30 + 20 = 80$ ermitteln wir die Höhe des Glockenturms (80 m), dann beträgt die Höhe der Universität $3 \cdot 80\text{ m} = 240\text{ m}$. Die Höhe der Gebäude über dem Spiegel der Moskwa beträgt also für den Glockenturm 110 m, für die Universität 318 m.

W(5)136 Aus $9 \cdot (31 + 37) = 612$ folgt, daß beide Züge in 9 Stunden zusammen eine Strecke von 612 km zurücklegen.
Aus $892 - 612 = 280$ folgt, daß diese Züge nach 9 Stunden Fahrzeit noch 280 km voneinander entfernt sind.

137 Wir nehmen an, die Brigade mußte täglich nach dem Plan x m³ Holz bereitstellen. Es gilt dann

$$\begin{aligned}(x+14) + (x-2) + (x+16) &= 184,\\ 3x + 28 &= 184,\\ 3x &= 156,\\ x &= 52.\end{aligned}$$

52 m³ Holz betrug das tägliche Plansoll.

138 Die erste zweistellige natürliche Zahl sei $10a + b$; die durch Vertauschen der Ziffern erhaltene Zahl ist dann $10b + a$. Aus $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ folgt, daß die Summe aus beiden Zahlen durch 11 teilbar ist.

139 Der erste Summand sei n, dann ist der zweite Summand $132 - n$. Es gilt

$$\frac{1}{5}n = \frac{1}{6}(132 - n),$$
$$\frac{6}{5}n = 132 - n,$$
$$\frac{11}{5}n = 132,$$
$$n = 60.$$

Die Summanden sind demnach die Zahlen 60 und 72.

140 Das k. g. V. der Zahlen 28, 16 und 12 beträgt 336; $336 : 7 = 48$. Nach 48 Wochen und zwar wieder an einem Dienstag treffen alle Züge gleichzeitig in Moskau ein.

W(6)141 Das k. g. V. der Zahlen 16 und 18 ist 144. Nach 144 Tagen, also am 6. September (bzw. 5. September), begegnen sich die Fahrgastschiffe in Moskau wieder.

W(6)142 Die zu ermittelnde gebrochene Zahl finden wir durch Erweitern des Bruches $\frac{4}{7}$ mit der Zahl n; der erweiterte Bruch ist $\frac{4n}{7n}$.
Ferner gilt $7n - 4n = 21$, also $n = 7$.
Die Zahl $\frac{28}{49}$ finden wir als Lösung.

143 $(1695 - 45) : 2 = 825$; $825 + 45 = 870$.
1. Brigade: Es wurden in 225 Tagen 870 m geschafft, davon in den ersten 25 Tagen 70 m, also in den verbleibenden 200 Tagen 800 m.
2. Brigade: Es wurden in 225 Tagen 825 m geschafft, davon in den ersten 25 Tagen 65 m, also in den verbleibenden 200 Tagen 760 m.
Die erste Brigade schaffte in den ersten 25 Tagen täglich 2,8 m, danach täglich 4 m; das bedeutet eine Steigerung um etwa 42,9 %.
Die zweite Brigade schaffte in den ersten 25 Tagen täglich 2,6 m, danach täglich 3,8 m; das bedeutet eine Steigerung um etwa 46,2 %.

144 Es sei x die Anzahl der Schüler, die an der ersten Stufe der Mathematik-Olympiade teilnehmen; dann gilt

$$x \cdot \frac{35}{100} \cdot \frac{2}{9} = 1 + 2 + 5 + 20;\ x = 360.$$

Es nahmen 360 Schüler an der ersten Stufe teil.

145 Die Kosten nach Umstellung auf örtlich anfallende Kohle betragen $\frac{7}{3} : \frac{28}{3} = \frac{1}{4}$ der ursprünglichen Kosten. Somit wurden 75 % Kosten eingespart.

146 4 Tage und 14 Stunden sind 110 Stunden. Die Geschwindigkeit des Zuges sei v_1, die des Dampfers v_2, die des Pferdes v_3; dann gilt:

$v_3 = \frac{1}{8} v_1$; $v_3 = \frac{1}{4} v_1 : v_2 : v_3 = 8:4:1$.

Die Zeiten sind umgekehrt proportional den zugehörigen Geschwindigkeiten, es gilt also $s_1 : s_2 = 4 : 8 = 1 : 2$;
$s_2 : s_3 = 1 : 4 = 2 : 8$; $s_1 : s_2 : s_3 = 1 : 2 : 8$;
$110 : 11 = 10$; also $s_1 = 10$ Std., $s_2 = 20$ Std., $s_3 = 80$ Std.
Die Geologen fuhren 10 Std. mit dem Zug, 20 Std. mit dem Dampfer, und 80 Std. ritten sie zu Pferde.

W(7)147 $27{,}2 : 8 = 3{,}4$; 3,4 t Schrott zu 4 Rubel je Tonne bringen den Erlös von 13,6 Rubel;
$27{,}2 - 3{,}4 = 23{,}8$; 23,8 t Schrott verbleiben, sie werden im Verhältnis 3 : 4 geteilt;
$x : (23{,}8 - x) = 3 : 4$; $x = 10{,}2$. 10,2 t zu 12,5 Rubel je Tonne bringen 127,5 Rubel, 13,6 t zu 15 Rubel je Tonne bringen 204 Rubel. Der Gesamterlös beträgt demnach 345,1 R.

W(7)148 Die Geschwindigkeit des Minutenzeigers sei v_1, die des Stundenzeigers v_2; dann gilt:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2\pi r_1}{t_1} = \frac{2\pi \cdot 2}{1} = 4\pi;$$
$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{2\pi r_2}{t_2} = \frac{2\pi \cdot 1{,}5}{12} = \frac{1}{4}\pi;$$
$$v_1 : v_2 = (4\pi) : \left(\frac{1}{4}\pi\right) = 16 : 1.$$

Die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers ist 16mal so groß wie die der Spitze des Stundenzeigers.

149 Die Maßzahl des Volumens des Eisberges (in m³) sei x. Dann ist die Maßzahl seiner Masse (in t) $0{,}9x$. Ferner beträgt die Maßzahl der Masse (in t) des verdrängten Wassers $1{,}03\,(x - 2000)$. Man erhält also die Gleichung

$$1{,}03\,(x - 2000) = 0{,}9x\,,$$
$$0{,}13x = 2060\,,$$
$$x = \frac{2060}{0{,}13} \approx 15800\,.$$

Das Volumen des Eisberges beträgt rund 15800 m³.

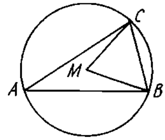
150 Die Bodenfläche des Behälters hat die Form eines Kreisrings und daher den Flächeninhalt

$$A = \left(\frac{\pi}{4}\,78^2 - \frac{\pi}{4}\,36^2\right) \text{cm}^2$$
$$\approx (4778 - 1018)\ \text{cm}^2 = 3760\ \text{cm}^2\,.$$

Da der Behälter ein Gewicht von $G = 752$ kp hat, beträgt der Druck, den er auf das Fundament ausübt,

$$p = \frac{G}{A} \approx \frac{752}{3760}\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{5}\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 0{,}200\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}\,.$$

151 Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, so daß $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ ist. Dann ist $\sphericalangle\, CMB = 60°$ als Zentriwinkel, der zu derselben Sehne $\overline{BC}$ gehört wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle\, CAB = 30°$.
Das Dreieck CMB ist nun nicht nur gleichschenklig, sondern wegen $\sphericalangle\, CMB = 60°$ sogar gleichseitig; d. h., es ist auch $\overline{BC} = r$, w. z. b. w.



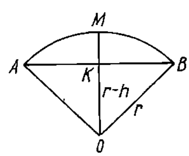
W(8)152 Benötigt der erste Bagger für die Aushebung der Baugrube allein x Tage, so benötigt der zweite Bagger allein $1{,}5x$ Tage. Ferner gilt $\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}5x} = \frac{1}{24}$, also $36 + 24 = 1{,}5x$, d. h. $1{,}5x = 60$, $x = 40$.
Der erste Bagger könnte also allein die Arbeit in 40 Tagen, der zweite Bagger allein in 60 Tagen ausführen.

W(8)153 Es sei x die Maßzahl der Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ der Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden, dann ist $2x$ die Maßzahl der Geschwindigkeit der Fahrstühle in den Hochhäusern. Man erhält die Gleichung

$\frac{81}{2x} = \frac{33}{x} + 5$ und hieraus wegen $x \neq 0$
$81 = 66 + 10x$, d. h., $10x = 15$, $x = 1{,}5$.
Die Geschwindigkeit der Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden beträgt daher $1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und in Hochhäusern $3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

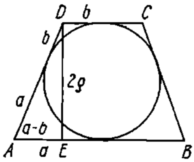
154 In dem rechtwinkligen Dreieck KOB ist $\overline{OB} = r = 8{,}5$ m, $\overline{OK} = r - h = 5{,}5$ m, und es sei $\overline{KB} = x$ m. Dann gilt

$$x^2 = 8{,}5^2 - 5{,}5^2 = 72{,}25 - 30{,}25 = 42.$$



Daraus folgt $x \approx 6{,}48$ und $2x \approx 12{,}96$. Die Spannweite $\overline{AB}$ der Brücke beträgt also rund 13 m.

155 Es seien $ABCD$ das dem Kreise (mit der Maßzahl ϱ des Radius) umschriebene Trapez und $2a$ die Maßzahl der Grundseite $\overline{AB}$, $2b$ die Maßzahl der Grundseite $\overline{CD}$.

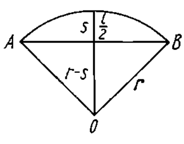


Ferner sei E der Fußpunkt des von D auf $\overline{AB}$ gefällten Lotes. Dann ist $a + b$ die Maßzahl der Strecke $\overline{AD}$, $a-b$ die Maßzahl der Strecke $\overline{AE}$ und 2ϱ die Maßzahl der Strecke $\overline{DE}$. Da das Dreieck AED rechtwinklig ist, folgt

$$(a+b)^2 = (2\varrho)^2 + (a-b)^2\,,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 4\varrho^2 + a^2 - 2ab + b^2,$$
$$4ab = 4\varrho^2\,,$$
$$ab = \varrho^2\,,$$
$$a : \varrho = \varrho : b\,.$$

156 Es sei $2r$ der zu messende Durchmesser. Dann gilt

$$r^2 = (r-s)^2 + \frac{l^2}{4},$$
$$r^2 = r^2 - 2rs + s^2 + \frac{l^2}{4},$$
$$2rs = s^2 + \frac{l^2}{4},$$
$$2r = \frac{s^2 + \frac{l^2}{4}}{s} = \frac{l^2 + 4s^2}{4s} = \frac{40000 + 2500}{100}\,\text{mm}$$
$$= 425\,\text{mm}.$$



Der Durchmesser der Scheibe beträgt 425 mm; die Formel lautet

$$2r = \frac{l^2 + 4s^2}{4s}.$$

157 Die Entfernung von Moskau bis Kiew sei gleich a. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges betrage bei Windstille v, bei dem Flug von Moskau nach Kiew (also mit dem Wind) $v + x$ und bei dem Rückflug (also gegen den Wind) $v - x$. Unter normalen Flugbedingungen kann man dabei stets $x < v$ annehmen. Dann ist die Zeit für den Hin- und Rückflug

bei Windstille $t_0 = \frac{a}{v} + \frac{a}{v} = \frac{2a}{v}$,

bei einem mit konstanter Stärke in Richtung Moskau — Kiew wehenden Wind

$$t_1 = \frac{a}{v+x} + \frac{a}{v-x} = a\cdot\frac{v-x+v+x}{v^2-x^2}$$
$$= \frac{2av}{v^2-x^2} = \frac{2a}{v - \frac{x^2}{v}}\,.$$

Nun ist $v > v - \frac{x^2}{v}$, also $\frac{1}{v} < \frac{1}{v - \frac{x^2}{v}}$, d. h., $t_0 < t_1$.

Der Hin- und Rückflug wird also bei Windstille schneller zurückgelegt.

W(9)158 Aus der der Aufgabe beigefügten Zeichnung erkennen wir, daß sich die Figur angenähert aus einem Viertelkreisring mit den Radien $R + t$ und R sowie zwei Rechtecken, die jeweils die Seitenlängen $a - t$ und t haben, zusammensetzt. Daher gilt für den Flächeninhalt

$$A \approx \frac{\pi}{4}(R+t)^2 - \frac{\pi}{4}R^2 + 2(a-t)t,$$
$$A \approx \frac{\pi}{4}2Rt + \frac{\pi}{4}t^2 + 2at - 2t^2$$
$$A \approx \left(\frac{\pi}{2}R + 2a\right)t - \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)t^2\,,$$
$$A \approx (1{,}571\,R + 2a)t - 1{,}215\,t^2.$$

W(9)159 Das Volumen des Zylinders beträgt

$$V_1 = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Das Volumen des Kegels beträgt

$$V_2 = \frac{\pi}{3}r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

und das Volumen der Kugel $V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Daher gilt

$$V_2 + V_3 = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi r^3 = V_1,$$

w. z. b. w.

160 Ist x die Maßzahl der Geschwindigkeit (in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) der *Rakete*, so ist $x - 50$ die Maßzahl der Geschwindigkeit des Dampfschiffes. Man erhält die Gleichung

$$\frac{210}{x} + 7{,}5 = \frac{210}{x-50},$$
$$210(x-50) + 7{,}5x(x-50) = 210x\,,$$
$$28(x-50) + x(x-50) = 28x\,,$$
$$28x - 1400 + x^2 - 50x = 28x\,,$$
$$x^2 - 50x - 1400 = 0\,.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$x_1 = 25 + \sqrt{625 + 1400} = 25 + \sqrt{2025}$
$= 25 + 45 = 70$.

Die Geschwindigkeit der *Rakete* beträgt daher $70\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

161 Setzt man $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ und $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, so folgt $a^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ und $b^2 = 8 + 2\sqrt{12}$,
also $a^2 - b^2 = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{12} > 0$,
da $15 > 12$ ist.
Daher gilt $a^2 > b^2$ und wegen $a > 0$, $b > 0$ auch $a > b$.

162 Aus $\sin\alpha + \cos\alpha = m$ folgt
$m^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Daher gilt $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{m^2 - 1}{2}$.

163 Wegen $\sin\alpha \neq 0$ erhält man

$$\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1 + \cot^2\alpha}{1 - \cot^2\alpha}.$$

W(10)164 Angenommen, es sei x_1 eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen.

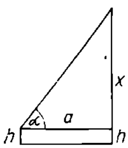
$$\begin{array}{lll} \text{Dann gilt } x_1^2 + ax_1 + 1 & = 0 & (1) \\ \text{und} \quad x_1^2 + x_1 + a & = 0 & (2), \\ \text{also} \quad ax_1 + 1 - x_1 - a & = 0, & \\ x_1(a-1) - (a-1) & = 0, & \\ (x_1 - 1)(a - 1) & = 0. & (3) \end{array}$$

Die Gleichung (3) ist in den folgenden beiden Fällen erfüllt:

1. $a = 1$. In diesem Fall lauten die Gleichungen $x^2 + x + 1$ (1) und $x^2 + x + 1$ (2). Sie haben, da sie identisch sind, zwei gemeinsame, jedoch nicht reelle Lösungen.

2. $x_1 = 1$. In diesem Fall erhält man aus (1) $a = -2$, und die Gleichungen lauten
$x^2 - 2x + 1 = 0$ (1) und $x^2 + x - 2 = 0$ (2)
mit der gemeinsamen Lösung $x_1 = 1$.

W(10)165 Es sei $x + h$ die Höhe des Turmes, dann gilt $\tan\alpha = \dfrac{x}{a}$, also



$x = a\tan\alpha \approx 180 \cdot \tan 53°\ \mathrm{m}$,
$x \approx 180 \cdot 1{,}327\ \mathrm{m} \approx 238{,}9\ \mathrm{m}$,
also $x + h \approx 240{,}1\ \mathrm{m}$.

Die Höhe des Turmes des Hauptgebäudes der Lomonossow-Universität in Moskau beträgt also rund 240 m.

166 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. N. Tschajkovskyj

Wir führen „Schachbrettkoordinaten" ein: längs der Horizontalen die Buchstaben *a*, *b*, ..., bis *h*, längs der Vertikalen die Zahlen 1 bis 8. Wir haben zuerst 64 1-feldrige Quadrate. Um alle 4-feldrigen Quadrate zu finden, betrachten wir je zwei Nachbarspalten. Wir haben: *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, *gh* — insgesamt 7 Paare. Wenn wir alle diese Quadrate aufwärts verschieben, müssen wir folgende Zeilenpaare nehmen: 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, also auch 7 Paare. Daher beträgt die Anzahl der 4-feldrigen Quadrate $7 \cdot 7 = 49$. Dann suchen wir alle 9-feldrigen Quadrate, bilden also 6 Spaltentripel: *abc*, *bcd*, *cde*, *def*, *efg*, *fgh* und ebensoviele Zeilentrippel: 123, 234, 345, 456, 567, 678. Wir erhalten also $6 \cdot 6 = 36$ 9-feldrige Quadrate. Ganz analog erhalten wir $5 \cdot 5 = 25$ 16-feldrige Quadrate, $4 \cdot 4 = 16$ 45-feldrige Quadrate, $3 \cdot 3 = 9$ 36-feldrige Quadrate, $2 \cdot 2 = 4$ 49-feldrige Quadrate und endlich $1 \cdot 1 = 1$, also ein 64-feldriges Quadrat.

$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$

Auf dem Schachbrett gibt es 204 Quadrate.

167 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. S. Brehmer

Aufgabe a: Für $A \neq 0$, $y \neq 0$ ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ay^2\left(z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}\right)$$
$$\left(z = \frac{x}{y}\right).$$

Der Faktor $z^2 + \dfrac{B}{A}z + \dfrac{C}{A}$ läßt sich genau dann in Linearfaktoren $z - z_1$, $z - z_2$ zerlegen, wenn $\left(\dfrac{B}{2A}\right)^2 - \dfrac{C}{A} \geqq 0$ oder, was gleichbedeutend ist, wenn

$$\boxed{B^2 - 4AC \geqq 0} \qquad (1)$$

ist, d. h., wenn die sogenannte *Diskriminante* $B^2 - 4AC$ der quadratischen Form nichtnegativ ist. Wir zeigen, daß (1) die gesuchte Bedingung ist.

Es gelte (1). Im Falle $A \neq 0$, $y \neq 0$ ist dann $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ay^2 (z-z_1)(z-z_2) = (Azy-Az_1y)(zy-z_2y)$, d. h., wegen $zy = x$ ist

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (Px + Qy)(Rx + Sy)} \tag{2}$$

mit $P = A$, $Q = -Az_1$, $R = 1$, $S = -z_2$. Die Gleichung (2) gilt dann offenbar auch für $y = 0$, also für alle reellen Zahlen x, y. Im Falle $A = 0$ gilt ebenfalls (2) mit $P = 0$, $Q = 1$, $R = B$, $S = C$. Ist umgekehrt (2) erfüllt, so ist $A = PR$, $B = PS + QR$, $C = QS$ und es folgt

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (PS + QR)^2 - 4\,PRQS \\ &= P^2S^2 + Q^2R^2 - 2\,PRQS \\ &= (PS - QR)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

d. h., (1) ist erfüllt.

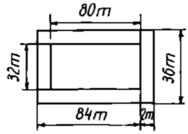
Aufgabe 197 b siehe Heft 3/68.

Lösungen der Aufgaben zu:
Als Mathematiklehrer in Tansania

1. Der Zeichnung entnehmen wir:

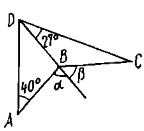
$$36 \cdot 84 - 32 \cdot 80 = 3024 - 2560 = 464;$$

der Flächeninhalt der gepflasterten Fläche beträgt 464 m².



2. Es sei n die zu ermittelnde dritte Zahl; dann gilt
$n \cdot 19 \cdot 26 = 6422$; $n = 6422 : (19 \cdot 26)$;
$n = 13$.

3. Aus $\overline{AB} = \overline{BD}$ folgt, daß das Dreieck ABD gleichschenklig ist. Der Winkel α ist als Außenwinkel des Dreiecks ABD doppelt so groß wie ein Basiswinkel, also $\alpha = 80°$.

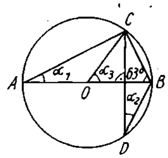


Aus $\overline{BC} = \overline{BD}$ folgt, daß das Dreieck BCD gleichschenklig ist. Der Winkel β ist als Außenwinkel des Dreiecks BCD doppelt so groß wie ein Basiswinkel, also $\beta = 54°$.

4. $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{6+3+1}{42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$;

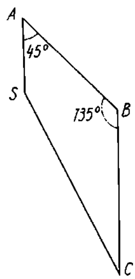
$\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} = \frac{29 + 12 + 4 + 3}{696} = \frac{48}{696} = \frac{2}{29}$.

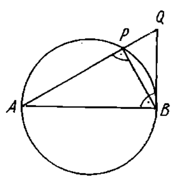
5. Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein rechter Winkel; also gilt $\sphericalangle\, ACB = 90°$. Dann gilt weiterhin $\alpha_1 = 90° - 63° = 27°$. Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises sind untereinander kongruent; also gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = 27°$. Aus $\overline{OB} = \overline{OC} = r$ folgt, daß das Dreieck OBC gleichschenklig ist; deshalb gilt $\alpha_3 = 180° - 2 \cdot 63° = 54°$.



6. Die maßstabgerechte Zeichnung könnte wie folgt aussehen: (8 sm $\triangleq$ 1 cm).

Meßergebnis: $\overline{SC} = 3{,}5$ cm. Das Boot hat vom Standort S die Entfernung $\overline{SC} = 28$ sm.



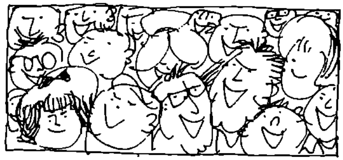


7. Der Zeichnung entnehmen wir: $\sphericalangle\, APB = \sphericalangle\, BPQ = \sphericalangle\, ABQ = 90°$.

Wir zeichnen die Strecke $\overline{BQ} = 3$ cm und konstruieren über $\overline{BQ}$ als Durchmesser den Thaleskreis. Der Kreis um Q mit dem Radius $r = 1$ cm schneidet den ersten Kreis in den Punkten P bzw. P'. Durch den Punkt B zeichnen wir nun eine Senkrechte auf $\overline{BQ}$; sie schneidet die Geraden QP bzw. QP' in den Punkten A bzw. A'. Die Kreise k bzw. k' über $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BA'}$ als Durchmesser sind die zu konstruierenden Kreise; es gibt also zwei Lösungen.

Lösungen zu *alpha*-heiter 1/68: 36 : 9 = 4; 36 + 3 = 39; 4 + 9 = 13; 39 : 3 = 13 — Junge Gärtner: Es gibt 13 verschiedene Möglichkeiten — Durchschnittlich schoß jeder Jäger genau zwei Hasen. Das sind bei k Schützen $2k$ Hasen; 3mal $2k$ Hasen = $6k$ Hasen; Verhältnis 1 : 6 — Es gibt 44 Möglichkeiten, die Briefe falsch einzustecken — Bildrätsel: FREUNDSCHAFT.

In freien Stunden
alpha heiter



Zauberkunststück!?

Versucht folgende „Konzentrationsübung". Gebt einem Freund ein Kartenspiel (32 Blatt) mit der Aufforderung, er möge eine Karte verdeckt herausnehmen. Dann versucht nach zweimaligem Durchblättern der restlichen 31 Karten, die fehlende zu bestimmen. Das ist normalerweise unmöglich! Die Mathematik macht dieses „Kunststück" möglich. Beachte, daß die Summe aller Kartenwerte 176 beträgt (7, 8, 9, 10, Bube: 2, Dame: 3, König: 4, As: 1). Beim ersten Durchblättern addiert man alle Werte so, daß volle Zehner unberücksichtigt bleiben. ($7 + 8 \rightarrow 5$ oder $9 + 4 \rightarrow 3$). Man erhält zum Schluß eine einstellige Zahl a. Nun ist $176 = 160 + 16$, das bedeutet, da die 16 Zehner unberücksichtigt blieben, daß a und der Wert der fehlenden Karte zusammen 16 ergeben. Eure Rechnung: $16 - a = x$. (Beachte bei $a = 4(5)$, daß dann $x = 12(11)$ wird. In diesem Falle muß man von 12(11) noch 10 subtrahieren.) Das zweite Durchblättern ergibt dann schnell die Lösung, da man schon weiß, ob eine 8, ein Bube (2) usw. fehlt.
Für diejenigen, die schon mit Zahlenkongruenzen vertraut sind, ist der mathematische Gehalt dieses „Kunststücks" völlig klar ($176 \equiv 16 \pmod{10}$).

H. Pätzold, OS Waren/Müritz

Vorsicht bei der Antwort!

Sind die folgenden Aussagen uneingeschränkt richtig, oder müssen bestimmte Einschränkungen gemacht werden?
1. Die Hälfte einer Zahl ist stets kleiner als die Zahl selbst!
2. Eine Zahl, die nicht positiv ist, ist stets negativ!
3. Jedes Viereck läßt sich in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegen!
4. Wenn die Differenz zweier Zahlen Null ist, dann ist die Summe dieser beiden Zahlen stets positiv!
5. Das Quadrat einer Zahl ist stets größer als die Zahl selbst!
6. Wenn ein Drittel einer Zahl um 20 kleiner ist als die Hälfte dieser Zahl, dann ist die Zahl größer als 100!

H. Pätzold, OS Waren/Müritz

Kusi - kusi

Die Spielregeln dieses sich in letzter Zeit in Leningrad wachsender Beliebtheit erfreuenden Spiels auf einem Schachbrett sind sehr einfach:
Die Weißen stellen acht Damesteine auf die erste Horizontale, die Schwarzen dagegen auf die achte, wonach abwechselnd gezogen wird. Jeder Zug besteht aus der Bewegung eines eigenen Damesteines in der Vertikalen nach vorn oder zurück über eine beliebige Anzahl von Feldern, jedoch nur bis zu einem feindlichen Damestein. Der Spieler, der keine Möglichkeit mehr hat, den nächstfolgenden Zug auszuführen, hat verloren. (Eine Gewinnmethode für das Spiel ist kompliziert, kann aber bei aufmerksamer, genauer Analyse ebenfalls gefunden werden.)
Dieses Spiel fand ich beim Lesen des soeben erschienenen Buches des sowjetischen Wissenschaftlers N. N. Vorobjoff: Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967, 6,80 M, in deutscher Sprache.

J. Lehmann, 29. OS, Leipzig

Aufgepaßt!

● Wieviel Pluszeichen muß man zwischen die Ziffern 9 8 7 6 5 4 3 2 1 setzen, um a) die Summe 99 und b) die Summe 100 zu erhalten? (Die Reihenfolge der Ziffern darf nicht verändert werden!)
● Setze die Operationszeichen +, —, · oder : an Stelle der Fragezeichen so ein, daß eine wahre Aussage entsteht!
5? (5 ? 5 ? 5) ? 5 = 8.
● Was ist größer: Die Summe aller Ziffern einer Zahl oder ihr Produkt?
● Die Summe zweier ganzer Zahlen beträgt 7, ihr Produkt ist größer als 10. Wie heißen die Zahlen?

● Großmutter, wie alt ist Ihr Urenkel, mit dem Sie gerade spielen?
— Es ist so viele Monate alt wie ich Jahre zähle!
— Und wie alt sind Sie?
— Wir beide, mein Urenkel und ich, sind zusammen 91 Jahre alt.
Das Alter meines Urenkels kannst Du nun selbst bestimmen!

Prof. Dr. N. Tschajkovskyj, Lvov (UdSSR)

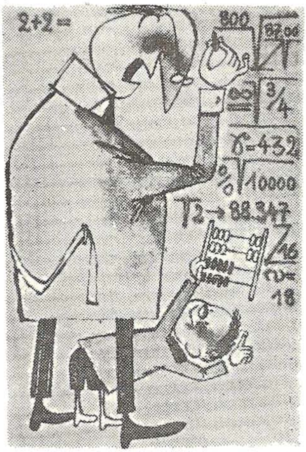
Nachgedacht!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

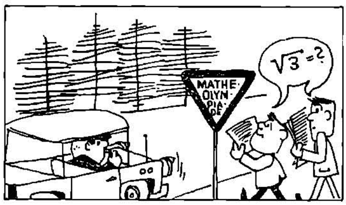
In die (senkrechten) Spalten sind Wörter mit der folgenden Bedeutung einzuordnen (Jedes Wort hat fünf Buchstaben; ö ist als oe zu schreiben): 1. Maßeinheit der Länge, 2. Teil des Koordinatensystems, 3. Maßeinheit der Masse, 4. besondere Linie im Dreieck, 5. Stellenwert, 6. Maßeinheit der Zeit, 7. griechischer Buchstabe, 8. Zusammenstellung von bestimmten Zahlenwerten (oder wichtiger Teil eines Klassenzimmers), 9. zusätzliches Unterscheidungsmerkmal bei Variablen (z. B. $a_1, a_2, \ldots$), 10. geometrischer Körper.
Die Buchstaben in der ersten (waagrechten) Zeile ergeben den Namen einer Wissenschaft.

K. Lehmann, 8. OS, Berlin

Mitgelacht!

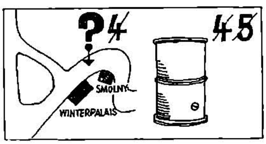


„Still, so einfach und billig machen wir's uns nicht!" Zeichnung: Schrader, Text: H. Hüttner. Aus: „Eulenspiegel"

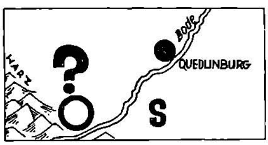


Ohne Worte!

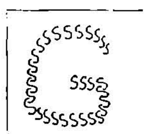
Mitgemacht!



englischer Mathematiker und Physiker (1643 bis 1727), Mitbegründer der Differentialrechnung

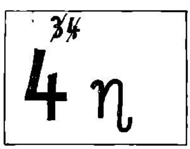


griechischer Mathematiker (um 600 v.u.Z.), galt als einer der sieben Weisen Griechenl., nach ihm ein Satz der Kreislehre benannt



deutscher Mathematiker (1777 bis 1855)

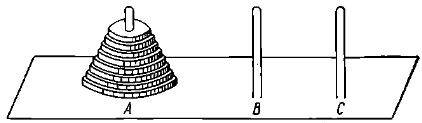
schweizer Mathematiker (1707 bis 1783)



französischer Mathematiker (1540 bis 1603), nach ihm sind Sätze über quadratische Gleichungen benannt

K. Lehmann, 8. OS, Berlin

Der Lucassche Turm



Wir wollen uns heute mit einem Spiel beschäftigen, das, von dem französischen Mathematiker *E. Lucas* erfunden, schon im vorigen Jahrhundert bekannt war. Es besteht aus einem Brett mit drei Pflöcken A, B, C und einer Anzahl verschieden großer durchbohrter Scheiben. Statt der in der Abbildung gezeichneten acht Scheiben können es auch weniger oder mehr sein. Der Spieler hat die Aufgabe, den dargestellten „Turm" vom Pflock A auf einen der beiden anderen Pflöcke umzusetzen, wobei folgende Regeln zu beachten sind:
1. Es darf immer nur eine Scheibe gleichzeitig umgesetzt werden. 2. Beim Umsetzen darf keine Scheibe aus der Hand gelegt, sondern immer nur auf einen der Pflöcke gesteckt werden. 3. Es darf immer nur eine kleinere Scheibe auf eine größere gesetzt werden, niemals umgekehrt.
Selbstverständlich kann das Spiel auch mit anderen verschieden großen Gegenständen, die sich stapeln lassen, durchgeführt werden, etwa mit Büchern, Münzen usw. Die Pflöcke ersetzt man dann einfach durch drei vorgeschriebene Plätze auf dem Tisch, die belegt werden dürfen. Daß man das Spiel mit möglichst wenig Zügen (wir wollen das Umsetzen einer jeden Scheibe einen Zug nennen) erreichen soll, versteht sich von selbst. Anstatt blind zu probieren, gehen wir systematisch vor. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Züge durch eine Zahl und einen Buchstaben. $3B$ heißt z. B.: Scheibe 3 wird auf Pflock B gesetzt, wobei wir die Scheiben von oben nach unten numerieren.
Wir spielen zunächst mit einem Turm aus nur zwei Scheiben. Diesen umzusetzen ist kein Kunststück. Es genügen drei Züge: $1B$, $2C$, $1C$. (Es ist klar, daß das Zurücksetzen des Turmes ebensoviele Züge erfordert und in genau umgekehrter Reihenfolge zu geschehen hat.) Gehen wir nun zu einem Dreierturm über. Um an die dritte Scheibe heranzukommen und diese umsetzen zu können, muß erstens der darüberstehende Zweierturm entfernt und zweitens ein Pflock frei sein. Das bedeutet unter Beachtung der Spielregeln, daß die vorige Aufgabe, das Umsetzen eines Zweierturmes, schon gelöst sein muß. Anschließend sind folgende Züge nötig: $3B$, $1A$, $2B$, $1B$. Wie man sieht, stellen die letzten Züge wiederum das Umsetzen eines Zweierturmes dar. Insgesamt sind also 7 Züge erforderlich. Entsprechend geschieht das Umsetzen eines Viererturmes in folgenden Abschnitten:
Umsetzen des darüberstehenden Dreierturmes: 7 Züge, Umsetzen der vierten Scheibe auf den leeren Pflock: 1 Zug, nochmaliges Umsetzen des Dreierturmes: 7 Züge.
Das sind insgesamt 15 Züge. Geht man schrittweise so weiter, so erkennt man: Um von einem Turm aus n Scheiben zu einem Turm aus $n + 1$ Scheiben überzugehen, sind soviele Züge **mehr** nötig, wie man zum Umsetzen eines Turmes aus n Scheiben braucht, und noch ein weiterer Zug. Dieser etwas umständliche Satz läßt sich mit mathematischen Symbolen einfacher und klarer formulieren: Sind zum Umsetzen eines „n-Turmes" x Züge nötig, so braucht man zum Umsetzen eines $(n + 1)$-Turmes $x + 1$ Züge mehr. Nennen wir die Gesamtzahl der Züge für den $(n + 1)$-Turm y, so ist also

$$y = x + x + 1 \qquad y = 2x + 1\,.$$

Mit dieser Formel können wir nun schrittweise, angefangen mit $n = 2$, die Anzahl der jeweils nötigen Züge berechnen:

Anzahl d. Scheiben	2	Anzahl d. Züge	3
	3		$2 \cdot 3 + 1 = 7$
	4		$2 \cdot 7 + 1 = 15$
	5		$2 \cdot 15 + 1 = 31$
	6		$2 \cdot 31 + 1 = 63$ usw.

Der mathematisch geübte Leser merkt, daß es sich bei der Anzahl der Züge um die jeweils um 1 verminderten Potenzen der Zahl 2 handelt. Um n Scheiben umzusetzen, sind $(2^n - 1)$ Züge nötig. Die Anzahl der Züge wächst schnell mit der Anzahl der Scheiben. Auf jeden Fall haben wir jetzt die Gesetzmäßigkeiten erfaßt, sind nicht mehr auf willkürliches Probieren angewiesen und somit dem unerfahrenen Spieler überlegen. J. Frormann

Für den Bücherfreund

FRIEDRICH HERNECK

Albert Einstein

Buchverlag der Morgen, Berlin 1967, 6,80 M
(Für Schüler ab Klasse 9)

Der Name des Nobelpreisträgers für Physik Albert Einstein ist jedem geläufig. Über das Leben des berühmten Physikers, Humanisten und Friedenskämpfers gab es in deutscher Sprache bisher jedoch kaum eine zuverlässige, von legendenhaftem Beiwerk freie Schrift. Gestützt auf die Ergebnisse einer jahrelangen, quellenmäßig betriebenen Einstein-Forschung versucht der Verfasser des vorliegenden Buches, ein wahrheitsgetreues, dokumentarisch gesichertes Bild Einsteins und seiner weltweiten Wirksamkeit zu zeichnen.

OSTROVSKI/KORDEMSKI

Zeichnen hilft rechnen

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1964, 8,50 M
(Für Schüler ab Klasse 8)

In diesem Buch wird die Anwendung einiger geometrischer (graphischer und graphisch-rechnerischer) Verfahren zur Lösung verschiedener arithmetischer und algebraischer Aufgaben betrachtet. Die Lösung der Aufgaben geschieht mit Hilfe von Zeichnungen, von Diagrammen und graphischen Darstellungen. Die Konstruktion dieser Zeichnungen gibt die Möglichkeit, die Aufgaben zu „sehen“, also die Beziehungen festzustellen und zu verfolgen, die zwischen den Größen, die zur Aufgabe gehören, bestehen, und den kürzesten Lösungsweg zu wählen (Annotation der russischen Ausgabe).

AUTORENKOLLEKTIV

Von Anton bis Zylinder

Das Lexikon für Kinder
Kinderbuchverlag, Berlin 1968, etwa 1000 mehrfarbige Illustrationen, 336 S., Pappbd. m. Folie etwa 27,50 M
(Für Schüler ab Klasse 4)

Ein Buch, das Wissensdurst löscht und Wißbegierde weckt, ein Nachschlagwerk, das etwa 850 alphabetisch geordnete Stichworttexte enthält. Es hilft Kindern, die Umwelt, die sie während des Übergangs zum Fachunterricht mit Riesenschritten zu erobern haben, schneller und besser zu begreifen. Das Lexikon führt an die Benutzung des Nachschlagewerks als eine Form der selbständigen geistigen Arbeit heran. Die Beiträge aus Naturwissenschaft, Mathematik, Technik, Produktion, Geschichte, Kultur, Sport und dem gesellschaftlichen Leben geben auch erste Auskunft über Begriffe, denen die Kinder im Unterricht begegnet sind.

DIETER HAUPT

Mengenlehre leicht verständlich

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967, 3. Verbesserte Auflage, 61 Bilder, 84 Beispiele, 48 Aufgaben mit Lösungen, 4.80 M
(Für Schüler ab Klasse 9)

Die vorliegende Schrift will dem Leser einen Einblick in die Grundlagen der Mengenlehre geben. Sie erläutert in Verbindung mit einfachen, lebensnahen Beispielen, für die keine großen Vorkenntnisse nötig sind, die grundlegenden Beziehungen, die zwischen Mengen gelten. An Hand von Übungen, die den Abschnitten angeschlossen sind und deren Lösungen im Anhang zu finden sind, kann der Leser prüfen, ob er den Stoff verstanden hat.

WERTH/GRÖLL

Nomographie

Wegweiser zur vereinfachten Ausführung von Berechnungen
B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig 1964, 18,50 M, 190 S., 118 Abbildungen und Lösungen zu den Aufgaben.
(Für Schüler ab Klasse 9)

Die Methoden der Nomographie und ihre Möglichkeit auf dem Gebiet der Naturwissenschaften sind noch viel zu wenig bekannt. So werden Logarithmentafeln und Rechenschieber nicht selten auch dort herangezogen, wo die gestellten Aufgaben rascher und einfacher mit Hilfe von Nomogrammen zu lösen sind. Das Buch will seinem Leserkreis einen Überblick geben, wie Nomogramme verschiedener Art anzuwenden sind und wie sie entworfen werden.

PETER KLEMM

Automaten, Forscher und Raketen

Kinderbuchverlag, Berlin 1968, 240 S. Leinen mit Schutzumschlag, etwa 12,80 M.
(Für Schüler ab Klasse 7)
Dies ist der dritte Band der Geschichten aus 100000 Jahren Technik. An der Entwicklung der Atomphysik, der Elektronik, der Raketenphysik und an zahlreichen anderen Beispielen zeigt der Autor, wie heute die wissenschaftlich-technischen Grundlagen für die Welt von morgen geschaffen werden. Am meisten spricht sicher die Jungen Mathematiker der Beitrag „künstliche Gehirne“ an (Rechenbrett und Zahlrahmen, elektronische Rechenautomaten, der Vater der Kybernetik u. a.). Aber auch sonst wird die Wechselbeziehung zwischen Mathematik und gesellschaftlicher Praxis immer wieder offenbar.

W. NAUNDORF

Abbildungstreue

Kleine Naturwissenschaftliche Bibliothek B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig 1963, 54 S. mit 27 Abb., Broschur, 3,20 M.
(Für Schüler ab Klasse 6)

Manche Menschen meinen, daß es sich nicht lohne, für die Optik besonderes Interesse aufzubringen. Gerade die den optischen Instrumenten zugrunde liegende geometrische Optik birgt manche interessante und wissenschaftliche Seite, die zu verstehen auch im Alltag von Nutzen sein kann. Wer sich nun entschlossen hat, sich mit der Wirkungsweise solcher Instrumente etwas näher zu befassen, dem will das Bändchen in leicht verständlicher Weise helfen, die Grundlagen der optischen Abbildung auf der Basis der geometrischen Optik zu verstehen.

HELMAR LEHMANN

Der Rechenstab

und seine Verwendung
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1966, 5,80 M, mit 156 Bildern und 4 Tafeln, 282 durchgerechneten Beispielen und 121 Übungsaufgaben mit Lösungen.
(Für Schüler ab Klasse 7)

HANS SIMON

Elementare Vektoralalgebra

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967, 11,00 M, mit 148 Bildern und 47 Beispielen sowie 220 Aufgaben und Lösungen.

(Für Schüler ab Klasse 10)

Das Buch wurde bewußt als elementare Vektoralgebra bezeichnet. Es will jedem, der mit der Vektorrechnung Neuland betritt, eine Einführung lediglich in die Grundbegriffe, in die Symbolik und in die additive und multiplikative Verknüpfung von Vektoren vermitteln. Die Anwendungen und Aufgaben beschränken sich deshalb ebenfalls bewußt auf einige ausgewählte Gebiete, nämlich auf einfache Probleme aus der Planimetrie, der Stereometrie und der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Mit diesem Buch wird eine Grundlage für das Studium weiterführender Literatur zur Vektorrechnung geschaffen.

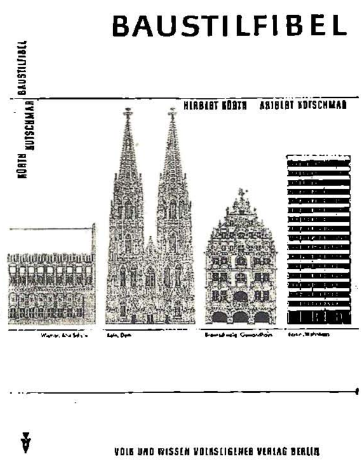
HERBERT KÜRTH und
ARIBERT KUTSCHMAR

Baustilfibel

Bauwerke und Baustile von der Antike bis zur Gegenwart

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin,

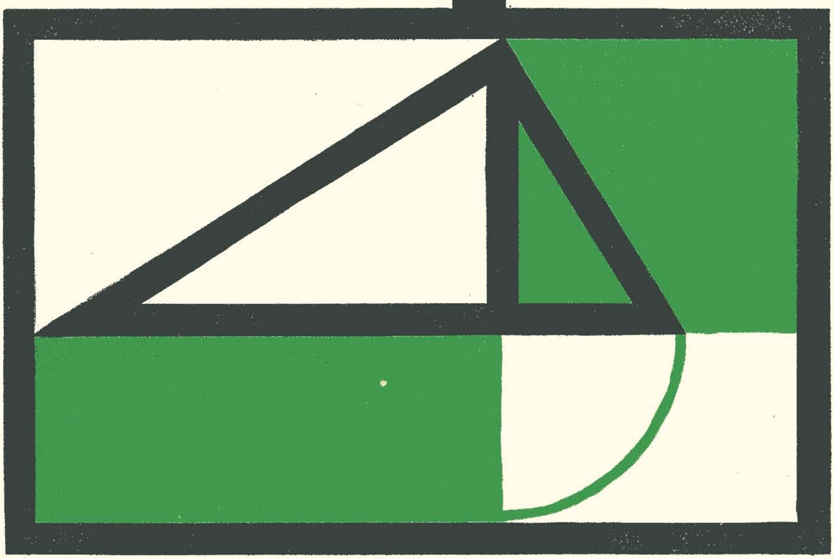
240 Seiten, 20,00 M, Bestellnummer 172536-3



Index 31059

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 3

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 68, 83); W. Schulze, JW Berlin (S. 68 unten); Höhne-Pohl, Dresden (S. 75); Foto Zimmert, Rostock (S. 81); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 2. 2. 1968

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Berufsbild

Facharbeiter für Datenverarbeitung

vvb maschinelles rechnen

In diesem Beitrag soll euch ein neuer Beruf vorgestellt werden, der in den kommenden Jahren eine immer größere Bedeutung erlangen wird. Rechentechnik und Datenverarbeitung — jeder von euch wird sich schon dafür interessiert haben. In den nächsten Heften werden euch neben weiteren Berufsbildern auch Begriffe erläutert sowie mathematische Voraussetzungen für den Einsatz an Datenverarbeitungsanlagen aufgezeigt — soweit ihr sie bereits verstehen könnt.

Der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* wird für vier Spezialisierungsrichtungen ausgebildet. Dabei ist eine $1^1/_2$jährige Ausbildung im Grundberuf — für alle vier Spezialisierungsrichtungen nach einem gemeinsamen Lehrplan — vorgesehen, auf die eine halbjährige spezielle Ausbildung aufbaut. Nach zwei Jahren ist die Ausbildung zum Facharbeiter mit einer Spezialisierungsrichtung abgeschlossen. Entsprechend den zur Zeit vorgesehenen Einsatzgebieten und Tätigkeitsbereichen des Facharbeiters sind dabei folgende Spezialisierungsrichtungen geschaffen worden:

1. Programmierung und Bedienung schalttafelgesteuerter Maschinen,
2. Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen,
3. Organisation der maschinellen Datenverarbeitung,
4. Operativer Rechenbetrieb.

Diese neue Form der Ausbildung — nach einer für mehrere Tätigkeiten gleichen Ausbildung im Grundberuf die speziellen Kenntnisse gesondert zu vermitteln — setzt sich in vielen Berufen der Volkswirtschaft durch. Sie hat u. a. den Vorteil, daß der Facharbeiter sich, wenn es beispielsweise durch Umstellung im Betrieb notwendig wird, schnell für eine zweite Tätigkeit qualifizieren kann. Aufbauend auf der Ausbildung im Grundberuf sind nur die Kenntnisse und Fertigkeiten der halbjährigen speziellen Ausbildung nachzuholen. Für welche Tätigkeiten ist der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* vorgesehen? Die Tätigkeiten können selbstverständlich nicht in allen Einzelheiten geschildert werden. Es soll hier versucht werden, einige typische Einsatzgebiete zu nennen und zu charakterisieren. Dabei ist notwendig, nach den angegebenen Spezialisierungsrichtungen zu unterscheiden.[1])

1. Zu den schalttafelgesteuerten Maschinen gehören Großmaschinen der Lochkartentechnik, wie beispielsweise Tabellierungsmaschinen* und Kartendoppler*. Der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* soll als Programmierer und Bedienungskraft derartiger Maschinen eingesetzt werden. Dazu gehört u. a. die Erarbeitung der entsprechenden Programmunterlagen, technologischer Arbeitsanweisungen und das Stecken der Programmtafel. Als Bedienungskraft muß der Facharbeiter die Maschine einrichten und den Maschinenlauf kontrollieren, um Fehler und deren Ursachen zu erkennen und auf der Grundlage innerbetrieblicher Festlegungen zu beseitigen.

2. Um elektronische Datenverarbeitungsanlagen einsetzen und ihre Leistungsfähigkeit voll ausnutzen zu können, ist eine große Zahl von hochqualifizierten Programmierern notwendig. Dabei sind Kenntnisse notwendig, die ein Fach- oder Hochschulstudium voraussetzen.[2])

1) Die Ziffern entsprechen den auf S. 65 genannten Spezialisierungsrichtungen.
2) Über diese Ausbildung wird in den folgenden Heften ausführlich berichtet.
* Begriffserläuterungen, siehe am Ende dieses Beitrages.

Daneben fallen aber auch eine Reihe von Aufgaben an, für die die notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten über eine Berufsausbildung vermittelt werden können. Der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* mit einer speziellen Ausbildung in Programmierung arbeitet dabei als *Programmierassistent* unter Anleitung von Mathematikern, Ingenieuren für Programmierung o. ä. Zu seinen Aufgaben gehören beispielsweise das Erarbeiten einfacher Programme, das Zusammenstellen von Programmteilen und Unterprogrammen, Erarbeitung von Testbeispielen, das Zeichnen von Datenfluß- und Programmablaufplänen. Vom *Programmierassistenten* wird erwartet, daß er die ihm übertragenen Aufgaben selbständig löst. Deshalb ist für ihn eine gründliche theoretische Ausbildung in den Grundlagen der Programmierung und eine umfangreiche mathematische Ausbildung vorgesehen (vgl. Ausbildungsinhalt).

3. Die volle Ausnutzung der Möglichkeiten elektronischer Datenverarbeitungsanlagen erfordert in den Betrieben, vor allem in den Methoden der Planung und Leitung von Betrieben, neue Formen der Organisation des betrieblichen Ablaufes. Dazu gehören Untersuchungen über die Zweckmäßigkeit verwendeter Belege, ihres Durchlaufes durch die einzelnen Abteilungen, über den Anfall der Daten u. a. m. Hier wird der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* als *Organisationsassistent* mitarbeiten bei der Erfassung von Primärdaten*, bei der Neu- und Umgestaltung von Belegen und Schlüsseln und der Erarbeitung von Organisationsprojekten.

4. Alle diese Vorarbeiten in der Organisation und Programmierung sind notwendig. Aber zu den wichtigen und verantwortlichen Aufgaben in einer Rechenstation oder einem -betrieb gehört die Bedienung der Anlagen und der peripheren Geräte*). In der letzten Spezialisierungsrichtung werden die Facharbeiter ausgebildet, die direkt an den Anlagen arbeiten bzw. ihren Einsatz unmittelbar vorbereiten. Dazu gehört einmal die Tätigkeit des *Maschinenführers* (auch *Operateur*) und zum anderen Facharbeiter, denen die Planung der Maschinenkapazität und ihre Auslastung obliegt.

Eine Stunde Rechenzeit an einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage kostet viel Geld (in Abhängigkeit von der Größe der Anlage zwischen 600 M und 1000 M). Daher muß jede Minute Rechenzeit ausgenutzt werden und darf nicht durch falsches oder unaufmerksames Arbeiten verloren gehen. An den Facharbeiter müssen deshalb hohe Anforderungen hinsichtlich seiner Zuverlässigkeit, seines Verantwortungsbewußtseins und seiner Gewissenhaftigkeit gestellt werden.

Welche praktischen Fertigkeiten braucht ein Facharbeiter für Datenverarbeitung?

In der Regel[3]) wird der Lehrling in den $1^1/_2$ Jahren der Ausbildung im Grundberuf zwei Tage pro Woche im Ausbildungsbetrieb sein. Hier lernt er, die Maschinen zu bedienen und zu programmieren. Da die eingesetzten Maschinen und Anlagen unterschiedlich sind, kann die Programmierung nicht für alle Lehrlinge in der Schule gemeinsam durchgeführt werden. Dabei lassen sich zwei Hauptabschnitte herausstellen:

— die Ausbildung an Maschinen der Lochkartentechnik,

— die Ausbildung für Bedienung und Programmierung einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage.

Zum ersten Abschnitt gehört z. B. die Bedienung von Loch-*, Prüf- und Sortiermaschinen* und die Bedienung und Programmierung des Dopplers*. Außerdem lernt der Lehrling die Handhabung von Tischrechenmaschinen.

Bei der Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen spielt eine wesentliche Rolle, die Richtigkeit des Programms an Hand von Beispielen zu testen. Dazu müssen teilweise umfangreiche Testrechnungen durchgeführt werden. Dabei werden Tischrechenmaschinen benutzt.

In der Ausbildung zu den Spezialisierungsrichtungen werden auf diesen Kenntnissen aufbauend spezielle Stoffgebiete behandelt. Die Ausbildung ist eng verbunden mit

[3]) Die Organisation hängt vom Ausbildungsbetrieb ab. Die Stunden und Tage können auch anders verteilt werden.

einem Einsatz des Lehrlings an seinem künftigen Arbeitsplatz. So kann er Erfahrungen z. B. an der speziellen Anlage sammeln. Deshalb wird der Unterricht in der Praxis überwiegen.
Nur in den Spezialisierungsrichtungen (2) und (3) wird außerdem noch berufstheoretischer Unterricht beispielsweise in Mathematik — u. a. Einführung in die Lösung von Differentialgleichungen — und zu speziellen Problemen der Programmierung durchgeführt.

Welche theoretischen Kenntnisse benötigt ein Facharbeiter für Datenverarbeitung?

Die Tätigkeiten des Facharbeiters erfordern umfangreiche theoretische Kenntnisse in der Programmierung, vom technischen Aufbau der Maschinen und Anlagen und über die mathematischen und ökonomischen Grundlagen der Datenverarbeitungsprozesse. Der Lehrplan stellt hohe Anforderungen an den Lehrling. Er verlangt konzentriertes und systematisches Lernen während der gesamten Ausbildungszeit. Hier sollen nur einige Beispiele herausgegriffen werden, um euch zu zeigen, wie vielseitig die Ausbildung erfolgt.
Im Grundberuf sind 1164 Stunden berufstheoretischer Unterricht vorgesehen, davon allein 352 Stunden Mathematik! Der Mathematikunterricht wird mit dem Ziel durchgeführt, den Lehrling mit einigen mathematischen Methoden und Verfahren vertraut zu machen, die für die Anwendung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen zur Lösung ökonomischer, mathematischer oder technischer Probleme erforderlich sind. Im Mittelpunkt des Mathematikunterrichtes steht der Begriff des Algorithmus[4]). Damit eng verknüpft sind Fragen der Formulierungsmöglichkeiten von Algorithmen und damit die Behandlung einer Formulierungssprache — ALGOL —. Derartige Formulierungssprachen werden bereits weitgehend als Programmierungssprachen[5]) verwendet. Weiter spielen Probleme der numerischen Mathematik eine große Rolle — beispielsweise Fragen der Genauigkeit und Fehlerabschätzung. Unter diesen Gesichtspunkten werden behandelt: Zahlenbereich und spezielle Zahlensysteme, also u. a. auch die Darstellung im Dualsystem; Grundlagen der Kombinatorik, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, einige typische Operationen, lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme, Matrizen und Determinanten, lineare Optimierung, Polynome und ganzrationale Funktionen sowie Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Das ist nur ein Unterrichtsfach.
Andere Beispiele: In einigen Lehrgängen werden ökonomische Grundlagen der Datenverarbeitung behandelt. So lernen die Lehrlinge den Begriff des Modells* kennen.
Die Schüler der 10. Klasse wissen bereits, daß Modelle bei Betrachtungen naturwissenschaftlicher Probleme eine bedeutende Rolle spielen. Sie werden sich sicher sofort an das Bohrsche oder Rutherfordsche Atommodell und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Atomphysik erinnern. Im Fach Maschinenkunde werden die mechanischen, elektrischen und elektronischen Bauelemente der Maschinen und Anlagen und ihr Zusammenwirken behandelt. Wie kann beispielsweise in den verschiedenen Anlagen die Zahlendarstellung technisch realisiert werden? Wichtig ist, daß ihr die physikalischen Gesetze, die euch in der polytechnischen Oberschule vermittelt werden, auch wirklich anwenden könnt. In der Tabelliermaschine spielen Zahnräder, Hebel, Nockenwelle und elektromechanische Relais eine wesentliche Rolle. Man begreift ihre Funktionen schnell, wenn man ihre Wirkungsweise kennt. Beim Programmieren der Tabelliermaschine müssen die einzelnen Bauteile richtig angesprochen werden. So muß man wissen, was bedeutet Ruhe- und Arbeitsstellung beim Relais, wann fließt ein elektrischer Strom, wann wird die Stromzufuhr unterbrochen und viele andere Gesetzmäßig-

[4]) In weiteren Beiträgen werdet ihr diesen Begriff und Beispiele von Algorithmen aus eurem Unterrichtsstoff kennenlernen.
[5]) Weitere Programmierungssprachen sind z. B. COBOL oder FORTRAN

keiten. Die Ausbildung, die bereits durchgeführt wurde, hat gezeigt, daß viele Schüler zwar die Gesetze kennen, aber wenn sie diese anwenden, aus ihnen Schlußfolgerungen ziehen sollen, dann geraten sie in Schwierigkeiten. Versucht deshalb ständig, euer Wissen in der Praxis zu überprüfen!

Wer kann diesen Beruf erlernen?

Voraussetzung zum Erlernen dieses Berufes ist der Abschluß der 10. Klasse mit sehr guten bis guten Leistungen in den Fächern Mathematik und Physik. Außerdem wird vom künftigen Facharbeiter erwartet, daß er gewissenhaft und zuverlässig arbeitet und in der Lage ist, seine eigene Arbeit kritisch einzuschätzen. Die Maschinen und Anlagen weisen jeden auch noch so kleinen Fehler unnachsichtig aus, sei es durch falsche Ergebnisse oder durch Unterbrechung des Maschinenlaufs. Es kommt häufig vor, daß Maschinenprogramme immer wieder überarbeitet werden müssen, bevor sie einwandfrei laufen. Deshalb sollte nur derjenige diesen Beruf ergreifen, der nicht bei jedem Fehlschlag in seiner Arbeit die Lust verliert, sondern mit gleicher Konzentration und Willenskraft seine Arbeit bis zum Erfolg führt. Einsatzbereitschaft, Zähigkeit und Freude an der Arbeit sind gerade bei diesem Beruf eine sehr wichtige Voraussetzung.

Wer bildet aus?

Da die Ausbildung den Einsatz qualifizierter Fachkräfte erfordert und eine Reihe materieller Voraussetzungen geschaffen werden müssen, werden in immer stärkerem Maße in den Bezirksstädten Ausbildungsgemeinschaften gebildet. Das bedeutet, daß sich mehrere Rechenbetriebe zusammenschließen, um gemeinsam die Ausbildung durchzuführen.
Wer sich für diesen Beruf interessiert, kann sich einmal in den Bezirksstädten unserer Republik an die VEB *Maschinelles Rechnen* wenden, zum anderen können die *Ämter für Arbeit und Berufsausbildung* darüber Auskunft geben, von welchen Betrieben die Ausbildung durchgeführt wird.

Ch. Papendorf

Begriffserklärungen

Doppler — Maschine, die von vorhandenen Lochkarten Duplikate vollständig oder z. T. herstellt und diese mit den Originalkarten vergleicht.

Lochmaschine — Maschine zum Stanzen von Ziffern in eine Lochkarte.

Modell — wichtige Methode, betriebliche oder volkswirtschaftliche Probleme mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsanlagen zu lösen.

Primärdaten — neu erfaßte Daten.

periphere Geräte — Aggregate einer Datenverarbeitungsanlage, die nicht zur Zentraleinheit gehören, d. h., die nicht unmittelbar an dem Datenverarbeitungsprozeß beteiligt sind, z. B. Schreibmaschine, Fernschreiber, Lochkartenstanzer, Magnetbandspeicher u. a.

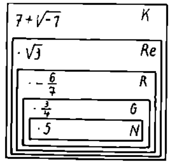
Sortiermaschine — Maschine zum Sortieren von Lochkarten nach bestimmten Begriffen, z. B. alle Lochkarten, die in der Spalte 3 eine 8 haben, werden aussortiert.

Tabelliermaschine — gesteuertes System der Informationsverarbeitung, das der Auswertung von Lochkarten dient.

VII. OJM: Wettbewerbsatmosphäre (Bild oben); Auszeichnung der Besten durch W. Engst, Sekretär des Zentralrats der FDJ und Vorsitzender der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" und OStR G. Stöhr, Ministerium für Volksbildung (rechts)

Elementare Zahlenfolgen

1. Teil



$N \subset G \subset R \subset Re \subset K$

Abb. 1

Zahlenfolgen sind euch schon vielerorts begegnet, in der Schule und auch außerhalb. Denkt nur zurück an die Stunden, in denen ihr das kleine Einmaleins behandelt habt! Da gab es manches zu lernen:

die „Zweierreihe" 2; 4; 6; 8; 10; usw., (f_1)
die „Fünferreihe" 5; 10; 15; 20; 25; usw.,
die „Sechserreihe" 6; 12; 18; 24; 30; usw.

und all die übrigen.

Das sind einfache *Zahlenfolgen*. Der Name „Reihe" ist hier eigentlich fehl am Platze, der Unterschied zwischen „Folge" und „Reihe" soll uns heute aber noch nicht beschäftigen. Oder betrachtet einmal den Blendenring einer wertvollen Kamera! Auch dort findet ihr eine Zahlenfolge, nämlich

2; 2,8; 4; 5,6; 8; 16; 22. (f_2)

Weitere Beispiele für Zahlenfolgen sind:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$; usw. ($f_3$)

1; 4; 9; 16; 25; usw. (f_4)

7; 4; 1; — 2; — 5; — 8. (f_5)

— 2; — 4; — 8; + 16; — 32; + 64;
— 128; + 256; — 512. (f_6)

Die einzelnen Bestandteile einer Folge heißen *Glieder*. Je nachdem, ob die Folge aus endlich vielen Gliedern besteht oder nicht, sprechen wir von *endlichen* oder *unendlichen* Zahlenfolgen.

Die „Zweierreihe" oder — wie wir besser sagen wollen — die Folge der geraden Zahlen lerntet ihr in den untersten Klassen nur zwischen 2 und 20 kennen, also

2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20. (f_7)

Hier ist 20 das letzte Glied der Folge; es liegt eine *endliche* Folge von zehn Gliedern vor.

Lassen wir die Folge 2; 4; 6; 8; 10; . . . jedoch immer weiterlaufen, so daß sie kein letztes Glied hat, dann haben wir es mit einer *unendlichen* Folge zu tun. Die drei Punkte sollen hier — ähnlich wie das „usw." — andeuten, daß die Folge kein Ende hat.

Die Darstellung einer Zahlenfolge durch Angabe einiger Anfangsglieder birgt aber eine Gefahr in sich. Wir nehmen an, daß die Folge $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$; usw. ihre Fortsetzung findet mit $\frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{10}$; usw., aber garantieren kann uns das niemand. Sie könnte auch so weitergehen: $\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{1}$; usw. oder so: $\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}$; usw. oder auf irgendeine andere Weise.

Wir ersehen daraus, daß eine unendliche Zahlenfolge durch Angabe einiger Anfangsglieder niemals eindeutig bestimmt ist. Ja, man kann sogar beweisen, daß es stets unendlich viele Möglichkeiten gibt, endlich viele vorgegebene Glieder zu einer unendlichen Folge fortzusetzen. Wir müssen uns deshalb nach besseren, d. h., eindeutigen Darstellungsarten für Zahlenfolgen umsehen. Eine besonders einfache Zahlenfolge ist

1; 2; 3; 4; 5; . . . .

Das ist die Folge der *natürlichen Zahlen* (ohne die Null).

Diese Folge finden wir eigentlich in jeder anderen Zahlenfolge wieder, denn jede Zahlenfolge hat
ein 1.; ein 2.; ein 3.; . . .; allgemein ein k-tes Glied. Die Glieder selbst werden meist mit
$a_1; a_2; a_3 \ldots$ bezeichnet,
das 1. Glied also mit a_1, das 2. Glied mit a_2, das k-te Glied mit a_k.
Das 2. Glied der Folge f_1 z. B. ist $a_2 = 4$, das 3. Glied $a_3 = 6$, das k-te Glied $a_k = 2k$.

Das k-te Glied einer Folge nennt man auch deren *allgemeines Glied*, es gestattet — sofern es angebbar ist —, die gesamte Folge durch einen einfachen analytischen Ausdruck zu repräsentieren. Dabei setzt man stillschweigend voraus, daß k *stets* die Folge der natürlichen Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; . . . durchläuft. Das allgemeine Glied der Folge f_4 = 1; 4; 9; 16; 25; . . . lautet, um ein weiteres Beispiel anzuführen, $a_k = k^2$.

Man kann den Zusammenhang zwischen der Gliednummer k (natürliche Zahl) und den Gliedern a_k (beliebige reelle Zahl) der Folge in einer Wertetabelle zum Ausdruck bringen. Es gilt für (unendliche) Folgen allgemein

Glied-Nr.	1	2	3	4	...	k	...	mit $k \in \{1;2;...\}$
Glied	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_k	...	mit $a_k \in Re$

und speziell für die Folge der geraden Zahlen:

1	2	3	4	...	k	...
2	4	6	8	...	$2k$	...

Folgen stellen somit eine *Menge von geordneten Zahlenpaaren* $[k; a_k]$ dar, deren 1. Partner der Menge der natürlichen Zahlen entstammt und deren 2. Partner eine reelle Zahl ist.
Aber nicht nur das. Es besteht eine eindeutige Abbildung von der Menge der k auf die Menge der a_k, das heißt, jedem k ist genau ein a_k zugeordnet.

Eindeutige Abbildungen sind aber nichts anderes als *Funktionen.*
Wir können also sagen: *Zahlenfolgen sind eine spezielle Klasse von Funktionen.* Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist immer eine Menge natürlicher Zahlen, und zwar die Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$ für unendliche Folgen und die Menge $\{1; 2; 3; \ldots; n\}$ für endliche Folgen. Dabei ist a_n das letzte Glied der endlichen Folge. Bei der aus 6 Gliedern bestehenden Folge f_5 z. B. ist $a_6 = -8$. Jetzt fällt es uns gewiß nicht schwer, die exakte Definition des Begriffs „Zahlenfolge" zu verstehen:
Definition: *Zahlenfolgen sind Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$ oder $\{1; 2; \ldots; n\}$ natürlicher Zahlen ist und deren Wertevorrat aus reellen Zahlen besteht.*

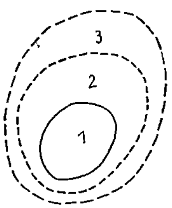


Abb. 2
3 Menge aller Abbildungen
2 Menge aller Funktionen
1 Menge aller Zahlenfolgen

Abbildung = Teilmenge der Menge aller geordneten Paare
Funktion = eindeutige Abbildung (Jedem $a \in A$ ist *genau ein* $b \in B$ zugeordnet)
Unendliche Zahlenfolge = eindeutige Abbildung mit $N \setminus \{0\}$ als Defin.-Bereich (Jedem $k \in N \setminus \{0\} = \{1; 2; \ldots\}$ ist genau ein $a_k \in Re$ zugeordnet)

Ist das allgemeine Glied bekannt, so kann man schreiben:

$a_k = f(k)$ mit $k \in \{1; 2; 3; \ldots\}$ für unendliche Folgen;
mit $k \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ für endliche Folgen.

Die symbolische Schreibweise $a_k = f(k)$ für Zahlenfolgen nennt man analytische oder independente Darstellung (independent, lat. unabhängig. Jedes Glied der Folge kann unabhängig von den anderen bestimmt werden.) Als analytische Darstellung ist uns diese Schreibweise ja von den Funktionen her gut bekannt. Nur wird bei Funktionen die unabhängige Variable meist mit x, die abhängige Variable mit y bezeichnet.
$y = 2x$ ist die analytische Darstellung einer linearen Funktion. Läßt man als Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen zu, so erhalten wir als Bild eine Gerade (Abb. 3).
$a_k = 2k$ dagegen ist die analytische oder independente Darstellung der Folge der geraden Zahlen. Die unabhängige Variable k kann nur ganzzahlige positive Werte annehmen. Infolgedessen ist die graphische Darstellung der Folge $a_k = 2k$ keine Gerade, sondern eine diskrete Folge einzelner Punkte; der Mathematiker sagt dazu: *diskrete Punktfolge* (Abb. 4). Diskrete Punktfolgen als Bilder von Zahlenfolgen verlaufen überdies stets nur im I. oder (und) IV. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, während Funktionen in allen vier Quadranten verlaufen können.
Wir sollten uns bei dieser Gegenüberstellung aber stets bewußt sein, daß eben auch $a_k = 2k$ eine Funktion ist. Wir wollen für einige weitere Zahlenfolgen independente und graphische Darstellungen angeben.

(f_4) Folge der Quadratzahlen. Independente Darstellung:

$$a_k = k^2 \text{ mit } k \in \{1; 2; \ldots\} \quad \text{(Abb. 5)}$$

(f_5) 7; 4; 1; -2; -5; -8. Independente Darstellung:

$$a_k = -3k + 10 \text{ mit } k \in \{1; 2; \ldots 6;\}$$
(Abb. 6).

Wir haben vier wichtige Darstellungsarten von Zahlenfolgen kennengelernt: die independente oder analytische Darstellung $a_k = f(k)$, die tabellarische (Darstellung durch eine Wertetabelle), die graphische und die verbale, d. h., die Darstellung einer Folge durch Wortbeschreibung. „Folge der Quadratzahlen" (exakter: „Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen ohne die Null") ist die verbale Darstellung der Folge 1; 4; 9; 16; 25; ...; k^2; ....

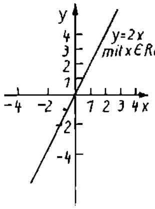


Abb. 3

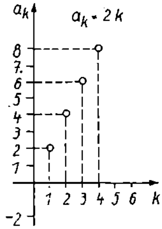


Abb. 4

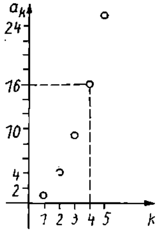


Abb. 5

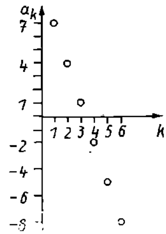


Abb. 6

Die independente Darstellung ist dabei die wichtigste, weil mit ihr das Bildungsgesetz einer Zahlenfolge in den meisten Fällen knapp, prägnant und eindeutig zum Ausdruck gebracht werden kann. Es gibt allerdings auch Zahlenfolgen, für die eine independente Darstellung überhaupt nicht angebbar ist (Beisp.: Folge der Primzahlen), andere, für die eine weitere Darstellungsart, die rekursive Darstellung, einfacher und zweckmäßiger ist. Darauf kommen wir im zweiten Teil zurück.

H. Lohse

Aufgaben

223 Eine der folgenden Aussagen ist falsch. Welche?

a) Jede Folge ist eine Menge geordneter Paare.
b) Jede Funktion ist eine eindeutige Abbildung.
c) Jede Folge ist eine eindeutige Abbildung.
d) Jede Funktion ist eine Folge.
e) Jede Folge ist eine Funktion.

Begründe deine Entscheidung!

224 Schreibe die Menge $f_6 = -2;\ +4;\ -8;\ +16;\ -32;\ +64;\ -128;\ +256;\ -512.$ als Menge geordneter Paare auf!

225 Versuche, für folgende Anfangsglieder einer unendlichen Folge ein einfaches Bildungsgesetz in independenter Darstellung zu finden:

$$\frac{9}{5};\ \frac{4}{3};\ 1;\ 0;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{4}{5};\ \ldots$$

226 Gib alle dir bekannten Darstellungsarten der Folge f_6 an!

227 Welche der vier graphischen Darstellungen (Abb. 7) kann nicht die Darstellung einer Folge sein?
Begründe deine Antwort!

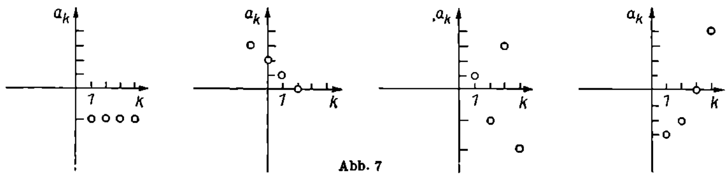


Abb. 7

Sehr geehrter Herr Chefredakteur!

Ihre mathematische Schülerzeitschrift *alpha* feierte im Januar den ersten Geburtstag. Das ist mir ein willkommener Anlaß, Ihnen und Ihren Mitarbeitern für diese lehrreiche Zeitschrift zu danken. — Alle sechs Hefte des Jahrganges 1967 liegen vor mir — zerlesen, etwas schnuddelig, mit vielen Randbemerkungen versehen. Man sieht ihnen an, daß damit gearbeitet wurde.

Mein Schulweg besteht aus mindestens $1^1/_2$ Stunden Straßenbahnfahrt täglich. Diese nutze ich oft zu mathematischen Überlegungen und Knobeleien, denn dafür genügt der engste Raum und — meine *alpha*. Natürlich schüttle ich nicht in der Straßenbahn jede Lösung aus dem Ärmel. Mein Interesse für die Mathematik läßt sich bis zum Einmaleins zurück verfolgen, aber, daß es ein so tätiges Einmaleins wurde, verdanke ich zu einem guten Teil Ihrer *alpha*. Nicht nur die Wettbewerbsaufgaben habe ich regelmäßig eingesandt, sondern ich beschäftigte mich auch eingehend mit all den anderen Aufgaben meiner Klassenstufe.

Ich freue mich ganz besonders über die Vielseitigkeit der Zeitschrift und lese alle Beiträge mit großem Interesse. Und welcher Schüler informiert sich nicht gern über Aufgaben, Lösungen und Ergebnisse der Mathematikolympiaden? Nun warte ich schon mit Ungeduld auf jedes der Hefte des zweiten Jahrgangs.

Arnulf Möbius, Kl. 9 VR der Erw. Leibnizschule, Leipzig

Nichts Einfacheres als ein Quadrat!

(trotzdem erst für Schüler ab Klasse 8)

3. Teil

(4) Das Problem der Quadratverdoppelung schien uns so einfach, und doch sind wir bisher immer wieder gescheitert. Sollte es uns wie J. F. Böttger gehen, der Gold machen wollte und das Porzellan fand? Aus dem Material, das Böttger zur Verfügung stand, *konnte* kein Gold entstehen! Sollte es möglich sein, daß es gar keine rationale Zahl *gibt*, deren 2. Potenz gleich 2 ist? Eine derart ungewöhnliche Vermutung kann man aber nicht einfach hinnehmen; man muß versuchen, sie zu *beweisen*!

Behauptung: Es gibt keine rationale Zahl, deren 2. Potenz gleich 2 ist.
Der Beweis erfordert eure ganze Aufmerksamkeit.

Beweis: Wir fragen uns zuerst, wodurch rationale Zahlen charakterisiert werden können. Die rationalen Zahlen wurden eingeführt, damit jede Divisionsaufgabe mit gebrochenen Zahlen lösbar ist. Also kann jede positive rationale Zahl als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausgedrückt werden und umgekehrt, jedes solche Verhältnis drückt eine positive rationale Zahl aus. (Die Division durch 0 ist natürlich ausgeschlossen.)
Wir müßten also zeigen, daß es kein Verhältnis natürlicher Zahlen gibt, dessen 2. Potenz 2 ist. Dazu stellen wir uns vor, daß uns jemand sagt: „Es gibt doch eine solche rationale Zahl!" Wir widerlegen ihn, indem wir antworten: „Wenn Du recht hättest, wenn es also eine rationale Zahl d gäbe, für die $d^2 = 2$ gilt, dann würde folgendes gelten: d müßte sich als Verhältnis $\frac{m}{n}$ natürlicher Zahlen m und n ausdrücken lassen, es wäre also

$$d^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2, \text{ also auch}$$
$$m^2 = 2 \cdot n^2 \text{ oder}$$
$$m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n,$$

d. h., links und rechts vom Gleichheitszeichen müßten dieselben Zahlen stehen. Wenn wir uns diese nun in Primfaktoren zerlegt denken (zum Beispiel $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)$), so sieht man, daß rechts eine *ungerade* Anzahl von Primzahlen, links aber eine *gerade* Anzahl von Primzahlen steht, also kann diese Gleichung nicht stimmen! Kurz gesagt: Wenn Du recht hättest, dann ergäbe sich ein Widerspruch; also hast Du unrecht!" (Genau genommen ist es wichtig, daß die Primfaktorenzerlegung bis auf die Reihenfolge der Faktoren nur auf *eine* Weise möglich ist.)

Hier haben wir eine kleine Atempause verdient. Wir schauen zurück:

* Ausgangsfrage war: Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratfläche verdoppelt?

* Wir formulierten die Frage um: Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratdiagonale ergibt?

* Wir formulierten ein zweites Mal um: welche rationale Zahl hat 2 als 2. Potenz?

* Nach vielen vergeblichen Lösungsversuchen tauchte eine ungewöhnliche Vermutung auf: vielleicht gibt es eine solche rationale Zahl gar nicht?

* Wir bewiesen, daß es tatsächlich keine rationale Zahl gibt, die 2 als 2. Potenz hat.

Ist euch klar, daß wir etwas ganz Großartiges entdeckt haben? Wir haben einen *Unmöglichkeitsbeweis* geführt! Wir wissen jetzt, daß das Problem der Quadratverdoppelung unter Zuhilfenahme der rationalen Zahlen nicht gelöst werden *kann*.
Verwechselt das bitte nicht mit Unfähigkeit! Unsere Erkenntnis besteht *nicht* darin, daß wir bis jetzt noch nicht wissen, wie das Problem der Quadratverdoppelung mit Hilfe der rationalen Zahlen gelöst wird. Wir *wissen* vielmehr, daß es mit Hilfe der rationalen Zahlen bestimmt nicht gelöst werden kann; wir haben wirklich eine neue Erkenntnis gewonnen!
Da zur Zeit unserer Geschichte aus Delphi im antiken Griechenland nur rationale Zahlen bekannt waren, sieht man jetzt, wie ge-

schickt sich das Orakel von Delphi aus der Affäre gezogen hatte. „Wer das unlösbare Problem löst, soll den Esel bekommen!" Das Orakel hat also niemandem den Esel zugesprochen.
Es wird euch gewiß interessieren, daß noch im alten Griechenland unsere „nagelneue" Erkenntnis gefunden wurde. Es wird berichtet, daß wahrscheinlich Pythagoras höchstpersönlich diese Entdeckung machte.

Aufgabe 13: Beweise, daß es keine rationale Zahl gibt, deren 2. Potenz gleich 3 ist!

Aufgabe 14: Wieso klappt derselbe Beweis für die 2. Potenz 4 nicht? Es gibt natürlich eine rationale Zahl, deren 2. Potenz 4 ist, nämlich die Zahl 2. An welcher Stelle des Beweises geht der Beweis deswegen nicht weiter?

Aufgabe 15: Verallgemeinere! Für welche 2. Potenz ist der benutzte Beweisgedanke brauchbar?

Ich will euch noch zwei Beispiele für Unmöglichkeitsbeweise angeben.
Aus dem Physikunterricht wißt ihr, daß es kein sogenanntes „perpetuum mobile *1.* Art" geben kann. Ein *perpetuum mobile 1. Art* ist eine Maschine, die ständig Energie abgibt, ohne daß ständig die entsprechende Energie in sie hineingesteckt wird. Ein Benzinmotor wäre ein *perpetuum mobile 1. Art,* wenn er ohne Benzin laufen würde. Ein Wasserkraftwerk wäre ein *perpetuum mobile 1. Art,* wenn es ständig arbeiten würde, auch wenn kein Wasser da wäre. Ein *perpetuum mobile* 1. Art widerspricht dem Satz von der Erhaltung der Energie und ist daher physikalisch unmöglich.
In der Kriminalistik ist ein Alibi der Beweis dafür, daß eine ganz bestimmte Person zu einer ganz bestimmten Zeit *nicht* an einem ganz bestimmten Ort war. Ein Alibi ist also ein Unmöglichkeitsbeweis, nämlich der Beweis, daß die betreffende Person unmöglich der unmittelbare Täter gewesen sein konnte.

Aufgabe 16: Sammle weitere Beispiele von Unmöglichkeitsbeweisen! Frage eventuell deinen Mathematiklehrer!

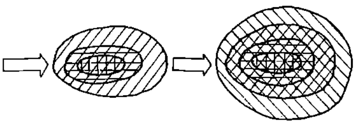
Aufgabe 17: Führe ganz ähnliche Überlegungen wie wir bei folgendem Problem durch: Wie ist die Kante eines Würfels zu vergrößern, damit das Würfelvolumen sich verdoppelt?

---

(5) Im letzten Teil unserer gemeinsamen Überlegungen wollen wir zwei Konsequenzen aus der neuen Erkenntnis ziehen, die auch für euren Mathematikunterricht von großer Bedeutung sind. Die erste und wichtigste Konsequenz besteht darin, daß wir unzufrieden

sind mit der schwachen Leistung der rationalen Zahlen. Sie leisten zwar mehr als die natürlichen und die gebrochenen Zahlen, denn mit ihnen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (außer durch 0). Sie haben uns beim Problem des Wurzelziehens aber verlassen. *Also ist es notwendig, eine neue Art von Zahlen zu erfinden*, die die Leistungen der rationalen Zahlen erbringen, darüber hinaus aber noch mehr können. Einige von euch kennen solche Zahlen bereits; man nennt sie *reelle* Zahlen.

Die Zahl, die wir mit $\sqrt{2}$ bezeichnet haben, ist zum Beispiel eine reelle Zahl. Da die reellen Zahlen die Leistungen der rationalen Zahlen übernehmen, können wir das Lehrbuchbild vervollständigen (siehe Figur 8):



Bereich der rationalen Zahlen — Bereich der reellen Zahlen

Figur 8

Zahlen, die durch $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ und andere bezeichnet werden, sind Beispiele für solche reellen Zahlen, die nicht rational sind. Man nennt sie irrationale Zahlen. Viele von euch kennen noch andere irrationale Zahlen. Ich gebe einige Beispiele an: Zahlen, die durch $\log_2 5$, $\lg 2$, $\sin 20°$ bezeichnet werden. Ich mache euch aber darauf aufmerksam, daß ich euch nicht gesagt habe, was eine reelle Zahl ist. Ich habe immer nur angegeben, wodurch sie bezeichnet werden.

Nun möchte ich euch eine zweite Schlußfolgerung aus unserer Erkenntnis erläutern, daß die Quadratverdoppelung allein mit rationalen Zahlen unmöglich ist. Vielleicht sind bei früheren Überlegungen einige kluge Köpfe schon auf den Einfall gekommen, die Länge der Quadratdiagonale bei vorgegebener Einheits-Seitenlänge zu *messen*. Ihr werdet $s =$ 1 dm sehr genau gezeichnet haben, das Quadrat peinlich sorgfältig dazu konstruiert und die Diagonale schließlich eingezeichnet haben. Jetzt kann man doch die Länge der Diagonale sehr genau in Dezimetern ablesen. Das über der Diagonalen errichtete Quadrat hat dann tatsächlich einen Flächeninhalt, der vom doppelten Flächeninhalt des Ausgangsquadrates so wenig abweicht, *daß es durch Nachmessen nicht mehr festgestellt werden kann.* Das stimmt sogar. Für jedes gezeichnete Quadrat kann ein doppelt so großes Quadrat *gezeichnet* werden, ohne daß durch Messen und Zeichnen Fehler festgestellt werden können. Die Quadratverdopplung ist für jede genaue Zeichnung auf dem Papier möglich.

Aber: meßt ihr die Diagonale und setzt in $d^2 = 2$ ein, so stimmt es nie!

Also: die Quadratverdopplung ist für *gezeichnete* Quadrate möglich, aber für das *mathematische* Quadrat nicht!

Was ihr hieraus lernen sollt, ist vor allem dies: *man muß unterscheiden zwischen einem gezeichneten Quadrat und dem mathematischen Quadrat.* Ein Quadrat, wie es der Mathematiker untersucht, kann man weder zeichnen noch hören oder riechen oder anfassen. Ein gezeichnetes Quadrat gibt uns eine Vorstellung von dem eigentlichen mathematischen Untersuchungsobjekt; ein gezeichnetes Quadrat ist aber nicht das Untersuchungsobjekt selbst. Es dient nur zu seiner Veranschaulichung. Die Modelle von Pyramiden, Kegeln usw., die euch euer Mathematiklehrer zeigt, sind nicht die mathematischen Körper selbst, sondern nur Veranschaulichungen der mathematischen Körper, eben Modelle davon. Das Gleiche trifft auf alle Zeichnungen im Heft oder an der Wandtafel zu. Deswegen habe ich vorhin auch immer so vorsichtig gesagt „$\sqrt{2}$ *bezeichnet* eine reelle Zahl"; das Zeichen „$\sqrt{2}$" ist nämlich nicht eine reelle Zahl selbst, sondern nur ein Name dafür. Es besteht hier der gleiche Unterschied wie zwischen eurem Namen „Fritz Müller" und dem Menschen, der diesen Namen hat. Es ist auch der gleiche Unterschied wie zwischen Ziffer und Zahl; eine Ziffer ist ein Name einer Zahl.

Ich glaube, über diese letzten Sätze müßt ihr noch einmal nachdenken. Es ist auch gut, wenn ihr über dieses schwierige Problem mit eurem Mathematiklehrer sprecht.

„Nichts Einfacheres als ein Quadrat!" ist unsere Überschrift gewesen. Es sieht ganz so aus, als ob man auch bei der Untersuchung scheinbar einfacher Dinge eine ganze Menge lernen kann. Ich hoffe, es hat wenigstens einem von euch Spaß gemacht; dann wirkt er ansteckend!

H. Wiesemann

Eine Aufgabe von

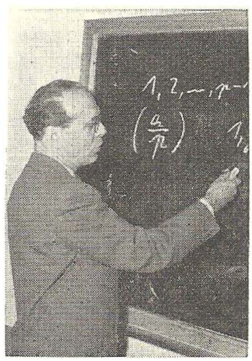
NPT Prof. Dr. phil. habil. Hans Reichardt*

Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik

* Professor mit Lehrstuhl, ordentliches Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher *Leopoldina* Halle, Direktor am Institut für Reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

9 **260 a** Eine Stoppuhr besitze zwei Sekundenzeiger, die verschiedene Drehpunkte (Mittelpunkte) haben. Wenn die beiden Sekundenzeiger laufen, so mögen die durch die Zeiger verlaufenden Geraden einander schneiden. Welche Kurve beschreiben die Schnittpunkte dieser Geraden bei einem vollen Umlauf der Sekundenzeiger?

10 **260 b** Bei welchen Stellungen des Stundenzeigers und des Minutenzeigers einer Uhr geht wieder eine mögliche Stellung hervor, wenn man die beiden Zeigerstellungen miteinander vertauscht?



Prof. Dr. Reichardt gehört zu den aktiven Förderern der außerschulischen Arbeit im Fach Mathematik. Unsere Bilder zeigen ihn und seine aufmerksamen Zuhörer bei der Vorbereitung auf die DDR-Olympiade im Jahre 1963.

Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Das Zentrale Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR steht unter der Leitung von Prof. Dr. W. Engel (Universität Rostock). Entsprechend den verschiedenen Aufgaben ist es in ein Organisationskomitee (Leiter OStR H. Titze), die Aufgabenkommission und die Jury (Leiter Dr. H. Bausch) untergliedert.

Die Aufgabenkommission ist das Herzstück des Komitees, weil die in jedem Jahr ablaufenden Olympiaden in allen vier Stufen (Schule, Kreis, Bezirk, DDR) als wichtigste Voraussetzung die Bereitstellung eines den spezifischen Anforderungen dieses Wettbewerbs genügenden Aufgabenmaterials erfordern. Sie wurde 1964 im Auftrage der Mathematischen Gesellschaft der DDR gegründet und steht unter der gemeinsamen Leitung von Prof. Dr. H. Karl (Pädagogische Hochschule Potsdam) und Prof. Dr. U. Pirl (Humboldt-Universität zu Berlin). Die Aufgabenkommission untergliedert sich nach den beteiligten Klassenstufen in vier Arbeitsgruppen:

Klassenstufe 5/6
StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig (als Leiter)
OL K. Fuhrmann, Leipzig · OL H. Schulze, Leipzig

Klassenstufe 7/8
StR D. Michels, Rostock (als Leiter)
OL K. Krüger, Bad Doberan · P. Polster, Dresden

Klassenstufe 9/10
StR. G. Schulze, Herzberg (als Leiter)
K. Beierlein, Potsdam
OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin ·
G.-O. Schulze, Luckenwalde

Klassenstufe 11/12
NPT OStR Dr. R. Lüders, Berlin (als Leiter)
OL H. Bode, Gotha · M. Rehm, Berlin ·
Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen

Alle Mitglieder der Aufgabenkommission senden, meist über das ganze Jahr verteilt, Aufgabenvorschläge für das jeweils bevorstehende Olympiadejahr an den Sekretär des Zentralen Komitees, OStR H. Titze ein. Diese werden nach Vervielfältigung an alle Mitglieder der Kommission weitergeleitet. Im Herbst jedes Jahres tritt die Kommission zu einer mehrtägigen Beratung zusammen und wählt aus dem vorliegenden Material die Aufgaben für alle Stufen der im Herbst des folgenden Jahres beginnenden Olympiade aus. Dadurch ist ein genügender zeitlicher Vorlauf für die notwendigen Überarbeitungen geschaffen.

Schon bei der Auswahl der Aufgaben auf der Jahrestagung sind die verschiedensten Gesichtspunkte zu berücksichtigen. So kommt es u. a. darauf an, Aufgaben aus den wichtigsten mathematischen Sachgebieten in angemessener Weise für die jeweiligen Klassenstufen vorzusehen, eine Zusammenstellung zu gewährleisten, die in geeigneter Art aus leichten, mittleren und schwierigen Aufgaben gemischt ist, eine Steigerung der Anforderungen in den zeitlich späteren Stufen zu planen, Punktzahlen entsprechend dem Schwierigkeitsgrad festzulegen. Als günstig hat sich erwiesen, stets die konstante Gesamtzahl von 40 Punkten zu vergeben, da hierbei genügend Spielraum vorhanden ist, um die Aufgaben nach ihrem Schwierigkeitsgrad zu differenzieren.

Besondere Sorgfalt wird stets auf die Formulierung der Lösungen verwendet. Auch sie müssen mehreren Forderungen genügen, die nicht immer leicht zu vereinen sind. Zunächst müssen sie natürlich mathematisch vollkommen einwandfrei sein. Sodann sollen sie den Korrektoren eine brauchbare Handhabe zur Selbstverständigung über den mathematischen Gehalt der Aufgaben bieten, indem sie, soweit möglich, Lösungswege enthalten, die auch von Schülern der entsprechenden Klassenstufe gefunden werden können. Außerdem ist es vorteilhaft, wenn sie möglichst unmittelbar und zügig zum Ergebnis gelangen, also umständliche und langatmige Wege vermeiden. Die vom Sekretär des ZKOJM aus den eingereichten Materialien hergestellte Erstfassung wird einem Gutachterkreis (Prof. Dr. Engel, Prof. Dr. Karl, Dr. Geise, Dr. Stammler und den Vorsitzenden der vier Aufgabengruppen) zugestellt. Nach Eingang der Gutachten fertigt der Sekretär gemeinsam mit dem Leiter der jeweiligen Aufgabengruppe eine vorläufige Endfassung an, die in einer Schlußredaktion durch Prof. Dr. Pirl, OStR K.-H. Lehmann (Berlin) und OStR Titze die endgültige Form erhält. Aus allem geht hervor, daß das Netz der von der Aufgabenkommission zu leistenden Arbeiten umfangreich, vielseitig und verantwortungsvoll ist. Die Kommission bemüht sich, durch hohe Qualität der veröffentlichten Aufgaben und Lösungen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts beizutragen.

H. Karl

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

(Zur Vorbereitung auf die Schulstufe der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR)
letzter Einsendetermin 15. September 1968

5 **230** Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU von Prag nach Kairo. Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Keiner von ihnen hat gleichzeitig zwei der Berufe. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.

b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.

c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.

d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.
Wie heißt der Ingenieur, wie der Elektriker und wie der Monteur?

231 In einem volkseigenen Betrieb wurden von Anfang Januar bis Ende Juni desselben Jahres von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, vom 1. Juli ab täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

a) Wieviel Maschinenteile dieser Art werden nunmehr monatlich — 26 Arbeitstage — angefertigt?

b) Wieviel Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan, der 12 Stück pro Tag vorsieht, hinaus produziert werden?

232 Aus 36 gleichgroßen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

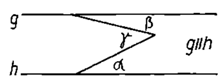
a) Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden).

b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

W(5)233 Inge wird von Ellen gefragt, wie in ihrer Klasse die letzte Mathematikarbeit ausgefallen sei. Verschmitzt entgegnet Inge: „Nun, denke nach! Der dritte Teil der Anzahl unserer 36 Schüler erhielt die Note ‚Zwei‘ oder ‚Vier‘; dabei war die Anzahl der ‚Zweien‘ doppelt so groß wie die der ‚Vieren‘. Die Anzahl der ‚Einsen‘ hingegen war dreimal so groß wie die der ‚Fünfen‘. Die Note ‚Drei‘ kam mehr als doppelt so oft, aber weniger als dreimal so oft vor, wie die Note ‚Eins‘.“ Ermittle die Zensurenverteilung!

W(5)234 Eine zweistellige natürliche Zahl hat die Quersumme 13. Vertauscht man ihre Ziffern, so erhält man eine Zahl, die um 27 kleiner ist als die ursprüngliche. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

235 Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur. Die Winkel α und β seien bekannt. Berechne die Größe des Winkels γ! 6



236 Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf: „In einer Klasse können 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Wieviel Schüler besuchen unsere Klasse?“

237 In einer Möbelfabrik wurde im Laufe eines Jahres die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische.
Wieviel Tische wurden im Juni und wieviel im Dezember hergestellt?

W(6)238 Uwe verliert beim ersten Spiel zwei mehr als ein Drittel seiner Murmeln. Beim zweiten Spiel verliert er drei mehr als ein Viertel der ihm verbliebenen Murmeln. Nach diesen beiden Spielen hat Uwe noch 21 Murmeln, die er seinem Bruder Heinz schenkt. Wieviel Murmeln besaß Uwe vor dem ersten Spiel?

W(6)239 Mehrere LPG hatten sich zu einer Kooperationsgemeinschaft zusammengeschlossen; sie stellten sich das Ziel, an jedem Tag genau 56 ha Weizen abzuernten. Durch gute Arbeitsorganisation wurden jedoch täglich 64 ha geschafft; so wurde die Ernte vorfristig beendet. Am Ende des zweiten Tages vor dem gestellten Plantermin hatte die Kooperationsgemeinschaft nur noch Weizen von 40 ha zu ernten. In wieviel Tagen sollte die Weizenernte ursprünglich beendet sein?

7 **240** Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{r} \text{DREI} \\ +\,\text{EINS} \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.
Es stellte sich heraus, daß es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

241 In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5", jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1", jeder dritte die Zensur „2" und jeder sechste die Zensur „4".
Über die Schülerzahl n ist bekannt:

$$20 < n < 40.$$

Wieviel Schüler erhielten die Zensur „3"?

242 Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände vorgegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung. Gib zwei verschiedene Lösungswege an, die Brigitte hat.

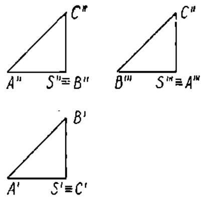
W(7)243 Ein Parallelogramm $ABCD$ wird durch seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, die sich im Punkt M schneiden, in vier Teildreiecke ABM, BCM, CDM und DAM zerlegt. Beweise, daß diese Teildreiecke untereinander flächengleich sind!

W(7)244 Es seien a, b, c, und d vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Beweise, daß die Summe aus den Produkten ab, ac, ad, bc, bd und cd stets eine ungerade natürliche Zahl ist!

8 **245** In der Zahl *378* sind an die Stelle der beiden Sterne Ziffern zu setzen, so daß die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.

246 Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede leere Flasche) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden. Es stellt sich heraus, daß er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück. Wieviel leere Flaschen hatte Peter mitgebracht? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

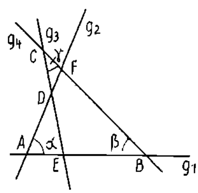
247 a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriß besitzt (siehe Abb.)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)



b) Zeichne das Netz dieses Körpers und stelle ein Körpermodell her!

W(8)248 In der untenstehenden Abbildung schneiden sich die vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 in den Punkten A, B, C, D, E und F. Die Größen der Winkel $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EBF$ und $\sphericalangle FCD$ seien α, β bzw. γ.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle FDE$!



W(8)249 Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen multiplizieren wir die erste mit der zweiten und die zweite mit der dritten. Beweise, daß dann die Summe der beiden Produkte gleich dem doppelten Quadrat der zweiten Zahl ist!

250 Es ist der folgende Satz zu beweisen: **9**
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe

der Quadrate der Längen der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Längen der Parallelseiten.

251 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

1. Anna hat den Ball.
2. Brigitte hat den Ball nicht.
3. Claudia hat die Schere nicht.

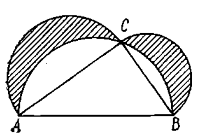
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

252 In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent. Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

a) Wieviel Arbeiter hat die Abteilung?

b) Auf wieviel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.

W(9)253 Zeichnet man über den Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ und über der Hypotenuse $\overline{AB}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC die Halbkreise (s. untenstehende Figur), so ist der Flächeninhalt des Dreiecks gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden „Möndchen" (schraffiert). Beweise diesen Satz!



Diese Aufgabe ist unter der Bezeichnung *Möndchen des Hippokrates* bekannt, der als Möndchen eine zwischen zwei Kreisen liegende Fläche bezeichnete. (Wer darüber mehr erfahren will, dem raten wir, sich in W. Lietzmann: *Der pythagoreische Lehrsatz*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, zu informieren.)

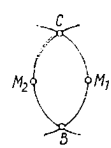
W(9)254 Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, wenn die folgenden Maße gegeben sind:
$\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm und $\overline{DA} = 4$ cm!
(Erleichtere Dir die Lösung dieser Konstruktionsaufgabe, indem Du sie in Analyse, Konstruktion mit Beschreibung, Beweis der Konstruktion und Diskussion gliederst!)

255 Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt. **10**
Man beweise, daß das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke paarweise flächengleich sind.

256 Finde eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat an der Einerstelle ist! Weise nach, daß es nur eine solche Zahl gibt!

257 Vier Personen haben die Vornamen **A**rnold, **B**ernhard, **C**onrad und **D**ietrich. Die Familiennamen dieser Personen lauten **A**rnold, **B**ernhard, **C**onrad und **D**ietrich. Ferner wissen wir folgendes:
a) keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.
b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.
c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familiennamen mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.
Welche Vor- und Zunamen haben die einzelnen Personen?

W(10/12)258 Der Flächeninhalt A der in der Abbildung dargestellten Figur soll berechnet werden. Dabei sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte zweier Kreise mit dem Radius a, die sich in B und C schneiden.



W(10/12)259 Beweise, daß von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen
1. die Summe stets durch 3,
2. das Produkt stets durch 6 teilbar ist!

Die vorliegenden Aufgaben zur Vorbereitung der Schulolympiade 1968 stellten folgende Mitglieder der Aufgabenkommission zusammen: Prof. Dr. U. Pirl, OStR Dr. R. Lüders, StR G. Schulze, StR D. Michels, OL H. Schulze, StR J. Lehmann (siehe Beitrag S. 76).

Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung in Rostock

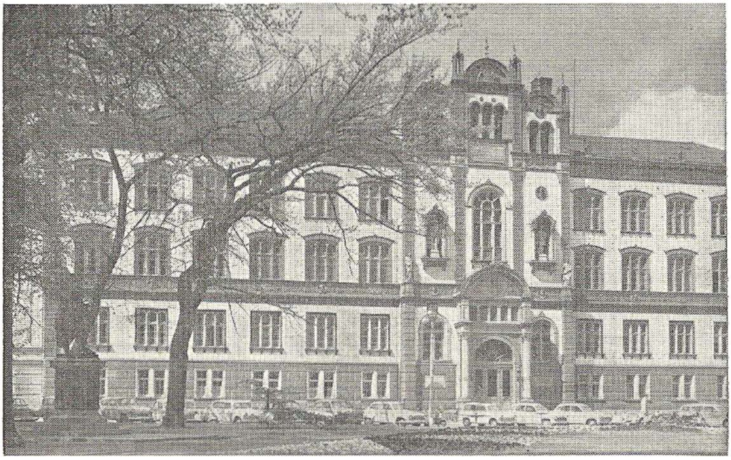
Während der *V. Wissenschaftlichen Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR* in Rostock fand erstmalig gleichzeitig ein Ferienlehrgang Junger Mathematiker statt. An diesem Lehrgang nahmen 41 Schülerinnen und Schüler aus allen Bezirken der Republik teil. Sie hatten sich in den vergangenen Jahren durch hohe Leistungen bei den mathematischen Wettbewerben ausgezeichnet und zum Teil wiederholt Preise errungen. Der Lehrgang sollte den Teilnehmern Gelegenheit geben, einmal die Atmosphäre einer wissenschaftlichen Tagung kennenzulernen. Außerdem sollten sie auf die künftigen Wettbewerbe vorbereitet werden. In enger Zusammenarbeit zwischen der Mathematischen Gesellschaft der DDR und dem Ministerium für Volksbildung wurde den Jugendlichen ein reichhaltiges Programm geboten.

Sie konnten an der feierlichen Eröffnung der Jahrestagung teilnehmen und wurden dort mit viel Beifall begrüßt. Aus dem Veranstaltungsprogramm der Jahrestagung waren außer dem Eröffnungsvortrag (Prof. Dr. U. Pirl: *60 Jahre Theorie der schlichten konformen Abbildungen*), ein Vortrag über *logische Schulung im Mathematikunterricht* (Prof. Dr. K. Härtig), der *Hilbert*-Vormittag zum 25. Todestag von David Hilbert (Vortragende: Prof. Dr. H. Grell, Prof. Dr. K. Schröder, Prof. Dr. G. Asser), ein Vortrag *zum 50. Todestag Georg Cantors* (Prof. Dr. K. Härtig) und das Kolloquium über die *Aufgaben der Mathematik bei der Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung und der Operationsforschung in der Volkswirtschaft* für die Lehrgangsteilnehmer ausgewählt worden. Diese Veranstaltungen sollten den Jugendlichen vor allem einen Einblick in einige wichtige und interessante Probleme geben. Es war von vornherein klar, daß manches dabei notwendigerweise unverstanden bleiben mußte, da es für einen anderen Hörerkreis gedacht war. Trotzdem haben unsere Jungen Mathematiker, wie Gespräche ergaben, manche Anregung gewonnen, die sich bestimmt günstig auf ihre weitere Beschäftigung mit der Mathematik auswirken wird. Einige spezifisch für den Lehrgang organisierte Veranstaltungen befaßten sich zwar hauptsächlich mit dem Lösen von Wettbewerbsaufgaben aus verschiedenen Disziplinen (z. B. Geometrie, Algebra, Zahlentheorie, Kombinatorik usw.), doch wurde auch dabei stets ein Einblick in die zugehörigen Theorien gegeben. Für diese Veranstaltungen hatten sich mit Prof. Dr. Pirl, Dr. Bausch, Frau Dr. Frank, Dr. Förste und Dr. Zacharias Mathematiker zur Verfügung gestellt, die schon seit vielen Jahren mit großer Aktivität bei der Ausbildung unseres mathematischen Nachwuchses und insbesondere bei den Olympiaden Junger Mathematiker mitwirken.

Die Lehrgangsteilnehmer nahmen regen Anteil an wichtigen Ereignissen unseres gesellschaftlichen Lebens. In einem Seminar wurde lebhaft über den Entwurf der neuen sozialistischen Verfassung unserer Republik diskutiert. Den Jugendlichen wurde bewußt, daß die vielfältige Förderung, die ihnen seit Jahren in unserer sozialistischen Republik zuteil wird und zu der auch dieser Ferienlehrgang gehörte, schon ein Stück Verfassungswirklichkeit darstellt. Mit großer Empörung nahmen die Teilnehmer Kenntnis von der von westdeutschen Kreisen angezettelten Provokation gegen unsere Rennrodlerinnen in Grenoble. Ein Protesttelegramm wurde nach Grenoble gesandt und

von einem Mitglied der FDJ-Leitung des Lehrgangs vor der Mitgliederversammlung der Mathematischen Gesellschaft verlesen.
Ein gemeinsamer Theaterbesuch machte unsere Jugendlichen mit dem viel diskutierten Stück von Peter Weiß „Die Ermordung des Jean-Paul Marat“ bekannt. Schließlich erhielten wir die Möglichkeit, die *Warnow-Werft* in Warnemünde zu besichtigen. Besonderen Eindruck hinterließ dabei die gewaltige Kabelkrananlage. Zum Abschluß des Lehrgangs wurde dann noch ein Ausflug nach Warnemünde unternommen, der mit einer Rundfahrt durch den Rostocker Überseehafen und einem kleinen Abstecher auf die Ostsee ausklang.
Der Lehrgang hat nach Ansicht aller Teilnehmer und Betreuer die gestellten Ziele erreicht. Von den Jungen Mathematikern wurde der Wunsch geäußert, ähnliche Lehrgänge auch in den nächsten Jahren durchzuführen. Es bleibt uns noch übrig, für die vorbildliche Betreuung allen Beteiligten unseren herzlichen Dank auszusprechen.

H. Titze



Hauptgebäude der Universität Rostock

Vom 12. bis 17. Februar 1968 fand in der Universität Rostock die *V. Wissenschaftliche Jahrestagung der MGdDDR* statt. An dem wissenschaftlichen Programm, das sich aus Übersichtsvorträgen, Kurzvorträgen über spezielle Probleme und öffentlichen Diskussionen über allgemeininteressierende Fragen zusammensetzte, nahmen mehr als 900 Besucher teil. Bei der Zusammenstellung der Übersichtsvorträge wurde berücksichtigt, daß sich die MGdDDR nicht nur die Pflege der traditionellen Gebiete der Mathematik zum Ziele setzt, sondern sich auch mit den Anwendungen befaßt. Dazu gehören Rechentechnik und Datenverarbeitung, Optimierungs- und Programmierungsfragen in der Ökonomie sowie das gesamte Gebiet der Mechanik. Außerdem wurde durch Auswahl einiger allgemeiner Themen an die Interessen der Lehrer gedacht. Die etwa 280 Referate verteilten sich auf die 14 Sektionen Algebra und Zahlentheorie, Algebraische Geometrie, Analysis, Biometrie, Kybernetik, Logik, Mathematische Physik, Mechanik, Numerische Mathematik und Rechentechnik, Strömungslehre, Unterricht und Ausbildung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Wirtschaftsmathematik. Im Frühjahr 1969 findet die VI. Jahrestagung der MGdDDR in Magdeburg statt.

Aufgaben der VII. OJM

10

1. Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind?

2. Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, daß er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.
Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h \lesseqgtr \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

3. Beweisen Sie folgende Behauptung: Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung
$$b^2 x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\, x + c^2 = 0 \quad (1)$$
keine rellen Lösungen.

4. Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel! Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

5. Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1, W_2, W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände. W_1, W_2, W_3 liegen nicht auf derselben Geraden. Die Werkhallen sind miteinander durch 3 geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken W_1W_2, W_2W_3 und W_3W_1) verbunden. Für die Strecken gilt: $\overline{W_2W_3} < \overline{W_3W_1} < \overline{W_1W_2}$. Die Bahnstation hat von den 3 Straßen gleichen Abstand. Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken BW_1, BW_2 und BW_3) mit den drei Werkhallen verbunden. Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.
Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

6. Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:
$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

11|12

1. Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:
$$x_1 + a x_2 + x_3 = b \quad (1)$$
$$x_2 + a x_3 + x_4 = b \quad (2)$$
$$x_3 + a x_4 + x_1 = b \quad (3)$$
$$x_4 + a x_1 + x_2 = b. \quad (4)$$
Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

2. Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus dem Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

3. Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung
$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$
genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

4. Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehnstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.
Man beweise, daß es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt!

5. Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung
$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$
erfüllt ist.

6. Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang sind.

VII. OJM

Vom 15. bis 19. April 1968 fand in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck" in Berlin-Bogensee die DDR-Stufe der VII. OJM statt. An ihr nahmen 192 Jungen und 19 Mädchen aus Oberschulen, erweiterten Oberschulen und Berufsschulen teil. Rund 100 Wissenschaftler, Lehrer und Mathematikstudenten waren als Koordinatoren, Korrektoren, Leitungsmitglieder, Delegationsleiter oder Betreuer tätig.

Preisträger der VII. OJM

Erste Preise wurden vergeben an:

Gudrun Fröbel
Spezialschule VEB C. Zeiss, Jena, (Olympiadeklasse 10), Schülerin einer 9. Klasse

Wolfgang Burmeister
EOS Dresden-Süd, (Olympiadeklasse 11), Schüler einer 9. Klasse

Ulrich Zähle
Arbeiter- und Bauernfakultät Halle, (Olympiadeklasse 12)

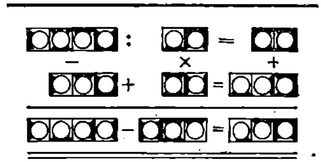
Zweite Preise wurden vergeben:
In Olympiadeklasse 10 an: Gerhard Noack, OS Kolkwitz (Bez. Cottbus); Wolfgang Birken, EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg (aus Kl. 9); Klaus Bernhard, EOS „Otto v. Guericke“, Magdeburg; Peter Oswald, EOS Dresden-Süd; Rainer Nitsche, EOS „Ernst Heckel“, Merseburg; Werner Ley, EOS „Georg Agricola“, Glauchau; Siegfried Krüger, OS Werbelow (Bez. Neubrandenbg.).
In Olympiadeklasse 11 an: Jürgen Bechstein, Goethe-EOS, Ilmenau; Stefan Heinrich, Spezialklasse Humboldt-Universität zu Berlin; Bernd Martin, Spezialklasse EOS „H. Hertz“, Berlin; Jürgen Gärtner BBS Rafena-Werke, Radeberg (Bez. Dresden).
In Olympiadeklasse 12 an: Hans-Görg Roos, Spezialklasse TH Magdeburg; Bernd Goldschmidt, Spezialklasse M.-Luther-Univ. Halle.

Dritte Preise wurden vergeben:
In Olympiadeklasse 10 an: Jürgen Schefter, OS Liebenwerda (aus Kl. 8); Roland Spannaus, 66. OS Dresden; Ludwig Hoy, EOS „Prof. Dr. Max Schneider“, Lichtenstein; Achim Nötzold, Artur-Becker-Schule Leuterbach; (Bezirk K.-M.-St.) Traugott Schulmeiß, EOS Köthen; Dietrich Neukirchner, EOS „Bertolt Brecht“, Schwarzenberg; Udo Waltenberger, EOS Pößnek; Hannes Handorf, Goethe-EOS, Schwerin; Joachim Voigt, (aus Kl. 9); Tord Riemann, beide Spezialklasse EOS „H. Hertz“ Berlin; Norbert Boy, Kaufm. BS Demmin.
In Olympiadeklasse 11 an: Klaus-Detlef Kürsten, ABF Halle; Konrad Paßkönig, EOS Lauchhammer; Andreas Felgenhauer, EOS Zerbst (aus Kl. 10); Gottfried Jetschke, EOS „Prof. Dr. Max Schneider“, Lichtenstein.
In Olympiadeklasse 12 an: Christoph Bandt, EOS Greifswald; Joachim Fritz, EOS Cottbus; Alexander Neumann, EOS „Romain Rolland“, Dresden; Hans-Georg Witt, EOS Greifswald; Uwe Köhler, Spezialkl. TH Karl-Marx-Stadt; Lutz Höne, BBS Weimar-Werk.

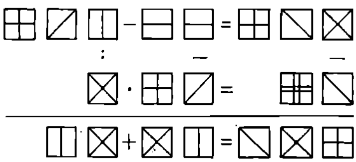
Diplome *für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielten:* Ingrid Schiemann, EOS Cottbus; Hans-Görg Roos, Spezialklasse TH Magdeburg.

Anerkennungsurkunden *für sehr gute Leistungen erhielten:* Klasse 10 — Christoph Kreher, ZOS Beutha; Volkmar Olbrich, EOS „Otto v. Guericke“, Magdeburg; Martin Horatschek, EOS „Thomas Müntzer“, Halle; Ulrich Semmler, EOS „Friedrich Engels“, Karl-Marx-Stadt; Heidi Sieler, EOS Hermsdorf; Wolfgang Weise, EOS „Ernst Schneller“, Burgstädt; Ludwig Paditz, EOS „Ernst Schneller“, Meißen; Detlev Schultz, EOS „Kopernikus“, Neubrandenburg; Martin Pusack, EOS Demmin (aus Kl. 9); Hans-Gerd Leopold, EOS „J. R. Becher“, Jena; Klaus Bothe, EOS „H. Hertz“, Berlin; Renate Uhlmann, BBS TPW Thalheim; Renate Messerschmidt, Allg. BS Staßfurt; — Kl. 11 — Klaus Neumann, EOS „Ernst Schneller“, Meißen; Ulrich Imme, EOS Ilmenau; Eberhard Schmidt, ABF Halle; Joachim Loose, EOS Kleinmachnow; Eberhard Richter, EOS Schleusingen; Veronika Eberhardt, EOS „Ernst Abbe,“ Erfurt; Johann-Peter Sommer, Goethe-EOS Ilmenau; Manfred Krzikalla, Spezialschule Frankfurt/O. (aus Kl. 10); Hermann Haase, EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg (aus Kl. 9); Thomas Schulmeister, EOS „H. Hertz“, Berlin; Ingolf Slota, EOS „H. Hertz“, Berlin; Heinrich Herzog, BBS BMK Erfurt; Jürgen Vogel, BBS Elbtalwerk Dresden — Klasse 12 — Ludwig Arent, EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg; Gerd Franke, EOS „Artur Becker“, Suhl; Fred Nowack, Humboldt-EOS, Erfurt; Gerhard Walter, EOS Meiningen; Klaus Haberland, ABF Halle; Bernd Dörfel, ABF Halle; Wolfgang Kleinig, ABF Halle; Gerhard Schmidt, EOS „Helmholtz“, Leipzig; Wilfried Dames EOS „H. Hertz“, Berlin; Peter Türk, BBS TRO, Berlin.

Wir lösen ein Zahlenrätsel



In den meisten Illustrierten finden wir in den Rätselecken neben Kreuzwort- und Silbenrätseln mitunter auch Zahlenrätsel abgedruckt. Eine Umfrage bei Schülern ergab, daß sich die meisten der Befragten nicht so recht an die Lösung eines Zahlenrätsels heranwagen, weil sie oft nicht wissen, wie sie systematisch vorzugehen haben, um zum Ziel zu gelangen. Wir wollen uns einige einfache Zahlenrätsel anschauen und gemeinsam versuchen, sie zu lösen. Betrachten wir ein erstes Beispiel.



Jedes Kästchen bedeutet eine Ziffer, gleich markierte Kästchen immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten und die senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.
Wir wollen aus drucktechnischen Gründen die Kästchen durch kleine Buchstaben ersetzen. Wir schaffen uns ferner einen Rahmen, indem wir die Spalten mit A, B und C und die Zeilen mit I, II und III bezeichnen. Unsere Aufgabe erhält dann die folgende Form:

	A		B		C
I	abc	$-$	dd	$=$	aef
	$:$		$-$		$-$
II	f	$\cdot$	ab	$=$	ge
III	cf	$+$	fc	$=$	efa

Nun haben wir folgendes zu beachten:

1. abc bedeutet in diesem Fall eine dreistellige natürliche Zahl; a ist die Ziffer an der Hunderterstelle, b die Ziffer an der Zehnerstelle und c die Ziffer an der Einerstelle. Entsprechendes gilt für die anderen verwendeten Symbole.

2. Für a könnte eine der Ziffern von 1 bis 9 stehen; die Ziffer 0 scheidet aus, da wir in diesem Fall keine dreistellige natürliche Zahl erhalten.

3. In unserem Rahmen sind genau sechs Aufgaben enthalten; wir wollen sie nochmals getrennt aufschreiben:

A) $abc : f = cf$; I) $abc - dd = aef$;
B) $dd - ab = fc$; II) $f \cdot ab = ge$;
C) $aef - ge = efa$; III) $cf + fc = efa$.

Bevor wir versuchen, durch systematisches Probieren und unter Nutzung unserer Kenntnisse über das Rechnen mit natürlichen Zahlen recht schnell zur Lösung dieser Aufgabe zu kommen, seien zunächst einige Hinweise gegeben. Es gibt bei solchen Zahlenrätseln oft einige sogenannte „Schlüsselzahlen"; das sind zum Beispiel die Ziffern 0, 1 und 9. Wir konzentrieren uns zunächst darauf, diese Schlüsselzahlen herauszufinden:
Wenn in einer Aufgabe der Minuend und der Subtrahend auf die gleiche Ziffer enden, so muß die Differenz auf die Ziffer 0 enden. Aus $gd - ad = fh$ folgt $h = 0$.
Bei der Addition zweier zweistelliger Zahlen kann höchstens ein Hunderter entstehen. Aus $ad + fg = cib$ folgt $c = 1$. Wird zu einer dreistelligen Zahl eine zweistellige addiert, erhöht sich der Hunderter — wenn überhaupt — höchstens um 1.
Aus $abc + de = cfg$ folgt $c = a + 1$.
Aus $gad + bc = gaf$ folgt $b = 9$ und $d + c \geqq 10$.
Nach diesen kurzen Hinweisen wollen wir nun unsere erste Aufgabe lösen.

Aus Aufgabe III) erkennen wir folgendes:
Es sollen zwei zweistellige Zahlen addiert werden; die Summe ist eine dreistellige Zahl. Die Ziffer an der Hunderterstelle der Summe muß eine 1 sein, denn $99 + 99 = 198 < 200$.
Also ist $e = 1$.
Aus Aufgabe C) können wir folgendes ablesen:

$aef - ge = efa$ oder $efa + ge = afe$;

für $e = 1$ erhalten wir dann $1fa + g1 = af1$.

Zu einer dreistelligen Zahl ist eine zweistellige Zahl zu addieren. Die Ziffer der Hunderterstelle der Summe ist verschieden von e, also ungleich 1; sie kann aber nur um 1 größer sein, als die Ziffer der Hunderterstelle des ersten Summanden $1fa$.
Also ist $a = 2$.
Aus Aufgabe C) erkennen wir weiterhin folgendes:
$aef - ge = efa$ wird für $e = 1$ und $a = 2$ zu $21f - g1 = 1f2$; aus $f - 1 = 2$ folgt $f = 3$.
Setzen wir in Aufgabe C) für f nun die Ziffer 3 ein, so erhalten wir $213 - g1 = 132$; daraus folgt dann $g = 8$.
Aufgabe II) lautet nun unter Verwendung der bereits gefundenen Ziffern $3 \cdot 2b = 81$, also gilt $b = 7$.
Nun lösen wir Aufgabe III);
aus $c3 + 3c = 132$ folgt $c = 9$.
Aus Aufgabe B) finden wir schließlich $d = 6$; denn er gilt $dd - 27 = 39$ oder $dd = 39 + 27 = 66$.
Wir notieren nochmals die vollständige Lösung der Aufgabe; überzeugt euch durch Proben von der Richtigkeit unserer Lösung.

$$\begin{array}{ccccc} 279 & - & 66 & = & 213 \\ : & & - & & - \\ 3 & \cdot & 27 & = & 81 \\ \hline 93 & + & 39 & = & 132 \end{array}$$

Vor dem Lösen einer ähnlichen Aufgabe ist es zweckmäßig, neben das durch Kästchen oder Buchstaben gegebene Zahlenrätsel ein „Leerschema" zu notieren. Dort wird dann jede gefundene Ziffer sofort eingetragen, und wir behalten besser die Übersicht. Das „Leerschema" für die gemeinsam gelöste Aufgabe könnte wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{ccccc} \square\square\square & - & \square\square & = & \square\square\square \\ : & & - & & - \\ \square & \cdot & \square\square & = & \square\square \\ \hline \square\square & + & \square\square & = & \square\square\square \end{array}$$

Beim Lösen eines zweiten Zahlenrätsels können wir uns sicher schon kürzer fassen, da ihr aufmerksam mitgearbeitet habt und jetzt schon „alte Hasen" seid.

$$\begin{array}{c|ccccc} & A & & B & & C \\ \hline \mathrm{I} & abc & - & bc & = & aee \\ & : & & + & & - \\ \mathrm{II} & b & \cdot & fc & = & fgg \\ \hline \mathrm{III} & gg & + & ffh & = & fic \end{array}$$

Aus Zeile I folgt: $e = 0$.
Aus Spalte B folgt: $f = 1$.
Aus Spalte C folgt: $a = 3$.
Aus Spalte B folgt: $b = 9$.
Aus Spalte A folgt: $g = 4$.
Aus Spalte C folgt: $i = 5$ und $c = 6$.
Aus Spalte B folgt: $h = 2$.

Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} 396 & - & 96 & = & 300 \\ : & & + & & - \\ 9 & \cdot & 16 & = & 144 \\ \hline 44 & + & 112 & = & 156 \end{array}$$

Th. Scholl

In diesem Beitrag wurden zwei Aufgaben aus dem Artikel Zahlenrätsel und Zahlenkongruenzen von E. Walter, Greifswald, aus „Informationen für die Arbeitsgemeinschaften und Kurse der DDR", Nr. 2 — 1963 entnommen.

Aufgaben

Zum Abschluß wollen wir euch zwei Zahlenrätsel aufgeben, an denen ihr eure Kräfte selbst messen könnt. Die Lösungen veröffentlichen wir in der nächsten Ausgabe unserer Zeitschrift.

228
$$\begin{array}{ccccc} aba & - & cd & = & efa \\ : & & + & & - \\ ea & \cdot & c & = & fg \\ \hline ae & + & cc & = & hf \end{array}$$

229
$$\begin{array}{ccccc} abb & - & ccd & = & eae \\ : & & + & & - \\ ce & \cdot & ca & = & cfd \\ \hline eb & + & cdg & = & cgc \end{array}$$

Wir hoffen, daß euch das Lösen der Zahlenrätsel Spaß gemacht hat und ihr künftig selbständig ähnliche Aufgaben aus Illustrierten zu lösen versucht.

H. F. Schmidt

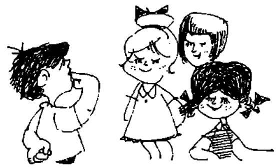
Kein Ärger mit der Algebra

Mathematische Schülerbücherei, Band 35
127 Seiten, 35 Abbildungen,
Einband: Halbleinen mit Folie, 5,20 M
Kinderbuchverlag, Berlin 1968

Zwei Freunde, die sich für technische Probleme interessieren, wollen eine Wasseruhr bauen. Sehr bald merken sie, daß sie dabei ohne ein Mindestmaß mathematischer Berechnungen nicht auskommen. Sie müssen sich mit den *Grundlagen der Gleichungslehre* auseinandersetzen. Dabei entdecken sie, daß die Mathematik Bedeutung für alle Bereiche des Lebens besitzt.
Dieses unterhaltsame mathematische Kinderbuch, geeignet ab Klasse 7, empfehlen wir unseren Lesern, die Redaktion.

Eine Knobelgeschichte

1. Teil

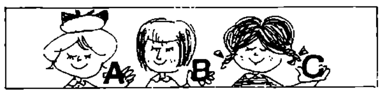


In einem Zirkel Junger Mathematiker wird u. a. die folgende Knobelaufgabe behandelt:

1. a) Drei Mädchen mit den Vornamen Annette, Beate und Christa haben die Zunamen *Schwarz, Unsinn* und *Weiß*. Nur die drei Mädchen wissen voneinander, welchen Zunamen jede einzelne von ihnen trägt.

b) Sie beantworten, wenn sie mit ihren Vornamen angesprochen werden, bereitwillig Fragen, wobei *Weiß* stets die Wahrheit sagt, *Schwarz* stets lügt und *Unsinn* sich bei jeder Frage aussucht, ob sie wahrheitsgemäß oder falsch antwortet.

c) Ein Junge, der feststellen will, welche Vor- und Zunamen bei diesen drei Mädchen zusammengehören, richtet an sie die beiden folgenden Fragen und erhält die angegebenen Antworten:



	A	B	C
Erste Frage, gerichtet an Annette: „Wie heißt Beate mit Nachnamen?“	Antwort von Annette: „Weiß.“		
Zweite Frage, gerichtet an Beate: „Welchen Nachnamen trägst du“?		Antwort von Beate: „Unsinn.“	

d) Mit welcher weiteren Frage und deren Beantwortung kann der Junge die Nachnamen der drei Mädchen ihren Personen zuordnen?
In kurzer Zeit ist diese Knobelaufgabe gelöst. Mit der Bemerkung, daß die Mädchen dem Jungen ungeschickt geantwortet hätten, stellt der Zirkelleiter die folgende Hausaufgabe:
a′) wie a b′) wie b c′)
Als an die Mädchen zu richtende Fragen sind nur Fragen der folgenden beiden Typen zugelassen:

Typ 1: Frage an X: „Welchen Nachnamen trägst du?“
Typ 2: Frage an X: „Welchen Nachnamen trägt Y?“

Dabei sind jeweils für X und Y die Vornamen Annette, Beate und Christa einzusetzen, jedoch darf für X und Y nie der gleiche Vorname eingesetzt werden.

d′) Wie müssen Annette, Beate und Christa antworten, um ihre Zunamen nicht zu verraten? (Es genügt die Angabe eines Antwortschemas.)

Die Antwort erfahrt ihr, liebe Leser, im 2. Teil, Heft 4/68!

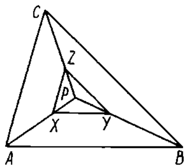
W. Träger

Lösungen

Fortsetzung: Als Mathematiklehrer in Tansania (6/67)

7b. $\Delta ABQ \sim \Delta BQP$; beide Dreiecke sind rechtwinklig, und sie haben den Winkel AQB gemeinsam. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt $\overline{AQ}:\overline{BQ} = \overline{BQ}:\overline{QP}$. Aus $\overline{BQ} = 3$ cm und $\overline{QP} = 1$ cm folgt dann $\overline{AQ} = 9$ cm, also $\overline{AP} = 8$ cm. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{BQ}^2$, also $\overline{AB} =$ $\sqrt{81 - 9}$ cm $= \sqrt{72}$ cm $= 6\sqrt{2}$ cm $\approx 8{,}49$ cm.

8. Konstruktion des Dreiecks:
Es ist die Strecke $c = 6$ cm von A bis B zu zeichnen; im Punkt A ist der Winkel $\alpha = 48°$ an $\overline{AB}$, im Punkte B der Winkel $\beta = 56°$ an $\overline{BA}$ anzutragen; die freien Schenkel der angetragenen Winkel schneiden sich im Punkte C bzw. C'. Die Dreiecke ABC und ABC' sind kongruent. Wir beschränken uns deshalb nur auf das Dreieck ABC.



Fortführung der Aufgabe: Im Inneren des Dreiecks ABC legen wir einen Punkt P fest und verbinden ihn mit den Eckpunkten des konstruierten Dreiecks. Danach dritteln wir die Strecken $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$; die Teilungspunkte seien in dieser Reihenfolge die Punkte X, Y und Z. Verbinden wir nacheinander die Punkte X, Y und Z, so erhalten wir das Dreieck XYZ. Es gelten folgende Proportionen auf Grund der durchgeführten Konstruktion:

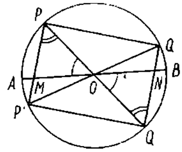
$$\overline{PX}:\overline{PA} = \overline{XY}:\overline{AB} = 1:3,$$
$$\overline{PY}:\overline{PB} = \overline{YZ}:\overline{BC} = 1:3,$$
$$\overline{PZ}:\overline{PC} = \overline{XZ}:\overline{AC} = 1:3.$$

Folglich sind die Dreiecke ABC und XYZ einander ähnlich. Ähnliche Dreiecke besitzen aber einander entsprechende kongruente Winkel.

9. Das Polynom $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ ist sowohl durch $x - 2$ als auch durch $x + 1$ teilbar. Daraus folgt $f(2) = 0$ und $f(-1) = 0$, also
$f(2) = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 2a + b = 0$, d. h., $2a + b = 4$, $f(-1) = -2 - 5 - a + b = 0$, d. h., $a - b = -7$.

Daraus ergibt sich
$$3a = -3, \text{ also } a = -1 \text{ und } b = 6.$$

10. Es seien P' bzw. Q' die zweiten Schnittpunkte der Geraden PM bzw. QN mit dem Kreis. Dann liegen die Punkte P, O und Q' auf einer Geraden und ebenfalls die Punkte Q, O und P' auf einer Geraden weil $\sphericalangle Q'QP = \sphericalangle QPP' = 90°$ ist.



Aus $\overline{OP} = \overline{OQ'}$, $\sphericalangle MOP = \sphericalangle NOQ'$, $\sphericalangle OPM = \sphericalangle OQ'N$ folgt dann $\Delta OPM \cong \Delta OQ'N$, also $\overline{OM} = \overline{ON}$, w. z. b. w.

11. Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $n - 1$, n, $n + 1$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$(n - 1 + n + n + 1)^2 = (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + 484,$$
$$9n^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + 484,$$
$$6n^2 = 486,$$
$$n^2 = 81.$$

Daraus folgt, da n eine natürliche Zahl ist, $n = 9$. Die gesuchten Zahlen sind daher 8, 9 und 10.
Tatsächlich erhält man

$$(8 + 9 + 10)^2 = 27^2 = 729,$$
$$8^2 + 9^2 + 10^2 = 245 \text{ und}$$
$$729 = 245 + 484.$$

12. Eintafelprojektion (Auf die Zeichnung wird aus Platzgründen verzichtet, d. Red.)

167b Da die Bedingung (1) für die quadratische Form $Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ nicht erfüllt ist, gilt $4F^2 - 4EG < 0$, also

$$EG - F^2 > 0. \tag{3}$$

Insbesondere ist stets $E \neq 0$. Die Diskriminanten der beiden anderen quadratischen Formen stimmen überein, wie man durch Ausmultiplizieren bestätigt. Wir betrachten die Diskriminante
$D = (EN - GL)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)$
der zweiten quadratischen Form. Im Falle $F = 0$ ist

$$D = (EN - GL)^2 + 4EGM^2.$$

Wegen (3) ist $EG > 0$ und folglich ist stets $D \geqq 0$. Im Falle $F \neq 0$ setzen wir $M' = M - \frac{FL}{E}$ und erhalten

$$D = (EN - GL)^2 - 4EM'\left(FN - G\left(M' + \frac{FL}{E}\right)\right).$$

$$= (EN - GL)^2 - 4EM'FN + 4EGM'^2 + 4GFLM'.$$

Um die Bedingung (3) verwenden zu können, addieren und subtrahieren wir $4F^2M'^2$.

$$D = (EN - GL)^2 - 4(EN - GL)FM' + 4F^2M'^2 + 4(EG - F^2)M'^2 = (EN - GL - 2FM')^2 + 4(EG - F^2)M'^2.$$

Jetzt erkennen wir wieder, daß die rechte Seite nichtnegativ ist, und die Behauptung ist bewiesen.

168 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. W. Renneberg

a) Relativgeschwindigkeit $v_r = v_2 - v_1$;

$$t = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{v_r}$$

b) Weg von W_1 $s_1 = t\,v_1$,
Weg von W_2 $s_2 = t\,v_2$; $l \approx s_2$.

c) t hängt nur von der Geschwindigkeitsdifferenz v_r ab, l von der Geschwindigkeit v_2 und von v_r.

d) $l_{\min} = t\,v_3 + l$.

e) (1) t wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$, l wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$,
$l_{\min}$ wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$.

(2) t wird $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$, l wird $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$,
$l_{\min}$ wird $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$.

Angenommen $v_2' = nv_2$ $(n > l)$. Dann ist

$$t' = \frac{e}{n\,v_2 - v_1} \quad (e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

$$l' = \frac{n\,v_2\,e}{n\,v_2 - v_1} = \frac{v_2\,e}{v_2 - \frac{v_1}{n}} < \frac{v_2\,e}{v_2 - v_1} = l$$

(3) t und l bleiben unverändert,
$l_{\min}$ wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$.

Zahlenfälle:

f) (1) $t = \frac{0{,}050}{10}\,\text{h} = 0{,}005\,\text{h} = 18\,\text{s}$

(2) $l = \frac{18}{3600} \cdot 50\,\text{km} = 0{,}250\,\text{km}$

g) (1) $t = \frac{0{,}100}{20}\,\text{h} = 0{,}005\,\text{h} = 18\,\text{s}$

(2) $l = \frac{18}{3600} \cdot 80\,\text{km} = 0{,}400\,\text{km}$

(3) $l_{\min} = \frac{18}{3600} \cdot 70\,\text{km} + 0{,}400\,\text{km}$
$= 0{,}350\,\text{km} + 0{,}400\,\text{km} = 0{,}750\,\text{km}$

h) (1) $t = \frac{0{,}100}{10}\,\text{h} = 0{,}010\,\text{h} = 36\,\text{s}$

(2) $l = \frac{36}{3600} \cdot 75\,\text{km} = 0{,}750\,\text{km}$

(3) $l_{\min} = \frac{36}{3600} \cdot 70\,\text{km} + 0{,}750\,\text{km}$
$= 0{,}700\,\text{km} + 0{,}750\,\text{km} = 1{,}450\,\text{km}$;
$1{,}450\,\text{km} > 1\,\text{km}$.

i) Der „Wartburg“ darf nicht überholen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb 1/68

169 Aus $235 - 185 = 50$ und $50:2 = 25$ folgt, daß die Tasche 25 M und die Kamera 210 M kostet, denn $25 + 185 = 210$.

170 $21 \cdot 12 \cdot 25 = 21 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 25 = (21 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 25) = 63 \cdot 100 = 6300$.

171 Aus $2550:3 = 850$ und $2125:5 = 425$ und $850:425 = 2$ folgt, daß die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges doppelt so groß wie die des Propellerflugzeuges ist.

W(5)172 Aus $20 \cdot 10 = 200$ und $200:(20 - 15) = 200:5 = 40$ folgt, daß jedes Klassenzimmer mit 40 Stühlen ausgestattet ist. Aus $20 \cdot 40 + 60 = 860$ folgt, daß die Schule 860 Stühle besitzt.

W(5)173 Aus $1200:12 = 100$ und $1200:20 = 60$ und $1200:30 = 40$ folgt, daß die erste Buchbinderei täglich 100, die zweite 60 und die dritte 40 Bücher einbinden kann. Aus $1200:(100 + 60 + 40) = 6$ folgt, daß der Auftrag von den drei Werkstätten gemeinsam in sechs Tagen ausgeführt werden kann.

174 Die kleinste natürliche Zahl, die durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 teilbar ist, ist das k. g. V. dieser Zahlen, die Zahl 60. Alle Vielfachen der Zahl 60 sind zugleich Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Die Vielfachen von 60 haben die Form $60 \cdot n$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ Addieren wir zu diesen Vielfachen die Zahl 1, so lassen sie bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1. Diese Zahlen haben dann die Form $60 \cdot n + 1$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Die kleinste dieser Zahlen, die durch 7 teilbar ist, ist die Zahl 301. Addiert man zu 301 Vielfache von 420 (k. g. V. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 und 7), so erhält man weitere Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen. Solche Zahlen sind z. B.: 721, 1141, 1561, usw.

175 Zwischen zwei benachbarten Zahlen der Zehnerfolge 10, 20, 30, ... liegen jeweils neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, vier davon sind gerade, fünf ungerade Zahlen. Die geraden Zahlen sind durch 2 teilbar, also, da sie größer als 2 sind, keine Primzahlen. Unter den ungeraden Zahlen endet eine auf die Ziffer 5. Diese Zahl ist durch 5 teilbar, also, da sie größer als 5 ist, ist sie ebenfalls keine Primzahl. Folglich können zwischen zwei benachbarten Zahlen der Zehnerfolge höchstens 4 Primzahlen auftreten.

176 Alle Zahlen, die die Preise der einzelnen Rechnungsposten ausdrücken, sind stets durch 3 teilbar; deshalb muß die Zahl, die den Gesamtpreis angibt, durch 3 teilbar sein. Das trifft für den Preis von 230 Pf (Quersumme 5) nicht zu, also muß dem Verkäufer ein Rechenfehler unterlaufen sein.

W(6)177 Es gilt der Satz: *Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite.* Aus $a + b = 8$ folgt $c < 8$; der Umfang $a + b + c = 8 + c$ soll durch 3 teilbar sein, das trifft zu für $c = 7$, $c = 4$. Für $c = 1$ wäre $b + c < a$ $(3 + 1 < 5)$, was nicht möglich ist. Es gibt genau zwei Dreiecke, die den gestellten Bedingungen genügen:

a	b	c	U
5 cm	3 cm	7 cm	15 cm
5 cm	3 cm	4 cm	12 cm

W(6)178 Wir bezeichnen die Maßzahlen der Sprunghöhen der Schüler durch den Anfangsbuchstaben ihres Vornamens; dann gilt:

a) $J > G$, b) $H + U = J + G$,

c) $U + G > H + J$.

Aus b) und c) folgt $G > H$, also $J > G > H$. Da von diesen drei Jungen Heinz die kleinste Sprunghöhe erzielte, muß Uwe die größte Höhe erreicht haben; im anderen Fall würde die Gleichung b) nicht erfüllt werden. Es gilt also $H < G < J < U$. Heinz erzielte die kleinste Sprunghöhe, ihm folgen mit zunehmenden Sprunghöhen Gerd, Jochen, Uwe.

179 Nehmen wir an, der Vater sei x Jahre alt, dann gilt:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 &= 134, \\ \frac{7}{4}x &= 133, \\ x &= 76. \end{aligned}$$

Der Vater ist also 76 Jahre alt. $(76 + 38 + 19 + 1 = 134)$

180 Nehmen wir an, die ursprünglich vorgesehene Zeit zur Fertigung eines Werkstückes betrage x Minuten; dann gilt:

$$10x = 12(x - 2), \text{ also } x = 12.$$

Es war die Zeit von 12 Minuten zur Herstellung eines Werkstückes geplant worden.

181 Bezeichnet man die erste der drei Zahlen mit x, so ist die zweite gleich $x + 9$ und die dritte gleich $x - 19$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} x + (x + 9) + (x - 19) &= 185, \\ 3x &= 195, \\ x &= 65. \end{aligned}$$

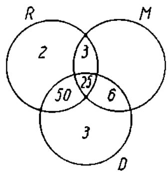
Die erste Zahl ist also 65, die zweite 74, die dritte 46; ihre Summe beträgt 185.

W(7)182 Es sei ΔABC das gesuchte Dreieck, und es seien $\overline{BE} = \overline{CE} = \frac{a}{2}$, $\overline{CD} = h_c$, $\overline{AE} = s_a$. Da zwei Seiten und der rechte Winkel gegeben sind, ist das Teildreieck CDB konstruierbar. Danach läßt sich wegen $\overline{AE} = s_a$ auch der Punkt A konstruieren. Man zeichnet zunächst die Strecke $\overline{CD} = h_c$ und errichtet auf ihr in D die Senkrechte. Der Kreis um C mit dem Radius a schneidet diese Senkrechte in den Punkten B und B'. Man halbiert die Strecken $\overline{CB}$ bzw. $\overline{CB'}$ und erhält die Mittelpunkte E bzw. E'. Dann schlägt man um E bzw. E' den Kreis mit dem Radius s_a, der die Gerade DB in A_1 und A_2 bzw. in A_3 und A_4 schneidet. Die Dreiecke A_1BC, A_2BC, $A_3B'C$, $A_4B'C$ sind die gesuchten Dreiecke, jedoch nur, wenn die Punkte A_1, B, C usw. im positiven Sinne durchlaufen werden. Das Dreieck ist konstruierbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$h_c \leqq a; \quad \frac{1}{2}h_c \leqq s_a.$$

In den Fällen $h_c = a$ bzw. $\frac{1}{2}h_c = s_a$ erhält man jeweils nur einen Schnittpunkt; für $h_c = a$ wird das Dreieck rechtwinklig.

183 Wir wollen die Lösung mit Hilfe eines Diagramms erläutern. Der Kreis R umfasse alle Schüler, die ihre Leistungen im Fach



Russisch verbesserten; der Kreis M enthalte alle diejenigen, die im Fach Mathematik bessere Noten erzielten; das Gleiche gilt für den Kreis D bezogen auf das Fach Deutsch. Genau 94 Schüler konnten ihre Leistungen verbessern.
Aus $94 - (25 + 50 + 6 + 3 + 3 + 2) = 94 - 89 = 5$ folgt, daß genau 5 Schüler nur im Fach Mathematik eine Leistungssteigerung erreichten. Ferner folgt aus $25 + 6 + 3 + 5 = 39$, daß insgesamt 39 Schüler im Fach Mathematik eine bessere Note erhielten.

184 Man erhält

$$a = 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdots \frac{99}{99} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100},$$

$$b = 1 \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{7} \cdots \frac{99}{99} \cdot \frac{1}{101} = \frac{1}{101}.$$

Ferner gilt

$$a - b = \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{101 - 100}{100 \cdot 101} = \frac{1}{100 \cdot 101} = \frac{1}{10100};$$

daher ist $a > b$.

185 Die Entfernung vom Ort A bis zum Treffpunkt sei gleich x km. Dann beträgt die Entfernung von Ort B bis zum Treffpunkt $\frac{7}{5}x$ km, und es gilt

$$x + \frac{7}{5}x = 36,$$
$$\frac{12}{5}x = 36,$$
$$x = 15.$$

Die Entfernung des Treffpunktes von dem Ort A beträgt also 15 km.

W(8)186 Angenommen, es befanden sich in dem Magen des Huhns x 10-Pfennigstücke und y 5-Pfennigstücke, dann befanden sich dort $z = 17 - x - y$ 1-Pfennigstücke. Wir erhalten die Gleichung:

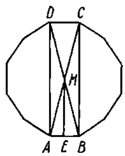
$$10x + 5y + 1 \cdot (17 - x - y) = 34,$$
$$9x + 4y = 17.$$

Daraus folgt, weil 17 nicht durch 4 teilbar ist, $x > 0$ und ferner $x < 2$. Daher ist

$x = 1$ und
$9 + 4y = 17$
$4y = 8$, $y = 2$. Endlich erhält man
$z = 17 - x - y = 17 - 1 - 2 = 14$.

Im Magen des Huhnes befanden sich also ein 10-Pfennigstück, zwei 5-Pfennigstücke und vierzehn 1-Pfennigstücke.

W(8)187 Es sei A der Flächeninhalt des Zwölfecks. Ferner sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Zwölfecks. Dann ist der Flächeninhalt I des Dreiecks MAB gleich $\frac{A}{12}$; denn wir können das Zwölfeck in 12 einander kongruente Dreiecke zerlegen, die ihre Spitze in M haben. Nun gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$



$$F = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot 2\overline{ME} = 4 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{ME}}{2} = 4I = 4 \cdot \frac{A}{12} = \frac{A}{3};$$

der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur (des Rechtecks $ABCD$) ist also weder größer noch kleiner als der Flächeninhalt einer der beiden äußeren Teilfiguren. Alle drei Teilfiguren haben den gleichen Flächeninhalt, nämlich $\frac{A}{3}$.

188 Aus der ersten Gleichung folgt

$$(x + y)(x - y) = a, \tag{1}$$

also wegen $x - y = b$ (2)

$$(x + y)\, b = a \tag{3}$$

1. *Es sei* $b \neq 0$. Dann folgt aus (3)

$$x + y = \frac{a}{b} \tag{4}$$

und wegen (2)

$$2x = b + \frac{a}{b}, \quad \text{d. h., } x = \frac{b^2 + a}{2b},$$

$$2y = \frac{a}{b} - b, \quad \text{d. h., } y = \frac{a - b^2}{2b}.$$

2. *Es sei* $b = 0$. Dann hat wegen (3) das System nur dann eine Lösung, wenn auch $a = 0$ ist. In diesem Falle erhält man aus (2) $x = t$, $y = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist.

189 Es seien s der Weg, $t = 16$s die Zeit bis zur Erreichung der Geschwindigkeit

$$v = 80 \text{ km/h} = \frac{80000}{3600} \text{ m/s} = \frac{200}{9} \text{ m/s}$$

und b die Beschleunigung. Dann gilt:

$$v = bt, \text{also } b = \frac{v}{t} = \frac{200}{9 \cdot 16} \text{ m/s}^2 = \frac{100}{72} \text{ m/s}^2.$$

Ferner erhält man

$$s = \frac{b}{2} \cdot t^2 = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{200}{2 \cdot 9} \cdot 16\,\text{m} = \frac{1600}{9}\,\text{m} \approx 177{,}8\,\text{m}.$$

Der *Moskwitsch* hat also bis zur Erreichung der Geschwindigkeit von 80 km/h 177,8 m zurückgelegt.

b) Sind t_1 die Zeit und s_1 der Weg bis zur Erreichung der Geschwindigkeit $v_1 = 120\,\text{km/h} = \frac{100}{3}\,\text{m/s}$, so gilt analog wie oben:

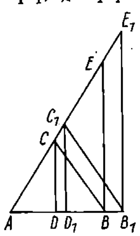
$$t_1 = \frac{v_1}{b} = \frac{100}{3} \cdot \frac{72}{100}\,\text{s} = 24\,\text{s}$$

und $$s_1 = \frac{v_1}{2} \cdot t_1 = \frac{300}{2 \cdot 9} \cdot 24\,\text{m} = 400\,\text{m}.$$

Der *Moskwitsch* erreicht also die Höchstgeschwindigkeit, nachdem er 400 m in 24 s zurückgelegt hat.

W(9)190 Man konstruiert ein beliebiges gleichseitiges Dreieck AB_1C_1 mit der Höhe $h_1 = \overline{C_1D_1}$ und verlängert die Seite $\overline{AC_1}$ über C_1 hinaus bis E_1 so, daß $\overline{C_1E_1} = h_1$ ist. Ferner bestimmt man auf dieser Verlängerung den Punkt E so, daß $\overline{AE} = a + h = 7{,}5$ cm beträgt.

$(\overline{C_1E_1} = \overline{C_1D_1}; \sphericalangle AB_1E_1 \approx 86°)$



Dann zieht man durch E die Parallele zu E_1B_1, die die Gerade AB_1 in B schneidet. Endlich zieht man durch B die Parallele zu B_1C_1, die die Gerade AC_1 in C schneidet. Dann ist ABC das verlangte gleichseitige Dreieck.

Aus der Konstruktion folgt nämlich $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, also $\triangle ABC$ gleichseitig. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDE und $C_1D_1E_1$ folgt $\overline{CD} = \overline{CE}$, d. h., $\overline{AC} + \overline{CD} = 7{,}5$ cm.

W(9)191 Es sei x das Alter des Vaters; dann ist $62 - x$ das Alter des Sohnes. Ferner gilt

$x - 3 = 3(62 - x - 3)$, also
$x - 3 = 177 - 3x$,
$4x = 180, \quad x = 45.$

Der *Vater* ist also 45 Jahre alt, der *Sohn* ist 17 Jahre alt. Ferner sei y das Alter der älteren Tochter; dann gilt

$17 - 5 = 2(y - 5)$, also $12 = 2y - 10$, $y = 11$.

Die *ältere Tochter* ist also 11 Jahre alt.
Ist z das Alter der Mutter, so gilt

$z + 4 = 3(11 + 4)$, also $z = 41$.

Die *Mutter* ist also 41 Jahre alt.
Ist t das Alter der jüngeren Tochter, so gilt

$17 + 1 = 3(t + 1)$, also $18 = 3t + 3$, $t = 5$.

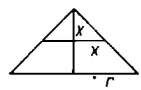
Die *jüngere Tochter* ist also 5 Jahre alt.
Das Alter des *Großvaters* beträgt

$2(17 + 11 + 5) = 2 \cdot 33 = 66$ Jahre.

Das Alter der *Großmutter* beträgt

$248 - (66 + 45 + 41 + 33) = 248 - 185 = 63$ Jahre.

192 Es sei $V = \frac{r^3 \cdot \pi}{3}$ das Volumen des gegebenen Kegels. Ferner sei x die Höhe des abgeschnittenen Kegels; dann ist sein Grundkreisradius gleich x und sein Volumen $V_1 = \frac{x^3 \cdot \pi}{3}$. Nun ist $\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{7}{1}$, also $\frac{V}{V_1} = 8$. Daraus folgt $\frac{r^3}{x^3} = 8$, also $x = \frac{r}{2}$. Der Abstand der Schnittebene von der Grundfläche beträgt daher ebenfalls $\frac{r}{2} = 3$ cm.



193 a) Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$(a - b)^2 \geqq 0, \tag{1}$$
$$\text{also } a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0, \tag{2}$$
$$\text{d. h., } a^2 + 2ab + b^2 \geqq 4ab, \tag{3}$$
$$\text{mithin } \frac{(a + b)^2}{4} \geqq ab. \tag{4}$$

Hieraus folgt für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b

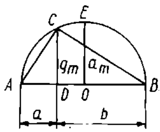
$$\frac{a + b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \text{ was zu beweisen war.} \tag{5}$$

Es soll nun die Frage beantwortet werden, wie man auf diesen Gedankengang bei der Beweisführung kommt. Wegen $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ ergibt sich nämlich aus der Behauptung (5) durch Quadrieren

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geqq ab \text{ und weiter}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 \geqq 4ab,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0,$$
$$(a - b)^2 \geqq 0. \tag{6}$$

Nun ist die Ungleichung (6) für alle reellen Zahlen a und b erfüllt. Man geht daher von der Ungleichung (1) aus und beweist, daß dann auch für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b die Ungleichung (5) erfüllt ist.

b) Zur Konstruktion der Strecke $g_m = \sqrt{ab}$ benutzt man den Höhensatz. In der untenstehenden Figur wurde über der Strecke $AB = a + b$ der Halbkreis konstruiert.



Wegen $\overline{CD} = g_m$ gilt dann

$$g_m^2 = ab, \qquad (1)$$
$$g_m = \sqrt{ab} \qquad (2)$$
und
$$a_m = \frac{a+b}{2}. \qquad (3)$$

Nun ist stets

$$g_m \leqq a_m, \qquad (4)$$

weil jede zu $\overline{OE}$ parallel verlaufende Halbsehne $\overline{CD}$ kleiner als der Radius ist und, falls sie mit $\overline{OE}$ zusammenfällt, gleich dem Radius ist.

Aus (2), (3) und (4) folgt nun

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}, \text{ w. z. b. w.}$$

W(10/12)194 Bezeichnet man mit x die kleinere der beiden Zahlen, so ist $x + 6$ die größere Zahl. Man erhält

$$x(x + 6) = 91,$$
$$x^2 + 6x - 91 = 0.$$ Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -3 + \sqrt{9 + 91} = -3 + \sqrt{100} = -3 + 10 = 7,$$
$$x_2 = -3 - 10 = -13.$$

Die Aufgabe hat daher ebenfalls zwei Lösungen; im ersten Fall sind es die Zahlen 7 und 13, deren Produkt gleich 91 ist, im letzteren Fall sind es die Zahlen -13 und -7, deren Produkt ebenfalls gleich 91 ist.

W(10/12)195 Wir bezeichnen zur Abkürzung die Aussagen von Klaus mit k_1, k_2, k_3, die von Horst mit h_1, h_2, h_3 und die von Günter mit g_1, g_2, g_3. Dann gibt es auf Grund der obigen Voraussetzung nur drei Fälle:

a) k_1, k_2, k_3 sind wahr;
b) h_1, h_2, h_3 sind wahr;
c) g_1, g_2, g_3 sind wahr.

Im Fall a) folgt aus k_3, daß auch alle Aussagen von Horst wahr sind. Das ergibt aber einen Widerspruch, da h_1 und k_2 nicht gleichzeitig wahr sein können. Dieser Fall kann also *nicht* eintreten.

Im Fall b) folgt aus h_3, daß auch alle Aussagen von Günter wahr sind. Das ergibt aber einen Widerspruch, da g_1 und h_2 nicht gleichzeitig wahr sein können; denn es führt nur ein Weg in die Stadt. Dieser Fall kann also auch *nicht* eintreten.

Im Fall c) folgt aus g_2, daß alle Aussagen von Klaus falsch sind. Ferner folgt, daß h_1 wahr, h_2 falsch und h_3 wahr ist. Es ergibt sich kein Widerspruch. *Daher führt der Weg c in die Stadt;* denn alle Aussagen von Günter sind wahr.

Lösungen zu Aufgaben aus dem
18. Jahreswettbewerb der USA 1967 (1/68)

1. c) 6;
2. d) $2xy + \frac{2}{xy}$;
3. b) $\frac{s^2}{6}$;
4. c) $\frac{2}{\varrho}$;
5. b) $\sqrt{50}$;
6. a) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$;
7. b) $20 < p < 30$;
8. a) $r + r'd$;
9. a) 33;
10. c) 13.36 Uhr.

Lösungen zu: Notwendig oder hinreichend (2/68)

1. Die Aussage 1.2 wahr; streicht man bei 1.1 „notwendig“ und bei 1.4 „hinreichend“, erhält man zusätzlich wahre Aussagen.

2. Wahre Aussagen sind: 2.1; 2.2; 2.4; 2.6. Die Frage hätte lauten können: Wieviel Fahrten mindestens sind hinreichend? Wieviel Fahrten höchstens sind notwendig? Wieviel Fahrten sind zugleich notwendig und hinreichend?

3.1 Die Gleichseitigkeit eines Dreiecks ist hinreichend für seine Gleichschenkligkeit.
Dafür, daß ein Dreieck gleichschenklig ist, ist hinreichend, daß es gleichseitig ist.
Dafür, daß ein Dreieck gleichseitig ist, ist notwendig, daß es gleichschenklig ist.

3.2 Die Teilbarkeit einer Summe durch eine Zahl ist notwendig für die Teilbarkeit jedes ihrer Summanden durch diese Zahl. Die Teilbarkeit jedes Summanden einer Summe durch eine Zahl ist hinreichend für die Teilbarkeit der Summe dieser Zahl.

3.3/3.4 Dafür, daß in ein und demselben Kreis die Zentriwinkel gleich groß sind, ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörigen Bogen gleich groß sind.

4.1 Wenn ein Parallelogramm ein Quadrat ist, so beträgt ein Innenwinkel des Parallelogramms 90°.

4.2 Wenn ein Innenwinkel eines Parallelogramms 90° beträgt, so ist dieses Parallelogramm ein Rechteck.
4.3 Wenn a ungerade ist, so ist $a^2 - 36 \neq 0$.
4.4 Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, so sind sie (auch) ähnlich.
5.1 hinreichend (nicht notwendig), 5.2 notwendig und hinreichend, 5.3 notwendig (nicht hinreichend), 5.4 weder notwendig, noch hinreichend

Lösungen alpha-heiter 2/68

a) $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$; b) $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 100$ — $5 + (5 + 5 + 5) : 5 = 8$ — Man vergesse nicht, daß Null auch eine Ziffer ist! — 3 und $4 - x + \frac{x}{12} = 91$, also $x = 84$; die Großmutter ist 84 Jahre, der Urenkel 7 Jahre (84 Monate) alt. — 1. Meter, 2. Achse, 3. Tonne, 4. Hoehe, 5. Einer, 6. Monat, 7. Alpha, 8. Tafel, 9. Index, 10. Kegel (oder Kugel); MATHEMATIK — Newton, Thales, Gauß, Euler, Vieta.

Lösung der Aufgaben: Chemieanlagenbauer (2/68):

208 Die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators A sei a; dann ist die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators B gleich $a + 4$. Wir entnehmen der nachstehenden Tabelle, daß die Variable a nur mit der Zahl 2 belegt werden darf.

a	$a + 4$	$a \cdot (a + 4)$
1	5	5
2	6	12
3	7	21
4	8	32
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Der Kondens. A besitzt eine $2\,m^2$ große, der Kondens. B eine $6\,m^2$ große Austauschfläche.

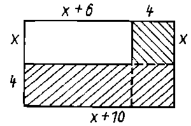
209 Aus $280 - 50 = 230$ und $230 : 2 = 115$ und $115 + 50 = 165$ folgt, daß der erste Gießer 165 Stück, der zweite 115 Stück herstellt.

W(5)210 Die Gesamtfläche für die Maschinen und die sie bedienenden Arbeiter beträgt $166\,m^2$; die Gesamtfläche für die Lagerung und Bereitstellung der Werkstücke beträgt $86\,m^2$; die Bodenfläche der Werkstatt beträgt $396\,m^2$. Für die Transportwege verbleiben dann $144\,m^2$ Fläche. Aus $144 : 48 = 3$ folgt, daß die Transportwege bei günstiger Platzaufteilung durchgehend 3 m breit angelegt werden können.

211 Aus $8 \cdot x = 40 \cdot 5$ folgt $x = 25$; auf das Ventil drückt eine Kraft von 25 kp.

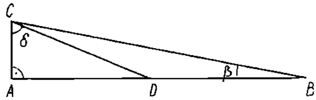
212 Der nachstehenden Zeichnung entnehmen wir folgendes:

$4 \cdot (x + 10) + 4 \cdot x = 72$; $x = 4$.



Das rechteckige Blech ist 10 cm lang und 4 cm breit.

W(6)213 Es ist zunächst das rechtwinklige Dreieck ABC aus $\overline{AB} = 250$ m, $\beta = 11{,}3^\circ$ zu konstruieren. Danach ist in C an $\overline{CA}$ der Winkel $\delta = 90^\circ - 22{,}6^\circ = 67{,}4^\circ$ anzutragen; der



freie Schenkel dieses angetragenen Winkels schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkte D. Bei einer maßstäblichen Zeichnung erhalten wir folgendes Ergebnis: $\overline{AC} = 50$ m, $\overline{DB} = 130$ m. Der Schornstein ist 50 m hoch; um den Schornstein unter dem doppelten Erhebungswinkel zu erblicken, muß sich der Beobachter dem Fußpunkt des Schornsteines um 130 m nähern.

214 Aus 100 % $\triangleq$ 18 kg folgt 1 % $\triangleq$ 0,18 kg.

$0{,}18 \cdot 0{,}9 = 0{,}1620$,
$0{,}18 \cdot 2 = 0{,}3600$,
$0{,}18 \cdot 0{,}2 = 0{,}0360$,
$0{,}18 \cdot 0{,}015 = 0{,}0027$,
$0{,}18 \cdot 0{,}005 = 0{,}0009$
$0{,}18 \cdot 96{,}88 = 17{,}4384$.

In 18 kg dieses Stahles sind enthalten: 0,162 kg Kohlenstoff, 0,36 kg Silizium, 0,036 kg Mangan, 0,0027 kg Phosphor, 0,0009 kg Schwefel und 17,4384 kg Eisen.

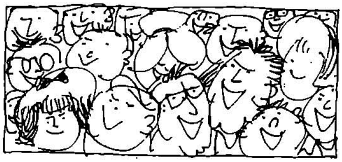
alpha-Wettbewerb

Am 1. Mai 1968 lagen 3800 Lösungen zu Aufgaben des Wettbewerbs Heft 1/68 vor. Das ist ein schönes Zeichen von Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Problemen und vor allem von Fleiß.

Die Redaktion weist nochmals darauf hin, daß nur Lösungen zu Wettbewerbsaufgaben (gekennzeichnet durch ein W) korrigiert und bewertet werden, jede Lösung auf ein gesondertes Blatt (Format A 4) zu schreiben ist, die formale Angabe des Endergebnisses (zu einer W-Aufgabe) nicht als Lösung bewertet wird, zur schnellen und einwandfreien Auswertung notwendig ist, alle in der Ausschreibung geforderten Daten am Kopf der Lösung vollständig einzutragen. (Postleitzahl nicht vergessen!)

In freien Stunden

alpha heiter



Das Arithmomachiaspiel

Das Spiel, mit dem wir den Leser bekannt machen wollen, zeichnet sich durch besondere Einfachheit aus, denn man braucht dazu keinerlei Hilfsmittel. Das bedeutet freilich nicht, daß die *Arithmomachia* (auch als *Nim*— oder *Fan-Tan*-Spiel bekannt) mathematisch nicht interessant wäre — im Gegenteil.
Wir wollen zunächst die einfachste und geläufigste Spielweise für den Fall anführen, daß sich nur zwei Spieler, A und B, mit der Arithmomachia unterhalten. Spieler A wählt eine beliebige Zahl von 1, 2, 3, ..., 10. Spieler B tut dasselbe und addiert seine Zahl zu der von A genannten; dann fährt Spieler A ebenso fort. Auf diese Weise lösen beide einander ab; zu dem zuletzt erreichten Ergebnis addieren sie stets nach Belieben eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., 10. Gewonnen hat, wer als erster die im voraus festgesetzte Zahl T (z. B. $T = 100$) erreicht.

Wie soll man vorgehen, um sich den Sieg zu sichern?

Die Lösung findet der Leser in dem unten abgebildeten Buch (VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968, 167 Seiten, 71 Bilder, Preis: 4,80 M). *Mathematische Spiele — Wirklichkeit und Täuschung — Unterhaltung mit Zahlen — Vielecke — Geometrie ohne Lineal — Mathematische Paradoxa und Rätsel — Keine Angst vor Textaufgaben* — das sind die Zwischen-Überschriften in diesem lebendigen mathem Jugendbuch. (Autor: Jiři Sedláček).

Gute Unterhaltung beim Lesen wünscht

J. Lehmann, Leipzig

Ein mathematisches Gesellschaftsspiel

Im Dresdener *Klub Junger Mathematiker* wurde folgendes Gesellschaftsspiel erfunden, mit dem wir unsere Kenntnisse über die Mengenoperationen festigen und üben wollten: Zunächst wurden vier Teilmengen des Klubs definiert durch die Festlegung

R = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein R vorkommt.
I = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein I vorkommt.
N = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein N vorkommt.
T = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein T vorkommt.

$$R \cap I,\ N \cup T,\ \overline{N},\ T \setminus I$$
$$N \cup (R \setminus I),\ [R \cup (I \cap N)] \setminus T,\ \overline{R \cup T}$$
$$\overline{I} \cup (R \cap T),\ I \cup \overline{(R \cap T)},\ (I \cap R) \cap \overline{(N \cup T)}$$

Nun prüfte jeder Teilnehmer in allen zehn Fällen, ob er selbst zu den beschriebenen Mengen gehörte oder nicht, und bezeichnete das auf einem Zettel jeweils mit + oder —. Die Ausdrücke waren so ausgewählt, daß jeder genau 5mal + und 5mal — zu schreiben hatte; z. B. gehörte Thomas die Folge — + + + — — — + + —, Gerlinde die Folge + + — — + + — — + —. Wer das beste Ergebnis hatte — es war Evelin, die als einzige fehlerfrei über die Runden kam — konnte einen kleinen Preis gewinnen. Einen Preis erhielten auch noch Thomas, Cunna und Steffen, die nur einen Fehler machten.
Man kann das Spiel noch ein wenig fortsetzen, indem man die erhaltenen Folgen nicht mit + und —, sondern mit L und O schreibt, als Dualzahl auffaßt und noch in eine Dezimalzahl verwandelt. Sieger ist dann, wer am schnellsten seine Kennzahl findet.
Viel Spaß beim Spielen und Lösen wünscht Euch

Dr. F. Anacker, Dresden

Schnell noch etwas zum Knobeln: *Wie könnte ein Klubteilnehmer heißen, der als letztes Zeichen ein + zu schreiben hatte?*

$$\begin{array}{r} \text{alpha} \\ +\,\text{mathe} \\ \hline \text{heiter} \end{array}$$

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern. Setze die Ziffern 0, 1, ..., 7, 8 so ein, daß eine wahre Aussage entsteht.
Wieviele Lösungen sind möglich?

Kryptogramme

1. $\sqrt{ALPHA} = HHA$

2. $PPP \cdot PPP = ALPHA$

3. $\left| \begin{array}{l} (XY)^Y = ALPHA \\ X + Y = A \end{array} \right.$

4. $(AX)^3 = ALPHA$

5. $$\begin{array}{l} A\sqcup\sqcup \cdot A\sqcup\sqcup \\ \hline A\sqcup\sqcup \\ \quad \sqcup A \sqcup \\ \quad A\sqcup\sqcup A \\ \hline ALPHA \end{array}$$

In Aufgabe 5 kommt kein weiteres A vor!

Versuche selbst, mit dem Wort ALPHA ähnliche Aufgaben zu bilden!

Viel Spaß wünscht

Ing. H. Decker, Köln

Vignetten aus der mathematischen Jugendzeitschrift „rozhledy", CSSR

Herr Flunkrich

Herr *Flunkrich* wird nach der Postleitzahl seines Wohnortes gefragt. Er macht über diese Zahl die folgenden Aussagen:
1. Der Nachfolger der Zahl ist nicht durch 3 teilbar.
2. Die Zahl läßt bei der Division durch 5 einen anderen Rest als bei der Division durch 7.
3. Die Zahl ist größer als 800.
4. Der Vorgänger der Zahl ist nicht durch 8 teilbar.
5. Der Rest bei der Division der Zahl durch 7 ist kleiner als 3.
6. Der Rest bei der Division der Zahl durch 5 ist größer als 3. Nun wissen wir, daß *alle* Aussagen des Herrn *Flunkrich falsch* sind. Wie lautet die Postleitzahl seines Wohnortes?

Dr. R. Lüders, Berlin

Lösung

Da alle Aussagen des Herrn *Flunkrich* falsch sind, ergibt die Zahl wegen (1) bei der Division durch 3 den Rest 2 und wegen (2) bei der Division durch 5 denselben Rest wie bei der Division durch 7. Dieser Rest ist wegen (5) größer oder gleich 3 und wegen (6) kleiner oder gleich 3, also gleich 3.
Wegen (4) läßt die Zahl bei der Division durch 8 den Rest 1. Ferner ist wegen (3) die Zahl nicht größer als 800.
Nun gibt es wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840 > 800$ höchstens eine natürliche Zahl $a \leq 800$, die
bei der Division durch 3 den Rest 2, (7)
bei der Division durch 5 den Rest 3, (8)
bei der Division durch 7 den Rest 3, (9)
bei der Division durch 8 den Rest 1 läßt. (10)
Wegen (10) ist a eine der Zahlen

$$9, 17, 25, 33, \ldots, 793$$

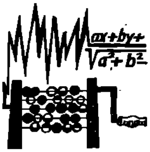
und wegen (9) eine der Zahlen

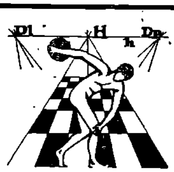
$$17,\ 17 + 8 \cdot 7 = 73,\ 17 + 2 \cdot 56, \ldots,\ 17 + 13 \cdot 56,$$

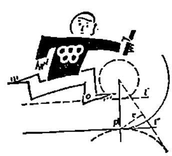
also wegen (8) eine der Zahlen

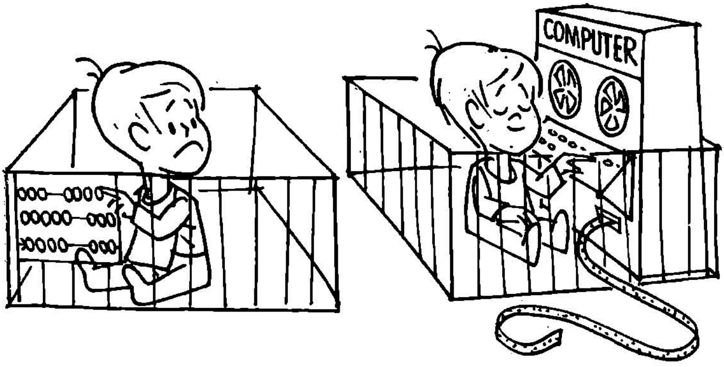
$$73,\ 73 + 8 \cdot 7 \cdot 5 = 73 + 280 = 353,\ 73 + 2 \cdot 280 = 633,$$

also ist wegen (7) $a = 353$.
Die Postleitzahl des Herrn Flunkrich ist 353; er wohnt in Havelberg.

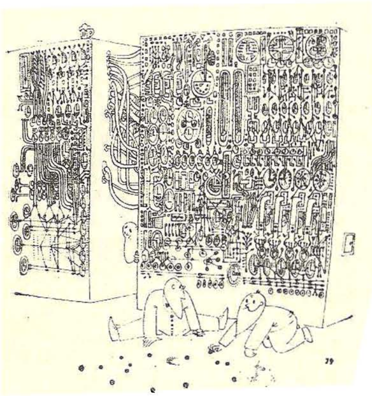




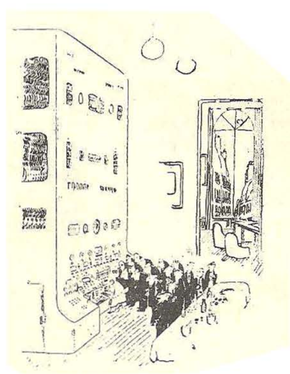




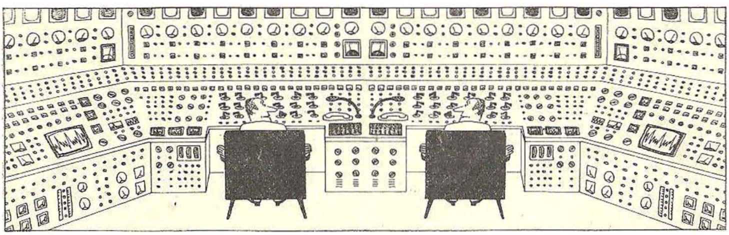
Selbstgefällig!
Zeichnung: Gösta Lerch, aus: „Für Dich"



Kybernetiker während der Frühstückspause
Aus: „Im siebenten Himmel" von Vladimir Fuka, Artia-Verlag, Prag



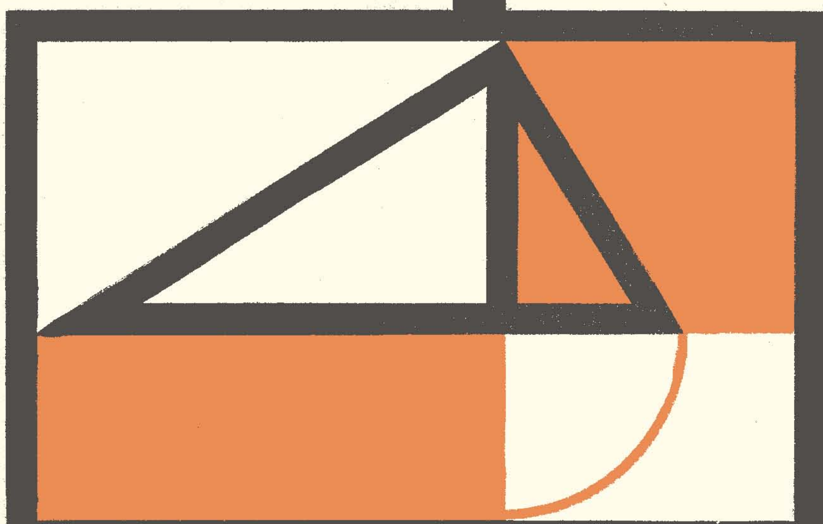
Ich bin eine Rechenmaschine IBM u. X 124. Für meine Konstruktion wurden 3 Jahre, 5 Monate und 14 Tage und für die Montage in diesem Büro 6 Monate, 27 Tage und 17 Stunden benötigt. Leider wird diese Firma morgen um 6 Uhr 22 bankrott sein.
Aus: „L'EXPRESS", Paris



Wollen wir zur Abwechslung mal die Plätze tauschen?
Zeichnung: Harri Parschau, aus: „Eulenspiegel"

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 4

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Archiv Sudhoff-Institut Leipzig (S. 97); Wust, Dresden (S. 101); Archiv: Prof. Dr. Krbek (S. 102); Zentralbild: 1. Mai 1967, Berlin, Kampfdemonstration der Werktätigen der Hauptstadt; Streichholzetiketten: Archiv König, Schalkau/Thür. (S. 115); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

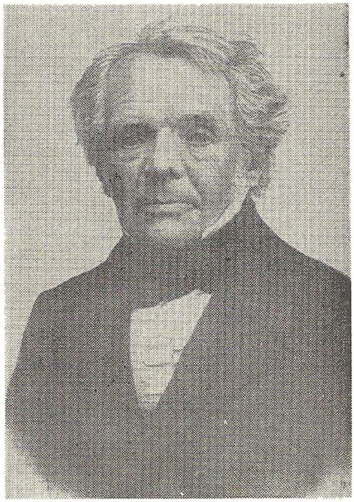
Redaktionsschluß 27. 5. 1968

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

August Ferdinand Möbius

1790 bis 1868



Mehr als ein halbes Jahrhundert hat *August Ferdinand Möbius* an der Leipziger Universität gewirkt, von seinem Amtsantritt am 1. Mai 1816 — zunächst als außerordentlicher Professor der Astronomie und Observator an der Leipziger Sternwarte und seit 1844 als ordentlicher Professor der Astronomie und der höheren Mechanik — bis zu seinem Tode am 26. September 1868. Aus Anhänglichkeit an seine engere Heimat Sachsen und wohl auch aus einer gewissen Scheu vor tiefgreifendem Milieuwechsel hat er ehrenvolle Berufungen nach Greifswald, Dorpat und Jena abgelehnt.

Zu Anfang des 19. Jahrhunderts war das Niveau mathematischer Forschung und Lehre in Deutschland — wenn man von Göttingen absieht, wo der überragende *C. F. Gauß* (1777—1855) wirkte—gegenüber Frankreich und England vergleichsweise noch niedrig. Fast nur Astronomen benötigten um diese Zeit in Deutschland höhere mathematische Kenntnisse und hielten auf diese Weise die höhere Mathematik am Leben. Dieser Umstand änderte sich erst mit dem Übergreifen der industriellen Revolution während der 20er und 30er Jahre nach Deutschland, in deren Gefolge das Interesse an Naturwissenschaften und Mathematik rasch zunahm. *Möbius* gehört mit *C. G. J. Jacobi* (1804—1851), *H. Graßmann* (1809—1877) und *J. Plücker* (1801—1868) zu jener ersten Generation deutscher Mathematiker des 19. Jahrhunderts, die die Entwicklung der Mathematik wesentlich mitbestimmt haben. Der Name von *Möbius* ist fest verknüpft mit der im Bereich der Zahlentheorie verwendeten sog. *Möbiusschen Funktion*. In der Geometrie spricht man vom *Möbiusschen Band*, dem historisch ersten Fall einer nur einseitigen Fläche, deren Entdeckung *Möbius* im Jahre 1858 gelungen war.

Das Leben von *Möbius* ist ohne äußere Dramatik verlaufen. Am 17. Nov. 1790 in Schulpforta geboren, hatte er seinen Vater, der Tanzlehrer an der dortigen altberühmten sog. Fürstenschule war, schon 1793 verloren. Die inzwischen nach Naumburg verzogene Mutter hat dem Sohn nur mit Mühe von 1803 bis 1808 den Schulbesuch in Schulpforta und das anschließende Universitätsstudium in Leipzig ermöglichen können. Ursprünglich hatte sich *Möbius* für Jura immatrikulieren lassen, war aber bereits im zweiten Semester auf Grund seiner Neigungen zum Studium der mathematischen Wissenschaften übergewechselt. Er studierte insbesondere bei dem Physiker *L. W. Gilbert* (1769—1824) und dem Mathematiker und Astronomen *K. B. Mollweide* (1774—1825), mit dem er einen engeren wissenschaftlichen Kontakt auf dem Gebiete der rechnenden Astronomie herstellen konnte. Mit Hilfe eines finanziellen Zuschusses aus den Mitteln einer Stiftung konnte *Möbius* vom Frühjahr 1813 bis Ende 1814 wissenschaftliche Studienreisen unternehmen, die ihn zu *C. F. Gauß* nach Göttingen und zu *J. Fr. Pfaff* (1765—1825) nach Halle führten; der Hauptgewinn bestand neben der Vervollkommnung seiner theoretisch-astronomischen Kenntnisse vor allem in dem bleibenden engen wissenschaftlichen Kontakt zu *Gauß*, dessen Empfehlung er auch zusammen mit einigen kleineren Arbeiten mathematisch-astronomischen Inhaltes nach vollzogener Habilitation seinen Ruf nach Leipzig an die Sternwarte verdankte. Die Berufung war an die Bedingung gebunden, vor Übernahme seiner Dienstgeschäfte eine Studienreise zur Vervollkommnung seiner praktischen astronomischen Erfahrungen zu unternehmen, eine Verpflichtung, der sich *Möbius* mit Freude unterzog und die ihm von Mai bis Herbst 1816 u. a. an die Sternwarten von Gotha, Tübingen, München und Wien führte und weitere wissenschaftliche Kontakte einbrachte. Nach der Rückkehr bezog *Möbius* seine Dienstwohnung in der Pleißenburg, einem Teil des heutigen Neuen Rathauses, in deren Räumen damals neben chemischen Laboratorien auch die Sternwarte uud ein Hörsaal für die Studenten der Astronomie untergebracht waren. Hier befaßte er sich in Beiträgen zur Astronomie mit Polhöhenbestimmungen, Sternbedeckungen, Kometenbestimmung und deren rechnerischer Auswertung, und schließlich intensiv mit den von *A. v. Humboldt* (1769—1859) und *Gauß* angeregten systematischen Untersuchungen des Magnetfeldes der Erde. Mit großem Erfolg hielt *Möbius* öffentliche Vorlesungen über naturwissenschaftlich-astronomische Themen, ein sicheres Zeichen für das um die Mitte des Jahrhunderts auch in Deutschland erwachte breite Interesse an den Naturwissenschaften.

Während seiner ersten Amtsjahre hielt *Möbius* hauptsächlich astronomische Vorlesungen, z. B. über sphärische Astronomie, Einrichtung und Gebrauch astronomischer Instrumente, Theorie der Finsternisse und Sternbedeckungen, Berechnungen der Kometenbahnen, Störungstheorie u. a. m. Später erweiterte *Möbius* seine Vorlesungstätigkeit auf dem Gebiete der Mathematik beträchtlich; er las über Stereometrie, Kegelschnitte, analytische Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, über Elemente der Zahlentheorie und der Differential- und Integralrechnung. Die Zahl seiner Hörer war anfangs gering, oft waren es nur 4 bis 8, entsprechend der vergleichsweise geringen Anzahl von Studierenden der Naturwissenschaft und Mathematik während der ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts. Erst in den 50er und 60er Jahren vergrößerte sich mit der allgemeinen Verstärkung der naturwissenschaftlichen Ausbildung an den europäischen Hochschulen, einer Folge der industriellen Revolution, auch die Zahl der Hörer von *Möbius*. Die Gymnasiallehrer der Mathematik im damaligen Königreich Sachsen haben während der Zeit von *Möbius'* Tätigkeit fast alle bei ihm studiert. Unter seinen Schülern, die für die Entwicklung der Mathematik selbst eine hervorragende Rolle gespielt haben, befanden sich der leider früh verstorbene bedeutende Mathematiker *H. Hankel* (1839 bis 1873) sowie *J. A. Hülsse* (1812—1876), der Direktor der polytechnischen Schule in Dresden, aus der die heutige Technische Universität hervorgegangen ist.

Obwohl *Möbius* im Laufe seiner jahrzehntelangen Tätigkeit zum Mitglied vieler gelehrter Gesellschaften berufen worden ist, darunter der Berliner Akademie und der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, ist seine wirkliche Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik erst nach seinem Tode erkannt worden. Die Gründe hat man wohl auch darin zu suchen, daß unter der anspruchslosen Form seiner Veröffentlichungen und wegen des damals in Leipzig nur beschränkt möglichen Studiums der einschlägigen Literatur zu seinen Lebzeiten das durchgreifend Neue seiner Gedankenführung verdeckt blieb — hauptsächlich aber deshalb, weil seine vornehmlich der Geometrie gewidmeten Untersuchungen in eine Richtung zielten, deren Bedeutung erst erkennbar wurde, als in den 70er Jahren von anderer Seite, durch *F. Klein* (1849—1925) und *S. Lie* (1842—1899), das *Möbius* vorschwebende Ziel einer Klassifizierung der Geometrie mit Erfolg bewältigt worden war.

Es war nämlich zu Anfang des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der Geometrie eine völlig neue Lage entstanden. Wenn auch der Methode nach mit der Erfindung der analytischen Geometrie durch *P. Fermat* (1601—1665) und *R. Descartes* (1596—1650) schon im 17. Jahrhundert ein Bruch mit der antiken Geometrie vollzogen worden war, so hatte die Geometrie doch erst seit dem Ende des 18. Jahrhunderts prinzipielle Schritte nach vorn in Richtung auf die Ablösung der antiken Auffassung vom Wesen der Geometrie tun können, während Algebra und Analysis schon Jahrhunderte vorher den antiken Standpunkt überwunden hatten. Der außerordentliche Aufschwung der Geometrie ergab sich als Gesamterscheinung direkt aus dem im Gefolge der industriellen Revolution sprunghaft wachsenden Bedarf an mathematisch ausgebildeten Ingenieuren, wobei nach Lage der Dinge die Darstellende Geometrie zum Kernstück einer auf rasch erfüllbare Ingenieurbedürfnisse zugeschnittenen Ausbildung werden mußte. Diese „Sprache des Ingenieurs", wie sich *G. Monge* (1746—1818), der Begründer einer wissenschaftlich durchgebildeten Darstellenden Geometrie ausdrückte, eroberte sich an den nach dem Vorbild der Pariser *École Polytechnique* während des 19. Jahrhunderts in ganz Europa gegründeten polytechnischen Schulen, aus denen später die Technischen Hochschulen hervorgegangen sind, eine zentrale Stellung und wirkte in starkem Maße zurück auf die Richtung der mathematischen Ausbildung an Gymnasien und Universitäten. In diesem Sinne gab der hohe gesellschaftliche Gebrauchswert der Geometrie, wie er sich insbesondere in der Darstellenden Geometrie offenbarte, für die Entfaltung der Geometrie während des 19. Jahrhundert den Nährboden ab, wobei allerdings die ehemals vorhandene innere Geschlossenheit der Geometrie mehr und mehr zerfiel. Um die Mitte des Jahrhunderts herrschte unter den Mathematikern eine gewisse Ratlosigkeit über den inneren Zusammenhang der einzelnen „Geometrien" und geometrischen Methoden. Es kam darauf an, die Fülle der Ergebnisse in neuer Sicht neu einzuordnen und jeder Geometrie einen logisch bestimmbaren Platz im Gesamtgefüge geometrischer Methoden zuzuweisen. Diese Klassifizierung der „Geometrien" gelang schließlich zu Anfang der 70er Jahre mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden; dies bildet den wesentlichen Inhalt des sog. *Erlanger Programms* von *Felix Klein* (1849—1925) aus dem Jahre 1872.

In diesem geistigen Spannungsfeld bewegte sich die geometrische Forschungsarbeit von *Möbius*. Als *Möbius* in den 20er Jahren seine Publikationstätigkeit aufnahm, hatte sich das Interesse der Geometer, insbesondere innerhalb der französischen Schule um *L. Carnot* (1753—1823) und *J. V. Poncelet* (1788—1867), auf die Untersuchung der Transformationen gerichtet, welche den Übergang von einer geometrischen Figur zur anderen vermittelten. Solche „Verwandtschaften" durch Transformationen — z. B. die durch Projektion entstehende Verwandtschaft zwischen Quadrat und Rhombus — waren vielfältig studiert worden; man lernte u. a. Kreis- und Kugelverwandtschaften, affine Verwandtschaften, usw. kennen. Nach und nach trat die Untersuchung der logischen Beziehungen zwischen den Transformationen in den Vordergrund, woraus sich die Klassifizierung der Transformationen als Aufgabe ergab. Das geometrische Lebenswerk von *Möbius* hat man als den Höhepunkt dieser Zielstellung anzusehen, welche, wie die nach *Möbius* sich vollziehende Entwicklung lehren sollte, gleichzeitig wesentliche Elemente der kommenden — gruppentheoretischen — Klassifizierung der Geometrie vorwegnahm: Die Klassifizierung der geometrischen Transformationen war ein entscheidendes Durchgangsstadium auf dem Weg zur Klassifizierung der Geometrie, durch welche schließlich die logische Einheit und Geschlossenheit der Geometrie wieder hergestellt werden konnte.

Die nächste Schaffensperiode von *Möbius* war vorzugsweise der angewandten Mathematik gewidmet. Er behandelte Probleme der Linsensysteme, der Mechanik, der Himmelsmechanik und der Kristallsysteme. Aus seinen Untersuchungen über das Gleichgewicht von Kräften ist das „Lehrbuch der Statik" von 1837 hervorgegangen. Alle diese praktischen Fragestellungen haben *Möbius* insofern zur Fortsetzung seiner Studien über geometrische Verwandtschaften gedrängt, als durch spezifische Fragestellungen die Zusammensetzung oder Hintereinanderausführung geometrisch-physikalischer Transformationen erforderlich wurde.

Mit dem Jahre 1853 begann eine dritte Schaffensperiode, in der die durch Transformationen vermittelten geometrischen Verwandtschaften analytisch untersucht wurden.

Schon in hohem Alter stehend, ging *Möbius* im Jahre 1858 sogar noch zur Betrachtung sog. *Elementarverwandtschaften* über, die noch allgemeiner als Kollineationen sind und die wir heute zum Gegenstandsbereich der Topologie rechnen.

Bescheiden im persönlichen Auftreten und im Stile seiner Publikationen, mit den bedeutendsten Zentren mathematischer Forschung seiner Zeit nur in indirektem Kontakt stehend, hat *August Ferdinand Möbius* zu seinen Lebzeiten nicht jene Anerkennung erfahren können, die seiner Bedeutung angemessen gewesen wäre. Sein Streben nach Klassifikation der Geometrie durch das Studium geometrischer Verwandtschaften verband ihn wohl mit der Hauptentwicklungsrichtung der Geometrie auf das allerengste, dennoch war die Reaktion auf seine wissenschaftlichen Publikationen nur schwach. Erst rückblikkend ist die Bedeutung von *Möbius* erkannt worden. Nur vier Jahre nach *Möbius'* Tod gab *F. Klein* in Zusammenarbeit mit *S. Lie* mit dem sog. *Erlanger Programm* die von *Möbius* vergeblich angestrebte Klassifizierung der Geometrie. Bei der Herausgabe der *Gesammelten Werke von Möbius* in den Jahren 1885—1887 nun erfaßte *Klein*, wie er sich ausdrückte, „den inneren Zusammenhang" des Lebenswerkes von *Möbius* und fand dort der Gedankenführung nach sein eigenes Erlanger Programm vorgezeichnet. Seitdem wird *August Ferdinand* Möbius mit Recht als einer der wegweisenden Geometer des 19. Jahrhunderts gewürdigt, dessen Wirken die Entwicklung der Mathematik des 19. Jahrhunderts wesentlich bestimmt hat.

H. Wußing

Gekürzter Nachdruck: H. Wußing, August Ferdinand Möbius (1790—1868) in Band: Bedeutende Gelehrte in Leipzig, Band 2, herausgegeben von Gerhard Harig, Karl-Marx-Universität Leipzig 1966, S. 1—12.

Berufsbild

Mathematisch-technischer Assistent

Welche Möglichkeiten gibt es für einen jungen Menschen mit abgeschlossener Berufsausbildung, sich auf dem Gebiet Rechentechnik und Datenverarbeitung zu qualifizieren? Auch wenn der Leser im Augenblick noch Schüler ist, wird ihn interessieren, welche Entwicklungsmöglichkeiten er nach erfolgreicher Beendigung der 10. oder 12. Klasse hat. Wir setzen neben dem Abschlußzeugnis der Schule im folgenden voraus, daß der Bewerber eine Facharbeiterausbildung, nach Möglichkeit die Ausbildung des *Facharbeiters für Datenverarbeitung* (siehe Heft 3/68) abgeschlossen und Freude an der Beschäftigung mit mathematischem Stoff hat.
Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann er sich um die Zulassung zu einem Sonderstudium bemühen, in dem *Technische Assistenten* auf dem Gebiet der Mathematik ausgebildet werden. Dieses Studium ist 1963 eingerichtet worden* und wird seitdem an verschiedenen Hochschulen durchgeführt. Ziel des Studiums ist es, Mitarbeiter für die Tätigkeit in Rechenzentren, Datenverarbeitungszentren und mathematischen Abteilungen der Industrie und der Wirtschaft auszubilden. Der mathematisch-technische Assistent soll nach abgeschlossener Ausbildung mit typischen Verfahren der praktischen Mathematik arbeiten können, er soll in der Lage sein, elektronische Rechenanlagen zu bedienen und zu programmieren. Was dann in der täglichen Arbeit von dem *mathematisch-technischen Assistenten* verlangt wird, hängt wesentlich von der Struktur des Betriebes ab, in dem er tätig ist, oder von den speziellen Aufgaben des Rechen- oder des Datenverarbeitungszentrums.
Aus der Vielfalt von Einsatzmöglichkeiten sollen einige genannt werden:

- ☐ Mathematische Auswertung von statistischem Material und statistische Urteilsfindung. Das statistische Material kann dabei aus den unterschiedlichsten Gebieten der Wirtschaft oder der Forschung kommen (Auswertung von Versuchsreihen aus der Landwirtschaft, der Medizin, der Technik, dem Handel, der Pädagogik, der Kriminalistik).
- ☐ Herstellung von Programmen für spezielle Typen von Rechenautomaten auf Grund gegebener Formeln.
- ☐ Organisation der Lohnbuchhaltung und Materialbuchhaltung eines Betriebes oder Warenhauses.
- ☐ Grafische Auswertung von Meßergebnissen.
- ☐ Bedienung von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen, Erproben von Programmen.

Wie ist nun zur Zeit die Ausbildung von mathematisch-technischen Assistenten organisiert?
Wer diesen Beruf wählt, sollte sich in einem Rechenzentrum oder der Abteilung eines Betriebes, die mit der Bearbeitung mathematischer Aufgaben betreut ist, anstellen lassen. Mit Zustimmung dieses Betriebes kann er sich um Zulassung zum Studium bewerben. Das Studium dauert zwei Jahre. In dieser Zeit ist der Student neben seinen acht bis zehn Unterrichtsstunden pro Woche weiterhin in dem Betrieb,

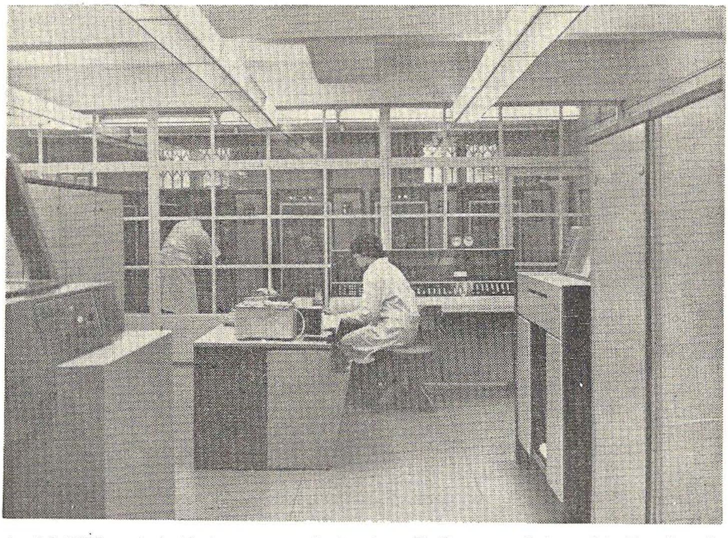
* Gesetzblatt Teil II, Nr. 6 vom 23. 1. 64, Anordnung Nr. 2 vom Dezember 1963.

der ihn einstellte, tätig. Er muß Übungsaufgaben lösen — natürlich auch Klausuren schreiben — und an elektronischen Rechenanlagen praktisch arbeiten. Durch Zwischenprüfungen werden Endnoten in den einzelnen Ausbildungsfächern festgelegt. Am Schluß der Ausbildung ist eine Hausarbeit anzufertigen, deren Thema entweder von der ausbildenden Stelle festgelegt wird oder nach Absprache mit der ausbildenden Stelle von dem Betrieb, in dem der Student arbeitet.

Im mathematischen Teil der Ausbildung wird der Student systematisch in die höhere Mathematik eingeführt — lineare Algebra, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Nomographie, mathematische Statistik, Optimierung — und lernt darüber hinaus wichtige Verfahren der praktischen Mathematik kennen. Neben diesem Teil der Ausbildung wird der Student mit der Bedienung und Programmierung von elektronischen Rechenanlagen vertraut gemacht. Hierbei liegt das Schwergewicht auf dem Erlernen sogenannter Programmierungssprachen. Programmierungssprachen sind künstliche Sprachen, die gar nicht gesprochen, sondern nur geschrieben werden, die jedoch ein Automat „versteht“.

Zur Ausbildung von mathematisch-technischen Assistenten gehört keine Sprachausbildung. Es ist jedoch jedem Interessierten zu empfehlen, sich mit der englischen oder russischen Sprache intensiv zu beschäftigen, weil die Literatur über neue Entwicklungen auf diesem Gebiet oftmals nur in diesen Sprachen vorliegt.

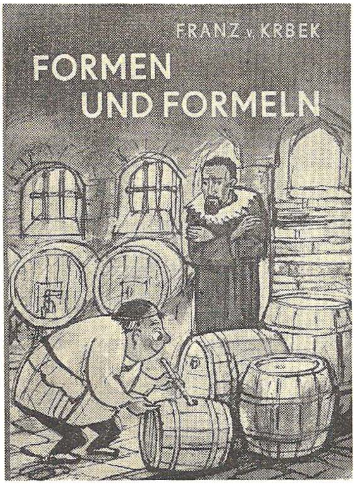
G. Paulin



Am 9. 2. 1968 wurde im Rechenzentrum des Instituts für Datenverarbeitung (idv-Dresden) die elektronische Datenverarbeitungsanlage *Robotron* 300 zur Arbeitsaufnahme übergeben. Im Rahmen der planmäßigen Einsatzvorbereitung für diese Anlage in unserer Volkswirtschaft und zur Schaffung des notwendigen wissenschaftlichen Vorlaufs wurden vom idv — als Zentrum der Anwendungstechnik — wichtige Zuarbeiten geleistet. Eine ihrer Hauptaufgaben besteht in der Schaffung umfassender organisatorischer und programmtechnischer Unterlagen für *Robotron* 300. Unser Bild zeigt einen Blick in das Rechenzentrum. Es ist als Titelfoto der Zeitschrift „Rechentechnik-Datenverarbeitung“ 3/68 zu sehen. Wir empfehlen unseren Lesern, welche sich intensiv mit der elektronischen Datenverarbeitung beschäftigen wollen, diese Zeitschrift zum Studium (unter Anleitung Erwachsener).

Formen und Formeln

Eine Buchbesprechung



Bestimmt wißt ihr, liebe junge Freunde der Mathematik, daß wir *Johannes Kepler* eine Reihe fundamentaler Ergebnisse auf dem Gebiet der Mathematik und der Astronomie verdanken. Deshalb ist es nicht verwunderlich, daß das hier zu besprechende Buch mit einer Plauderei über diesen großen Naturwissenschaftler des Mittelalters beginnt. Das nebenstehende Bild zeigt ihn gerade beim Weinkauf für eine Familienfestlichkeit, bei dem er durch das eigenartige Meßverfahren des Küfers dazu angeregt wurde, ein Näherungsverfahren zur Inhaltsberechnung von Fässern zu entwickeln. Diese Formeln befinden sich noch heute in jeder einschlägigen Formelsammlung. Übrigens befindet sich diese Abbildung gleichzeitig auf dem Schutzumschlag eines neuen (3.) Buches von *Franz v. Krbek* mit dem Titel *Formen und Formeln,* das im Frühjahr 1968 bei der B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft in Leipzig, erschienen ist (Preis 8.50 M).

Wer den Autor so gut kennt wie ich, der weiß, welche liebenswert-bescheidene, geistvoll-witzige, aber ebenso scharfsinnig-kritische Mathematikerpersönlichkeit unserer Republik am 12. März 1968 in Greifswald seinen 70. Geburtstag feierte. Bereits bevor der populärwissenschaftlichen Verbreitung mathematischer Kenntnisse die ihr zukommende Bedeutung beigemessen wurde, erschienen von Prof. Dr. *v. Krbek* die beiden Titel *Geometrische Plaudereien* und *Über Zahlen und Überzahlen,* denen nun die *Formen und Formeln* folgten.

Wie es dem Autor dabei erneut gelingt, auch kompliziertere Gedankengänge und Beweisführungen zu vereinfachen, ohne die mathematische Exaktheit zu beeinträchtigen, ist an sich schon lesenswert, ganz zu schweigen von der eigentlichen mathematischen

Übergabe des Geheimberichtes über den „präsidentenfeindlichen“ Fermat an den Diener des Ministers Colbert

Durch die vierte Dimension könnte man Geld aus dem verschlossenem Tresor holen.

Substanz der 19 Plaudereien und den historischen Einflechtungen, die zum wirklichen „Begreifen“ des Wesens der Mathematik als Triebkraft zur Veränderung von Natur und Gesellschaft beitragen. Für euch nicht weniger interessant ist vielleicht zu erfahren, daß es uns im Kollektiv (Autor, Lektor, Typograph, Hersteller, Illustrator) gelungen ist, die meist recht lustigen, immer mit einem gewissen „Pfiff“ gezeichneten 150 Illustrationen teilweise direkt in den laufenden Text mit einzubauen. Dadurch werdet ihr die behandelten Probleme sicherlich leichter verstehen.

Das Inhaltsverzeichnis lautet:

Keplers Hobby; Verfeindete Brüder; Lob der Trägheit; Geisterreich; Naiv oder nicht naiv?; Linie als Regenschirm; Das Gegenteil ist auch richtig; Größe eines Königs; Streckenrechnung; Ein erfinderischer General; Möbius überführt; Halbkreise als Geraden; Makellos; Aussichtsloses Zerlegen; Polygon als Grenze; Netze; Tip für Treffer; Keiner kam hinter seine Schliche; Universallänge; Nachwort; Die Axiome.

Auf 150 Seiten erfahren wir Wissenswertes über die Schweizer Mathematikerfamilie *Bernoulli*, über *Jordan*, *Banach*, *Klein*, *Hilbert*, *Waring*, *Fermat*, *Lebesgue* und viele andere berühmte Mathematiker. Wir erhalten einen „Einblick“ in die 4. Dimension, in die Relativitätstheorie, die Mengenlehre und in die nichteuklidischen Geometrien, um nur einige Gebiete zu nennen, aus denen Probleme behandelt werden.


Prof. Franz v. Krbek

Während verschiedene Plaudereien bereits von denjenigen von euch, die erst die 8. Klasse besuchen, ohne Schwierigkeiten verstanden werden können, sprechen andere vor allem die Schüler der 10. und 11. Klassen an. So bietet das Buch (wie auch die beiden anderen des gleichen Autors) im wahrsten Sinne des Wortes für jeden etwas; denn auch Erwachsene werden in ihm sicherlich manches entdecken, was ihnen bislang noch unbekannt war. Deshalb darf ich mich vorbehaltlos der Meinung Prof. *v. Krbeks* anschließen, die er im Nachwort der *Formen und Formeln* darlegt:

Wer die drei Bände — den vorliegenden, die „Geometrischen Plaudereien“ und den Band „Über Zahlen und Überzahlen“ — verarbeitet hat, der weiß, was die Mathematik soll und kann. Mehr darf er davon nicht erwarten. Möchte er noch mehr wissen, dann hat er sich bereits für die Mathematik entschieden, und es heißt für ihn, systematisch zu studieren. Dazu wünsche ich ihm guten Erfolg!

W. Arnold

Wir gratulieren

Herrn Dr. rer. nat.
Reinhard Hofmann
Karl-Marx-Universität Leipzig
Gutachter von *alpha*
zur Promotion

Herrn Oberlehrer
Klaus Krüger
BBS Forst Bad Doberan
Redaktionsmitglied v. *alpha*
zum Titel
Verdienter Lehrer d. Volkes

Herrn Prof. Dr. paed.
Wolfgang Lange
Institutsdirektor an der TU Dresden
Förderer der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik
zum Titel
Verdienter Lehrer d. Volkes

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert

Direktor des Instituts für Mathematik
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt

Populärwissenschaftliche Definition des Begriffs „Optimierungsprobleme“

Die Optimierungsprobleme sind ein sehr junger Zweig der Mathematik, denn als eigentliches Geburtsjahr kann man das Jahr 1939 annehmen, in welchem eine Arbeit des sowjetischen Akademiemitgliedes *L. W. Kantorowitsch* veröffentlicht wurde, in der erstmalig eine Optimierungsaufgabe mathematisch exakt formuliert und für sie ein Lösungsverfahren entwickelt wurde. Optimierungsprobleme entstehen vorrangig im Bereich der Ökonomie und lassen sich wie folgt formulieren: Zur Erreichung eines Zieles sind gewöhnlich in Abhängigkeit von gewissen Größen, die zur Erreichung des Zieles beitragen bzw. notwendig sind, verschiedene Wege und Möglichkeiten vorhanden (sehr oft sind es unendlich viele derartiger Möglichkeiten). In vielen Fällen besitzen die einzelnen Möglichkeiten einen unterschiedlichen Wert oder Nutzen für uns, die wir das gesteckte Ziel erreichen wollen. Wir werden dann immer versuchen, den Weg zu gehen bzw. die Möglichkeit auszunutzen, die uns den größtmöglichen Nutzen bringt. Diese Aufgabe ist sicherlich noch einfach, wenn nur zwei oder drei Wege vorhanden sind, doch meist sind es eben unendlich viele. Offensichtlich besteht doch die Aufgabe darin, die zur Erreichung des Zieles notwendigen Größen so zu bestimmen, daß eine Funktion, die den Nutzen zum Ausdruck bringt, ein Maximum annimmt. Folglich sind die Optimierungsprobleme spezielle Extremwertaufgaben, für deren Lösung besondere Verfahren entwickelt wurden.

288 a Vom Ort A zum Ort B sollen 10000 kg einer wichtigen Last mit Flugzeugen des Typs F und H transportiert werden. Ein Flugzeug vom Typ F kann 1000 kg der Last tragen und benötigt für einen Flug von A nach B 3 Mann Bedienungspersonal und 100 Liter Treibstoff, während ein Flugzeug vom Typ H 500 kg der Last tragen kann und 2 Mann Bedienungspersonal und 30 Liter Benzin für eine Reise benötigt.
Im Ort A stehen zum Auftanken nicht mehr als 900 Liter Treibstoff und 35 Mann Bedienungspersonal zur Verfügung (der Treibstoff kann für beide Typen verwendet werden, das Personal ebenfalls).
Die Ausgaben für einen Flug des Flugzeugs vom Typ F betragen 800,— Mark, für den Typ H aber 500,— Mark. Welche Anzahl von Flugzeugen F und H müssen eingesetzt werden, damit minimale Gesamtausgaben entstehen?

288 b Die Mitglieder einer LPG stellen folgende Überlegung an: Wir haben 5 ha Frühkartoffeln bestellt, die im Laufe des Monats August abgeerntet werden müssen. Wenn wir die Kartoffeln in der ersten Dekade des August ernten, so können wir 130 dt/ha ernten und bekommen pro Dezitonne 40,—M. Warten wir allerdings bis zum Ende der zweiten Dekade, so erhöht sich der Ertrag pro Hektar um 25 dt, die Einnahmen pro Dezitonne fallen allerdings um 8,— M. Schließlich steigt der Ertrag in der dritten Dekade um weitere 25 dt pro Hektar, während die Einnahmen gegenüber der zweiten Dekade für eine Dezitonne um 6,— M fallen.
Welche Mengen muß die LPG pro Dekade abernten, damit die Gesamteinnahmen aus den 5 ha maximal werden? Dabei ist zu berücksichtigen, daß auf Grund der Arbeitskräftesituation in jeder Dekade nicht mehr als 500 dt abgeerntet werden können.

288 c Gesucht sind n nichtnegative Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$, so daß gilt $x_1 \geqq 1$, $x_1 + x_2 \geqq 2$, $x_1 + x_2 + x_3 \geqq 3, \ldots$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geqq n$$

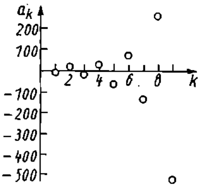
und daß $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + n\,x_n$ minimal wird.

Einige Fakten zur Entwicklung der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

1953 wurde die Hochschule für Maschinenbau in Karl-Marx-Stadt gegründet. Anläßlich ihres zehnjährigen Bestehens erhielt sie den Namen „Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt“. Das Institut für Mathematik begann im Februar 1954 seine Tätigkeit. Am Institut für Mathematik werden Diplom-Mathematiker und Lehrer für Mathematik ausgebildet. Für Diplomanden gibt es zwei Möglichkeiten für das Fachstudium: Mathematische Methoden in der Ökonomie und Numerische Mathematik/Rechentechnik. Die Lehrerstudenten werden auch im Fach Physik ausgebildet. Außerdem wird am Institut für Mathematik die gesamte mathematische Grund- und Spezialausbildung für alle anderen Fachrichtungen der TH durchgeführt. Zur Zeit studieren 164 Studenten mit dem Ziel Diplom-Mathematiker, 180 mit dem Ziel Fachlehrer für Mathematik/Physik und 220 Lehrer-Fernstudenten. 3 Professoren, 3 Dozenten, 15 Assistenten, 27 wissenschaftliche Mitarbeiter, 4 mathematisch-technische Assistenten und 2 Mechaniker sind am Institut für Mathematik tätig. Seit 1962 besteht am Institut ein Rechenzentrum, in dem folgende Automaten vorhanden sind: ZRA 1, Endim 2000 und ODRA 1013. Alle Studenten führen ein Praktikum in diesem Rechenzentrum durch.

Elementare Zahlenfolgen

2. Teil



Ihr habt im vorigen Heft erfahren, was Zahlenfolgen sind, und lerntet einige Beispiele und Darstellungsarten von Zahlenfolgen kennen. Am Schluß fandet ihr einige Aufgaben. Hier sind die Lösungen. Vergleicht mit euren Ergebnissen!

223 *Die Aussage d) ist falsch,* denn nicht jede Funktion ist eine Folge. Nur Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$ oder $\{1; 2; 3; \ldots; n\}$ natürlicher Zahlen ist, sind Folgen.

224 $f_6 = \{[1; -2]; [2; +4]; [3; -8]; [4; +16]; [5; -32]; [6; +64]; [7; -128]; [8; +256]; [9; -512]\}$.
Die Darstellung der geordneten Paare ist auch in einer Wertetabelle möglich.

225 Durch Formveränderung einiger Glieder entsteht

$$\frac{9}{5}; \frac{4}{3}; \frac{1}{1}; \frac{0}{-1}; \frac{1}{-3}; \frac{4}{-5}; \ldots$$

$$\frac{3^2}{-2\cdot 1+7}; \frac{2^2}{-2\cdot 2+7}; \frac{1^2}{-2\cdot 3+7};$$

$$\frac{0^2}{-2\cdot 4+7}; \frac{1^2}{-2\cdot 5+7}; \frac{2^2}{-2\cdot 6+7}; \ldots$$

$$\frac{(1-4)^2}{-2\cdot 1+7}; \frac{(2-4)^2}{-2\cdot 2+7}; \frac{(3-4)^2}{-2\cdot 3+7};$$

$$\frac{(4-4)^2}{-2\cdot 4+7}; \frac{(5-4)^2}{-2\cdot 5+7}; \frac{(6-4)^2}{-2\cdot 6+7}; \ldots$$

damit $a_k = \dfrac{(k-4)^2}{-2k+7}$ oder

$$a_k = \frac{k^2-8k+16}{-2k+7}.$$

226 Independente (oder analytische) Darstellung $a_k = (-2)^k$ mit $\in \{k\, 1; 2; \ldots; 9\}$
Tabellarische Darstellung:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_k	−2	+4	−8	+16	−32	+64	−128	+256	−512

Graphische Darstellung (siehe Abbildung oben: Maßstabveränderung auf der a_k-Achse)
Verbale Darstellung: Endliche Folge der Potenzen zur Basis (−2) mit positivem ganzen Exponenten, aus neun Gliedern bestehend.

227 Die zweite graphische Darstellung kann nicht Darstellung einer Folge sein, weil es nach unserer Definition ein (−1)-tes und ein 0-tes (nulltes) Glied einer Folge nicht gibt. Die Gliednummer k entstammt stets der Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$. Graphische Darstellungen von Folgen verlaufen infolgedessen nur im I. oder (und) IV. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems.

Soweit die Lösungen zu den fünf Aufgaben aus dem vorigen Heft.

Viele Folgen lassen über die bisher genannten Darstellungsarten hinaus eine weitere zu, die sich oft als recht nützlich erweist. Wir meinen die *rekursive* Darstellung (rekursiv, lat. rückbezogen). Bei der rekursiven Darstellung wird das k-te Glied der Zahlenfolge mit Hilfe eines oder mehrerer seiner Vorgänger (vorangehenden Glieder) ausgedrückt.
Beispiel: Die oben in den Lösungen zu den Aufgaben 224 und 226 besprochene Folge f_6 hat die rekursive Darstellung

$$a_k = (-2)\cdot a_{k-1} \text{ für } k > 1 \text{ mit}$$
$$a_1 = -2 \text{ (Anfangsbedingung).}$$

Das heißt: Das Anfangsglied a_1 ist gegeben. Man gewinnt jedes k-te Glied ($k > 1$), indem man das unmittelbar vorangehende mit (−2) multipliziert.
Eine rekursive Darstellung ist nur dann vollständig, wenn die sogenannten Anfangsbedingungen mit angegeben werden. Jede vollständige rekursive Darstellung ist eindeutig.
Manche Folgen, für die eine independente Darstellung kompliziert und schwer angebbar ist, lassen sich relativ leicht in rekursiver Darstellung beschreiben. Das trifft zum Beispiel auf die Folge

$$0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13, \ldots (f_8),$$

die Folge der FIBONACCIschen Zahlen, zu.
Versucht, einen Zusammenhang zwischen den Gliedern dieser Folge zu erfassen, indem ihr irgend drei benachbarte Glieder aufmerksam betrachtet! Vergleicht das dritte Glied jeder Dreiergruppe mit den beiden ersten!

Jetzt habt ihr gefunden, daß sich jeweils das dritte Glied als Summe der beiden voranstehenden Glieder ergibt. Allgemein erhält man das k-te Glied der Folge ($k > 2$), indem man die beiden unmittelbar vorangegangenen Glieder addiert. Die rekursive Darstellung der Folge f_8 lautet also

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \text{ für } k > 2$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a_1 = 0 \text{ und } a_2 = 1.$$

Wir haben jetzt alle wesentlichen Darstellungsarten von Zahlenfolgen kennengelernt.

Wenn ihr schon öfters in mathematischen Büchern geblättert oder studiert habt, so wird euch vielleicht aufgefallen sein, an wie vielen Stellen man Zahlenfolgen begegnet. Zahlenfolgen spielen jedoch nicht nur in vielen Bereichen der mathematischen Wissenschaft eine bedeutende Rolle, sondern auch in den Naturwissenschaften und in der Technik. Wir wollen uns jetzt zwei Typen von Zahlenfolgen zuwenden, die bei praktischen Anwendungen besonders häufig auftreten.
Es sind dies die arithmetischen und geometrischen Zahlenfolgen.
Von den bisher verwendeten acht Beispielfolgen sind

$$\begin{aligned} f_1 &= 2; 4; 6; 8; 10; \ldots \\ f_4 &= 1; 4; 9; 16; 25; \ldots \\ f_5 &= 7; 4; 1; -2; -5; -8 \\ \text{und } f_7 &= 2; 4; 6; \ldots; 20 \end{aligned}$$

arithmetische Folgen, dagegen

$$f_2 = 2; 2{,}8; 4; 5{,}6; 8; 11; 16; 22$$

(Folge der Blendenzahlen)

$$\text{und } f_6 = -2; +4; -8; +16; -32; \ldots; -512$$

geometrische Folgen.

Die Folgen f_3 und f_8 sind weder arithmetische noch geometrische Folgen.
Woran erkennen wir arithmetische und geometrische Folgen? Wie unterscheiden sie sich?
Schaut euch f_1 und f_5 einmal genauer an!
Ihr werdet schnell erkennen, daß diese Folgen von Glied zu Glied um den gleichen Wert zu- oder abnehmen. Bei diesen Folgen ist also die Differenz zweier benachbarter Glieder immer gleich, konstant, wie der Mathematiker sagt. Man kann es exakter formulieren: Bedeutet a_k das k-te Glied der Aussagenfolge, so ist die Folge der Differenzen $d_k = a_{k+1} - a_k$ konstant.
Bei der Folge f_1 lautet die Differenzenfolge 2; 2; 2; ..., bei f_5 heißt sie —3; —3; —3; ....
Wenn das der Fall ist, wenn also die Differenzenfolge, die 1. Differenzenfolge, konstant ist, dann liegt eine *arithmetische Folge* 1. *Ordnung* vor.
Was sind nun aber arithmetische Folgen 2. und höherer Ordnung? Betrachten wir die Folge $f_4 = 1; 4; 9; 16; 25; \ldots$, bilden die 1. Differenzenfolge 3; 5; 7; 9; ... und davon wieder die Differenzenfolge 2; 2; 2; ..., so stellen wir fest, daß hier die 2. Differenzenfolge konstant ist. Die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen wird infolgedessen als eine arithmetische Folge 2. Ordnung bezeichnet.
Wir definieren allgemein:

Unter einer *arithmetischen Folge m-ter Ordnung* ($m \geqq 1$, ganz) versteht man eine Folge, deren m-te Differenzenfolge aus lauter gleichen (von Null verschiedenen) Gliedern besteht. Prüft nach, daß die Folge mit dem Bildungsgesetz $a_k = k^3 - 2k + 5$ eine arithmetische Folge 3. Ordnung ist:

Ausgangsfolge:	4; 9; 26; 61; 120; 209; ...
1. Differenzenfolge:	5; 17; 35; 59; 89; ...
2. Differenzenfolge:	12; 18; 24; 30; ...
3. Differenzenfolge:	6; 6; 6; ...

Ein solcher Nachweis ist natürlich nicht hinreichend. Es könnte ja sein, daß nur die ersten drei Glieder der 3. Differenzenfolge konstant sind, die weiteren aber nicht. Man kann jedoch an der independenten Darstellung $a_k = k^3 - 2k + 5$ eindeutig erkennen, daß hier tatsächlich eine arithmetische Folge 3. Ordnung vorliegt. Allgemein läßt sich nämlich beweisen, daß jede ganzrationale Funktion m-ten Grades

$$\begin{aligned} a_k = b_m k^m &+ b_{m-1} k^{m-1} + \\ &+ b_{m-2} k^{m-2} + \cdots + b_2 k^2 + \\ &+ b_1 k + b_0 \end{aligned}$$

mit $b_m \neq 0$, alle $b_i (i = 0, 1, \ldots, m)$ reell und $k \in \{1; 2; \ldots\}$

eine unendliche arithm. Folge m-ter Ordnung ist. Daraus folgt ohne weiteres, daß jede lineare Funktion $a_k = dk + b$ mit $d \neq 0$ und $k \in \{1; 2; \ldots\}$ eine unendliche arithmetische Folge 1. Ordnung darstellt. Dabei ist d die Differenz der Folge.
Wir haben so mit $a_k = dk + b$ $(d \neq 0)$ eine independente Darstellung der arithmetischen Folge 1. Ordnung gefunden. Für Anwendungen in der Praxis ist es oft vorteilhaft, das Anfangsglied a_1 in eine solche allgemein independente Darstellung mit eingehen zu lassen. Dann erhält man die wichtige Beziehung

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d \quad (d \neq 0),$$

die ihr aus der vorangehenden Gleichung selbst herleiten könnt. Macht euch den Sinn dieser Formel auch dadurch klar, daß ihr für k die Werte 1; 2; 3; 4 einsetzt!

Die rekursive Darstellung für arithmetische Folgen 1. Ordnung lautet einfach

$a_k = a_{k-1} + d \; (d \neq 0)$, denn man gelangt zum k-ten Glied, indem man zum unmittelbaren Vorgänger die Differenz d addiert.

Die Bezeichnung „arithmetische Folge" rührt übrigens daher, daß man jedes Glied a_k $(k > 1)$ einer unendlichen arithmetischen Folge 1. Ordnung als „arithmetisches Mittel" der beiden Nachbarglieder erhält.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Prüft diesen Sachverhalt an einigen Gliedern der Folgen f_1 und f_5 nach!

Soweit für heute! Im nächsten Heft werdet Ihr Näheres über geometrische Folgen und deren Anwendung lesen.

Aufgaben

289 a) Wie lautet die rekursive Darstellung der Folge

$f_5 = 7; 4; 1; -2; -5; -8.$

b) Eine Folge sei gegeben durch ihre rekursive Darstellung

$$a_k = \frac{2}{3} a_{k-1}^2 \cdot a_{k-2} \quad \text{für } k > 2 \quad \text{mit}$$
$$a_1 = +2 \text{ und } a_2 = -\frac{3}{2}.$$

Ermittle die Glieder a_3, a_4 und a_5 dieser Folge.

290 Ein einfaches Bildungsgesetz für die Folge

$$8; 4; 2; 2; 1; 2; \frac{1}{2}; 4; \frac{1}{8}; 32; \ldots \; (f_9)$$

ist gesucht.

291 a) Von einer arithmetischen Folge 1. Ordnung sind zwei Glieder gegeben: $a_{23} = 0$ und $a_{89} = 15$.

Bestimme das 100. Glied und das Anfangsglied dieser Folge! b) Sind von den vier Variablen a_1, d, k, a_k stets jeweils drei uneingeschränkt wählbar, so daß mittels $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$ die vierte berechnet werden kann?

292 Von einer arithmetischen Folge 3. Ordnung sind gegeben:

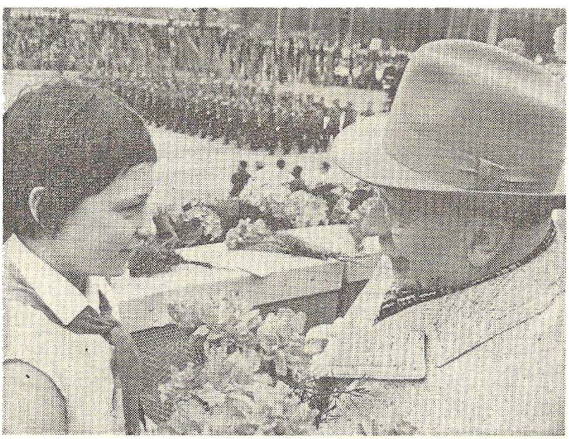
$a_1 = -60; a_2 = -25;$
$d^{(3)} = 5$ (konstante Differenz der dritten Differenzenfolge)
$d_1^{(2)} = 7$ (1. Glied der zweiten Differenzenfolge).

Wie heißen die Glieder a_3, a_4 und a_5 der Ausgangsfolge?

293 Messungen in der Erdkruste ergaben, daß die Temperatur zum Erdinnern hin je 100 m Tiefe um etwa 3 °C zunimmt, wobei in unseren Breiten eine Temperatur von 10 °C in 25 m Tiefe zugrunde zu legen ist.

Welche Temperatur herrscht in 2325 m Tiefe? In welcher Tiefe werden 100 °C erreicht?

H. Lohse



Unsere Verpflichtung zu Ehren des 19. Jahrestages der Gründung der DDR: Mit hohen mathematischen Leistungen stärken wir unsere sozialistische Republik.

Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur

Im Filmtheater sind Randplätze und Plätze der vordersten Reihe beim Zuschauer unbeliebt, weil man von diesen Stellen aus das auf der Leinwand erscheinende Bild verzerrt und deshalb wenig wirklichkeitsgetreu sieht. Begehrter sind hingegen Mittelplätze, da man von dort aus fast senkrecht auf die Bildwand schaut und so einen weniger entstellten Eindruck von den dargestellten Objekten und der Handlung gewinnt. Die Netzhaut des Auges und die Filmwand liegen in diesem Fall annähernd parallel, so daß der Abbildungsvorgang in einer ähnlichen Verkleinerung besteht.

Projiziert man nun ein ebenes Gebilde durch Parallelprojektion normal (senkrecht) auf eine Bildebene, dann wird es im allgemeinen nicht in seiner wahren Gestalt abgebildet. Wir wollen beispielsweise an einem Dreieck untersuchen, unter welchen Voraussetzungen es sich bei *Normalprojektion* auf eine Bildebene in wahrer Gestalt, d. h. unter Wahrung der Größen sämtlicher Winkel und Strecken abbildet. In Heft 6/1967 hatten wir festgehalten, daß sich eine Strecke $\overline{AB}$ genau dann bei Normalprojektion auf eine Bildebene in wahrer Größe abbildet, wenn die Strecke $\overline{AB}$ parallel zu dieser Ebene liegt. Diese Forderung müßte nun an alle drei Dreieckseiten gestellt werden. Bilden sich alle drei Seiten in wahrer Größe ab, so gilt dies nach dem ersten Kongruenzsatz auch für die drei Winkel des Dreiecks. Da ein Dreieck bei nicht ausgearteter Lage seiner Eckpunkte stets eine Ebene festlegt, können wir zusammenfassend festhalten: Eine ebene Figur bildet sich bei Normalprojektion auf eine Bildebene genau dann in wahrer Gestalt (längen- und winkeltreu) ab, wenn die von dieser Figur bestimmte Ebene parallel zur Bildebene liegt.

Frage: Behält der hier ausgesprochene Satz seine volle Gültigkeit, wenn darin das Wort Normalprojektion durch Parallelprojektion ersetzt wird?

Nach diesen Vorbetrachtungen wollen wir uns die Aufgabe stellen, die wahre Gestalt eines Dreiecks ABC zu bestimmen, das uns durch Grund- und Aufriß vorgegeben ist.

Die zugeordneten Normalrisse des Dreiecks ABC stellen Normalprojektionen eines ebenen geometrischen Gebildes dar (Bild 1).

Gewiß erscheint das hier vorgegebene Dreieck in keinem der beiden Risse in seiner wahren Gestalt. Sollte das Dreieck z. B. im Grundriß originalgetreu erscheinen, dann müßten die Aufrisse der Punkte A, B und C auf einer Parallelen zur Rißachse liegen. Entsprechendes gilt für den Aufriß. Gelingt es uns aber, das Dreieck ABC durch Drehung in ein Dreieck $A_0B_0C_0$ derart überzuführen, daß die Ebene des gedrehten Dreiecks parallel zu einer der Bildebenen liegt, dann wird das Dreieck ABC in der betreffenden Bildebene in seiner wahren Gestalt erscheinen. Es erhebt sich nur die Frage, wie die Drehachse zu legen und um welchen Winkel zu drehen ist, um den gewünschten Effekt zu erzielen.

Soll das Dreieck ABC etwa parallel zur Bildebene π_1 gedreht werden, dann ist eine (zweckmäßig in $\varepsilon = (ABC)$ liegende) Gerade als Drehachse zu verwenden, die parallel zu π_1 liegt. Man muß also das Dreieck um eine *erste Hauptlinie* drehen. Der Drehwinkel ist dabei so zu wählen, daß die Aufrisse der drei Eckpunkte des gedrehten Dreiecks auf einer Parallelen zur Rißachse, nämlich dem Aufriß der Drehachse, liegen. Natürlich kann man das Dreieck ABC auch in eine der Bildebenen selbst hineindrehen. Dann ist eine der beiden Spuren von $\varepsilon = (ABC)$ als Drehachse zu nehmen. Soll z. B. das

Dreieck ABC in die Bildebene π_1 gedreht werden, wird man die erste Spur e_1 als Drehachse verwenden.
Wir wollen uns nun an Beispielen mit der konstruktiven Durchführung vertraut machen. In Bild 2 ist die vom Dreieck ABC aufgespannte Ebene erst- und zweitprojizierend. Die wahre Gestalt des Dreiecks ABC soll durch Drehung der Ebene $\varepsilon = (ABC)$ in die Bildebene π_1 gewonnen werden. Hierfür ist die Spurgerade e_1 als Drehachse zu wählen. Nun ist zu beachten, daß die Drehbewegung durch zwei Bilder beschrieben wird. Im Grundriß erscheinen die von den Punkten A, B, C durchlaufenen Kreisbahnen als Geraden, die parallel zur Rißachse liegen. Der Aufriß von e_1 stellt einen Punkt dar. Da wir beim Aufriß in Richtung der Drehachse schauen, bilden sich die von den Punkten A, B, C beschriebenen Viertelkreise hier in ihrer wahren Gestalt ab. Wir bezeichnen die Eckpunkte des in dieser Weise umgelegten Dreiecks mit A_{01}, B_{01}, C_{01}. Die Aufrisse dieser Punkte liegen offenbar in den Schnittpunkten der betreffenden Kreisbögen mit der Rißachse. Ihre Grundrisse findet man, indem man die Ordnungslinien durch A''_{01}, B''_{01}, C''_{01} mit den entsprechenden Parallelen zur Rißachse durch A', B', C' zum Schnitt bringt. Das Dreieck $A_{01}B_{01}C_{01}$ liegt in π_1 und liefert uns die wahre Gestalt des Dreiecks ABC.
In völlig analoger Weise hätte man auch die wahre Gestalt des Dreiecks ABC durch Umlegung um die zweite Spur nach π_2 bestimmen können.
In Bild 3 liegt das Dreieck ABC in einer erstprojizierenden Ebene. Das Umlegen der Ebene ε um e_2 nach π_2 ist jetzt vergleichbar mit dem Schließen einer weit geöffneten Tür, wobei der Türrahmen in der Bildebene π_2 liegt. Bei diesem Vorgang bilden sich die Bahnen der Punkte A, B, C im Aufriß als Parallelen zur Rißachse und im Grundriß als Kreisbögen ab, deren gemeinsamer Mittelpunkt in e'_2 liegt. In Fortführung des anschaulichen Vergleiches sei daran erinnert, daß manche Türen auf dem Fußboden kreisförmige Schleifspuren hinterlassen, deren Mittelpunkte auf der Drehachse der Tür liegen.
Die Schnittpunkte der Kreisbögen mit der Rißachse ergeben den Grundriß der Eckpunkte des umgelegten Dreiecks $A_{02}B_{02}C_{02}$. Den Aufriß dieses Dreiecks erhält man, indem die Ordnungslinien durch $A'_{02}B'_{02}C'_{02}$ mit den entsprechenden Parallelen zur Rißachse durch A'', B'' und C'' zum Schnitt gebracht werden. Das in π_2 liegende Dreieck $A_{02}B_{02}C_{02}$ zeigt die wahre Gestalt des Dreiecks ABC. Nach Durchführung der Konstruktion in der oben beschriebenen Weise lassen sich noch Zeichenkontrollen einfügen. Bringt man die Dreieckseiten $A''B''$ und $A_{02}B_{02}$ durch Verlängern miteinander zum Schnitt, so muß bei genauer Konstruktion dieser Schnittpunkt auf der zweiten Spur e_2 von ε liegen. Dieser Schnittpunkt ist ja ein Punkt der Drehachse, der bei der Bewegung festbleibt. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Dreieckseiten und ihre Umlegungen. Frage: Wie hätte man B_{02} und C_{02} ohne Zuhilfenahme des Grundrisses konstruieren können, wenn außer A'', B'' und C'' noch A_{02} gegeben wäre?
Eine zweite Möglichkeit, die wahre Gestalt des Dreiecks ABC zu bestimmen, besteht darin, die Ebene $\varepsilon = (ABC)$ um e_1 in die erste Bildebene umzulegen. Dies geschieht, indem man auf e_1 in A', B' und C' Senkrechte errichtet. Trägt man auf diesen Senkrechten die ersten Tafelabstände der Punkte A, B, C in der richtigen Zuordnung ab, erhält man das gesuchte Bild des Dreiecks ABC.
Abschließend soll noch ein Fall betrachtet werden, wo die Ebene $\varepsilon = (ABC)$ weder erst- noch zweitprojizierend ist. Wir nehmen die Ebene als gleichwendig an und drehen sie um eine erste Hauptlinie parallel zu π_1. Ferner sind wir bestrebt, mit möglichst wenig Hilfslinien auszukommen. Dazu legen wir die Drehachse durch jenen Eckpunkt des Dreiecks, der weder höchster noch tiefster Punkt des Dreiecks ist, also durch A. (Bild 4)
Bei Drehung von ε um h_1 als Drehachse beschreiben die Punkte B und C Kreisbahnen mit M_B bzw. M_C als Mittelpunkt. Die Ebenen dieser Kreisbahnen stehen senkrecht auf π_1; d. h. die Grundrisse von B und C verschieben sich auf Senkrechten zu h'_1 durch M'_B und M'_C. Um B_{01} und C_{01} zu bestimmen, sind nun noch die Radien r_B und r_C der Drehkreise von B bzw. C zu ermitteln.

Zur Bestimmung von r_B betrachten wir das Dreieck BQM_B. Dieses Dreieck hat einen rechten Winkel bei Q. Die Hypotenuse $\overline{BM_B}$ des Dreiecks ist offenbar gleich r_B. Es kommt also nur darauf an, die wahre Länge von r_B zu bestimmen und diese von M_B' aus auf der Senkrechten zu h_1' abzutragen. Die wahren Längen der Katheten $\overline{BQ}$ und $\overline{QM_B}$ lassen sich dem Auf- bzw. Grundriß unmittelbar entnehmen. In einer Nebenkonstruktion könnte man mit den Stücken $\overline{BQ}$ und $\overline{QM_B}$ als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, dessen Hypotenuse dann der Länge des gesuchten Drehradius r_B entspricht. Diese Nebenkonstruktion läßt sich jedoch einsparen, indem man die Strecke $\overline{BQ} = h_B$ mit dem Zirkel dem Aufriß entnimmt und von M_B' auf h_1' abträgt. Dies liefert den Punkt R'. Nach obigen Erläuterungen gilt $\overline{Q'R'} = \overline{B'R'} = r_B$. Trägt man also diese Strecke von M_B' aus auf der Senkrechten zu h_1' ab, erhält man B_{01}'. Der wesentliche Inhalt der Konstruktion besteht in der Übertragung zweier Strecken, nämlich der Strecken $\overline{Q''B''} = h_B$ und $\overline{B'R'}$, mit Hilfe eines Zirkels. Deshalb spricht man hierbei auch von dem „*Verfahren des doppelten Zirkelschlages*".
Um abschließend noch C_{01}' zu finden, soll jetzt mit minimalem Konstruktionsaufwand gearbeitet werden. Wir entnehmen die Strecke h_c dem Aufriß und tragen diese von M_c' aus auf h_1' ab. Dies liefert den Punkt S'. Nun nehmen wir die Strecke $\overline{S'C'}$ in den Zirkel und tragen diese von M_c' aus entsprechend dem gewählten Drehsinn auf der Senkrechten zu h_1' durch M_c' ab. Der Endpunkt ist die gesuchte Umlegung C_{01}' von C bezüglich h_1. A bleibt bei dieser Drehung fest, d. h. es gilt $A' = A_{01}'$.
Mit $A_{01}'B_{01}'C_{01}'$ ist die wahre Gestalt des Dreiecks ABC gefunden. Der hier dargelegten Aufgabenstellung kommt eine hohe praktische, aber auch grundlegende theoretische Bedeutung zu.
Im Werkzeug- und Maschinenbau ist oftmals der Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden aus einer in Grund- und Aufriß vorliegenden Werkstattzeichnung zu bestimmen. Zeichnerisch läßt sich diese Aufgabe mit den vorgeführten Mitteln lösen. In der Technik sind vielfach ebenflächig begrenzte Körper mit Metallbeschlägen zu versehen. Um rationell arbeiten zu können, muß vorher die wahre Gestalt der Beschläge konstruktiv ermittelt werden. In der Landesvermessung bildet zur kartographischen Erfassung eines Geländes ein Netz von Dreiecken den ersten Rahmen für die Aufstellung einer Karte. Da die Eckpunkte der Dreiecke (Trigonometrische Punkte) nicht alle in gleicher Höhe über dem Meeresspiegel liegen, kann man niemals sämtliche Dreiecke eines Netzes in einer Zeichenebene ähnlich verkleinert abbilden. Auch hier ist beim Übergang von den vermessenen Dreiecken zur Darstellung auf einem ebenen Zeichenblatt eine Unterscheidung der wahren Gestalt des Dreiecks von seiner Projektion in eine Bildebene notwendig.
Für theoretische Untersuchungen geben diese Betrachtungen einen wichtigen Ausgangspunkt. Zwischen der Normalprojektion einer ebenen Figur und ihrer Umlegung in die betreffende Bildebene besteht eine geometrische Verwandtschaft, die man als „*Perspektive Affinität*" bezeichnet. Die Spur der Ebene in der Bildebene bezeichnet man als *Affinitätsachse.* Alle Punkte dieser Geraden gehen bei der Abbildung in sich selbst über. Es sind die sogenannten *Fixpunkte* der Abbildung. Zwei Punkte, die durch die Abbildung einander zugeordnet sind, legen die *Affinitätsrichtung fest.* Beschränken wir uns auf die Betrachtung von Normalprojektion und Umlegung einer ebenen Figur, so liegt die Affinitätsrichtung senkrecht zur Affinitätsachse.
Beweise die folgenden Eigenschaften der hier vorliegenden affinen Abbildung durch anschauliche räumliche Überlegungen:
1. Eine affine Abbildung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der Affinitätsachse und eines Paares einander zugeordneter Punkte.
2. Auf einer Geraden allgemeiner Lage bleiben bei der Abbildung die Streckenverhältnisse erhalten.
3. Parallele Geraden gehen bei der Abbildung in parallele Geraden über.

Aufgaben

□Man bestimme von folgender in Grund- und Aufriß vorgegebenen ebenen Figur die wahre Gestalt durch geeignete Wahl einer Drehachse und wiederholte Anwendung des doppelten Zirkelschlages. (Ebene ist wechselwendig) (Bild 5)

□Von einer ebenen Figur ist der Normalriß vollständig und die Umlegung in die zugehörige Bildebene durch einen Punkt E_{01} vorgegeben. Man vervollständige die Umlegung der ebenen Figur durch Anwendung von allgemeinen Eigenschaften der hier vorliegenden Abbildung. (Bild 6)

□Man zeichne Grund- und Aufriß eines Dreiecks ABC etwa nach der Art von Bild 1. Von diesem Dreieck bestimme man den Mittelpunkt I des Inkreises (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) und den Mittelpunkt U des Umkreises (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten).

Bemerkung: Da bei Normalprojektion zweier sich im Raum schneidender Geraden eine Winkelhalbierende i. a. nicht wieder in eine Winkelhalbierende übergeht, ist die Bestimmung von I nur durch Bestimmung der wahren Gestalt des Dreiecks ABC möglich. Entsprechend ist auch U nur durch Zurückgehen auf die wahre Dreiecksgestalt bestimmbar, da ein rechter Winkel bei Normalprojektion i. a. nicht wieder in einen solchen übergeht. Was läßt sich über die Schwerpunktsbestimmung an einem Dreieck sagen, das in zugeordneten Normalrissen vorgegeben ist?

E. Schröder

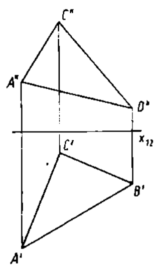


Bild 1

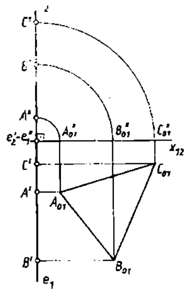


Bild 2

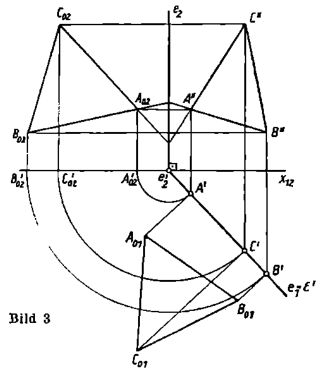


Bild 3

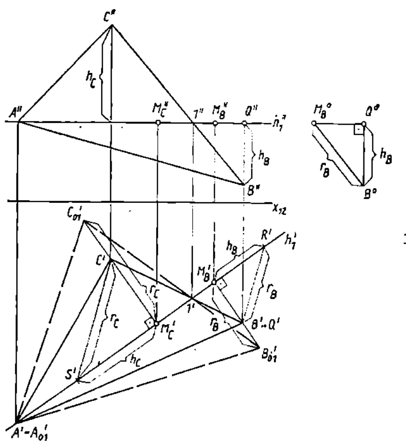


Bild 4

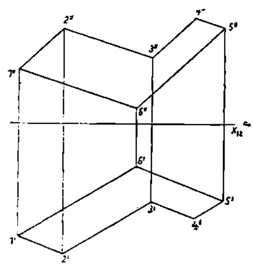


Bild 5

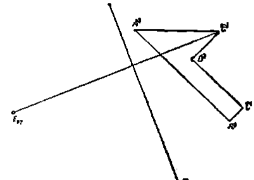


Bild 6

Eine Knobelgeschichte

2. Teil

Vier Zirkelteilnehmer treffen sich. Um die gestellte Aufgabe leichter lösen zu können, übernehmen drei von ihnen die Namen und Rollen von *Schwarz, Unsinn* und *Weiß*. Der vierte, den wir Franz nennen wollen, spielt den Fragenden.

Die erste treffende Feststellung macht nach geraumer Zeit *Weiß*: „Wenn ich nach meinem oder euren Zunamen gefragt werde, so muß ich verabredungsgemäß die Wahrheit sagen."

Als nächster bemerkt scharfsinnig *Unsinn*: „Ein Fragender, der unsere Zunamen fixieren will, soll aus meinen Antworten nicht schließen können, daß ich nicht *Weiß* heiße. *Deshalb werde ich wie Weiß von sich von mir behaupten, ich würde Weiß heißen und meine beiden Mitspieler nenne ich in meinen Antworten Schwarz und Unsinn.*" Nach einer kurzen Pause ergänzt er: „Diese *Forderung* ist zwar nicht notwendig. Aber vielleicht gelingt es, unter Einhaltung dieser scharfen Forderung brauchbare Antworten zu finden." Alsbald erhebt *Schwarz* die gleiche Forderung für seine Antworten wie *Unsinn*. Um das bereits Erkannte besser überblicken zu können, stellen sie zunächst eine Tabelle auf, in die sie vorerst die Antworten von Weiß eintragen.

Antwort von		über	
	Schwarz	Unsinn	Weiß
Schwarz			
Unsinn			
Weiß	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Sie wissen noch, daß gemäß der von *Unsinn* und *Schwarz* erhobenen Forderung die beiden Felder, die noch unbeschriftet auf der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonale des Antwortschemas liegen, mit „Weiß" zu beschriften sind.

Durch Betrachten der entsprechend ergänzten Tabelle erkennt jetzt *Schwarz* weiter: „Gemäß der gestellten Forderung darf ich von *Unsinn* nur behaupten, er heiße *Unsinn* oder *Schwarz*. Da ich jedoch andererseits zum Lügen verpflichtet bin, darf ich *Unsinn* in meinen Antworten nicht seinen wirklichen Namen geben. Also muß ich von *Unsinn* behaupten, er heiße *Schwarz*". Wieder wird ein Antwortfeld der Tabelle ausgefüllt. *Schwarz* argumentiert weiter: „Von *Weiß* muß ich nunmehr gemäß gestellter Forderung behaupten, er habe den von mir noch nicht in Antworten genannten Namen *Unsinn*". Nur noch zwei Felder sind nunmehr in der Tabelle leer:

Antwort von		über	
	Schwarz	Unsinn	Weiß
Schwarz	„Weiß"	„Schwarz"	„Unsinn"
Unsinn		„Weiß"	
Weiß	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Nach längerem Nachdenken kommt *Unsinn* zu folgendem Ergebnis: „Gemäß der auch von mir erhobenen Forderung muß ich von *Schwarz* behaupten, daß er *Schwarz* oder *Unsinn* heißt. Nenne ich jedoch *Schwarz Schwarz* so muß ich *Weiß Unsinn* nennen. Bei der zweiten Antwortmöglichkeit nenne ich *Schwarz Unsinn* und *Weiß Schwarz*." Da zunächst keine beider Antwortmöglichkeiten auszuschließen ist, werden sie beide in die Tabellen eingetragen:

Antwort von		über	
	Schwarz	Unsinn	Weiß
Schwarz	„Weiß"	„Schwarz"	„Unsinn"
Unsinn	1. „Schwarz" 2. „Unsinn"	„Weiß"	1. „Unsinn" 2. „Schwarz"
Weiß	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Alle betrachten die Tabelle und prüfen, ob beide Antwortmöglichkeiten von Unsinn möglich sind oder nicht.

Franz, der die Rolle des Fragenden spielt, schlägt vor, vorübergehend am Tabelleneingang die Namen *Schwarz, Unsinn* und *Weiß* durch Symbole P, Q und R zu ersetzen, denn ein Fragender kennt ja die Zunamen der drei nicht:

Antwort von		über	
	P	Q	R
P	„Weiß"	„Schwarz"	„Unsinn"
Q	1. „Schwarz" 2. „Unsinn"	„Weiß"	1. „Unsinn" 2. „Schwarz"
R	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Franz erkennt nunmehr, daß die erste Antwortmöglichkeit von Q ausscheidet: „Bei der ersten Antwortmöglichkeit von Q erhalte ich von zwei Befragten, nämlich von P und Q, die gleiche Auskunft „Unsinn" über R. Hieraus schließe ich, daß P oder Q den Namen *Unsinn* trägt." — „Ebenso erhalte ich bei dieser Antwortmöglichkeit von Q und R über P die gleiche Auskunft „Schwarz". Demnach muß Q oder R den Namen *Unsinn* tragen." — „Aus beiden Feststellungen folgt weiterhin, daß Q den Namen *Unsinn* trägt. Da ein solcher Schluß aus den gegebenen Antworten nicht gezogen werden darf, scheidet die erste Antwortmöglichkeit von Q alias *Unsinn* aus."

An dem verbliebenen Antwortschema können die Freunde keine Unzulänglichkeit mehr erkennen. Sie glauben deshalb, eine Lösung gefunden zu haben und gehen so vorbereitet zum nächsten Zirkel.

Im nächsten Zirkel dürfen unsere vier Knobelfreunde ihre Tabelle mit Antwortschema an die Tafel schreiben und begründen. Der Zirkelleiter stellt fest: Es muß noch der Nachweis geführt werden, daß das von unseren vier Mathematikfreunden gefundene Antwortschema tatsächlich Lösung ist. Zu diesem Zweck bittet er neun Zirkelmitglieder, sich in drei Dreiergruppen für die anderen sichtbar aufzustellen. Diesen neun Schülern hängt er vorbereitete Schilder um, die die Anfangsbuchstaben der Vor- und Zunamen unserer Knobelaufgabe tragen.

Diese neun Schüler erhalten den Auftrag, gemäß dem in der Tabelle stehenden Antwortschema und gemäß der ihnen umgehängten Schilder auf die gestellten Fragen zu antworten.

Die erste Frage des Zirkelleiters lautet: „Annette, welchen Zunamen trägt Beate?" Nacheinander antworten die drei Annettes der drei Dreiergruppen mit der gleichen Antwort „Schwarz". Auch auf die Frage „Christa, welches ist dein Nachname?" und alle anderen zulässigen Fragen erhält der Zirkelleiter von den Befragten jeweils die gleichen Antworten. (Der Leser stelle eine Tabelle auf, in die er neben den Fragen die Antworten der drei Dreiergruppen aufnimmt.)

Hieraus ziehen die Zirkelteilnehmer den Schluß, daß ein Fragender die drei Dreiergruppen durch die erhaltenen Antworten nicht voneinander unterscheiden kann. Da insgesamt bei den betrachteten Dreiergruppen zu jedem zulässigen Vornamen jeder zulässige Nachname gehören kann, kann ein Fragender bei diesem Antwortschema die Zuordnung keines einzigen Nachnamens vornehmen.

Durch die folgenden Hinweise regt der Zirkelleiter zur weiteren Beschäftigung mit dieser Knobelaufgabe an: „Neben den drei von uns betrachteten Zuordnungen der Vor- und Zunamen gibt es noch drei weitere. Kann ein Fragender diese drei weiteren Zuordnungen voneinander unterscheiden? Kann er diese drei neuen Zuordnungen von den von uns betrachteten unterscheiden?" — „Die von uns betrachtete Knobelaufgabe besitzt mehrere Lösungen. Wer findet ein weiteres zulässiges Antwortschema?"

Der Zirkelleiter spricht weiter: „Bei unserem Frage- und Antwortspiel können die Zunamen der drei Mädchen sofort festgelegt werden, falls andere Fragen zugelassen sind. Löst bis zum nächsten Male die folgende Knobelaufgabe!"

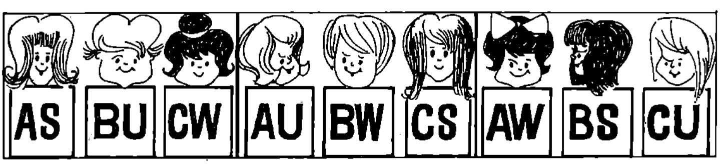
3. a″) wie a

b″) wie b

c″) Mit welchen Fragen und den erhaltenen Antworten kann ein Fragender die Zuordnung von Vor- und Zunamen der drei Mädchen festlegen?

W. Träger

1. Dreiergruppe 2. Dreiergruppe 3. Dreiergruppe



VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade (6./7. 12. 1967)

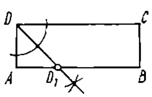
5 1. Berechnung der Menge des reinen weißen Papiers: Wegen $336 \cdot 700 = 235200$ und 235200 g $= 235{,}2$ kg können aus 336 kg Altpapier höchstens 235,2 kg weißes Papier hergestellt werden. Berechnung der Menge von Schreibheften: Wegen $235200 : 30 = 7840$ können aus 336 kg Altpapier höchstens 7840 Schreibhefte hergestellt werden.

2. Es gibt genau drei zweistellige Zahlen, bei denen die Anzahl der Einer dreimal so groß ist wie die der Zehner, nämlich 13, 26, 39. Von ihnen erfüllt nur 26 die Bedingungen der Aufgabe; denn

$$31 - 13 = 18; \quad 62 - 26 = 36;$$
$$93 - 39 = 54.$$

daher ist $z = 26$.

3. Da der Winkel $\sphericalangle\, CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\sphericalangle\, D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels. Man halbiert daher den Winkel $\sphericalangle\, CDA$. Die Winkelhalbierende schneidet wegen $\overline{AD_1} = \overline{AD} < \overline{AB}$ die Seite AB im Punkt D_1. Das Dreieck $\triangle\, DAD_1$ ist das gesuchte.

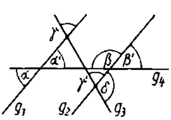


Zweiter Lösungsweg: Da der Winkel $\sphericalangle\, CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\sphericalangle\, D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels. Jede Diagonale eines Quadrats halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Man konstruiert nun das Quadrat DAD_1D_2, indem man von A auf AB die Strecke AD_1 mit $\overline{AD} = \overline{AD_1}$ und von D auf DC die Strecke DD_2 mit $\overline{AD} = \overline{DD_2}$ abträgt, und verbindet D mit D_1. Dann ist DD_1 Diagonale des Quadrats DAD_1D_2 und der $\sphericalangle\, D_1DA$ ist 45° groß. Das Dreieck $\triangle\, DAD_1$ ist daher das gesuchte.

4. Da die Anzahl aller Teilnehmer 36 ist, ist die Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt laut Aufgabe 72 und die Anzahl der Schüler mit genau 2 richtigen Lösungen $72 : 3 = 24$. Da die Anzahl der Schüler in Zeile a) gleich der in Zeile e) und gleich der Hälfte der Anzahlen in Zeile b) bzw. in d) sein soll, sind die restlichen 12 Schüler wie folgt zu verteilen, und die Tabelle kann danach vervollständigt werden:

	I Anzahl der richtigen Lös. pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lös. insgesamt
a)	0	2	0
b)	1	4	4
c)	2	24	48
d)	3	4	12
e)	4	2	8
f)			
Gesamtzahlen		36	72

1. Es gilt mit den in der Abb. gewählten Bezeichnungen $\alpha = \alpha'$ (als Scheitelwinkelpaar) 6
$\beta + \beta' = 180°$ (als Nebenwinkelpaar),
mithin $\beta' = 180° - \beta$; $\quad \beta' = 180° - 130°$;
$\beta' = 50°$;
also $\beta' = \alpha$.



Daraus folgt: $g_1 \parallel g_2$. Nun ist ferner:
$\gamma = \gamma'$ (als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen) und $\gamma' + \delta = 180°$ (als Nebenwinkelpaar),
also $\quad \delta = 180° - \gamma'$, $\quad \delta = 180° - 70°$,
$\underline{\underline{\delta = 110°.}}$

2. Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muß der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das k. g. V. von 210 und 330:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$\text{k. g. V.:} \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$$

Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muß, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher 2310 cm = 23,10 m lang.

Probe: $2310:210 = 11; \quad 2310:330 = 7$

Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

3. Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Angaben der Aufgabe,

(1) $J > G$ (2) $E + R = J + G$
(3) $E + J < R + G$.

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition

$2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$.

Hieraus und aus (2) folgt $R - J = G - E > 0$ also $J < R$. Daher gilt $R > J > G > E$.
Die gesuchte Reihenfolge ist: Regina, Joachim, Gerd, Elke.

4. Schüler mit Preisen oder Anerkennungsschreiben:

8 Sch. $\mathrel{\widehat{=}} \frac{2}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe.

Daraus folgt:

4 Sch. $\mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe

und

36 Sch. $\mathrel{\widehat{=}} \frac{9}{9}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 2. Stufe).

Laut Aufgabe gilt weiterhin:

36 Sch. $\mathrel{\widehat{=}} \frac{3}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe,

also

12 Sch. $\mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe

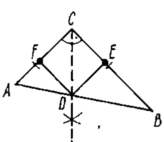
und

480 Sch. $\mathrel{\widehat{=}} \frac{40}{40}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe).

Genau 480 Schüler dieser Schule beteiligten sich an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

7

1. Jede Diagonale eines Quadrates halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats.



Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. $DECF$ ist das gesuchte Quadrat.

2. a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung ihrer Ziffern ergebenden Zahlen: $100a + 10b + c \quad 100a + 10c + b$
$100b + 10a + c \quad 100b + 10c + a$
$100c + 10a + b \quad 100c + 10b + a$.

Die Summe s ist dann:

$s = 100\,(2a + 2b + 2c) + 10\,(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c)$.

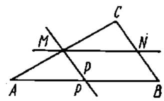
Da $2a + 2b + 2c = 2Q$ ist, erhält man
$s = 100 \cdot 2Q + 10 \cdot 2Q + 1 \cdot 2Q$
$s = 2Q\,(100 + 10 + 1)$
$s = 2Q \cdot 111$.

Beispiel:

534
543
354
345
453
435
2664

$2Q = 24$
$24 \cdot 111 = 2664$

3. Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. Daß diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so: Durch p wird die Ebene, in der $\triangle ABC$ liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB. Dann gilt:



(1) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle MNC \cong \sphericalangle APM$
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CMN$
(als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)

(2) $\triangle APM \cong \triangle MNC$ (nach dem Kongruenzsatz sww).
Daraus folgt: $\overline{MP} = \overline{CN}$.

(3) Viereck $BNMP$ ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion).

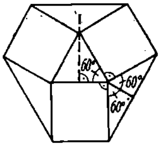
Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

4. Die Anzahl der Schüler pro Autobus muß ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein.
Wegen $319 = 11 \cdot 29$ und $232 = 8 \cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd. Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

8

1. Das Sechseck setzt sich zusammen aus: einem gleichseitigen Dreieck (Flächeninhalt A_3), 3 Quadraten (Flächeninhaltssumme $3\,A_4$ und 3 stumpfwinkligen Dreiecken, deren

Flächeninhaltssumme sich folgendermaßen berechnen läßt: Fällt man in diesen Dreiecken die Lote (Höhen) auf die Sechseckseite, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, und



diese sind kongruent zu denjenigen Dreiecken, die durch Konstruktion einer Höhe des gleichseitigen Dreiecks entstehen (*sww*; der rechte Winkel liegt der größten Seite gegenüber). Die Flächeninhaltssumme der 3 stumpfwinkligen Dreiecke beträgt daher $3A_3$. Folglich ist $A_6 = 4A_3 + 3A_4$.
Damit sind ganze Zahlen $n = 4$ und $m = 3$ so, wie in der Aufgabe gefordert war, angegeben.

2. (I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1′) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$, da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius der Länge $r_1 + r_1$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.*
(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1′) und (2). Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1. Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet. Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. (Der Beweis folgt aus (I).)

3. Die Augenzahl $3n + 4$ muß durch n teilbar sein.
$\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse. $n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann. Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d. h., es wurde zweimal eine 5 gewürfelt. Für $n = 4$ ergeben sich 16 Augen, d. h., es wurde viermal eine 4 gewürfelt. Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

* Anmerkung: Falls ein Schüler auch zwei zusammenfallende Kreise als einander berührend bezeichnet und hierdurch zu dem Ergebnis kommt, auch k_1 als vierte Lösung anzugeben, so kann eine solche Angabe (bei sonst richtiger Formulierung) als richtig anerkannt werden, da die Aufgabenstellung diese Deutung nicht ausdrücklich ausschließt.

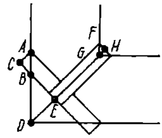
4. Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g. Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leqq r \leqq n - 1$, es gelte also $g = q \cdot n + r$ (q ganzzahlig). Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

1. Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Grup- **9**
pen aufteilen:
1. *Gruppe:* Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11. Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit $(a;\ b)$, $(c;\ d)$, dann erfüllen auch die Paare $(a;\ d)$, $(c;\ b)$, $(c;\ b)$, $(a;\ d)$ und $(c;\ d)$, $(a;\ b)$ die gleiche Bedingung. Wegen $0 + 1 = 1$ und $9 + 2 = 11$; $8 + 3 = 11$; $7 + 4 = 11$; $6 + 5 = 11$ gibt es genau 16 derartige Paare.
2. *Gruppe:* Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10. Das ergibt wegen $9 + 1 = 10$; $8 + 2 = 10$; $7 + 3 = 10$; $6 + 4 = 10$ und $5 + 5 = 10$ aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.
Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

2. Wegen $(a \cdot b) \cdot (a:b) = a^2$ muß das Produkt zweier der Zahlen 3; 10; 5; 18; 75 das Quadrat einer rationalen Zahl sein. Aus $18{,}75 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2}$ folgt, daß unter den gegebenen Zahlen $3 \cdot 18{,}75$ diese Bedingung erfüllt. Alle anderen Produkte ergeben keine Quadrate rationaler Zahlen. Daher gibt es höchstens die folgenden Möglichkeiten:
(I) $ab = 18{,}75$; $a:b = 3$.
Hieraus folgt $a^2 = (ab) \cdot (a:b) = 56{,}25$, also entweder (*A*) $a = 7{,}5$; $b = \frac{18{,}75}{a} = 2{,}5$, und alle Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt, oder
(*B*) $a = -7{,}5$; $b = -2{,}5$. Dieser Fall scheidet aus, da z. B. $a + b = -10$ mit keiner der Zahlen 3; 10; 5; 18,75 übereinstimmt.
(II) $ab = 3$; $a:b = 18{,}75$.
Hieraus folgt $a^2 = 56{,}25$, also entweder
(*A*) $a = 7{,}5$; $b = \frac{3}{a} = 0{,}4$ (Wegen $a + b = 7{,}9$ scheidet dieser Fall aus.) oder
(*B*) $a = -7{,}5$; $b = -0{,}4$ (Wegen $a + b = -7{,}9$ scheidet dieser Fall aus.). Also genügen $a = 7{,}5$ und $b = 2{,}5$ und nur diese den angegebenen Bedingungen.

3. Zu a) Die Entfernung $\overline{DG} = d$ der beiden Grabenecken beträgt als Diagonale in einem Quadrat, dessen Seitenlänge a ist, $d = a\sqrt{2}$. Die maximal durch die beiden Bretter über-

brückbare Strecke in Richtung der Diagonalen hat die Länge $\frac{a}{2} + a$. Wegen $\frac{3}{2}a > \sqrt{2}a$ ($1{,}5a > 1{,}415a$) ist die Lösung richtig.



Zu b) Aus den gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ABC$, $\triangle BDE$ und $\triangle FGH$ erhält man

$$\overline{CA} = \overline{CB} = b, \quad \overline{DE} = \overline{BE} = \frac{a}{2} - b,$$
$$\overline{GH} = \overline{FH} = \frac{b}{2}, \text{ also } \overline{EG} = a - \frac{b}{2},$$
$$a\sqrt{2} = \overline{DG} = \frac{a}{2} - b + a - \frac{b}{2},$$
$$\frac{3}{2}b = a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \text{ somit}$$
$$b:a = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

4. Es seien O_0 und O_K die Oberflächeninhalte des Oktaeders bzw. der Kugel, a die Kantenlänge des Oktaeders und r die Länge des Radius der Kugel. Dann gilt

$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (als halbe Diagonale des Quadrates $ABCD$)

$$O_K = 4\pi r^2 = 4\pi\frac{a^2}{2} = 2\pi a^2$$

$O_0 = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$. Also gilt:

$$O_K : O_0 = 2\pi a^2 : 2a^2\sqrt{3} = \pi : \sqrt{3}$$

10 1. Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllbar, dann sind $F, U, E, N, Z, W, I, S, B$ sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

(1) $S \neq 0$ und $S = 1$, da $U + Z < 20$ ist und $F + 1 \leqq 10$ sein muß.

(2) $F = 9$, da $F + 1 \geqq 10$ sein muß. Daraus folgt

(3) $F + 1 = 10$ und daraus wiederum

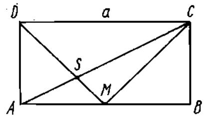
(4) $I = 0$.

Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt, daß

$F + I = N$, also wegen (4)
$F = N$ ist.

Da nach Voraussetzung $F \neq N$ sein muß, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d. h., die Aufgabe hat keine Lösung.

2. Bezeichnet man die Längen der Seiten des Rechtecks $ABCD$ mit a und b, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks I $(ABCD) = a \cdot b$. Ferner gilt $\triangle ASM \sim \triangle DSC$, da $\sphericalangle ASM \cong \sphericalangle DSC$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle SAM \cong \sphericalangle DCS$ (Wechselwinkel) sind.



Weil M Mittelpunkt von AB ist, gilt $\overline{AM} : \overline{CD} = 1:2$.

Ferner ist $I(\triangle AMC) = \frac{1}{4}a \cdot b$, und wegen $\overline{SM} : \overline{SD} = 1:2$ (Strahlensatz) gilt

$I(\triangle AMS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{12}a \cdot b$.

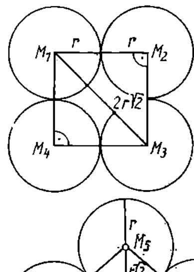
Somit erhält man $I(\triangle SMC) = I(\triangle AMC) - I(\triangle AMS)$

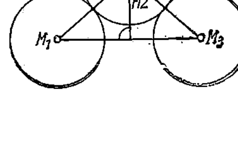
$= \frac{1}{4}a \cdot b - \frac{1}{12}a \cdot b = \frac{1}{6}a \cdot b$.

Mithin gilt $I(ABCD) : I(\triangle SMC) = 6:1$.

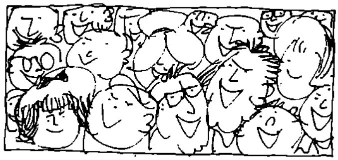
3. Für $n \geqq 2$ gilt: $2^{2^n} = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}}$
Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Falle $n \geqq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

4. Das durch die Berührungspunkte gebildete Quadrat (siehe Abb.) hat die Seitenlänge $2r$ und die Diagonalenlänge $2r\sqrt{2}$. Ein senkrecht zur Tischebene geführter, die Diagonale M_1M_3 enthaltender Schnitt ergibt folgendes Bild (siehe Abb.):
Da das Dreieck $\triangle M_1M_3M_5$ gleichschenklig ist und die Seitenlängen $\overline{M_1M_3} = 2r\sqrt{2}$, $\overline{M_1M_5} = \overline{M_3M_5} = 2r$ hat, ist es gleichschenklig-rechtwinklig; das Lot von MS auf M_1M_3 hat folglich die Länge $r\sqrt{2}$. Der gesuchte Abstand d beträgt daher
$d = r + r\sqrt{2} + r = r(2 + \sqrt{2})$.





In freien Stunden alpha heiter



Stilblüten (Bezirksolympiade 1968)

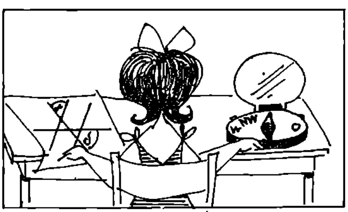
- ... *aus diesem Grunde kann x nur ein knappes Viertel von sich selber sein.*
- ... *a kann höchsten so groß bzw. so klein wie b sein.*
- ... *Wir betrachten ein Dreieck, das einen Innenwinkel enthält.*
- ... *Wir betrachten nun die eingeknickten Punkte* ... (Aufg. 4, Klasse 12).
- ... Bemerkung eines Teilnehmers der Klasse 10 zu Aufgabe 3, die er nicht lösen konnte: *Monika war eben schlauer als ich.*
- Nach einer Umformung schreibt eine Schülerin:

  ... *die* 3,5 *sind die* $\frac{6}{4}$ *a von oben rechts.*
- Eine Schülerin stellt fest, daß die Aufgabe nicht lösbar ist und schreibt dazu folgendes: *Nach langem und mühevollem Probieren habe ich festgestellt, daß es keine Lösung gibt.**

  * *Bemerkung: Ich habe beim Nachrechnen einen Fehler bemerkt und widerrufe hiermit obige Aussage!*
- Bei der Kreisolympiade in Klasse 6, Aufgabe 1:

  ... *der Winkel nordwestlich davon.*

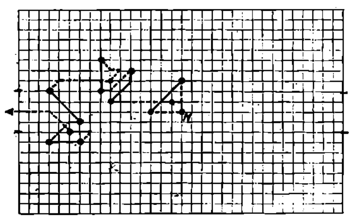
G. Kleinfeld, Leipzig



Football (siehe Heft 5/67)

Unser Leser Ing. M. Rickenstorf, Erfurt, hat beim Spiel *Football* (Heft 5/1967) eine „Lücke" in der Spielregel festgestellt. Sein 13jähriger Sohn hat ihm dabei geholfen.
Herr R. stellt richtig fest, daß der Spieler, der zuerst zu einem „6er"-Zug kommt, bei richtiger Fortsetzung gewinnen muß. Um das Spiel interessanter zu gestalten, schlägt Herr R. vor, folgenden Zusatz aufzunehmen: „Kann der Gegner nach diesen 6 Zügen wieder nicht weiterspielen, so darf der am Zug befindliche Spieler weitere 6 Züge machen, dann ist aber der Gegner auf jeden Fall wieder am Zuge, selbst wenn er die oben genannten Einschränkungen verletzen muß."
Wir danken Herrn R. für seinen Hinweis und wünschen weiterhin viel Spaß bei *alpha*-heiter.

Da das Spiel überall großen Anklang fand, geben wir nochmals Text und Beispielskizze wieder:

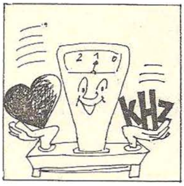


Günstige Spielfeldgröße: 32 Kästchen lang, 20 Kästchen breit. Jeder Spieler muß 3 Züge machen (ein Zug ist entweder eine Seitenlänge eines Kästchens oder eine Kästchendiagonale). Begonnen wird in der Mitte des Spielfeldes (M). Die Feldbegrenzung darf nicht berührt werden. Bereits gezogene Linien dürfen im Normalfall weder berührt noch gekreuzt werden. Gelingt es einem Spieler, an einem Gitterpunkt zu enden, von dem aus der Gegner, ohne die Regel zu verletzen, nicht weiterspielen kann, darf er 6 Züge machen. Hierbei dürfen schon vorhandene Linien berührt oder gekreuzt werden. Sieger ist, wer die Torlinie seines Gegners überschreitet. (Berühren zählt nicht als Tor). Verwendet verschiedene Farben! Die Abbildung zeigt einen Sieg des Spielers, der mit gestrichelter Linie spielte.

Drei Schüler unterhalten sich:

A: Wieviel Hertz sind 1 Kilohertz?
B: 1 Kilohertz sind 1000 Hertz.
C: 1 Kilo Herz sind 2 Pfund Fleisch.

K. Maske, Berlin



Magisches Quadrat

Aufgabe: In den 11 Pfeilrichtungen sind die jeweiligen vier Zahlen in der gegebenen Reihenfolge so durch mathematische Zeichen zu verbinden, daß jede Reihe, Spalte und Diagonale denselben Wert A ergibt. Versuche es für:

$$A = [21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 32, 36].$$

Ing. H. Decker, Köln

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

Buntes Kleid für jede Schachtel!

Eine weitverbreitete Freizeitbeschäftigung ist das Briefmarkensammeln. Es wird mit viel Eifer, Ausdauer und Sachkenntnis in aller Welt von jung und alt betrieben und setzte bald darauf ein, als vor 125 Jahren die britische Postverwaltung die erste Briefmarke der Welt herausgegeben hatte. Der Wunsch, bestimmte Erzeugnisse zu sammeln, bezieht sich auch auf die Etiketten von Zündholzschachteln. Diejenigen, die damit einen Teil ihrer Freizeit gestalten, nennen sich Phillumenisten. Der Ausdruck ist aus dem Griechischen und Lateinischen abgeleitet: „philos“ heißt zu deutsch „Freund“ und „lumen“ bedeutet „Licht“. Die Phillumenie ist seltener als die Philatelie, sie wird aber in der Welt von einigen Millionen Sammeleifrigen betrieben. Ihr Sammelobjekt kann für sich in Anspruch nehmen, älter zu sein als die erste Briefmarke. Bunte Zündholzschachteletiketten — 17 cm² große Aufkleber — gab es schon fast zehn Jahre vor der Herausgabe der ersten Briefmarke.

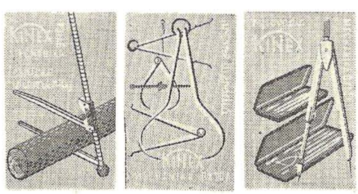
Auch dieses Steckenpferd, Etiketten der Zündholzschachteln zu sammeln, ist in die Literatur eingegangen. Der fortschrittliche französische Schriftsteller *Anatole France* — er erhielt 1921 den Friedens-Nobel-Preis — hat in seinem Roman „Professor Bonnards Schuld“ (1881) den Fürsten Dimitri Trepow beschrieben, der durch die Welt reiste, um Etiketten seltener Herkunft zu erhalten.

Das Kleid der Zündholzschachteln, ihr Etikett, wandelt sich sehr oft. Man schätzt, daß in der Sowjetunion jährlich etwa 2000 Motive verschiedenster Art für Etiketten gestaltet werden. In Frankreich findet man Sprichwörter, Trachten und Landschaften; in den Niederlanden Rätsel; in Schweden Märchen usw. Auch die Motive für Zündholzschachteln aus unserer Produktion sind sehr vielseitig. Sie vermitteln oft in einfacher Form Wissen, machen auf gesellschaftliche Ereignisse aufmerksam, regen zu nutzbringender Tätigkeit an, sollen Unfällen vorbeugen helfen oder dem Brandschutz dienen. Wenn man bedenkt, daß das Konsum-Zündwarenwerk Riesa in 27 Länder aller Erdteile exportiert, kann man sich vorstellen, daß die Phillumenisten ihre Sammlung mit vielen interessanten Exemplaren vervollständigen können.

(aus: Kurt Gaede: Nur ein Zündholz; Volk und Wissen, Volkseigener Verlag Berlin 1965, Nr. 031854 -1, 1,— M, Schüler ab Kl. 5)

Mathematikfachlehrer *Günther König*, Schalkau/Thür., ein eifriger Sammler, sandte uns Etiketten, die aus der CSSR stammen:

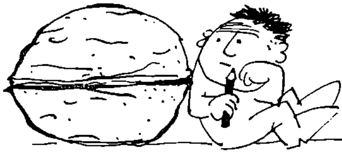
1. u. 2: Zerstört sie nicht! Schützt die geometrischen Meßzeichen! Grundlage für alle Landkarten
3 Bandmaße



4 Meßkluppe 5 Meßgeräte 6 Reißzeuge

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

letzter Einsendetermin 4. November 1968



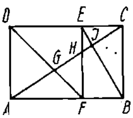
5

261 Eine Strecke $\overline{AD}$ von 168 m Länge wurde in drei Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ so unterteilt, daß die Strecke $\overline{BC}$ dreimal so lang, die Strecke $\overline{CD}$ dagegen viermal so lang wie die Strecke $\overline{AB}$ ist. Ermittle die Längen der Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$!

Martina Schöpf, Leipzig, 24. Oberschule, Kl. 7

262 Fritz hatte aus der Kinderbücherei ein Buch entliehen. Anfangs las er täglich genau 12 Seiten; nach 8 Tagen hatte er die Hälfte des Buches gelesen. Um die Leihfrist einzuhalten, mußte er vom neunten Tage an täglich vier Seiten des Buches mehr lesen. Für wieviel Tage war das Buch an Fritz ausgeliehen worden?

263 Wir stellen euch eine Aufgabe aus der Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 vor:
a) Wieviel Dreiecke sind in dem abgebildeten Rechteck zu finden?
b) Schreibe alle Dreiecke in der folgenden Art auf, z. B. $\triangle ABC, \ldots, \triangle EJC$.



c) Unterstreiche alle Dreiecke, die rechtwinklig sind!
Für die Zeichnung gilt: $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$.

W(5)264 Frau Lehmann wird von einer Bekannten nach dem Lebensalter ihrer drei Kinder gefragt. Hierauf antwortet sie scherzhaft: „Wenn man die Zahlen, die das Lebensalter meiner Kinder in vollen Zahlen angeben, addiert, so erhält man als Summe meine Hausnummer. Wenn man hingegen diese Zahlen miteinander multipliziert, so erhält man als Produkt 24." Die Bekannte, die selbstverständlich die Hausnummer, die eine Primzahl ist, kennt, nennt nach kurzem Überlegen das richtige Lebensalter jedes Kindes. Wie alt sind die Kinder von Frau Lehmann?

Erwin Hellmuth, Magdeburg, Clara-Zetkin-Oberschule, Kl. 9M

W(5)265 Zwischen den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 sind unter Beachtung dieser angegebenen Reihenfolge in beliebiger Weise Zeichen für die vier Grundrechenoperationen oder auch Klammern so zu setzen, daß man als jeweiliges Ergebnis folgende gegebene Zahlen erhält:

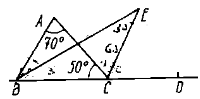
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Beispiel für das Ergebnis 0:
$1 + 3 \cdot 5 - (7 + 9) = 0$.

6

266 Ein Tourist legte am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge des geplanten Wanderweges zurück. Am zweiten Tag hatte der Tourist 12 Kilometer weniger zurückgelegt als am ersten. Wieviel Kilometer Wanderweg schaffte der Tourist jeweils am ersten und zweiten Tag? Wieviel Kilometer verbleiben noch für den dritten Wandertag? Prof. Prinits, Tartu, UdSSR

267 In der nachstehenden Zeichnung liegen die Punkte B, C und D auf einer Geraden; die Gerade BE halbiert den Winkel ABC, die Gerade CE halbiert den Winkel ACD. Die Größe des Winkels BEC ist in Winkelgraden zu berechnen.



H. Büchel, Mathematiklehrer, Zanzibar

268 Steffen findet in einer Kiste fünf Vorhängeschlösser; die zugehörigen fünf Schlüssel sind durcheinander geraten. Wieviel Schließversuche muß Steffen machen, um in jedem Falle mit Sicherheit für jedes der fünf Schlösser den passenden Schlüssel herauszufinden? Wir wissen, daß sich mit jedem Schlüssel nur eines der Schlösser öffnen läßt.

W(6)269 Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner eines echten Bruches beträgt 7. Vergrößert man den Zähler um 1 und vermindert man gleichzeitig den Nenner um 3, so beträgt der Wert des Bruches 4. Wie heißt dieser Bruch?

W(6)270 Gegeben sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen a, $a + 1$, $a + 2$.
a) Zeige, daß unabhängig von der Belegung der Variablen a niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Welche Primzahlen sind bestimmt Teiler einer dieser drei Zahlen?

7

271 Am 120 m hohen Staudamm des Wasserkraftwerkes von Krasnojarsk am Jenissei wird ein Stahlbecken auf Rädern gebaut, damit Binnenschiffe bis zu 2000 t Wasserverdrängung den Staudamm überwinden können. Das Stahlbecken hat die Form eines offenen Quaders, die Seiten der Grundfläche sind 110 m und 25 m lang.
a) Wie hoch steht das Wasser im Becken, wenn es mit 3500 t Wasser gefüllt ist?
b) Auf wieviel Meter Höhe steigt das Wasser im Becken, wenn außerdem noch ein Schiff von 2000 t Wasserverdrängung aufgenommen wird? Dr. R. Lüders, Berlin

272 Ein Güterzug legte in acht Stunden eine Fahrstrecke von 243 km zurück. Der Zug fuhr zunächst eine bestimmte Teilstrecke mit der Durchschnittsgeschwindigkeit von $27\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, den Rest der Fahrstrecke dann mit der Durchschnittgeschwindigkeit von $36 \cdot \text{km}/\text{h}^{-1}$. Wieviel Stunden Fahrzeit entfallen auf die beiden Teilstrecken?

273 Es sind alle rationalen Zahlen m anzugeben, für die die Gleichung $m(x + 2) + 3m - 7 = 2(x + 3) + m^2 + m - 18$ eine Lösung in x hat.

W(7)274 Das Produkt dreier natürlicher Zahlen beträgt 30, die Summe dieser Zahlen ist durch 4 teilbar. Welches sind diese drei Zahlen?
Zusatz: Wie ändert sich die Lösungsmenge dieser Aufgabe durch die zusätzliche Bedingung, daß die kleinste der drei Zahlen Teiler der beiden anderen ist?

W(7)275 Von einem Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind der Winkel $\alpha = 75°$, der Winkel $\beta = 60°$ und die Abstände $m = 35\,\text{mm}$ und $n = 25\,\text{mm}$ des Schnittpunktes S der Diagonalen von den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Vierecks gegeben. Das Viereck $ABCD$ ist zu konstruieren.

Aufgaben von Dozent L. M. Lopowok

(Leiter des Lehrstuhls für Elementarmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts am Pädagogischen Institut Lugansk, UdSSR).

Wir freuen uns, daß wir in diesem Heft eine Reihe von Aufgaben veröffentlichen können, die uns der durch zahlreiche Publikationen zur Elementarmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts bekannte Dozent L. M. Lopowok zugesandt hat. Es handelt sich vor allem um sogenannte *Kryptogramme*, bei denen die Sternchen bzw. Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen sind, so daß richtig gelöste Rechenaufgaben entstehen. Neu ist bei den vorliegenden Aufgaben, daß nicht nur im dekadischen Positionssystem, sondern auch in anderen Positionssystemen gerechnet wird.

8

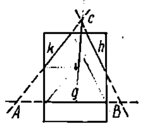
276 In den folgenden Aufgaben ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu ersetzen, so daß richtig gelöste Multiplikationsaufgaben (im dekadischen System) entstehen. Dabei ist zu beachten, daß am Anfang einer Zahl nicht die Ziffer 0 stehen kann.

```
a)  * * * · * 8 *          b)  * * * · * 1 *
          * * * *                    * * 1
          * * *                    * 2 *
      * * * *                  * * 0 *
      * * * * * 5              * * * * 5 *
```

Begründe den Lösungsweg! Doz. L. M. Lopowok

W(8)277 Wasja, Kolja, Petja und Stepa, Schüler der 4., 5., 6. und 7. Klasse, gingen Pilze sammeln. Der Schüler der 6. Klasse fand keinen einzigen Steinpilz, aber der Schüler der 4. Klasse und Petja fanden jeder 8 Steinpilze. Wasja und der Schüler der 5. Klasse fanden viele Rotkappen, Kolja leistete ihnen dabei Gesellschaft. Drei Schüler, nämlich der Schüler der 7. Klasse, der Schüler der 6. Klasse und Kolja, lachten über Stepa, der einen Fliegenpilz gesammelt hatte. Wie heißen die Schüler der 4., 5., 6. bzw. 7. Klasse? Doz. L. M. Lopowok

W(8)278 Unsere Figur stellt die Umrisse eines Zeichenblattes dar, in das drei Geraden g, h und k, die paarweise verschiedene Richtung haben, eingezeichnet sind. Die Schnitt-



punkte A, B und C der Geraden liegen außerhalb des Zeichenblattes. Es ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte unzugänglich sind, zu konstruieren; dabei ist die Konstruktion nur auf dem gegebenen Zeichenblatt auszuführen.
Dr. G. Hesse, Radebeul

9

279 Jemand behauptet, daß die Summe aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Quadrat stets eine gerade Zahl ist. Ist diese Behauptung richtig? Die Antwort ist zu begründen. StR G. Schulze, Herzberg

W(9)280 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung

$$\frac{2x-3}{3x+7} > 0$$

erfüllt ist. StR G. Schulze, Herzberg

W(9)281 In den folgenden Aufgaben ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, so daß richtig gelöste Multiplikationsaufgaben (im dekadischem System) entstehen. Dabei ist zu beachten, daß am Anfang einer Zahl nicht die Ziffer 0 stehen kann. (Von den beiden nun folgenden Aufgaben braucht nur *eine* eingesandt werden, d. Red.)

a)
```
* * * · * * 7
      * 0 *
  * * * *
  * * 0
* * * * * *
```

b)
```
* * * * · * 7 * *
          5 * * *
        * 5 * *
    * * * 5 *
    * * * 5
    4 * * 2 * * *
```

Begründe den Lösungsweg! Doz. L. W. Lopowok

10 **W(10/12)282** Wladimirow, Koslow, Petrow und Stepanow sind Mitglieder je genau einer der Sportgemeinschaften *Avantgarde, Dynamo, Lokomotive* und *Spartak*. Jeder von ihnen betreibt aktiv genau eine der folgenden Sportarten: Schach, Schwimmen, Tennis, Fußball. Es ist ferner folgendes bekannt:

a) Das Mitglied von *Spartak* ist Schachmeister, aber Petrow kann nicht Schach spielen.

b) Während das Mitglied von *Dynamo* auch gern segelt, betreiben der Tennisspieler und Wladimirow nicht den Segelsport.

c) Der Fußballspieler und Petrow wohnen in demselben Haus, Koslow aber wohnt in einer anderen Straße.

d) Der Schachspieler und der Tennisspieler sind alte Freunde des Mitglieds von *Avantgarde*.

e) Koslow und das Mitglied von *Dynamo* sind gleichaltrig, sie sind älter als Petrow.

f) Der Fußballspieler ist nicht mit dem Mitglied von *Dynamo* verwandt.

Welcher Sportgemeinschaft gehört jeder der vier Sportler an, und welchen Sport betreibt er aktiv?

Unter der Darstellung einer Zahl z im *dekadischen* Positionssystem verstehen wir die uns gewohnte Darstellung
$z = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$, wo die a_i natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 9$ sind; z. B. $z = 10^4 \cdot 7 + 10^3 \cdot 2 + 10^2 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 6 = (72516)_{10}$; meistens läßt man die Klammern und den Index 10 weg und schreibt $z = 72516$.

Unter der Darstellung einer Zahl z im 6-*adischen* Positionssystem verstehen wir die Darstellung
$z = 6^n a_n + 6^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 6^2 a_2 + 6 a_1 + a_0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_6$, wo die a_i natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 5$ sind; z. B. $z = 6^3 \cdot 4 + 6^2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 1 = (4251)_6$; wegen $z = 216 \cdot 4 + 36 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 1 = 967$ lautet die Darstellung dieser Zahl z im dekadischen Positionssystem $(967)_{10}$ oder kurz 967.

Bei der *Addition* im 6-adischen Positionssystem rechnen wir wie folgt und lassen dabei die Klammern mit dem Index 6 wieder weg:

```
  4251
+ 1043
  5334
```
denn im 6-adischen Positionssystem ist $1 + 3 = 4$, $5 + 4 = 13$, $2 + 1 = 3$, $4 + 1 = 5$.

Zum Abschluß noch ein Beispiel aus dem 8-*adischen* Positionssystem:
$z = 8^3 \cdot 2 + 8^2 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 5 = (2315)_8$;

```
  2315
+ 2315
  4632
```
Nun wünschen wir euch viel Erfolg bei der Lösung der Aufgaben.

W(10/12)283 In den folgenden Aufgaben soll jeder Buchstabe durch eine Grundziffer ersetzt werden, so daß in dem jeweiligen Positionssystem richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen. Dabei ist die Zuordnung zwischen den Buchstaben und Ziffern eineindeutig, d. h., gleiche Buchstaben in der jeweiligen Aufgabe entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern. Die Ziffer 0 darf nicht am Anfang einer Zahl stehen. (Es braucht von den nun folgenden vier W-Aufgaben nur *eine* eingesandt zu werden, d. Red.)

a) Im *dekadischen* Positionssystem sei
```
  W O C H E
+ W O C H E
+ W O C H E
+ W O C H E
  M O N A T
```

b) Im *6-adischen* Positionssystem sei
```
  Z W E I
+ Z W E I
  V I E R
```

c) Im *7-adischen* Positionssystem sei
```
  F Ü N F
+ F Ü N F
  Z E H N
```

d) Im *8-adischen* Positionssystem sei
```
  D R E I
+ D R E I
+ D R E I
  N E U N
```

Begründe den Lösungsweg!

Doz. L. M. Lopowok

284 Für die folgenden Personen sollen verschlüsselte Visitenkarten geschrieben werden, so daß in dem jeweiligen Positionssystem die Summe der Vornamen den Nachnamen ergibt. Dabei ist die Zuordnung zwischen den Buchstaben und Ziffern wieder eineindeutig d. h., gleichen Buchstaben in der jeweiligen Aufgabe entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

a) Im dekadischen Positionssystem
```
  A N N A
 L U I S A
N E I R U T
```

b) Im 7-adischen Positionssystem
```
 K U R T
 K A R L
T R A N K
```

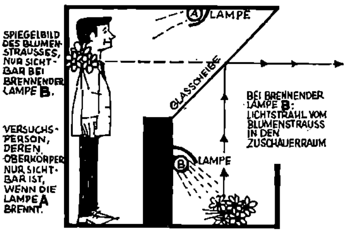
c) Im 8-adischen Positionssystem
```
   K A R L
 G E O R G
 L O K E R
```

Doz. L. W. Lopowok

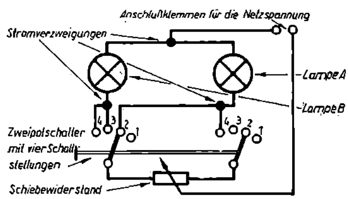
Lösungen

Hinter die Kulissen geschaut ...

Das unter dieser Überschrift in alpha 1/68 beschriebene Verwandlungskunststück beruht auf dem Reflexionsgesetz an einer ebenen spiegelnden Fläche, also an einem ebenen Spiegel, einer ruhenden Wasseroberfläche, einer Glasplatte u. s. f.: Die Verbindungsstrecke eines punktförmigen Gegenstandes und seines scheinbaren Bildes steht auf der reflektierenden Fläche senkrecht und wird von dieser halbiert.
Jörg fertigte sich von dem Kasten folgende Zeichnung an, die durch einige erläuternde Bemerkungen ergänzt worden ist: Jörg zeichnet die Phase der Rückverwandlung, in der die Versuchsperson und der Blumenstrauß



ineinander verschwommen sichtbar sind. Zu dieser Zeit brennen, wie die folgende Betrachtung zeigt, beide Lampen A und B gleichzeitig, jedoch nicht mit voller Lichtstärke.
Auch ein den Erfordernissen genügendes Schaltschema der elektrischen Anlage des Zauberkastens sei mit entsprechenden Hinweisen angegeben:



Bei der Schalterstellung 1 ist die Anlage abgeschaltet. Bei der Schalterstellung 2 brennt, sofern sich der Abgriff des Schiebewiderstandes laut Zeichnung ganz links befindet, die Glühlampe A. Bei Schalterstellung 3 brennt, sofern der Abgriff des Schiebewiderstandes sich wiederum in dieser Stellung befindet, die Glühlampe B. Bei der Schalterstellung 4 schließlich fließt Strom durch beide Glühlampen. Befindet sich bei dieser Schalterstellung der Abgriff des Schiebewiderstandes immer noch in der betrachteten Stellung, so brennt nur die Glühlampe B, weil an ihr die volle Netzspannung 220 Volt liegt, mit voller Lichtstärke. Hingegen teilen sich die Glühlampe A und der jetzt mit ihr in Reihe geschaltete Schiebewiderstand entsprechend ihren Widerständen in die Netzspannung. Die Größe des Schiebewiderstandes ist so gewählt, daß bei der jetzigen Schaltstellung die Glühlampe A überhaupt nicht brennt, weil an ihr ein zu kleiner Teil der Netzspannung liegt, um sie zum Aufleuchten zu bringen. Schiebt man den Abgriff des Schiebewiderstandes nach rechts, so verringert sich die Spannung, die an der Glühlampe B liegt und es wächst die Spannung, die an der Glühlampe A liegt. Die Glühlampe B brennt schwächer und die Glühlampe A flammt auf. Je weiter man den Abgriff nach rechts schiebt, um so schwächer brennt die Glühlampe B und um so heller die Glühlampe A. Befindet sich schließlich der Abgriff in der rechten Endstellung, so ist die Glühlampe B erloschen und die Glühlampe A brennt mit voller Lichtstärke.

195 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Asser

a) Zur Berechnung von $\alpha(4,3)$ und $\beta(4,3)$ ermitteln wir zunächst $\alpha(7,0)$. Wenn es 7 Gewinner eines 1. Platzes und 0 Gewinner eines 2. Platzes gibt, erhält jeder Gewinner eines 1. Platzes ein Siebentel des Gesamtbetrages M, d. h.

$$\alpha(7,0) = \frac{M}{7} = 32{,}40. \tag{1}$$

Haben wir nun 6 Gewinner eines 1. Platzes und 1 Gewinner eines 2. Platzes, so erhält letzterer ein Drittel dessen, was er erhalten hätte, wenn er einen 1. Platz erreicht hätte. Wäre dieses der Fall gewesen, so hätte es 7 Gewinner eines 1. Platzes gegeben, von denen nach (1) jeder 32,40 Mark erhalten hätte. Im betrachteten Fall erhält also der Gewinner des 2. Platzes den Betrag

$$\beta(6,1) = \frac{1}{3}\alpha(7,0) = 10{,}80. \tag{2}$$

Mittels (2) können wir nun $\alpha(6,1)$ berechnen:

$$\alpha(6,1) = \frac{1}{6}(M - \beta(6,1)) = 36{,}00; \tag{3}$$

denn jeder der 6 Gewinner eines 1. Platzes erhält ein Sechstel des Betrages, der vom Gesamtbetrag M nach Subtraktion der Auszahlung $\beta(6,1)$ an den Gewinner des 2. Platzes verbleibt. Analog wie (2) erhält man:

$$\beta(5,2) = \frac{1}{3}\alpha(6,1) = 12{,}00 \tag{4}$$

und hiernach wird

$$\alpha(5,2) = \frac{1}{5}(M - 2\beta(5,2)) = 40{,}56 \tag{5}$$

(jeder der 5 Gewinner eines 1. Platzes erhält ein Fünftel des Betrages, der vom Gesamtbetrag M nach Subtraktion der Auszahlung $2\beta(5,2)$ an die beiden Gewinner des 2. Platzes verbleibt). Nach demselben Verfahren erhält man schließlich:

$$\beta(4,3) = \frac{1}{3}\alpha(5,2) = 13{,}52 \; (= \beta(a,b)) \tag{6}$$

$$\alpha(4,3) = \frac{1}{4}(M - 3\beta(4,3)) = 46{,}56 \; (= \alpha(a,b)). \tag{7}$$

b) Zur Aufstellung einer allgemeinen Formel für $\alpha(a,b)$ und $\beta(a,b)$ gehen wir analog wie im Fall a) vor. Wir beginnen mit

$$\alpha(a+b,0) = \frac{M}{a+b}. \tag{1}$$

Hieraus folgt:

$$\beta(a+b-1{,}1) = \frac{1}{3}\,\alpha(a+b,0) = \frac{M}{3(a+b)} \tag{2}$$

und

$$\alpha(a+b-1{,}1) = \frac{1}{a+b-1}\left(M - 1\cdot\beta\,(a+b-1{,}1)\right)$$
$$= \left[\frac{1}{a+b-1} - \frac{1}{3(a+b-1)(a+b)}\right]\cdot M \tag{3}$$

und weiter

$$\beta(a+b-2{,}2) = \frac{1}{3}\,\alpha(a+b-1{,}1)$$
$$= \left[\frac{1}{3(a+b-1)} - \frac{1}{3^2(a+b-1)(a+b)}\right]\cdot M \tag{4}$$

sowie

$$\alpha(a+b-2{,}2) = \frac{1}{a+b-2}\left(M - 2\cdot\beta\,(a+b-2{,}2)\right)$$
$$= \left[\frac{1}{a+b-2} - \frac{2}{3(a+b-2)(a+b-1)} + \frac{2\cdot 1}{3^2(a+b-2)(a+b-1)(a+b)}\right]\cdot M \tag{5}$$

usw. Setzt man dieses Verfahren hinreichend lange fort (bis nämlich im ersten Argument $a+b-b$ und im zweiten Argument b steht), so erhält man:

$$\beta(a,b) = \left[\frac{1}{3(a+1)} - \frac{b-1}{3^2(a+1)(a+2)} + \frac{(b-1)(b-2)}{3^3(a+1)(a+2)(a+3)} \mp \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{b-1}\frac{(b-1)(b-2)\cdots 1}{3^b(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\right]\cdot M \tag{B}$$

und

$$\alpha(a,b) = \frac{1}{a}\left(M - b\cdot\beta(a,b)\right)$$
$$= \left[\frac{1}{a} - \frac{b}{3a(a+1)} + \frac{b(b+1)}{3^2a(a+1)(a+2)} \mp \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^b\frac{b(b-1)\cdots 1}{3^b a(a+1)\cdots(a+b)}\right]\cdot M. \tag{A}$$

Unter Verwendung des Summenzeichens und der Funktion $n!$ (gelesen: n Fakultät), die definiert ist durch: $0! = 1$ und $n! = 1\cdot 2\ldots n$ für $n > 0$, kann man die Formeln (A) und (B) in „geschlossener Form" schreiben als:

$$\alpha(a,b) = \left[(a-1)!\,b!\sum_{i=0}^{b}\frac{(-1)^i}{3^i(a+i)!\,(b-i)!}\right]\cdot M \tag{A}$$

$$\beta(a,b) = \left[a!\,(b-1)!\sum_{i=1}^{b}\frac{(-1)^{i-1}}{3^i(a+i)!\,(b-i)!}\right]\cdot M. \tag{B}$$

Einen exakten Beweis hierfür erhält man durch vollständige Induktion über b. Man zeigt also

1. (A) gilt für $b = 0$ bei beliebigem $a \geqq 1$ und (B) gilt bei $b = 1$ bei beliebigem $a \geqq 1$ (Anfangsschritt).
2. Gelten (A) und (B) für $b = k$ bei beliebigem $a \geqq 1$ (Induktionsvoraussetzung), so gelten (A) und (B) auch für $b = k + 1$ bei beliebigem $a \geqq 1$.

Wir empfehlen, die Formeln (A) und (B) einmal auf das unter a) berechnete Beispiel anzuwenden.

196 Es gibt 9 von Null verschiedene einstellige, 90 zweistellige, 900 dreistellige natürliche Zahlen. Die erste Ziffernfolge hat folglich $9 + 2\cdot 90 + 3\cdot 900 + 4 = 2893$ Ziffern. Wir betrachten nun die Zahlen von 1 bis 10000. Es gibt dabei genau 1000 Zahlen, deren letzte Ziffer Null ist (10, 20, 30, ..., 10000). Indem wir bei allen Zahlen von 10 bis 1000 zwischen die letzte und die vorletzte Ziffer eine Null setzen, erhalten wir alle Zahlen, deren vorletzte Stelle Null ist, das heißt 991. Analog gibt es 901 Zahlen, deren drittletzte Ziffer Null ist und eine Zahl, deren viertletzte Ziffer Null ist. Insgesamt mußte er also $1000 + 991 + 901 + 1 = 2893$, das heißt genausoviel Nullen schreiben wie in der ersten Folge Ziffern.

W(5)197 Jede Prämienstufe war mindestens einmal vertreten, das heißt, es gibt einen Arbeiter, der 200 M erhielt, einen, der 300 M erhielt usw., also vier Arbeiter, die zusammen 1400 M erhielten. Für die anderen elf Beschäftigten bleiben 1100 M, das heißt, keiner von ihnen bekam mehr als 100 M. Folglich erhielten elf Beschäftigte je 100 M.

198 Die beiden gleichen Winkel seien α, der dritte sei γ. Aus $2\alpha + \gamma = 180°$ und $\gamma = 4\cdot(2\alpha)$ folgt $\alpha = 18°$ und $\gamma = 144°$. Das Dreieck hat zwei Winkel von je 18° und einen von 144°.

W(6)199 Es waren x Personen anwesend, davon

$\frac{1}{2}x + 1$ Kinder, $\frac{1}{4}x + 2$ Frauen und $\frac{1}{6}x + 3$ Männer.

$\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{4}x + 2 + \frac{1}{6}x + 3 = x$, also $x = 72$.

Es waren 37 Kinder, 20 Frauen und 15 Männer zur Uraufführung des Puppenspiels gekommen.

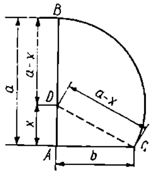
200 Bei einer Umdrehung der Tretkurbel legt der Radfahrer den Weg $s = \frac{46}{16}\cdot\pi\cdot 0{,}70\text{ m} \approx 6{,}325\text{ m}$ zurück: $120000 : 6{,}32 \approx 19000$.

Auf einer Strecke von 120 km müssen die Pedalen rund 19000mal durchgetreten werden.

W(7)201 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien a, $a+1$, $a+2$; dann gilt:
$a(a+1)(a+2) = 21[a+(a+1)$
$+(a+2)] = 21(3a+3)$;
$a(a+1)(a+2) = 63(a+1)$.
Da $a+1 \neq 0$ ist, erhalten wir $a(a+2) = 63$. Da a und $a+2$ natürliche Zahlen sind, müssen $a = 7$ und $a+2 = 9$ sein. Die gesuchten Zahlen lauten 7, 8 und 9.
$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$;
$21(7+8+9) = 21 \cdot 24 = 504$.

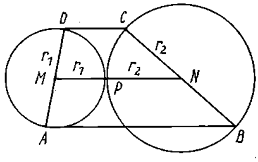
202 D ist der Mittelpunkt für einen Kreis mit dem Radius $\overline{BD} = \overline{CD} = a - x$.

$$(a-x)^2 = x^2 + b^2,$$
$$a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + b^2,$$
$$a^2 - 2ax = b^2,$$
$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$



Für die gegebenen Zahlenwerte gilt:
$$x = \frac{3100^2 - 2700^2}{2 \cdot 3100}\,\text{mm} = \frac{23200}{62}\,\text{mm},$$
d. h., $\overline{AD} = x \approx 374$ mm.

W(8)203 Aus der Figur entnehmen wir folgendes:
Die Strecke $\overline{MN}$ ist Mittellinie des Trapezes, also gilt $\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$; ferner gilt $\overline{MN} = r_1 + r_2 = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$.
Daraus folgt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.



204 Wir nehmen an, Fritz habe x Zehn-, y Fünf- und z Einpfennigstücke in seiner Geldbörse; es ergeben sich die beiden Gleichungen $10x + 5y + z = 112$ und $x + y + z = 40$.
Nach Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir $9x + 4y = 72$ oder umgeformt $9x = 4(18 - y)$.
Da die linke Seite der Gleichung durch 9 teilbar ist, muß es auch die rechte sein (da nur ganzzahlige Lösungen in Frage kommen). Da y nicht gleich Null sein soll, muß es 9 sein. Demnach ist $x = 4$ und $z = 27$. Fritz hat also 4 Zehnpfennigstücke, 9 Fünfpfennig- und 27 Einpfennigstücke.

W(9)205 Aus Satz 6 und Satz 4 folgt: Herr Altmann unterrichtet Biologie. Aus Satz 3 und Satz 7 und Satz 6 folgt: Herr Brendel unterrichtet nicht die Fächer Mathematik, Chemie, Biologie und Physik; also unterrichtet er die Fächer Deutsch und Geschichte. Somit muß der Physiklehrer Herr Clausner sein. Aus Satz 5 folgt, daß Herr Clausner nicht Mathematik unterrichtet, also verbleibt für ihn nur das Fach Chemie. Herr Altmann unterrichtet also noch im Fach Mathematik.

206 Wir nehmen an, es seien zunächst x Stühle aufgestellt worden, es seien ferner k Kongreßteilnehmer erschienen.
Aus $k = 2x - \frac{2x}{12} = \frac{11x}{6}$ und der Einschränkung, daß $90 < x < 100$ gilt und k eine natürliche Zahl sein muß, folgt $x = 96$ und $k = 176$. Es hatten sich 176 Mitglieder zum Jahreskongreß eingefunden.

W(10/12)207 Die Quersumme der Zahl A übertrifft nicht $1966 \cdot 9 = 17694$, das heißt, die Zahl B ist nicht mehr als fünfstellig. C ist die Quersumme der Zahl B und übertrifft nicht $5 \cdot 9 = 45$. Weil die Zahl A durch 9 teilbar ist, ist nach den Teilbarkeitsregeln sowohl die Zahl B als auch die Zahl C durch 9 teilbar. Ferner sind die Zahlen B und C von Null verschieden, weil A als 1966-stellige Zahl von Null verschieden ist. Doch eine von Null verschiedene natürliche Zahl, die nicht 45 übertrifft und durch 9 teilbar ist, kann nur eine von den Zahlen 45, 36, 27, 18 und 9 sein. In jedem Falle ist die Quersumme der Zahl C gleich 9.

215 Aus $200:6 = 33\frac{1}{3}$ folgt, daß zur Herstellung eines Stutzens eine Blechplatte von 100 cm Länge und $33\frac{1}{3}$ cm Breite zur Verfügung steht. Es gibt nun zwei Möglichkeiten für die Herstellung eines Stutzens:
a) $100 - 1{,}5 = 98{,}5$ d. h., der Umfang des Rohres beträgt 98,5 cm; dann beträgt der Durchmesser $d = 98{,}5 : \pi \approx 31{,}36$ cm.
b) $33\frac{1}{3} - 1{,}5 = 31\frac{5}{6}$, d. h., der Umfang des Rohres beträgt $31\frac{5}{6}$ cm; dann beträgt der Durchmesser $d = 31\frac{5}{6} : \pi \approx 10{,}13$ cm.

W(7)216 $A:B = 2:6$, $B:C = 6:4$, $C:D = 4:13$; $A:B:C:D = 2:6:4:13$;
$2 + 6 + 4 + 13 = 25$; $10000:25 = 400$.
Der Behälter A hat einen Rauminhalt von 800 Litern,
der Behälter B hat einen Rauminhalt von 2400 Litern,
der Behälter C hat einen Rauminhalt von 1600 Litern,
der Behälter D hat einen Rauminhalt von 5200 Litern.

217 Ist x die Maßzahl des Durchmessers (in cm) des Meßzylinders, so ist $2x$ die Maßzahl seiner Höhe. Man erhält für die Maßzahl des Volumens (in cm³):
$$V = \frac{\pi}{4}x^2 \cdot 2x = 5000.$$ Daraus folgt
$$x^3 = \frac{10000}{\pi} \approx 3183, \quad x \approx 14{,}7,$$
$$2x \approx 29{,}4.$$
Der Eichstrich muß daher in einer Höhe von 29,4 cm, d. s. rund 30 cm, über dem Boden angebracht werden.

W(8)218 Die Masse der Legierung beträgt $M = 57{,}5\ \mathrm{g} + 114{,}0\ \mathrm{g} = 171{,}5\ \mathrm{g}$. Das Volumen der Legierung beträgt

$$V = \frac{57{,}5}{11{,}34}\ \mathrm{cm}^3 + \frac{114{,}0}{7{,}28}\ \mathrm{cm}^3$$

$\approx 5{,}07\ \mathrm{cm}^3 + 15{,}66\ \mathrm{cm}^3 = 20{,}73\ \mathrm{cm}^3$.
Daher beträgt die Dichte der Legierung

$$\varrho = \frac{M}{V} \approx \frac{171{,}5}{20{,}73}\ \mathrm{g/cm^3} \approx 8{,}27\ \mathrm{g/cm^3}$$

$\approx 8{,}27\ \mathrm{kg/dm^3}$.

219 Die Maßzahl der Grundfläche (in cm²) des Prismas beträgt

$$G = 12 \cdot 7 - \frac{10 \cdot 4{,}5}{2} = 84 - 22{,}5 = 61{,}5.$$

Da die Maßzahl der Höhe (in cm) des Prismas $h = 25$ beträgt, ist die Maßzahl seines Volumens

$$V = G \cdot h = 61{,}5 \cdot 25 = 1537{,}5.$$

Daher ist die Masse des prismatischen Werkstückes

$$1537{,}5 \cdot 7{,}3\ \mathrm{g} \approx 11\,200\ \mathrm{g} = 11{,}2\ \mathrm{kg}.$$

W(9)220 Die Maßzahl des Volumens (in mm³) des ursprünglichen Zylinders beträgt

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 80^2 \cdot 650. \qquad (1)$$

Die Maßzahl des Volumens des neuen Zylinders beträgt

$$V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot 75^2 \cdot 650. \qquad (2)$$

Man erhält

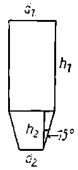
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{75^2}{80^2} = \frac{5625}{6400} \approx \frac{87{,}89}{100}. \qquad (3)$$

Zur weiteren Berechnung wird nun die Angabe der Dichte des Stahls nicht benötigt, da bei gleicher Dichte zweier Körper sich ihre Massen wie ihre Volumina verhalten. Die Masse des neuen Zylinders beträgt nur 87,89% der Masse des ursprünglichen Zylinders; die Materialeinsparung beträgt daher 12,11%, d. s. rund 12%.
Da beide Wellen die gleiche Länge (650 mm) haben, ist auch die Angabe der Länge überflüssig; denn der Quotient $\frac{V_2}{V_1}$ (vgl. Gleichung (3)) hängt nicht von dieser Länge ab.

221 Es seien jeweils die Maßzahlen (in cm) $d_1 = 25$ für den Durchmesser des zylindrischen Teils, $h_1 = 50$ für die Höhe des zylindrischen Teils, d_2 für den Durchmesser der unteren Grundfläche des kegelstumpfförmigen Teils, $h_2 = 25$ für die Höhe des kegelstumpfförmigen Teils. Dann gilt

$$\tan 15^\circ = \frac{\frac{d_1 - d_2}{2}}{h_2}, \text{ also } d_1 - d_2 = 2 h_2 \tan 15^\circ$$

$\approx 50 \cdot 0{,}2679 \approx 13{,}40$, d. h.,
$d_2 \approx d_1 - 13{,}40 \approx 11{,}60$.



Daher gilt für die Maßzahl des Volumens (in cm³) des Behälters:

$$V = \frac{\pi}{4} d_1^2 h_1 + \frac{\pi}{12} h_2 (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

$$\approx \frac{\pi}{4} \cdot 25^2 \cdot 50 + \frac{\pi}{12} \cdot 25\,(25^2 + 25 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2)$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\left(31\,250 + \frac{25 \cdot 1050}{3}\right) \approx \frac{\pi}{4} \cdot 40\,000$$

$\approx 10\,000\,\pi \approx 31\,400$.

Das Volumen des Behälters beträgt daher 31400 cm³, d. s. 31,4 l.

W(10/12)222 a) Die Maßzahl des Volumens (in m³) des Behälters ist

$$V = \pi \cdot 0{,}8^2 \cdot 2{,}7 + 2 \cdot \frac{2}{3}\,\pi \cdot 0{,}8^3$$

$$= \pi\left(1{,}728 + \frac{4}{3} \cdot 0{,}512\right) \approx 2{,}411\,\pi \approx 7{,}57.$$

Das Volumen beträgt daher rund 7,57 m³.

b) Die Maßzahl der Oberfläche (in m²) ist
$O = \pi \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}7 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0{,}8^2$
$= \pi(4{,}32 + 2{,}56) = 6{,}88\,\pi \approx 21{,}61$.

Die Oberfläche beträgt daher rund 21,61 m².

c) Ist x die Maßzahl des Radius (in m) eines kugelförmigen Behälters von dem gleichen Volumen wie unter a), so gilt

$$\frac{4}{3}\pi x^3 \approx 7{,}57, \qquad x^3 \approx \frac{7{,}57}{4{,}189} \approx 1{,}807,$$

$x \approx 1{,}22$.

Der Durchmesser des kugelförmigen Behälters beträgt daher rund 2,44 m. Ferner beträgt die Oberfläche

$$O' \approx 4\pi \cdot 1{,}22^2\ \mathrm{m}^2 \approx 18{,}70\ \mathrm{m}^2.$$

d) Die Oberfläche ist im Falle c) kleiner als im Fall b), weil unter allen geometrischen Körpern von gleichem Volumen die Kugel die kleinste Oberfläche hat. Aus diesem Grund stellt man in der Industrie bei stationären Anlagen häufig kugelförmige Behälter her, weil dann die Oberfläche und damit der Materialverbrauch am geringsten ist.

Lösungen zu: Zahlenrätsel von Th. Scholl:

228 Aus I folgt $d = 0$; aus C folgt $e = 1$; aus I folgt $a = 2$; aus A folgt $b = 5$; aus C folgt $h = 9$; aus III folgt $c = 7$; aus I folgt $f = 8$; aus II folgt $g = 4$.

$$\begin{array}{ccccc} 252 & - & 70 & = & 182 \\ : & & + & & - \\ 12 & \cdot & 7 & = & 84 \\ \hline 21 & + & 77 & = & 98 \end{array}$$

229 Aus II folgt $c = 1$; aus C folgt $e = 3$ (denn $e \neq 2$, da $d \neq 1$); aus C folgt $d = 2$; aus A folgt $b = 5$ und $a = 4$; aus II folgt $f = 8$; aus C folgt $g = 6$.

$$\begin{array}{ccccc} 455 & - & 112 & = & 343 \\ : & & + & & - \\ 13 & \cdot & 14 & = & 182 \\ \hline 35 & + & 126 & = & 161 \end{array}$$

Vignette: $1368:24 = 57$; $168 + 39 = 207$; $1200 - 936 = 264$.

230 Nach b), a) und d) ist Herr Hahn weder Elektriker noch Ingenieur; also ist er Monteur.
Aus a) folgt, daß der Ingenieur nicht Baumann heißt. Demnach muß er Eichler und der Elektriker Baumann heißen.

231 a) 364 Stück. Denn es werden täglich 14 Stück hergestellt. Bei 26 Arbeitstagen ergibt das wegen $26 \cdot 14 = 364$ monatlich 364 Stück.
b) In den bis zum Jahresende verbleibenden 6 Monaten werden täglich 2 Stück mehr hergestellt. Bei 26 Arbeitstagen pro Monat ergibt das 312 Stück, die bis Jahresende über den Plan hinaus produziert werden; denn es ist $26 \cdot 6 \cdot 2 = 312$.

232 a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 36 Flächeneinheiten, wenn man den Inhalt eines Quadrates als Einheit nimmt. Die Länge jeder Rechteckseite muß infolge der Konstruktion ein ganzzahliges Vielfaches der Länge einer Quadratseite sein. Daher gibt es die folgenden fünf Möglichkeiten:

1. Rechteck: Länge 1, Breite 36, Umfang 74 Einheiten;
2. Rechteck: Länge 2, Breite 18, Umfang 40 Einheiten;
3. Rechteck: Länge 3, Breite 12, Umfang 30 Einheiten;
4. Rechteck: Länge 4, Breite 9, Umfang 26 Einheiten;
5. Rechteck: Länge 6, Breite 6, Umfang 24 Einheiten der Länge.

b) Unter diesen Rechtecken hat das 5. Rechteck (Quadrat) den kleinsten Umfang.

235 Man zieht durch den Scheitelpunkt des Winkels die Parallele zu g. Es gilt dann $\gamma = \alpha + \beta$ (Wechselwinkel an Parallelen).

236 Bezeichnet man die Schülerzahl mit s, so gilt auf Grund der ersten Bedingung:

$$26 \leqq s < 38.$$

Da die mit 5 multiplizierte Schülerzahl durch 6 teilbar ist, muß die Schülerzahl selbst durch 6 teilbar sein. Es können daher nur 30 oder 36 Schüler sein. Von diesen beiden Zahlen erfüllt die 30 und nur die 30 sämtliche Bedingungen.
Die Klasse besteht demnach aus 30 Schülern.
Die Quersumme von 30 beträgt 3, die von $30 \cdot 5$ beträgt 6.

237 Bezeichnet man die Anzahl der im Januar produzierten Tische mit x, so kann man folgende Aufstellung anfertigen:

Monat	Anzahl d. prod. Tische
Januar	x
Februar	$x + 10$
März	$x + 20$
April	$x + 30$
.	.
.	.
.	.
Dezember	$x + 110$
	$12x + 660$

Wäre die Produktion nicht gesteigert worden, d. h., wäre in jedem Monat die gleiche Anzahl wie im Januar produziert worden, so hätte die Anzahl der im ganzen Jahre produzierten Tische $1920 - 660 = 1260$ betragen. Die Anzahl der im Januar angefertigten Tische beträgt also $1260:12 = 105$ und daher die der im Juni hergestellten Tische $105 + 50 = 155$ und die der im Dezember fabrizierten Tische $105 + 110 = 215$.

240 Für R und N kommt nur 0 und 9 oder umgekehrt 9 und 0 in Frage. Wenn N gleich 0 wäre, entstünde kein Übertrag, so daß R auch 0 sein müßte, was der Voraussetzung, daß verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bezeichnen sollen, widerspricht. Wenn N gleich 9 wäre, entstünde ein Übertrag von 1 und R müßte ebenfalls 9 sein, was der Voraussetzung, daß verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bezeichnen sollen, widerspricht. Es kann also keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung geben.

241 Die Anzahl n muß ein Vielfaches von 9, von 6 und von 3, d. h., ein Vielfaches von 18 sein.
Wegen $20 < n < 40$ kommt nur 36 in Frage.

Zensur	1	2	3	4	5
Schüler	4	12	14	6	—

242 a) Man verknüpft die Seilenden miteinander, legt diesen Knoten auf den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels und spannt mit dem Seil mit Hilfe der Fluchtstäbe ein Dreieck so auf, daß zwei seiner Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen. Die beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks werden durch Knoten markiert. An der gewünschten Stelle läßt sich dann mit drei Fluchtstäben und dem Seil ein kongruentes Dreieck aufspannen und damit der Winkel übertragen.
b) Man schlägt mit einem Teil des Seiles (etwa der Hälfte, da der Winkel größer als 60° ist) um den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneidet, und überträgt einen Kreisbogen, der einen gleichgroßen Radius hat, an die gewünschte Stelle. Dann markiert man auf dem Seil die Länge der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Sehne und überträgt diese analog der geometrischen Konstruktion ebenfalls an die gewünschte Stelle.

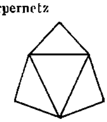
245 Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muß sie wegen $8 \cdot 9 = 72$ auch durch 8 und 9 teilbar sein. Um die fehlenden Ziffern zu ersetzen, wendet man die Teilbarkeitsregeln der 8 und der 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. 78* muß also durch 8 teilbar sein. Es ist $720:8 = 90$. Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muß die letzte Ziffer 4 sein.
Um die erste Ziffer zu erhalten, wende man die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Daher kann nur die Zahl 53784 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Da sie tatsächlich durch 72 teilbar ist, erhält man so die Lösung.

246 Peter muß den Inhalt der gekauften Flaschen vom Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Fl. bezahlen. Wegen $180:21 = 8\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Fl. gekauft haben.

1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.
2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück. Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n - 5)$ statt nur $(n - 6)$, was der Aufgabe widerspricht.

247 a) Ein von einem Tetraeder begrenzter Körper, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt bei geeigneter Lage zu den Projektionsebenen einen derartigen Grund-, Auf-, und Kreuzriß.

b) Körpernetz



250 1. Voraussetzung: Führt man Bezeichnungen und Variable für die Längen ein, wie in der nebenstehenden Figur angegeben, so gilt:

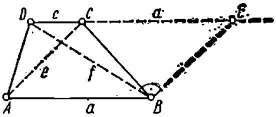
(1) $AB \parallel DC$, (2) $AC \perp DB$,

(3) $BE \parallel AC$.

2. Behauptung: $e^2 + f^2 = (a + c)^2$

3. Beweis: Wegen (2) und (3) ist

$\sphericalangle \overline{DBE} = 90°$.



Weiter ist wegen (1) und (3) $\overline{CE} = \overline{AB} = a$. Im rechtwinkligen Dreieck DBE gilt dann wegen des Satzes des Pythagoras, weil wegen (1) und (3) $\overline{AC} \triangleq \overline{BE} = e$ ist, die Behauptung, w. z. b. w.

251 *1. Fall* Angenommen, die Aussage 1 sei wahr. Dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch. Also hätte Brigitte den Ball. Das steht aber in Widerspruch zu der Aussage 1, da nicht zwei Schülerinnen den Ball haben können.

2. Fall Angenommen, die Aussage 2 sei wahr, d. h., Brigitte hat den Ball nicht. Dann sind die Aussagen 1 und 3 falsch. Also hat Claudia die Schere, Anna den Ball nicht. Also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt.

3. Fall Angenommen, die Aussage 3 sei wahr. Dann sind die Aussagen 1 und 2 falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia hat den Bleistift und Anna hat die Schere.

252 a) Wenn p die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um 0,2 p. 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um 1,5 p.

Daraus folgen: 60% $\triangleq$ 30 Arbeiter

100% $\triangleq$ 50 Arbeiter.

In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.

b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, läßt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern!

255 Bezeichnet man die Abschnitte der einen Diagonale mit a und b, die der anderen mit c und d und den Winkel zwischen a und c mit β, so erhält man für die Flächen der vier Dreiecke:

$$F_1 = 0{,}5\, ac \cdot \sin \beta,$$
$$F_2 = 0{,}5\, ad \cdot \sin (180 - \beta),$$
$$F_3 = 0{,}5\, bd \cdot \sin \beta,$$
$$F_4 = 0{,}5\, bc \cdot \sin (180 - \beta).$$

Aus $F_1 = F_2$ folgt $c = d$, und aus $F_1 = F_3$ folgt $a = b$. Das heißt, die Diagonalen halbieren einander, es liegt ein Parallelogramm vor. Umgekehrt folgt, daß die Flächen der vier Dreiecke gleich sind, wenn die Diagonalen einander halbieren.

256 Angenommen, es gibt eine solche Zahl, so daß für

$a, b \in N$

$a, b < 10$

$a \neq 0$ die Gleichung

$10a + b = a + b^2$ gilt, dann muß

$9a = b(b - 1)$

$a = \dfrac{b(b-1)}{9}$ sein.

Wegen $a \in N$ und weil b und $(b - 1)$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muß entweder b oder $(b - 1)$ durch 9 teilbar sein. Wegen $b < 10$ und $a \neq 0$ kann $(b - 1)$ nicht durch 9 teilbar sein. Also muß b durch 9 teilbar sein, und wegen $a \neq 0$ und $b < 10$ folgt, daß $b = 9$ und $a = 8$ sein müssen. Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen.

257 Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunahmen bezeichnet. Für unbekannte Namen sei X, Y und Z gesetzt. Dann ergibt sich wegen c) folgender Sachverhalt: BX, XY, YD. Wäre $X = D$, so müßte auch $Y = D$ sein. Dann bliebe für die beiden anderen Personen nur die Kombination AC, CA übrig, was wegen b) ausgeschlossen ist. Daher ist $X \neq D$ und wegen a) gilt $X \neq B$, $Y \neq D$. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin $Y \neq B$ gilt, ist wegen b) nur $X = A$, $Y = C$, $Z = B$ möglich. Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

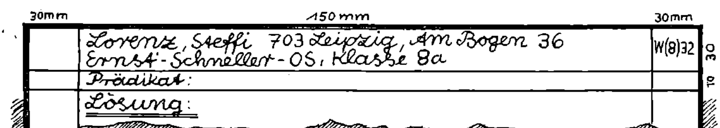
Lösungen zu alpha + mathe = heiter (3/68)

Mehrere Lösungen, z. B.

$$\begin{array}{r} 58015 \\ +\ 65412 \\ \hline 123427 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67016 \\ +\ 56412 \\ \hline 123428 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43014 \\ +\ 84512 \\ \hline 127526 \end{array}$$

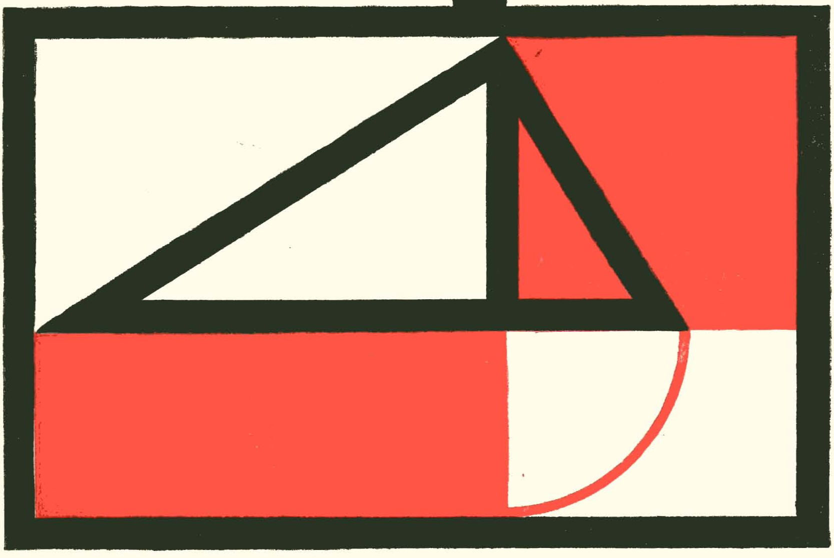
1. $\sqrt{50625} = 225$
2. $222 \cdot 222 = 49284$
3. $\sqrt[3]{79507} = 43$, $4 + 3 = 7$
4. $28^3 = 21952$
5. $139 \cdot 139 = 19321$

Beachte! So muß der Kopf zu **j e d e r** eingesandten W-Lösung aussehen (Format A4)! Postleitzahl nicht vergessen! Von 3200 Lösungen Heft (2/68) wurden 80 zurückgewiesen, da sie nicht den Wettbewerbsbedingungen (siehe Heft 1/68) entsprachen, d. Red..



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
2. Jahrgang 1968 Heft 5

Anschrift der Redaktion: Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41

Postscheckkonto: Berlin 132 626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16

Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Archiv: Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden (S. 131, 143); Bildstelle: TH Chemie, Merseburg (S. 146); Zündholzschachteletiketten: Archiv G. König, Schalkau/Thür. (S. 149); Vignetten: H.-J. Jordan, CH. Loff, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 1. 8. 1968

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Fünf 1. Preise
Drei 2. Preise

Anerkennung und Glückwünsche

Karl Dietzel
Stellv. Minister für Volksbildung

Liebe junge Freunde!
... Es erfüllt uns mit berechtigtem Stolz, daß unsere Jungen Mathematiker das beste Ergebnis unter 12 teilnehmenden Ländern erringen konnten. Es sind die Früchte der weit vorausschauenden kontinuierlichen Bildungspolitik von Partei und Regierung, der schöpferischen Arbeit unserer Lehrer und Ihres eigenen Fleißes und Talents. Vor Ihrer Abfahrt haben Sie anläßlich des 75. Geburtstages unseres hochverehrten Staatsratsvorsitzenden gelobt, Ihre ganze Kraft beim Wettbewerb zu Ehren unseres Arbeiter-und-Bauern-Staates einzusetzen. Sie haben dieses Gelöbnis in jeder Weise vorbildlich erfüllt und einen sehr wertvollen Beitrag zur allseitigen Vorbereitung des 20. Jahrestages unserer Republik geleistet.

Dr. Günter Jahn
Erster Sekretär des Zentralrates der FDJ

Im Namen aller FDJ-Mitglieder beglückwünsche ich Euch zu dem großen Erfolg, den Ihr für unsere Republik errungen habt. Er wird alle Schüler beflügeln, sich noch intensiver mit den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern zu beschäftigen.

Johannes Lehmann
Chefredakteur von *alpha*

Im Auftrage des Redaktionskollegiums und stellvertretend für 93000 *alpha*-Leser beglückwünsche ich unsere Mannschaft zu ihrem großen Erfolg. Den vier Abiturienten Ch. Band, J. Fritz, H.-J. Roos und U. Zähle wünschen wir viel Erfolg bei dem für sie beginnenden Mathematikstudium. W. Burmeister, A. Felgenhauer, J. Gärtner und S. Heinrich werden gleich hunderttausender Schüler unserer Republik alle Kraft einsetzen, bei der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR sehr gut abzuschneiden. Wer wird sich eine Fahrkarte zur XI. IMO nach Bukarest erkämpfen?
Von Wolfgang Burmeister wird in Heft 6/68 ein Erlebnisbericht über die X. IMO veröffentlicht.

DDR-Mannschaft - X. IMO 1968

Stefan Heinrich — **1. Preis**
Spezialklasse, Klasse 11, Humboldt-Universität Berlin
Artur-Becker-Medaille in Gold

Wolfgang Burmeister — **1. Preis**
EOS Dresden-Süd, Klasse 9
Artur-Becker-Medaille in Silber

Jürgen Gärtner — **1. Preis**
BBS-Rafena-Werke, Klasse 11, Radeberg (Bez. Dresd.)
Artur-Becker-Medaille in Silber

Ulrich Zähle — **1. Preis**
Arbeiter-und-Bauern-Fakultät, Klasse 12, Halle
Artur-Becker-Medaille in Silber

Christoph Band — **1. Preis**
EOS Greifswald, Klasse 12
Anerkennungsschreiben des ersten Sekretärs des Zentralrats der FDJ

Andreas Felgenhauer — **2. Preis**
EOS Zerbst, Klasse 10
Artur-Becker-Medaille in Bronze

Joachim Fritz — **2. Preis**
EOS Cottbus, Klasse 12
Artur-Becker-Medaille in Bronze

Hans-Görg Roos — **2. Preis**
Spezialklasse, Klasse 12, TH Magdeburg
Artur-Becker-Medaille in Bronze

Alle Teilnehmer erhielten eine Ehrenurkunde des Ministeriums für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der DDR, eine Geldprämie und einen Bücherscheck.

Delegationsleiter: Dr. Helmut Bausch, Akademie der Wissenschaften, Berlin
stellv. Delegationsleiter und päd. Betreuer: OStR Herbert Titze, Ministerium für Volksbildung, Berlin

Aufgaben der X. IMO

Erster Klausurtag

1. Man beweise, daß genau ein Dreieck existiert, bei dem die Maßzahlen der Seitenlängen aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und einer der Winkel doppelt so groß wie einer der beiden anderen ist.
(Rumänien, 6 Punkte)+

2. Es sei $p(x)$ das Produkt aller Ziffern der im Dezimalsystem gegebenen Zahl x. Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen x, für die

$$p(x) = x^2 - 10x - 22 \text{ gilt.}$$

(ČSSR, 7 Punkte)

3. Für die reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ sei folgendes Gleichungssystem mit den Variablen

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben:

$$\begin{aligned} a x_1^2 + b x_1 + c &= x_2 \\ a x_2^2 + b x_2 + c &= x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad\qquad (1) \\ a x_{n-1}^2 + b x_{n-1} + c &= x_n \\ a x_n^2 + b x_n + c &= x_1 \end{aligned}$$

Ferner sei $\triangle = (b-1)^2 - 4ac$.
Man beweise, daß das System (1) im Bereich der reellen Zahlen für

a) $\triangle <$ keine Lösung,

b) $\triangle = 0$ genau eine Lösung,

c) $\triangle > 0$ mehr als eine Lösung hat.

(Bulgarien, 7 Punkte)

+ bedeutet: Teilnehmerland, aus dem der Aufgabenvorschlag stammt, erreichbare Höchstpunktzahl.

Zweiter Klausurtag

4. Man beweise: Für jedes Tetraeder gibt es einen solchen Eckpunkt, daß sich aus den drei Strecken, deren Längen gleich denen der von ihm ausgehenden Kanten sind, ein Dreieck konstruieren läßt.
(Polen, 5 Punkte)

5. Es seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine relle, für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für jedes reelle x der Bedingung

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

genügt.

a) Man beweise: Die Funktion f ist periodisch, d. h., es gibt eine solche reelle Zahl $b > 0$, daß für jedes x

$$f(x+b) = f(x)$$

gilt.

b) Für $a = 1$ gebe man ein Beispiel einer solchen Funktion

$$f(x) \; (f \neq \text{const.}) \text{ an.}$$

(DDR, 7 Punkte)

6. Es sei $[x]$ die größte Zahl, die nicht größer als x ist. Man berechne für jede beliebige positive ganze Zahl n die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

(Die Richtigkeit der erhaltenen Formel ist zu beweisen.)
(England, 8 Punkte)

Preise	VIII. IMO 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	IX. IMO 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Dipl.	X. IMO 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Dipl.	Gesamtpktz.
VR Bulgarien	—	1	3	1	—	1	1	—	3	1	—	204
CSSR	—	1	2	—	1	3	—	2	4	—	—	248
DDR	3	3	—	3	3	1	—	5	3	—	—	304
Frankreich	nicht teilgenommen			—	—	—	—**	nicht teilgenommen			—	—
Großbritannien	nicht teilgenommen			1	2	4	1	3	2	2	1	263
Italien	nicht teilgenommen			—	1	1	-***	—	—	1	—	132
SFR Jugoslawien	—	2	1	—	—	3	—	—	—	3	1	179
Mongolische VR	—	—	—*	—	—	1	—	—	—	—*	—	74
VR Polen	1	4	1	—	—	1	—	2	3	2	—	262
SR Rumänien	1	1	2	1	1	4	—	1	1	2	—	208
Schweden	nicht teilgenommen			—	—	2	—	1	2	5	—	256
UdSSR	5	1	1	3	3	2	1	5	1	2	—	298
Ungarische VR	3	2	1	2	3	3	—	3	3	2	2	291

* Es wurde an je einen mongolischen Schüler ein Sonderpreis vergeben.
** Die französische Mannschaft bestand nur aus fünf Schülern. Diesen konnten wegen verspäteter Anreise nur die Aufgaben des zweiten Wettbewerbes gestellt werden.
*** Die italienische Mannschaft bestand nur aus sechs Schülern.

Berufsbild

Ingenieur für Programmierung

Studenten beim Praktikum am elektronischen Kleinrechenautomaten SER 2c

Seit September 1966 werden an der Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik in Dresden Ingenieure der Fachrichtung *Programmierung für elektronische Datenverarbeitungsanlagen* (im folgenden kurz als *Ingenieure für Programmierung* bezeichnet) in einem dreijährigen Direktstudium ausgebildet. Bewerber für das Studium in dieser Fachrichtung sollen — neben dem Abschluß der 10. Kl. — folgende Voraussetzungen erfüllen:

□ Abschluß als *Facharbeiter für Datenverarbeitung* bzw. *Technischer Rechner* (siehe H. 3/68, 4/68)

□ oder Abschluß als *Facharbeiter* für *Elektrotechnik/Elektronik* bzw. *der Feingerätetechnik* (z.B. Elektro-, Funk-, Büromaschinen-, Fein-, Meß- und Regelungsmechaniker). Sie müssen dann aber Kenntnisse in der Mathematik besitzen, die denen der Facharbeiter für Datenverarbeitung entsprechen.

□ Sie müssen die gesellschaftliche Reife für die Aufnahme eines Studiums besitzen und tatkräftig am Aufbau des Sozialismus mitgearbeitet haben.

Welche theor. Kenntnisse werden erworben?

□ Allgemeine und fachrichtungsspezifische Kenntnisse der russischen und englischen Sprache. Hierdurch soll der Absolvent die Fähigkeit erwerben, die Entwicklung seines Fachgebietes an Hand der internationalen Literatur zu verfolgen und auszuwerten sowie internationale Programmierungssprachen zu verstehen.

□ Ein fundiertes Wissen in mathematischen Fächern wie Differential- und Integralrechnung, Lineare Algebra, Praktische Analysis, Differentialgleichungen, Lineare Optimierung/Verfahren der Operationsforschung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Informationstheorie. Besonderer Wert wird auf numerische Verfahren der Mathematik und Verfahren der Operationsforschung gelegt.

□ Umfassende Kenntnisse über Erfassung und Darstellung von Informationsflüssen (Flußbildtechnik, Programmablaufplanung), der Programmierung in Maschinensprachen, sowie in internat. Programmiersprachen, im wesentlichen vermittelt durch das sich über die gesamte Ausbildungszeit erstrekkende Fach: Programmierung und Programmiersprachen.

□ Kenntnisse der Informationsdarstellung und -verarbeitung sowie Aufbau, Wirkungsweise und Einsatzmöglichkeiten elektronischer Datenverarbeitungsanlagen einschließlich peripherer Geräte und Anlagen. Sie werden besonders in solchen technischen Fächern wie Bauelemente der Informationstechnik, Elektronische Rechentechnik, Elektronische Regelungs- und Analogrechentechnik, Elektronische Datenverarbeitung vermittelt.

□ Allgemeine Kenntnisse im Fach Betriebsökonomie, aber auch spezielle auf dem Gebiete der Planung, Organisation und Lenkung von Verwaltungs-, Leitungs- und Produktionsprozessen mittels der elektronischen Datenverarbeitung sowie der Betriebe der elektronischen Datenverarbeitung (Organisations- und Rechenzentrum).

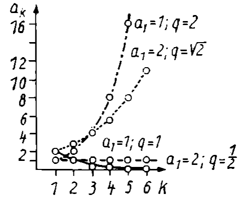
Welche prakt. Fertigkeiten werden erworben?

Ab dem zweiten Studienhalbjahr wird in Verbindung mit dem Fach Programmierung und Programmiersprachen ein Praktikum an elektronischen Rechnern und Datenverarbeitungsanlagen, welche die Ingenieurschule besitzt, durchgeführt. Während des ersten bis fünften Studienhalbjahres sind die Studenten an der Schule in Dresden, das 6. Studienhalbjahr enthält ein Praktikum im späteren Einsatzbetrieb oder einem anderen, hierfür geeigneten Rechenzentrum (in dieser Zeit ist außerdem die Ingenieur-Hausarbeit anzufertigen).

Nach Abschluß des Studiums kann der Einsatz des *Ingenieurs für Programmierung* in Organisations- und Rechenzentren, in Betrieben der VVB Maschinelles Rechnen, aber auch in Industriebetrieben oder Instituten erfolgen, die über kein Rechenzentrum verfügen, aber ihre Probleme bereits aufbereitet und programmiert in ein Rechenzentrum zur maschinellen Bearbeitung geben. W. Leupold

Elementare Zahlenfolgen

3. Teil



Wir beginnen wieder mit der Besprechung der Aufgaben aus dem letzten Heft (4/68). Seid ihr mit den Aufgaben zurechtgekommen? Wir werden sehen!

Lösungen

289 a) Da es sich um eine endliche arithmetische Folge 1. Ordnung mit $d = -3$ handelt, lautet die rekursive Darstellung

$$a_k = a_{k-1} - 3 \text{ für } 1 < k \leqq 6 \text{ mit } a_1 = 7.$$

b)
$$k = 3 \quad a_3 = \frac{2}{3} \cdot a_2^2 \cdot a_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 = +3$$

$$k = 4 \quad a_4 = \frac{2}{3} \cdot a_3^2 \cdot a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$$

$$k = 5 \quad a_5 = \frac{2}{3} \cdot a_4^2 \cdot a_3 = \frac{2}{3} \cdot (-9)^2 \cdot 3 = +162\,.$$

Die drei gesuchten Glieder sind: $+3$; -9; $+162$.

290 Betrachtet man jeweils Dreiergruppen, so erkennt man, daß das jeweils dritte Glied der Quotient aus den beiden unmittelbar vorangehenden Gliedern ist.
Als einfaches Bildungsgesetz bietet sich hier die rekursive Darstellung

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} \text{ für } k > 2 \text{ mit } a_1 = 8 \text{ und } a_2 = 4 \text{ an.}$$

291 a) Zwischen den beiden gegebenen Gliedern $a_{23} = 0$ und $a_{89} = 15$ liegen $89 - 23 = 66$ konstante Differenzen d.

$$66\,d = 15$$
$$d = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}.$$

Aus $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$ folgt für $k = 23$

$$a_{23} = a_1 + (23 - 1) \cdot d$$
$$0 = a_1 + 22 \cdot \frac{5}{22}.$$
$$a_1 = -5\text{, damit für } k = 100$$
$$a_{100} = a_1 + 99 \cdot d = -5 + \frac{45}{2}$$
$$a_{100} = 17\frac{1}{2}.$$

b) Nein.
Wegen $k \in \{1; 2; \ldots\}$ ist z. B. a_1, d, a_k zur Berechnung von k nicht frei wählbar.
Des weiteren muß $d \neq 0$ beachtet werden.

292 $a_3 = 17$; $a_4 = 71$; $a_5 = 142$
Möglicher Rechenweg:

−60 −25 17 71 142
35 42 54 71
7 12 17
5 5 5

293 In 25 m Tiefe: 10 °C. Hinzu kommen je 100 m 3 °C,
also für 2300 m: 69 °C,
insgesamt 79 °C in 2325 m Tiefe.

Die Folge 10 °C, 13 °C, 16 °C, ..., 100 °C hat $n = 31$ Glieder, da

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$100\,°\mathrm{C} = 10\,°\mathrm{C} + (n-1) \cdot 3\,°\mathrm{C}\,.$$

Dem 1. Glied dieser Folge entsprechen 25 m, jedem der 30 weiteren 100 m, also erhält man 3025 m.

Wir wenden uns nun den **geometrischen Folgen** zu.
Sicher kennt ihr die „Weizenkorn-Legende", die sich um die Erfindung des Schachspiels rankt. Ein indischer Weiser erbat danach von seinem Fürsten als Belohnung für die Erfindung des Spiels auf den 64 Feldern eine Anzahl Weizenkörner, und zwar

für das 1. Feld 1 Weizenkorn,
für das 2. Feld 2 Weizenkörner,
für das 3. Feld 4 Weizenkörner,
für das 4. Feld 8 Weizenkörner usw.

Jedem $k \in \{1; 2; \ldots; 64\}$ ist genau ein a_k zugeordnet. Also liegt hier für die Anzahl der Weizenkörner je weiteres Feld die endliche Folge

$$1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots;\ a_{64}\ (f_{10}) \text{ vor.}$$

Das ist eine *geometrische* Folge. Warum?
Eine arithmetische Folge ist es auf keinen Fall. Das erkennt ihr leicht daran, daß ihr

alle möglichen Differenzenfolgen bilden könnt und doch nicht zu konstanten Differenzen gelangt. Aber eine Konstanz läßt sich auch hier erreichen! Dividiert einmal jeweils zwei benachbarte Glieder! Dann erhaltet ihr

$$\frac{2}{1} = 2; \ \frac{4}{2} = 2; \ \frac{8}{4} = 2; \text{ usf.}$$

Hieraus ergibt sich ein konstanter Quotient $q = 2$. Auch die uns aus dem vorigen Heft bekannten Folgen

$f_2 = 2; 2{,}8; 4; 5{,}6; 8; 11; 16; 22$
(Folge der Blendenzahlen)

und $f_6 = -2; +4; -8; +16; -32; \ldots; +256; -512$

sind geometrische Folgen.
Hierfür erhält man als konstante Quotienten (rechnet nach!)

$q \approx 1{,}4$ (Der exakte Wert für nicht gerundete Blendenzahlen ist übrigens $q = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$).
bzw. $q = -2$.

Bei allen diesen Zahlenfolgen erweist sich also die *Quotientenfolge* als *konstant.*
Wir definieren: *Eine Folge, deren Quotientenfolge aus gleichen Gliedern $q \neq 0$ besteht, heißt geometrische Folge.*

$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ $(a_k \neq 0)$ ist der *Quotient* der Folge.

Die *rekursive Darstellung* für geometrische Folgen ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

Denn aus $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ folgt $a_{k+1} = a_k \cdot q$
oder $a_k = a_{k-1} \cdot q$.

Das heißt: Wir erhalten jedes Glied a_k $(k > 1)$ der geometrischen Folge, indem wir den unmittelbaren Vorgänger mit der Konstanten q multiplizieren.
So ist $a_k = a_{k-1} \cdot \sqrt{2}$ die rekursive Darstellung der Folge der Blendenzahlen.
Die allgemein *independente Darstellung* für geometrische Folgen kann man aus der rekursiven Darstellung entwickeln:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q & &= a_1 \cdot q\\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q & &= a_1 \cdot q^2\\
a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q & &= a_1 \cdot q^3\\
&\ \vdots & &\ \vdots
\end{aligned}$$

Das führt zu der Vermutung

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \qquad k \in \{1; 2; \ldots\} \text{ und } q \neq 0,$$

die sich beispielsweise mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion auch bestätigen läßt. Die independente Darstellung der Folge der Blendenzahlen ist also

$$a_k = 2 \cdot \sqrt{2}^{\,k-1} \text{ oder, da } 2 = \sqrt{2}^2,$$
$$a_k = \sqrt{2}^{\,k+1}.$$

Beachte, daß die unabhängige Variable k in der independenten Darstellung geometrischer Folgen stets im Exponenten steht. Solche Funktionen heißen Exponentialfunktionen. Die geometrischen Folgen bilden eine Teilmenge der Menge der Exponentialfunktionen, ihre Punktfolgen liegen auf Exponentialkurven. Die auf Seite 132 stehende Abbildung zeigt die graphische Darstellung der geometrischen Folgen

f_6, f_{10},
$f_{11} = 1; 1; 1; 1; \ldots$ $(q = 1)$
und $f_{12} = 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots \left(q = \frac{1}{2}\right)$.

Die gestrichelten Linien sind Exponentialkurven.
Wir ersehen aus der Zeichnung, wie q das Verhalten der geometrischen Folge, z. B. ihr Wachsen oder Fallen, wesentlich beeinflußt. Für $q = 1$ erhalten wir konstante Folgen, sie liegen auf sogenannten „ausgearteten Exponentialkurven", das sind Parallelen zur k-Achse.
Da wir jetzt die independente Darstellung der geometrischen Folgen allgemein kennen, ist es relativ einfach, den Wert eines bestimmten Gliedes einer bestimmten Folge auszurechnen. Ich kann mir vorstellen, daß ihr interessiert seid zu wissen, wieviel Weizenkörner auf das letzte Feld des Schachbretts hätten gelegt werden müssen, wenn man der Bitte des indischen Weisen nachgekommen wäre.
Das Anfangsglied der betreffenden Folge f_{10} ist $a_1 = 1$, der Quotient $q = 2$. Für das letzte Feld ist $k = 64$.
Aus $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ folgt hier $a_{64} = 2^{63}$.
Das ist eine sehr große Zahl, die man mittels Logarithmen näherungsweise bestimmen kann. Es ergibt sich eine Zahl von etwa 9,18 Trillionen Weizenkörnern, das sind rund 460 Milliarden Tonnen.
Allein auf das *letzte* Feld hätten also 460 Milliarden Tonnen Weizenkörner gelegt werden müssen! Kannst du dir diese Masse Weizen vorstellen? Wohl kaum. Es wird vielleicht ein wenig anschaulicher, wenn du weißt, daß diese Masse Weizen über 1600 Weltweizenernten des Jahres 1964 entspricht(!).
Geometrische Folgen begegnen uns in der Praxis recht häufig. So spielen sie zum Beispiel für Zwecke der Normung und Standardisierung eine bedeutende Rolle. Die Vereinheitlichung der Erzeugnisse nach Abmessung, Masse, Drehzahl, Leistung usw. ist ja eine

wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung der modernen Industrie.

Bei der Stufung von Größen der eben genannten Art erweisen sich geometrische Zahlenfolgen meist als sehr vorteilhaft. Das soll an folgender Aufgabe verdeutlicht werden (entnommen dem Lehrbuch „Analysis" aus dem Fachbuchverlag Leipzig):

Es sollen Rohre in sechs verschiedenen Größen gefertigt werden. Der Durchmesser des kleinsten Rohres soll 20 mm, der des größten Rohres 200 mm betragen. Zwischen 20 mm und 200 mm sind vier Glieder (Rohrweiten) zwischenzuschalten, zu interpolieren. Bei Zugrundelegung *arithmetischer Stufung*

folgt aus

$$a_6 = a_1 \cdot (6-1)\,d \qquad d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{180\ \text{mm}}{5} = 36\ \text{mm};$$

für *geometrische Stufung*

folgt aus

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \qquad q = \sqrt[5]{\frac{a_6}{a_1}} = \sqrt[5]{\frac{200\ \text{mm}}{20\ \text{mm}}} \approx 1{,}585\,.$$

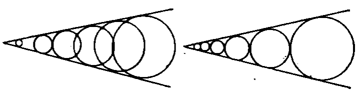
Danach betragen die Rohrweiten bei

arithmetischer Stufung

20 56 92 128 164 200 mm

geometrischer Stufung

20 31,7 50,2 79,6 126,2 200 mm



Bei arithmetischer Stufung ist der prozentuale Zuwachs des Durchmessers sehr unausgeglichen: Vom 1. zum 2. Rohr beträgt er $\frac{36}{20} \cdot 100\% = 180\%$, vom 5. zum 6. Rohr viel weniger, nämlich $\frac{36}{164} \cdot 100\% = 22\%$ (vgl. Abbildung links).

Bei geometrischer Stufung dagegen ist der prozentuale Zuwachs des Durchmessers von Rohrweite zu Rohrweite derselbe. Es ergibt sich als Zuwachs vom 1. zum 2. Rohr $\frac{11{,}7}{20} \cdot 100\% = 58{,}5\%$ und vom 5. zum 6. Rohr $\frac{73{,}8}{126{,}2} \cdot 100\% = 58{,}5\%$.

Diese Gleichmäßigkeit des Zuwachses wird an der rechten Abbildung deutlich. Man wird also der geometrischen Stufung den Vorzug geben. Der konstante Quotient q wird in der Technik übrigens als Stufensprung bezeichnet. Eine Vielzahl weiterer Beispiele könnte angeführt werden. Interessant ist, daß auch die gebräuchlichen Geldmünzen und -scheine in grober Näherung eine geometrische Folge bilden, die an das Dezimalsystem angepaßt ist.

Zum Schluß noch etwas zum Namen „geometrische Folge". Ihren Namen verdanken Folgen dieser Struktur der Eigenschaft, daß *jedes* Glied a_k $(k > 1)$ bis auf das Vorzeichen das *geometrische Mittel* seiner beiden Nachbarglieder ist.

Aus $a_k = a_{k-1} \cdot q \quad (k > 1)$

und $a_{k+1} = a_k \cdot q$ folgt, indem ich die erste Gleichung durch die 2. dividiere,

die Proportion

$$a_k : a_{k+1} = a_{k-1} : a_k\,,$$

$$\text{damit } a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$$

$$\text{oder } |a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} \quad (k > 1)\,.$$

Bei der Folge 1; 2; 4; 8; 16; ... gilt z. B. für das 3. Glied:

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4\,.$$

Das wär's für heute.

In einem abschließenden Artikel sollen einige weitere Grundbegriffe zum Gebiet der elementaren Zahlenfolgen erläutert werden, wie „wachsende" und „fallende" Folge, „oszillierende" und „alternierende Folge". H. Lohse

Hier noch einige Aufgaben

294 Von einer geometrischen Folge sind die Glieder $a_3 = 6$ und $a_6 = \frac{81}{4}$ gegeben. Berechne a_1 und q!

295 a) Zur geometrischen Folge $f_{12} = 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \left(q = \frac{1}{2}\right)$ ist die independente und die rekursive Darstellung anzugeben!

b) Die Folgen $a_k = 2\,k$ und $a_k = 2_k$ sind in *einem* k, a_k-Koordinatensystem graphisch darzustellen! Vergleiche die beiden Punktfolgen!

296 Beim Dreh-, Bohr- und Schleifdurchmesser 100 mm betragen die Schnittgeschwindigkeiten v

$$3{,}5 \quad 4{,}4 \quad 5{,}7 \quad 6{,}9 \quad 8{,}8 \quad 11 \quad 14 \quad 18 \quad 22\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

und die Umdrehungen (Drehzahlen) n

$$11 \quad 14 \quad 18 \quad 22 \quad 28 \quad 36 \quad 45 \quad 56 \quad 71\ \text{min}^{-1}.$$

Untersuche, ob diese endlichen Folgen geometrische Folgen sind!

297 Die Zunahme der Erdbevölkerung entspricht etwa einer geometrischen Folge. 1945 lebten 2,13 Milliarden Menschen auf der Erde, 1965 bereits 3,20 Milliarden. Wieviel werden es im Jahre 1985 sein?

Übe sinnvoll!

Eine kleine Lektion zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen

Ein altes Sprichwort heißt: „Übung macht den Meister“. Es will damit wohl nicht sagen, daß lediglich das Üben zur Meisterschaft führt, wohl aber, daß es ohne Üben keine Meisterschaft gibt. In etwas mathematischer Ausdrucksweise könnte man sagen: Übung ist zwar nicht hinreichend, aber unbedingt notwendig dafür, daß man sich auf einem bestimmten Gebiet als Meister fühlen kann.

Wir nehmen an, es will sich jemand im Dividieren gebrochener Zahlen üben. Er kennt also den Satz (die Rechenregel):

Man dividiert zwei gebrochene Zahlen, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.

Mit Variablen ausgedrückt:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ (b, c, d sind natürliche Zahlen verschieden von 0).

Will man nun an Zahlen üben, so muß man sich das Zahlenmaterial recht vielseitig aussuchen, nach Möglichkeit so, daß alle denkbaren Aufgabentypen auftreten. Überlege dir beim Ermitteln der folgenden Quotienten, nach welchen Gesichtspunkten die Zahlen ausgesucht wurden, worin also der Unterschied von Fall zu Fall liegt:

1.a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{7}{5}$ c) $\frac{3}{2} : \frac{7}{5}$ d) $\frac{3}{2} : \frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{7} : \frac{3}{2}$

2.a) $\frac{3}{8} : \frac{9}{11}$ b) $\frac{2}{5} : \frac{14}{15}$ c) $\frac{8}{33} : \frac{11}{4}$ d) $\frac{12}{25} : \frac{4}{5}$ e) $\frac{3}{6} : \frac{9}{2}$

3.a) $\frac{11}{12} : 5$ b) $1 : \frac{3}{4}$ c) $3\frac{3}{4} : 4\frac{4}{3}$ d) $10 : 2$ e) $0 : \frac{4}{5}$

4.a) $\frac{8}{9} : \frac{8}{9}$ b) $\frac{8}{9} : \frac{9}{8}$ c) $\frac{8}{13} : \frac{1}{7}$ d) $7 : \frac{1}{7}$ e) $\frac{5}{3} : \frac{5}{7}$

Ganz gewiß muß man solche und noch einige andere Aufgaben lösen, um Sicherheit im Dividieren gebrochener Zahlen zu erreichen. Um aber sinnvoll zu üben, darf man sich nicht mit den Schritten

Reziprokes bilden
Kürzen, soweit möglich
Ausmultiplizieren

begnügen. Oder anders gesagt: Selbst wenn du mit Hilfe dieser drei Schritte in allen 20 Fällen den richtigen Quotienten gefunden hast, dann ist damit noch nicht gesagt, daß du diese Rechenoperation wirklich beherrschst. „Was gehört denn aber sonst noch dazu?“ fragst du vielleicht. Nun — wollen wir sehen!

1. Wichtig ist, daß man beim Üben nicht den Zusammenhang mit anderen Rechenoperationen vergißt. Bei der Division gebrochener Zahlen ist das insbesondere die Multiplikation. Beim Ermitteln des Quotienten $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ darf man eben nicht nur an das „Multiplizieren mit dem Reziproken“ denken, sondern auch daran, welche Eigenschaft denn diese gesuchte Zahl haben muß: Ihr Produkt mit $\frac{5}{7}$ muß $\frac{2}{3}$ heißen. Bekanntlich kann man diesen Zusammenhang ja auch so schreiben:

Dividend : Divisor = Quotient

Dividend = Divisor · Quotient

Aus diesem Zusammenhang heraus ist ja die Regel

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

überhaupt erst entstanden. Und wenn dich dein Lehrer bei der Aufgabe $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$ als Probe zum Errechnen des Produkts $\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7}$ auffordert, dann sollst du damit nicht nur deinen gefundenen Quotienten überprüfen, sondern eben an diesen Zusammenhang denken. Mit anderen Worten daran, daß Multiplikation und Division zueinander Umkehroperationen sind.

2. Nun ist es gewiß langweilig, immer den gefundenen Quotienten mit dem gegebenen Divisor zu multiplizieren und die Übereinstimmung dieses Produkts mit dem gegebenen Dividenden zu überprüfen. Deshalb überlegen wir zum sinnvollen Üben folgendes: Bei jeder Rechenoperation geht es um 3 Zahlen;

zwei davon sind gegeben, die dritte ist gesucht. Bezeichnen wir einmal die gegebenen Zahlen mit a und b, die gesuchte mit x, so hatten unsere 20 Divisionsaufgaben sämtlich die Form

$$a : b = x$$

Das muß doch aber wohl nicht so sein. Was passiert eigentlich bei

$$x : a = b \quad \text{oder} \quad a : x = b?$$

In Zahlen:

$$x : \frac{3}{4} = \frac{7}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{4}{13} : x = \frac{5}{12}$$

In Worten:

Bestimme eine Zahl, die mit $\frac{3}{4}$ als Divisor den Quotienten $\frac{7}{5}$ ergibt!

(Rechts formuliere selbst!)

Zunächst stutzt man, fängt dann vielleicht sogar an mit Probieren. Wer aber darin geübt ist, die Rechenoperationen im Zusammenhang zu sehen, der hat im linken Fall mit $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{20}$ sofort und ganz leicht die gesuchte Zahl. Und rechts ist es auch nicht viel schwieriger: Gesucht ist eine Zahl, die mit $\frac{5}{12}$ das Produkt $\frac{4}{13}$ ergibt. Das aber ist der Quotient aus $\frac{4}{13}$ und $\frac{5}{12}$. Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man die beiden Zeilen

Dividend : Divisor = Quotient

Dividend = Divisor · Quotient

fortsetzt zu

Dividend = Quotient · Divisor

Dividend : Quotient = Divisor

Und nun überprüfe die beiden Ergebnisse. Dann bilde selbst derartige Aufgaben und löse sie!

3. Zwei Zahlen gegeben — eine dritte gesucht. Wenn man nun eine Rechenoperation wie das Dividieren gebrochener Zahlen übt, dann muß man sich auch die beiden Fragen beantworten:
Gibt es zu zwei Zahlen aus dem betreffenden Bereich — gleichgültig welche es sind — stets eine dritte? (Frage nach der Existenz)
Wenn es eine dritte Zahl gibt, gibt es nur eine einzige? (Frage nach der Eindeutigkeit)
Für unsere 3 Fälle

1. $a : b = x$ 2. $x : a = b$ 3. $a : x = b$

wollen wir hier die Antworten nur für den 2. Fall durchdenken. (Für die anderen beiden sollst du es selbst tun.)
Die für a gegebene Zahl ist gewiß der Divisor, muß als solcher also verschieden von Null sein. Daran ändert auch nichts, daß wir den gesuchten Dividenden durch Multiplikation der beiden gegebenen Zahlen finden und eine Multiplikation mit 0 stets möglich ist. Da die Einschränkung „Divisor ungleich Null" bei der Division die einzige ist, die Multiplikation zweier gebrochener Zahlen aber stets zu genau einem Produkt führt, können wir für Existenz und Eindeutigkeit sagen:
Wenn $a \neq 0$ und b beliebig gegeben sind, so gibt es stets genau eine Zahl x, so daß gilt:

$$x : a = b.$$

4. Zum sinnvollen Üben gehört auch das Bilden von solchen Aufgaben, für die man das Lösen üben will. Nun ist es kinderleicht und übt daher wenig, wenn man einfach 2 Zahlen hinschreibt, das Divisionszeichen dazwischensetzt und den Quotienten bestimmt. Das wird aber sofort anders, wenn man sich für die 3 Zahlen in $a : b = c$ gewisse Bedingungen setzt, etwa so:

a) $c = 5$; $\quad c = \frac{3}{4}$; $\quad c = 1$; $\quad c = 0$

b) $a < 1$ und $c > 1$; $\quad b < 1$ und $c < 1$

c) $a > b > c$; $\quad a > 1$ und $b = \frac{1}{2}a$ und $c > 1$

d) $a < b < c$; $\quad a < 1 < b < 2 < c$

Na, hast du jeweils eine gelöste Divisionsaufgabe gefunden, bei der die gebrochenen Zahlen den gestellten Bedingungen genügen? Bei c) und d) dürfte das nicht mehr ganz so leicht sein. Vielleicht hast du vorhin die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit für überflüssig und die Antwort für selbstverständlich gehalten. Wie steht es aber damit bei den genannten und anderen derartigen Aufgaben? Gibt es mehr als ein Zahlenpaar mit dem Quotienten $\frac{3}{4}$? Gibt es überhaupt drei Zahlen a, b, c, die die Bedingungen $a < 1 < b < 2 < c$ und $a : b = c$ erfüllen? Versuche diese Fragen bei allen zehn Aufgaben zu beantworten. An der letzten wirst du sicher am ehesten verstehen, daß der Mathematiker die Frage nach der Existenz einer Lösung oft eher zu beantworten versucht, als er an das Suchen der Lösung herangeht.

5. Zum Schluß kehren wir noch einmal zu den 20 Aufgaben 1a) bis 4e) zurück. Wenn man sinnvoll übt, dann ermittelt man nicht blindlings jeden einzelnen Quotienten; auch wenn sie alle richtig sind, so ist das nur der halbe Ertrag. Vielmehr überprüft man, ob und welche Veränderungen sich im Quotienten dadurch ergeben, daß Dividend und Divisor in bestimmter Weise geändert werden. Mit anderen Worten: Man versucht, Gesetzmäßigkeiten (für das Dividieren gebrochener Zahlen) zu erkennen und nach Möglichkeit auch zu beweisen.

Einige Beispiele:

4b) und 4d) Sind Dividend und Divisor zueinander reziprok, so stehen in Zähler und Nenner des Quotienten Quadratzahlen:

$$\frac{m}{n} : \frac{n}{m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m^2}{n^2}$$

3b) Ist der Dividend 1, so sind Divisor und Quotient zueinander reziprok:

$$1 : \frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$$

1a) und 1c) Wird von Dividend und Divisor das Reziproke genommen, so ergibt sich auch das Reziproke des Quotienten:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}; \quad \frac{n}{m} : \frac{q}{p} = \frac{n \cdot p}{m \cdot q}$$

2d) läßt vermuten, daß man den Quotienten auch ermitteln kann, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiert, sofern die Division jeweils ausführbar ist. Bilde selbst derartige Beispiele, überprüfe an ihnen die Vermutung und versuche einen allgemeinen Nachweis.

1d) und 1e) zeigen, daß die Division gebrochener Zahlen nicht kommutativ ist. Ist sie assoziativ, d. h. gilt z. B.

$$\left(\frac{2}{3} : \frac{4}{5}\right) : \frac{6}{7} = \frac{2}{3} : \left(\frac{4}{5} : \frac{6}{7}\right) ?$$

Wie steht es überhaupt, wenn mehr als zwei Zahlen gegeben sind und noch andere Rechenoperationen ins Spiel kommen? Versuche dich an den Aufgaben

a) $\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right) : \frac{7}{6}$ und $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} : \frac{7}{6}$

b) $\frac{27}{4} : \frac{9}{6} - 1\frac{1}{2}$ und $\frac{27}{4} : \left(\frac{9}{6} - 1\frac{1}{2}\right)$

c) Setze in $\frac{21}{20} : \frac{7}{5} : \frac{5}{12} : \frac{5}{9}$ Klammern, so daß sich 1 ergibt.

d) Suche nach je einem Paar gebrochener Zahlen, für das gilt:

$a : b = a + b \qquad c : d = c - d$

$e : f = e \cdot f$

Das war unsere kleine Lektion des Dividierens gebrochener Zahlen. Versuche, auch in anderen Übungen gleiche oder ähnliche Wege zu gehen, dann wirst du sicher gute Erfolge haben!

G. Pietzsch

Was verbirgt sich hinter: MBZ 8?

Mathematikfachlehrer *Günter Horn* aus Schönbach, Kreis Löbau, hatte eine Idee: „Im Jahre 1964 wurden wir uns in der Fachkommission Mathematik klar darüber, daß wir die besten Schüler fördern müßten. Aus Gründen der schlechten Verkehrsverbindungen zur Kreisstadt war eine Konzentration in Form eines Zirkels nicht angebracht. Deshalb beschloß die Fachkommission, für die Klassen 8, 9 und 10 Korrespondenzzirkel einzurichten. Am Ende des Schuljahres wurden an alle Schulen Rundschreiben geschickt, in denen die Mathematiklehrer gebeten wurden, die besten Schüler für den Mathematischen Briefzirkel (MBZ) zu werben. Das Ergebnis war begeisternd. Mehr als 120 Teilnehmer schickten die Lösungen der ersten Aufgaben ein, die den Lehrern mit dem ersten Rundschreiben zugegangen waren. Obwohl in den folgenden Briefen höhere Anforderungen gestellt wurden, blieben bis zum Ende der ersten Serie 60 Teilnehmer bestehen. Die Briefzirkel sind so beliebt geworden, daß wir jetzt beschlossen haben, einen Zirkel auch für die 7. Klassen einzurichten."

Wie schätzen die Schüler den MBZ ein?

Rosemarie Freude aus Obercunnersdorf:

„... Wie bei jeder Olympiade, so zeigte es sich auch diesmal, daß nur durch ständiges Training gute Leistungen erzielt werden können. Daher begrüße ich es, daß ich ab Mai dieses Jahres (1967 d. Red.) durch den MBZ 8 Gelegenheit erhielt, systematisch für die kommenden Olympiaden trainieren zu können ..."
Besonders begrüßten es die Schüler, daß in einer Rangliste die besten Schüler genannt werden. Tilmann Weidner aus Rennersdorf meint dazu:

„... Mir gefällt es sehr, daß nach jeder Folge eine Einzel- und Gesamtwertung erscheint, so daß man ständig über seinen Platz informiert ist, was natürlich einen Ansporn bedeutet ..."

Hier einige Aufgabenbeispiele für die 8. Klasse:

303 Zerlegt die Zahl 45 so in vier Summanden, daß alle Resultate gleich sind, wenn ihr zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten 2 subtrahiert, den dritten mit 2 multipliziert und den vierten Summanden durch 2 dividiert!

304 Für welche x gilt: $|x| > 2x$?

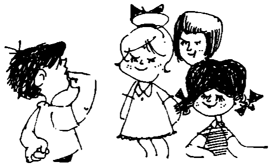
305 In einem Werk sind 35% aller Beschäftigten Frauen, die übrigen sind Männer. Es arbeiten in diesem Werk 252 Männer mehr als Frauen. Bestimme die Gesamtzahl der Beschäftigten!

306 Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie Inge jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt. Wie alt ist jeder?

307 In der Fußballoberliga spielen 14 Mannschaften in Hin- und Rückspielen um den Titel eines Fußballmeisters der DDR. Wieviel Spiele sind notwendig?

Eine Knobelgeschichte

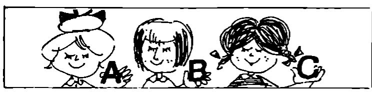
3. Teil



Und wieder ist Mathematikzirkel. Mehrere Schüler behaupten, die letzte Knobelaufgabe gelöst zu haben. Einer von diesen wird vorübergehend aus dem Klassenzimmer geschickt. Indessen werden drei Zirkelteilnehmer bestimmt, die sich für alle sichtbar nebeneinander aufstellen und denen in gemeinsamer Absprache jeweils ein laut Knobelaufgabe zulässiger Vor- sowie auch Zuname zugesprochen wird. Danach ruft man den erfolgreichen Knobler ins Zimmer zurück. Zunächst nennen ihm die drei Mitspielerinnen ihre neuen Vornamen. Mit einem „Dankeschön" ergreift der Knobler ein Stück Kreide, das er bei seinen ersten drei Fragen jeweils sichtbar hochhält. Es ergibt sich das folgende Frage-Antwortspiel:

Natürlich bekunden die Zirkelteilnehmer an dieser eleganten Lösung großes Interesse. Und so wird sie besprochen. „Eine Vorbemerkung muß ich allerdings machen", sagt der Zirkelleiter. „Es gibt Fragen, auf die die Mädchen unseres Spieles bei Beachtung der ihnen auferlegten Spielregeln nicht antworten können." — „Nun zu den Fragen. Sie haben die Gestalt: Frage an X: „Wie antwortet Y auf die Frage, ob er Weiß heißt?" Dabei sind für X und Y verschiedene Vornamen der Mädchen einzusetzen."

Um zu erkennen, welche Informationen aus der Beantwortung einer solchen Frage erhalten werden, werden alle möglichen Fälle in Betracht gezogen und anschließend wird eine Auswertung vorgenommen. Die erhaltenen



Antwort :

	A	B	C
1. Frage an Annette: „Ist das ein Stück Kreide?"	„Ja".		
2. Frage an Beate: „Ist das ein Stück Kreide?"		„Nein".	
3. Frage an Christa: „Ist das ein Stück Kreide?"			„Ja".
4. Frage an Beate: „Heißt Christa Unsinn?"		„Ja".	

Nach diesem Gespräch erklärt der Knobler: „Meine drei Mitspielerinnen heißen Annette Unsinn, Beate Schwarz und Christa Weiß." Die Zirkelteilnehmer zollen der Leistung des Knoblers den nötigen Beifall. Bei der anschließenden Diskussion wird erörtert, daß der Knobler auch damit rechnen mußte, auf seine drei ersten Fragen zweimal die Antwort „Nein" und einmal die Antwort „Ja" zu erhalten. Desgleichen wird mit bemerkt, daß er gegebenenfalls auch mit insgesamt drei Fragen und den zugehörigen Antworten auskommt.

Die letzte Feststellung nimmt der Zirkelleiter zum Anlaß, zu erklären, daß sich die gestellte Aufgabe in jedem Falle mit nur zwei Fragen und den dazugehörigen Antworten lösen läßt.

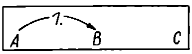
Antworten hängen zum einen davon ab, welchen der Namen Schwarz, Unsinn und Weiß die befragte Person X hat. Weiterhin kann in jedem der drei zu betrachtenden Fälle die Person Y zwei verschiedene Nachnamen haben. Also sind insgesamt sechs Fälle zu betrachten. Die entsprechend aufgestellte Tabelle wird um die Antworten von X ergänzt:

X	Y	Antwort von X
S	U	—
S	W	„Nein".
U	S	„Ja" oder „Nein".
U	W	„Ja" oder „Nein".
W	S	„Ja".
W	U	—

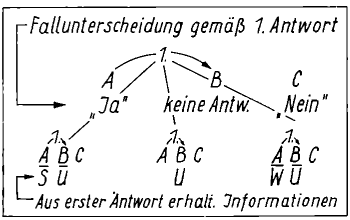
Dabei bedeuten die Buchstaben S, U und W Abkürzungen für die Namen Schwarz, Unsinn und Weiß. Ein Strich bedeutet, daß die befragte Person X nicht antworten kann. Die nunmehr vorgenommene Auswertung ergibt:

Antwort von X über Y	erhaltene Informationen
„Ja"	X heißt nicht Schwarz und Y heißt nicht Unsinn
—	Y heißt Unsinn
„Nein"	X heißt nicht Weiß und Y heißt nicht Unsinn

Nach dieser Analyse wird die zulässige Frage erstmals an Annette über Beate gerichtet. Dies wird in der angegebenen Weise symbolisch an der Tafel fixiert:



Je nach der erhaltenen Antwort sind drei Fälle zu unterscheiden. Die mit der Antwort jeweils erhaltenen Informationen werden ebenfalls symbolisch fixiert, wobei z. B. ein unter A aufgeschriebenes W bedeutet „Annette heißt Weiß" und ein unter A aufgeschriebenes $\overline{W}$ bedeutet hingegen „Annette heißt nicht Weiß".



Falls auf die erste Frage die Antwort „Ja" erteilt wird, entscheidet man sich im Zirkel dafür, die zweite Frage an Beate über Christa zu richten. Die erhaltenen Antworten bedingen eine weitere Fallunterscheidung und führen zu weiteren Informationen. Anschließend lassen sich aus den aus der ersten und zweiten Antwort erhaltenen Informationen die Nachnamen von Annette, Beate und Christa festlegen (siehe Abb. unten).

Das teilweise abgedruckte Lösungsschema bringt u. a. zum Ausdruck, daß mit der Antwort „Ja" auf die erste Frage die Informationen „Annette heißt nicht Schwarz" und „Beate heißt nicht Unsinn" erhalten werden, daß mit der Antwort „Ja" auf die zweite Frage zusätzlich die Informationen „Beate heißt nicht Schwarz" und „Christa heißt nicht Unsinn" erhalten werden und daß gemäß dieser Informationen sich die Namen der so antwortenden Mädchen ergeben als Annette Unsinn, Beate Weiß und Christa Schwarz.

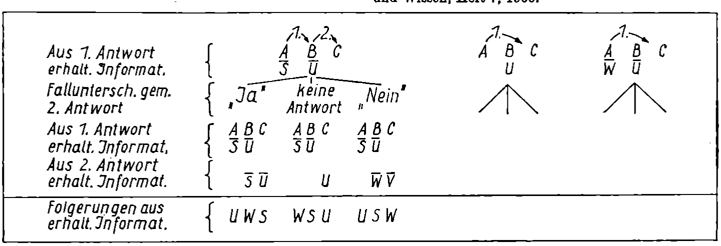
Auch in den verbleibenden sechs Fällen ergibt sich, daß bei geeignet gestellter zweiter Frage entweder die Nachnamen von Annette, Beate und Christa personell festgelegt werden, oder daß die betreffende Antwortmöglichkeit nicht eintreten kann. Zur weiteren Beschäftigung stellt der Zirkelleiter noch zwei Aufgabenvarianten:

4. $a''')$ wie a; $b''')$ wie b;
$c''')$ Welche Informationen erhält ein Fragender über die Zuordnung von Vor- und Zunamen der drei Mädchen durch die Beantwortung einer Frage des Typs:
Frage an X: „Steht bei alphabetischer Ordnung der Zuname von Y vor dem von Z? Dabei sind für X, Y und Z jeweils verschiedene der Vornamen Annette, Beate und Christa einzusetzen.

5. $a'''')$ wie a, jedoch ist der Name Unsinn durch Grau zu ersetzen.
$b'''')$ wie b, jedoch ist der Name Unsinn durch Grau zu ersetzen.
$c'''')$ wie c'''.

W. Träger

In diese Knobelgeschichte sind zwei bekannte Knobelaufgaben eingearbeitet worden:
1. 60. Aufgabe aus Rupassow, Mathematische Denkaufgaben, Volk und Wissen, 1965.
2. 46. Aufgabe aus der Artikelserie „Wer findet die Lösungen?" von Prof. Karl aus der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule" für Lehrer, Verlag Volk und Wissen, Heft 7, 1966.



Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

*letzter Einsendetermin 31. Dezember 1968**

*Mit Heft 5 endet der *alpha*-Wettbewerb des Jahres 1968. Am 10. Januar 1969 gehen die letzten Antwortkarten an die Teilnehmer, so daß jeder, der bis zum 31. 1. 1969 seine bis dahin erhaltenen Karten geschlossen einsendet, von der Jury eingestuft wird. Die Namen der Preisträger und weiterer aktiver Teilnehmer werden in Heft 2/69 veröffentlicht. Wer im Jahre 1968 mindestens 7 Karten erwarb und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde. Wer seine Karten als Beleg zurückhaben möchte, lege ein frankiertes Kuvert mit seiner Adresse bei.

5

309 Ein Vater ist viermal so alt wie sein Sohn. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und das seines Sohnes (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die größer als 50, aber kleiner als 60 ist. Ermittle das Lebensalter von Vater und Sohn! OL Th. Scholl, Berlin

310 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 121, ihre Differenz beträgt 45. Wie lauten die Zahlen? OL Th. Scholl, Berlin

311 In dem Wort **alpha** sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine fünfstellige Zahl erhält, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

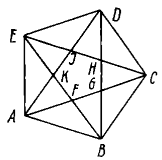
a) Gleichen Buchstaben entsprechen gleiche Ziffern, und verschiedenen Buchstaben entsprechen verschiedene Ziffern.

b) Die Quersumme dieser fünfstelligen Zahl ist eine Primzahl.

c) Die aus den Ziffern *a, h, l, p, al* und *aph* bestehenden Zahlen sind ebenfalls Primzahlen. Ing. H. Decker, Köln

W(5)312 Die Schüler der Klassen 5a, 5b und 5c einer Oberschule sammelten fleißig gebrauchte Flaschen, die sie zur Sammelstelle brachten. Der Erlös dafür wurde dem Solidaritätskonto *Hilfe für Vietnam* zugeführt. Die Schüler der Klassen 5a und 5b sammelten zusammen 790 Flaschen; die Schüler der Klassen 5b und 5c brachten es zusammen auf 970 Flaschen, und die Schüler der Klassen 5a und 5c trugen insgesamt 920 Flaschen zusammen. Wieviel Flaschen wurden je Klasse gesammelt? Welcher Geldbetrag konnte dem Solidaritätskonto gutgeschrieben werden, wenn für jede abgelieferte Flasche 0,05 M bezahlt wurde? OL Th. Scholl, Berlin

W(5)313 In einem regelmäßigen Fünfeck sind alle Diagonalen gezeichnet. Wieviel verschiedene gleichschenklige Dreiecke sind in der so entstandenen Figur vorhanden? Dabei gelten zwei Dreiecke als verschieden, wenn sie in mindestens einem Eckpunkt nicht übereinstimmen. Doz. L. M. Lopowok, Lugansk



314 Es ist eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus um sich selbst zu verlängern. Zur Konstruktion dürfen nur ein Lineal und ein Zeichendreieck verwendet werden; dabei darf das Lineal nicht zum Messen, sondern nur zum Zeichnen von Geraden benutzt werden. **6**
Dr. G. Hesse, Radebeul

315 Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen ist $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$; der größte gemeinsame Teiler dieser Zahlen ist 45. Eine der beiden Zahlen, deren k. g. V. und g. g. T. gegeben sind, lautet 4725. Wie heißt die zweite dieser Zahlen? H. Buders, Zanzibar Town

316 In einem Dreieck ABC ist ein Außenwinkel in A um 29°, ein Außenwinkel in B um 49° kleiner als ein Außenwinkel in C. Es ist die Größe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC zu berechnen!

Martina Schumann, 24. OS Leipzig

W(6)317 In die Kästchen des abgebildeten Quadrates sind neun Zahlen so eingetragen worden, daß das Produkt der drei Zahlen jeder Zeile und jeder Spalte stets 270 beträgt. Auf welche Weise und wie oft lassen sich die eingetragenen neun Zahlen umstellen, wenn dabei die gegebene Eigenschaft erhalten bleiben soll?

1	10	27
15	9	2
18	3	5

Dr. G. Hesse, Radebeul

W(6)318 In der folgenden Aufgabe ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. Dabei ist zu beachten, daß am Anfang einer Zahl nicht die Ziffer 0 stehen darf.

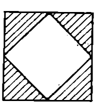
```
2 * * : * * = * *
* 7
─────
* 1 *
* * *
─────
    0
```

W. Klonner, Torgau

7 **319** Einem gegebenen spitzen Winkel α mit dem Scheitelpunkt S ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 so einbeschrieben, daß die Schenkel des Winkels α Tangenten an den Kreis k_1 sind. Es soll ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 konstruiert werden, der den Kreis k_1 und die Schenkel des Winkels α berührt und dessen Mittelpunkt M_2 zwischen S und M_1 liegt. Die Konstruktion ist zu begründen!

OL Th. Scholl, Berlin

320 Ein Junge schneidet die vier Ecken eines quadratischen Stück Papier so ab, daß jeder der geraden Schnitte durch die Mitten zweier benachbarter Quadratseiten verläuft.



a) Beweise, daß das nach Abschneiden der vier Ecken verbleibende Papierstück wiederum die Gestalt eines Quadrates hat!

b) Wie oft muß der Junge diese Tätigkeit am jeweils verbleibenden quadratischen Papierstück wiederholen, damit das schließlich entstandene quadratische Reststück einen Flächeninhalt besitzt, der weniger als ein Tausendstel der Ausgangsfläche beträgt?

W. Träger, Döbeln

321 Gegeben sind eine Gerade g und eine Strecke $\overline{AB}$, deren Verlängerung senkrecht auf g steht. Für welchen Punkt P der Geraden g ist der Winkel $\sphericalangle APB$ am größten? (Anleitung: Betrachte den Kreis durch die Punkte A, B und P!).

W(7)322 Gegeben sind zwei regelmäßige Vielecke. Die Anzahl der Seiten des zweiten Vielecks ist doppelt so groß wie die des ersten. Jeder Innenwinkel des ersten Vielecks ist um 10° kleiner als jeder des zweiten. Ermittle die Anzahl der Seiten des ersten regelmäßigen Vielecks!

Ing. H. Decker, Köln

W(7)323 Die rationale Zahl $\frac{77}{65}$ ist als Summe zweier positiver rationaler Zahlen mit den Nennern 5 und 13 darzustellen!

Ing. H. Decker, Köln

324 Faltgeometrie 8

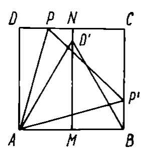
Ein quadratisches Blatt Papier mit den Ecken A, B, C, D soll mehrmals so gefaltet werden, daß ein gleichseitiges Dreieck entsteht, von dem eine Ecke mit einer Ecke des Quadrates zusammenfällt und die beiden anderen Ecken auf den Seiten des Quadrates liegen. Dabei darf aber nur nach den folgenden drei Methoden gefaltet werden:

a) Es wird längs einer bekannten Strecke gefaltet;

b) es wird so gefaltet, daß zwei bereits bekannte Punkte auf eine bekannte Strecke zu liegen kommen;

c) es wird so gefaltet, daß ein Punkt fest bleibt und ein anderer Punkt auf eine bekannte Strecke zu liegen kommt.

Nach jeder durchgeführten Faltung wird das Papierblatt wieder entfaltet.



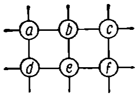
Durchführung der Faltungen (vgl. Abbildung): Wir falten zunächst so, daß die Strecke $\overline{AD}$ mit der Strecke $\overline{BC}$ zusammenfällt und erhalten die Faltkante $\overline{MN}$. Dann falten wir so, daß der Punkt A fest bleibt und Punkt D auf einen Punkt D' der Strecke $\overline{MN}$ zu liegen kommt. Wir erhalten die Faltkante $\overline{AP}$, wobei P auf $\overline{DN}$ liegt. Endlich falten wir längs der Strecke $\overline{AC}$, so daß der Punkt P auf einen Punkt P' der Strecke $\overline{BC}$ zu liegen kommt.

Wir behaupten nun, daß dann das *Dreieck $AP'P$ gleichseitig* ist und daher die verlangten Eigenschaften hat, weil P' auf der Quadratseite $\overline{BC}$ und P auf der Quadratseite $\overline{CD}$ liegt.

Aufgabe: Die Faltung ist durchzuführen, und die obige Behauptung ist zu beweisen.

Prof. Dr. N. Tschajkovskyj, Lwow

325 Es ist zu beweisen: Sind a, b, c, d, e und f beliebige natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, daß $abc = def$ und $ad = be = cf$ gilt, so ist das Produkt der sechs Zahlen $abcdef = p$

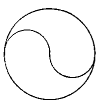


die sechste Potenz einer natürlichen Zahl. (In der obenstehenden Figur sind also die Produkte der jeweils auf parallelen Geraden stehenden Zahlen einander gleich.)

W. Träger, Döbeln

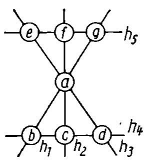
326 Bestimme zu $p = 6^6$ die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e und f so, daß sie den Bedingungen der Aufgabe 326 genügen, daß sie sämtlich voneinander verschieden sind und a jeweils die kleinste sowie f die zweitkleinste dieser sechs Zahlen sind. W. Träger, Döbeln

W(8)327 Die untenstehend abgebildete Kreisscheibe, die bereits durch zwei Halbkreise in zwei Gebiete zerlegt wurde, ist durch drei Geraden so weiter zu zerlegen, daß *acht* einander paarweise inhaltsgleiche *Gebiete* entstehen. (Konstruktion und Beweis!)



Dr. E. Schröder, Dresden

W(8)328 Die in den Kreisen stehenden Buchstaben $a, b, \ldots, g$ sind so durch die Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ zu ersetzen, daß für verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen eingesetzt werden und daß die Summen der



auf jeder markierten Geraden $h_1\ h_2 \ldots, h_5$ stehenden Zahlen sämtlich gleich sind.

Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

W. Träger, Döbeln

329 Drei Brüder wollen eine Anzahl Äpfel zu gleichen Teilen unter sich verteilen. Da sich die Anzahl der Äpfel nicht durch drei teilen läßt, schlägt der eine vor, fünf Äpfel der Schwester abzugeben, wodurch eine gleichmäßige Verteilung der Äpfel unter den drei Brüdern möglich sein würde. Dazu macht der zweite den Vorschlag, daß jeder von ihnen der Schwester außerdem noch den neunten Teil der Anzahl seiner Äpfel abgeben sollte, weil dann die Schwester ebensoviele Äpfel wie jeder der drei Brüder haben würde.

Wieviel Äpfel waren es im ganzen?

StR. G. Schulze, Herzberg

330 Es ist folgender Satz zu beweisen:
Für alle Dreiecke ABC mit dem Winkel $\sphericalangle\, BCA = \gamma = 60°$ und den Seiten $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\,.$$

Anleitung: Benutze eine der Höhen h_a bzw. h_b als Hilfslinien und wende den pythagoreischen Lehrsatz an!

W. Träger, Döbeln

331 Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$, die kürzer als 500 cm ist und die folgenden Eigenschaften hat: Trägt man auf $\overline{AB}$, von einem Endpunkt beginnend, wiederholt

eine	Strecke	von	2 cm	Länge,	(1)
,,	,,	,,	3 cm	,,	(2)
,,	,,	,,	4 cm	,,	(3)
,,	,,	,,	5 cm	,,	(4)
,,	,,	,,	6 cm	,,	(5)

ab, so verbleibt jeweils eine Reststrecke von 1 cm Länge.

Trägt man jedoch eine Strecke von 7 cm Länge ab, so verbleibt keine Reststrecke. (6)

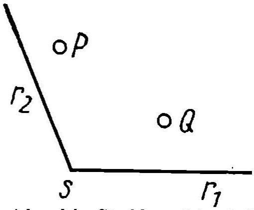
a) Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$?

b) Welche der obigen Bedingungen (1), (2), (3), (4), (5), (6) sind überflüssig, so daß die Länge der Strecke $\overline{AB}$ auch dann noch eindeutig bestimmt ist, wenn diese Bedingungen gestrichen werden? Dr. E. Schröder, Dresden

W(9)332 Das Urlauberschiff des FDGB *Fritz Heckert* hat Kabinen für je zwei, drei und vier Personen. Sind alle 159 Kabinen voll belegt, so kann das Schiff 379 Fahrgäste befördern. Die Anzahl der Kabinen für zwei Personen ist achtmal so groß wie die der Kabinen für vier Personen. Wieviel 2-Personen-, 3-Personen- und 4-Personen-Kabinen hat das Urlauberschiff?

OStR Dr. R. Lüders, Berlin

W(9)333 Es seien r_1 und r_2 zwei auf der Zeichenebene senkrecht stehende Spiegel, die sich in der Geraden s schneiden. Die Punkte P und Q liegen in der Zeichenebene. Wir fassen Q als Lichtquelle auf und fragen nach sämtlichen von Q ausgehenden Lichtstrahlen, die P treffen.



a) Wieviele solche Strahlen gibt es? (Reflexionsgesetz anwenden!)

10 b) Führe die Konstruktion dieser Strahlen durch! Dr. E. Schröder, Dresden

334 In der Theorie der fastperiodischen Funktionen spielt ein kombinatorischer Hilfssatz eine Rolle, dem man nach dem bedeutenden Mathematiker *Hermann Weyl* (1885 bis 1955) etwa die folgende Fassung geben kann: Eine Schulklasse bestehe aus einer bestimmten Anzahl n von Jungen und einer bestimmten Anzahl m von Mädchen, wobei $n \leqq m$ sei (z. B. $n = 12$, $m = 14$). Jeder Junge sei mit einer bestimmten Anzahl von Klassenkameradinnen befreundet, wobei natürlich mehrere Jungen mit demselben Mädchen und mehrere Mädchen mit demselben Jungen befreundet sein können (also ein Junge mehrere Freundinnen haben kann). Ein Spaßvogel der Klasse wirft nun die Frage auf, ob es bei der augenblicklichen Verteilung der Freundschaften möglich ist, jeden Jungen mit einem ihm befreundeten Mädchen zu verheiraten. Nach kurzer Überlegung erkennen die Schüler, daß hierfür sicher *notwendig* ist, daß je k Jungen ($1 \leqq k \leqq n$) stets insgesamt mit mindestens k Mädchen befreundet sind; denn gäbe es eine Gruppe von k (z. B. 7) Jungen, die insgesamt mit weniger als k Mädchen (z. B. nur 5 Mädchen) befreundet sind, so könnten nicht alle Jungen dieser Gruppe eine ihnen befreundete Klassenkameradin heiraten. Zeige, daß die genannte Bedingung auch *hinreichend* ist, d. h., sind je k Jungen ($1 \leqq k \leqq n$) der Klasse stets insgesamt mit mindestens k Klassenkameradinnen befreundet, so kann jeder Junge der Klasse eine ihm befreundete Klassenkameradin heiraten!

Prof. Dr. G. Asser, Greifswald

335 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle ACB = 90°$ zu konstruieren, von dem s_c und h_c bekannt sind. (s_c Länge der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$, h_c Länge der Höhe auf $\overline{AB}$.)
Wieviele Lösungen hat diese Aufgabe?

StR. G. Schulze, Herzberg

336 Wie heißt die Gleichung der quadratischen Funktion, deren Kurve durch den Punkt P_1 (1; 2) geht und in den Punkten mit den Abszissen $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$ die x-Achse schneidet? StR. G. Schulze, Herzberg

337 Es ist zu beweisen, daß es keine ganze Zahl n gibt, für die die Zahl
$n^2 - n + 13$ durch 289 teilbar ist.

Doz. L. M. Lopowok, Lugansk

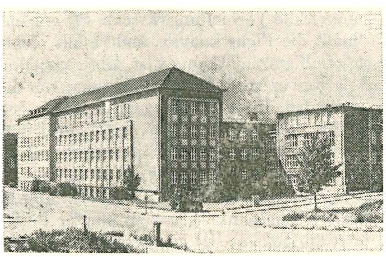
W(10/12)338 Der neue sowjetische Personenkraftwagen SIL 114 des Moskauer *Lichatschow-Automobilwerkes* erreicht nach dem Start in 13,5 s die Geschwindigkeit von 100 km/h.

a) Wieviel Meter hat der Kraftwagen in dieser Zeit zurückgelegt, wenn man eine konstante Beschleunigung annimmt?

b) Wieviel Sekunden nach dem Start hat der Wagen eine Entfernung von 4 km zurückgelegt, wenn er bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit von 190 km/h mit konstanter Beschleunigung weiterfährt und dann die Höchstgeschwindigkeit beibehält?

OStR. Dr. R. Lüders, Berlin

W(10/12)339 Streicht man von einer natürlichen Zahl (in dekadischer Darstellung) die letzten drei Ziffern weg, so erhält man die dritte Wurzel aus dieser Zahl. Wie lautet diese Zahl? Doz. L. M. Lopowok, Lugansk



An der Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik (8019 Dresden, Elisenstr. 25) werden für den Einsatz in Betrieben, die elektronische Datenverarbeitungsmaschinen entwickeln, produzieren oder einsetzen, Ingenieure für Programmierung (siehe S. 131), Ing. f. elektronische Datenverarbeitungsanlagen, Ing. d. Elektrofeinwerktechnik, Ingenieurökonomen der Elektrotechnik/Datenverarbeitung ausgebildet.
Die Schule verfügt über viele modern aufgebaute und ausgestattete Labors. Im Studienjahr 1968/69 studieren: etwa 1400 Studenten im Direktstudium, 2000 Studenten im Abendstudium (davon 1200 in 32 Außenstellen), 300 Studenten im Fernstudium (nur in der Fachrichtung Elektronische Datenverarbeitungsanlagen), 150 Ingenieure und Ingenieur-Ökonomen im postgradualen Studium, d.h., zur weiteren Vervollkommnung ihrer Kenntnisse.

Was ist ein Viereck?

Wähle beliebig vier Punkte A, B, C, D in der Ebene. Sie sollen die Ecken eines Vierecks werden. Dazu dürfen sie natürlich nicht alle auf einer Geraden liegen, etwa so wie in Abb. 1. Wie steht es, wenn die Punkte so liegen wie in den Abbildungen 2 oder 3? Dabei ist immer in der Reihenfolge A-B-C-D zu verbinden. Auch die in diesem Fall entstehenden Figuren bezeichnen wir *nicht* als Viereck. Wenn also die vier Punkte A, B, C, D die Ecken eines Vierecks werden sollen, so dürfen nie drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Das Entsprechende muß von fünf Punkten A, B, C, D, E verlangt werden, die ein Fünfeck bilden sollen, usw.
Wenn wir die Ecken A, B, C, D dieser Forderung entsprechend so wählen, daß es nie durch drei dieser Punkte eine Gerade gibt, so kann die Figur von Abb. 4 entstehen.

Wir wählen jetzt einen Punkt E außerhalb des Vierecks wie in Abb. 5 und denken uns den Punkt C wie durch ein Gummiband geradlinig zu Punkt E hin gezogen, während die Punkte A, B, D fest an ihrem Platze bleiben. Der Punkt C gerät dabei schließlich auf die Diagonale BD, so daß in diesem Augenblick das Viereck $ABCD$ aufgehört hat zu existieren (Abb. 6). Ziehen wir Punkt C weiter, so kommt er, nachdem zwischendurch $ABCD$ ein eingeknicktes Viereck gebildet hat, (Abb. 7) auf die Strecke AB zu liegen (Abb. 8). Wieder ist der Viereckscharakter der Figur verloren gegangen. Wir lassen uns aber dadurch nicht beirren und ziehen weiter. Jetzt kommt Punkt C auf die andere Seite der Geraden AB zu liegen, es entsteht wieder ein Viereck, aber eines, das ihr vielleicht nicht gewohnt seid, als Viereck zu betrachten (Abb. 9).

Wir stellen noch einmal drei charakteristische Lagen des Punktes C zusammen (Abb. 4, 7, 9). Abb. 4 stellt ein euch wohlvertrautes Beispiel eines Vierecks dar. Dabei kann Punkt C noch beliebig bewegt werden, sofern er nicht eine der Geraden DB, DA, AB überschreitet oder auf einer dieser Geraden liegt. Das Viereck von Abb. 4 heißt „konvexes" Viereck. Ihr habt vielleicht einmal von einer Konvexlinse — im Gegensatz zu einer Konkavlinse — gehört. Nun, wir haben es hier nicht mit einem Körper, also einem dreidimensionalen, sondern mit einem zweidimensionalen Gebilde, mit einer Fläche, zu tun. Aber die Unterscheidung konvex — nichtkonvex können wir sowohl bei Körpern als auch bei beliebigen Flächen machen. Man muß dazu nur wissen, was unter dem Inneren des Körpers oder der Fläche zu verstehen ist. Wir zeichnen eine beliebige Fläche (Abb. 10) und wählen zwei Punkte P, Q im Inneren der Figur. Wenn bei jeder Lage der Punkte P und Q im Inneren die Verbindungsstrecke PQ nur aus inneren Punkten der Figur besteht, dann heißt die Figur konvex, andernfalls nichtkonvex. Ihr seht, daß die in Abb. 11 gezeichnete Figur nichtkonvex ist. Übrigens: Man kann diese Figur leicht „abrunden", so daß sie konvex wird. Dazu braucht man nur die Punkte A und B durch eine Strecke zu verbinden. Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf Körper übertragen. Die Figur von Abb. 4 stellt also ein konvexes Viereck dar. Aber auch die Figuren von Abb. 7 und 9 stellen Vierecke dar; sie wären nach unserer Definition als nichtkonvex zu bezeichnen. Bei Abb. 9 braucht ihr nur durch den Schnittpunkt der Strecken AB und CD, den wir mit S bezeichnen wollen, eine Strecke PQ wie in Abb. 12 zu legen. Dann enthält PQ den Punkt S, der ein Randpunkt, also kein innerer Punkt der Figur ist. Dieses Viereck bezeichnet man übrigens als Überschlagviereck.

Würden wir in Abb. 4 die Eckpunkte in der Reihenfolge A-C-B-D verbinden, so entstünde natürlich wieder ein nichtkonvexes Viereck. Ihr seht daran, daß es für die Entscheidung, ob ein Viereck, das nur durch seine Eckpunkte gegeben ist, konvex oder nichtkonvex ist, von ausschlaggebender Bedeutung ist, wie der Linienzug, der die Punkte verbindet, verläuft.

Wir wollen noch einmal zu den Figuren der Abb. 4 und 7 zurückkehren. Euch ist der Satz bekannt, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Daraus kann man leicht die Winkelsumme im Viereck berechnen. Ihr braucht nur eine Diagonale zu ziehen, die das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, und die Winkelsumme für diese beiden Dreiecke zu bilden. Durch Addition findet ihr für die Winkelsumme des Vierecks 360°. In Abb. 12 ist das Viereck $ABCD$ schon in zwei Dreiecke zerlegt. Die Winkelsumme setzt sich aus den Winkeln bei A, B, C, D zusammen. Sie muß, wie ihr aus Abb. 12 leicht erkennt, kleiner als 360° sein, da die — um die Winkel bei S vergrößerte — Winkelsumme der beiden Dreiecke ASD und CBS zusammen schon 360° beträgt. Ihr seht daraus, daß man bei der Formulierung des Satzes: „Im Viereck ist die Winkelsumme 360°“, vorsichtig sein muß. Wir wollen daher sicherheitshalber den Satz so formulieren: „In jedem konvexen Viereck beträgt die Winkelsumme 360°“.

Vielleicht überlegt ihr euch einmal, wie groß die Winkelsumme im konvexen Fünfeck, im konvexen Siebeneck, im konvexen 100-Eck ist. Der Beweis kann übrigens auch auf anderem Wege geführt werden, als er hier für das Viereck angedeutet wurde. L. Görke

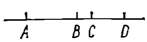


Abb. 1

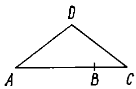


Abb. 2

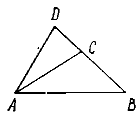


Abb. 3

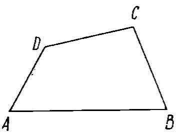


Abb. 4

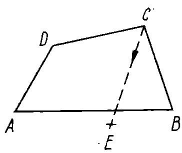


Abb. 5

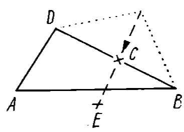


Abb. 6

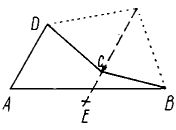


Abb. 7

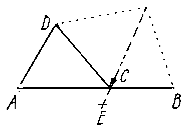


Abb. 8

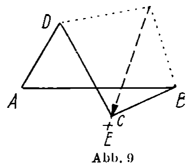


Abb. 9

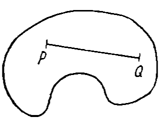


Abb. 10

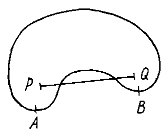


Abb. 11

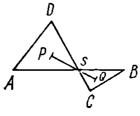


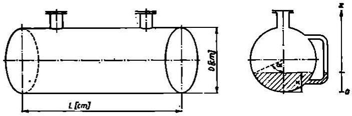
Abb. 12

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Herbert Dallmann

Direktor des Instituts für Mathematik
der Technischen Hochschule für Chemie Carl Schorlemmer, Leuna-Merseburg

287 In der chemischen Industrie werden zum Aufbewahren von Flüssigkeiten vielfach Lagertanks verwendet, die die Form von liegenden Kreiszylindern haben.



Zum Beobachten der Flüssigkeitshöhe wird ein kommunizierendes Standrohr angebracht. Für einen solchen Lagertank ($L = 500$ cm, $D = 200$ cm) soll das Standrohr mit einer Skala versehen werden, die das Ablesen des Flüssigkeitsvolumens in Litern gestattet.

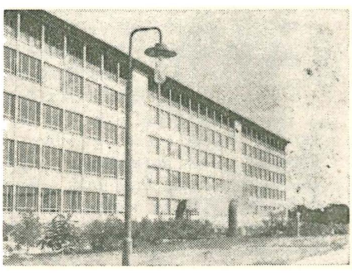
a) Stelle eine Formel auf, die den Zusammenhang zwischen dem Flüssigkeitsvolumen V und dem Winkel α (s. Skizze) darstellt!

b) Rechne für die Standhöhen $x = 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160$ cm den Flüssigkeitsinhalt V in Litern aus!

Als im Jahre 1954 die Technische Hochschule für Chemie „Carl Schorlemmer" gegründet wurde, wählte man mit Vorbedacht als Standort Merseburg, nicht weit entfernt von den beiden Chemiegiganten Leuna und Buna.
Die engste Verbindung von Wissenschaft und Produktion war von Anfang an der Leitgedanke der Hochschule. An ihr studieren zur Zeit 2500 Direktstudenten in folgenden drei Fakultäten:

Stoffwirtschaft (Ausbildung zu Diplomchemikern)
Verfahrenstechnik (Ausbildung zu Diplomingenieuren)
Ing.-Ökonomie (Ausbildung zu Diplomingenieurökon.)

Mit der Gründung der Hochschule nahm das Institut für Mathematik seine Tätigkeit auf und entwickelte eine intensive mathematische Ausbildung in den einzelnen Fakultäten. Die gründliche Wissensaneignung in Mathematik ist für technische und ökonomische Berufe von großer Bedeutung, weil dieses Fach über die besten Hilfsmittel verfügt, immer tiefer die Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge in Natur und Gesellschaft zu erfassen.
Ab Herbst 1965 beginnt in Zusammenarbeit mit der Universität Halle die Ausbildung von Diplommathematikern mit verfahrenstechnischen Grundkenntnissen, die für einen Einsatz in verfahrenstechnischen Bereichen der chemischen Industrie und des Apparatebaus geeignet sind. Das Studium umfaßt neben einer intensiven Ausbildung in den Grundlagen der Mathematik, in Rechentechnik, in Datenverarbeitung, in modernen angewandten mathematischen Disziplinen noch die Aneignung von Wissen und Fertigkeiten in verschiedenen verfahrenstechnischen Fächern. Diese so ausgebildeten Mathematiker werden später in der Lage sein, verfahrenstechnische Probleme mit mathematischen Methoden zu behandeln, insbesondere die Modellierung und Optimierung chemischer Prozesse durchzuführen.
In der Forschung beschäftigen sich die Mitarbeiter des Institutes für Mathematik vorwiegend mit mathematischen Methoden der Optimierung bei der Projektierung und Steuerung chemisch-technologischer Prozesse. In der modernen chemisch-technologischen Produktion wird ein komplizierter Komplex von Apparaten angewandt. Man ist dabei interessiert, nicht nur für den einzelnen Apparat, sondern für die Gesamtheit der sich wechselseitig beeinflussenden Apparate eine optimale Arbeitsweise zu berechnen.
Eine Möglichkeit zur Annäherung an eine optimale Arbeitsweise besteht gewissermaßen in einer unmittelbaren künstlichen Störung der Prozesse, d. h., man versucht, durch direkte Änderung der steuerlosen Einflußgrößen (etwa Temperatur, Druck u. a.) eine Verbesserung zu erreichen.
Eine andere Methode benutzt in starkem Maße die Mathematik. Sie setzt aber die Kenntnis des mathematischen Modells, d. h., die Gesamtheit aller mathematischen Beziehungen, die den Prozeß hinreichend genau beschreiben, voraus.



Die Bestimmung des mathematischen Modells eines Prozesses ist eine der wichtigsten und kompliziertesten Aufgaben bei der Steuerung chemisch-technologischer Prozesse; hier ist die Mitarbeit der Mathematiker zweckmäßig.
Ausgehend von diesem Modell versucht man nun mit mathematischen Methoden — unter starker Einbeziehung der elektronischen Rechentechnik — eine optimale Arbeitsweise zu errechnen; dabei stehen vor den Mathematikern große Aufgaben bei der Anwendung bekannter und der Entwicklung neuer Optimierungsmethoden. Hierzu haben naturgemäß die an der Technischen Hochschule für Chemie ausgebildeten Mathematiker einen wesentlichen Beitrag zu leisten.

1967
ДЕКАБРЬ
16
СУББОТА

ПРОЛЕТАРИИ ВСЕХ СТРАН, СОЕДИНЯЙТЕСЬ!

Орган Центрального Комитета ВЛКСМ

КОМСОМОЛЬСКАЯ ПРАВДА

СТАРТУЕТ ОЛИМПИАДА!

Задачи по математике

1. (7—10). Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы волейбольной сетки, можно разорвать так, чтобы сетка не распалась на куски, если размеры сетки м $\times$ п ячеек?

2. (8—10). Доказать, что для любого n существует n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего единицы.

3. (8—10). Точки К и Р симметричны основанию Н высоты ВН треугольника АВС относительно прямых АВ и ВС. Доказать, что точки пересечения прямой КР со сторонами АВ и ВС (или их продолжениями) — основания высот треугольника АВС.

4. (7—9). На одной из двух равных окружностей даны 50 точек, на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше, чем $\frac{1}{50}$ длины окружности. Доказать, что можно наложить эти окружности одна на другую, так, что ни одна из данных точек не окажется ни на одной из данных дуг.

5. (7—10). Натуральные числа Х и У таковы, что $X^{yx} = Y^{xy}$. Доказать, что $X = Y$.

6. (7—9). Доказать, что если сумма двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, равна половине его периметра, то этот четырехугольник — параллелограмм.

7. х и у — целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

а) (7—10). Доказать, что $x - y$ и $2x + 2y + 1$ — полные квадраты.

б) (7—10). Найти хотя бы одно решение этого уравнения в натуральных числах.

в) (8—10). Доказать, что это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

г) (9—10). Пусть (x_n, y_n) — эти решения, занумерованные в порядке возрастания x_n. Выразить x_{n+1} и y_{n+1} через x_n и y_n.

д) (10). Найти пределы последовательностей

$$\frac{x_n}{y_n} \text{ и } \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

8. (8—9). Дана окружность и на ней точка А. Произвольная окружность с центром в точке А пересекается с данной окружностью в точках К и Р и касается диаметра данной окружности в точке II. Найти геометрическое место точек пересечения отрезков КР и АН.

9. (8—10). Доказать, что $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1967}$ можно представить в виде $a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $3a^2 - 2b^2 = 1$.

10. (8—10). Восстановить выпуклый четырехугольник, если известны четыре точки — основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей четырехугольника на его стороны.

11. (10). Доказать, что для любого n

$$\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = C_n \sin nx,$$

где C_n некоторая постоянная, и найти C_n.

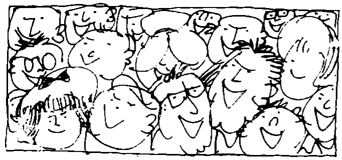
12. (10). Из трех стержней нужно изготовить жесткую пространственную конструкцию так, чтобы стержни не соприкасались между собой, а были только связаны нитками, прикрепленными к их концам.

а) Какое наименьшее число К нитей для этого необходимо (каждая нить связывает два конца стержней)?

б) При каком соотношении между a и l можно изготовить такую конструкцию, в которой все стержни имеют длину a, а все К нитей — длину l?

13. (8—10). —

In freien Stunden
alpha heiter



Rätselfreunde hergeschaut!

Es sind 20 mathematische Begriffe zu suchen, deren Buchstabenzahl stets um 1 zunimmt. Die Anfangsbuchstaben sind der Reihe nach dem Alphabet entnommen (I und *J* als ein Buchstabe gewertet).

.
. .
. . .
. . . .
. . . . .
. . . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

1 Abkürzung eines Flächenmaßes
2 lat. zweifach
3 Abkürzung für eine Winkelfunktion
4 bei Euklid ergänzende planimetrische Sätze
5 geometrisches Grundgebilde 2. Stufe
6 Abweichung vom wahren Wert
7 Mathematiker und Physiker, lebte 1564 bis 1642
8 Kegelschnitt
9 Instrument zum Aufzeichnen einer Integralkurve
10 Bestandteil eines logarithmischen Wertes
11 Bezeichnung bestimmter Exponenten
12 Teil der Kegeloberfläche
13 ein Endpunkt der kleinen Achse einer Ellipse
14 Rechtwinkligkeit
15 Stellenwertsystem
16 Flächenmaß
17 Forderung der Mathematik nach Einhaltung in gewissen Grenzen
18 Näherungskurve 2. Ordnung
19 beiderseits begrenzte Teile einer Tangente
20 Verfahren der Darstellenden Geometrie

W. Weber, Mathematikfachlehrer,
EOS Schkeuditz, Bez. Leipzig

Spiel mit zwei Ringscheiben

Das Spiel besteht aus zwei Ringscheiben unterschiedlicher Größe. Die größere Ringscheibe hat vier Vertiefungen (oder kreisförmige Ausschnitte bzw. entsprechende Markierungen), die kleinere zwei, wie es die Abb. 1 zeigt. In den Vertiefungen bzw. Markierungen befinden sich Spielmarken, die mit den Zahlen 1 bis 5 bezeichnet sind. Jede Ringscheibe ist für sich drehbar. Die große Ringscheibe G ist um M_1 drehbar; die Drehung hat um ganzzahlige Vielfache von 90° zu erfolgen, im positiven Drehsinn (+) oder im negativen Drehsinn (—). Die kleine Ringscheibe K ist um M_2 drehbar; die Drehung erfolgt um ganzzahlige Vielfache von 180°. Die Überdeckung beider Ringscheiben ist aus der Abb. 1 ersichtlich.

Wenn sich eine Ringscheibe dreht, bewegen sich gleichzeitig die Spielmarken mit den Zahlen, die in den Vertiefungen bzw. Markierungen liegen. Wir können also durch Drehen der beiden Ringscheiben aus der ursprünglichen Anordnung der Spielmarken schrittweise eine neue Anordnung in der Reihenfolge der Zahlen 1 bis 5 erhalten. Die Spielmarken werden dabei aus den Vertiefungen bzw. Markierungen von einer Ringscheibe auf die andere übernommen.

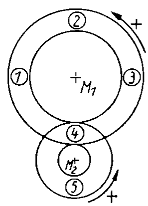


Abb. 1

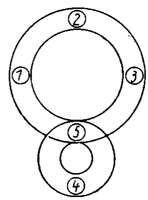


Abb. 2

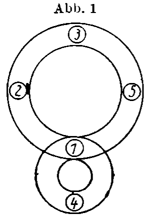


Abb. 3

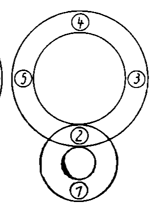


Abb. 4

Drehen wir z. B. die kleine Ringscheibe im positiven Drehsinn um 180° (wir bezeichnen die Drehung mit $K + 180°$), so erhalten wir die Anordnung, wie sie die Abb. 2 zeigt. Wenn wir nun die große Ringscheibe im positiven Drehsinn um 90° drehen (wir bezeichnen diese Drehung mit $G + 90°$), entsteht die in Abb. 3 gezeigte Anordnung. Wir können auf diese Weise aus der ursprünglichen Anordnung der Zahlen 1 bis 5 nach Abb. 1 die Lage der Spielmarken 1 und 4 austauschen, wenn wir folgende Drehungen ausführen:

$$K + 180°;\ G + 90°;\ K + 180°;$$
$$G - 90°;\ K + 180°.$$

Die anderen Spielmarken bleiben dabei auf ihren ursprünglichen Plätzen. Am besten überzeugen wir uns davon, indem wir die beiden Ringscheiben ausschneiden, drehbar machen (evtl. mit Reißzwecken auf einer festen Unterlage) und nun die genannten fünf Ringdrehungen ausführen.

Eure Aufgabe besteht nun darin, die Reihenfolge der Ringdrehungen (Operationen) herauszufinden, um aus der ursprünglichen Anordnung der fünf Spielmarken nach Abb. 1 eine Anordnung der Spielmarken zu schaffen, wie sie die Abb. 4 zeigt. Uns gelang das mit weniger als 10 Ringdrehungen (Operationen). Wir sind neugierig, wieviel Ringdrehungen (Operationen) ihr dazu braucht. Die beste Lösung dieser Aufgabe wird veröffentlicht.

Milau Koman, Prag

Entnommen aus der tschechischen Zeitschrift für Schüler und Studenten „*rozhledy matematicko-fyzikalni*“ (d. i. Mathematisch-physikalische Umschau) 5/67, übersetzt von O. Langer, Döbeln, für unsere *alpha*-Leser bearbeitet von W. Unze, Leipzig.

Welche Antworten kann man in Prüfungen hören?

Küsimus: «Millega võrdub $a^3 - a^3$?»
Vastus: «Ühega.»
Küsimus: «Aga millega võrdub 27 — 27?»
Vastus: «Muidugi nulliga.»
Küsimus: «Aga millega võrdub $3^3 - 3^3$?»
Vastus: «Ühega.»
Küsimus: «Kuid $3^3 = 27$. Kumb vastus siis õige on?»
Vastus: «Mõlemad, oleneb ainult sellest, kuidas võtta.»

Frage: „Wieviel ist $a^3 - a^3$?“
Antwort: „Eins“
Frage: „Aber wieviel ist 27 — 27?“
Antwort: „Selbstverständlich Null.“
Frage: „Aber wieviel ist $3^3 - 3^3$?“
Antwort: „Eins“
Frage: „Wir wissen ja, daß $3^3 = 27$ ist. Welche Antwort ist denn richtig?“
Antwort: „Beide, es hängt davon ab, wie man es nimmt!“

Aus: „Matematika ja kaasaeg“ (Tallinn 1966), übersandt von Prof. Prinits, Tartu

Sauna

„Gibt es etwas Anstrengenderes als eine Mathematikarbeit?“ stöhnt Gerd nach einer Mathematikstunde. „Doch, die Sauna“, sagte Rolf. „Wieso?“ möchte Gerd wissen. „Man schwitzt länger“, meint Rolf.

Aus: „Die Trommel“ 15/68

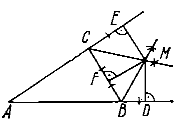
Zündholzschachteletiketten aus der Sowjetunion, eingesandt von Mathematikfachlehrer Günther König, Schalkau/Thüringen

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der Bezirksolympiade

7 1. Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: „Wieviel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?" Dabei ist am Schluß die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren. Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden gehören. Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

2. Die Dreiecke $\triangle\, CFM$ und $\triangle\, CME$ sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein. Daher gilt $\overline{ME} = \overline{MF}$. Ebenso sind die Dreiecke $\triangle\, MFB$ und $\triangle\, MDB$ kongruent, woraus $\overline{MF} = \overline{MD}$ folgt. Mithin gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.



3. Jeder Angler aß $\frac{7}{3}$ Fische. Daher gab der erste $\frac{2}{3}$ Fische, der zweite $\frac{5}{3}$ Fische an den dritten. Falls die vom dritten Angler verzehrten Fische also „bezahlt" werden sollen, müßte der erste 2 und der zweite 5 Pfennige bekommen.

4. (I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung

$\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt

$a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}$.

Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft.

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{123}{12} = \frac{41}{4}$

und $x - \frac{3}{4} = 11 - \frac{3}{4} = \frac{41}{4}$,

so daß im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

5. Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz).

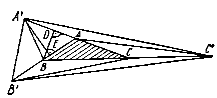
Daher gilt:

$n \cdot m = (5n' + 3)(5m' + 3) = 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 = 5[5n'm' + 3(n' + m') + 1] + 4$,

d. h., $n \cdot m$ läßt bei Division durch 5 den Rest 4.

6. Zum Beweise verwendet man den Satz, daß Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Behauptung: Es ist $\mathrm{I}(\triangle\, A'B'C') = 7 \cdot \mathrm{I}(\triangle\, ABC)$, wenn $\mathrm{I}(\triangle\, A'B'C')$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle\, A'B'C'$ und $\mathrm{I}(\triangle\, ABC)$ den des Dreiecks $\triangle\, ABC$ bezeichnet.



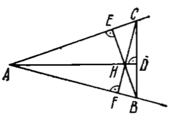
Beweis: (vgl. Abb.) Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf $A'C$ (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung). Dann gilt: $\triangle\, ABC$ ist flächengleich $\triangle\, AA'B$; denn es gilt $\overline{AC} = \overline{AA'}$ und $\overline{BD} = \overline{BD}$ (als gemeinsame Höhe).

$\triangle\, BAA'$ ist flächengleich $\triangle\, B'BA'$; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle\, B'AA'$ und es gilt: $\overline{BA} = \overline{B'B}$ sowie $\overline{A'E} = \overline{A'E}$. Daraus folgt, daß $\triangle\, B'BA'$ auch

flächengleich $\triangle ABC$ ist. Entsprechend beweist man, daß die Dreiecke $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ alle flächengleich dem Dreieck $\triangle ABC$ sind.
Das Dreieck $\triangle ABC$ liegt ganz im Innern des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ (die Winkel $\sphericalangle A'CC'$, $\sphericalangle B'BC'$ und $\sphericalangle B'AA'$ sind als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ sämtlich kleiner 180°). Daher erhält man den Flächeninhalt der sieben zu $\triangle ABC$ flächengleichen Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AA'B$, $\triangle B'BA'$, $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ addiert.
Mithin gilt: $I(\triangle A'B'C') = 7 \cdot I(\triangle ABC)$.

8 1. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte Dreieck (vgl. Abb.), die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C; H sei der Höhenschnittpunkt. Dann ist $\triangle ABE$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, dem rechten Winkel $\sphericalangle AEB$ und dem Winkel $\sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BAC$. Die Höhe durch C geht durch den Mittelpunkt H der Seite EB und steht senkrecht auf AB.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



Man konstruiert zunächst das Teildreieck $\triangle ABE$, halbiert die Seite EB (Halbierungspunkt sei H) und fällt von H auf AB das Lot. Sein Fußpunkt sei F. Die Verlängerung dieses Lotes über H hinaus schneidet die Verlängerung der Seite AE über E hinaus im Punkt C. $\triangle ABC$ ist das verlangte Dreieck.
(III) Der Beweis, daß ein so konstruiertes Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügt (also die Umkehrung von (I)), ergibt sich leicht aus (II); die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe aus (I).

2. Wir nehmen 0 (mit der Quersumme 0) unter die zu berücksichtigenden Zahlen auf, schließen 1000 vorläufig aus und fassen jeweils die beiden Zahlen a und $999 - a$ $(0 \leqq a \leqq 499)$ zu einem Paar zusammen. Es sei $a = \alpha \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + \gamma$ (*) mit ganzen Zahlen α, β, γ, für die $0 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq 9$ gilt. Dann ist die Quersumme von $a: \alpha + \beta + \gamma$. Ferner ist $999 - a = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 - \alpha \cdot 10^2 - \beta \cdot 10 - \gamma = (9 - \alpha) \cdot 10^2 + (9 - \beta) \cdot 10 + (9 - \gamma)$, und wegen (*) gilt auch $0 \leqq 9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma \leqq 9$ und $9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma$ sind ganz.
Daher ist die Quersumme dieser Zahl $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma)$ und die Summe beider Quersummen dann $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 27$.
Es gibt genau 500 solcher Paare, also ist die Summe der Quersummen der hiermit erfaßten Zahlen $500 \cdot 27 = 13500$. Dazu ist noch die Quersumme 1 von 1000 zu addieren. Die gesuchte Summe beträgt mithin 13501.

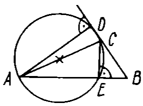
3. (I) Angenommen, x sei eine Zahl mit der genannten Eigenschaft, dann gilt $\frac{a + x}{b - x} = \frac{b}{a}$;
hieraus folgt $a^2 + ax = b^2 - bx$
also $(a + b)\,x \quad = b^2 - a^2$.
Da a und b positiv sind, ist $a + b \neq 0$, und es folgt weiter
$x = \frac{b^2 - a^2}{a + b} = b - a$, und $b - a$ ist ganz.
Somit kann höchstens die Zahl $x = b - a$ die genannte Eigenschaft haben.
(II) Durch Umkehrung dieser Schlüsse folgt, daß sie tatsächlich diese Eigenschaft besitzt. Aus $x = b - a$ folgt $(a + b)\,x = b^2 - a^2$, hieraus $a\,(a + x) = b\,(b - x)$. Da ferner $a \neq 0$ gilt und mithin auch $b - x\ (= a) \neq 0$ ausfällt, ergibt sich weiter $\frac{a + x}{b - x} = \frac{b}{a}$, w.z.b.w.

4. *1. Lösungsweg*: (I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade. Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade. Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)
(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - a$. nicht.) Läßt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Läßt a bei Division durch 3 den Rest 2, so läßt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht. Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

2. Lösungsweg: (I) Von den beiden Zahlen $a - 1$, a ist stets eine gerade. Daher ist $a^2 - a = (a - 1)\,a$ stets gerade usw. wie 1. Lösungsweg. (II) Von den drei Zahlen $a - 1$, a, $a + 1$ ist stets eine durch 3 teilbar, also auch stets (mindestens) eine der beiden Zahlen $a^2 - a = (a - 1)\,a$ und $a^2 + a = a\,(a + 1)$.

Folglich ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$ und $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar usw.

5. In dem Dreieck $\triangle ABC$ seien (O.B.d.A.) A und C die in der Aufgabe genannten Eckpunkte und D und E die zugehörigen Höhenfußpunkte (siehe Abb.). Da A, E, C nicht auf derselben Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis durch diese drei Punkte. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist wegen des rechten Winkels bei E die Seite AC ein Durchmesser des Kreises, und es liegen auf diesem Kreis die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die AC zur Hypotenuse haben, mithin auch der Punkt D. Folglich ist das Viereck $AECD$ ein Sehnenviereck.



Falls das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig ist, entartet das Sehnenviereck zu einem Dreieck, da in diesem Falle zwei Höhenfußpunkte mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels zusammenfallen. Da jedes Dreieck aber einen Umkreis besitzt, gilt die Behauptung auch in diesem Falle.

6. (I) Da die Zahl zweistellig sein soll, muß sie größer sein als 9. Daraus folgt, daß ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muß als sie selbst. Wegen der 2. Bedingung besagt dies, daß bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muß ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite.

(II) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein. Daraus ergibt sich, daß die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47. Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

9 1. Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z, dann gilt

$$z = 1000\,x + 100\,x + 10\,y + y = 1100\,x + 11\,y = 11\,(100\,x + y)$$

mit $1 \leqq x \leqq 9$ und $0 \leqq y \leqq 9$.

Daraus folgt $11 \mid z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $11^2 \mid z$.

Somit muß gelten $11 \mid 100\,x + y$.

Nun ist aber $100\,x + y = 99 + x + y$, und somit $11 \mid x + y$. Wegen der Einschränkung für x und y kommt nur $1 \leqq x + y \leqq 18$ und damit $x + y = 11$ in Frage.

Daraus folgt $100\,x + y = 99\,x + x + y = 11(9\,x + 1)$ und somit $z = 11^2\,(9\,x + 1)$.

Da z Quadratzahl ist, muß auch $9\,x + 1$ Quadratzahl sein. Wegen $1 \leqq x \leqq 9$ ist dies (wie man z. B. durch Berechnung der Zahlen $9\,x + 1$ für $x = 1, \ldots, 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall. Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$. Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

2. Es seien Q, R, S, T die Reflexionspunkte an den Seiten AB, BC, CD, DA. Sie bilden das Viereck $QRST$. Nach dem Reflexionssatz gilt, wenn die Reflexionswinkel die in der Abbildung angegebenen Größen haben:

$\alpha_1 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_2$; $\gamma_1 = \gamma_2$; $\delta_1 = \delta_2$ (1)

Es sei U der Schnittpunkt der Verlängerung von AB über B hinaus und SR über R hinaus. Dann gilt für die Größen der auftretenden Winkel:

$\varphi_u = 90° - \varphi_R = 90° - \beta_2 = 90° - \beta_1$ (nach (1))

und weiterhin $\alpha_2 = 90° - \beta_1$ sowie

$\alpha_1 = 90° - \beta_1$ (nach (1)).

Daraus folgt $\alpha_1 = \varphi_u$ und damit $TQ \parallel SR$ (2)

Es sei V der Schnittpunkt der Verlängerungen von BC über C hinaus und TS über S hinaus. Dann kann analog gezeigt werden, daß $TS \parallel QR$ gilt (3)

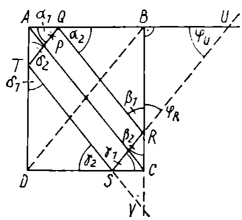
Aus (2) und (3) folgt, daß das Viereck $QRST$ ein Parallelogramm ist. Damit gilt

$\overline{QR} = \overline{TS}$ (4)

Also ist $\triangle QRB \cong \triangle TSD$ (sww).

Daraus folgt: $\overline{BR} = \overline{DT}$ (5)

Weiterhin gilt $\triangle QAT \sim \triangle BQR$; denn sie stimmen in den Winkeln überein.



Also gilt:

$\overline{AQ} : \overline{AT} = \overline{QB} : \overline{BR} = \overline{QB} : \overline{DT}$ (nach (5) (6)).

Aus (6) und der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit $TQ \parallel DB$ (7)

Die Billardkugel kann also höchstens dann den vorgeschriebenen Verlauf nehmen, wenn sie von P aus parallel zur Diagonalen DB des Billardtisches $ABCD$ gegen die Seite AB gestoßen wird. Umgekehrt, wenn die Kugel in dieser Richtung gestoßen wird und (*Fall 1:*) P innerhalb des Dreiecks $\triangle ABD$ liegt, so trifft sie nach je genau einmaliger Reflexion an AB, BC, CD, DA wieder in P ein, falls sie weit genug rollt.

Beweis: Nach Vorraussetzung schneidet die Parallele durch P zu DB die Seite AB in einem inneren Punkte Q. Wegen des Reflexionsgesetzes einerseits und der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle BAC$ andererseits folgt, daß die Kugel dann parallel zu AC weiterläuft, und die Parallele durch Q zu AC wiederum schneidet die Seite BC in einem inneren Punkte R. So schließt man weiter und erhält innere Punkte S, T, Q_1 auf den Seiten CD, DA, AB als weitere Bahnpunkte (zugleich als Reflexionspunkte in dieser Reihenfolge), für die $QR \parallel TS \parallel AC$ und $SR \parallel TQ_1 \parallel DB$ gilt.

Nun folgt einerseits

$\overline{BR} : \overline{DS} = \overline{BC} : \overline{DC} = \overline{DA} : \overline{DC} = \overline{DT} : \overline{DS}$,

also $\overline{BR} = \overline{DT}$, daher

$\triangle QRB \cong \triangle TSD$, folglich $\overline{BQ} = \overline{DS}$

und somit $\overline{AQ} = \overline{CS}$. (8)

Andererseits folgt

$\overline{AQ_1} : \overline{AT} = \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{CD} : \overline{AD}$

$= \overline{CS} : \overline{AT}$, also $\overline{AQ_1} = \overline{CS}$. (9)

Aus (8) und (9) ergibt sich $Q = Q_1$, also fällt die Bahn der Kugel nach der Reflexion bei T (nämlich die Parallele durch Q_1 zu DB) mit der Parallelen durch Q zu DB zusammen, und somit verläuft sie durch P.

(*Fall 2:*) Liegt P auf der Diagonalen DB oder innerhalb des Dreiecks $\triangle BCD$, so schneidet die Parallele durch P zu DB die Seite AB nicht in einem inneren Punkte. Daher kann die Aufgabe in diesem Falle keine Lösung haben.

3. Die vorgegebene Zahl enthält $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ Ziffern, also insgesamt 192 Ziffern. Genau 92 davon sollen in der zu bildenden Zahl enthalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.

Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedenen Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedenen Ziffern. Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern $(8 + 4 \cdot 19 = 84)$ entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.

Die Zahl beginnt dann so:

9999950515253545556575859 60 ....

Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.

Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht. Entsprechend zeigt man, daß als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muß.

Die Zahl lautet also

999997859606162 .... 979899100.

4. Wegen $3 \cdot \frac{1}{4} < 1$ muß mindestens eine der Zahlen a, b, c kleiner als 4 sein. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen dies für die Zahl a zutrifft.

1. Fall: $a = 2$. Es muß gelten

$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, also $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.

Ähnlich wie eben zeigt man, daß mindestens eine der Zahlen b, c kleiner als 5 sein muß. Daraus folgt: Für $\frac{1}{2}$ gibt es nur die folgenden beiden Zerlegungen in zwei Stammbrüche

(1) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ und (2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Fall: $a = 3$. Nach Voraussetzung gilt

$\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, also $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$.

Mindestens eine der Zahlen b, c muß kleiner als 4 sein, und daraus folgt: Für $\frac{2}{3}$ gibt es wieder nur zwei Zerlegungen in zwei Stammbrüche

(3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ und (4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Im Sinne der Aufgabe sind nun in den aus (1), (2), (3) und (4) resultierenden Zerlegungen der Zahl 1 noch alle verschiedenartigen Vertauschungen der Summanden zulässig, wobei jedoch die aus (2) und die aus (4) gewonnenen Zerlegungen miteinander übereinstimmen. Somit erhalten wir, daß genau folgende 10 Tripel die geforderten Bedingungen erfüllen:

(2,4,4), (4,2,4), (4,4,2), (2,3,6), (2,6,3),
(3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2), (3,3,3).

5. Das von C auf AB gefällte Lot habe die Länge h_c. Dabei kann folgendes auftreten:

1. Fall: Das Lot fällt nicht mit der Seitenhalbierenden zusammen. Die Länge der Verbindungsstrecke vom Fußpunkt des Lotes zum Halbierungspunkt der Seite AB sei x.

1.1. Das Lot liegt innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$.

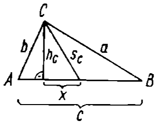


Fig. 1

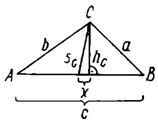


Fig. 2

Zu Fig. 1: Das Lot liegt zwischen AC und Seitenhalbierender.

Zu Fig. 2: Das Lot liegt zwischen BC und Seitenhalbierender.
Durch Anwendung des Satzes des Pythagoras ergibt sich: $h_c^2 = s_c^2 - x^2$ und

Zu Fig. 1:

$$b^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 = s_c^2 - x^2 + \frac{c^2}{4} - cx + x^2$$

also $b^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} - cx$ sowie

$$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2$$

$a^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} + cx$. Mithin erhält man:

$$b^2 + a^2 = 2\,s_c^2 + \frac{c^2}{2}.$$

Zu Fig. 2

$$b^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 = s_c^2 - x^2 + \frac{c^2}{4} + cx + x^2$$

$$b^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} + cx \qquad a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2$$

$$a^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} - cx. \qquad b^2 + a^2 = 2\,s_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

woraus in beiden Fällen $2\,s_c^2 = b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}$,

also $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}$ folgt.

1.2. Das Lot liegt nicht innerhalb des Dreiecks.

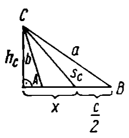


Fig. 3

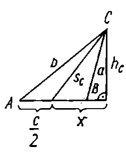


Fig. 4

Zu Fig. 3: Die Seite AC fällt entweder mit dem Lot zusammen, oder sie liegt zwischen dem Lot und Seite BC.

Zu Fig. 4

Die Seite $\overline{BC}$ fällt entweder mit dem Lot zusammen, oder sie liegt zwischen dem Lot und der Seite AC.

Es gilt für beide Fig.: $h_c^2 = s_c^2 - x^2$

Weiter zu Fig. 3

$$b^2 = h_c^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 - cx + \frac{c^2}{4}$$

$$a^2 = h_c^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 + cx + \frac{c^2}{4}.$$

Weiter zu Fig. 4:

$$b^2 = h_c^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 + cx + \frac{c^2}{4}$$

$$a^2 = h_c^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 - cx + \frac{c^2}{4}.$$

Daraus ergibt sich in beiden Fällen

$a^2 + b^2 = 2\,s_c^2 + \frac{c^2}{2}$ also $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

2. *Fall*: Das Lot fällt mit der Seitenhalbierenden zusammen. Dann ist $x = 0$ und $a = b$ und man erhält für $a \neq c$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,a^2 - c^2}$$

bzw. für $a = b = c$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3\,a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Für alle Dreiecke gilt mithin

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}$$

6. Angenommen, die reelle Zahl x erfülle die Ungleichung

$$(*)\ \frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}.$$

Dann gilt $x \neq \frac{1}{2}$. Wegen

$$\frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{9 - 12 + (2x - 1)}{3\,(2x - 1)}$$

$= \frac{2x - 4}{3\,(2x - 1)} = \frac{x - 2}{3\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ ist (*) genau

dann erfüllt, wenn $\frac{x - 2}{3\left(x - \frac{1}{2}\right)} > 0$ ist.

Dies gilt genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle zutrifft:

(1) $x - 2 > 0$ und $x - \frac{1}{2} > 0$.

Hierfür ist $x > 2$ notwendig und hinreichend.

(2) $x - 2 < 0$ und $x - \frac{1}{2} < 0$.

Hierfür ist $x < \frac{1}{2}$ notwendig und hinreichend.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x Lösung von (*), die einem der beiden Intervalle $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $(2, +\infty)$ angehören.

Die Lösungen zu Klassenstufe 10 veröffentlichen wir in Heft 1/69, die Redaktion.

Lösungen

W(5)233 $36:3 = 12$; zwölf Schüler erhielten die Note ‚Zwei' oder ‚Vier'. $12:3 = 4$; $2 \cdot 4 = 8$; acht Schüler erhielten die Note ‚Zwei' und vier Schüler die Note ‚Vier'. $36 - 12 = 24$; es erhielten 24 Schüler die Noten ‚Eins', ‚Drei' oder ‚Fünf'. Die Ermittlung der Anzahl dieser Noten, wird aus der nachstehenden Tabelle deutlich:

Note 1	Note 3	Note 5	Summe
3	7 oder 8	1	11 oder 12
6	13 oder 14 od. 15 od. 16 oder 17	2	21 oder 22 od. 23 od. 24 oder 25

Aus $6 + 16 + 2 = 24$ folgt, daß sechs Schüler die Note ‚Eins', 16 Schüler die Note ‚Drei' und zwei Schüler die Note ‚Fünf' erhielten.

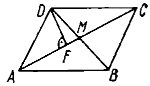
W(5)234 Die ursprüngliche Zahl ist um 27 größer als diejenige Zahl, die man durch Vertauschen der beiden Ziffern erhält. Deshalb muß die Anzahl der Zehner der gesuchten Zahl größer als die ihrer Einer sein. Von allen Zahlen, die diese Bedingung erfüllen, besitzen nur die Zahlen 94, 85 und 76 die geforderte Quersumme 13. Die dritte der gestellten Bedingungen erfüllt allein die Zahl 85; denn es gilt $85 - 58 = 27$. Die ursprüngliche Zahl lautet also 85.

W(6)238 Uwe verlor im zweiten Spiel drei mehr als ein Viertel der ihm nach dem ersten Spiel verbliebenen Murmeln. Wir rechnen $21 + 3 = 24$ und $24 \cdot \frac{4}{3} = 32$; Uwe besaß vor dem zweiten Spiel 32 Murmeln. Im ersten Spiel verlor Uwe zwei mehr als ein Drittel seiner Murmeln. Wir rechnen $32 + 2 = 34$ und $\frac{3}{2} \cdot 34 = 51$; Uwe besaß vor dem ersten Spiel 51 Murmeln.

W(6)239 $56 \cdot 2 = 112$; in zwei Tagen sollten ursprünglich 112 ha abgeerntet sein. $112 - 40 = 72$; zwei Tage vor dem gestellten Plantermin waren bereits 72 ha mehr als vorgesehen geschafft. $64 - 56 = 8$ und $72:8 = 9$; in neun Arbeitstagen wurden diese über den Plan hinausgehenden 72 ha abgeerntet. Die Ernte sollte demnach ursprünglich in 11 Tagen beendet sein.

W(7)243 Es gilt der Satz: Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander. Danach gilt: $\overline{AM} = \overline{MC}$; $\overline{BM} = \overline{MD}$.

Aus $\overline{AM} = \overline{MC}$ und $\overline{BM} = \overline{MD}$ und $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$ u. $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$ folgt $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ und $\triangle ABM \cong \triangle CDM$.



Es sei $\overline{DF}$ Höhe des Dreiecks ACD zur Seite $\overline{AC}$; dann ist $\overline{DF}$ auch Höhe des Dreiecks AMD zur Seite $\overline{AM}$ und des Dreiecks MCD zur Seite $\overline{MC}$.

Aus $\overline{AM} = \overline{MC}$ folgt dann, daß die Dreiecke AMD und MCD flächengleich sind. Aus der zuvor nachgewiesenen Kongruenz zweier Paare von Teildreiecken folgt die Flächengleichheit aller vier Teildreiecke.

W(7)244 Von den vier gegebenen Zahlen sind genau zwei gerade und genau zwei ungerade. Ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen ist gerade, wenn wenigstens ein Faktor gerade ist; ein Produkt aus zwei ungeraden natürlichen Zahlen ist stets ungerade. Von den sechs Produkten sind genau fünf gerade und ein Produkt ungerade. Deshalb ist die Summe dieser Produkte ungerade.

W(8)248 Es ist $\sphericalangle DFC = \alpha + \beta$ als Außenwinkel des Dreiecks ABF. Daher ist der gesuchte Winkel

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle DFC + \sphericalangle FCD = \alpha + \beta + \gamma$$

als Außenwinkel des Dreiecks CDF.

W(8)249 Bezeichnet man die zweite Zahl mit n, so ergibt sich $(n-1)\,n + n\,(n+1) = n^2 - n + n^2 + n = 2\,n^2$, w.z.b.w.

W(9)253 Bezeichnet man die Längen der Katheten mit a und b und die Länge der Hypotenuse mit c, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$.

Daraus folgt $\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$.

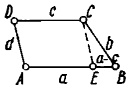
Bezeichnet man mit A den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC, so beträgt die Summe der Flächeninhalte der *Möndchen*

$$A + \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 - \frac{\pi}{8}c^2 = A\,,$$

da $\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$ ist.

Die Summe der Flächeninhalte der *Möndchen* ist also gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, w.z.b.w.

W(9)254 1. *Analyse*: Angenommen, $ABCD$ sei das zu konstruierende Trapez. Zeichnet man durch C eine Parallele zu AD und führt für die Längen der Seiten Variable, wie in der Skizze angegeben, ein, so ist $\overline{CE} = d$, $\overline{EB} = a - c$ und $\overline{BC} = b$. Damit sind das Dreieck EBC konstruierbar und also auch das Trapez $ABCD$.



2. *Konstruktionsbeschreibung*: Ich zeichne das Dreieck EBC, verlängere $\overline{EB}$ bis A. Um A bzw. C zeichne ich Kreise mit den entsprechenden Radien. Ihr Schnittpunkt ist D. $ABCD$ ist das zu konstruierende Trapez.
3. *Beweis*: Da das Trapez nach Konstruktion die geforderten Abmessungen hat, ist es das gesuchte.
4. *Diskussion*: Die Konstruktion ist immer durchführbar, wenn ein Dreieck aus den Seiten a—c, b und d konstruiert werden kann, d. h., wenn für diese Seiten die Dreiecksungleichungen erfüllt sind.

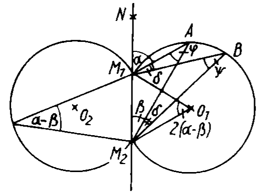
W(10/12)258 Die Fläche kann durch Überdecken von zwei Kreissektoren mit dem Radius a und dem Zentriwinkel 120° erzeugt werden. Das Drachenviereck M_1BM_2C, das sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken mit der Seite der Länge a zusammensetzt, wird dabei doppelt überdeckt. Somit erhält man für den gesuchten Flächeninhalt

$$A = \frac{2\pi}{3} a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, a^2$$
$$= \frac{1}{6} a^2 (4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1{,}23\, a^2 .$$

W(10/12)259 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $a - 1$, a und $a + 1$.
(1) $a - 1 + a + a + 1 = 3a$, w.z.b.w.
(2) Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets eine durch 2 teilbar. Entweder ist a teilbar, oder a läßt den Rest 1; dann ist $a + 1$ durch 2 teilbar.
Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist auch stets eine durch 3 teilbar.
1. Fall: a ist durch 3 teilbar.
2. Fall: a läßt bei Division durch 3 den Rest 1, dann ist $a - 1$ durch 3 teilbar.
3. Fall: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2, dann ist $a + 1$ durch 3 teilbar.
Nun sind Zahlen, die durch 2 und 3 teilbar sind, auch durch 6 teilbar. Daher ist das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 6 teilbar, w.z.b.w.

260a Lösung der Aufgabe von NPT Prof. Dr. phil. habil. H. Reichardt

Es seien M_1 der Drehpunkt des ersten Zeigers und M_2 der Drehpunkt des zweiten Zeigers. Ferner sei A der Schnittpunkt der den Zeigerstellungen zu einem bestimmten Zeitpunkt entsprechenden Geraden, und es sei B der Schnittpunkt zu einem späteren Zeitpunkt. N sei ein Punkt der Geraden M_1M_2, der oberhalb von M_1 liegt (vgl. Abb.). Wir setzen
$\sphericalangle NM_1A = \alpha$, $\sphericalangle NM_2A = \beta$,
$\sphericalangle M_2AM_1 = \varphi$, $\sphericalangle M_2BM_1 = \psi$.
Nun gilt $\sphericalangle AM_1B = \sphericalangle AM_2B = \delta$,
da die beiden Zeiger in der gleichen Zeit stets um den gleichen Winkel vorrücken.



Wir nehmen zunächst an, daß die Winkel α, β und δ sämtlich kleiner als 90° sind und daß $0 < \alpha - \beta < 90°$ gilt. Nun gilt nach dem Satz über die Außenwinkel des Dreiecks

$$\varphi + \beta = \alpha\,, \text{ d. h.,}$$
$$\varphi = \alpha - \beta\,,$$
$$\psi + \beta + \delta = \alpha + \delta\,, \text{ d. h.,}$$
$$\psi = \alpha - \beta\,,$$

also $\varphi = \psi$, d. h., die von den den Zeigerstellungen entsprechenden Geraden gebildeten Winkel sind zu jedem Zeitpunkt gleich groß. Analog beweist man die Gleichheit dieser Winkel für den Fall, daß die Winkel α, β und σ nicht kleiner als 90° sind. Im Falle $\alpha = 0°$*) erhält man den Schnittpunkt M_2 und im Falle $\beta = 0°$ den Schnittpunkt M_1.
Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen daher alle diese Schnittpunkte auf *einem der beiden Kreisbögen*, die zu den Sehnen $\overline{M_1M_2}$ gehören, deren Mittelpunkte 0_1 und 0_2 so liegen daß

$$\sphericalangle M_1 0_1 M_2 = \sphericalangle M_1 0_2 M_2 = 2(\alpha - \beta)$$

gilt, und deren Punkte jeweils auf derselben Seite der Geraden M_1M_2 liegen wie ihr Mittelpunkt 0_1 bzw. 0_2 (vgl. Abb.).
Im Falle $\alpha - \beta = 90°$ liegen beide Kreisbögen auf demselben Kreis, der zu $\overline{M_1M_2}$ als Durchmesser gehört.
Die Fälle $\alpha - \beta > 90°$ und $\alpha - \beta < 90°$ lassen sich durch eine geeignete Umbenennung der Winkel auf die obigen Fälle zurück führen.
Ferner ergibt sich aus der obigen Untersuchung, daß auch jeder Punkt der beiden Kreisbögen Schnittpunkt der den Zeiger-

*) Da nach der Voraussetzung der Aufgabe die durch die Zeiger verlaufenden Geraden einander schneiden, ist stets $\alpha \neq \beta$, d. h., in diesem Falle $\beta \neq 0$.

stellungen zu einem bestimmten Zeitpunkt entsprechenden Geraden ist. Bei einem vollen Umlauf des Zeigers mit dem Drehpunkt M_2 *durchläuft* daher *der Schnittpunkt* der entsprechenden Geraden *zunächst den Kreisbogen um O_1 von M_1 bis M_2, dann den Kreisbogen um O_2 von M_2 bis M_1.*

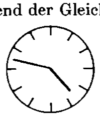
260b Wir teilen das Zifferblatt der Uhr so in 60 Teile ein, daß jeder Stellung eines Zeigers einer reellen Zahl entspricht, die größer oder gleich Null und kleiner als 60 ist. Dann entspricht der Zeigerstellung x des kleinen Zeigers die Zeit $\frac{x}{5}$ Stunden und der Zeigerstellung y des großen Zeigers die Zeit $\frac{y}{60}$ Stunden. Bei einer möglichen Stellung der beiden Zeiger ist $\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m$ eine nichtnegative *ganze* Zahl; denn die Differenz der von den beiden Zeigern angezeigten Zeit ergibt stets eine volle Stundenzahl. Aus der Vertauschung der Zeiger soll wieder eine mögliche Stellung hervorgehen, d. h., auch die Zahl $\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n$ ist ein nichtnegative ganze Zahl. Wir erhalten daher die Gleichungen

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m, \quad (1) \qquad \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n, \quad (2)$$

wobei m und n ganze Zahlen mit $0 \leqq m < 12$ und $0 \leqq n < 12$ sind. Aus (1) und (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} 12x - y &= 60m, \\ -x + 12y &= 60n, \\ 144x - 12y &= 60 \cdot 12m, \\ 143x &= 60(12m + n), \\ x &= \frac{60(12m+n)}{143}. \quad (3) \end{aligned}$$

Für $m = 0,1,2,\ldots,11$ und $n = 0,1,2,\ldots,11$ ergeben sich 144 verschiedene Werte für x mit $0 \leqq x \leqq 60$. Da aber $x < 60$ gelten soll, scheidet der Fall $m = n = 11$ aus, und wir erhalten 143 *verschiedene Zeigerstellungen* entsprechend der Gleichung (3).



Setzen wir *zum Beispiel* $m = 4$, $n = 9$, so erhalten wir wegen (3)

$$x = \frac{60(12 \cdot 4 + 9)}{143} = \frac{3420}{143} \approx 23{,}916,$$

d. h. $\frac{x}{5} \approx 4{,}783$, also die Uhrzeit 4.47 Uhr (vgl. Abb.) bzw. bei Vertauschung der Zeiger 9.24 Uhr.

Diese Aufgabe und weitere interessante Aufgaben über Uhrzeigerstellungen finden wir auch in dem schönen Buch von *J. I. Perelman, Unterhaltsame Algebra*, Berlin, Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1965 (Mathematische Schülerbibliothek).

261 Wir wählen die Teilstrecke $\overline{AB}$ als Einheit; die Strecke $\overline{AD}$ enthält dann genau $1 + 3 + 4 = 8$ Einheiten. Aus $168 : 8 = 21$ folgt:

$$\overline{AB} = 21\,m; \quad \overline{BC} = 63\,m; \quad \overline{CD} = 84m.$$

Probe: $21 + 63 + 84 = 168$.

262 Aus $8 \cdot 12 = 96$ und $96 : (12 + 4) = 6$ folgt, daß Fritz die erste Hälfte des Buches in acht Tagen, die zweite Hälfte in sechs Tagen gelesen hatte. Die Leihfrist betrug demnach 14 Tage.

263 Es sind genau 16 Dreiecke zu finden, und zwar

$\triangle ABC$; $\triangle AGD$; $\triangle BCJ$; $\triangle CEJ$;
$\triangle ABJ$; $\triangle AFG$; $\triangle BEF$; $\triangle DFE$;
$\triangle ACD$; $\triangle AFH$; $\triangle CDG$; $\triangle FHG$;
$\triangle AFD$; $\triangle BCE$; $\triangle CEH$; $\triangle EHJ$.

Die unterstrichenen Dreiecke sind rechtwinklig.

W(5)264 Die Zahl 24 läßt sich als Produkt dreier natürlicher Zahlen wie folgt schreiben:

Produkt	Summe	Produkt	Summe
$1 \cdot 1 \cdot 24$	26	$1 \cdot 4 \cdot 6$	11
$1 \cdot 2 \cdot 12$	15	$2 \cdot 2 \cdot 6$	10
$1 \cdot 3 \cdot 8$	12	$2 \cdot 3 \cdot 4$	9

Nur die Summe 11 ist eine Primzahl; folglich sind die Kinder von Frau Lehmann ein, vier und sechs Jahre alt.

W(5)265 $(1 + 3 \cdot 5) : (7 + 9) = 1$; $13 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 2$; $[(1 + 3) \cdot 5 + 7] : 9 = 3$; $(1 + 3) \cdot 5 - (7 + 9) = 4$; $1 + [3 \cdot (5 + 7)] : 9 = 5$; $13 - 5 + 7 - 9 = 6$; $1 + 3 + 5 + 7 - 9 = 7$; $(13 \cdot 5 + 7) : 9 = 8$; $[13 - (5 + 7)] \cdot 9 = 9$; $13 - (5 + 7) + 9 = 10$.

266 Aus $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ folgt, daß der Tourist am ersten Tag $\frac{1}{6}$ des Weges mehr zurücklegte als am zweiten Tag.
Da $6 \cdot 12 = 72$ ist, betrug die Gesamtlänge des Wanderweges 72 km. Am ersten Tag wurden 36 km, am zweiten 24 km und am dritten 12 km zurückgelegt.

267 Der Zeichnung entnehmen wir:
$\sphericalangle ACD = 180° - 50° = 130°$.
Aus $\sphericalangle ACD = 130°$ und $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ECD$ folgt $\sphericalangle ACE = 65°$.
Ferner gilt: $\sphericalangle ABC = 180° - 70° - 50° = 60°$. Aus $\sphericalangle ABC = 60°$ und $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC$ folgt $\sphericalangle EBC = 30°$.

Für das Dreieck BCE gilt dann:

$\sphericalangle\, BEC = 180° - 30° - 115° = 35°$.

268 Steffen nimmt einen beliebigen Schlüssel; mit ihm versucht er, ein Schloß nach dem anderen zu öffnen. Er muß im ungünstigsten Fall vier Proben machen. Waren diese vier Proben vergebens, so muß der Schlüssel zu dem fünften Schloß passen, eine weitere Probe erübrigt sich also. Mit dem zweiten Schlüssel braucht Steffen nur noch drei Proben zu machen; für den dritten Schlüssel reichen zwei Versuche. Es sind zwei Schlösser mit Schlüsseln übrig geblieben. Mit einem einzigen Schließversuch kommt Steffen jetzt aus.
Da $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ ist, sind im ungünstigsten Fall zehn Proben zu machen, um für jedes Schloß den passenden Schlüssel herauszufinden. In der Praxis ist die Anzahl der Proben meist kleiner.

W(6)269 Für echte Brüche $\frac{a}{b}$ gilt $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a < b$. Für $a + b = 7$ erhalten wir die Brüche $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$.

Nur der Bruch $\frac{3}{4}$ erfüllt die gestellten Bedingungen: $\frac{3+1}{4-3} = 4$.

W(6)270 Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar. Für $a = 0$ erhalten wir die Zahlen 0, 1, 2; nur 2 ist Primzahl. Für $a = 1$ erhalten wir die Zahlen 1, 2, 3; nur 2 und 3 sind Primzahlen. Für alle weiteren Belegungen ($a = 2,3,4,\ldots$) erhalten wir unter den drei Zahlen mindestens eine, die durch 2, und genau eine Zahl, die durch 3 teilbar ist. Unter den drei Zahlen sind also stets mindestens zwei zusammengesetzte Zahlen zu finden. Die Primzahl 2 ist demnach bestimmt Teiler einer dieser drei Zahlen; das trifft auch für die Primzahl 3 zu.

271a $110 \cdot 25 = 2750$; $h_1 = \frac{3500}{2750} \approx 1{,}27$; das Wasser steht im Becken rund 1,27 m hoch.

b $h_2 = \frac{3500 + 2000}{2750} = \frac{5500}{2750} = 2{,}00$; das Wasser steigt auf 2 m Höhe an.

272 Es sei s die Maßzahl (in km) der gesamten Fahrstrecke und s_1, s_2 seien die Maßzahlen der beiden Teilstrecken, dann gilt $s_1 + s_2 = 243$. Nehmen wir weiter an, der Zug benötige zum Durchfahren der ersten Teilstrecke x Stunden, dann gilt
$27\,x + (8 - x) \cdot 36 = 243$, also $x = 5$.
Die erste Teilstrecke wird in 5 Stunden, die zweite in 3 Stunden durchfahren.
$(27 \cdot 5 + 36 \cdot 3 = 135 + 108 = 243)$

273 Es sei x eine Lösung der gegebenen Gleichung; dann gilt

$$mx + 2\,m + 3\,m - 7 = 2\,x + 6 + m^2 + m - 18, \quad (1)$$

$$x\,(m - 2) = m^2 - 4\,m - 5. \quad (2)$$

Für alle rationalen Zahlen m, für die $m \neq 2$ ist, hat daher die gegebene Gleichung eine Lösung in x, und zwar

$$x = \frac{m^2 - 4m - 5}{m - 2}.$$

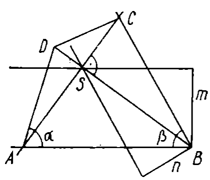
Für $m = 2$ hat die gegebene Gleichung keine Lösung, da in diesem Falle aus der Gleichung (2) $x \cdot 0 = 4 - 8 - 5 = -9$ folgt, was nicht möglich ist.

W(7)274 Es gibt fünf verschiedene Möglichkeiten, die Zahl 30 als Produkt von drei Faktoren zu schreiben; sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

a	b	c	a + b + c
1	1	30	32
1	2	15	18
1	3	10	14
1	5	6	12
2	3	5	10

Dabei gilt $a \cdot b \cdot c = 30$ und $a \leqq b \leqq c$.
Die Summe $a + b + c$ ist nur für die Zahlentripel (1,1,30) und (1,5,6) durch 4 teilbar. Die drei gesuchten Zahlen sind entweder 1, 1 und 30 oder 1, 5 und 6.
Im Zusatz wird gefordert, daß es eine kleinste Zahl im Zahlentripel gibt und daß sie Teiler der beiden anderen Zahlen ist. Nur das Zahlentripel (1,5,6) erfüllt diese Bedingung, denn es gilt $1 < 5 < 6$ und $1 \mid 5$ und $1 \mid 6$. In diesem Fall sind 1, 5 und 6 die gesuchten Zahlen.

W(7)275 Wir konstruieren den Winkel $\beta = 60°$ mit seinem Scheitelpunkt B. Danach zeichnen wir zu dem einen Schenkel des Winkels β eine Parallele im Abstande $m = 35$ mm



und zu dem anderen Schenkel eine Parallele im Abstande $n = 25$ mm so, daß der

Schnittpunkt S dieser beiden Parallelen ein innerer Punkt des Winkels β ist. Wir verbinden die Punkte B und S. Nun konstruieren wir in S die Senkrechte zu $\overline{BS}$; sie schneidet den einen Schenkel des Winkels β in A, den anderen Schenkel in C. In A tragen wir dann an $\overline{AB}$ den Winkel $\alpha = 75°$ an; sein freier Schenkel schneidet die verlängerte Strecke $\overline{BS}$ im Punkte D. Verbinden wir schließlich C mit D, so erhalten wir das zu konstruierende Viereck $ABCD$.

276a $115 \cdot 989 = 113735$

b $327 \cdot 413 = 135051$

Umfassende Lösungen bringen wir in H. 6/68.

W(8)277 Wegen des zweiten Satzes der Aufgabe kann Petja *nicht* Schüler der 4. oder 6. Klasse sein. Wegen des dritten Satzes können Wasja und Kolja *nicht* Schüler der 5. Klasse sein. Wegen des vierten Satzes können Kolja und Stepa nicht Schüler der 6. oder 7. Klasse sein.
Wir erhalten folgende Tabelle, in der wir jeweils ein F eingetragen haben, wenn die betreffende Aussage falsch ist:

x ist Schüler der	4.	5.	6.	7.	Klasse
Wasja		F			
Kolja		F	F	F	
Petja	F		F		
Stepa			F	F	

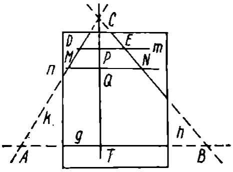
Aus der Tabelle wird ersichtlich, daß *Wasja* Schüler der 6. *Klasse* ist, da die anderen Jungen nicht Schüler dieser Klasse sind.
Also ist Wasja nicht Schüler der 4., 5. und 7. Klasse. Daher ist *Petja* Schüler der 7. *Klasse*. Die Tabelle zeigt jetzt das folgende Bild, wobei wir für wahre Aussagen ein W eingetragen haben.

x ist Schüler der	4.	5.	6.	7. Klasse
Wasja	F	F	W	F
Kolja		F	F	F
Petja	F		F	W
Stepa			F	F

Daraus folgt weiter: *Kolja* ist Schüler der 4. *Klasse*; Stepa ist nicht Schüler der 4. Klasse, also ist *Stepa* Schüler der 5. *Klasse*. Damit ist die Aufgabe gelöst. Vervollständige die Tabelle!

W(8)278 Wir zeichnen zur Geraden g zwei Parallelen m und n so, daß sie die Geraden k und h in den Punkten D und E bzw. M und N schneiden und daß diese Punkte auf dem Zeichenblatt liegen. Wir halbieren die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{MN}$; die Halbierungspunkte seien P und Q. Die Gerade PQ schneidet die Gerade g im Punkt T so, daß $\overline{AT} = \overline{BT}$ gilt.

Beweis: $\triangle ABC \sim \triangle MNC \sim \triangle DEC$.
Die Strecke $\overline{PC}$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks DEC, die Strecke $\overline{QC}$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks MNC.



Aus der Ähnlichkeitslage der Dreiecke folgt, daß die Strecke $\overline{TC}$ Seitenhalbierende des Dreiecks ABC sein muß.

279 1. *Fall*: Die natürliche Zahl z sei gerade, d. h., $z = 2m$. Dann gilt $2m + (2m)^2 = 2m(2m+1)$, also ist die Summe eine gerade Zahl.
2. *Fall*: Die natürliche Zahl z sei ungerade, d. h., $z = 2m + 1$. Jetzt gilt $(2m+1) + (2m+1)^2 = 2m + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4m^2 + 6m + 2 = 2(m^2 + 3m + 1)$; also ist auch in diesem Falle die Summe eein gerade Zahl. Die Behauptung ist also in jedem Falle richtig.

W(9)280 Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder
$2x - 3 > 0$ und $3x + 7 > 0$ oder (1)
$2x - 3 < 0$ und $3x + 7 < 0$ gilt. (2)
Der Fall (1) trifft genau dann zu, wenn
$x > \frac{3}{2}$ *und* $x > -\frac{7}{3}$, d. h., wenn $x > \frac{3}{2}$ gilt.
Der Fall (2) trifft genau dann zu, wenn
$x < \frac{3}{2}$ *und* $x < -\frac{7}{3}$, d. h., wenn $x < -\frac{7}{3}$ gilt.
Die Ungleichung ist also genau dann erfüllt, wenn entweder $x < -\frac{7}{3}$ oder $x > \frac{3}{2}$ gilt.

281a Es seien x der erste Faktor und y der zweite Faktor.
Dann gilt wegen Zeile 2

$$7x < 910, \text{ d. h., } x < 130.$$

In der Zeile 3 steht $8x$ oder $9x$; daher gilt

$$9x \geqq 1000, \text{ d. h., } x > 111.$$

Wegen Zeile 4 endet ein Vielfaches von x auf Null, also ist x eine der Zahlen 115, 120, 125. Wegen Zeile 2 ist der Zehner von $7x$ Null also gilt $x = 115$. Wegen Zeile 5 gilt
$xy \geqq 100000$, d.h., $y \geqq \frac{100000}{x} = \frac{100000}{115} > 800$.
Daher kann in der Zeile 4 nur $8x$ und in der Zeile 3 nur $9x$ stehen, und wir erhalten genau eine Lösung, nämlich $115 \cdot 897 = 103155$.

281b Es seien x der erste Faktor und y der zweite Faktor. Dann gilt wegen Zeile 4
$7x > 10000$, d. h., $x > 1400$.
Nun kann in Zeile 5 nur ein ungerades Vielfaches von x stehen, da das Vielfache auf 5 endet. Wäre $y \geqq 3700$, so wäre $xy > 5000000$, was der Zeile 6 widerspricht.
Daher gilt $1700 < y < 1800$.
Wegen Zeile 6 gilt ferner $xy > 4000000$,

also $x > \frac{4000000}{y} > \frac{4000000}{1800} > 2000$;

ferner gilt $x < \frac{5000000}{y} < \frac{5000000}{1700} < 2942$.

Daher kann in Zeile 2 nur $2x$ stehen, und es gilt

$2x \geqq 5000$, d. h., $x \geqq 2500$.

Wegen Zeile 5 endet x auf 5, daher endet wegen Zeile 4 $7x$ auf 55. Das ist aber nur möglich, wenn x auf 65 endet. x ist daher eine der Zahlen 2565, 2665, 2765, 2865.
Wir erhalten:

```
2 * 6 5 · 1 7 * 2
-----------------
          5 * 3 0
        * 5 * *
    * * * 5 5
    2 * 6 5
-----------------
    4 * * 2 * * 0
```

Nun muß die Summe aus dem Hunderter in Zeile 2 und dem Zehner in Zeile 3 mindestens 15 betragen, da sonst in Zeile 6 der Tausender nicht gleich 2 sein könnte. Daher beträgt der Hunderter in Zeile 2 mindestens 6. Das ist aber nur möglich, wenn $x = 2865$, also $2x = 5730$ ist. Daraus folgt aber, daß $3x$ in Zeile 3 steht, da sonst der Zehner in Zeile 3 nicht mindestens 8 betragen würde oder die Zahl fünfstellig wäre. Es gibt daher wieder genau eine Lösung, nämlich:

$2865 \cdot 1732 = 4962180$.

W(10)282 Zur Abkürzung bezeichnen wir die vier Personen mit w, k, p, s, die vier Sportgemeinschaften mit A, D, L, S und die vier Sportarten mit α (Schach), β (Schwimmen), γ (Tennis), δ (Fußball). Da jede der vier Personen genau einer Sportgemeinschaft angehört und genau eine Sportart aktiv betreibt, können wir z. B. schreiben:

$w = D$, wenn w der Sportgemeinschaft D angehört,
$w \neq D$, wenn das nicht der Fall ist;
$w = \alpha$, wenn w die Sportart α betreibt,
$w \neq \alpha$, wenn das nicht der Fall ist, usw.

Dann folgt aus den Bedingungen der Aufgabe:

a) $\alpha = S$, $p \neq \alpha$, also $p \neq S$;
b) $\gamma \neq D$, $w \neq D$,
c) $p \neq \delta$, $k \neq \delta$;
d) $\alpha \neq A$, $\gamma \neq A$;
e) $k \neq D$, $p \neq D$; f) $\delta \neq D$.

	A	D	L	S	α	β	γ	δ
w		$\boxed{F}$						
k		$\boxed{F}$						$\boxed{F}$
p		$\boxed{F}$		$\boxed{F}$	$\boxed{F}$			$\boxed{F}$
s	F	W	F	F				
α	$\boxed{F}$	F	F	$\boxed{W}$				
β	F	W	F	F				
γ	$\boxed{F}$	$\boxed{F}$	W	F				
δ	W	$\boxed{F}$	F	F				

Tabelle 1

	α	β	γ	δ
w	F	F	F	W
k	W	F	F	$\boxed{F}$
p	$\boxed{F}$	F	W	$\boxed{F}$
s	F	$\boxed{W}$	F	F

Tabelle 2

Wir erhalten die umrahmten Angaben der Tabelle 1.
Dabei bedeutet „F“, daß die betreffende Aussage nicht zutrifft, dagegen „W“, daß sie zutrifft. Aus den umrahmten Angaben der Tabelle erhalten wir sofort die nicht umrahmten Angaben. Es gilt also
$\alpha = S$, $\beta = D$, $\gamma = L$, $\delta = A$, also $s = D = \beta$. Wir können daher die Tabelle 1 weiter ausfüllen und erhalten $w = \delta = A$,
$k = \alpha = S$, $p = \gamma = L$ (siehe Tabelle 2).
Daher erhalten wir das folgende Ergebnis, das mit den Bedingungen a) bis f) der Aufgabe im Einklang steht:
Wladimirow ist Mitglied von *Avantgarde* und Fußballspieler, Koslow ist Mitglied von *Spartak* und Schachspieler, Petrow ist Mitglied von *Lokomotive* und Tennisspieler, Stepanow ist Mitglied von *Dynamo* und Schwimmer.

W(10/12)283a Da im *dekadischen Positionssystem* gerechnet werden soll, gilt $(10^4 \cdot W + 10^3 \cdot O + 10^2 \cdot C + 10 \cdot H + E) \cdot 4$
$= 10^4 \cdot M + 10^3 \cdot O + 10^2 \cdot N + 10 \cdot A + T$.
Dabei sind die Buchstaben jeweils durch eine natürliche Zahl, die kleiner als 10 ist, zu ersetzen. Ferner ist $W \neq 0$, $M \neq 0$. Wegen $4 \cdot W < 10$ ist W gleich 1 oder 2.
Ferner ist O gleich 0, 3, 6 oder 9, da sonst ein Widerspruch zur 2. Spalte auftreten würde.
Setzt man jetzt die zugelassenen Zahlen für W und O ein, so erhält man durch systematisches Probieren, wenn man alle Fälle ausscheidet, in denen sich eine Zahl wiederholt, die folgenden Lösungen:

```
  1 3 2 7 4      1 3 4 0 7      1 9 8 6 3
+ 1 3 2 7 4    + 1 3 4 0 7    + 1 9 8 6 3
+ 1 3 2 7 4    + 1 3 4 0 7    + 1 9 8 6 3
+ 1 3 2 7 4    + 1 3 4 0 7    + 1 9 8 6 3
-----------    -----------    -----------
  5 3 0 9 6      5 3 6 2 8      7 9 4 5 2
```

Ferner erhalten wir für die Aufgaben d, c und b die folgenden Lösungen:

```
d) 8-adisch      c) 7-adisch      b) 6-adisch
  2 3 1 5
  2 3 1 5      1 6 2 1      2 3 4 2      2 1 5 3
+ 2 3 1 5    + 1 6 2 1    + 2 3 4 2    + 2 1 5 3
---------    ---------    ---------    ---------
  7 1 4 7      3 5 4 2      5 0 1 4      4 3 5 0
```

Umfassende Lösungswege veröffentlichen wir in H. 6/68

Mathematische Schülerbücherei (MSB)

KRYSICKI

Zählen und Rechnen einst und jetzt

Übersetzung aus dem Polnischen

107 Seiten mit etwa 46 Abbildungen. 12,0 × 19,0 cm (Nr. 39)
Kartoniert etwa 5,60 M

In elementarer Weise wird die Entwicklung des Zahlbegriffs, der Zahlendarstellung und der Rechenhilfsmittel behandelt, deren man sich im Laufe der Zeit bediente. Damit werden vor allem die Leser angesprochen, die über keine besonderen mathematischen und historischen Vorkenntnisse verfügen.

GELFAND/GLAGOLEWA/KIRILLOW

Die Koordinatenmethode

Übersetzung aus dem Russischen

Etwa 80 Seiten mit etwa 36 Abbildungen. 12,0 × 19,0 cm (Nr. 41)
Kartoniert etwa 4,— M

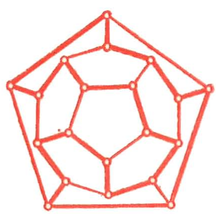
Zunächst wird die Koordinatenmethode auf der Geraden, in der Ebene und im dreidimensionalen Raum behandelt; es werden verschiedene Koordinatensysteme eingeführt. Danach werden die erworbenen Kenntnisse angewandt, um die Beziehungen des vierdimensionalen Raumes zu erfassen. Beispiele und Aufgaben erleichtern das Verstehen.

SEDLÁČEK

Einführung in die Graphentheorie

Übersetzung aus dem Tschechischen

171 Seiten mit 73 Abbildungen. 12,0 × 19,0 cm (Nr. 40)
Kartoniert etwa 6,20 M

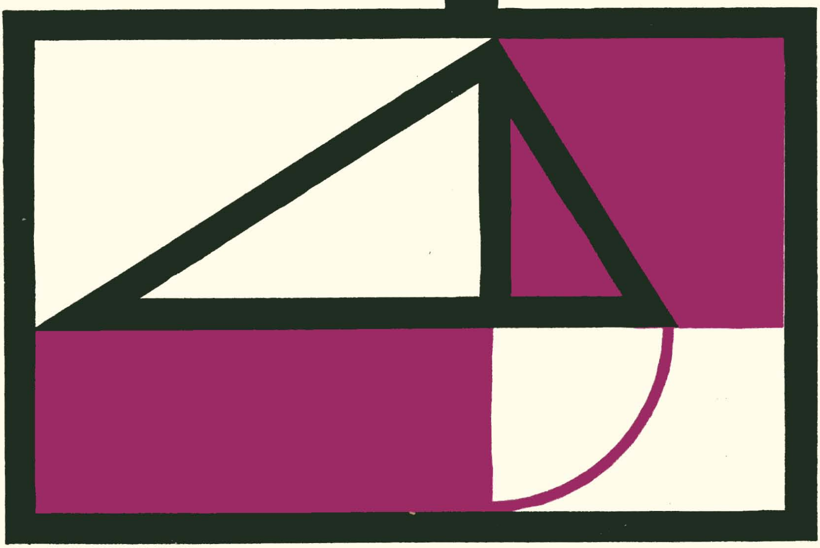


Das Buch gibt eine für Schüler verständliche Einführung in die Graphentheorie, deren Anwendungsmöglichkeiten auf verschiedensten Gebieten mehr und mehr zunehmen. Es werden ungerichtete und gerichtete Graphen behandelt. Die Auswahl der Sätze ist dem Verständnis eines Anfängers angepaßt.

B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968 Heft 6

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Junge Welt-Bild, Glomm, Berlin (S. 161); Archiv: TU Dresden, Inst. f. Maschinelle Rechentechnik, Literaturstelle (S. 166); Archiv: J. Frormann, Berlin (S. 172)
Vignetten: B. Gubitz, Leipzig (S. 180, 181); H.-J. Jordan, Lpzg.;

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß: 23. Sept. 1968

Inhalt

* Bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

X. Internationale Mathematik-Olympiade

Bericht

An der X. Internationalen Mathematik-Olympiade in Moskau nahm auch aus der DDR eine Delegation von acht Schülern unter der Leitung von Herrn *Dr. Bausch* und Herrn *Oberstudienrat Titze* teil. Wir hatten uns in einem vierzehntägigen zentralen Lehrgang gründlich vorbereitet und konnten nun am 7. Juli mit einer IL-18 der Interflug von Berlin-Schönefeld nach Moskau fliegen. Fünf von uns besaßen bereits internationale Erfahrung, denn sie hatten schon an der IX. IMO in Jugoslawien erfolgreich teilgenommen. Natürlich hofften wir alle, daß es uns auf der Jubiläumsolympiade gelingen würde, unseren zweiten Platz von Cetinje zu verteidigen.

Auf dem Flughafen Scheremetjewo wurden wir von unserer netten Dolmetscherin *Alla* schon erwartet und in einer Fahrt durch das abendliche Moskau in unser Quartier, eine Internatsschule in der Nähe der Lomonossow-Universität, geführt. Bis zur Eröffnung der Olympiade blieben uns noch zwei Tage, für die unsere Gastgeber ein nettes Programm vorbereitet hatten. Wir besichtigten das Schloßmuseum von Kuskowo mit seiner schönen Parkanlage und genossen aus dem 25. Stockwerk der Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität den Blick auf das Häusermeer von Moskau, seine Neubauviertel und das Lenin-Stadion jenseits der Moskwa bis hin zum neuen Fernsehturm in Ostankino. Auch im Pionier-Palast waren wir zu Gast; er beeindruckte uns durch seine moderne Architektur.

Am Morgen des 10. Juli wurde die Olympiade von *Professor Markuschewitsch,* dem Vorsitzenden der Jury, eröffnet. Mannschaften aus 12 Ländern traten zum Wettbewerb an: aus Bulgarien, der CSSR, der DDR, England, Italien, Jugoslawien, der Mongolischen VR, Polen, Rumänien, Schweden, der UdSSR und Ungarn. Aus Österreich war ein Beobachter erschienen, um sich über den Verlauf der Olympiade zu unterrichten.

Die Klausuraufgaben des ersten Tages waren zu unserer Überraschung recht leicht zu bewältigen und bereiteten vor allem den Mannschaften aus der UdSSR, der DDR und Ungarn, die im Vorjahr die ersten drei Plätze belegt hatten, keine großen Schwierigkeiten. So mußte die Entscheidung durch die zweite Klausur fallen, die sich als etwas schwieriger erwies. Der Schwerpunkt lag auf der letzten Aufgabe, zu der mehrere originelle Lösungen gefunden wurden. Aber auch hiermit wurden wir gut fertig, und so konnten wir uns abends unbeschwert an den Darbietungen des Moskauer Staatszirkus erfreuen.

Drei Tage später entschied die Jury über die Verteilung der Preise und Diplome. Große Freude herrschte bei uns, als wir erfuhren, daß wir mit 304 von 320 möglichen Punkten das bisher beste Mannschaftsergebnis und damit den ersten Platz vor der UdSSR, Ungarn und England erkämpft hatten. In der Einzelwertung erhielten wir fünf erste und drei zweite Preise, so daß keiner von uns leer ausging. Besonders hat uns gefreut, daß wir unseren Sieg gerade auf der Jubiläumsolympiade feiern konnten. Daß es uns gelingen würde, sogar unsere Gastgeber, die schon jahrelang den ersten Platz behauptet hatten, zu schlagen, hatten wir kaum erwartet. Trotzdem glauben wir, daß unser Sieg kein Zufall war, sondern durch die gute Vorbereitung an unseren Schulen in mathematischen Zirkeln und Lehrgängen im Zuge des neuen sozialistischen Bildungssystems möglich wurde.

An den mathematischen Teil der Olympiade schlossen sich, wie schon in den letzten Jahren, Exkursionen durch das Gastgeberland an. So besuchten wir die Wohn- und Arbeitsräume Lenins im Moskauer Kreml mit seiner 20000 Bände umfassenden Bibliothek, das Dorf Leninskije Gorki, wo Lenin seine letzten Lebensjahre verbrachte, und das Lenin-Mausoleum auf dem Roten Platz. Besonders beeindruckten uns die historischen Bauten des Kreml, seine Türme und Mauern, Kathedralen und Paläste sowie die Rüstkammer mit ihren reichen Schätzen, die von der altrussischen handwerklichen Kunst zeugen. Ein weiterer Höhepunkt war der Besuch der

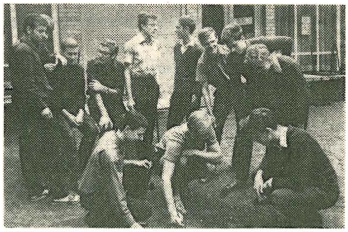
Tretjakow-Galerie, durch die uns unsere Betreuerin Alla mit großer Sachkenntnis führte. Natürlich durfte auch eine Besichtigung der Volkswirtschaftsausstellung nicht fehlen. Besonders interessierten uns hier die Pavillons Atomenergie und Kosmos.

Drei Tage verbrachten wir in Leningrad. Selbst der Dauerregen, der uns dort empfing, konnte unsere gute Stimmung nicht trüben. Unser Programm war ebenso reichhaltig wie in Moskau. Auf einer Stadtrundfahrt sahen wir den berühmten Panzerkreuzer *Aurora*, den Smolny, das Winterpalais und die Peter-Pauls-Festung. Ein besonderes Erlebnis war für uns alle der Besuch der Ermitage. Leider war die Zeit viel zu kurz, um diese weltberühmte Gemäldesammlung eingehend kennenzulernen. Das bekannte Leningrader Ballett erlebten wir in einer Aufführung von *Antonius und Kleopatra* des sowjetischen Komponisten *Lebedew*. Ein Ausflug führte uns nach Peterhof, wo *Peter I.* seine Sommerresidenz erbauen und mit einem wunderschönen Park umgeben ließ, der an die Ostsee grenzt. Die Rückfahrt mit einem Tragflügelboot *Raketa* machte uns viel Spaß. Im Pionierpalast wurden wir schon von sowjetischen Pionieren erwartet, mit denen wir einen frohen Nachmittag bei Spiel und Tanz verbrachten. Der Expreßzug *Roter Pfeil* brachte uns in $8\frac{1}{2}$-stündiger Fahrt nach Moskau zurück.

Am 18. Juli wurden im *Auditorium maximum* der Lomonossow-Universität die Preisträger der Olympiade geehrt. Es konnten 22 erste, 22 zweite und 20 dritte Preise vergeben werden. Einen Sonderpreis erhielt das einzige Mädchen unter 96 Teilnehmern, eine mongolische Schülerin, die die höchste Punktzahl ihrer Mannschaft erreicht hatte. Journalisten und Bildreporter interessierten sich besonders für uns als die siegreiche Mannschaft. Mit einem Festessen im Internat wurde die X. IMO offiziell beendet. Am nächsten Vormittag waren wir in der Botschaft der DDR zu Gast, und der Botschafter beglückwünschte uns zu unseren Erfolgen.

Auf dem Flugplatz verabschiedeten wir uns von unserer Betreuerin, mit der wir herzliche Freundschaft geschlossen hatten, und traten den Rückflug nach Berlin an.

Noch stand uns ein Höhepunkt unserer erlebnisreichen Tage bevor — ein Empfang, den das Ministerium für Volksbildung, der Zentralrat der FDJ und die Mathematische Gesellschaft der DDR für uns veranstalteten. Wir wurden mit der Artur-Becker-Medaille sowie mit Anerkennungsurkunden und wertvollen Geld- und Buchprämien ausgezeichnet. Wir alle haben in Moskau unser Bestes gegeben, haben viele Freundschaften geschlossen und unvergeßliche Eindrücke von der Sowjetunion gewonnen. Bald beginnt die dritte Stufe der VIII. Mathematik-Olympiade der DDR, und wir werden uns anstrengen, auch bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade in Bukarest wieder dabei zu sein.



Eifrige Diskussion unter den Teilnehmern des Vorbereitungslagers zur X. IMO (Juni 1968, Pionierpark „Ernst Thälmann", Wuhlheide)

Lösungen zu den Aufgaben der X. IMO

1. Aufgabe

Es sei ΔABC ein solches Dreieck. Seine Seitenlängen seien $a = n - 1$, $b = n$ und $c = n + 1$, die gegenüberliegenden Winkel α, β und γ. Dann gilt:

$$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\cos\alpha$$
$$n^2 = (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2(n+1)(n-1)\cos\beta$$
$$(n+1)^2 = (n-1)^2 + n^2 - 2(n-1)\,n\cos\gamma$$

und damit

$$\cos\alpha = \frac{n+4}{2n+2},\quad \cos\beta = \frac{n^2+2}{2n^2-2},$$
$$\cos\gamma = \frac{n-4}{2n-2}.$$

Es ist $\alpha < \beta < \gamma$, da der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt.

Ist einer der Winkel doppelt so groß wie der andere, so besteht einer der drei Fälle

I. $\beta = 2\alpha$, II. $\gamma = 2\beta$, III. $\gamma = 2\alpha$,

die einzeln untersucht werden.

I. $\beta = 2\alpha$

Dann ist $\cos\beta = 2\cos^2\alpha - 1$,

$$\frac{n^2+2}{2n^2-2} = \frac{2(n+4)^2}{4(n+1)^2} - 1$$

und nach Umformung:

$2n^3 - 4n^2 - 8n + 16 = 0$, $2(n-2)^2$ $(n+2) = 0$. Wegen $n > 0$ folgt $n = 2$.

Das Dreieck mit den Seiten $a = 1, b = 2$ und $c = 3$ ist jedoch zu einer Strecke entartet.

II. $\gamma = 2\beta$

Dann ist $\cos\gamma = 2\cos^2\beta - 1$,

$$\frac{n-4}{2n-2}=\frac{2(n^2+2)^2}{4(n^2-1)^2}-1 \text{ und}$$
$2n^4-3n^3-13n^2+3n+2=0$,
$(2n^2-3n-11)(n^2-1)=9$.
Durch Umformung folgt $[2(n-2)^2+(5n-19)](n^2-1)=9$.
Für $n \geqq 4$ gilt:
$2(n-2)^2 \geqq 0, 5n-19 \geqq 1, n^2-1 \geqq 15$,
also $(2n^2-3n-11)(n^2-1) > 9$.
Für $n=2$ und $n=3$ gilt ebenfalls
$(2n^2-3n-11)(n^2-1) \neq 9$,
d. h., im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es keine Lösung.
III. $\gamma = 2\alpha$
Dann ist $\cos\gamma = 2\cos^2\alpha - 1$,
$$\frac{n-4}{2n-2}=\frac{2(n+4)^2}{4(n+1)^2}-1$$
und $2n^3-7n^2-17n+10=0$, $(2n^2-17)(2n-7)=99$.
Für $n>5$ gilt:
$2n^2-17>33$, $2n-7>3$, also $(2n^2-17)(2n-7)>99$.
Für $2 \leqq n < 5$ ist:
$|2n^2-17|<33$, $|2n-7| \leqq 3$, also $(2n^2-17)(2n-7)<99$.
Für $n=5$ ist $(2n^2-17)(2n-7)=99$.
Nur das Dreieck mit den Seiten $a=4$, $b=5$ und $c=6$ kommt als Lösung in Frage.
Es ist noch zu zeigen, daß dieses den Bedingungen der Aufgabe genügt.
Aus $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ und $\cos\gamma=\frac{1}{8}$ sowie
$\cos\gamma=\cos 2\alpha$ folgt, da α und γ Dreieckswinkel sind:
$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\gamma<\frac{\pi}{2} \text{ und } \gamma=2\alpha.$$
Ergebnis: Das Dreieck mit den Seitenlängen
$a=4$, $b=5$, $c=6$
ist das einzige, das die geforderten Eigenschaften hat.

2. Aufgabe

Es sei x eine natürliche Zahl, die die Bedingung erfüllt, und n sei die Stellenzahl von x.
Dann ist $p(x) \leqq 9^n$, $x \geqq 10^{n-1}$.
I. Es sei $n=1$:
Dann ist $p(x)=x$, $x^2-11x-22=0$.
Die Wurzeln $x_{1/2}=\frac{11}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{209}$
sind nicht ganzzahlig.
II. Es sei $n=2$:
Dann ist $x^2-10x-22=p(x)\leqq 81$.
Es folgt $x^2-10x+25 \leqq 128$,
$|x-5| \leqq \sqrt{128} < 12$, $10 \leqq x \leqq 16$.
Nun muß $p(x)+47=(x-5)^2$ eine Quadratzahl sein. Dieser Bedingung genügt nur die Zahl $x=12$. Sie erfüllt auch die gegebene Gleichung.
III. Es sei $n>2$:
Dann ist $0<10^{n-1}-5 \leqq x-5$,
$(10^{n-1}-5)^2 \leqq (x-5)^2$.
Durch Subtraktion von 47 folgt:
$p(x)=x^2-10x-22 \geqq 10^{2n-2}-10^n-22$.
Wegen $n>2$ ist
$10^n \geqq 1000$, $10^{2n-2}-2 \geqq 8$, also
$10^{2n-2}-2\cdot 10^n \geqq 8000$.
Damit ist $p(x) \geqq 10^{2n-2}-10^n-22$
$\geqq 10^n+8000-22>10^n$.
Das widerspricht der Ungleichung $p(x) \leqq 9^n$.
Ergebnis: Nur die Zahl 12 ist Lösung.

3. Aufgabe

Für beliebige reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt
$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2 \geqq 0,$$
und Gleichheit besteht nur für $x_1=x_2=\ldots=x_n$.
Es folgt $(n-1)\sum\limits_i x_i^2 - 2\sum\limits_{i<j} x_i x_j \geqq 0$,
$$n\sum_i x_i^2 \geqq \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j = (\sum_i x_i)^2$$
$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} \geqq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \qquad (*)$$
Es sei nun $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ eine reelle Lösung von (1). Durch Addition aller n Gleichungen erhält man
$$a(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+b(x_1+x_2+\ldots+x_n)+nc=(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$
$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}+\frac{b-1}{a}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{c}{a}=0.$$
Unter Benutzung von (*) folgt daraus
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2+\frac{b-1}{a}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)+\frac{c}{a}\leqq 0$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{b-1}{2a}\right)^2 \leqq \frac{(b-1)^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{\Delta}{4a^2}.\ (**)$$
Gleichheit gilt in (**) wie in (*) nur für $x_1=x_2\ldots=x_n$.
I. Es sei $\Delta<0$:
Dann folgt aus (**)
$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{b-1}{2a}\right)^2<0$ (Widerspruch). Damit gibt es für $\Delta<0$ keine Lösung.
II. Es sei $\Delta=0$;
Dann gilt in (**) notwendig Gleichheit:
$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{b-1}{2a}\right)^2=0$, es folgt
$$x_1=x_2=\ldots=x_n=-\frac{b-1}{2a}.$$
Durch Einsetzen bestätigt man, daß dies eine Lösung ist. Damit gibt es für $\Delta=0$ genau eine Lösung.

III. Es sei $\Delta > 0$: Durch Einsetzen zeigt man, daß die beiden n-Tupel

$$\left[-\frac{b-1+\sqrt{\Delta}}{2a};\ldots;-\frac{b-1+\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \text{ und}$$

$$\left[-\frac{b-1-\sqrt{\Delta}}{2a};\ldots;-\frac{b-1-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

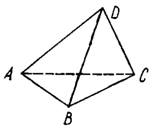
Lösungen von (1) sind.

Damit gibt es für $\Delta > 0$ mehr als eine Lösung.

4. Aufgabe

Es sei AB eine Kante, deren Länge nicht größer als die Länge der übrigen Kanten ist. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\overline{CD} < \overline{AC} + \overline{AD} \qquad \overline{CD} < \overline{BC} + \overline{BD}.$$



Daraus folgt $(\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{CD}) + (\overline{AD} + \overline{BD} - \overline{CD}) > 0$.

Mindestens einer der beiden Summanden ist positiv, es sei also o. B. d. A.

$$\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{CD}. \text{ Weiter ist} \qquad (1)$$

$$\overline{AC} < \overline{BC} + \overline{AB} \leqq \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC} \leqq \overline{CD} + \overline{AC}$$

$$\overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AC} \qquad (2)$$

$$\overline{CD} + \overline{AC} > \overline{BC} \qquad (3)$$

Die Gültigkeit der Dreiecksungleichungen

$$a + b > c \qquad b + c > a \qquad c + a > b$$

ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c. Nach (1), (2), (3) läßt sich daher aus den drei von C ausgehenden Kanten ein Dreieck konstruieren.

5. Aufgabe

a) Es ist $f(x+2a) = f[(x+a)+a]$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} + f(x) - [f(x)]^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + [f(x)]^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \left|f(x) - \frac{1}{2}\right|$$

Nun ist $f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-a) - [f(x-a)]^2}$

$\geqq \frac{1}{2}$, also $f(x+2a) = f(x)$.

b) Beispiel:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)$ genügt für $a = 1$ der Funktionalgleichung, denn:

$$f(x+1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left|\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right|\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1 + \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2} \cdot \frac{1 - \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)[1 - f(x)]},$$

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

6. Aufgabe

Es sei $n = x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_1 x_0 = \sum_{i=0}^{\alpha} 2^i x_i$ mit

$x_i = 0$ oder $x_i = 1$

die Darstellung der Zahl n im Dualsystem.

Dann ist $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1} + x_k$ (*).

Beweis:

Fall I: $x_k = 0$,

$n = x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1}\, 0\, x_{k-1} \ldots x_1 x_0$

und damit $n + 2^k$

$= x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1}\, 1\, x_{k-1} \ldots x_1 x_0$.

Es folgt $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] =$

$x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1} = x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1} + x_k$.

Fall II: $x_k = 1$,

$n = x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1}\, 1\, x_{k-1} \ldots x_1 x_0$

und damit $n - 2^k$

$= x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1}\, 0\, x_{k-1} \ldots x_1 x_0$.

Es folgt $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n - 2^k}{2^{k+1}}\right] + 1$

$= x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_{k+1} + x_k$.

Unter Benutzung von (*) nimmt die Summe folgende Gestalt an:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = x_\alpha x_{\alpha-1} \ldots x_1 + x_0$$
$$+ x_\alpha \ldots x_2 + x_1$$
$$+ x_\alpha \ldots x_3 + x_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ x_\alpha + x_{\alpha-1}$$
$$+ x_\alpha$$

Unter Berücksichtigung der Stellenwerte der x_i folgt

$$S = x_\alpha (2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2} + \ldots + 2^0 + 1)$$
$$+ x_{\alpha-1} (2^{\alpha-2} + \ldots + 2^0 + 1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ x_1 (2^0 + 1) + x_0$$
$$= 2^\alpha x_\alpha + 2^{\alpha-1} x_{\alpha-1} + \ldots + 2^1 x_1 + x_0$$
$$S = n.$$

Ergebnis: Die gesuchte Summe ist gleich n.

Wolfgang Burmeister
Preisträger der X. IMO (DDR-Mannschaft)

Weitere Lösungswege und Berichte findet der interessierte Leser in der Zeitschr. für Lehrer „Mathematik in der Schule" 2/69, d. Red.

In der Sowjetunion erscheinen erstmalig

Die „Mathematischen Manuskripte" von Karl Marx

Unter den zahlreichen Publikationen, die zu Ehren des 150. Geburtstages von Karl Marx in der Sowjetuinon erscheinen, erweckt zweifellos die lang erwartete Veröffentlichung der „Mathematischen Manuskripte" von Marx im Moskauer Verlag Wissenschaft besonderes Interesse. Sie ist das Ergebnis einer mehr als ein Jahrzehnt währenden mühevollen und beharrlichen Forschungsarbeit des Instituts für Marxismus-Leninismus beim ZK der KPdSU. Marx' umfangreicher mathematischer Nachlaß bestätigt, daß Friedrich Engels in seiner Rede am Grabe von Marx durchaus mit Recht hervorhob, daß der große Wissenschaftler und Revolutionär selbst auf dem Gebiet der Mathematik selbständige Entdeckungen gemacht hat. Und mit gleichem Recht konnte Engels im Vorwort zum *Anti-Dühring* feststellen: „Marx und ich waren wohl ziemlich die einzigen, die aus der deutschen idealistischen Philosophie die bewußte Dialektik in die materialistische Auffassung der Natur und Geschichte hinübergerettet hatten. Aber zu einer dialektischen und zugleich materialistischen Auffassung der Natur gehört Bekanntschaft mit der Mathematik und der Naturwissenschaft. Marx war ein gründlicher Mathematiker."

In der Tat: Wie an alle seine wissenschaftlichen Arbeiten ging Marx auch an seine mathematischen Studien mit größter Gründlichkeit, Gewissenhaftigkeit und Systematik heran und fand nicht eher Ruhe, bis ein Weg zur Lösung der auftauchenden Probleme sichtbar wurde. Von besonderem Interesse sowohl für den Historiker als auch für den Philosophen der Mathematik sind dabei seine Ausarbeitung über den historischen Entwicklungsgang des Differentialbegriffs und ein gesondertes Manuskript, in dem er die Methode von D'Alembert, und Lagrange seiner eigenen Differentialmethode gegenüberstellt.

Paul Lafargue berichtet in seinen Erinnerungen an Karl Marx: „In der höheren Mathematik fand er die dialektische Bewegung in ihrer logischsten und zugleich einfachsten Form wieder, seiner Meinung nach war auch eine Wissenschaft erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt war, sich der Mathematik bedienen zu können." Getreu dieser Auffassung wandte Marx im Unterschied zu den meisten Ökonomen seiner Zeit in großem Umfang mathematische Methoden und Denkformen an.

Heute ist die Einführung mathematischer Methoden auf ökonomischem Gebiet, insbesondere bei der laufenden und der Perspektivplanung, sowie in anderen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens zu einem allgemeinen, unumgänglichen Erfordernis geworden. Überall wächst das Bedürfnis, mathematische Methoden und Modelle auszuarbeiten und moderne Rechentechnik zur Lösung komplizierter Probleme einzusetzen.

Darum finden die „Mathematischen Manuskripte" von Marx sowohl inhaltlich als vor allem von der methodischen Seite her nicht nur Interesse bei den Mathematikern, sondern darüber hinaus bei Wissenschaftlern und Forschern vieler anderer Disziplinen, insbesondere im Bereich der Leitung und Planung der Wirtschaft, aber auch seitens der Philosophen, Soziologen usw.

Darum wird die Veröffentlichung dieser Manuskripte auch in unserer Republik eine große Beachtung finden. Die Moskauer Ausgabe bringt die Marxschen Manuskripte in der Originalsprache und in russischer Übersetzung. Da die Manuskripte — von einigen Passagen und wenigen französischen Einstreuungen abgesehen — in deutscher Sprache abgefaßt sind, kann diese Ausgabe auch vom deutschen Leser ohne Schwierigkeiten benutzt werden.

R. Sperl

Aus: „Die Presse der Sowjetunion" 52/68

Eine Wissenschaft ist erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.

Berufsbild

Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung)

Nachdem euch die Berufsbilder des *Facharbeiters für Datenverarbeitung*, des *Mathematisch-technischen Assistenten* und des *Ingenieurs für Programmierung* vorgestellt wurden, wollen wir jetzt den Weg zum Diplom im Fach Mathematik an der TU Dresden und die Einsatzmöglichkeiten beschreiben.
Natürlich sind Diplom-Mathematiker nicht die einzigen Hochschulabsolventen für die Datenverarbeitung. Auch die Fakultäten für Ingenieurökonomie und Elektrotechnik beispielsweise bilden Fachleute für dieses Gebiet aus.

Welche Anforderungen werden gestellt, wenn ihr euch für ein Mathematik-Studium bewerben wollt?

Erforderlich für den Studienbewerber sind überdurchschnittliche Leistungen in Mathematik und sehr gute Leistungen in anderen naturwissenschaftlichen Fächern (insbesondere in Physik), sowie ausgeprägte Fähigkeiten zum Erkennen logischer Zusammenhänge. Voraussetzung für die Immatrikulation ist der Nachweis der Hochschulreife (z. B. Abitur).

Wie sieht der Studienablauf aus?

Für Studenten der Mathematik gliedert sich das Studium in

2 Jahre Grundstudium, 2 Jahre Fachstudium, 1 Jahr Spezialstudium.

In den Vorlesungen des Grundstudiums erfolgt der exakte Aufbau der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer bzw. mehrerer reeller Variabler. Darüber hinaus wird die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der komplexen Funktionen vermittelt.

Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik

In der Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik werden die im Grundstudium erworbenen Kenntnisse durch Vorlesungen über Höhere Analysis, Operationsforschung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ergänzt. Besondere Schwerpunkte der Ausbildung sind Numerische Mathematik, Anwendungsgebiete der Mathematischen Logik und ein technisches Nebenfach (Elektronik).
In der Numerischen Mathematik werden die Verfahren bereitgestellt, die es gestatten, praktische Rechnungen auf Rechenautomaten durchzuführen.
Die Schaltalgebra und Automatentheorie stellen die theoretischen Hilfsmittel bereit, die beim Entwurf aller digitalen Einrichtungen zur Informationsverarbeitung benötigt werden. Solche Einrichtungen sind zum Beispiel Steuerschaltungen, die bei der Automatisierung in der Industrie eingesetzt werden, wie auch Datenverarbeitungsanlagen und Prozeßrechner.
Die Grundlage für die Ausarbeitung von Programmen bilden die Algorithmentheorie und die Programmierungssprachen.

Die zuletzt genannten Anwendungsgebiete der Mathematischen Logik bilden gemeinsam die eigentliche Theorie der informationsverarbeitenden Systeme.
Im Spezialstudium beschäftigt sich der Studierende intensiv mit einem der genannten Fachgebiete. Dabei ergibt sich ein Thema für eine Diplomarbeit, die zum Abschluß des Studiums anzufertigen ist. Der Student soll hierbei zeigen, daß er in der Lage ist, Probleme selbständig zu bearbeiten.

Welche Einsatzmöglichkeiten bestehen?

Die Absolventen der Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik können sowohl in Betrieben und Forschungszentren, die sich mit der Entwicklung von Datenverarbeitungsanlagen beschäftigen, als auch in einem der vielen jetzt entstehenden Rechenzentren zum Einsatz gelangen. Außerdem kommen Forschungsinstitute der Universitäten und Akademien — auch für speziellere Forschungsvorhaben wie z. B. auf dem Gebiet der Linguistik — als Arbeitsstätte in Frage. Für einen kleinen Teil von Absolventen mit überdurchschnittlichen Leistungen besteht die Möglichkeit, an einer Universität, Hochschule oder zentralen Forschungseinrichtung zu arbeiten.

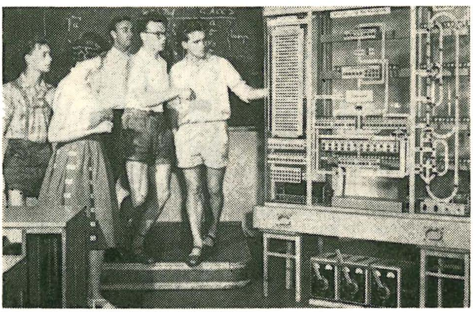
Spezialrichtung Numerische Mathematik

Die stürmische Entwicklung der elektronischen Rechentechnik in den letzten Jahren hat auch zu einem gewaltigen Aufschwung der Numerischen Mathematik geführt.
Neben der Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik bildet deshalb auch die Spezialrichtung Numerische Mathematik Fachleute für die Datenverarbeitung aus.
Für das Fachstudium in dieser Spezialrichtung ist das allgemeine Grundstudium für Mathematiker Voraussetzung.
Der Inhalt des Fachstudiums wird gebildet aus einer Vertiefung der im Grundstudium erworbenen Kenntnisse über Numerische Analysis, Einführung in Aufbau und Arbeitsweise von Rechenautomaten, Algorithmische Sprachen, Optimierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen und Theoretische Physik.

J. Lötzsch/G. Seifert

Welche Einsatzmöglichkeiten bestehen?

Absolventen werden eingesetzt in Organisations- und Rechenzentren der Industrie, der Landwirtschaft und des Verkehrswesens für Programmierung und Problemanalyse oder in Rechenzentren an Hoch- und Fachschulen.



Zusätzlich zu den Vorlesungen und Übungen erfolgt eine umfassende Ausbildung an einer Vielzahl von Geräten der maschinellen Datenverarbeitungs- und Rechentechnik. Das Bild zeigt Studenten im Praktikum bei der Arbeit am Modellautomaten, der vom Institut für Maschinelle Rechentechnik der TU Dresden entwickelt und gebaut wurde.

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Rolf Klötzler

Direktor der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Vorsitzender der Bezirkssektion Halle-Leipzig der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Mit den vorliegenden Aufgaben werdet Ihr auf einen wichtigen Zweig der Mathematik aufmerksam gemacht, auf die Optimierungstheorie. Sie wendet sich Fragen zu, wie man eine mathematisch erfaßbare Entscheidung zu fällen hat, um möglichst günstige Bedingungen zu gewährleisten. Solche Bedingungen können z. B. darauf orientiert sein, möglichst geringe Kosten oder geringe Zeit aufzuwenden. Es kann auch häufig interessieren, einen Produktionsprozeß mit möglichst wenig Arbeitskräften oder möglichst geringem Materialaufwand zu gestalten. Solche und ähnliche Fragen sind natürlich heute vom ökonomischen Standpunkt aus äußerst wichtig. Auf der Oberschule werdet Ihr im Rahmen der Differentialrechnung schon mit solchen Fragen vertraut gemacht. Einfache Aufgaben lassen sich auch schon mit elementaren Mitteln behandeln. Es gibt aber eine große Zahl von Problemen der Optimierungstheorie, die noch ihrer Lösung harren und den vollen Einsatz der höheren Mathematik verlangen. Aus diesem Grunde wird an vielen Hochschulen und Universitäten der DDR zu Problemen der Optimierungstheorie geforscht, so auch an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

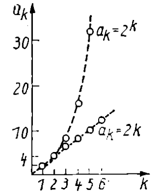
R. Klötzler

9 **298a** Um vom Ort A nach dem 200 km entfernten Ort B zu gelangen, kann man eine Teilstrecke der Länge x zunächst mit dem Verkehrsmittel F_1 und den Rest der Strecke mit dem Verkehrsmittel F_2 zurücklegen.
Die Durchschnittsgeschw. von F_1 ist $v_1 = 20$ km/h. Die Durchschnittsgeschw. von F_2 ist $v_2 = 50$ km/h. Die Benutzung von F_1 kostet pro Kilometer 5 Pf.
Die Benutzung von F_2 kostet pro Kilometer bei einer Fahrstrecke $\leqq 100$ km 7 Pf, während jeder darüber hinausgehende Fahrkilometer nur noch 4 Pf kostet.
Wie ist x zu wählen, um eine optimale, d. h. möglichst günstige (schnelle und billige) Anreise zu haben? Wir fassen dabei eine Lösung x_0 als optimal auf, wenn es kein anderes x gibt, für das sowohl die gesamten Fahrtkosten $K(x)$ als auch die gesamte Fahrzeit $T(x)$ kleiner als $K(x_0)$ bzw. $T(x_0)$ sind.

11
12 **298b** Unter dem Einfluß konstanter Windrichtung und Windstärke kann ein Segelboot in der Richtung des Winkels φ maximal die Geschwindigkeit $v = v_0(1 - \cos\varphi)$ erreichen, wenn v_0 eine positive Konstante ist, φ den Winkel zwischen x-Achse und Kiellinie (Fahrtrichtung) des Bootes darstellt und der Wind in Richtung der negativen x-Achse weht (von einer Abdrift wird abgesehen). Man berechne die aus Geradenstücken bestehende Fahrtroute, auf der das Segelboot am schnellsten vom Punkt O (0,0) zu dem Punkt $A(x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$, $y_0 \geqq 0$ gelangt.
Ist die Lösung eindeutig? Wie groß ist die Fahrzeit T?

Elementare Zahlenfolgen

4. Teil



In *alpha* 5/68 besprachen wir den für die Praxis wichtigen Typ der geometrischen Zahlenfolgen. Die Aufgaben dazu habt ihr sicher richtig gelöst. Vergleicht eure Lösungen mit den hier angegebenen!

Lösungen

294 Geg.: $a_3 = 6$ und $a_6 = \frac{81}{4}$ einer geometrischen Folge. Gesucht: a_1 und q.

Independente Darstellung für geometrische Folgen:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \quad \text{mit } k \in \{1; 2; \ldots\}$$
$$\text{und } q \neq 0.$$

Für $k = 3$ folgt $a_3 = a_1 \cdot q^2$,

für $k = 6$ $\qquad a_6 = a_1 \cdot q^5$.

Division der zweiten Gleichung durch die erste führt auf

$$\frac{a_6}{a_3} = q^3; \text{ also ist } q = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = \frac{3}{2}.$$

Für das Anfangsglied ergibt sich damit

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{8}{3}.$$

295a Independente Darstellung:

$$a_k = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \text{ oder } a_k = 2^{2-k}$$
$$\text{oder } a_k = \frac{1}{2^{k-2}},$$

jeweils mit $k \in \{1; 2; \ldots\}$.

Rekursive Darstellung: $a_k = a_{k-1} \cdot \frac{1}{2}$

für $k > 1$ mit $a_1 = 2$.

295b Graphische Darstellung der Folgen $a_k = 2k$ und $a_k = 2^k$: Die Graphische Darstellung von $a_k = 2k$ ergibt eine Punktfolge längs einer steigenden Geraden; die graphische Darstellung von $a_k = 2^k$ ist eine Punktfolge längs einer steigenden Exponentialkurve (siehe Abb. rechts oben).

Vergleich: Die Glieder der geometrischen Folge $a_k = 2^k$ nehmen sehr bald viel höhere Werte an als die entsprechenden Glieder der arithmetischen Folge 1. Ordnung $a_k = 2k$.

296 Bildet man die zu den gegebenen Folgen zugehörigen Quotientenfolgen, so sieht man leicht:

Die Folge der Schnittgeschwindigkeiten ist *keine* geometrische Folge, dagegen liegt mit der Folge der Drehzahlen eine geometrische Folge vor. Dabei ist natürlich zu berücksichtigen, daß die Drehzahlen auf ganze Zahlen gerundete Werte sind. Die Quotientenfolge ist infolgedessen nur annähernd konstant.

297 1945: $2{,}13 \cdot 10^9$ Menschen
1965: $3{,}20 \cdot 10^9$ Menschen

$$q = \frac{3{,}20 \cdot 10^9}{2{,}13 \cdot 10^9} = 1{,}5$$

1985: $3{,}20 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 = 4{,}80$ Milliarden Menschen.

Nun wollen wir uns einigen weiteren Eigenschaften von Zahlenfolgen zuwenden und die zugehörigen Grundbegriffe erläutern. Zunächst seien die wichtigsten Zahlenfolgen, die wir bisher behandelten, noch einmal zusammengestellt:

(f_1) 2; 4; 6; 8; 10; ...
(f_2) 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22.
(f_3) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ...
(f_4) 1; 4; 9; 16; 25; ...
(f_5) 7; 4; 1; —2; —5; —8.
(f_6) —2; +4; —8; +16; —32;
+64; —128; +256; —512.
(f_8) 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; ...
(f_9) 8; 4; 2; 2; 1;
2; $\frac{1}{2}$; 4; $\frac{1}{8}$; 32; ...
(f_{10}) 1; 2; 4; 8; ...; 2^{63}
(f_{11}) 1; 1; 1; 1; ...
(f_{12}) 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ...

Achtet einmal auf die Zu- oder Abnahme des Zahlenwertes der Glieder einer Folge! Euch fällt auf, daß bei einigen Folgen die Glieder mit wachsender Gliednummer k immer *grö-*

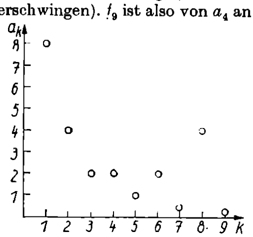
ßere Werte annehmen, bei anderen aber *nehmen* die Zahlenwerte mit wachsendem k *ab.*
Ja, es sind sogar Folgen darunter, bei denen wir ein abwechselndes Zu- und Abnehmen der Zahlenwerte feststellen können.
Wir haben es mit der Eigenschaft des Wachsens und Fallens von Zahlenfolgen zu tun.
Ist für alle k $a_k < a_{k+1}$, ist also das jeweils folgende Glied größer als das k-te Glied, so sprechen wir von einer *streng monoton wachsenden* (oder *steigenden*) Zahlenfolge; gilt jedoch $a_k > a_{k+1}$ für alle k, dann liegt eine *streng monoton fallende* Zahlenfolge vor.
f_1, f_2, f_4 sind Beispiele für streng monoton wachsende Zahlenfolgen, denn jedes $(k+1)$te Glied ist größer als das voranstehende k-te Glied.
f_3, f_5, f_{12} sind Beispiele für streng monoton fallende Zahlenfolgen, denn das Glied a_{k+1} ist jeweils kleiner als der unmittelbare Vorgänger a_k.
f_{11} ist — wie wir bereits wissen — eine *konstante* Folge; hier gilt

$$a_k = a_{k+1} \text{ für jedes } k.$$

Trifft auf alle Glieder einer Zahlenfolge die Relation

$$a_k \leqq a_{k+1} \text{ zu,}$$

so haben wir eine *monoton wachsende* Zahlenfolge vor uns;
mit $a_k \geqq a_{k+1}$ eine *monoton fallende* Zahlenfolge.
Das Gleichheitszeichen, das hier — im Gegensatz zu oben — mit auftritt, besagt also, daß gewisse benachbarte Glieder gleich sein *können.* Demzufolge ist f_8 eine monoton wachsende Zahlenfolge; die ersten fünf Glieder der Folge f_9 bilden eine monoton fallende Zahlenfolge. Die Folge f_9 hat aber bezüglich der weiteren Glieder ein anderes Verhalten: die Zahlenwerte der Glieder nehmen abwechselnd zu und ab. In einem solchen Falle sprechen wir von einer *oszillierenden* Folge (oszillieren, hin- und herschwingen). f_9 ist also von a_4 an oszil-

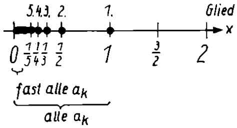


lierend. An der graphischen Darstellung dieser Folge (s. Abbildung) könnt ihr das Oszillieren gut beobachten.
Überlegt, für welche Werte von d (konstante Differenz) arithmetische Folgen 1. Ordnung monoton wachsen, für welche sie monoton fallen!
Überlegt weiter, für welche Werte von a_1 und q geometrische Folgen monoton wachsen bzw. fallen! Gibt es oszillierende geometrische Folgen? —
Bei einigen Folgen treten Glieder mit negativen Zahlen auf. Wir nennen eine Zahlenfolge *positiv definit*, wenn ihre sämtlichen Glieder positiven Wert haben, *negativ definit,* wenn alle ihre Glieder negativ sind. Die Folge 7; 4; 1; –2; –5; –8; –11; ... heißt „im wesentlichen negativ definit", denn alle Glieder von a_4 an tragen negatives Vorzeichen. Eine Folge, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, wird *alternierend* genannt. f_6 zum Beispiel ist eine alternierende Folge.
Zur Beantwortung der oben aufgeworfenen Fragen geben wir eine Übersicht über die *Eigenschaften geometrischer Folgen* in Abhängigkeit vom Anfangsglied a_1 und vom Quotienten q:

Anfangsglied	Quotient	Eigenschaften der betreffenden geometr. Folgen
$a_1 > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend; positiv definit
	$q = 1$	konstant; positiv definit
	$0 < q < 1$	streng monoton fallend; positiv definit
	$q < 0$	oszillierend; alternierend.
$a_1 = 0$	$q \neq 0$	konstant.
$a_1 < 0$	$q > 1$	streng monoton fallend; negativ definit
	$q = 1$	konstant; negativ definit
	$0 < q < 1$	streng monoton wachsend; negativ definit
	$q < 0$	oszillierend; alternierend.

Wählt für jedes der aufgeführten Fälle ein Beispiel aus und stellt diese Zahlenfolge graphisch dar! So werden euch die Zusammenhänge leicht verständlich.
Denkt auch über den folgenden Satz nach, dessen Richtigkeit sich leicht nachweisen läßt: *Eine Folge ist genau dann alternierend, wenn ihre Quotientenfolge negativ definit ist.* —
Zum Schluß wenden wir unser Augenmerk auf die Folge $f_3 = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$
Wir werden an ihr eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft kennenlernen, die gewissen Zahlenfolgen zukommt. f_3 ist offensichtlich eine streng monoton fallende, positiv definite Folge. Das ist an sich schon eine interessante Sache. Obwohl jedes seiner Glieder kleiner ist als das vorangehender werden Werte wie

$-\frac{1}{2}$, -1 o. ä. niemals erreicht, bleiben tatsächlich sämtliche Glieder positiv. Tragen wir die Glieder der Folge als Punkte auf dem reellen Zahlenstrahl ein — übrigens eine zweite Möglichkeit der graphischen Darstellung von Folgen —, so wird uns deutlich, daß in dem endlichen Intervall $0 < x \leqq 1$ *alle*, das heißt, *unendlich viele Glieder* der Folge liegen.



Die Glieder der Zahlenfolge werden immer kleiner, $a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ z. B. ist schon ein Wert nahe Null, aber kein Glied der Folge wird exakt Null. Und doch liegen in unmittelbarer Nähe des Wertes Null, in jeder noch so kleinen Umgebung um Null, *fast alle* Glieder der Folge, d. h., alle bis auf endlich viele. Null ist der *Grenzwert* der unendlichen Zahlenfolge $a_k = \frac{1}{k}$.

Der Grenzwertbegriff hat grundlegende Bedeutung für den Aufbau der Differential- und Integralrechnung sowie weitere Disziplinen der Mathematik. Wir beschreiten damit Gebiete, in denen es eigentlich erst richtig interessant wird.
Die exakte und ausführliche Behandlung des Grenzwertbegriffes muß einer Artikelserie vorbehalten bleiben, die wir später einmal bringen.

Für heute soll es genug sein. Habt Dank für eure Mitarbeit und euer Mitdenken! H. Lohse

So arbeite ich mit „alpha"

Ich heiße *Waltraud Kühne*, war Schülerin der erweiterten Helmholtz-OS, Leipzig. Jetzt besuche ich die Spezialklasse der Martin-Luther-Univers. Halle. Besonders interessieren mich die Fächer Mathematik und Russisch, aber ich diskutiere auch gern politische und philosophische Fragen. In meiner Freizeit lese ich viel, besonders Bücher sozialistischer Schriftsteller. Da ich nach Abschluß der Schulzeit Mathematik studieren will, beschäftige ich mich auch außerhalb des Unterrichts mit mathematischen Problemen.

□ Ich suche mir aus den Wettbewerbsaufgaben meiner Klassenstufe die mich interessierenden Aufgaben heraus (für das Lösen aller Aufgaben fehlt mir die Zeit) und bemühe mich um beste Lösungsmöglichkeit und exakte schriftliche Darstellung. Diese von *alpha* geforderte Bedingung halte ich für sehr wichtig, sie zwingt zu logischem Durchdenken des Problems. Die Benachrichtigungskarten mit dem Vermerk „vorbildlich" oder „gut gelöst", zeigen mir dann, wie weit ich den Anforderungen gerecht geworden bin.

□ Ich hebe mir stets eine „Abschrift" der eingeschickten Aufgaben auf und überprüfe sie dann, wenn die Lösungen veröffentlich werden. Außerdem verfolge ich die Lösungswege der von mir nicht gerechneten Aufgaben. Dieses „Nachbereiten" hat mir manchen einfacheren und schnelleren Lösungsweg eingebracht.

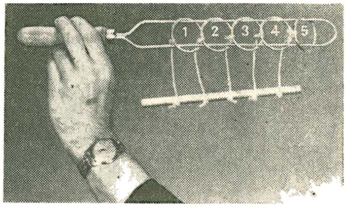
□ Mit großem Interesse verfolge ich die Veröffentlichungen, die solche mathematische Stoffgebiete zum Inhalt haben, die nicht in der Schule behandelt werden, wie z. B. „Elementare Zahlenfolgen", „Mengenlehre" u. ä. oder Aufgaben, die bedeutende Mathematiker stellen.

□ Da ich schon bei meiner Vorstellung erwähnte, daß neben Mathematik Russisch mein Lieblingsfach ist, freue ich mich, wenn Aufgaben in russischer Sprache erscheinen. Neben dem mathematischen Problem reizt mich die Übersetzung. (Heft 5/67, 5/68). In Nummer 5/67 erfuhr ich auch von der Jahresarbeit des Schülers *Reinhard Höppner*, der sowjetische Aufgabensammlungen ins Deutsch übersetzte und mit Lösungsanhang versah. Das ist genau das, was auch mir Freude bereiten würde! Ich habe mich deshalb an den Leiter unseres Bezirkskonsultationspunktes Mathematik gewandt und eine sowjetische Aufgabensammlung erhalten, die ich allerdings nur abschnittsweise bearbeiten kann.

□ Die *alpha* benutze ich nicht nur zur mathematischen Weiterbildung, sie hilft auch bei der Erweiterung der Allgemeinbildung. Solche Artikel wie „Nowosibirsk", Biographien wie über *A. J. Chintschin*, *A. F. Möbius* oder Berichte wie „Als Diplommathematiker in Dubna" und „Als Mathematiklehrer in Tansania" haben mir sehr gut gefallen.

Meine Darlegungen über die Arbeit mit *alpha* sind weder vollständig noch sollen sie als „Musterbeispiel" aufgefaßt werden, sondern sie sollten sowohl eine Anregung für Schüler als auch ein Dank an die Zeitschrift sein. Während ihres zweijährigen Bestehens hat sie mir und vielen anderen mit ihren Beiträgen Wissen vermittelt und Freude an selbständiger Arbeit bereitet. Waltraud Kühne

Schön ist so ein Ring(el)spiel



Im Folgenden soll ein nicht nur unterhaltendes, sondern auch geistreiches Spiel beschrieben werden, das erfahrungsgemäß dem Anfänger viel Kopfzerbrechen macht. Für uns wird es interessant sein, die Spielregeln zu ergründen und die Zusammenhänge mathematisch zu erfassen.

Wir nehmen fünf gleichgroße Ringe (etwa von einer alten Gardinenstange) und basteln uns dazu passend (s. Abbildung!) aus Draht eine Spange. Nachdem wir an jeden Ring ein Stück Bindfaden geknotet haben, schieben wir die Ringe über die Stange, verschlingen, wie es die Abbildung zeigt, die Fäden mit den Ringen und befestigen die freien Fadenenden an einer Stange (Holzstab).

Die Aufgabe des Spiels besteht nun darin, alle fünf Ringe von der Stange zu trennen (natürlich ohne eine der Befestigungen zu lösen). Der Anfänger beginnt meistens damit — etwa die Stange in der linken Hand haltend —, den fünften Ring nach rechts von der Stange zu ziehen und einfach nach unten fallen zu lassen. Macht man das mit dem vierten Ring auch, so gerät man in eine „Sackgasse", denn wegen der dazwischenliegenden Fäden kann kein weiterer Ring abgezogen werden, ohne jetzt schon ein Wirrwarr zu schaffen. Besser ist es, wenn man den fünften Ring nach Abziehen von oben durch die Spange wirft. Man kann aber auch den vierten und fünften Ring gleichzeitig herunterziehen und, den fünften in der Hand behaltend, den vierten von oben durch die Spange werfen. Danach kann man entweder den fünften wieder heraufschieben oder ihn ebenfalls von oben durch die Spange werfen, ohne die Fäden zu verwirren.

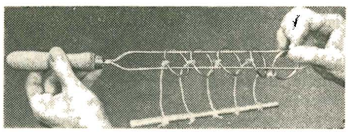
Nach diesen und weiteren Versuchen werden uns die Spielregeln verständlich. Sie lauten:

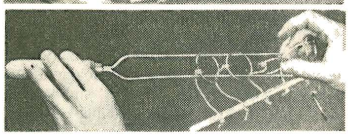
1. Der fünfte Ring kann jederzeit unabhängig von den anderen von der Spange gelöst, d. h. gesenkt und auch wieder auf die Spange geschoben, d. h. gehoben werden. (Beim Senken muß man natürlich wie oben beschrieben vorgehen und beim Heben umgekehrt, also den Ring zuvor von unten durch die Spange stecken.)

2. Um einen der anderen Ringe senken oder heben zu können, ist es notwendig und hinreichend, daß der folgende Ring gehoben, also oben ist, während alle danach folgenden Ringe gesenkt, also unten sind. (Um einen solchen Ring zu senken, schiebe man ihn zusammen mit dem folgenden von der Stange, werfe ihn — den anderen in der Hand behaltend — von oben hindurch und schiebe den anderen wieder herauf. Das Heben geschieht in genau umgekehrter Richtung und Reihenfolge: Ring von unten durch die Spange stecken, letzten Ring von der Spange ziehen, den anderen zugleich mit dem letzten heraufschieben.)

3. Der Zustand der links vor dem zu senkenden oder zu hebenden Ring befindlichen Ringe hat auf die Manipulationen keinen Einfluß.

Die Regeln lassen sich wie folgt mathematisch formulieren: Jeder Zustand sei durch eine mit den Ziffern 0 und 1 geschriebene fünfstellige Zahl gekennzeichnet. Eine 1 bedeutet, daß der betreffende Ring oben, eine 0, daß dieser unten ist. Z. B. heißt 10100: der 1. und der 3. Ring sind oben, die anderen unten. (In diesem Fall könnte auf Grund der Regel nur der 2. Ring gehoben, also anschließend der Zustand 11100 hergestellt werden.)





Senken des 5. Ringes — Senken des 3. Ringes

Mit diesen theoretischen Kenntnissen ausgerüstet, beginnen wir das Spiel. Wir nennen jedes Heben bzw. Senken eines Ringes, also die Überführung eines Zustandes in den nächsten, eine Operation, wobei wir allerdings aus bestimmten Gründen das gleichzeitige Senken bzw. Heben des 4. und 5. Ringes als eine Operation zählen, also auch den Zwischenzustand nicht extra hinschreiben. Nehmt nun das Spiel zur Hand und macht die folgenden Operationen langsam und besonnen, weil jeder Fehler meist ausweglose Verwirrung schafft und man dann meistens nicht umhinkann, durch Aufknoten einiger Fäden den Ausgangszustand wieder herzustellen:

11111, 11110, 11010, 11011, 11000, 01000, 01011, 01010, 01110, 01111, 01100, 00100, 00111, 00110, 00010, 00011, 00000.

Aus der Folge dieser Operationen lassen sich einige interessante Erkenntnisse gewinnen:

1. Es ist der einzige Weg, der zum Ziel führt, sofern man sich nicht wiederholen, also unnötige Zwischenschritte einschalten will. Jede Abweichung an einer beliebigen Stelle führt in eine Sackgasse, aus der man nur durch „Umkehren", also Herstellen eines vorher schon dagewesenen Zustandes herauskommt.
2. Die (unterstrichenen) Zwischenzustände 01111, 00111, 00011 zeigen, daß man das Spiel mit fünf Ringen zunächst auf ein Spiel mit vieren, dieses dann auf eins mit dreien und schließlich auf zwei Ringe reduzieren muß. Wir hätten also auch mit vier Ringen, d. h. mit dem Zustand $01111 = 1111$ beginnen, d. h. den 1. Ring von vornherein weglassen können, wären dann natürlich mit erheblich weniger Operationen ausgekommen.
3. Bei 5 anfänglichen Ringen braucht man 16 Operationen, bei 4 Ringen 7, bei 3 Ringen 4, bei 2 Ringen 1 Operation. Ist n also die Anzahl der Ringe und $Z(n)$ die Anzahl der nötigen Operationen, so gilt falls $n \leqq 5$:

$$Z(n) = 2^{n-1} - 1 \quad \text{für gerade } n$$
und
$$Z(n) = 2^{n-1} \quad \text{für ungerade } n.$$

4. Die Folge der Operationen kann auf Grund der Spielregeln jederzeit rückwärts durchlaufen werden, so daß das Aufschieben eines von der Spange gelösten Systems von Ringen das gleiche Problem ist und auch für die Anzahl der Operationen die gleichen unter 3. genannten Formeln gelten.

Es ergibt sich nun die Frage, ob sich das Spiel auch mit mehr als fünf Ringen betreiben läßt. Das ist in der Tat der Fall, und es gelten sogar die genannten Formeln für beliebig große n. Das soll jetzt bewiesen werden, und zwar eignet sich hierzu das Verfahren der vollständigen Induktion, also der Schluß von n auf $n + 1$:

1) Induktionsanfang: Die Formel gilt für $n = 2$.

$$Z(2) = 2^1 - 1 = 1$$

(Zwei Ringe lassen sich trivialerweise mit einer Operation von der Spange ziehen).

2) Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Formel sei bis zu einem gewissen $n = k$, d. h. für $2 \leqq n \leqq k$, bereits bewiesen. (Die Annahme ist berechtigt, weil wir ja die Richtigkeit der Formel bis $n = k = 5$ empirisch bestätigt haben.)

3) Induktionsschluß: Wir zeigen jetzt, daß die Formel, wenn sie bis $n = k$ gilt, dann auch für $n = k + 1$ richtig ist, wobei wir zwischen geraden und ungeraden k unterscheiden müssen:

a) k sei eine gerade Zahl:

Sind $k + 1$ Ringe auf der Spange, so müssen wir, um den 1. Ring senken und damit das Spiel auf k Ringe zurückführen zu können, wie folgt vorgehen:

1. Senken der letzten $k - 1$ Ringe; das sind, da $k - 1$ ungerade, lt. Induktionsannahme 2^{k-2} Operationen,
2. Senken des 1. Ringes; das ist eine Operation,
3. Heben der letzten $k - 1$ Ringe; das sind nochmal 2^{k-2} Operationen.

Also ist mit $2^{k-2} + 1 + 2^{k-2}$ $= 2 \cdot 2^{k-2} + 1 = (2^{k-1} + 1)$ Operationen der Fall $n = k$ erreicht. Um diesen zum Endzustand zu führen, sind, ebenfalls lt. Induktionsannahme, weitere

$$(2^{k-1} - 1) \text{ Operationen}$$

nötig. Also ergeben sich insgesamt $2 \cdot 2^{k-1}$ $= 2^k$ Operationen.

Es ist also (für $k+1$ ungerade)

$$Z(k+1) = 2^k.$$

Die Formel gilt also auch für $n = k+1$.

b) k sei eine ungerade Zahl:

Die Überlegung verläuft wie bei a), nur sind unter 1. und 3. jeweils $(2^{k-2} - 1)$ Operationen, also insgesamt, um den Zustand $n = k$ zu erhalten, $(2^{k-1} - 1)$ Operationen notwendig.

Hinzu kommt

$$Z(k) = 2^{k-1}.$$

Somit ist (für $k + 1$ gerade)

$$Z(k + 1) = 2^k - 1.$$

Auch in diesem Fall wird also die Richtigkeit der Formel für $n = k + 1$ bestätigt. Die Formeln sind damit für beliebige $n \geqq 2$ bewiesen.

Man erkennt, daß — da es sich im wesentlichen um die Folge der Potenzen von 2 handelt — die Anzahl der nötigen Operationen mit zunehmender Zahl von Ringen schnell anwächst (vgl. die bekannte Schachbrett-Weizenkörner-Aufgabe). Bei sechs Ringen sind es bereits 31 Operationen, was schon — zumal diese in eindeutig vorgeschriebener Reihenfolge auszuführen sind — eine kaum zumutbare Geduldsprobe bedeutet. Mit vier Ringen wäre es fast zu leicht. Wir haben also mit der Zahl fünf einen Mittelweg: schwer genug, um dem Unbefangenen wenig Aussicht auf Erfolg zu bieten, leicht genug, um bei Einsicht in die Zusammenhänge, einiger Übung und Fingerfertigkeit die Lösung zum Erstaunen der anderen geschickt und schnell vorzuführen.

J. Frormann

alpha berichtet aus aller Welt

Magdeburg

Die VI. Wissenschaftliche Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR findet in der Zeit vom 10. bis 15. Februar 1969 an der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg, statt.

Tschernowzy

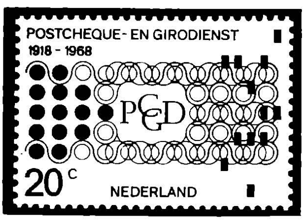
An der Mittelschule 1 der arbeitenden Jugend in Tschernowzy (Ukrainische SSR) werden Aufgaben aus der Zeitschrift „alpha" diskutiert und gelöst. Besonderen Spaß bereitet den Lesern die Rubrik „*alpha* — heiter".

Leipzig

Die Leipziger Volkszeitung (LVZ) gab aus Anlaß des 20. Jahrestages der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" die VII. Sonderausgabe für Junge Mathematiker (Klassenstufe 2 bis 12) heraus. Sie steht unter dem Motto „Mathematik und Sport" (in Vorbereitung auf das V. Deutsche Turn- und Sportfest 1969). Neben 144 Aufgaben (und Lösungen) aus allen Bereichen des Sports bringt sie Statistiken und technische Zeichnungen von Sporteinrichtungen und Sportgeräten. Ein Wettbewerb mit wertvollen Preisen wird sicher — wie im Vorjahr — tausende von Teilnehmern finden.

Den Haag

Am 16. Januar 1968 erschien in den Niederlanden ein Sonderwert zu 20 Cent: *50 Jahre Postscheckdienst in Holland.* Die Briefmarke symbolisiert mit Kreisen und Rechtecken einen automatisierten Postscheck- und Girodienst, an dem zur Zeit etwa eineinhalb Millionen Kontoinhaber teilnehmen. Diese Briefmarke ist die erste, welche die Lochkartentechnik symbolisiert.



Köthen

Am VI. Spezialistenlager Junger Mathematiker des Bezirks Halle (August 1968) beteiligten sich über 130 Schüler. Ihre Entscheidung, aktive Erholung mit dem tieferen Eindringen in mathematische Probleme zu verbinden, war sehr bedeutsam. Der Lagervorsitzende U. Brecht (Stößen, Kr. Hohenmölsen) meint: „Ich habe schon jahrelang in Mathematik eine Eins und knoble gern. Das Lager bot mir daher sehr viel. Es war prima. Das sagen alle. Besonders unvergeßlich wird mir das Freundschaftstreffen mit den sowjetischen und vietnamesischen jungen Menschen bleiben."

Tartu

In estnischen Schulen werden seit 1954 in den Fächern Mathematik, Physik und Chemie Olympiaden unter Leitung der Staatlichen Universität Tartu und des Min. f. Vobi. der Estnischen SSR durchgeführt. Im Dezember/Januar sind gestellte Aufgaben zu Hause zu lösen. Es folgte eine Klausur in der Schule. Ende März (während der Winterferien) versammeln sich die besten Schüler zur letzten Runde in der Universität. Die Sieger nehmen nicht nur Preise in Empfang, sondern sie haben damit auch schon automatisch die Abschlußprüfung im entsprechendem Fach abgelegt. Besondere Freude herrscht natürlich, wenn ein Sieger noch nicht Schulabgänger ist (11. Schuljahr). Mehrere Schüler der 10. Klasse haben es schon geschafft. Im Frühjahr 1961 ging Jaak Tepandi, 8. Klasse (II. OS Tallin) als Sieger hervor, 1964 war es Mihkel Aul, 9. Klasse (IV. OS Tartu). Hervorragend schnitten ab: II. OS Tallin, I. OS Viljadi, OS Noo. gekürzt von Prof. O. Prinits

Aufgaben aus diesen Olympiaden veröffentlichen wir im Rahmen des *alpha*-Wettbewerbs, d. Redaktion.

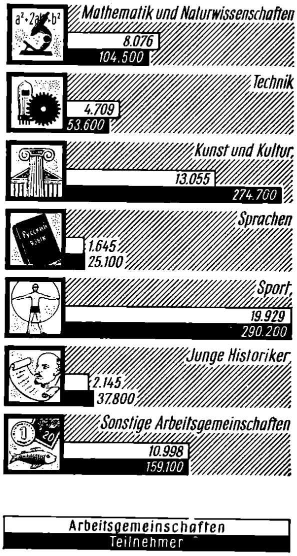
Budapest

In der Zeit vom 23. bis 30. Juni 1968 fand auf Einladung des Ministeriums für Bildungswesen der Ungarischen Volksrepublik die II. Internationale Physikolympiade statt (I. Olympiade 1967 in Warschau). Erstmalig nahm die DDR teil (Leiter: Dr. J. Wendt, Päd. Inst. Güstrow). Mannschaften, bestehend aus drei Schülern, nahmen teil aus: Bulgarien, CSSR, DDR Jugoslawien, Polen, Rumänien, UdSSR, Ungarn. Der Wettbewerb bestand aus einem theoretischen Teil (drei physikalische Aufgaben) und einem praktischen Teil (Lösen einer experimentellen Aufgabe). — Arbeitszeit: je 5 Stunden — Die III. Olympiade findet 1969 in Brno statt.
Aufgaben, Lösungen, Organisationsformen findet der interessierte Leser in der Zeitschrift für Lehrer „Physik in der Schule" 12/67, 3/68, 9/68 und 12/68. Eine der drei gestellten Aufgaben lautete: Auf einer geneigten Ebene (Neigungswinkel 30°) befindet sich eine homogene Walze mit der Masse $m_1 = 8\,\text{kg}$ und einem Durchmesser $d = 10\,\text{cm}$. An die Achse der Walze ist mit einem Faden ein Ziegelstein mit der Masse $m_2 = 4$ kg befestigt. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Körper? Der Reibungskoeffizient zwischen Ziegelstein und geneigter Ebene beträgt $\mu = 0{,}6$. Der Rollenwiderstand und die Achsreibung sind zu vernachlässigen.

Ilmenau

Ein Kollektiv des „Lagers Wismar", das im August 1968 im Spezialistenlager für Mathematik (Goethe-Schule, Ilmenau) weilte, sandte einen Stoß Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb an die Redaktion ein.

Berlin



(aus DLZ 28/68)

Mexico 68

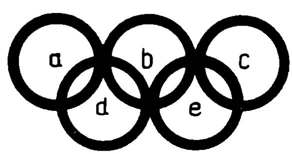
An den Tagen der Olympischen Spiele in Mexico haben wir alle mit Spannung und Stolz das hervorragende Abschneiden der Sportler unserer Deutschen Demokratischen Republik verfolgt. An diesen Tagen sahen wir immer wieder im Fernsehen und in den Zeitungen das Symbol der Olympischen Spiele, die fünf Ringe. Liegt es da für Junge Mathematiker nicht auf der Hand, dieses Symbol für mathematische Aufgaben zu nutzen?

340 Anstelle der Buchstaben a, b. c, d und e sind solche natürliche Zahlen in die fünf Ringe des olympischen Symbols einzusetzen, daß die Produkte der jeweils auf parallelen Geraden unserer Zeichnung stehenden Zahlen einander gleich sind. Es soll also gelten: $abc = de$, $ad = be$ und $ce = bd$.

341 Ersetze in Aufgabe 340 das Wort ***Produkte*** durch *Summen* und die (nichtgedruckten) Multiplikationszeichen durch Additionszeichen! Löse die so entstehende Aufgabe!

342 (Für Schüler ab Klasse 9): Welcher Zusammenhang besteht zwischen den allgemeinen Lösungen der Aufgaben 340 uud 341? Begründe diesen Zusammenhang!

W. Träger, Döbeln



Gruß aus der Demokratischen Republik Vietnam

Eine arithmetische Aufgabe

285 Es gibt einhundert Büffel und einhundert Bündel Heu.
Jeder stehende Büffel frißt fünf Bündel.
Jeder liegende Büffel frißt drei Bündel.
Je drei alte Büffel fressen zusammen ein Bündel.
Wieviel stehende, liegende und alte Büffel sind es?

Hat die Aufgabe mehrere Lösungen?

Wir wollen annehmen, daß es unter den 100 Büffeln genau drei Arten gibt, nämlich *stehende Büffel*, *liegende Büffel* und *alte Büffel* und daß ein beliebiger dieser 100 Büffel nur zu einer dieser drei Arten gehören kann.

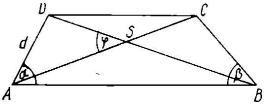
Die Aufgabe lautet auf vietnamesisch:

Trăm trâu trăm cŏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu năm ăn ba
Lụ khụ trâu già
Ba con một bó
Có bao nhiêu trâu đứng
trâu năm
trâu già

Dieses Gedicht stellt eine sehr alte Aufgabe dar, die die alten vietnamesischen Reisbauern den jungen zu stellen pflegen, daß so die Aufgabe von Generation zu Generation weitergegeben wurde. Mitgeteilt von Nguyen lam Son

Eine geometrische Aufgabe

286 Es ist ein Trapez $ABCD$ mit den einander parallelen Seiten AB und $\overline{CD}$ und dem Schnittpunkt S der Diagonalen zu konstruieren, wenn die Seite $AD = d$ und die Winkel $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\sphericalangle ASD = \varphi$ gegeben sind. Mitgeteilt von Nguyen van Tang



Die beiden Kinderzeichnungen (links aus der UdSSR, rechts DDR) wurden auf einer Ausstellung im Leipziger Haus der DSF im Mai 1968 unter dem Motto gezeigt: Frieden den Kindern Vietnams

СТАРТУЕТ ОЛИМПИАДА!

3. (8—10). Точки К и Р симметричны основанию Н высоты ВН треугольника АВС относительно прямых АВ и ВС. Доказать, что точки пересечения прямой КР со сторонами АВ и ВС (или их продолжениями) — основания высот треугольника АВС.

8. (8—9). Дана окружность и на ней точка А. Произвольная окружность с центром в точке А пересекается с данной окружностью в точках К и Р и касается диаметра данной окружности в точке Н. Найти геометрическое место точек пересечения отрезков КР и АН.

9. (8—10). Доказать, что $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1967}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $3a^2-2b^2=1$.

10. (8—10). Восстановить выпуклый четырехугольник, если известны четыре точки — основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей четырехугольника на его стороны.

Ausgewählte Aufgaben

299 3. Gegeben ist ein Dreieck ABC, für das H Fußpunkt der Höhe auf AC ist.
Die Punkte K bzw. P seien die durch Spiegelung an der Geraden AB bzw. BC erhaltenen Bildpunkte von H.
Es ist zu beweisen, daß die Schnittpunkte der Geraden KP mit den Dreieckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ (oder ihrer Verlängerungen) ebenfalls Höhenfußpunkte des Dreiecks ABC sind.

300 8. Gegeben seien ein Kreis k_1 und auf ihm ein Punkt A. Ein weiterer Kreis k_2 um A als Mittelpunkt möge den Kreis k_1 in den Punkten K und P schneiden und einen Durchmesser von k_1 im Punkte H berühren. Es ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Strecken $\overline{KP}$ und $\overline{AH}$ zu bestimmen.

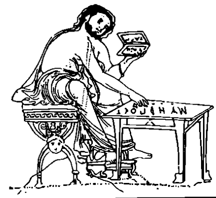
301 9. Es ist zu beweisen, daß $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1967}$ in der Form $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$ dargestellt werden kann, wobei a und b ganze Zahlen sind, die der Gleichung $3a^2-2b^2=1$ genügen.

302 10. Es ist ein konvexes Viereck zu konstruieren, von dem vier Punkte gegeben sind, und zwar die Fußpunkte der von dem Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks auf seine Seiten gefällten Lote.

In Heft 5/68 veröffentlichten wir die Aufgaben der Allunions-Fernolympiade 1967/68 in russischer Sprache. Heute bieten wir vier dieser Aufgaben in deutscher Sprache (zur Selbstkontrolle und aktiven mathematischen Beschäftigung unserer Leser). In Heft 2/69 bringen wir umfassende Lösungswege dazu.

Teilnahmebed. f. Schüler d. allgemeinbildenden Schulen und anderer mittlerer Lehranstalten: Die Allunions-Fernolympiade, seit 1965 durchgeführt, ist Bestandteil der Physik-, Mathematik- und Chemieolympiaden der Republiken und gleichzeitig (Fern-) Wettbewerb der Schüler der RSFSR. Wer die Aufgaben der Fernolympiade bewältigt, wird zu den Gebietsolympiaden (Bezirks- und Republikolympiaden) eingeladen und besitzt die gleichen Rechte wie die Sieger der Rayonolympiaden. Die Sieger der Gebietsolympiaden werden zum Abschlußwettbewerb der Republikolympiaden entsandt. In der RSFSR wurden im April 1966 der Abschlußwettbewerb der Physik-, Mathematik- und Chemieolympiaden der RSFSR veranstaltet. An einem solchen Abschlußwettbewerb nehmen die Sieger der Olympiaden der Unionsrepubliken teil. Die Sieger der Gebietsolympiaden werden in Spezialistenlager eingeladen, z. B. in das Sommerlager der Sibirischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Die Teilnahme an der Allunions-Fernolympiade kann sowohl in einem wie auch in mehreren Fächern erfolgen. — Vor jeder Aufgabe ist die Klasse angegeben, für deren Schüler sie bestimmt ist; jedoch können diese ihre Kräfte auch an Aufgaben für höhere Klassen messen. — Um Sieger der Olympiade zu werden, ist es nicht unbedingt erforderlich, sämtliche Aufgaben zu lösen, manchmal genügt auch die besonders gute Lösung einer Aufgabe.

Der mathematische Wettstreit in der Antike



Der erste mathematische Wettstreit, von dem wir Kunde haben, wurde nach einem legendären Bericht zwischen den beiden größten griechischen Dichtern *Homer* und *Hesiod* ungefähr im achten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung ausgetragen. Bei einer Bestattungsfeierlichkeit in Chalkis[1]) legte *Hesiod* seinem Rivalen folgende Frage vor: „Weißt du zu sagen, wieviel Volks die Atriden[2]) vormals gegen Ilion)[3] führten?" *Homer* antwortete mit einem Rechenexempel folgendermaßen:

„Fünfzig an Zahl gab's Feuer im Heer, an jeglichem staken fünfzig Spieße, es schmorten an jeglichem fünfzig Braten, dreimal dreihundert Mann aber speisten von jeglichem Braten." Das Ergebnis dieser für die damalige Zeit ziemlich schwierigen Multiplikationsaufgabe lautet: Einhundertzwölf Millionen fünfhunderttausend Mann.

Bei einer anderen Leichenfeier soll *Hesiod* seinen Gegner nach dem Alter der Baumnymphen gefragt haben. Das Zahlenrätsel hat folgenden Wortlaut: „Neun der Geschlechter von Menschen, die hoch in die Jahre gelangten, lebt die geschwätzige Krähe, der Hirsch vier Alter der Krähen, dreimal durchdauert der Rabe des Hirschen Alter, der Phönix[4]) lebt neun Alter des Raben und die Nymphen zehn Alter des Phönix."

Nimmt man das Alter des Menschen zu 70 Jahren an, so ergibt sich das Alter der Nymphen zu

$$70 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 10 = 680400 \text{ Jahren.}$$

Bei den Olympiaden selbst wurden, so weit wir unterrichtet sind, keine mathematischen Wettkämpfe ausgetragen. Jedoch wurden bei den Gastmählern, die im Anschluß an die sportlichen Wettkämpfe zu Ehren der Sieger stattfanden, vielfach mathematische Wettkämpfe veranstaltet. Dabei wurde folgende Ordnung eingehalten: Der das Präsidium führende Symposiarch[5]) stellte eine in Versen gekleidete Rechenaufgabe; der erste, der die richtige Lösung in Versen zu geben vermochte, hatte nun seinerseits das Recht, eine weitere Aufgabe zu stellen. Es wurden im allgemeinen nicht mehr als neun — diese Zahl ist gleich der Anzahl der Musen[6]) — Aufgaben gestellt. Wer die meisten Aufgaben richtig gelöst hatte, bekam als Sieger einen Efeukranz. Gab ein Teilnehmer eine falsche Lösung an, so mußte er einen Becher mit Salzlauge in einem Zuge leeren, während der Sieger mit einem Becher voll gewürzten Weines geehrt wurde.

An den in Griechenland bestehenden privaten und öffentlichen Schulen waren mathematische Wettkämpfe sehr beliebt. In einem Gedicht des Epigrammatikers[7]) *Metredorus* wird die Philosophen- und Mathematikerschule des Pythagoras (um 550 v. d. Z.) ausdrücklich als *Ringschule des Geistes* (Palaestra ingenii) bezeichnet. Der aus der Schillerschen Ballade bekannte Tyrann *Polykrates von Samos*[8]) soll einstmals bei einem Gastmahl den berühmten *Pythagoras* gefragt haben, wieviel Schüler er habe. Der legendäre *Pythagoras* soll mit einem in Versen abgefaßten Rechenexempel geantwortet haben: „Ich will es sagen dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte treibet die treffliche Mathematik, dagegen ein Viertel mühet sich um die Natur, die unsterbliche, aber das Siebtel gänzliches Schweigen befolgt, im Herzen die Lehre bewahrend. Zähl' drei Frauen hinzu, aus denen Theano hervorragt, soviel leite zu Priestern ich an der pierischen Musen." Für uns bietet diese Aufgabe keine Schwierigkeiten. Wir finden aus der Gleichung $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$ die Lösung $x = 28$.

Der König *Hieron II. von Syrakus* veranstaltete an seinem Hof im Jahre 248 v. d. Z. einen mathematischen Wettstreit. Wie weit der am Hofe *Hierons* lebende *Archimedes* als Aufgabensteller oder Schiedsrichter an diesem Wettkampf beteiligt war, können wir nicht mehr feststellen. Wir wissen nur, daß an dem Wettstreit auch Erwachsene teilnahmen und daß derselbe ein unrühmliches Ende fand, indem er in eine wüste Prügelei der Teilnehmer ausartete. *Hieron* verbot deshalb Wettkämpfe dieser Art.

Einen ungefähren Begriff von den bei mathematischen Wettkämpfen gestellten Aufgaben geben uns die mathematischen Epigramme der griechischen Anthologie[9]). In dieser Sammlung stehen auch 47 arithmetische Rätselaufgaben von der Art, wie sie bei Symposien[10]) in geistigen Wettkämpfen gegeben wurden. Das vermutlich auf den Mathematiker *Heron von Alexandria* (1. Jh. v. d. Z.) zurückgehende Epigramm diente als Muster für die noch um die Jahrhundertwende (1900) in den mathematischen Schulbüchern auftauchenden Brunnen- oder Röhrenaufgaben: „Vier Springbrunnen es gibt. Die Zisterne anfüllet der erste täglich, der andere braucht zwei Tage dazu, und der dritte drei Tage, und der vierte gar vier Tage. Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?" Aus der Gleichung $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$ ergibt sich $x = \frac{12}{25}$ Tage. Ein zweites Epigramm erinnert an die berühmte Kronenaufgabe des *Archimedes* (auf Grund dieser Aufgabe soll *Archimedes* das Gesetz über den scheinbaren Gewichtsverlust von festen Körpern in Flüssigkeiten entdeckt haben): „Schmied' mir die Krone und menge das Gold mit Kupfer zusammen, füg' auch Zinn noch hinzu samt sorglich bereitetem Eisen. Sechzig der Minen sie hab' an Gewicht. Zwei Drittel der Krone wiege das Gold mit dem Kupfer gemengt; drei Viertel dagegen Gold mit dem Zinn im Gemisch; drei Fünftel betrage das Gold noch, wenn du es fügst zu dem Eisen. Wohlan! Nun sage mir pünktlich, was du an Gold mußt nehmen und Kupfer, zu treffen die Mischung; wieviel Minen an Zinn; auch nenne die Masse des Eisens, das du zu schmieden vermagst von sechzig der Minen die Krone." (Eine Mine = 437 Gramm.) Die Krone enthielt 30,5 Minen Gold; 9,5 Minen Kupfer; 14,5 Minen Zinn; und 5,5 Minen Eisen.

Eine Aufgabe mit mythologischem[11]) Einschlag enthält folgendes Epigramm: „*Eros* (Amor) beklagte sich einst bei seiner Mutter *Aphrodite:* Wegschleppen mir die Musen von meinen Äpfeln: *Kleio* das Fünftel mir nahm; *Euterpe* das Zwölftel der Äpfel; aber das Achtel *Thalia*, die hehre; das Zwanzigstel dann noch packte *Melpomene* auf; *Terpsichore* stahl mir das Viertel; doch ein Siebtel drauf griff *Erato* sich zu dem Anteil; aber *Polymnia* hat auch 30 Äpfel geraubt, 120 erhaschte *Urania*, *Kalliope* nahm sich 300 Stück. Nur fünfzig ließen die Musen mir übrig. Wieviele Äpfel hatte ich zuvor?" Antwort: *Eros* besaß 3360 Äpfel.

Ein Rätsel, das kaum mathematische Überlegung erfordert, stammt von dem Weltweisen *Kleobulos* (ca. 600 v. d. Z.). „Vater ist einer, der Kinder sind zwölf, von diesen zählt jedes wiederum zweimal dreißig, doch zweifach beschaffen ihr Aussehen. Weiß sind die einen zu schauen, die anderen schwarz, aber beide sind sie unsterblich zwar, doch schwinden sie alle dahin." Antwort: Das Jahr, 12 Monate, 30 Tage und 30 Nächte.

Als letztes Beispiel aus dem Altertum möchte ich anführen: *Frage:* Trefflichster Kündiger der Zeit, welch' Teil ist des Tages verlaufen? *Antwort:* Nimm des Verlaufes zwei Drittel; es bleibt dann doppelt so viel noch.

Lösung: Der Tag wurde in 12 Stunden eingeteilt. Vom ganzen Tag seien noch zweimal $\frac{2}{3}$ des verlaufenen Tages übrig. Ist x der bis zum Zeitpunkt der Frage vergangene Teil des Tages, so ergibt sich aus der Gleichung $x + \frac{4}{3} x = 12$ die Lösung $x = 5 \frac{1}{7}$ Stunden.

M. Otto

Worterklärungen:

1 Chalkis: Kleinstadt auf der griechischen Insel Evboia

2 Atriden: griechischer Volksstamm

3 Ilion (Troja): bis ins 4. Jahrtausend zurückreichende befestigte Stadt nahe der Nordwestküste Kleinasiens

4 Phönix: ägyptischer Sagenvogel, der sich alle 500 Jahre selbst verbrannte und aus der Asche verjüngt hervorging

5 Symposiarch: der das Gespräch Leitende

6 Musen: in der griechischen Sage neun Schutzgöttinen der Künste (später der Wissenschaften), Töchter des Zeus

7 Epigramm: durch kurz und prägnant ausgedrückte Gedanken, Gefühle und Stimmungen charakterisiert es einen bestimmten Gegenstand (Person, Ereignis u. a.)

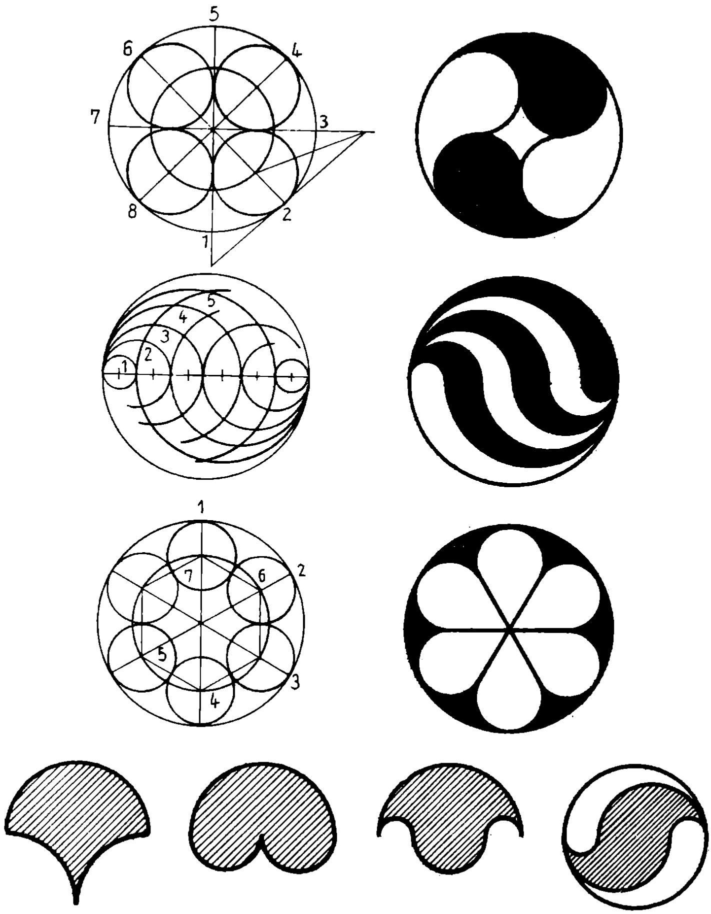
8 Polykrates von Samos: gekreuzigt 522 v. u. Z., etwa 538 Tyrann von S., einer der mächtigsten Herrscher, förderte die Dichtkunst

9 Anthologie: Blütenlese; bunte Sammlung meist epigrammatischer Dichtungen aus einem Zeitraum von etwa sechs Jahrhunderten; berühmte Namen wie Sappho, Alkaios, Pindar, Theokrit u. a. werden als Verfasser dieser Epigramme genannt

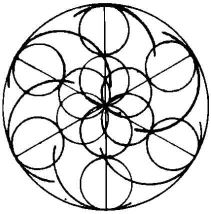
10 Symposion: altgriechisches Trinkgelage nach der Hauptmahlzeit mit zwanglosen Gesprächen (oft über ein bestimmtes Thema), Symposium (Bedeutung heute): Bezeichnung für eine fachwissenschaftliche Tagung

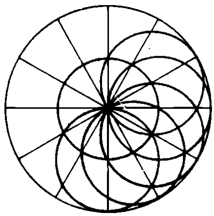
11 mythologisch: überlieferte, bildhafte Vorstellung vom Entstehen und der Bedeutung religiösen Kults, vom Ursprung der Welt, der Menschen, der Götter

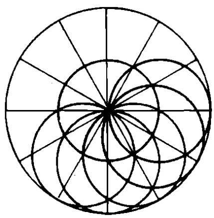
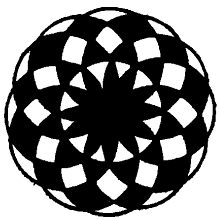
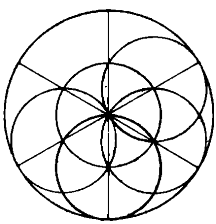
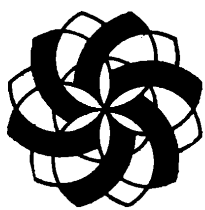
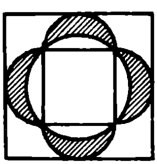
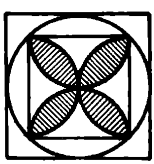
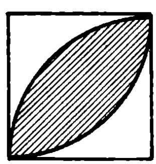
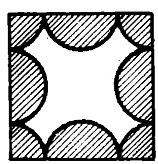
Mit Zirkel und Zeichendreieck



Berechne den Flächeninhalt der schraffrierten Flächen!

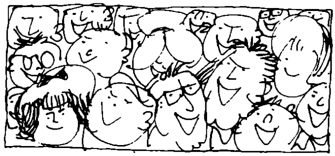




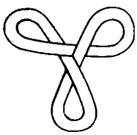
In freien Stunden

alpha heiter



Flax stellt eine Aufgabe . . .

„Krümel, ich hab' Dir ein *unendliches Band* aufgezeichnet! Schau Dir's genau an! Nimm ein leeres Blatt Papier und zeichne dieses Band — natürlich aus dem Kopfe — nach! Mal sehen, ob Du eine gute Beobachtungsgabe hast!"



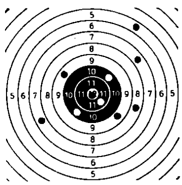
Krümel revanchiert sich . . .

„Flax, hier ist ein Tablett, unterteilt in 12 Felder und drei Münzen Durch einmaliges Verschieben jeder Münze um drei Felder soll erreicht werden, daß in jeder Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen nur eine Münze liegt!"

	O		
	O		
	O		

Wer schoß die 12?

Krümel sicherte sich mit seinen vier ersten Schüssen fünfmal soviel Ringe wie mit seinem letzten Schuß. Flax erzielte mit seinen letzten vier Schüssen siebenmal soviele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Außerdem — das verraten wir noch — erzielte Krümel mit den



beiden ersten Schüssen genausoviel Ringe wie mit den beiden letzten.

Der junge Hirt

Ein junger Hirte ließ mit Freuden
1008 Schafe weiden,
Bis daß der Sonne letzter Strahl
Entwich aus seinem grünen Thal,
Und grauer Abend war geworden.
Jetzt führte er sie in 12 Horden,
Doch so, daß jegliche 2 mehr
Enthielt, als das nächstvor'ge Heer.
Sag', wieviel in die erste kommen,
Und jede andre aufgenommen?

Aus: „Die Wunder der Rechenkunst" von Joh. Christ. Schäfer, Weimar, 1857

Without a Word

Each empty square requires one figure so that the working from top to bottom and from left to right is correct. BODMAS applies. D.I.B.

8	÷		+		=7
−		+		÷	
	−	6	×		=−5
×		÷		×	
	−		+	4	=
=		=		=	

(÷ diversed by — geteilt durch
× multiplied by — mal)

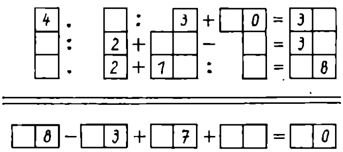
Aus: „mathematical pie" Nr. 49 (England)

Totgesagter Gelehrter

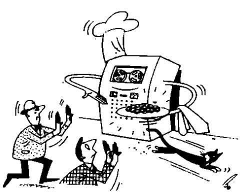
Der große Mathematiker *Richard Dedekind* (1831 bis 1916), der letzte Schüler von *C. F. Gauß*, las zu seinem nicht geringen Erstaunen in dem 1904 erschienenen Gelehrtenkalender, der unter dem Motto „Nulla dies nizi festiva" (Kein Tag ohne festliche Erinnerung) zu jedem Tag des Jahres Erinnerungsdaten vom Leben und Sterben namhafter Gelehrter verzeichnete, folgende Notiz: „4. September

1899, Todestag des bedeutenden Mathematikers *Richard Dedekind*, geb. am 6. 10. 1831 in Braunschweig.“ Dedekind schrieb hierauf an den Herausgeber des Gelehrtenkalenders: „4. September könnte vielleicht stimmen, aber die Jahreszahl ist sicher falsch. Vielmehr habe ich diesen Tag nach meinen Tagebuchnotizen in voller Gesundheit und sehr anregender Unterhaltung über System und Lehre mit meinem Mittagsgast und verehrten Freund *Cantor* aus Halle verlebt, der bei dieser Gelegenheit nicht mir selbst, wohl aber einem Irrtum von mir den Todesstoß versetzte.“ Aber auch das Todesdatum sollte sich später als unrichtig erweisen: *Dedekind* starb nicht am 4. 9., sondern am 12. 2. 1916.

mitgeteilt von M. Otto, Köthen



Aus Matematika – Mathematische Schülerzeitschrift, VR Bulgarien, 1/68

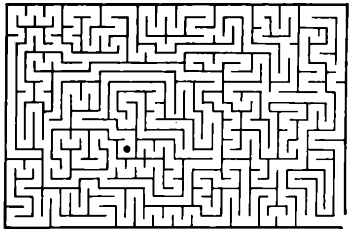


Wissenschaftler einer amerikanischen Universität ließen von einem Elektronenrechner eine ideale Speisefolge zusammenstellen, worin die für die menschliche Ernährung notwendigen Proteine, Vitamine, Salze, Fette, Mineralstoffe usw. in den erforderlichen Mengen enthalten waren. Die Laboratoriumskatze rührte das fertige Essen nicht an, den Professoren und Studenten wurde nach dem Genuß übel.

Aus: „Rechentechnik — Datenverarbeitung“ 8/68

Garten mit verwirrenden Gängen

Der englische Mathematiker *W. W. Rouse Ball* (19. Jh.) hatte in seinen Garten ein Labyrinth (siehe Abb.) gebaut. Wer findet zum Punkt im Innern dieses Irrgartens?



Двадцать четыре

Очень легко число 24 выразить тремя восьмерками: $8 + 8 + 8$. Но можете ли вы сделать то же, пользуясь не восьмерками, а другими тремя одинаковыми цифрами? Задача имеет не одно решение.

Aus: Я. И. Перельман, Живая математика

1. Wie lautet die im Dezimalsystem geschriebene Zahl $ABCD$, wenn die Zahlen ABC, ACB, BCA, AC und B jeweils Quadratzahlen sind?

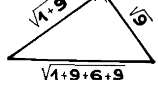
2. Wie heißt die im Dezimalsystem geschriebene Zahl $ABCB$, wenn deren Quersumme und die der Zahl ABC und die Zahl B jeweils Quadratzahlen sind?

3. Bestimme die im Dezimalsystem geschriebene Zahl $ABCB$, wenn gilt
$ABCB = AA\,(ACB + 10)$!

H. Decker, Köln

Redaktion **alpha**

wünscht allen Lesern ein gesundes, frohes und erfolgreiches



VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (15./19. 4. 1968)

Im folgenden machen wir unsere Leser mit den Lösungen zu den Aufgaben der VII. OJM bekannt. Die Lösungen stammen entweder von den bei der Korrektur eingesetzten Koordinatoren oder Schülern. Einige Lösungen lehnen sich an den Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission (siehe Beitrag, Heft 3/68, S. 76) an. Im Anschluß an die Lösungen werden Bemerkungen gemacht. Die Bereitstellung dieser Materialien verdanken wir den Koordinatoren. Sie werden nach den jweiligen Bemerkungen zu den Schülerlösungen genannt. Bei der Zusammenstellung des Beitrags unterstützten uns Herr Dr. Bausch und Oberstudienrat Titze. Die Begutachtung besorgte Herr Prof. Dr. Pirl. Die Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklasse 11/12 findet der interessierte Leser in Heft 10/68 der Zeitschrift für Lehrer „Mathematik in der Schule".

1. Aufgabe

Lösung 1 (Renate Uhlmann, BBS TPW Thalheim)

Die vorgegebenen Teilbarkeitsbeziehungen werden in der Form

$$a^{100} = 73x + 2 \text{ bzw.}$$
$$a^{101} = 73y + 69$$

geschrieben, wobei x und y (von 0 verschiedene) natürliche Zahlen sind. Aus der ersten Gleichung folgt nach Multiplikation mit a

$$a^{101} = 73ax + 2a$$

und unter Verwendung der zweiten Gleichung

$$2a = 73z + 69 \quad (z = y - ax).$$

Damit auf der rechten Seite ebenfalls eine gerade ganze Zahl steht, muß z ungerade sein. Einsetzen von $z = 2u + 1$ liefert

$$2a = 146u + 142$$
$$a = 73u + 71.$$

Wenn es also natürliche Zahlen a mit den in der Aufgabe genannten Bedingungen gibt, so lassen sie bei Division durch 73 den Rest 71.

Der überwiegende Teil der Schüler war mit den Anfängen der Kongruenzrechnung vertraut und bemühte sich, die Aufgabe mit diedem Hilfsmittel zu lösen.

Lösung 2 (Joachim Puls, 2. OS, Frankfurt/Oder)

$$a^{100} \equiv 2 \bmod 73$$
$$a^{101} \equiv 69 \bmod 73$$
$$\overline{a^{101} \equiv 2a \bmod 73}$$
$$a^{101} \equiv 69 \bmod 73.$$

Subtraktion liefert

$$0 \equiv 2a - 69 \bmod 73$$
$$2a \equiv 69 \equiv -4 \bmod 73.$$

Da 2 zu 73 teilerfremd ist, darf man durch 2 dividieren, ohne den Modul 73 zu verändern, so daß also $a \equiv -2 \equiv 71 \bmod 73$ gilt.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

Manche Schüler argumentieren nur damit, daß 2 eine Primzahl sei. Die Primzahleigenschaft allein ist aber im allgemeinen nicht ausschlaggebend. Aus einer Kongruenz $ak \equiv bk \bmod m$ erhält man, wenn d der größte gemeinsame Teiler von k und m ist, die Kongruenz $a \equiv b \bmod \frac{m}{d}$, und lediglich im Spezialfall $d = 1$ folgt $a \equiv b \bmod m$.

In einigen Schülerlösungen wird behauptet, daß die „Division" der Kongruenz $a^{101} \equiv 69 \bmod 73$ durch die Kongruenz $a^{100} \equiv 2 \bmod 73$ zu dem Ergebnis $a \equiv \frac{69}{2} \bmod 73$ führe. Abgesehen von der inkorrekten Ausdrucksweise ist ein solches Vorgehen nur dann gerechtfertigt, wenn zunächst definiert wird, was man unter einer Kongruenz der Form $a \equiv \frac{b}{c} \bmod m$ versteht und unter welcher Voraussetzung diese Schreibweise sinnvoll ist.

Ist nämlich c zum Modul m teilerfremd, so kann man für die Kongruenz $ca \equiv b \bmod m$ die Schreibweise $a \equiv \frac{b}{c} \bmod m$ einführen, was für die Ermittlung eines Zahlenwertes für a wenn b, c, m gegeben sind, häufig nützlich ist. Mit $ca \equiv b \bmod m$ gilt nämlich für beliebige ganze Zahlen s, t auch die Kongruenz $(c + sm)\,a \equiv b + tm \bmod m$ und damit in der so eingeführten „Bruchschreibweise"

$a \equiv \frac{b}{c} \equiv \frac{b+t\,m}{c+s\,m} \bmod m$. Für $s = 0$ und $t = 1$ erhält man dann in unserem Beispiel $a \equiv \frac{69}{2} \equiv \frac{142}{2} \equiv 71 \bmod 73$.

Die Schreibweise $\frac{b}{c} \equiv \frac{g}{h} \bmod m$ soll zum Ausdruck bringen, daß es eine ganze Zahl a mit $ca \equiv b \bmod m$ und $ha \equiv g \bmod m$ gibt. Für zu m teilerfremde Zahlen c und h ist die Existenz solcher Zahlen a stets gewährleistet (Lösung linearer Kongruenzen mit einer Unbekannten).

Zwei Kongruenzen $b \equiv g \bmod m$ und $c \equiv h \bmod m$ haben die Kongruenz $\frac{b}{c} \equiv \frac{g}{h} \bmod m$ zur Folge, wenn die Zahlen c und h zu m teilerfremd sind. (Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $\frac{9}{7} \equiv \frac{3}{5} \bmod 12$ zeigt.) Wegen $c \equiv h \bmod m$ genügt es, wenn man von einer der Zahlen c, h weiß, daß sie zu m teilerfremd ist: denn alle Zahlen einer Restklasse mod m haben mit dem Modul m stets den gleichen größten gemeinsamen Teiler. Daher ist mit 2 auch a^{100} zu 73 teilerfremd, und der Übergang von den beiden Kongruenzen $a^{101} \equiv 69 \bmod 73$ und $a^{100} \equiv 2 \bmod 73$ zu

$$a = \frac{a^{101}}{a^{100}} \equiv \frac{69}{2} \equiv \frac{142}{2} \equiv 71 \bmod 73$$

ist möglich.

Dieser Lösungsweg erscheint also nur ohne die notwendigen Erklärungen besonders kurz, setzt die Kenntnis relativ vieler Gesetzmäßigkeiten über Restklassen voraus.

Dr. Horst Müller

2. Aufgabe

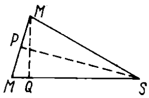
Lösung in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission

V_1 sei das Volumen des Behälters für die erste der oben angegebenen Lagen der Pyramide. Die Grundfläche der Pyramide fällt dann mit einer Seitenfläche des umschließenden Quaders zusammen, die Höhe der Pyramide ist gleich der Höhe des Behälters. Es gilt

$$V_1 = a^2 h \tag{1}$$

V_2 sei das Volumen des Behälters in der zweiten Lage der Pyramide. Wir berechnen V_2 für die beiden möglichen Fälle $h \geqq \frac{a}{2}$ und $h < \frac{a}{2}$.

Fall 1: Es sei $h \geqq \frac{a}{2}$. Die Seitenfläche ABS der Pyramide liege in einer Seitenfläche des Behälters, die Kante AB sei gemeinsame Kante von Pyramide und Behälter. Wir legen eine Ebene durch die Pyramidenspitze S, die Mitte M von AB und die Mitte M' der Gegenseite zu AB im Basisquadrat der Pyramide. Die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide ist (wegen der Kongruenz der Seitenflächen der Pyramide) das gleichschenklige Dreieck SMM' mit $\overline{SM} = \overline{SM'} = s$; $MM = a$ (Fig.)



Die Höhe $\overline{SP}$ dieses Dreiecks ist die Pyramidenhöhe h; die Seiten $\overline{SM}$, $\overline{SM'}$ sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide. Wegen $h \geqq \frac{a}{2}$ gilt $\sphericalangle\, MSP \leqq 45°$, also $\sphericalangle\, MSM' \leqq 90°$.

Hieraus folgt $\overline{MQ} \leqq \overline{MS} = s$, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S ist. Sei $x = \overline{M'Q}$, dann gilt:

$$V_2 = a \cdot s \cdot x \tag{2}$$

Die Dreiecke MQM' und MSP sind (wegen der Gleichheit der Winkel) ähnlich, also $x : a = h : s$ oder

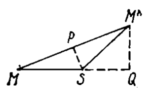
$$x = \frac{a\,h}{s}. \tag{3}$$

Einsetzen dieser Beziehung in (2) ergibt

$$V_2 = a^2 h = V_1,$$

d. h., die Behältervolumina sind für $h \geqq \frac{a}{2}$ in beiden Lagen gleich.

Fall 2: Es sei $h < \frac{a}{2}$. Die Schnittfigur SMM' ist jetzt ein bei S stumpfwinklig gleichschenkliges Dreieck (Fig.). Wie im Fall 1 fällen wir von M' das Lot $\overline{M'Q}$ auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S.



Wegen $\sphericalangle\, MSM' > 90°$ ist $s_1 = \overline{MQ} > \overline{MS} = s$.

Für das Volumen des umschließenden Quaders gilt (mit $x = \overline{M'Q}$):

$$V_2 = a\,s_1\,x$$

Wie im Fall 1 ist $x = \frac{a\,h}{s}$; demzufolge

$$V_2 = a^2 h \cdot \frac{s_1}{s},$$

und wegen $\frac{s_1}{s} > 1$ gilt also

$$V_2 > V_1.$$

Das Volumen ist kleiner, wenn die Grundfläche der Pyramide mit einer Seitenfläche des Behälters zusammenfällt.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

In den von den Schülern gefundenen Lösungen wurden diese Überlegungen meist nur geringfügig abgeändert. Besonders klare und übersichtliche Darstellungen gaben *Wolfgang Birken* (EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg), *Hannes Handorf* (Goethe-EOS, Schwerin), *Traugott Schulmeiß* (EOS Köthen) und *Peter Oswald* (EOS Dresden-Süd). Auffällig ist, daß viele Schüler den Fall $h = \frac{a}{2}$ gesondert untersuchten.

Die einfache Ähnlichkeitsbetrachtung, die zu Formel (3) führte, wurde oft durch längere Rechnungen mit dem Satz des Pythagoras ersetzt.

So schließt man etwa im Fall 2 aus

$$x^2 + s_1{}^2 = a^2 \text{ und } x^2 + (s_1 - s)^2 = s^2$$

auf $\quad s_1 = \frac{a^2}{2s}$ und mit $s^2 = \frac{a^2}{4} + h^2$

auf $\quad x = \frac{a\,h}{s}$.

Für V_2 erhält man damit

$$V_2 = a s_1 x = \frac{a^4 h}{2} \frac{1}{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

und wegen $h < \frac{a}{2}$ hieraus

$$V_2 > V_1 = a^2 h.$$

Dr. Klaus Zacharias

3. Aufgabe

Lösung

Im Dreieck gilt nach dem Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \text{ oder}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos\alpha.$$

Setzt man diesen Term in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$b^2 x^2 + 2bc \cos\alpha \cdot x + c^2 = 0$. Hieraus folgt:

$$x_{1,2} = -\frac{c}{b}\left(\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}\right)$$

$$= -\frac{c}{b}\left(\cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha}\right)$$

Da $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ist, gilt $\sin\alpha > 0$ und $\sin^2\alpha > 0$.

Der Radikand ist also negativ. Die Lösungen sind demnach nicht reell.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

Die Aufgabe ist von den meisten Schülern richtig gelöst worden. Bei der Lösung der Aufgabe wurden der Kosinussatz bzw. die Dreiecksgleichung angewandt. Bei der Anwendung der letzteren trat häufig der Trugschluß $a + b > c \rightarrow a^2 + b^2 > c^2$ auf.

Dr. Jurgis Szlaza

4. Aufgabe

Lösung 1: (Klaus Bernhardt, EOS „Otto von Guericke", Magdeburg)

Es seien c die Länge der Hypotenuse, a und b die Längen der Katheten, x und y die Größen der spitzen Winkel, die in der gewählten Reihenfolge den Katheten a und b gegenüberliegen, und A der Flächeninhalt des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks. Dann gilt

$$\sin x + \sin y = \frac{a + b}{c} \tag{1}$$

Den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks kann man dann mit der Formel

$$A = \frac{1}{2}\, ab \text{ bzw. } A = \frac{2\,ab}{4} \text{ berechnen.}$$

Unter Verwendung des Satzes des Pythagoras folgt

$$A = \frac{a^2 + 2\,ab + b^2 - c^2}{4} \text{ und damit}$$

$$A = \frac{(a + b)^2 - c^2}{4}.$$

Klammert man im Zähler c^2 aus, so erhält man

$$A = \frac{c^2\left[\left(\frac{a + b}{c}\right)^2 - 1\right]}{4}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhält man für den Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks

$$A = \frac{c^2\left[(\sin x + \sin y)^2 - 1\right]}{4}. \tag{3}$$

Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Da x ein spitzer Winkel ist, gilt

$$0 < \sin 2x \leqq 1. \tag{4}$$

Unter Verwendung der Formeln

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ und}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ erhält man aus (4)}$$

$$1 < \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \leqq 2.$$

Da $\sin x$ und $\cos x$ für spitze Winkel positiv sind, folgt

$$1 < \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}.$$

Da im rechtwinkligen Dreieck

$$\cos x = \sin y$$

gilt, erhalten wir schließlich die Bedingung

$$1 < \sin x + \sin y \leqq \sqrt{2}. \qquad (5)$$

Damit ist gezeigt, daß die Bedingung (5) für die Existenz eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c und den spitzen Winkeln von der Größe x und y notwendig ist. Es muß noch gezeigt werden, daß (5) auch hinreichend ist. Letzteres erkennt man aber aus der Betrachtung der Funktion $f(x) = \sin x + \cos x$. Da $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ und die Funktion $f(x)$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, daß jeder Funktionswert mit $1 < f(x) \leqq \sqrt{2}$ auf dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)^2$ (mindestens) einmal angenommen wird.

Damit existiert also bei vorgegebenem c zu *jeder* Sinussumme, die die Bedingung (5) erfüllt, (mindestens) ein rechtwinkliges Dreieck.

Zur Ergänzung sei noch ein zweiter Lösungsweg für den zweiten Teil der Aufgabe angegeben.

Lösung 2 (in Anlehnung an den Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission):

Die Höhe h auf der Hypotenuse kann genau alle Werte $0 < h \leqq \frac{c}{2}$ annehmen, wie man etwa durch Konstruktion des Dreiecks aus c, h zeigt. Daher kann $A = \frac{ch}{2}$ genau alle Werte $0 < A \leqq \frac{1}{4}c^2$, wegen (3) also $(\sin x + \sin y)^2 - 1$ genau alle Werte $0 < (\sin x + \sin y)^2 - 1 \leqq 1$ und somit $\sin x + \sin y$ wegen $\sin x + \sin y > 0$ genau alle Werte

$$1 < \sin x + \sin y \leqq \sqrt{2} \text{ annehmen.}$$

Man beachte, daß auf diese Weise gezeigt ist, daß (5) nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung ist.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

Wenn von 94 Schülern immerhin 31 Schüler 6 bzw. 5 Punkte für ihre Lösungen zu dieser Aufgabe erhielten, aber nur der Schüler *Klaus Bernhardt* die volle Punktzahl (7 Punkte) erreichte, so ist das darauf zurückzuführen, daß die meisten Schüler nicht einmal erkannt hatten, daß man von der Bedingung (5) auch zeigen muß, daß sie hinreichend ist. Als weiterer wesentlicher Mangel der Schülerlösungen wäre zu erwähnen, daß die Schüler beim Betrachten von Funktionen häufig Eigenschaften derselben benutzten, die diesen Funktionen nur wegen ihrer Stetigkeit zukommen, die Schüler die Stetigkeit der Funktionen aber nicht einmal erwähnten, ja sich wahrscheinlich nicht einmal dessen bewußt waren, daß es auch unstetige Funktionen gibt.

Hans-Jürgen Sprengel

Aufgabe 5 und 6 veröffentlichen wir in Heft 1/69, d. Red.

Lösungen

276a Es seien x der erste Faktor und y der zweite Faktor.

Dann gilt wegen Zeile 3 $8x < 1000$, d. h., $x < 125$, und wegen Zeile 2 und 4 $9x \geqq 1000$, d. h., $x > 111$.

Wir erhalten also $y = 989$ und, weil das Produkt xy auf 5 endet, $\mathbf{x = 115}$.

Es gibt also genau eine Lösung, und zwar

$$\begin{array}{r}
\underline{115 \cdot 989} \\
1035 \\
920 \\
\underline{1035} \\
113735
\end{array}$$

276b Wegen Zeile 1 und 3 ist der erste Faktor $x = 100a + 20 + b$, wegen Zeile 1 ist der zweite Faktor $y = 100c + 10 + d$, wobei a, b, c, d natürliche Zahlen seien, die größer als Null und kleiner als 10 sind. Man erhält

$$xy = (100a + 20 + b)(100c + 10 + d) = \\ = 100k + 10(b + 2d) + bd, \qquad (1)$$

wo k eine natürliche Zahl ist.

Wegen Zeile 2 und 5 endet die Zahl xy auf 51. (2)

Daher können nun die folgenden vier Fälle auftreten:

1. $\mathbf{b = 1, d = 1}$,
also wegen (1) $xy = 100k + 10(1 + 2) + 1 \cdot 1$
$= 100k + 31$ im Widerspruch zu (2).

2. $\mathbf{b = 3, d = 7}$,
also wegen (1) $xy = 100k + 10 \cdot 17 + 21$
$= 100k + 191$ im Widerspruch zu (2)

3. $\mathbf{b = 7, d = 3}$,
also wegen (1) $xy = 100k + 10 \cdot 13 + 21$
$= 100k + 151$

4. $\mathbf{b = 9, d = 9}$.
Auch dieser Fall führt zu einem Widerspruch, weil dann wegen Zeile 2 $9x < 1000$ wäre, was wegen Zeile 4 nicht möglich ist.

Daher ist nur der *Fall 3* möglich, und wir erhalten $b = 7$, $d = 3$. Daraus folgt

$$x = 100a + 27. \qquad (3)$$

Nur das Vierfache dieser Zahl x hat den Zehner 0, also ist wegen Zeile 4 $c = 4$.
Ferner gilt $4x \geqq 1000$, d. h., $x \geqq 250$
und $3x < 1000$, d. h., $x \geqq 333$.
Daraus folgt wegen (3) $x = 327$.
Wir erhalten also genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 327 \cdot 413 \\ \hline 1308 \\ 327 \\ 981 \\ \hline 135051 \end{array}$$

283b Analog wie oben (beachte: 8-adisches Positionssystem!) erhält man $D = 1$ oder $D = 2$ und weiter durch Ausschaltung aller Fälle, in denen sich eine Zahl wiederholt, die einzige Lösung:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,1\,5 \\ +\,2\,3\,1\,5 \\ +\,2\,3\,1\,5 \\ \hline 7\,1\,4\,7 \end{array}$$

283c Da im 7-adischen Positionssystem gerechnet werden soll, gilt
$(5^3 \cdot F + 5^2 \cdot Ü + 5 \cdot N + F) \cdot 2 = 5^3 \cdot Z + 5^2 \cdot E + 5 \cdot H + N$;
dabei sind die Buchstaben jeweils durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu ersetzen. Ferner ist $F \neq 0, Z \neq 0$.
Wegen $2F < 7$ ist **F gleich 1 oder 2 oder 3.**
Aus F erhält man dann N und aus N schließlich H und danach die Zahlen der folgenden Tabelle, wenn man für $Ü$ und E diejenigen Zahlen ausschließt, die bereits besetzt sind:

F	N	H	Z	Ü	E	Bemerkungen	
1	2	4	3	6	5	1. Lösung:	$\begin{array}{r} 1\,6\,2\,1 \\ +\,1\,6\,2\,1 \\ \hline 3\,5\,4\,2 \end{array}$
2	4	1	5	3	0	2. Lösung:	$\begin{array}{r} 2\,3\,4\,2 \\ +\,2\,3\,4\,2 \\ \hline 5\,0\,1\,4 \end{array}$
3	6	5	6			nicht möglich, da $N \neq Z$.	

Diese Aufgabe hat also genau zwei Lösungen.

283d Da im 6-adischen Positionssystem gerechnet werden soll, gilt
$(6^3 \cdot Z + 6^2 \cdot W + 6 \cdot E + I) \cdot 2 = 6^3 \cdot V + 6^2 \cdot I + 6 \cdot E + R$; dabei sind die Buchstaben jeweils durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 zu ersetzen.
Ferner ist $Z \neq 0$, $V \neq 0$.
Wegen $2 \cdot Z < 6$ erhält man $\mathbf{Z = 1}$ oder $\mathbf{Z = 2}$.
Ferner gilt $\mathbf{E = 0}$ oder $\mathbf{E = 5}$.
Denn es muß eine der folgenden Gleichungen erfüllt sein
$2 \cdot E = E$, $2 \cdot E + 1 = E$, $2 \cdot E = 6 + E$, $2 \cdot E + 1 = 6 + E$,
was nur für $E = 0$ und $E = 5$ zutrifft.

Ist $E = 0$, so gilt $2 \cdot I < 6$, also $\mathbf{I = 1}$ oder $\mathbf{I = 2}$.

Ist $E = 5$, so gilt wegen $2 \cdot 5 + 1 = 6 + 5$ $\mathbf{I = 3}$ oder $\mathbf{I = 4}$. Wir erhalten dabei die in der folgenden Tabelle angegebenen Möglichkeiten:

E	I	R	Z	W	V	Bemerkungen
0	1	2	1			nicht möglich, da $Z \neq I$
0	2	4	1	4		nicht möglich, da $W \neq R$
0	2	4	2			nicht möglich, da $Z \neq I$
5	3	0	1	1		nicht möglich, da $W \neq Z$
5	3	0	2	1	4	Lösung
5	4					nicht möglich, da $2W + 1$ ungerade und I gerade

Es gibt daher genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 2\,1\,5\,3 \\ +\,2\,1\,5\,3 \\ \hline 4\,3\,5\,0. \end{array}$$

284 Die Lösung dieser Aufgaben wird im Prinzip ebenso durchgeführt wie oben; wir müssen jedoch beachten, daß es sich um verschiedene Positionssysteme handelt. Wir erhalten dann die Lösungen:

a) Im dekadischem Positionssystem:

$$\begin{array}{r} \text{A N N A} \\ \text{L U I S A} \\ \hline \text{N E I R U T} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\,1\,1\,6 \\ 9\,7\,3\,5\,6 \\ \hline 1\,0\,3\,4\,7\,2 \end{array}$$

b) Im 7-adischem Positionssystem:

$$\begin{array}{r} \text{K U R T} \\ \text{K A R L} \\ \hline \text{T R A N K} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,0\,3\,1 \\ 5\,2\,3\,4 \\ \hline 1\,3\,2\,6\,5 \end{array}$$

c) Im 8-adischem Positionssystem:

$$\begin{array}{r} \text{K A R L} \\ \text{G E O R G} \\ \hline \text{L O K E R} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,7\,4 \\ 3\,6\,0\,7\,3 \\ \hline 4\,0\,2\,6\,7 \end{array}$$

288 Lösungen der Aufgaben von Prof. Dr. rer. nat. habil. F. Kuhnert

288a x — Anzahl der Flugzeuge vom Typ F
y — Anzahl der Flugzeuge vom Typ H

$$\begin{aligned} 1000x + 500y &= 10000 \\ 3x + 2y &\leqq 35 \\ 100x + 30y &\leqq 900 \\ x &\geqq 0 \\ y &\geqq 0 \\ 8x + 5y &\to \min \end{aligned}$$

Aus dem Ansatz erhält man:

$$\begin{aligned} y &= 20 - 2x \\ 20 - 2x &\geqq 0 \\ 3x + 40 - 4x &\leqq 35 \\ 100x + 600 - 60x &\leqq 900 \\ x &\geqq 0 \\ 8x + 100 - 10x &\to \min. \end{aligned}$$

Daraus weiter

$$0 \leqq x \leqq 10 \qquad x \geqq 5 \qquad x \leqq \frac{15}{2}$$
$$x \to \max.$$

Als optimale Lösung: $x = 7$, $y = 6$. Man muß also 7 Flugzeuge vom Typ F und 6 Flugzeuge vom Typ H einsetzen, damit die Gesamtausgaben minimal werden.

288b x_i — die in der i-ten Dekade abzuerntende Fläche in ha ($i = 1, 2, 3$)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \qquad x_1 \geqq 0$$
$$x_2 \geqq 0 \qquad x_3 \geqq 0$$
$$130 x_1 \leqq 500$$
$$(130 + 25) x_2 \leqq 500$$
$$(130 + 25 + 25) x_3 \leqq 500$$
$$130 \cdot 40 \cdot x_1 + (130 + 25) \cdot 32 \cdot x_2 + (130 + 25 + 25) \cdot 26 \cdot x_3 \ \max$$

Aus dem Ansatz erhält man:

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2$$
$$5 - x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$130 x_1 \leqq 500$$
$$155 x_2 \leqq 500$$
$$170(5 - x_1 - x_2) \leqq 500$$
$$x_1 \geqq 0 \qquad x_2 \geqq 0$$
$$5200 x_1 + 155 \cdot 32 x_2 + 170 \cdot 26 (5 - x_1 - x_2) \ \max.$$

Daraus weiter

$$x_1 + x_2 \leqq 5$$
$$x_1 \leqq \frac{50}{13}$$
$$x_2 \leqq \frac{500}{155}$$
$$35 \leqq 17 x_1 + 17 x_2$$
$$x_1 \geqq 0 \qquad x_2 \geqq 0$$
$$1780 x_1 + 1440 x_2 \ \max.$$

Grafisches Lösen ergibt:

$$x_1 = \frac{50}{13} \qquad x_2 = \frac{15}{13} \qquad x_3 = 0.$$

288c $x_1 \geqq 1 \qquad x_1 + x_2 \geqq 2$

$$\vdots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n \qquad x_j \geqq 0$$
$$j = 1, \ldots, n$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + n x_n \to \min$$

Aus dem Ansatz erhält man

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n = x_n + (x_n + x_{n-1}) + (x_n + x_{n-1} + x_{n-2}) + \ldots + (x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2) + (x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1)$$

Da $x_n \geqq 0$, $x_n + x_{n-1} \geqq 0$, $x_n + x_{n-1} + x_{n-2} \geqq 0, \ldots x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1\, n$,

so ist $x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n \geqq n$.

Andererseits gilt bei $x_1 = n$, $x_2 = x_3 \ldots = x_n = 0$:

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n = n.$$

Folglich ist $x_1 = n$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ die gesuchte Lösung.

287 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Dallmann

a) Flüssigkeitsquerschnitt

$$F = \frac{D^2}{4} [\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha] \ \mathrm{cm}^2$$
$$V = F \cdot L \cdot 10^{-3}$$
$$= \frac{1}{4} D^2 L \cdot 10^3 [\alpha - \sin\alpha \cos\alpha] \ \text{Liter}$$

b) $V = 5 \cdot 10^3 [\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha]$;

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2x}{D} = 1 - \frac{x}{100}$$

x	20	40	60	80
cos α	0,8	0,6	0,4	0,2
α	0,6434	0,9273	1,1592	1,3695
V	817	2236,5	3963	5867,5

x	100	120	140	160
cos α	0	—0,2	—0,4	—0,6
α	1,5708	1,7721	1,9824	2,2142
V	7854	9840,5	11745	13471

303 $a + b + c + d = 45$

$$(a + 2) = (b - 2) = 2 \cdot c = \frac{d}{2}$$

daraus folgt

$$a = a \qquad a = 8$$
$$b = a + 4 \qquad b = 12$$
$$c = \frac{a}{2} + 1 \qquad c = 5$$
$$d = 2a + 4 \qquad d = 20$$

304 $|x| > 2x$ gilt für alle $x < 0$ oder für x können alle negativen Zahlen stehen.

305 Frauen Männer Gesamtzahl

$$\left[\frac{35}{100} x\right] + \left[\frac{35}{100} x + 252\right] = \frac{100}{100} x$$
$$x = 840$$

oder 252 Männer $\mathrel{\widehat{=}}$ 30%
840 Beschäftigte $\mathrel{\widehat{=}}$ 100%

306

	Rolf	Inge	
damals	$2x$	x	$5x = 45$
heute	$3x$	$2x$	$x = 9$

307 $n(n-1) = s$

$$14 \cdot 13 = s$$
$$182 = s.$$ Es sind

182 Spiele in der Fußballoberliga notwendig.

309 Der Sohn sei n Jahre alt; dann ist der Vater $4 \cdot n$, beide Personen sind zusammen $n + 4n = 5n$ Jahre alt. Aus $50 < 5n < 60$ folgt $10 < n < 12$; es gilt somit $n = 11$.
Der Sohn ist 11, der Vater 44 Jahre alt.

310 Die Summe aus den beiden Zahlen ist um soviel größer wie die Differenz kleiner ist als die größere der beiden Zahlen. Aus dieser Überlegung ergibt sich folgender Lösungsweg:

$$121 + 45 = 166; \quad 166:2 = 83.$$

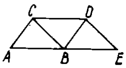
Die gegebene Zahl lautet 83.

311 Für eine Belegung der Buchstaben a, h, l und p kommen nur die Zahlen 2, 3, 5 und 7 in Frage. Die Quersumme ergibt nur dann eine Primzahl, wenn die Primzahl 2 in ihr zweimal vorkommt, also $2 + 2 + 3 + 5 + 7 = 19$. Damit gilt $a = 2$. Weiterhin kann „*al*" als Primzahl nur 23 und „*aph*" nur 257 lauten.
Also ist für *alpha* die Zahl 23572 zu setzen.

312 Wir addieren alle Zahlen und erhalten so die doppelte Anzahl der von allen drei Klassen insgesamt gesammelten Flaschen; denn es wiederholt sich jede Größe. $(790 + 970 + 920 = 2680)$ Nun dividieren wir die Summe durch 2. $(2680 : 2 = 1340)$
Wir erhalten dann die Anzahl Flaschen, die von den Schülern der drei Klassen insgesamt zusammengetragen wurden.
Aus $1340 - 790 = 550$ folgt: die Schüler der Klasse 5c sammelten 550 Flaschen.
Aus $1340 - 970 = 370$ folgt: die Schüler der Klasse 5a sammelten 370 Flaschen.
Aus $1340 - 920 = 420$ folgt: die Schüler der Klasse 5b sammelten 420 Flaschen.
Aus $1340 \cdot 0{,}05 = 67$ folgt, daß der Betrag von 67 M dem Solidaritätskonto gutgeschrieben wurde.

313 Das Dreieck ABF ist Vertreter einer Klasse von gleichschenkligen Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck KJE ist Vertreter einer anderen Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck CDA ist Vertreter einer dritten Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck CHB ist Vertreter einer vierten Klasse von Dreiecken, die genau 10 Stück umfaßt.
Das Dreieck ECD ist Vertreter einer fünften Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck EFC ist Vertreter einer sechsten Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Die Figur enthält somit 35 verschiedene gleichschenklige Dreiecke.

314 Man verbindet einen frei wählbaren Punkt C, der nicht auf der Geraden AB liegt,



und verbindet ihn mit den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke. Durch B zeichnet man die Parallele zu $\overline{AC}$ und durch C die Parallele zu $\overline{AB}$; der Schnittpunkt dieser Parallelen sei der Punkt D. Nun ist durch D die Parallele zu $\overline{BC}$ zu konstruieren; sie schneidet die über B hinaus verlängerte Strecke $\overline{AB}$ im Punkte E so, daß $\overline{AB} = \overline{BE}$ gilt.
Begründung: Das Viereck $ABDC$ ist nach Konstruktion ein Parallelogramm; folglich gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$. Das Viereck $BEDC$ ist aus den gleichen Gründen ebenfalls ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{BE} = \overline{CD}$. Aus $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BE} = \overline{CD}$ folgt $AB = BE$.

315 Es gilt der Satz: Das Produkt aus dem k. g. V. und dem g. g. T. zweier Zahlen ist gleich dem Produkt dieser beiden Zahlen.
Folglich gilt: $x \cdot 4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 45$, d. h., $x = 495$. Die zweite Zahl lautet 495.

316 Es gilt der Satz: *Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.*
Es seien α', β' und γ' die drei Außenwinkel des Dreiecks ABC; dann gilt

$$\alpha' = \gamma' - 29^\circ$$
$$\beta' = \gamma' - 49^\circ$$
$$\gamma' = \gamma'$$

also $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3\gamma' - 78^\circ = 360^\circ$, d. h., $3\gamma' = 438^\circ$, $\gamma = 146^\circ$.
Die Innenwinkel des Dreiecks ABC betragen $\alpha = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$, $\beta = 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ$ und $\gamma = 34^\circ$.

W(6)317 Die drei Zeilen seien mit a, b und c, die drei Spalten mit d, e und f gekennzeichnet. Die drei Spalten lassen sich auf sechsfache Weise anordnen:

d e f, d f e, e d f, e f d, f d e, f e d.

Außerdem lassen sich die Zeilen auf sechsfache Weise anordnen:

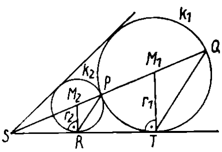
a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a.

Darüberhinaus darf man die Zeilen gegen die Spalten austauschen. Es gibt also $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ verschiedene Anordnungen; dabei ist die gegebene Anordnung mit eingeschlossen.

W(6)318 Aus $1 + 7 = 8$ folgt: die Ziffer an der Zehnerstelle im Dividenden ist eine 8.
Aus $28 - {*}7 = {*}1$ folgt $28 - 17 = 11$.
Aus $11{*} : {*}{*} = {*}{*}$ folgt: die Ziffer an der Zehnerstelle muß im Divisor und im Quotienten eine 1 sein.
Schließlich finden wir die Lösung: $289 : 17 = 17$.

319 Die Mittelpunkte aller Kreise, die die Schenkel des Winkels α berühren, liegen auf der Halbierungslinie des Winkels α. Aus der nachstehenden Zeichnung ist folgendes ersichtlich:
Die Berührungsradien $\overline{M_1T}$ und $\overline{M_2R}$ stehen senkrecht auf der Geraden ST. Die Winkel

$\sphericalangle RM_2P$ und $\sphericalangle TM_1Q$ sind als Stufenwinkel an einem geschnittenen Streifen gleich groß. Die Dreiecke TQM_1 und RPM_2 sind beide gleichschenklig. Aus der Gleichheit der beiden Winkel an den Spitzen dieser Dreiecke folgt die Gleichheit ihrer Basiswinkel, d. h., $\sphericalangle QTM_1 = \sphericalangle PRM_2$. Somit sind die Ge-



raden TQ und RP zueinander parallel, sie bilden ebenfalls einen Streifen.

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Wir zeichnen die Halbierungslinie des Winkels α, sie schneide den Kreis k_1 in den Punkten P und Q. Wir fällen von M_1 das Lot auf einen Schenkel des Winkels α, der Fußpunkt sei T. Wir zeichnen nun durch P die Parallele zur Geraden TQ; sie schneidet den Schenkel ST im Punkte R. Schließlich errichten wir in R die Senkrechte auf ST; sie schneidet die Halbierungslinie von α im Punkte M_2. Der Kreis um M_2 als Mittelpunkt mit dem Radius $r_2 = \overline{M_2R}$ ist dann der zu konstruierende Kreis k_2.

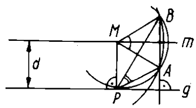
320a Die vier abgeschnittenen Papierdreiecke sind einander kongruent, denn sie stimmen jeweils in zwei Seiten und in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel von 90° überein. Folglich besitzt das verbleibende viereckige Papierstück vier gleich lange Seiten. Da außerdem die vier abgeschnittenen Papierdreiecke gleichschenklig sind, ist jeder ihrer Basiswinkel gleich 45°. Zwei solcher Basiswinkel bilden zusammen mit einem Viereckswinkel jedes Mal einen gestreckten Winkel; deshalb sind alle Viereckswinkel rechte Winkel. Das verbleibende Papierstück hat also wieder die Gestalt eines Quadrates.

b Die abgeschnittenen vier Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammen legen, daß dem nach Abschneiden verbleibenden Quadrat kongruent ist. Also wird nach jedem Abschneiden die Ausgangsfläche auf die Hälfte verkleinert.

Nach dem ersten Abschneiden erhalten wir $\frac{1}{2}$ der Ausgangsfläche; nach dem zweiten Abschneiden erhalten wir $\frac{1}{2^2}$ der Ausgangsfläche; nach dem n-ten Abschneiden schließlich $\frac{1}{2^n}$ der Ausgangsfläche.

Wegen $2^9 = 512$ und $2^{10} = 1024$ müssen die Ecken mindestens zehnmal abgeschnitten werden, damit das schließlich entstandene quadratische Reststück einen Flächeninhalt besitzt, der weniger als ein Tausendstel der Ausgangsfläche beträgt.

321 Der Punkt P kann nicht mit den Punkten A und B in einer Geraden liegen; also existiert stets ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, der Umkreis des Dreiecks ABP ist.



Der Mittelpunkt des Kreises k liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB. Nach dem Peripheriewinkels. gilt: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ wird um so größer, je kleiner der Abstand des Punktes M von der Strecke $\overline{AB}$ ist, je kleiner also der Radius r des Kreises k ist. Den kleinsten Radius aller möglichen Kreise k, die durch A und B gehen und mit der Geraden g wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, besitzt der Kreis, für den die Gerade g Tangente ist. Der Berührungspunkt dieses Kreises k mit der Geraden g ist also der gesuchte Punkt P. Der Punkt M ist somit der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m von $\overline{AB}$ mit dem Kreis um A mit d als Radius; dabei ist d der Abstand der parallelen Geraden m und g. P ist dann der Fußpunkt des von M auf g gefällten Lotes.

W(7)322 In einem regelmäßigen n-Eck hat jeder Innenwinkel das Maß $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$, folglich gilt:

$$\frac{2n-2}{2n} \cdot 180° - 10° = \frac{n-2}{n} \cdot 180°,$$

$$\frac{n-1}{n} \cdot 180° - \frac{n-2}{n} \cdot 180° = 10°,$$

$$\frac{180°}{n} = 10°,$$

$$n = 18.$$

Das erste Vieleck besitzt 18 Seiten; es handelt sich also um ein regelmäßiges 18-Eck.

W(7)323 Aus $\frac{x}{5} + \frac{y}{13} = \frac{77}{65}$ folgt durch Umformung $13x + 5y = 77$ bzw. $x = 6 - \frac{5y+1}{13}$.

Der Zähler $5y + 1$ ist durch 13 teilbar für $y = 5, 18, 31, \ldots$

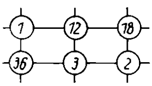
Nur für $y = 5$ wird x positiv und zwar gleich 4. Also gilt $\frac{4}{5} + \frac{5}{13} = \frac{77}{65}$.

324 Da die Punkte D und D' symmetrisch bezüglich der Symmetrieachse AP liegen, gilt $\overline{AD} = \overline{AD'}$ und $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAD' = \alpha$.
Ferner gilt $\overline{AD'} = \overline{BD'} = \overline{AD} = \overline{AB}$, daher ist das Dreieck ABD' gleichseitig und $\sphericalangle D'AB = 60°$.
Daher ist $2\alpha = 90° - 60° = 30°$, d. h., $\alpha = 15°$.
Ferner ist aus Symmetriegründen

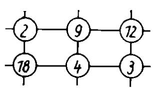
$$\sphericalangle P'AB = \sphericalangle DAP = \alpha = 15°.$$

Also gilt $\sphericalangle PAP' = 90° - 2\alpha = 90° - 30° = 60°$.
Aus Symmetriegründen ist ferner $\overline{AP} = \overline{AP'}$, d. h., das Dreieck $AP'P$ ist gleichseitig, w. z. b. w.

325 Es muß gelten $abc = def = 6^3 = 216$ und $ad = be = cf = 6^2 = 36$. Wegen $ad = 36$ ist a ein Teiler von 36.
1. *Fall:* Es sei $a = 1$. Aus $ad = 36$ folgt dann $d = 36$. Wegen $def = 216$ gilt $ef = 6$. Hiernach sind die Zahlen e und f entweder die Zahlen 1 und 6 oder die Zahlen 2 und 3. Da alle sechs Zahlen voneinander verschieden sein sollen, scheidet wegen $a = 1$ das Zahlenpaar (1; 6) aus. Da schließlich f die zweitkleinste der sechs gesuchten Zahlen sein soll, muß gelten $f = 2$ und $e = 3$. Aus $be = 36$ und $cf = 36$ folgt schließlich $b = 12$ und $c = 18$. Wegen $1 \cdot 12 \cdot 18 = 216$ ist damit eine Lösung gefunden.



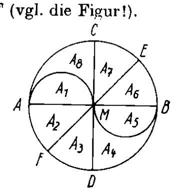
2. *Fall:* Es sei $a = 2$. Aus $ad = 36$ folgt dann $d = 18$. Weiterhin folgt aus $def = 216$ jetzt $ef = 12$. Die Zahlen e und f sind entweder 1 und 12, 2 und 6 oder 3 und 4. Da a die kleinste der sechs Zahlen sein soll, scheiden die Paare (1;12) und (2; 6) aus. Da schließlich f die zweitkleinste der sechs Zahlen sein soll, muß gelten $f = 3$ und $e = 4$. Durch analoges Weiterschließen wie oben wird die folgende zweite Lösung gefunden:



3. *Fall:* Es sei $a \geqq 3$. Jetzt können, da a die kleinste der sechs Zahlen sein soll, für die Paare $(a; d)$, $(b; e)$ sowie $(c; f)$ nur die Zahlenpaare (3; 12), (4; 9) sowie (6; 6) in Frage kommen. Das Paar (6; 6) scheidet aus, da sämtliche sechs Zahlen voneinander verschieden sein sollen. Da nunmehr nur zwei Paare von Zahlen verbleiben, können keinesfalls anstelle der sechs Buchstaben sechs den Bedingungen genügende voneinander verschiedene Zahlen eingesetzt werden. In diesem Fall existiert keine weitere Lösung.

326 Wegen $abc = def$ gilt $p = abc \cdot abc = (abc)^2$. Die damit als Quadratzahl erkannte natürliche Zahl p enthält einen jeden Primfaktor in einer Potenz mit einem durch zwei teilbaren Exponenten. Wegen $ad = be = cf$ gilt analog $p = ad \cdot ad \cdot ad = (ad)^3$. Als Kubikzahl enthält die natürliche Zahl p jeden Primfaktor in einer Potenz mit einem durch drei teilbaren Exponenten. Da also in der Primfaktorzerlegung von p jeder Exponent sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist, ist jeder Exponent durch 6 teilbar. Also ist die Zahl p die sechste Potenz einer anderen natürlichen Zahl.

W(8)327 Es seien M der Mittelpunkt des Kreises, A und B die Berührungspunkte der kleinen Halbkreise mit dem Kreis. Ferner sei $\overline{MA} = \overline{MB} = r$. Wir zeichnen die **erste** Gerade AB. Dann errichten wir auf AB in M die Senkrechte und erhalten die **zweite** Gerade CD. Nun, konstruieren wir die Halbierungslinie des Winkels BMC und erhalten die **dritte** Gerade EF (vgl. die Figur!).



Somit ist die Kreisscheibe in acht Gebiete zerlegt worden, deren Flächeninhalte wir mit $A_1, A_2, \ldots, A_8$ bezeichnen (siehe Figur!). Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit $A = \pi r^2$, dann gilt

$$A_2 = A_3 = A_6 = A_7 = \frac{A}{8};$$

$$A_1 = A_5 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8} = \frac{A}{8};$$

$$A_4 = A_8 = \frac{A}{4} - \frac{A}{8} = \frac{A}{8}.$$

Die acht Gebiete sind also einander paarweise inhaltsgleich.

An unsere neuen Leser!

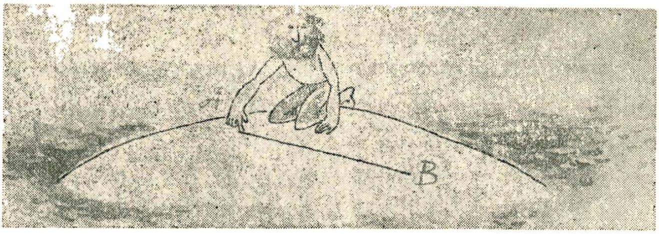
Durch die Deutsche Post (zuständiges Postamt) oder dem Verlag Volk und Wissen, 108 Berlin, Lindenstr. 54a, Abtlg. Vertrieb, können noch folgende Hefte bezogen werden:

3/67, 4/67, 5/67, 6/67
1/68, 2/68, 3/68, 4/68, 5/68.

Redaktion *alpha*

HUGO STEINHAUS **100 Aufgaben**

(Übersetzung aus dem Polnischen), 1. Auflage 1968, etwa 240 Seiten, etwa 125 zweifarbige Zeichnungen im Text, 12,5 cm × 20,0 cm, Pappband, 9,— M



Diese Sammlung elementarer Aufgaben soll den Leser in die Praxis jener universellen Methoden der Behandlung von Erscheinungen einführen, welche die Griechen „Mathematik“ nannten; sie soll ihm den Übergang von der Praxis der Schule zur modernen Mathematik erleichtern und ihm diese Wissenschaft an einem Stoff zeigen, der ihm zugänglich ist. Dementsprechend ist diese Sammlung von „100 Aufgaben“ vor allem für fortgeschrittene Schüler und Lehrer bestimmt. Der Autor bemühte sich, Aufgaben zu stellen, die ganz naturgemäß aus geometrischen Erscheinungen oder aus realen Umständen hervorgehen, und die so die Aufmerksamkeit auf die Wechselbeziehungen der Mathematik mit der Wirklichkeit lenken. Die vollständigen Lösungen sind jeder Aufgabe beigegeben und lassen den Geist und die Tendenzen der modernen Mathematik erkennen.

URANIA-VERLAG LEIPZIG · JENA · BERLIN

Eine Aufgabe aus dem Buch lautet:

Drei Läufer A, B, C trainieren systematisch auf der 200-m-Strecke. Nach jedem Lauf notieren sie die Reihenfolge, in der sie das Ziel passieren. Am Ende der Saison stellen sie fest, daß A in den meisten Trainingsläufen B geschlagen hat, daß B meistens C besiegt hat und daß in fast allen Läufen C vor A lag. Wie ist das möglich?

Lösung: Wir betrachten drei Läufe. Im ersten Lauf ist die Reihenfolge der drei Läufer im Ziel A, B, C. Im zweiten Lauf ist sie B, C, A und im dritten C, A, B. Somit hat A den Läufer B zweimal geschlagen und B hat A nur einmal hinter sich gelassen; C hat A in zwei der drei Läufe besiegt, und B schlug C bei zwei Läufen.