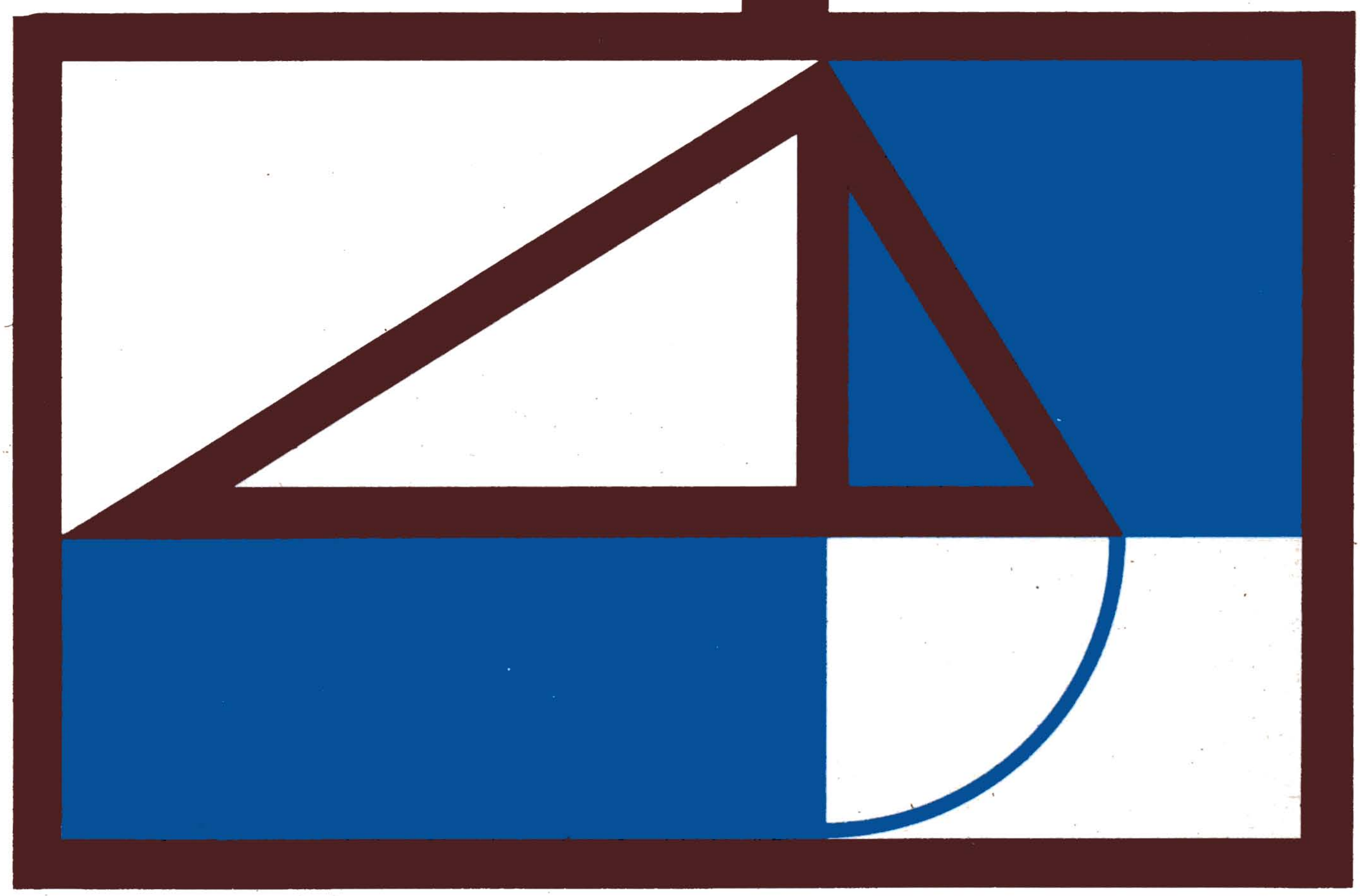
Mathematische Schüler-zeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16 Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Zentralbild (S. 1); Zentralbild/Nowosti (S. 3); Archiv VEB Polytechnik, Karl-Marx-Stadt (S. 6/7); F. Fricke, Berlin, aus „Zeit im Bild“ 42/68 (S. 14 oben); Hochschulbildstelle der Technischen Universität Dresden (S. 16); Vignetten: H.-J. Jordan, H. Tracksdorf (beide Leipzig);
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 2. Dezember 1968

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die „Mathematischen Manuskripte“ von Karl Marx

„Ich bin bei der Ausarbeitung der ökonomischen principles / Grundsätze / so verdammt aufgehalten mit Rechnungsfehlern, daß ich aus despair / Verzweiflung / wieder mich drangesetzt habe, rasch die Algebra durchzuschlagen. Arithmetik blieb mir immer fremd. Auf dem algebraischen Umweg aber schieße ich mich rasch wieder ein.“

So erwähnte Marx zum erstenmal am 11. Januar 1858 in einem Brief an Engels, daß er Mathematik treibe.
Erstmalig nach dem Gymnasium wandte sich Marx mit fast 30 Jahren wieder der Mathematik zu. Eins seiner Hefte aus dem Jahre 1846 mit Notizen zur politischen Ökonomie enthält sieben zusammenhängende Seiten mit mathematischen Zeichen. Es sind Lösungen von Gleichungen ersten Grades, Berechnungen von Prozentverhältnissen und Newtonschen Binomialkoeffizienten. Weitere Jahre danach entstanden in den Vorarbeiten „Zur Kritik der politischen Ökonomie“ verschiedene Seiten mit geometrischen Zeichnungen, algebraische Berechnungen zur Abstrahierung des Begriffs der Potenz und des Logarithmus.
Zwischen diesen Studien lagen große Unterbrechungen von mehreren Monaten, ja sogar Jahren. Die Mathematik half Marx, wenn er keine Kraft mehr zu etwas anderem hatte. Systematisch konnte er sich mit der Mathematik aber erst ab 1878, also in seinen letzten fünf Lebensjahren, befassen.
Die erste Bekanntschaft mit der Analysis bereitete Marx ein rein ästhetisches Vergnügen. Voller Begeisterung löste er ein Beispiel nach dem anderen, füllte er Manuskriptseiten mit der Ausrechnung von Differentialgleichungen. Seine Bibliothek wuchs um mathematische Werke, und bald schon sah er sich verpflichtet, Engels von seinem neuen Steckenpferd zu berichten und ihm vorzuschlagen, sich ebenfalls an den Freuden der Erkenntnis zu laben. Ein für Marxsche Manuskripte ungewöhnlich schmaler Papierstreifen enthält die Beilage (Marx nannte sie „Appendix“) zu einem Brief an Engels, dessen Datum nur ungefähr angegeben werden kann (Ende 1865 bis Anfang 1866). Sie beginnt so:

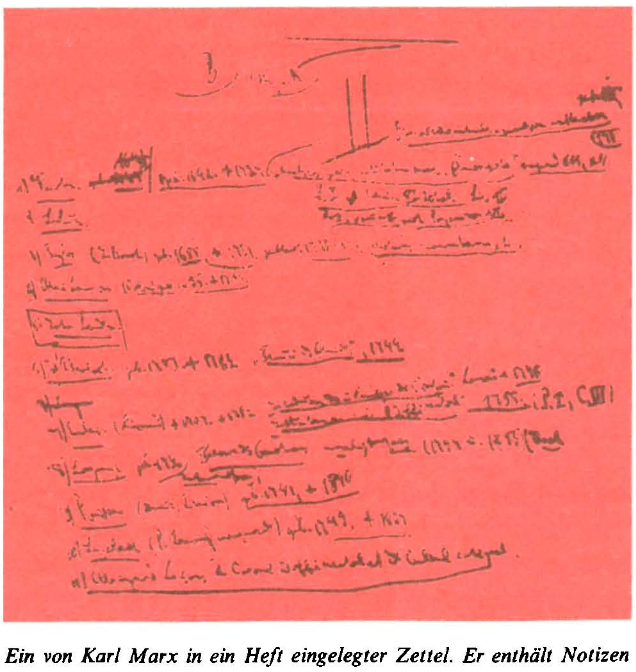
„Appendix. Du hast mich während meines letzten Aufenthaltes in Manchester einmal nach Erklärung des Differentialkalküls gefragt. Im folgenden Beispiel wird Dir die Sache ganz klar werden. Der ganze Differentialkalkül entsprang zunächst aus der Aufgabe, Tangenten durch einen beliebigen Punkt einer beliebigen Kurve zu ziehn. Daran will ich Dir daher die Sache exemplifizieren.“

An diese Einleitung schließt sich die älteste Handschrift von Marx zur höheren Mathematik an. Die jüngste Ausarbeitung ist in seinen letzten Lebensjahren entstanden, genauer gesagt, begonnen worden, weil ihn der Tod hinderte, die große Arbeit zu vollenden, nämlich die Differentialrechnung zu begründen, ihre Natur und Dialektik zu enthüllen. Gleichsam im Vorgefühl des nahenden Endes wollte er die wichtigsten Teile seiner Aufzeichnungen sauber abschreiben und an Engels schicken. Solche Reinschriften sollte es drei geben, aber Engels erhielt nur zwei. Die dritte und letzte konnte Marx nicht mehr beenden.
Marx war schon über 60 Jahre alt, krank und matt, durch die tödliche Krankheit seiner Frau gebrochen, als er diese Manuskripte niederschrieb. Er schrieb sie in der feurigen, kraftvollen Sprache eines Mannes, der um den Wert eines geschliffenen Wortes und scharfen Gedankens wußte. Engels antwortete ihm jungenhaft triumphierend: „Gestern also endlich hab' ich mir die Courage gefaßt, auch ohne Hülfsbücher Deine mathematischen Manuskripte durchzustudieren, und war froh zu sehn, daß ich die Bücher nicht nötig hatte.“
Mit Unterbrechung, in Minuten von Stunden, die dem „Kapital“ galten, suchte Marx schon in jenem Frühjahr 1865 herauszufinden, wieso es in der Differentialmethode so sonderbar zugeht, daß sie strenggenommen die Mathematik durchweg verletzt, die Resultate aber immer richtig sind.
Doch kam der Zeitpunkt, da es sich Marx erlauben konnte, eine Sache in Angriff zu nehmen, die ihn schon lange beschäftigte. Allerdings ergab sich das nicht ganz so, wie er es sich gewünscht hätte, einfach, weil er sehr krank war. „Nach 1870 trat wieder eine Pause ein, bedingt hauptsächlich durch Krankheitszustände. Wie gewöhnlich füllte Marx diese Zeit durch Studien aus; Agronomie ..., Geologie und Physiologie und namentlich selbständige mathematische Arbeiten, bilden den Inhalt der zahlreichen Auszugshefte aus dieser Zeit.“

Diese Worte aus Engels' Vorwort zum zweiten Band des „Kapital" sind wohl bekannt. Nicht jedermann weiß jedoch, wie tapfer damals der kranke Marx mit der Aufgabe rang, die Differentialrechnung zu begründen.

Das Schicksal der Handschriften
ist dramatisch. Ihr Weg zu den Menschen war nicht einfach. Engels konnte seine Absicht, sie zusammen mit seinen zuletzt entstandenen Werken herauszugeben, nicht verwirklichen — seine „Dialektik der Natur" erschien erst viele Jahre nach seinem Tode, erst in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts. Die von Marx hinterlassenen Manuskripte gerieten in das Archiv der deutschen Sozialdemokratie.

Sorgen und Nöte hatte die junge Sowjetunion in den 20er Jahren genug — sie waren sehr groß und dringlich. Und dennoch schrieb Lenin einen kurzen Brief an den Direktor des Marx-Engels-Instituts: „Genosse Rjasanow! ... Könnten wir nicht bei den Scheidemann und Co. die Briefe von Marx und Engels kaufen (das ist doch so eine käufliche Bande)? Oder Fotokopien kaufen?" Daraufhin fuhr Rjasanow nach Berlin und konnte tatsächlich erreichen, daß Zehntausende Seiten Marxscher Manuskripte fotokopiert wurden. Etwa 1000



Ein von Karl Marx in ein Heft eingelegter Zettel. Er enthält Notizen über berühmte Mathematiker und Literaturhinweise

von ihnen waren Arbeiten zur Mathematik. In das Moskauer Marx-Engels-Institut gelangten die Fotokopien der „Mathematischen Manuskripte" im Jahre 1925. Anfang der dreißiger Jahre begann im Institut für Marxismus-Leninismus beim Zentralkomitee der KPdSU Ernst Kolman zu arbeiten. Die Fotokopien der „Mathematischen Manuskripte" fesselten seine Aufmerksamkeit. Er war es, der Sofja Alexandrowna Janowskaja, die er von der Kommunistischen Akademie her kannte, dafür gewann, sich dieser Handschriften anzunehmen. Man kann sich schwerlich jemanden vorstellen, der die Aufgabe, Marxens Handschriften für den Druck vorzubereiten, hätte besser lösen können als Sofja Janowskaja. Über ihre Beharrlichkeit und Hartnäckigkeit entstanden an der Moskauer Universität wahre Legenden.

Natürlich reichten hier Beharrlichkeit und Hartnäckigkeit allein bei weitem nicht aus. Erforderlich war eine selten anzutreffende Verbindung von Wissen, Interesse und Können. Man muß selbstverständlich die Mathematik beherrschen, ihre Geschichte, die Sprachen Deutsch, Englisch und Französisch.

Bald nach dem Kriege meldete sich bei Sofja Alexandrowna Janowskaja der Doktorand Konstantin Alexejewitsch Rybnikow. Übrigens waren sie alte Bekannte, denn gerade unter Janowskajas Betreuung hatte Rybnikow im Jahre 1941, fünf Tage nach Kriegsausbruch, seine Kandidatendissertation zur Geschichte der Variationsrechnung verteidigt. Seine Doktordissertation über Marxens mathematisches Erbe verteidigte Rybnikow genau 13 Jahre später, am 25. Juni 1954.

Das nächste Jahrzehnt war durch eine ebenso mühselige wie aufwendige Arbeit erfüllt. Eine Frage nach der anderen, die auf den Rändern der Handschriften angemerkt waren, wurde gelöst. Es mußte bis zu Ende geklärt werden, welche Quellen Marx benutzt hatte. Das war manchmal eine schier unlösbare Aufgabe, weil die Bücher schon lange nicht mehr im Umlauf waren. 1966 fuhr Rybnikow nach London, um, wie er sagte, „den Löwen in der Wüste zu jagen". Aufs genaueste musterte er die Bestände des Britischen Museums und anderer großer Bibliotheken.

Der deutsche Mathematiker Wußing (Leipzig) durchforschte die Bibliotheksbestände der DDR, um in ihnen sämtliche in Deutschland herausgegebenen mathematischen Werke zu ermitteln, die Marx benutzt haben konnte. So gelang es, Marxens Handschriften fast in allen Fällen mit der von ihm benutzten Literatur zu vergleichen und die selbständigen Niederschriften von den Konspekten zu trennen.

Die Handschriften liegen in dem strengen Gebäude am Sowjetskaja-Platz, und sie scheinen die Wärme vieler Hände zu bewahren, die sie sorgsam wie eine Stafette durch die langen Jahre trugen. Marxens Handschriften waren und sind in den richtigen Händen.

Aus Nedelja 10/68

Lew Danowitsch Landau

geb.: 22. 1. 1908 in Baku · gest.: 1. 4. 1968 in Moskau

Landaus letzte Worte: Ich hatte ein gutes Leben. Mir ist alles gelungen.

Etappen seines Lebens

Aufnahme des Physikstudiums mit 14 Jahren in Leningrad, Veröffentlichung seiner ersten Arbeiten über die *Theorie der Metalle* mit 18 Jahren, erfolgreiche Verteidigung seiner Doktorarbeit mit 19 Jahren, anschließend Studienaufenthalte in Kopenhagen (bei Niels Bohr), Göttingen (bei Max Born), England und der Schweiz, Arbeit als Wissenschaftler in Charkow, ab 1937 als Lehrer und Forscher an der Universität Moskau.

Wichtigste wissenschaftliche Arbeiten

Über Quantentheorie und Kernphysik, Physik der kosmischen Strahlungen, Kolloidchemie, Theorie des Diamagnetismus freier Metallelektronen, Theorien über Zustandsänderungen in festen Körpern, Theorie des „superfluiden" Heliums (für letztere erhielt er den Nobelpreis)

Bedeutende Auszeichnungen

Akademiemitglied (seit 1946), Staatspreis der Sowjetunion (1946), Auszeichnung mit der Max-Planck-Medaille (1960), Nobelpreis für Physik (1962), Auszeichnung mit dem Leninorden (Januar 1968)

Worte an einen Mathematikstudenten

Ein junger Mathematikstudent kam zu Landau und behauptete, er habe den Beweis für den großen Fermatschen Satz gefunden. Dieser Satz stammt von dem berühmten französischen Mathematiker Fermat (1601 bis 1665) und lautet:

Es gibt für keinen ganzzahligen Exponenten $n > 2$ ganze, von Null verschiedene Zahlen x, y, z, die der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ genügen.

Obwohl sich seit 300 Jahren Mathematiker der ganzen Welt bemühen, einen allgemeinen Beweis für diesen Satz zu finden, gilt er heute noch als unbewiesen. Landau hörte den jungen Gast geduldig an, lächelte dann und bat ihn, eine nicht allzu schwierige mathematische Aufgabe zu lösen, die er ihm diktierte. Der Student vermochte jedoch nicht, die Lösung zu erbringen. Daraufhin riet ihm der große Gelehrte:

Bevor Sie an den Grundlagen der Wissenschaft rütteln, müssen Sie studieren.

Landaus Vermächtnis an die Jugend

Mit Wißbegier beginnt die Erkenntnis der Welt. Gerade das ist eines der markantesten und bedeutsamsten Kennzeichen der Jugend, in dem sich die Persönlichkeit formt und das Wissen besonders rasch und nachhaltig zunimmt. Ohne Wißbegier kann sich meiner Meinung nach der Mensch nicht normal entwickeln. — Ein Wissenschaftler ohne Wißbegier ist ein kläglicher und unfruchtbarer Mensch ... Ich meine, daß die allgemeine Wißbegier heute besonders notwendig ist in einer Gesellschaft, die die schöpferische Entwicklung der Persönlichkeit anstrebt. Ein Mensch, der heute nicht ständig die Ereignisse in der Wissenschaft verfolgt, läuft Gefahr, in kurzer Zeit hinter dem Leben zurückzubleiben und viele neue Erscheinungen nicht zu verstehen.

B. Zimmermann

Was bedeutet eigentlich „x"?

Die Algebra wurde von den Arabern begründet. Als sie die Unbekannte (Variable) bezeichnen mußten, taten sie dies mit dem arabischen Wort „schei", das im Arabischen „etwas" (nicht Bekanntes) bedeutet. Der Kürze wegen verwendete man in Schriftstücken usw. nur den ersten Buchstaben des Wortes — das „sch". Von den Arabern lernten ihre Nachbarn und Rivalen, die Spanier, die Algebra kennen. Sie begannen ebenfalls die unbekannte Größe „sch" zu nennen. Daraus ergab sich eine merkwürdige Verwechslung: Die Spanier selbst hatten auch einen Buchstaben, der den Lautwert „sch" hatte; geschrieben wurde er jedoch „x". Für die Spanier war soweit also alles klar — sie schrieben einfach die Unbekannte (Variable) als „x", sprachen es aber wie „sch" aus. Doch sie vermittelten die Wissenschaft der Algebra ihren nördlichen Nachbarn, den Franzosen. Die Franzosen schrieben nun für die Unbekannte (Variable) auch „x". Nur wurde dieser Buchstabe bei ihnen nicht als „sch", sondern als „iks" gesprochen. Auf diese Weise ging der eigentliche Sinn des arabischen Wortes „schei" — „etwas" (nicht Bekanntes) verloren. Von den Franzosen kam die Bezeichnung „x" schließlich zu uns.

Aus: Po sv'etu 11/67 entnommen und im Russischunterricht übersetzt von Kl. 10 der 22. OS, Leipzig.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 1

Wir beginnen in diesem Heft eine Artikelserie, in der wir uns mit *Rechentechnik* beschäftigen wollen, also mit einem Gebiet der Mathematik, das in der letzten Zeit einen unerhörten Aufschwung genommen hat und immer größere Bedeutung gewinnt. Der Grund dafür dürfte allgemein bekannt sein: Wissenschaft und Technik haben sich so stürmisch entwickelt, daß die anfallenden Probleme einerseits immer komplizierter werden, andrerseits in so kurzer Zeit gelöst werden müssen, daß die Bewältigung heute gar nicht mehr anders möglich ist als *elektronisch.* Man denke etwa an die Überwachung eines modernen Produktionsprozesses, bei dem die Meßgrößen sofort ausgewertet werden müssen, um in den Vorgang eingreifen zu können. Ein menschlicher Rechner würde vielleicht Tage oder Wochen für eine solche Arbeit benötigen. Die Ergebnisse wären dann überholt und wertlos, die Produktion inzwischen fehlgesteuert, was erhebliche Material- und Zeitverluste bedeuten könnte. Um sich eine Vorstellung vom rechnerischen Umfang der auftretenden Probleme zu machen, sei erwähnt, daß etwa die Lösung eines Systems von 40 Gleichungen mit 40 Unbekannten mit drei- bis vierstelligen Koeffizienten durchaus keine Seltenheit ist. Der Leser möge sich ausmalen, wie lange ein Mensch damit zu tun hätte, abgesehen von den immer wieder durch die eintönige und ermüdende Tätigkeit auftretenden Rechenfehlern. Schon bei einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten wie

$$0{,}371\,x - 0{,}986\,y = 1{,}352$$
$$0{,}846\,x + 1{,}249\,y = -0{,}941$$

empfindet man Unbehagen. Man würde eine ganze Weile daran rechnen; und wenn die Aufgabe einem praktischen Problem entspringt, wird man nicht erwarten können, daß sie — wie meistens in den Schulbüchern — ganzzahlig aufgeht. Man stelle sich dasselbe nun mit 40 Gleichungen und 40 Unbekannten vor. Ein elektronischer Digitalrechner würde für diese Aufgabe je nach Größenklasse wenige Stunden oder sogar nur einige Minuten brauchen.

Man könnte die Liste der Beispiele für die Anwendung des elektronischen Rechnens beliebig fortsetzen; und es gibt heute nur noch wenige Arbeitsgebiete, die sich *nicht* elektronischer Rechen- und Datenverarbeitungsanlagen bedienen. Die weitere Entwicklung ist in ihrem Umfang und in ihrer Geschwindigkeit noch nicht abzusehen, aber eines steht fest: Mancher Jugendliche oder Erwachsene, der heute glaubt, weit davon entfernt zu sein, wird sich in seiner Ausbildung oder im Beruf früher oder später damit zu befassen haben. Vielen wird das nicht leichtfallen, weil das Denken in den zahlreichen neuen Begriffen und deren Zusammenhängen ungewohnt ist, da es oft stark von der Denkweise der bisherigen Schulmathematik abweicht. Wir empfehlen deshalb dem Leser, diese Artikelfolge gründlich durchzuarbeiten, auch was die Anwendungsbeispiele und die Übungen betrifft, um sich damit eine Grundlage für ein späteres umfangreicheres Studium dieser mathematischen Gebiete zu schaffen. Wir werden den Stoff so darbieten, daß ihn bereits Schüler der achten, eventuell auch schon der siebenten Klasse verstehen können.

1. Kodierung von Informationen — Zahlensysteme — binäre Systeme

1.1. Der Begriff Kodierung

Bei jeder, auch der einfachsten mathematisch zu lösenden Aufgabe geht es darum, bestimmte *Informationen* zu verarbeiten.

Beispiel: Ein Physiker soll ausrechnen, welches Volumen 50 g Sauerstoff bei einer Temperatur von 20 °C und einem Druck von 3 at einnehmen. Hier sind es zunächst die vier Informationen:

1. Sauerstoff 2. 50 g 3. 20 °C 4. 3 at.

Das genügt zur Lösung der Aufgabe noch nicht, denn der Physiker muß außerdem noch darüber *informiert* sein, wie sich abgeschlossene Gasmengen bei Druck- und Temperaturveränderungen verhalten, er muß also die Zustandsgleichung der Gase kennen.

Wenn schon diese einfache Aufgabe, die jeder ältere Schüler in wenigen Minuten müßte lösen können, mehrere Einzelinformationen enthält, so kann man sich vorstellen, wie viele bei den schwierigen Problemen der modernen Wissenschaft und Technik auftreten können. Die Informationen sind im einfachsten Fall Zahlenangaben. Es können aber auch Zusammenhänge zwischen bestimmten Größen sein, die in mathematischen Formeln darzustellen sind. Es können einschränkende Bedingungen sein, die oft in Ungleichungen ausgedrückt

werden. Wenn man zum Beispiel einen Produktionsprozeß optimieren, das heißt möglichst günstig gestalten will, so muß man berücksichtigen, daß jede Maschine eine bestimmte Höchstleistung hat, etwa eine gewisse Stückzahl pro Stunde nicht überschreiten kann. Man könnte schreiben: $P \leqq 50\,h^{-1}$,
wobei in dieser Ungleichung P ein Maß für das Leistungsvermögen der Maschine ist und h^{-1} nichts anderes bedeutet als Stück pro Stunde. In der Praxis sind natürlich viele Informationen wesentlich komplizierter. Eins ist allen gemein: Um sie im Rahmen des zu lösenden Problems verarbeiten zu können, müssen sie in eine möglichst handliche, verständliche Form gebracht werden. Man muß sie, wie man sagt, *verschlüsseln.* Bei diesem Ausdruck denkt der Leser vielleicht an eine Geheimschrift oder Geheimsprache, nicht aber daran, daß, wenn uns ein Freund einen Brief schreibt, dies eigentlich auch schon eine Verschlüsselung von Informationen ist, denn nur der des Lesens Kundige kann damit etwas anfangen. Wenn wir das Symbol „7" lesen, so ist dies bereits eine Verschlüsselung der Zahl 7. Einem, der dieses Symbol nicht kennt, etwa einem Analphabeten, müßte man sieben Finger entgegenstrecken oder man müßte die sieben Gegenstände, die man meint, unmittelbar vor ihn hinlegen.
Der Begriff Verschlüsselung ist also sehr dehnbar und die Form der Verschlüsselung sehr verschieden, je nach dem Zweck, dem sie dient, oder *für wen* sie bestimmt ist. Man spricht mit einem in eine Sache Eingeweihten über diese Sache anders als mit einem Unbefangenen. Insbesondere verwendet man andere Symbole: Fremdwörter, Abkürzungen usw. (Wenn wir heute etwa sagen: „Die Schüler der EOS gehen zum UTP ins WSSB", so versteht das sicher nicht jeder.)
Ein gemeinsames Merkmal aller Verschlüsselungen ist es, daß eine Anzahl vorher festgesetzter *Symbole* verwendet wird, für die in bestimmten Zusammenstellungen bestimmte Bedeutungen verabredet sind. Wir unterscheiden drei Arten von Symbolen:
1. Ziffern 2. Buchstaben 3. Sonderzeichen.
Zu letzteren gehören auch die aus der Schulmathematik bekannten Zeichen wie $+$, $-$, $<$, $=$ usw. Wir werden in diesem Lehrgang noch weitere solcher Zeichen kennenlernen. Wird eine Information durch derartige aneinandergereihte Symbole dargestellt, so spricht man von der *Kodierung* der Information.
Von den drei genannten Arten der Informationssymbole kommt für unsere Belange verständlicherweise den *Ziffern* die größte Bedeutung zu. Wenn wir auch bei der Kodierung von Rechenaufgaben auf Buchstaben und die übrigen Zeichen, die Sonderzeichen, nicht verzichten können, so sind sie doch nur Beiwerk. Wir werden uns also im folgenden näher mit dem Problem befassen, wie man die in der Rechentechnik wichtigsten Informationen, die *Zahlen**, kodieren, das heißt, durch Ziffern darstellen kann.

1.2. Das Dezimalsystem

Im Schulunterricht werden Zahlen — zunächst ganze, später gebrochene und schließlich beliebig reelle Zahlen — in dem bekannten *Dezimalsystem* dargestellt. Da uns dieses System sehr geläufig ist, denken wir kaum noch daran, daß es sich um eine Kodierung, nämlich um die Verschlüsselung einer Summe handelt. Als Informationssymbole werden die Ziffern 0 bis 9 und als Sonderzeichen wird das Komma verwendet. Schon in den ersten Schuljahren lernt man, daß 2783 2 Tausender, 7 Hunderter, 8 Zehner und 3 Einer bedeutet. Später schreibt man:

$$2783 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1.$$

Setzt man $10 = 10^1$ und $1 = 10^0$, so erkennt man noch besser, daß es sich um eine Zerlegung der Zahl nach fallenden Potenzen von 10 handelt. Jede Ziffer hat eine bestimmte *Position*, einen bestimmten Stellenwert. Dieser beträgt, wenn man von links nach rechts fortschreitet, jeweils ein Zehntel des vorigen. Setzt man dieses Prinzip über die Einer hinaus fort, so erhält man die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. Den Übergang von den Einern zu den Zehnteln kennzeichnen wir durch ein *Komma.* Also:

$$14{,}795 = 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}.$$

Vereinbart man noch die Schreibweise:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1},\ \frac{1}{100} = 10^{-2},\ \frac{1}{1000} = 10^{-3} \text{ usw.},$$

so wird die Darstellung noch übersichtlicher:
14,795 ist also eine Kodierung** für die Summe

$$1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Wie man im Dezimalsystem rechnet, also die vier Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ausführt, weiß jeder. Es ist auch bekannt, wie man beim schriftlichen Rechnen den Zehnersprung beziehungsweise den Sprung in die nächsthöhere Zehnerpotenz bewältigt. Uns geht es darum, wie man die Rechenprozesse *technisch* realisieren kann. Mit diesem Problem werden wir uns im nächsten Heft befassen.

J. Frormann

* Es sei betont, daß wir zwischen Zahlen und Ziffern unterscheiden müssen: Ziffern sind Zeichen, Symbole, die in bestimmter Reihenfolge zusammengestellt, eine Zahl darstellen. Natürlich kann eine Zahl auch manchmal durch eine Ziffer dargestellt werden. Auch dann müssen wir den Unterschied beibehalten. 2 ist zum Beispiel eine gerade Zahl, aber niemals eine gerade Ziffer. Andererseits hat die Ziffer 2, also das Symbol „2", links unten eine Ecke. Die natürliche Zahl 2 dagegen hat sicher eine ganze Reihe mathematischer Eigenschaften, aber eine Ecke hat sie nicht!

** Streng genommen müßte man sagen: eine kürzere Form der Kodierung; denn die Schreibweise $1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ usw. stellt selbst schon eine Kodierung dar (siehe 1.1).

Messegold für Präzisions-Reißzeuge

Aus dem VEB Polytechnik berichtet

Ein Blick in den Messekatalog

Genauigkeit, Zuverlässigkeit und vorbildlicher Fleiß der Arbeiterschaft ließen für unsere Erzeugnisse den Begriff Präzision entstehen, und wir erzielten damit Spitzenleistungen der Feinmechanik, die auch zur Weltgeltung der Fabrikmarke führten.

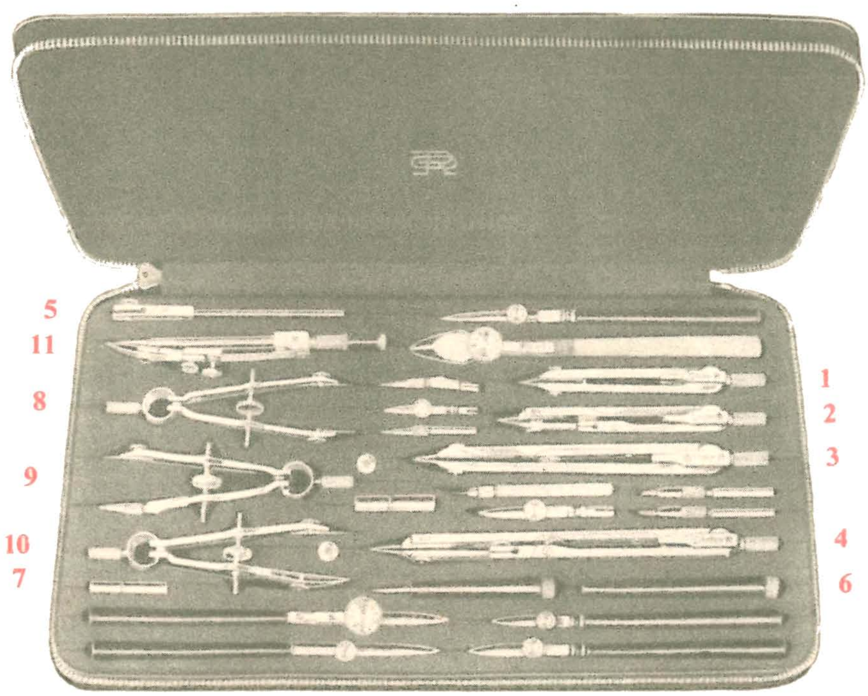
Der Ursprung unseres Betriebes geht bis zum Jahre 1870 zurück, als Uhrmachermeister *Emil Oscar Richter* in seiner kleinen Werkstatt die Herstellung mathematischer Geräte betrieb und sich besonders mit der Verbesserung der damals noch sehr mangelhaft gefertigten Zeicheninstrumente befaßte. Die dabei geglückten wertvollen Erfindungen ließen ein neues Zirkelsystem entstehen, das in aller Welt als „Flachsystem" bekannt wurde. Als einige der markantesten Erfindungen waren zu nennen: der erste *Nullenzirkel*, der sich schnell zu einem Hauptinstrument herausbildete und ohne den ein modernes Reißzeug kaum noch denkbar ist; das *Kreuzscharnier* an den Reißfedern und die *Geradeführung* der Zirkel.

Unser Prinzip: nur bestes Material auf modernsten Maschinen von erstklassigen Facharbeitern verarbeiten zu lassen, festigte den guten Ruf der Marke „Original Richter" und ließ den Betrieb schon in kurzer Zeit zur bekanntesten Reißzeugfabrik heranwachsen.

Um die Möglichkeiten der sich rapid entwickelnden neuen Technik in der Deutschen Demokratischen Republik auszuschöpfen, wurden der VEB Präzisions-Reißzeugwerk Richter und die Betriebsabteilung Labor- und Prüfgerätebau des VEB Buchungsmaschinenwerk Karl-Marx-Stadt zu einem Betrieb zusammengelegt, der den Namen VEB Polytechnik Karl-Marx-Stadt trägt.

Auf Grund neuer Einrichtungen wird die Fertigung nach dem heutigen Stand der Technik durchgeführt, und damit bieten wir auch die Gewähr für eine gleichbleibende Güte unserer Erzeugnisse.

Wir stellen vor: **Leonardo XI** in schwarzer Reißverschluß-Ledertasche, mit dunkelblauem oder rotem Samt gefüttert



1 Handzirkel mit Geradeführung, Schenkellänge 85 mm
2 Handzirkel mit Haarschraube, mit Geradeführung, Schenkellänge 125 mm
3 Einsatzzirkel mit Geradeführung und Kreuzscharnier, Schenkellänge 90 mm
4 Einsatzzirkel mit Haarschraube, mit Geradeführung und Kreuzscharnier, Schenkellänge 140 mm
5 Verlängerungsstange
6 Einsatzheft
7 Bleibüchse
8 Ringfeder-Teilzirkel
9 Ringfederzirkel mit festem Bleihalter
10 Ringfederzirkel mit fester Reißfeder
11 Nullenzirkel mit Kreuzscharnier

Kopiernadelhalter, Zentrierzwecke (2 Stück), Reißfeder mit Kreuzscharnier, Reißfeder mit Kreuzscharnier, Reißfeder mit Kreuzscharnier, Reißfeder mit Kreuzscharnier und Teilscheibe, Katasterfeder, Reißfeder, schwedische Form, mit Teilscheibe, Schraubenzieher

Verschiedene Aufgaben der Konstruktion – verschiedene Zirkelarten

VEB Polytechnik stellt folgende Instrumente her:

Hand- und Einsatzzirkel

Dieser Zirkel ist das am meisten verwendete Instrument des Konstrukteurs. Es besteht aus zwei Schenkeln, von denen der eine eine Spitze und der andere eine Aufnahme zur Befestigung der Zirkeleinsätze besitzt. Beide Schenkel werden durch die Griffklemme gehalten und durch eine Zugschraube so weit zusammengepreßt, daß sich die beiden Schenkel zügig bewegen. Mit einem Schraubenzieher kann jeder leicht den Gang des Zirkels an der Zugschraube regulieren. Es ist ratsam, ab und zu einen kleinen Tropfen Öl in die Bohrung am Gelenk zu geben.

Der Nullenzirkel

Er unterscheidet sich von allen anderen Instrumenten hauptsächlich dadurch, daß die Zentrierspitze auf dem Papier feststeht und der bewegliche Zirkeleinsatz durch sein eigenes Gewicht auf dem Papier aufliegt und um erstere als Drehachse herumgeführt wird. Durch diesen Vorteil wird ein sehr schnelles und sauberes Arbeiten und Ziehen von sehr kleinen Kreisen ermöglicht. Das Zweifedersystem am Nullenzirkel bewirkt, daß sich beim Öffnen und Schließen des Nullenzirkels der Einsatz parallel zur Zentrierspitze verschiebt.

Der Ringfeder-Teilzirkel

Er wird, wie schon sein Name besagt, in der Hauptsache zum Teilen von Strecken sowie deren Übertragung benötigt. Er besitzt eine Gewindespindel, damit eine beliebige Öffnung fest eingestellt werden kann.
Als Sonderinstrumente werden folgende Zirkel hergestellt:

Der Reduktionszirkel

Dieser Zirkel dient dazu, eine gegebene Strecke in einem bestimmten Maßstab zu übertragen bzw. eine Strecke in gleiche Teile zu teilen. Er besitzt zwei Schenkel und einen Schieber. Der eine Schenkel trägt auf einer Seite eine Skala für die Teilung des Kreises und auf der anderen eine für die Teilung von Strecken. Als wichtigste Sondermaße sind die Beziehungen des *goldenen Schnittes* sowie die Bestimmung der Seitenverhältnisse von Papierformaten nach der Beziehung *Wurzel aus 2* angegeben.

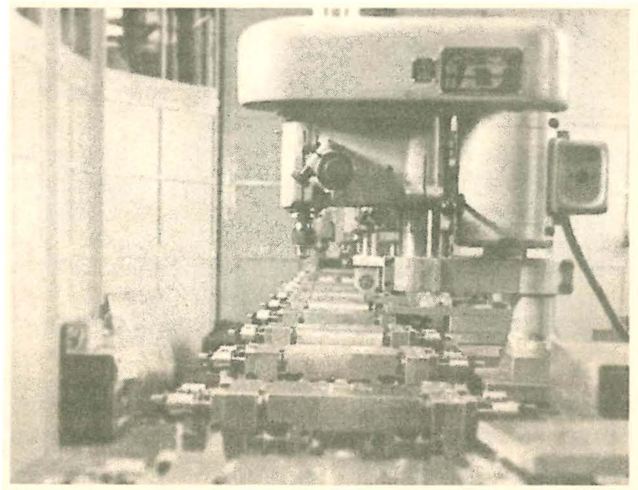
Der Stabzirkel

Ihn nimmt der Konstrukteur, um größere Kreise zu ziehen. Er besteht aus einem 1 m langen Holzstab, auf dem sich zwei Schieber in einer beliebigen Entfernung einstellen lassen.

Ein Blick in den Fertigungsablauf

Als Werkstoff wird ein hochlegiertes, kaltgewalztes Neusilber, welches in Stangen und Blöcken geliefert wird, verwendet. Die Stanzerei verformt die Zirkel-Schenkel kalt aus Stangen. Das heißt, daß ein Stempel die Zirkelköpfe unter hohem Druck in eine Form preßt, die der des endgültigen Kopfes gleicht. Andere Teile werden gestanzt, geprägt und gebogen.
In den Vorfertigungen wird maschinell gefräst, gebohrt, gesenkt und gewindegeschnitten. Der Automatensaal stellt mittels Langdreh- und Revolverdrehautomaten Drehteile her (siehe Foto). Dabei müssen die Maße der Zeichnungen, die Passungen und Toleranzen genauestens eingehalten werden. Die in diesem Zustand fertig bearbeiteten Teile übernimmt die Abteilung Oberfläche. Auf Läppmaschinen wird flach geläppt, und die Rundungen werden an Schleifscheiben mit der Hand bearbeitet. Die Polierer geben anschließend den Teilen die glänzende Oberfläche. In der Verchromerei wird ein Teil der Instrumente dekorativ verchromt. Die Montage fügt die fertiggestellten Werkstücke zusammen, paßt sie ein und montiert sie. Nach einer Gütekontrolle stellt die Packerei die Etuis zusammen.

A. Hanisch



Taktstraße für die Fertigung von Zirkelteilen
(ökonomischer Nutzen 62000 M jährlich)

In Vorbereitung des 20. Jahrestages der DDR wurde die von einer Arbeitsgruppe entwickelte und unter Einbeziehung der Jugendlichen gebaute Taktstraße dem Jugendkollektiv als Jugendobjekt übergeben. Dieses Kollektiv ist verantwortlich für die Bedienung, Wartung, Pflege und Kontrolle der Taktstraße. Es hat sich vor Inbetriebnahme der Taktstraße zu Einrichtern qualifiziert. Vorher erfolgte die Bearbeitung der Zirkelschenkel nach dem Werkstattprinzip. Für die Durchführung der erforderlichen Arbeitsgänge waren jeweils 8 bis 10 Arbeitskräfte erforderlich.

Von einer Werbetafel auf der XI. MMM in Leipzig entnommen

Spieglein, Spieglein an der Wand, ...

Vielleicht lest ihr später einmal den Roman „Jessy und Morgana“ von *Alexander Grin*, der mit folgenden Worten beginnt:

„Es gibt eine altüberlieferte Art des Wahrsagens, das Orakeln aus Spiegeln. Man blickt in einen von zwei Kerzen flankierten Spiegel, dem ein zweiter Spiegel so gegenübergestellt ist, daß er sich darin reflektiert und die Kerzen einen endlosen strahlenden Korridor bilden.

Und was das junge Mädchen (nur junge Mädchen pflegen auf solche Weise das Schicksal zu befragen) in der Tiefe dieses Korridors erblickt, das geht in Erfüllung. ...“ Daß man weder mit zwei parallelen Spiegeln noch auf andere Weise wahrsagen kann, soll uns hier nicht weiter interessieren. Vielmehr sollt ihr durch das Lesen des folgenden Beitrags selbst die Erklärung dafür finden, warum bei der oben beschriebenen Vorrichtung die Spiegelbilder beider Kerzen einen endlosen Korridor bilden.

Wir wiederholen: Achsensymmetrie (Klasse 6)

1. Bei einer Spiegelung wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P′ zugeordnet und umgekehrt.
2. Zu jeder Spiegelung gehört eine Gerade s, Symmetrieachse genannt, die genau die Punkte der Ebene enthält, die bei der Spiegelung auf sich abgebildet werden.
3. Die Symmetrieachse ist Mittelsenkrechte zur Verbindungsstrecke jedes Original- und Bildpunktpaares der Spiegelung (Abb. 1).
4. Bei einer Spiegelung ist jede Originalpunktmenge M zu ihrer Bildpunktmenge M′ kongruent. Insbesondere sind also Original- und Bildstrecke gleich lang sowie Original- und Bildwinkel gleich groß (Abb. 2).

Wir wenden an:

■ 1. Beispiel Eine Gruppe Kinder hat folgende Spielregeln vereinbart: Jeder Mitspieler soll möglichst schnell vom punktförmigen Mal A aus zu einer von ihm zu wählenden Stelle einer genügend langen geradlinigen Mauer laufen und von da aus weiter zu einem zweiten punktförmigen Mal B (Abb. 3).

Analysis und Beweis: Wann gewinnt man das Spiel? Am günstigsten ist für jeden Mitspieler der kürzeste unter den zulässigen Wegen von A nach B. (Unter einem Weg wird eine Anfangs- und Endpunkt verbindende Kurve verstanden, die eine Länge besitzt. Wer später Mathematik studiert, wird mit dem Begriff der Kurve auch lernen, daß nicht jede Kurve eine Länge besitzt.) Um den oben bezeichneten Weg zu finden, wird ein beliebiger zulässiger Weg $\widehat{AP}\widehat{PB}$ betrachtet (Abb. 4). Der Teilweg $\widehat{PB}$ wird an der Geraden m (Mauer) gespiegelt. Wegen der 4. Eigenschaft einer Spiegelung ist der zulässige Weg $\widehat{AP}\widehat{PB}$ gleich lang mit dem Ersatzweg $\widehat{AP}\widehat{PB'}$. Da jeder von A nach B′ führende Weg notwendig die Gerade m mindestens einmal durchsetzt, sind alle Ersatzwege von A nach B′ zulässige. (Diesen Schluß können wir Schüler nur anschaulich erfassen.)

Unter den Ersatzwegen ist der kürzeste die Strecke $\overline{AB'}$, deren Schnittpunkt mit m mit Q bezeichnet werden möge. Durch Spiegelung der Strecke $\overline{QB'}$ an m entsteht die Bildstrecke $\overline{QB}$. Der damit erhaltene Streckenzug $\overline{AQB}$ ist der gesuchte kürzeste Weg. Es gewinnt also derjenige das Spiel, der diesen Streckenzug $\overline{AQB}$ mit größter Geschwindigkeit durchläuft.

Konstruktion: Vom Punkte B aus wird das Lot auf m gefällt und über seinen Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Durch den Endpunkt B′ der Verlängerung und durch A wird die Gerade g bestimmt, die m im Punkte Q schneidet. Abschließend wird noch die Strecke $\overline{QB}$ gezeichnet. Damit ist der kürzeste Streckenzug $\overline{AQB}$ konstruiert (Abb. 5).

Determination: Der Punkt B′ ist stets vorhanden und auch eindeutig bestimmt. Da die Punkte A und B′ auf verschiedenen Seiten der Geraden m liegen, schneidet die Strecke $\overline{AB'}$ stets m, und zwar in genau einem Punkte Q. Damit existiert also im Falle einer genügend langen Mauer (idealisiert durch eine Gerade m) genau ein kürzester Weg, der die folgende Eigenschaft besitzt: Die Strecken $\overline{BQ}$, $\overline{B'Q}$ und $\overline{AQ}$ bilden mit m gleiche Winkel, wie sich mittels Scheitelwinkelsatz und der 4. Eigenschaft der Spiegelung ergibt.

Zusätzliche Bemerkung: Dieser kürzeste Weg fällt zusammen mit dem Weg, den ein Lichtstrahl nimmt, der vom Punkte A zum Punkte B gelangt, wobei er an einem jetzt die Mauer ersetzenden Spiegel reflektiert wird.

■ 2. Beispiel In welcher Richtung muß eine bei P auf dem rechteckigen Billardfeld ABCD liegende Billardkugel gestoßen werden, damit sie unter Anstoßen an den Banden a, b und c zum Punkte Q gelangt?

Bemerkung: Eine Billardkugel wird an den Banden nach dem gleichen Gesetz reflektiert wie ein Lichtstrahl am ebenen Spiegel.

Analysis: Angenommen, $\overline{PRSTQ}$ sei der gesuchte Streckenzug. Die Billardfläche und die Strecke $\overline{PR}$ werden an a gespiegelt. Der Bildpunkt P′ von P liegt mit den Punkten R und S in einer Geraden, denn aus $\sphericalangle$ BRS = $\sphericalangle$ PRA und $\sphericalangle$ PRA = $\sphericalangle$ ARP′ folgt $\sphericalangle$ ARP′ = $\sphericalangle$ BRS (Abb. 6).

Nunmehr werden die Ausgangsbillardfläche und der Streckenzug $\overline{STQ}$ nochmals an b gespiegelt. Der jetzt erhaltene Bildpunkt T″ von T liegt ebenfalls auf der Geraden durch die Punkte P′, R und S. Die zuletzt erhaltene „Billardfläche“ und die Strecke $\overline{T''Q''}$ werden nochmals an c″ gespiegelt. Nunmehr liegt der neue Bildpunkt Q‴ von Q″ mit den Punkten P′, R, S und T″ in einer Geraden.

Bemerkungen zur Konstruktion: Die Punkte P′ und Q‴ sind sets konstruierbar, da sie durch Spiegelungen gegebener Punkte an gegebenen Geraden entstanden sind. Damit ist auch der Punkt R als Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte P′ und Q‴ mit der Seite (Bande) a konstruierbar. Schließlich ist damit auch die Strecke $\overline{PR}$ konstruierbar, die die gesuchte Richtung festlegt.

Beweis:

$\sphericalangle$ D″T″Q‴ = $\sphericalangle$ Q″T″D″	(laut 4. Eigenschaft der Spiegelung)
$\sphericalangle$ C T″S = $\sphericalangle$ D″T″Q‴	(nach dem Scheitelwinkelsatz)
$\sphericalangle$ C T″S = $\sphericalangle$ Q″T″D″	(nach dem Grundsatz der Drittengleichheit)
$\sphericalangle$ D T Q = $\sphericalangle$ Q″T″D″	(laut 4. Eigenschaft der Spiegelung)
$\sphericalangle$ S T C = $\sphericalangle$ C T″S	(laut 4. Eigenschaft der Spiegelung)
$\sphericalangle$ D T Q = $\sphericalangle$ S T C	(nach dem Grundsatz der Drittengleichheit)

Durch weitere analoge Schlüsse ergibt sich, daß der durch Konstruktion gefundene Streckenzug $\overline{PRSTQ}$ Lösung ist.

Determination: Die Punkte P′ und Q‴ sind stets vorhanden und auch eindeutig bestimmt. Die Aufgabe hat keine Lösung, falls die Strecke $\overline{P'Q'''}$ auch nur eine der Strecken a, b und c″ nicht in einem inneren Punkte schneidet; ansonsten existiert genau eine Lösung. Bei dieser sind die Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{ST}$ sowie auch $\overline{RS}$ und $\overline{TQ}$ jeweils parallel.

Wir erarbeiten selbständig:

▲ 1. Aufgabe Welches ist der kürzeste Weg, der von einem Punkte A, der zwischen den Schenkeln eines Winkels α liegt, zu einem Punkt des anderen Schenkels und wiederum zum Punkte A führt (Abb. 7)?

▲ 2. Aufgabe In welcher Richtung muß eine bei P auf dem rechteckigen Billardfeld ABCD liegende Kugel gestoßen werden, damit sie 1. ... zur Bande a, von dort zur Bande c und dann nach einem gegebenen Punkte Q rollt? 2. ... zur Bande a, von dort zur Bande c, nochmals zur Bande a und dann nach einem gegebenen Punkte Q rollt?

▲ 3. Aufgabe Es ist zu beweisen, daß für die als erstes Beispiel betrachtete Aufgabe auch im Falle eines geraden, beiderseits begrenzten Mauerstückes $\overline{RS}$ (idealisiert durch eine Strecke) stets unter den zulässigen Wegen ein kürzester existiert (Abb. 8).

W. Träger

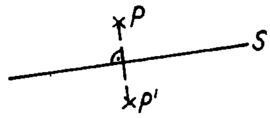
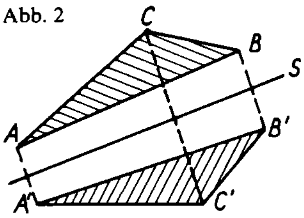


Abb. 1

Abb. 2


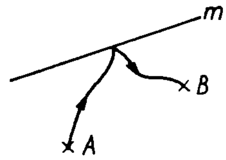


Abb. 3

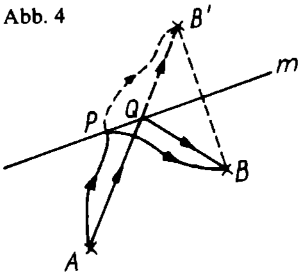
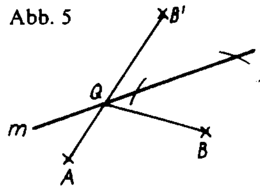
Abb. 4


Abb. 5


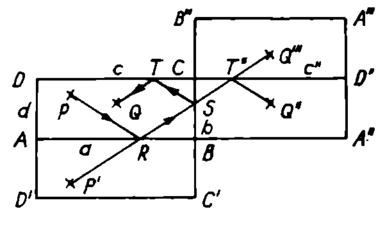


Abb. 6

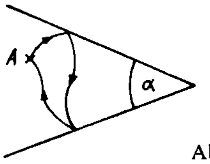


Abb. 7

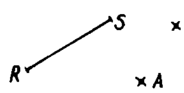


Abb. 8

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

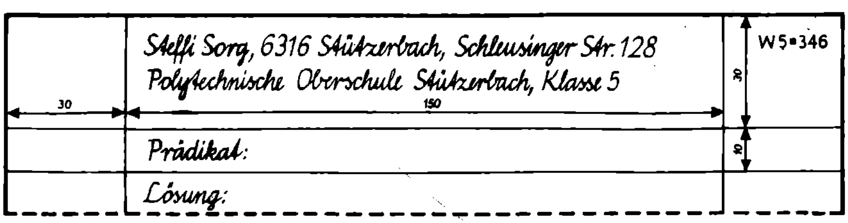
Letzter Einsendetermin 14. 4. 1969

Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 12. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung. Schüler der 11./12. Klassen lösen die Aufgaben, welche mit W 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12. (Wir kommen damit einem vielfach geäußerten Wunsch bisheriger Teilnehmer und Schüler der Klassen 11/12 nach.)
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf dieser Seite angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert. Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis!) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst" oder „gut gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Der Jahreswettbewerb 1969 läuft nur vom Februar bis August 1969, also in den Heften 1 bis 3. Wir kommen damit einem Wunsch unserer Leser nach und gleichen den Wettbewerbsrhythmus dem Schuljahresrhythmus an.
9. In Heft 4 werden die Aufgaben der Schulstufe der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR veröffentlicht. In diesem Heft läuft kein *alpha*-Wettbewerb, um allen Schülern Gelegenheit zu geben, sich intensiv mit der Schulolympiade zu befassen.
10. Der *alpha*-Wettbewerb 1969/70 beginnt mit Heft 5/69 und endet mit Heft 3/70.
11. Zwischen dem 25. August und 10. September 1969 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 1 bis 3/69 erworbenen Karten an die Redaktion einzusenden. Eine Jury wertet diese Karten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung. Wer mindestens 4 Antwortkarten (durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 1 bis 3/69) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde.

Wer seine Karten zurückerhalten möchte, der lege einen vorschriftsmäßig frankierten Umschlag mit Adresse bei.

Aussicht auf Anerkennungsurkunde, Preise und namentliche Veröffentlichung haben also Teilnehmer, die im Laufe der Monate Februar bis August 1969 regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitgearbeitet haben.



Schüler stellen Aufgaben für den Schüler

5 ▪ 344 Axel, Bernd, Dieter und Erwin sammeln fleißig Briefmarken. Bernd, Dieter und Erwin haben zusammen bereits 108 Briefmarken gesammelt; davon besitzt Erwin dreimal soviel, Dieter dagegen nur zweimal soviel Marken wie Bernd. Axel schließlich besitzt acht Briefmarken mehr als die Hälfte der Anzahl von Erwin. Wieviel Briefmarken hat jeder der Freunde bisher gesammelt?

Martina Krauß, Schwarzenberg

▲ 345 In der Aufgabe

$$\begin{array}{r} *372* \\ +\ \ 3*01 \\ +\ \ \ \ 4*5 \\ \hline 38**4 \end{array}$$

sind die Sternchen durch Ziffern zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Wieviele Lösungen gibt es?

Angelika Müller, Stolpen

W 5 ▪ 346 In dem nachstehenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß die waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben hingegen verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rcrcr} abbc & : & de & = & ea \\ - & & \cdot & & \cdot \\ fdg & + & hf & = & fgc \\ \hline heaf & - & eid & = & hiab \end{array}$$

(Zum Lösen dieser Aufgabe verweisen wir auf den Artikel „Wir lösen ein Zahlenrätsel" in alpha, Heft 3/1968)

Bernd Kutnik, Teterow, Kl. 6

W 5 ▪ 347 In einem Abteil eines D-Zuges, der von Leipzig nach Berlin fährt, sitzen vier Herren mit den Familiennamen Krause, Müller, Schulze und Lehmann. Die Wohnorte dieser vier Reisenden sind Leipzig, Berlin, Erfurt und Schwerin. Aus den folgenden Aussagen ist zu ermitteln, in welchem Ort jeder der vier Herren wohnt.

a) Herr Lehmann war schon öfter besuchsweise in Leipzig.
b) Herr Müller ist älter als der Herr aus Leipzig.
c) Herr Lehmann kehrt von einem Besuch der IGA zurück.
d) Herr Krause wird am Endbahnhof von seiner Gattin, die nicht mit verreist war, abgeholt.

Alfred Schultz, OS Lassan, Krs. Wolgast, Kl. 8

6 ▲ 348 Zum Anfertigen seiner Hausaufgaben hatte ein Schüler die Zeit von insgesamt 90 Minuten geplant, und zwar für die Aufgaben in den Fächern Mathematik 30 Minuten, Russisch 20 Minuten, Deutsch und Physik je 15 Minuten, Geschichte 10 Minuten. Beim Lösen der Mathematikaufgaben überschritt er die geplante Zeit um 12 Minuten. Wieviel Minuten muß dieser Schüler beim Lösen der übrigen Aufgaben von der für jedes weitere Fach vorgesehenen Zeit einsparen, damit er die Gesamtzeit von

90 Minuten einhält und die für die übrigen Fächer benötigten Zeiten im gleichen Verhältnis stehen wie die ursprünglich geplanten?

Paul Ortlepp, Suhl, Kl. 7

▲ 349 Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ von der Länge 25 mm. Es ist unter alleiniger Benutzung eines Zirkels ein Punkt P so zu konstruieren, daß P auf der Geraden AB liegt und daß $\overline{AP} = 5 \cdot \overline{AB}$ gilt!

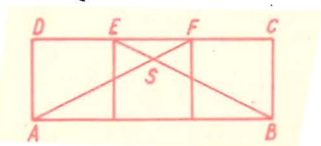
Thomas Bauer, EOS Schkeuditz, K. 10

W 6 ▪ 350 Jeder Buchstabe des nachstehenden Schemas bedeutet eine Ziffer; gleiche Buchstaben bedeuten immer gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(ca & + & ba) & : & f & - & g & = & d \\
+ & & - & & + & & \cdot & & + \\
(b & + & f) & \cdot & f & + & a & = & bc \\
\hline
(cb & : & h) & \cdot & d & - & a & = & be
\end{array}$$

Yvonne Kruber, Stolpen, Kl. 7

W 6 ▪ 351 Die nachstehend abgebildete Figur stellt ein Rechteck dar, das sich aus drei kongruenten Quadraten zusammensetzt.

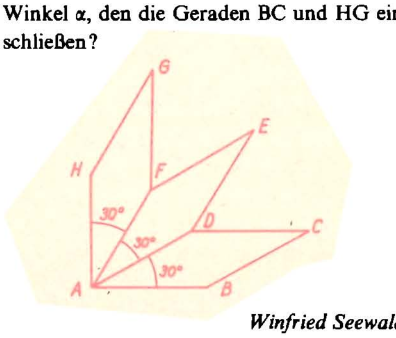


Den wievielten Teil des Flächeninhalts des Rechtecks ABCD nimmt

a) der Flächeninhalt des Dreiecks SFE,
b) der Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
c) der Flächeninhalt des Vierecks ASED ein?

Prof. Dr. N. Tschajkovskij, Lvov (UdSSR)

7 ▲ 352 Die nachstehend abgebildete Figur stellt drei fächerförmig angeordnete einander kongruente Rhomben dar, deren spitze Winkel sämtlich 30° betragen. Wie groß ist der Winkel α, den die Geraden BC und HG einschließen?



Winfried Seewald, Otto-Grotewohl-OS, Dresden, Kl. 8

▲ 353 Eine Obstplantage hat einen Bestand von 480 Obstbäumen; 20% des Bestandes sind Apfel-, 30% des Bestandes Birnbäume. Die übrigen Bäume sind Pflaumen- und Kirschbäume. Mit wieviel Apfel-, Birn-, Pflaumen- und Kirschbäumen ist die Obstplantage bepflanzt, wenn sich die Anzahl der Pflaumenbäume zur Anzahl der Kirschbäume wie 1 : 3 verhält?

Joachim Selle, POS Großfurra, Kl. 8

W 7 ▪ 354 Auf einer Hochzeitsfeier wurden für die Gäste Getränke bereitgestellt, und zwar Weinbrand für 17,50 M je Flasche, Sekt für 18,00 M je Flasche und Wein für 9,20 M je Flasche. Die Unkosten für diese Getränke beliefen sich auf 198,00 M; es waren insgesamt 16 Flaschen. Wieviel Flaschen Weinbrand, Sekt bzw. Wein wurden bereitgestellt?

Norbert Schmidt, Dresden

W 7 ▪ 355 In dem nachstehenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß die waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben hingegen verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{ccccc}
iag & : & da & = & ce \\
- & & \cdot & & + \\
bf & + & bf & = & dmh \\
\hline
hhe & - & cme & = & dhm
\end{array}$$

Helmut Walther, Langeneichstädt, Kl. 6

8 ▲ 356 Vier große landwirtschaftliche Kooperationsgemeinschaften, die wir mit A, B, C und D bezeichnen wollen, besitzen zusammen 120 Mähdrescher. Wenn die Kooperationsgemeinschaft A von der Kooperationsgemeinschaft C 4 Mähdrescher ausleiht und wenn ferner die Kooperationsgemeinschaft D von der Kooperationsgemeinschaft C 6 Mähdrescher ausleiht, so verfügen alle vier Kooperationsgemeinschaften über die gleiche Anzahl von Mähdreschern. Wieviel Mähdrescher besitzt jede der vier Kooperationsgemeinschaften?

Friedhelm Leichsenring, OS Culitzsch, Kl. 10

▲ 357 Bei einem 100-m-Lauf starten sechs Sportler, die wir mit A, B, C, D, E und F bezeichnen wollen. Drei Zuschauer, Egon, Karl und Horst, machen über das Ergebnis je drei Aussagen:

Egon: 1. B kommt unmittelbar vor E ins Ziel.
2. D wird Letzter sein.
3. F wird besser als C abschneiden.

Karl: 1. B wird A übertreffen.
2. D wird auf Platz 3 kommen.
3. F wird D übertreffen.

Horst: 1. A kommt auf Platz 2.
2. E kommt auf Platz 5.
3. B kommt auf Platz 4.

Nun wissen wir, daß jeder dieser drei Zuschauer genau eine falsche Vermutung ausgesprochen hat und daß B nicht auf Platz 4 kam. In welcher Reihenfolge kamen die Sportler durchs Ziel?

Peter Enskonatus, stud. math. Berlin

W 8 ▪ 358 Kürzlich unternahm ich eine Reise ins Land der Automaten. Die Automaten in diesem Land können sprechen und auf jede Frage eine Antwort geben. Sie haben aber noch eine andere merkwürdige Eigenschaft: Wenn sie einwandfrei funktionieren, geben sie <u>nur</u> richtige Antworten; wenn sie aber beschädigt sind, geben sie <u>nur</u> falsche Antworten.

Ich sah einen Mechaniker, der vor fünf Automaten stand und vermutete, daß einige von diesen Automaten beschädigt sind, weil sie einander widersprechende Antworten gaben. Auf seine Frage, welche der Automaten beschädigt sind, erhielt er von fünf Automaten die folgenden Antworten:

1. Automat: Mindestens zwei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.
2. Automat: Mindestens drei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.
3. Automat: Ich funktioniere einwandfrei.
4. Automat: Mindestens zwei von den fünf Automaten sind beschädigt.
5. Automat: Mindestens drei von den fünf Automaten sind beschädigt.

Nun erkannte der Mechaniker sofort an einem gerissenen Kabel, daß der 5. Automat beschädigt ist, also eine falsche Auskunft gegeben hat. Da der Mechaniker die Logik gut beherrschte, — er hatte nämlich als Schüler fleißig die Zeitschrift *alpha* gelesen —, fand er sehr schnell ohne die technische Überprüfung der anderen Automaten, welche Automaten einwandfrei funktionierten und welche beschädigt waren. Wie hat der Mechaniker das Ergebnis gefunden? Welche Automaten funktionierten, welche waren beschädigt?

Pawel Kröger, 55. OS, Leipzig, Kl. 5

W 8 ▪ 359 In dem Schema

$$\begin{array}{r}
\text{VIER} \\
+\ \text{EINS} \\
\hline
\text{FUENF}
\end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Untersuche, wieviel Lösungen diese Aufgabe hat!

Wolfgang Kernchen, EOS Ammendorf, Kl. 12

9 ▲ 360 Es sind alle Primzahlen p und q anzugeben, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Differenz der beiden Zahlen $q - p$ ist größer als Null und kleiner als 10.
2. Die Summe der beiden Zahlen ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.
3. Addiert man zu dieser natürlichen Zahl die Summe der beiden Primzahlen, so erhält man 42.

Arnulf Möbius, EOS Leibniz, Leipzig, Kl. 10

▲ 361 Es ist der folgende Satz zu beweisen: In jedem Dreieck ist das Produkt der Längen zweier Seiten gleich dem Produkt der Länge der zu der dritten Seite gehörenden Höhe und des Durchmessers des Umkreises des Dreiecks.

Ludwig Paditz, EOS „Ernst Schneller", Lommatzsch, Kl. 11

W 9 ▪ 362 In einer Physik-Arbeitsgemeinschaft werden Bernd und Klaus beauftragt, für einen Versuch einen Widerstand von 167 Ω zusammenzustellen. Es waren nur Widerstände von je 17 Ω, 21 Ω und 28 Ω vorhanden. Nach einigem Überlegen gelang es Bernd, den geforderten Widerstand zusammenzustellen; er schaltete alle Widerstände in Reihe. Auch Klaus hatte eine Lösung gefunden; er wollte auch nur Widerstände in Reihe schalten, aber er benötigte einen Widerstand mehr als Bernd. Wieviel Widerstände jeder der drei Sorten verwendete Bernd und wieviel Klaus?

W 9 ■ 363 In einer Schule werden von den Schülern u. a. auch die Zeitschriften „Wissenschaft und Fortschritt" und „Jugend und Technik" gelesen. Die Anzahl derjenigen Schüler, die „Wissenschaft und Fortschritt" lesen, ist um 22 größer als die Anzahl derjenigen, die „Jugend und Technik" lesen. Das Sechsfache der Anzahl der Schüler, die *nur* „Jugend und Technik" lesen, ist gleich dem 25fachen der Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen. Ferner ist die Anzahl der Schüler, die „Wissenschaft und Fortschritt" lesen, durch die Anzahl derjenigen, die beide Zeitschriften lesen, teilbar.
Wieviel Schüler lesen beide Zeitschriften?

Peter Enskonatus, stud. math. Berlin

10 ▲ 364 Es sind alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

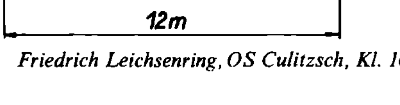
$$(a-b)y + (a-c)z = a-c, \qquad (1)$$
$$(a-b)x + (b-c)z = b-c, \qquad (2)$$
$$(a-c)x + (b-c)y = 0 \qquad (3)$$

anzugeben.
Dabei sind a, b, c reelle Zahlen mit $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

W 10/12 ■ 365 Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden zwei Aufgaben, die wir mit A und B bezeichnen wollen, gestellt. Die Anzahl der Teilnehmer dieses Wettbewerbs lag zwischen 20 und 40. Die Anzahl der Schüler, die nur eine Aufgabe lösten, ist um 1 kleiner als das Doppelte der der Anzahl der Schüler, die beide Aufgaben lösten. Subtrahiert man von der Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe B lösten, die Anzahl der Schüler, die beide Aufgaben lösten, so erhält man das Vierfache der Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A lösten. Jeder der teilnehmenden Schüler löste mindestens eine Aufgabe. Wieviel Schüler nahmen an dem Wettbewerb teil?

Stefan Heinrich, Spezialklasse, Humboldt-Universität zu Berlin

W 10/12 ■ 366 Es soll der Flächeninhalt (in m²) des in der untenstehenden Abbildung schraffierten, von zwei Kreisbögen begrenzten Flächenstückes berechnet werden. Die Maße sind der Abbildung zu entnehmen.



Friedrich Leichsenring, OS Culitzsch, Kl. 10

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (17./18. 12. 1968)

■ 5 ■ 1. Kreuze 6 der 36 Felder des gegebenen quadratischen Netzes so an, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein angekreuztes Feld und in jeder der Diagonalen höchstens ein angekreuztes Feld liegt!

2. In einem Lagerraum befinden sich dreimal so viel Kilogramm Weizen wie in einem zweiten. Nachdem aus dem ersten 85 000 kg und aus dem zweiten 5000 kg entnommen wurden, waren die Bestände gleich.
Wieviel Tonnen Weizen befanden sich vor der Entnahme in dem ersten und wieviel in dem zweiten Lagerraum?

3. Heinz fragt Gerd: „Wieviel Jahre bist du alt?" Gerd antwortet: „Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt. Berechne, wieviel Jahre Gerd alt ist! (Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

4. Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden beiden Bedingungen genügen:
(1) Die Differenz $a - b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180!

■ 6 ■ 1. In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$. Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

2. Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im „Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge. Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt $\frac{3}{10}$ und die der kürzesten $\frac{3}{14}$ von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen. Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

3. Über die Seite CD eines Quadrates ABCD mit $\overline{AB} = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck Δ DCE so zu konstruieren, daß das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben. Der Punkt E des Dreiecks Δ DCE sei dabei außerhalb des Quadrates ABCD gelegen.
Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle$ AEB!

4. Drei Freunde bereiten sich auf die „Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.
a) Nach wieviel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, daß Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?
b) Wieviel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

■ 7 ■ 1. Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, der sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M. Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wieviel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte.

2. Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die

Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!

b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

3. Konstruiere ein Dreieck Δ ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm! Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

4. Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck ABCDE ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

■ 8 ■ 1. a) Beweise folgende Aussage: Wenn in einem Drachenviereck ABCD zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis.

b) Zeige, daß diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

2. Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet. Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

3. Beweise folgenden Satz:
Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d. h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks Δ ABC ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.

4. Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 km/h größere Geschwindigkeit als der Lkw hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

■ 9 ■ 1. Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!

b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

2. Von einem Dreieck Δ ABC seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt.
Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

3. Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

4. Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:
(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.

B sagt:
(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

C sagt:
(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

D sagt:
(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie x!

■ 10 ■ 1. Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ einander gleich sind.
Zeigen Sie, daß es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung

$$\log_2\left(\log_2(\log_2 x)\right) = 0 \text{ genügen!}$$

3. Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.
Beweisen Sie diese Aussage!

4. Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A. Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander.
Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A.
Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit der Kraftwagen!

■ 11/12, 1. Tag ■

1. Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p + 10$ als auch $p + 14$ Primzahlen sind!

2. In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks.
Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt?

3. Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_6$, $b_1, \ldots, b_6$ so an, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$x^{12} + 1 = (x^2 + a_1x + b_1) \cdot (x^2 + a_2x + b_2) \cdot (x^2 + a_3x + b_3) \cdot (x^2 + a_4x + b_4) \cdot (x^2 + a_5x + b_5) \cdot (x^2 + a_6x + b_6)$$

gilt!

■ 11/12, 2. Tag ■

4. Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x+1| \cdot |x-2| \cdot |x+3| \cdot |x-4| = |x-1| \cdot |x+2| \cdot |x-3| \cdot |x+4|$$

erfüllt ist.

5. Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

6. Ein Trapez ABCD, dessen Grundseiten die Längen a und b $(a > b)$ haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, haben einen Inkreis.
Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

Die Lösungen zu den vorliegenden Aufgaben veröffentlichen wir in Heft 4/69, d. Red.

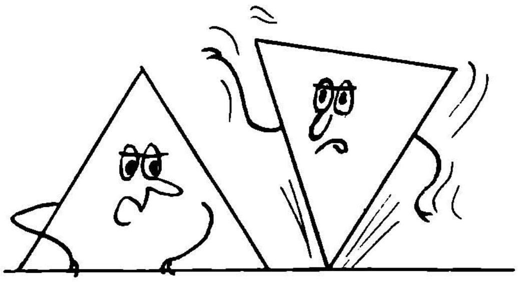
Zitiert ...

... Ich bin eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* seit ihrer Gründung, und ich glaube, daß sie mir half, bei der letzten Olympiade in der 2. Stufe (Kreisolympiade) den 1. und in der Bezirksolympiade den 3. Preis zu erringen.

Bernd Hofmann, 8808 Niederoderwitz

Erfolgreicher Teilnehmer (11. Platz) des *alpha*-Wettbewerbs 1967, Kl.7/8

In freien Stunden alpha heiter



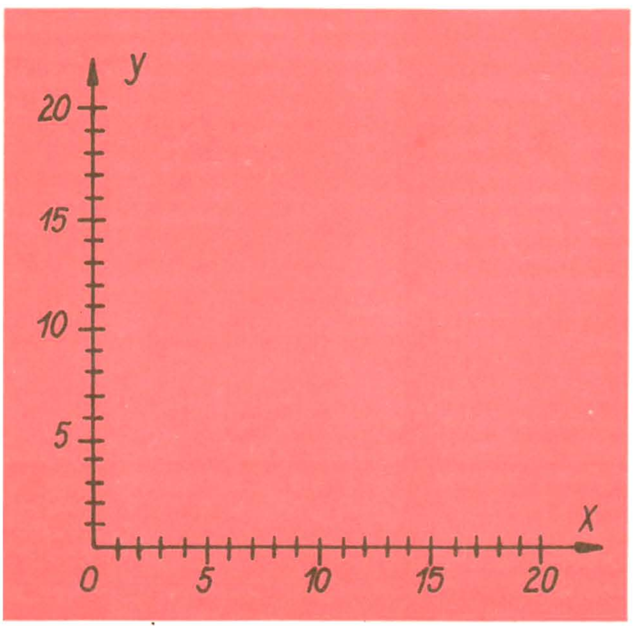
„An der Basis bleiben, Kollege!“
Aus: Zeit im Bild 42/68

Ein „Kunstwerk“

Wenn man die folgenden 14 Funktionen in dem gegebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem grafisch darstellt, so entsteht ein „Kunstwerk“!

OStR Rolf Lüders, Berlin

Funktion	Definitionsbereich	Zuordnungsvorschrift
f_1	$4 \leq x \leq 8$	$y = \frac{x}{2} + 11$
f_2	$8 \leq x \leq 9$	$y = 2x - 1$
f_3	$9 \leq x \leq 10$	$y = -7x + 80$
f_4	$10 \leq x \leq 16$	$y = 10$
f_5	$16 \leq x \leq 18$	$y = x - 6$
f_6	$4 \leq x \leq 5$	$y = -2x + 21$
f_7	$5 \leq x \leq 8$	$y = \frac{x}{3} + \frac{28}{3}$
f_8	$8 \leq x \leq 10$	$y = -6x + 60$
f_9	$11 \leq x \leq 15$	$y = 6$
f_{10}	$16 \leq x \leq 18$	$y = 6x - 96$
f_{11}	$\frac{9}{2} \leq x \leq 7$	$y = \frac{2}{5}x + \frac{51}{5}$
f_{12}	$11 \leq x \leq 12$	$y = -6x + 72$
f_{13}	$14 \leq x \leq 15$	$y = 6x - 84$
f_{14}	$x = 8$	$y = 14$



Ein magischer Turm aus Spielwürfeln

Bildet man bei einem regulären Spielwürfel die Summe der Punkte, die sich auf je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen befinden, erhält man immer 7 Punkte. Dabei kann man zwei richtige Arten von Würfeln unterscheiden (siehe Abb. 1ab). Der Würfel aus Abb. 1a wird manchmal als rechtsdrehend, der Würfel aus Abb. 1b als linksdrehend bezeichnet.

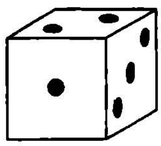


Abb. 1a

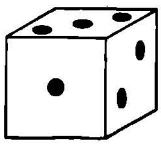


Abb. 1b

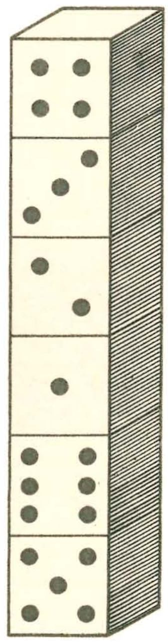


Abb. 2

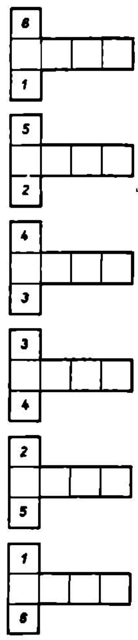


Abb. 3

▲ Aufgabe 1 Aus sechs regulären rechtsdrehenden gleichartigen Würfeln soll ein sechsstöckiger magischer Turm (Abb. 2) mit folgenden Eigenschaften gebaut werden:

a) In jeder Himmelsrichtung hat der Turm bei den verschiedenen Stockwerken auch eine unterschiedliche Anzahl von Punkten.

b) Die Anzahl der Punkte auf den Oberseiten der Würfel bezeichnet das jeweilige Stockwerk, d. h. auf den Oberseiten der Würfel ist von unten nach oben die Anzahl der Punkte gleich 1, 2, ..., 6.

Den magischen Turm braucht man selbstverständlich nicht in Wirklichkeit aufzubauen; es genügt (für die Lösung der Aufgabe), die entsprechende Anzahl von

Punkten in das Netz des Würfelturms einzutragen (siehe Abb. 3).

Aufgabe 2 Es soll die Anzahl aller verschiedenen magischen Türme bestimmt werden, die den Bedingungen der Aufgabe 1 entsprechen. Dabei werden zwei Türme, die nach einer Seitendrehung das gleiche Bild (Verteilung der Punkte) bieten, nicht als verschieden betrachtet.

Milan Koman, Praha
Aus: Matematika ve Škole (ČSSR), Nr. 6, 67/68

Silbenrätsel

ab, ab, ad, be, bi, bus, chung, de, de, der, di, e, e, e, eu, fi, ge, glei, gra, i, ko, la, le, le, ler, les, pez, phie, ment, mo, ne, nen, ner, ni, no, nom, on, on, on, ra, re, rhom, ri, sa, se, szis, tha, ti, ti, ti, tra, un, va

Die Anfangsbuchstaben der Wörter von oben nach unten gelesen ergeben ein Wort, welches ein modernes Arbeitsgebiet der Verwaltung bezeichnet, in dem auch mathematisches Wissen verlangt werden muß.

1. Erklärung, Festlegung
2. Koordinate
3. griech. Mathematiker
4. Bestandteil einer Menge
5. Anwendungsgebiet der Mathematik
6. Zahlsymbol
7. geom. Grundbegriff
8. konvexes Viereck mit vier gleich langen Seiten
9. Rechenoperation
10. Beziehung zwischen math. Objekten
11. Term, der aus zwei Summanden besteht
12. Mathematiker des 18 Jhdt., geboren in Basel
13. Polyeder mit 20 Flächen
14. konvexes Viereck mit mindestens 2 parallelen Seiten
15. Relation
16. Teil eines Bruches
17. geom. Grundbegriff

OL H. Herzog, V.L.d.V., Leipzig

Bitte richtig zuordnen!

Eine Zeitschrift hat als Preisausschreiben acht Fotos veröffentlicht. Es sind 4 Väter und 4 Söhne. Die Aufgabe besteht darin, die Söhne richtig ihren Vätern zuzuordnen. Einige Einsender haben alles richtig, einige haben zwei richtige Zuordnungen gefunden, einige nur eine richtige Zuordnung und einige haben alles falsch. Wie kommt es, daß kein Einsender drei richtige Zuordnungen gefunden hat?

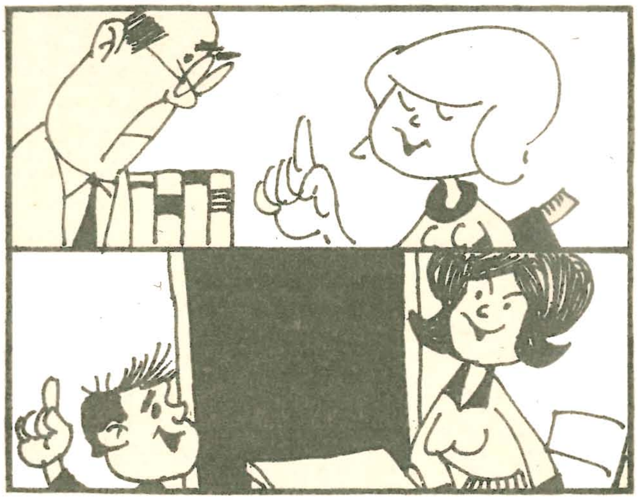
OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Klugheit und Witz

GAUSS, der berühmte Mathematiker, hatte schon als Schüler seine Lehrer mit Klugheit und Witz hereingelegt. Einmal sagte sein Rechenlehrer: „Gauß, ich stelle zwei Fragen. Beantwortest du die erste richtig, sei dir die zweite erlassen. Also: Wieviel Nadeln hat eine Weihnachtstanne?“ — Gauß sagte ohne zu zögern: „67 534.“ — „Wie bist du so rasch auf diese Zahl gekommen?“ — Gauß lächelte überlegen: „Herr Lehrer, das ist bereits die zweite Frage.“

In der Buchhandlung

Sabine in der Buchhandlung: „Kann man bei Ihnen eigentlich jedes Buch bekommen, das in der Schule gebraucht wird?“
Verkäufer: „Natürlich!“
Sabine: „Dann geben Sie mir bitte das Lösungsheft Mathematik für die 7. Klasse!“



Ein viel gebrauchtes Wort

Lehrerin: „Welche drei Wörter brauchst du, lieber Steffen, am häufigsten im Mathematikunterricht?“
Steffen: „Ich weiß nicht!“
Lehrerin: „Richtig, mein Sohn!“

Kommst Du beim Studium nicht weiter —
Entspanne Dich mit *alpha*-heiter!

H. Pätzold

Die Redaktion *alpha* dankt mit diesen Orchideen allen Lesern für die zahlreichen Neujahrswünsche und Gratulationen anläßlich des zweijährigen Bestehens der mathematischen Schülerzeitschrift.

Fernsehfußball — reguläre Polyeder

Der Titel eines aus dem Englischen in mehrere Sprachen übersetzten modernen Geometriebuches lautet „Unvergängliche Geometrie". Zwei Tatsachen mögen den Verfasser, H. S. M. Coxeter, dazu bewogen haben, seinem Buch diesen Titel zu geben.

Erstens ist die Geometrie die älteste Wissenschaft, in der sich der Mensch um eine exakte Begründung seiner Aussagen mit viel Erfolg bemüht. Zweitens gelangt man in der Geometrie auch in jüngster Zeit immer wieder zu neuen Begriffsbildungen und Erkenntnissen, die mit zur Formung unseres Weltbildes beitragen.

Selbst im praktischen Leben des Alltags finden geometrische Formen und Ideen nutzbringende Anwendungen. Bauformen, die dem Geometer in der abstrakten Vorstellung längst geläufig sind, für deren praktische Auswertung jedoch früher die technischen Voraussetzungen fehlten, werden bei modernen Bauten in zunehmendem Maße verwendet. Verfolgen wir am Bildschirm des Fernsehgerätes oder in einem Sportstadion das Spielgeschehen beim Fußball, so bleibt keine Zeit, um über die Karte von schwarzen Fünfeck- und weißen Sechseckfeldern nachzudenken, die den Ball scheinbar überzieht. Bei genauerer Betrachtung gewinnt man den Eindruck, ein Geometer habe beim Entwurf dieses Balles Pate gestanden. An Hand des vorliegenden Fotos wollen wir den Ball nun einmal mit den Augen eines Geometers betrachten.

Zunächst erkennen wir, daß die Oberfläche des kugelförmigen Balles lückenlos von regelmäßigen Fünfeck- und Sechseckfeldern bedeckt ist. Die Seiten dieser Felder stellen Großkreisbogen auf der Kugel dar. Man bezeichnet diese Felder als sphärische Fünfecke und Sechsecke. Wie man weiter leicht erkennt, grenzt jedes sphärische Fünfeck mit jeder seiner fünf Seiten an je ein Sechseck. Jedes sphärische Sechseck hat drei seiner Seiten mit je einem Sechseck und die übrigen drei Seiten mit je einem Fünfeck gemein. Ferner gibt es Punkte auf dem Ball, in denen die Ecken von je zwei Sechsecken mit einem Fünfeck zusammentreffen. Diese Punkte wollen wir als Eckpunkte bezeichnen.

Nun denken wir uns die sphärischen Felder auf dem Ball in ebene Polygone übergeführt, wobei die Lage der Eckpunkte unverändert bleiben soll. Auf diese Weise entsteht ein Vielflächner, wofür man in der Geometrie auch Polyeder* sagt. Diese Transformation ist möglich, da die Eckpunkte von jedem der sphärischen Vielecke auf je einem Kleinkreis der Kugel liegen.

An dem vom Fußball hergeleiteten Polyeder nehmen wir nun in Gedanken eine Abzählung seiner Ecken, Flächen und Kanten vor. Dieser Körper besitzt 12 regelmäßige Fünfecke und 20 regelmäßige Sechsecke als Begrenzungsflächen. Somit können wir sehr einfach auf die Kanten- und Eckenzahl schließen. Da nämlich in jede Polyederkante genau zwei Polygonseiten fallen, hat der Körper $\frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$ Kanten.

Da weiterhin in jeder Polyederecke genau drei Polygonecken zusammentreffen, hat der Körper $\frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{3} = 60$ Ecken.

Zusammenfassend halten wir fest: Das aus dem Fußball ableitbare Polyeder besitzt 32 Flächen, 90 Kanten und 60 Ecken. Wir bezeichnen im folgenden die Anzahl der Ecken mit E, die der Flächen mit F und die der Kanten mit K.

Als metrische Besonderheit dieses Polyeders sei herausgestellt, daß sämtliche Kanten gleich lang sind und alle Eckpunkte auf einer Kugel liegen. Polyeder dieser Art sind ein alter Gegenstand mathematischer, technischer, künstlerischer und philosophischer Betrachtungen. Schon in der Antike richtete sich das Augenmerk von Mathematikern und Philosophen auf Polyeder, die sich durch gewisse Regelmäßigkeiten auszeichnen.

Wir wollen nun jene konvexen** Polyeder betrachten, die nur eine Art von regelmäßigen kongruenten Polygonen als Begrenzungsflächen besitzen. Zunächst ist leicht einzusehen, daß nur regelmäßige Dreiecke, Vierecke und Fünfecke als Begrenzungsflächen dieser regelmäßigen Polyeder in Betracht kommen. Das regelmäßige Sechseck scheidet bereits aus, denn an diesem Polygon beträgt der Innenwinkel 120°. Da in einer Polyederecke die Ecken von mindestens drei Polygonen zusammentreffen, ergäbe sich eine Winkelsumme von 360°, die einem Vollwinkel entspricht. Folglich kommen regelmäßige Sechsecke und alle weiteren regelmäßigen Polygone mit einer noch größeren Eckenzahl für den Aufbau regelmäßiger konvexer Polyeder nicht in Betracht.

* Unter dem Wort „Polyeder" versteht man sowohl einen durch ebene Flächenstücke begrenzten endlichen Körper als auch die Gesamtheit der diesen Körper begrenzenden Polygone.

** Ein Polyeder heißt konvex, wenn es ganz auf einer Seite von jeder durch ein Begrenzungspolygon festgelegten Ebene liegt.

Aufbau von Polyedern aus regelmäßigen kongruenten Dreiecken

Im regelmäßigen Dreieck mißt der Innenwinkel 60°. Wir haben daher die Fälle zu untersuchen, bei denen in einer Polyederecke drei, vier oder fünf Dreiecke zusammentreffen. Die dabei entstehenden Summen von Kantenwinkeln sind kleiner als der Vollwinkel.

a) Fügt man drei Dreiecke zu einer Raumecke zusammen, so erhält man eine dreiseitige Pyramide mit einer offenen Basisfläche. Diese kann man durch ein viertes Dreieck abschließen. Den so entstehenden konvexen Körper bezeichnet man als regelmäßiges Vierflach oder Tetraeder. Durch Abzählen ermitteln wir die folgenden Zahlen: F = 4, K = 6, E = 4. (Abb. 1)

b) Fügt man vier Dreiecke zu einer Raumecke derart zusammen, daß die vier freien Dreieckseiten in einer Ebene liegen, erhält man eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Zwei derartige Pyramiden lassen sich mit ihren offenen Grundflächen derart aneinandersetzen, daß ein geschlossener konvexer Körper entsteht. Dieser wird von acht regelmäßigen kongruenten Dreiecken begrenzt. In jeder Ecke des so konstruierten Körpers treffen sich vier Kanten. Da sich keine Ecke und Fläche des Körpers vor der anderen auszeichnen läßt, liegt ein regelmäßiges Polyeder vor. Entsprechend der Flächenzahl bezeichnet man den Körper als regelmäßigen Achtflächner oder Oktaeder. Durch Abzählen ermitteln wir F = 8, K = 12, E = 6. (Abb. 2)

c) Wir fügen fünf Dreiecke zu einer fünfseitigen Pyramide derart zusammen, daß die

Abb. 1

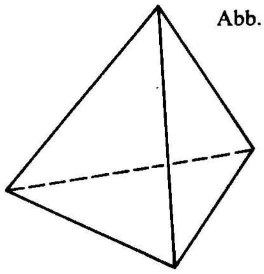


Abb. 2

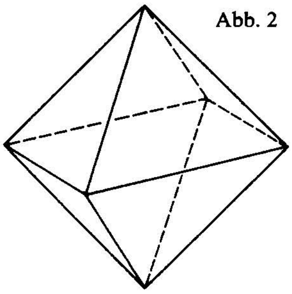


Abb. 3

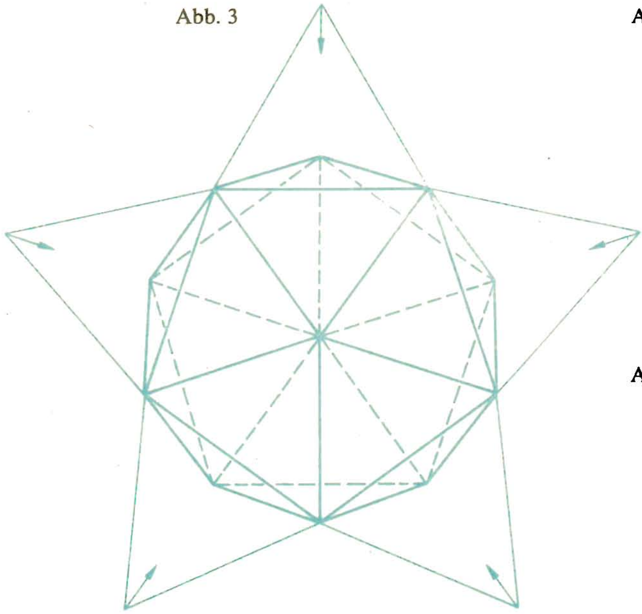


Abb. 4

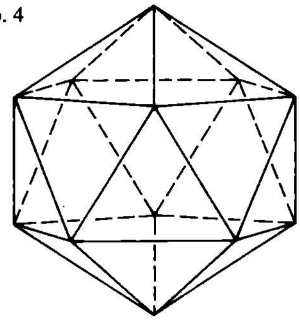
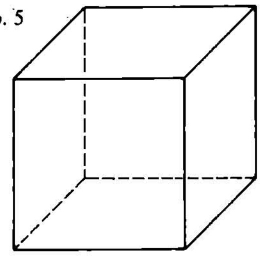


Abb. 5



fünf freien Dreieckseiten in einer Ebene liegen. Dann bildet die Basis der Pyramide ein regelmäßiges Fünfeck. Zum Aufbau des entsprechenden regelmäßigen Polyeders stellen wir zwei derartige Pyramiden bereit und heften an die fünf Kanten der offenen Basis noch je ein regelmäßiges Dreieck. Auf diese Art verbrauchen wir insgesamt 20 kongruente Dreiecke. Die angehefteten Dreiecke werden nun so gerichtet, daß der Umriß dieser Konfiguration bei einer Projektion senkrecht zur Basisebene der Pyramide ein regelmäßiges Zehneck ergibt. Bei dieser Stellung der Dreiecke kann man die beiden Pyramiden mit ihren offenen Basen so zusammenführen, daß sich die angehefteten Dreiecke mit ihren Seiten ineinander verzahnen. Es entsteht auf diese Weise ein Polyeder, von dessen Eckpunkten je fünf Körperkanten ausgehen. Die Seitenflächen sind kongruente regelmäßige Dreiecke. Man bezeichnet dieses regelmäßige Polyeder, dessen Existenz wir jetzt nachgewiesen haben, als Ikosaeder.

Wir wollen hier die Ecken- und Kantenzahl aus der Flächenzahl erschließen. (Abb. 3)

Da jede Polyederkante zugleich die Seite von zwei Dreiecken ist, gilt

$$K = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30.$$

Da in jeder Polyederecke fünf Ecken von Seitenflächen liegen, gilt

$$E = \frac{20 \cdot 3}{5} = 12.$$

Wir halten fest: F = 20, K = 30, E = 12. (Abb. 4)

Aufbau eines regelmäßigen Polyeders aus regelmäßigen kongruenten Vierecken (Quadraten)

Fügt man drei Quadrate zu einer Raumecke zusammen, so steht jede Fläche senkrecht auf den beiden anderen. Die Kanten bilden ein orthogonales Dreibein. Zwei derartige Raumecken lassen sich zu einem geschlossenen Polyeder zusammenfügen, dessen Form uns durch das Spielen mit Würfeln am besten vertraut ist. Dieser Körper heißt Würfel oder Hexaeder. Auf Grund unserer Vertrautheit mit diesem Polyeder können wir die Flächen-, Kanten- und Eckenzahl unserer Vorstellung entnehmen. Es gilt F = 6, K = 12, E = 8. (Abb. 5). Legt man vier Quadrate mit ihren Ecken aneinander, ergibt sich eine Winkelsumme von 360°. Wir können also sicher kein weiteres regelmäßiges Polyeder aus Quadraten aufbauen.

Aufbau eines regelmäßigen Polyeders aus regelmäßigen kongruenten Fünfecken

Wie die Abb. 6 zeigt, beträgt beim regelmäßigen Fünfeck die Größe des Innenwinkels 108°. Es besteht also Aussicht auf Erfolg für unser Vorhaben, wenn sich in den Polyederecken drei Seitenflächen treffen. Die Summe der Kantenwinkel beträgt dann 324°.

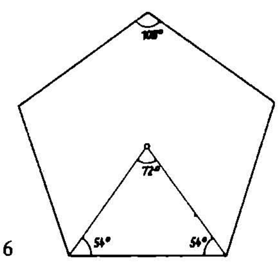


Abb. 6

Für den Aufbau des Körpers gehen wir vom regelmäßigen Fünfeck aus, an dessen fünf Seiten zunächst je ein weiteres Fünfeck geheftet wird. (Abb. 7). Die angehefteten Fünfecke werden nun paarweise so miteinander verknüpft, daß eine „Schale" aus sechs regelmäßigen Fünfecken entsteht. Projiziert man diese „Schale" senkrecht auf die Ausgangsebene, ergibt sich als scheinbarer Umriß ein regelmäßiges Zehneck. Zwei derartige Schalen lassen sich daher ineinander verzahnt so zusammenfügen, daß ein geschlossenes konvexes Polyeder entsteht. Der in dieser Weise konstruierte Körper besteht aus 12 kongruenten regelmäßigen Fünfecken. Aus diesen Eigenschaften leitet sich die wieder dem Griechischen entlehnte Bezeichnung „Pentagondodekaeder" ab. Von jeder Körperecke gehen drei Körperkanten aus. Nach den gleichen Überlegungen wie oben folgt:

$$K = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30, \; E = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20. \text{ (Abb. 8)}$$

Mit diesen fünf Körpern sind bereits alle möglichen Fälle von regelmäßigen konvexen Polyedern erfaßt. Sie waren schon in der Antike bekannt und werden nach dem griechischen Philosophen Platon, 427–347 v.u.Z., als platonische Körper bezeichnet.

Nun wollen wir die soeben ermittelten Flächen-, Kanten- und Eckenzahlen der von uns betrachteten Körper in einer Tabelle zusammenstellen und weitere Betrachtungen daran anknüpfen.

Polyeder	Flächen F	Kanten K	Ecken E	E + F — K	m	n
1. Tetraeder	4	6	4	2	3	3
2. Oktaeder	8	12	6	2	3	4
3. Ikosaeder	20	30	12	2	3	5
4. Hexaeder (Würfel)	6	12	8	2	4	3
5. Pentagondodekaeder	12	30	20	2	5	3
6. „Fußballkörper"	32	90	60	2	—	—

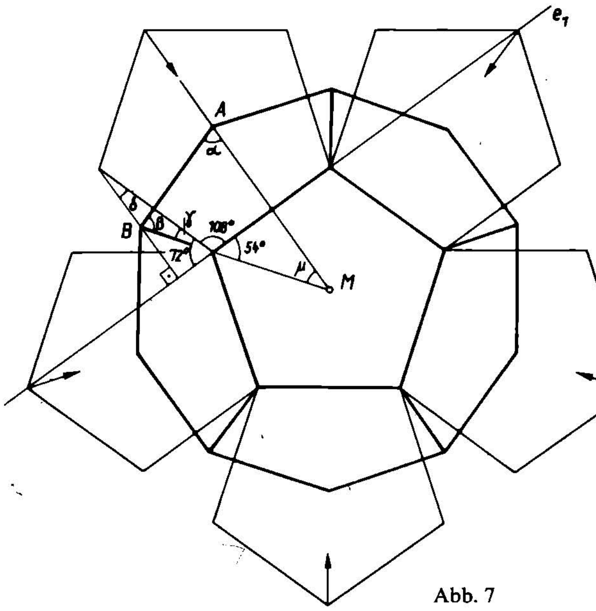


Abb. 7

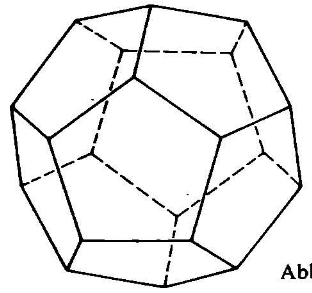


Abb. 8

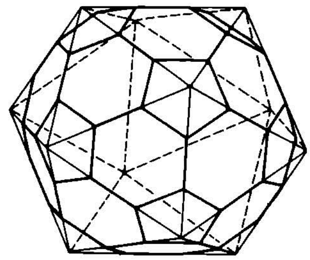


Abb. 9

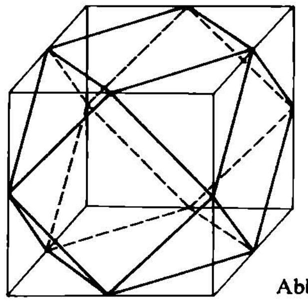


Abb. 10

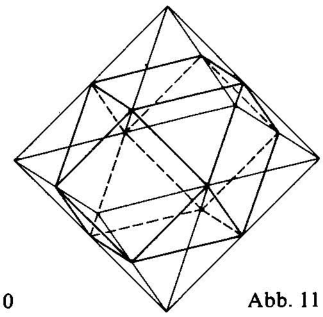


Abb. 11

Abb. 7: Die im Text aufgestellte Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß das Dreieck ABM gleichschenklig ist und für den Scheitelwinkel $\mu = 36°$ gilt.
Da [MA] das Lot auf eine Seite des Basisfünfecks darstellt, gilt $\mu = 36°$. Ferner folgt aus der Figur leicht $\gamma = 18°$ und $\delta = 18°$. Damit gilt $\beta = 72°$. Aus $\alpha = 180° - \mu - \beta$ folgt $\alpha = 72°$, was zu beweisen war.

Wir stellen uns zunächst die elementare Rechenaufgabe, für jeden Körper die Zahl $E + F - K$ zu bestimmen. In allen Fällen erhalten wir zwei als Ergebnis. Dies wirft die Frage auf, ob hier ein Zufall oder eine allgemeine Gesetzmäßigkeit zugrunde liegt. Mit dieser Problemstellung wird sich ein Aufsatz im nächsten Heft beschäftigen. Ferner läßt sich an der Tabelle eine eigenartige Wechselbeziehung zwischen den Zahlen von Oktaeder und Hexaeder sowie zwischen Ikosaeder und Pentagondodekaeder feststellen. Körper 2 und 4 stimmen in der Kantenzahl überein, während der Eckenzahl des einen die Flächenzahl des anderen wechselseitig entspricht. Über die Körper 3 und 5 läßt sich die gleiche Aussage machen. Hier kann gleichfalls die Frage nach einer tiefer liegenden Gesetzmäßigkeit aufgeworfen werden.
In der Tat liegt diesem Sachverhalt ein wichtiges Prinzip der Geometrie, das sogenannte Dualitätsprinzip, zugrunde. Man sagt: Oktaeder und Hexaeder bzw. Ikosaeder und Pentagondodekaeder sind sich dual entsprechende Körper. Z. B. hätten wir mit Hilfe des Dualitätsprinzips aus der Existenz des Ikosaeders sofort auf die Existenz des dazu dualen Pentagondodekaeders schließen können. Beim Tetraeder stimmt die Eckenzahl mit der Flächenzahl überein, d. h. das Tetraeder geht bei einer Dualisierung in sich selbst über. Das Dualitätsprinzip dokumentiert sich in einer weiteren Relation von Zahlen. Bedeuten m die Anzahl der Seiten einer Begrenzungsfläche und n die Anzahl der von einer Ecke ausgehenden Kanten, so gilt die analoge Wechselbeziehung zwischen den sich dual entsprechenden platonischen Körpern (Vgl. Tabelle). Das Dualitätsprinzip ist für die projektive Geometrie von fundamentaler Bedeutung.
Abschließend wollen wir versuchen, unser „Fußballpolyeder", das ja den Anstoß für unsere Betrachtungen gab, aus einem der platonischen Körper herzuleiten. Hierzu gehen wir vom Ikosaeder aus. Zunächst teilen wir sämtliche Kanten des Ikosaeders in drei gleiche Teile. Durch je fünf Teilungspunkte, die einem Eckpunkt benachbart sind, legen wir eine Schnittebene. Auf diese Weise schneiden wir von dem Körper 12 fünfseitige Pyramiden ab. Die dabei an dem Körper entstehenden Schnittflächen sind regelmäßige Fünfecke. Die zwanzig regelmäßigen Dreiecke des Ikosaeders werden durch Abschneiden der Pyramiden in zwanzig regelmäßige Sechsecke übergeführt (Abb. 9). Der „Fußballkörper" ist also ein abgestumpftes Polyeder, das sich in einer analogen Weise auch aus dem Pentagondodekaeder herleiten läßt. Die Ecken dieses Körpers — als Kantendreibeine aufgefaßt — sind untereinander deckungsgleich (äquivalent), während die Seitenflächen regelmäßige Fünfecke und Sechsecke darstellen. Man rechnet diesen Körper deshalb zu den halbregelmäßigen Polyedern. Aus der Bezeichnung „archimedische Körper" ist zu folgern, daß auch diese schon in der Antike Gegenstand der Betrachtung waren.

Durch Abstumpfen der regelmäßigen Polyeder gelangt man auf mathematische Körper, die in der Kristallographie eine wichtige Rolle spielen. Teilt man z. B. die Kanten des Hexaeders in zwei gleiche Teile und legt durch je drei einem Eckpunkt benachbarte Halbierungspunkte eine Schnittebene, so ergibt sich als abgestumpfter Würfel ein Kristall, dessen Seitenflächen 6 Quadrate und 8 gleichseitige Dreiecke darstellen (Abb. 10). Die 12 Ecken — als Kantenvierbeine aufgefaßt — sind äquivalent. Der gleiche Körper entsteht, indem man vom Oktaeder 6 Pyramiden mit quadratischer Basisfläche abschneidet. Die Schnittebenen müssen durch je vier einem Eckpunkt benachbarte Halbierungspunkte der Kanten des Oktaeders gelegt werden. Auf Grund der zweifachen Erzeugungsweise bezeichnet man den entstehenden Restkörper auch als Mittelkristall (Abb. 11).
Wenn in den Lehrmittelsammlungen von Schulen die platonischen Körper manchmal in einer verstaubten Ecke einen Dornröschenschlaf führen, weil sie vermeintlich mit moderner Mathematik nicht viel zu tun haben, so ist dies ein bedauerlicher Irrtum. Mit Untersuchungen an diesen Körpern lassen sich wichtige Anregungen für gruppentheoretische und topologische Begriffsbildungen geben. Für die Kristallographie bilden die platonischen Körper gleichfalls den Ausgangspunkt der geometrischen Untersuchungen. Auch die Frage nach der Konstruierbarkeit von regelmäßigen Polygonen mit Zirkel und Lineal ist hierbei von Interesse. Diese Fragestellung führt dann wieder in die Gefilde der Algebra. Abzählende Methoden, wie sie hier geübt wurden, spielen in der Mechanik und Getriebelehre (z. B. Grublersche Zwanglaufbedingung) eine wichtige Rolle. Zunächst ging es vor allem darum, mit den regulären konvexen Polyedern und einigen einfachen Untersuchungsmethoden vertraut zu werden.
Solltet Ihr einmal im Sportstadion neben einem Mathematiker stehen, der keinerlei Anteilnahme am Spielgeschehen zeigt, dann übt Nachsicht mit ihm; er denkt vielleicht gerade über das duale Gegenstück des „Fußballpolyeders" nach! *E. Schröder*

Aufgaben zu diesem Beitrag findet der interessierte Leser auf Seite 23, d. Red.

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr. phil. habil. Herbert Beckert

Direktor des Mathematischen Instituts
Karl-Marx-Universität Leipzig

Liebe alpha-Leser!
Zur Lösung dieser Aufgabe sind zwei Nüsse zu knacken. Ihr braucht keine großen mathematischen Vorkenntnisse. Hoffentlich habt Ihr viel Freude. Ich wünsche viel Erfolg.

■ 343 Ein schlauer Versicherungsvertreter spricht in einem Hause vor und trifft dort den Hausverwalter an. Der Versicherungsvertreter erkundigt sich bei diesem, ob außer ihm noch mehr Personen im Hause wohnten. „Ja, außer mir noch 3", entgegnet dieser. Der Versicherungsvertreter erkundigt sich daraufhin nach deren Alter und erhält folgende Antwort: „Wenn Sie die Alter der 3 außer mir im Haus wohnenden Personen miteinander multiplizieren, dann ergibt sich die Zahl 1296, und wenn Sie die drei Alter addieren, dann ergibt sich unsere Hausnummer". Der Versicherungsvertreter geht hinaus, sieht sich die Hausnummer an und erklärt nach einigem Nachdenken dem Hausverwalter, daß er so das Alter der 3 Personen nicht bestimmen könne. „Ja," entgegnet dieser, „wenn ich Ihnen aber sage, daß ich der Älteste im Haus bin, dann sollte es genügen". Darauf entgegnete der Versicherungsvertreter lächelnd: „Vielen Dank! Ich kenne jetzt das Alter der 3 Personen."
Frage: Wie ist das genaue Alter der drei Personen?

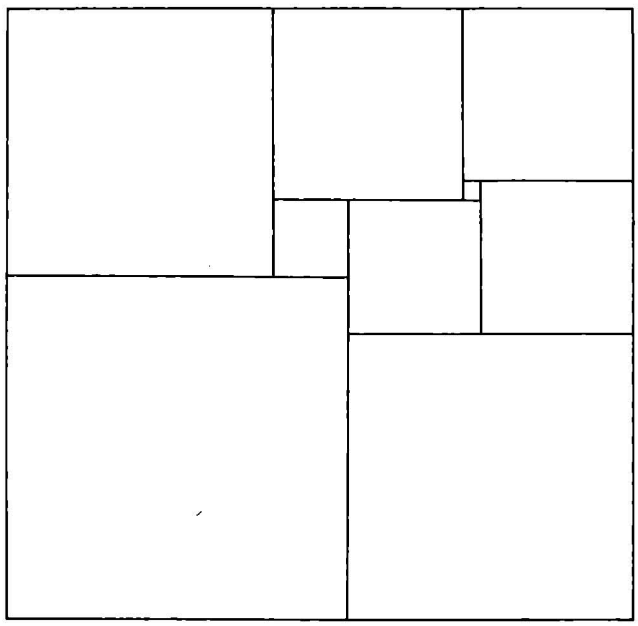
Mathematikerpersönlichkeiten der Universität Leipzig

Johannes Regiomontanus	1436 bis 1476
Gottfried Wilhelm Leibniz	1646 bis 1716
Karl Mollweide	1774 bis 1825
August Ferdinand Möbius	1790 bis 1868
Hermann Hankel	1839 bis 1873
Sophus Lie	1842 bis 1899
Felix Klein	1849 bis 1925
Otto Hölder	1859 bis 1937
Wilhelm Blaschke	1885 bis 1962
B. L. van der Waerden	geb. 1903

Ein unlösbares Problem

▲ 308 Die Figur zeigt, daß man aus neun paarweise verschiedenen Quadraten ein Rechteck zusammensetzen kann. Das Seitenverhältnis dieser neun Quadrate beträgt 1 : 4 : 7 : 8 : 9 : 10 : 14 : 15 : 18. Daraus ergibt sich, daß das Seitenverhältnis des Rechtecks 32 : 33 ist.
Die Mathematiker haben bewiesen, — und dies war durchaus keineswegs ganz einfach — daß man mit weniger als neun paarweise verschiedenen Quadraten, in welchem Seitenverhältnis sie auch immer stehen mögen, kein Rechteck zusammensetzen kann.
Es ist offenbar möglich, ein analoges Problem im Raum zu betrachten, d. h. die Aufgabe, aus paarweise verschiedenen Würfeln einen Quader zusammenzusetzen.
Eure Aufgabe besteht nun darin nachzuweisen, daß dieses Problem unlösbar ist; mit anderen Worten, man kann aus endlich vielen paarweise verschiedenen Würfeln (ihre Anzahl soll natürlich mindestens zwei betragen) keinen Quader zusammensetzen.
Hinweis: Man beachte, daß bei einer Zusammensetzung eines Rechtecks aus paarweise verschiedenen Quadraten das kleinste Quadrat nicht am Rande des Rechtecks liegen kann.

Dr. W. Rautenberg, Berlin



Lösungen

285 Lösung der arithmetischen Aufgabe aus Vietnam

Es seien x die Anzahl der stehenden Büffel, y die Anzahl der liegenden Büffel und z die Anzahl der alten Büffel. Dann gilt:

$$x + y + z = 100, \qquad (1)$$

$$5x + 3y + \frac{z}{3} = 100. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt

$$15x + 9y + z = 300$$

und hieraus in Verbindung mit (1) durch Subtraktion

$$14x + 8y = 200,$$
$$4y = 100 - 7x,$$
$$y = 25 - \frac{7x}{4}. \qquad (3)$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, ist diese Gleichung nun erfüllt für $x = 0$, $x = 4$, $x = 8$ und $x = 12$. Man erhält daher die folgenden vier Lösungen

x	y	z
0	25	75
4	18	78
8	11	81
12	4	84

und überzeugt sich leicht davon, daß in allen vier Fällen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

286 Lösung der geometrischen Aufgabe aus Vietnam

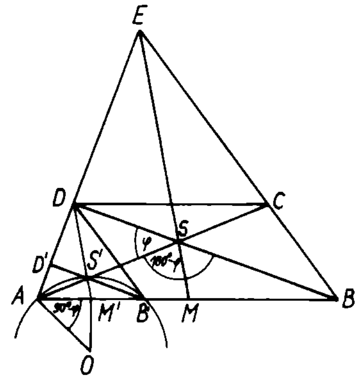
1. *Wir nehmen zunächst an, daß* $\alpha + \beta < 180°$ *gilt.*

Es seien nun ABCD das gesuchte Trapez, S der Schnittpunkt seiner Diagonalen und E der Schnittpunkt der Geraden AD und BC (s. Abb.). Dann schneiden sich die Geraden AB und ES in dem *Mittelpunkt* M der Seite $\overline{AB}$.

Wir stellen zunächst fest, daß man aus den gegebenen Stücken zunächst noch nicht ein Teildreieck der Figur konstruieren kann. Wir können aber statt dessen diesen Teildreiecken ähnliche Dreiecke konstruieren und dadurch zum Ziel gelangen.

Es seien daher B' der Schnittpunkt der Parallelen durch D zu CB mit AB und M' der Schnittpunkt der Parallelen durch D zu EM mit AB. Dann ist M' Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB'}$. Ferner sei S' der Schnittpunkt der Parallelen durch B' zu BD mit DM'. Dann gilt $\Delta AB'D \sim \Delta ABE$, $\Delta AM'D \sim \Delta AME$, $\Delta AM'S' \sim \Delta AMS$;

also liegt der Punkt S' auf der Geraden AS, und es gilt ferner wegen $\sphericalangle BSA = 180° - \phi$ auch $\sphericalangle B'S'A = 180° - \phi$.



Nun läßt sich das Dreieck AB'D aus $AD = d$, $\sphericalangle DAB' = \alpha$ und $\sphericalangle AB'D = \beta$ leicht konstruieren. Ferner erhält man M' als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB'}$. Der Punkt S' liegt nun einerseits im Innern des Dreiecks AB'D auf $\overline{DM'}$, andererseits auf dem Kreisbogen mit der Sehne $\overline{AB'}$ und dem zugehörigen Peripheriewinkel $180° - \phi$, der $\sphericalangle B'S'A = 180° - \phi$ gilt. Dieser Kreisbogen läßt sich konstruieren, indem man an die Dreiecksseiten AB' in A nun außen den Winkel $90° - \phi$ anträgt und seinen freien Schenkel mit den Mittelsenkrechten auf $\overline{AB'}$ zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt O ist dann der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius $\overline{OA}$, und der Punkt S' ist der Schnittpunkt des im Innern des Dreiecks AB'D liegenden Bogens dieses Kreises mit $\overline{DM'}$. Nun zeichnet man die Parallele durch D zu AB, die AS' im Punkte C schneidet, ferner zeichnet man die Parallele durch C zu DB', die AB' in B schneidet. ABCD ist dann das Trapez mit den verlangten Eigenschaften.

2. *Gilt nun* $\alpha + \beta > 180°$, so verläuft die Konstruktion ganz analog, nur mit dem Unterschied, daß jetzt der Punkt D das Ähnlichkeitszentrum der entsprechenden Dreiecke ist.

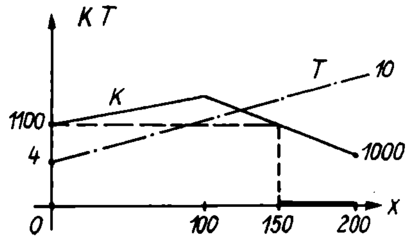
3. *Gilt aber* $\alpha + \beta = 180°$, so ist das gesuchte Trapez ein Parallelogramm, und die obige Konstruktion ist *nicht* durchführbar. Man kommt aber leicht zum Ziel, wenn man beachtet, daß dann S einerseits auf der durch den Mittelpunkt von $\overline{AD}$ parallel zu AB gehenden Mittellinie des Parallelogramms ABCD liegt und andererseits auf dem Kreisbogen mit der Sehne $\overline{AD}$ und dem zugehörigen Peripheriewinkel ϕ, weil $\sphericalangle ASD = \phi$ gilt. Dieser Kreisbogen läßt sich leicht konstruieren (vgl. unter 1) und damit auch der Punkt S, mit dessen Hilfe man dann wie unter 1 die Punkte C und B erhält.

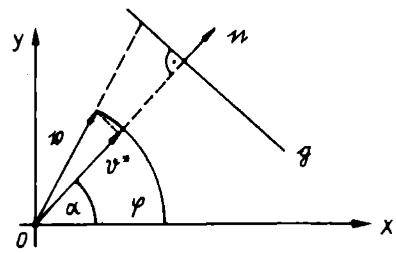
Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. R. Klötzler

■ 298 a Zunächst ist $T(x) = x\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{50}\right) + 4$ für $0 \leqq x \leqq 200$

$$K(x) = \begin{cases} x + 1100 & \text{für } 0 \leqq x \leqq 100 \\ -2x + 1400 & \text{für } 100 \leqq x \leqq 200. \end{cases}$$

Aus der graphischen (aber nicht maßgerechten) Darstellung entnehmen wir die Antwort $x_0 = 0$ oder $150 \leqq x_0 \leqq 200$.





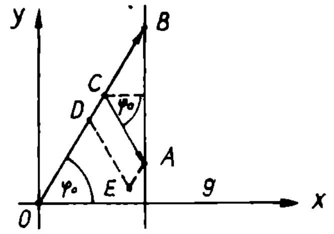
▲ 298b Wir berechnen zunächst diejenige Fahrtroute, auf der man von O am schnellsten eine Gerade g erreicht, deren Normale $\mathfrak{n}$ mit der x-Achse den Winkel α mit $O \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ einschließt. Diese Route ist geradlinig und durch den Anstiegswinkel ϕ gekennzeichnet, für den die Komponente v^* des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{w}$ in Richtung $\mathfrak{n}$ maximal ist. $v^* = v_0(1 - \cos\phi)\cos(\phi - \alpha) \to$ Max wird durch $\phi_{Max} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ für $\alpha > O$ und $\phi_{Max} = \pm\frac{\pi}{3}$ für $\alpha = O$ (im Sinne des absoluten Maximums) gelöst.

Fall 1 Ist $\phi = \arctan\frac{y_0}{x_0} \geqq \frac{\pi}{3}$, so legen wir durch $A(x_0, y_0)$ eine Gerade g mit der Normalen $\mathfrak{n}$, deren Anstiegswinkel α gerade der Relation $\phi = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ genügt.

Somit stellt nach den vorangegangenen Betrachtungen die Strecke $\overline{OA}$ die günstigste Route von O nach g und damit erst recht von O nach A dar. Die Fahrzeit beträgt

$$T = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{v_0(1 - \cos\phi)}.$$ Außerdem ist die Lösung eindeutig.

Fall 2 Ist $\phi = \arctan\frac{y_0}{x_0} < \frac{\pi}{3}$, so legen wir durch A eine Parallele g zur y-Achse und nach vorangegangenen Betrachtungen liefert die Strecke $\overline{OB}$ eine zeitlich günstige Route von O nach g, wenn $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ gewählt wird. Die Fahrzeit beträgt $T = \frac{4}{v_0} \cdot x_0$. Da aber entsprechend der Geschwindigkeitsverteilung die Strecke $\overline{AC}$ genau so schnell wie die von $\overline{CB}$ durchfahren werden kann, ist auch der Streckenzug $\overline{OCA}$ eine optimale Fahrtroute von O nach g und damit von O nach A (das Segelboot „kreuzt"). Diese optimale Fartroute ist nicht eindeutig, denn offenbar bedingt auch der Streckenzug $\overline{ODEA}$ die gleiche Fahrzeit, wenn $\overline{DE} \parallel \overline{CA}$ und $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$ sind.

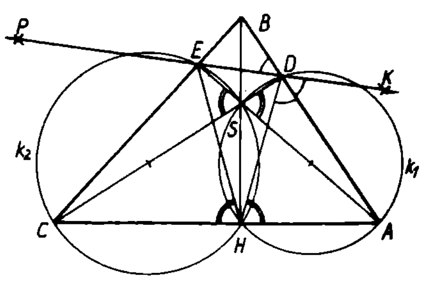


Lösungen zu den ausgewählten Aufgaben der Allunionsfernolympiade

▲ 299 (3.) Wir setzen zunächst voraus, daß das Dreieck ABC spitzwinklig ist, so daß die Fußpunkte der drei Höhen dieses Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks liegen.
Es seien E bzw. D die Fußpunkte der zu A bzw. C gehörenden Höhen des Dreiecks ABC. Ferner sei S der Höhenschnittpunkt. Wir werden zeigen, daß dann die Punkte K, P, D und E auf einer Geraden liegen, womit die Behauptung bewiesen ist. Nun geht der Kreis k_1 mit $\overline{AS}$ als Durchmesser nach der Umkehrung des Satzes des Thales durch die Punkte H und D und der Kreis k_2 mit $\overline{CS}$ als Durchmesser durch die Punkte H und E. (vgl. die Abbildung!) Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt daher

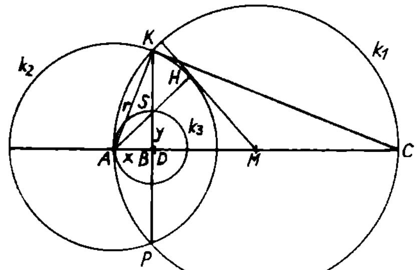
$\sphericalangle$ DSA = $\sphericalangle$ DHA und
$\sphericalangle$ CSE = $\sphericalangle$ CHE.

Nun sind aber die Winkel $\sphericalangle$ DSA und $\sphericalangle$ CSE als Scheitelwinkel gleich groß, so daß $\sphericalangle$ DHA = $\sphericalangle$ CHE gilt.
Analog erhält man $\sphericalangle$ ADH = $\sphericalangle$ EDB.



Da nach Voraussetzung die Punkte H und K bezüglich der Geraden AD symmetrisch liegen, gilt ferner $\sphericalangle$ KDA = $\sphericalangle$ ADH = $\sphericalangle$ EDB. Daraus folgt $\sphericalangle$ KDA + $\sphericalangle$ ADE = $\sphericalangle$ EDB + $\sphericalangle$ ADE = 180°,
d. h die Punkte K, D und E liegen auf einer Geraden. Analog beweist man, daß auch die Punkte P, D und E auf einer Geraden liegen. Daraus folgt aber, daß die Punkte D und E auf der Geraden KP liegen, womit die Behauptung bewiesen ist. Der obige Beweis gilt auch für den Fall, daß das Dreieck ABC rechtwinklig oder stumpfwinklig ist; jedoch liegen dann zwei Höhenfußpunkte auf den Verlängerungen der entsprechenden Seiten bzw. fallen mit zwei Eckpunkten des Dreiecks zusammen.

▲ 300 (8.) Der gegebene Kreis k_1 habe den Mittelpunkt M und den Radius $\overline{MA} = a$. Der Kreis k_2 um A habe den Radius $\overline{AK} = \overline{AH} = r$. Der Schnittpunkt der Geraden KP und AH sei S, der Schnittpunkt der Geraden KP und AM sei B (vgl. die Abbildung).



Setzt man $\overline{AB} = x$ und $\overline{BS} = y$, so folgt wegen $\overline{MH} = \sqrt{a^2 - r^2}$ aus der Ähnlichkeit der Dreicke ABS und AMH

$$x : y = r : \sqrt{a^2 - r^2}, \quad (1)$$

also
$$x^2 (a^2 - r^2) = r^2 y^2,$$
$$a^2 x^2 - r^2 x^2 = r^2 y^2,$$
$$r^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2. \quad (2)$$

Bezeichnet man den zweiten Schnittpunkt des Kreises k_1 mit der Geraden AM mit C, so gilt $\overline{AC} = 2a$, und das Dreieck ACK ist rechtwinklig. Aus dem Satz des Euklid folgt daher

$r^2 = 2ax$. Aus (2) und (3) folgt (3)

$$2ax(x^2 + y^2) = a^2 x^2.$$

Wegen $a \neq 0$ und $x \neq 0$ folgt hieraus

$$x^2 + y^2 = \frac{ax}{2}, \text{ also}$$

$$x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} + y^2 = \frac{a^2}{16},$$

d. h. $$\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \quad (4)$$

Daher liegen alle Punkte S auf einem Kreis k_3, der den gegebenen Kreis k_1 im Punkt A von innen berührt und dessen Mittelpunkt D von A den Abstand $\frac{a}{4}$ hat. Da nach der Aufgabenstellung der Berührungspunkt H auch in der durch den Punkt P bestimmten Halbebene (bezüglich der Geraden AM) liegen kann, sind auch alle Punkte des Kreises um D mit Ausnahme des Punktes A Schnittpunkte der Geraden KP und AH.
Der gesuchte geometrische Ort ist daher der Kreis k_3 um D als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{a}{4}$ mit Ausnahme des Punktes A.

▲ 301 (9.) Wir beweisen mit Hilfe der *vollständigen Induktion* (vgl. *alpha*, 1967, Heft 3, S. 69), daß die obige Behauptung sogar für *beliebige* ungerade natürliche Zahlen $2n + 1$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ als Exponenten richtig ist, woraus dann die Richtigkeit für

$2n + 1 = 1967$

als Spezialfall folgt. Wir behaupten also

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n+1} = a\sqrt{3} - b\sqrt{2},$$

wobei a und b ganze Zahlen mit $3a^2 - 2b^2 = 1$ sind.

1. Induktionsanfang:
Für $n = 0$ ist $2n + 1 = 1$. Ferner gilt

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^1 = 1 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{2}$$

und $3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 3 - 2 = 1$;
Die Behauptung ist also für $n = 0$ richtig.

2. Induktionsschritt;
Wir nehmen an, daß die Behauptung für $n = k$ richtig ist, d. h.

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+1} = a\sqrt{3} - b\sqrt{2} \text{ mit } 3a^2 - 2b^2 = 1.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+3} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \\ &= (a\sqrt{3} - b\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{6} + 2) \\ &= (a\sqrt{3} - b\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6}) \\ &= 5a\sqrt{3} - 2a\sqrt{18} - 5b\sqrt{2} + 2b\sqrt{12} \\ &= 5a\sqrt{3} - 6a\sqrt{2} - 5b\sqrt{2} + 4b\sqrt{3} \\ &= (5a + 4b)\sqrt{3} - (6a + 5b)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Setzen wir $5a + 4b = a'$, $6a + 5b = b'$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}3a'^2 - 2b'^2 &= 3(5a + 4b)^2 - 2(6a + 5b)^2 \\ &= 3(25a^2 + 40ab + 16b^2) - 2(36a^2 + 60ab + 25b^2) \\ &= 75a^2 + 120ab + 48b^2 - 72a^2 - 120ab - 50b^2 \\ &= 3a^2 - 2b^2 = 1,\end{aligned}$$

d. h. die Behauptung ist unter der obigen Annahme auch für $n = k + 1$ richtig, da dann der Exponent gleich $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ ist.
Wegen 1 und 2 ist daher die Behauptung für *alle* natürlichen Zahlen n richtig, also für alle ungeraden natürlichen Exponenten $2n + 1$, womit die Behauptung auch für den Spezialfall $n = 983$, d. h. $2n + 1 = 1967$ bewiesen ist.

▲ 302 (10.) Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die vier gegebenen Fußpunkte der von dem Schnittpunkt S der Diagonalen des konvexen Vierecks ABCD auf die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ bzw. $\overline{DA}$ gefällten Lote. Mit den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 sind auch die Winkel

$\sphericalangle P_4P_1P_2 = \phi_1$, $\sphericalangle P_1P_2P_3 = \phi_2$,
$\sphericalangle P_2P_3P_4 = \phi_3$, $\sphericalangle P_3P_4P_1 = \phi_4$

des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ bekannt (vgl. die Abbildung). Wir versuchen daher, die Winkel $\sphericalangle P_3SP_1$ und $\sphericalangle P_4SP_2$ aus diesen Winkeln zu ermitteln.
Wir setzen zunächst

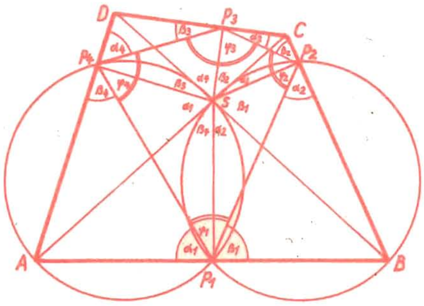
$\sphericalangle AP_1P_4 = \alpha_1$, $\sphericalangle P_2P_1B = \beta_1$,
$\sphericalangle BP_2P_1 = \alpha_2$, $\sphericalangle P_3P_2C = \beta_2$,
$\sphericalangle CP_3P_2 = \alpha_3$, $\sphericalangle P_4P_3D = \beta_3$,
$\sphericalangle DP_4P_3 = \alpha_4$, $\sphericalangle P_1P_4A = \beta_4$.

Dann gilt

$\alpha_1 + \beta_1 = 180° - \phi_1$, $\alpha_2 + \beta_2 = 180° - \phi_2$;
$\alpha_3 + \beta_3 = 180° - \phi_3$, $\alpha_4 + \beta_4 = 180° - \phi_4$.

Wegen $\sphericalangle SP_1B = \sphericalangle BP_2S = 90°$ ist das Viereck SP_1BP_2 ein Sehnenviereck. Dasselbe gilt für die Vierecke SP_2CP_3, SP_3DP_4, SP_4AP_1.

Daher folgt aus dem Peripheriewinkelsatz (vgl. die Abbildung)



$\sphericalangle ASP_4 = \alpha_1$, $\sphericalangle P_1SA = \beta_4$, $\sphericalangle BSP_1 = \alpha_2$, $\sphericalangle P_2SB = \beta_1$, $\sphericalangle CSP_2 = \alpha_3$, $\sphericalangle P_3SC = \beta_2$, $\sphericalangle DSP_3 = \alpha_4$, $\sphericalangle P_4SD = \beta_3$.

Aus dem Scheitelwinkelsatz folgt, da S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist,

$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_4 = \alpha_4 + \beta_2$. (2)

Aus (1) und (2) folgt daher

$$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3}{2}$$

$$= \frac{180° - \phi_1 + 180° - \phi_3}{2}$$

$$= 180° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2}, \qquad (3)$$

$$\alpha_2 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2$$

$$= 180° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} + 180° - \phi_2$$

$$= 360° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} - \phi_2 \text{ und analog} \qquad (4)$$

$$\alpha_3 + \beta_2 + \alpha_4 + \beta_3 = \beta_2 + \alpha_4 + \alpha_3 + \beta_3$$

$$= 360° - \frac{\phi_2 + \phi_4}{2} - \phi_3. \qquad (5)$$

Nun läßt sich das Viereck ABCD mit Hilfe der bekannten Winkel ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 leicht konstruieren. Wir nehmen dabei zunächst an, daß die in (4) und (5) angegebenen Winkelsummen (wie in der Abbildung) nicht größer als 180° sind. Wir konstruieren über $\overline{P_1P_3}$ als Sehne denjenigen Kreisbogen, der zu dem Peripheriewinkel $360° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} - \phi_2$ (4) gehört, und über $\overline{P_2P_4}$ als Sehne denjenigen Kreisbogen, der zu dem Peripheriewinkel $360° - \frac{\phi_2 + \phi_4}{2} - \phi_3$ (5) gehört. Diese beiden Kreisbögen schneiden sich im Innern des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ im Punkt S, dem Schnittpunkt der Diagonalen des zu konstruierenden Vierecks ABCD. Wir verbinden S mit P_1, P_2, P_3, P_4, errichten in diesen Punkten die Senkrechten auf $\overline{SP_1}$, $\overline{SP_2}$, $\overline{SP_3}$, $\overline{SP_4}$, die sich in den Eckpunkten A, B, C, D des zu konstruierenden Vierecks ABCD schneiden. Ist eine der in (4) und (5) angegebenen Winkelsummen größer als 180°, so führen wir die obige Konstruktion mit den entsprechenden Supplementwinkeln durch.

W 8 ■ 328 Aus $b + a + g = c + a + f = d + a + e$ folgt $b + g = c + f = d + e$ (1)

Also ist

$S = b + c + d + e + f + g = 3(b + g)$ (2)

durch 3 teilbar. Aus

$b + c + d = e + f + g$ (3)

folgt, daß S sich auch in der Form $S = 2(b + c + d)$ schreiben läßt und damit auch durch 2 teilbar ist.

Mithin ist S sogar durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar.

Leicht errechenbar ist auch

$S^* = a + b + c + d + e + f + g$ (4)

Es gilt:

$S^* = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$.

Wegen (2) und (4) gilt

$S = S^* - a = 28 - a$. Wegen $1 \leqq a \leqq 7$, (5)

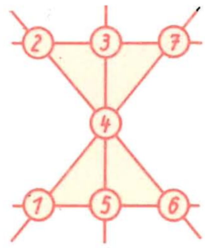
ergibt sich, da S durch 6 teilbar ist

$S = 24$. (6)

Aus (5) und (6) folgt $\underline{a = 4}$.

Aus (1), (2) und (6) ergibt sich jetzt, daß jede der Summen $b + g$, $c + f$ und $d + e$ gleich 8 sein muß. Mithin sind die Summanden 1 und 7 oder 2 und 6 oder 3 und 5.

Aus (3), (2) und (6) folgt analog, daß die Summen $b + c + d$ und $e + f + g$ jeweils gleich zwölf sind. Die Summanden sind daher 1, 6, 5 oder 7, 2, 3. Daher lassen sich die Zahlen 1, 2, ..., 7 *auf zwölffache Weise* in die 7 Kreise einsetzen. Alle zwölf Anordnungen werden leicht als Lösungen erkannt. Eine der zwölf möglichen Belegungen sei angegeben:



▲ 329 Nimmt man an, daß es a Äpfel sind, so erhält jeder Bruder zunächst $\frac{a - 5}{3}$ Äpfel, von denen er noch $\frac{a - 5}{27}$ seiner Schwester abgibt. Da nun jeder die gleiche Anzahl Äpfel hat, erhält man die Gleichung $\frac{a - 5}{3} - \frac{a - 5}{27} = \frac{a}{4}$ mit der Lösung $a = 32$. Die Probe bestätigt, daß es im ganzen 32 Äpfel waren.

▲ 330 *Voraussetzung:* $\gamma = 60°$

Behauptung: $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Beweis: 1. Fall:

Die Höhe h_a mit dem Fußpunkt D liege im Innern des Dreiecks ABC. Für die rechtwinkligen Dreiecke ABD und ADC gilt

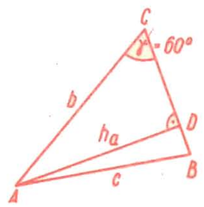
$c^2 = h_a^2 + \overline{BD}^2$,

$b^2 = h_a^2 + \overline{CD}^2$. Durch Subtraktion folgt $c^2 - b^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$. Mittels $\overline{BD} = a - \overline{CD}$ ergibt sich

$c^2 - b^2 = (a - \overline{CD})^2 - \overline{CD}^2$. Daraus folgt $c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,\overline{CD}$.

Da das Dreieck ADC mit den Winkeln 30°, 90° und 60° durch Spiegelung an AD zu einem gleichschenkligen Dreieck ergänzt wird, gilt $\overline{CD} = \frac{b}{2}$. Daher gilt

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$ w.z.b.w.



2. Fall: Die Höhe h_b mit dem Fußpunkt E liege im Innern des Dreiecks ABC. Durch Vertauschen der Bezeichnungen A mit B, a mit b, h_a mit h_b und D mit E geht der obige Beweis in den jetzigen über.

Da in dem Dreieck ABC $\gamma = 60°$ und mindestens einer der Winkel α oder β ein spitzer Winkel ist, liegt stets mindestens eine der Höhen h_a bzw. h_b im Innern des Dreiecks ABC. Ein weiterer Fall braucht also nicht betrachtet zu werden.

Bemerkung: Wir haben den Satz hier *elementargeometrisch* bewiesen. Noch einfacher ist der Beweis, wenn man den *Kosinussatz* der ebenen Trigonometrie anwendet, der aber erst in der 10. Klasse behandelt wird. Nach diesem Satz gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Daraus folgt hier wegen $\cos\gamma = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab, \text{ w.z.b.w.}$$

▲ 331a Es sei x die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{AB}$ (in cm). Dann ist wegen (6) x eine der Zahlen 7, 14, 21, ..., 497.

Wegen (4) ist x eine der Zahlen

21, $21 + 7 \cdot 5 = 21 + 35 = 56$,

$21 + 2 \cdot 35 = 91$, und so fort.

Wegen (3) ist x eine der Zahlen

21, $21 + 7 \cdot 5 \cdot 4 = 21 + 140 = 161$,

$21 + 2 \cdot 140 = 301$, $21 + 3 \cdot 140 = 441$.

Da von diesen Zahlen nur die Zahl 301 bei der Division durch 3 den Rest 1 läßt, folgt wegen (2)

$\underline{x = 301.}$

Man überzeugt sich leicht davon, daß dann auch die Bedingungen (1) und (5) erfüllt sind. Die Strecke $\overline{AB}$ ist also 301 cm lang.

b Da bereits durch die Bedingungen (2), (3), (4) und (6) die Zahl x eindeutig bestimmt ist, sind die Bedingungen (1) und (5) überflüssig. Man kann aber auch die Bedingungen (1) und (2) streichen, da die Zahl x bereits durch die Bedingungen (3), (4), (5) und (6) eindeutig bestimmt ist.

W 9 ■ 332 Es seien x die Anzahl der Kabinen für drei Personen und y die Anzahl der Kabinen für vier Personen;

dann ist 8y die Anzahl der Kabinen für zwei Personen, und man erhält die Gleichungen

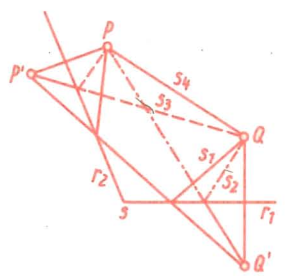
$$8y + x + y = 159,$$

also

$$9y + x = 159, \qquad (1)$$

$$16y + 3x + 4y = 379,$$
also $$20y + 3x = 379, \qquad (2)$$
Aus (1) folgt $27y + 3x = 477$
und daher aus (3) und (2) durch Substraktion
$$7y = 98, \text{d. h. } y = 14.$$
Ferner erhält man aus (1)
$x = 159 - 9y = 159 - 126 = 33$ und
$8y = 112$.
Das Urlauberschiff hat also 112 Kabinen für zwei Personen, 33 Kabinen für 3 Personen und 14 Kabinen für vier Personen.

W 9 ▪ 333 Es gibt genau vier solche Strahlen, nämlich die in der Abbildung gezeichneten Strahlen s_1, s_2, s_3, s_4. Der Strahl s_1 erreicht nach Reflexion an r_1 *und* r_2 den Punkt P, der Strahl s_2 erreicht nach Reflexion an r_1, der Strahl s_3 nach Reflexion an r_2 den Punkt P. Der Strahl s_4 erreicht den Punkt P direkt (ohne Reflexion).

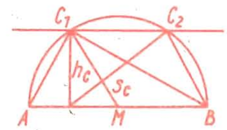


Aus der Abbildung ist das *Konstruktionsverfahren* ersichtlich. Man spiegelt Q an r_1 und erhält Q'; ferner spiegelt man P an r_2 und erhält P'. Man verbindet Q' mit P' bzw. Q' mit P bzw. P' mit Q und erhält jeweils die gesuchten Punkte auf den Spiegelungsgeraden als Schnittpunkte mit r_1 bzw. r_2.

▴ 334 Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe der *vollständigen Induktion* und verweisen auf den Artikel von *W. Stoye* (*alpha*, 1. Jahrgang 1967, Heft 2, S. 37 und Heft 3, S. 69), in dem dieses Verfahren begründet wird.

1. Induktionsanfang:
Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr; denn dann ist nach Voraussetzung der einzige Junge mit mindestens einem Mädchen der Klasse befreundet, und er kann dieses Mädchen heiraten.
2. Induktionsschritt:
Wir nehmen an, die Behauptung sei für $n = r$ wahr, wobei r eine von Null verschiedene natürliche Zahl sei. Wir wollen zeigen, daß die Behauptung dann auch für $n = r + 1$ wahr ist. Wir bezeichnen die $r + 1$ Jungen mit $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$. Nach Voraussetzung ist jeder dieser Jungen mit mindestens einem Mädchen der Klasse befreundet, und es gibt in der Klasse mindestens $r + 1$ Mädchen $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}$, von denen jedes mit mindestens einem der Jungen befreundet ist. Es können nur die folgenden beiden Fälle auftreten:
a) Es gibt unter den obigen Mädchen ein Mädchen, das wir (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) mit b_{r+1} bezeichnen können und das *nur* mit *einem* Jungen a_{r+1} befreundet ist.
b) Jedes der obigen Mädchen ist mit mindestens je zwei Jungen befreundet.
Fall a) In diesem Fall kann der Junge a_{r+1} das Mädchen b_{r+1} heiraten. Es verbleiben die r Jungen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, von denen nach Voraussetzung je k mit mindestens k der Mädchen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ befreundet sind. Daher kann nach unserer Annahme jeder dieser Jungen eins dieser r Mädchen heiraten. Da aber auch der Junge a_{r+1} das Mädchen b_{r+1} heiraten kann, ist die Behauptung unter der obigen Annahme auch für $n = r + 1$ wahr.
Fall b) In diesem Fall ist das Mädchen b_{r+1} mit mindestens zwei Jungen befreundet. Das Mädchen kann einen dieser Jungen, den wir (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) mit a_{r+1} bezeichnen, heiraten. Es verbleiben wieder r Jungen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, für die dieselben Voraussetzungen wie im Fall a) zutreffen. Daher kann nach unserer Annahme jeder dieser r Jungen eines der verbleibenden r Mädchen heiraten. Da aber auch der Junge a_{r+1} das Mädchen b_{r+1} heiraten kann, ist auch in diesem Falle die Behauptung für $n = r + 1$ wahr.
Damit haben wir folgendes gezeigt:
1. Die Behauptung ist für $n = 1$ wahr;
2. wenn die Behauptung für $n = r$ wahr ist, so ist sie auch für $n = r + 1$ wahr.
Daher ist die Behauptung für *alle* von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n wahr, womit der Satz bewiesen ist.

▪ 335 *1. Analysis:* Die Punkte A und B sind wegen des *Satzes des Thales* durch $s_c = \frac{1}{2}c$ bestimmt. Der Punkt C liegt aus demselben Grunde auf dem Kreis mit dem Radius s_c um den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und auf der Parallelen zu AB im Abstand h_c.
2. Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne eine Gerade und um einen beliebigen Punkt M dieser Geraden einen Kreis mit dem Radius s_c. Seine Schnittpunkte mit der Geraden sind die Punkte A und B. Jetzt konstruiere ich zu AB eine Parallele im Abstand h_c. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis sind die Punkte C_1 und C_2. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind dann die gesuchten Dreiecke.



Beweis: Wegen des *Satzes des Thales* ist $\sphericalangle ACB = 90°$ und $s_c = r = \frac{1}{2}c$. Wegen der Parallelenkonstruktion hat h_c die geforderte Länge.
Diskussion: Ist $h_c < s_c$, so gibt es genau zwei Dreiecke; ist $h_c = s_c$, so gibt es genau ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck; ist $h_c > s_c$, so gibt es kein Dreieck, das den gegebenen Bedingungen entspricht.

Aufgaben zu: Fernsehfußball — reguläre Polyeder

1. Konstruiere ein Oktaeder durch geeignetes Abstumpfen der Ecken eines Tetraeders!
2. Konstruiere das „Fußballpolyeder“ durch geeignetes Abstumpfen der Ecken des Pentagondodekaeders!
3. Beschreibe einem Pentagondodekaeder einen Würfel derart ein, daß sämtliche Würfelkanten in den Seitenflächen des Pentagondodekaeders liegen!
4. Bestimme die Anzahl und Lage der Symmetrieebenen eines Würfels!
5. Bestimme die Anzahl und Lage der Symmetrieebenen eines Oktaeders!
6. Beschreibe einem Würfel ein Tetraeder derart ein, daß sämtliche Tetraederkanten in den Seitenflächen des Würfels liegen!
7. Auf wieviel verschiedene Arten kann das Netz eines Würfels dargestellt werden? (Netzentwürfe, die sich durch Bewegung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, zählen als eine Lösung)
8. Auf wieviel verschiedene Arten kann das Netz eines Oktaeders dargestellt werden? (Netzentwürfe, die sich durch Bewegung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, zählen als eine Lösung)
9. Bezüglich des aus dem Fußball abgeleiteten Polyeders kann man eine Kugel konstruieren, die sämtliche sechsseitigen Begrenzungsflächen berührt und eine zweite, die sämtliche fünfseitigen Begrenzungsflächen berührt. Welche der Kugeln tritt nicht aus der Oberfläche des Polyeders heraus?

Lösungen zu alpha — heiter

Magisches Quadrat (4/68)

21
$(1-3+5)\cdot 7 \quad -1+3\cdot 5+7$
$(1+2)(3+4) \quad 1+(2+3)\cdot 4$
$-2+3+4\cdot 5 \quad 2^{3!}:4+5$
$3(4+5)-6 \quad 3(-4+5+6) \quad \sqrt{3!^{\sqrt{4}}}\cdot 5+6$
$-3^{\sqrt{4}}+5\cdot 6$

$4 \cdot 5-6+7$ $\quad (\sqrt{4}-5+6)\cdot 7-\sqrt{4}+5\cdot 6-7$

$4!-4+\frac{4}{4}$

$(4+3)(2+1)$ $\quad 4(3+2)+1$ $\quad 4\cdot 3!-2-1$

$5\cdot 4+3-2$

$(6+5-4)\cdot 3$ $\quad -6+(5+4)3$

$(6+5-4)\cdot 3$ $\quad -6+(5+4)3$

$7-6+5\cdot 4$ $\quad 7(6-5+\sqrt{4})$

$7+5\cdot 3-1$ $\quad 7(5-3+1)$ $\quad 7!:5!:\sqrt{3+1}$

36

$1^3+5\cdot 7$ $\quad (1+3)!+5+7$

$(1+2+3)^{\sqrt{4}}$

$2\cdot 3:4\cdot 5!$

$(-3+4+5)\cdot 6$ $\quad (3!)^{\sqrt{4}}(-5+6)$ $\quad 3\sqrt{4}\cdot 5+6$

$\sqrt{4}(5+6+7)$

$4+4(4+4)$ $\quad \sqrt{4}\cdot\sqrt{4^4}+4$ $\quad 4!+\sqrt{4^4}-4$

$4\cdot 3^2\cdot 1$

$5!:4+3\cdot 2$

$6(5+4-3)$ $\quad 6+5\sqrt{4}\cdot 3$

$(7+6+5)\cdot\sqrt{4}$

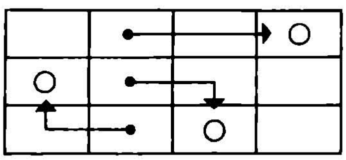
$7+5+(3+1)!$

Auf weitere Lösungen zu dieser Aufgabe muß aus Platzgründen verzichtet werden.

Rätselfreunde hergeschaut! (5/68)

A – BI – COS – DATA – EBENE – FEHLER – GALILEI – HYPERBEL – INTEGRAPH – KENNZIFFER – LOGARITHMUS – MANTELFLÄCHE – NEBENSCHEITEL – ORTHOGONALITÄT – POSITIONSSYSTEM – QUADRATKILOMETER – RECHENGENAUIGKEIT – SCHMIEGUNGSPARABEL – TANGENTENABSCHNITTE – UMKLAPPUNGSVERFAHREN

Krümel revanchiert sich ... (6/68)



Wer schoß die 12? (6/68)

Krümel: 7, 11, *12*, 10, 8; Flax: 5, 7, 9, 9, 10

Der junge Hirt (6/68)

73 Schafe (1. Horde); 75 Schafe (2. Horde), ..., 95 Schafe (12. Horde)

Without a word (6/68)

waagerecht: $8:2+3=7$; $7-6\cdot 2=-5$; $1-2+4=3$

senkrecht: $8-7\cdot 1=7$; $2+6:2=5$; $3:2\cdot 4=6$

Aus Mame Mamu Ka (6/68)

waagerecht: $4\cdot 9:3+20=32$; $8:2+32-6=30$; $6\cdot 2+12:2=18$; $18-13+47+28=80$;

senkrecht: $4+8+6=18$; $9+2+2=13$; $3+32+12=47$; $20+6+2=28$; $32+30+18=80$

Aus sowj. Unterhaltungsbuch (6/68)

$22+2=24$; $3^3-3=24$

Lösungen zu Aufgaben von Ing. H. Decker (6/68)

1. A, B, C kommen als Einer vor, können also nur die Werte 1, 4, 5, 6 oder 9 haben. AC kann dann nur 16, 49 oder 64 sein, B nur 1, 4 oder 9. Für ABC, ACB, BCA lassen sich daraus nur die Quadratzahlen 196, 169 und 961 bilden. ABCB lautet also *1969*.

2. Da B nur 1, 4 oder 9 sein kann, erhält man als Quadratzahl für A + 2B + C bzw. A + B + C nur 25 bzw. 16 bei B = 9. ABCB lautet also *1969*.

Bemerkung:
Die Quadratwurzeln $\sqrt{1+9+6+9}$, $\sqrt{1+9+6}$, $\sqrt{9}$ bilden das pythagoreische Tripel: 5, 4, 3.

3. Aus der Multiplikation ergibt sich, daß A nur 1 sein kann.
Eingesetzt:

1 BCB = 11 · 1 CB + 110
= 1 CB0 + 1 CB + 110
1 BCB – 1 CB = 1 CB0 + 110
1 B00 – 100 = 1 CB0 + 110
1 B00 = 1 CB0 + 210. Daraus
B = 9 und C = 6.

Die Zahl ABCB lautet also *1969*.

Ein „Kunstwerk" (1/69)

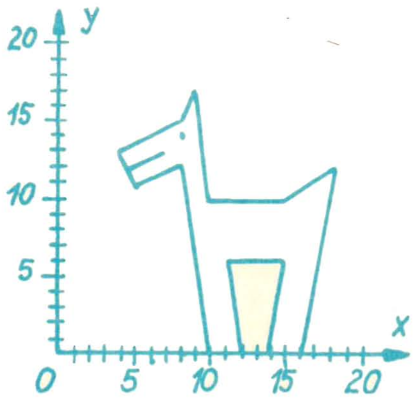
Da alle Funktionen lineare Funktionen sind, wird jede dieser Funktionen durch eine Strecke dargestellt, die durch ihren Anfangspunkt und ihren Endpunkt eindeutig bestimmt ist. Man erhält z. B. für die Funktion f_1 mit dem Definitionsbereich $4 \leq x \leq 8$ und der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{x}{2} + 11$ den Anfangspunkt der entsprechenden Strecke mit den Koordinaten

$x = 4$; $\quad y = 2 + 11 = 13$

und den Endpunkt mit den Koordinaten

$x = 8$; $\quad y = 4 + 11 = 15$.

Die graphische Darstellung der gegebenen vierzehn Funktionen ergibt das folgende Bild:



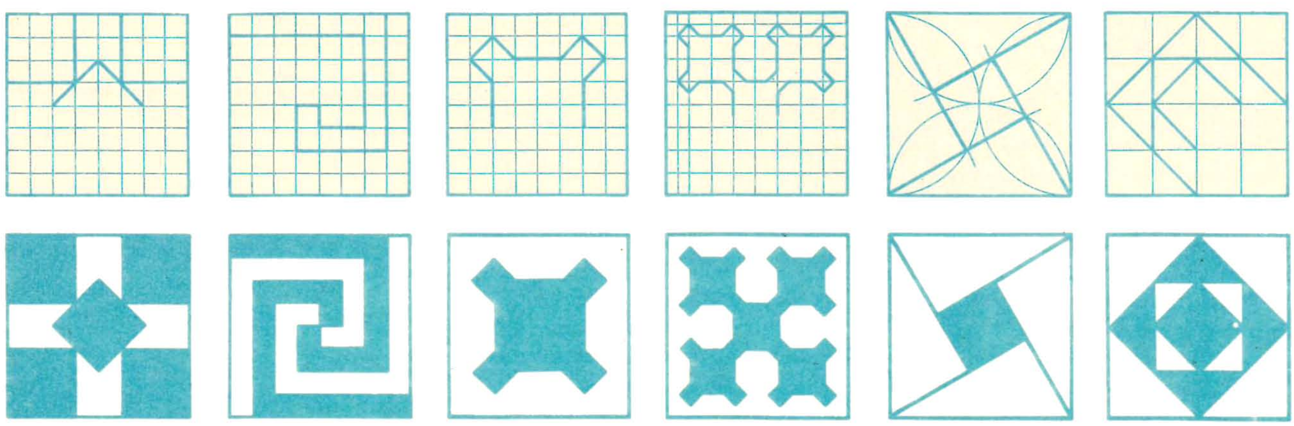
Silbenrätsel (1/69)

Definition, Abszisse, Thales, Element, Nomographie, Variable, Ebene, Rhombus, Addition, Relation, Binom, Euler, Ikosaeder, Trapez, Ungleichung, Nenner, Gerade
DATENVERARBEITUNG

Bitte richtig zuordnen! (1/69)

Drei richtige Zuordnungen sind unmöglich, denn wer 3 richtige Zuordnungen hat, hat automatisch auch die 4. Zuordnung richtig.

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Literatur

Das Geld

Heinz Joswig

*Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin, 1968,
250 Seiten, 32 Schwarz- und 8 Farbtafeln,
50 Zeichnungen im Text,
Anhang: Die Währungen der Welt.*

Dieses Buch behandelt die Geschichte des Geldes von seiner Entstehung bis zur Gegenwart. Es beschränkt sich dabei nicht auf die ökonomische Funktion des Geldes, sondern der Autor zeigt auch Beziehungen des Geldes zu anderen gesellschaftlichen Erscheinungen wie persönliche Macht, Bildung und Kultur. Wie oft war das Geld schon tiefere Ursache für soziale Katastrophen und politische Machtkämpfe. Krisen, Kriege, Inflationen — all diese Erscheinungen ergründet der Autor im Zusammenhang mit der Macht Geld. Und er weist eindrucksvoll nach, daß sich der wirkliche Wert des Geldes nur im friedlichen Handel und Aufbau offenbaren kann.

**Grundfragen der Spieltheorie
und ihre praktische Bedeutung**

N. N. Vorobjoff
*VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
84 Seiten, 6,80 M*

Die Spieltheorie ist einer der wesentlichsten Aspekte der Operationsforschung. Das Büchlein gibt eine populäre Einführung in Begriffe, die in der ökonomisch-theoretischen Literatur heute bereits eine beträchtliche Rolle spielen. Ausführlich werden u. a. die Rolle des Zufalls im Spiel und Fragen der Spielstrategie behandelt, wobei der Autor nur Kenntnisse der Elementarmathematik voraussetzt. Der Erläuterung dienen Beispiele aus dem Militärwesen und dem täglichen Leben.

Zur Geschichte des Flugzeugs

Günter Meyer

*Verlag Volk und Wissen Berlin,
96 Seiten, illustriert, 1,80 M*

In der Reihe „Bücher für den Schüler" ist dieses Bändchen für die Klassen 8 bis 12 gedacht. Es versucht, einen Bogen von den Ideen Leonardo da Vincis bis zum Überschall-Luftverkehr zu schlagen.

Digitale Rechenautomaten

R. Deresin, R. Eyraud

Allgemeine Grundlagen, Grobstruktur, Mathematische und organisatorische Elemente
Fachkunde für Datenverarbeiter

Verlag Die Wirtschaft, 96 Seiten, 3,— M

Um die Datenverarbeitungsanlagen zweckmäßig einzusetzen und richtig zu bedienen, werden in zunehmendem Maße *Facharbeiter für Datenverarbeitung* ausgebildet. Damit für die Ausbildung in diesem Lehrberuf schnell geeignetes Lehrmaterial zur Verfügung steht, hat sich der Verlag „Die Wirtschaft" entschlossen, eine „Fachkunde für Datenverarbeiter" herauszugeben. In einem 2. Teil wird auf die Feinstruktur und die technische Realisierung der Grund- und Hauptfunktionen eingegangen. Der interessierte Leser von *alpha* erhält mit diesen beiden Heften eine Information über Digitale Rechenautomaten und einen Einblick in Teilgebiete der Ausbildung der Facharbeiter für Datenverarbeitung.

Rund um die Mathematik

Autorenkollektiv

*Der Kinderbuchverlag Berlin
Mit mehrfarbigen Illustrationen von Rudolf Schultz-Debowski, etwa 160 Seiten, Pappband mit Folie, etwa 17,50 M*

Vom Durchschnitt, der manchmal leer ist — Ein Reinfall beim Toto — Archimedes und die Sandkörner — Hamiltons Reise auf dem Dodekaeder — Diebstähle aus dem verschlossenen Tresor? — Warum springt die Modelleisenbahn aus den Schienen? — Die widerspenstigen Handschuhe — Thales und die Pyramiden — Der Käfer und die Schallplatte: ein Kriminalroman? — Nein, ganz einfach Mathematik, spannender als ein Kriminalroman, denn man muß mitdenken, mitkombinieren und ist, am Ende angekommen, selbst der Held des Buches, der die verzwickten mathematischen Probleme des Alltags gelöst und dabei eine Menge Interessantes gelernt hat.

Bahnbrecher des Atomzeitalters

Friedrich Herneck

*Buchverlag „Der Morgen", Berlin 1968,
501 Seiten, 11,50 M*

In dem vorliegenden Werk wird mit sachkundiger Hand ein Einblick in das geistige Laboratorium großer Naturforscher der letzten hundert Jahre gegeben (Maxwell, Heinrich Hertz, Röntgen, Marie und Pierre Curie, Planck, Einstein, Laue, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Born, Otto Hahn und Lise Meitner). Über die wissenschaftsgeschichtliche Aufgabe hinaus hat das Buch, das die aufrechte antimilitaristische und später antifaschistische Haltung der Mehrzahl der Pioniere des Atomzeitalters ins Licht gestellt, auch ein gesellschaftliches Anliegen: es will unter Hinweis auf das Vorbild der humanistisch gesinnten großen Forscher dazu aufrufen, die Bemühungen um den Fortschritt der naturwissenschaftlich-technischen Erkenntnis fest zu verbinden mit dem Kampf um den sozialen Aufstieg der Menschheit und um die friedliche Nutzung der Errungenschaften der Naturwissenschaft.

Meyers Jugendlexikon

Autorenkollektiv

*VEB Bibliographisches Institut Leipzig,
896 Seiten, etwa 7500 Stichwörter
1220 Abb., Leinen 28,— M*

Ein Wissensspeicher von Pädagogen, Fachwissenschaftlern und Lexikographen unter Berücksichtigung der neuesten Schullehrpläne entwickelt. Ein Nachschlagewerk, das zum Blättern einlädt und somit den Bildungshunger der Jugendlichen weckt und gleichzeitig befriedigt.
Wortgut, Stil, Form und Bebilderung sind den Bedürfnissen der jugendlichen Benutzer angepaßt.
Ein größerer Raum wurde den Fragen der Jugendbewegung, des Militärwesens, des Sports, der Mode, des Benehmens und der Beziehung zwischen Jungen und Mädchen gewidmet. Zahlreiche Berufsbilder helfen dem Jugendlichen, leichter den geeigneten Beruf zu finden.

Forscher — Funker — Ingenieure

Walter Konrad

*VEB Fachbuchverlag,
179 Seiten, 100 Abbildungen, 10,80 M*

Dieses Buch, das wir unseren technisch-physikalisch interessierten Lesern aller Berufe empfehlen, berichtet in erzählender Form von den entscheidenden Etappen in acht Jahrzehnten drahtloser Nachrichtentechnik. Der Autor zeigt, daß die großen wissenschaftlich-technischen Entdeckungen von Faraday, Maxwell, Hertz, Nipkow und Hulsmeyer, um nur einige zu nennen, entscheidend von ihrer jeweiligen gesellschaftlichen Umwelt beeinflußt werden und nicht Zufallsergebnisse oder geniale Eingebungen, sondern Resultate harter und zielstrebiger Arbeit sind.

Jagdflugzeuge und Jagdbomber

Karl-Heinz Eyermann

*Deutscher Militärverlag,
160 Seiten, Abbildungen, 6,50 M*

Einen umfassenden Einblick über alle im Einsatz stehenden Jagd- und Jagdbomberflugzeuge mit Strahltriebwerk gibt dieses Typenbuch.

Mathematische Schüler-
zeitschrift

alpha

2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16 Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Staatl. Math. Phys. Salon, Dresden-Zwinger (S. 25/27); Archiv: Urania-Verlag/Verlag Die Wirtschaft (S. 34); B.-M. Prawitz, Leipzig (S. 35 oben); S. Müller, Leipzig (S. 35 unten); N. Naumann, Leipzig (S. 36);
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 31. Januar 1969

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon

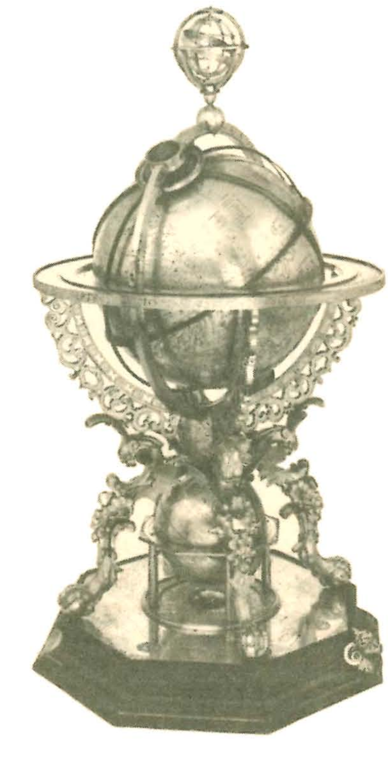
Dresden — Zwinger

Der *Staatliche Mathematisch-Physikalische Salon* ist mit seinen zahlreichen, z. T. recht verschiedenartigen Sammlungen aus den umfangreichen Beständen der 1560 gegründeten Dresdner Kunstkammer hervorgegangen. Durch das stetige Anwachsen sämtlicher Sammlungen – die Kunstkammer beanspruchte zur Unterbringung im Dresdner Schloß sieben Räume – wurden die Bestände nach und nach aufgeteilt und als selbständige Abteilungen weitergeführt. Dabei entstand auch 1728 das „Königliche Cabinett der mathematischen und physikalischen Instrumente“, das mit der Fertigstellung des Zwingers als „Mathematisch-Physikalischer Salon“ in den oberen nordwestlichen Pavillon des Zwingers einzog.

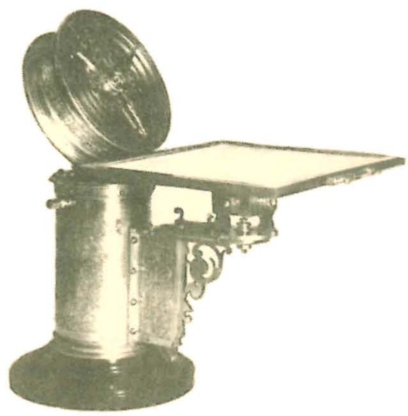
Später kamen laufend weitere wertvolle Ausstellungsstücke dazu, wie z. B. aus dem Nachlaß der Brühl'schen Bibliothek, aus der Werkstatt des Reichsgrafen Löser im Jahre 1768 und auch aus der von Andreas Gärtner gegründeten Dresdner Modellkammer.

Der Staatl. Math.-Phys. Salon besitzt durch eine jahrhundertelange Sammeltätigkeit und der dadurch entstandenen Reichhaltigkeit an wertvollen Instrumenten, Apparaten und wissenschaftlichem Arbeitsgerät aus den Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie, Chronometrie, Geodäsie, Globographie, Rechentechnik usw. einen hervorragenden Sammlungsbestand, so daß er bei dieser Geschlossenheit und Vollkommenheit auch international zu den bedeutendsten Museen zählt. Mit seinen Exponaten aus dem 13. bis 19. Jahrhundert beschäftigt er sich mit der historischen und technischen Entwicklung dieser naturwissenschaftlichen Gebiete und versucht, diese in seinen Ausstellungen auch darzustellen und gegenständlich zu belegen.

Ein Rundgang durch die einzelnen Ausstellungsräume gibt schnell einen Überblick über die wichtigsten Sammlungen. Sie beginnen mit den Erd- und Himmelsgloben aus dem 13. bis 19. Jahrhundert und damit mit dem Glanzstück persisch-arabischer Instrumentenkunst, mit dem bekannten Arabischen Himmelsglobus aus dem Jahre 1279. Dazu kommen berühmte Erdgloben von Schöner, Mercator und Prätorius und die beiden prachtvollen großen vergoldeten Globusuhren von Reinhold-Roll (Abb.) und Jost Bürgi; technische und kunsthandwerkliche Meisterleistungen des 16. Jahrhunderts. In den Wandnischen stehen neben anderen Erd- und Himmelsgloben auch etliche Arbeiten aus der Amsterdamer Werkstatt von Guiljelmus Blaeu (1571 bis 1638) und ein von dem Italiener Vincenzo Coronelli (1650 bis 1718) gebautes interessantes Globuspaar mit der seltenen horizontalen Polachsenlagerung. Die Reichhaltigkeit dieser in zehn Vitrinen und Schränken untergebrachten Sammlung mit über 60 Globen, unterschiedlich in Alter, Größe und Ausführung, gibt einen umfassenden Einblick in das geographische und astronomische Wissen dieser Jahrhunderte.



Die geodätischen Instrumente für Längen- und Winkelmessungen beginnen mit den Schrittzählern um 1580 und zeigen die Entwicklung vom einfachen Faden- und Lochdiopter bis zum Theodoliten des ausgehenden 19. Jahrhunderts. Ein Prachtstück Dresdner Arbeit von Christoph Trechsler ist der große für den Wagen bestimmte Wegmesser mit Reißtisch um 1584, der für die im 16. Jahrhundert durchgeführten sächsischen Landvermessungen ein unentbehrliches Hilfsmittel war (Abb.) Diese Art von Wegmesser hat kurz nach 1700 bei der damaligen erneuten säch-



sischen Landesvermessung mit der Verwendung des „Geometrischen Wagens“ durch Adam Friedrich Zürner eine bedeutende Rolle gespielt. Hinzu kommen kleine und mittlere am Mann oder am Pferd zu tragende deutsche und englische Schrittzähler des 16. bis 18. Jahrhunderts.

Die aus der Sammlung der Geschützaufsätze ausgestellten artilleristischen Hilfsinstrumente dienten zur Einstellung der Geschützrohre und gleichzeitig als Kalibermaße zum Messen der Stein-, Eisen- und Bleikugeln. Diese frühen Geschützaufsätze des 16. Jahrhunderts waren z. T. aus Eisen gefertigt; sie wurden später zu hervorragend gearbeiteten ziselierten und vergoldeten Meisterwerken, die über ihre nüchterne Zweckbestimmung hinaus kleine technische Kunstwerke darstellen. In dieser wohl einmaligen Sammlung befinden sich seltene Arbeiten aus der Werkstatt von Christoph Schißler, Augsburg, um 1576, sowie Dresdner Stücke von Christoph Trechsler, um 1614, von Viktor Stark, um 1635 und von Zacharias Boyling, um 1675.

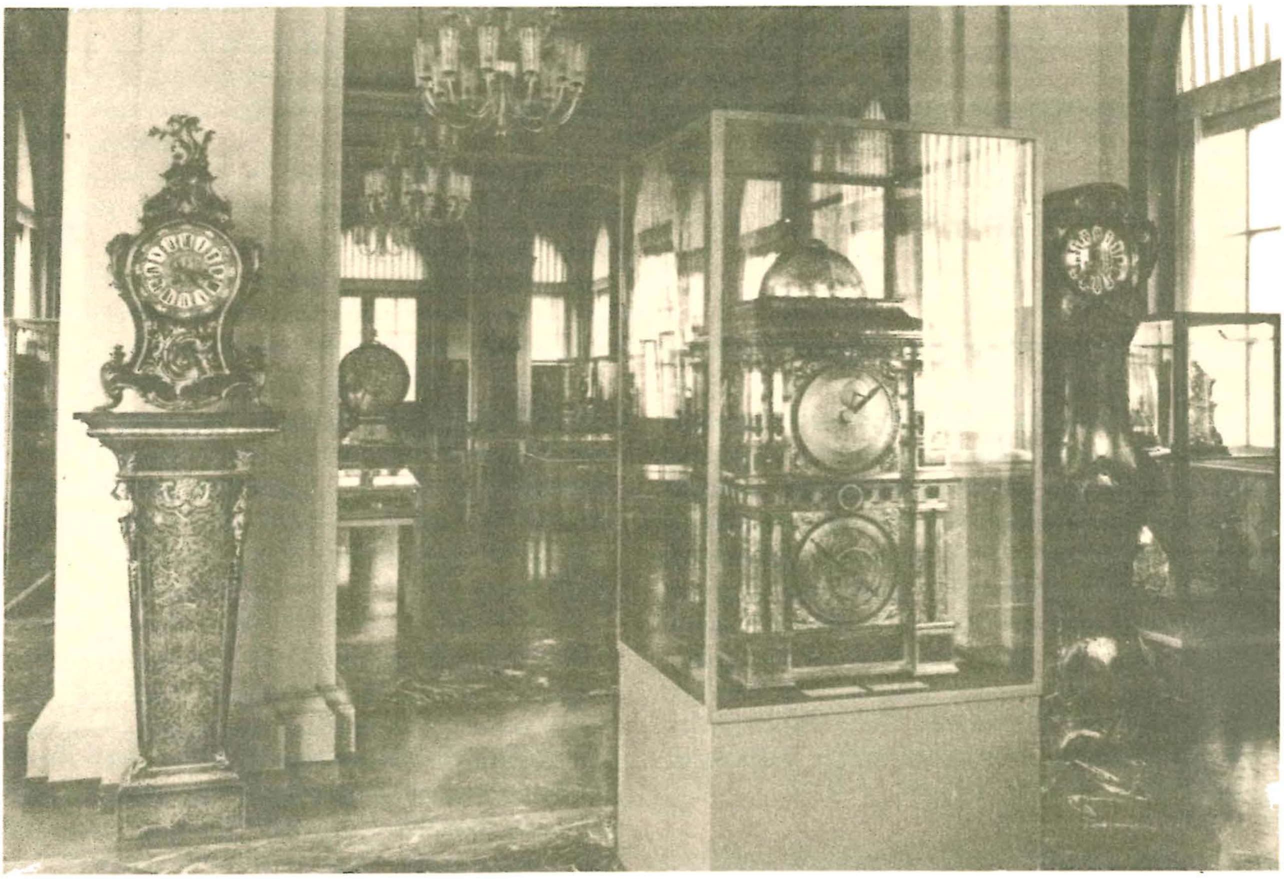
In der Sammlung der Maße und Gewichte spiegelt sich in den verschiedenen Unterteilungen auf den zahlreichen Ausstellungsstücken die verhängnisvolle politische Zerrissenheit Deutschlands in den vergangenen Jahrhunderten wider. Silberne Maßstäbe für „Stangen, Lachter, Klafter, Schritt, Ellen und

Schuch“, Anschlagmaßstäbe mit 6 verschiedenen Zolleinteilungen und seltene, mit 1576 und 1584 signierte Stücke mit „Meillen- und Rutteneinteilung“ des Dresdner Christoph Trechsler führen in der Entwicklung der Längenmaße bis zur sächsischen Normalelle mit 24 Dresdner Zoll und bis zum Eich-Normalmeter für die sächsischen Maße. Zahlreiche Gewichtssätze, u. a. die Kölnisch-Erfurtische Mark (um 1579) und das herrliche Einsatzgewicht für 50 Mark von Conrad Moß aus der bekannten Nürnberger Rotgießerfamilie (um 1590) führen über andere verschiedenartige Schüsselsätze bis zu den Glasgewichten der Königl. Sächs. Normalgewichte aus der Friedrichsthaler Glashütte (um 1810).
Über 50 verschiedene Gold- und Münzwaagen sind ausgestellt, die neben frühen Gewichtssätzen des 17. und 18. Jahrhunderts auch Münzgewichte für Taler, Dukaten und zahlreiche andere in- und ausländische Münzen zeigen.
Der größte Teil der Bogengalerie wird von der Sammlung der astronomischen Hilfsinstrumente beansprucht. Diese beginnen mit ein- und mehrzügigen Handfernrohren aus Pappe, Holz oder Metall und zeigen die Entwicklung dieser einfachen astronomischen Beobachtungsinstrumente. An frühe italienische Erzeugnisse des 17. Jahrhunderts schließen sich englische Stücke von J. Dolland (1706 bis 1761) und von J. Ramsden (1735 bis 1800) an, die bis zu den Arbeiten Georg Reichenbachs (1772 bis 1826) und Joseph Fraunhofers (1787 bis 1826) weitergeführt werden. Dazu kommen deutsche und englische Tischfernrohre (Abb.), ein großes Spiegelteleskop von Georg Hearne (um 1790),

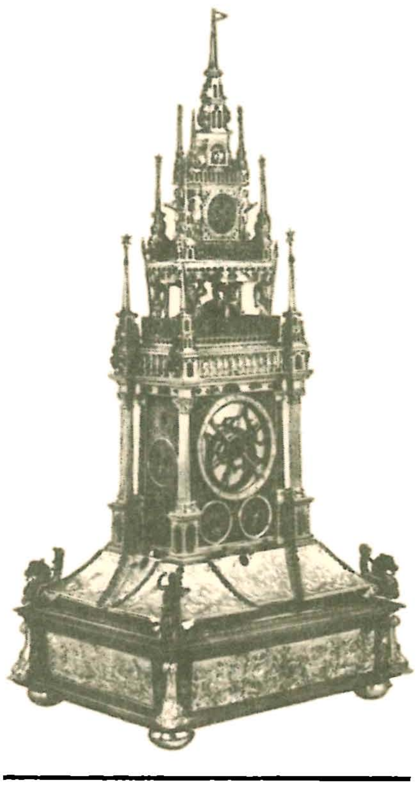
Passageinstrumente von J. Bird und J. Cary, sowie Voll- und Halbkreisgeräte von Chapotot, Lenoir und Troughton aus der Zeit um 1660 bis 1790. Ein einmaliges Prachtstück sächsischen Instrumentenbaues ist das in der Mitte des Ausstellungsraumes freistehende Spiegelfernrohr der beiden Mechaniker Merklein und Zimmer aus der Löser-Werkstatt in Schloß Reinhartz in der Dübener Heide aus dem Jahre 1742.
Die Sammlung der Rechenhilfsmittel gibt einen allgemeinen Überblick über die Entwicklung der Rechentechnik vom Handabakus über die Rechenpfennige und die Anfänge der mechanischen Rechenmaschine bis zu den ersten Rechenschiebern. Sie beschäftigt sich ausführlich mit dem Annaberger Adam Ries (1492 bis 1559), dem bedeutendsten deutschen Rechenmeister des 16. Jh., mit dem Rechnen auf den Linien und leitet von den Kerbhölzern und Zählstöcken zu den Schränken mit den Rechenmaschinen über. Unter diesen befinden sich u. a. die erste im Original erhaltene Sprossenrad-Räderrechenmaschine des französischen Mathematikers Blaise Pascal (um 1642), verschiedenartige Rechentrommeln und -scheiben, hölzerne japanische und russische Rechenbretter, sowie Arithmometer von Burkhardt, der um 1878 in Glashütte Rechenmaschinen baute und als Begründer dieser Fabrikation in Deutschland gilt.
Im oberen Ausstellungsraum ist jetzt die reichhaltige Uhrensammlung untergebracht, die durch ihre Kostbarkeiten zu den größten und bedeutendsten Sammlungen auf dem

Gebiete der Chronometrie gehört (Abb. S. 27).
Zahlreiche Sonnen- und Nachtuhren – unterschiedlich in Größe, Konstruktion und Material – zeigen die Entwicklung dieser Zeitmesser von den frühen Stücken des 16. Jahrhunderts bis zu den späten Rädersonnenuhren um 1760. Andere tragbare, in der Form recht unterschiedliche Sonnenuhren aus Holz, Messing oder Elfenbein von den Augsburger Meistern Hölderich, Graßl und Schrettegger, aber auch von Bernier und Langlois, geben einen Einblick in die Vielzahl deutscher und französischer Reise- und Taschensonnenuhren (Abb.). Dazu kommen die großen und schweren Sonnenuhren auf Marmor- und Steinplatten, die so beliebten Öluhren und die bekannte Mittagskanone. Seltene Stundengläser und Kanzelsanduhren aus der Zeit um 1675 bis 1750 geben einen Einblick in die vielseitige Verwendung dieser interessanten Zeitmesser.
Die umfangreiche Taschenuhrsammlung mit erlesenen Hals- und Formenuhren ist in über 10 großen Ausstellungsvitrinen untergebracht. Die Darstellung beginnt mit der deutschen Taschenuhr und wird über die 1668 gegründete Dresdner Kleinuhrmacher-Innung bis zu den schweizerischen, englischen und französischen Kleinuhren weitergeführt. Das Prachtstück der Schweizer Sammlung ist eine ovale vergoldete Einzeiger-Halsuhr mit getriebenen Zifferblatt und Gehäusedeckel von J. B. Duboule (um 1630). Bei einer russischen Holztaschenuhr sind sämtliche Teile, wie z. B. Zahnräder, Zeiger, Verstiftungen und Verschraubungen, einschließlich Gehäuse und Zifferblatt – mit Ausnahme der Aufzugsfeder und der Unruhe – aus Buchsbaumholz geschnitzt; eine handwerkliche Meisterleistung von M. S. Bronnikow aus der Zeit um 1850. In der Sammlung der englischen Taschenuhren sind neben uhrentechnisch sehr interessanten Werken von Tallans, Graham und Earnshaw auch englische Seechronometer von Mudge und Parkinson. Eine achteckige Einzeiger-Halsuhr mit einem herrlichen Bergkristallgehäuse und mit feinen figürlichen und ornamentalen Gravuren auf dem Zifferblatt und auf der Platine gehört mit einer seltenen Totenkopf-Halsuhr in aufklappbarem Silbergehäuse – beide aus der Zeit um 1650 – zu den Prachtstücken der französischen Taschenuhren.

Glanzstücke deutscher Handwerksmeister sind die kostbaren, oft einmaligen großen astronomischen Kunst- und Automatenuhren aus der Zeit von 1650 bis 1750. In diesen mechanischen Räderuhren mit ihrem enormen Formenreichtum und den vielseitigen astronomischen Angaben spiegelt sich auch die rasche Entwicklung der Mathematik, Astronomie und Technik dieser Zeit wider. In einer Sondervitrine steht die berühmte und kostbarste Uhr des Staatl. Math.-Phys. Salons, die 1,35 m große astronomische Kunstuhr von Eberhard Baldewein und Hans Bucher, gebaut von 1563 bis 1567. Die Zeiger der sechs Planetenlaufscheiben geben entsprechend des an der Uhr zur Darstellung gebrachten ptolemäischen Systems die Umdrehung von Venus, Merkur, Mars, Saturn, Jupiter und Mond um die Erde an; die beiden anderen Scheiben sind als Astrolabium und für Kalenderberechnungen ausgebildet.
Zu den bekanntesten süddeutschen Kostbarkeiten des 16. Jh. gehören die Tafelaufsatz-Automatenuhr „Die verkehrte Welt“, eine fast 80 cm hohe turmförmige vergoldete Tischuhr (Abb.) mit zwölf Zifferblättern für Zeit- und Kalenderrechnungen und mehreren übereinander angeordneten Automatengruppen



von Paulus Schuster und die bekannte Kugellauf-Kunstuhr „Hottentottentanz“ von Mattheus Rougell Augsburg. Weitere weltberühmte Uhrenkostbarkeiten sind u. a. die Weltzeituhr mit 360 Zifferblättern von Andreas Gärtner, die die Zeitunterschiede zwischen Dresden und den auf den einzelnen Zifferblättern aufgetragenen Orten angibt, und die mit vergoldeten Schnitzereien überreich verzierte astronomisch-geographische Kunstuhr des Prager Jesuitenpaters Johannes Klein.



Dieser kurze Rundgang durch die einzelnen Ausstellungsräume mit der Betrachtung einiger größerer Sammlungen und der Besprechung schöner und interessanter Gegenstände deutet zwar die umfangreiche Museumsarbeit des Staatl. Math.-Phys. Salons an, doch ist damit keinesfalls die Aufgabenstellung dieses Instituts erschöpft.

Regelmäßige Vortrags- und Filmveranstaltungen über aktuelle Probleme aus der Welt der Naturwissenschaften, laufend neue Sonderausstellungen und eine enge fruchtbare Zusammenarbeit mit den Schulen und gesellschaftlichen Organisationen machen dieses Museum zu einer wahren Bildungs- und Lehrstätte aller Werktätigen. Dazu gehört auch eine jahrelange sehr enge Zusammenarbeit mit der Fernsehakademie des Deutschen Fernsehfunks, mit der DEFA und mit zahlreichen Wissenschaftlern und Museen des In- und Auslandes. Wie schon aus der Institutsbezeichnung hervorgeht, ist der Staatl. Math.-Phys. Salon, der dem Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen unterstellt ist, nicht nur ein Museum, sondern auch eine Forschungsstelle. Einige ihm seit Jahren übertragene wissenschaftliche Arbeiten sind für die Museumsarbeit in der DDR von großer nationaler und internationaler Bedeutung. Dazu gehören Erfassung, Inventarisierung und wissenschaftliche Bearbeitung der im Weltmaßstab bedeutenden Instrumente und Apparate, zu der vor einigen Jahren die ganze Welt aufgerufen wurde und der sich die Deutsche Demokratische Republik auch sofort anschloß. Den Auftrag über die durchzuführende Landesinventarisierung und die damit verbundene Auswertung wurde der Forschungsstelle übertragen, in der für alle technischen und wissenschaftlichen Unterlagen ein Landesarchiv errichtet werden soll. Die Forschungsergebnisse erscheinen in der neuen Schriftenreihe des Instituts, in den „Veröffentlichungen des Staatl. Math.-Phys. Salons“, die seit Jahren von dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften in Berlin herausgegeben werden.

Dieser gestraffte Bericht über Sammlungen, Forschungsarbeiten und Aufgabenstellungen kann nur einen kleinen Überblick über den Staatl. Math.-Phys. Salon geben. In einer Sonderausstellung in diesem Jahr zum 20. Geburtstag unserer DDR wird – gleichzeitig mit dem Dank für die großzügige Förderung aller museumstechnischer und wissenschaftlicher Belange – ausführlich über die rasche Entwicklung berichtet, und gleichzeitig werden die künftigen Aufgaben dieses Museums behandelt und dargestellt.

H. Grötzsch

Zweiermengen und geordnete Paare

$\{a,b\}=\{b,a\}$
$(a,b)\neq(b,a)$

In den bisher erschienenen Beiträgen über Mengenlehre haben wir lediglich Mengen kennengelernt, deren Elemente nur aus einzelnen Objekten bestehen, aber selbst keine Mengen sind. Man spricht in diesen Fällen von sogenannten Urelementen oder Individuen, die zu Mengen zusammengefaßt wurden. Nun kann man aber auch Mengen bilden, deren Elemente selbst wieder Mengen darstellen. Das wollen wir einmal tun.
$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_{10}$ seien die Mengen der Schüler der zehn Klassen einer Landschule. Diese Mengen kann man nun wieder zu einer neuen Menge zusammenfassen.
$K = \{K_1, K_2, K_3, \ldots, K_{10}\}$
Die Elemente dieser Menge K sind nicht etwa einzelne Schüler, sondern Mengen von Schülern.
Natürlich können wir auch aus allen Schülern der Landschule eine Menge bilden, die wir mit L bezeichnen wollen. Die Menge K ist aber nicht etwa gleich der Menge L, denn K enthält als Elemente Mengen von Schülern, während die Elemente der Menge L einzelne Schüler, also Urelemente sind.
Um den Unterschied zwischen Mengen, deren Elemente wiederum Mengen sind, und Mengen, deren Elemente Urelemente sind, zu verdeutlichen, wollen wir noch ein weiteres Beispiel etwas ausführlicher betrachten.
Wir erinnern uns an die sechs befreundeten Schüler Achim, Bernd, Christine, Detlef, Elke und Frank (*alpha* 3/67, S. 74). Diese sechs Schüler wollen ein Schachturnier durchführen, bei dem jeder Schüler gegen jeden Schüler spielen soll. Betrachten wir jetzt einmal die auftretenden Mengen.
Die Menge der sechs befreundeten Schüler war schon mit S bezeichnet worden.
$S = \{a, b, c, d, e, f\}$
Da jeder Schüler mit jedem Schüler eine Partie spielen soll, müssen wir aus den sechs Schülern alle möglichen Schülerpaare bilden. Die Reihenfolge der Schüler ist bei diesen zu bildenden Schülerpaaren beliebig, da es ja dasselbe bedeutet, ob Schüler a gegen Schüler b oder Schüler b gegen Schüler a spielt. Mengentheoretisch bedeutet das, daß aus der Menge S alle möglichen Teilmengen gebildet werden müssen, die jeweils nur aus zwei Elementen bestehen. Insgesamt gibt es $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ solcher Teilmengen.

$$Z_1=\{a,b\}, Z_2=\{a,c\}, Z_3=\{a,d\}, Z_4=\{a,e\}, Z_5=\{a,f\},$$
$$Z_6=\{b,c\}, Z_7=\{b,d\}, Z_8=\{b,e\}, Z_9=\{b,f\},$$
$$Z_{10}=\{c,d\}, Z_{11}=\{c,e\}, Z_{12}=\{c,f\},$$
$$Z_{13}=\{d,e\}, Z_{14}=\{d,f\},$$
$$Z_{15}=\{e,f\}.$$

Solche Mengen, die nur zwei Elemente besitzen, pflegt man auch als Zweiermengen zu bezeichnen. Die Elemente dieser Zweiermengen sind wiederum einzelne Schüler, also Urelemente.
Für die 15 auszutragenden Spiele sind 5 Spielrunden notwendig. Nehmen wir an, die 5 Spielrunden werden folgendermaßen festgelegt:
1. Spielrunde: $Z_3 = \{a,d\}, Z_8 = \{b,e\}, Z_{12} = \{c,f\}$
2. Spielrunde: $Z_4 = \{a,e\}, Z_6 = \{b,c\}, Z_{14} = \{d,f\}$
3. Spielrunde: $Z_5 = \{a,f\}, Z_7 = \{b,d\}, Z_{11} = \{c,e\}$
4. Spielrunde: $Z_1 = \{a,b\}, Z_{10} = \{c,d\}, Z_{15} = \{e,f\}$
5. Spielrunde: $Z_2 = \{a,c\}, Z_9 = \{b,f\}, Z_{13} = \{d,e\}$

Die drei Schülerpaare, die gleichzeitig die erste Schachpartie austragen (die Zweiermengen Z_3, Z_8 und Z_{12}), wollen wir jetzt zu einer Menge zusammenfassen und mit Z_I bezeichnen. Z_I ist demnach die Menge der Schülerpaare der ersten Spielrunde.
$Z_\mathrm{I} = \{Z_3, Z_8, Z_{12}\}$
Die Elemente dieser Menge sind allerdings keine einzelnen Schüler, sondern wieder Mengen von Schülern, in unserem Falle speziell Zweiermengen. Die Menge Z_I kann man auch in der Form
$Z_\mathrm{I} = \left\{ \{a,d\}, \{b,e\}, \{c,f\} \right\}$ schreiben.
Aus dieser Schreibweise erkennt man sofort, daß die Elemente der Menge Z_I wieder Mengen sind.
Die Menge Z_I ist nicht gleich der Menge S, denn S enthält als Element ja nur einzelne Schüler. Zwischen Z_3, Z_8, Z_{12} einerseits und Z_I andererseits bestehen nicht etwa Teilmengenbeziehungen, sondern Elementbeziehungen. Es gilt:
$Z_3 \in Z_\mathrm{I}$, $Z_8 \in Z_\mathrm{I}$, $Z_{12} \in Z_\mathrm{I}$.
Genauso kann man die Schülerpaare der 2. bis 5. Spielrunde jeweils zu Mengen Z_II bis Z_V und alle Schülerpaare (Zweiermengen Z_1 bis Z_{15}) zu einer Menge Z zusammenfassen. Z_I bis Z_V sind dann Teil-

mengen von Z. Zu beachten ist aber, daß nicht etwa Z_1 bis Z_{15} Teilmengen von Z, sondern Elemente von Z sind. Wir wollen damit dieses Beispiel abschließen. Bei unseren sechs Freunden möchten wir aber noch etwas verweilen.

Nehmen wir einmal an, unsere Schüler a, b, c, d, e, f sind nicht nur befreundet, sondern sie gehen auch in dieselbe Klasse und bilden eine Schülerbrigade. Diese Brigade will zur Verbesserung ihrer schulischen Leistungen Schülerpatenschaften einrichten. Zu diesem Zweck sollen aus dieser Brigade drei Schülerpaare derart gebildet werden, daß jeweils ein leistungsstärkerer Schüler die Patenschaft über einen leistungsschwächeren Schüler übernimmt. Die Schüler mit den besseren Leistungen seien a, b, c, und die Schüler mit den schwächeren Leistungen seien d, e, f. In einer Brigadesitzung werden die Schülerpaare für die Patenschaften festgelegt und an die Tafel geschrieben. Es wird vereinbart, daß der Pate, der die Patenschaft über einen leistungsschwächeren Schüler übernimmt, jeweils an die erste Stelle gesetzt wird.

$a, d \qquad b, e \qquad c, f$

Durch diese Vereinbarung kann man der Aufstellung entnehmen, wer jeweils der Pate ist. Die Reihenfolge der Schüler dieser Paare ist nicht mehr beliebig. Man darf deshalb diese Paare auch nicht als einfache Zweiermenge auffassen, bei denen ja die Reihenfolge der Elemente beliebig ist. Es handelt sich in diesem Falle um sogenannte geordnete Paare. Das drückt man auch in der Schreibung dieser Paare aus, indem man zur Unterscheidung von einer einfachen Zweiermenge das geordnete Paar in runde Klammern setzt. (Für die Schreibweise eines geordneten Paares sind auch eckige Klammern gebräuchlich.)

$(a, d) \qquad (b, e) \qquad (c, f)$

Eine Vertauschung der Elemente ist also bei den geordneten Paaren ohne neue Vereinbarung des Zusammenhangs nicht zulässig. Für unser Beispiel würde eine Vertauschung der Elemente der geordneten Paare bedeuten, daß nicht a, b, c, sondern d, e, f die Paten wären, was unserer Vereinbarung widerspräche. Wir können jetzt diese geordneten Paare wieder zu einer Menge P_I zusammenfassen. P_I ist dann eine Menge von geordneten Paaren, die in unserem Beispiel Patenschaften darstellen.

$$P_I = \left\{ (a, d), (b, e), (c, f) \right\}$$

Unter der angegebenen Voraussetzung, daß die leistungsstärkeren Schüler a, b, c die Paten sein sollen, können selbstverständlich auch andere Zusammenstellungen von Patenschaften erfolgen, zum Beispiel $(a, d), (b, f), (c, e)$. Es ergeben sich dann entsprechend andere Mengen von Patenschaften. Insgesamt sind sechs Mengen P_I bis P_{VI} von Patenschaften möglich. Versucht es einmal, die vier fehlenden Möglichkeiten anzugeben! Die Mengen P_I bis P_{VI} sind alle untereinander verschieden, denn sie enthalten alle verschiedene geordnete Paare als Elemente.

Zur Herausarbeitung des Unterschiedes dieser Mengen von geordneten Paaren zu den im vorangegangenen Beispiel betrachteten Mengen von Zweiermengen wollen wir zwei entsprechende Mengen vergleichen.

$$P_I = \left\{ (a, d), (b, e), (c, f) \right\} \qquad Z_I = \left\{ \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\} \right\}$$

P_I ist eine Menge von geordneten Paaren, bei denen die Elemente innerhalb der geordneten Paare nicht vertauscht werden dürfen, während die Menge Z_I als Elemente Zweiermengen enthält. Die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Zweiermengen ist natürlich beliebig. Bezogen auf unser Beispiel des Schachturniers bedeutet eine Vertauschung der Elemente innerhalb der Zweiermenge ja lediglich, daß z. B. nicht der Schüler a gegen den Schüler d spielt, sondern d gegen a spielt, und das ist dasselbe. Es ist also z. B.

$$P_I = \left\{ (a, d), (b, e), (c, f) \right\} \neq \left\{ (d, a), (e, b), (f, c) \right\}$$

$$Z_I = \left\{ \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\} \right\} = \left\{ \{d, a\}, \{e, b\}, \{f, c\} \right\}$$

Natürlich würde auch schon die Vertauschung der Elemente nur eines geordneten Paares bei der Menge P_I zu einer anderen Menge führen. Die Reihenfolge der geordneten Paare bzw. der Zweiermengen ist allerdings bei den Mengen P_I bzw. Z_I wieder beliebig. Fassen wir jetzt einmal das Wichtigste über das geordnete Paar zusammen.

Eine Zusammenstellung von zwei Objekten in bestimmter Reihenfolge nennt man ein geordnetes Paar.

Zur Unterscheidung von einer Zweiermenge, die ja auch zwei Objekte enthält, deren Reihenfolge aber beliebig ist, setzt man ein geordnetes Paar in runde Klammern.

In dem geordneten Paar (a, b) heißt a das erste und b das zweite Element des geordneten Paares.

Im Gegensatz zu einer Zweiermenge, bei der die beiden Elemente immer wohlunterschieden sein müssen, kann man auch geordnete Paare bilden, die als erstes und zweites Element ein und dasselbe Element besitzen.

Beispiele für geordnete Paare:

$(3, 4), (4, 3), (3, 3), (a, b), (b, a), (a, a)$

Zwei geordnete Paare sind dann und nur dann gleich, wenn ihre beiden ersten und ihre beiden zweiten Elemente gleich sind.

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, dann und nur dann, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.

$(3, 4) = (3, 4), (3, 4) \neq (4, 3)$

$(a, b) = (a, b), (a, b) \neq (b, a)$, wenn $a \neq b$

In einem der nächsten Hefte werden wir etwas mehr über die Bedeutung der geordneten Paare erfahren.

H. Tiede

Der Eulersche Polyedersatz

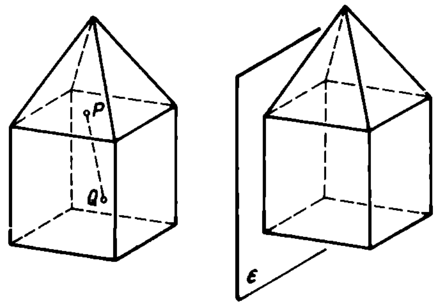


Abb. 1a und b

Leonhard Euler (1707 bis 1783) war Professor in Petersburg und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin. (Genaueres über das Leben Leonhard Eulers kann in „alpha“ Jahrgang 1967 Heft 4 nachgelesen werden.)
Seinen „Polyedersatz“ hat Euler 1752 gefunden.
Er lautet:

„Bei jedem konvexen Polyeder im dreidimensionalen Raum ist die Summe aus der Zahl E der Ecken und der Zahl F der Flächen um zwei größer als die Zahl K der Kanten.“

Also: $E + F = K + 2$ (1)

Bevor wir einen Beweis für diesen Satz angeben, wollen wir für solche Leser, die den in Heft 1 (Jahrgang 1968) dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz über die regulären Polyeder nicht gelesen haben, erklären, was unter dem Begriff „Polyeder“ und was unter der Eigenschaft „konvex“ zu verstehen ist:
Das Wort „Polyeder“ kennzeichnet entweder einen durch Ebenenstücke begrenzten massiven Körper endlicher Größe, oder nur die aus Ebenenstücken zusammengesetzte Oberfläche eines solchen Körpers (vgl. Rudolf Bereis, Darstellende Geometrie Bd. I, S. 117).
Die Eigenschaft „konvex“, die einem Polyeder zukommen kann, läßt sich ebenfalls auf verschiedene Art erklären:
Ein Polyeder (hierbei aufgefaßt als massiver Körper) ist konvex, wenn die (geradlinige) Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte P, Q des Polyeders stets ganz dem Polyeder angehört. (Vgl. z. B. Kurt Reidemeister, Topologie der Polyeder, Leipzig 1953, S. 13.) Es ist klar, daß bei dieser Definition vorausgesetzt wird, daß das Polyeder ein massiver Körper ist (s. Abb. 1a). Die zweite Erklärung der Eigenschaft „konvex“ benutzt die Tatsache, daß eine Ebene den dreidimensionalen Raum in zwei dreidimensionale Teile teilt, die wir Halbräume nennen. Die Ebene selbst gehöre keinem der beiden Halbräume an. Hiermit kann man definieren:
Ein Polyeder ist konvex, wenn es bei Teilung des Raumes durch eine Ebene ε, welche irgendeine (Seiten-) Fläche des Polyeders enthält, stets einen der beiden Halbräume ganz meidet (vgl. auch R. Bereis, Darstellende Geometrie Bd. I, S. 119). Es ist offensichtlich, daß diese zweite Definition die Zugrundelegung beider Erklärungen des Begriffes „Polyeder“ erlaubt. (Siehe Abb. 1b.) (Das in Abb. 2 dargestellte Polyeder ist nicht konvex, was aus der Anwendung der genannten Konvexitätskriterien ersichtlich ist.) Dem Beweis des Eulerschen Polyedersatzes schicken wir eine Betrachtung über ein beliebiges ebenes Maschennetz $\mathfrak{N}$ voraus. Zunächst seien die Begriffe „Masche“ und „Maschennetz“ in einer für unsere Gedankengänge zweckmäßigen Art und Weise definiert (siehe Abb. 3a):

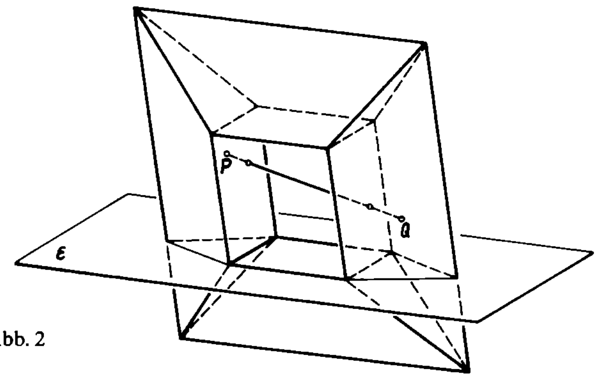


Abb. 2

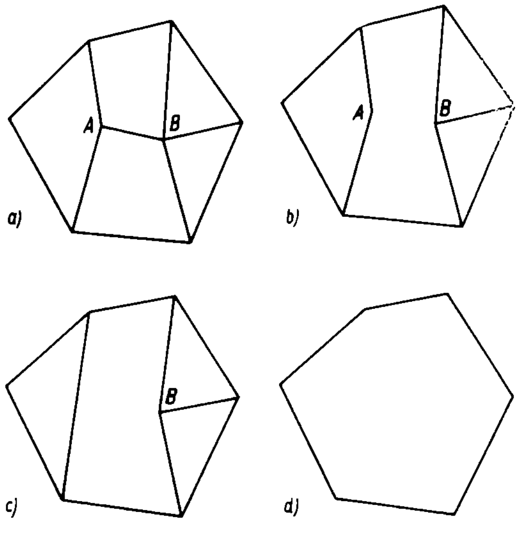


Abb. 3

Eine Masche sei ein geschlossenes Polygon, das sich nicht selbst schneidet; ein Maschennetz bestehe aus n Maschen ($n \geqq 1$), wobei für $n > 1$ jede Masche des Netzes mit mindestens einer anderen Masche des Netzes mindestens eine Seite gemeinsam hat und jeder Punkt innerhalb der äußeren Umrandung des gesamten Netzes, der kein Eckpunkt einer Masche („Knotenpunkt“ oder „Knoten“) ist und der auch keiner Seite einer Masche angehört, von einer und nur einer Masche des Netzes umschlossen wird.
In $\mathfrak{N}$ sei E die Zahl der Knotenpunkte, K die Zahl der Seiten (Verbindungsstrecken je zweier Knotenpunkte) und F die Zahl der Maschen. Hiernach stellen wir fest:

$$E - K + F = 1. \qquad (2)$$

Wir behaupten, daß diese Beziehung für alle ebenen Maschennetze endlicher Größe gilt und beweisen unsere Behauptung, indem wir ein beliebiges Netz, z. B. das Netz $\mathfrak{N}$ auf noch zu erklärende Art schrittweise vereinfachen. Wir zeigen dann, daß nach jedem solchen Schritt der Zahlenwert von

$$E - K + F \qquad (3)$$

unverändert geblieben ist. Haben wir schließlich nach endlich vielen Schritten das Netz zu einem einmaschigen Netz (Abb. 3d) vereinfacht, so ist dann unmittelbar zu erkennen, daß der konstant gebliebene Zahlenwert des Ausdruckes (3) gleich eins ist.

Die genannte Vereinfachung des Netzes erfolgt durch zwei Arten von Einzelschritten:
1. Weglassen einer Seite (z. B. AB) im Inneren des Netzes (siehe Abb. 3b). Dabei vermindern sich K *und* F je um eins. Dies wirkt sich aber auf den Zahlenwert von (3) nicht aus, da in (3) K und F verschiedene Vorzeichen haben.
2. Weglassen eines Knotens, von dem nur zwei Seiten ausgehen (z.B. A in Abb. 3b) und Ersetzen dieser beiden Seiten durch eine Seite. (Siehe Abb. 3c.)
Dabei vermindern sich E und K je um eins. Auch diese Veränderung wirkt sich offenbar auf den Zahlenwert von (3) nicht aus. Durch wiederholte Ausführung der unter 1. und 2. genannten Einzelschritte reduzieren wir das Netz so weit, daß nur noch dessen ursprüngliche äußere Umrandung und die von dieser gebildete Masche vorhanden sind (siehe Abb. 3d). Aus dem so vereinfachten Netz liest man sofort ab: $E = K$, $F = 1$, also $E - K + F = 1$. Nach den vorangegangenen Ausführungen muß diese Gleichung (2) auch für das ursprüngliche Netz $\mathfrak{N}$ gültig sein, was zunächst zu beweisen war.

Wir kommen nun zum Beweis des Eulerschen Satzes.
Hierzu projizieren wir durch Parallel- oder Zentralprojektion (Zentrum außerhalb des Polyeders) die Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders derart auf eine Ebene π, daß niemals zwei verschiedene Eckpunkte auf ein und denselben Punkt von π abgebildet werden und daß kein Eckpunkt auf das Bild einer Kante projiziert wird, die nicht von diesem Eckpunkt ausgeht. Eine Projektion, die diesen Bedingungen genügt, kann man immer finden. Fällt nämlich die Projektion eines Eckpunktes A auf das Bild einer Kante k, die nicht von diesem Eckpunkt ausgeht, so liegt (falls eine Zentralprojektion gewählt wurde) das Projektionszentrum in der Verbindungsebene von A mit k, oder es verlaufen (bei Parallelprojektion) die Projektionsstrahlen parallel zu dieser Ebene.
Wir denken uns nun alle möglichen Verbindungsebenen der Kanten mit den Ecken des Polyeders gelegt (dazu gehören auch die Ebenen, in welchen die Polyederflächen liegen). Es sind dies endlich viele Ebenen. Wählt man nun als Projektionszentrum irgendeinen Punkt außerhalb des Polyeders, der in keiner dieser Ebenen liegt, so hat man eine Zentralprojektion, die den gestellten Forderungen genügt. Gibt man aber einer Parallelprojektion den Vorzug, so muß man noch zeigen, daß immer parallele Projektionsstrahlen existieren, die zu keiner der Verbindungsebenen der Ecken mit den Kanten des Polyeders parallel sind. Die hierzu erforderlichen Betrachtungen wollen wir jedoch übergehen.
Hinsichtlich der Projektion existiert auf dem Polyeder ein Umrißpolygon $\mathfrak{U}$ (in Abb. 4 ist dies das Polygon $ABCD$). Es teilt die Oberfläche des Polyeders in zwei Teile, deren Projektionen in der Bildebene π zwei Netze $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ mit demselben Randpolygon $\mathfrak{U}'$ sind. (In Abb. 4 ist $\mathfrak{U}'$ das Polygon $A'B'C'D'$.)
Für $\mathfrak{N}_1$ gilt $E_1 - K_1 + F_1 = 1$, und für $\mathfrak{N}_2$ gilt entsprechend $E_2 - K_2 + F_2 = 1$. Die Addition ergibt

$$E_1 + E_2 - (K_1 + K_2) + F_1 + F_2 = 2 \qquad (4)$$

$F_1 + F_2$ ist gleich der Anzahl F der Flächen des Polyeders. In $E_1 + E_2$ und $K_1 + K_2$ treten die Ecken bzw. Seiten von $\mathfrak{U}'$ doppelt gezählt auf. Sei n die Zahl der Ecken bzw. Seiten des Randpolygons $\mathfrak{U}'$, so sind also $E_1 + E_2$ und $K_1 + K_2$ je um n größer als die Zahl E der Polyederecken bzw. als die Zahl K der Polyederkanten.

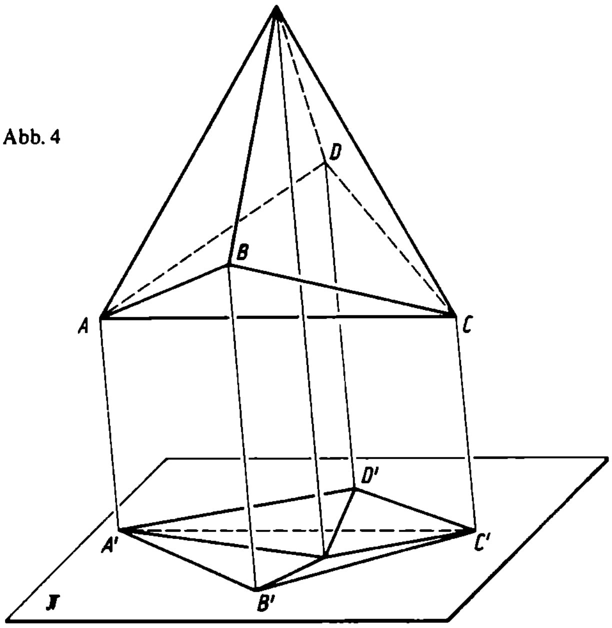
$$E_1 + E_2 = E + n, \qquad K_1 + K_2 = K + n.$$

Aus (4) folgt hiernach $E + n - (K + n) + F = 2$, also

$$E - K + F = 2.$$

Wir haben hiermit die Gleichung (1) und damit den Eulerschen Polyedersatz für konvexe Polyeder nachgewiesen. Wesentlich dabei war, daß die Projektion des Polyeders auf π genau zwei einfach übereinanderliegende Netze mit gleichem Randpolygon ergibt. Das ist bei konvexen Polyedern immer der Fall. Daher gilt der Eulersche Polyedersatz sicher für konvexe Polyeder.

Abb. 4



Es gibt auch viele nicht konvexe Polyeder, für die ebenfalls $E - K + F = 2$ gilt. Unmittelbar klar ist die Aussage:
Für ein nichtkonvexes Polyeder gilt die Gleichung (1), wenn es ein konvexes Polyeder gibt, das dieselbe Eckenzahl, dieselbe Kantenzahl und dieselbe Flächenzahl hat wie das nichtkonvexe Polyeder. Abb. 5 gibt hierzu ein einfaches Beispiel.

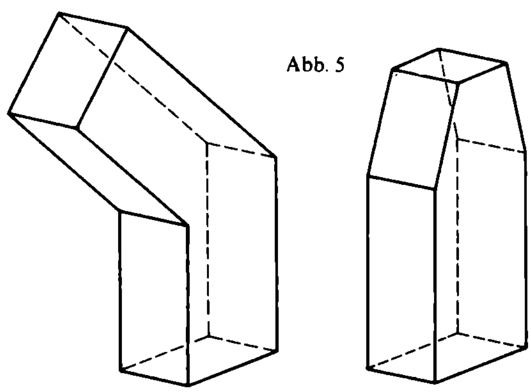


Abb. 5

Es gibt aber auch viele nichtkonvexe Polyeder, für die die Gleichung (1) nicht gilt. (Abb. 2 zeigt ein solches Polyeder.) Daher gilt für nichtkonvexe Polyeder die Gleichung (1) nicht allgemein. Hieraus erkennt man, daß der Eulersche Polyedersatz allgemein nur für konvexe Polyeder gilt.

Aufgabe: Man suche noch verschiedene nichtkonvexe Polyeder, für die nicht gilt

$$E - K + F = 2.$$

H. Günther

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 2

Das Rechnen im Dezimalsystem finden wir zum Beispiel technisch realisiert bei einer *einfachen Handrechenmaschine*, wie sie gelegentlich in Büros für bescheidene Ansprüche verwendet wird. Die zehn Ziffern sind in der Regel auf Walzen aufgetragen. Eine solche Walze kann dann *zehn verschiedene Zustände*, nämlich zehn Drehstellungen einnehmen. Das Rechnen mit der Maschine ist weiter nichts als ein sinnvolles mechanisches Zusammenspiel mehrerer Walzen. An diesem Prinzip ändert sich wenig, wenn die Maschine, statt mit der Hand, elektrisch betrieben wird, etwa an der Kasse unseres Lebensmittelkonsums.

Eine Hand- oder Tischrechenmaschine arbeitet – vom Standpunkt der modernen Rechentechnik gesehen – im „Schneckentempo". Will man höhere Rechengeschwindigkeiten erzielen, so muß man weitestgehend auf mechanisch bewegte Teile verzichten, denn dies würde bei der Vielzahl der zu verarbeitenden Informationen erstens einen erheblichen Materialaufwand bedeuten, die Anlage müßte ungebührlich groß sein, zweitens müßte der Automat zwangsläufig sehr langsam arbeiten, da bei jeder Bewegung die Trägheit des betreffenden Massestücks hemmend wirkt. Es geht also darum, mechanisch bewegte *Schaltelemente* wie zum Beispiel Walzen durch andere Schaltelemente zu ersetzen, die den höheren Anforderungen genügen. Als solche eignen sich je nach dem Grad dieser Anforderungen:

- pneumatische, also mit Luftdruck betriebene Vorrichtungen (man spricht scherzhaft von „Pustelogik"),
- elektromagnetische Relais,
- Elektronenröhren,
- Schaltelemente aus Halbleitern.

Über die Wirkungsweise solcher Schaltelemente hört ihr später mehr.

Für uns ist zunächst folgendes wichtig: Welcher Art das Schaltelement auch sei, es muß in der Lage sein, sämtliche beim Rechnen verwendeten Ziffern physikalisch zu realisieren, das heißt, es muß so viele stabile Zustände annehmen können, wie es Ziffern gibt, für das Rechnen im *Dezimalsystem* also zehn verschiedene Zustände. Das ist eine ziemlich hohe Zahl. Man müßte bei einem elektrischen Schaltelement diese zehn Zustände etwa durch zehn verschiedene Stromstärken oder zehn verschiedene Spannungen realisieren. Eine solche Vorrichtung wäre nicht nur kompliziert, sondern, wie man sich vorstellen kann, auch recht störanfällig. Es ergibt sich also die Frage, ob man Zahlen auch mit weniger als zehn Ziffern darstellen kann. *Überlege, vom prinzipiellen Aufbau des Dezimalsystems ausgehend, wie man die natürlichen Zahlen (etwa von 0 bis 30) mit nur fünf Ziffern darstellen kann!*

1.3. Das Fünfersystem

Es geht also darum, das Dezimalsystem durch ein neues Zahlensystem, in diesem Fall das Fünfersystem, zu ersetzen. Das Fünfersystem hat rechentechnisch keine Bedeutung. Wir behandeln es dennoch, um dem Leser Gelegenheit zum Üben einiger in der Rechentechnik immer wiederkehrenden Verfahren zu geben. Das ist einmal die Umkodierung von einem System in ein anderes und zum zweiten das Rechnen in anderen Systemen. Die Ziffern unseres neuen Systems, des Fünfersystems, müssen wir streng von denen des Dezimalsystems unterscheiden, etwa durch einen Querstrich:

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}.$

Die Zahlen 0 bis 4 darzustellen macht keine Schwierigkeiten. Wir setzen

$$0 = \bar{0} \qquad 3 = \bar{3} \qquad 4 = \bar{4},$$
$$1 = \bar{1} \qquad 2 = \bar{2}$$

wobei also jeweils dieselbe Zahl links vom Gleichheitszeichen in der alten Dezimal-, rechts in der neuen Kodierung geschrieben wird. Wie nun weiter? Wenn in der Dezimalschreibweise, angelangt bei der Zahl 9, alle Ziffern verbraucht sind, fangen wir bekanntlich wieder mit 0 an, markieren aber den Übergang durch eine 1 in der zweiten Stelle (10), beim nächsten Zehnerüberlauf durch eine 2 in der zweiten Stelle (20) usw., bis auch in der zweiten Stelle, der Zehnerstelle, alle Ziffern verbraucht sind, so daß wir eine neue Stelle (die Hunderter) „eröffnen" müssen usw. Übertragen wir dieses Prinzip auf das Fünfersystem, so ergibt sich

$5 = \overline{10}$	$24 = \overline{44}$	$75 = \overline{300}$
$6 = \overline{11}$	$25 = \overline{100}$	.
$7 = \overline{12}$	$26 = \overline{101}$	
$8 = \overline{13}$		
$9 = \overline{14}$		$124 = \overline{444}$
$10 = \overline{20}$	.	$125 = \overline{1000}$
$11 = \overline{21}$	$49 = \overline{144}$	usw.
.	$50 = \overline{200}$	
	.	
.	.	

Die Darstellung läßt sich beliebig fortsetzen. Man erkennt leicht, daß die neue Schreibweise auch wieder eine kodierte Summe ist, diesmal nach Potenzen von 5 geordnet:

$$\overline{243} = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0.$$

(rechts vom Gleichheitszeichen verwenden wir die Ziffern aus dem Dezimalsystem.) Den Dezimalbrüchen im alten System entsprechen die Fünferbrüche:

$$\overline{0{,}403} = 4 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{25} + 3 \cdot \frac{1}{125}$$
$$= 4 \cdot 5^{-1} + 0 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-3}$$

Nun zur Umkodierung vom Dezimalsystem in das Fünfersystem: Wir üben es zunächst mit ganzen Zahlen. Am einfachsten ist die Lösung, wenn die gegebene Dezimalzahl eine reine Potenz von 5 ist, z. B.

$$3125 = 5^5 = \overline{100000}.$$

In allen anderen Fällen suchen wir die nächstkleinere Fünferpotenz, stellen fest, wie oft diese in der Zahl enthalten ist (es kann höchstens viermal sein), machen dasselbe mit dem Rest usw. Beispiel: Gegeben die Dezimalzahl 8579. Die nächstkleinere Fünferpotenz, nämlich 3125, ist zweimal enthalten. Der Rest ist 2329. Darin ist $625 = 5^4$ dreimal enthalten. Rest 454. Darin ist $125 = 5^3$ auch wieder dreimal enthalten. Rest 79. Fahren wir so fort, so ergibt sich:

$$8579 = 2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0.$$

Also ist $8579 = \overline{233304}$.

Aufgabe: Stelle die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen 634, 8172 und 94651 im Fünfersystem dar! Weniger aufwendig ist der umgekehrte Vorgang. Ist uns eine Zahl im Fünfersystem gegeben, so liefert uns das unmittelbar eine nach Potenzen von 5 geordnete Summe, die nur ausgerechnet zu werden braucht.

Aufgabe: Schreibe $\overline{432103}$ im Dezimalsystem!

Das Umkodieren *gebrochener* Zahlen heben wir uns zweckmäßigerweise auf, bis wir das schriftliche Rechnen im Fünfersystem bis zur Division gelernt haben — eine Aufgabe, mit der wir uns sogleich befassen wollen. Das Wesen des schriftlichen Rechnens besteht bekanntlich darin, daß die auszuführende Operation in eine Anzahl einfacher immer wiederkehrender *Einzeloperationen* aufgelöst wird. Die benötigten Einzeloperationen zusammengestellt, bilden das *Einsundeins* und das *Einmaleins.*

Für das Dezimalsystem also:

$0 + 0 = 0$	$1 + 1 = 2$	$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$
$0 + 1 = 1$	$1 + 2 = 3$	$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 2 = 2$
.	.	$0 \cdot 2 = 0$	.
		.	
.	.	.	.
$0 + 9 = 9$	$9 + 9 = 18$	$0 \cdot 9 = 0$	$9 \cdot 9 = 81.$

Es sind also alle Kombinationen der Zahlen 0 bis 9 zu je zweien, jeweils durch Pluszeichen und Malzeichen verknüpft, wobei wegen der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. Faktoren von den Operationen $a + b$ und $b + a$ bzw. $a \cdot b$ und $b \cdot a$ jeweils nur eine aufgeführt zu werden braucht. Mehr benötigt man nicht, denn die Subtraktion und die Division werden bekanntlich auf die Addition bzw. die Multiplikation zurückgeführt. Das Entsprechende sieht im Fünfersystem, tabellarisch zusammengefaßt, so aus:

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{31}$

Der Leser möge diese Aufstellung bei den folgenden Übungen benutzen.

Wir wollen nun die vier Grundoperationen am Beispiel der (in Dezimalschreibweise gegebenen) Zahlen 182 und 14 üben.

Umkodierung:

$$182 = \overline{1212} \qquad 14 = \overline{24}$$

(Prüfe die Ergebnisse nach!)

Die vier Rechenoperationen werden jetzt kommentarlos aufgeschrieben. Der Leser mache sich jeden einzelnen Rechenschritt klar und vergewissere sich insbesondere, daß die Rechenverfahren sich wirklich *nur* durch die Anzahl der verwendeten Ziffern von denen im Dezimalsystem unterscheiden. Wir empfehlen auch, zur Übung die Ergebnisse in das Dezimalsystem umzukodieren und durch dezimale Rechnung die Probe zu machen!

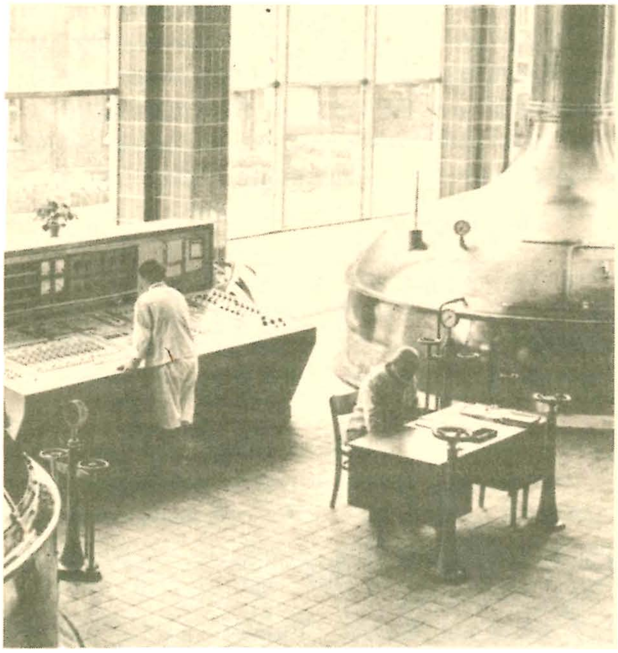
$$\begin{array}{rr} & \overline{1212} \\ + & \overline{24} \\ \hline & \overline{1241} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \overline{1212} \\ - & \overline{24} \\ \hline & \overline{1133} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1212} \cdot \overline{24} \\ \hline \overline{2424} \\ \overline{10403} \\ \hline \overline{40143} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overline{1212} : \overline{24} = \overline{23} \\ \overline{103} \\ \hline \;\;\overline{132} \\ \;\;\overline{132} \\ \hline \;\;\;\;\overline{0} \end{array}$$

J. Frormann

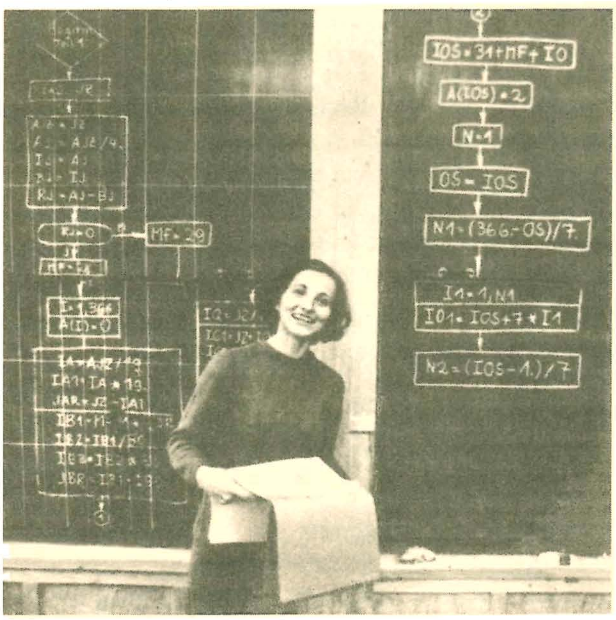
Werk der Millionen

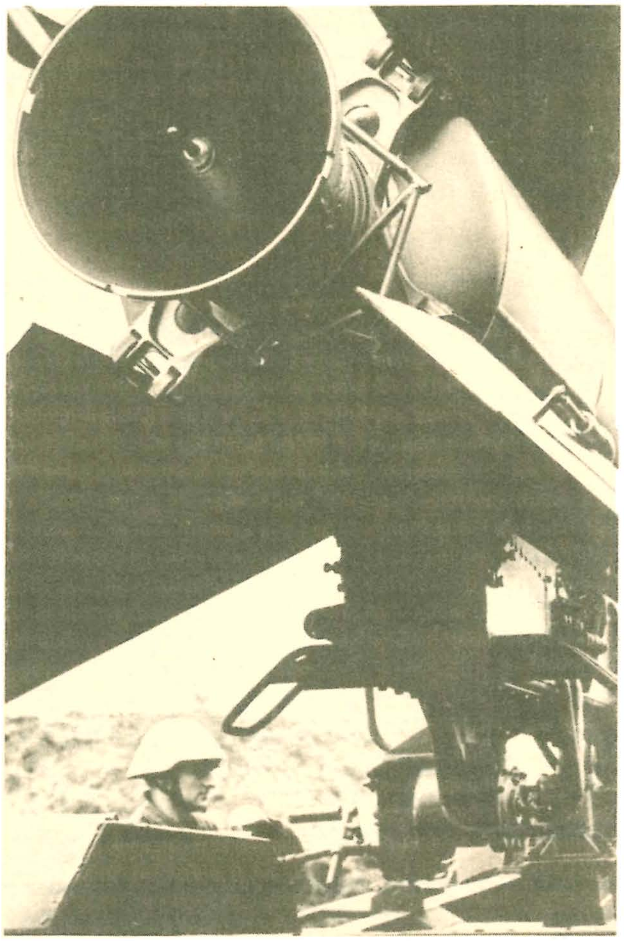
Ein Buch, entstanden in kollektiver Zusammenarbeit zwischen dem Urania-Verlag und dem Verlag Die Wirtschaft



In breitem Maße wird die Elektronik zur Steuerung von Produktionsprozessen eingesetzt. Modernes Sudhaus.

Auf allen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens ist die Gleichberechtigung der Frau verwirklicht. Dozentin bei der Ausbildung für Datenverarbeitung.





Unsere NVA, ausgerüstet mit modernsten Waffen, ist ein zuverlässiger Schutz unserer sozialistischen Errungenschaften.

Der repräsentativ gestaltete Band würdigt in Bild und Text den nicht leichten, aber erfolgreichen Weg, der von dem in 20 Jahren Geschaffenen ausgeht und mit der Zukunft verbindet: der Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution im entwickelten gesellschaftlichen System des Sozialismus. Der großformatige Titel, aus dem wir einige Fotos entnahmen, wurde zu Ehren des 20. Jahrestages der Deutschen Demokratischen Republik herausgegeben. Es beantwortet – insbesondere unseren jungen Lesern – die Frage: „Wer sind die Menschen, die das geschaffen haben?“

Redaktion *alpha*

Spezialklassen

an mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten von Universitäten und Hochschulen

Spezialklassen an mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten und Hochschulen sind Bestandteil des einheitlichen sozialistischen Bildungssystems. Sie wurden 1964 gegründet. Es sind allgemeinbildende Einrichtungen zur Förderung besonders begabter und leistungsstarker Schüler.

In einer zweijährigen Ausbildung, die mit dem Abitur abschließt, wird das Ziel verfolgt, die Absolventen durch Anwendung hochschulgemäßer Formen des Lehrens und Lernens zu befähigen, während des Studiums in den Studienkollektiven zu den fachlich und gesellschaftlich besten Studenten zu gehören. Bei entsprechenden Leistungen sollen sie im Fachstudium besonders gefördert werden, um sich zu wissenschaftlichen Spitzenkräften für das Hochschulwesen oder für die Volkswirtschaft zu entwickeln.

Spezialklassen bestehen z.Z. an folgenden Universitäten und Hochschulen:

- in Berlin und Halle je eine Klasse mit der besonderen Betonung der Fächer Mathematik und Physik;
- in Magdeburg und Karl-Marx-Stadt je eine Klasse mit Ausbildungsschwerpunkt Mathematik, Physik und Technik;
- in Merseburg werden jährlich zwei Klassen gebildet, die auf ein Studium der Chemie bzw. der chemischen Verfahrenstechnik vorbereiten.

Als allgemeinbildende Institution liegt der Ausbildung in den Spezialklassen in allen Fächern das Bildungs- und Erziehungsziel der Erweiterten Oberschule zugrunde. Wichtige Voraussetzung für eine hohe Intensität des Unterrichts, der von Angehörigen des Lehrkörpers der betreffenden Universitäten oder Hochschulen erteilt wird, ist die niedrige Klassenfrequenz von etwa 15 Schülern. Für den Fremdsprachenunterricht wird jede Klasse noch in zwei Gruppen geteilt.

Die besondere Betonung des Ausbildungsprozesses findet u. a. in der Stundentafel Berücksichtigung, die für die jeweiligen Schwerpunktfächer eine höhere Stundenzahl als die der Erweiterten Oberschule vorsieht. Dadurch können in diesen Fächern über den Lehrplan der EOS hinaus vertiefte und erweiterte Kenntnisse vermittelt werden. In allen Klassen werden naturwissenschaftliche Praktika durchgeführt.

Die Ausbildung ermöglicht dem Absolventen, eine von ihm gewünschte Studieneinrichtung zu wählen. Es wird angestrebt, daß sie ein Diplom-Studium in den Fachrichtungen Mathematik, Physik, Technik, Chemie oder chemische Verfahrenstechnik aufnehmen. Um eine optimale Förderung auch im Hochschulstudium zu gewährleisten, ist es zweckmäßig, daß der Absolvent sein Studium an der Hochschule aufnimmt, zu der seine Spezialklasse gehört.

Für die Aufnahme in eine Spezialklasse können sich Schüler der Klasse 10 der Oberschulen (einschließlich der Vorbereitungsklassen) mit hervorragenden Leistungen in den betreffenden Schwerpunktfächern bewerben. Vorbildliches gesellschaftliches Verhalten und ein Leistungsdurchschnitt von mindestens 2,0 in der 9. Klasse sind weitere Voraussetzungen, die der Bewerber erfüllen muß.

Für die Aufnahme in die Spezialklassen werden Eignungsprüfungen durchgeführt. Sie gliedern sich in eine schriftliche Fachklausur, in eine Deutscharbeit und in ein mündliches Aufnahmegespräch. Eine Zulassung ist nicht davon abhängig, welche Fremdsprachen der Schüler bisher erlernt hat.

Die Schüler der Spezialklassen wohnen mietfrei in Studentenheimen. Sie werden dort von Lehrern und Erziehern betreut. Die Ferienregelung unterscheidet sich im wesentlichen nicht von der EOS.

Zwischen den Ferien können die Schüler in regelmäßigen Abständen über das Wochenende zu ihren Eltern nach Hause fahren. Die Freizeit ist so bemessen, daß im Rahmen der schulischen Anforderungen auch außerschulischen Interessen nachgegangen werden kann. Neben der FDJ-Arbeit haben die Schüler die Möglichkeit, an Arbeitsgemeinschaften z. B. in Physik oder Mathematik, am fakultativen Sport, an kulturellen Veranstaltungen u. a. teilzunehmen.

Weitere Auskünfte erteilen die Leiter der Spezialklassen W. Ziemann, Humboldt-Universität Berlin, 102 Berlin, Burgstr. 26; W. Gille, Martin-Luther-Universität Halle, 402 Halle, Frankeplatz 1, Institut für Methodik des math.-nat. Unterrichts; R. Weber, Technische Hochschule Magdeburg, 301 Magdeburg, Boleslaw-Bierut-Platz 5; Dr. R. Müller, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 901 Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62; Dr. Zimmermann, Technische Hochschule für Chemie „Carl Schorlemmer", 42 Merseburg, Geusaer Straße.

Die nächsten Bewerbungen (Studienbeginn Sept. 1970) werden über den Direktor der OS bzw. EOS bis 31. 1. 1970 entgegengenommen.

Der *alpha*-Club, 29. OS Leipzig (88 Teilnehmer – 5 Arbeitsgemeinschaften), betreute im Rahmen der „Jungpionierfeste" sowie der „Bastelstube des Weihnachtsmannes" (Dez. 68) insgesamt 1800 Pioniere. 82 AG-Teilnehmer führten in 284 Stunden mit interessierten Pionieren (in Begleitung ihrer Lehrer oder Eltern – siehe Foto) mathematische Wettbewerbe (gestaffelt nach Schuljahren 1 bis 8) durch, korrigierten über 10000 Aufgaben, werteten aus (siehe unteres Foto) und bastelten mit Pionieren mathematische Modelle.

alpha-Wettbewerb 1968

Das sind sie, die 14022 Lösungen, eingesandt im Jahre 1968. Ich gratuliere im Namen des Redaktionskollegiums allen Jungen Mathematikern. Der Aufgabengruppe und den Korrektoren danke ich recht herzlich für die geleistete Arbeit.

J. Lehmann, Chefredakteur

Fakten

40 Lösungen wurden 1968 von Schülern der Klassen 11/12 eingesandt. Von 60 gestellten Wettbewerbsaufgaben wurden bei folgenden 15 Lösungen mehr als 20% der Einsendungen als „falsch gelöst“ bewertet.
W(6) 317 [65% falsch]; W(7) 182 [60%]; W(8) 327 [44%]; W(8) 137 [43%]; W(8) 186 [40%]; W(9) 190 [39%]; W(8) 218 [35%]; W(8) 278 [34%]; W(8) 328 [33%]; W(7) 243 [31%]; W(9) 280 [30%]; W(8) 203 [26%]; W(9) 191 [26%]; W(7) 275 [26%]; W(9) 189 [22%].
Von 14022 Lösungen wurden 1854 (rund 13%) als „falsch gelöst“ bewertet. Anerkennungsurkunden (bei mehr als 7 Antwortkarten pro Jahr) erhielten 800 Wettbewerbsteilnehmer. 20 Karten sandte die Post als „unzustellbar“ zurück. Bei 17 richtigen Lösungen fehlte die Angabe der Personalien.

Buchprämien

Wir danken den nachfolgenden Verlagen, welche uns Bücher im Gesamtwert von 1000 M für die Auszeichnung unserer besten Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb zur Verfügung stellten.

Redaktion *alpha*

B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig
Der Kinderbuchverlag, Berlin
Deutscher Militärverlag, Berlin
VEB Fachbuchverlag, Leipzig
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
Urania-Verlag, Leipzig, Jena, Berlin

Kollektive Beteiligung / Eingesandte Lösungen

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden (608), OS Rüdnitz (1281), Kalinin-OS Tröglitz (4908), POS Erxleben (5101), OS Parkentin (2561), EOS Worbis (562), OS Zaatzke (1931), Comenius-OS Burg (327), OS Altentreptow (202), ZOS Greiz-Pohlitz (66), J.-Brinkmann-OS Goldberg (2862), OS Markersbach und Gottleuba (8302), A.-Dürer-OS Aue (94), OS Heinrich Schliemann Neubukow (2567), OS I Teterow, OS Ebersbrunn (9507), E.-M.-Arndt-OS Greifswald (22), Kinderkurheim Max Hannemann Dahme (7962), OS Lauter (9406), OS Bergwitz (4401), POS Saßnitz (2355), POS VI Arnstadt (521), OS V Oelsnitz (9156), E.-Schneller-OS Waldenburg (9613), POS Alt-Töplitz (1501), OS VIII Hoyerswerda (77), Diesterweg-OS Spremberg (759), OS Andershof/Stralsund (23)

Berlin	291	Erfurt	1489
Frankfurt	410	Suhl	2473
Potsdam	619	Gera	364
Neubrandenb.	624	Leipzig	915
Rostock	1343	Cottbus	715
Schwerin	296	Dresden	1421
Magdeburg	590	K.-M.-Stadt	1680
Halle	792	zusammen	14022

	Klassenstufe 5				Klassenstufe 6				Klassenstufe 7			
Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt
1	172	109	149	258	177	176	161	337	182	76	59	135
	173	114	141	255	178	175	152	327	183	123	105	228
2	197	123	198	321	199	172	140	312	201	149	101	250
	210	135	220	355	213	154	122	276	216	141	94	235
3	233	75	79	154	238	143	137	280	243	118	67	185
	234	87	96	183	239	142	139	281	244	133	86	219
4	264	52	81	133	269	110	130	240	274	133	155	288
	265	30	47	77	270	102	108	210	275	92	62	154
5	312	38	46	84	317	69	82	151	322	74	38	112
	313	34	28	62	318	94	132	226	323	112	87	199
zus.		797	1085	1882		1337	1303	2640		1151	854	2005

	Klassenstufe 8				Klassenstufe 9				Klassenstufe 10/12			
Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt
1	186	222	167	389	190	156	72	228	194	280	144	424
	187	137	80	217	191	270	137	407	195	208	93	301
2	203	121	60	181	205	284	156	440	207	166	48	214
	218	171	79	250	220	189	89	278	222	165	56	221
3	248	179	81	260	253	170	38	208	258	191	61	252
	249	182	94	276	254	122	37	159	259	228	86	314
4	277	292	152	354	280	110	47	157	282	241	93	334
	278	90	51	141	281	116	42	158	283	217	42	259
5	327	81	62	143	332	166	84	250	338	177	40	217
	328	124	80	204	333	62	12	74	339	152	33	185
zus.		1509	906	2415		1645	714	2359		2025	696	2721

Preisträger

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5/6*

Pawel Kröger 7031 Leipzig [52 Antwortkarten]; **Christoph Scheurer** 9611 Glauchau-Gesau [42]; **Sabine Anders** 75 Cottbus [40]; **Ole-André Strzalla** 22 Greifswald [30]; **Jörg Hutschenreiter** 8020 Dresden [26]; **Uwe Quasthoff** 7022 Leipzig [24]; **Ralph Lehmann** 1273 Petershagen [24]; **Gerd Falk** 1532 Kleinmachnow [22]; **Angelika Kirchhoff** 701 Leipzig [21]; **Kerstin Bachmann** 402 Halle [20]; **Bernd Mathiszik** 50 Erfurt [20]; **Regina Müller** 8027 Dresden [19]; **Bernd Zaddach** 75 Cottbus [19]
Karin Scheller 328 Genthin; Matthias Scharrnbeck 94 Aue; Martina Wiechmann 4417 Zschornewitz; Gisela Köhler 926 Hainichen; Elke Warbende 26 Güstrow; Eckhard Schadow 14 Oranienburg; Heike Jurack 8502 Burkau; Hans-Jochen Rodner 3014 Magdeburg; Christina Feige 57 Mühlhausen; Hans-Jürgen Förster 1532 Kleinmachnow; Elke Schneider 50 Erfurt; Roswitha Schlotte 90 Karl-Marx-Stadt; Viktoria Weise 48 Naumburg; Hans-Georg Meyer 50 Erfurt; Bernd Georgi 8709 Herrnhut; Jan-Michael Keller 23 Stralsund; Bettina Zabel 57 Mühlhausen; Karin Weyh 6081 Fambach; Ute Strey 608 Schmalkalden; Lutz Püffeld 1422 Hennigsdorf; Frank Benkert 7031 Leipzig

Klassenstufe 6/7*

Albrecht Heß 8027 Dresden [44 Antwortkarten]; **Burkhard Dähn** 222 Wolgast [42]; **Ulf Brüstel** 7401 Ziegelheim [41]; **Claus-Detlef Bauermeister** 8019 Dresden [35]; **Ehrenfried Zschech** 86 Bautzen [33]; **Frank Ihlenburg** 22 Greifswald [31]; **Angela Rohrbeck** 2302 Franzburg [29]; **Ute Winkler** 153 Teltow [25]; **Rolf Böllmann** 5505 Ilfeld [24]; **Hans-Gert Gräbe** 50 Erfurt [23]; **Frank Baumgartl** 9412 Schneeberg [22]; **Paul Ortlepp** 60 Suhl [21]; **Helge Rülicke** 18 Brandenburg [21]; **Udo Winkler** 829 Kamenz [21]
Stefan Schulze 5211 Oberwillingen; Volker Gumbert 4255 Klostermansfeld; Ralf Suchert 8302 Bad Gottleuba; Stefan Katzschmann 925 Mittweida; Rainer Zwerck 24 Wismar; Astrid Dabel 2321 Elmenhorst; Eberhard Manske 6088 Steinbach-Hallenberg; Wolfgang Schinkothe 4731 Sachsenburg; Christian Höfl 222 Wolgast; Jörg Mannl 8255 Nossen; Bernd Klipps 2052 Boddin; Herwig Gratias 523 Sömmerda; Mario Ziller 1035 Berlin; Bernd Singer 99 Plauen; Bernd Kutnick 205 Teterow; Gerd Hantsche 8142 Radeberg; Gerd Petzold 9501 Cunersdorf; Axel Mesing 222 Wolgast; Ulrich Tetzlaff 1553 Friesack; Andreas Stern 22 Greifswald; Monika Seiler 53 Weimar

Klassenstufe 7/8*

Steffen Oswald 8027 Dresden [37 Antwortkarten]; **Harald Herrmann** 9301 Hammerunterwiesenthal [35]; **Ralf Hein** 9611 Remse [29]; **Wolfgang Zahl** 532 Apolda [28]; **Lutz Ranke** 59 Eisenach [29]; **Peter Schmidt** 532 Apolda [27]; **Elke Wiemann** 8245 Glashütte [27]; **Ingolf Kunath** 825 Meißen [26]; **Guntram Pausch** 7206 Lobstädt [25]; **Beate Weise** 48 Naumburg [24]; **Jürgen Zabel** 57 Mühlhausen [24]; **Gernot Spiewok** 22 Greifswald [24]; **Harald Hertel** 402 Halle [23]
Manfred Riemer 9306 Elterlein; Peter Mathé 29 Wittenberge; Klaus-Jürgen Kreul 88 Zittau; Ursula Baier 825 Meißen; Bärbel Schulz 75 Cottbus; Reinhard Liesigk 44 Bitterfeld; Michael Hoffmann 238 Barth; Carmen Hauptmann 8245 Glashütte; Wolfgang Jenschke 8038 Dresden; Andreas Heß 794 Jessen; Andreas Juhl 425 Eisleben; Albrecht Tanzer 7202 Böhlen; Joachim Selle 5401 Großfurra; Helga Daweritz 7291 Neußen; Hans-Herbert Luchtmann 2405 Neukloster; Gabriele Winter 5401 Großfurra; Antje-Christine Keller 23 Stralsund; Klaus Pannenberg 2031 Duvier; Joachim Stranz 128 Bernau; Beate Stephan 1502 Potsdam-Babelsberg; Wilfried Steudel 652 Eisenberg; Manfred Knörgen 402 Halle; Jörg Lehnert 2034 Tutow; Achim Bischoff 128 Bernau

Klassenstufe 8/9*

Harald Englisch 7022 Leipzig [32 Antwortkarten]; **Gerd Wöhl** 55 Nordhausen [28]; **Frank Täubner** 754 Calau [25]; **Jürgen Voigt** 9533 Wilkau-Haßlau [26]; **Heinz Marbes** 128 Bernau [26]; **Dietmar Wegner** 3601 Dardesheim [26]; **Jürgen Schefter** 795 Bad Liebenwerda [26]; **Bernd Hofmann** 8808 Niederoderwitz [25]; **Rainer Staudte** 9501 Culitzsch [24]; **Frank Panser** 50 Erfurt [24]; **Wilfried Kröger** 25 Rostock [23]; **Eckhard Blatt** 25 Rostock [23]; **Michael Chares** 9533 Wilkau-Haßlau [22]; **Wolfgang Riedel** 90 Karl-Marx-Stadt [22]
Claudia Asser 22 Greifswald; Felicitas Bartusch 79 Falkenberg; Regina Oberwinter 1503 Potsdam-Bornstedt; Josef Kaufhold 5601 Silberhausen; Petra Schönwälder 703 Leipzig; Friedemann Hagert 9406 Lauter; Hans-Peter Falken 37 Wernigerode; Renate Reckziegel 5808 Tabarz; Frank-Uwe Simon 801 Dresden; Ulf Briesenick 171 Luckenwalde; Reinhard Uhle 961 Glauchau; Ulrich Golle 962 Werdau; Roswitha Thommes 3602 Badersleben; Thomas Winkler 9933 Bad Elster; Hans-Jürgen Mehls 5603 Dingelstädt; Hans-Dieter Sparing 65 Gera; Frank Kretschmar 7043 Leipzig; Georg Burkhardt 6085 Oberschönau; Dietmar Lein 521 Arnstadt; Klaus-Dieter Kunze 23 Stralsund; Hartmut Munk 6081 Herges-Hallenberg; Renate Zimmermann 8036 Dresden; Detlev Bage 3223 Seehausen; Petra Wußing 7022 Leipzig; Detlev Karl 608 Schmalkalden; Dieter Recknagel 6088 Steinbach-Hallenb.

Klassenstufe 9/10*

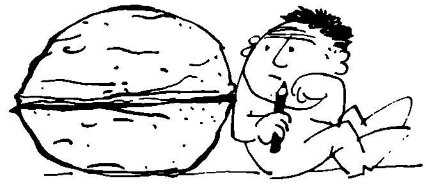
Wolfgang Köhler 58 Gotha [22 Antwortkarten]; **Helmut Meister** 8021 Dresden [22]; **Eckart Scholz** 5304 Blankenhein [20]; **Rainer Wolf** 117 Berlin [18]; **Rolf Stephan** 809 Dresden [18]; **Reinhard Wobst** 806 Dresden [18]; **Frank Müller** 798 Finsterwalde [17]; **Arnulf Möbius** 7124 Holzhausen [17]; **Thomas Bauer** 7022 Leipzig [18]; **Bernd Oldenburger** 7261 Merkwitz [18]; **Thomas Kühn** 5812 Waltershausen [17]; **Hans-Jürgen Grundmann** 6508 Weida [17]; **Claus Lange** 97 Auerbach [17]
Jürgen Dubslaff 50 Erfurt; Bernd Platzer 4204 Bad Lauchstädt; Gert Keller 8023 Dresden; Thomas Ullrich 50 Erfurt; Hans-Dieter Lucas 354 Osterburg; Karl-Heinz Breitmoser 20 Neubrandenburg; Rolf Sommer 993 Adorf; Dietmar Tanzer 7202 Böhlen; Joachim Winkler 9101 Herrenhaide; Steffi Lorenz 703 Leipzig; Gudrun Bohn 7022 Leipzig; Uwe-Peter Sandberg 28 Ludwigslust; Karin Götze 7908 Prettin; Elke Hauptmann 8245 Glashütte; Klaus Ditze 36 Halberstadt; Annerose Mattig 50 Erfurt; Siegfried Kropf 3251 Hakeborn; Dietmar Soyka 759 Spremberg; Rolf Osterloh 3253 Egeln; Thomas Naumann 8020 Dresden; Gerhard Spens 5034 Erfurt-Hochheim; Beate Täubner 754 Calau; Günter Brehmer 3253 Egeln; Jörg Büchner 75 Cottbus; Uwe Treß 703 Leipzig

Klassenstufe 10/12*

Peter Oswald 8027 Dresden; **Rainer Richter** 2253 Seebad Bansin; **Monika Günther** 6056 Schleusingen; **Ludwig Paditz** 826 Lommatzsch; **Wolfgang Kernchen** 402 Halle; **Christoph Clauß** 9163 Gornsdorf; **Ulrike Albrecht** 1242 Bad Saarow; **Fred Mütze** 7702 Bernsdorf; **Matthias Schulz** 8020 Dresden; **Rainer Gutjahr** 5807 Ohrdruf
Eberhard Diezel 53 Weimar; Holger Gürgens 432 Aschersleben; Karl Paul 1544 Elstal; Thomas Martin 703 Leipzig; Thomas Näther 25 Rostock; Eberhard Paschkowski 402 Halle; Maria-Ilona Pink 102 Berlin; Andreas Murr 523 Sömmerda; Manfred Schurz 825 Meißen; Herbert Zinke 4371 Libehna; Günter Schmidt 77 Hoyerswerda; Christian Philipp 8506 Ohorn; Helmut Krügener 354 Osterburg; Werner Berndt 402 Halle

* Die Preisträger wurden **fett gedruckt** angegeben; die Reihenfolge wurde entsprechend Kartenzahl **und** Prädikat festgelegt.

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb



letzter Einsendetermin 14. Juni 1969

5 ▲ 367 Ist die Summe zweier natürlicher Zahlen kleiner als 13, dann ist ihr Produkt nicht größer als 36. Begründe diese Aussage mit Hilfe einer Tabelle!

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 368 Ein Schüler las am ersten Tag genau 27 Seiten eines ausgeliehenen Buches; am zweiten Tag las er sechs Seiten weniger als am ersten. Er hatte nun noch drei Viertel der Seitenzahl des Buches zu lesen.
Wieviel Seiten enthält dieses Buch?

▲ 369 Eine Strecke $\overline{AB}$ ist 72 m lang. Durch die Punkte C und D wird sie in drei Teilstrecken geteilt. Die Teilstrecke $\overline{CD}$ ist doppelt so lang wie die Teilstrecke $\overline{AC}$. Die Teilstrecke $\overline{DB}$ dagegen besitzt die dreifache Länge der Teilstrecke $\overline{CD}$. Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

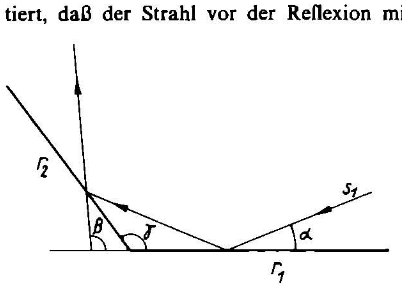
W 5 ■ 370 Ein Junger Pionier einer Zeltbelegung kauft Schrippen zu 5 Pf je Stück und Knüppel zu 8 Pf je Stück ein; er hat dafür insgesamt 72 Pf zu bezahlen. Jeder Junge Pionier seines Zeltes erhält entweder genau eine Schrippe oder genau einen Knüppel. Mit wieviel Jungen Pionieren ist das Zelt belegt?

W. Träger, Döbeln

W 5 ■ 371 Es seien a und b natürliche Zahlen, und es gelte $a < b$. Entscheide, welcher der beiden Brüche $\frac{2a}{b}$ und $\frac{2b}{a}$ dann größer ist. Begründe deine Entscheidung!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

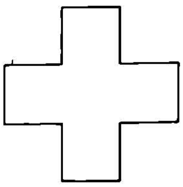
6 ▲ 372 Ein Lichtstrahl s_1 werde an den Spiegeln r_1 und r_2 nacheinander so reflektiert, daß der Strahl vor der Reflexion mit



der Ebene von r_1 den Winkel α und nach der Reflexion an r_2 mit der Ebene von r_1 den Winkel β einschließt. (Der Lichtstrahl verlaufe in einer Ebene senkrecht zu r_1 und r_2.) Es ist der Winkel γ, unter dem die beiden Spiegel gegeneinander geneigt sind, durch die Winkel α und β auszudrücken!

Dr. E. Schröder, Dresden

▲ 373 Die nachstehend abgebildete Kreuzfigur ist ein geschlossener Streckenzug. Die Strecken sind dabei einander kongruent; je zwei benachbarte Strecken stehen aufeinander senkrecht. Verwandle diese Kreuzfigur durch Einzeichnen von vier Strecken



unter alleiniger Benutzung von Bleistift und Lineal (ohne Maßeinteilung) in ein flächengleiches Quadrat!

Dr. E. Schröder, Dresden

▲ 374 Ersetze jede Leerstelle durch eine Ziffer, so daß du stets eine wahre Aussage erhältst. Beachte dabei, daß es mehrere Möglichkeiten geben kann.

a) $3 \mid 8327\square$ (lies: 3 ist Teiler von $8327\square$),
b) $3 \nmid 84\square72$ (lies: 3 ist nicht Teiler von $84\square72$),
c) $9 \mid 23\square58$,
d) $4 \nmid 587\square6$.

W 6 ■ 375 Vier Freunde, und zwar Axel, Bernd, Ernst und Fred, sind entweder Abonnent des Jugendmagazins „Neues Leben" oder der Zeitung „Junge Welt". Von diesen Freunden wissen wir:

a) Der 19jährige ist nicht Abonnent der „Jungen Welt", aber der 16jährige und Ernst haben die „Junge Welt" abonniert.
b) Axel und der 17jährige sind Abonnent von „Neues Leben", Bernd dagegen nicht.
c) Der 20jährige, der 19jährige und Bernd waren kürzlich Gäste auf der Geburtstagsfeier von Fred.

Es ist herauszufinden, wie alt jeder der vier Freunde ist und welche Zeitung bzw. Zeitschrift er abonniert hat.

OL Th. Scholl, Berlin

W 6 ■ 376 Ein Mathematiklehrer wurde nach seinem Geburtstag gefragt; seine Antwort lautete scherzhaft: „Dividiere ich die Zahl meines Geburtsjahres durch 71, durch 41 bzw. durch 43, so erhalte ich jeweils als Rest mein gegenwärtiges Alter in vollen Jahren, die Zahl des Tages, an dem ich geboren wurde, bzw. die Zahl meines Geburtsmonats." Wann wurde dieser Lehrer geboren, wenn er zum Zeitpunkt der Fragestellung 25 Jahre alt war, das heißt, seinen 25. Geburtstag bereits gefeiert hatte, und wenn die Frage im Jahre 1968 an ihn gerichtet wurde?

R. Richter, Schkölen

7 ▲ 377 Vier befreundete Ehemänner mit den Vornamen Klaus, Franz, Willi und Hans betraten ein Blumengeschäft, um anläßlich des Internationalen Frauentages für ihre Ehefrauen Tulpen zu kaufen. Die Art ihrer Bestellung war etwas ungewöhnlich; fast wäre die Verkäuferin in Verlegenheit geraten. Franz sagte nämlich, er wolle ein Viertel der von allen vier Ehemännern zusammen bestellten Tulpen kaufen. Willi meinte, daß er zwei weniger als ein Drittel aller von ihnen gewünschten Blumen kaufe, während Klaus sechs weniger als die Hälfte all dieser Tulpen verlangte. Hans dagegen bestellte drei mehr als die Hälfte der von Franz gekauften Blumen. Die Verkäuferin überlegte, rechnete und übergab kurz darauf jedem der vier Ehemänner die jeweils gewünschte Anzahl Tulpen. Wieviel Tulpen kaufte jeder dieser vier Ehemänner?

H. Scholz, Niedergurig, Krs. Bautzen

▲ 378 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus den Stücken $a + b$, $b + c$ und $a + c$. Die Konstruktion ist zu beschreiben.

A. Möbius, EOS Leibniz, Leipzig, Kl. 10

▲ 379 Bestimme alle rationalen Zahlen x, die die Gleichung $|x| = \frac{x}{2} + 2$ erfüllen! (Löse die Aufgabe mit einer geeigneten Fallunterscheidung!)

W. Träger, Döbeln

W 7 ■ 380 Jeder Innenwinkel eines einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks wird durch die Diagonalen in untereinander kongruente Winkel zerlegt. Von jeder Ecke eines Sechsecks aus lassen sich drei Diagonalen ziehen; sie zerlegen den Innenwinkel α in vier untereinander kongruente Winkel α_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Es ist zu beweisen, daß jeder dieser Winkel $\alpha_i = 30°$ beträgt.

F. Görnert, Ribnitz-Damgarten

W 7 ■ 381 Auf einer Faschingsfeier werden von vier vorhandenen Hüten, nämlich zwei schwarzen, einem weißen und einem grünen Hut, drei Hüte drei sich im Kreise gegenüberstehenden Personen aufgesetzt. Diese drei Personen sehen zunächst alle vier Hüte. Keiner der drei kann aber sehen, welche Farbe der ihm aufgesetzte und der nicht verwendete Hut besitzt. Jede der drei Personen sieht die seinen Mitspielern aufgesetzten Hüte. Nun werden alle drei nach der Farbe des ihnen aufgesetzten Hutes befragt. Da der erste aus den ihm sichtbaren Hüten nicht schließen kann, welche Farbe sein Hut hat, sagt er: „Ich weiß nicht, welche Farbe mein Hut hat." Dasselbe gilt für den zweiten. Erst aus diesen beiden Antworten kann der dritte schließen, welche Farbe sein Hut hat. Es ist zu entscheiden und zu begründen, welche Farbe der Hut der dritten Person hat. *W. Träger, Döbeln*

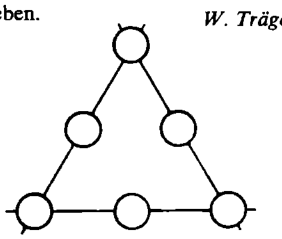
8 ▲ 382 Einge gegebene Strecke AB, deren Länge 11 cm beträgt, ist zu halbieren. Bei der Ausführung dieser Konstruktion sollen nur ein Lineal und ein Zeichendreieck benutzt werden. *Dr. G. Hesse, Radebeul*

▲ 383 Es seien m und n zwei ganze, einander teilerfremde Zahlen, d. h. der größte gemeinsame Teiler der Zahlen m und n sei gleich 1. Es ist zu beweisen, daß dann niemals gleichzeitig

$$4|(m + n) \text{ und } 4|(m - n)$$

gilt, d. h., daß die Zahlen $m + n$ und $m - n$ nicht den gemeinsamen Teiler 4 haben.
Ferner sind zwei Zahlen m und n anzugeben, die den obigen Bedingungen genügen, und es ist zu zeigen, daß die Zahlen $m + n$ und $m - n$ nicht den größten gemeinsamen Teiler 4 haben. *W. Träger, Döbeln*

W 8 ■ 384 In die markierten Kreise, die in der beigefügten Figur auf den Ecken und Seitenmitten eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind, sind voneinander verschiedene natürliche Zahlen einzusetzen, so daß die Produkte der drei jeweils auf einer der gezeichneten Geraden gelegenen Zahlen sämtlich gleich 30 sind. Alle zulässigen Belegungen, die nicht durch eine Spiegelung oder Drehung auseinander hervorgehen, sind anzugeben. *W. Träger, Döbeln*



W 8 ■ 385 Ordne die folgenden drei Zahlen:

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{301}{501}, \quad c = \frac{3001}{5001}!$$

Beginne mit der kleinsten Zahl!
OStR. Dr. R. Lüders, Berlin

9 ▲ 386 Um wieviel Millimeter würde sich der Meeresspiegel heben, wenn alle Eismassen und Gletscher der Arktis und Antarktis, die ein Gesamtvolumen von 28,8 Millionen km^3 haben, abtauen würden? Der Radius der Erde beträgt $R = 6370$ km; 70,8% der Oberfläche der Erde sind vom Meer bedeckt. Die Dichte des Eises beträgt 0,9 g cm^{-3}.
OStR Dr. R. Lüders, Berlin

▲ 387 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn die Summe von vier beliebigen natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist das Produkt aus diesen vier Zahlen eine gerade Zahl. *StR G. Schule, Herzberg/Elster*

▲ 388 Der berühmte Berliner Mathematiker *Jakob Steiner* (1796 bis 1863) untersuchte gewisse Konstruktionen, die sich nur mit dem Lineal allein ausführen lassen.
Gegeben seien zwei parallele Geraden g und h und auf h zwei voneinander verschiedene Punkte A und B.
Jakob Steiner fand heraus, daß die Strecke AB allein mit Hilfe eines Lineals halbiert werden kann. Gib die Konstruktion an!
Dr. E. Hameister, Möser b. Burg

W 9 ■ 389 Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen in Berlin-Grünau im August 1968 erhielten sechs Länder insgesamt 15 Medaillen. Keines dieser Länder ging ohne Medaille aus den Kämpfen hervor. Jedes Land erhielt nicht mehr als 5 Medaillen, da in 5 Sparten gekämpft wurde.
Die DDR erhielt mehr Medaillen als jedes der anderen fünf Länder, die UdSSR und Rumänien erhielten die gleiche Anzahl von Medaillen und mehr Medaillen als jedes der noch nicht erwähnten Länder. Die Niederlande erhielt mehr Medaillen als jedes der nun noch übrigen beiden Länder.
Wieviel Medaillen erhielten die DDR, die UdSSR und Rumänien?
OStR Dr. R. Lüders, Berlin

W 9 ■ 390 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung

$$\frac{x + 1}{x - 1} > 1 \text{ erfüllt ist.}$$

StR G. Schulze, Herberg/Elster

10 ▲ 391 Welche der folgenden fünf Bedingungen ist der Bedingung
$x^2 - x - 6 < 0$ äquivalent?
(1) $x > -2$; (2) $x < 3$; (3) $x > 3$ und $x < -2$; (4) $-2 < x < 3$; (5) $x > 3$ oder $x < -2$.
(Zwei derartige Bedingungen heißen einander äquivalent, wenn sie die gleichen Erfüllungsmengen besitzen, d. h. in der vorliegenden Aufgabe, wenn die Ungleichungen dieselben Lösungsmengen haben).
StR G. Schulze, Herzberg/Elster

▲ 392 Aus vier reellen Zahlen a, b, c und d lassen sich bekanntlich sechs Summen von je zwei Zahlen bilden, und zwar
$a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$, $c + d$.
a) Es sollen nun vier Zahlen angegeben werden, bei denen diese Summen (jedoch nicht notwendig in der angegebenen Reihenfolge) gleich 12, 15, 17, 17, 19 bzw. 22 sind.
b) Sind in dem vorliegenden Fall die Zahlen a, b, c, d (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig durch die Angabe der obigen Summen bestimmt?
c) Es sind diejenigen Bedingungen anzugeben, denen die vier Zahlen a, b, c und d genügen müssen, damit sie durch die Angabe der obigen Summen von je zwei Zahlen (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig bestimmt sind.
W. Burmeister, EOS Dresden-Süd, Kl. 10

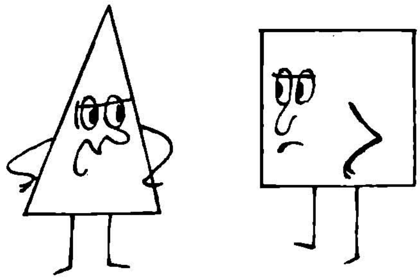
W 10/12 ■ 393 Von 66 Mitgliedern einer Bezirkssektion der Mathematischen Gesellschaft korrespondiert jeder mit jedem. Jeder Briefwechsel zwischen je zwei Wissenschaftlern dieser Bezirkssektion betrifft jeweils genau eine der Disziplinen Analysis, Zahlentheorie, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für eine Schulung „olympiaverdächtiger" Mathematik-Kandidaten sollen von diesen 66 Mathematikern drei Wissenschaftler gewonnen werden, die alle über das gleiche Teilgebiet korrespondieren. Die Sekretärin der Bezirkssektion erhält den Auftrag, eine solche Dreiergruppe aus der Kartei ausfindig zu machen. Ihr erster Versuch scheitert, da der beliebig herausgesuchte Mathematiker Müller zwar mit den Mathematikern Schulze und Lehmann über Analysis in Briefwechsel steht, beide aber untereinander über Geometrie korrespondieren. Wer kann ihr helfen? Gibt es überhaupt eine solche Dreiergruppe unter den 66 Mathematikern?
M. Rehm, Berlin

W 10/12 ■ 394 Am 26. Oktober 1968 startete das sowjetische Raumschiff „Sojus 3" und wurde auf eine Erdumlaufbahn gebracht, deren Apogäum (größter Abstand von der Erdoberfläche) 225 km betrug. Wie groß ist der Flächeninhalt des Gebietes der Erde, das der Kosmonaut Oberst *Georgi Beregowoi* aus einer Entfernung von 225 km überblicken konnte?
Dabei sei angenommen, daß dieses Gebiet die Gestalt einer Kugelkappe (mit dem Radius 6370 km) hat; die Lichtbrechung (sphärische Refraktion) soll nicht berücksichtigt werden. *G. Grunewald, Luckenwalde*

An unsere Wettbewerbsteilnehmer

- ☐ Jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einsenden!
- ☐ Adresse deutlich schreiben (möglichst Druckschrift)!
- ☐ Nummer der Wettbewerbsaufgabe nicht vergessen!
- ☐ Im Lösungstext deutlich schreiben!
- ☐ Endergebnisse hervorheben (unterstreichen, farbig kennzeichnen)!

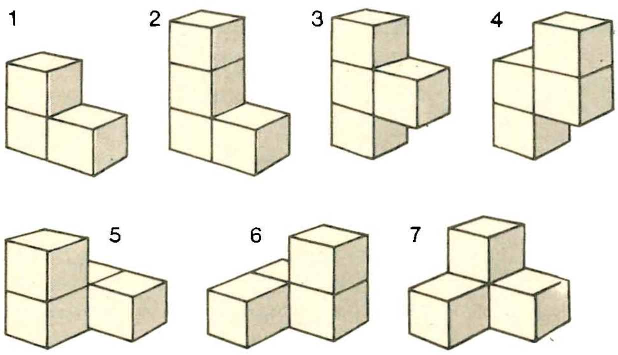
In freien Stunden alpha heiter



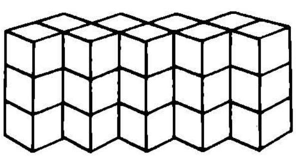
„Denken Sie bloß nicht, mir fehlt eine Ecke!“
Aus: Zeit im Bild 42/68

Der Soma-Würfel

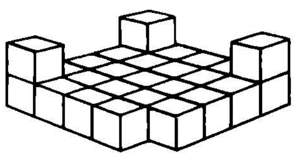
Der dänische Schriftsteller *Piet Hein* hat den Soma-Würfel erfunden. Baut Euch die sieben Teile aus Kinderbausteinen oder laßt Euch von einem Tischler die sieben Teile herstellen. Günstige Größe: 5 cm Kantenlänge eines kleinen Würfels. Man kann nun aus den sieben Teilen einen großen Würfel bauen (3^3 Würfel). Bis jetzt sind dafür mehr als 230 verschiedene Lösungen bekannt. Wenn Ihr den Würfel habt, könnt Ihr versuchen, die „Mauer“ oder das „Schloß“ zu bauen. Es müssen immer alle sieben Teile verwendet werden. Entwickelt neue Soma-Figuren und findet einen treffenden Namen dafür! Sendet eine Skizze an die Redaktion! Die besten Figuren werden in einer späteren Ausgabe veröffentlicht. Viel Spaß beim Knobeln und Bauen wünscht *alpha*-heiter!



Mauer



Schloß



Wer ist der Täter?

Sieben Schüler stehen im Verdacht, einen vorbereiteten Tafeltext verändert zu haben. Täter ist derjenige, von dem sich mit absoluter Sicherheit sagen läßt, wie er mit Vor- und Zunamen heißt. Einer heißt mit Zunamen Schulze, zwei heißen Meier und vier heißen Lehmann. Einer hört auf den Vornamen Franz, einer auf Fritz, einer auf Karl und vier haben den Vornamen Johannes. Wer ist der Täter?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Bitte richtig verschieben!

Die folgenden Wörter sind in geeigneter Weise gegeneinander zu verschieben. Geschieht das richtig, so erhält man in zwei Senkrechten die Namen von zwei Linien, die man als „Kegelschnitte“ bezeichnet.

PROZENTSATZ
PARALLELE
GRUNDLINIE
ABSZISSE
BILDPUNKT
GLEICHSETZUNGSVERFAHREN
OBERFLÄCHE

OStR K.-H. Lehmann, V.L.d.V. Berlin

Magische Quadrate

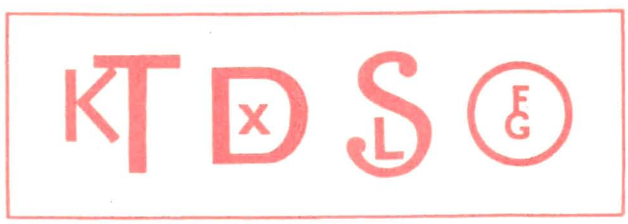
1	2	3	4
2			
3			
4			

5	6	7	8
6			
7			
8			

1. norweg. Mathematiker
2. griech. Buchstabe
3. engl. Universitätsstadt
4. Gegenteil von „kurz“
5. Nebenfluß der Loire
6. Dreieckstransversale
7. Moralbegriff
8. Schiffstau

OL H. Herzog, V. L. d. V. Leipzig

Was bedeutet das?

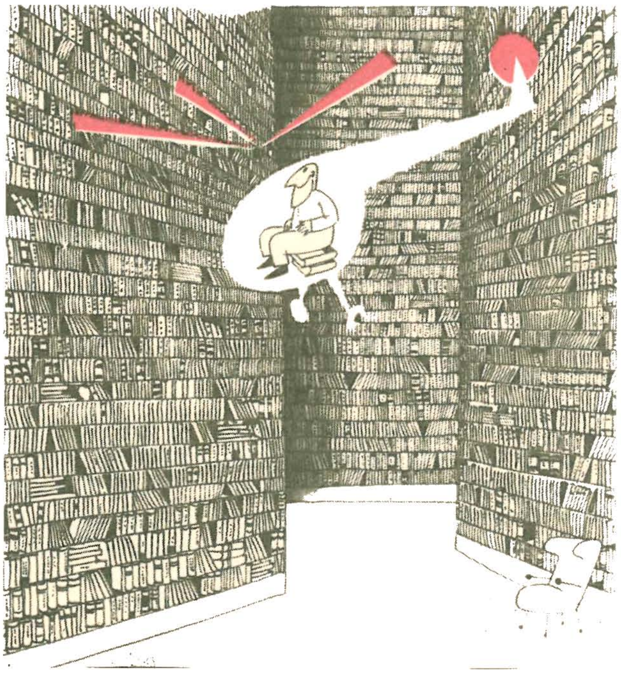


Totgesagter Gelehrter

Felix Klein (1849 bis 1925) pflegte in seiner Vorlesung über Gruppentheorie folgende Geschichte seinen Zuhörern zum besten zu geben:

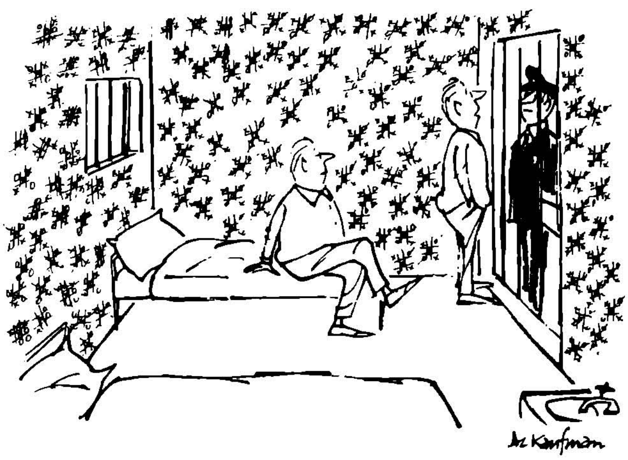
Auf dem denkwürdigen Pariser Mathematikerkongreß im Jahre 1900 wurde in einer schlichten Feierstunde aller bedeutenden Mathematiker gedacht, die in den letzten zehn Jahren das Zeitliche gesegnet hatten. U. a. wurde der Gruppentheoretiker *Camille Jordan* (1838 bis 1922), Professor an der École Polytechnique, gest. am 7. 11. 1898, genannt. Da erhob sich in den letzten Reihen eine hagere Gestalt, um der Versammlung zu verkünden, daß an der Angabe seines Todesdatums wenigstens die Jahreszahl nicht stimmen könne, da er noch am Leben sei. (Jordan starb am 20. Januar 1922 in Mailand.)

Mitgeteilt von M. Otto, Köthen



Mein Großvater hatte viele Bücher. Leider war er so vergeßlich, daß er meist stundenlang das Buch suchte, auf dem er gerade saß.

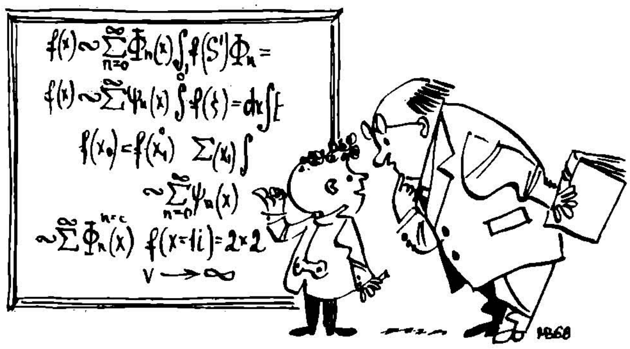
Aus: Im siebenten Himmel v. Vladimir Fuka, Praha



„Any chance of being moved to a new cell?"

(Besteht irgendeine Möglichkeit, in eine neue Zelle umgesetzt zu werden?)

Aus: Recreational mathematics magazine 13/63, Kent (Ohio)



Glauben Sie mir nun, daß $2 \times 2 = 4$ ist?

W. Malachow, Moskau

Aus: „The Teacher"

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (8./9. 2. 1969)

Klassenstufe 7

1. Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.
a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!
b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

2. Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z. B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden.
Ermittle
a) für $n = 7$ b) für $n = 10$
c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n die Anzahl dieser Darstellungen!

3. Beweise folgenden Satz:
Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks $\Delta\ ABC$ das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

4. Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, daß einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen. Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln!

5. Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1.
Konstruiere ein Dreieck $\Delta\ ABC$, in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!

6. Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.
Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?
(Der 30. 4. 1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

Klassenstufe 8

1. Beweise folgenden Satz:
Jedes Dreieck $\Delta\ ABC$ läßt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

2. Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.
Beweise, daß in jedem Falle (d. h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

3. Es ist zu beweisen:
Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei Division durch 9 den Rest r.

4. Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b\ (b < a)$ ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!
Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

5. Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: „Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig."
a) Ist die Behauptung wahr?
b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

6. Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:
(1) $d > c$
(2) $a + b = c + d$
(3) $a + d < b + c$
Ordne die Zahlen der Größe nach (beginne mit der größten Zahl)!

Klassenstufe 9

1. Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.
„Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 5 und quadrierst sie. Das wäre in deinem Falle 64. Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17. Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42."
Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

2. Konstruieren Sie ein Dreieck $\Delta\ ABC$ aus a, $b + c$ und α! Dabei sind a, b, c die Längen der Dreieckseiten und α die Größe des Winkels $\sphericalangle\ BAC$.

3. Geben Sie alle Zahlentripel (a, b, c) an, die die Gleichungen

$$a + b + c = s_1 \qquad a - b + c = s_3$$
$$a + b - c = s_2 \qquad a - b - c = s_4$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, daß die Mengen der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

4. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\Delta\ ABC$.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

5. Es ist zu beweisen, daß für jede ungerade Zahl n die Zahl

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1$$

durch 512 teilbar ist.

6. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.
Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, daß zur Angabe dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht!

Klassenstufe 10

1. Im Dreieck $\Delta\ ABC$ sei $\overline{AB} = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so daß ein Trapez

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil.

Karl Manteuffel

Dekan der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften des Wissenschaftlichen Rates der TH Magdeburg

Der Schulausflug

▲ 395 Die Oberschule Grüntal führt ihren Wandertag durch. Da der Direktor verhindert ist, leitet ein Mathematiklehrer den Ausflug. Am nächsten Tage erkundigt sich der Direktor danach, wieviel Schüler teilgenommen haben. Die Antwort des Mathematiklehrers lautet: „Ganz gleich, ob die Schülerinnen und Schüler zu zweit, zu dritt, zu viert, zu fünft oder zu sechst angetreten waren, immer mußte der letzte allein stehen; beim Antreten in Siebener-Reihen dagegen gab es keinen Rest. Die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften ist die Anzahl der Teilnehmer am Ausflug.“

Fragen: a) Wie groß ist die Anzahl der Teilnehmer am Ausflug?

b) Welche anderen natürlichen Zahlen haben dieselben Eigenschaften?

Die Technische Hochschule „Otto von Guericke“ wurde im Jahre 1953 als Hochschule für Schwermaschinenbau in Magdeburg gegründet. In einem bedeutenden Industriezentrum unserer Republik gelegen, vermochten sich Lehre und Forschung schnell zu entwickeln. So wurde in kurzer Zeit aus der Spezialhochschule eine Hochschule mit polytechnischem Charakter. Bereits 1961 konnten daher dieser Hochschule der Status einer Technischen Hochschule und der verpflichtende Name Otto von Guerickes verliehen werden.

Als die VI. Wissenschaftliche Jahreskonferenz der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Magdeburg stattfand (10. bis 15. 2. 1969), waren es fast auf den Tag genau 15 Jahre, daß im Jahre 1954 das Institut für Mathematik und Mechanik mit 1 Oberassistenten und 2 Assistenten seine Tätigkeit aufnahm. Aus diesen Anfängen entwickelten sich die Gebiete Mathematik, Mechanik, Rechentechnik und Datenverarbeitung, in denen heute 12 Professoren und Dozenten, 70 wissenschaftliche Mitarbeiter und zahlreiche technische Kräfte, Arbeiter und Angestellte beschäftigt sind. Alle Studenten der TH erhalten in diesen Fächern eine Grundausbildung, und mehr als 400 Studenten sind für eine Fachausbildung auf diesen Gebieten immatrikuliert.

$ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreiecks $\Delta\ ABC$ ist.

Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

2. Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der Quadrate der beiden letzten Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?

b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:

α) für $n = 3$!

β) für beliebiges positives ganzes n !

3. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6 \cdot ab$ stets $\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2}\lg 2$ *gilt!*

4. Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt S_y (0; 8). Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q !

5. Beweisen Sie folgende Behauptung: Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

6. Beweisen Sie die folgende Behauptung: Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3, q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

Klassenstufe 11/12

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x-2a)(x+a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

2. a) Untersuchen Sie, ob die Zahlenfolge

$$a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$$

streng monoton fallend ist!

b) Beweisen Sie, daß alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind!

3. Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.

a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie: Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.

Beweisen Sie: Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

4. Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden. Während im Jahre 1950 noch 92 760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13 777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wieviel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit gut entspricht)?

b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte *Halbwertzeit*, d. h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?

c) Mit wieviel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

5. Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.

(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3:4.

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.

(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.

(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.

(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, daß von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.

Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

6. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

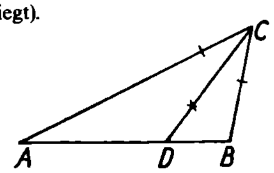
mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Bezirksolympiade 1968 Fortsetzung

Klassenstufe 10

1. Die zu beweisende Aussage besteht in mehreren Teilaussagen, von denen jede einzelne durch jeweils geeignete Wahl der Bezeichnungen auf folgende Behauptung zurückgeführt werden kann:
Schneidet in einem Dreieck $\Delta\, ABC$ die Halbierende des Innenwinkels $\sphericalangle\, ACB$ die Seite AB im Punkt D, so ist $\overline{AD} < \overline{AC}$. Beweis: Es ist $\sphericalangle\, \overline{ADC} > \sphericalangle\, \overline{DCB}$* (Satz über Außenwinkel im Dreieck $\Delta\, DBC$), also $\sphericalangle\, \overline{ADC} > \sphericalangle\, \overline{ACD}$ (da CD den Winkel $\sphericalangle\, ACB$ halbiert, also $\overline{AC} > \overline{AD}$ (da dem größeren Winkel im Dreieck $\Delta\, ADC$ die größere Seite gegenüberliegt).



* $\sphericalangle\, \overline{ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle\, ABC$.

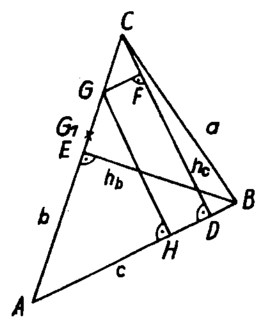
2. Setzt man $\log_b c = x$ und $\log_a c = y$, so gilt nach der Definition des Logarithmus: $b^x = c$ und $a^y = c$. Folglich ist $b^x = a^y$ und (nach Logarithmieren) $\log_a b^x = \log_a a^y$.
Nach Anwendung des Gesetzes über das Logarithmieren einer Potenz erhält man
$$x \cdot \log_a b = y \cdot \log_a a$$
und wegen $\log_a a = 1$ endlich $x \log_a b = y$, d. h.
$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, \text{ w.z.b.w.}$$
Anderer Lösungsweg: Es sei $b = a^x$ und $c = b^y$.
Dann ist $c = (a^x)^y = a^{xy}$ und man erhält nach der Definition des Logarithmus:
$$xy = \log_a c \text{ oder } \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

3. Es sei a die Maßzahl der Länge der Grundkante und h die der Höhe der Pyramide (in cm). Dann ist die Maßzahl des Volumens (in cm³) $V_P = \frac{1}{3}a^2h$ und die des Oberflächeninhaltes (in cm²)
$$O_P = a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}.$$
Nach den Bedingungen der Aufgabe sind a, h natürlich und ungleich O, ferner soll gelten:
$V_P = O_P$, *also*
$$\frac{1}{3}a^2h = a\left(a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}\right).$$
Da $a \neq 0$ gilt, kann durch a dividiert werden, und man erhält
$$\frac{1}{3}ah = a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}, \text{ daraus folgt}$$
$$ah - 3a = 6\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$$
und nach Quadrieren beider Seiten
$a^2h^2 - 6a^2h + 9a^2 = 9a^2 + 36h^2$ und weiter
$a^2h^2 - 6a^2h \quad = 36h^2$. Wegen $h \neq 0$ kann durch h dividiert werden, und es folgt
$$a^2(h-6) = 36h$$
$$a^2 = \frac{36h}{h-6} \text{ sowie}$$
$$a = 6\sqrt{\frac{h}{h-6}}.$$
Da a eine natürliche Zahl sein soll, muß $\frac{h}{h-6}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl oder das Quadrat von $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$ sein. Das heißt, es muß gelten $h > 6$, da sonst der Nenner nicht positiv würde. Die Substitution $h - 6 = m$ (m natürlich) liefert
$$\frac{h}{h-6} = \frac{m+6}{6} = 1 + \frac{6}{m}.$$
Daher muß (m und folglich auch) $\frac{6}{m}$ ein positiver Teiler von 6, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 3, 6 sein, und zwar so, daß $1 + \frac{6}{m}$ Quadratzahl wird. Von den Zahlen 2, 3, 4, 7 ist aber nur 4 Quadratzahl, was auf $\frac{6}{m} = 3$, $m = 2, h = 8, a = 12$ führt. Umgekehrt ergibt sich aus $a = 12$, $h = 8$ in der Tat
$$V_P = O_P = 384.$$
Aus $\frac{h}{h-6} = \frac{1}{4}$ bzw. $\frac{h}{h-6} = \frac{1}{9}$ bzw. $\frac{h}{h-6} = \frac{1}{36}$ ergeben sich keine weiteren Lösungen.

4. Die Gleichung (*) ist äquivalent mit
$$2(a_1{}^2 - a_2{}^2) = a_3{}^2.$$
Daraus folgt, daß $a_3{}^2$ und damit auch a_3 durch 2 teilbar ist, also
$$a_3 = 2a' (a' \text{ ganz}). \text{ Somit ist}$$
$a_1{}^2 - a_2{}^2 = (a_1 - a_2) \cdot (a_1 + a_2) = 2a'^2$, und es sind wegen $a_3 \leqq 10$ nur die Werte $a' = 1; 2; 3; 4; 5$ möglich.
Also sind folgende Faktorzerlegungen zu prüfen:
$$1 \cdot 2 = 2$$
$$1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 18$$
$$1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8 = 32$$
$$1 \cdot 50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10 = 50.$$
Dabei ist $p = a_1 - a_2$ jeweils der kleinere und $q = a_1 + a_2$ der größere Faktor, und wegen $a_1 = \frac{q+p}{2}$ scheiden alle Fälle mit $q + p$ ungerade aus.
Es bleiben also genau die drei Fälle
$$p \cdot q = 2 \cdot 4 \quad p \cdot q = 2 \cdot 16$$
$$p \cdot q = 4 \cdot 8$$
übrig. Sie ergeben genau die Lösungstripel: $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 4)$ bzw. $(9, 7, 8)$ bzw. $(6, 2, 8)$. Die Probe erweist die Richtigkeit der Lösungen.

5. Es sei a eine reelle Zahl, für die die Gleichung reelle Lösungen, etwa die Zahlen x_1 und x_2, hat. (Dabei sei entweder der $x_1 \neq x_2$, oder aber $x_1 = x_2$ sei die einzige Lösung der Gleichung.) Dann gilt
$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
und nach dem Satz des Vieta:
$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (-a)^2 - 2(a-2)$$
$$= a^2 - 2a + 4$$
$$= (a-1)^2 + 3.$$
Die Summe nimmt mithin für $a = 1$ und nur für dieses a ihren kleinsten Wert an, falls die Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ für $a = 1$ Lösungen besitzt.
Da dies in der Tat der Fall ist ($x^2 + x - 1 = 0$ hat die Lösung $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$) ist $a = 1$ und nur dies der gesuchte Wert.

6. (I) Angenommen, $\Delta\, ABC$ sei ein Dreieck der geforderten Art (Abb.) mit $\overline{CD} = h_c$ und $\overline{BE} = h_b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$.



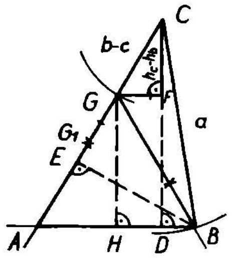
Auf CD trage man von D aus h_b mit dem Endpunkt F ab.
Dann gilt: $\overline{CF} = h_c - h_b$.
Die auf CD in F errichtete Senkrechte schneide AC in G. Der Fußpunkt des von G auf AB gefällten Lotes sei H.
Dann gilt: $\overline{GH} = h_b$ und es ist
$\Delta\, GHA \cong \Delta\, BEA$;
denn $\sphericalangle\, GHA \cong \sphericalangle\, BEA$ als rechte Winkel,
$\sphericalangle\, GAH \cong \sphericalangle\, EAB$
$\overline{GH} = \overline{EB} = h_b$.
Daraus folgt: $\overline{AG} = \overline{AB}$ (1)
und damit $\overline{CG} = b - c$.

Weiterhin ist $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle FGC$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und $\overline{\sphericalangle FGA} = 180° - \alpha$, wenn $\overline{\sphericalangle CAB} = \alpha$ ist.
Nun ist wegen (1) das Dreieck ΔAGB gleichschenklig und daher

$\overline{\sphericalangle AGB} = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Also ist GB die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FGA$.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ΔABC höchstens dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion entstehen kann:
Das Teildreieck ΔFGC wird aus $b - c$, $h_c - h_b$ und dem rechten Winkel bei F konstruiert, und das Teildreieck ΔCGB danach aus a, $b - c$ und

$\overline{\sphericalangle CGB} = \overline{\sphericalangle CGF} + \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle FGA}$: (Abb.)



Man zeichnet $\overline{CF} = h_c - h_b$.
Punkt G liegt:
1. Auf dem Kreisbogen mit $b - c$ um C,
2. auf der Senkrechten, errichtet auf CF in F.

Punkt B liegt:
1. Auf dem Kreisbogen mit a um C,
2. auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle G_1GF$, wobei G_1 ein Punkt auf der Verlängerung von CG über G hinaus ist.

Punkt A liegt:
1. Auf der Verlängerung von CG über G hinaus
2. auf der Parallelen durch B zu GF.

(III) Weiter gilt: Wird ein Dreieck ΔABC durch diese Konstruktion gewonnen, so entspricht es den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{CB} = a$. Ferner ist $\overline{\sphericalangle AGB} = \overline{\sphericalangle BGF}$ (nach Konstruktion) $= \overline{\sphericalangle ABG}$ (Wechselwinkel), also ΔABG. Aus dem gleichen Grunde ist $\overline{BE} = \overline{GH} = h_b$. Das Viereck $GHDF$ ist nach Konstruktion ein Rechteck, und daher ist auch $\overline{GH} = \overline{FD} = h_b$. Also ist $\overline{CF} = h_c - h_b$.

(IV) Durch die gegebenen Stücke ist das Dreieck ΔABC eindeutig (bis auf Kongruenz) bestimmt, da die gegebenen Stücke die Bedingungen $b - c > h_c - h_b$ und $a > b - c$ erfüllen. Ist (mindestens) eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein Dreieck ΔABC, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Schulolympiade 1969/70

Auf Wunsch zahlreicher Leser veröffentlichen wir in Heft 4/69 die Aufgaben (Kl. 5 bis 12) der 1. Stufe (Schulstufe) der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR.

Lösungen

▲ 336 Die Gleichung einer quadratischen Funktion ist $y = ax^2 + bx + c$. Auf Grund der gegebenen Bedingungen erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$a + b + c = 2, \quad (1)$$
$$a - b + c = 0, \quad (2)$$
$$9a + 3b + c = 0. \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Substraktion $2b = 2$, also $\underline{b = 1}$.
Daher folgt aus (1) $a + c = 1$ und aus (3) $9a + c = -3$. Hieraus erhält man $8a = -4$, also $\underline{a = -\frac{1}{2}}$ und $\underline{c = \frac{3}{2}}$.
Die Probe bestätigt, daß $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ die gesuchte Gleichung der quadratischen Funktion ist.

▲ 337 Die Aufgabe wird durch eine Umformung des Terms $n^2 - n + 13$ gelöst. Zu diesem Zweck wählen wir zwei Faktoren so, daß ihre Differenz 17 beträgt und ihr Produkt mit $n^2 - n$ beginnt. Solche Faktoren sind $n + 8$ und $n - 9$; denn es gilt
$(n+8) - (n-9) = 17$ und $(n+8)(n-9) = n^2 - n - 72$. Wir erhalten daher
$z = n^2 - n + 13 = (n+8)(n-9) + 85$.
Nun müssen wir *zwei Fälle* unterscheiden:

1. $n + 8$ ist durch 17 teilbar.
Dann ist auch $n - 9$ durch 17 teilbar; also ist $(n + 8)(n - 9)$ durch $17^2 = 289$ teilbar. Die Zahl $85 = 5 \cdot 17$ ist aber nicht durch 17^2 teilbar; folglich ist auch die Zahl z nicht durch 17^2 teilbar.

2. $n + 8$ ist nicht durch 17 teilbar.
Dann ist auch $n - 9$ nicht durch 17 teilbar; also ist auch $(n + 8)(n - 9)$ nicht durch 17 teilbar. Daher ist auch z nicht durch 17 teilbar und schon gar nicht durch 17^2 teilbar. Damit haben wir bewiesen, daß die Zahl $z = n^2 - n + 13$, wo n eine beliebige ganze (nicht notwendig positive) Zahl ist, in keinem Falle durch 289 teilbar ist.

W 10/12 ■ 338 a) Es seien s der Weg (in m), $t = 13{,}5$ s die Zeit bis zur Erreichung der Geschwindigkeit $v = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = \frac{100\,000}{3\,600}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = \frac{250}{9}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ und b die konstante Beschleunigung. Dann gilt $v = bt$, also $b = \frac{v}{t} = \frac{250}{9 \cdot 13{,}5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \approx 2{,}058\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Ferner erhält man

$s = \frac{b}{2}t^2 = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{250 \cdot 13{,}5}{2 \cdot 9}\ \mathrm{m} = 187{,}5\ \mathrm{m}.$

Der SIL 114 hat also bis zur Erreichung der Geschwindigkeit von 100 km/h einen Weg von 187,5 m zurückgelegt.
b) Ist s_1 der Weg und t_1 die Zeit bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit
$v_1 = 190\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = \frac{475}{9}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, *so gilt*

$$t_1 = \frac{v_1}{b} = \frac{475}{9} \cdot \frac{9 \cdot 13{,}5}{250} = 25{,}65\ \mathrm{s}$$

und $\quad s_1 = \frac{v_1 \cdot t_1}{2} = \frac{475 \cdot 25{,}65\ \mathrm{m}}{2 \cdot 9} \approx 676{,}9\ \mathrm{m}.$

Die verbleibende Strecke von $4000\ \mathrm{m} - 676{,}9\ \mathrm{m} = 3323{,}1\ \mathrm{m}$ wird mit der Höchstgeschwindigkeit $v_1 = \frac{475}{9}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ zurückgelegt, wofür die Zeit $t_2 = \frac{3323{,}1 \cdot 9}{475}\ \mathrm{s}$ $\approx 62{,}96$ s benötigt wird. Nun ist
$t_1 + t_2 \approx 88{,}61$ s;
der SIL 114 hat also in rund 88,6 s, d. s. 1 min 28,6 s, nach dem Start eine Entfernung von 4 km zurückgelegt.
Zum Vergleich verweisen wir auf die Aufgabe 189 in Heft 1/1968, S. 18 und die Lösung dieser Aufgabe in Heft 3, S. 90. Der SIL 114 hat also mit $2{,}06\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ eine weit höhere Beschleunigung als der kleinere Moskwitsch (mit $1{,}39\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$) und auch eine sehr hohe Höchstgeschwindigkeit (190 km/h; Moskwitsch 120 km/h).

W 10/12 ■ 339 Wir bezeichnen die gesuchte Zahl, die nach den Voraussetzungen der Aufgabe nicht kleiner als 1000 ist, mit $1000\,a + b$, wobei a und b natürliche Zahlen mit $a > 0$ und $0 \leqq b \leqq 999$ sind. Dann gilt

$$\sqrt[3]{1000a + b} = a, \text{ also}$$
$$1000a + b = a^3,$$

d. h. $\quad a^3 - 1000a = a(a^2 - 1000) = b.$
Daher gilt

$$0 \leqq a(a^2 - 1000) < 1000.$$

Daraus folgt einerseits

$$a^2 \geqq 1000, \text{ also } a > 31$$

und andererseits

$$a^2 - 1000 < \frac{1000}{a} < \frac{1000}{31} < 33.$$

Daher ist $\underline{a = 32}$.
Wir überprüfen das Ergebnis und erhalten $32^3 = 32\,768$,
also $\quad \sqrt[3]{32\,768} = 32.$

Lösung der Aufgabe von Dr. W. Rautenberg

▲ 308 Wir nehmen an, wir hätten einen Quader Q aus endlich vielen paarweise verschiedenen Würfeln zusammengesetzt. Die Grundfläche dieses Quaders ist ein aus Quadraten zusammengesetztes Rechteck, wobei das kleinste Quadrat offenbar keine Seite mit der Kante des Grundrechtecks gemeinsam haben kann. Folglich ist der kleinste auf der Grundfläche aufsitzende Würfel W_1 von allen Seiten von Würfeln umgeben, die ihn überragen. Auf W_1 sitzt nun wiederum ein kleinster Würfel W_2 auf, der von größeren Würfeln allseitig umgeben ist, daher kann W_2 noch nicht an die Deckfläche des Quaders anstoßen und das Verfahren kann fortgesetzt werden. Wir erhalten auf diese Weise eine unendliche Folge W_1, W_2, W_3, ... von Würfeln, was der Annahme widerspricht, daß Q aus endlich vielen Würfeln aufgebaut ist.

Lösungen zu: Mexiko 68

▲ 340 Gemäß Aufgabenstellung sollen die fünf natürlichen Zahlen, a, b, c, d und e den folgenden mit I, II und III benannten Gleichungen genügen:

I $\quad abc = de$

II $\quad ab = be$

III $\quad ce = bd.$

Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten von II und III ergibt sich die Gleichung $acde = b^2de$. Beide Seiten dieser Gleichung werden durch de dividiert:

IV $\quad ac = b^2.$

Gemäß Gleichung IV ist b die mittlere Proportionale ($a : b = b : c$) zu a und c oder das geometrische Mittel ($b = \sqrt{ac}$) der Zahlen a und c. Durch Multiplikation beider Seiten von IV mit b folgt weiter:

V $\quad abc = b^3.$

Laut Gleichung I kann in V abc durch de ersetzt werden: $de = b^3$. Diese letzte Gleichung stellen wir nach d um:

VI $\quad d = \frac{b^3}{e}.$

In Gleichung II ersetzen wir nunmehr die Zahl d gemäß Gleichung VI durch $\frac{b^3}{e}$ und erhalten:

VII $\quad a \cdot \frac{b^3}{e} = be.$

Beide Seiten dieser letzten Gleichung multiplizieren wir mit $\frac{e}{b^3}$ und erhalten:

VII $\quad a = \frac{e^2}{b^2} = \left(\frac{e}{b}\right)^2.$

Laut Gleichung VII muß $\frac{e^2}{b^2}$ und damit auch $\frac{e}{b}$ eine natürliche Zahl sein und a ist eine Quadratzahl:

IIX $\quad a = m^2.$

(Zunächst ist $\frac{e}{b}$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen eine rationale Zahl. Da weiterhin ihr Quadrat eine natürliche Zahl ist, ist $\frac{e}{b}$ selbst eine natürliche Zahl.)

Da bei der Ersetzung $a \to c$, $c \to a$, $d \to e$, $e \to d$, $b \to b$ unsere Aufgabe in sich überführt wird, gilt analog zu VII auch

IX $\quad c = \left(\frac{d}{b}\right)^2$ und

X $\quad c = n^2.$

In IV wird nunmehr gemäß IIX bzw. X a durch m^2 und c durch n^2 ersetzt:

$$b^2 = m^2n^2.$$

Hieraus erfolgt durch Radizieren beider Seiten

XI $\quad b = mn.$

Jetzt wird in VII a und b gemäß IIX und XI durch m^2 bzw. mn ersetzt:

$$m^2 = \frac{e^2}{m^2n^2}.$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit m^2n^2 folgt $e^2 = m^4n^2$.

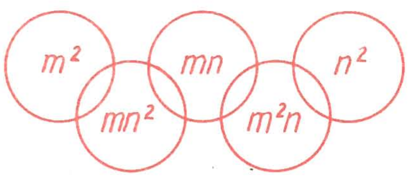
Durch Radizieren beider Seiten ergibt sich

XII $\quad e = m^2n.$

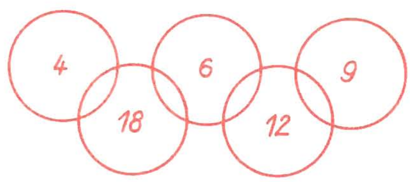
Analog folgt auch IX mittels X und XI

XIII $\quad d = n^2m.$

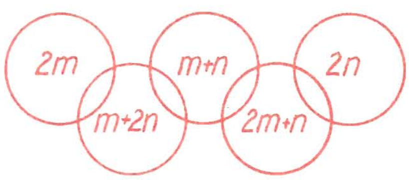
Durch ein Ersetzen der natürlichen Zahlen a, b, c, d und e gemäß den Gleichungen IIX, X, XI, XII und XIII ergibt sich:



Diese für eine Lösung notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend: Man bestätigt leicht, daß bei beliebiger Wahl der natürlichen Zahlen m und n durch $a = m^2$, $b = mn$, $c = n^2$, $d = mn^2$ und $e = m^2n$ stets eine Lösung der gestellten Aufgabe gegeben ist. Damit haben wir alle Lösungen der Aufgabe 1 gefunden. Zum Abschluß setzen wir speziell $m = 2$ und $n = 3$ und erhalten damit die spezielle Lösung:



▲ 341 Der Lösungsweg ist völlig analog zu dem von Aufgabe 340. Im Lösungsweg von Aufgabe 340 ist jede Multiplikation zu ersetzen durch eine Addition, jede Division durch eine Substraktion und ein Potenzieren mit den Exponenten 2 oder 3 durch ein Multiplizieren mit 2 oder 3. Schließlich ist ein Radizieren (mit dem Exponenten 2) zu ersetzen durch eine Division mit dem Divisor 2. Durch diese Ersetzungen von Rechenoperationen geht der Lösungsweg der Aufgabe 340 in den der Aufgabe 341 über, und wir erhalten schließlich für Aufgabe 341 die Lösung:



▲ 342 Ein formaler Zusammenhang ist uns bekannt: Durch die Ersetzungsvorschriften der Operationen, durch die der Lösungsweg der Aufgabe 340 in den der Aufgabe 341 überführt wird, geht auch die Lösung der Aufgabe 340 in die der Aufgabe 341 über. Diesen Zusammenhang können wir unter Benutzung der Gesetze der Potenz- und Logarithmenrechnung tiefer fassen: Ist a', b', c', d' und e' eine Lösung der Aufgabe 341, so ist $a = 2^{a'}$, $b = 2^{b'}$, $c = 2^{c'}$, $d = 2^{d'}$ und $e = 2^{e'}$ eine Lösung der Aufgabe 340. Denn es gilt:

$$abc = 2^{a'} \cdot 2^{b'} \cdot 2^{c'} = 2^{a'+b'+c'}$$
$$de = 2^{d'} \cdot 2^{e'} = 2^{d'+e'}$$

Wegen $a' + b' + c' + e'$ folgt $abc = de$. Analog ergibt sich $ad = be$ und $bd = ce$. Umgekehrt gilt für jede Lösung a, b, c, d und e der Aufgabe 340, bei der diese fünf Zahlen sämtlich Potenzen mit der Basis 2 und jeweils einer natürlichen Zahl als Exponenten sind, daß diese Exponenten eine Lösung der Aufgabe 341 sind.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. phil. habil. H. Beckert

▲ 343 1. Außer dem Hausverwalter wohnen noch drei Personen im Hause. Das Produkt der Alter dieser Personen beträgt 1 296. Folglich muß man alle möglichen Zerlegungen der Zahl 1 296 in ein Produkt von drei Faktoren aufschreiben. Zu beachten ist, daß auch der Faktor 1 zugelassen werden muß. Man findet 42 Möglichkeiten, die Zahl 1 296 in ein Produkt von drei Faktoren zu zerlegen.

2. Die Summe der Alter der drei Personen ist gleich der Hausnummer. Aber auch nach dieser Angabe kann der Versicherungsangestellte die drei Alter noch nicht ermitteln. Das heißt, daß es unter den Zerlegungen von 1 296 mindestens zwei Zerlegungen geben muß, bei denen die Summe der Faktoren gleich ist. Bestimmt man nun zu jeder der obigen Zerlegungen von 1 296 die Summe der Faktoren, so zeigt sich, daß tatsächlich zu den Zerlegungen $1 \cdot 18 \cdot 72$ und $2 \cdot 8 \cdot 81$ die gleiche Faktorsumme 91 gehört. Da andere derartige Fälle nicht auftreten, kommen für die weitere Untersuchung also nur noch diese beiden Möglichkeiten in Frage.

3. Schließlich fügt der Hausverwalter den bisherigen Informationen noch hinzu, daß er der Älteste sei, und meint, diese Angaben dürften nun (zur eindeutigen Lösung der Aufgabe) genügen. Wäre nun der Hausverwalter jünger als 72 Jahre, so käme keine der beiden Möglichkeiten in Frage, d. h. es gäbe keine Lösung. Wäre er aber älter als 81 Jahre, so könnte der Versicherungsagent noch immer nicht zwischen den beiden Möglichkeiten (1, 18, 72) und (2, 8, 81) entscheiden. Da ihm die Angabe des Hausverwalters aber genügt, muß dessen Alter folglich zwischen 72 und 81 liegen, und da dieser der älteste Hausbewohner ist, so sind die drei anderen Personen 1 Jahr, 18 und 72 Jahre alt.

▲ 344 Angenommen, Bernd besitze x Briefmarken; dann besitzt Dieter $2 \cdot x$ und Erwin $3 \cdot x$ Briefmarken.
Aus $x + 2x + 3x = 108$ folgt $6x = 108$, also $x = 18$.
Bernd besitzt demnach 18, Dieter 36 und Erwin 54 Briefmarken.
Aus $54 : 2 = 27$ und $27 + 8 = 35$ folgt, daß Axel 35 Briefmarken gesammelt hat.

▲ 345 Die Aufgabe besitzt genau sechs Lösungen:

$$\begin{array}{rrr} 33\,728 & 33\,728 & 33\,728 \\ +\ 3\,801 & +\ 3\,801 & +\ 3\,801 \\ +\ \ \ 475 & +\ \ \ 485 & +\ \ \ 495 \\ \hline 38\,004 & 38\,014 & 38\,024 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 33\,728 & 33\,728 & 33\,728 \\ +\ 3\,901 & +\ 3\,901 & +\ 3\,901 \\ +\ \ \ 475 & +\ \ \ 485 & +\ \ \ 495 \\ \hline 38\,104 & 38\,114 & 38\,124 \end{array}$$

W 5 ■ 346 Aus $ea + fgc = hiab$ folgt $h = 1$ und $f = 9$ und $i = 0$. Aus $abbc - fdg = heaf$ und $h = 1$ folgt $a = 2$.
Aus $de \cdot 19 = e0d$ und $e \neq 9$ und $43 \cdot 19 = 817$ folgt $d = 3$.
Aus $3e \cdot 19 = e03$ folgt $e = 7$.
Aus $1729 - 703 = 102b$ folgt $b = 6$.
Aus $266c : 37 = 72$ folgt $c = 4$.
Aus $2664 - 93g = 1729$ folgt $g = 5$.
Wir erhalten also

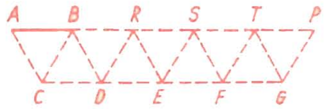
$$\begin{array}{ccccc} 2664 & : & 37 & = & 72 \\ - & & \cdot & & + \\ 935 & + & 19 & = & 954 \\ \hline 1729 & - & 703 & = & 1026 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

W 5 ■ 347 Aus d) folgt: Herr Krause wohnt in Berlin.
Aus a) und c) folgt: Herr Lehmann wohnt weder in Leipzig noch in Erfurt; also wohnt Herr Lehmann in Schwerin.
Aus b) folgt: Herr Müller wohnt nicht in Leipzig, also wohnt er in Erfurt. Daher wohnt Herr Schulze in Leipzig.

▲ 348 Zur Lösung der Mathematikaufgaben wurden 42 Minuten benötigt, zum Lösen der übrigen Aufgaben verbleiben noch 48 Minuten.
Aus $20 : 15 : 15 : 10 := 4 : 3 : 3 : 2$ und $48 : 12 = 4$ und $4 \cdot 4 = 16$ und $3 \cdot 4 = 12$ und $2 \cdot 4 = 8$ folgt, daß für das Lösen der Aufgaben im Fach Russisch 16 Minuten, Deutsch und Physik je 12 Minuten, Geschichte 8 Minuten zur Verfügung stehen.

▲ 349 Wir schlagen um die Punkte A und B mit dem Radius $r = \overline{AB}$ je einen Kreisbogen; die Kreisbögen schneiden sich im Punkt C. Durch die Punkte A, B und C ist ein gleichseitiges Dreieck bestimmt. Nun schlagen wir um die Punkte B und C mit dem Radius $r = \overline{AB} = \overline{BC}$ je einen Kreisbogen; die Kreisbögen schneiden sich im Punkte D. Durch die Punkte B, C und D ist wiederum ein gleichseitiges Dreieck derselben Seitenlänge bestimmt. Diese Konstruktion ist fortzusetzen, bis wir die Lage des Punktes P ermittelt haben.



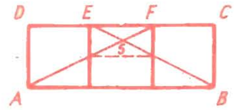
Aus $\sphericalangle ABR = 60° + 60° + 60° = 180°$ folgt, daß die Punkte A, B und R auf einer Geraden liegen; ferner gilt $\overline{AB} = \overline{BR}$.
Weitere entsprechende Überlegungen führen schließlich zum Nachweis, daß der Punkt P ebenfalls auf der Geraden AB liegt und daß $AP = 5 \cdot \overline{AB}$ gilt.

W 6 ■ 350 Aus $ba - f = h$ folgt $b = 1$; aus $ca + b = cb$ folgt $a = 0$.
Aus $f + f = d$ folgt, daß d eine gerade Zahl ist, also entweder $d = 2$ oder $d = 4$ oder $d = 6$ oder $d = 8$.
Aus $d = 2$ und $f + f = d$ folgt $f = 1$; das ist nicht möglich, da die Ziffer 1 bereits für b vergeben ist.
Aus $d = 4$ folgt $f = 2$ und wegen $10 - f = h$ ferner $h = 8$,
aus $d = 6$ folgt $f = 3$ und somit $h = 7$,
aus $d = 8$ folgt $f = 4$ und somit $h = 6$.
Der dritten Zeile entnehmen wir, daß $\frac{10c + 1}{h} \cdot d$ eine ganze Zahl ist; das ist aber, weil d eine gerade Zahl ist, nur möglich, wenn $h = 7$ ist; also gilt $d = 6, f = 3, h = 7$.
Die zweite Zeile lautet nun $(1 + 3) \cdot 3 + 0 = 1c$, also $c = 2$. Aus $d + bc = be$, also $6 + 12 = 1e$, folgt $e = 8$.
Die erste Zeile lautet nun $(20 + 10) : 3 - g = 6$, also $g = 4$. Wir erhalten daher

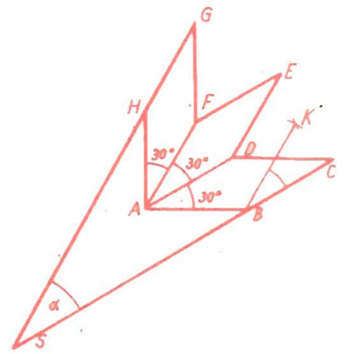
$$\begin{array}{l} (20 + 10) : 3 - 4 = 6 \\ \ \ \ +\ \ \ \ -\ \ \ +\ \ \cdot\ \ \ + \\ (\ 1 + \ \ 3) \cdot 3 + 0 = 12 \\ \hline (21\ :\ \ 7) \cdot 6 + 0 = 18 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

W 6 ■ 351 Aus der nachstehenden Zeichnung ist unmittelbar folgendes abzulesen:
Der Flächeninhalt eines der drei Quadrate beträgt $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks SFE ist gleich $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts eines halben Quadrates, also gleich $\frac{1}{24}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte eines Quadrates und des Dreiecks SFE, also gleich $\frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.
Der Flächeninhalt des Vierecks $ASED$ ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt eines Quadrates und dem Flächeninhalt des Dreiecks SFE, also gleich $\frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.



▲ 352 Es sei K ein Punkt, der auf derselben Seite der Geraden AB liegt wie F, und es sei $BK \parallel AF$. Dann gilt auch $BK \parallel HG$, $BC \parallel AD$ und wegen $\sphericalangle FAD = 30°$ auch $\sphericalangle KBC = 30°$. Daher schneiden die Geraden BC und HG einander, und es gilt $\alpha = \sphericalangle KBC = 30°$.



alpha-heiter-Lösungen 2/69

Wer ist der Täter?

Der Täter ist Johannes Lehmann.

Bitte richtig verschieben! (2/69)

Proz Entsatz
pAral Lele
gRundLinie
Absz Isse
Bild Punkt
glEich Setzungsverfahren
oberfLäch E

Magische Quadrate

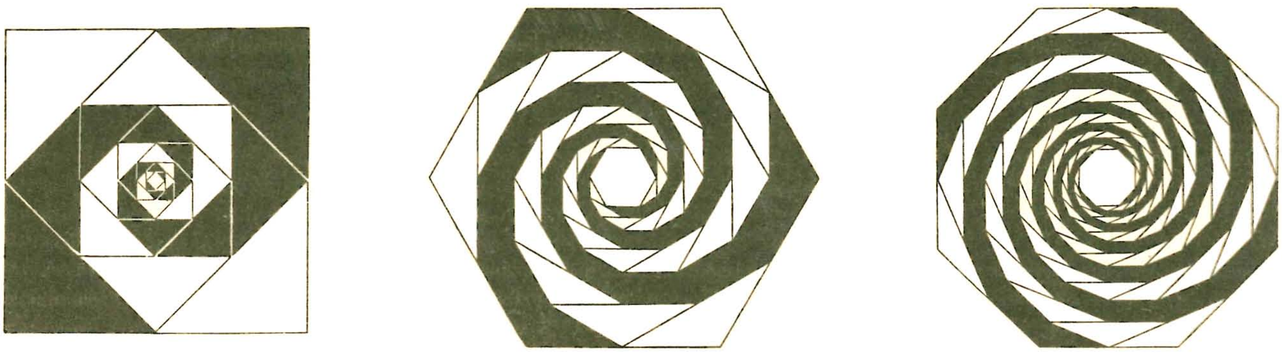
1. Abel 2. Beta 3. Eton 4. Lang
5. Cher 6. Höhe 7. Ehre 8. Reep

Was bedeutet das?

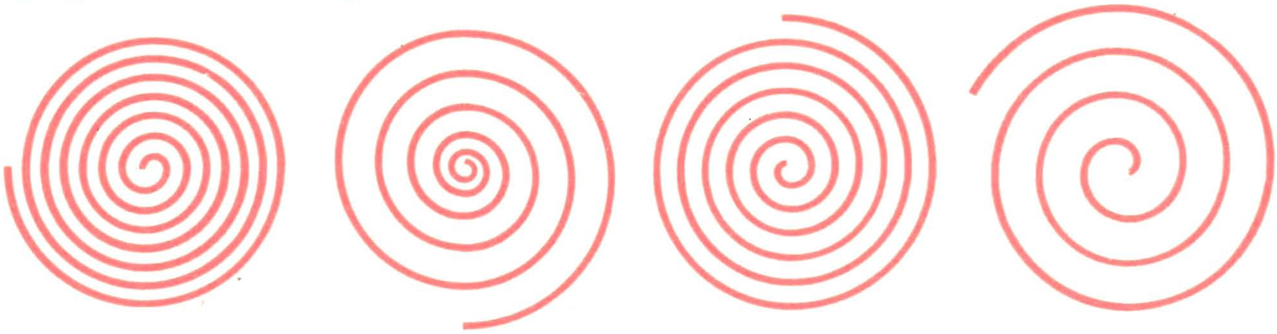
K an te → Kante
in De x → Index
L im es → Limes
Kreis um Fan G → Kreisumfang

Schlagwortübersicht

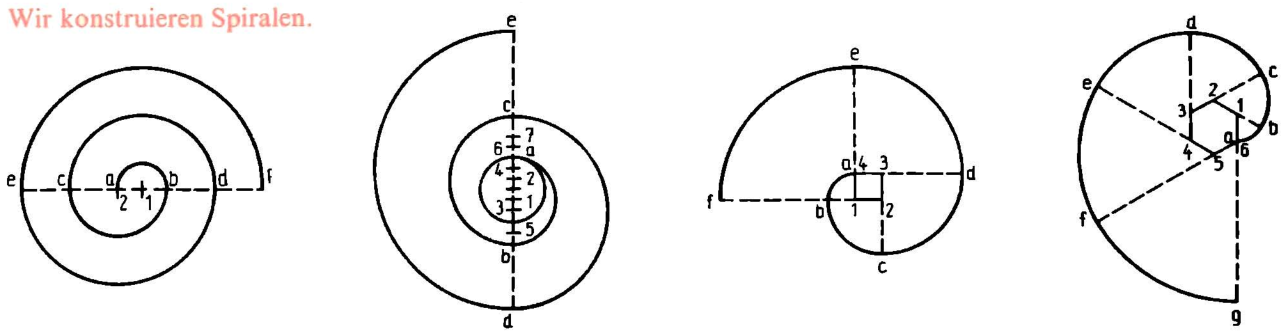
Mit Zirkel und Zeichendreieck



Mathemagica; aus:
Pythagoras 2 – 68/69, Groningen



Wir konstruieren Spiralen.



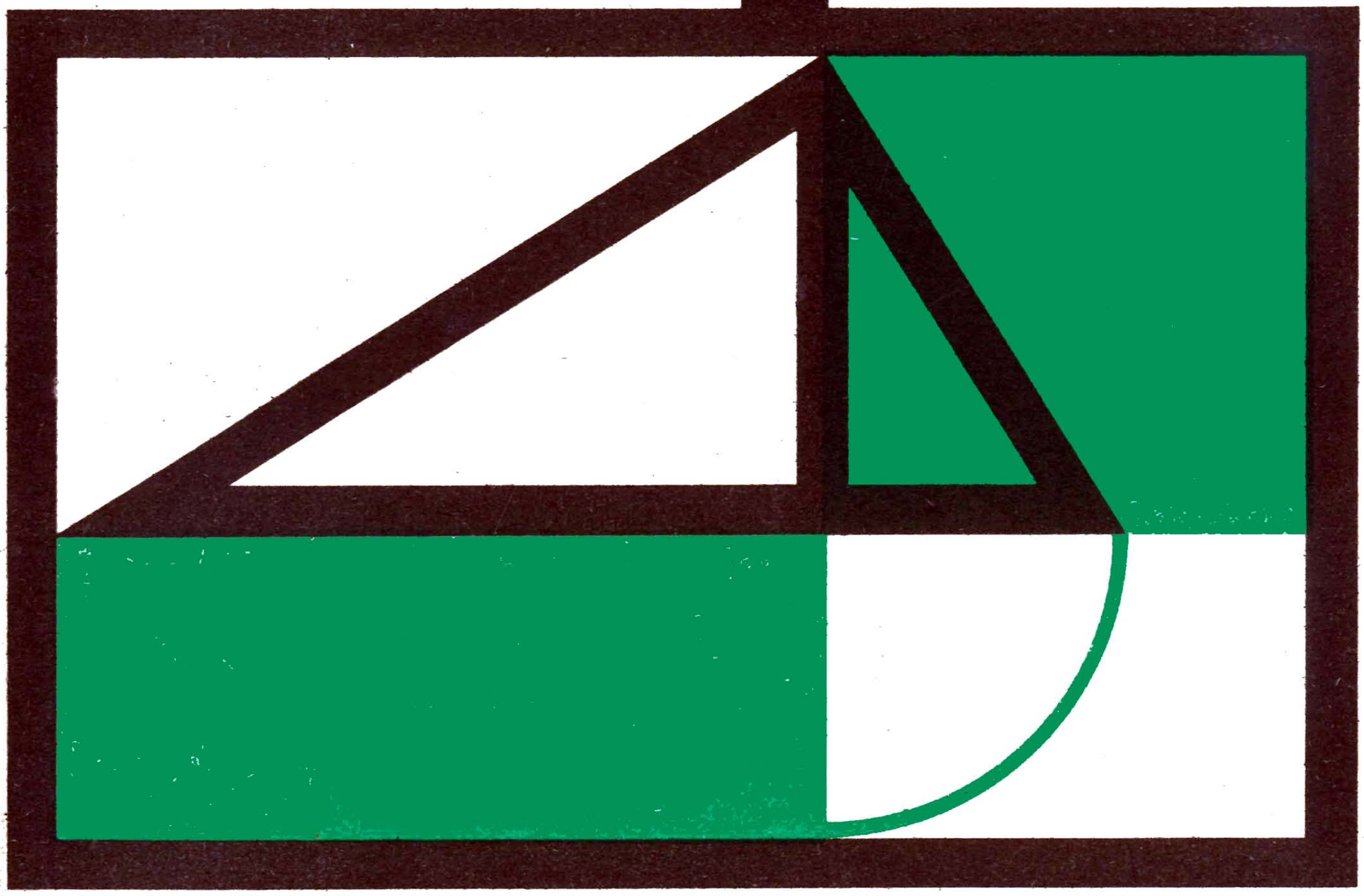
Wissen, wo...

Eine Anleitung zum Selbststudium

Zusammenstellung: Oberlehrer H. Herzog, V.L.d.V., 22. OS Leipzig

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 49); Archiv PET, Dresden (S. 50) Bildstelle TH Magdeburg (S. 51); J. Lehmann, Leipzig (S. 51); Bildstelle Verlag Volk und Wissen, Foto Seifert (S. 51); Faksimile: *Calendarium* 1597, Reykjavik 1968: Bókaútgáfa Menninggardsjóds og bjodvinafélagsins (S. 69); Vignette F. Fricke, Berlin (S. 70);
Vignetten: H.-J. Jordan/H. Tracksdorf (beide Leipzig)
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß 1. April 1969

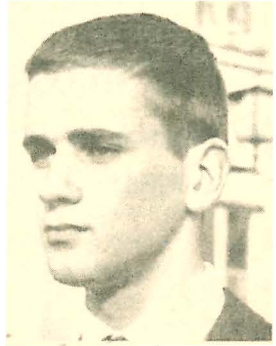
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Ulrich Zähle berichtet



Als man mich 1961 fragte, ob ich an einer Mathematikolympiade teilnehmen möchte, konnte ich noch nicht ahnen, daß eben dieser Wettbewerb meinen weiteren Lebensweg entscheidend beeinflussen sollte.

Über die Fehler, die ich bei diesem ersten Versuch gemacht hatte, ärgerte ich mich. Doch vom Ärgern allein ändert sich nichts. Ich begann, in Büchern zu blättern, zuerst aus Neugierde („Wie hätte denn die Lösung richtig formuliert werden müssen?"); bald wurde daraus Wissensdurst, den es durch beharrliche und zielstrebige Beschäftigung zu stillen galt. Bei den Olympiaden stellten sich erste Erfolge ein, die mir jedoch nicht als Ruhekissen dienten, sondern mich im Gegenteil anspornten.

Doch die Olympiaden sind kein Selbstzweck. In einem hochentwickelten Industriestaat, wie ihn unsere Republik darstellt, gewinnt die Mathematik immer mehr an Bedeutung. Ein großer Bedarf an hochqualifizierten Fachkräften ist die Folge.

Ich war deshalb besonders froh darüber, daß ich die Möglichkeit bekam, die 11. und 12. Klasse der Erweiterten Oberschule an der Arbeiter-und-Bauern-Fakultät Halle in einer Mathematik/Physik-Spezialklasse zu absolvieren. Ich konnte einerseits mein mathematisches Wissen in starkem Maße erweitern, unter anderem durch eine Grundausbildung in den Methoden der *Numerischen Mathematik*. Andererseits bot sich die Möglichkeit einer intensiven Vorbereitung auf ein Studium im befreundeten Ausland.

Die Mathematikolympiaden, die für mich in jedem Jahr gewisse Höhepunkte meiner außerschulischen Betätigung waren, und Erfolge an der ABF bestätigten mir, daß ich auf dem richtigen Wege war, nicht nur in fachlicher Hinsicht.

Im Herbst 1968 nahm ich ein Mathematikstudium an der Moskauer *Lomonossow-Universität* (Mechanisch-Mathematische Fakultät) auf. Mit mir studieren im ersten Kurs etwa 600 Studenten. Besonders erfreut bin ich, daß ich mit zwei sowjetischen IMO-Teilnehmern zusammen wohne. Im ersten Semester hatten wir 36 Wochenstunden (einschließlich 8 Std. Russisch), dazu Hausaufgaben in hinreichender Menge, so daß der Start nicht leicht war. Grundlegende Sprachschwierigkeiten haben wir zwar schnell überwunden, aber man bekommt in den Vorlesungen auch jetzt noch nicht alle Feinheiten mit. Diese Lücken versuche ich stets schnell zu schließen. Seit dem 20. Dezember läuft die erste Prüfungsperiode. Im ersten Teil waren die Prüfungen, die sich auf den Seminarstoff beziehen. In der Regel bestehen diese Prüfungen (schriftliche Arbeiten, aber vor allem Gespräche) aus mehreren Teilen, wobei sich der Umfang der Prüfung nach den Leistungen in den schriftlichen Arbeiten im Laufe des Jahres richtet. Im Januar hatten wir Examen in den drei Fächern: *Analysis, Analytische Geometrie* und *Höhere Algebra*. Neben dem äußerst intensiven Studium, das wir hier bei berühmten Mathematikern absolvieren und das natürlich einen Großteil der Zeit beansprucht, finden wir aber auch Gelegenheit, uns mit Moskau und vor allem seinen Menschen bekannt zu machen, Freundschaften mit sowjetischen und ausländischen Studenten zu schließen. Besonders seit meinem Studium habe ich meine Ansicht bestätigt gefunden, daß die Teilnahme an den Mathematikolympiaden eine Reihe positiver Eigenschaften entwickeln hilft, daß eine gute Plazierung in einer Mathematikolympiade ein Erfolg ist, auf den man besonders stolz sein sollte, daß dies aber noch nicht hinreichend sein kann, um eine weitere erfolgreiche Entwicklung zu garantieren. Dazu gehört mehr:

Man muß beharrlich um die Vervollkommnung seines Wissens, seiner Fähigkeiten (nicht nur streng ausgerichtet auf mathematisches Gebiet!) bemüht sein, darf sich von Erfolgen nicht blenden lassen. Nur so kann man Höchstleistungen vollbringen, Höchstleistungen, die uns alle voranbringen!

Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, UdSSR:

Der Begriff „talentierter Mensch" umfaßt außer den Fähigkeiten in noch größerem Maße die Leidenschaft für die geliebte Sache. Wenn ein Mensch diese Leidenschaft für das wissenschaftliche Schaffen nicht bereits in der Jugend verspürt, dann wird er nie ein Wissenschaftler.

Mathematische Modelle aus der DDR

Zu Besuch in der Firma „Pädagogische Entwurfstechnik“

Neben dem kleinen Flüßchen Prießnitz befindet sich in Dresden in der Prießnitzstraße die Produktionsstätte der Firma „Pädagogische Entwurfstechnik“ (PET). Hier entstehen mathematische Modelle. Wer kennt sie nicht, die Pyramiden, Kegel oder Würfel aus farbigem Plast?

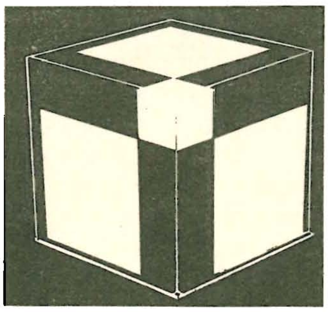
Mit viel Fleiß und großem Können wird von den Werktätigen von PET all das entwickelt und gebaut, was auf dem Gebiet der Unterrichtsmittel mitgeholfen hat, das Ansehen unserer Republik auf dem Weltmarkt zu stärken. Die Modelle gehen in 20 Länder. Die Exportpalette reicht von den meisten europäischen Ländern bis hinüber nach Übersee, wie Kuba, Kolumbien und Chile.

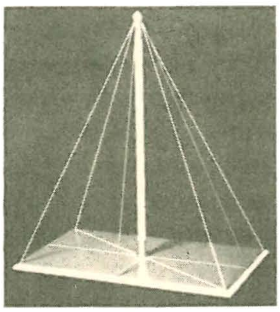
In Bezug auf Form und Gestaltung der Unterrichtsmittel ging die Firma PET neue Wege. Besonders hervorzuheben sind dabei die Zerlegbarkeit der Modelle und ihre Gestaltung aus farbigem Material, die vielseitigen Bearbeitungsformen für ihre Anfertigung. Der offensichtliche Vorteil eines Plastmodells gegenüber dem traditionellen Holzmodell besteht darin, daß man es nicht nur schneiden, bohren und fräsen, sondern auch biegen, ziehen, schleudern und pressen kann.

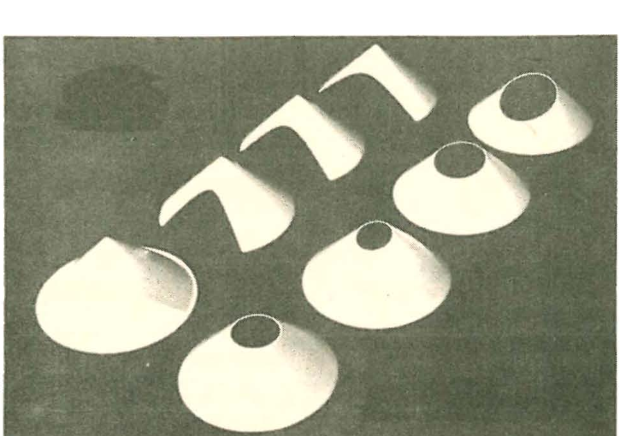
Die meisten PET-Modelle wurden direkt im Betrieb entwickelt. Die Ideen dazu kamen aber auch unmittelbar aus dem Unterricht. Lehrer und Schüler unserer Republik haben dem Betrieb wertvolle Hinweise für den Bau oder die Weiterentwicklung von Modellen gegeben. Oft stellen sich die Mitarbeiter des Betriebes die Frage: „Entsprechen unsere Modelle noch den Anforderungen eines modernen Unterrichts?“ So entstehen immer wieder neue Formen, die von bewährten Facharbeiterinnen in hoher Qualität und Funktionstüchtigkeit hergestellt werden.

Aus dem Sortiment von über 500 verschiedenen Modellen, Demonstrations- und Übungsgeräten möchten wir einige vorstellen.

W. Glaß







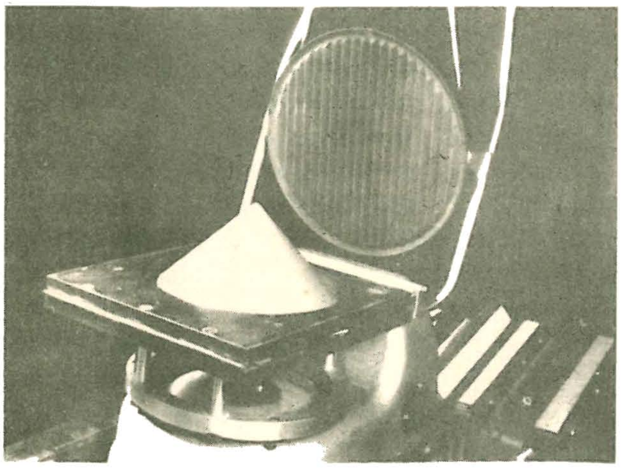


Bild 1 Demonstrationsmodell: $(a + b)^3$

Bild 2 Fadenmodell: Pyramide mit nichtquadratischer Grundfläche. Die Grundfläche ist mit Nuten versehen, in die sich Stützdreiecke einschieben lassen.

Bild 3 Kegelschnittmodell

Bild 4 Pressen eines Kegels zum Kegelschnittmodell

alpha berichtet aus aller Welt

Magdeburg
46 Schüler, die besten Jungen Mathematiker aus der DDR, nahmen als Gäste an der VI. wissenschaftlichen Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR teil.
Die Tagung war die bisher größte ihrer Art. 1100 Wissenschaftler aus 11 Ländern nahmen an der Arbeit der verschiedenen Sektionen teil. Insgesamt standen 24 Übersichtsvorträge und fast 200 Kurzvorträge in 15 Fachsektionen auf dem Programm. Den Festvortrag, dem sich eine öffentliche Diskussion anschloß, hielt der Minister für das Hoch- und Fachschulwesen, Gießmann, zum Thema „Mathematik und Datenverarbeitung in der Technik“. Gastgeber war die Technische Hochschule „Otto von Guericke“.

Halle
Freunde der Mathematischen Fakultät der Gorki-Universität Charkow besuchten die Arbeiter- und Bauern-Fakultät „Walter Ulbricht“. An dieser Fakultät bereiten sich schon seit Jahren Mädchen und Jungen aus allen Teilen der DDR auf ein Studium im befreundeten sozialistischen Ausland vor. Die zukünftigen Studenten interessierten sich im Gespräch mit ihren Charkower Studienkollegen für den Ablauf des Mathematikstudiums in der Sowjetunion. Schnell waren kleine Diskussionsgruppen gebildet. Viele Erfahrungen wurden ausgetauscht. Sprachschwierigkeiten wurden schnell überwunden. Dieses Treffen wird allen Teilnehmern noch lange in Erinnerung bleiben.

London
Im Mai 1968 fand die vierte englische Mathematik-Olympiade statt (Landesausscheid). Sechs Schüler des Bundesstaates New York nahmen als Gast an diesem Wettbewerb teil.

Leipzig
Harald Englisch nimmt seit dem 5. Schuljahr an den Veranstaltungen des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit — Fach Mathematik — teil. Er legte 1968 an der Volkshochschule (als Schüler der 8. Klasse der Leibniz-OS) das Abitur im Fach Mathematik mit der Note „sehr gut“ ab und wurde vom Mathematikunterricht seiner Schule freigestellt. Zwischen Volksbildung, Leitung der FDJ des Stadtbezirks, Schule, Elternhaus, Harald Englisch und der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität wurde ein Förderungsvertrag abgeschlossen: H. E. darf an Übungen, Klausuren und Prüfungen des 1. Studienjahres teilnehmen, um nach Ablegung des Abiturs in den übrigen Fächern des Mathematikstudiums mit dem zweiten Studienjahr zu beginnen.

New York
In „The American Mathematics Monthly, Vol. 74“ erschien ein Bericht über die Berufswahl bzw. den Werdegang mathematisch begabter Schüler. Um diese herauszufinden, veranstaltet die MAA (siehe *alpha* 1/68 und dieses Heft S. 34/35) alljährlich einen umfassenden Wettbewerb. Was wird aus den Schülern, die sich dort als die besten qualifizieren? Antwort: Von 103 Schülern wurden nur 33 Mathematiker.

Dresden
Der *alpha*-Club der 29. OS Leipzig (5 Arbeitsgemeinschaften, 89 Schüler) führte in den Winterferien eine Exkursion nach Dresden durch. Es wurden der *Mathematisch-Physikalische Salon* und das *Verkehrsmuseum* besucht. Eine Stadtrundfahrt machte die 44 Teilnehmer mit dem Aufbau der Elbestadt vertraut. Höhepunkt des Tages: Besichtigung des Fernsehturms (siehe Beitrag Heft 3/67, S. 78/79) unter fachkundiger Führung von Prof. Dr. Zill, TU Dresden (siehe Foto).

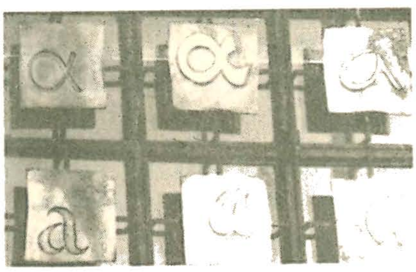
Plauen
Die Mathematiklehrer der Fachkommission Mathematik des Kreises Plauen-Land beziehen die Zeitschrift *alpha* in je drei Exemplaren. Auf numerierten Karten (Format A 6) werden die einzelnen Aufgaben der Zeitschrift aufgeklebt. Gleiche Nummern tragen die andersfarbigen Lösungskarten. Mit dieser Kartei wird in Trainingslagern und in Zirkeln gearbeitet.

Altentreptow
...In unserem Kreis bestehen drei Zirkel Junger Mathematiker. Wir fassen hier, meist nach den Kreisolympiaden, 10 bis 12 der besten Schüler zusammen und treffen uns monatlich einmal. Dabei sind uns die *alpha*-Aufgaben eine große Hilfe... Die nicht als Wettbewerbsaufgaben laufenden Aufgaben werden fast alle behandelt. Die Schüler suchen Lösungen, werden aber vorwiegend herangeführt, um sie im Finden der Lösungswege zu schulen...

Dipl.Gwl. S. Mamerow

Leipzig
Am 6. 2. 1969 verteidigte unser Redaktionsmitglied OL H. Lohse an der Karl-Marx-Universität seine Arbeit: *Effekt- und Verlaufsanalyse programmierten Lernens, untersucht am Mathematikprogramm „Elementare Zahlenfolgen“.* Wir gratulieren Herrn OL Dr. H. Lohse zu seiner Promotion.

Berlin
Wer aufmerksam durch das Zentrum Berlins gegangen ist, wird bemerkt haben: Ein handgeschmiedetes Tor ist Eingang zur Staatsbibliothek. Es trägt den Buchstaben A 72 mal.



Paris
In Frankreich wird das Abitur *baccalauréat* genannt. An der *Akademie von Paris* gibt es eine Spezialklasse Mathematik (classe de mathématiques élementaires). Schüler des 12. Schuljahres, die eine betont mathematische Bildung wünschen, erhalten dort 9 Stunden Mathematikunterricht wöchentlich. Eine Aufgabe (von vier) aus dem Abitur geben wir wieder (bewertet mit 4 Punkten von 20):
Für das Intervall $[0, \pi]$ ist die durch die Gleichung

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

definierte Funktion zu diskutieren. Konstruiere ihren Graphen in einem orthonormierten Koordinatensystem (Einheit 2 cm)! Bestimme mit Hilfe einer Tafel die Abszisse des Punktes im Bogenmaß, in dem der Graph die x-Achse schneidet.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 3

Noch einige Bemerkungen zur Division: Die letzte Aufgabe „ging auf“, das heißt, sie lieferte ein ganzzahliges Ergebnis. Das würde natürlich in *jedem* Zahlensystem eintreten, denn die Teilbarkeit oder Nichtteilbarkeit zweier ganzer Zahlen ist unabhängig vom System. Wir untersuchen nun die Fälle, bei denen der Divisor im Dividenden nicht ganzzahlig aufgeht. Vom Dezimalsystem sind uns folgende Möglichkeiten bekannt:

a) Man erhält einen *endlichen* Dezimalbruch genau dann, wenn der Divisor (natürlich weitestgehend gegen den Dividenden gekürzt) nur Primfaktoren enthält, die auch in der Basis 10 vorkommen, also nur 2 oder 5, z. B. $1 : 8 = 0{,}125$.

b) Man erhält einen *rein-periodischen* Dezimalbruch, wenn der Divisor weder den Primfaktor 2 noch den Primfaktor 5 enthält, z. B. $1 : 3 = 0{,}\bar{3}$.

c) Man erhält einen *gemischt-periodischen* (vorperiodischen) Dezimalbruch, wenn der Divisor sowohl die Primfaktoren 2 oder 5 als auch andere enthält, z. B. $1 : 6 = 0{,}1\bar{6}$.

Die Aussagen lassen sich für ein beliebiges Zahlensystem mit der Basis g – genannt *g – adisches System* — verallgemeinern, wenn man statt „Primfaktoren 2 oder 5“ sagt: „Primfaktoren, die in g vorkommen“. Den Begriff Dezimalbruch ersetzt man durch den Begriff *g – adischer Bruch.*

Aus diesem Sachverhalt folgt, daß jeder (rein- oder gemischt-) periodische Dezimalbruch im Fünfersystem auch periodisch ist, aber umgekehrt jeder endliche Dezimalbruch nicht notwendig einen endlichen Fünferbruch ergeben muß, nämlich dann nicht, wenn der Divisor durch 2 teilbar ist.

Beispiel: Im Dezimalsystem liefert $\frac{7}{20} = 0{,}35$

eine endliche Entwicklung, im Fünfersystem ist

$$\frac{7}{20} = \frac{\bar{1}\bar{2}}{\bar{4}\bar{0}} = \bar{1}\bar{2} : \bar{4}\bar{0} = \bar{0},\bar{1}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\ldots = \bar{0},\bar{1}\bar{\bar{3}}$$

$$\begin{array}{lll} \bar{4}\bar{0} & \quad & \bar{3}\bar{0}\bar{0} \\ \overline{\bar{3}\bar{0}\bar{0}} & & \bar{2}\bar{2}\bar{0} \\ \underline{\bar{2}\bar{2}\bar{0}} & & \overline{\;\bar{3}\bar{0}\bar{0}} \end{array}$$

ein vorperiodischer Bruch.

Die Tatsache, daß die Periodizität bzw. Nichtperiodizität einer Bruchentwicklung vom verwendeten Zahlensystem abhängt, ist rechentechnisch insofern von Bedeutung, als dadurch die Genauigkeit des Ergebnisses beeinträchtigt werden kann. So kommt es vor, daß uns ein Automat die bei einer Aufgabe herauskommende rationale Zahl $\frac{1}{2}$ liefert in der Form $0{,}499999999$.

Mit der schriftlichen Division haben wir gleichzeitig ein Mittel, rationale Zahlen, die als Quotient zweier ganzer Zahlen gegeben sind, im Fünfersystem darzustellen. Man kodiert Zähler und Nenner um und führt die Division wie im vorigen Beispiel aus:

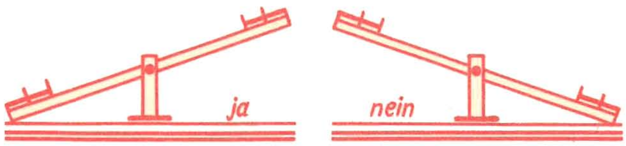
▲ *Aufgabe:* Stelle $\frac{3}{4}$ im Fünfersystem dar!

Auf die Umkodierung eines (endlichen oder periodischen) Fünferbruches in das Dezimalsystem wollen wir hier verzichten, weil dazu Kenntnisse über geometrische Reihen nötig sind. Der fortgeschrittene Leser möge sich das selbst überlegen.

1.4. Das Dualsystem

Wir hatten uns im Abschnitt 1.2. überlegt, daß im Rechenautomaten jede Ziffer des verwendeten Zahlensystems durch einen wohlbestimmten stabilen physikalischen Zustand eines Schaltelements realisiert werden muß. In der Absicht, die Zahl der Zustände zu verringern, waren wir vom Dezimalsystem auf das Fünfersystem gekommen. Auch fünf verschiedene Zustände sind technisch noch nicht sehr zweckmäßig. Es hat sich gezeigt, daß ein Schaltelement mit nur *zwei* verschiedenen Stellungen, ein sogenanntes *bistabiles* Schaltelement, am zuverlässigsten arbeitet, sei es eine Elektronenröhre, die je nach Polung den Strom durchläßt oder ihn sperrt, sei es ein Halbleiter, der ähnlich arbeitet, sei es ein elektromagnetisches Relais, das entweder angezogen oder abgefallen ist. Für ein solches bistabiles Schaltelement hat man die anschauliche Bezeichnung *Flipflop* aus dem Amerikanischen übernommen. Es sagt *ja* oder *nein*, ein drittes gibt es nicht. „Rechentechnischer“ ausgedrückt: Es speichert stets genau eine von zwei möglichen Informationen.

Man denke etwa an die beiden verschiedenen Ruhestellungen einer Wippe:



Ja oder *nein* und nichts weiter bedeutet für unser Vorhaben die Frage: Gibt es ein Zahlensystem mit nur *zwei* Ziffern (im folgenden mit L und O bezeichnet)? Daß es tatsächlich möglich ist, jede ganze (später auch beliebige reelle) Zahl mit nur zwei Ziffern zu schreiben, ist vielen sicher schon bekannt. Dieses sogenannte *Dualsystem* wollen wir jetzt näher untersuchen, insbesondere seine Rechengesetze und deren Anwendung in der Rechentechnik kennenlernen. Setzen wir O = 0 und L = 1, so fällt es uns nach den Umkodierungsübungen des vorigen Abschnitts nicht schwer, zu erfassen, daß es sich um eine Summe aus Zweierpotenzen handelt, z. B.

$\mathrm{LLOLOOLLL} = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 256 + 128 + 32 + 4 + 2 + 1 = 423.$

Um das überaus einfache Einsundeins und Einmaleins dieses Systems würde uns mancher Schulanfänger beneiden. Es lautet:

O · O = O	O + O = O
O · L = L · O = O	O + L = L + O = L
L · L = L.	L + L = LO

Mit diesen wenigen Elementaroperationen, in sinnvoller Reihenfolge angewendet, beherrschen wir bereits das schriftliche Rechnen (die vier Grundrechenarten) in dem neuen System. Wir betrachten wieder je ein Beispiel, diesmal wegen der rechentechnischen Gesichtspunkte ausführlicher als beim Fünfersystem. Die beiden zu verknüpfenden Zahlen seien

84 = LOLOLOO und 21 = LOLOL

Addition:

LOLOLOO	1. Summand: Augend*
+ LOLOL	2. Summand: Addend
L L	Überträge
LLOLOOL	Summe

Subtraktion:

LOLOLOO	Minuend
— LOLOL	Subtrahend
LLLLLL	Überträge
LLLLLL	Differenz

* Rechentechnisch macht man trotz der Vertauschbarkeit einen Unterschied zwischen den beiden Summanden. Denn der Automat hält sich an die gegebene Reihenfolge und wendet nicht, wie ein menschlicher Rechner, gelegentlich das Kommutativgesetz an.

Multiplikation: Multiplikand Multiplikator

```
LOLOLOO · LOLOL
LOLOLOO
      O
  LOLOLOO
        O
    LOLOLOO
LLOLLLOOLOO
```

Aus diesem Beispiel gewinnen wir folgende wichtige Erkenntnis: Eigentliche multiplikative Teiloperationen, wie wir sie vom Dezimal- und auch noch vom Fünfersystem her kennen ($2 \cdot 3 = 6$; $\bar{2} \cdot \bar{4} = \overline{13}$ usw.) kommen hier gar nicht vor. Die Ziffer L im Multiplikator bedeutet, daß der Multiplikand einfach hinzuschreiben ist, eine O, daß dieser nicht hinzuschreiben ist. Zwischendurch werden die Teilergebnisse immer um eine Stelle verschoben, bis alle Ziffern des Multiplikators abgearbeitet sind, und die Teilergebnisse werden schrittweise, d. h. jeweils nur zwei Summanden, addiert. Ob man dabei mit der höchsten oder niedrigsten Ziffer des Multiplikators beginnt, ist egal. Man muß es nur bei der Verschiebung (nach links oder nach rechts) berücksichtigen. Es folgt die ausführliche Darstellung:

LOLOLOO · LOLOL

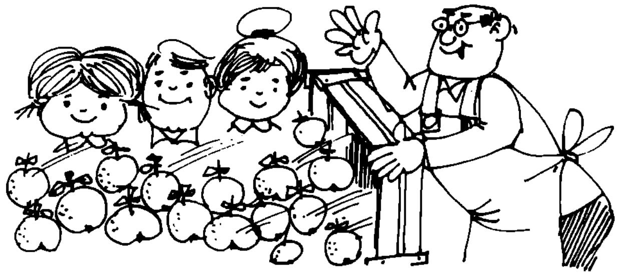
Die erste linke Ziffer L des Multiplikators bedeutet: Schreibe den Multiplikanden hin und verschiebe ihn nach links! (Jede fehlende Einerstelle wird sofort durch eine O ausgefüllt.)	LOLOLOO LOLOLOOO
Die nächste Ziffer O bedeutet: Addiere nichts und verschiebe das Zwischenergebnis nach links!	LOLOLOOO LOLOLOOOO
Die nächste Ziffer L bedeutet: Addiere den Multiplikanden und verschiebe das Zwischenergebnis nach links!	+ LOLOLOO LLOLOOLOO LLOLOOLOOO
Es folgt eine O, also ist das Zwischenergebnis nur zu verschieben:	LLOLOOLOOOO
Die letzte zu verarbeitende Ziffer ist L, also:	+ LOLOLOO
Damit liegt das Endergebnis vor:	LLOLLLOOLOO

Das Dualsystem hat also den für die Rechentechnik bedeutsamen Vorteil, daß jede Multiplikationsaufgabe in die abwechselnd gegebenen Befehle „Addiere!" bzw. „Addiere nicht!" und „Verschiebe!" aufgelöst werden kann. Eine Multiplikationsschaltung multipliziert also gar nicht im eigentlichen Sinne, sondern addiert im wesentlichen nur. Im nächsten Beitrag befassen wir uns mit der Division.

J. Fromann

Rechnen mit Resten

Teil 1



1. Gerade — ungerade

Häufig begegnen uns Aufgaben, in denen es um die Teilbarkeit ganzer Zahlen geht — Aufgaben also, die in die mathematische Disziplin der *Zahlentheorie* gehören. Eine einfache Aufgabe dieser Art ist:

▲ B 1 Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, daß jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält. Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

Wir übersehen wohl alle sofort, daß eine solche Verteilung nicht möglich ist. Aber wie müßte eigentlich eine Beweisführung für diese Unmöglichkeit aussehen? Doch etwa so:

Gerade Zahlen g sind die durch 2 teilbaren Zahlen, also die Zahlen der Form $g = 2k$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Entsprechend haben die ungeraden Zahlen u die Form $u = 2k + 1$, weil sie bei Division durch 2 den Rest 1 lassen. Nehmen wir nun einmal an, die Verteilung sei in der angegebenen Art doch möglich, und die Äpfelanzahlen für die Kinder seien A_1, A_2 und A_3. Dann müßte sein:

$A_1 = 2k_1 + 1 \qquad A_2 = 2k_2 + 1 \qquad A_3 = 2k_3 + 1$

mit natürlichen Zahlen k_1, k_2, k_3. Die Summe wäre dann $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 3 = 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1) + 1$, also $A = 2k + 1$,

und dabei wäre k als Summe von k_1, k_2, k_3 und 1 wieder eine natürliche Zahl, A also ungerade. Da 30 aber eine gerade Zahl ist, kann diese Summe A nie 30 sein. Wir müssen also unsere Annahme, die Aufspaltung von 30 in drei ungerade Summanden sei doch möglich, fallen lassen.

Dieser *indirekte Beweis* — so nennt man Beweise, bei denen von der Annahme des Gegenteils der Behauptung ausgegangen und dann gezeigt wird, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt — ist freilich ziemlich umständlich. Manchem wird es mit Recht so vorkommen, als hätten wir mit einer Kanone nach Spatzen geschossen. Obendrein ist es z. B. für Schüler der Klasse 5 gar nicht möglich, den Beweis so zu führen. Sie würden es vielleicht so machen:

Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, die Summe aus einer ungeraden und einer geraden Zahl ist stets ungerade. Deshalb kann die gerade Zahl 30 nicht in drei ungerade Summanden zerlegt werden. Allerdings stützt sich diese Beweisführung nun wiederum auf — für den Schüler der Klasse 5 eigentlich unbewiesene — Sätze über das Rechnen mit geraden und ungeraden Zahlen. Diese Sätze können wir auch folgendermaßen formulieren:

Bezeichnen wir einmal die Menge aller geraden Zahlen mit G und die Menge aller ungeraden Zahlen mit U, so könnten wir etwa schreiben $U + U = G$ und $G + U = U$; freilich dürften wir diese „Addition" nicht mit dem Vereinigen von Mengen verwechseln. Wir rechnen gewissermaßen in einem Bereich, der nur zwei Elemente enthält, G und U. Die Addition, die zwischen diesen Elementen erklärt ist, läßt sich auch in Form einer „Tabelle mit doppeltem Eingang" angeben:

$+$	G	U
G	G	U
U	U	G

Selbstverständlich läßt sich auch subtrahieren; wir müssen dann „statt in die Tabelle hinein aus ihr heraus gehen". Diese Subtraktion spiegelt auch genau wider, daß wir beispielsweise wieder eine gerade Zahl erhalten, wenn wir von einer geraden Zahl eine gerade Zahl subtrahieren.

Und so sieht eine Tabelle für die Multiplikation aus:

$\cdot$	G	U
G	G	G
U	G	U

Auch diese Operation läßt sich umkehren, allerdings nur zu $U : U = U$ und $G : U = G$. Und warum ist die Division durch G unmöglich? Um diese Frage zu beantworten, bezeichnen wir einmal den gesuchten Quotienten mit X und versuchen es zunächst mit $U : G = X$. Das bedeutet $X \cdot G = U$, und ein solches X läßt sich nicht finden, denn sowohl für $X = G$ als auch für $X = U$ ergibt $X \cdot G$ wiederum G. Und wie steht es mit $G : G = X$? Hier finden wir zwar ein X, aber leider nicht nur ein einziges: Wegen $U \cdot G = G \cdot G = G$ kommt für X sowohl G als auch U in Frage. Da wir aber für eine Rechenoperation ein eindeutiges Ergebnis verlangen müssen, bleibt uns nichts anderes übrig, als auf die Division durch G ganz zu verzichten.

Noch etwas fällt bei der Division von G und U auf: Sie ist nicht mehr direkt übertragbar auf die Zahlen selbst. 17 und 3 z. B. sind ungerade Zahlen, ihr Quotient $17:3$ aber ist weder gerade noch ungerade. Eine solche Eigenschaft kann ja nur ganzen Zahlen zukommen, und $\frac{17}{3}$ ist nun mal keine ganze Zahl. Es ist also schon notwendig, mit den Mengen G und U zu arbeiten und nicht mit den Zahlen selbst. Bei diesem Rechnen handelt es sich im Grunde um das Arbeiten mit den sogenannten *Restklassen modulo 2.* Was das ist, und welche Bedeutung dieses Rechnen sonst noch hat? Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Es wird aber gut sein, wenn wir uns zuvor zur Übung einmal selbst an den folgenden Aufgaben versuchen:

▲ A 1 Peter sagt zu seinem Vater: „Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist". Wieso weiß Peter das?

▲ A 2 Peter sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast!" Wie macht Peter das?

2. Kongruenz — einmal nicht geometrisch

Das grundlegende Werk der modernen Zahlentheorie sind die berühmten *Disquisitiones arithmetica* (Arithmetische Untersuchungen) von *Carl Friedrich Gauß,* die dieser als erst Einundzwanzigjähriger geschrieben hat; allerdings sind sie erst drei Jahre später, nämlich im Jahre 1801, erstmalig im Druck erschienen. Der Zahlentheorie galt ja die besondere Liebe von Gauß, und so wie man ihn später als *Princeps mathematicorum* — als *Fürst der Mathematiker* — bezeichnete, so nannte er die Zahlentheorie *Königin der Mathematik.* Er meinte auch, daß „alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen".

In dem genannten Buch führt *Gauß* eine Beziehung zwischen ganzen Zahlen ein, die als Kongruenz bezeichnet wird. Häufig nennt man sie auch *zahlentheoretische Kongruenz,* um sie deutlicher von der Kongruenz in der Geometrie, der bekannten Deckungsgleichheit, zu unterscheiden. Dieser Begriff und auch die von *Gauß* gewählte symbolische Schreibweise sind nun äußerst zweckmäßig und deshalb fruchtbar für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie geworden. Der Mathematiker *Edmund Landau* (1877 bis 1938) soll darum gesagt haben: „Wenn *Gauß* nichts anderes getan hätte als diese Bezeichnung einzuführen, wäre er schon ein großer Mathematiker gewesen".

Die zahlentheoretische Kongruenz zweier ganzer Zahlen a und b bedeutet, daß a und b bei der Division durch eine gegebene natürliche Zahl m, die man *Modul der Kongruenz* nennt, denselben Rest lassen. So ist beispielsweise 17 kongruent mit 42 nach dem Modul 5, denn es ist ja $17 = 3 \cdot 5 + 2$ und $42 = 8 \cdot 5 + 2$, 17 und 42 lassen also bei Division durch 5 denselben Rest 2. Man schreibt dafür

$17 \equiv 42 \bmod 5$, auch kürzer $17 \equiv 42\ (5)$,

und spricht „17 kongruent 42 modulo 5".

Allgemein können wir sagen:

Für ganze Zahlen a, b und m mit $m > 1$ gilt $a \equiv b\ (m)$ genau dann, wenn es ganze Zahlen k und l gibt mit $a = k \cdot m + r$ und $b = l \cdot m + r$. Für die ganze Zahl r, den Rest, gilt dabei $0 \leqq r < m$, doch ist diese Einschränkung für die Erklärung der Kongruenz eigentlich nicht nötig. (Warum?) Speziell kann man natürlich auch immer schreiben $a \equiv r\ (m)$ und $b \equiv r\ (m)$.

Weitere Beispiele:

▲ B 2 $79 \equiv 14\ (13)$ $\quad 34 \equiv 4\ (6)$ $\quad 56 \equiv 0\ (8)$

Während $17 \equiv 42\ (5)$ gilt, sind 17 und 42 beispielsweise nicht kongruent nach dem Modul 7, denn es ist ja $17 = 2 \cdot 7 + 3$, aber $42 = 6 \cdot 7 + 0$. Man sagt auch, daß 17 und 42 *inkongruent* modulo 7 sind und schreibt $17 \not\equiv 42 \bmod 7$ bzw. $17 \not\equiv 42\ (7)$.

Bisher haben wir uns in unseren Beispielen immer auf natürliche Zahlen a und b beschränkt. Die Erklärung der Kongruenz gilt aber für alle ganzen Zahlen, schließt also auch negative mit ein. So ist beispielsweise $-33 \equiv 55\ (11)$ und $-18 \equiv 0\ (9)$. Bei Resten, die von 0 verschieden sind, muß man allerdings aufpassen. Es ist nicht etwa $-35 \equiv 57\ (11)$, sondern beispielsweise $-31 \equiv 57\ (11)$, weil sowohl -31 als auch 57 bei Division durch 11 den Rest 2 lassen:

$-31 = (-3) \cdot 11 + 2$ und $57 = 5 \cdot 11 + 2$.

▲ B 3 $-39 \equiv 11\ (5)$ $\quad 71 \equiv -1\ (8)$

$-22 \equiv -50\ (4)$

Leichter übersehbar wird oftmals der Sachverhalt — besonders bei Beteiligung negativer Zahlen —, wenn man etwas umformt: $a \equiv b\ (m)$ bedeutet ja nach der Erklärung der Kongruenz $a = k \cdot m + r$ und $b = l \cdot m + r$. Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen $a - b = (k - l)\, m$, und da mit k und l auch $k - l$ eine ganze Zahl ist, folgt aus $a \equiv b\ (m)$, daß $a - b$ durch m teilbar ist. Wie wir uns leicht selbst überlegen können, gilt auch umgekehrt: Ist $a - b$ durch m teilbar, so lassen a und b bei Division durch m denselben Rest. Deshalb ist $a \equiv b\ (m)$ gleichbedeutend mit $m \mid (a - b)$ („m teilt $a - b$"), wofür wir freilich auch schreiben können $a - b \equiv 0\ (m)$. So ist für unsere Beispiele B 3 — 39 — 11 = —50 durch 5 teilbar, 71 — (—1) = 72 durch 8 und —22 — (—50) = 28 durch 4.

Bemerkenswert ist nun, daß mit zahlentheoretischen Kongruenzen weitgehend so gearbeitet werden kann wie mit Gleichungen. Daß man die Seiten einer solchen Kongruenz vertauschen kann, ist offensichtlich: Mit $a \equiv b\ (m)$ ist auch $b \equiv a\ (m)$. Ferner folgt aus $a \equiv b\ (m)$ und $b \equiv c\ (m)$ auch $a \equiv c\ (m)$. Es gilt aber noch weit mehr, etwa:

(I) Aus $a_1 \equiv b_1(m)$ und $a_2 \equiv b_2(m)$ folgt stets
$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(m).$$

Dazu zunächst ein Beispiel:

▲ B 4 $47 \equiv 5\ (7)$ und $25 \equiv 53\ (7)$, aber auch $72 \equiv 58\ (7)$.

Der Beweis dafür, daß eine solche *seitenweise Addition zahlentheoretischer Kongruenzen* allgemein gestattet ist, ist recht leicht:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \equiv b_1\ (m) \text{ bedeutet } a_1 - b_1 = k \cdot m \\ a_2 \equiv b_2\ (m) \text{ bedeutet } a_2 - b_2 = l \cdot m \end{array}\right\} \text{ mit ganzen } k, l.$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert
$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (k + l)\, m,$$
also gerade die Behauptung, weil mit k und l auch die Summe $k + l$ eine ganze Zahl ist. Ebenso leicht folgert man

(II) $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2\ (m)$ und

(III) $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2\ (m)$.

Das Rechnen mit Kongruenzen, das auf diesen Tatsachen beruht, ist wichtig für fast alle Teilgebiete der Zahlentheorie. Es verhilft auf verhältnismäßig einfache Weise zu Ergebnissen, die man anders nur sehr umständlich erreicht. Zwei Aufgaben sollen uns den Vorteil dieses Rechnens deutlich machen:

▲ B 5 Gesucht ist der Rest, den die Zahl $z = 4543^{19} + 37$ bei Division durch 5 läßt.

Es ist $4543 \equiv 3(5)$, demnach $4543^2 \equiv 9(5)$, also $4543^2 \equiv 4(5)$. Ebenso erhält man $4543^3 \equiv 2(5)$ und $4543^4 \equiv 1(5)$, daraus durch Quadrieren $4543^8 \equiv 1(5)$, dann $4543^{16} \equiv 1(5)$ und schließlich wegen $4543^{19} = 4543^{16} \cdot 4543^3$ und $37 \equiv 2(5)$ das Ergebnis
$4543^{19} + 37 \equiv 1 \cdot 2 + 2(5)$.

Die Zahl z hat also den Fünferrest 4.

▲ B 6 Es ist nachzuweisen, daß $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ für keine ganze Zahl n gekürzt werden kann.

Den Beweis führen wir wieder *indirekt*, d. h., wir nehmen zunächst an, der Bruch wäre doch für irgendein n zu kürzen. Die Kürzungszahl sei dabei $q > 1$. Dann müßte gelten $21n + 4 \equiv 0(q)$ und $14n + 3 \equiv 0(q)$. Nach den Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen wäre dann auch $7n + 1 \equiv 0(q)$ (Subtraktion, [II]) und damit $14n + 2 \equiv 0(q)$ (Verdoppeln, [I] mit $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$).

Daraus und aus $14n + 3 \equiv 0(q)$ folgt aber (wiederum durch Subtraktion) $1 \equiv 0(q)$, und das ist nicht möglich. Unsere Annahme, der Bruch sei für irgendein n zu kürzen, muß also fallengelassen werden, weil sie zu einem Widerspruch führt. Wie wäre es nun, wenn wir zunächst einmal wieder einige Aufgaben selbständig zu lösen versuchten? Hier einige Vorschläge:

▲ A 3 Zu beweisen ist: Die Summe zweier aufeinanderfolgender Potenzen von 2 (mit natürlichen Exponenten $n \geq 1$) ist stets durch 6 teilbar.

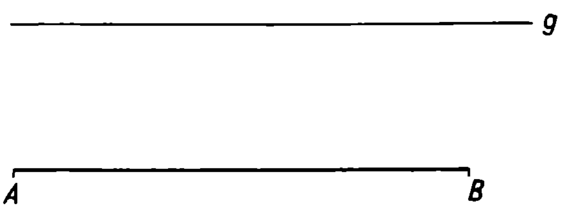
▲ A 4 Man bestimme die letzten zwei Ziffern der Zahl 9^{9^9}.

▲ A 5 Einige von 20 Bogen Papier wurden in 4 Teile zerschnitten. Sodann wurden einige der zerschnittenen Bogen nochmals in 4 Teile zerschnitten usw. Als man alle so entstandenen Papierbogen zählte, erhielt man 451. Man beweise, daß falsch gezählt worden ist!

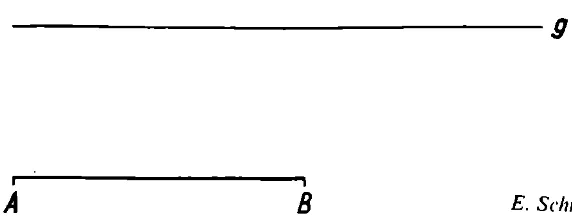
G. Lorenz

Mit Bleistift und Lineal

▲ 412 Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ und eine zu $\overline{AB}$ parallele Gerade g. Die Strecke $\overline{AB}$ ist unter Verwendung von Bleistift und Lineal (ohne Maßeinteilung) zu halbieren. Bei Konstruktion des Halbierungspunktes von $\overline{AB}$ unter Mitverwendung von g sind nur die Tätigkeiten Schneiden und Verbinden zulässig.



▲ 413 Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ und eine zu $\overline{AB}$ parallele Gerade g. Die Strecke $\overline{AB}$ ist unter den gleichen Nebenbedingungen wie oben zu verdoppeln.



E. Schröder

(Lösungen siehe in diesem Heft auf Seite 68.)

Bange machen gilt nicht!

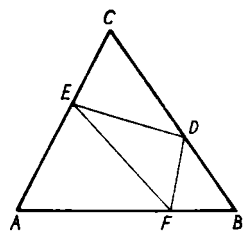
Modell eines geometrischen Extremwertproblems

Wir wollen euch heute eine geometrische Aufgabe vorstellen, die wir gemeinsam lösen werden, und an der wir zeigen, wie man ein geometrisches Problem etwa anpacken kann. Wir erwarten eure aufmerksame und aktive Mitarbeit.

▲ Dies ist unsere Aufgabe:

Einem spitzwinkligen Dreieck Δ ABC ist ein weiteres Dreieck Δ DEF so einbeschrieben, daß D zwischen B und C, E zwischen A und C, F zwischen A und B liegt. Das Dreieck Δ DEF wollen wir „Indreieck" nennen. Welches von allen möglichen Indreiecken besitzt den kleinsten Umfang?

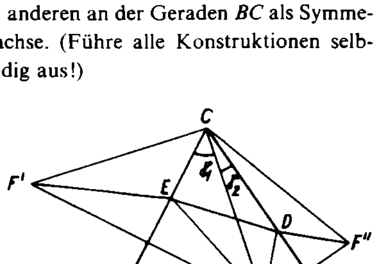
Wir fertigen uns zunächst eine Überlegungsfigur an.



Um etwas über die Länge des Umfangs eines der vielen möglichen Indreiecke aussagen zu können, ist es sicher günstiger, den Umfang des betrachteten Indreiecks als eine einzige Strecke darzustellen. Wir gehen dabei in drei Schritten vor.

1. Schritt:

Wir spiegeln zunächst den Punkt F des Indreiecks $\Delta\, DEF$ einmal an der Geraden AC, zum anderen an der Geraden BC als Symmetrieachse. (Führe alle Konstruktionen selbständig aus!)



Die Punkte F' und F'' seien die durch diese beiden Spiegelungen erhaltenen Bildpunkte von F. Wir verbinden C mit F, C mit F', C mit F'', E mit F' und D mit F''.

Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt nun

$\sphericalangle\, FCA = \sphericalangle\, ACF' = \gamma_1$; $\sphericalangle\, FCB = \sphericalangle\, BCF'' = \gamma_2$; $\sphericalangle\, ACB = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; $\overline{EF} = \overline{EF'}$; $\overline{DF} = \overline{DF''}$; $\overline{CF} = \overline{CF'} = \overline{CF''}$.

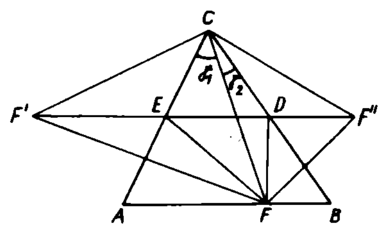
Aus den Eigenschaften der angeführten Winkel folgt

$\sphericalangle F'CF'' = 2\gamma$. (Beweise das!) Der Winkel $\sphericalangle\, F'CF''$ ist somit konstant und gleich 2γ für jede mögliche Lage des Punktes F. Aus den Eigenschaften der angeführten Strecken folgt, daß der Umfang des Indreiecks DEF gleich der Länge des Streckenzuges $\overline{F'EDF''}$ ist. (Beweise das!)

2. Schritt:

Wir halten den Punkt F fest. Die Lage der Punkte D und E verändern wir so, daß die Punkte F', E, D und F'' auf einer Geraden liegen.

Der Umfang des von uns betrachteten Indreiecks DEF ist dadurch kleiner geworden, denn die Strecke $\overline{F'F''}$ ist kleiner als jeder Streckenzug zwischen ihren Endpunkten. Daher hat unter allen Indreiecken mit dem festen Punkt F dasjenige Dreieck $\Delta\, DEF$ den kleinsten Umfang, bei dem die Punkte D und E auf der Geraden $\overline{F'F''}$ liegen.



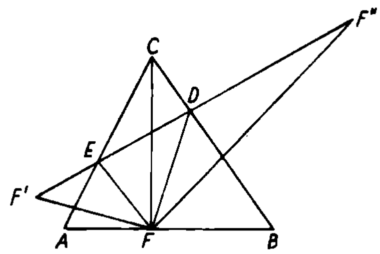
Auf Grund unserer Konstruktion liegen die Punkte F und F' bezüglich der Geraden AC spiegelbildlich zueinander. Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zwei symmetrischen Punkten gleich weit entfernt. Es gilt also $\overline{EF} = \overline{EF'}$. Aus ähnlichen Überlegungen folgt ferner $\overline{DF} = \overline{DF''}$.

Die Symmetrieachse zweier Geraden halbiert den Winkel zwischen den beiden Geraden. Folglich gilt $\sphericalangle\, ACF' = \sphericalangle\, ACF$ und $\sphericalangle\, BCF'' = \sphericalangle\, BCF$. Da der Punkt C Schnittpunkt beider Symmetrieachsen ist, gilt weiterhin $\overline{CF} = \overline{CF'} = \overline{CF''}$; das Dreieck $\Delta\, F'F''C$ ist somit gleichschenklig, und der Dreieckswinkel $\sphericalangle\, F'CF''$ ist gleich 2γ.

Der Umfang des von uns betrachteten Indreiecks $\Delta\, DEF$ ist demnach gleich der Länge der Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\Delta\, F'F''C$.

3. Schritt:

Wir verändern die Lage des Punktes F so, daß $\overline{CF}$ Höhe des Dreiecks $\Delta\, ABC$ ist. Die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks $\Delta\, F'F''C$ sind am kürzesten, wenn der Punkt F Fußpunkt der Höhe $\overline{CF}$ ist. (Begründe das!) Mit einer kleiner werdenden Schenkellänge wird aber auch die Basis $F'F''$ kleiner. Daher hat das Indreieck $\Delta\, DEF$ dann den kleinsten Umfang, wenn F Höhenfußpunkt ist und die Punkte D und E auf der Geraden $F'F''$ liegen.



Es ist leicht nachzuweisen, daß die Punkte D und E in diesem Fall auch Höhenfußpunkte sind. (Führe diesen Beweis aus!) Das Ergebnis unserer Untersuchungen lautet also:

Von allen Indreiecken eines gegebenen spitzwinkligen Dreiecks $\Delta\, ABC$ hat das aus den Fußpunkten der drei Höhen gebildete Dreieck den kleinsten Umfang.

Die hier dargestellte Lösung der Aufgabe stammt sinngemäß von dem bekannten ungarischen Mathematiker *Fejer*, der diese Lösung als Student gefunden hatte.

Wir hoffen, daß ihr am Knacken dieser recht harten Nuß neben der angestrengten Arbeit auch etwas Freude hattet.

Th. Scholl

Ein Zirkelnachmittag

über „18. Mathematischer Jahreswettbewerb der USA“, alpha 1/68

Wir beschäftigen uns mit Aufgaben dieses Beitrags an einem Zirkelnachmittag, um Hilfsmittel und Methoden kennenzulernen, mit denen man bei einem solchen Wettbewerb, bei dem von den zu jeder Aufgabe angegebenen fünf Ergebnissen *a*, *b*, *c*, *d* und *e* jeweils genau eines als richtig anzukreuzen ist, bestehen kann. Wir beschäftigen uns mit dem mathematischen Wettbewerb der USA, um die Bemerkung der Redaktion *alpha*: *Dieses Prinzip hat für die Auswertung enorme Vorteile, für die objektive Messung der tatsächlich gezeigten Leistung allerdings auch Nachteile* zu verstehen. Wir beschäftigen uns damit, um zu erkennen, warum wir diese in den USA gepflegte Form der Durchführung von Mathematik-Olympiaden nicht übernehmen können.

Wir werden bei der „Lösung“ ausgewählter Aufgaben überrascht sein, mit welchen einfachen, wenig exakten Schlüssen oft das richtige Ergebnis aussortiert werden kann. Natürlich werden wir solche „Lösungswege“ beschreiten, die entscheidend die besonderen Bedingungen dieses Wettbewerbes ausnutzen!

1. Um z. B. zu entscheiden, in welches der fünf mit *a* bis *e* benannten Ergebnisse (siehe Aufgabe 2 des zitierten Beitrags)

	a	b	c	d	e
1	$2xy$	$2x^2y^2+2$	$2xy+\frac{2}{xy}$	$\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$	

sich für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ der Term

$$T(x;y)=\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{y^2+1}{y}+\frac{x^2-1}{y}\cdot\frac{y^2-1}{x}$$

umformen läßt, genügt es, für x und y spezielle Zahlen einzusetzen. Wir wählen nach kurzer Überlegung $x = y = 2$. Damit ergibt sich

$$T(2;2)=\frac{2^2+1}{2}\cdot\frac{2^2+1}{2}+\frac{2^2-1}{2}\cdot\frac{2^2-1}{2}$$
$$\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=8{,}5.$$

Die Ergebnisse *a*, *b* und *c* scheiden jetzt sofort aus, weil sich bei dieser Belegung der Variablen bei diesen mit Sicherheit eine natürliche Zahl ergibt:

	$x=y=2$
a, b, c	natürliche Zahl
d	$2\cdot2\cdot2+\frac{2}{2\cdot2}=8{,}5$
e	$\frac{2\cdot2}{2}+\frac{2\cdot2}{2}=4$

Da bei jeder Aufgabe genau eines der angegebenen Ergebnisse richtig ist, kann nur und muß gelten:

$$\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{y^2+1}{y}+\frac{x^2-1}{y}\cdot\frac{y^2-1}{x}=2xy+\frac{2}{xy}.$$

Ein Teilnehmer an diesem Wettbewerb hätte auf seinem gedruckten Antwortzettel bei dieser Aufgabe nur das Ergebnis *d* anzukreuzen. Von ihm wird ja kein Lösungsweg verlangt!

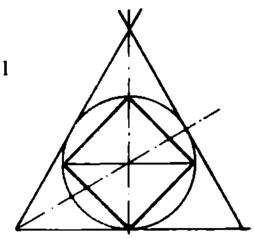
2. „Einem gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge s ist ein Kreis, diesem wiederum ein Quadrat einbeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrates ist durch s auszudrücken. Welche der fünf angeführten Lösungen ist richtig?“ (siehe Aufgabe 3)

a	b	c	d	e
$\frac{s^2}{24}$	$\frac{s^2}{6}$	$\frac{s^2\sqrt{2}}{6}$	$\frac{s^2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{s^2}{3}$

Hier zeichnen wir mittels Zeichendreieck (30°—, 60°— und 90°— Winkel) und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s = 10$ cm. Den zugehörigen einbeschriebenen Kreis zeichnen die meisten mit dem Zirkel einfach durch Probieren. Nur einige von uns überlegen sich, daß der Mittelpunkt dieses Kreises der Schnittpunkt zweier Symmetrieachsen (mittels Zeichendreieck wiederum einfach zu zeichnen) dieses Dreiecks ist und daß sein Radius der kürzere Abschnitt dieser Symmetrieachsen ist. Schließlich werden zu dem Kreis wiederum mittels Zeichendreieck zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser gezeichnet. Die Endpunkte dieser Durchmesser dienen als Eckpunkte des gesuchten Quadrates. Die Seite des Quadrates wird nunmehr zu $a \approx 4$ cm gemessen. Nach der Formel $A = a^2$ ist damit der Flächeninhalt des Quadrates bestimmt zu $A \approx 16\ \text{cm}^2$. Schließlich wird in den fünf angegebenen Ergebnissen jeweils noch für s 10 cm eingesetzt:

	$s = 10\,\text{cm}$
a	$\frac{100}{24}\ \text{cm}^2 \approx 4\ \text{cm}^2$
b	$\frac{100}{6}\ \text{cm}^2 \approx 17\ \text{cm}^2$
c	$\frac{100\sqrt{2}}{6}\ \text{cm}^2 \approx 24\ \text{cm}^2$
d	$\frac{100\sqrt{3}}{6}\ \text{cm}^2 \approx 29\ \text{cm}^2$
e	$\frac{100}{3}\ \text{cm}^2 \approx 33\ \text{cm}^2$

Abb. 1



Mittels dieser primitiven Zeichen-Meß- und Rechenmethode entscheiden wir, daß nur das Ergebnis *b* richtig sein kann.

3. Analog läßt sich die folgende Aufgabe lösen, wie der Leser mühelos selbst feststellen wird: „Gegeben ist ein Dreieck, dessen Umfang p cm und dessen Flächeninhalt k cm² beträgt. Der Inkreis dieses Dreiecks habe den Radius ϱ cm. Es ist der Quotient $\frac{p}{k}$ durch den Inkreisradius auszudrücken. Aus den fünf angegebenen Lösungen ist die richtige herauszufinden.“ (siehe Aufgabe 4)

a	b	c	d	e
$\frac{\sqrt{2}}{\varrho}$	$\frac{2}{\sqrt{\varrho}}$	$\frac{2}{\varrho}$	$\frac{\varrho}{2}$	*

An dieser Aufgabe wollen wir eine andere wichtige Kontrollmöglichkeit erproben, die in diesem Falle von den angegebenen Ergebnissen immerhin drei auszuschalten gestattet:

(* Der Quotient ist unabhängig von ϱ.)

Die gesuchte Formel zwischen Umfang, Inkreisradius und Flächeninhalt eines Dreiecks gilt nicht nur für die Maßzahlen dieser Größen in Zentimeter, sondern auch für die Maßzahlen dieser Größen in jeder anderen Längeneinheit. Wir wählen als zweite Längeneinheit 1 mm. Der Umfang unseres Dreiecks betrage jetzt p' mm, der Inkreisradius ϱ' mm und der Flächeninhalt k' mm^2. Zwischen alten und neuen Maßzahlen bestehen die Beziehungen $p' = 10 \cdot p$, $\varrho = 10 \cdot \varrho$ und $k' = 100\ k$. Für den Quotienten $\frac{p'}{k'}$ gilt damit

$\frac{p'}{k'} = \frac{10\,p}{100\,k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{k}$. Andererseits gilt für die fünf angegebenen Ergebnisse:

	Maßzahlen in mm
a	$\frac{\sqrt{2}}{\varrho'} = \frac{\sqrt{2}}{10\varrho} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\varrho}$
b	$\frac{2}{\sqrt{\varrho'}} = \frac{2}{\sqrt{10\varrho}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{\varrho}}$
c	$\frac{2}{\varrho'} = \frac{2}{10 \cdot \varrho} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{\varrho}$
d	$\frac{\varrho'}{2} = \frac{10 \cdot \varrho}{2} = 10 \cdot \frac{\varrho}{2}$
e	Der Quotient ist unabhängig von ϱ, d. h., es gilt $\frac{p'}{k'} = 1 \cdot \frac{p}{k}$.

Durch Vergleich ergibt sich, daß nur noch *a* oder *c* das richtige Ergebnis sein kann.

4. Mittels Zeichnen, Messen und Peilen läßt sich auch die folgende Aufgabe im amerikanischen Stile „lösen":

„Der Umfang eines Rechteckes *ABCD* beträgt 20 cm. Es ist die Maßzahl der kleinsten Diagonale $\overline{AC}$ eines solchen Rechtecks, die möglich ist, zu ermitteln. Entscheiden Sie, welche der angegebenen fünf Lösungen richtig ist!" (siehe Aufgabe 5)

a	b	c	d	e
0	$\sqrt{50}$	10	$\sqrt{200}$	keine der Zahlen a bis d

Die Summe der Katheten (der dem rechten Winkel anliegenden Seiten) des rechtwinkligen Teildreiecks *ABC* eines solchen Rechteckes beträgt also 10 cm. Auf Millimeterpapier, zumindest jedoch auf Kästchenpapier zeichnen wir einen rechten Winkel und markieren auf seinen Schenkeln Paare von Katheten zulässiger Dreiecke *ABC*.

Durch Messen der zulässigen Hypotenusen (der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seiten) erkennen wir, daß offenbar diejenige im zulässigen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck die kürzeste ist. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ergibt sich die Maßzahl ihrer Länge zu $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$. Bei dieser Aufgabe wird also das Ergebnis *b* als richtig angekreuzt.

5. Abschließend wollen wir noch die folgende Aufgabe mittels eines Diagrammes lösen (siehe Aufg. 10). „Zwei Kerzen gleicher Länge sind aus verschiedenen Rohstoffen hergestellt. Werden beide Kerzen zur gleichen Zeit angezündet, so brennt die eine in drei, die andere in vier Stunden völlig ab. Um welche Uhrzeit müssen beide Kerzen zugleich angezündet werden, so daß um 16 Uhr ein Kerzenstumpf doppelt so lang wie der andere ist."

a	b	c	d	e
13^{24}	13^{28}	13^{36}	13^{40}	13^{48}

Abb. 2

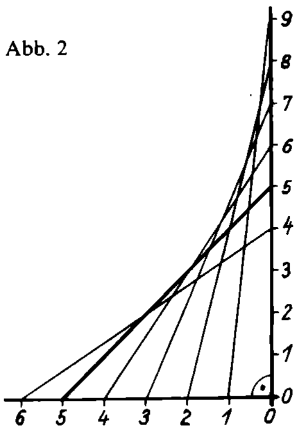
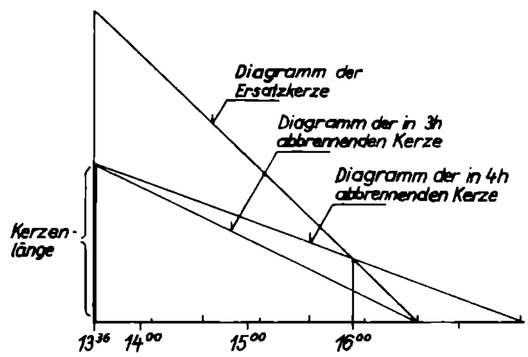


Abb. 3



Auf kariertem Papier wählen wir eine orientierte Gerade als Zeitachse, wobei wir zweckmäßig 6 Kästchenlängen einer Stunde entsprechen lassen. Senkrecht zur Zeitachse werden die jeweiligen Kerzenstumpflängen abgetragen. Da nach halber (2/3) Brenndauer die Stumpflänge noch die halbe (2/3) Kerzenlänge beträgt, wird das Abbrennen einer Kerze in unserem Diagramm offenbar jeweils durch eine Strecke beschrieben.

Um 16^{00} kann nur die langsamer abbrennende Kerze doppelt so lang sein wie die schneller abbrennende. Um diesen Zeitpunkt auf unserer Zeitachse richtig festzulegen, verdoppeln wir in jedem Zeitpunkt die Stumpflänge der schneller abbrennenden Kerze. Mit anderen Worten: Wir stellen das Abbrennen einer dritten Kerze mit verdoppelter Ausgangslänge und der Brenndauer 3 h graphisch dar. Durch das Hinzunehmen der dritten Kerze ist der Zeitpunkt 16^{00} Uhr auf unserer Zeitskala leicht festzulegen: Es ist der Zeitpunkt, in dem die Ersatzkerze gleichlang mit der in 4 h abbrennenden Kerze ist. Von dieser Stelle der Zeitachse aus kotieren wir nunmehr die Zeitachse, wobei eine Kästchenlänge jeweils 10 Minuten entspricht. Die gesuchte Antwort lautet: Ergebnis c ist das richtige! Im Anschluß an die Behandlung dieser Aufgaben machen wir uns Gedanken darüber, wie der Aufgabensteller unsere wenig exakten Lösungswege ausschalten könnte. So ergibt sich z. B. bei unserem 5. Beispiel, daß hier durch Vorgeben von fünf dichter beieinander liegenden Uhrzeiten als in Frage kommende Ergebnisse die Diagrammethode als Lösungsweg ausscheidet. — Zum Schluß des Zirkelnachmittags entscheidet jeder Zirkelteilnehmer für sich allein, ob bei der von uns als drittes Beispiel betrachteten Aufgabe das Ergebnis a oder c das richtige ist. (Jeder *alpha*-Leser möge dies auch tun, um das Folgende zu verstehen.) Wir sehen uns die Zettel an, mittels denen der einzelne Schüler seine Entscheidung fällte. Wir lassen uns die Überlegungen nennen, die der eine oder andere hierbei anstellte. In dem anschließenden Gespräch kommt zum Ausdruck:

Wir wissen: Bei unserer Mathematik-Olympiade wird bei der Lösung einer Aufgabe Wert gelegt auf klare Gedankenführung, exakte Schlüsse und Begründungen sowie auf logisch einwandfreien, übersichtlichen Aufbau. Sehr elegante exakte Lösungen finden besondere Anerkennung.

Wir erkennen: Da die Einhaltung dieser Forderungen bei der „USA-Form" der Mathematik-Olympiaden nicht garantiert ist und mittels des allein mit Kreuzen versehenen, ansonsten vorgedruckten Antwortzettels das Maß der Einhaltung bzw. Nichteinhaltung dieser Forderungen überhaupt nicht kontrolliert werden kann, müssen wir diese „USA-Form" der Mathematik-Olympiaden ablehnen.

W. Träger

Wichtiger Hinweis

Auf vielfachen Wunsch veröffentlichen wir in Heft 4/69 die Aufgaben der Schulolympiade 1969/70.

In Heft 1, 2 und 3/69 veröffentlichten wir die Aufgaben der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade 1968/69.

Das Heft 6/69 wird um acht Seiten in seinem Mittelteil erweitert. Mit ihm erhalten unsere Leser eine vollständige, in sich geschlossene Dokumentation der Lösungen der Aufgaben der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR.

Redaktion *alpha*

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (28. 3. bis 1. 4. 1969) Aufgaben

Olympiadeklasse 10

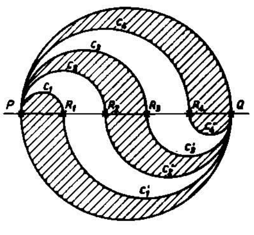
1. a) Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck der folgende Satz gilt: Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.
b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

2. Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ der Ausdruck

$$s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \text{ existiert!}$$

Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

3. In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ gegeben. Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, \ldots, R_{n-1}$, so daß $\overline{PR_1} = \overline{R_1R_2} = \ldots = \overline{R_{n-2}R_{n-1}} = \overline{R_{n-1}Q}$ gilt. Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve ($i = 1, \ldots, n-1$).



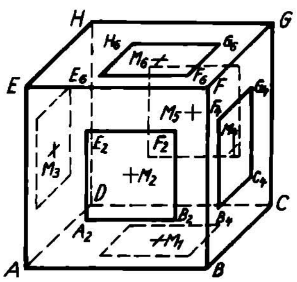
Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis (siehe Abb.) zerlegt wird!

4. Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, daß auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.
Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, daß die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

5. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2 \text{ erfüllen!}$$

6. Die Abbildung zeigt einen Würfel $W = ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a. In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2F_2E_2$, $A_3D_3H_3E_3$, $B_4C_4G_4F_4$, $D_5C_5G_5H_5$, $E_6F_6G_6H_6$ einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, \ldots, M_6$ gelegen und zwar so, daß die drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$, $g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden.



Aus W werden nun die drei Quader $A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6$, $A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5$, $A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$ herausgeschnitten. Für welchen Wert von x hat der entstehende Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

Olympiadeklasse 11/12

1. Jeder nicht negative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geqq 0$, $q > 0$). Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$. Beweisen Sie:
Die Zahlen
$z_1 = 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0,a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4 \ldots$
$z_2 = 0,\overline{a_4a_1a_2a_3}$
$z_3 = 0,\overline{a_3a_4a_1a_2}$
$z_4 = 0,\overline{a_2a_3a_4a_1}$ haben in
der obigen Darstellung $\frac{p}{q}$ stets gleiche Nenner.

2. In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als „Spiegelung am Kreis k“ bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) Es ist $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.
a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P'!
b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, daß M außerhalb von k_1 liegt. Konstruieren Sie k_1, d. h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1!

3. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $u, v, w, \ldots$ heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ eindeutig ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zuordnet (man schreibt $u \circ v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d. h. wenn für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl und es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus $\mathfrak{M}$ werde definiert:

$$u \circ v = \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Man untersuche
a) ob $\mathfrak{M}$ eine Halbgruppe ist;
b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus $u \circ v_1 = u \circ v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \circ u = v_2 \circ u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

4. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$|\log_2 (x+y)| + |\log_2 (x-y)| = 3$$
$$xy = 3!$$

5. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \left(x + \frac{2\pi}{5}\right).$$

6. Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt. Man beweise, daß dann auch das Polynom
$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + \ldots + h^n \cdot f^{(n)}(x)$ keine reellen Nullstellen hat!

Erste Preise wurden vergeben:

GERHARD SPENS
Humboldt-OS Erfurt (EOS)
(Olympiadeklasse 10, Vorbereitungsklasse)

THOMAS JENTSCH
EOS „August Hermann Francke", Halle
(Olympiadeklasse 10, Vorbereitungsklasse)

WOLFGANG BURMEISTER
EOS Dresden – Süd, (Olympiadeklasse 11, EOS) Schüler einer 10. Klasse

Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Pawel Kröger, Rumjanzew-OS Leipzig (Schüler einer 4. Klasse); Ursula Tyl, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Dietmar Soyka, EOS Karl-Marx, Spremberg (Bez. Cottbus); Stefan Ladmann, EOS Max-Klinger, Leipzig; Martin Pusak, EOS Demmin (Bez. Neubrandenburg); Gerd Morgner, EOS Geschw. Scholl, Auerbach (Bez. Karl-Marx-Stadt); Thomas Kühn, Salzmann-Oberschule (EOS), Schnepfenthal (Bez. Erfurt); Stephan Wolf, EOS Heinrich-Hertz, Berlin; Olaf Böhme, EOS Dresden-Reick (aus Kl. 9); Norbert Boy, BBS Maschinelles Rechnen, Neustrelitz;
In Olympiadeklasse 11 an: Jürgen Schefter, EOS Elsterwerda (aus Kl. 9); Andreas Felgenhauer, Spezialkl. der TH Magdeburg; Achim Nötzold, Spezialkl. der TH Karl-Marx-Stadt;
In Olympiadeklasse 12 an: Hans-Dieter Gronau, EOS Friedrich Engels, Neubrandenburg; Jürgen Gärtner, BBS der VEB Rafena-Werke, Radeberg (Bez. Dresden);

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Gerd Thieme, Otto-Grotewohl-OS, Pirna; Volker Lehmitz, EOS Hagenow (Bez. Schwerin); Reinhard Wobst, 22. OS Dresden; Gert Keller, Pestalozzi-OS Dresden; Wolfgang Wagner, EOS A.-Reichwein, Halle; Siegfried Kropf, EOS Egeln (Bez. Magdeburg); Rainer Biallas, EOS Geschw.-Scholl, Magdeburg; Hans Siepel, EOS Luckenwalde (Bez. Potsdam) (aus Kl. 9); Roland Spannaus, BBS Transformatoren- und Röntgenwerke Dresden;
In Olympiaklasse 11 an: Manfred Krzikalla, Spezialschule physik.-techn. Richtung, Frankfurt; Joachim Voigt, Spezialklasse Heinrich Hertz, Berlin (aus Kl. 10);
In Olympiaklasse 12 an: Gottfried Jetschke, EOS Lichtenstein (Bez. Karl-Marx-Stadt); Klaus Neumann, EOS Ernst Schneller, Meißen; Gerold Schmidt, EOS Helmholtz, Leipzig; Joachim Loose, EOS Kleinmachnow (Bez. Potsdam); Frank Guhlemann, EOS Grimma (Bez. Leipzig); Ulrich Imme, EOS Ilmenau (Bez. Suhl); Marlen Müller und Wolfgang Cordts, beide Spezialklasse der ABF „Walter Ulbricht", Halle;

Diplome für ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielten:

Roland Engelmann, Otto-Ludwig-OS, Saalfeld; Joachim Haase, Geschw.-Scholl-Oberschule, Wismar

Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen erhielten:

Klasse 10: Gerhard Junker, Anna-Seghers-OS Gotha; Klaus Berthold, Spezialschule Riesa; Bernd Oldenburger, EOS Oschatz; Burkhardt Seifert, EOS Fr.-Engels, Neubrandenburg; Günter Schwalbe, EOS Brand-Erbisdorf; Michael Schulze, EOS Fr.-Engels, Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, EOS Calau; Uwe Kucharzyk, EOS Königs Wusterhausen; Ludwig Schäfer, Humboldt-OS, Erfurt; Rainer Schumann, EOS Naumburg; Jürgen Rose, Paul-Oestreich-OS, Berlin; Christoph Winter, EOS Gerh.-Hauptmann, Wernigerode; Bernd Kulicke, EOS Templin; Roland Engelmann, EOS Otto Ludwig, Saalfeld; Ulrich Broniecki, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Hans-Dieter Lucas, EOS Osterburg; Thomas Reiher, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Hans Gemerski, VEB Rafena, Dresden; Joachim Puls, BS Halbleiterwerk, Frankfurt;
Klasse 11 — Manfred Fischer, Gera; Gudrun Fröbel und Rolf Schmidt, beide Spezial-OS Zeiss, Jena; Rainer Schmidt, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Martin Horatschek, Spezialkl. d. Univ. Halle; Jürgen Bechstein, Goethe-OS Ilmenau; Rainer Landrock, ABF „Walter Ulbricht", Halle; Reiner Nürnberg, Fontane-OS Neuruppin; Rainer Schleis, EOS Kleinmachnow; Georg Bartholomäus, EOS Greifswald; Silvia Rohmeiß, EOS Ilmenau; Stefan Heinrich, Spezialklasse d. Humboldt-Univers., Berlin; Heinz Voigt, Soz. Betriebsschule Regis bei Leipzig

Fakten

Teilnehmerzahl: 223, davon Mädchen: 22
Insgesamt starteten 13 Schüler in höheren als der ihnen entsprechenden Klassenstufe.

Olympiadeklasse 10

10. Klasse OS	13 Teilnehmer
10. Klasse EOS	81 Teilnehmer
10. Klasse BS	16 Teilnehmer

Olympiadeklasse 11/12

11. Klasse EOS	30 Teilnehmer
11. Klasse Spezial	21 Teilnehmer
11./12. Klasse BS	9 Teilnehmer
12. Klasse EOS	36 Teilnehmer
12. Klasse Spezial	17 Teilnehmer
zusammen	223 Teilnehmer

Berufswünsche:

Diplommathematiker, Mathematik-Physiklehrer	139
Diplomphysiker	33
Ingenieurstudium	19
Offizier NVA (Fachr. Mathematik)	5
Facharbeiter f. Datenverarbeitung	3
Sonstige mathematikintensive Berufe	11
Arzt	3
Sonstige Berufe	10
zusammen	223

Aus dem Programm

29. 3. 69 — **Feierliche Eröffnung der VIII. OJM in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck" am Bogensee (bei Berlin)**
1. Klausur: Arbeitszeit 4 Stunden; 3 Aufgaben
Am Nachmittag: Basketball, Volleyball, Tischtennis, Schach-Simultanspiel
Am Abend: Wehrpolitisches Forum

30. 3. 69 — **2. Klausur: Arbeitszeit 4 Stunden; 3 Aufgaben**
Am Nachmittag: Forum über die 3. Hochschulreform und die Perspektiven der Wissenschaft Mathematik in der DDR
Aussprache über das Treffen Junger Sozialisten zum 20. Jahrestag der DDR.
Am Abend: Vortrag von Prof. Dr. Kurt Schröder, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

31. 3. 69 — **Fahrt aller Teilnehmer nach Berlin, Besichtigung der Hauptstadt der DDR, Besuch der Theatervorstellung: Schwejk im zweiten Weltkrieg (Berliner Ensemble), feierliche Abschlußfeier und Siegerehrung im Marx-Engels-Auditorium der Humboldt-Universität zu Berlin**

Losung der VIII. OJM

Unsere Liebe, unsere Treue und unsere Kraft dem sozialistischen Vaterland!

Concursul de matematica

Etapa lacolă — 22 martie 1968

Der Generalsekretär der Gesellschaft für Mathematik der S. R. R., *Prof. Gh. Rizescu*, sandte der Redaktion die Aufgaben dieses Wettbewerbs. — Reine Arbeitszeit: 3 Stunden; Teilnehmerkreis: Schüler der 6. bis 9. Klassen; erreichbare Höchstpunktzahl: 20.

Anfang Juli 1969 findet in der SR Rumänien die XI. Internationale Mathematikolympiade statt. Aus diesem Anlaß veröffentlichen wir die Aufgaben der Schulolympiade 1968 (Lokal-Etappe genannt). Wir danken Herrn Dr. K. Bochmann, Romanisches Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig, für die Übersetzung der Aufgaben und Herrn Oberlehrer Th. Scholl, Berlin, für ihre Bearbeitung sowie die Anfertigung der Lösungen (siehe Heft 5/69).

Klassenstufe 6

▲ 1. In 16 Arbeitstagen haben 15 Weberinnen zusammen 2280 m Stoff gewebt.

a) Wieviel Weberinnen würden bei gleicher Arbeitsintensität in 24 Tagen zusammen 1596 m Stoff weben?

b) Wieviel Meter Stoff würde eine Weberin an einem Tag weben?

c) Aus dem von einer Weberin an einem Tag gewebten Stoff können eine Schürze, ein Hemd und ein Bettlaken hergestellt werden. Wieviel Meter Stoff benötigt man zur Anfertigung für jedes dieser drei Wäschestücke, wenn sich die Meterzahlen der jeweils erforderlichen Stofflängen umgekehrt proportional zu den Zahlen 2, $\frac{8}{7}$ und 1 verhalten?

▲ 2. Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{BC}$ und ein innerer Punkt M der Strecke $\overline{BC}$. Der Punkt M ist an den Geraden AB und AC zu spiegeln; die so erhaltenen Bildpunkte seien N bzw. P. Die Verbindungsgerade MN schneide die Seite $\overline{AB}$ im Punkte D, die Verbindungsgerade $\overline{MP}$ schneide die Seite $\overline{AC}$ im Punkte E. Es ist zu beweisen, daß

a) die Dreiecke NMA und MPA gleichschenklig sind;

b) die Punkte N, A und P auf einer Geraden liegen;

c) die Dreiecke NDA und AEP kongruent sind.

Prof. Grigore Gheba

Klassenstufe 7

▲ 1. Gegeben ist der Term

$$T = (x + y)\cdot\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy^2}\right) : \frac{1}{xy}.$$

a) Dieser Term ist soweit wie möglich zu vereinfachen.

b) Danach ist der Wert des Terms für $x = -2$ und $y = 2$ zu bestimmen.

c) Für welche Werte x und y ist der Term nicht definiert?

d) Für $y = 6$ nehme der Term den Wert $-\frac{1}{2}$ an; für welchen Wert von x trifft dies zu?

▲ 2. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABD mit der Hypotenuse $\overline{BD}$; die Kathete $\overline{AD}$ sei 15 m lang, und es gelte $\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 4$. Es ist der Kreis k mit der Kathete $\overline{AB}$ als Durchmesser zu zeichnen; sein Schnittpunkt mit der Hypotenuse BD sei P. Ferner ist im Punkte B die Tangente an den Kreis k zu konstruieren; ihr Schnittpunkt mit der Geraden AP sei C. Schließlich ist durch P eine Parallele zur Tangente BC zu zeichnen; die Parallele schneide die Seite $\overline{AB}$ in M und die Verbindungsgerade CD in N.

a) Ermittle die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Trapezes $ABCD$.

b) Beweise, daß $\overline{MP} = \overline{PN}$ gilt!

Georgescu Ozana, Bukarest

Klassenstufe 8

▲ 1. Löse das Gleichungssystem

$$ax + by = a^2 + b^2$$
$$bx - ay = -(a^2 + b^2).$$

▲ 2. Gegeben sind die Gleichungen

$$u = x^2 + 2x - 15$$
$$v = x^2 - 6x + 9$$
$$w = x^2 + 10x + 25.$$

a) Weise nach, daß $u^2 = v \cdot w$ gilt!

b) Berechne $\frac{u+v}{u-v}$ und kürze soweit wie möglich!

c) Der gekürzte Bruch sei mit $F(x)$ bezeichnet. Besitzt die Gleichung $F(x) = \frac{x+5}{4}$ eine reelle Lösung? (Die Antwort ist zu begründen!)

Tomuleanu Valeria, Bukarest

▲ 3. Gegeben ist die dreiseitige Pyramide $SABC$, deren Grundfläche das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AB} = 16$ cm und $\overline{AC} = 12$ cm bildet. Die Seitenkante $\overline{SA}$ der Pyramide steht senkrecht zur Grundfläche, die Seitenfläche SBC bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 45°. Ermittle

a) den Rauminhalt der Pyramide;

b) die Summe der Längen der Kanten der Pyramide;

c) die Oberfläche der Pyramide;

d) das Volumen des der Pyramide umbeschriebenen Zylinders, dessen Grundfläche durch den Umkreis des Dreiecks ABC gebildet wird und dessen Höhe gleich der Höhe der Pyramide ist.

Mitrea Victoria, Bukarest

Klassenstufe 9

▲ 1. a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$3(m-1)x + 4(m-2)y = 24$$
$$2x - y = \frac{5m-13}{(m-1)(m-2)}.$$

b) Für welche reellen Zahlen m besitzt das System keine Lösung?

c) Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die die Zahlen x und y ebenfalls natürliche Zahlen sind und für die die Zahlenpaare $[x, y]$ das Gleichungssystem erfüllen!

▲ 2. Für zwei Mengen A und B gilt:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

b) $A \cap B = \{4, 6, 9\}$;

c) $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;

d) $B \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bestimmen Sie die Mengen A und B, die diese Bedingungen erfüllen!

Prof. E. Georgescu-Buzău, Bukarest

▲ 3. Gegeben sind ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein innerer Punkt M der Strecke $\overline{BC}$. Der Punkt M ist an den Geraden AB und AC zu spiegeln; die so erhaltenen Bildpunkte seien N und P.

a) Es ist zu beweisen, daß der Umfang des Fünfecks $ANBCP$ gleich der doppelten Summe aus den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BC}$ ist. Geben Sie diejenige Lage des Punktes M an, für die dieser Umfang am kleinsten ist.

b) Es ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist, wenn die Punkte N, A und P auf einer Geraden liegen. Es ist ferner zu beweisen, daß die Punkte N, A und P auf einer Geraden liegen, wenn das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist.

c) Es ist zu beweisen, daß der Punkt M die Seite $\overline{BC}$ halbiert und das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist, wenn das Viereck $NBCP$ ein Parallelogramm ist. Es ist ferner zu beweisen, daß das Viereck $NBCP$ ein Parallelogramm ist, wenn der Punkt M die Seite BC halbiert und das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist.

Prof. I. Şiclovan, Petroşani

Klassenstufe 10

▲ 1. Gegeben ist die Gleichung

$\tan x + \cot x = m$, wobei $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt.

a) Welche Werte kann m annehmen?

b) Der Term $\sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 x + \cos^4 x$ ist durch m auszudrücken.

c) Es ist der Funktionswert von

$f(x) = \sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 x + \cos^4 x$ für $x = \frac{\pi}{12}$ zu bestimmen.

▲ 2. Gegeben ist die Summe

$$s_n = \frac{7}{(1\cdot 6)^2} + \frac{17}{(6\cdot 11)^2} + \frac{27}{(11\cdot 16)^2} + \ldots + \frac{10n-3}{[(5n-4)(5n+1)]^2}$$

a) Weisen Sie nach, daß $s_n = \frac{n(5n+2)}{(5n+1)^2}$ gilt!

b) Weisen Sie nach, daß für jede von Null verschiedene natürliche Zahl n die Ungleichung $s_n < \frac{1}{5}$ gilt!

▲ 3. Gegeben sind drei Punkte A, B und C des Raumes, die auf den Halbgeraden a, b und c, deren gemeinsamer Ursprung der Punkt O ist, liegen. Auf der Strecke $\overline{AB}$ ist ein Punkt M, auf der Strecke $\overline{AC}$ ein Punkt N so festzulegen, daß die Gerade MN parallel zur Geraden BC verläuft. Eine Ebene π, die die Gerade MN enthält und die parallel zur Geraden OA liegt, hat mit der Strecke $\overline{OB}$ den Punkt P, mit der Strecke $\overline{OC}$ den Punkt Q gemeinsam.

a) Beweisen Sie, daß das Viereck $MNQP$ ein Parallelogramm ist!

b) Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis der Punkt M die Strecke $\overline{AB}$ innen teilen muß, damit das Parallelogramm $MNQP$ ein Rhombus ist!

Aufgaben (und Lösungen) für Schüler der Technischen Meisterschulen (1. u. 2. Jahr) sowie der Spezialoberschulen (1. bis 3. Jahr) werden im Rahmen unseres *alpha*-Wettbewerbs veröffentlicht, d. Red.

Kein Mensch wird dadurch kräftig, daß er eine Abhandlung über Turnen liest, sondern indem er turnt; kein Mensch lernt denken, indem er die fertiggeschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, daß er selbst denkt und sich die Natur der Dinge selbst zu erklären sucht.

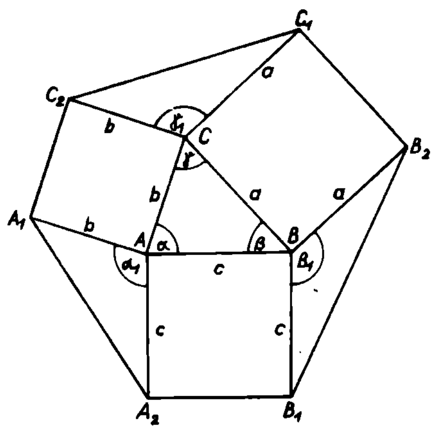
Mihai Eminescu
(rumänischer Dichter)

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. phil. habil. Maximilian Miller

Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List", Dresden

▲ 411 Der damalige Obertertianer (9. Klasse) *Josef Klein* aus Olpe fand im Jahre 1937 folgenden Satz:
Zeichnet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC (siehe Abb.) nach außen die Quadrate und verbindet man je zwei benachbarte Ecken der Quadrate miteinander, so entstehen drei Dreiecke, die dem ursprünglichen Dreieck ABC inhaltsgleich sind.
Diese Satz ist zu beweisen.



Berufe, die an der „Hochschule für Verkehrswesen Friedrich List" erlernt werden können:

I. Diplomingenieure

A Verkehrstechnik:
1. Eisenbahnbetrieb
2. Verkehrsmaschinentechnik
3. Eisenbahnsicherungstechnik und Fernmeldetechnik
4. Elektrische Bahnen und Anlagen

B Verkehrsbauwesen:
1. Eisenbahnbau
2. Straßenbau und Straßenverkehr
3. Verkehrswasserbau

C Mathematik-Ingenieure: Ausbildung wie in A und B mit vertiefter Ausbildung in Mathematik

II. Diplomingenieurökonomen

1. Transportwesen
2. Post- und Fernmeldewesen (Nachrichtenwesen).

Für mathematisch interessierte Oberschulabsolventen kommen besonders C (Mathematik-Ingenieure) in Betracht. Der Einsatz erfolgt hauptsächlich in Rechenzentren und Datenverarbeitungsinstituten.

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 20. August 1969

5 ▲ 396 Unter der Quersumme einer natürlichen Zahl verstehen wir die Summe aller den Ziffern dieser Zahl entsprechenden natürlichen Zahlen. Die Quersumme der Zahl 1967 errechnet sich zum Beispiel durch $1 + 9 + 6 + 7$ und beträgt 23.
Versuche, durch einfache mathematische Überlegungen die Summe aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 1000 zu errechnen!

OL K. Fuhrmann, Leipzig

W 5 ■ 397 Hans besitzt zwei Schachteln, die gleich hoch, aber verschieden breit sind. Er will seine neuen Farbstifte in eine dieser Schachteln packen. Benutzt er die erste Schachtel, so liegen jeweils 5 Stifte nebeneinander und in mehreren Schichten übereinander; es bleiben dabei 3 Stifte übrig, die nicht mehr in die Schachtel hineinpassen. Verwendet er die zweite Schachtel, so haben darin jeweils 7 Stifte nebeneinander Platz; es fehlen ihm jedoch noch 3 Stifte, um diese Schachtel auszufüllen. Da beide Schachteln gleich hoch sind, passen in sie gleich viele Schichten hinein. Wieviel Farbstifte besitzt Hans?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

W 5 ■ 398 Annerose hatte nach 18 Tagen erst die Hälfte ihres Taschengeldes, das sie monatlich von ihren Eltern erhielt, ausgegeben. Dies stellte sie bei einer Zwischenabrechnung fest. Bei gleichbleibender Sparsamkeit konnte sie im ganzen Monat (30 Tage) 2 M Ersparnisse zurücklegen. Wieviel Mark betrug ihr monatliches Taschengeld?

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig

6 ▲ 399 Die Maßzahlen der Längen der drei Seiten eines Dreiecks ABC seien natürliche Zahlen und alle verschieden groß. Die Seite $\overline{BC} = a$ ist 7 cm, die Seite $\overline{AB} = c$ hingegen 11 cm lang. Welche Länge kann die Seite $\overline{AC} = b$ haben, wenn ihre Maßzahl ungerade sein soll und der Umfang des Dreiecks ABC kleiner als 31 cm ist?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

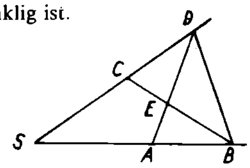
W 6 ■ 400 In einer Schachtel befinden sich 12 rote, 14 grüne und 20 blaue Kugeln. Wieviel muß man der Schachtel ohne hinzusehen, also ohne die Farbe der Kugeln zu erkennen, wenigstens entnehmen, um mit Sicherheit eine Kugel jeder Farbe dabei zu haben?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

W 6 ■ 401 Jemand gibt als Ergebnis der Multiplikation $588 \cdot 795$ die Zahl 467 450 an. Entscheide, ohne die Multiplikation auszuführen, ob das genannte Ergebnis richtig sein kann!

OL P. Polster, Dresden

W 7 ■ 402 Für die nachstehend abgebildete Figur gilt $\overline{AS} = \overline{CS}$ und $\overline{BS} = \overline{DS}$. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck BDE gleichschenklig ist.



StR. D. Michels, Rostock

W 7 ■ 403 Es sind alle sechsstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
a) Die aus der ersten und zweiten, aus der dritten und vierten bzw. aus der fünften und sechsten Stelle gebildeten Zahlen verhalten sich wie $1 : 2 : 3$.
b) Die zu ermittelnden sechsstelligen Zahlen sind durch 72 teilbar.

OL. P. Polster, Dresden

W 8 ■ 404 Gegeben sei ein Parallelogramm, das einen spitzen Winkel von 60° hat und dessen Umfang 24 cm beträgt. Ferner halbiert die von dem Scheitelpunkt eines stumpfen Winkels dieses Parallelogramms ausgehende Höhe die zugehörige Seite. Es ist die Länge der kleineren Diagonale dieses Parallelogramms zu ermitteln.

OL W. Lerche, Dresden

W 8 ■ 405 Es sind alle geordneten Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c zu ermitteln, für die

$$a + b + c = abc$$

gilt. (Unter einem geordneten Tripel positiver ganzer Zahlen versteht man drei in einer bestimmten Reihenfolge angegebene positive ganze Zahlen).

Reinhardt Wobst, 22. OS Dresden, Kl. 10

W 9 ■ 406 Gegeben sei die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f mit
$f(x) = x^2 - 3$. Es ist zu beweisen, daß dann für alle reellen Zahlen z
$f(z+1) = f(z) + 2z + 1$ gilt.

StR. G. Schulze, Herzberg/Elster

W 9 ■ 407 Von einem regelmäßigen Tetraeder mit der Kantenlänge a werden durch ebene Schnitte vier Pyramiden, deren Spitzen in den Ecken des Tetraeders liegen, so abgetrennt, daß der verbleibende Restkörper von vier regelmäßigen Sechsecken und vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist.
Es sind der Oberflächeninhalt und das Volumen des Restkörpers zu berechnen.

StR. G. Schulze, Herzberg/Elster

W 10/12 ■ 408 Gegeben sei die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x - 5).$$

Es ist zu beweisen,
daß dann für alle reellen Zahlen z

$$f\left(z - \frac{5}{2}\right) = f\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} \quad \text{gilt.}$$

StR G. Schulze, Herzberg/Elster

W 10/12 ■ 409 Von einem Würfel mit der Kantenlänge a wurden durch ebene Schnitte acht Pyramiden, deren Spitzen in den Ecken des Würfels liegen, so abgetrennt, daß der verbleibende Restkörper von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist. Es sind der Oberflächeninhalt und das Volumen des Restkörpers zu berechnen.

StR G. Schulze, Herzberg/Elster

Achtung!

Mit Heft 3 endet der Wettbewerb des Jahres 1969. In Heft 4/69 veröffentlichen wir die Aufgaben der Schulolympiade 1969. In Heft 5 beginnt der *alpha*-Wettbewerb 1969/70 (entsprechend dem Schuljahresrhythmus).
Alle Schüler, welche im Laufe des Jahres 1969 (Heft 1 bis 3) *vier oder mehr* Antwortkarten mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst“ oder „gut gelöst“ erworben haben, senden diese geschlossen zwischen dem 1. und 15. September 1969 an die Redaktion *alpha* (7027 Leipzig, Postfach 14) ein. Sie erhalten im Laufe des Oktober eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Eine Jury wertet alle Karten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.
Wer seine Karten zurückerhalten möchte, der lege einen vorschriftsmäßig frankierten Umschlag mit Adresse bei.
Bitte die Antwortkarten (geschlossen) erst dann einsenden, wenn die Antwortkarten für Heft 3 eingetroffen sind!
Nun wünschen wir allen für Heft 3 viel Erfolg beim Knobeln! Im vergangenem Jahr waren es über 800 Schüler, welche eine Anerkennungsurkunde erhielten. Wieviel werden es in diesem Jahre sein?

Redaktion *alpha*

Lösungen

▲ 353 Aus $x : 20 = 480 : 100$ folgt $x = 96$;
aus $y : 30 = 480 : 100$ folgt $y = 144$.
Es sind 96 Apfel- und 144 Birnbäume angepflanzt.
Aus $480 - (96 + 144) = 240$ und $240 : 4 = 60$ und $3 \cdot 60 = 180$ folgt weiter, daß die Plantage noch mit 60 Pflaumen- und 180 Kirschbäumen bepflanzt ist.

W 7 ■ 354 Es seien a Flaschen Weinbrand und b Flaschen Sekt vorhanden; dann sind es noch $16 - a - b$ Flaschen Wein.
$175a + 180b + 92(16 - a - b) = 1980$
$83a + 88b = 508$
$83a = 6 \cdot 83 + 10 - 83b - 5b$
$a = 6 - b \quad \frac{10 - 5b}{83}$
Da a, b und c nur natürliche Zahlen sein können, muß $10 - 5b$ durch 83 teilbar sein. Nur $b = 2$ erfüllt diese Bedingung. Ferner ist $a = 4$ und $16 - a - b = 10$. Es wurden also 4 Flaschen Weinbrand, 2 Flaschen Sekt und 10 Flaschen Wein bereitgestellt.

W 7 ■ 355 Aus $bf + bf = dmh$ folgt $d = 1$;
aus $hhe - cme = dhm$ folgt $m = 0$;
aus $bf + bf = 10h$ folgt $b = 5$;
aus $1a \cdot 5f = c0e$ und $a \geqq 2$ und $f \geqq 2$ folgt $c \geqq 6$; aus $hhe - c0e = 1h0$ folgt $h = c + 1$ und aus $iag - 5f = hhe$ folgt $i = h + 1$.
Es gilt also entweder $c = 6, h = 7, i = 8$ oder $c = 7,\ h = 8,\ i = 9$. Aus $5f + 5f = 10h$ folgt, daß h eine gerade Zahl ist. Deshalb gilt nur $c = 7, h = 8, i = 9$.
Aus $7e + 108 = 180$ folgt $e = 2$;
aus $5f + 5f = 108$ folgt $f = 4$;
aus $1a \cdot 54 = 702$ folgt $a = 3$;
aus $93g - 54 = 882$ folgt $g = 6$.
Wir erhalten also

$$\begin{array}{rcrcr} 936 & : & 13 & = & 72 \\ - & & & & + \\ 54 & + & 54 & = & 108 \\ \hline 882 & - & 702 & = & 180 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

▲ 356 Bezeichnen wir die ursprüngliche Anzahl der Mähdrescher, die die Kooperationsgemeinschaften A, B, C und D besitzen, mit x, y, z und u, so gilt nach den Voraussetzungen der Aufgabe
$x + 4 = y = z - 4 - 6 = u + 6 = 30$;
denn nach dem Ausleihen verfügt jede Kooperationsgemeinschaft über die gleiche Anzahl von Mähdreschern, d. s. $\frac{120}{4} = 30$ Mähdrescher. Wir erhalten daher
$x = 30 - 4 = 26, y = 30$,
$z = 30 + 10 = 40, u = 30 - 6 = 24$.
Daher besitzt die Kooperationsgemeinschaft A 26 Mähdrescher, B 30 Mähdrescher, C 40 Mähdrescher und D 24 Mähdrescher.

▲ 357 Wegen der letzten in der Aufgabe gegebenen Voraussetzung ist die 3. Vermutung von Horst falsch, also sind seine beiden anderen Vermutungen richtig, also kommt E auf Platz 5 und A auf Platz 2. Da B nicht auf Platz 4 kommt, ist die 1. Vermutung von Egon falsch, und seine anderen beiden Vermutungen sind richtig, also wird D Letzter sein. Daher ist die 2. Vermutung von Karl falsch. Da nun A auf Platz 2 kommt, erhält B wegen der 1. (richtigen) Vermutung von Karl den Platz 1. Wegen der (richtigen) 3. Vermutung von Egon kommt F vor C, daher verbleibt für C nur der Platz 4 und für F der Platz 3. Wir erhalten die folgende Reihenfolge, in der die Sportler durchs Ziel kamen:
B, A, F, C, E, D.
Gleichzeitig stellen wir fest, daß bei dieser Reihenfolge und nur bei dieser Reihenfolge sämtliche Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

W 8 ■ 358 Wir bezeichnen die Antworten der Automaten der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Wir wissen, daß A_5 falsch ist; daher sind mindestens drei Automaten intakt. Daraus folgt, daß A_1 und A_2 wahr sind, daß also der 1. und der 2. Automat intakt sind. Nun gibt es für A_3 und A_4 die folgenden vier Möglichkeiten, wobei wir im Fall einer richtigen Antwort ein W und im Falle einer falschen Antwort ein F vermerken:

A_3	A_4	Schlußfolgerung
W	W	Dann wären die ersten vier Automaten intakt, was im Widerspruch zu A_4 steht.
W	F	Dann wären genau zwei Automaten beschädigt, und A_4 könnte nicht falsch sein, was im Widerspruch zu dieser Annahme steht.
F	W	Es entsteht kein Widerspruch.
F	F	Dann wären A_3, A_4 und A_5 falsch, was im Widerspruch zu den obigen drei Schlußfolgerungen steht, wonach mindestens drei Automaten intakt sind.

Nur die dritte Möglichkeit ist widerspruchsfrei; daher sind A_1, A_2 und A_4 wahr, dagegen A_3 und A_5 falsch. Folglich sind der 1., 2. und 4. Automat intakt und der 3. und 5. Automat beschädigt.

W 8 ■ 359 Die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist stets kleiner als 20000; daraus folgt $F = 1$. Wegen $R + S \neq 1$ gilt also $R + S = 11$.
Daraus folgt $E + N + 1 = 10 + N$, d. h. $E = 9$. Daraus folgt weiter $I + I + 1 = 9$ oder $I + I + 1 = 19$; da $I \neq 9$ ist, gilt $I = 4$.
Man erhält wegen $R + S = 11$, daher die in der folgenden Tabelle angegebenen Möglichkeiten:

R	S	U	V	N
3	8	5	6	0, 2 oder 7
3	8	6	7	0, 2 oder 5
5	6	2	3	0, 7 oder 8
5	6	7	8	0, 2 oder 3

Das sind insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ Lösungen; hinzu kommen noch durch Vertauschung von R und S weitere 12 Lösungen, so daß die Aufgabe insgesamt 24 Lösungen hat.
Eine dieser Lösungen ist z. B.

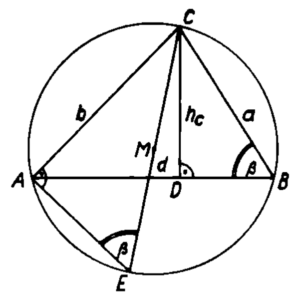
$$\begin{array}{r} 6493 \\ +\ 9408 \\ \hline 15901. \end{array}$$

▲ 360 Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich
$0 < q - p < 10$, (1)
$p + q = a^2$, wobei a eine natürliche Zahl ist, (2)
$p + q + a = 42$. (3)
Aus (2) und (3) folgt $a^2 + a = 42$.

$$\text{Nun ist } a^2 + a \begin{cases} < 42 \text{ für } a < 6, \\ = 42 \text{ für } a = 6, \\ > 42 \text{ für } a > 6; \end{cases}$$

daraus folgt $a = 6$. (Man erhält $a = 6$ auch durch die Lösung der quadratischen Gleichung $a^2 + a - 42 = 0$).
Wegen (2) gilt $p + q = 36$ und wegen (1) $q - p < 10$, also $2q < 46$, d. h. $q < 23$ und $p > 13$.
Diese Bedingungen sind aber nur für die Primzahlen $p = 17$ und $q = 19$ erfüllt.
Andererseits sind aber für diese beiden Primzahlen auch die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt; daher hat die Aufgabe genau eine Lösung, nämlich
$p = 17, q = 19$.

■ 361 Es seien ABC ein Dreieck, D der Fußpunkt der von C auf $\overline{AB}$ gefällten Höhe, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{CD} = h_c$ und d der Durchmesser des Umkreises des Dreiecks ABC.
Es ist nun zu beweisen, daß $a \cdot b = h_c \cdot d$ gilt.



Wir unterscheiden die drei möglichen Fälle, wonach die Höhe $\overline{CD}$ im Innern, außerhalb bzw. auf dem Rand des Dreiecks liegt.

1. Die Höhe $\overline{CD}$ liegt *im Innern* des Dreiecks ABC. Dann gilt (vgl. Fig. 1), da auch der

Mittelpunkt M des Umkreises im Innern des Dreiecks liegt, nach dem Thalessatz

$\sphericalangle\, CDB = \sphericalangle\, CAE = 90°$,

ferner nach dem Peripheriewinkelsatz

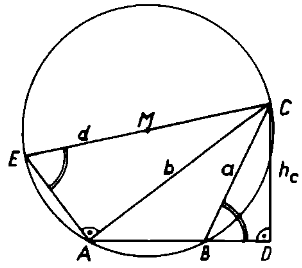
$\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, AEC = \beta$, also

$\Delta\, CDB \sim \Delta\, CAE$. Daraus folgt

$a : h_c = d : b$,

$a \cdot b = h_c \cdot d$, w.z.b.w.

2. Die Höhe $\overline{CD}$ liegt *außerhalb* des Dreiecks ABC. Dann gilt (vgl. Fig. 2), da auch der Mittelpunkt M des Umkreises außerhalb des Dreiecks liegt,



$\sphericalangle\, BDC = \sphericalangle\, EAC = 90°$,

$\sphericalangle\, CBD = \sphericalangle\, CEA = 180° - \beta$, also

$\Delta\, CBD \sim \Delta\, CEA$. Daraus folgt

$a : h_c = d : b$,

$a \cdot b = h_c \cdot d$, w.z.b.w.

3. Die Höhe $\overline{CD}$ liegt *auf dem Rand* des Dreiecks ABC.

Dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\overline{CD} = \overline{CB} = a = h_c$ gilt. Ferner gilt $\overline{AC} = b = d$ (Thalessatz), also auch in diesem Falle

$a \cdot b = h_c \cdot d$, w.z.b.w.

Bemerkung:

Bei dieser Beweisaufgabe — das gilt für viele ähnliche Aufgaben — kam es darauf an, eine *Fallunterscheidung* vorzunehmen. Es genügt nicht, wie das häufig geschieht, nur den Fall 1 zu behandeln. Man muß noch zusätzlich beweisen, daß die Behauptung auch in den Fällen 2 und 3 (die Höhe $\overline{CD}$ liegt außerhalb oder auf dem Rand des Dreiecks) richtig ist.

W 9 ■ 362 Es seien von Bernd a Widerstände zu je 17 Ω, b Widerstände zu je 21 Ω und c Widerstände zu je 28 Ω in Reihe geschaltet worden; dann gilt

$17a + 21b + 28c = 167$,

$17a + 7(3b + 4c) = 167$. Wir ersetzen $3b + 4c$ durch d und erhalten aus (1)

$17a + 7d = 167$,

$$d = 23 - 2a - \frac{3(a-2)}{7} \quad (2)$$

Da a, b und c natürliche Zahlen sind, muß auch d eine natürliche Zahl sein; das heißt, es muß $3(2-a)$ durch 7 teilbar sein. Das trifft zu für $a = 2, 9, 16, 23, \ldots$ und damit für $d = 19, 2, -15, -32, \ldots$

Es kommen nur die beiden Lösungen

$a_1 = 2$; $d_1 = 19$ bzw. $a_2 = 9$, $d_2 = 2$ in Frage.

Wir setzen $a_1 = 2$ in Gleichung (1) ein und erhalten nach entsprechender Umformung

$3b + 4c = 19$

$$b = 6 - c - \frac{c-1}{3}.$$

Eine Belegung der Variablen b und c ist unter Berücksichtigung der Bedingungen der Aufgabe nur möglich für

$c_1 = 1$, also $b_1 = 5$ und $c_2 = 4$, also $b_2 = 1$.

Wenn wir dagegen $a_2 = 9$ in Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir nach entsprechender Umformung

$3b + 4c = 2$.

Für $c_1 = 1$ erhalten wir $b_1 = -\frac{2}{3}$;

für $c_2 = 4$ erhalten wir $b_2 = -\frac{14}{3}$.

Beide Lösungen für b widersprechen den Bedingungen der Aufgabe; somit entfällt auch $a_2 = 9$ als Lösung. Als Lösung der Gleichung (1) erhalten wir demnach

$a_1 = 2, \quad b_1 = 5, \quad c_1 = 1$

$a_2 = 2, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 4$

Im ersten Fall wurden 8, im zweiten 7 Widerstände benutzt; also schaltete Bernd

2 Widerstände zu 17 Ω,

1 Widerstand zu 21 Ω und

4 Widerstände zu 28 Ω in Reihe;

Klaus hingegen

2 Widerstände zu 17 Ω,

5 Widerstände zu 21 Ω,

1 Widerstand zu 28 Ω in Reihe.

W 9 ■ 363 Es seien

x die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt" lesen,

y die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschrift „Jugend und Technik" lesen,

z die Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen.

Dann gilt:

$x + z = y + z + 22, \quad (1)$

$6y = 25z, \quad (2)$

$x + z$ ist teilbar durch z. (3)

Aus (1) folgt

$x - y = 22$, also $6x - 6y = 132$;

daher gilt wegen (2) $6x - 25z = 132$,

also $z(6\frac{x}{z} - 25) = 132. \quad (4)$

Nun ist wegen (3) $\frac{x}{z}$ eine positive ganze Zahl, also auch $6\frac{x}{z} - 25$; ferner ist wegen (2) z ein Vielfaches von 6. Andererseits ist wegen (4) z ein Teiler von 132; daher kann z nur gleich 6, 12, 66 oder 132 sein.

1. Aus $\underline{z = 6}$ würde wegen (4) folgen $x - 25 = 22$, d. h. $x = 47$, was wegen (3) unmöglich ist.

2. Aus $\underline{z = 12}$ würde wegen (4) folgen $\frac{x}{2} - 25 = 11$, d. h. $\underline{x = 72}$ und hieraus wegen (2) $\underline{y = 50}$; da die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind, haben wir eine Lösung des Systems erhalten.

3. Aus $\underline{z = 66}$ würde wegen (4) folgen $\frac{x}{11} - 25 = 2$, d. h. $x = 11 \cdot 27$, was der Bedingung widerspricht, wonach x durch z teilbar ist.

4. Aus $\underline{z = 132}$ würde wegen (4) folgen $\frac{x}{22} - 25 = 1$, d. h. $x = 22 \cdot 26$, was wieder der Bedingung widerspricht, wonach x durch z teilbar ist.

Daher erhalten wir als einzige Lösung $x = 72$, $y = 50$, $z = 12$; d. h. 72 Schüler lesen nur die Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt", 50 Schüler lesen nur die Zeitschrift „Jugend und Technik", 12 Schüler lesen beide Zeitschriften.

■ 364 Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann folgt aus (1) und (2) durch Subtraktion:

$-(a-b)x + (a-b)y + az - cz - bz + cz = a - c - b + c$,

$-(a-b)x + (a-b)y + (a-b)z = a - b$

und hieraus wegen $a - b \neq 0$

$-x + y + z = 1. \quad (4)$

Ferner folgt aus (2) und (3) durch Subtraktion:

$ax - bx - ax + cx - (b-c)y + (b-c)z = b - c$,

$-(b-c)x - (b-c)y + (b-c)z = b - c$

und hieraus wegen $b - c \neq 0$

$-x - y + z = 1. \quad (5)$

Schließlich folgt aus (1) und (3) durch Addition:

$(a-c)x + ay - by + by - cy + (a-c)z = a - c$

$(a-c)x + (a-c)y + (a-c)z = a - c$

und hieraus wegen $a - c \neq 0$

$x + y + z = 1. \quad (6)$

Wir erhalten nun durch Subtraktion bzw. Addition

aus (4) und (5) $\quad 2y = 0$, also $y = 0$,

aus (4) und (6) $\quad -2x = 0$, also $x = 0$,

aus (5) und (6) $\quad 2z = 2$, also $z = 1$.

Damit haben wir nachgewiesen, daß, wenn das Gleichungssystem (1), (2), (3) eine Lösung hat, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 1$ gilt. Da nun die Gleichungen (1), (2) und (3) für diesen Wert erfüllt sind (Probe!), gibt es genau eine Lösung, nämlich

$x = 0, \; y = 0, \; z = 1$.

W 10/12 ■ 365 Bezeichnet man mit x die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A lösten, y die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe B lösten, z die Anzahl der Schüler, die beide Aufgaben lösten, so gilt, da jeder Teilnehmer mindestens eine Aufgabe löste, $20 < x + y + z < 40, \quad (1)$

$x + y + 1 = 2z, \quad (2)$

$y - z = 4x, \quad (3)$

wobei x, y und z natürliche Zahlen sind.

Aus (3) folgt

$y = 4x + z$ und daher aus (2)

$5x + 1 = z$,

also $y = 9x + 1$. Mithin gilt

$x + y + z = 15x + 2$.

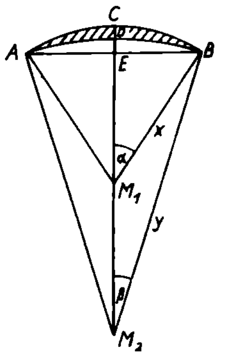
Daher folgt aus (1)

$20 < 15x + 2 < 40$,

$18 < 15x < 38$.

Nun ist $x = 2$ die einzige natürliche Zahl, die diese Ungleichungen erfüllt. Aus $x = 2$ folgt wegen der obigen Gleichungen $y = 19$ und $z = 11$, also $x + y + z = 32$.
Für diese Zahlen sind aber auch die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt. Die obige Lösung ist daher die einzige Lösung.
32 Schüler nahmen an dem Wettbewerb teil.

W 10/12 ■ 366 Es seien (vgl. die nebenstehende Figur) M_1 der Mittelpunkt und x die Maßzahl (in m) des Radius des Kreisbogens ACB, M_2 der Mittelpunkt und y die Maßzahl (in m) des Radius des Kreisbogens ADB.
Ferner gilt für die Maßzahlen (in m) der Strecken $\overline{CD} = \overline{DE} = 1$, $\overline{EB} = 6$, $\overline{M_1E} = x - 2$, $\overline{M_2E} = y - 1$.



Daher gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 = 6^2 + (x-2)^2,$$
$$x^2 = 36 + x^2 - 4x + 4,$$
$$4x = 40,$$
$$\underline{x = 10;}$$
$$y^2 = 6^2 + (y-1)^2,$$
$$y^2 = 36 + y^2 - 2y + 1,$$
$$2y = 37,$$
$$\underline{y = 18{,}5.}$$

Ferner erhält man die Größe der Winkel $\alpha = \sphericalangle EM_1B$ und $\beta = \sphericalangle EM_2B$ aus

$$\sin\alpha = \frac{6}{x} = 0{,}6,\ \alpha \approx 36{,}87°;$$

$$\sin\beta = \frac{6}{y} = \frac{6}{18{,}5} \approx 0{,}3243,\ \beta \approx 18{,}92°.$$

Daher ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Kreissektors CM_1B

$$S_1 = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi x^2 \approx \frac{36{,}87 \cdot 100\pi}{360} \approx 32{,}18$$

und des Kreissektors DM_2B

$$S_2 = \frac{\beta}{360°} \cdot \pi y^2 \approx \frac{18{,}92 \cdot 18{,}5^2\pi}{360} \approx 56{,}50.$$

Ferner ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks EM_1B

$$D_1 = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ und des Dreiecks } EM_2B$$

$$D_2 = \frac{17{,}5 \cdot 6}{2} = 52{,}5.$$

Daher gilt für den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch die Kreisbögen ACB und ADB begrenzt ist,

$$A = 2\,[(S_1 - D_1) - (S_2 - D_2)]$$
$$\approx 2[8{,}18 - 4{,}00] = 8{,}36.$$

Das schraffierte Flächenstück hat daher den Flächeninhalt 8,36 m².

▲ 367 Es seien m und n die beiden Summanden; die größtmöglichen Summanden und ihr Produkt sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

m	n	mn	m	n	mn
0	12	0	4	8	32
1	11	11	5	7	35
2	10	20	6	6	36
3	9	27			

Das Produkt $m \cdot n$ ist in keinem Falle größer als 36.

▲ 368 Es gilt $27 + 21 = 48$ und $48 \cdot 4 = 192$; das Buch enthält also 192 Seiten.

▲ 369 Es sei $\overline{AC} = x$ m; dann ist $\overline{CD} = 2 \cdot x$ m und $\overline{DB} = 3 \cdot 2 \cdot x$ m. Daraus folgt

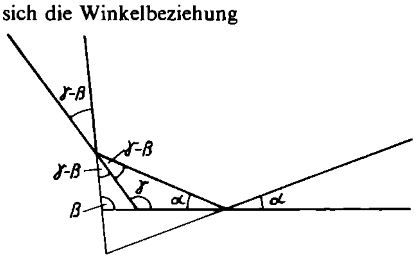
$$\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = x\,\text{m} + 2 \cdot x\,\text{m} + 6 \cdot x\,\text{m} = 72\,\text{m},$$

also
$$9 \cdot x = 72,$$
$$x = 8. \text{ Daher gilt}$$
$$\overline{AC} = 8\,\text{m},\ \overline{CD} = 16\,\text{m},$$
$$\overline{DB} = 48\,\text{m}.$$

W 5 ■ 370 Der Geldbetrag, der für die Schrippen zu bezahlen ist, muß auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Dann muß der Betrag, der auf die Knüppel entfällt, auf die Ziffer 2 oder 7 enden. Da kein Vielfaches von 8 auf die Ziffer 7 endet, muß der Betrag für Knüppel auf die Ziffer 2 enden. Dieser Betrag kann daher nur gleich $4 \cdot 8 = 32$ sein; denn keine andere natürliche Zahl, die ein Vielfaches von 8 und kleiner als 72 ist, endet auf 2. Aus $72 - 32 = 40$ und $40 : 5 = 8$ folgt, daß 8 Schrippen und 4 Knüppel eingekauft wurden. Das Zelt ist also mit zwölf jungen Pionieren belegt.

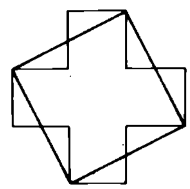
W 5 ■ 371 Aus $a < b$ folgt, daß $\frac{a}{b}$ ein echter, hingegen $\frac{b}{a}$ ein unechter Bruch ist. Deshalb gilt $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$. Eine Ungleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten mit der gleichen natürlichen Zahl multipliziert, also gilt $\frac{2a}{b} < \frac{2b}{a}$.

▲ 372 Aus dem stumpfwinkligen Dreieck der nachstehend abgebildeten Zeichnung läßt sich die Winkelbeziehung



$\alpha + \gamma + (\gamma - \beta) = 180°$ ablesen; es gilt also
$$\gamma = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

▲ 373 Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Kreuzes stehen je zwei benachbarte der vier eingezeichneten Strecken aufeinander senkrecht, und sie sind einander kongruent. Das eingezeichnete Viereck ist somit ein Quadrat.



▲ 374 Unter Beachtung der Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3, 9 und 4 erhalten wir
a) $3 \mid 83271$, $3 \mid 83274$, $3 \mid 83277$;
b) $3 \nmid 84172$, $3 \nmid 84272$, $3 \nmid 84472$, $3 \nmid 84572$, $3 \nmid 84772$, $3 \nmid 84872$;
c) $9 \mid 23058$, $9 \mid 23958$;
d) $4 \nmid 58706$, $4 \nmid 58726$, $4 \nmid 58746$, $4 \nmid 58766$, $4 \nmid 58786$.

W 6 ■ 375 Aus a) folgt unmittelbar: Ernst ist Abonnent der *Jungen Welt*; aus b) folgt unmittelbar: Axel ist Abonnent von *Neues Leben*, und Bernd ist Abonnent von *Junge Welt*; aus c) folgt: Fred ist entweder 16 oder 17 Jahre alt, Bernd ist entweder 17 oder 16 Jahre alt;
aus b) folgt: Bernd ist nicht 17 Jahre alt, also ist Bernd 16 Jahre und Fred damit 17 Jahre alt; weiterhin folgt daraus, daß Fred Abonnent von *Neues Leben* ist;
aus a) und b) folgt: Ernst ist 20 Jahre alt; dann ist Axel 19 Jahre alt.

W 6 ■ 376 Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.
a) Der Lehrer ist erst im Jahre 1968, und zwar vor dem Zeitpunkt der Fragestellung, 25 Jahre alt geworden. Aus $1968 - 25 = 1943$ folgt, daß er in diesem Falle im Jahre 1943 geboren wurde. Nun gilt $1943 = 27 \cdot 71 + 26$. Diese Möglichkeit entfällt also; denn der Rest ist nicht gleich 25. b) Der Lehrer wird noch im Jahre 1968, und zwar nach dem Zeitpunkt der Fragestellung, 26 Jahre alt. Aus $1968 - 26 = 1942$ folgt, daß er in diesem Fall im Jahre 1942 geboren wurde. Nun gilt

$$1942 = 27 \cdot 71 + 25,$$
$$1942 = 47 \cdot 41 + 15,$$
$$1942 = 45 \cdot 43 + 7.$$

Der Lehrer wurde demnach am 15. 7. 1942 geboren.

▲ 377 Es seien von den vier Ehemännern insgesamt x Tulpen gekauft worden; dann entfallen auf Franz $\frac{1}{4}x$ Tulpen

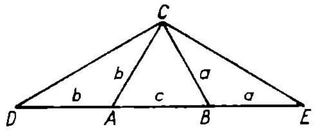
Willi $\frac{1}{3}x - 2$ T. Klaus $\frac{1}{2}x - 6$ T.

Hans $\frac{1}{8}x + 3$ T.

Durch Addition erhalten wir $\frac{29}{24}x - 5 = x$

und damit $x = 24$. Aus $\frac{1}{4}\cdot 24 = 6$ und $\frac{1}{3}\cdot 24 - 2 = 6$ und $\frac{1}{2}\cdot 24 - 6 = 6$ und $\frac{1}{8}\cdot 24 + 3 = 6$ folgt, daß jeder der vier Ehemänner genau sechs Tulpen kaufte.

▲ 378 Wir tragen die Strecken $a + b, b + c$ und $a + c$ auf einer Geraden g nacheinander von D bis F ab und halbieren die Strecke $\overline{DF}$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DF}$ sei E; dann gilt $\overline{DE} = a + b + c$. Nun schlagen wir um D mit $b + c$ und um E mit $a + c$ als Radius je einen Kreis; die Schnittpunkte dieser Kreise mit der Strecke $\overline{DE}$ seien die Punkte B und A.



Dann gilt

$$\begin{aligned} DA &= (a + b + c) - (a + c) = b,\\ BE &= (a + b + c) - (b + c) = a,\\ AB &= (a + b + c) - a - b = c; \end{aligned}$$

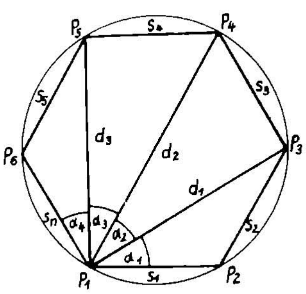
daher läßt sich das Dreieck ABC aus den drei Seiten leicht konstruieren. Wir schlagen um A mit $\overline{DA}$ und um B mit $\overline{BE}$ je einen Kreis; diese Kreise schneiden sich im Punkt C. Verbinden wir C mit A und B, so erhalten wir das zu konstruierende Dreieck ABC.

▲ 379 Es sind bei der Lösung der Aufgabe zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Es sei $x \geqq 0$; wegen $|x| = x$ gilt dann $x = \frac{x}{2} + 2$, und wir erhalten daraus $x = 4$.

2. Fall: Es sei $x < 0$; wegen $|x| = -x$ gilt dann $-x = \frac{x}{2} + 2$, und wir erhalten daraus $x = -\frac{4}{3}$. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist demnach $\{4; -\frac{4}{3}\}$.

W 7 ■ 380 Im regelmäßigen Sechseck gilt $s_1 = s_2 = \ldots = s_6$. Aus der Gleichheit der Sehnen folgt die Gleichheit der Peripheriewinkel, d. h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.



Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks beträgt 120°; damit beträgt jeder der vier Winkel $\alpha_i = \frac{120°}{4} = 30°$.

W 7 ■ 381 Für den dritten Mitspieler sind drei Fälle denkbar:

1. Fall: Er sieht auf den Köpfen der beiden anderen Mitspieler einen weißen und einen grünen Hut. In diesem Fall würde er bereits, ohne die Aussagen seiner Mitspieler gehört zu haben, erkennen, daß er einen schwarzen Hut aufhat. Dieser Fall kann also nicht vorliegen.

2. Fall: Er sieht auf den Köpfen jedes der beiden anderen schwarze Hüte. In diesem Fall könnte er trotz der Aussagen seiner Mitspieler nicht herausfinden, ob er einen weißen oder grünen Hut auf dem Kopf hat. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

3. Fall: Er sieht auf dem Kopf genau eines seiner beiden Mitspieler einen schwarzen Hut. Da die beiden ersten Fälle nicht vorliegen können, muß dieser dritte und letzte Fall vorliegen. Hätte er in diesem letzten Falle selbst keinen schwarzen Hut auf, so würde der Mitspieler mit einer schwarzen Kopfbedeckung zwei Personen mit nicht schwarzen Hüten sehen und daraus erkennen, daß er selbst einen schwarzen Hut erhalten hat und darum nicht geurteilt haben: „Ich weiß nicht, welche Farbe mein Hut hat.“ *Also hat der dritte Mitspieler selbst einen schwarzen Hut auf.* Dies erkannte der dritte Mitspieler allein aus dem Urteil desjenigen seiner Mitspieler, der selbst einen schwarzen Hut auf hat.

Spieglein, Spieglein an der Wand...

▲ 1. Aufgabe: Der Text muß richtig lauten (*alpha* 1/69, S. 9): Welches ist der kürzeste Weg, der von einem Punkt A, der zwischen den Schenkeln eines Winkels α liegt, zu einem Punkt des einen Schenkels, von dort zu einem Punkt des anderen Schenkels und wiederum zum Punkt A führt (Abb. 7)?

Lösungen zu alpha-heiter

Der Müßiggänger (3/69)

Der Müßiggänger wurde 50 Jahre alt.

Geometry Problem (3/69)

Solution: Locate O', G, H, and I as shown in the diagram. Since $OH = OI$ and $O'H = O'I$ and angle $HOI = 60°$, we have angles $OO'H = OO'I = 60°$. Thus from the properties of 30° — 60° — 90° triangles, we know that $20'H = 0°$, which implies that $OG = 30'H$. Therefore the area of the larger circle is 9 times that of the smaller. Hence the area of the smaller circle is $\frac{1}{9}$.

Bilderrätsel (3/69)

ALPEN, HASE, EI, LEITER
ALP HA HEI TER

Mathemathische Begriffe (3/69)

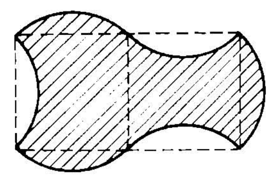
1. Meter, 2. Achse, 3. Tonne, 4. Hoehe, 5. Einer, 6. Monat, 7. Alpha, 8. Tafel, 9. Index, 10. Kegel — MATHEMATIK

Magisches Quadrat (3/69)

—16	+12	+10	—10
+6	—6	—4	0
—2	+2	+4	—8
+8	—12	—14	+14

Denkertjes (Denksport)

Der Flächeninhalt entspricht zwei gleichgroßen Quadraten (siehe Abb.)

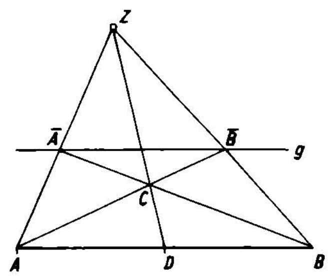


Magischer Würfel

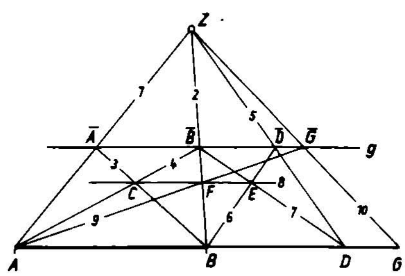
Hier erwarten wir Lösungsvorschläge vom Leser und neue, ähnliche Probleme zur Veröffentlichung.

Lösungen zu „Mit Bleistift und Lineal!“

▲ 412 Annahme von Z beliebig, jedoch nicht auf g und (AB). (ZA) schneidet g in $\bar{A}$, (ZB) schneidet g in $\bar{B}$, (AB) und $(B\bar{A})$ schneiden sich in C. (ZC) schneidet (AB) in D. D ist der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{AB}$.



▲ 413 Annahme von Z und Konstruktion von C wie bei Aufgabe 412. Annahme von D auf (AB) beliebig und Konstruktion von E analog zur Konstruktion von C. (CE) ist parallel g und schneidet (ZB) in F. (AF) schneidet g in $\bar{G}$. $(Z\bar{G})$ schneidet (AB) in G. Es gilt $\overline{AB} = \overline{BC}$.



An welchem Wochentag wurde ich geboren?

Die 6. Aufgabe, Klassenstufe 7, der Bezirksolympiade lautet: Der große deutsche Mathematiker *Carl Friedrich Gauß* wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren. Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag? (Der 30. 4. 1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre.)

Die Lösung, zusammengestellt von der Aufgabenkommission des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR lautet:
Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar
45 Jahre zu 366 Tagen und 145 Jahre zu 365 Tagen.
In den 45 Jahren rückte der Wochentag um

	90 Wochentage,
in den 145 Jahren um	145 Wochentage vor.
Das sind zusammen	235 Wochentage,

d. h. 33mal eine Woche und 4 Wochentage.
Daher war der 30. 4. 1777 ein Mittwoch.

Es ist oft wissenswert, welcher Wochentag zu einem gegebenen Datum der Geschichte oder aus unserem Leben gehört. Die Wochentage lassen sich unter Benutzung von drei Tabellen und der nachstehenden Rechenregel leicht feststellen.

Tabelle 1 (Monatszahlen):
Jeder Monat hat eine bestimmte Zahl und zwar:
Januar 3 (2), Februar 6 (5), März 6, April 2, Mai 4, Juni 0, Juli 2, August 5, September 1, Oktober 3, November 6, Dezember 1.
(In Schaltjahren gelten für die beiden ersten Monate die eingeschlossenen Zahlen. Ein Schaltjahr ist jedes Jahr, dessen beide letzten Stellen durch 4 teilbar sind; von den Schlußjahren der Jahrhunderte, wie 1600, 1700, 1800 usw., jedoch nur die, in denen die Zahl 400 ohne Rest teilbar ist.)

Tabelle 2 (Jahrhundertzahlen):

1— 99	2	1100—1199	5
100— 199	1	1200—1299	4
200— 299	0	1300—1399	3
300— 399	6	1400—1499	2
400— 499	5	1500—4. Okt. 1582	1
500— 599	4	5. Okt. 1582—1599	5
600— 699	3	1600—1699	4
700— 799	2	1700—1799	2
800— 899	1	1800—1899	0
900— 999	0	1900—1999	5
1000—1099	6	2000	4

Tabelle 3 (Wochentage):

So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	S
1	2	3	4	5	6	0

Die Rechnung ist nunmehr wie folgt durchzuführen:

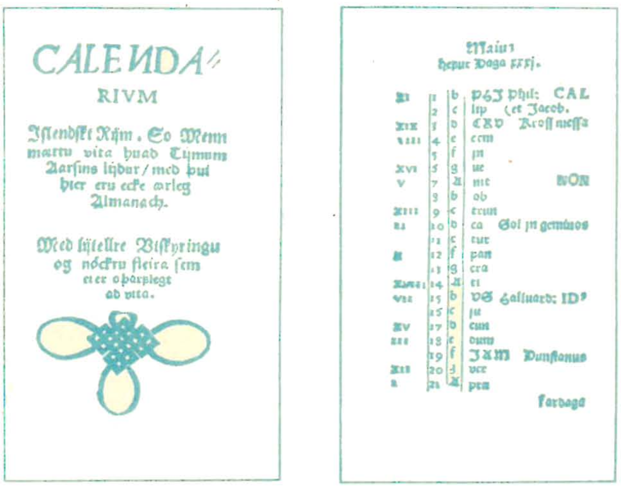
allgemein	*am Beispiel des 22. März 1832*
Es werden addiert:	
Die Tageszahl	22
Die Monatszahl nach Tabelle 1	6
Die Jahrhundertzahl nach Tabelle 2	0
Die Jahreszahl des Jahrhunderts	32
Ein Viertel dieser Jahreszahl (ohne Rücksicht auf etwa verbleibenden Rest)	+ 8
	68
Division der Summe durch 7; der bleibende Rest gibt den Wochentag nach Tabelle 3 an.	$68 : 7 = 9 \cdot 7 + 5$

Da der Rest 5 beträgt, war der 22. März 1832, der Todestag Goethes, ein Donnerstag.

Nun könnt ihr an Hand der Tabellen überprüfen, ob der 30. 4. 1777 (Geburtsdatum von *C. F. Gauß*) ein Mittwoch war, wie die amtliche Lösung besagt.

Die Zahlen der Tabelle 1 kann man sich mit Gedächtnishilfen einprägen; aus Tabelle 2 ist wohl nur 0 bzw. 5 zu merken, da fast immer nach Daten aus dem 19. bzw. 20. Jahrhundert gefragt wird; die Zahlen der Tabelle 3 sind ohne Mühe als Reihenfolge der Wochentage zu erkennen. Hat man sich dazu noch die Rechenregel eingeprägt, dann läßt sich die Berechnung der Wochentage ohne weiteres aus dem Gedächtnis durchführen.
Viel Spaß beim Rechnen! Überprüft sogleich den Wochentag des Datums, an dem ihr diese Aufgabe lest; stellt den Wochentag eures Geburtstages fest usw. Vielleicht ist in eurer Familie ein Sonntagskind?

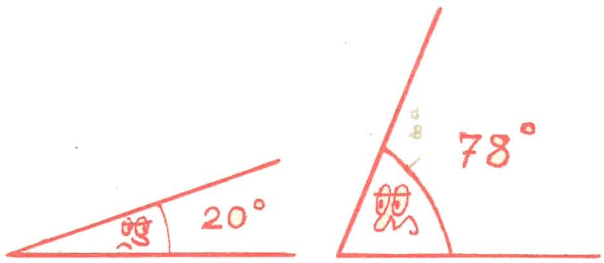
W. Unze



Calendarium Íslenzkt Rim 1597

Der Mathematiklehrer *Gestur O. Gestsson* aus Reykjavik (Island) — eifriger *alpha*-Leser — sandte uns eine Faksimileausgabe eines isländischen Dauerkalenders aus dem Jahre 1597.
Man nannte diese Kalenderbücher *Rim*, weil der größte Teil ihres Inhalts in Strophen abgefaßt war. Diese Methode, die Isländer mit der Zeitrechnung vertraut zu machen, nannte man „Buchreime" (bókrím) im Unterschied zu den „Fingerreimen" (fingrarím), einer Methode, allerlei über Zeit und Himmelskörper mit den Fingern (unter Zuhilfenahme von Merkversen) zu errechnen.

In freien Stunden alpha heiter



„Lächerlich, erst 20°"
Aus: Zeit im Bild 42/68

Hundert gewinnt

Zu diesem Spiel benötigen wir 3 Würfel, einen Becher und die Kenntnis der 4 Grundrechenarten. Spielerzahl beliebig. Jeder Spieler würfelt einmal. Die 3 Augenzahlen werden unter Verwendung der 4 Grundrechenarten verknüpft, das Ergebnis wird notiert. Dann kommt der nächste an die Reihe. Beim zweiten Durchgang wird so verfahren wie beim ersten Durchgang. Die notierten Ergebnisse können nun ebenfalls unter Verwendung der 4 Grundrechenarten verknüpft werden. Wer zuerst 100 erreicht, scheidet aus. Der letzte Spieler hat diese Runde verloren.

Beispiele:

Hans würfelt: 3-5-5 und rechnet so:	$3 \cdot 5 \cdot 5$	$= 75$
2. Durchgang: 1-3-5	: $(1+3) \cdot 5$	$= 20$
3. Durchgang: 2-3-5	: $(3-2) \cdot 5$	$= 5$
Nun addiert Hans die Teilergebnisse:	$75+20+5$	$= 100$
Oder: 4-5-5	: $4 \cdot 5 \cdot 5$	$= 100$
Oder: 1. Durchgang: 2-5-6	: $2 \cdot 5 \cdot 6$	$= 60$
2. Durchgang: 6-6-6	: $(6 \cdot 6) - 6$	$= 30$
3. Durchgang: 2-5-5	: $2 \cdot 5 \cdot 5$	$= 50$

Rechnung: $(60 : 30) \cdot 50 = 100$

Varianten: Für 100 eine andere Zahl nehmen, z. B. 111 oder 99.

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Einstein und die Null

Während des zweiten Weltkrieges wurde Einstein von einer Tageszeitung um ein Interview gebeten. Nachdem die Fragen beantwortet waren, saß man noch beim Tee. Da fragte der Reporter: „Herr Professor, was halten Sie eigentlich von Hitler?"

Einstein überlegte. „Das fragen Sie doch außerhalb dessen, was Sie zu veröffentlichen gedenken?"

Der Reporter wurde stutzig.

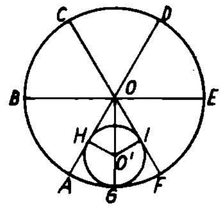
„Als Naturwissenschaftler möchte ich sagen — Hitler ist eine Größe."

Einstein sah die Entrüstung und fuhr fort: „Na ja, ich meine in diesem Falle eine rechnerische Größe, und das ist in der Mathematik die Null doch zweifellos. Hätte man mit dieser Null vorher gerechnet, brauchte man heut nicht mit ihr abzurechnen."

Aus: NBI 4/69

Geometry Problem

Let A, B, C, D, E and F be the vertices of a regular polygon and let the area of the larger circle be 1. What is the area of the smaller circle?



Aus: The Mathematical Log, Dec. 68, Oklahoma

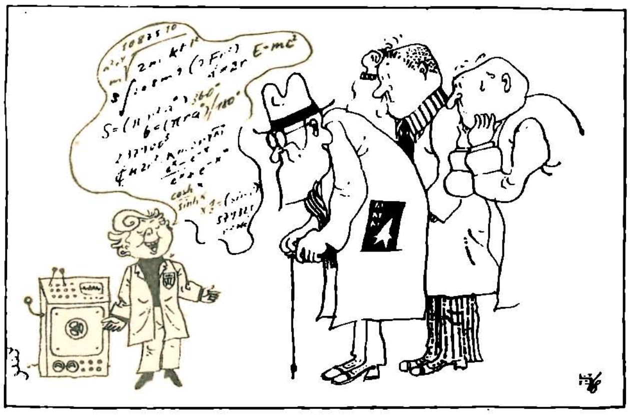
Der Müßiggänger

Ein Müßiggänger hat von Beginn seines 19. Jahres bis zu seinem Lebensende $\frac{3}{8}$ der Zeit verschlafen, $\frac{1}{16}$ mit Essen und Trinken zugebracht, $\frac{1}{4}$ mit Spazierengehen vertrieben, $\frac{3}{16}$ mit Spielen verdorben, $\frac{1}{16}$ im Lehnstuhle vergähnt und im ganzen nur zwei Jahre sich der Arbeit gewidmet. Wie alt ist dieser Mensch geworden?

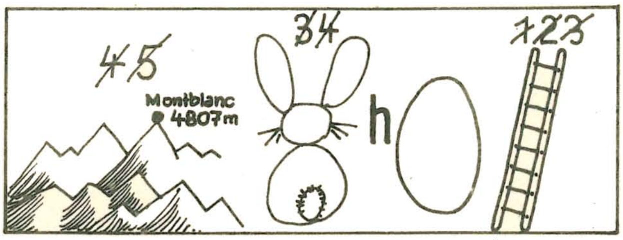
Aus: Allgemeine Arithmetik und Algebra, Köln 1906

Sonst noch 'ne Frage?

Rakete 4/68 (Sonderausgabe auf der MMM Leipzig 1968)



Bilderrätsel



Ekkehart Paditz, OS Lommatzsch, Kl. 7b

Mathematische Begriffe

In die (senkrechten) Spalten sind Wörter der folgenden Bedeutung einzutragen. (Jedes Wort hat fünf Buchstaben.) (ö ist als oe zu schreiben.)

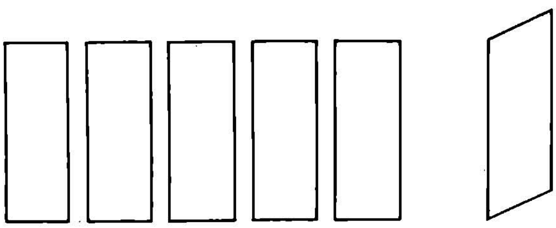
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Maßeinheit der Länge,
2. Teil des Koordinatensystems,
3. Maßeinheit der Masse,
4. Besondere Linie im Dreieck,
5. Stellenwert,
6. Maßeinheit der Zeit,
7. griechischer Buchstabe,
8. Zusammenstellung von bestimmten Zahlenwerten,
9. zusätzliches Unterscheidungsmerkmal bei Variablen, (z. B. a_1, a_2, ...)
10. geometrischer Körper.

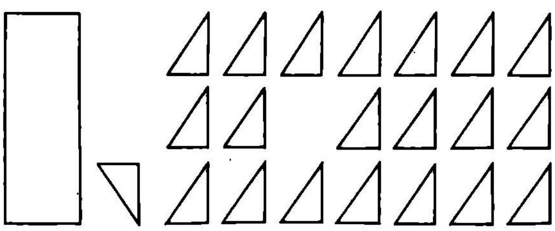
Die Buchstaben in der ersten (waagerechten) Zeile ergeben den Namen einer Wissenschaft.

OStR K.-H. Lehmann, V.L.d.V., Berlin

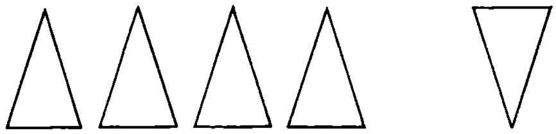
Geometrische Karrikaturen



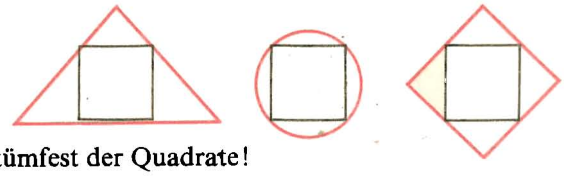
„Er hatte schon immer einen Hang zum Besonderen!“



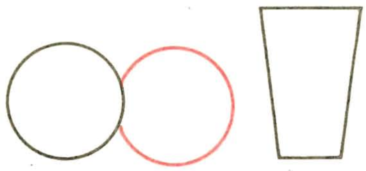
„So, so — wieder mal ohne Hausaufgaben.“



„Sie will zum Ballett!“



Kostümfest der Quadrate!



„Stellen wir erst einmal fest, wer Vorfahrt hatte!“

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

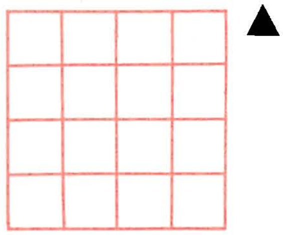
Magisches Quadrat

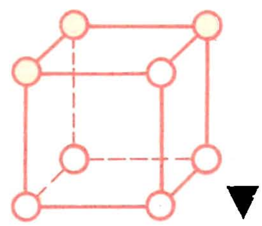
Die Elemente der Zahlenfolge

$$-16, -14, \ldots, 0, +2, +4, \ldots, +14$$

sind in die 16 Felder so einzusetzen, daß in jeder Reihe, jeder Spalte und jeder der beiden Diagonalen die Summe stets -4 beträgt. Jedes Element der Zahlenfolge darf nur einmal verwendet werden.

W. Unze, Leipzig





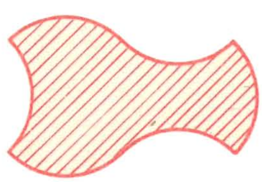
Magischer Würfel

Setze die Ziffern 1 bis 8 so in die Felder der Würfelecken ein, daß die Summe der Zahlen der Grundfläche gleich der Summe der Deckfläche ist. Gibt es mehrere Lösungen? Gibt es eine Lösung, bei der die Summe der Zahlen der Grund-, der Deck- und jeder Seitenfläche gleich ist?

Aus: Mamamuka, Sofia

Denkertjes (Denksport)

Überlege, wie groß der Flächeninhalt folgender Figur ist. Nicht rechnen, sondern denken und mit Lineal arbeiten!



Aus: Pythagoras 3-68/69, Niederlande

Leser schreiben an alpha

Als künftige Mathematikstudentin und Abiturientin machen mir die Aufgaben und Erläuterungen dazu sehr viel Spaß.

Elvira Mohn, 9204 Großschirma b. Freiberg

Herzlichen Dank für die interessanten Hefte!

Ola-Andre Strazalla, 22 Greifswald

Ich möchte nicht versäumen, der Redaktion und den Mitarbeitern der *alpha* meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die abwechslungsreiche und ansprechende Gestaltung dieser Schülerzeitschrift. Gerade durch die Aufgaben des Wettbewerbs werden die mathematisch interessierten Schüler an Probleme herangeführt, die über den Lehrstoff des Mathematikunterrichts hinausgehen.

Hans Kreul, Vater v. Klaus-Jürgen K., 88 Zittau

Hiermit möchte ich mich recht, recht herzlich bei Dir, liebe *alpha*, bedanken, daß es Dich gibt. Ich finde Dich einfach prima.

Joachim Stranz, 128 Bernau b. Berlin

Mir macht das Lösen der Aufgaben von 1968, besonders der Wettbewerbsaufgaben, viel Spaß. Es hätten manchmal sogar mehr sein können. *Ilona Boenig, 94 Aue*

Die Zeitschrift *alpha* gefällt mir sehr gut. Ich versuche, jede Aufgabe zu lösen, und beteilige mich auch immer am *alpha*-Wettbewerb.

Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen

Da wir uns gerne mit mathematischen Knobeleien beschäftigen, wird das Lösen der Wettbewerbsaufgaben in Zukunft ein Teilprogramm unserer Arbeit in der AG werden.

Zirkel Junger Mathematiker, Kl. 6, OS Greitz-Pohlitz

Ich bin Mitglied eines Mathematikzirkels an unserer Schule, und wir benutzen die *alpha* als Arbeitsgrundlage. Unsere Lösungen besprechen wir gemeinsam, nachdem wir sie abgeschickt haben... Ich habe den Wunsch, mich später für ein Studium der Mathematik zu bewerben. Deshalb ist es für mich nützlich, wenn ich mich über den Schulstoff hinaus mit mathematischen Problemen beschäftige.

Rolf Osterloh, 3253 Egeln

Wir übersenden 110 Antwortkarten des *alpha*-Wettbewerbs. Wir freuen uns, daß wir die Zahl dieser Karten, im Vergleich zum Vorjahr, mehr als verdoppeln konnten. Die Arbeit mit der Zeitschrift ist ein Hauptbestandteil unserer Arbeit... Dieser Tätigkeit ist es auch unbedingt zuzuschreiben, daß wir bei der diesjährigen Kreisolympiade sehr zufriedenstellend abschneiden konnten. Von den 7 Teilnehmern (wir sind eine 8-klassige Landschule mit 65 Schülern in der Mittelstufe) erzielten wir einen 1. Preis, zwei 2. Preise und einen 3. Preis und waren damit die beste Schule im Kreismaßstab. Dieser Erfolg war nur durch die ständige Ausnutzung der Veröffentlichungen in der *alpha* möglich. Wir beginnen aus diesem Grunde mit der Werbung für *alpha* bereits in der 4. Klasse.

E. Pohl, Lehrer, OS Rüdnitz, Kr. Bernau

In meiner Freizeit löse ich gerne Aufgaben aus der *alpha*, und es wäre schön, wenn sie monatlich erschiene. Meine Leistungen sind sehr gut. Bei der Kreisolympiade konnte ich einen ersten Platz belegen.

Wolfgang Jenschke, 8038 Dresden

Ich möchte mich heute, nachdem wieder ein *alpha*-Jahr vergangen ist, recht herzlich bedanken für alles. Sie können sich vielleicht vorstellen, wie sehr „Mathematiktraining" hilft. Auch bei mir hat es sich bemerkbar gemacht. Ich bekam — Sie werden staunen — fast das Dreifache an Antwortkarten als im Vorjahr... Übrigens habe ich erfahren, daß ich in der Kreisolympiade den 5. Platz erreicht habe. (Ein Zeichen der Übung!)

Helga Rülicke, 18 Brandenburg

Die Zeitschrift ist mir ein guter Helfer bei meinem Lieblingsfach „Mathematik". Schon zwei Jahre hintereinander belegte ich bei der Kreisolympiade den 1. Platz.

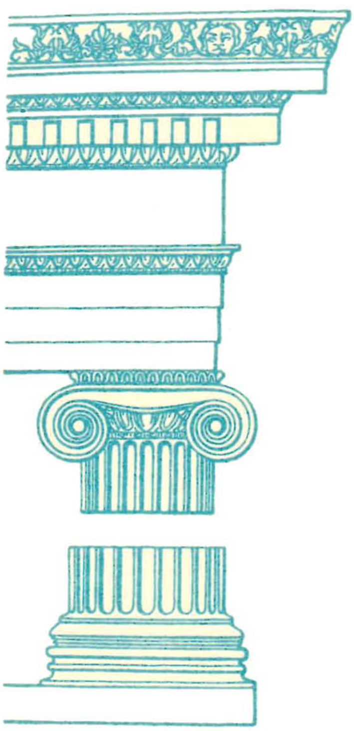
Volker Boos, 4601 Dabrun (13 J.)

alpha vermittelt mir Interessantes und Wissenswertes. Mein Mathematikdurchschnitt ist 1,0. Durch *alpha* konnte ich so gute Leistungen erzielen.

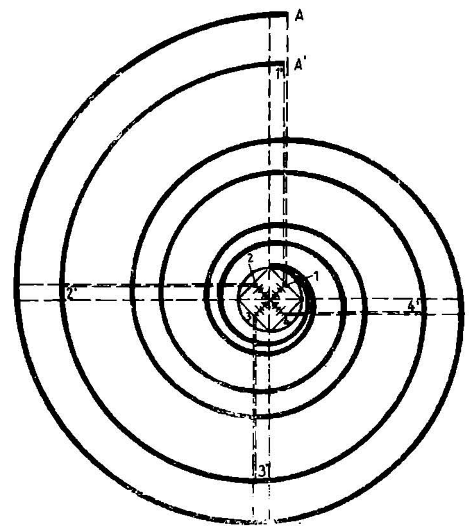
Christiane Kreuzer, 701 Leipzig

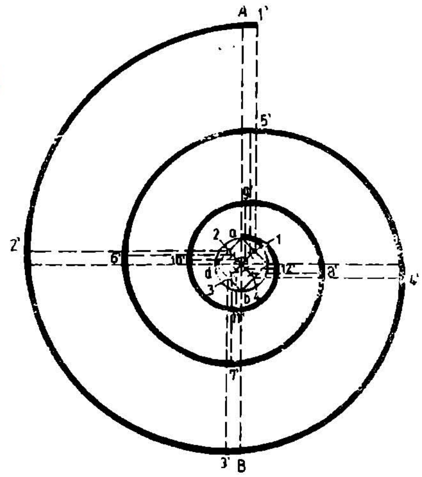
Ich kann heute feststellen, daß ich meine Leistungen im Fach Mathematik wesentlich verbessern konnte und daß Sie mit Ihrer Zeitschrift daran keinen unwesentlichen Anteil hatten. Ich kann Ihnen heute nur sagen, machen Sie weiter so!

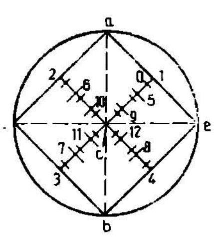
Hans-Dieter Lucas, 354 Osterburg



Mit Zirkel und Zeichendreieck







transpress

Der VEB Verlag für Verkehrswesen „transpress“, Berlin, stellte der Redaktion eine Auswahl seiner in den letzten Jahren veröffentlichten Bücher zur Verfügung. Mathematikfachlehrer *W. Unze*, Leipzig, stellte unter Verwendung dieses Materials Aufgaben zur Wiederholung der Grundkenntnisse zusammen. Wer löst mit?

5 ▲ 414 Im Stückgutverkehr von Haus zu Haus werden Behälter vier verschiedener Größen verwendet.

Behälter	Länge	Breite	Höhe (i. mm)
A	1450	800	900
B	1650	950	1300
C	1950	1100	1420
S	1200	800	800

Berechne das Fassungsvermögen der vier unterschiedlich großen Behälter (in m³)!

Aus: Lehrbuch für Berufskraftfahrer (Teil 3)

6 ▲ 415 Von den hauptsächlichsten Typen der Verkehrsflugzeuge der UdSSR werden die höchst zulässige Anzahl der Passagiere und die Startmasse der Flugzeuge genannt:

Typ	Anzahl der Passagiere	Startmasse in kg	Startmasse je Passagier in kg
An 10 A	132	55 000	
An 24	50	21 000	
IL 18 B	110	61 200	556
IL 18 E	122	61 200	
IL 62	186	157 500	
Jak 40	24	12 400	
Tu 104	100	74 500	745
Tu 144	220	165 000	
Tu 124	56	36 000	
Tu 134	72	42 000	

Bei welchem Flugzeugtyp ist die Startmasse je Passagier am kleinsten? Ergänze die Aufstellung entsprechend!

Aus: aerotyp, Verkehrsflugzeuge

7 ▲ 416 Die Durchmesser der Treibräder unserer Lokomotiven sind von ihrem Verwendungszweck (Güterzuglokomotive, Schnellzuglokomotive usw.) abhängig.

Die Treibraddurchmesser betragen bei der

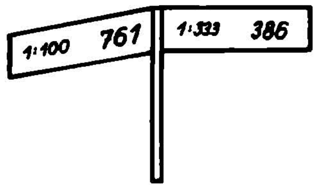
a) elektrischen Lokomotive der Baureihe E 410 1250 mm,
b) dieselelektrischen Lokomotive der Baureihe TE 40 1050 mm,
c) Dampflokomotive der Baureihe 62 1750 mm.

Wieviel Umdrehungen U führt ein Treibrad dieser Lokomotiven auf der Strecke Leipzig—Berlin (165 km) aus?

Aus: Eisenbahn-Jahrbuch 1968

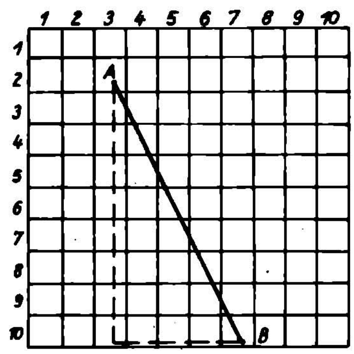
8 ▲ 417 Auf Bahnstrecken haben die durch Gelände bedingten Neigungen großen Einfluß auf den Fahrtablauf des Zuges. So werden u. a. Neigungen bzw. Neigungswechsel dem Lokomotivführer durch entsprechende Zeichen bekannt gegeben.

Was bedeuten diese beiden abgebildeten Zeichen, und welcher Höhenunterschied besteht zwischen Anfang und Ende eines so markierten Streckenabschnittes?



Aus: Lehrbuch für die sozialistische Berufsbildung im Betriebs- und Verkehrsdienst der Deutschen Reichsbahn, Teil 3

9 ▲ 418 Der neue Stückguttarif der Deutschen Reichsbahn ist auf der Basis der Luftlinienentfernung aufgebaut. Zur Berechnung wurde eine maßstabgerechte Landkarte der DDR mit einem Gitternetz überzogen; die Seitenlänge der Quadrate des Gitternetzes beträgt in der Wirklichkeit 10 km. Es entstehen so in der waagerechten Richtung 51 und in der senkrechten 37 Quadrate, die entsprechend nummeriert sind. Jeder Ort in der DDR kann so durch ein Zahlenpaar, die sogenannte Quadratnummer, bestimmt werden.



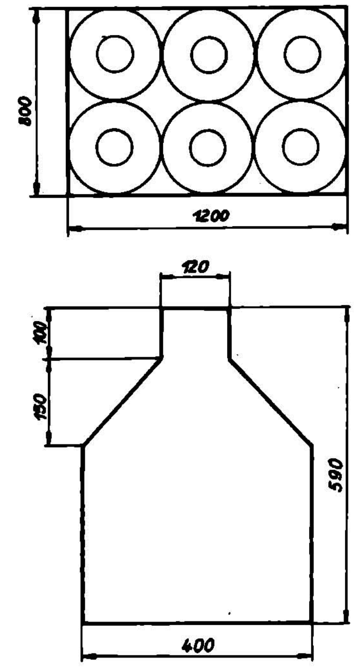
In der Abbildung ist die Lage der Orte A und B eingezeichnet, deren Luftlinienentfernung gleich der Länge l der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Berechne die Länge der Luftlinie zwischen den Orten A und B!

Aus: Stückgut — Transport — Ordnung und Tariffragen

10 ▲ 419 Das Palettensystem beim Transport, Umschlag und Lagerung kleiner Ladeeinheiten mit der Palette mit den international verbindlichen Abmessungen von 800 mm × 1200 mm nutzbarer Fläche ist zum Kernstück aller Rationalisierungsmaßnahmen unserer Transportunternehmen geworden.

Aus der Abbildung ist das Palettierungsschema für die Palettierung von Kannen bestimmten Inhalts auf der Flachpalette ersichtlich. Berechne aus den angegebenen Maßen

a) den Inhalt einer bis 2 cm unter den oberen Rand gefüllten Kanne mit Rohstoff für unsere Seifenindustrie (unter Vernachlässigung der Blechstärke der Kanne), und
b) die Masse des auf der Palette transportierten Rohstoffes bei einer Dichte von $1{,}25\ g \cdot cm^{-3}$!



Aus: Palettier-Katalog

Post vom Kosmonauten

Am 5. Februar 1969 konnten die Mitglieder des Schülerclubs *alpha* folgendes in ihr Tagebuch eintragen:

Heute war ein besonderer Tag für uns. Es war die letzte Veranstaltung vor den Winterferien. Aber trotzdem mühten wir uns alle mit geometrischen Problemen und mit Gleichungen ... Doch gerade an diesem Tage gab es Grund zu besonderer Freude: Wir hatten endlich Antwort bekommen auf einen Brief unserer Arbeitsgemeinschaft an den *Fliegerkosmonauten Beregowoi!* Verena hatte ihn mit vielseitiger Unterstützung in die russische Sprache übersetzt. Während des Jahres hatten wir uns mit Problemen des Weltraumes beschäftigt, waren im Jenaer Planetarium, hatten Verbindung mit Herrn Dr. *Marx* geknüpft und darüber dem Fliegerkosmonauten geschrieben.

Und nun kam seine Antwort, über die wir uns natürlich sehr freuten. Der Brief des Kosmonauten wird einen Ehrenplatz in unserem Tagebuch einnehmen.

Aus einem Brief an die Redaktion:

Unser Name wurde analog der Mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* gewählt. Wir benutzen sie oft in unseren Veranstaltungen. Schülerclub nennen wir uns deshalb, weil wir nicht nur „rechnen“, sondern daneben auch Veranstaltungen vielfältiger Art durchführen, wie Foren, Exkursionen, Lichtbildervorträge. Am Club beteiligen sich 12 Schüler der 7. und 8. Klasse. Zu besonderen Veranstaltungen werden auch andere Schüler eingeladen. Ebenfalls erscheinen von uns Wandzeitungen im Schulhaus.

Rosemarie Steiner
Leiter der AG Mathematik Schülerclub alpha
Polytechnische Oberschule „Reinstädter Grund“,
6901 Drößnitz

An die Mitglieder des mathematischen Zirkels *alpha*

Liebe Kinder!

Ich danke Euch für Euren Brief, in dem Ihr so gut die Arbeit Eures Zirkel- und Pionierlebens beschreibt. Alles, was Ihr tut, muß sehr interessant sein. Ich wünsche Euch von ganzem Herzen Erfolg, Vielfalt in der Arbeit, eine feste Gesundheit und Glück. Auf Eure Bitte schicke ich Euch ein Foto mit Autogramm.

Mit freundlichem Gruß

ЛЕТЧИК-КОСМОНАВТ СССР

Г. БЕРЕГОВОЙ

Wieviel Urlauber lesen auf unserem Suchbild die „alpha“?

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Aus: Wen die Götter lieben v. L. Infeld (S. 73, 74); Archiv: Erziehungsministerium der VAR, Kairo (S. 77); J. Lehmann, Leipzig (S. 83); Archiv: Hochschulbildstelle der TH Ilmenau (S. 87); F. Fricke, Berlin, aus ZIB 42/68 (S. 88); J. Lehmann, Leipzig (S. 95); Foto Jung, Neustrelitz (S. 95); Kreisbildstelle Schmalkalden (S. 96); Zentralbild (S. 86);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 2. Juni 1969

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Evariste Galois — Mathematiker und Patriot

In den frühen Morgenstunden des 30. Mai 1832 fand in Paris ein Pistolenduell statt — für die damalige Zeit war das sicher nichts Besonderes. Auch daß einer der Duellanten schwer getroffen zu Boden sank, war wohl der „Normalfall“ für den Ausgang eines solchen Duells. Nicht üblich war aber, daß der Getroffene nach dem Duell allein auf dem Wege liegend gefunden wurde — seine Sekundanten hatten ihn verlassen. Das Mysteriöse dieses Duells wird jedoch deutlicher, wenn man die weiteren Ereignisse verfolgt.
Der Getroffene — ein Mitglied der „Gesellschaft der Freunde des Volkes“, einer Vereinigung der progressivsten Republikaner der damaligen Zeit — verstarb einen Tag nach dem Duell im Krankenhaus. Als sich seine Freunde trafen, um Einzelheiten des Begräbnisses zu besprechen, das zu einer Demonstration der Republikaner werden sollte, trat plötzlich die Polizei auf und verhaftete den größten Teil der Anwesenden, obwohl das Duell und auch diese Zusammenkunft „geheim“ geblieben war. All das berechtigt zu der Annahme, daß das Duell wahrscheinlich durch Intrigen der Polizei und mit ihrer Hilfe zustande gekommen war. Wer war das Opfer dieser Intrige, zu dessen Begräbnis — trotz der Maßnahmen der Polizei — zwei- bis dreitausend Republikaner anwesend waren? Das Opfer war ein junger Mann, von dem der deutsche Mathematiker Felix Klein sagte: „Um 1830 leuchtete ein neuer Stern von ungeahntem Glanze am Himmel der reinen Mathematik auf, um freilich, einem Meteor gleich, sehr bald zu verlöschen: *Evariste Galois.*“ Ein Mann, dessen Name heute jedem Mathematiker bekannt ist.
Worin liegen nun die Ursachen für das tragische Ende dieses hervorragenden mathematischen Genies? Um diese Frage beantworten zu können, muß man sich die Geschichte Frankreichs im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts und die Entwicklung des jungen *Galois* vergegenwärtigen.
Evariste Galois wurde am 25. Oktober 1811 in Bourg-la Reine bei Paris als Sohn des späteren Bürgermeisters dieser Stadt geboren. Im Jahre 1823 trat *Galois* in das *Collège Louis-le Grand* ein, der größten und wichtigsten Schule zur Erziehung von loyalen Untertanen des Königs im damaligen Paris. Daß die Schule ihr Erziehungsziel nicht bei allen Schülern verwirklichen konnte, beweisen die Namen *Robespierre, Viktor Hugo* — und eben *Evariste Galois,* die alle Schüler von *Louis-le Grand* waren.
Der junge *Galois* litt unter der Abgeschiedenheit und Strenge, die das Internat beherrschten. Seine Lehrer bezeichneten ihn als zerstreut und verträumt. Er mußte die vorletzte Klasse noch einmal wiederholen wegen nicht ausreichender Leistung. Um der Langeweile der Hauptgegenstände Griechisch und Latein zu entgehen, begann *Galois* zum ersten Mal am Mathematikunterricht teilzunehmen, der an der Schule nicht obligatorisch war! Mit 16 Jahren begann also *Galois* sich erstmalig mit Mathematik zu beschäftigen, und er war vom ersten Tage an von ihr fasziniert — er war von da an „von einer Leidenschaft für die Mathematik besessen“. An der Schule wurde elementare Geometrie nach *Euklid* und elementare Algebra unterrichtet. Bald befriedigte ihn der Unterricht nicht mehr, er konnte von seinen Lehrern kaum noch etwas lernen, denn er studierte in seiner Freizeit die Werke der damals bedeutendsten französischen Mathematiker *Legendre* und *Lagrange.* Er widmete sich besonders der Algebra, deren Unvollkommenheit gegenüber der Geometrie ihn nicht befriedigte — man konnte damals die allgemeine Lösung von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades angeben, über Gleichungen höheren Grades gab es keine allgemeingültigen Aussagen.
Bereits nach einem Jahr veröffentlichte *Galois* seine erste Arbeit, den Beweis eines Satzes über die periodischen Kettenbrüche, in einer mathematischen Zeitschrift. Sie enthielt noch keine wesentlichen Ergebnisse — diese „sparte“ er auf für ein Manuskript, das er an die *Académie française* (der französischen Akademie der Wissenschaften) zur Begutachtung schickte. Dieses Manuskript enthielt die Grundgedanken der heute als *Galoissche Theorie* bekannten Methode zur Untersuchung von algebraischen Gleichungen, die sich wesentlich auf die von *Galois* entwickelte Gruppentheorie stützt.
Die Neuheit und Tiefe dieser Gedanken erschwerten

naturgemäß das Verständnis dieser Arbeit. Jedenfalls ist das Manuskript „verlorengegangen", nachdem es dem bekannten Mathematiker *Cauchy* zur Begutachtung geschickt worden war.

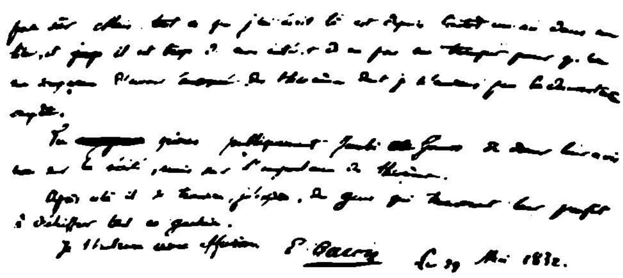
Das war die erste große Enttäuschung im Leben des jungen *Galois*, der die berechtigte Hoffnung hatte, mit dieser Arbeit bekannt, wenn nicht berühmt zu werden. Die zweite Enttäuschung folgte, als *Galois* die Aufnahmeprüfung an der *Ecole polytechnique*, an der er Mathematik studieren wollte, zum zweiten Male nicht bestand. Auch hier muß angenommen werden, daß seine Antworten auf die Fragen des Prüfers nicht verstanden wurden, weil sie „zu mathematisch" waren. Auch seine zweite an die Akademie eingesandte Arbeit wurde von *Poisson* als unverständlich und unvollständig abgelehnt.

Inzwischen entwickelte sich der heranreifende *Galois* zu einem der „glühendsten Republikaner" (*Alexandre Dumas*), sicher nicht zuletzt wegen der Tatsache, daß sein Vater, ein demokratisch gesinnter Mann, von den reaktionären Kräften in den Tod getrieben wurde. *Galois* begann, aktiv für seine Überzeugung einzutreten. So nahm er an den revolutionären Kämpfen im Jahre 1830 in Paris teil und gründete danach einen Diskussionszirkel Gleichgesinnter.

Seine wissenschaftliche Arbeit blieb unbekannt, sein mathematisches Genie unerkannt, aber der Polizei war er durch seine politische Aktivität als Aufrührer bekannt, und sie suchte nach Mitteln, um gegen ihn einschreiten zu können. So wurde er im Mai 1831 nach einem Bankett, auf dem in vorgerückter Stunde mißfällige Äußerungen gegen den König *Louis Philippe* gefallen waren, verhaftet. Er mußte allerdings nach einer vierwöchigen Untersuchungshaft freigesprochen werden. Aber bereits einen Monat später, am 14. Juli 1831, dem Erinnerungstag des Bastillesturmes, wurde er erneut verhaftet und diesmal auf Grund von gefälschtem Beweismaterial zu sechs Monaten Freiheitsentzug verurteilt. Seine Strafe mußte *Galois* in Sainte-Pélagie verbüßen. *Galois* verbrachte insgesamt mehr als 9 Monate seines kurzen Lebens im Gefängnis.

In der Nacht vor dem Duell, das vier Wochen nach seiner Haftentlassung stattfand, verfaßte *Galois* sein „Mathematisches Testament" in Form eines Briefes an *Auguste Chevalier*. Obwohl der Brief noch im gleichen Jahr veröffentlicht wurde, verging noch ein halbes Jahrhundert, bevor die Bedeutung der Arbeiten *Galois'* erkannt und er als einer „der genialsten Mathematiker aller Zeiten" (*Perron*) gewürdigt wurde. Über seinen hervorragenden mathematischen Leistungen sollte man jedoch nicht vergessen, auch die politische Tätigkeit von *Evariste Galois* gebührend zu würdigen. Er stand mit der akademischen Jugend von Paris in den ersten Reihen bei den Kämpfen gegen die Reaktion in jenen bewegten Jahren der Geschichte Frankreichs.

E. Hertel/O. Stamfort (Aus: Wurzel 7/8 – 68)

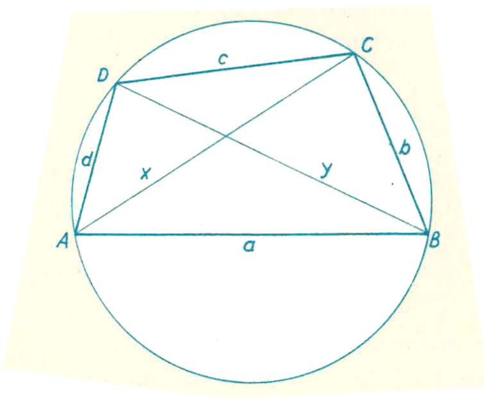


Die letzten Zeilen aus dem „Mathematischen Testament"

Ein schwieriges geometrisches Problem

Der bedeutende, 1968 verstorbene polnische Physiker *Leopold Infeld* schildert in seinem Roman *Wen die Götter lieben — Die Geschichte des Evariste Galois** auch eine Episode aus der Zeit, als der sechzehnjährige *Galois* das *Collège Louis-le Grand* besuchte. Die Schüler des besonderen Mathematik-Kurses erhielten das Aufgabenpensum für die Woche. Diese Aufgabe wurde von den meisten Schülern als schwierig betrachtet; sogar die guten Schüler brauchten dafür viele Stunden und konnten selten alle Aufgaben bewältigen. Die erste Aufgabe lautete:

▲ 420 „Finde die zwei Diagonalen x und y eines Vierecks, das in einen Kreis eingezeichnet ist, mittels seiner vier Seiten a, b, c, d !"



Es sollten also die Längen der Diagonalen eines Sehnenvierecks berechnet werden, wobei die Längen der Seiten dieses Vierecks a, b, c, d gegeben sind.

Dann wurden noch zwei weitere Aufgaben gestellt. Der junge *Galois* löste die drei gestellten Aufgaben innerhalb von fünfzehn Minuten, zum größten Erstaunen seines Lehrers, der mit einer Zeit von vielen Stunden gerechnet hatte.

Wer kann obige Aufgabe lösen?

mitgeteilt von Dr. R. Lüders, Berlin

* Auch in der DDR ist eine deutsche Ausgabe dieses bedeutenden Romans erschienen. Wir empfehlen dessen Lektüre allen interessierten *alpha*-Lesern, d. R.

Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten

Sicher wäre die Mannschaft der Deutschen Demokratischen Republik ohne Sieg von den olympischen Sommerspielen aus Mexiko in die Heimat zurückgekehrt, hätten am Anfang nicht Wochen, Monate und Jahre harten Trainings gestanden. Sicher könnte sich auch unsere Gabi kaum mit dem Weltmeistertitel schmücken, wäre nicht jede ihrer Bewegungen hundertfach geübt und ihr Tagesablauf vor solch großen sportlichen Bewährungen exakt festgelegt ... Die Mannschaft unserer Republik, die im Jahre 1960 in das Gastgeberland Rumänien zur II. Internationalen Mathematikolympiade fuhr, war mit einer Wandergruppe vergleichbar, die nach einem Spaziergang durch das Elbsandsteingebirge nun hohe Karpatengipfel erklimmen sollte. Ich gehörte dieser Mathematik-Expedition an und bewunderte wie meine Freunde die Schönheit des rumänischen Landes, durch das uns die aufmerksamen Gastgeber fast zwei Wochen lang führten. Diesem beeindruckenden Erlebnis konnten wir im Wettstreit mit fast durchweg gut trainierten mathematischen Spitzensportlern leider keine gleichwertige Leistung entgegensetzen. Es zeigte sich, daß auch hier ohne tägliches geplantes und kontrolliertes Üben, ohne Tests unter wettkampfmäßigen Bedingungen weder mit mannschaftlicher Geschlossenheit Siege errungen, noch systematisch Talente gefunden und gefördert werden können.

Inzwischen sind wir neun Jahre älter geworden, und die Siegerlisten der letzten Mathematikolympiaden weisen aus, daß an die Lösung dieser Aufgabe — in der Mathematikausbildung neben der Breite auch eine entsprechende Tiefe zu erreichen — verantwortungsvoll und konsequent herangegangen wurde. Wir haben viel erreicht und sind unbescheidener geworden. Das ist gut so.

Von unseren Teilnehmern an jener II. IMO treffe ich manchmal noch zwei: Einer studierte Medizin, der andere Veterinärmedizin ...

Ich selbst bin mit meinem Physikstudium an der Leipziger *Karl-Marx-Universität* der Sache ziemlich treu geblieben, denn Physik und Mathematik müssen zwei gute Schwestern sein. Nehmt ein beliebiges Physikbuch zur Hand und schlagt es auf! — Der Beweis scheint mir hinreichend (notwendig war er sicher nicht). Während der Experimentalphysiker bestrebt ist, seine Experimente unter Benutzung von Modellen in Formeln zu kleiden und aus ihnen weitere wichtige Schlüsse zu ziehen, liefert der theoretische Physiker das mathematische Gerüst für neue erfolgversprechende Versuche. Dieses Bild ist natürlich sehr vereinfacht und sagt noch nichts über die Beziehungen der Physik als Wissenschaft zur Praxis und nichts über die Menschen, die die Physik zum Nutzen der Gesellschaft in mittelbar und unmittelbar sichtbare Erfolge umsetzen, aus. Gerade hier haben und werden sich im Rahmen der 3. Hochschulreform bedeutende Veränderungen ergeben, die ein vor allem der Zukunft angemessenes Wissenschaftssystem schaffen werden. Diese Umgestaltung erlebe ich als Aspirant an der Sektion Physik mit und freue mich natürlich, daß in dem jüngsten Staatsratsbeschluß zur Durchführung der 3. Hochschulreform die großartige Perspektive von Mathematik und Physik ganz besonders unterstrichen wird.

Dieser Beschluß muß nun mit Leben erfüllt werden, mit dem erfolgreichen Schaffen sozialistischer Forschungskollektive, in denen junge Studenten neben oder besser gemeinsam mit erfahrenen Wissenschaftlern arbeiten. Die Hörsäle auch unserer Sektion werden sich entsprechend den erhöhten Anforderungen der strukturbestimmenden Zweige der Industrie mit weit mehr Studenten als bisher füllen. Doch bevor man Physikstudent wird, steht natürlich die Frage: Was bin ich als Physikabsolvent, was muß ich als Diplomphysiker sein?

Walter Ulbricht sagte im November 1966 in Dresden, daß unsere sozialistische Gesellschaft von den Absolventen unserer Universitäten verlangt, „daß sie

1. den Marxismus-Leninismus zutiefst begriffen haben, eine klassenmäßige Position in unserem nationalen Kampf einnehmen und die Zusammenhänge von Politik, Ökonomie, Ideologie und Wissenschaft verstehen;
2. über ein breites Spektrum von Kenntnissen ihres Fachgebietes verfügen, die es ihnen ermöglichen, dem raschen Fortschreiten der Technik und der Wissenschaft zu folgen;
3. über spezielle moderne Kenntnisse ihres Fachgebietes verfügen, über ein anwendungsbreiteres Wissen, das es ihnen ermöglicht, den Fortschritt der Wissenschaft und Technik mitzubestimmen;
4. sich die Schätze der deutschen und internationalen Kultur angeeignet haben."

Hieraus und aus der besonderen Rolle, die die Physik im Rahmen der Naturwissenschaft und Technik einnimmt, ergeben sich für das Berufsbild des Physikabsolventen besondere Merkmale, die Prof. Dr. rer. nat. habil. *H. Pfeifer* aus Anlaß der Gründung der Sektion Physik am 29. 1. 1969 anführte:

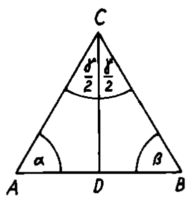
„Hier sind insbesondere der hohe Grad der theoretischen Durchdringung und die Möglichkeit, ihre Ergebnisse und Methoden in den verschiedenen Bereichen der naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Entwicklung anzuwenden, zu nennen. Unter diesen Umständen gewinnt die Physik beim umfassenden Aufbau des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der DDR einen ständig wachsenden Einfluß auf die Entwicklung der Arbeitsproduktivität sowie auf die Erschließung neuer Produktionsmöglichkeiten und Energiereserven. Sie nimmt damit eine bedeutende Stellung in der Auseinandersetzung zwischen dem kapitalistischen und sozialistischen Lager ein und bedingt, daß die Arbeit des Physikers stets mit politischen Entscheidungen verbunden ist und Probleme der Organisation und Leitung eines sozialistischen Industriebetriebes und der Forschung berührt. Zu den wichtigsten Teilgebieten der Physik, auf denen vom Physiker umfassende Kenntnisse verlangt werden, gehören neben der allgemeinen Physik vor allem Elektronik und Physik der Hülle, des Kerns und des Festkörpers. Dabei sollen die theoretischen Grundlagen, experimentelle und theoretische Methoden sowie Zusammenhänge und Schlußfolgerungen für die Anwendung beherrscht werden. Im Zusammenhang mit der experimentellen Physik kommt der modernen Meßtechnik eine besondere Bedeutung zu. Natürlich muß der Physiker zur Bewältigung physikalischer Fragestellungen und praktischer Anwendung der Physik über ein solides mathematisches Rüstzeug verfügen. Neben diesen Grundkenntnissen in Mathematik und Physik werden noch Spezialkenntnisse gefordert, die im Zusammenhang mit der Diplomarbeit durch vertieftes Studium eines Teilgebietes erworben werden. Abschließend seien besondere Fähigkeiten, die von einem Physiker erwartet werden, angeführt:

— Das Vermögen, seine gesellschaftliche Stellung und Verantwortung für die Nutzung der wissenschaftlichen Ergebnisse im Interesse der DDR zu erkennen und zu handeln;
— die Fähigkeit zur Leitung eines Kollektivs;
— die Fähigkeit zur fachlichen Anleitung zugeteilter Fachkräfte;
— die Fähigkeit zur Vorbereitung von Entscheidungen durch klare Diskussionen der Vor- und Nachteile mehrerer möglicher Lösungen eines Problems;
— das Vermögen der selbständigen Einarbeitung in physikalische Probleme mit Hilfe der Fachliteratur;
— die Abstraktionsfähigkeit;
— die Übung im Erkennen logischer Zusammenhänge;
— die Fähigkeit zur Extrapolation von Entwicklungstendenzen."

H. Ernst

Mathematikprobleme – selbst gemacht

Liebe Mädchen und Jungen in der DDR!
Ich habe eure Mathematikzeitschrift *alpha* kennengelernt und mir gedacht, daß bestimmt auch euch Freude machen kann, was ich mit anderen Schülern ausprobiert habe. Ich wollte nämlich feststellen, wie Schüler selbst mathematische Zusammenhänge entdecken können und die verschiedenen Stücke anders zusammenstellen und gute mathematische Vorstellungen entwickeln.
Jedesmal ist eine geometrische Figur mit gegebenen Beziehungen dargestellt. Die Aufgabe besteht darin, soviel wie möglich mathematische Probleme damit „aufzubauen", *an die noch niemand bei dieser Figur gedacht hat.* Dabei braucht sich das nicht auf geometrische Probleme zu beschränken, sondern man kann alle Teilgebiete der Mathematik dazu verwenden. Die Aufgaben brauchen auch nicht gelöst, sondern bloß als Sätze formuliert zu werden. Die Lösung kann man dem Freund oder der Freundin überlassen.
Damit ihr es gut versteht, folgt erst ein ausführliches Beispiel:



Es ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{CD}$ als Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze gegeben. (Fig. 1)
Es sind möglichst viele Probleme aus Geometrie, Trigonometrie, Algebra, Vektorrechnung oder Differentialrechnung zu formulieren. Einige mögliche Probleme könnten die folgenden sein:

1. Man beweise, daß $\overline{CD}$ das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

2. Man beweise, daß $\overline{CD}$ die Höhe und Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist.

3. Man beweise, daß die Fläche des Dreiecks ADC die Hälfte der Fläche des Dreiecks ABC ist.

4. Man beweise, daß $\overline{DB} = \overline{CB} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$.

5. Man beweise, daß der Radius des einbeschriebenen Kreises durch $r = \overline{AD} \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$ gegeben ist.

6. Man beweise, daß der Radius des umbeschriebenen Kreises durch $R = \frac{1}{2}\frac{\overline{CB}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ gegeben ist.

7. Wenn das Dreieck um $\overline{CD}$ rotiert, dann entsteht ein Kegel mit der Höhe $\overline{CD}$ und dem Volumen $\frac{1}{3}\cdot\overline{AD}^2\cdot\overline{CD}$.

8. Man beweise, daß $(2\cdot\overline{AC} + \overline{AB})^2 \geqq 3\,\overline{AC}\,(2\cdot\overline{AB} + \overline{AC})$ ist.

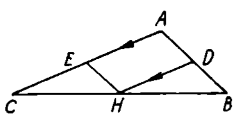
9. Man zeige, daß $\vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ ist.

10. $\lim\limits_{\gamma\to 90^\circ}\frac{\vec{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$.

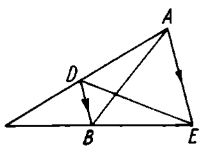
11. Bei konstanter Summe $\overline{CD} + \overline{AB}$ erhält man die größte Fläche des Dreiecks, wenn $\overline{CD} = \overline{AB}$ ist.

Nun nehmt euch 30 Minuten Zeit und versucht, in ähnlicher Art zu den folgenden Figuren Probleme und Aufgaben zu finden, die ihr noch nicht in einem Mathematiklehrbuch gesehen habt.

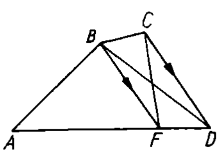
▲ Aufgabe 1: D und E sind jeweils Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, $\overline{DH} \parallel \overline{AC}$.



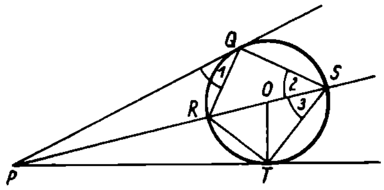
▲ Aufgabe 2: $\overline{DB} \parallel \overline{AE}$.



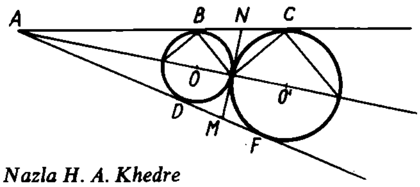
▲ Aufgabe 3: $\overline{BF} \parallel \overline{CD}$.



▲ Aufgabe 4: PQ und PT sind Tangenten an den Kreis mit dem Mittelpunkt O. PRS enthält den Mittelpunkt. Die Winkel 1, 2 und 3 sind gleich.



▲ Aufgabe 5: ABC, ADF und MN sind gemeinsame Tangenten an die zwei Kreise mit den Mittelpunkten O bzw. O'.



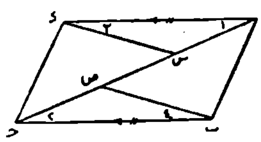
Nazla H. A. Khedre

Der vorliegende Beitrag zeigt Gedanken aus der Dissertation von Frau Dr. Nazla H. A. Khedre, verteidigt am Institut of Education Library, London University, 1968.

— ٤٨ —

تمرين محلول

ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ب حـ = ا ء وبوازيه . وصل قطره : حـ ثم
أخذت عليه نقطة مثل س ووصل ء س ، ورسم من ب مستقيم لاقى ا حـ فى ص
بحيث كانت : ∠ ا ء س = ∠ حـ ب ص
أثبت أن : ء س = ب ص



(شكل ٢)

المعطيات : ا ب حـ ء شكل رباعى ، ب حـ = ا ء ويوازيه ، س ، ص
نقطتان على ا حـ بحيث كانت ∠ ا ء س = ∠ حـ ب ص (شكل ٢)
المطلوب إثبات أن : ء س = ب ص
البرهان : ا ء // ب حـ ، ا حـ قاطع
∴ ∠ ١ = ∠ ٢ بالتبادل

فى △ ا س ء ، △ حـ ص ب فيهما
ا ء = حـ ب (فرضاً)
، ∠ ١ = ∠ ٢ (برهاناً)
، ∠ ٣ = ∠ ٤ (فرضاً)

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن :
ء س = ب ص
وهو المطلوب

Ausschnitt aus dem Geometriebuch für Vorbereitungsklassen (S. 48). Arabisch wird von rechts nach links geschrieben, Zahlen jedoch wie in der DDR.

Aus der VAR berichtet

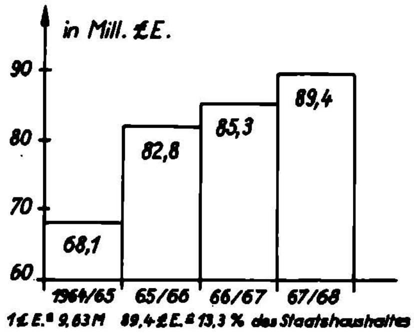
Seit der Revolution im Jahre 1952 wurden in der *Vereinigten Arabischen Republik* große Anstrengungen zur Verbesserung der Volksbildung unternommen. Eine große Anzahl neuer Schulen wurde gebaut, Schulgeldfreiheit eingeführt und ein energischer Kampf gegen das Analphabetentum begonnen. Schulpflicht besteht für alle Kinder zwischen dem 6. und 12. Lebensjahr. Nach Beendigung der sechsjährigen Grundschule werden die besten Schülerinnen und Schüler in eine dreijährige Vorbereitungsschule und davon wieder die besten in eine dreijährige Oberschule oder Technische Schule aufgenommen.

Trotz der mehrfachen israelischen Aggressionen, die dem Land große Opfer abverlangen, stellt die Regierung einen beträchtlichen Anteil des Staatshaushaltes für das Erziehungswesen zur Verfügung. 1965/66 besuchten 78,6 % der Kinder im schulpflichtigen Alter die Grundschule. Dieser Prozentsatz konnte nicht, wie geplant, erhöht werden, da durch die imperialistische Aggression im Jahre 1967 Schulen in den Bezirken *Sinai*, *Suez* und *Ismaila* geschlossen werden mußten. Alle Flüchtlingskinder wurden wieder eingeschult.

Zwischen der VAR und der DDR bestehen Handelsbeziehungen. Im Rahmen eines Kulturabkommens wurde u. a. vereinbart, daß Fachleute des Erziehungswesens ausgetauscht werden. Seit einiger Zeit arbeiten im Erziehungsministerium in Kairo Experten aus der DDR auf dem Gebiete des Mathematik-, Physik- und Chemieunterrichts. Gemeinsam mit ägyptischen Pädagogen werden neue moderne Lehrpläne und einzelne Stoffeinheiten in Schulversuchen ausprobiert. Das ist ein Zeichen echter und ehrlicher Zusammenarbeit.

Fakten:

Die VAR ist ein junger Nationalstaat, der im Jahre 1953 seine Unabhängigkeit erlangt hat.
Fläche: 1 000 000 km^2
Einwohner (1962): 27,3 Mill. ...
Einwohner pro km^2: 27
Länge des Nils auf dem Gebiet der VAR: 1 500 km
Breite der Niloase:
Oberägypten: 2 km,
Unterägypten: 10 bis 25 km
Anteil des Kulturlandes in der VAR: 3,5 %
Wichtigster Exportartikel: hochwertige Baumwolle (Der Exporterlös dieses Produkts beläuft sich auf etwa 80 % der Gesamteinnahmen.)
wichtigste Städte: Kairo 3,3 Mill. Einw.; Alexandria 1,4 Mill. Einw.; Port Said 226 000 E.; El-Gîza 177 000 E.; Tanta 175 000 E.; El-Miakalla el Kubra 162 000 E.; Suez 156 000 E.



Aufwendungen des Erziehungsministeriums (ohne Hoch- und Fachschulen) in E. (ägyptisches Pfund)

1

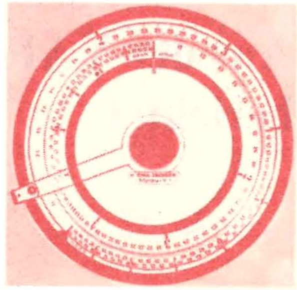
2

3

1 Briefmarke, herausgegeben aus Anlaß der Industrieausstellung der VAR
2 Briefmarke, herausgegeben zu Ehren der Olympischen Spiele in Mexiko
3 Briefmarke, die Flüchtlinge zeigt, welche durch die Aggression Israels ihre Heimat verlassen mußten

Das große Verwaltungsgebäude „Mogamma" am *Midan El Tahrir*, dem Freiheitsplatz in Kairo, in dem Frau Dr. *Nazla* und die DDR-Experten arbeiten.

Rechnen mit Resten, Teil 2



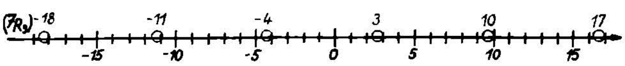
Rechenscheibe

3. Eine seltsame Arithmetik

Um nun vom „Rechnen mit Kongruenzen" zum „Rechnen mit Resten" zu kommen, betrachten wir zunächst einmal den Fall des Moduls 7, also $a \equiv b$ (7), etwas näher:
Offensichtlich sind doch bei $m = 7$ auch sieben verschiedene Reste möglich, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Fassen wir nun jeweils die ganzen Zahlen zusammen, die bei Division durch 7 den gleichen Rest lassen, also nach dem Modul 7 einander kongruent sind, so erhalten wir sieben sogenannte „Restklassen":

$$
\begin{aligned}
{}^7R_0 &= \{\ldots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots\}\\
{}^7R_1 &= \{\ldots, -20, -13, -6, 1, 8, 15, 22, \ldots\}\\
{}^7R_2 &= \{\ldots, -19, -12, -5, 2, 9, 16, 23, \ldots\}\\
{}^7R_3 &= \{\ldots, -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \ldots\}\\
{}^7R_4 &= \{\ldots, -17, -10, -3, 4, 11, 18, 25, \ldots\}\\
{}^7R_5 &= \{\ldots, -16, -9, -2, 5, 12, 19, 26, \ldots\}\\
{}^7R_6 &= \{\ldots, -15, -8, -1, 6, 13, 20, 27, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Die hier gewählte Symbolik, bei der z. B. ${}^7R_3$ die Menge der Zahlen bedeutet, die bei Division durch 7 den Rest 3 lassen, dürfte wohl leicht verständlich sein. Allgemein könnte man entsprechend beim Modul m die Menge der Zahlen, die bei Division durch m den Rest r lassen, mit ${}^mR_r$ bezeichnen. Zwei aufeinanderfolgende Zahlen aus einer solchen Restklasse haben übrigens immer die Differenz m; das wird auch an der Zahlengeraden deutlich.



Jede ganze Zahl liegt in genau einer dieser sieben Restklassen ${}^7R_0$ bis ${}^7R_6$, d. h., es gibt keine Zahl, die nirgends vorkommt, und auch keine, die in verschiedenen Restklassen enthalten ist. Daraus erklärt sich auch der Name Restklassen für diese Zahlenmengen. Allgemein spricht man nämlich von einer Einteilung einer Menge in Klassen, wenn diese so in Teilmengen zerlegt wird, daß jedes Element in genau einer dieser Teilmengen vorkommt (und keine dieser Teilmengen leer ist). Mittels der zahlentheoretischen Kongruenz modulo m wird also die Menge der ganzen Zahlen in m Klassen aufgespalten. Weil jede ganze Zahl in genau einer Restklasse liegt, kann jedes beliebige Element einer Klasse als stellvertretend für alle übrigen Elemente und damit für die ganze Klasse angesehen werden. Man nennt die Elemente deshalb auch „Repräsentanten" der Klasse. So können wir z. B. die sieben Restklassen modulo 7 jeweils durch ein beliebiges ihrer Elemente repräsentieren, etwa durch —21, 1, —12, 17, —80, —37, 41. Diese Zahlen bilden ein sogenanntes „vollständiges Restsystem modulo 7". Zweckmäßiger und übersichtlicher ist es allerdings, wenn man die kleinsten nicht-negativen Repräsentanten wählt, also die eigentlichen „Reste" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Allgemein bezeichnet man die Menge der Zahlen 0, 1, 2, ..., $m - 1$ als (vollständiges) „einfaches" Restsystem modulo m. Die Tatsache, daß jede Klasse durch ein beliebiges ihrer Elemente vertreten werden kann, kann man auch zur kürzeren Bezeichnung der Klassen ausnutzen. Sind keine Irrtümer durch das Weglassen des Moduls zu befürchten, so können wir beispielsweise für die Klassen ${}^7R_3$ kurz $\overline{3}$ schreiben, weil 3 ein Repräsentant dieser Klasse ist. Der Querstrich über der Ziffer soll dabei andeuten, daß es sich um die ganze Klasse handelt, in der die Zahl liegt, nicht etwa um die Zahl 3 selbst. Freilich könnten wir statt $\overline{3}$ sehr wohl auch $-\overline{4}$, $\overline{17}$ o. dgl. schreiben.

Werfen wir nun einen Blick zurück auf unsere anfängliche Betrachtung der geraden und ungeraden Zahlen: Die dort mit G und U bezeichneten Mengen der geraden bzw. ungeraden Zahlen sind ja nichts anderes als die beiden Restklassen modulo 2. Es ist $G = {}^2R_0$ bzw. $G = \overline{0}$, wenn wir auf die Angabe des Moduls verzichten, und entsprechend $U = {}^2R_1 = \overline{1}$. Die im Abschnitt 1. angegebenen Sätze über das Rechnen mit G und U ergeben sich durch Anwendung der im Abschnitt 2. aufgeführten Regeln über das Rechnen mit Kongruenzen. So lautet z. B. (I) für $m = 2, b_1 = 0$ und $b_2 = 1$: Aus $a_1 \equiv 0(2)$ und $a_2 \equiv 1\,(2)$ folgt $a_1 + a_2 \equiv 1\,(2)$. Deshalb ist $G + U = U$, bzw. in neuer Schreibweise $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$. Auf diese Weise können wir zu all den Regeln gelangen, die im Abschnitt 1. in Form je einer Tabelle für Addition und Multiplikation niedergelegt sind.

Wie sieht das nun im Bereich der Restklassen modulo 7 aus, wenn wir hier beispielsweise eine Addition erklären? Offensichtlich liegt doch folgendes Verfahren nahe: Wollen wir beispielsweise ${}^7R_3$ und ${}^7R_5$ addieren, so nehmen wir uns einen Repräsentanten von ${}^7R_3$, etwa -18, und einem Repräsentanten von ${}^7R_5$, z. B. 61. Dann bilden wir die Summe $-18+61=43$ und sehen nach, in welcher Restklasse diese Summe liegt. Da 43 ein Repräsentant von ${}^7R_1$ ist, setzen wir fest ${}^7R_3+{}^7R_5={}^7R_1$. In Kurzschreibweise ohne Angabe des Moduls würde das lauten $\bar{3}+\bar{5}=\bar{1}$.

Freilich ist eine solche Erklärung nur sinnvoll, wenn wir immer auf $\bar{1}$ geführt werden — gleichgültig, mit welchen Repräsentanten für $\bar{3}$ und $\bar{5}$ wir gearbeitet haben. Das ist aber der Fall, da nach den Regeln über das Rechnen mit Kongruenzen aus Abschnitt 2. die Addition einer Zahl x mit dem Siebenerrest 3 zu einer Zahl y mit dem Siebenerrest 5 stets eine Zahl mit dem Siebenerrest 8 (bzw. 1) ergibt: Aus $x\equiv 3$ (7) und $y\equiv 5$ (7) folgt nach (I) $x+y\equiv 8$ (7) und damit wegen $8\equiv 1$ (7) auch $x+y\equiv 1$ (7). Das Ergebnis für $\bar{3}+\bar{5}$ ist also von der Wahl der Repräsentanten für die Summanden unabhängig. Der Bequemlichkeit halber wird man sich für die Ermittlung der Summe natürlich die kleinsten nicht-negativen Repräsentanten wählen, also nicht mit -18 und 61 arbeiten, wie wir es getan haben, sondern mit 3 und 5.

Genauso können wir nun für die Multiplikation verfahren: Für die Ermittlung von $\bar{4}\cdot\bar{5}$ z. B. berechnen wir $4\cdot 5=20$, und wegen $20\equiv 6$ (7) ist $\bar{4}\cdot\bar{5}=\bar{6}$. Auch hier ist — wegen der Regel (III) für das Rechnen mit Kongruenzen — das Ergebnis von der Wahl der Repräsentanten unabhängig; wir hätten statt 4 und 5 auch andere Elemente aus $\bar{4}$ und $\bar{5}$ nehmen können und wären dann ebenfalls zu $\bar{6}$ gelangt.

Nun ist es leicht, auch im Bereich der Restklassen modulo 7 Additions- und Multiplikationstabellen aufzustellen:

$m=7$

$+$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$
$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$	$\bar 0$
$\bar 2$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 3$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$
$\bar 4$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 5$	$\bar 5$	$\bar 6$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 6$	$\bar 6$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$

$\cdot$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$
$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 6$	$\bar 1$	$\bar 3$	$\bar 5$
$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 6$	$\bar 2$	$\bar 5$	$\bar 1$	$\bar 4$
$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 1$	$\bar 5$	$\bar 2$	$\bar 6$	$\bar 3$
$\bar 5$	$\bar 0$	$\bar 5$	$\bar 3$	$\bar 1$	$\bar 6$	$\bar 4$	$\bar 2$
$\bar 6$	$\bar 0$	$\bar 6$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

Mittels dieser Tabelle kann man auch subtrahieren und dividieren. So ist z. B. $\bar{2}-\bar{4}=\bar{4}$, weil $\bar{5}+\bar{4}=\bar{2}$ ist. Entsprechend erhalten wir $\bar{4}:\bar{6}=\bar{3}$ wegen $\bar{3}\cdot\bar{6}=\bar{4}$. Selbstverständlich hätten wir die Subtraktion der Restklassen auch über die Subtraktion ihrer Repräsentanten erklären können. Wollen wir auch den Quotienten zweier Restklassen ohne Zuhilfenahme der Tabelle über die Repräsentanten ermitteln, so sind wir freilich auf solche Repräsentanten angewiesen, für die sich die Division ausführen läßt, etwa 18 für $\bar{4}$ und 6 für $\bar{6}$; das liefert wegen $18:6=3$ ebenfalls $\bar{4}:\bar{6}=\bar{3}$.

In dem allgemeinverständlich geschriebenen Buch „Die Zahl und ihre Theorie" von *G. N. Berman* (als Übersetzung aus dem Russischen 1954 erschienen im *Urania-Verlag Jena*) wird übrigens ein hübsches Rechengerät beschrieben, das das Rechnen mit Restklassen anschaulich illustriert. Die Beschreibung gilt für den Modul 5, doch läßt sich das sinngemäß auch auf beliebige andere Moduln übertragen, wenn auch die technische Ausführung bei Moduln oberhalb von 12 etwa schon problematisch werden dürfte. Wie sieht nun ein solches Rechengerät für das Rechnen mit Restklassen modulo 5 aus?

Wir zeichnen auf einer starken Unterlage (Karton) einen Kreis und schneiden uns ferner eine etwas kleinere Kreisscheibe aus Karton. Dann markieren wir auf dem Umfang jedes dieser Kreise 5 Punkte in gleichmäßiger Verteilung (vom Mittelpunkt aus unter einem Winkel von $\frac{360°}{5}=72°$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten); die Punkte müssen also die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden. Diese Punkte werden auf beiden Kreisscheiben im gleichen Umlaufsinn mit $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ und $\bar{4}$ bezeichnet. Dann legen wir die kleinere Kreisscheibe so auf die Unterlage, daß die Mittelpunkte der Kreise übereinander liegen, und befestigen sie dort mit einem Reißbrettstift, so daß sie um den Mittelpunkt gedreht werden kann.

Das Addieren zweier Restklassen, z. B. $\bar{3}$ und $\bar{4}$, geht nun folgendermaßen vor sich: Wir markieren uns auf der Unterlage, also auf dem größeren Kreis, den einen Summanden $\bar{3}$ und stellen ihm die Restklasse $\bar{0}$ auf der kleineren Scheibe gegenüber. Das Ergebnis finden wir nun auf dem größeren Kreis gegenüber dem zweiten Summanden $\bar{4}$ auf der kleinen Scheibe. Wir lesen ab $\bar{3}+\bar{4}=\bar{2}$, und das ist ja für das Rechnen mit Restklassen modulo 5 auch richtig.

Das Multiplizieren ist allerdings etwas komplizierter: Zunächst bringen wir die kleine Kreisscheibe in die Ausgangslage, stellen sie also so, daß sich Zeichen für gleiche Restklassen gegenüberstehen. Wollen wir nun berechnen $\bar{3}\cdot\bar{4}$, so drehen wir die kleine Scheibe 3mal (wegen des ersten Faktors $\bar{3}$) um einen Winkel, der $\frac{4}{5}$ des Vollwinkels von 360° beträgt (dabei liefert der andere Faktor $\bar{4}$ den Zähler 4 und der Modul den Nenner 5). Insgesamt wird also um $\frac{3\cdot 4}{5}\cdot 360°=864°$ gedreht, das entspricht einer Drehung um 144°, weil sich ja eine Drehung um einen Vollwinkel von 360° und Vielfache davon nicht auswirkt. Das Ergebnis der Multiplikation ist nun diejenige Restklasse, die auf dem größeren Kreis gegenüber der Restklasse $\bar{0}$ des kleineren Kreises vermerkt ist. So finden wir für das gesuchte Produkt $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{2}$ — in Übereinstimmung mit dem, was wir auch rechnerisch ermitteln würden. Bei den Restklassen modulo 5 ist also $\bar{3} + \bar{4} = \bar{3} \cdot \bar{4}$.)

Gewiß ist dieses mechanische Verfahren — zumindest für die Multiplikation — recht umständlich, jedenfalls umständlicher als das rechnerische Vorgehen. Aber es hat uns unversehens zu der Erkenntnis geführt, daß wir in der Planimetrie beim Arbeiten mit den Winkeln auch so etwas wie Restklassen vor uns haben. Der Unterschied zwischen einem Winkel von 864° und einem Winkel von 144° ist hier genau so wenig bedeutsam wie der zwischen dem Repräsentanten 2 und dem Repräsentanten 12 beim Arbeiten mit Restklassen modulo 5. So ist uns nun wohl auch die Redeweise „die Winkel sind nur modulo 360° bestimmt" verständlich.

Das Addieren mit dem beschriebenen Rechengerät erinnert vielleicht auch manchen an das Arbeiten mit der sog. „Rechenscheibe". Das ist ein Gerät, das auf dem Prinzip des Rechenstabes beruht, bei dem aber die Teilung auf Kreisen angeordnet sind, um das beim Stab hin und wieder nötige Durchschieben der Zunge zu ersparen. Allerdings wird mit dieser Rechenscheibe ebenso wie mit dem Stab nicht addiert, sondern multipliziert, weil die Kreise ja nicht gleichmäßig geteilt sind, sondern eine sogenannte „logarithmische Teilung" tragen — ebenso wie die Grundskalen des Rechenstabes. Aber auch hier und beim Rechenstab haben wir so etwas ähnliches wie Restklassen: Rechenstab und Rechenscheibe liefern ja nur die Ziffernfolge des Ergebnisses, so wie wir auch beim Einstellen nur die Ziffernfolge beachten. Dabei wird z. B. zwischen 0,74, 7,4, 74, 740, 7400 usw. nicht unterschieden; all diese Zahlen „liegen in derselben Klasse". Nur haben in diesen Klassen zwei aufeinanderfolgende Zahlen nicht dieselbe Differenz wie bei den Restklassen, sondern denselben Quotienten, und zwar beträgt der stets 10:

$$\frac{7400}{740} = \frac{740}{74} = \frac{74}{7{,}4} = \frac{7{,}4}{0{,}74} = 10.$$

G. Lorenz

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

Teil 4

Von den vier Grundrechenoperationen, die wir am Beispiel der Zahlen LOLOLOO und LOLOL betrachten wollten, fehlt uns noch die Division:

```
  Dividend       Divisor    Quotient
  LOLOLOO : LOLOL  = LOO
 —LOLOL
  -----
    OOO
```

Die Einfachheit ist verblüffend. Das liegt einmal daran, daß das Ergebnis zufällig eine reine Potenz von 2 ist, aber auch an der Tatsache, daß jedes Teilergebnis, also jede Quotientenziffer, nur O oder L sein kann. Es ist also immer nur zu entscheiden, ob sich der Divisor von dem jeweiligen Rest des Dividenden abziehen läßt oder nicht, und damit ist die Division vollständig auf die Subtraktion zurückgeführt. Gleich noch ein weniger triviales Beispiel:

10 545 : 185 = 57

```
  LOLOOLOOLLOOOL : LOLLLOOL = LLLOOL
— LOLLLOOL
  --------
  LOOLOOOOL
—  LOLLLOOL
   --------
    LLOLOOOO
—   LOLLLOOL
    --------
       LOLLLOOL
—      LOLLLOOL
       --------
              O
```

Hierbei wurde der Divisor jedesmal um eine Stelle nach rechts verschoben. Rechentechnisch ist es einfacher, den Divisor stehenzulassen und den Dividenden schrittweise nach links zu verschieben, bis — nach einer bestimmten Anzahl von Subtraktionen — der Dividend verbraucht ist. Der Effekt ist der gleiche, es sieht dann so aus:

```
                             LOLOOLOOLLOOOL : LOLLLOOL
Keine Subtraktion:           LOLLLOOL         = LLLOOL
                             --------------
Rest:                        LOLOOLOOLLOOOL
Verschiebung des Divi-
denden nach links:         LOLOOLOOLLOOOL
Subtraktion;
Quotientenziffer L —         LOLLLOLL
                             --------------
Rest:                        LOOLOOOOLOOOL
Verschiebung:              LOOLOOOOLOOOL
```

Subtraktion;	
Quotientenziffer L —	LOLLLOOL
Rest	LLOLOOOOOOL
Verschiebung:	LLOLOOOOOOL
Subtraktion;	
Quotientenziffer L —	LOLLLOOL
Rest:	LOLLLOOL
Verschiebung:	LOLLLOOL
Keine Subtraktion;	
Quotientenziffer O	LOLLLOOL
Rest:	LOLLLOOL
Verschiebung:	LOLLLOOL
Keine Subtraktion;	
Quotientenziffer O	LOLLLOOL
Rest:	LOLLLOOL
Verschiebung:	LOLLLOOL
Subtraktion;	
Quotientenziffer L —	LOLLLOOL
Rest:	O

▲ Aufgaben: Kodiere die Zahlen 51 und 17 in das Dualsystem um und rechne schriftlich die Aufgaben

$$51+17; \quad 51-17; \quad 51\cdot 17; \quad 51:17$$

in diesem System, wobei die Multiplikation und die Division in der ausführlichen Form zu schreiben sind! Prüfe die Ergebnisse durch Umkodierung in das Dezimalsystem!

Noch einige Bemerkungen zur Umkodierung ganzer Zahlen vom Dezimal- in das Dualsystem: Was das Handrechnen betrifft, so haben wir diese Aufgabe bei den vorigen Beispielen schon gelöst. Wenn dies aber in der Praxis von einem Automaten zu bewältigen ist, so müssen wir berücksichtigen, daß dieser — dual arbeitend — die Dezimalzahlen gar nicht kennt. Wir können höchstens die einzelnen Ziffern der Dezimalzahl, dual verschlüsselt, in den Automaten geben, nachdem wir ein Programm entwickelt haben, wie — nur mit Hilfe dualer Grundoperationen — daraus die Dualzahl zu berechnen ist. Dieser Vorgang soll im folgenden beschrieben werden, und zwar gleich an Hand eines Beispiels:

Gegeben die Dezimalzahl $Z = 7948$.

Die dual verschlüsselten Ziffern sind

OLLL* — LOOL — OLOO — LOOO

Somit ist, dual geschrieben,

$$Z = \mathrm{OLLL}\cdot(\mathrm{LOLO})^3 + \mathrm{LOOL}\cdot(\mathrm{LOLO})^2 + \mathrm{OLOO}\cdot\mathrm{LOLO} + \mathrm{LOOO}.$$

Es handelt sich also um eine nach fallenden Potenzen von LOLO geordneten Summe, ein *Polynom* in LOLO.

Allgemeine Schreibweise:

Sind $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ die Ziffern der Dezimalzahl z und setzen wir LOLO $= x$, so gilt

$$Z = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Für das praktische Ausrechnen ist dem fortgeschrittenen Leser vielleicht das sogenannte *Hornersche Schema* bekannt. Hierbei handelt es sich um eine andere, rechnerisch handlichere Schreibweise des Polynoms Z, nämlich

$$Z = \{\ldots([(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}]x + a_{n-3})x + \ldots + a_1\}x + a_0.$$

▲ *Aufgabe:* Man überzeuge sich durch Ausmultiplizieren dieser $n-1$ ineinandergeschachtelten Klammern am Beispiel $n = 5$, daß wirklich das Polynom Z herauskommt. Dabei kann man sowohl mit der äußersten, als auch mit der innersten Klammer beginnen.

Auf unser Beispiel angewendet, ist,

$$Z = [(\mathrm{OLLL}\cdot\mathrm{LOLO} + \mathrm{LOOL})\cdot\mathrm{LOLO} + \mathrm{OLOO}]\cdot\mathrm{LOLO} + \mathrm{LOOO}.$$

Diesen aus abwechselnder Multiplikation und Addition bestehenden Algorithmus kann der Automat bewältigen. Das Potenzieren (Berechnen von $(\mathrm{LOLO})^3$ usw.), das der Automat nicht „kann“, wird dadurch vermieden. Das Ergebnis ist die gewünschte Kodierung der Zahl Z.

▲ *Aufgabe:* Führe die Rechnung durch und mache durch Umkodierung in das Dezimalsystem die Probe!

Wir wollen hiermit den Abschnitt über das Dualsystem abschließen, natürlich, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Wir gehen also u. a. auf die Darstellung gebrochener Zahlen im Dualsystem, die *Dualbrüche*, nicht mehr ein. Wenn der Leser aber die Aussagen über die Fünferbrüche in 1.3. sinngemäß auf das Dualsystem überträgt, werden ihm folgende Fragen bzw. Aufgaben nicht schwerfallen:

1. Was bedeutet der Dualbruch LO,OLOOLL?
2. Wann liefert ein (weitestgehend gekürzter) Quotient aus ganzen Zahlen
   a) einen endlichen
   b) einen rein periodischen
   c) einen gemischt periodischen Dualbruch?
3. Wie kann man bei den vier Grundrechenoperationen mit endlichen Dualbrüchen das Komma berücksichtigen?
4. Löse im Dualsystem, d. h. mit Hilfe von Dualbrüchen, die Aufgaben

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}; \quad \frac{3}{4}-\frac{5}{8}; \quad \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}; \quad \frac{3}{4}:\frac{5}{8}!$$

Warum ergibt die Division einen periodischen Dualbruch?

J. Frormann

* Da wir maximal vier Dualziffern benötigen, schreiben wir zweckmäßigerweise *jede* Ziffer gleich als Vierergruppe, als sog. *Tetrade*, füllen also die Leerstellen durch Nullen aus.

Unser Glückwunsch

gilt unseren Redaktionsmitgliedern, welche am Tag des Lehrers 1969 ausgezeichnet wurden: Prof. Dr. *H. Karl*, PH Potsdam: Dr. Theodor-Neubauer-Medaille in Gold; Dr. habil *W. Walsch*, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg: Dr. Theodor-Neubauer-Medaille in Gold; Studienrat *G. Schulze*, EOS Herzberg/Elster: Oberstudienrat.

Multicurve

Die Zeichenschablone „multicurve“ ist für Schüler ab Klasse 9 als ein vielseitig brauchbares Lehrmittel zu empfehlen. Zunächst stellt sie die Bilder von je zwei Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln unmittelbar bereit. Diese Kegelschnitte sind auf eine gemeinsame Achse bezogen und haben paarweise je einen gemeinsamen Brennpunkt. Diese Punkte sind durch Ausbohrungen im Material markiert, was für konstruktive Auswertungen von Vorteil ist. Auch die Leitgeraden der Parabeln lassen sich für weitere Konstruktionen schnell und genau einzeichnen. An den maßgerechten Vorlagen der Kegelschnitte können den Schülern in einfach überschaubarer Weise verschiedene Definitionen dieser Kurven erläutert und deren Fokaleigenschaften bewiesen werden. Ferner prägen sich beim Lernenden von vorn herein richtige Vorstellungen über die Bilder der Kegelschnitte, die Lage ihrer Brennpunkte, Leitgeraden bzw. Leitkreise und Asymptoten ein.

Die Schablone bedeutet jedoch nicht allein für den Unterricht in Mathematik — etwa bei der planimetrischen Behandlung der Kegelschnitte – ein gut brauchbares Arbeitsmittel, sondern sie kann auch im Physikunterricht eine nützliche Hilfe zur begrifflichen Klärung physikalischer Zusammenhänge sein. Z. B. läßt sich an Hand einer sauber gezeichneten Parabel bei Vorgabe von Brennpunkt und Leitgerade die Brenneigenschaft eines Parabolspiegels ohne viel Zeitaufwand beweisen. Diese parabolische Form findet nicht nur an optischen Geräten, sondern auch bei Antennen von Ultrakurzwellensendern und Empfängern Anwendung. Zu der beim schiefen Wurf eines Körpers entstehenden Bahnkurve geben die Parabeln der Schablone anschauliche Bilder. Bei isothermer Ausdehnung einer bestimmten Gasmenge wird die Zuordnung von Druck und Volumen durch eine gleichseitige Hyperbel annähernd beschrieben. Auch hierzu weist die Schablone eine entsprechende Kurve auf.

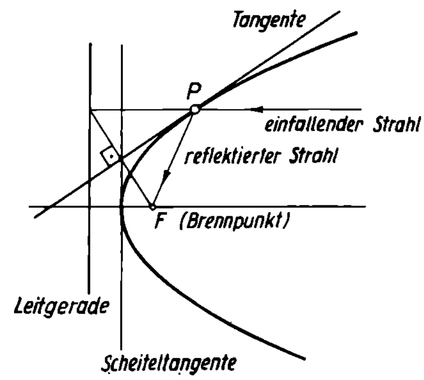
Die Anwendungen von Kegelschnitten in Mathematik, Technik und Naturwissenschaften sind so vielfältig, daß die unmittelbare Bereitstellung einiger Repräsentanten dieser Kurven nicht allein für Lernende, sondern auch für Lehrende und Forschende in diesen Gebieten angebracht erscheint. Darüber hinaus kann an Hand der mit „multicurve“ gezeichneten Kurven eine erste Einführung in die Problematik der Tangentenbestimmung gegeben werden. Für Kegelschnitte läßt sich diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal unter Mitverwendung der Brennpunkte exakt lösen.

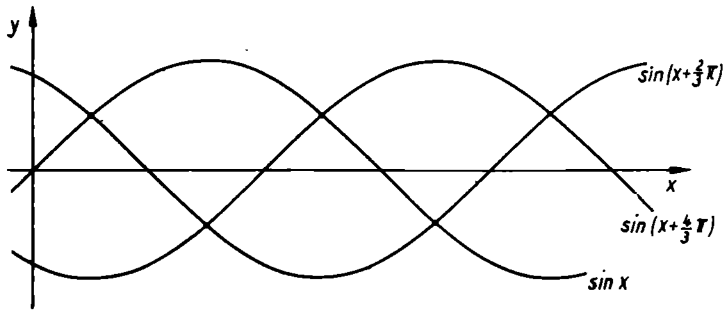
Die in der Schablone eingearbeitete Sinus-Linie gibt ein anschauliches Bild für den zeitlichen Ablauf einer ungedämpften harmonischen Schwingung. Sie ist ferner als ein Beispiel für das Verständnis des Funktionsbegriffes besonders geeignet.

Außerdem lassen sich die Kurvenbögen der Schablone im herkömmlichen Sinn zum Zeichnen beliebiger Kurven verwenden. Die Maßstäbe für Längen- und Winkelmessung sowie die Winkel von 90°, 60°, 45°, 30° und 15° sichern eine vielseitige Anwendbarkeit und schnelle Handhabung von „multicurve“ im Unterricht, bei Erledigung der Hausaufgaben und in mathematischen Schülerzirkeln.

Gegenstand der Zeichnungen:

1. Tangentenkonstruktion und Brenneigenschaft bei der Parabel
2. Sinus-Linie und Erzeugung von Phasenverschiebungen





Wir stellen vor: 22 Junge Mathematiker

die erfolgreichsten Teilnehmerinnen
der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
April 1968 — Berlin-Bogensee

Von links: Ingrid Schiemann, Cottbus — Susi Rudolph, Dresden — Carola Hartmann, Freital — Veronika Eberhardt, Eisenach — Marlen Müller, Halle — Heidi Sieler, Hermsdorf — Holda Hofmann, Torgelow — Silvia Rohmeiß, Ilmenau — Leonore Lösche, Leipzig — Ursula Tyl, Berlin — Renate Kretschmar, Jena — Gabriele Fischer, Berlin — Barbara Greiner-Petter, Berlin — Juliane Heß, Schleusingen — Ingrid Rosch, Neubrandenburg Barbara Müller, Falkensee — Brigitte Bohm, Falkensee — Ute Lange, Babelsberg — Burglind Jöricke, Rostock Beate Schneeweiß, Guben — Steffi Lorenz, Markkleeberg bei Leipzig — Gudrun Fröbel, Jena
Berufswünsche: 17 Diplommathematiker bzw. Mathematiklehrer, 1 Bauarchitekt, 2 Stud. Naturw., 2 Arzt

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung:
Alle Aussagen sind stets zu beweisen beziehungsweise zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen beziehungsweise Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muß deutlich zu erkennen sein. Bei den Aufgaben wird kein Anspruch auf Originalität erhoben, daher erfolgt grundsätzlich keine Quellenangabe. Die Gedankengänge sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Sämtliche Lösungen sind bis zum 22. Oktober 1969 beim Mathematiklehrer abzugeben.

Olympiadeklasse 5

5; 1) Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, daß in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!

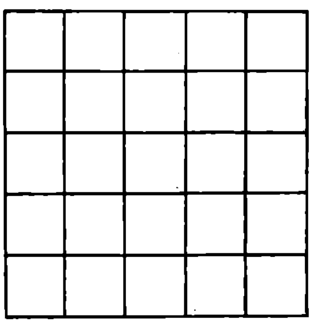


Abb. A 5; 1

Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

5; 2) In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:
Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wieviel er dafür bezahlt habe. „Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte“, antwortete Wassja, „und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken.“
(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.)
Wieviel Kopeken kostete das eine und wieviel das andere Album?

5; 3) Abb. A 5; 3 zeigt genau 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G und genau 5 Geraden, von denen eine durch A, B, C, eine durch A, F, E, eine durch A, G, D, eine durch B, G, F und eine durch C, D, E, geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$. Wir wollen sagen

eine Strecke
ein Dreieck
ein Trapez } „gehört der Zeichnung an“,

wenn

ihre Endpunkte zwei
seine Eckpunkte drei
seine Eckpunkte vier } der Punkte A, B, C, D, E, F, G

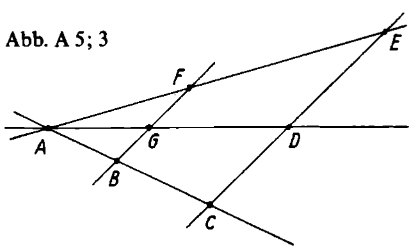
sind und wenn

die Strecke
alle Seiten des Dreiecks
alle Seiten des Trapezes } schon vollständig gezeichnet

in Abb. A 5; 3 { vorkommt
vorkommen
vorkommen.

(Beispiele: Die Strecke AB, das Dreieck $\Delta\ ABF$ „gehören der Zeichnung an“. Die Strecke BD „gehört der Zeichnung“ nicht „an“, auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von AB mit B verbindet, auch nicht das Dreieck $\Delta\ ABD$.)
Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die „der Zeichnung angehören“!

Abb. A 5; 3

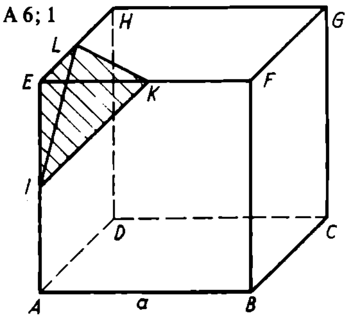


5; 4) Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.
Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) 0,33 m, 2,2 dm und 21 cm betragen. Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

Olympiadeklasse 6

6; 1) Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abb. A 6; 1) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

Abb. A 6; 1



6; 2) In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:
$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier.
Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

6; 3) In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ sollten die vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden. In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet. Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor. Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

6; 4) Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240,– M. Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240,— M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben. Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4,— M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder. Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

Olympiadeklasse 7

7; 1) Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist.

O	N	G	A
W	G	F	L

Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge WOLFGANG übereinanderliegen!
Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

7; 2) Gegeben sei ein Dreieck $\Delta\, ABC$. Darin sei die die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, daß diese sich im Innern des Dreiecks $\Delta\, ABC$, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.
Beweise, daß die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

7; 3) Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland.
Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:
(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.
(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.
(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.
Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

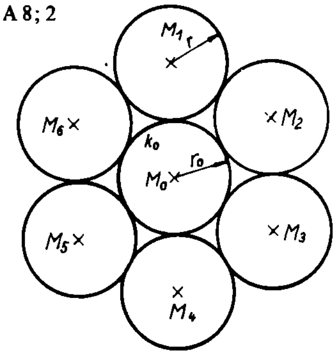
7; 4) Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z. B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357357). Beweise, daß für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt: Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl.

Olympiadeklasse 8

8; 1) Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:
a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.
b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

8; 2) Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung A 8; 2 ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.
Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!

Abb. A 8; 2



8; 3) a) Beweise folgenden Satz:
Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

8; 4) Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.
Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abb. A 8; 4a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abb. A 8; 4b).

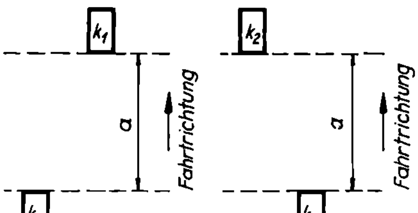


Abb. A 8; 4a 4b

Wie lange dauert dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?

Olympiadeklasse 9

9; 1) Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:
Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis.
Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker.
Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis. Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

9; 2) Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach
$I_1 = 9\ \text{dm}^2$; $I_2 = 8\ \text{dm}^2$; $I_3 = 7\ \text{dm}^2$; $I_4 = 6\ \text{dm}^2$; $I_5 = 5\ \text{dm}^2$; $I_6 = 4\ \text{dm}^2$; $I_7 = 3\ \text{dm}^2$ groß sind.
Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.
Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

9; 3) In Abb. A 9; 3 ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt.
(Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen $\mathfrak{F}$ gilt: Ist ε die Ebene, in der $\mathfrak{F}$ liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.) Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriß Quadrate mit der Seitenlänge a.
Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper und berechnen Sie sein Volumen!

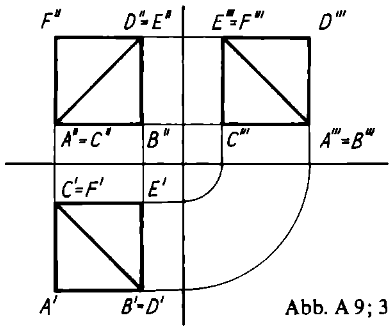


Abb. A 9; 3

9; 4) Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden.
Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.
(Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9 + 8 = 17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1 + 7 = 8$.
Die erste Quersumme von 43 ist $4 + 3 = 7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.)
Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

Olympiadeklasse 10

10; 1) Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation:
Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittert.
Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer.
Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfaßte genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes.
Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnische am schwächsten und genau die sowjetische am stärksten vertreten.

a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?

b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?

c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

10; 2) In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisarten E_1, E_2, E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen E_1	E_2	E_3	Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
I	5	5	8	5950
II	8	6	6	6200
III	5	8	7	6450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

10; 3) In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF. Berechnen Sie das Verhältnis $I_s : I_D$, wenn I_s der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta\, XYZ$ ist!

10; 4) Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.
Beweisen Sie, daß dann
$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$ gilt!
(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

Olympiadeklassen 11 und 12

11/12; 1) Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, daß jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal getanzt hatte. Ferner bemerkte man, daß je zwei Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten. Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

11/12; 2) a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$ zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung
$x(x+1)(x+2)(x+3) = a$
keine,
genau eine,
genau zwei,
genau drei,
genau vier bzw.
mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

11/12; 3) Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung

$a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist. (a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$)

11/12; 4) In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB mit der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere von zwei A und B begrenzten Kreisbogen vom Radius r) nach der folgenden Näherungsmethode ausgeführt werden:
In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($\overline{AT} = a$, $\overline{TB} = b$).

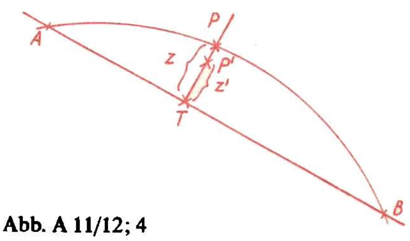


Abb. A 11/12; 4

Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$.
Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leqq \frac{1}{5}r$. Es ist zu beweisen, daß dann der relative Fehler
$\delta = \frac{|z - z'|}{z}$
stets kleiner als 0,0051, d. s. 5,1 ‰, ist.

Mit diesem Bild (aufgenommen anl. der DDR-Olympiade 69) sagen wir Dank den Tausenden von Mathematiklehrern, welche die Olympiaden Junger Mathematiker Jahr um Jahr hervorragend unterstützen.

In Heft 6 bringen wir einen Beitrag zu „Mathematik und Schach". Unser Bild zeigt Teilnehmer der DDR-Olympiade beim Simultanspiel.

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Horst Sachs

Direktor der Sektion „Mathematik, Rechentechnik und Ökonomische Kybernetik" der Technischen Hochschule Ilmenau

▲ 410 In der Ebene seien eine Anzahl geschlossener Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ gezeichnet, so daß eine Figur F entsteht, die folgenden Bedingungen genügt:

I Auf jeder der Kurven C_μ liegt mindestens ein Punkt, in dem C_μ sich selbst oder eine andere Kurve C_μ' schneidet;

II es gibt nur eine endliche Anzahl n von Schnittpunkten;

III in keinem Punkt der Ebene schneiden sich mehr als zwei Kurvenstücke;

IV F ist „zusammenhängend", d. h. je zwei Schnittpunkte sind durch (mindestens) einen Weg verbunden, der sich aus Stücken der Kurven C_μ zusammensetzt.

(Abb. 1 zeigt eine solche Figur mit $m = 3$ und $n = 14$).

F ist ein spezieller *planarer Graph*. Die n Schnittpunkte werden auch als *Knotenpunkte* bezeichnet. Ein Kurvenstück, das zwei Knotenpunkte miteinander verbindet, ohne im Innern einen weiteren Knotenpunkt zu enthalten, heißt eine Kante; k sei die Anzahl der Kanten von F. Durch F wird die Ebene in f *Gebiete* zerlegt, von denen sich eines (das Außengebiet) ins Unendliche erstreckt.

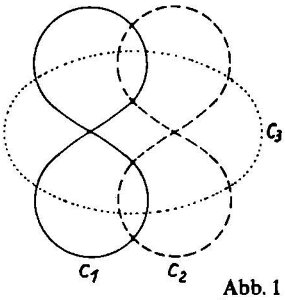


Abb. 1

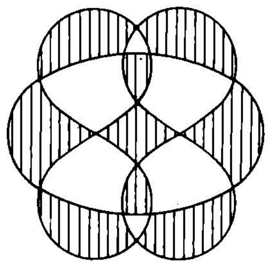


Abb. 2

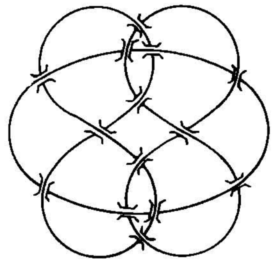


Abb. 3

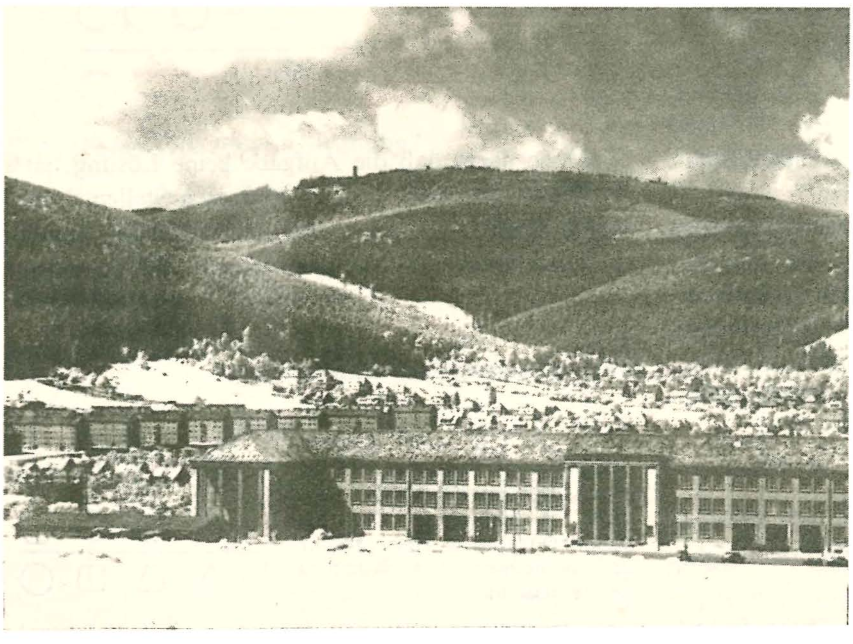
Man beweise:

a) $k = 2n$, $f = n + 2$.

b) Man kann die Gebiete so mit zwei Farben färben, daß je zwei längs einer Kante benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben (Abb. 2).

c) Die Figur F sei das Schema eines zu bauenden Straßensystems, das mittels Brükken an den Schnittpunkten kreuzungsfrei gehalten werden soll. Dann kann man die Brücken stets so bauen, daß ein Passant beim Durchlaufen einer beliebigen der Straßen C_μ die Schnittpunkte abwechselnd auf der Brücke und unter der Brücke passiert (Abb. 3).

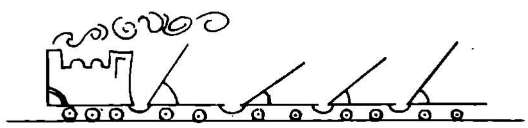
Technische Hochschule Ilmenau

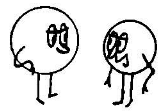


Über die Mathematik-Ausbildung an der TH Ilmenau

1953 wurde die Hochschule für Elektrotechnik in Ilmenau gegründet. Anläßlich ihres zehnjährigen Bestehens erhielt sie den Namen „Technische Hochschule Ilmenau". Gegenwärtig gliedert sie sich in sechs Sektionen, darunter die Sektion „Mathematik, Rechentechnik und Ökonomische Kybernetik", durch die sämtliche Ingenieur-Studenten der TH ihre Grundausbildung in Mathematik, maschineller Rechentechnik und Ökonomie erhalten. An dieser Sektion werden auch Diplommathematiker der Ausbildungsrichtung „Mathematische und statistische Methoden der Operationsforschung" zum späteren Einsatz vor allem in der elektrotechnischen Industrie (einschl. wiss. Gerätebau und Rechenelektronik) ausgebildet; es kann ein technisches Nebenfach (etwa Regelungstechnik) oder ein ökonomisches Nebenfach gewählt werden. Die Sektion beschäftigt sich mit der Modellierung und Optimierung technischer und ökonomischer Systeme und Prozesse mit dem Ziel ihrer mathematisch-ökonomischen Beherrschung (Grundlagen und Anwendungen), wobei neben allgemeinen Optimierungsverfahren insbesondere kombinatorische Modelle und Algorithmen (Graphentheorie, Netzplantechnik) eine Rolle spielen.

In freien Stunden alpha heiter





„Immer diese Winkelzüge“
Aus: Zeit im Bild 42/68

Spiel am Badestrand

An diesem Spiel können mehrere Spieler gleichzeitig teilnehmen, mindestens zwei! Benötigt wird kariertes Papier und Bleistifte. Zuerst markiert jeder Spieler auf seinem Blatt ein Quadrat mit etwa 20 Kästchen Seitenlänge, dann bezeichnet jeder Spieler die untere Seite mit Zahlen von 1 bis 20 und die linke Seite des Quadrates mit Buchstaben *a*, *b*, *c* usw. Nun zeichnet jeder Spieler in sein Quadrat eine beliebige geometrische Figur, jedoch nur geradlinige Figuren! Zum Beispiel Rechteck, Parallelogramm, Trapez, unregelmäßiges Vieleck o. ä.
Durch Angabe der Koordinaten eines gegnerischen Feldes wird nun abwechselnd versucht, die Figur des Gegners zu „orten“! Hat man die Figur im Feld des anderen aufgestöbert, beginnt die eigentliche Überlegung. Durch geschickte Wahl der Koordinaten soll nun die Figur des Gegners ermittelt werden. Sieger ist natürlich derjenige, der die Figur des anderen nennen kann. Um ein planloses „Erraten“ möglichst auszuschalten, muß der Spieler 2mal aussetzen, der eine falsche Figur genannt hat. Man wird neben der eigenen Figur natürlich nach und nach auch die gegnerische Figur mit einzeichnen, um ihre Gestalt zu ermitteln.

ald jabr w'almokabala (um 830)

▲ Ich habe 10 in zwei Teile zerlegt, den einen durch den anderen geteilt. Der Quotient war 4.

▲ Ich habe 4 Maß Weizen und 6 Maß Gerste gekauft, das Maß Gerste halb so teuer wie das des Weizens. Nachher habe ich die Ausgaben zusammengezählt. Die Summe war da gleich dem Unterschied der Preise vermehrt um den Unterschied der Maße.

Mohammed ibn Musa al Khowarizmi

Painter's Puzzle

A paint tin weighs 5 lb. (pounds) when half full and 4 lb. when it is one third full of paint. Find the weight of a full tin of paint.

Aus: mathematical pie 39/63, Shirley, England

Vater Pfiffig

„Bisher hast du 6 Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst du nur noch den 0,8ten Teil deines Taschengeldes.“
Sohn Knobel ärgerte sich zunächst, dann aber schenkte er vor lauter Freude seiner kleinen Schwester eine Tüte Bonbons.

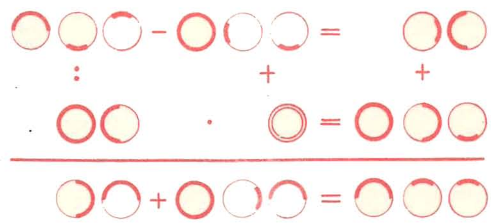
Rätsel zur Mengenlehre

Suche ein Wort, dessen Buchstabenmenge der des Wortes „Mathematik“ gleich ist.

OL. H. Herzog, V.L.d.V., Leipzig

Zahlenrätsel — einmal anders

Troll 4/65 enthielt die folgende Aufgabe:
„Glatte Rechnung. Jeder Ring bedeutet eine Ziffer, gleiche Ringe immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten und senkrechten Aufgaben lösen.“

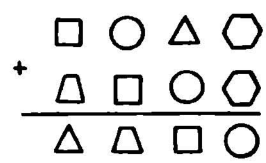


1. Weise nach, daß die Aufgabe keine Lösung hat!
2. Ersetzt du einen Ring an mehreren Stellen durch einen neuen, der unter den vorhandenen Ringen nicht vorkommt, so wird die Aufgabe lösbar.

Prof. Dr. habil. W. Renneberg, Leipzig

Erst übersetzen, dann nachdenken!

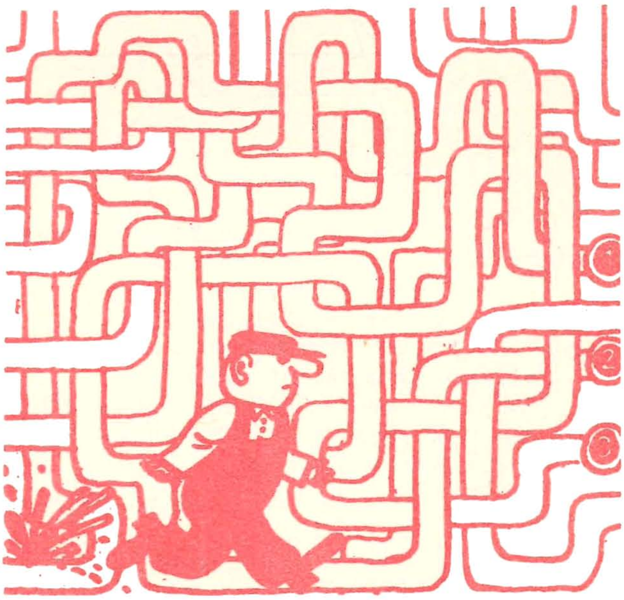
В този пример бройната система има основа осем, но вместо с букви цифрите са записани с геометрични фигури. С това ходът на решението на задачата не се изменя.



Aus: „Unterhaltungsmathematik“, Sofia 1967, Autor: L. M. Lopowok

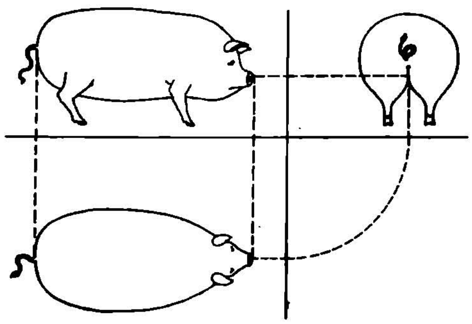
Rohrbruch

Bei Krauses gab es einen Rohrbruch. Herr Krause läuft so schnell er kann in den Keller, um den Haupthahn zu schließen. In seiner Aufregung betätigt er den falschen Hahn, und das Wasser schießt weiter aus der defekten Stelle im Rohr. Könnt ihr helfen? Welchen der drei Hähne muß er zudrehen?



Aus: Trommel 10/69

Grund-, Auf-, Kreuzriß



Ist in der Zeitung alles in Ordnung?

Aus: W. Lietzmann: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen

Nicht der Mathematiker — der Fußballer

Die beiden Brüder *Bohr, Niels,* der Physiker, und *Harald,* der Mathematiker, gingen mit einem Freund durch Kopenhagen. Der Freund war erstaunt, daß *Harald* freundlichst gegrüßt wurde, *Niels* aber nicht. „Alle Achtung, hier stehen die Mathematiker ja hoch im Kurs!“ *Niels Bohr* winkte ab. „Nicht der Mathematiker ist damit gemeint, sondern *Harald* als ein beliebter Fußballspieler unserer Stadt.“

Aus: NBI 4/69

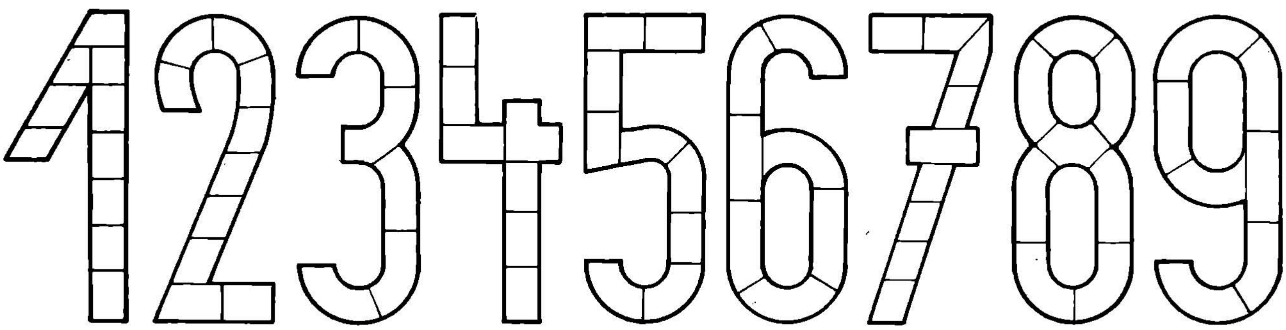
Aus: Für Dich 48/69

Bitte den Kassenzettel, falls ich reklamieren muß.

Zusammenhänge finden!

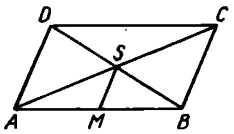
Es sind Begriffe zu finden, die mit der Ziffer in Zusammenhang stehen, in die sie eingesetzt werden müssen: 1 spezielle Menge, 2 Positionssystem zur Basis 2, 3 dreigliedriger Ausdruck, 4 Viereck mit 4 gleichen Seiten, 5 erstrebenswert im Lotto, 6 Musikstück für Gesangsstimmen, 7 der 7. Monat im römischen Kalender, 8 regelmäßiger Körper mit 8 kongruenten Seitenflächen, 9 ein spezielles Vieleck

Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz



Lösungen

▲ 382 Wir legen einen Punkt D, der nicht auf der Geraden AB liegt, fest und verbinden D mit A und B. Dann ziehen wir zu AB durch D die Parallele und zu AD durch B die Parallele; diese Parallelen schneiden einander im Punkte C. Wir verbinden A mit C und bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden AC



und BD mit S. Das so erhaltene Viereck $ABCD$ ist auf Grund der Konstruktion ein Parallelogramm. Wir zeichnen nun durch S die Parallele zu AD; sie schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkte M, der Mitte von $\overline{AB}$; denn nach dem Strahlensatz gilt $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AS} : \overline{SC}$ und, da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, $\overline{AS} : \overline{SC} = 1 : 1$. Daraus folgt $\overline{AM} = \overline{MB}$.

▲ 383 Wir beweisen die Behauptung *indirekt*. Wir nehmen an, es gäbe zwei ganze, einander teilerfremde Zahlen m und n, so daß 4 sowohl Teiler von $m + n$ als auch Teiler von $m - n$ ist. Dann würde gelten:

$$m + n = 4a$$

und $m - n = 4b$, wo a und b ganze Zahlen sind. Daraus würde folgen:

$$(m+n)+(m-n) = 4a+4b = 4(a+b),$$
$$2m = 4(a+b),$$
$$m = 2(a+b). \qquad (1)$$

Ferner würde folgen:

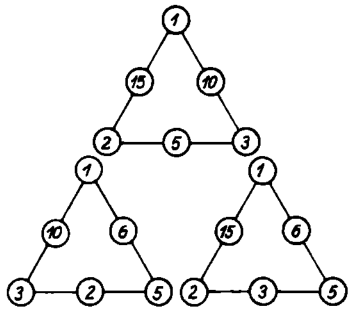
$$(m+n)-(m-n) = 4a-4b = 4(a-b),$$
$$2n = 4(a-b),$$
$$n = 2(a-b). \qquad (2)$$

Wegen (1) und (2) wäre also *sowohl m als auch n durch 2 teilbar*, was der Voraussetzung, wonach m und n teilerfremd sind, widerspricht.

Daher ist die gemachte Annahme falsch und die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Beispiel: $m = 15, n = 7$. Die Zahlen $m+n=22$ und $m-n=8$ haben den größten gemeinsamen Teiler 2 und nicht 4.

W 8 ■ 384 Da die einem Eckkreis zugeordnete Zahl a jeweils zu zwei Produktdarstellungen der Zahl 30 mit drei Faktoren gehört, darf $n = \frac{30}{a}$ keine Primzahl sein. Denn sonst hätte n nur die Produktdarstellungen $1 \cdot n$. Als Zahlen a kommen demnach nur in Frage 1, 2, 3 und 5. Andererseits führt jede Zuordnung von drei dieser vier Zahlen zu einer Lösung. Damit gibt es genau drei, nicht durch Spiegelung oder Drehung aufeinander abbildbare Belegungen, nämlich:



W 8 ■ 385 a) Schreiben wir die Zahlen a, b, c als Dezimalbrüche, so erhalten wir:

$a = 0{,}6$; $b = 0{,}600798\ldots$; $c = 0{,}600079\ldots$.

Daher gilt $a < c < b$.

b) Wenn wir die etwas umständliche Division vermeiden wollen, können wir wie folgt allgemein vorgehen:

Falls $b > a > 0$ und $x > 0$ ist, gilt

$$\frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)} = \frac{(b-a)x}{b(b+x)} > 0;$$

also $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$, daraus folgt

$\frac{3}{5} < \frac{3001}{5001} < \frac{301}{501}$, also $a < c < b$.

▲ 386 Da die Oberfläche der Erde

$$0 = 4\pi R^2 \approx 509{,}9 \cdot 10^6\,\text{km}^2$$

beträgt, ist eine Fläche von

$$509{,}9 \cdot 10^6 \cdot 0{,}708\,\text{km}^2 \approx 361{,}0 \cdot 10^6\,\text{km}^2$$

vom Meer bedeckt.

Falls alle Eismassen abtauen würden, wäre das Volumen der entstehenden Wassermassen gleich

$$28{,}8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9\,\text{km}^3 \approx 25{,}9 \cdot 10^6\,\text{km}^3.$$

Der Meeresspiegel würde sich also um

$$x = \frac{25{,}9 \cdot 10^6}{361{,}0 \cdot 10^6}\,\text{km} \approx 0{,}0717\,\text{km},$$

d. s. rund 71,7 m oder 71 700 mm heben.

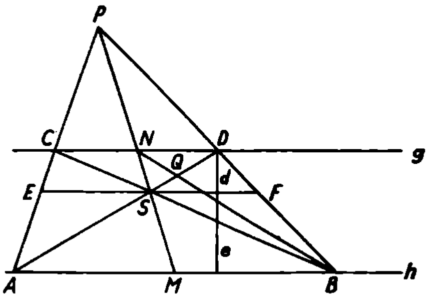
▲ 387 Da die Summe der vier natürlichen Zahlen ungerade ist, sind nur die folgenden beiden Fällen möglich:

1. Drei Zahlen sind gerade, eine ist ungerade. Dann ist das Produkt gerade.
2. Drei Zahlen sind ungerade, eine ist gerade. Dann ist ebenfalls das Produkt gerade.
3. In allen anderen Fällen aber ist die Summe gerade und damit die Voraussetzung nicht erfüllt.

▲ 388 *Konstruktion:* Wir wählen einen Punkt P so, daß er in derjenigen durch die Gerade g bestimmten Halbebene liegt, in der die Gerade h nicht gelegen ist.

Die Verbindungsgeraden von P mit A bzw. B schneiden die Gerade g in den Punkten C bzw. D.

Wir verbinden A mit D und B mit C und erhalten den Schnittpunkt S der Geraden AD und BC. Wir verbinden P mit S. Dann ist der Schnittpunkt M der Geraden PS mit h der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.



Beweis: Es seien E und F die Schnittpunkte der Parallelen durch S zu der Geraden h mit den Geraden PA bzw. PB.

Ferner seien der Abstand der Geraden EF und g gleich d und der Abstand der Geraden EF und h gleich e (vgl. die Abb.).

Dann sind die Dreiecke ABC und ABD flächengleich, also auch die Dreiecke ASC und SBD. Daraus folgt

$$\frac{\overline{ES} \cdot d}{2} + \frac{\overline{ES} \cdot e}{2} = \frac{\overline{SF} \cdot d}{2} + \frac{\overline{SF} \cdot e}{2},$$

$$\overline{ES} \cdot \frac{d+e}{2} = \overline{SF} \cdot \frac{d+e}{2},$$

$$\overline{ES} = \overline{SF}$$

und hieraus nach dem Strahlensatz wegen $\overline{ES} : \overline{AM} = \overline{PS} : \overline{PM}$ und $\overline{SF} : \overline{MB} = \overline{PS} : \overline{PM}$

$\overline{AM} = \overline{MB}$, d. h. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, w.z.b.w.

W 9 ■ 389 Es seien

x_1 die Anzahl der Medaillen der DDR,
x_2 die der UdSSR,
x_3 die von Rumänien,
x_4 die der Niederlande,
x_5 bzw. x_6 die der übrigen beiden Länder.

Dann gilt nach Voraussetzung

$$5 \geqq x_1 > x_2 = x_3 > x_4 > x_5 \geqq x_6 > 0,$$
$$s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15.$$

1. *Es sei* $x_1 \leqq 4$; dann gilt
$x_2 = x_3 \leqq 3$, $x_4 \leqq 2$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, also $s \leqq 4+3+3+2+1+1 = 14$, was der Voraussetzung widerspricht.

2. *Daher gilt* $x_1 = 5$. Ferner gilt
$x_2 = x_3 \geqq 3$, $x_4 \geqq 2$, $x_5 \geqq 1$, $x_6 \geqq 1$.

2.1. *Es sei* $x_2 = x_3 = 4$. Dann gilt
$s \geqq 5+4+4+2+1+1 = 17$, was der Voraussetzung widerspricht.

2.2. *Daher gilt* $x_2 = x_3 = 3$, also $x_4 = 2$, $x_5 = x_6 = 1$ und
$s = 5+3+3+2+1+1 = 15$, so daß alle Voraussetzungen erfüllt sind.

Es erhielten also die DDR 5 Medaillen, die UdSSR und Rumänien je 3 Medaillen.

W 9 ■ 390 Angenommen, es sei x eine reelle Zahl, für die Ungleichung

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \text{ erfüllt ist.} \qquad (1)$$

Dann gilt $x \neq 1$, da sonst der Nenner auf der linken Seite von (1) gleich Null wäre. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. *Fall* $x-1>0$, d.h. $x>1$. Dann gilt
$x+1>x-1$, also wegen $x-1>0$
$\frac{x+1}{x-1}>1.$

Die Ungleichung (1) ist daher zunächst für alle $x>1$ erfüllt.

2. *Fall* $x-1<0$, *d. h.* $x<1$. Dann gilt
$x+1>x-1$, also wegen $x-1<0$
$\frac{x+1}{x-1}<1.$

Die Ungleichung (1) ist also für keine reelle Zahl x, die kleiner als 1 ist, erfüllt.
Daher ist die gegebene Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, und nur für diese reellen Zahlen x erfüllt.

▲ 391 Es gilt $x^2-x-6=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{25}{4}$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)$$

$=(x+2)(x-3)$.
Daher ist die Bedingung $x^2-x-6<0$ mit der Bedingung $(x+2)(x-3)<$ *äquivalent*, d. h. mit der *Bedingung* (4):

$$-2<x<3. \qquad (6)$$

Die gegebene Bedingung ist aber *nicht* äquivalent mit den Bedingungen (1), (2), (3) oder (5), weil diese eine andere Erfüllungsmenge als (6) besitzen. Die Bedingung (3) ist sogar für *keine* reelle Zahl x erfüllt.

▲ 392 a) Wir bezeichnen die vier Zahlen a, b, c, d so, daß
$a \leqq b \leqq c \leqq d$ gilt.
Dann ist $a+b$ kleiner oder gleich den anderen Summen und $c+d$ größer oder gleich den anderen Summen. Ferner ist
$a+b \leqq a+c$ kleiner oder gleich den in dieser Ungleichung nicht vorkommenden Summen und
$c+d \geqq b+d$ größer oder gleich den in dieser Ungleichung nicht vorkommenden Summen.
Daher gilt in dem vorliegenden Fall
$a+b=12$ (1), $a+c=15$ (2),
$c+d=22$ (3), $b+d=19$ (4).
Es verbleiben nur noch die Summen $b+c$ und $a+d$, die in dem vorliegenden Fall beide gleich 17 sind:

$$b+c=a+d=17. \qquad (5)$$

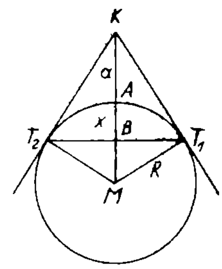
Wir erhalten aus (1) $b=12-a$
und aus (2) $c=15-a$,
also wegen (5) $b+c=27-2a=17$,
d.h. $2a=10, a=5$,
ferner $b=7$, $c=10$, $d=12$.
Die gesuchten vier Zahlen sind also 5, 7, 10 und 12; denn die Summen von je zwei dieser Zahlen sind 12, 15, 17, 17, 19 und 22.
b) In dem vorliegenden Fall sind diese vier Zahlen (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig bestimmt, weil $b+c=a+d=17$ ist und die Gleichungen (1), (2), (5) und (3) genau eine Lösung für a, b, c, d haben.
c) Ist also $b+c=a+d$, so sind die vier Zahlen a, b, c, d durch die Angabe der sechs Summen eindeutig bestimmt. Ist aber $b+c \neq a+d$, und sind die sechs Summen, der Größe nach geordnet, $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ mit $s_3 \neq s_4$, so erhält man die Gleichungen
$a+b=s_1$ (1), $a+c=s_2$ (2),
$c+d=s_6$ (3), $b+d=s_5$ (4),
$b+c=s_3$ oder $b+c=s_4$ (5)
und hieraus (analog wie oben) die Lösungen
$a=\frac{s_1+s_2-s_3}{2}$ bzw. $a=\frac{s_1+s_2-s_4}{2}$ usw.,
also wegen $s_3 \neq s_4$ zwei verschiedene Lösungen.
Die vier Zahlen a, b, c, d sind also dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $a+d=b+c$ gilt, wenn also die Summe der ersten und vierten Zahl gleich der Summe der zweiten und dritten Zahl ist (falls die vier Zahlen der Größe nach geordnet sind).
Es sei noch bemerkt, daß in jedem Falle die Bedingungen

$$s_1+s_6=s_2+s_5=s_3+s_4$$

erfüllt sein müssen, weil sonst das Gleichungssystem keine Lösung hat.

W 10/12 ■ 393 Die Sekretärin kann mit Zuversicht an die Erledigung des ihr übertragenen Auftrages gehen. Man kann beweisen, daß es auf jeden Fall eine solche Dreiergruppe gibt.
Man suche sich irgendeinen der 66 Mathematiker heraus, beispielsweise den Mathematiker X. Er korrespondiert mit jedem der 65 übrigen Mathematiker über genau eines der vier Gebiete Analysis, Zahlentheorie, Geometrie bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung und, weil $16 \cdot 4<65$ und $17 \cdot 4>65$ ist, mit mindestens 17 von ihnen über eines dieser vier Gebiete, z. B. über Analysis. Sind unter diesen 17 Wissenschaftlern zwei vorhanden, deren Briefwechsel gleichfalls das Gebiet der Analysis betrifft, so ist eine solche gewünschte Dreiergruppe gefunden.
Ist das nicht der Fall, so befassen sich diese 17 Mathematiker untereinander nur mit Zahlentheorie, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einer dieser 17 Wissenschaftler, sagen wir der Mathematiker Y, korrespondiert über eines dieser drei Gebiete, z. B. über Zahlentheorie mit mindestens 6 Mathematikern dieser Gruppe, weil $5 \cdot 3<17$ und $6 \cdot 3>17$ ist. Sind unter diesen 6 Wissenschaftlern zwei vorhanden, deren Briefwechsel gleichfalls das Gebiet der Zahlentheorie betrifft, so ist wiederum eine solche Dreiergruppe gefunden. Ist das nicht der Fall, so befassen sich diese 6 Mathematiker untereinander nur mit Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einer dieser 6 Wissenschaftler, sagen wir der Mathematiker Z, korrespondiert über eines der beiden Gebiete, z. B. über Geometrie, mit mindestens drei Mathematikern dieser Gruppe. Sind unter diesen drei Wissenschaftlern zwei vorhanden, deren Briefwechsel gleichfalls das Gebiet der Geometrie betrifft, so ist wieder eine solche Dreiergruppe gefunden.
Ist das nicht der Fall, dann korrespondierten diese drei Wissenschaftler untereinander nur über Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. So findet man also auch in diesem Fall eine solche Dreiergruppe. Es muß also unter den 66 Mathematikern drei Mathematiker geben, die untereinander nur über Probleme einer einzigen Disziplin korrespondieren.

W 10/12 ■ 394 In der beigefügten Schnittfigur sind
M der Mittelpunkt der Erde,
K der Standort des Kosmonauten,
T_1, T_2 die Berührungspunkte der von K an dem Schnittkreis gelegten Tangenten,
$a=\overline{KA}=225$ km die Entfernung des Kosmonauten von der Erdoberfläche,
$R=\overline{MT_1}=6370$ km der (mittlere) Radius der Erde
und $x=\overline{AB}$ die Höhe der gesuchten Kugelkappe, die durch die Berührungspunkte aller von K an die Erdkugel gelegten Tangenten begrenzt ist.
Da das Dreieck MT_1K rechtwinklig ist und da $\overline{MB}=R-x$ und $\overline{MK}=R+a$ gilt, folgt nach dem Satz des Euklid
$R^2=(R-x)(R+a)$,
also $R^2=R^2+aR-Rx-ax$,
d. h. $Rx+ax=aR$
also $x(R+a)=aR$,
d. h. $x=\frac{aR}{R+a}$. Wir erhalten
$x=\frac{225 \cdot 6370}{6595}\text{km} \approx 217{,}3\,\text{km}$.



Daher beträgt der Flächeninhalt der gesuchten Kugelkappe
$A=2\pi Rx \approx 2\pi \cdot 6\,370 \cdot 217{,}3\,\text{km}^2$
$\approx 8\,700\,000\,\text{km}^2$.
Der Kosmonaut konnte also ein Gebiet von rund 8,7 Millionen Quadratkilometer überblicken, das ist etwa das 80fache der Fläche der DDR (rund $108\,000\,\text{km}^2$) und mehr als ein Drittel der Fläche der UdSSR (rund $22\,000\,000\,\text{km}^2$).

Lösung der Aufgabe
von Prof. Dr. K. Manteuffel

▲ 395 1. Es ist 60 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 3, 4, 5, 6; daher werden die Bedingungen für 2, 3, 4, 5, 6 sicher von den Zahlen der Form $m=60\lambda+1$, $\lambda=0, 1, 3, \ldots$ erfüllt. Dann soll m noch durch 7 teilbar sein, d. h. $60\lambda+1 \equiv 0(7)$ bzw.

$4\lambda+1\equiv 0(7)$; alle $\lambda\equiv 5(7)$, d.h. alle $\lambda=5+7\mu$, $\mu=0, 1, 2, 3$, erfüllen diese Bedingung. Daher müssen alle Zahlen
$m_\mu = 60(5+7\mu)+1 = 301+420\mu$, $\mu=0, 1, 2, \ldots$ sämtlichen Bedingungen genügen; für $\mu=0$ ergibt sich mit $m_0 = 301$ die Anzahl der am Ausflug teilnehmenden Schüler.
2. Durch Überlegung und Probieren kann man auf verschiedenen Wegen zum gesuchten Ergebnis kommen.
Z. B. 60 und jedes Vielfache davon sind durch 2, 3, 4, 5, 6 teilbar; also ergeben 61, 121, 181, 241, 301, 361, ... bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6 jeweils den Rest 1. Es braucht von diesen nur die Zahl ermittelt zu werden, die bei Division durch 7 den Rest 0 ergibt; die gesuchte kleinste Zahl ist 301. Addiert man zu 301 Vielfache des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von 2, 3, 4, 5, 6, 7, also Vielfache von 420, dann erhält man alle gesuchten Zahlen.
Oder man geht von den Vielfachen von 7 aus. In Frage kommen nur solche Vielfachen, die bei Division durch 10 den Rest 1 ergeben (die gesuchten Zahlen müssen sowohl bei Division durch 2 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 1 ergeben, also auch bei Division durch 10); Zahlen mit diesen Eigenschaften sind 21, 91, 161, 231, 301, 371, ... Man prüft nun die Reste, die sich bei Division durch 4 und 6 ergeben, und findet die Zahl 301. Man verfährt dann weiter wie oben.

5 ▲ 396 Wir stellen die folgenden Zahlenpaare zusammen:
1 und 998
2 und 997
3 und 996

499 und 500.
Die Quersummen aus den beiden Zahlen jedes dieser 499 Paare betragen zusammen stets 27. Die Summe der Quersummen der Zahlen von 1 bis 998 beträgt somit $27\cdot 499 = 13473$.
Wir addieren noch die Quersummen der Zahlen 999 und 1000, also 27 und 1.
Die Summe der Quersummen der Zahlen von 1 bis 1000 beträgt damit 13501.

W 5 ■ 397 Es sei n die Anzahl der Schichten, die für beide Schachteln gleich ist, dann gilt $7\cdot n-3 = 5\cdot n+3$. Diese Gleichung wird nur durch $n=3$ erfüllt, das heißt, Hans besitzt 18 Farbstifte.

W 5 ■ 398 Das Taschengeld hätte bei gleichbleibender Sparsamkeit für 36 Tage gereicht. Da es nur für 30 Tage bestimmt war, wurde der sechste Teil des Taschengeldes eingespart, das waren 2 M. Folglich beträgt Anneroses Taschengeld $6\cdot 2$ M, das sind 12 M.

6 ▲ 399 Aus $u = a+b+c$ und
$7+b+11 < 31$ folgt $b<13$. Aus $a+b>c$ folgt $7+b>11$, also $b>4$.
Die Seite $AC = b$ kann entweder 5 cm oder 9 cm lang sein, da die Maßzahlen der Seitenlängen verschieden groß sein sollen.

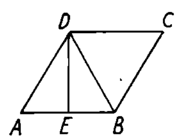
W 6 ■ 400 Im ungünstigsten Falle werden der Schachtel zunächst alle blauen und grünen Kugeln entnommen, das sind zusammen 34 Kugeln. Erst mit der 35. Kugel ist dann eine rote dabei, so daß man eine Kugel jeder der drei Farben besitzt.

W 6 ■ 401 Die Quersumme des ersten Faktors beträgt 21, die des zweiten ebenfalls 21. Beide Faktoren sind demnach durch 3 teilbar; folglich muß ihr Produkt durch 9 teilbar sein. Die Quersumme des genannten Ergebnisses beträgt aber 26; diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Das angegebene Ergebnis ist also falsch.

W 7 ■ 402 Aus $\overline{SB}=\overline{SD}$, $\overline{SA}=\overline{SC}$ und $\sphericalangle CSB = \sphericalangle ASD$ folgt $\Delta SBC \cong \Delta SAD$ und damit auch $\sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB$. Aus der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle SAD$ und $\sphericalangle SCB$ folgt die Gleichheit ihrer Nebenwinkel, also $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECD$.
Aus den Voraussetzungen der Aufgabe folgt ferner $\overline{AB}=\overline{CD}$. Aus den bisher ermittelten Beziehungen folgt $\Delta ABE \cong \Delta DCE$ und damit auch $\overline{BE} = \overline{DE}$, das heißt, daß das Dreieck BDE gleichschenklig ist.

W 7 ■ 403 Die gesuchten Zahlen sind durch 72 teilbar, also auch durch 8 und 9. Nun steht wegen der Voraussetzung a) der Aufgabe an der 4. Stelle eine gerade Zahl; daher muß die aus der 5. und 6. Stelle gebildete Zahl durch 8 teilbar sein; andererseits ist diese Zahl wegen der Voraussetzung a) auch durch 3 teilbar. Das trifft nur für die Zahlen 24, 48, 72 und 96 zu. Für 24 wäre die aus den ersten beiden Stellen gebildete Zahl 8; wir erhalten nur eine fünfstellige Zahl; also entfällt 24.
Die in Frage kommenden Zahlen lauten demnach 163248, 244872 und 326496. Die Quersummen dieser Zahlen sind 24, 27 und 30. Nur die Zahl 244872 ist durch 9 und damit auch durch 72 teilbar. Daher ist 244872 die einzige sechsstellige natürliche Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt.

W 8 ■ 404 Es sei $ABCD$ das gegebene Parallelogramm mit $\sphericalangle DAB = 60°$ und der der von dem Eckpunkt D ausgehenden Höhe $\overline{DE}$. Dann gilt nach Voraussetzung $\overline{AE}=\overline{EB}$. Ferner ist $\sphericalangle EDA = 30°$ und auch $\sphericalangle BDE = 30°$, da die Dreiecke EDA und BDE kongruent sind. Daraus folgt $\sphericalangle BDA = 60°$, d.h. das Dreieck BDA ist gleichseitig.

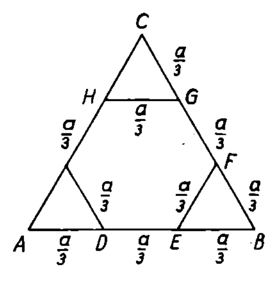


Daher gilt $\overline{AD}=\overline{AB}$, also
$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{CD}$, d.h. das Parallelogramm $ABCD$ ist ein Rhombus. Da nach Voraussetzung der Umfang dieses Rhombus 24 cm beträgt, ist seine Seitenlänge gleich 6 cm. Die Länge der kleineren Diagonale $\overline{BD}$ ist also ebenfalls gleich 6 cm, weil das Dreieck ABC gleichseitig ist.

W 8 ■ 405 Angenommen a, b und c seien drei positive ganze Zahlen, und es sei $a+b+c=abc$.
Dann gilt
$$3a+3b+3c=abc+abc+abc, \text{ also}$$
$$a(bc-3)+b(ac-3)+c(ab-3)=0.$$
Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn entweder $ab=ac=bc=3$ gilt oder mindestens eine der Zahlen $ab-3$, $ac-3$, $bc-3$ negativ ist, da nach Voraussetzung a, b, c positive Zahlen sind.
Im ersteren Falle würde man $b=c$, also $b^2=3$ erhalten, was nicht möglich ist.
Im letzteren Falle wäre z.B. $ab-3<0$, also $ab<3$. Das ist nur möglich, wenn $a=b=1$ oder $a=1$, $b=2$ oder $a=2$, $b=1$ gilt.
Aus $a=b=1$ würde
$(c-3)+(c-3)+c(-2)=0$, d.h. $-6=0$ folgen, was nicht möglich ist.
Aus $a=1$, $b=2$ folgt
$(2c-3)+2(c-3)+c(-1)=0$, also $3c-9=0$, d.h. $c=3$. Wir erhalten also das erste Lösungstripel (1, 2, 3); denn es gilt $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$.
Durch Vertauschung der a, b, c erhalten wir die weiteren Lösungstripel (2, 1, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1); insgesamt gibt es also 6 Lösungstripel.
Ist nun $a=2$, $b=1$, so ist $c=3$; wir erhalten also das bereits oben ermittelte Tripel (2, 1, 3).
Auch in den Fällen $ac-3<0$ oder $bc-3<0$ erhalten wir wieder nur die obigen Lösungstripel; daher gibt es genau 6 Lösungstripel.

W 9 ■ 406 Wegen $f(x)=x^2-3$ gilt für alle z:
$$f(z+1)=(z+1)^2-3=z^2+2z+1-3$$
$$=z^2+2z-2,$$
$$f(z)+2z+1=z^2-3+2z+1=z^2+2z-2,$$
also $f(z+1)=f(z)+2z+1$, w.z.b.w.

W 9 ■ 407 1. Wie aus der Figur ersichtlich ist, ist der Restkörper von vier regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ und vier gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ begrenzt. Der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke beträgt $\frac{1}{9}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{36}\sqrt{3}$ und daher der Flächeninhalt jedes der Sechsecke $\frac{6\cdot a^2}{36}\sqrt{3} = \frac{a^2}{6}\sqrt{3}$.



Also beträgt der *Oberflächeninhalt des Restkörpers*
$$A = \frac{4\cdot a^2}{36}\sqrt{3} + \frac{4\cdot a^2}{6}\sqrt{3} = \frac{7}{9}a^2\sqrt{3}.$$

2. Das ursprüngliche Tetraeder hat das Volumen $V_1 = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$. Jede der vier abgetrennten Pyramiden ist ebenfalls ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{a}{3}$, also mit dem Volumen $V_2 = \frac{1}{27} \cdot \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.
Daher beträgt das *Volumen des Restkörpers*

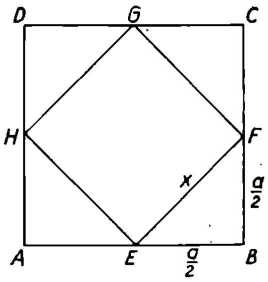
$$V = V_1 - 4V_2 = \frac{a^3}{12}\sqrt{2} - \frac{4}{27} \cdot \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$
$$= \frac{a^3}{12}\sqrt{2}\left(1 - \frac{4}{27}\right),$$
$$V = \frac{23}{324} a^3 \sqrt{2}.$$

W 10/12 ■ 408 Wegen $f(x) = \frac{1}{2}(3x-5)$ gilt für alle z:

$$f\left(z-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[3\left(z-\frac{5}{2}\right)-5\right] = \frac{1}{2}\left[3z-\frac{25}{2}\right]$$
$$= \frac{3}{2}z - \frac{25}{4},$$
$$f\left(z+\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}\left[3\left(z+\frac{1}{2}\right)-5\right] - \frac{9}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[3z - \frac{7}{2}\right] - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}z - \frac{25}{4},$$
also $f\left(z-\frac{5}{2}\right) = f\left(z+\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2}$, w.z.b.w.

W 10/12 ■ 409 1. Wie aus der Figur ersichtlich ist, ist der Restkörper von sechs Quadraten mit der Seitenlänge x und acht gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge x begrenzt, wobei
$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$, also $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ gilt.
Daher beträgt der *Oberflächeninhalt des Restkörpers*

$$A = 6x^2 + \frac{8x^2}{4}\sqrt{3} = 2x^2(3+\sqrt{3})$$
$$= 2 \cdot \frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3}) = a^2(3+\sqrt{3}) \approx 4{,}732a^2.$$



2. Jede der acht abgetrennten Pyramiden hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Länge der Kathete $\frac{a}{2}$ und der Länge der Höhe $\frac{a}{2}$. Das Volumen jeder Pyramide beträgt daher

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{48}.$$

Daher beträgt das Volumen des Restkörpers

$$V = a^3 - \frac{8 \cdot a^3}{48} = \frac{5}{6}a^3.$$

Lösung der Aufgabe
von Prof. Dr. rer. nat. habil. M. Miller

▲ 410 *Beweis:*
Die Fläche des Dreiecks ABC sei F,
Die Fläche des Dreiecks AA_1A_2 sei F_a,
Die Fläche des Dreiecks BB_1B_2 sei F_b,
Die Fläche des Dreiecks CC_1C_2 sei F_c.
Es gelten nun folgende Winkelbeziehungen: $\alpha_1 = \pi - \alpha$; $\beta_1 = \pi - \beta$; $\gamma_1 = \pi - \gamma$; somit ist $\sin\alpha_1 = \sin\alpha$; $\sin\beta_1 = \sin\beta$; $\sin\gamma_1 = \sin\gamma$.

$$\text{Da } F = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin\beta$$
$$F_a = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha$$
$$F_b = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin\beta$$
$$F_c = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\gamma_1 = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\gamma,$$

ergibt sich: $F_a = F_b = F_c = F$.

▲ 414
Behälter A: $V = 1\,044\,000 \text{ cm}^3 \approx 1 \text{ m}^3$
Behälter B: $V = 2\,037\,750 \text{ cm}^3 \approx 2 \text{ m}^3$
Behälter C: $V = 3\,045\,900 \text{ cm}^3 \approx 3 \text{ m}^3$
Behälter S: $V = 768\,000 \text{ cm}^3 \approx 0{,}75 \text{ m}^3$

▲ 415

Typ:	Startmasse je Passagier:
An 10 A	rund 417 kg
An 24	420 kg
IL 18 B	556 kg
IL 18 E	501 kg
IL 62	847 kg
Jak 40	517 kg
Tu 104	745 kg
Tu 114	750 kg
Tu 124	643 kg
Tu 134	583 kg

▲ 416 Aus $u = d$ und $U = \frac{165\,000}{u}$ folgt:

a) $u \approx 3{,}925$ m, $U \approx 42040$;
b) $u \approx 3{,}297$ m, $U \approx 50045$;
c) $u \approx 5{,}495$ m, $U \approx 30030$.

▲ 417 Auf einer Fahrstrecke von 761 m Länge hat der Zug auf je 100 m eine Steigung von 1 m zu überwinden; der Höhenunterschied beträgt also 7,61 m.
Rechte Tafel: Danach fällt die Fahrstrecke auf einer Länge von 386 m und zwar je 333 m um 1 m; das Gefälle beträgt also 1,16 m.
Der Höhenunterschied der Gesamtstrecke (1147 m) beträgt damit 6,45 m.

Mitarbeiter gesucht
Liebe junge Freunde!
alpha erwartet von euch: Berichte über die Arbeit in den AGs, über Lehrmittelselbstbau, Fach- bzw. Jahresarbeiten, AG-Pläne, Mathematik-Wettbewerbe, Beiträge über lustige Begebenheiten aus dem Mathematikunterricht, Bilder, Rätsel u. ä.

Lösungen zu alpha-heiter

Vater Pfiffig

$\frac{6}{0{,}8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$; Knobel erhält nunmehr 7,50 M Taschengeld.

Rätsel zu Mengenlehre

$M_1 = \{m, a, t, h, e, i, k\}$
$M_2 = \{t, h, e, m, a, i, k\}$
THEMATIK

aldjahr w'almokabala

▲ Die beiden Zahlen sind 8 und 2.
▲ Weizen: $\frac{1}{3}$; Gerste $\frac{1}{6}$

Painter's Puzzle

A full tin weighs 8 lb.. 6 lb. of paint and 2 lb. for the tin. (1 engl. Pfund = 453,6 g)

Zahlenrätsel — einmal anders

Umfassende Lösung siehe Heft 6/69

Rohrbruch

Hahn 3 muß geschlossen werden.

Erst übersetzen, dann nachdenken!

2543 + 1253 = 4126

Zusammenhänge finden!

Einermenge, Dualsystem, Trinom, Quadrat, Fünfertip, Sextett, September, Oktaeder, Neuneck

Wer schoß die 12? (6/68)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Krümel:} & 9, 9, 12, 10, 8 \\ \text{Flax:} & 5, 11, 10, 7, 7 \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Krümel:} & 10, 9, 10, 11, 8 \\ \text{Flax:} & 5, 9, 12, 7, 7 \end{array}\right\}$$

Auch so ist es richtig, meinen Rita Jeske, Lauta, und Dr. E. Kliemand nebst Sohn, Berlin

Kryptarithmetik (6/68)

Es muß auf Seite 183 rechts unten richtig heißen in Problem 1: *A B C B*

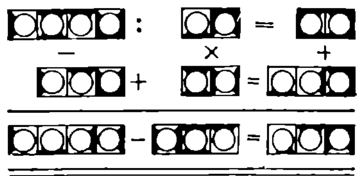
Dr. Kliemand, Berlin

Without a Word

Gentlemen, in *alpha* No. 6/68 on page 182 you used a wrong term for the sign ÷ and for the German translation „geteilt durch". The right term is „divided by". Nevertheless I have enjoyed *alpha*.

Yours truly Uwe Unruh, Zansibar
(Teacher of maths from GDR)

Wir stellen ein Zahlenrätsel auf



Mit dem Beitrag „Wir lösen ein Zahlenrätsel“ von Th. Scholl aus *alpha* 3/68 als Anleitung haben wir sicher schon manches Zahlenrätsel wie das als Vignette abgedruckte gelöst. Zu diesem lautet die Lösung:

$$\begin{array}{rcrcr} 1368 & : & 24 & = & 57 \\ - & & \cdot & & + \\ 168 & + & 39 & = & 207 \\ \hline 1200 & - & 936 & = & 264 \end{array}$$

Da laufend in Illustrierten derartige Zahlenrätsel veröffentlicht werden, wollen wir uns überlegen, wie ein solches Zahlenrätsel entworfen wird. Zu diesem Zweck ersetzen wir zunächst die Zahlen des angegebenen Rätsels durch Variable r, s, t, u, v, w, x, y und z:

$$(1)\qquad \begin{array}{c|ccccc} & A & & B & & C \\ \mathrm{I} & r & : & s & = & t \\ & - & & \cdot & & + \\ \mathrm{II} & u & + & v & = & w \\ \hline \mathrm{III} & x & - & y & = & z \end{array}$$

Zusätzlich sind wiederum wie im Artikel „Wir lösen ein Zahlenrätsel“ die in den Zeilen und Spalten stehenden Gleichungen mit I, II und III bzw. mit A, B und C bezeichnet worden.

Durch Vergleich mit anderen in Illustrierten abgedruckten Zahlenrätseln stellen wir fest, daß eine Reihe dieser vom gleichen eben aufgeschriebenen Grundtyp (1) sind. Wir vermuten deshalb, daß es viele Zahlenrätsel vom Typ (1) gibt.

Um weitere Zahlenrätsel mit Grundschema (1) zu erhalten, suchen wir Bedingungen auf, denen jede Lösung der in diesem Schema enthaltenen sechs Gleichungen genügen muß: Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung I mit s folgt

(α) $\quad r = s \cdot t$.

Durch Vertauschen der rechten und linken Seiten der Gleichung II und B ergibt sich

(β) $\quad w = u + v \quad$ und

(γ) $\quad y = s \cdot v$.

Nunmehr setzen wir die erhaltenen Bedingungen (α), (β) und (γ) in das Schema (1) ein:

$$(2)\qquad \begin{array}{c|ccccc} & A & & & & C \\ & (s\cdot t) & : & s & = & t \\ & - & & \cdot & & + \\ & u & + & v & = & (u+v) \\ \hline \mathrm{III} & x & - & (s\cdot v) & = & z \end{array}$$

Bei dieser notwendigen Wahl von r, y und w sind die mit I, II und B bezeichneten Gleichungen stets wahr. Deshalb sind diese drei Symbole am Rande des Schemas (2) nicht mehr notiert worden. Durch Vertauschen der Seiten der Gleichung C des Schemas (2) ergibt sich:

(δ) $\quad z = t + u + v$

Durch Einsetzen von (δ) in (2) folgt:

$$(3)\qquad \begin{array}{c|ccccc} & A & & & & \\ & (s\cdot t) & : & s & = & t \\ & - & & \cdot & & + \\ & u & + & v & = & (u+v) \\ \hline \mathrm{III} & x & - & (s\cdot v) & = & (t+u+v) \end{array}$$

Nunmehr stellen wir die Gleichung III des Schemas (3) nach x um:

$$x - sv = t + u + v \qquad | + sv$$

(ε) $\quad x = t + u + v + sv$

Weiterhin wird (ε) in (3) eingesetzt:

$$(4)\qquad \begin{array}{ccccc} A & & & & \\ \hline (s\cdot t) & : & s & = & t \\ - & & \cdot & & + \\ u & + & v & = & (u+v) \\ \hline (t+u+v+s\cdot v) & - & (s\cdot v) & = & (t+u+v) \end{array}$$

Durch diesen Auflösungs- und Einsetzungsprozeß ist es uns gelungen, die Zahl der Variablen im Schema (1) schrittweise zu verkleinern. Darüber hinaus sind im Schema (4) fünf der sechs enthaltenen Gleichungen bei jeder Belegung mit natürlichen Zahlen der noch enthaltenen Variablen s, t, u und v mit natürlichen Zahlen von selbst erfüllt. Lediglich die Gleichung A des Schemas (4) stellt noch eine zu realisierende Bedingung dar. Zu diesem Zweck stellen wir diese Gleichung schrittweise nach u um:

$$\begin{array}{ll} s\cdot t - u = t + u + v + s\cdot v & | + u \\ s\cdot t = (t+v) + 2u + s\cdot v & | -(t+v) - s\cdot v \\ s\cdot t - (t+v) - s\cdot v = 2u & | \text{(Vertauschen der Seiten)} \\ 2u = s\cdot t - s\cdot v - (t+v) & | \text{(Anwenden des Distributionsgesetzes)} \\ 2u = s(t-v) - (t+v) & | : 2 \end{array}$$

$$(\zeta)\quad u = \frac{s\cdot(t-v) - (t+v)}{2}$$

Wird die Variable u gemäß (ζ) gewählt, so ist auch die Gleichung A des Schemas (4) bei jeder Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen erfüllt. Denn wir können auch rückwärts aus der Gleichung (ζ) durch Umformen zur Gleichung A des Schemas (4) gelangen.

Unserem bisherigen Vorgehen entsprechend müßten wir noch (ζ) in (4) einsetzen. Das so entstehende Schema würde nur noch die Variablen s, t und v enthalten. Bei jeder Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen wären alle sechs in ihm enthaltenen Gleichungen stets wahre Aussagen.

Weil jedoch der Term (eindeutiger, Variable enthaltender Rechenausdruck), nach dem gemäß (ζ) die Variable u zu ersetzen ist, relativ kompliziert ist und da außerdem die Variable u mehrfach (viermal) im Schema (4) vorkommt, verzichten wir auf das Einsetzen. Statt dessen werden wir mit der Gleichung (ζ) und dem Schema (4) arbeiten müssen.

Vorher ist allerdings zur Gleichung (ζ) noch eine wichtige Bemerkung zu machen: Nicht bei jeder Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen wird die gemäß (ζ) berechnete Zahl u auch eine natürliche Zahl sein.

Auf Grund unserer Überlegung gilt folgende Aussage:

Lehrsatz: Jede Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen, für die $s\cdot(t-v)-(t+v)$ eine gerade natürliche Zahl ergibt, führt zu einer Lösung des Systems (1): Zunächst wird durch Einsetzen der entsprechenden natürlichen Zahlen in (ζ) die zugeordnete natürliche Zahl u berechnet und anschließend werden die jetzt insgesamt den Variablen s, t, u und v zugeordneten natürlichen Zahlen in (4) eingesetzt und damit wird jeweils eine Lösung des Systems (1) erhalten.

Eine Lösung des Systems (1) wollen wir berechnen: Wir setzen $s=7$, $t=29$ und $v=11$. Bei dieser Belegung ist die notwendige Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} s\cdot(t-v)-(t+u) &= 7\cdot(29-11)-(29+11) \\ &= 7\cdot 18 - 40 \\ &= 126 - 40 \\ &= 86 \end{aligned}$$

Gemäß (ζ) berechnen wir nunmehr zunächst u:

$$u = \frac{s\cdot(t-v)-(t+v)}{2} = \frac{86}{2} = 43$$

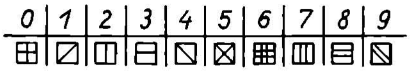
Danach werden für s, t, u und v die entsprechenden natürlichen Zahlen in (4) eingesetzt:

$$
(5)\quad
\begin{array}{ccccc}
(7\cdot 29) & : & 7 & = & 29 \\
- & & \cdot & & + \\
43 & + & 11 & = & (43+11) \\
\hline
\multicolumn{5}{c}{(29+43+11+7\cdot 11)-(7\cdot 11)=(29+43+11)}
\end{array}
$$

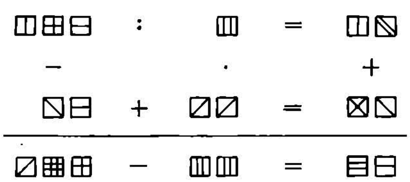
Durch Ausrechnen der in Klammern stehenden Rechenausdrücke erhalten wir:

$$
(6)\quad
\begin{array}{ccccc}
203 & : & 7 & = & 29 \\
- & & \cdot & & + \\
43 & + & 11 & = & 54 \\
\hline
160 & - & 77 & = & 83
\end{array}
$$

Um ein Zahlenrätsel zu erhalten, müssen wir lediglich das System (6) noch verschlüsseln. Diesmal wählen wir den Schlüssel:



Damit ergibt sich das folgende Zahlenrätsel, das wir bei nächster Gelegenheit unseren Freunden zum Lösen vorlegen werden:



Auf Grund von Überlegungen wissen wir, daß das Zahlenrätsel (7) mindestens eine Lösung hat. Durch Auflösen dieses Zahlenrätsels bestätigt man leicht, daß es auch nur diese eine uns bekannte Lösung besitzt.

Die folgenden Aufgaben lösen wir selbständig:

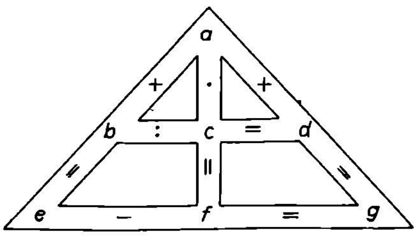
▲ 1. Aufgabe: Stelle ein weiteres Zahlenrätsel vom Typ (1) auf!

▲ 2. Aufgabe: Welchen Bedingungen müssen die natürlichen Zahlen s, t und v genügen, damit $s\cdot(t-v)-(t+v)$ eine gerade natürliche Zahl ist?

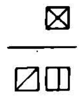
Natürlich lassen sich auch Zahlenrätsel mit anderem Grundschema als (1) bilden.

▲ 3. Aufgabe: Bestimme natürliche Zahlen a, b, c, d, e, f und g so, daß sie den im folgenden Schema enthaltenen fünf Gleichungen genügen!

Stelle hieraus durch Verschlüsselung ein Zahlenrätsel auf!



Diese Ausführungen veranlassen sicher einige von uns, sich andere Grundschemata auszudenken und zu prüfen, ob zu diesen Lösungen und damit durch Verschlüsseln auch Zahlenrätsel gehören. Zwei Vorschläge für anspruchsvolle Leser seien hierzu noch unterbreitet: Ein Teil der im Schema enthaltenen Gleichungen könnte vier natürliche Zahlen enthalten wie eine Gleichung der Form $a+b=c\cdot d$. Schließlich könnten auch teilweise gebrochene Zahlen im Zahlenrätsel zugelassen sein. Z. B. kann eine gebrochene Zahl in verschlüsselter Form das folgende Aussehen haben:



Wir wünschen euch beim Knobeln viel Erfolg! *alpha* ist bereit, die besten Produkte zu veröffentlichen. Die Bedingung hierfür lautet: Die neu entworfenen Zahlenrätsel dürfen nicht zu leicht sein, andererseits jedoch auch nicht zu kompliziert. Außerdem freut sich die Redaktion sehr, wenn künftighin *alpha*-Leser die Illustrierten und die Wochenendausgaben der Tageszeitungen mit Zahlenrätseln versorgen.

W. Träger

alpha gratuliert

31 Schüler, die im *alpha*-Wettbewerb 1967, bzw. 1968 erfolgreich abschnitten (siehe *alpha* 2/68, 2/69), nahmen an der DDR-Olympiade teil. Wir gratulieren recht herzlich und wünschen weiterhin Erfolg.

Stellvertretend für sie stellt die Redaktion *alpha* vor:

Hans-Dietrich Gronau, Klasse 12
Friedrich-Engels-OS, Neubrandenburg
2. Preis,
DDR-Olympiade, Kandidat zur XI. IMO

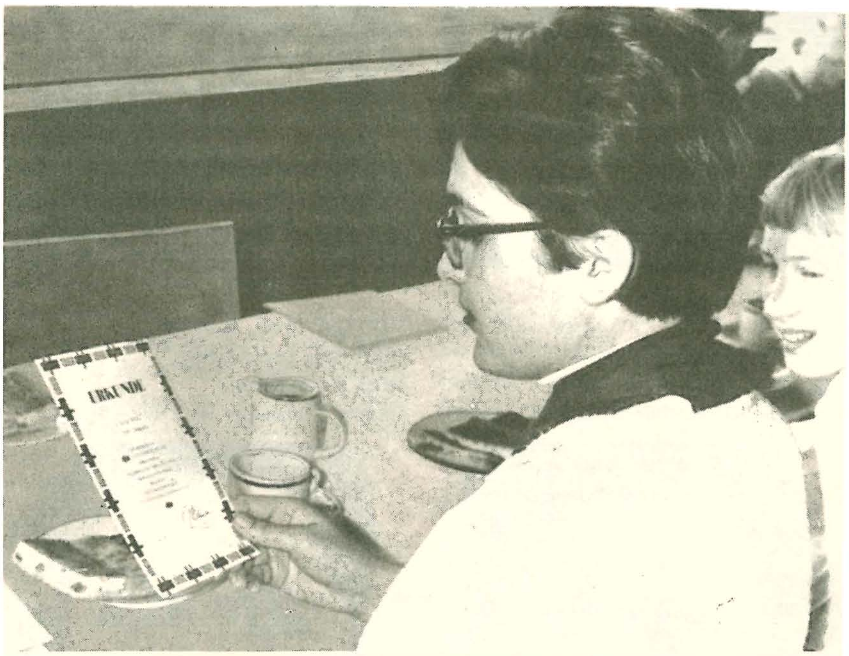
Jürgen Schefter, Klasse 9
EOS Elsterwerda
2. Preis,
DDR-Olympiade, Kandidat zur XI. IMO

Pawel Kröger, Klasse 4
Rumjanzew-Oberschule, Leipzig
2. Preis (in Klassenstufe 10), DDR-Olympiade

Albrecht Heß, Klasse 7
Oberschule Dresden-Süd,
neben Pawel Kröger
jüngster Teilnehmer der DDR-Olympiade

Pioniere des alpha-Wettbewerbs

Vor einem Jahr, am 3. April 1968, riefen die Abteilung Volksbildung beim Rat des Kreises Schmalkalden und die Fachkommission Mathematik zur Verbesserung der außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet auf. Alle Schüler der Klassen 5 bis 10, die im Fach Mathematik die Noten 1 oder 2 hatten oder erreichen wollten, wurden angesprochen, sich regelmäßig am Schülerwettbewerb der mathematischen Zeitschrift *alpha* zu beteiligen. Als Ansporn setzte die Abteilung Volksbildung für die fleißigsten und besten Einsender sowie für die aktivsten Klassen, Lehrer und Schulen Preise und Prämien aus. Den Leitern der Fachzirkel für Mathematik und den Schulen wurde empfohlen, die Einsendung aller Lösungen der Schule gemeinsam vorzunehmen. Der Aufruf der Abteilung Volksbildung und der Fachkommission Mathematik fand sehr bald ein erfreuliches Echo. Die Zahl der Einsendungen zum Wettbewerb übertraf die Erwartungen. An verschiedenen Schulen begannen wieder feste Zirkel und Arbeitsgemeinschaften für Mathematik zu arbeiten. Viele Lehrer lenkten und förderten die Tätigkeit der Schüler. Der Aufschwung machte sich auch sehr bald bei der Redaktion der Zeitschrift *alpha* bemerkbar. Ein im September 1968 in unserer Kreisstadt durchgeführtes Schülerforum der Redaktion *alpha*, geleitet von ihrem Chefredakteur, dem Verdienten Lehrer des Volkes, Studienrat *J. Lehmann*, wurde zu einem Höhepunkt der außerunterrichtlichen Tätigkeit und zum Ansporn noch intensiverer mathematischer Betätigung unserer aktiven Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs.



Feier anläßlich der Überreichung der *alpha*-Urkunden in Schmalkalden

Als der *alpha*-Wettbewerb des Jahres 1968, der zweite Wettbewerb der noch jungen mathematischen Schülerzeitschrift, zu Ende ging, konnte unser Kreis eine gute Bilanz ziehen. Rund 1 600 Antwortkarten wurden an die Redaktion weitergeleitet, fast das Siebenfache aller Lösungen unseres gesamten Bezirkes Suhl im ersten Wettbewerbsjahr der *alpha*. Einen hervorragenden Anteil mit über 550 richtigen Lösungen hatte die Oberschule *Steinbach-Hallenberg*, die schon im vergangenen Jahr wegen ihrer guten außerunterrichtlichen mathematischen Arbeit in der Zeitschrift *alpha* genannt worden war. Aber auch die Oberschule *Mittelstille*, eine kleine Schule, erzielte ein sehr erfreuliches Ergebnis.

Am 3. April 1969, genau ein Jahr nach dem Aufruf, hatte nun die Abteilung Volksbildung die 20 besten Teilnehmer des Wettbewerbs (Schüler mit 11 und mehr Antwortkarten) sowie Lehrer, die besonders aktiv die Durchführung des *alpha*-Wettbewerbs unterstützt hatten, zu einem Empfang in die Kreisstadt geladen. Der Vertreter der Abteilung Volksbildung und der Fachberater für Mathematik würdigten die großen Anstrengungen der aktiven und besten *alpha*-Wettbewerbsteilnehmer und Lehrer, beglückwünschten sie zu ihren Erfolgen und hoben die große Bedeutung guter mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten für unsere sozialistische Volkswirtschaft hervor. Im Auftrage des Chefredakteurs von *alpha* überreichte der Fachberater für Mathematik, Oberlehrer Gehb, den Aktiven die Anerkennungsurkunden der Redaktion und im Auftrage der Abteilung Volksbildung Bücher mit vorwiegend mathematischem Inhalt. Erfolgreichster Teilnehmer des Wettbewerbs war der Schüler *Eberhard Manske* von der Oberschule *Steinbach-Hallenberg* mit 19 Antwortkarten. Die geladenen Mathematiklehrer erhielten als Anerkennung „Eingefangenes Unendlich" von Franz von Krbek. Bei Kaffee und Kuchen führten Schüler und Lehrer einen regen Erfahrungsaustausch. Einer der Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs erfreute Schüler und Lehrer mit mancherlei Kunststücken, bei denen ein Anliegen der Mathematik, gründlich und exakt zu denken und zu arbeiten, besonders sichtbar wurde.

Die Abteilung Volksbildung beim Rat des Kreises Schmalkalden wird auch den neuen Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* aktiv unterstützen und die besten Teilnehmer und Arbeitsgemeinschaften mit Fachlehrern wiederum ehren und prämiieren.

Erwin Manske
im Auftrag der Fachkommission
Mathematik, Schmalkalden

Rund um die Mathematik

Görke/Ilgner/Lorenz/Pietzsch/Rehm

Der Kinderbuchverlag 1969

160 S., zahlreiche Abb. und Bilder, 9,80 M
Nr. 34 der Mathematischen Schülerbücherei
(ab Kl. 5)

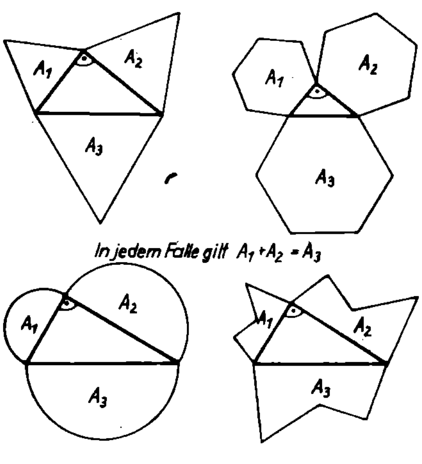
Endlich ist ein Buch für unsere jüngsten *alpha*-Leser da!

Aus der großen Zahl von interessanten Problemen haben wir zwei herausgegriffen:
Susi feiert ihren dreizehnten Geburtstag und hat dazu noch vier Freundinnen eingeladen: Inge, Helga, Karin und Dagmar. Beim Kaffeetrinken scherzt man miteinander:
(1) *Susi:* „Komm du erst mal in meine Jahre, *Karin*!"
(2) *Inge:* „Gib doch nicht so an, *Susi*. Auch wenn du heute Geburtstag hast, fehlen dir immer noch einige Wochen bis zu mir, genau soviel wie mir bis zu *Dagmar*."
(3) *Karin:* „Ich finde, du kannst eigentlich gar nicht mitreden, *Helga*. Bei euch ist Mathematik doch noch ein Kinderspiel."
(4) *Helga:* „Haha, wenn *Inge* das gesagt hätte, aber du?"
Wir wollen einmal probieren, ob wir aus diesen vier Sätzen die Mädchen nach ihrem Alter ordnen können.

Satz des Pythagoras:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Wer erkennt diesen Satz nicht? Wer aber weiß, daß Mathematiker herausgefunden haben, daß ein derartiger Satz auch dann noch gilt, wenn über den Katheten und der Hypotenuse regelmäßige Sechsecke, beliebige — allerdings regelmäßige — Vielecke, Halbkreise oder sogar ganz beliebige, unregelmäßige Vielecke — sofern diese nur alle die gleiche äußere Form haben — errichtet werden?



In jedem Falle gilt $A_1 + A_2 = A_3$

Brockhaus abc

Naturwissenschaft und Technik

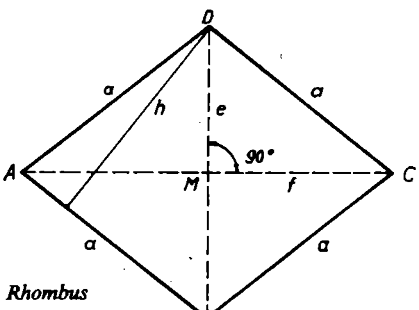
VEB F. A. Brockhaus Verlag, Leipzig, 1969

in zwei Bänden 28,00 M
ab Kl. 5

Die neue, auf zwei Bände erweiterte Auflage des bewährten Nachschlagewerkes enthält auf rund 1 200 Seiten etwa 16 000 Stichwörter, die ergänzt werden durch 1 400 erläuternde Abbildungen im Text und auf 56 teils farbigen Kunstdrucktafeln, einer Vielzahl von Tabellen, Schemata und graphischen Darstellungen sowie zahlreichen Literaturangaben. Das Werk ist ein modernes Informations- und Arbeitsmittel, weitgehend allgemeinverständlich für den mathematisch/naturwissenschaftlich interessierten Leser, hinreichend informativ für den wissenschaftlich tätigen Fachmann zur Orientierung auf fernerliegende Spezialgebiete.

Punkt 1) ein Grundelement der Geometrie; ein geometrisches Gebilde mit einer bestimmten Lage, aber ohne Ausdehnung (von der Dimension Null). Als P. e bezeichnet man auch die Elemente einer Menge, die den Axiomen eines gewissen Raumes genügen

Rhombus, Raute, ein Parallelogramm mit vier gleichlangen Seiten. Die beiden Diagonalen sind zugleich Winkelhalbierende. Sie stehen aufeinander senkrecht und halbieren einander.



Rhombus
$U=4a, \quad A=a \cdot h$

Die optimale Lösung

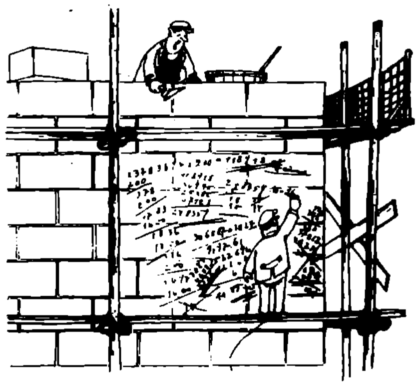
Gilde/Altrichter

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1968

207 Seiten, über 100 Zeichnungen, 6,80 M
(ab Kl. 8)

Rechenautomaten lösen komplizierte Rechnungen in Sekunden, Minuten oder Stunden. Jedoch dauert die Vorbereitung für diese kurzen Rechenzeiten, also das Aufstellen des Programms, Wochen, Monate oder Jahre. Selbst wenn man davon absieht, daß elektronische Rechner nur in einer beschränkten Zahl zur Verfügung stehen, kann man mit ihnen immer nur Aufgaben lösen, die programmiert sind.

In der Industrie werden täglich Entscheidungen gefällt, die kurzfristig beschlossen werden müssen. Wir stehen nun vor der überraschenden Tatsache, daß wir zur Erleichterung der Handarbeit und ihrer Lösung raffinierte Maschinen aufstellen, aber für die Erleichterung und Verbesserung vieler geistiger Arbeit ist bisher wenig getan worden. Das Buch soll deshalb dazu anregen, sich mit einfachen mathematischen Methoden zu befassen, die den Weg zur optimalen Lösung wichtiger Aufgaben besser und schneller zu finden ermöglichen.



„Na, kommt denn nun noch ein Stein drauf, oder nicht?"

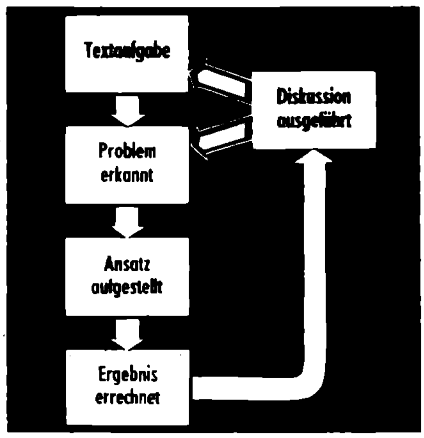
Anleitung zum Lösen physikalischer Aufgaben

Kießling/Körner

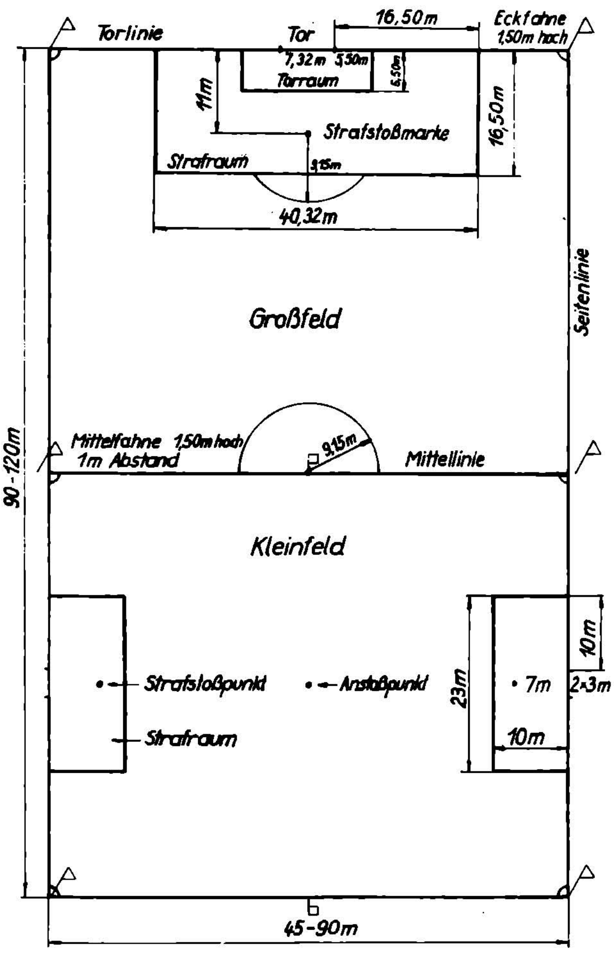
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1968

128 Seiten, 56 Bilder, 1 Beilage, 5,00 M
(ab Kl. 8)

Der Wert physikalischer Kenntnisse erweist sich erst dann, wenn der Leser imstande ist, physikalische Probleme in mathematische Form zu kleiden und auf dieser Grundlage numerisch auszuwerten. Der Leser wird



angeleitet, ein Problem in einzelne Denkschritte aufzugliedern, beginnend bei der Ordnung der gegebenen Größen über den Ansatz bis zur Lösung und Kritik. Durch voll durchgerechnete Beispiele wird dem Leser die Durchführung deutlich vor Augen gestellt.



Wußtest Du schon?

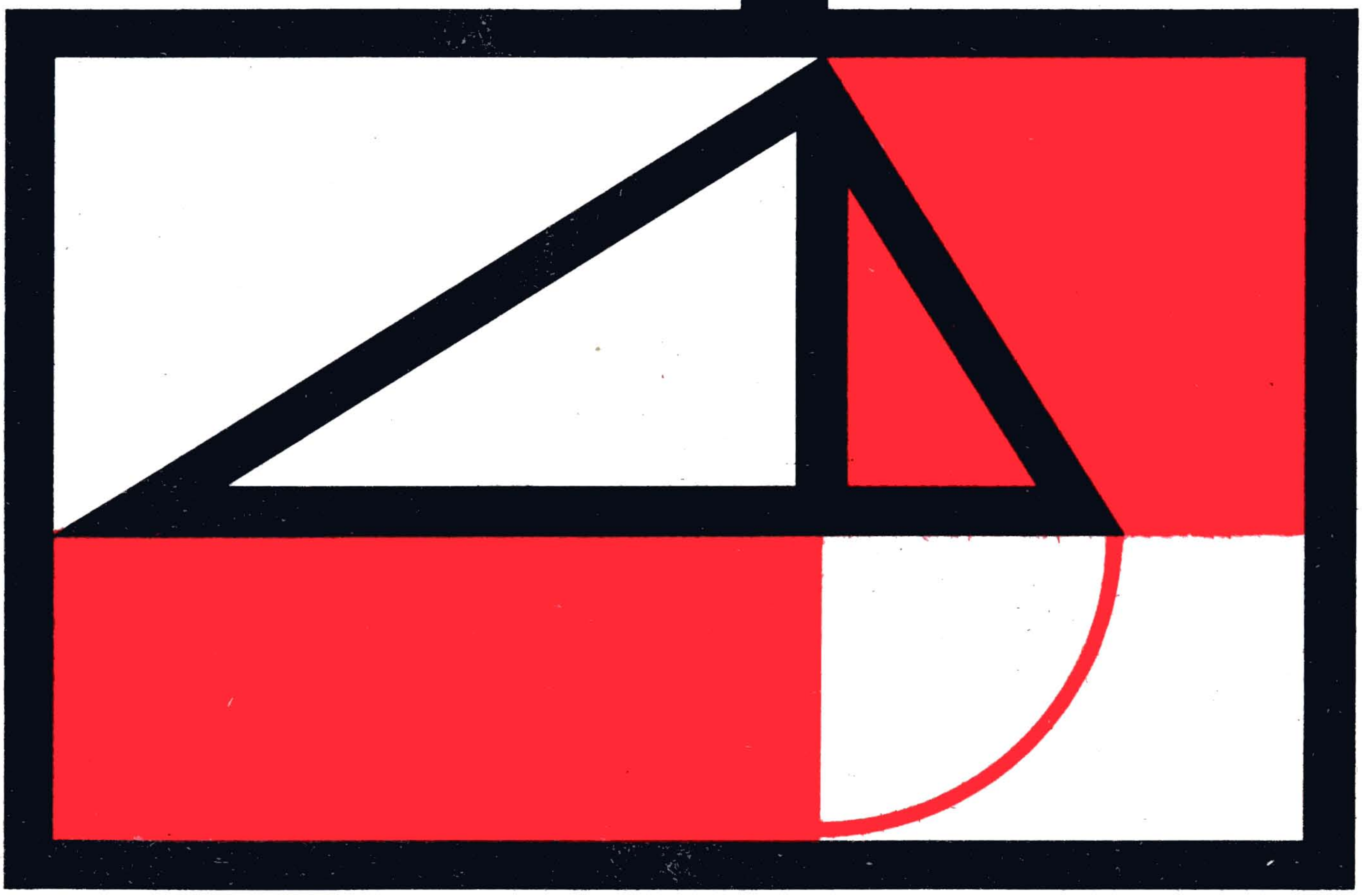
Das Ballgewicht beträgt 396 bis 453 g, der Ballumfang 68 bis 71 cm. Die Mindestantrittstärke beim Fußball: 8 Mitspieler; Spielbeginn: Die Kapitäne beider Mannschaften losen um Seitenwahl oder Anstoß! Das Spiel beginnt nicht mit dem Anpfiff, sondern mit dem gültigen Anstoß! D. h., der Ball ist erst im Spiel, wenn er den Weg seines Umfanges, nämlich 70 cm, zurückgelegt hat. Der gültige Anstoß verlangt:

1. Jeder Spieler der anstoßenden Mannschaft muß sich in seiner eigenen Spielhälfte befinden.
2. Jeder Spieler der nicht anstoßenden Mannschaft muß 9,15 m vom Ball entfernt bleiben.
3. Der Ball muß nach vorn gestoßen werden.
4. Der anstoßende Spieler darf den Ball nicht ein zweites Mal spielen.
5. Der zweite Spieler darf den Ball erst spielen, nachdem er eine Strecke von 70 cm zurückgelegt hat.
6. Der Gegner darf erst in das Spiel eingreifen, wenn der Ball den Weg von 70 cm zurückgelegt hat.

Mathematische Schülerzeitschrift

XX

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos:
W. Seifert, Karl-Marx-Stadt (S. 97; 98); E. Cojocaru, Bukarest (S. 101); Zentralbild (S. 108; 109); Foto Zimmert, Rostock (S. 113); Vignette Ch. Loff, Leipzig (S. 113); Vignette F. Fricke, Berlin (S. 118); Techn. Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 15. Juli 1969

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

An die Leser der Zeitschrift „alpha“

Liebe junge Freunde!

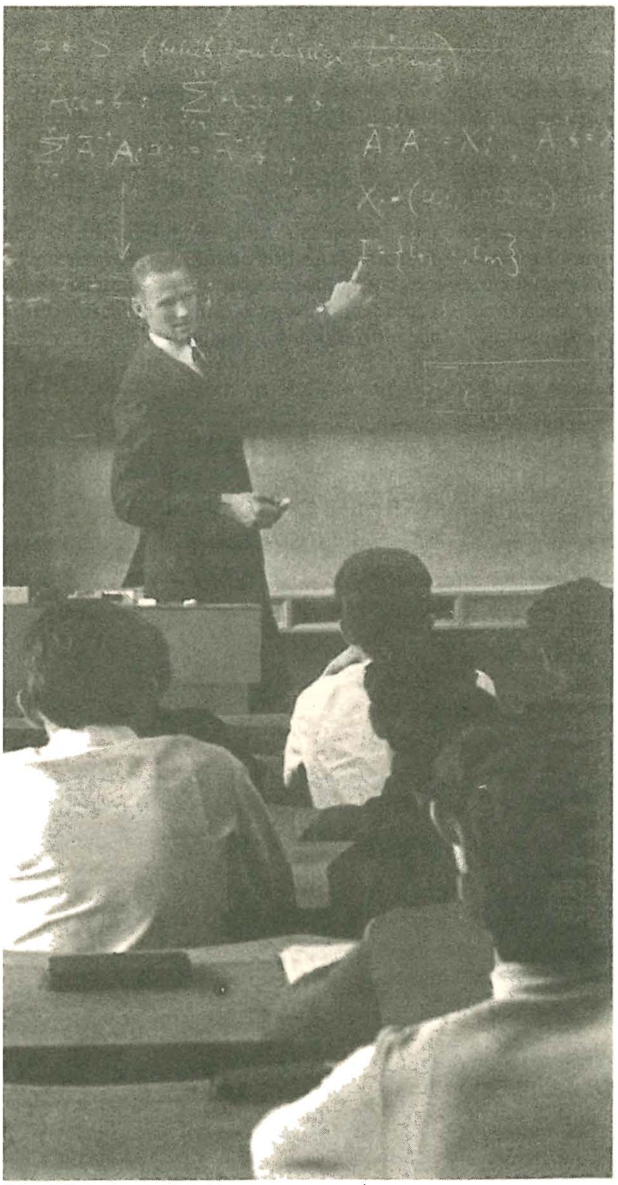
Ich glaube nicht, daß es notwendig ist, Sie davon zu überzeugen, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Da Sie Leser dieser Zeitschrift sind, bedeutet das, daß Sie zur großen Familie der Mathematiker der ganzen Welt gehören. Und wer ihr mal angehört, der bleibt ihr auch treu.
Weshalb sollten aber wir Menschen, die der wunderschönen Dame Mathematik ergeben sind (die Mathematik ist übrigens nicht nur im Deutschen, sondern auch im Russischen weiblichen Geschlechtes), in dieser ausgezeichneten Zeitschrift nicht auch darüber sprechen, was wir schätzen und lieben? Das könnte wie ein Toast am Festtisch der Wissenschaft klingen.
Die Mathematik gehört nicht irgendeinem Volk, sondern ist wahrhaftig international. Es gibt kein Land, das mit ihr nicht Freundschaft hielte, das ihre Schätze nicht mehrte und rühmte.
Mit ihrer Hilfe dringen wir in die jahrhundertealten Rätsel der Zahlen ein, erforschen wir die verborgensten Geheimnisse des Raumes, bezwingen wir die Zufälligkeit und werden zu Herren der Unendlichkeit. Ohne sie könnten wir weder in die Tiefen des Weltraums noch in das Innere des Atoms eindringen.
Sie ist aber keineswegs eine Aristokratin mit weißen, gepflegten Händen. Sie scheut auch nicht die gewöhnliche Alltagsarbeit. Tag für Tag arbeitet sie aufopferungsvoll mit uns zusammen in den Konstruktions- und Kalkulationsbüros, in Betrieben und Ämtern.
Wie eine besorgte und liebende Mutter entwickelt die Mathematik in uns unsere geistigen Fähigkeiten, erzieht den Charakter, lehrt geduldig geregelte Arbeit, Selbstüberprüfung und Selbstkritik.
Manchmal kann man hören, die Beschäftigung mit der Mathematik wirke sich nur auf den Geist aus, während Gefühle und Herz unberührt bleiben. Die wahre Wissenschaft ist doch aber ein ewiges Suchen für die bessere Zukunft der Menschheit, ein Suchen, das eine riesige Beharrlichkeit, heroische Arbeit und Energie erfordert. Hinter den kargen Zeilen der wissenschaftlichen Gesetze, Formeln und Theoreme verbergen sich grenzenloser Mut, Liebe zu den Menschen und zur Heimat sowie Opferfreudigkeit aller jener, die sich der Wissenschaft widmen!
Ich begrüße Sie, die junge Generation des neuen Deutschlands, zum ruhmreichen Jubiläum ihrer Heimat, zum 20. Geburtstag der Deutschen Demokratischen Republik.

Alexej Markuschewitsch
Vizepräsident der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften, Professor am Lehrstuhl für Theorie der Funktionen und Funktionalanalyse der Moskauer Universität

Wir stellen vor:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert

Wenn man im 20. Jahr der Deutschen Demokratischen Republik eine Liste der Namen von jungen und erfolgreichen Wissenschaftlern und Hochschullehrern unseres Staates zusammenstellt, dann darf in dieser Liste der Name *Frieder Kuhnert* nicht fehlen. Wer ist dieser Wissenschaftler, der bereits international einen Namen hat? Wie wurde er Mathematiker?



Auf welchem Gebiet arbeitet er? Was hat er den Lesern der Zeitschrift *alpha* zu sagen?

Prof. Dr. rer. nat. habil. Kuhnert ist heute Direktor der Sektion Mathematik und Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät des Wissenschaftlichen Rates der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt. Er ist ein führender Mann sowohl auf gesellschaftlichem als auch auf wissenschaftlichem Gebiet an der TH. Als Hochschullehrer hat er großen Anteil an der Durchsetzung der dritten Hochschulreform an der Hochschule. Die Angehörigen des Lehrkörpers und die Studenten der Sektion Mathematik schätzen ihn als Genossen, Leiter und Wissenschaftler.

1938 wurde er auf dem Lande geboren. Sein Vater ist im Krieg gefallen. Er war Landwirt, später Metallarbeiter. Seine Mutter war Büroangestellte. In der Schulzeit fühlte sich Frieder K. zur Physik, zur Chemie und zur Mathematik hingezogen. Er war trotz seiner Begabung nicht Musterschüler, sondern ein „Normalentwickler". Bereits in der Schulzeit allerdings bildete sich eine wichtige Fähigkeit heraus: den Blick für das wesentliche zu schärfen und sich auf die Lösung von Hauptaufgaben zu konzentrieren.

Nach Abschluß der Erweiterten Oberschule wurde er 1956 zum Studium ins Ausland delegiert. Seine wissenschaftliche Laufbahn begann mit einem fünfjährigen Mathematikstudium an der Mathematisch-Mechanischen Fakultät der Leningrader Universität. Bei Prof. Dr. Gawurin, einem bekannten Mathematiker, schloß er 1961 das Studium mit dem Diplom ab. In seiner Diplomarbeit beschäftigte er sich mit einem Problem der Numerischen Mathematik, nämlich mit Näherungsverfahren beim Matrizeneigenwertproblem.

Nach einjähriger Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Maschinelle Rechentechnik der TU Dresden kehrte er nach Leningrad zurück und wurde Aspirant bei Prof. Gawurin. Diesen Abschnitt seiner wissenschaftlichen Entwicklung schloß er 1965 ab. Er promovierte zum Dr. rer. nat. Das Thema seiner Dissertation lautete: „Über Fragen der Metrisierung in der Menge der Einheitszerlegungen".

Dr. rer. nat. Kuhnert kehrte anschließend in die DDR zurück und nahm die Tätigkeit als wissenschaftlicher Oberassistent und später als Dozent am Institut für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt auf. Bereits ein Jahr später, im Jahre 1966, habilitierte er über das Thema „Zur Berechnung isolierter Eigenwerte abgeschlossener Operatoren durch Pseudostöriteration". Im Sommer 1967 wurde Dr. rer. nat. habil. Kuhnert Direktor des Mathematischen Instituts der TH, im September 1967 wurde er zum Professor berufen. Als Direktor der Sektion Mathematik hat Prof. Kuhnert eine wichtige und verantwortungsvolle Funktion. Bei der weiteren Durchführung der dritten Hochschulreform, insbesondere bei der Entwicklung der Forschung, der Zusammenarbeit mit Industriebetrieben, der weiteren Verbesserung der Erziehung und Ausbildung und der Entwicklung des wissenschaftlich-produktiven Studiums, hat die Sektion Mathematik große Aufgaben zu erfüllen.
Vielfältige gesellschaftliche Aufgaben und Pflichten sind zu erfüllen. Prof. Kuhnert ist Mitglied des Vorstandes der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Mitglied des Forschungsrates der DDR und Vorsitzender des Rates der Sektion Mathematik an der TH, um nur einiges anzuführen.
Neben dieser gesellschaftlichen Tätigkeit und der Tätigkeit als Leiter einer Schwerpunktsektion beschäftigt sich Prof. Kuhnert weiter mit der Forschung. Die wissenschaftlichen Arbeitsgebiete von ihm gehören zur Numerischen Mathematik. In einer Reihe von wissenschaftlichen Veröffentlichungen und Vorträgen beschäftigte er sich bereits mit wichtigen Problemen der Numerischen Mathematik, so z. B. mit numerischen Verfahren mit hohem Konvergenzgrad zur Eigenwertbestimmung, mit der Störungstheorie der Spektralzerlegung und mit funktionalanalytischen Methoden in der Numerischen Mathematik. Seine jetzigen Vorhaben ordnen sich ein in den Forschungskomplex des Lehrbereichs Numerische Mathematik: Stabilität numerischer Verfahren.

Einen breiten Raum in der Arbeit Prof. Kuhnerts nimmt seine Tätigkeit als Hochschullehrer ein. Besonderes Augenmerk legt er auf die Erziehung der Studenten zu sozialistischen Persönlichkeiten und Fachleuten, auf die Entwicklung des wissenschaftlich-produktiven Studiums, auf die Förderung des Nachwuchses und auf die Entwicklung der gesellschaftlichen Arbeit in der Sektion. Er hält einen engen Kontakt zu den Studenten und, soweit es seine Zeit erlaubt, auch bereits Kontakt zu den angehenden Studenten.

J. Gronitz

Als junger Wissenschaftler wendet sich Prof. Dr. F. Kuhnert heute an die jungen Mathematiker, die die Zeitschrift *alpha* lesen:

„Die Einwohner unserer Republik bereiten Geschenke vor, die sie auf den Gabentisch zum 20. Geburtstag unseres Arbeiter-und-Bauern-Staates legen wollen. Euer Geschenk, liebe Mädel und Jungen, sollte neben anderen auch die intensive Beschäftigung mit Mathematik und den naturwissenschaftlichen Fächern sein. So werdet Ihr einen würdigen Beitrag zur Entwicklung der Wissenschaft in unserer Republik leisten.

Wie wär's noch mit einer Aufgabe?

▲ 451 Wir betrachten die Zahlenfolge

1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

Ist u_n das n-te Glied dieser Folge, so gilt

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n = 3,4,\ldots,$$

d. h. jedes Folgenglied ergibt sich als Summe der beiden unmittelbaren Vorgänger. Diese Folge nennt man Fibonaccische Folge, ihre Glieder die Fibonaccischen Zahlen. Ihr sollt nun zeigen, daß die Formel

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \text{ gilt.}$$

Zur Anleitung und Hilfestellung möchte ich Euch das Buch von A. A. Kolosow ‚Kreuz und quer durch die Mathematik' vom Verlag Volk und Wissen (1963) empfehlen, in dem Ihr weitere Anregungen — auch zu anderen Fragen — erhaltet."

XI. Internationale Mathematikolympiade

Bukarest 1969

Aufgaben

1. Es ist zu beweisen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen a mit folgender Eigenschaft gibt:
Die Zahl $z = n^4 + a$ ist für keine natürliche Zahl n eine Primzahl. (DDR, 5 Punkte)

2. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Konstanten, x eine reelle Variable und

$$f(x) = \cos(a_1+x) + \frac{1}{2}\cos(a_2+x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3+x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x).$$

Man beweise: Aus $f(x_1) = f(x_2) = 0$ folgt $x_2 - x_1 = m\pi$, wobei m eine ganze Zahl ist. (Ungarische VR, 7 Punkte)

3. Für jedes $k = 1, 2, 3, 4, 5$ bestimme man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die eine positive reelle Zahl a erfüllen muß, damit ein Tetraeder existiert, bei dem k Kanten die Länge a und die übrigen $6 - k$ Kanten die Länge 1 haben. (VR Polen, 7 Punkte)

4. Eine Halbkreislinie γ ist über der Strecke AB als Durchmesser errichtet. C ist ein Punkt auf γ, der von A und B verschieden ist. D ist der Fußpunkt des Lotes von C auf AB. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind drei Kreise, die AB als gemeinsame Tangente haben. Von diesen Kreisen ist γ_1 der Inkreis des Dreiecks ABC, während γ_2 und γ_3 beide die Strecke CD und γ berühren. Man beweise, daß die Kreise γ_1, γ_2 und γ_3 eine zweite gemeinsame Tangente haben. (Niederlande, 6 Punkte)

5. In einer Ebene sind n Punkte gegeben, wobei $n > 4$ gilt und keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Es ist zu beweisen, daß man wenigstens $\binom{n-3}{2}$ konvexe Vierecke finden kann, deren Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.
(Mongolische Volksrepublik, 7 Punkte)

6. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ mit $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ die Ungleichung

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

erfüllt ist.

Man gebe ferner die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens an.
(UdSSR, 8 Punkte)

Aus der nachfolgenden Übersicht ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ersichtlich:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
	5 P.	7 P.	7 P.	6 P.	7 P.	8 P.
mögliche Gesamtpunktzahl*	560	784	784	672	784	896
erreichte Gesamtpunktzahl*	289	486	470	258	466	271
in Prozent	52	62	60	38	59	30
DDR-Mannschaft in Prozent	95	80	79	73	88	45

* bezogen auf 14 Mannschaften (112 Schüler)

Preisträger der XI. IMO

	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis	Gesamtpunktz.
VR Ungarn	1	4	2	1	247
DDR		4	4	2	240
UdSSR	1	3	3	3	231
SR Rumänien		4	2	1	219
England	1	1	1	3	193
VR Bulgarien			3		189
SFR Jugoslawien		2	2		181
ČSSR			3	1	170
Mongolische VR			1		120
VR Polen		1		1	119
Frankreich		1			119
Schweden				1	104
Belgien					57
Niederlande					51
	3	20	21	13	2240**

**von 4480 möglichen Punkten

Preise wurden für folgende Punktzahlen vergeben:
1. Preis 40 Punkte
2. Preis 37 bis 30 Punkte
3. Preis 29 bis 24 Punkte
39 und 38 Punkte erreichte kein Teilnehmer. Sonderpreise wurden für die elegante Lösung einer Aufgabe vergeben.

DDR-Teilnehmer der XI. IMO

Jürgen Gärtner 2. Preis
Betriebsberufsschule des VEB Kombinat Robotron Radeberg, 3. Lehrjahr

Wolfgang Burmeister 2. Preis
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 10

Andreas Felgenhauer 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg, Klasse 11

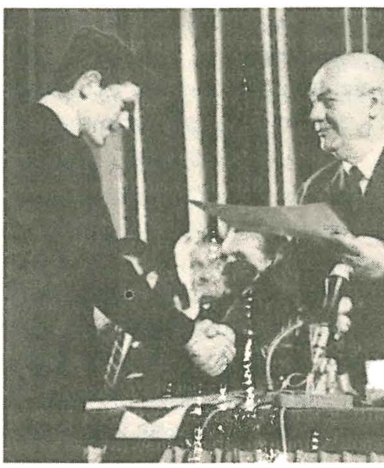
Stefan Heinrich 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin, Klasse 12

Hans-Dietrich Gronau 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Friedrich Engels", Neubrandenburg, Klasse 12

Jürgen Schefter 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Wladimir Komarow", Elsterwerda, Klasse 9

Joachim Voigt 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 10

Klaus Neumann 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Ernst Schneller", Meißen, Klasse 12



Jürgen Schefter (DDR), jüngster Teilnehmer der XI. IMO, nimmt von Akademiemitglied Gh. C. Moisil seinen 3. Preis entgegen.

Glückwunsch Margot Honeckers

Der DDR-Volksbildungsminister, Margot Honecker, hat der DDR-Mannschaft und ihrem Delegationsleiter, Dr. Helmut Bausch, ein Glückwunschtelegramm übermittelt, in dem es heißt:

„Mit großer Freude habe ich von dem ausgezeichneten Ergebnis erfahren, das unsere Schülermannschaft bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade in Bukarest erzielte. Ich beglückwünsche die Mannschaft und Sie zu diesem Erfolg. Unsere Olympia-Mannschaft hat damit zum 20. Jahrestag der DDR einen guten Beitrag geleistet. Ich wünsche allen weitere Erfolge."

● Wir stellen vor:
Vorsitzender der Jury: Akademiemitglied Gh. C. Moisil, Präsident der Mathem. Ges. der SR Rumänien
Delegationsleiter der Mannschaft der DDR: Dr. habil. H. Bausch, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der Deutschen Akademie der Wissenschaften Berlin
Pädagogischer Betreuer: Oberstudienrat Dr. Rolf Lüders, Institut für Lehrerbildung, Berlin

● Auf einer Sondersitzung des Sekretariats des Zentralrats der FDJ wurde beschlossen, alle Teilnehmer der Mannschaft der DDR auszuzeichnen:
Ehrenurkunde des Zentralrats für S. Heinrich, J. Gärtner, H.-D. Gronau, W. Burmeister
Artur-Becker-Medaille in Silber für A. Felgenhauer
Artur-Becker-Medaille in Bronze für K. Neumann, J. Schefter, J. Voigt

● Alle Teilnehmer erhielten vom Ministerium für Volksbildung und von der Mathematischen Gesellschaft der DDR Ehrenurkunden, Buchprämien und Geschenkmappen.

● Die Auszeichnung nahmen vor: Minister K. Dietzel (Min. f. Volksbildung), W. Engst (Zentralrat der FDJ), Prof. Dr. K. Schröder (Mathematische Ges. der DDR), Prof. Dr. W. Engel (Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR).

● Stefan Heinrich nahm das 4. Mal an einer IMO teil. Mit zwei 1. Preisen und zwei 2. Preisen ist er erfolgreichster Teilnehmer der DDR. Seit September studiert er in der Sowjetunion Mathematik.

● Die beiden Klausuren (Arbeitszeit je 4 Stunden) fanden am 10. und 11. Juli in einem Bukarester Lyzeum statt. Es standen 8 Räume mit je 14 Arbeitsplätzen zur Verfügung.

● Einen ersten Preis (für erreichte Höchstpunktzahl (40) erhielten: Simon Norton, Windsor, Eton College (England); Vladimir Drinfeld, Charkow, 27. Schule (UdSSR); Tibor Fiala, Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium (Ungarische VR)

● An der XI. IMO nahmen 7 Mädchen (X. IMO — 1 Mädchen) teil: Belgien 3, Bulgarien 2, UdSSR 1, Polen 1; einen 3. Preis erhielten: Christowa Stoinewa, Russe (VR Bulgarien), und Lena Nekludowa, Moskau (UdSSR).

● Als Beobachter im Auftrage des Erziehungsministeriums Österreichs nahm Dr. W. Flick, Gymnasialprof. und Lehrbeauftragter an der Universität Graz, teil.

● Seit September studieren 4 Teilnehmer der sowjetischen Mannschaft in Moskau, 1 T. in Kasan, 1 T. in Leningrad. Zwei Teilnehmer gehen noch ein Jahr zur Schule.

● Alle englischen Teilnehmer studieren seit September an der Universität Cambridge, der „Hochburg der Mathematik in England", wie sie sagten.

● Prof. Endre Hodi, seit Beginn der Olympiaden Delegationsleiter der ungarischen Mannschaft, dankte im Namen aller Teilnehmer den rumänischen Freunden für die große Gastfreundlichkeit und lud zur XII. IMO nach Ungarn ein.

● Belgien und die Niederlande nahmen zum ersten Mal an der IMO teil.

● Die meisten Mannschaften trafen 3 Tage vor Beginn der Klausuren in Bukarest ein. Neben ausgiebiger Freizeit (zur Eingewöhnung und Entspannung) wurden eine 3stündige Stadtrundfahrt und eine Halbtagesfahrt zum Schloß von „Mogoşoaia" und dem herrlichen Erholungszentrum Snagov unternommen. Jenseits des 18 km langen Snagovsees tagte die Jury, um 6 Aufgaben aus über 70 vorgelegten Problemen auszuwählen, zu präzisieren, in die jeweilige Landessprache der 14 Teilnehmerländer zu übersetzen.

● Während Delegationsleiter, päd. Betreuer und Koordinatoren die Aufgaben korrigierten, Punkte und Preise festlegten, unternahmen die 112 Teilnehmer eine 7tägige Rundreise durch die Moldau und die Ostkarpaten. Reiseroute: Bukarest — Bacău — Bicaz — Agapia — Suceava — Bistriţa — G. Mures — Braşov — Sinaia — Ploieşti — Bukarest (rund 1400 km).
Unsere rumänischen Freunde zeigten uns ihre aufblühende Industrie, ihre hochentwickelte Landwirtschaft, ihre Kunstschätze (u. a. 4 Klöster, 2 Schlösser), die herrlichen Berge, waldreiche Täler, neue, moderne Wohnviertel in allen Städten, welche wir durchfuhren, malerische Gassen und Häuser, Burgen, die von alten, oft tragischen Traditionen Kunde geben. Überall trafen wir gastfreundliche, aufgeschlossene Menschen. Allen, die diese „Exkursion ins Land" für uns vorbereiteten und durchführten, sei unser herzlichster Dank gesagt.

J. Lehmann

Rechnen mit Resten
Teil 3

Vielleicht wird es nun gut sein, wenn wir vor einem Weiterschreiten in den nächsten Abschnitt wieder einige Übungsaufgaben selbständig lösen:

▲ A 6 Man stelle eine Übersicht über die Arithmetik im Bereich der Restklassen modulo 6 auf, d. h. man vervollständige folgende Tabellen:

$m = 6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$				$\bar{5}$	
$\bar{2}$	$\bar{2}$		$\bar{4}$			
$\bar{3}$	$\bar{3}$			$\bar{0}$		
$\bar{4}$	$\bar{4}$					
$\bar{5}$	$\bar{5}$					

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$		$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$			$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$				
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$				

Außerdem sei zur Übung das Aufstellen weiterer Tabellen, vor allem für die Multiplikation, empfohlen, z. B. für $m = 10, 11, 12, 13, 19, 23, 24$.

▲ A 7 Angelika und Barbara spielen folgendes Spiel: Angelika beginnt und nennt eine natürliche Zahl s, und zwar mindestens 1 und höchstens 6. Danach addiert Barbara dazu eine von ihr genannte Zahl s mit $1 \leqq s \leqq 6$, dann wieder Angelika usw. Wer auf diese Weise zuerst zu 40 oder einer höheren Zahl gelangt, hat verloren.

Ein Spiel verläuft folgendermaßen:

A: 3	B: 8 (+5)
A: 12 (+4)	B: 16 (+4)
A: 19 (+3)	B: 21 (+2)
A: 27 (+6)	B: 29 (+2)
A: 32 (+3)	B: 33 (+1)
A: 39 (+6)	B: 40 (+1)

Barbara hat also verloren. Schon mit dem Erreichen der „Gewinnzahl" 39 hatte Angelika mit Sicherheit gewonnen, weil ja Barbara unbedingt mindestens 1 addieren muß und damit 40 erreicht oder überschreitet. Nun ist aber schon 32 eine solche Gewinnzahl, denn von ihr aus muß Angelika unbedingt die Zahl 39 erreichen, weil Barbara mindestens bis 33, höchstens aber bis 38 kommt. Auch das Erreichen der Gewinnzahl 32 kann man schon vorher gewährleisten, indem man eine niedrigere Gewinnzahl nennt usw. So gibt es eine ganze Folge von Gewinnzahlen, bis hinunter zu einer ersten. Alle diese Gewinnzahlen gehören einer Restklasse modulo m an.

a) Wie groß ist m, und welche Restklasse ist das?

b) Wie ändert sich der Sachverhalt, wenn derjenige, der zuerst 40 (oder mehr) sagen darf, gewinnt?

c) Man untersuche denselben Sachverhalt (d. h. die Gewinnzahlen) für verschiedene Abwandlungen des Spiels. Für s gelte beispielsweise $1 \leqq s \leqq 5$ ($1 \leqq s \leqq 10$ bzw. $1 \leqq s \leqq 12$), und die obere Grenze für den Verlierer bzw. Gewinner betrage $z = 50$ (75, 100).

d) Von den 18 Varianten unter c) müssen weitaus die meisten, nämlich 17, von demjenigen gewonnen werden, der beginnt (dem „Anziehenden"), sofern der den Sachverhalt durchschaut und fehlerfrei spielt. Eine einzige Variante räumt dem „Nachziehenden" denselben Vorteil ein. Welche ist das?

e) Wir nehmen einmal an, daß das Intervall, aus dem die natürliche Zahl s gewählt werden darf, die obere Grenze z und auch die Spielweise (Erreichen der oberen Grenze bedeutet Gewinn oder Verlust) durch Zufall, beispielsweise durch Losen, festgelegt werden. Sind dann die Chancen für den Anziehenden immer günstiger als für den Nachziehenden?

▲ A 8 Von dem in Aufgabe 7 beschriebenen Spiel sind auch gewisse „Einkleidungen" gebräuchlich:

a) Beide Spieler benutzen gemeinsam einen Würfel und setzen abwechselnd nach Belieben Augenzahlen, die dieser Würfel zeigt (setzen, nicht würfeln!). Diese Augenzahlen werden addiert. Wer zuerst 50 erreicht oder überschreitet, hat verloren. Welches sind hier die „Gewinnzahlen", und ist das Spiel für den Anziehenden oder den Nachziehenden vorteilhaft? Für den sicheren Weg zum Gewinn läßt sich hier eine ganz einfach zu befolgende Anweisung geben. Wie lautet sie?

b) Vor beiden Spielern liegt auf dem Tisch ein Häufchen von 15 Streichhölzern, Spielmarken o. dgl. Beide nehmen abwechselnd je mindestens ein Hölzchen, höchstens drei. Wer das letzte Hölzchen nehmen muß, hat verloren (gewonnen).

Für wen ist dieses Spiel günstig, und wie ist bei den beiden Versionen zu spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen?

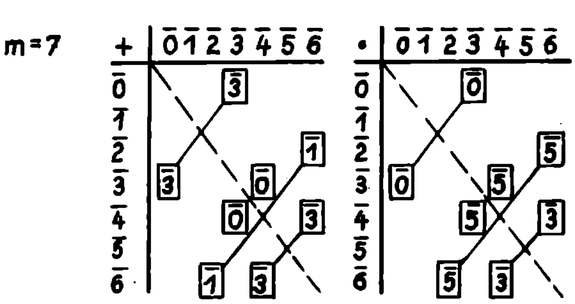
4. So etwas wie ein Modell

Im Abschnitt 3. haben wir eine sonderbare Arithmetik kennengelernt, ja eigentlich sogar mehrere. Bei einer war z. B. „vier mal zwei gleich eins" (Modul 7), bei einer anderen „vier mal zwei gleich drei" (Modul 5). Worin liegt nun eigentlich die Bedeutung solcher Betrachtungen?

Zunächst einmal darin, daß ein solcher Bereich mit seiner begrenzten Anzahl von Elementen (bei Modul 7 sind es 7, beim Modul m allgemein m Elemente) in gewisser Weise ein Modell ist für andere, „umfangreichere" Bereiche, beispielsweise für den Bereich der ganzen Zahlen und die in ihm geltende übliche Arithmetik. In diesen Restklassenbereichen gelten nämlich Gesetze der Addition und der Multiplikation, die den uns von der gewohnten Arithmetik her bekannten entsprechen.

So gelten z. B. auch für das Rechnen mit Restklassen Kommutativgesetze, d. h. eine Vertauschung von Summanden ändert nichts an der Summe, eine Vertauschung von Faktoren nichts am Produkt. So ist z. B. für 7 als Modul $\bar{3} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{3} = \bar{0}$ und $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{5}$.

In den Additions- und Multiplikationstabellen äußert sich das darin, daß diese Tabellen „symmetrisch" zu der Diagonalen sind, die von links oben nach rechts unten verläuft, d. h. die Tabelle geht in sich über, wenn man alle Felder an dieser Diagonalen „spiegelt":



Für je drei Restklassen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nach demselben Modul m ist auch $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ und $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$, d. h. es gelten also Assoziativgesetze. Schließlich ist auch die Multiplikation distributiv bezüglich der Addition, d. h. es gilt stets $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.

▲ B 7 Es gilt $\bar{2} \cdot (\bar{3} + \bar{5}) = \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{2} \cdot \bar{5}$, denn es ist (Modul 7) $\bar{2} \cdot (\bar{3} + \bar{5}) = \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$ und $\bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{2} \cdot \bar{5} = \bar{6} + \bar{3} = \bar{2}$.

Woran liegt das, daß das bei allen Bereichen von Restklassen so ist? Nun, die Operationen wurden ja an den Repräsentanten mit Hilfe der üblichen Additionen und Multiplikationen im Bereich der ganzen Zahlen erklärt. Dort gelten aber diese Gesetze, und ihre Gültigkeit überträgt sich nun auf die neu definierten Operationen mit Restklassen. Schauen wir uns das am Beispiel des Kommutativgesetzes der Addition etwas genauer an:

▲ B 8 $\bar{a} + \bar{b}$ bedeutet doch, die Restklasse zu bestimmen, in der die Summe $a + b$ liegt, wenn a und b Repräsentanten von $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$ sind. Entsprechend bedeutet $\bar{b} + \bar{a}$ das Aufsuchen derjenigen Restklasse, in der $b + a$ liegt. Für die ganzen Zahlen a und b gilt aber $a + b = b + a$, deshalb führen beide Additionen zur gleichen Restklasse.

Außer der Gültigkeit dieser Gesetze ist bemerkenswert, daß wir im Bereich der Restklassen modulo m stets subtrahieren können — sogar dann, wenn wir die zahlentheoretische Kongruenz nur auf natürliche Zahlen beschränken, obwohl doch die Subtraktion mit den natürlichen Zahlen selbst nicht uneingeschränkt ausführbar ist. ${}^7R_2 - {}^7R_5 = {}^7R_4$ gilt eben auch, wenn die Restklassen ${}^7R_r$ gar keine negativen Zahlen enthalten. Statt der Repräsentanten 2 für ${}^7R_2$ und 5 für ${}^7R_5$, die ja auf die im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ausführbare Subtraktionsaufgaben 2 — 5 führen, nimmt man — falls man nicht von der Additionstabelle ausgehen will — einfach andere Repräsentanten, etwa 9 und 5.

Bereiche, in denen zwei Operationen (Addition und Multiplikation) erklärt sind, für die Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und ein Distributivgesetz gelten, nennt man übrigens in der Algebra *Ring*, wenn noch die zusätzliche Voraussetzung erfüllt ist, daß die Addition unbeschränkt und eindeutig umkehrbar ist, man also stets subtrahieren kann. Unsere bekannten ganzen Zahlen mit der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation bilden also einen Ring, und auch die Restklassenbereiche sind Ringe, allerdings — im Gegensatz zum Bereich der ganzen Zahlen — nur mit endlich vielen Elementen. Der Ring der Restklassen modulo 2 ist von allen der „kleinste", er enthält ja nur 2 Elemente. Es liegt auf der Hand, daß damit diese sogenannten Restklassenringe ein ausgezeichnetes Hilfsmittel sind, um Einsichten in Strukturen zu gewinnen, wie sie an verschiedenen Stellen in der Mathematik angetroffen werden.

Jeder Ring enthält übrigens ein sogenanntes „Nullelement" oder „neutrales Element der Addition" — so genannt, weil es bei Addition zu einem beliebigen Element des Ringes als anderem Summand eben diesen anderen Summand als Summe liefert. Bei Multiplikation dieses Nullelements mit einem beliebigen Element des Ringes ergibt sich dann stets das Nullelement selbst als Produkt. Im Restklassenring modulo m spielt $\bar{0}$ die Rolle des Nullelements, denn für jede beliebige Restklasse $\bar{a}$ ist ja $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$ und $\bar{0} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Jetzt wird uns auch verständlich, warum wir im Abschnitt 1. vergeblich versuchten, durch $G = \bar{0}$ zu dividieren. So wie wir auch im Ring der ganzen Zahlen nicht durch 0 dividieren können, so ist in den Restklassenringen keine Division durch $\bar{0}$ möglich. Wie steht es aber sonst mit der Ausführbarkeit der Division?

Damit wollen wir uns im nächsten Heft beschäftigen.

G. Lorenz

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 5

1.5. Die tetradische Direktverschlüsselung

Das im vorigen Abschnitt behandelte Dualsystem — besser gesagt: das *reine* Dualsystem — ist dadurch gekennzeichnet, daß sowohl bei der Darstellung der Zahlen als auch beim Rechnen mit ihnen konsequent mit Zweierpotenzen gearbeitet, also keine andere Basis als die Zahl 2 verwendet wird. Es gibt aber noch andere Kodierungen von Zahlen bzw. andere Rechensysteme, die ebenfalls nur zwei Grundzeichen erfordern. Häufig wird die schon im vorigen Abschnitt erwähnte *tetradische Direktverschlüsselung* angewendet. Es ist eine Kombination von Dual- und Dezimalsystem. Die Zahlen werden zwar dezimal aufgegliedert dargestellt, die einzelnen Dezimalziffern aber dual kodiert.
Beispiel:
73905 = OLLL OOLL LOOL OOOO OLOL.
Jede Ziffer der im Dezimalsystem dargestellten Zahl erscheint somit als vierstelliges Maschinenwort, als eine *Tetrade,* und jede Tetrade besteht aus vier binären Stellen, auch *Bits* genannt. In jedem Bit — man denke an die Vorsilbe bi = zwei — können zwei verschiedene Zustände gespeichert werden, die wir wie bisher mit O und L symbolisieren.
Da die tetradische Direktverschlüsselung beliebiger Dezimalzahlen und auch beliebiger (endlicher) Dezimalbrüche kaum Schwierigkeiten machen wird, wenden wir uns gleich dem *Rechnen* in diesem System zu. Wir beginnen mit der *Addition.* Es liegt nahe, tetradisch verschlüsselte Dezimalzahlen wie gewohnt ziffernweise zu addieren. Das ist unproblematisch, wenn die dabei auftretenden Summen kleiner als 9 bleiben. Dann können die Tetraden wie reine Dualzahlen behandelt werden, und die Ziffer des Ergebnisses ist wieder eine solche Tetrade.
Beispiel:

45 + 31 = 73	Augend	OLOO	OLOL
	Addend	OOLL	OOOL
	Summe	OLLL	OLLO

Treten aber Summen auf, die größer als 9 sind, so gibt es zwei Möglichkeiten:

Fall a) Die Summe liegt zwischen 9 und 16, liefert also eine Tetrade, die es — weil sie keine der Ziffern 0 bis 9 darstellt — in diesem System gar nicht gibt, eine sogenannte *Pseudotetrade.* Als solche können auftreten: LOLO, LOLL, LLOO, LLOL, LLLO und LLLL. Was hat der Automat in solchem Fall zu tun? Da es sechs Pseudotetraden gibt, liefert die Addition einer (dualen) 6 stets eine Zahl, die einerseits größer als 16, andrerseits kleiner als 16 + 9 ist, also eine Dualzahl, die in der Fünferstelle ein L hat, deren übrige Stellen aber eine gewöhnliche Tetrade liefern. Die zu addierende duale 6 heißt *Korrekturtetrade.*
Beispiel:

9 + 5 = 14	Augend	LOOL	
	Addend	OLOL	
	Unkorrigierte Summe	LLLO	(Pseudotetrade)
	Korrekturtetrade	OLLO	
	Korrigierte Summe	LOLOO	

Zählt man im Ergebnis das L der fünften Dualstelle zur nächsten Tetrade, in diesem Fall der Zehnerstelle, so erhält man das richtige Ergebnis
14 = OOOL OLOO.
Es muß auch stimmen, denn eigentlich hat das L in der fünften Dualstelle den Wert 16, in der nächsten Tetrade aber nur den Wert 10. Um die Differenz auszugleichen, wurde die Korrekturtetrade OLLO = 6 addiert.

Fall b) Die Summe der beiden Tetraden ist größer als 15, so daß sich schon bei der Addition der Tetraden ein Überlauf in die fünfte Dualstelle ergibt. Auch in diesem Fall ist die Korrekturtetrade OLLO zu addieren und das überlaufende L in die nächsthöhere Tetrade zu übernehmen.
Beispiel:

9 + 8 = 17	Augend	LOOL
	Addend	LOOO
	Unkorrigierte Summe mit Überlauf	L OOOL
	Korrekturtetrade	OLLO
	Korrigierte Summe	OOOL OLLL

Für beide Fälle, die der Automat selbsttätig erkennen und in der dargestellten Weise abarbeiten muß, gilt

also die Regel: *Ist bei der Addition zweier Tetraden die Summe größer als* 9, *so ist* OLLO *zu addieren und in der nächsthöheren Tetrade* L *hinzuzufügen.*
Zur Vertiefung dieser Erkenntnisse dient das folgende *Beispiel*, bei dem jeder Schritt ausführlich erläutert wird und alle Überläufe gesondert aufgeführt werden. Wir wollen dabei zwischen Überläufen 1. Art und Überläufen 2. Art unterscheiden. Die einen sind solche, die bei der gewöhnlichen dualen Addition innerhalb der gleichen Dezimalstelle entstehen, während die anderen in Verbindung mit den Korrekturtetraden in die *nächsthöhere* Zehnerstelle führen.

697 + 285 = 982

Augend	OLLO	LOOL	OLLL
Addend	OOLO	LOOO	OLOL
Addition der Dualziffern	OLOO	OOOL	OOLO
Überläufe 1. Art	L		L L
Addition der Überläufe	OOOO	OOOL	LOOO
Überläufe 1. Art	L		L
Addition der Überläufe	LOOO	OOOL	LLOO
Korrekturtetraden		OLLO	OLLO
Addition der Korrekturtetraden	LOOO	OLLL	LOLO
Überläufe 1. Art			L
Addition des Überlaufs	LOOO	OLLL	OOLO
Überläufe 2. Art	L	L	
Addition der Überläufe	LOOL	OLLO	OOLO
Überlauf 1. Art		L	
Addition des Überlaufs	LOOL	OLOO	OOLO
Überlauf 1. Art		L	
Addition des Überlaufs	LOOL	OOOO	OOLO
Überlauf 1. Art		L	
Summe	LOOL	LOOO	OOLO

Dieses einfache Beispiel läßt den hohen technischen Aufwand erkennen, den eine solche Additionsschaltung, etwa für zehnstellige Dezimalzahlen, erfordert. Für einen menschlichen Rechner, der die Überläufe im Kopf addiert und nur die Korrekturtetraden gesondert hinschreibt, sieht es einfacher aus:

Augend	OLLO	LOOL	OLLL
Addend	OOLO	LOOO	OLOL
Unkorrigierte Summe	LOOO	OOOL	LLOO
Korrekturtetraden		OLLO	OLLO
Korrigierte Summe	LOOL	LOOO	OOLO

▲ *Aufgabe:* Rechne tetradisch 3762 + 8901!
Hinweis: Zur Übung empfielt es sich, die Rechnung, wie beim vorigen Beispiel, sowohl in der ausführlichen als auch in der zusammengefaßten Form hinzuschreiben.
Die *Subtraktion* zweier tetradisch verschlüsselter Dezimalzahlen soll, da es im Prinzip nur der umgekehrte Vorgang ist, kürzer behandelt werden. Man verfahre bei der Subtraktion der einzelnen Tetraden wie im reinen Dualsystem und merke sich: *Ist bei der Subtraktion zweier Tetraden die Differenz kleiner als* O, *so ist die Korrekturtetrade* OLLO *zu subtrahieren und in der nächsthöheren Tetrade* L *abzuziehen.*
Der Beweis dieser Regel wird dem Leser nicht schwerfallen.
Beispiel:

5763 — 948 = 4815

Minuend	OLOL	OLLL	OLLO	OOLL
Subtrahend	OOOO	LOOL	OLOO	LOOO
Unkorrig. Differenz	OLOL	LLLO	OOLO	LOLL
Korrekturtetraden		OLLO		OLLO
Korrigierte Differenz	OLOO	LOOO	OOOL	OLOL

▲ *Aufgabe:* 8761 — 5379!
Auf die *Multiplikation* und *Division* in diesem System wollen wir nicht gesondert eingehen. In 1.4. wurde gezeigt, daß duale Multiplikationen und Divisionen vollständig auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden können. Somit treten keine neuen Gesichtspunkte auf. Dem interessierten Leser ist es überlassen, sich selbst ein Schema für die Multiplikation und Division tetradisch verschlüsselter Dezimalzahlen zu überlegen.

J. Frormann

Arbeitsgemeinschaft SER 2d

Ende 1967 erhielt die Heinrich-Hertz-Oberschule (EOS), Berlin, einen Kleincomputer. Ein Mathematikfachlehrer hatte sich in den Monaten zuvor in einem Kurzlehrgang mit seiner Bedienung vertraut gemacht. Im Januar 1968 begannen 20 Schüler der Klasse 9_3 mit dem theoretischen Unterricht, versuchten Bedienung und Programmierung zu begreifen. Anfangs dauerte die Aufstellung eines Programms ziemlich lange. Der schwierigste Abschnitt dabei war die Aufstellung des Programmablaufs. Nach den ersten Schritten begannen wir damit, die Arbeit am SER 2d mit dem Fach „Praktische Mathematik“ zu koordinieren. Im vergangenen Schuljahr haben wir vorwiegend Programme zu rein mathematischen Problemen aufgestellt. Jetzt beherrschen wir den Rechner und werden im Laufe des 10. Schuljahres versuchen, auch praktische Probleme zu analysieren (z. B. Leistungsentwicklung von Schülern, einfache Aufgaben aus Betrieben u. a.). In Klasse 11 lernen wir auf größere Computer wie Robotron 300 um. Das wird für uns „relativ“ leicht werden, da die Grundstruktur der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen bei den verschiedenen Rechnern die gleiche ist.

Aus einem Bericht der Schüler W. Solewski und M. Voß, Spezialklasse für Mathematik, Klassenstufe 9.

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 20. 12. 1969

Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 3. bis 12. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für 7. Klasse geeignet).
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/70, 2/70, 3/70 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung. Schüler der 11./12. Klassen lösen die Aufgaben, welche mit W 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf dieser Seite angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Der 4. Jahreswettbewerb 1969/70 läuft von Heft 5/69 bis Heft 3/70.
9. Zwischen dem 20. und 30. September 1970 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/69 bis 3/70 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury wertet diese Karten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/69 bis 3/70) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Wer seine Karten zurückerhalten möchte, der lege einen vorschriftsmäßig frankierten Umschlag mit Adresse bei.

Aussicht auf Anerkennungsurkunde, *alpha*-Abzeichen, Preise und namentliche Veröffentlichung haben also Teilnehmer, die im Laufe der Monate September 69 bis Juni 70 regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitgearbeitet haben.

30	150	20	
	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5		W 5 ■ 346
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

5 ▲ 421 In einem Korb befinden sich 20 rote, 20 grüne und 10 blaue Kugeln. Wieviel Kugeln muß jemand mit verbundenen Augen dem Korb wenigstens entnehmen, um mit Sicherheit 10 Kugeln der gleichen Farbe zu erhalten?

Schülerin Monika Kluger, Wimmelsburg

▲ 422 Die Quersumme einer zweistelligen Zahl beträgt 11. Vertauscht man die beiden Ziffern dieser Zahl, so erhält man eine Zahl, die um 20 kleiner als das Zweifache der ursprünglichen Zahl ist. Um welche Zahl handelt es sich? Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle!

OL K. Krüger, V. L. d. V., Bad Doberan

▲ 423 Ich denke mir eine Zahl, verdoppele diese, addiere danach 13, subtrahiere schließlich 4 und erhalte als Ergebnis 19. Wie heißt die von mir gedachte Zahl?

Cordula Saueressig, Mellensee (Kl. 5)

W 5 ■ 424 *Birgit* ist gegenwärtig zehn Jahre jünger als ihr Bruder *Wolfram*. In einem Jahr wird *Wolfram* dreimal so alt wie *Birgit* sein. Wie alt ist *Birgit* gegenwärtig? In wieviel Jahren wird *Wolfram* zweimal so alt wie *Birgit* sein? (Das Alter der beiden Geschwister ist in vollen Jahren zu rechnen.) Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle!

Schüler Wolfram Meyer, 7022 Leipzig

W 5 ■ 425 Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen kleiner als 20 ist, kann ihr Produkt nicht dreistellig sein. Dieser Satz ist mit Hilfe einer Tabelle zu beweisen!

OL Th. Scholl, Berlin

6▲ 426 *Axel* sagt zu *Bernd*: „Denke dir eine natürliche Zahl, die größer als 1, aber kleiner als 10 ist. Multipliziere die gedachte Zahl mit 27 und das erhaltene Produkt mit 37. Nenne mir die letzte Ziffer deines Ergebnisses“. *Bernd* nannte 7 als letzte Ziffer. Daraus konnte *Axel* sofort angeben, welche Zahl sich *Bernd* gedacht hatte. Gib eine Begründung dafür!

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 427 Es ist die kleinste sechsstellige Zahl zu ermitteln, die durch 9 teilbar ist und deren Ziffern alle verschieden voneinander sind.

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 428 Eine Molkerei verarbeitet täglich die gleiche Menge Milch. Bisher wurden dabei Milchkannen mit einem Fassungsvermögen von je 20 Litern verwendet. Nachdem der Betrieb auf die Arbeit mit 25-Liter-Kannen umgestellt wurde, benötigte man 120 Milchkannen weniger. Wieviel Liter Milch werden täglich von der Molkerei verarbeitet?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

W 6 ■ 429 Die Maßzahlen der Längen der Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC seien natürliche Zahlen, und es gelte $a \leq b \leq c$. Es ist die Anzahl der verschiedenen Dreiecke zu ermitteln für den Fall, daß $c = 5$ cm beträgt.

OL Th. Scholl, Berlin

W 6 ■ 430 Zeichne einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 2$ cm. Lege einen Punkt P fest, der von M_1 genau 4 cm entfernt ist. Konstruiere nun einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 3$ cm, der durch P geht und den Kreis k_1 von außen berührt. Wie viele Lösungen gibt es?

Schüler Helmut Maiwald, Erfurt (Kl. 7)

7 ▲ 431 Gegeben seien ein Parallelogramm $ABCD$ und ein innerer Punkt P dieses Parallelogramms, der nicht auf einer Diagonalen liegt. Der Punkt P ist mit den Eckpunkten A, B, C und D des Parallelogramms zu verbinden. Ferner sind die Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB zu konstruieren; ihr Schnittpunkt sei S. Es ist zu beweisen, daß das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm ist.

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 432 Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade g, die mit diesem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat. Lege auf der Geraden g einen Punkt P fest! Konstruiere schließlich den Kreis k', der die Gerade g in P und den gegebenen Kreis k von außen berührt. Beschreibe die Konstruktion!

Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig

▲ 433 Es sind alle geordneten Paare (x, y) von positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, die die Gleichung $13x + 5y = 82$ erfüllen.

Ing. H. Decker, Köln

W 7 ■ 434 Die beiden Brüder *Axel* und *Bernd* haben fleißig gespart. In ihren Sparbüchsen befinden sich volle Markbeträge. Addiert man zur Summe ihrer Ersparnisse die Differenz ihrer Ersparnisse, so erhält man 50 M. Addiert man zur Differenz ihrer Ersparnisse noch die Ersparnisse von *Axel* und subtrahiert man danach die Ersparnisse von *Bernd*, so erhält man 10 M. Wer der beiden Brüder hat mehr gespart, und wieviel Mark hat jeder gespart?

OL Th. Scholl, Berlin

W 7 ■ 435 Es seien a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen und es gelte $a < b$. Entscheide, welcher der beiden Brüche $\frac{2a + b}{a}$ und $\frac{a + 2b}{b}$ der größere ist. Begründe deine Entscheidung!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

8 ▲ 436 Von drei Personen A, B und C, die verschieden alt sind, wissen wir:

1) Gegenwärtig sind A und B zusammen dreimal so alt wie C.

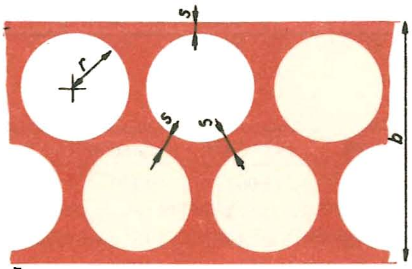
2) Wenn A um die Hälfte seines jetzigen Lebensalters älter geworden ist, dann werden A und C zusammen dreimal so alt sein, wie B gegenwärtig alt ist.

3) Nach weiteren zwölf Jahren werden B und C zusammen dreimal so alt sein, wie A gegenwärtig alt ist.

Wie alt war jede der drei Personen in dem Jahr, in welchem alle drei zusammen so alt waren, wie der älteste von ihnen gegenwärtig alt ist? (Das Alter wird jeweils in vollen Jahren angegeben.)

Ing. H. Decker, Köln

■ 437 Aus einem Blechstreifen der Breite b werden in der aus der Zeichnung ersichtlichen Weise kongruente Kreisscheiben mit dem Radius r gestanzt. Die „Stegbreite" ist s. Es ist eine Formel anzugeben, nach der bei bekannten r und s die Breite b des Blechstreifens berechnet werden kann.

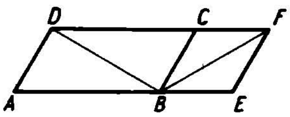


Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

W 8 ■ 438 Es sind alle positiven ganzen Zahlen anzugeben, bei denen die Differenz ihrer Quadrate gleich 455 ist.

Dipl.-Math. Bernd und Monika Noak, Berlin (ehem. Teiln. an IMO)

W 8 ■ 439 Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Seite $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{AD}$ und dessen spitzer Winkel 60° beträgt. Ferner sei $BEFC$ ein Rhombus, wobei der Punkt E auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus liegt. Welche Strecke ist länger, die Strecke $\overline{BD}$ oder die Strecke $\overline{BF}$? Erst schätzen, dann messen, dann begründen!



OStR Dr. R. Lüders, Berlin

9 ▲ 440 Ein konvexes Viereck wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt. Wir wollen zwei dieser Dreiecke „sich gegenüberliegend" nennen, wenn sie einen gemeinsamen Eckpunkt, aber keine gemeinsame Seite haben. Es sind die folgenden Behauptungen zu beweisen:

a) Jedes konvexe Viereck ist genau dann ein Trapez, wenn zwei sich gegenüberliegende Dreiecke flächengleich sind.

b) Jedes konvexe Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn alle vier Dreiecke flächengleich sind.

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 441 Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt von 294 cm². Die größere Kathete ist um soviel Zentimeter länger als die kleinere Kathete wie sie kürzer ist als die Hypotenuse. Es sind die Längen der Dreieckseiten zu ermitteln.

Ing. H. Decker, Köln

W 9 ■ 442 In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich auf je eine Bank 6 Personen, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur drei Personen sitzen. Setzen sich aber auf jede Bank fünf Personen, so müssen vier Personen stehen. Wieviel Personen und wieviel Bänke sind in dem Raum?

OStR G. Schulze, Herzberg/Elster

W 9 ■ 443 Es sind diejenigen vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Produkt gleich 57120 ist.

OL Th. Scholl, Berlin

10/12 ▲ 444 Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $abcd = 1$. Man beweise, daß dann stets

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqq 10$$ gilt.

Dipl.-Math. Bernd und Monika Noak, Berlin

▲ 445 Auf der photographischen Aufnahme eines Fußballfeldes ist die Mittellinie nicht erkennbar.

Wie kann man sich das Bild der Mittellinie des Spielfeldes mit Bleistift und Lineal verschaffen?

Dr. E. Schröder, Dresden

W 10/12 ■ 446 Es sind alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen zu ermitteln:

a) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{6-x}}}}\,; \quad (1)$$

b) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+1)\sqrt{2x+1}}}}\,; \quad (2)$$

c) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}}}}\,; \quad (3)$$

d) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \frac{2}{\sqrt[16]{2}}\sqrt{\left(x+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{x+\tfrac{3}{2}}}}}\,. \quad (4)$$

Mathematikfachlehrer S. Gottesmann, Tschernowzy, UdSSR

W 10/12 ■ 447 In eine Kugel sei ein Kegel einbeschrieben, dessen Volumen gleich einem Viertel des Volumens der Kugel ist. Die Länge der Höhe des Kegels sei h.

Das Volumen der Kugel ist zu berechnen. Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

OStR G. Schulze, Herzberg/Elster

20 Jahre Entwicklung des Volksbildungswesens in der DDR

Allgemeinbildende Schulen

	1948/49	1955/56	1959/60	1967
Schulen	10 839	11 007	9 750	8 328
Lehrer	60 413	75 572	101 693	127 664
Klassen	72 112	70 244	79 482	94 208
Schüler je hauptamtl. Lehrkraft		24,9	23,8	19,7
Schüler	2 660 926	1 883 400	2 158 891	2 511 482

Oberschulen bzw. Erweiterte Oberschulen

	1948/49	1955	1962	1965	1967
Schulen	402	420	317	303	305
Klassen	3 106	4 265	2 995	3 266	3 787
Schüler	73 262	107 400	76 195	85 279	100 738

	1945	1949	1960
Einklassige Landschulen	4 114	668	keine

	1953	1960	1967
Absolventen von Universitäten und Hochschulen	1 213	3 937	6 707

	1953	1960	1967
Lehrerstudenten an Universitäten und Hochschulen	6 676	22 280	29 177

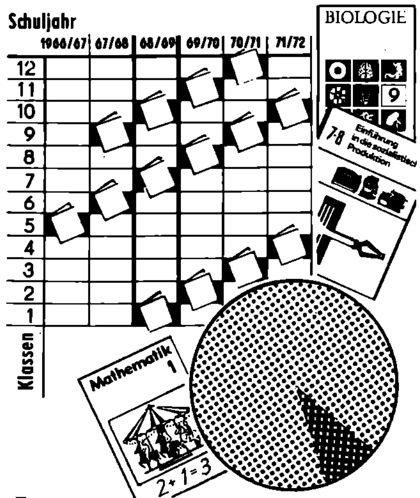
Ausgaben des Staatshaushaltes (in 1000 M)

	1951	1955	1960	1966
für allgemeinb. Schulen	616 439	851 621	1 691 120	2 271 755
für Vorschulerziehung	69 588	143 669	239 005	321 893
für Jugendhilfe/Heimerz.	146 440	150 738	127 309	145 662
für Volksbildung, Wissenschaft u. Kultur insges.	1 655 318	3 014 163	—	—
für Volksbildung, Berufsausbildung u. Sport	—	—	3 182 145	3 940 903
Schulspeisung	46 020 (1952)	—	145 608	240 879

Das Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem gibt die Grundorientierung für die Entwicklung des Bildungswesens auf lange Sicht. Es entstand auf der Grundlage der Prognose der gesellschaftlichen Entwicklung der DDR in breiter sozialistischer Gemeinschaftsarbeit. Unsere Bildungseinrichtungen leisten heute einen wesentlichen Beitrag, um hochqualifizierte Fachleute und bewußte sozialistische Staatsbürger heranzubilden und sie zu befähigen, aktiv für den Sieg des Sozialismus und den Frieden zu kämpfen.

Aus der Rede Walter Ulbrichts auf dem VII. Parteitag der SED

Systematische Einführung neuer Lehrpläne, Lehrbücher und Unterrichtshilfen

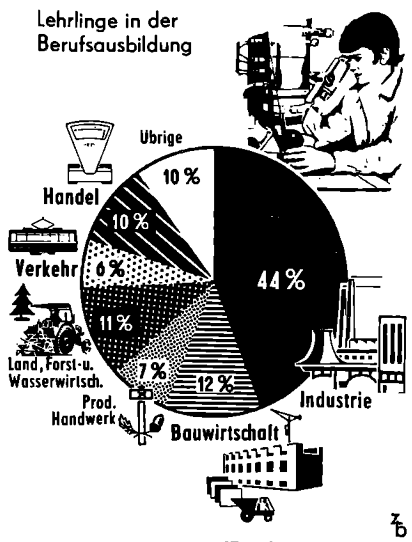


Von 373 Schulbuchtiteln erscheinen zum Schulanfang 1968/69 33 Titel neu

25 Millionen Schulbücher lieferte der Verlag Volk und Wissen für das Schuljahr 1968/69 aus.

Die Facharbeiter von morgen

Lehrlinge in der Berufsausbildung



In 718 Betriebsberufsschulen und 427 kommunalen Berufsschulen werden von 37880 Lehrern, Lehrmeistern und Lehrausbildern 448700 Lehrlinge ausgebildet.

Pionierorganisation „Ernst Thälmann"

	1949	1962	1966	1968
Mitglieder	805 264	1 729 485	1 743 547	1,8 Mill.

Pioniereinrichtungen und Arbeitsgemeinschaften

	1953	1954	1955	1962	1967
Häuser d. J. Pioniere	79	—	90	106	116
Stationen d. Jg. Naturforscher, Techniker u. Touristen	250	—	279	250	250
Arbeitsgemeinschaften	—	8 658	9 340	31 681	83 418
mit Teilnehmern	—	—	145 849	557 794	1 025 736

Schulbuchproduktion

	1949	1955	1962	1965	1968
Bücher u. Broschüren	14 606 000	16 014 000	22 603 000	29 710 000	30 746 000
Zeitschriften	11 734 000	11 235 000	14 223 000	15 218 000	16 000 000

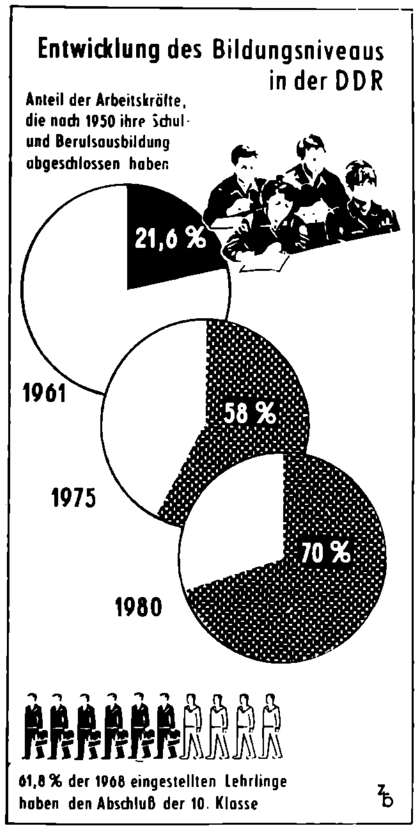
Horterziehung (Tageserziehung) an allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen

	1954	1968
Horte	2 511	6 555
Plätze	81 489	504 301
Erzieher	5 779	22 165
betreute Kinder	101 844	502 623

Vorschulerziehung

	1948/49	1955	1962	1965	1968
Kindergärten	3 779	8 148	9 423	9 889	10 606
Kindergärtnerinnen bzw. Erzieherinnen	8 633	19 308	27 675	32 540	35 603
betreute Kinder	199 252	340 934	447 349	511 045	580 111

Jede 4. Schule der DDR wird von einer Frau geleitet. — Rund 165 000 Frauen sind als Lehrer und Erzieher im Bereich der Volksbildung tätig. Drei Viertel von ihnen sind noch nicht 35 Jahre alt.



Übe sinnvoll – überall!

Heute soll es um die Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

für den Flächeninhalt des Dreiecks gehen. Vielleicht denkst du:

„Was kann es daran schon zu üben geben! Einsetzen und Ausmultiplizieren — das machen wir schon in der Schule oft genug; und es wird auch dadurch nicht viel interessanter, daß in den Benennungen für Grundlinie und zugehörige Höhe gewechselt wird."

Doch ist das nicht alles, was uns die Formel zu sagen hat. Sie ist noch zu mehr nutze, und auch das will geübt sein.

1. Da wäre zunächst die Aufgabe:
Bestimme den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR aus Fig. 1!
Worin besteht der Unterschied zur vorigen Aufgabenart? Jetzt muß man sich erst überlegen, welche Stücke das Berechnen ermöglichen, um dann deren Abmessungen zu bestimmen. Ermittle A!

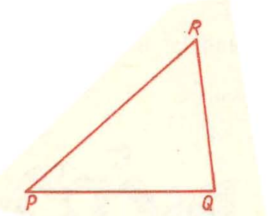


Fig. 1

Diese Aufgabe setzt zwar zwei Schritte vor den üblichen Schulaufgaben ein, die nur das Einsetzen von gegebenen Werten für g und h verlangen — sie setzt aber immer noch zwei Schritte später ein, als es praktische Probleme der Flächenberechnung wirklich tun. Dabei nämlich stehen vorerst noch zwei andere Fragen vor dir:

Was für eine Figur ist das eigentlich, deren Fläche ich bestimmen soll?

Kenne ich für sie eine Formel, die eine leichte Berechnung ermöglicht? Oder muß ich eine schrittweise Berechnung durchführen, indem ich die Figur zunächst zerlege?

Deshalb solltest du, wenn du im Berechnen von Flächen Sicherheit erreichen willst, auch solche Flächen einbeziehen, die dir in der Schule, im Betrieb, auf der Straße, in der Wohnung (Fig. 2) begegnen. In manchen Fällen wird es dir nicht gelingen; dann begnüge dich mit einem Schätzen. In vielen Fällen aber reicht das, was du in Klasse 6 gelernt hast.

Übrigens: Schätzen solltest du auch in den Fällen, in denen du berechnen kannst, und zwar vorher! Du wirst staunen, wie sehr man sich bei Flächen verschätzen kann, einfach aus mangelhafter Übung.

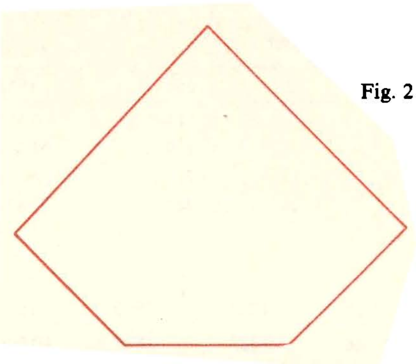


Fig. 2

Deckplatte eines Eckschrankes im Maßstab 1 : 20.

Gib den Flächeninhalt in m^2 an! Schätze zuvor die Figur der Abbildung in cm^2!

2. Zwei Werte für g und h bestimmen zwar den Flächeninhalt, sie bestimmen aber nicht das Dreieck selbst. Mit anderen Worten: Es gibt sehr viele Dreiecke, die in g und zugehörigem h und damit auch in A übereinstimmen, die aber nicht einander kongruent sind. Zeichne, gleich in Fig. 1 hinein, zwei von den vielen Dreiecken, die mit dem Dreieck PQR in der Seite PQ und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sich aber sonst von ihm unterscheiden. Nun aber überlege weiter: Gibt es unter all diesen Dreiecken eins (oder mehrere), in dem

a) der Winkel bei P 70° beträgt;
b) der Winkel bei P 70° und der Winkel bei Q 80° betragen;
c) der Winkel bei P 70° und der Winkel bei R 120° betragen;
d) eine andere Seite 5 cm lang ist;
f) die beiden anderen Seiten 5 cm und 7 cm lang sind;
g) der Winkel bei P 50° und seine Gegenseite 6 cm betragen?

Wenn deine Antwort „ja" lautet, so konstruiere ein solches Dreieck. Ein „Nein" aber durchdenke gut!

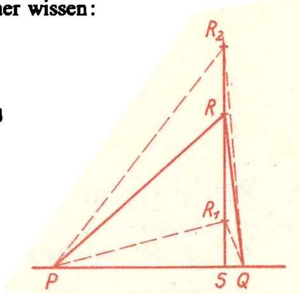
3. Unsere Formel $A_D = \frac{1}{2} gh$ enthält drei Variable. Bisher waren uns g und h gegeben, daraus bestimmten wir A. Geht es auch umgekehrt? Mit anderen Worten: Wie lang müßten Seite und zugehörige Höhe eines Dreiecks sein, wenn sein Flächeninhalt 24 cm^2 betragen soll? Sicher hast du schnell herausgefunden, daß es dafür sehr viele Möglichkeiten gibt. Zeichne einige dieser Dreiecke! Wie sieht es aber nun aus, wenn wir dem gegebenen A noch einen Wert beigeben, entweder für g oder für h? Im Beispiel: Wie lang kann oder muß die Höhe eines Dreiecks sein, dessen Flächeninhalt 24 cm^2 beträgt und dessen eine Seite $\overline{PQ}$ ist (Fig. 1)? Es ist leicht einzusehen, daß es für die Länge der Höhe nur noch eine Möglichkeit gibt. Zeichne ein solches Dreieck! Und ganz entsprechend wäre es bei gegebenem A und h.

Wie lang sind übrigens die Höhen auf $\overline{PR}$ und $\overline{QR}$ in Fig. 1? Du kannst sie bestimmen, ohne sie zu messen!

4. Unsere Formel $A_D = \frac{1}{2} gh$ drückt den Zusammenhang von drei Größen aus: Flächeninhalt, Seite und zugehörige Höhe eines Dreiecks. Wir sahen, daß zwei von ihnen die dritte genau festlegen, daß aber eine von ihnen für die beiden anderen das nicht tut, vielmehr noch einen recht großen Spielraum läßt. Das führt uns zu der Frage: In welcher Weise ändern sich eigentlich diese beiden anderen, da gibt es doch sicher einen Zusammenhang?

Wenn wir in dem Dreieck PQR die Seite $\overline{PQ}$ fest lassen, den dritten Eckpunkt aber auf RS wandern lassen (Fig. 3), so ist z. B. den Dreiecken PQR_1 und PQR_2 sofort zu entnehmen: Je größer die Höhe, desto größer der Flächeninhalt. Man möchte es aber gern genauer wissen:

Fig. 3



Was geschieht mit dem Flächeninhalt, wenn die Höhe verdoppelt, verfünffacht, verhundertfacht, halbiert, gedrittelt wird? Wer schon die Proportionen (jetzt in Kl. 6) kennt, müßte das richtige Wort einsetzen können:

Bei gleicher Seite sind zugehörige Höhe und Flächeninhalt einander ....

Die gleichen Überlegungen stelle nun für den Fall an, daß die Höhe $\overline{RS}$ fest bleibt, die beiden anderen Eckpunkte auf der Geraden PQ wandern.

Was kannst du über A_D sagen, wenn
a) P nach links wandert?
b) Q nach links wandert?

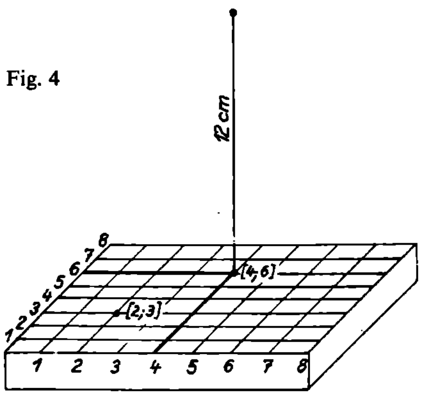
c) P und Q nach rechts wandern?
d) P nach links und Q nach rechts wandert?
Vorhin sollte ein Wort eingesetzt werden. Es heißt „direkt proportional". Der gleiche Zusammenhang gilt auch für Seite und Flächeninhalt (bei gleicher Höhe). Wie aber heißt der Proportionalitätsfaktor?
Bleibt nun noch der dritte Fall zu untersuchen: Der Flächeninhalt wird festgehalten — in welcher Weise erfolgt die Änderung von Seite und zugehöriger Höhe? Ganz gewiß bedingt eine Vergrößerung der einen eine Verkleinerung der anderen; denn wie sollte sonst ihr halbes Produkt den gleichen Wert behalten? Die genauere Aussage aber sollst du selbst finden und auch, wie es hier mit der Proportionalität steht!
Und nun noch einige Aufgaben hierzu:
(1) M sei Mittelpunkt von $\overline{PQ} = r$, N sei Mittelpunkt der Höhe h_r auf $\overline{PQ}$. Gib die Flächeninhalte der Dreiecke

PMR; PQN; MQN; PNR;
RPQ; MQR; NQR; PMN;

als Teile vom Flächeninhalt des Dreiecks PQR an!
(2) Zeichne ein Dreieck $P'Q'R'$ (sein Flächeninhalt sei A'), für das gilt:
a) $A' = 2A$ (A ist Flächeninhalt des Dreiecks PQR);
b) $A' = 2A$ und $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$;
c) $A' = 3A$ und $h_{r'} = h_r$;
d) $A' = \frac{1}{2}A$ und $h_{r'} = h_r$ und $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$;
e) $A' = A$ $h_r \neq h_{r'}$ und $\overline{P'Q'} \neq \overline{PQ}$!
(3) Um wieviel ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks PQR, wenn
a) $\overline{PQ}$ um 1 cm wächst;
b) $\overline{PQ}$ um 1 cm abnimmt;
c) h_r um 1 cm wächst;
d) $\overline{PQ}$ und h_r um je 1 cm wachsen;
e) $\overline{PQ}$ um 1 cm wächst, h_r um 1 cm abnimmt?

5. Man kann den Zusammenhang, den die Formel $A_D = \frac{1}{2} gh$ zum Ausdruck bringt, auch veranschaulichen. Eine in der Ausführung ganz einfache Möglichkeit ist folgende (vgl. Fig. 4): In einen flachen Deckel eines Pappkartons wird angefeuchteter Sand gefüllt. Von einer Ecke aus werden auf den beiden Rändern des Kartons gleichlange Abstände markiert und numeriert, etwa von 1 bis 8. Dadurch läßt sich die Sand-Oberfläche mit einem quadratischen Gitternetz überziehen, wie ein Schachbrett; und zu jedem Gitterpunkt gehört genau ein Zahlenpaar. (s. Fig. 4) Wählen wir die erste dieser beiden Zahlen als Maßzahl für g, die zweite als Maßzahl für h, so gehört zu jedem Gitterpunkt auch eine Zahl $\frac{1}{2} gh = A$. Daher stecken wir in jeden Gitterpunkt ein Stäbchen (Wurstspeiler) entsprechender Länge: In den Gitterpunkt (4; 6) also ein Stäbchen, das dann über dem Sand 12 cm lang ist. Zur besseren Sichtbarkeit können wir oben auf die Stäbchen noch Knetekugeln aufstecken. Wenn alle Stäbchen stecken, hat man den Eindruck einer zusammenhängenden Fläche. Wer in der Schule schon die Funktionen kennengelernt hat, der hat sicher längst gemerkt: Hier geht es um die „grafische Darstellung" einer Funktion, nur hat diese Funktion 2 unabhängige Variable — die sonstigen in der Schule haben immer nur eine.

Fig. 4



6. Und zum Schluß nun noch einige Probleme, über die du ganz allein nachdenken sollst:
a) Wenn wir uns einen bestimmten Flächeninhalt, sagen wir 36 cm², vorgeben, so gibt es zu ihm sehr viele Dreiecke. Gibt es unter all diesen eins mit
(1) kleinster Grundseite und größter zugehöriger Höhe?
(2) größter Grundseite und kleinster zugehöriger Höhe?
(3) kleinster Summe $g + h$?
(4) größter Summe $g + h$?
(5) kleinstem Umfang?
(6) größtem Umfang?
b) Wenn wir uns eine bestimmte Summe für g und h, sagen wir $g + h = 20$ cm, vorgeben, so gibt es zu ihr auch sehr, sehr viele Dreiecke. Gibt es unter all diesen eins mit
(1) größtem Flächeninhalt?
(2) kleinstem Flächeninhalt?
(3) größtem Umfang?
(4) kleinstem Umfang?
c) Wenn wir uns einen bestimmten Umfang, sagen wir 30 cm, vorgeben, so gibt es zu ihm sehr, sehr viele Dreiecke. Gibt es unter all diesen eins mit
(1) größtem Flächeninhalt?
(2) kleinstem Flächeninhalt?
(3) größter Summe $g + h$?
(4) kleinster Summe $g + h$?

Es ist erstaunlich, was alles zutage kommt, wenn man eine Formel von allen Seiten betrachtet, eben richtig übt. Versuche nun, dir die gleichen Gedanken auch über andere Flächenformeln (dann auch für Volumenformeln) zu machen; vielleicht nimmst du zuerst das Rechteck und dann das Trapez.

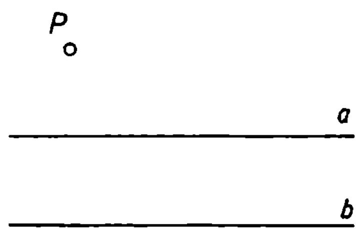
G. Pietzsch

Schneiden und Verbinden

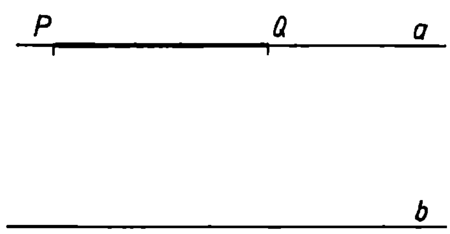
3. Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden a und b und ein nicht auf diesen Geraden liegender Punkt P. Man konstruiere allein mit Bleistift und Lineal eine zu a parallele Gerade durch P.
4. Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden a und b. Auf a sei die Strecke $\overline{PQ} = p$ vorgegeben. Die Strecke p ist allein unter Verwendung von Bleistift und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen.

Dr. E. Schröder, Dresden

zu 3.



zu 4.

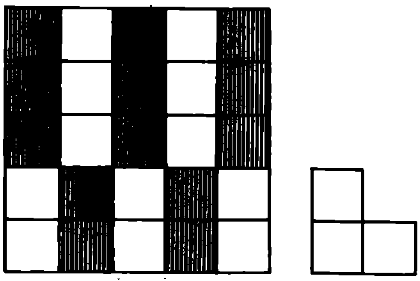


Fernolympiade Mathematik

UdSSR 1968

1. (7—9) В шахматном турнире участвовало в три раза больше мастеров, чем гроссмейстеров, и они набрали в 1,2 раза больше очков, чем гроссмейстеры. Все участники турнира — мастера или гроссмейстеры. Сколько тех и других?

2. (7—10) (а) На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5 × 5 клеток. Какое наибольшее число его клеток можно покрасить черной краской так, чтобы ни один уголок из трех клеток не был закрашен целиком?



(б) тот же вопрос для квадратов 10 × 10 клеток, $n \times n$ клеток.

3. (8—10) Два парохода идут по морю по фиксированным прямым с постоянными скоростями. В 8 часов расстояние между ними было 7,5 мили, в 8 часов 55 мин. — 3,5 мили, в 9 часов 05 мин. — 2,9 мили. В какой момент пароходы будут находиться на кратчайшем расстоянии и каково это расстояние?

4. (8—10) Вписанная окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках E и F. Биссектриса угла A треугольника пересекает прямую EF в точке K. Доказать, что угол СКА — прямой.

5. (7—10) а) доказать, что после запятой в записи числа $\frac{n}{73}$ в виде бесконечной десятичной дроби не встретится двух одинаковых цифр подряд (n — любое целое число, $0 < n < 73$).
б) укажите все простые числа P, для которых все дроби $\frac{n}{P}$, где $0 < n < P$, обладают тем же свойством.

6. (9—10) Одна треугольная пирамида целиком помещается внутри другой. Может ли сумма длин ребер у первой пирамиды быть больше, чем у второй?

7. (8—10) Две хорды BE и CF окружности пересекаются в точке A. K — середина отрезка BC. Доказать, что прямая KA пересекает отрезок EF в такой точке M, что $EM : MF = AC^2 : AB^2$.

8. (7—10) Решить уравнение.

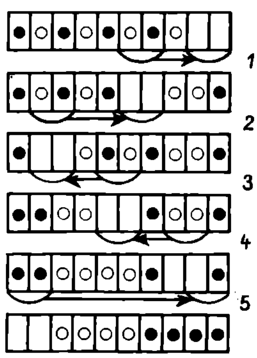
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^3}$$

9. (7—10) Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ строится по такому закону

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$$

для всех $n \geqq 1$.
а) верно ли, что эта последовательность ограничена (то есть существует такое число C, что все члены последовательности не превосходят C)?
б) доказать, что $a_{9000} < 30$.

10. (7—10) Четыре черные и четыре белые фишки лежат в ряд так, что цвета чередуются; рядом оставлено место еще для двух фишек. За один ход разрешается любые две соседние фишки не меняя их порядка, переставить на свободные два места. Требуется расположить фишки так, чтобы четыре белые стояли подряд и четыре черные — тоже, причем между фишками не должно быть промежутка. За какое наименьшее число ходов это можно сделать? (На рисунке показано, как можно сделать это за пять ходов). Решите ту же задачу для n пар фишек, где $n = 5, 6, 7 \ldots$



Ein Satz von Diophant von Alexandrien

▲ 448 Bereits auf *Diophant von Alexandrien* (um 250 u. Z.) geht der folgende Satz zurück: „Wenn man zu dem Flächeninhalt des Quadrates der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks viermal den Flächeninhalt dieses Dreiecks addiert, so ergibt sich wiederum der Flächeninhalt eines Quadrates. Wenn man von dem Flächeninhalt dieses Hypotenusenquadrates viermal den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks subtrahiert, so ergibt sich ebenfalls der Flächeninhalt eines Quadrates."
a) Man beweise diesen Satz und gebe eine anschauliche Interpretation seines Inhaltes.
b) Wie lang sind die Seiten der beiden so entstehenden Quadrate?
c) Was bedeutet die Aussage des obigen Satzes für den Fall, daß die Maßzahlen a, b und c der Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks natürliche Zahlen sind? Man gebe einige Beispiele an.

Mitgeteilt von Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Manteuffel, Magdeburg

$$\begin{array}{r} \text{KLEIN} \\ +\text{VIETA} \\ \hline \text{NEWTON} \end{array}$$

▲ 449 Unser Leser *Harald Englisch*, Schüler der Klasse 10 der EOS Leibniz, Leipzig (siehe auch Heft 3/69, S. 51), hat aus den Namen von drei bedeutenden Mathematikern eine schöne Aufgabe gebildet, die gelöst werden soll.
Dabei ist jeder Buchstabe durch eine Grundziffer zu ersetzen, so daß eine (im dekadischen System) richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Die Zuordnung zwischen den Buchstaben und Ziffern soll eineindeutig sein; d. h., gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern. Die Ziffer 0 darf nicht am Anfang einer Zahl stehen.
a) Es ist eine Lösung anzugeben.
b) Wieviel verschiedene Lösungen hat diese Aufgabe?

Eine Aufgabe von

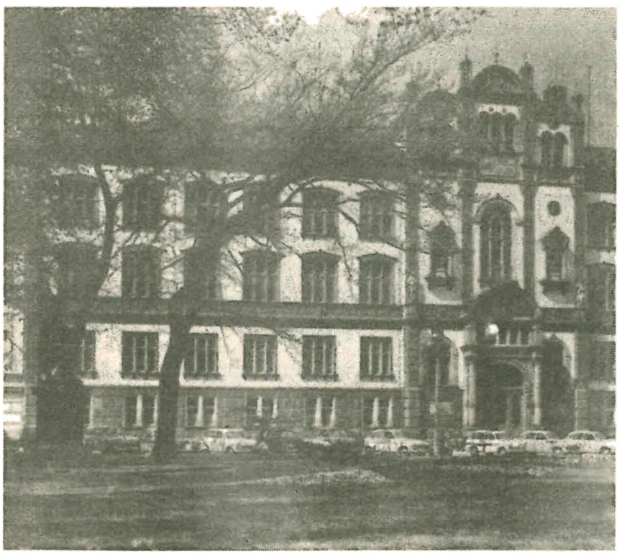
Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Engel

Universität Rostock
Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

▲ 450 In der Ebene seien drei voneinander verschiedene Punkte gegeben. Die größte der Entfernungen zwischen irgend zweien dieser Punkte sei mit d bezeichnet. Es ist der Radius r (in Abhängigkeit von d) des kleinsten Kreises zu bestimmen, der bei beliebiger Lage der drei Punkte alle drei Punkte im Innern oder auf dem Rande enthält.

Die Universität Rostock, die in diesem Jahr das 550. Jahr ihrer Gründung feiert, ist die älteste Universität im Ostseeraum. Im 15. Jahrhundert entwickelte sie sich zur führenden Universität Nordosteuropas, zur „Leuchte des Nordens“, und behauptete diese Stellung auch, als sich ihr weitere Universitäten zugesellten. Neben Studenten aus den Hansestädten und dem norddeutschen Raum finden wir Skandinavier, Niederländer und Balten in den Matrikeln. Im 16. Jahrhundert nahmen auch die Naturwissenschaften einen großen Aufschwung, und als bedeutende Gelehrte wirkten an der Universität Rostock u. a. Ulrich von Hutten, Tycho de Brahe, David Chyträus und Joachim Jungius.

Im 17. und 18. Jahrhundert kam es infolge des 30jährigen Krieges, der Auflösung der Hanse und der Refeudalisierung Mecklenburgs zum Niedergang der Universität. So wurde die Universität Rostock eine kleine, wissenschaftlich bedeutungslose Landesuniversität. Streitigkeiten zwischen der Stadt und dem Landesherren führten sogar zu einer zeitweisen Spaltung der Universität, die von 1760 bis 1789 in Bützow residierte. Die Studentenzahlen gingen dabei auf ein Minimum zurück, und die Gelehrten folgten gern einem Ruf an andere Universitäten. 1848 gab es nur 80 Studenten.



In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erlebte die Stadt Rostock einen steilen Aufstieg, der an der Universität nicht vorüberging. In dieser Zeit, 1879, erfolgte die Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars. Die wissenschaftliche Entwicklung und der Ausbau der materiellen Basis der Universität wurden nach der Machtergreifung des Faschismus unterbrochen. Die Zahl der Studenten sank von über 2000 der Jahre 1931/32 auf weniger als 900 im Jahre 1938/39.

1946 begann eine neue Entwicklung. Die Schul- und erste Hochschulreform öffnete die Universität auch den Kindern der Arbeiter und Bauern. Die Studentenzahlen stiegen an und werden in den nächsten Jahren weiter steigen. Zur Zeit studieren etwa 5000 Studenten. Zu den traditionellen Einrichtungen kamen neue hinzu, z. B. 1951 die „Technische Fakultät für Schiffbau“.

Im Verlaufe der 3. Hochschulreform verändert die Universität ihr Profil und ihre Struktur. Für die Universität Rostock ergibt sich eine enge Verflechtung mit den Bereichen der Seewirtschaft, der Land- und Nahrungsgüterwirtschaft, der Volksbildung und dem staatlichen Gesundheitswesen.

Die Fakultäten mit ihren Instituten wurden aufgelöst und 17 Sektionen (darunter die Sektion Mathematik) sowie der Hochschulbereich Medizin gebildet. In der Sektion Mathematik erfolgt die Ausbildung von Diplomlehrern für Mathematik/Physik sowie von Diplommathematikern der Fachstudienrichtungen Analysis und Numerische Mathematik. Für die Diplommathematiker sind als Nebenfächer Schiffstechnik, Technische Elektronik und Sozialistische Betriebswirtschaft vorgesehen.

Berufsbild
Hochbauzeichner – ein Beruf für Mädchen

Nur der Mensch kann eine Arbeit gedanklich vorbereiten, bevor er sie durchführt. Die Tätigkeit eines Hochbauzeichners gehört zu dieser gedanklichen Vorbereitung. Bauwerke können nur dann Gestalt annehmen, wenn dafür Projektierungsunterlagen vorhanden sind. Während Architekten und Ingenieure die Planung, Entwurfsbearbeitung sowie die statische Berechnung durchführen, fertigt der Hochbauzeichner die genauen zeichnerischen Unterlagen an. Er arbeitet nach Angaben und Skizzen der Architekten selbständig anschauliche technisch eindeutige Zeichnungen aus, z. B. Grundrisse, Schnitte und konstruktive Einzelheiten, nach denen auf der Baustelle oder im Betonwerk gearbeitet wird.

Erforderliche Voraussetzungen

Besonders für Mädchen ist der Beruf des Hochbauzeichners interessant und vielseitig. Die Voraussetzung zum Erlernen des Berufes ist der Abschluß der 10. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule. Die Tätigkeit eines Hochbauzeichners erfordert ein hohes Maß an Wissen und Können, stellt große Anforderungen an manuelle Fertigkeiten, fordert gutes Allgemeinwissen und besonders gute Leistungen in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern. Der Hochbauzeichner muß in der Lage sein, die Gedanken des Ingenieurs, die dieser schriftlich, mündlich oder in einer Skizze zum Ausdruck bringt, zeichnerisch darzustellen. Dazu sind räumliches Vorstellungsvermögen und logisches Denken eine wichtige Voraussetzung. Die Ausübung des Berufes erfordert Ausdauer, Konzentrationsfähigkeit, Selbständigkeit und Verantwortungsbewußtsein. Die Dauer der Ausbildungszeit beträgt für 10-Klassen-Schüler zwei Jahre. Bei vorzeitigem Erreichen des Ausbildungszieles besteht die Möglichkeit der Lehrzeitverkürzung.

Wie erfolgt die Ausbildung?

Im ersten Lehrjahr erfolgt die Grundausbildung, die zentral von einem VE Wohnungs- und Gesellschaftsbaukombinat durchgeführt wird. Alle Lehrlinge werden in Kollektiven zu je 15 Jugendlichen zusammengefaßt und von einem Lehrmeister betreut. In der Grundausbildung werden in Abstimmung mit der theoretischen Ausbildung in der Berufsschule die zeichnerischen Fertigkeiten entwickelt sowie die grundlegenden Konstruktionen des Bauens gelehrt.
Das zweite Lehrjahr umfaßt die spezielle Ausbildung. Die Lehrlinge werden in den einzelnen Projektierungsabteilungen der Betriebe eingesetzt und arbeiten an produktiven Aufgaben mit. Anleitung und Unterweisung erfolgen durch einen Architekten oder Ingenieur.
Nach Beendigung der Lehre mit dem Facharbeiterabschluß als Hochbauzeichner hat jeder die Möglichkeit, sich weiter zu qualifizieren.
Über ein dreijähriges Direktstudium an einer Ingenieurschule für Bauwesen kann die Qualifikation zum Ingenieur, Ökonomen oder Ingenieur-Pädagogen erfolgen, im Abendstudium zum Teilkonstrukteur.

Aus: Berufsberatungszeitung, Bez. Leipzig, 2/69

Mathematik und Bauwesen

Der *alpha*-Club der 29. Oberschule Leipzig (5 Arbeitsgemeinschaften Mathematik) stellte sich zu Ehren des 20. Jahrestages der DDR die Aufgabe, Fotomaterial zum oben genannten Thema zusammenzustellen. Es entstand eine Lichtbildreihe mit 200 Color-Dias, Vignetten, techn. Zeichnungen. Sie wird in der außerunterrichtlichen und unterrichtlichen Arbeit der Klassenstufen 5 bis 10 eingesetzt. Die Dias zeigen die enge Verbindung von Mathematik und dem sich rasch entwickelnden Bauwesen im Bezirk Leipzig.
Baupläne, Berufsbilder, Graphiken, eine große Zahl von Aufgaben geben Erläuterungen zu den gezeigten Bildern. Die besten Teilnehmer am Foto-Wettbewerb des *alpha*-Clubs wurden ausgezeichnet. Rund 50 Wissenschaftler, Werktätige aus dem Bauwesen, der Industrie, der Landwirtschaft, Statistiker und Eltern halfen bei dem Bemühen, die Leistungen auf diesem Schwerpunkt des Bezirks Leipzig zu zeigen und zu erläutern.

Lösungen

▲ 418 Die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks betragen
$(10 - 2) \cdot 10\ \text{km} = 80\ \text{km}$ bzw.
$(7 - 3) \cdot 10\ \text{km} = 40\ \text{km}$.
Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz gilt:
$$l = \sqrt{80^2 + 40^2} = \sqrt{8000},$$
d. h., die Luftlinie zwischen den Orten A und B hat die Länge von rund 89 km.

▲ 419 a) $V = V_1 + V_2 + V_3$
$$= \pi r^2 h + \frac{\pi h}{3}(r_1{}^2 + r_1 r_2 + r_2{}^2) + \pi r^2 h$$
$$= \pi \cdot 6^2 \cdot 8 + \frac{\pi \cdot 15}{3}(6^2 + 6\ 20 + 20^2)$$
$$+ \pi \cdot 20^\circ \cdot 34$$
$$= \pi(288 + 2780 + 13600)$$
b) $m = V \cdot \varrho$
≈ 52360, d. s. $\approx 52{,}36$ Liter Inhalt pro Kanne.
$= 392{,}7$; d. s. 392,7 kg.

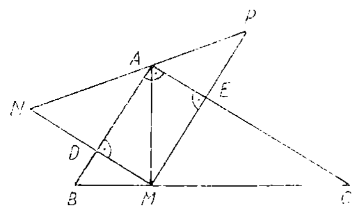
▲ 420 1. Wir geben zunächst eine *rein geometrische Lösung* wieder, wie sie von *Galois* gefordert wurde. (Abb. siehe S. 117).
Es sei $ABCD$ das gegebene Sehnenviereck mit den Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$. Wir bezeichnen die Längen der Diagonalen mit $x = \overline{AC}$ und $y = \overline{BD}$. Wir nehmen zunächst an, daß der Winkel $\sphericalangle ABC = \beta$ ein *spitzer Winkel* ist.
Dann liegt der Fußpunkt E des von C auf AB gefällten Lotes im Innern der Strecke AB. Wir setzen zur Abkürzung $\overline{CE} = h$ und $\overline{EB} = u$, also $\overline{AE} = a - u$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt wegen
$$h^2 = b^2 - u^2$$
$$x^2 = (a - u)^2 + h^2 = a^2 - 2au + u^2 + b^2 - u^2 = a^2 + b^2 - 2au. \qquad (1)$$
Der Fußpunkt F des von A auf CD gefällten Lotes liegt, da nach einem Satz über das Sehnenviereck der Winkel $\sphericalangle CDA = 180° - \beta$ stumpf ist, außerhalb der Strecke $\overline{CD}$.
Setzt man $\overline{AF} = k$ und $\overline{DF} = v$, so gilt wegen
$$k^2 = d^2 - v^2$$
$$x^2 = (c + v)^2 + k^2 = c^2 + 2cv + v^2 + d^2 - v^2 = c^2 + d^2 + 2cv. \qquad (2)$$
Wegen $\sphericalangle FDA = \beta$ sind die rechtwinkligen Dreiecke EBC und FDA ähnlich; daher gilt
$$u : b = v : d, \quad \text{d.h. } v = \frac{du}{b}.$$
Man erhält daher aus (2)
$$x^2 = c^2 + d^2 + \frac{2cdu}{b}. \qquad (3)$$
Aus (3) und (1) folgt also
$$c^2 + d^2 + \frac{2cdu}{b} = a^2 + b^2 - 2au,$$
$$2u\left(a + \frac{cd}{b}\right) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$
$$2u = \frac{b(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd}.$$
Daraus folgt wegen (1)
$$x^2 = a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd},$$
$$x^2 = \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd}. \qquad (4)$$
Ist nun der Winkel $\sphericalangle ABC = \beta$ ein *stumpfer* oder ein *rechter Winkel*, so erhält man auf Grund einer analogen Rechnung wieder die Gleichung (4), im Falle $\beta = 90°$ wird speziell $x^2 = a^2 + b^2$. Vertauscht man b mit d, so erhält man für die Länge y der anderen Diagonale $\overline{BD}$:
$$y^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc}. \qquad (5)$$
Aus den Gleichungen (4) und (5) können nun die Längen x bzw. y der Diagonalen berechnet werden, wenn die Längen der Seiten a, b, c, d gegeben sind.

2. Wesentlich einfacher wird die Lösung, wenn man den *Kosinussatz der ebenen Trigonometrie* anwendet:
Da $\sphericalangle CDA = 180° - \beta$ und $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$ ist, folgt aus
$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \qquad (6)$$
und
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \beta) = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta \qquad (7)$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta,$$
also $2\cos\beta(ab + cd) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$,
$$2\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}$$
und hieraus wegen (6)
$$x^2 = a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd};$$
diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (4) überein.
Analog erhält man die Gleichung (5).
Diese einfachere Lösungsmethode konnte *Galois* aber nicht anwenden, da in dem Mathematik-Kurs nur die Sätze der Elementargeometrie benutzt werden durften.

Lösungen zur Schulolympiade der SR Rumänien 1968

Klassenstufe 6

1a) Bei gleicher Arbeitsintensität würden 1596 m Stoff in 24 Tagen von $\frac{15 \cdot 16 \cdot 1596}{24 \cdot 2280}$ Weberinnen, also von 7 Weberinnen gewebt werden.
b) Eine Weberin würde an einem Tage $\frac{2280}{15 \cdot 16}$ m, also $9\frac{1}{2}$ m Stoff weben.
c) Es seien für die Anfertigung einer Schürze a Meter, eines Hemdes b Meter, eines Bettlakens c Meter Stoff erforderlich; dann gilt
$$a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{7}{8} : 1 = 4 : 7 : 8.$$
Aus $4 + 7 + 8 = 19$ und $9\frac{1}{2} : 19 = \frac{1}{2}$ folgt, daß für die Anfertigung einer Schürze $4 \cdot \frac{1}{2} m = 2$ m, eines Hemdes $7 \cdot \frac{1}{2}$ m $= 3\frac{1}{2}$ m und eines Bettlakens $8 \cdot \frac{1}{2}$ m $= 4$ m Stoff benötigt werden.
2a) Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt $\overline{AM} = \overline{AN}$ und $\overline{AM} = \overline{AP}$; die Dreiecke NMA und MPA sind somit gleichschenklig.
b) Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt $\sphericalangle NAD = \sphericalangle DAM$ und $\sphericalangle MAE = \sphericalangle EAP$; ferner gilt $\sphericalangle DAM + \sphericalangle MAE = 90°$.
Daraus folgt $\sphericalangle NAP = 180°$, d. h. die Punkte N, A und P liegen auf einer Geraden.

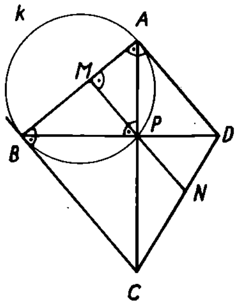


c) Aus a) folgt $\overline{AN} = \overline{AP}$; auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt ferner $\overline{ME} = \overline{EP}$ und $\overline{ND} = \overline{DM}$. Das Viereck $DMEA$ ist ein Rechteck. Daraus folgt $\overline{DA} = \overline{ME} = \overline{EP}$ und $\overline{ND} = \overline{DM} = \overline{AE}$.
Die Dreiecke NDA und AEP sind somit kongruent, da sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Klassenstufe 7

1a)
$$T = (x + y) \cdot \frac{x - y}{xy} + \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2y^2} \cdot xy$$
$$= \frac{(x + y)(x - y) + (x + y)^2}{xy}$$
$$= \frac{2x(x + y)}{xy} = \frac{2(x + y)}{y}$$
b) $\frac{2 \cdot (-2 + 2)}{2} = \frac{2 \cdot 0}{2} = 0$
c) Der Term ist für $x = 0$ oder für $y = 0$ nicht definiert.
d)
$$\frac{2 \cdot (x + 6)}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$x + 6 = -\frac{3}{2}$$
$$x = -7\frac{1}{2}$$
2a) Aus $\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 4$ und $\overline{AD} = 15$ m folgt $\overline{AB} = 20$ m.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{BD} = \sqrt{15^2 + 20^2}$ m $= 25$ m. Da $\sphericalangle APB$ Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{AB}$ ist, gilt $\sphericalangle APB = 90°$, d. h. die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Trapezes $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander. Nach dem Satz des Euklid gilt somit $\overline{PD} = \frac{15^2}{25}$ m $= 9$ m und $\overline{BP} = 16$ m.

Nach dem Strahlensatz gilt $\overline{BC} = \frac{15 \cdot 16}{9}$ m $= \frac{80}{3}$ m. Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner $\overline{AC} = \sqrt{20^2 + \left(\frac{80}{3}\right)^2}$ m $= 33\frac{1}{3}$ m.



Die Längen der Diagonalen des Trapezes $ABCD$ betragen demnach $33\frac{1}{3}$ m und 25 m.

b) Nach dem Strahlensatz gilt $\overline{MP} : \overline{AD} = \overline{BP} : \overline{BD}$, $\overline{BP} : \overline{BD} = \overline{CP} : \overline{CA}$ und $\overline{CP} : \overline{CA} = \overline{PN} : \overline{AD}$. Daraus folgt $\overline{MP} = \overline{PN}$.

Klassenstufe 8

1. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a, die zweite mit b und erhalten

$$a^2x + aby = a^3 + ab^2$$
$$b^2x - aby = -a^2b - b^3.$$

Durch Addition erhalten wir

$$(a^2 + b^2) \cdot x = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3,$$

bzw. durch Umformung

$$(a^2 + b^2) \cdot x = (a^2 + b^2)(a - b)$$
$$x = a - b, \text{ wenn } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Durch Substitution erhalten wir dann aus der ersten Gleichung des gegebenen Systems

$$a(a - b) + by = a^2 + b^2$$
$$by = b(a + b)$$
$$y = a + b, \text{ wenn } b \neq 0.$$

Man erhält also die Lösung $x = a - b$ und $y = a + b$, falls $b \neq 0$ ist.

Ist $a \neq 0$ und $b = 0$, so erhält man $x = a$ und $y = a$.

Ist $a = 0$ und $b = 0$, so ist das Gleichungssystem für alle reellen Zahlen x und y erfüllt.

2a) Es gilt $u^2 = (x^2 + 2x - 15)^2 = x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225$; ferner gilt

$$v \cdot w = (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 10x + 25),$$
$$v \cdot w = x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225.$$

Daraus folgt, daß $u^2 = v \cdot w$ gilt.

b) $\frac{u + v}{u - v} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{8x - 24}$

$$= \frac{(x + 1)(x - 3)}{4(x - 3)} = \frac{x + 1}{4} \text{ für } x \neq 3.$$

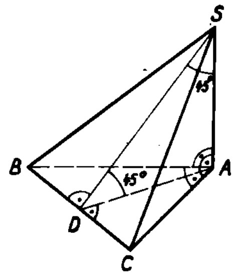
c) Aus $\frac{x + 1}{4} = \frac{x + 5}{4}$ folgt

$x + 1 = x + 5$, d.h. es gibt keine reelle Zahl x, die die Gleichung erfüllt.

3a) Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß die Höhe $\overline{SA}$ der Pyramide $SABC$ gleich der Höhe $\overline{AD}$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{BC} = \sqrt{16^2 + 12^2}$ cm $= 20$ cm. Nach dem Satz des Euklid gilt $\overline{DO} = \frac{12^2}{20}$ cm $= 7{,}2$ cm.

Ferner gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AD} = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2}$ cm $= 9{,}6$ cm. Somit erhalten wir

$$V = \frac{16 \cdot 12 \cdot 9{,}6}{3 \cdot 2} \text{ cm}^3 = 307{,}2 \text{ cm}^3.$$



b) Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{SB} = \sqrt{16^2 + 9{,}6^2} \text{ cm} = 18{,}7 \text{ cm},$$
$$\overline{SC} = \sqrt{12^2 + 9{,}6^2} \text{ cm} = 15{,}4 \text{ cm}.$$

Die Summe der Längen der Kanten der Pyramide beträgt demnach $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} = 16$ cm $+ 20$ cm $+ 12$ cm $+ 9{,}6$ cm $+ 18{,}7$ cm $+ 15{,}4$ cm $= 91{,}7$ cm.

c) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{DS} = \sqrt{9{,}6^2 + 9{,}6^2}$ cm $= 13{,}5$ cm; daher gilt für die Oberfläche der Pyramide

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 16 + 12 \cdot 9{,}6 + 16 \cdot 9{,}6 + 20 \cdot 13{,}5) \text{ cm}^2 = 365{,}4 \text{ cm}^2.$$

d) Es gilt $r = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = 10$ cm; wir erhalten für das Volumen des der Pyramide umschriebenen Zylinders demnach

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 9{,}6 \text{ cm}^3 \approx 3014 \text{ cm}^3$$

Klassenstufe 9

1a) Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $4(m - 2)$ und erhalten durch Addition

$$3(m-1)x + 4(m-2)y = 24$$
$$8(m-2)x - 4(m-2)y = \frac{(5m-13)(m-2) \cdot 4}{(m-1)(m-2)}$$
$$(11m-19) \cdot x = 24 + \frac{4(5m-13)}{m-1}$$

für $m \neq 1$ und $m \neq 2$,

$$(11m-19) \cdot x = \frac{4(11m-19)}{m-1},$$
$$x = \frac{4}{m-1} \text{ für } m \neq \frac{19}{11}.$$

Durch Substitution erhalten wir mit Hilfe der zweiten gegebenen Gleichungen

$$\frac{8}{m-1} - y = \frac{5m-13}{(m-1)(m-2)},$$
$$y = \frac{3(m-1)}{(m-1)(m-2)},$$
$$y = \frac{3}{m-2}.$$

b) Das Gleichungssystem besitzt nur Lösungen, wenn $m \neq 1$ und $m \neq 2$ ist, und zwar im Falle $m \neq \frac{19}{11}$ genau eine Lösung $x = \frac{4}{m-1}$, $y = \frac{3}{m-2}$ und im Falle $m = \frac{19}{11}$ unendlich viele Lösungen (x beliebig, $y = 2x - 22$), wie durch Rechnung nachgewiesen werden kann.

c) Für $m = 3$ erhalten wir das Zahlenpaar [2, 3],
für $m = 5$ das Zahlenpaar [1, 1].

Diese beiden Zahlenpaare sind die einzigen, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

2) Aus b) folgt $4 \in A$, $6 \in A$, $9 \in A$,
$4 \in B$, $6 \in B$, $9 \in B$.

Aus c) folgt $1 \in A$, $6 \in A$, $8 \in A$, $9 \in A$.

Aus d) folgt $5 \in B$, $6 \in B$, $7 \in B$, $9 \in B$.

Aus c) und a) folgt $2 \notin A$, $7 \notin A$,
also $2 \in B$, $7 \in B$.

Aus d) und a) folgt $1 \notin B$, $3 \notin B$,
also $1 \in A$, $3 \in A$.

Folglich gilt

$A = \{1,3,4,6,8,9\}$; $B = \{2,4,5,6,7,9\}$.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für die angegebenen Mengen A und B die Bedingungen a) bis d) erfüllt sind.

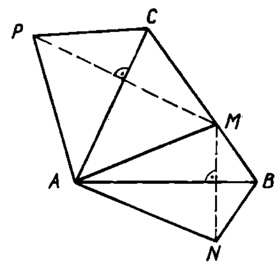
3a) Der nachstehenden Zeichnung entnehmen wir:

$$u = \overline{AN} + \overline{NB} + \overline{BC} + \overline{CP} + \overline{PA};$$

aus Symmetriegründen gilt $\overline{PA} = \overline{AM}$, $\overline{AN} = \overline{AM}$, $\overline{CP} = \overline{CM}$, $\overline{NB} = \overline{BM}$. Da $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{CM}$ ist, gilt damit

$$u = \overline{AM} + \overline{BM} + \overline{BC} + \overline{CM} + \overline{AM}$$
$$= 2 \cdot \overline{AM} + 2 \cdot \overline{BC} = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{BC}).$$

Die Strecke $\overline{BC}$ ist konstant; der Umfang $u = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{BC})$ des Fünfecks $ANBCP$ hängt somit allein von der Länge der Strecke $\overline{AM}$, also von der Lage des Punktes M ab. Die Strecke $\overline{AM}$ und damit der Umfang des Fünfecks wird am kürzesten, wenn $\overline{AM}$ Höhe zur Seite $\overline{BC}$ ist.

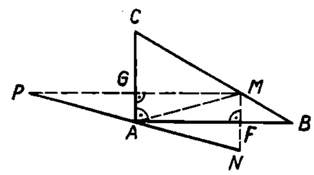


b) Wenn N, A und P auf einer Geraden liegen, so gilt $\sphericalangle\, NAP = 180°$. (1)

Aus der Symmetrieeigenschaft folgt

$\sphericalangle\, NAF = \sphericalangle\, FAM$ und $\sphericalangle\, MAG = \sphericalangle\, GAP$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle\, FAG = 90°$.



Es gilt umgekehrt:

Aus $\sphericalangle\, FAG = 90°$ und $\sphericalangle\, NAF = \sphericalangle\, FAM$ und $\sphericalangle\, MAG = \sphericalangle\, GAP$ folgt $\sphericalangle\, NAP = 180°$, d.h. die Punkte N, A und P liegen auf einer Geraden.

c) 1. Teil der Aufgabe

Nach Voraussetzung ist das Viereck $NBCP$ ein Parallelogramm; es gilt also

$\therefore \sphericalangle PCB + \sphericalangle CBN = 180°$. (1)

Aus Symmetriegründen gilt ferner

$\sphericalangle PCA = \sphericalangle ACM$ und $\sphericalangle MBA = \sphericalangle ABN$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle ACM + \sphericalangle MBA = 90°$, und deshalb ist auch $\sphericalangle CAB = 90°$; das Dreieck ABC ist also in A rechtwinklig.

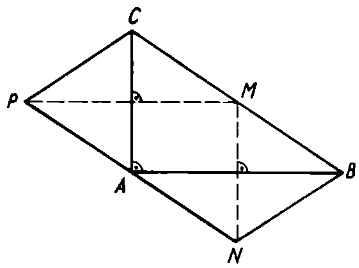
Aus Symmetriegründen gilt weiterhin

$\overline{CP} = \overline{CM}$ und $\overline{BM} = \overline{BN}$. (3)

Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang; es gilt also

$\overline{BN} = \overline{CP}$. (4)

Aus (3) und (4) folgt $\overline{CM} = \overline{BM}$, d. h. der Punkt M halbiert die Seite $\overline{BC}$.



2. Weg (rund gerechnet):

$$a : b = \frac{a}{b}$$

3. Weg (nur mit Brüchen):

$$\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \qquad a = \frac{a}{b}$$

Stelle Aufgaben dieser Art deinen Mitschülern!

In einem Zuge

1. E, F, A, B, I, O, N, F, G, C, D, H, M, L, G, H, I, K
2. B, C, D, E, F, G, H, A, B, I, H, M, F, L, D, K, L, M, I, K, B
3. A, B, E, C, B, F, C, D, E, F, A, D

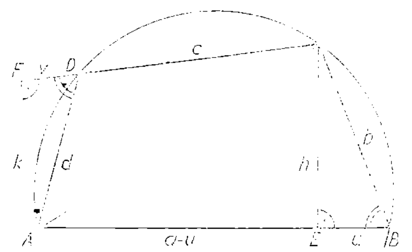
Beim letzten Ton des Z...

Die Uhr schlug 2mal — die Zeiger zeigten 20.16 Uhr an.

Mathematical Log

Ans: 30. Put one color on and turn that face down. On top any of five colors can be used. Four colors remain and they will form a circular permutation on the remaining four sides. The number of circular permutations of four things all at a time is $3! = 6$. Hence the number is $5 \cdot 6 = 30$.

Abbildung zu Lösung 420 (S. 115):



Lösungen zu alpha-heiter

Summe stets 40

Kreisfigur: $3 + 14 + 15 + 8 = 40$

Symmetrieachse: $7 + 5 + 13 + 12 + 1 + 2 = 40$

Symmetrieachse: $4 + 10 + 11 + 9 + 0 + 6 = 40$

Auf der iga

Jeder benötigte 112 m Zaun.

$28 \cdot 28 = 784$	$25 \cdot 31 = 775$
$2 \cdot 56 = 112$	$2 \cdot 56 = 112$
$22 \cdot 34 = 748$	$19 \cdot 37 = 703$
$2 \cdot 56 = 112$	$2 \cdot 56 = 112$

Labyrinth

Mathematischer Begriff: FUNKTION

Kryptarithmetik

1 $\quad 99 + 1 = 100$

2 $\quad 3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$

3 $\quad 11^2 = 121$

4 $\quad \sqrt{25} = 5;\ \sqrt{36} = 6$

5 $\quad 0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0001$

Ein Bruch! Einbruch?

Die allgemeine Form (Bildungsgesetz) für Aufgaben dieser Art lautet:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) : \left(b + \frac{1}{a}\right) = \frac{a}{b}$$

1. Weg (nach A. Ries):

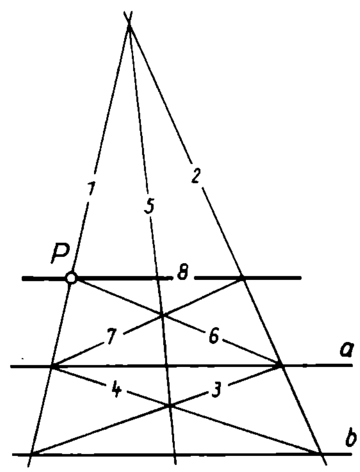
$$\left(a + \frac{1}{b}\right) : \left(b + \frac{1}{a}\right) = \frac{ab+1}{b} : \frac{ab+1}{a} = \frac{ab+1}{b} \cdot \frac{a}{ab+1} = \frac{a}{b}$$

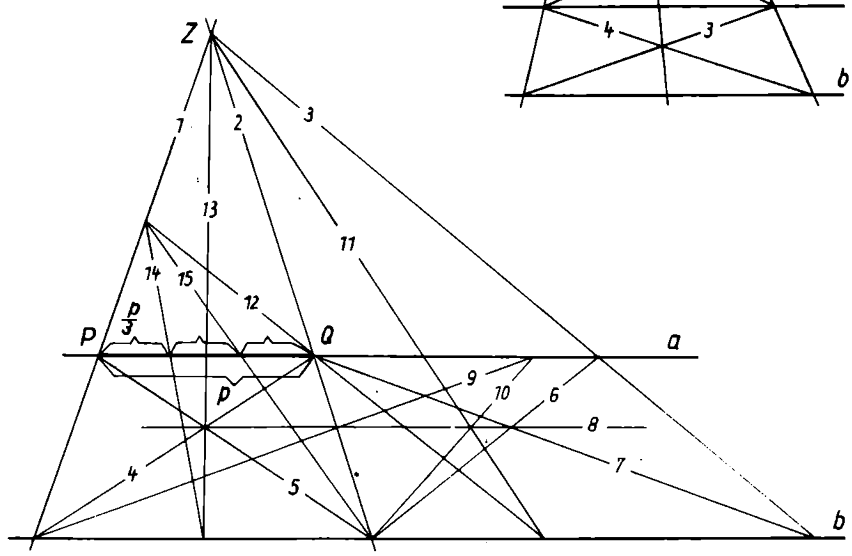
Lösung zu „Schneiden und Verbinden“

3. Durch P lege man eine Gerade (1), die a und b im Endlichen schneidet. Ferner zeichne man eine nicht durch P gehende Gerade (2), die a, b und (1) im Endlichen schneidet. Mit diesen Annahmen ist die weitere Konstruktion der Parallelen zu a durch P mit Hilfe der Geraden (3)...(7) in der vorgegebenen Reihenfolge eindeutig bestimmt.

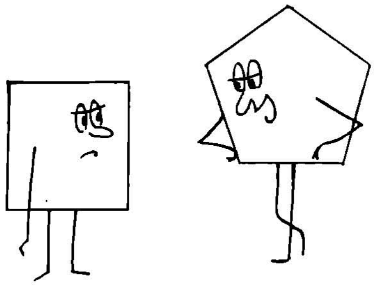
4. Annahme von Z nicht auf a und b liegend, sonst beliebig. Verbinde Z mit P und Q und lege eine weitere Gerade (3) durch Z, die a und b im Endlichen schneidet. Die folgende Konstruktion zur Dreiteilung der Strecke $\overline{PQ}$ ist durch Zeichnen der Geraden (4), (5)...(15) in der vorgegebenen Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Aus der Konstruktion ist leicht zu folgern, daß sich jede zu p in einem rationalen Verhältnis stehende Strecke mit den hier zugelassenen Mitteln in endlich vielen Schritten konstruieren läßt.





In freien Stunden alpha heiter



„Sie sollten sich auch qualifizieren!“
Aus: Zeit im Bild 42/68

Leicht verständlich

„Vati, ist heute dasselbe wie gestern?“
„Nein, wie kommst du darauf?“
„Du sagtest doch gestern, daß heute morgen sein wird!“
„Ja, freilich! Heute war gestern morgen und heute ist heute, so wie gestern heute war und morgen ist heute gestern und morgen wird auch heute sein! Verstanden?“

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Eine interessante Zahl

$2592 = 2^5 \cdot 9^2$

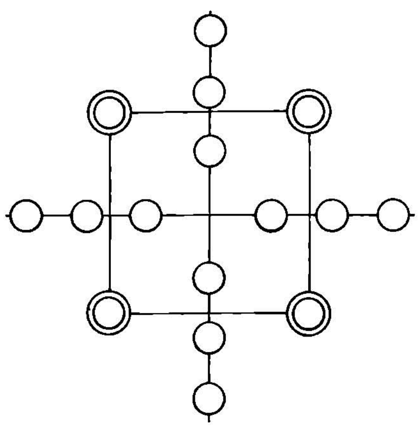
Wer findet ähnliche, interessante Beziehungen? Sendet sie an die Redaktion *alpha*!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Summe stets 40

Die Zahlen 0 bis 15 sind so in die Kreisfiguren einzutragen, daß die Summe der Zahlen in den vier Doppelkreisen und die Summe der Zahlen in den Kreisen auf jeder der beiden Symmetrieachsen gleich 40 ist.

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig



Auf der iga

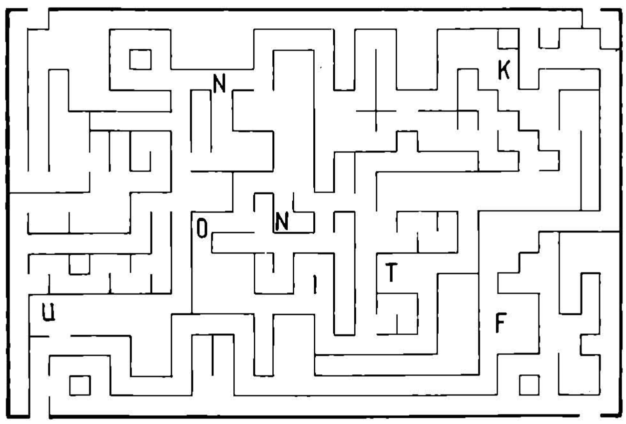
Auf der iga trafen sich 4 Gartenbesitzer. A hat einen Garten von 784 m², B hat 775 m², C 748 m² und D 703 m². Alle Gärten sind rechteckig. Es stellte sich beim Gespräch heraus, daß alle 4 die gleiche Meterzahl für den Zaun benötigten, um ihre Gärten zu umzäunen. Wieviel m Zaun brauchte jeder? Gibt es noch andere Lösungen?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Labyrinth

Von einem der vier Eingänge führt ein Weg über alle angeführten Buchstaben zu einem anderen Ausgang. Bei richtiger Lösung erhaltet ihr einen wichtigen mathematischen Begriff!

Annerose Lehmann, Leipzig (8. Kl.)

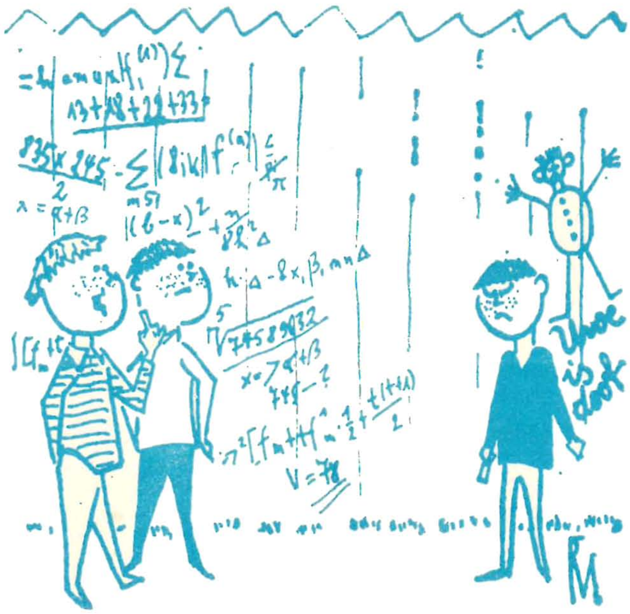


Kryptarithmetik

In den folgenden Aufgaben ist jede geometrische Figur durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen. (Gleiche geometrische Figuren in den einzelnen Aufgaben müssen nicht gleichen Ziffern entsprechen.)

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig

1,	2,	3,	4,	5,
$\overline{\triangle\triangle}+\square=\overline{\square\bigcirc\bigcirc}$	$\triangle\cdot\bigcirc\cdot\overline{\triangle\bigcirc}=\overline{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$	$(\overline{\square\square})^{\triangle}=\overline{\square\triangle\square}$	$\sqrt{\overline{\triangle\square}}=\square$	$\overline{\square,\square\bigcirc}\cdot\overline{\square,\square\bigcirc}=\overline{\square,\square\square\square\bigcirc}$



Was soll bloß aus dem mal werden? Aus: DLZ 38/68

Ein Bruch! Einbruch?

$3\frac{1}{8} : 8\frac{1}{3}$

Um zu sprechen im Gedicht:
Drei Schüler saßen vor Gericht.
Und das Ergebnis? Es war dies:
Der erste hielt's mit Adam Ries.
Der zweite wollte rund es machen
und teilte nur die ganzen Sachen.
Der dritte so zum Ziele kam,
indem er nur die Brüche nahm.
Das Resultat — ja das ist wichtig —
bei allen dreien war es richtig.
Das gilt nicht immer, nicht für alle.
Denk selber nach, in welchem Falle!

Es soll das Bildungsgesetz für Aufgaben dieser Art mit Variablen ausgedrückt, die drei oben eingeschlagenen Wege in allgemeiner Form dargestellt werden.

Dr.-Ing. W. Bennewitz, Radebeul

In einem Zuge

Ohne abzusetzen soll jede der drei Figuren durchfahren werden. Dabei darf aber jeder Punkt höchstens zweimal passiert werden.

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Beim letzten Ton des Zeitzeichens war es genau...

Herr *Tüftler* besitzt eine alte Wanduhr, die sehr genau geht. Leider zeigt sie eine andere Zeit an als die Radiozeit, und sie schlägt auch verkehrt. Wenn sie zum Beispiel 11.16 Uhr anzeigt, dann schlägt sie 5mal. Es ist dann genau Mitternacht nach dem Radio.
Als es kürzlich laut Radio 9.00 Uhr war, schlug sie gerade. Wie oft schlug die Uhr und welche Zeit zeigten ihre Zeiger?

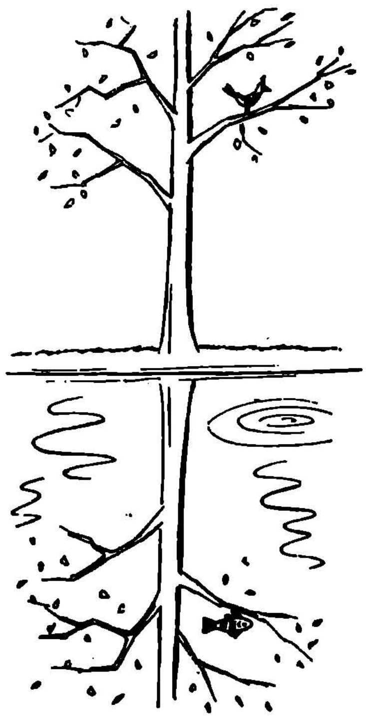
OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Mathematical Log

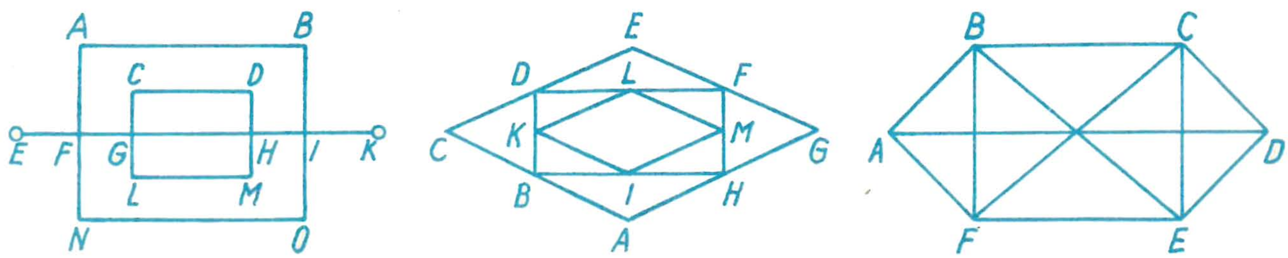
Cubes are painted with six colors. Each face is painted a solid color and no two faces of a given cube are the same color. How many such cubes can be prepared where each is unique in color orientations?

C. O. Oakley, Haverford, Pennsylvania (Math. Log XIII/3)

Symmetrie?



Vignette v. Chaval, Paris
Aus dem Diogenesfaß (Eulenspiegelverlag)



Leser schreiben an alpha

...Meiner Meinung ist die *alpha* für einen Schüler, der sich für Mathematik interessiert, die Zeitschrift! Ich persönlich möchte die *alpha* nicht mehr missen. Mir gefallen besonders die Beiträge über geometrische Probleme, z. B. „Fußball — reguläre Polyeder", „Nichts Einfacheres als ein Quadrat" oder die neu begonnene Artikelserie „Elektronische Datenverarbeitung."

Peter Schluttig, Frankenberg

Der Schwierigkeitsgrad der *alpha*-Wettbewerbsaufgaben war in Heft 1/69 sehr unterschiedlich!

OS Mittelstille (Kr. Schmalkalden)

Das vergrößerte Format von *alpha* findet meinen Beifall. Die einzelnen Beiträge werden jetzt übersichtlich auf die Seiten verteilt.

Mit Glückauf

Dr. K. Köhler, Karl-Marx-Stadt

Mein Sohn, der seit Beginn der Schulzeit ein reges Interesse für die Mathematik zeigt, hält seit einem Jahr die Zeitschrift *alpha*. Gern möchte er am Wettbewerb teilnehmen; er ist jedoch erst Schüler der 4. Klasse. Er bittet mich zu fragen, ob er dennoch am Wettbewerb teilnehmen darf.

W. G. Schmidt, Dessow, Kr. Kyritz

Er darf teilnehmen. *d. Red.*

In *alpha* 1/69 sah ich, daß Leser Aufgaben an die *alpha*-Freunde stellten. Da ich an meine Klassenkameraden, die sich an unserem selbständig zusammengestellten und weitergeführten Mathematikzirkel beteiligen, auch oft ähnliche Aufgaben stelle, nahm ich mir vor, auch für die *alpha*-Freunde eine Aufgabe auszuarbeiten... In meiner Klasse (ich besuche die 7. Kl.) habe ich wieder erfolgreich für *alpha* geworben. Nun sind schon 7 regelmäßige *alpha*-Leser.

Hanna Heinhold, Potsdam

...Da es in unserer Schule keinen Mathematikzirkel gibt, hat mir die Zeitung sehr geholfen, auch außerhalb der Schule Mathematik zu betreiben. Ich finde *alpha* sehr interessant und abwechslungsreich... Ich möchte Ihnen hiermit meinen Dank und mein Lob aussprechen...

Heino Lübbe, Negast, Kr. Stralsund

...Täglich muß ich 3 Stunden mit der Eisenbahn zur Schule und wieder nach Hause fahren. Diese Zeit widme ich überwiegend Ihrer Zeitschrift. Da die *alpha* nur alle zwei Monate erscheint, hat man genügend Zeit, sich mit bestimmten Aufgaben zu befassen... Gerade aus den gegebenen Lösungswegen kann man sehr viel lernen... Ich glaube, daß demnächst einmal einige Artikel über „Das Lösen von Aufgaben" veröffentlicht werden sollten... Die Arbeit mit Ihrer Zeitschrift ist wohl auch beteiligt am Gewinn meines 1. Platzes bei der diesjährigen Kreisolympiade... Die Aufgaben großer Mathematiker unserer Republik geben uns oft einen Einblick in spezielle Gebiete der Mathematik...

Dietmar Wegner, Halberstadt, Kl. 9

Ich habe mich über die Urkunde und die beiden Bücher sehr gefreut... Später möchte ich gern die Spezialklasse für Mathematik und Physik besuchen und dann Mathematik studieren. Die *alpha* wird mir mit den gestellten Aufgaben und den Artikeln helfen, dieses Ziel zu erreichen.

Angela Rohrbeck, Franzburg, Kl. 7

Am *alpha*-Wettbewerb beteiligt sich per Luftpost

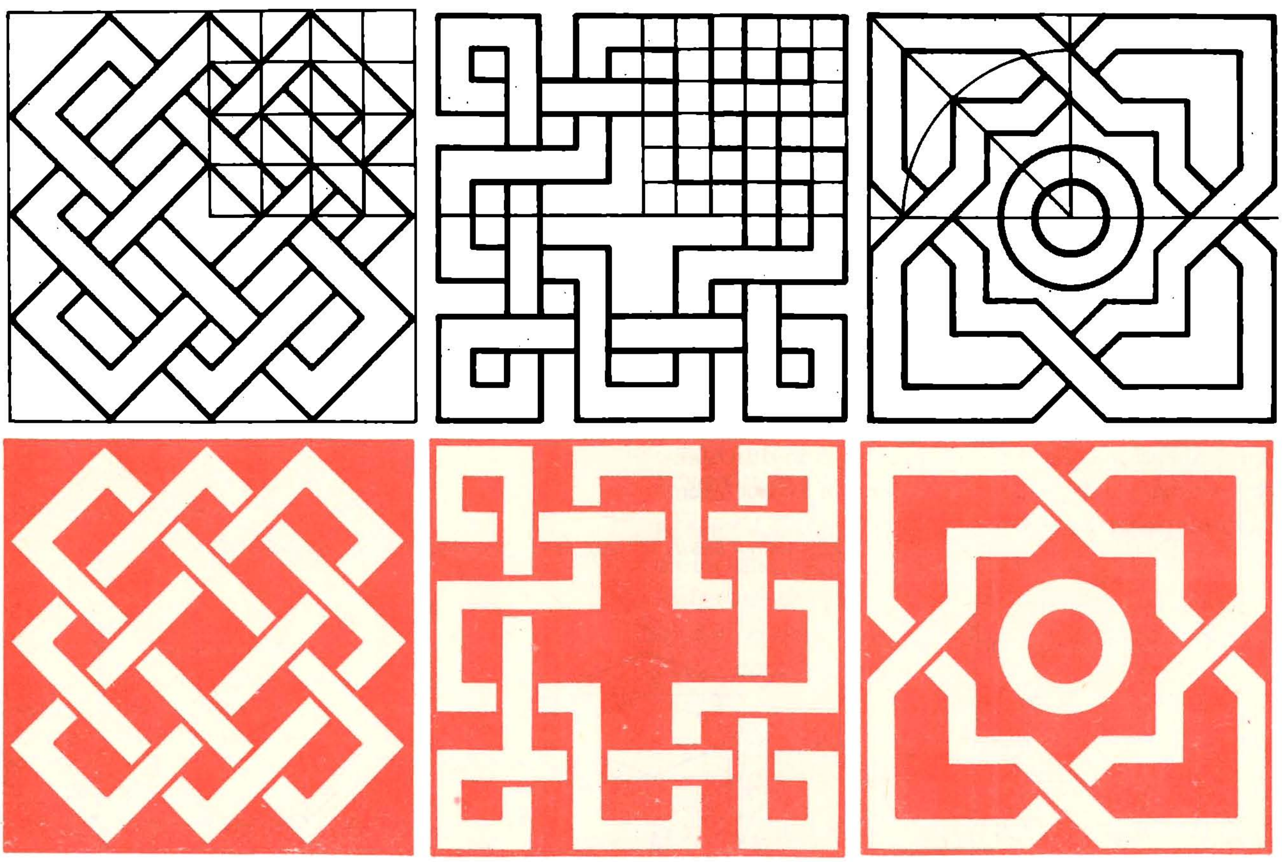
Sigrun Geyer, Sansibar, Tansania (Kl. 4)

...Ich bin 19 Jahre alt, aber kein Schüler mehr. Mein Beruf ist Maschinenbauer. Absolviert habe ich die 10-Klassen-Schule ... Ich betreibe Mathematik jetzt als Hobby. Unter diesen Umständen werde ich doch wohl am Wettbewerb teilnehmen können, denn nur hier kann ich Bestätigung meiner autodidaktischen Leistungen finden.

Arno Humpack, Klingmühl

Wir freuen uns über Ihre Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb und wünschen gute Zusammenarbeit und viel Erfolg. *d. Red.*

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Aufgaben aus Lehrbüchern des Volkseigenen Verlags Volk und Wissen Berlin

1949

▲ 5 Im Haushalt eines Bauern brennt täglich in der Küche eine 60-Watt-Lampe 3 Stunden lang, im Kuhstall beim Füttern und Melken eine 75-Watt-Lampe eine Stunde lang und in der Scheune beim Futterschneiden eine 40-Watt-Lampe zwei Stunden lang. Wie hoch ist der tägliche Verbrauch an elektrischer Energie.
Wie hoch sind die Kosten im Monat? (Eine kWh kostet 8 Pf.)

▲ 5 Zu einer Klasse gehören 44 Schülerinnen. Die Hälfte (ein Viertel) ist nicht anwesend. Wieviel Schülerinnen sind das?

▲ 5 Ein Bauer hat für 250 Naßpreßsteine 20,00 DM bezahlt. Was kostet ein Stück?

▲ 5 Eine volkseigene Federnfabrik stellt mit einer Maschine an einem Tag 26 000 Schreibfedern her, die automatisch in Kästchen zu je 1 Grs. verpackt werden. Wieviel Kästchen können gefüllt werden und wieviel Dtzd. und Stck. bleiben übrig?

▲ 6 Beim Getreidemähen beträgt der Arbeitsaufwand mit der Sense bis zum Aufstellen der Stiegen (Garben) etwa 70 Std. je ha, mit einem Mähbinder der MAS nur etwa 4 Std. je ha. Wieviel Arbeitsstunden spart ein Neubauer bei der Roggenernte auf einem Feld von 1,5 ha dadurch, daß die MAS einen Mähbinder zur Verfügung stellt?

▲ 6 Beim Bau einer Mauer schichtet ein Maurer in 1 Std. 3 Reihen Ziegelsteine und baut dadurch die Mauer im Durchschnitt 23,1 cm höher. Um wieviel cm baut er sie in 2, 3, 4,... Stunden höher? Trage die Ergebnisse in eine Wertetafel ein!

▲ 7 Beim Aufbau der Volkswerft Stralsund erfüllte der Nationalpreisträger *Paul Sack* die Tagesnorm von 600 vermauerten Ziegelsteinen mit 417%. Wieviel Ziegelsteine vermauerte er täglich?

▲ 7 Ein Arbeiter in einem mecklenburgischen Torfstich sticht 1000 Soden (Sode heißt Torfstück) in 3 Stunden. Er steigert seine Leistung durch geschickte Vorbereitung und schafft die Arbeit künftig in 2 Stunden 18 Minuten. Wieviel % beträgt die Zeiteinsparung?

▲ 7 Die Landarbeiterin eines volkseigenen Gutes hatte beim Binden von Getreidegarben eine tägliche Norm von 0,45 ha zu erfüllen. Tatsächlich erreichte sie eine Leistung von 0,65 ha. Wieviel % der Norm betrug ihre Leistung?

▲ 7 Der Hauer *Franik* von der Grube „Brückenberg" in Zwickau förderte in einer Schicht 26,6 m^3 Kohle und übererfüllte damit seine Arbeitsnorm um 430%. Wie groß war diese?

▲ 8 Für den Bau eines Neubauerngehöftes hatten sich 5 Bauern für die Anfuhr der Ziegelsteine bereit erklärt. Jeder sollte die gleiche Anzahl von Fuhren durchführen. Da das Gespann des ersten Bauern anderweitig benötigt wurde, mußte jeder der vier anderen 3 Fuhren mehr durchführen, als sonst nötig gewesen wären. Wieviel Fuhren waren insgesamt notwendig?

▲ 8 Ein Bauarbeiter hat ein monatliches Reineinkommen von 190,— DM. Er verteilt seine Ausgaben wie folgt: für Wohnung 15,3%, für Ernährung 53%, für Kleidung 8%, für Heizung und Licht 7,8%, für Erholung und Unterhaltung 9%.
a) Berechne die einzelnen Ausgaben in DM!
b) Wieviel DM bleiben für unvorhergesehene Ausgaben oder für Ersparnisse übrig?

▲ 8 Jede Arbeiterin einer Strumpffabrik stellte in einem Vierteljahr durchschnittlich 522 Paar Strümpfe her. Durch technische Verbesserungen und durch Einführung des Leistungslohnes stieg die Leistung auf 912 Paar. Wie groß ist gegenwärtig der Wert der Produktion einer Mitarbeiterin, wenn er vor der Leistungssteigerung 901,— DM betrug?

1969

▲ 5 Schreibe alle Angaben heraus, die du zur Beantwortung der folgenden Frage benötigst! — „Wieviel Tage war die sowjetische Raumstation ‚Venus 4' unterwegs?" Die sowjetische Raumstation „Venus 4" landete am 18. 10. 1967 weich auf der Venus. Sie legte einen Weg von rund 350 Millionen Kilometern zurück. Die Raumstation wurde am 12. 6. 1967 gestartet.

▲ 5 Anstieg der Produktion von Butter in der DDR

1950	71 200 t	1960	174 600 t
1955	143 800 t	1965	197 400 t

Bilde aus den Angaben Aufgaben!

▲ 5 Auf einer Fläche von 1 dm^2 können 4 Weizenpflanzen wachsen. Jede Pflanze hat eine Ähre, in der durchschnittlich 30 Körner sind. 1000 Körner geben durchschnittlich 30 g.
a) Rechne nach, ob unter diesen Bedingungen 36 dt Weizen auf 1 ha geerntet werden können!
b) Wieviel Tonnen Weizen könnte man bei diesem Ertrag auf einer Fläche von 13 ha ernten?

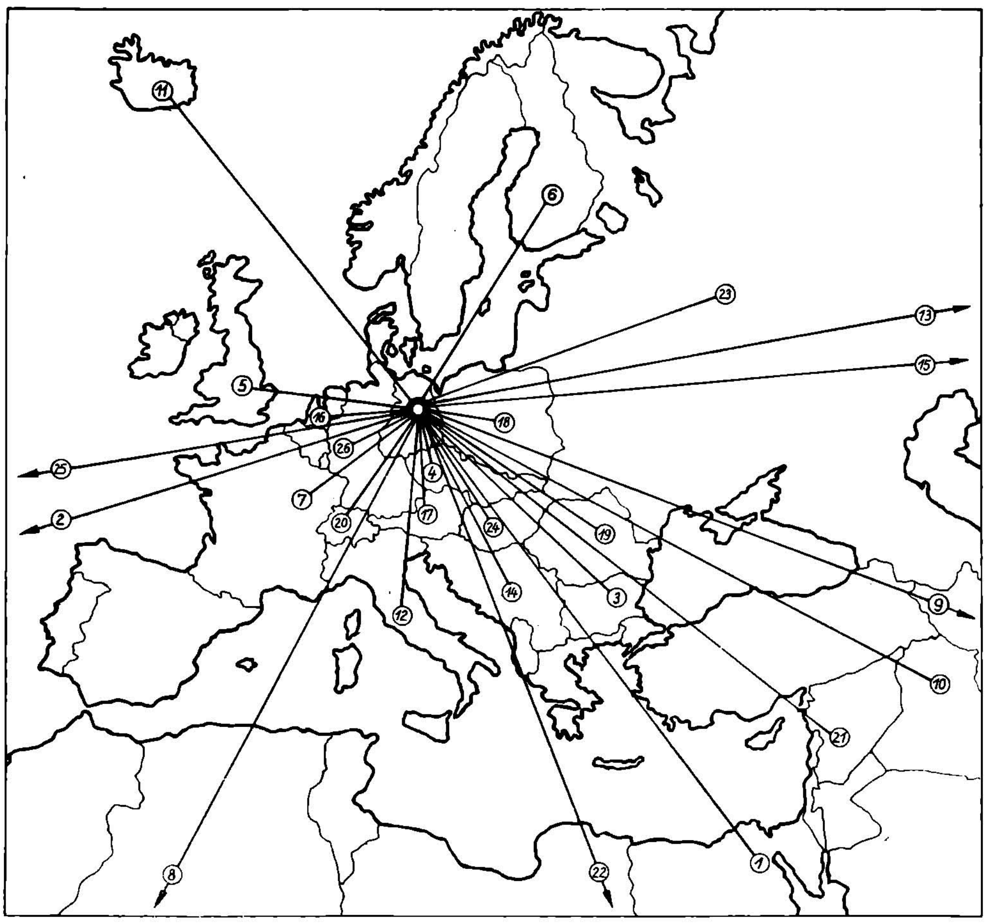
▲ 6 Die Arbeitsbreite einer Mähmaschine mit Traktor beträgt 2,1 m. Welche Fläche ernten drei Mähmaschinen in 6 Stunden Arbeit ab, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit des Traktors 4,5 km in der Stunde beträgt? (Runde das Ergebnis auf eine Genauigkeit von 1 ha!)

▲ 6 In der DDR veränderte sich der Pro-Kopf-Verbrauch von 1955 bis 1964 folgendermaßen:
a) Bei Fleisch stieg er von 45,0 kg auf das 1,29fache.
b) Bei Geflügel stieg er von 2,4 kg auf das 1,54fache.
c) Bei Kartoffeln sank er von 174,6 kg auf das 0,9fache.
d) Bei Eiern stieg er von 116 St. auf das 1,76fache.
e) Bei Mehl und Nährmitteln fiel er von 121,6 kg auf das 0,81fache.
f) Bei Zucker stieg er von 27,4 kg auf das 1,12fache. Wie hoch ist der Verbrauch jeweils im Jahre 1964?

▲ 7 Die Länge eines Eisenträgers wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte: 8015 mm, 8009 mm, 8012 mm, 8013 mm, 8011 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib Abweichungen der Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

▲ 7 Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in 90 Minuten zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 104 benötigt für die gleiche Strecke 40 Minuten. Ermittle für beide Typen die Flugzeit für 300 km! Welche Strecken legen beide in 2 Stunden zurück?

▲ 8 Mit einem 10,50 m langen Höhenförderer wird eine Strohmiete errichtet. Welche Höhe hat die Miete erreicht, wenn noch ein 1,50 m langer Teil des Gerätes über die obere Kante der Miete hinausragt und der Abstand zwischen Gerät und Miete 3,25 m beträgt?
a) Löse die Aufgabe durch eine maßstäbliche Zeichnung!
b) Kontrolliere dein Ergebnis durch Rechnung!

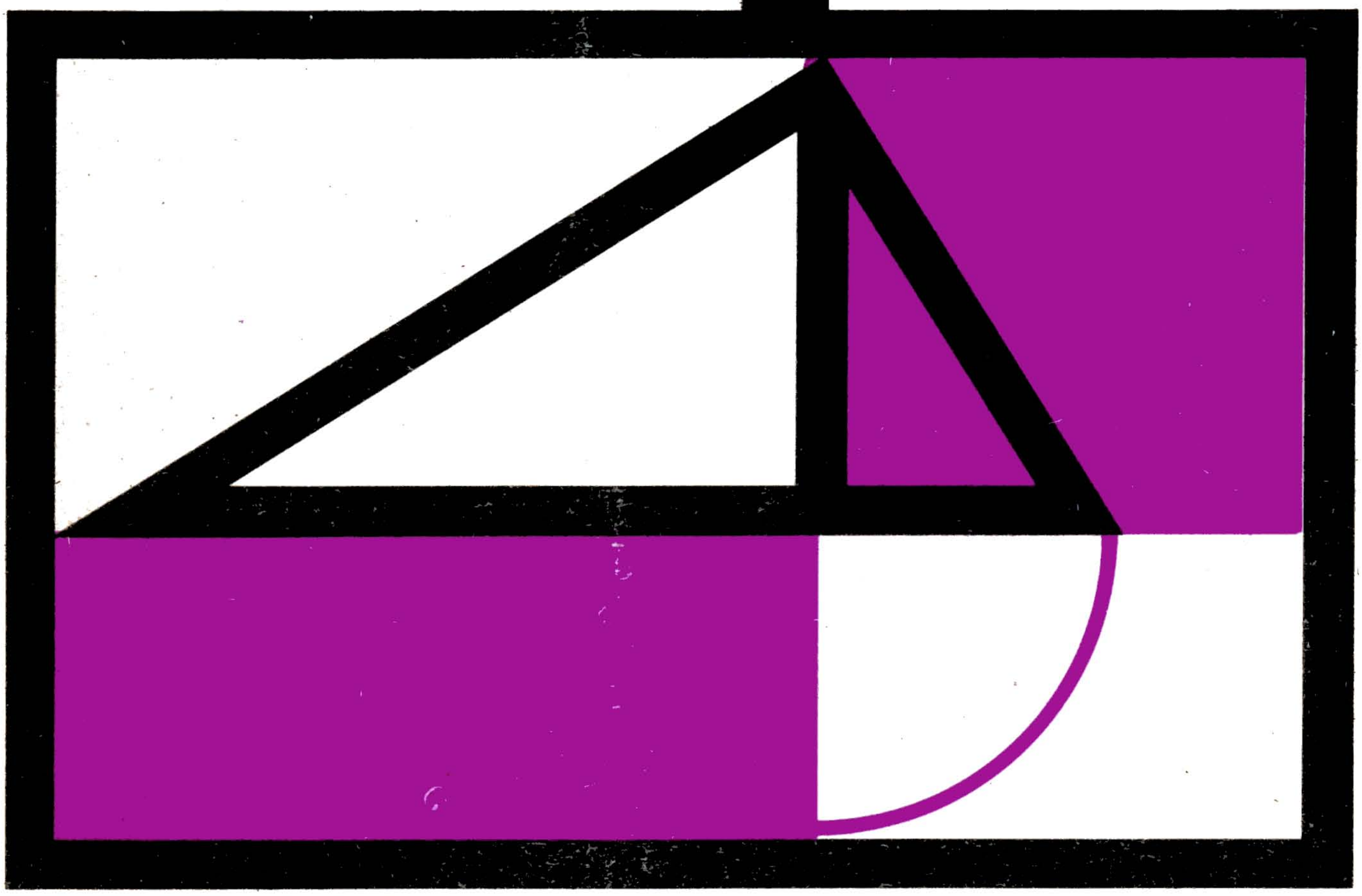


alpha knüpfte in den drei Jahren ihres Bestehens freundschaftliche Verbindung zu mathematisch interessierten Wissenschaftlern, Lehrern und Schülern:

1 Ägypten
2 Argentinien
3 VR Bulgarien
4 ČSSR
5 England
6 Finnland
7 Frankreich
8 Guinea
9 Indien
10 Irak
11 Island
12 Italien
13 Japan
14 SFR Jugoslawien
15 Mongolische VR
16 Niederlande
17 Österreich
18 VR Polen
19 SR Rumänien
20 Schweiz
21 Syrien
22 Tansania
23 UdSSR
24 VR Ungarn
25 USA
26 Westdeutschland

Mathematische Schüler-
zeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Schwarz, Jena (S. 122); Faksimiles: Staatsarchiv Weimar (S. 121/122); Naumann, Leipzig (S. 128); Schach-Vignetten aus: Rund um das Schachbrett, W. de Gruyter, Berlin (S. 133); Vignetten H.-J. Jordan, Leipzig (S. 142/143)
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 1. Oktober 1969

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

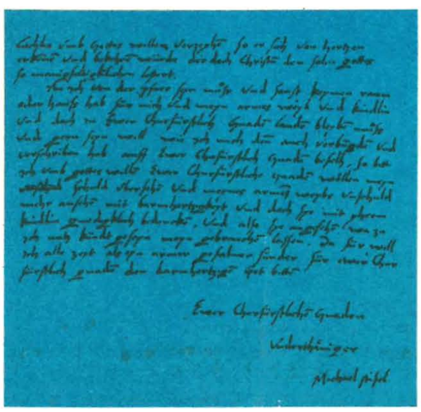
Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Michael Stifel

Schicksal eines Mathematikers vor 400 Jahren

Im Spätsommer des Jahres 1533 lief ein Gerücht durch Mitteldeutschland: Ein Pfarrer *Stifel* aus Lochau bei Wittenberg habe ein Buch verfaßt und darin durch eine Berechnung und 21 andere Gründe nachgewiesen, daß das Ende der Welt am Montag, dem 19. 10. 1533, morgens um 8 Uhr kommen würde. Viele lachten darüber, aber manche glaubten daran, besonders die Lochauer. Auf verschiedene Weise bereiteten sie sich auf das Ende der Welt vor. Einige verbrachten die Tage unter Klagen und Gebeten, andere hielten sich nur noch im Wirtshaus auf. Die Felder wurden nicht mehr bestellt. Hab und Gut verkaufte und verschleuderte man, um sich vor dem Weltuntergang noch etwas zugute zu tun. Am 19. Oktober hielt *Stifel* von früher Stunde an Gottesdienst, zu welchem er durch das Horn des Kuhhirten, von manchen für die Posaune des Jüngsten Gerichts gehalten, wecken ließ. „Die letzte Stunde ist nahe!" rief er den Gläubigen zu. Großes Wehklagen, besonders unter den Frauen, erhob sich. Die angesagte Stunde näherte sich und ging vorüber, ohne daß die Vorhersage eintraf. *Stifel* selbst fing an, unruhig zu werden. Ein heraufziehendes Unwetter erklärte er als Vorboten des Jüngsten Gerichts. Blitz und Donner gingen vorüber, der Regen hörte auf, man wartete weiter. Als schließlich in den Nachbardörfern die Mittagsglocken läuteten, war es auch dem letzten klar, daß sie zu gutgläubig gewesen waren. Nun änderte sich die Szene. Die bisher frommen, andächtigen, jetzt aber enttäuschten Bauern schmähten ihren Pfarrer, rissen ihn von der Kanzel, banden ihn mit Stricken und schleppten ihn nach Wittenberg vor Gericht. Die Obrigkeit besänftigte die Bauern, Stifel aber wurde seines Postens enthoben.



Wer war nun dieser *Stifel*? Ein Narr, ein Betrüger? Nein, weder das eine noch das andere. Er war ein Gelehrter, ein Mathematiker, sogar einer der bedeutendsten jenes Jahrhunderts. Er war aber auch ein Kind seiner Zeit, angefüllt mit den Gedanken der Mystik und der Renaissance. Sein Lebensweg zeigt ihn als eine kraftvolle Persönlichkeit. Mutig und unerschrocken vertritt er seine Überzeugung, Rückschläge können ihn nicht erschüttern, Anfeindungen bietet er trotzig die Stirn.

1487 in Eßlingen geboren, tritt er in jungen Jahren in die dortige Niederlassung des Augustinerordens ein. Mit Berechnungen der kirchlichen Feiertage beauftragt, entdeckt er seine Liebe zur Mathematik, der er sein ganzes Leben lang treu bleibt. Als Luthers revolutionäre Gedanken in sein Kloster dringen, verschreibt er sich ihnen mit Feuereifer. 1519 veröffentlicht er eine Streitschrift zur Unterstützung der neuen Lehre, der bald weitere folgen. Weil er sich auch weigert, von Beichtenden den „Sündzoll" zu verlangen, muß er das Kloster verlassen. Die nächsten Jahre verbringt er als Prediger der neuen Lehre in Kronberg/Taunus, beim Grafen von Mansfeld und in Oberösterreich. 1528 verschafft ihm Luther eine Pfarrstelle in Lochau, wo er ihn mit der Witwe seines Vorgängers traut. Über die Lochauer Zeit berichtet *Stifel* später: „Da ich ein müsiges leben füret, bracht mich fürwitz darein, so heftig, das ich davon ein büchlein lies ausgehen. Und rechnet ungeschickt und ungereimet Ding, so lang, bis ich die Zalen Danielis misbrauchet, zu erforschen Tag und stund der letzten Zeit." Wie das Ganze 1533 ausging, wissen wir. In Wittenberg hatte *Stifel* nun Zeit, seine Torheit zu bereuen. Gleichzeitig benutzte er die günstige Gelegenheit, an der dortigen Universität mathematische Studien zu treiben. 1534 verschafft ihm Melanchthon eine neue Stelle: er wird Pfarrer in Holzdorf bei Falkenberg/Elster, wo er sich noch besser steht als zuvor.

Hier setzt er in seinen freien Stunden das Studium der Mathematik fort. Die Resultate seines Fleißes waren 3 Werke: „arithmetica integra", sein Hauptwerk, erschien 1544, „Deutsche Arithmetica", ein Buch für Laien, erschien 1545, „Rechenbuch von der wälschen und deutschen Practic", erschien 1546. 1547 unterlag das Heer der protestantischen Fürsten den Kaiserlichen bei Mühlberg. Dadurch wurde eine weitere fruchtbare Entwicklung unterbrochen. *Stifel* und die Seinen wurden vertrieben, wieder beginnt ein unstetes Wanderleben. Die erste Zuflucht findet er in Frankfurt/Oder. 1548 bis 1550 soll er in Jena am Pädagogikum, einer Art Vorstudienanstalt, Mathematik unterrichtet haben. 1551 ist ein Aufenthalt in Holzdorf bezeugt. Ab 1552 weilt er in Ostpreußen, erst in Memel, dann in Eichholz und zuletzt in Haberstro als Pfarrer. Befreit von materiellen Sorgen kann er sich wieder mit Mathematik beschäftigen. Er arbeitet an einer Neu-Herausgabe der „Coß" von Rudolff, die 1553 beendet werden kann. Er bereitet eine zweite Auflage vor, die als Anhang seine „Geistliche Arithmetik" enthält. Seine Neigung zu mystischen Zahlenspielereien erwacht wieder, ohne allerdings das Lochauer Format zu erreichen. Dafür wird er aber in Glaubensstreitigkeiten verwickelt, die ihm den Aufenthalt in Ostpreußen verleiden. Er kehrt nach Sachsen-Anhalt zurück. 1557 finden wir ihn als Pfarrer in Brück bei Belzig. Von dort wird er als Professor der Mathematik 1558 nach Jena berufen. Hier hält er Vorlesungen über die „Elemente" des Euklid und über Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen. Wieder wird er in Glaubensstreitigkeiten verwickelt. Vier Professoren der Theologie spielen sich hier als Religionswächter auf, jeder, der es nicht mit ihnen hielt, wurde verketzert, verfolgt und von der Kanzel aus geschmäht. So auch *Michael Stifel*. Die Unruhe legte sich erst, als die Flacianer Jena verlassen mußten. Die Ruhe konnte *Stifel* nicht lange genießen. 1564 trat er in den wohlverdienten Ruhestand, und am 19. 4. 1567 starb er in Jena, auf den Tag genau 80 Jahre alt.

Über die Bedeutung Michael Stifels: Der Anfang des 16. Jh. war für die Entwicklung der Mathematik sehr günstig. Die Renaissance mit ihrer Wiederbelebung des klassischen Altertums, die Erfindung des Bücherdrucks, die Entdeckungen ferner Länder und das Aufblühen von Handel und Verkehr, das alles waren günstige Faktoren. Die „Rechenmeister" befriedigten ein wirklich vorhandenes Bedürfnis, als sie Rechenbücher in deutscher Sprache erscheinen ließen. Natürlich berücksichtigten sie darin hauptsächlich kaufmännische und häusliche Rechnungen.

Das einmalige Verdienst *Michael Stifels* besteht nun darin, daß er neben einer gründlichen Behandlung der „Rechenkunst" auch Gebiete der theoretischen Mathematik erfolgreich bearbeitete, während der andere große „Rechenmeister“ jener Zeit, *Adam Ries*, nur Bekanntes in verständlichere Form brachte. Schöpferisch stellte und löste er Aufgaben, die bis dahin so gut wie unberührt waren. Er gilt als der erste große Zahlentheoretiker. Daß er auch für das praktische Rechnen Verbesserungen fand, ist allgemein bekannt. So räumte er unter dem Althergebrachten kräftig auf: Das *Duplieren* und *Medieren* (Verdoppeln und Halbieren) wertet er nicht wie die meisten seiner Zeitgenossen als besondere Rechenarten, sondern als Spezialfälle des Multiplizierens und Dividierens. Die zahllosen einzelnen Regeln der Coß-Rechnung bezeichnete er als „Menschenquälerei“ und ersetzte sie durch eine einzige Vorschrift. Er beschäftigte sich als erster Europäer mit negativen Zahlen. Für die Division eines Bruches durch einen Bruch schlug er die Multiplikation mit dem Kehrwert vor, bisher wurden derartige Aufgaben umständlich über gleichnamig gemachte Brüche gelöst.

Bemerkenswert ist *Stifels* Tabelle der Binomialkoeffizienten:

1					
2					
3	3				
4	6				
5	10	10			
6	15	20			
7	21	35	35		
8	28	56	70		
9	36	84	126	126	
10	45	120	210	252	usw.

in der „arithmetica integra“ fortgesetzt bis
17 136 680 2380 61 868 12376 19448 24310

In seinem Hauptwerk „a. i.“ beschäftigt sich *Stifel* ausführlich mit den Progressionen (Zahlenfolgen und Reihen). Dabei gelang ihm seine wertvollste Entdeckung:

Die Gegenüberstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Zahlenfolge

. . . 0 1 2 3 4 5 6 . . .
. . . 1 2 4 8 16 32 64 . . .

enthält den Kern einer Logarithmentafel zur Basis 2. *Stifel* war sich der Bedeutung dieser Entdeckung bewußt. Er sagte dazu: „Es könnte hier ein ganzes Buch über die Wunder der Zahlen geschrieben werden. Aber ich muß mich bescheiden und mit geschlossenen Augen davon gehen. Ich will aber eins über das Vorhergehende wiederholen, damit man nicht sagen kann, ich hätte mich vergeblich auf diesem Gebiete betätigt. Was in der geometrischen Reihe irgendwie durch Multiplikation und Division geschieht, das wird entsprechend durch Addition und Subtraktion in der arithmetischen Reihe vorgenommen.“

Zahlenbeispiele ($64 \cdot \frac{1}{8}$ sowie $64 : \frac{1}{8}$) verdeutlichen das Gesagte.

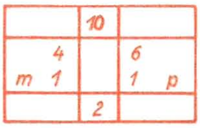
Interessant sind *Stifels* Erkenntnisse über figurierte Zahlen (Näheres über diese Zahlen in Kordemskis „Köpfchen, Köpfchen“). Er beschäftigte sich mit Dreieckszahlen und verwendete sie zur Deutung von Bibelsprüchen.

Eine etwas größere Bedeutung hat eine weitere Spielerei *Stifels*, die Beschäftigung mit sogenannten Zauberquadraten. Die Herstellung eines solchen Quadrats besteht darin, die Zahlen von 1 bis n^2 in die Zellen eines Quadrates mit n Zellen an der Seite so zu verteilen, daß alle Reihen von oben nach unten, von links nach rechts und in der Richtung der Diagonalen ein und dieselbe Summe geben. *Stifel* stellte nicht nur selbst viele solcher Quadrate zusammen, dabei eins mit $n = 16$, er entwickelte sogar einen Schlüssel für die Verteilung der Zahlen sowohl für ein gerades wie ein ungerades n.

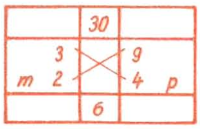
Amüsiert verfolgen wir die Art und Weise, wie *Stifel* mit Hilfe der „regula falsi“ Aufgaben löst, die heute von einem Schüler in wenigen Zeilen erledigt werden.

1. Beispiel: Es soll die Zahl gesucht werden, die um 2 vermindert 3 als Rest gibt.

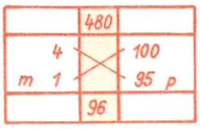
Stifels Weg: Gesetzt, man nähme an Stelle jener unbekannten Zahl 4 an, so bliebe als Rest 2 statt 3, also 1 zu wenig. Nähme man 6 an, so bliebe als Rest 4, also 1 zuviel (siehe Figur 1). Die gesuchte Zahl würde man dann erhalten, wenn man die Summe der genannten Zahlen durch die Summe der Fehler, von denen der eine positiv, der andere negativ ist, dividiert. Ergebnis 10 : 2 = 5.



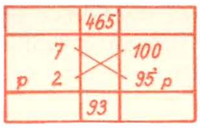
Figur 1



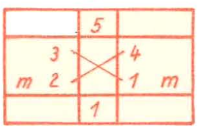
Figur 2



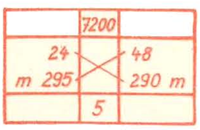
Figur 3



Figur 4



Figur 5

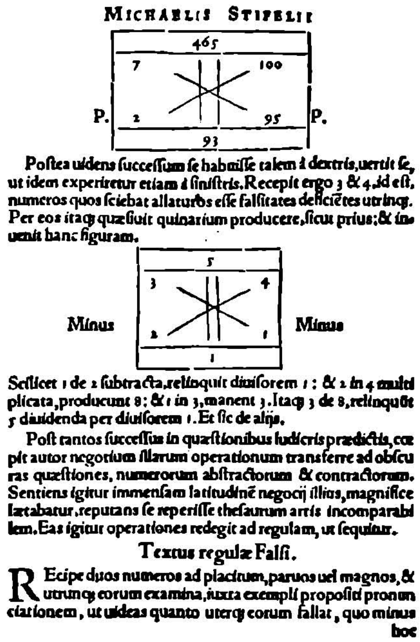


Figur 6

Würden die beiden Zahlen 3 und 9 als „numeri falsi“ angenommen, so würde durch die Division der Summe dieser Zahlen durch die Summe der erhaltenen Fehler nicht die richtige Zahl gefunden, wohl aber durch die Division der Summe aus den Produkten der übers Kreuz multiplizierten angenommenen Zahlen durch die Summe der Fehler (Figur 2). *Stifel* erkannte nicht, daß die erste Regel überflüssig ist!

Das gleiche Ergebnis bringen die „numeri falsi“ 4 und 100 (Figur 3).

In den bisherigen Fällen war die eine angenommene Zahl kleiner, die andere größer als die gesuchte. Werden beide Zahlen größer (oder kleiner) angenommen als die gesuchte, so sind beide Fehler positiv (bzw. negativ),


MICHAELIS STIFELII

Postea uidens successum se habuisse talem à dextris, uertit se, ut idem experiretur etiam à sinistris. Recepit ergo 3 & 4, id est, numeros quos sciebat allaturos esse falsitates deficiẽtes utrinq;. Per eos itaq; quæsiuit quinarium producere, sicut prius: & inuenit hanc figuram.

Scilicet 1 de 2 subtracta, relinquit diuisorem 1: & 2 in 4 multiplicata, producunt 8: & 1 in 3, manent 3. Itaq; 3 de 8, relinquũt 5 diuidenda per diuisorem 1. Et sic de alijs.

Post tantos successus in quæstionibus ludicris prædictis, cœpit autor negotium illarum operationum transferre ad obscuras quæstiones, numerorum abstractorum & contractorum. Sentiens igitur immensam latitudinẽ negocij illius, magnifice lætabatur, reputans se reperisse thesaurum artis incomparabilem. Eas igitur operationes redegit ad regulam, ut sequitur.

Textus regulæ Falsi.

Recipe duos numeros ad placitum, paruos uel magnos, & utrunq; eorum examina, iuxta exempli propositi pronunciationem, ut uideas quanto uterq; eorum fallat, quo minus hoc

und die gesuchte Zahl findet man durch die Division der Differenz jener Produkte durch die Differenz der Fehler (siehe Figur 4 und 5).

Einem Schüler der 8. Klasse müßte es möglich sein, die hier verwendete Gesetzmäßigkeit aufzuspüren!

Du glaubst, die „regula falsi“ hälfe nur bei so einfachen Aufgaben? Was meinst du zu dem folgenden Problem:

2. Beispiel: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte, vermindert um ein Drittel und ein Viertel derselben, gleich 300 ist. Die Figur 6 zeigt *Stifels* Lösung. Kommst du zurecht?

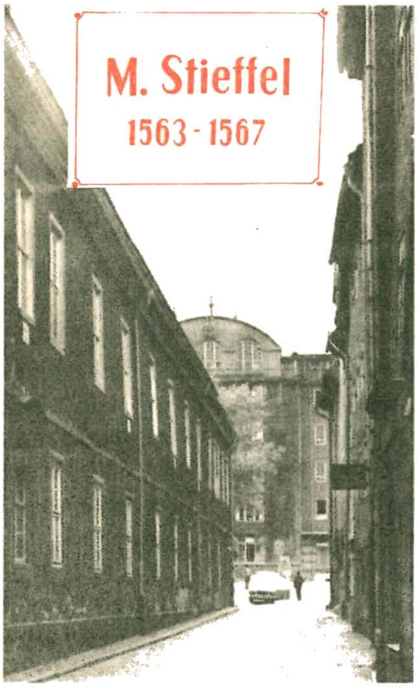
3. Beispiel: Es werden 3 Zahlen gesucht nach den Bestimmungen:

$$x + 73 = 2(y + z)$$
$$y + 73 = 3(x + z)$$
$$z + 73 = 4(x + y)$$

4. Beispiel: Gesucht sind 2 Zahlen. Ihr Verhältnis ist $1\frac{1}{2}$, miteinander multipliziert geben sie 864.

Jetzt streike ich aber; die Lösung nach *Stifel* ist derart umständlich, daß ich lieber meine Kenntnisse aus der 9. Klasse hervorkrame und die beiden letzten Aufgaben fast im Handumdrehen gelöst habe.

Die Leistung *Stifels* ist um so höher zu werten, als er Autodidakt war, der sein Wissen nur aus den damaligen Lehrbüchern gewonnen hatte. Während die Bücher von *Adam Ries* bis zu 30 Auflagen erlebten, fanden die Werke *Stifels* nur geringe Verbreitung und nur eine schlichte Tafel zeugt von seinem Wirken in Jena (vgl. Abb.). Zeugnis für diese geringe Wertschätzung sind auch verschiedene Anekdoten, die über sein Wirken in Jena kursieren. So soll der Professor der Mathematik in Jena auf der Straße vor seinen Studenten höflich das Käppchen gezogen haben. Sicherlich scheinen seine finanziellen Umstände die Ursache für diese Höflichkeit gewesen sein, erhielt er doch jährlich ein Gehalt von nur 60 Gulden. Er war also auf die Hörergebühren angewiesen. Die gleiche Veranlassung mag ihn auch bewogen haben, am Ende jeder Vorlesung die anwesenden Studenten zu fragen,



ob er auch am nächsten Tag mit ihrem Besuch rechnen dürfe. Eine Respektsperson scheint er nicht gewesen zu sein, man hat ihn wegen seiner Lochauer Prophezeihung immer etwas über die Schulter angesehen und belächelt. Wittenberger Studenten waren die Schöpfer und Jenaer Studenten willige Interpreten des seither bekannten Liedes:

Stifel muß sterben, ist noch so jung, jung, jung,
Stifel muß sterben, ist noch so jung.
Wenn das der Absatz wüßt, daß Stifel sterben muß,
er tät sich grämen bis in den Tod.

J. Schwarz

Quellen: Krbek: „Eingefangenes Unendlich“, Giesing: „Stifels arithmetica integra“, Treutlein: „Das Rechnen im 16. Jh.“, Strobel: „Nachricht von M. Stifels Leben und Schriften“, Fricke: Manuskript über „Entwicklung der Math. in Jena“, ADB (Allgemeine Deutsche Biographien), Stier: Manuskript „Lebensskizzen der Professoren an der Univ. Jena“

Alexander Ossipowitsch Gelfond

Alexander Ossipowitsch Gelfond wurde am 24. (11.) Oktober 1906 als Sohn eines Arztes zu Petersburg geboren und starb am 7. November 1968 in Moskau. Er begann sein Studium an der Moskauer Universität im Jahre 1924 und beendete es 1927. Seine Aspirantur war 1930 beendet; seit 1931 arbeitete er als Professor an der Moskauer Universität, seit 1933 auch am Steklow-Institut (Mathematischen Institut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR).

Der wissenschaftliche Grad eines Doktors der physikalisch-mathematischen Wissenschaften wurde Gelfond 1935 verliehen. 1939 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR gewählt. Seit 1968 war er korrespondierendes Mitglied der Union Internationale d'Histoire des Sciences in Paris.

Gelfond war außerdem verantwortlicher Redakteur des Sammelbandes von Übersetzungen „Matematika“ und Redaktionsmitglied der internationalen Zeitschrift über Zahlentheorie „Acta arithmetica“. A. O. Gelfond wurde ausgezeichnet mit dem Leninorden, mit drei Rot-Banner-Orden und mit Medaillen.

Die Mathematik hat einen schweren Verlust erlitten. Im Alter von 62 Jahren, noch auf der Höhe seiner Schaffenskraft, verstarb Alexander Ossipowitsch Gelfond, einer der hervorragendsten und originellsten Mathematiker unserer Zeit, Autor von mehr als hundert Zeitschriftenartikeln und mehreren Büchern über Zahlentheorie und Analysis.

Das hervorragende Talent Alexander Ossipowitschs zeigte sich schon bei seinen ersten Schritten auf dem Gebiet der Mathematik. Nachdem er sein Studium an der Moskauer Universität im Jahre 1927 beendet hatte, machte er sich schon 1934 durch seine Lösung des 7. Hilbertschen Problems in der ganzen Welt einen Namen. Sein mathematisches Talent bestach vor allem durch seine Originalität. Viele hervorragende Mathematiker denken beispielsweise in denselben ausgefahrenen Bahnen wie die weniger hervorragenden Mathematiker, nur schneller und zielstrebiger. Aber A. O. Gelfond dachte stets auf seine Art. Sein Geist fand ungewöhnliche, völlig neue Wege. Gerade deshalb werden seine bedeutenden Arbeiten noch auf lange Zeit Gegenstand aufmerksamen Studiums bleiben. Die von Gelfond an der Moskauer Universität durchgeführten Seminare zeichneten sich durch große wissenschaftliche Fruchtbarkeit aus. Bei der Arbeit der Seminare über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (1935—1937 zusammen mit W. L. Gontscharow, 1945 bis 1946 zusammen mit M. W. Keldysch) entstand eine neue Richtung — die Interpolation ganzer Funktionen. Das Seminar am Lehrstuhl für Zahlentheorie, den Gelfond mehr als 30 Jahre innehatte, wurde zu einem Zentrum der Zahlentheorie in der SU, zu dem Wissenschaftler aus der ganzen SU und anderen Ländern mit Vorträgen kamen.

Viel Zeit und Kraft widmete A. O. der Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses, wobei er Takt und Güte offenbarte. Selbst von hervorragender Individualität, schätzte er die Individualität seiner Schüler. Er zwang niemandem seine Ansichten und seinen Geschmack auf, und er verstand es, ihnen seine Treue zur Wissenschaft weiterzugeben.

Die Begabung Gelfonds äußerte sich nicht nur in der Mathematik. Er war ein ausgezeichneter Kenner des Schachspiels, der Literatur, der Mineralogie und der Geschichte der Naturwissenschaften. Der persönliche Umgang mit ihm war sehr interessant, und er gewann schnell die Freundschaft und das Vertrauen seiner Mitmenschen. Hätte er seine Memoiren geschrieben, sie wären ein interessantes historisches Dokument gewesen. Aber er erreichte nicht das Alter, in dem man Memoiren schreibt.

Sowohl seine Schüler als auch seine Freunde werden sich ihr ganzes Leben lang an diesen talentierten, klugen und bezaubernden Menschen erinnern. Er bleibt für sie stets das Vorbild des modernen Wissenschaftlers. Die Arbeiten Gelfonds werden immer einen würdigen Platz unter den Werken des mathematischen Geistesschaffens einnehmen.

M. A. Ewgrafow
N. M. Korobow
J. W. Linnik
I. I. Pjatezki-Schapiro
N. I. Feldmann

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

Teil 6

1.6. Das Rechenkomma

Bisher haben wir vorwiegend von ganzen Zahlen gesprochen und nur gelegentlich auf Brüche, zum Beispiel Dezimalbrüche, hingewiesen. Das darf nicht so verstanden werden, daß etwa in der Rechenpraxis die Brüche eine geringe Rolle spielen. Im Gegenteil: die meisten praktischen Probleme führen auf nichtganzzahlige Rechengrößen, so daß den Brüchen — im Falle direktverschlüsselter Dezimalzahlen den Dezimalbrüchen — eine hohe Bedeutung zukommt. Daraus ergibt sich die Frage, wie das Komma einer Zahl rechentechnisch zu realisieren und zu berücksichtigen ist.

1.6.1. Die kommafreie Darstellung einer Zahl

Beim Arbeiten mit dem Rechenstab sind wir daran gewöhnt, zunächst nur die Ziffernfolge der verwendeten Zahlen und nicht deren Komma zu berücksichtigen, so daß die Einstellung am Rechenstab zum Beispiel bei den Aufgaben 17,3 · 0,246 und 1730 · 24,6 genau die gleiche ist. Die Stellung des Kommas im Ergebnis wird gesondert durch einen Überschlag ermittelt. Ebenso, also *kommafrei*, arbeiten Handrechenmaschinen und auch elektronische Tischrechner, so daß man die Stellung des Kommas während des Rechnens gesondert zu überwachen, gewissermaßen das Komma in Gedanken zu markieren hat.

Bei der kommafreien Darstellung einer Zahl legt man sich zweckmäßig je nach Umfang der Rechenanlage auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen fest. Im Falle einer achtstelligen Darstellung sieht das dann so aus:

473,015	00 473 015
8 261,4987	82 614 987
0,00023	00 000 023.

Die letzte Stelle rechts ist also — ohne Rücksicht auf das Komma — zugleich die letzte von 0 verschiedenen Ziffer der Dezimalzahl. Die Überwachung des Kommas beim Rechnen mit derartigen Ziffernfolgen ist bei der Multiplikation und Division leicht. Bei der Addition und Subtraktion muß man aber — entsprechend der Forderung „Komma unter Komma" — die Zahlen gegeneinander verschieben, wodurch eventuell der verfügbare Stellenbereich rechts oder links überschritten wird und Rundungen nötig sind. Bei umfangreicheren Programmen wird es oft schwierig, den Einfluß des Kommas auf das Rechenergebnis richtig einzuschätzen, so daß man bei größeren Anlagen das Komma gleich in den rechentechnischen Ablauf einbezieht.

1.6.2. Die Festkommadarstellung

Bei einem im Festkommabetrieb arbeitenden Automaten ist das Komma an einer bestimmten Stelle in der Maschine fest installiert. Dabei sind im wesentlichen — je nach dem Typ des Rechners — zwei verschiedene Festlegungen üblich:

Entweder: (1) Man setzt das Komma *vor die höchste Stelle*, so daß nur Zahlen, deren Betrag kleiner als 1 ist, dargestellt werden können. Beispiel:

$$0{,}07352711 \longrightarrow 07352711$$

Oder: (2) Man setzt das Komma *hinter die niedrigste Stelle*, kann also nur ganze Zahlen darstellen. Dann stellt die gleiche Ziffernfolge wie oben einen völlig anderen Zahlenwert dar:

$$7352711 \longrightarrow 07352711.$$

(In beiden Fällen wurde ein achtstellig arbeitender Automat vorausgesetzt.)

Festkommadarstellungen haben den Nachteil, daß beim Programmieren durch Wahl eines geeigneten *Maßstabes*, das heißt durch Multiplikation mit einem Faktor, alle an der Rechnung beteiligten Zahlen in den zulässigen Bereich gebracht werden müssen.

Beispiel: Die Aufgabe

$$\begin{array}{r} 4720{,}00 \\ +\ \ 17{,}85 \\ \hline 4737{,}85 \end{array}$$

würde bei (1) den Maßstabsfaktor $k_1 = 0{,}0001$ erfordern.

$$\begin{array}{r} 0{,}472000 \\ +0{,}001785 \\ \hline 0{,}473785 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 47200000 \\ +00178500 \\ \hline 47378500 \end{array}$$

Das Automatenergebnis ist dann von Hand mit $\frac{1}{k_1} = 10000$ zu multiplizieren. Bei einem Rechner des Typs (2) wäre $k_2 = 100$.

$$\begin{array}{r} 472000 \\ +\ \ 1785 \\ \hline 473785 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 00472000 \\ +00001785 \\ \hline 00473785. \end{array}$$

Der Korrekturfaktor ist hier $\frac{1}{k_2} = 0{,}01$.

Mit einer Aufgabe wollen wir diesen Beitrag schließen:

▲ Aufgabe: Welche Ziffernfolgen erscheinen bei beiden Automatentypen (achtstelliger Betrieb) bei der Subtraktion

$0{,}40017 - 139{,}204$?

J. Frormann

alpha berichtet

Meuselwitz Vorbildliche Jahresarbeit

Die Schüler *R. Raupach* und *Th. Weber*, EOS „Friedrich Engels“, bildeten ein Redaktionskollektiv, welches sich verpflichtete, monatlich eine Mathematikwandzeitung herzustellen.

Themen: Rechenmaschinen — Entwicklung der Zahl π — Mathematische Größen — Berühmte Mathematiker — Ferienknobeleien — Hohe Leistungen zu Ehren der DDR.

Gleichzeitig veröffentlichten sie „Eine Aufgabe des Monats“. Ihre in einem Jahr gesammelten Erfahrungen faßten sie in einer Mappe zusammen unter dem Motto: „Gestaltung einer Mathematikwandzeitung“.

Berlin Erfolgreiche Junge Physiker

In der Zeit vom 22. 6. bis 2. 7. 1969 nahm eine DDR-Mannschaft unter Leitung von Dozent Dr. *J. Wendt* an der III. Internationalen Physikolympiade in Brno teil. An der Olympiade waren 8 Länder mit jeweils fünf Schülern beteiligt. Die DDR-Teilnehmer schnitten im XX. Jahr der DDR erfolgreich ab:

Wolfgang Pilz (12. Kl.), EOS „M. A. Nexö“ Dresden,
I. Preis 48/48 Pkt.

Klemens Müller (12. Kl.), EOS „H. Hertz“ Berlin,
II. Preis 44/48 Pkt.

Joachim Loose (12. Kl.), EOS Kleinmachnow,
III. Preis 37/48 Pkt.

Joachim Bergmann (12. Kl.), EOS Jena,
III. Preis 36/48 Pkt.

Michael Josch (11. Kl.), EOS Kleinmachnow,
Belobigung 30/48 Pkt.

Es wurden 5 Aufgaben gestellt:
1. Tag (5 Stunden Arbeitszeit): 4 Aufgaben
2. Tag (5 Stunden Arbeitszeit): Laboraufgabe

Die Mannschaft der DDR war auf einem Trainingslehrgang im Mai 1969 in der Sektion Mathematik-Physik des Pädagogischen Instituts Güstrow ausgewählt worden.

Interessierte Schüler können sich zur weiteren Förderung unter Angabe ihrer Adresse, Klassenstufe, Schule und Adresse des betreuenden Physiklehrers an die Sektion Mathematik-Physik, Päd. Institut Güstrow, 26 Güstrow, Goldberger Straße 12, wenden. Ihnen wird außerdem der Bezug der physikalischen Schülerzeitschrift *Impuls* empfohlen (Physikalisches Institut der Universität Jena, 69 Jena, Max-Wien-Platz 1, Redaktion *Impuls*).

Im Bezirk Gera werden in den Winter- und Sommerferien regelmäßig Mathematiklager durchgeführt. Sie wurden auf Initiative einiger Mathematikstudenten der Universität Jena ins Leben gerufen. Ziel ist, begabte und interessierte Schüler an neue Gebiete der Mathematik heranzuführen und ihnen damit eine Grundlage für selbständige Arbeit zu geben. Das fachliche Programm hat in jedem Lager einen anderen Inhalt.

Die traditionellen Lagerolympiaden beweisen immer wieder, daß die Schüler den Stoff recht gut verstanden haben.

Allen Teilnehmern soll auch geholfen werden, sich auf das Mathematikstudium vorzubereiten. Dazu werden in den Lagern Gespräche über Inhalt und Ablauf eines Mathematik-Lehrer bzw. Mathematik-Diplom-Studiums geführt. Prominente Gäste aus der Sektion der Universität helfen dabei und finden stets interessierte Zuhörer.

Von den etwa 70 teilnehmenden Schülern können wir viele als Stammgäste begrüßen. In unserem Betreuerkollektiv sind nicht wenige Studenten, die schon als Schüler in den Lagern weilten. Schüler und Studenten sind stets gemeinsam bei der Sache, wenn es gilt, interessante Veranstaltungen zu organisieren. Natürlich stehen auch Sportwettkämpfe, Wanderungen und Aussprachen über aktuelle Probleme auf unserem Programm. Daß Junge Mathematiker auch gern tanzen und sogar dichterische Fähigkeiten haben, bewiesen unsere Schüler an den Abschlußabenden, wo in netten Versen kritische und lobende Worte ausgesprochen wurden.

Mit diesem Beitrag wollten wir die Leser von *alpha* nicht nur informieren, sondern er soll auch Anregung sein, uns zu schreiben, welche Erfahrungen in anderen Bezirken bei der Gestaltung von Mathematiklagern gesammelt wurden.

„Wurzel“-Kollektiv
Sektion Mathematik d. Friedrich-Schiller-Universität, Jena (69 Jena, Helmholtzweg 1)

alpha-Wettbewerb 1969 — Einsendungen von Lösungen

Klassenstufe 5

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	346	178	190	368	(—5)
	347	232	234	466	(—11)
2	370	230	236	466	(—10)
	371	188	171	359	(—8)
3	397	137	102	239	(—4)
	398	94	71	165	(—43)
zus.		1059	1004	2063	

Klassenstufe 6

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	350	251	281	532	(—3)
	351	159	154	313	(—8)
2	375	358	371	729	(—10)
	376	222	252	474	(—174)
3	400	203	169	372	(—10)
	401	153	131	284	(—14)
zus.		1346	1358	2704	

Klassenstufe 7

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	354	345	266	611	(—126)
	355	282	260	542	(—31)
2	380	234	202	436	(—49)
	381	249	206	455	(—25)
3	402	172	124	296	(—66)
	403	129	95	224	(—36)
zus.		1411	1153	2564	

Klassenstufe 8

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	358	204	173	377	(—239)
	359	186	169	355	(—194)
2	384	248	201	449	(—164)
	385	376	292	668	(—110)
3	404	147	78	225	(—21)
	405	83	47	130	(—76)
zus.		1244	960	2204	

Klassenstufe 9

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	362	182	108	290	(—11)
	363	128	63	191	(—13)
2	389	322	273	595	(—7)
	390	185	91	276	(—41)
3	406	72	24	96	(—1)
	407	95	24	119	(—37)
zus.		984	583	1567	

Klassenstufe 10/12

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	365	253	79	332	(—40)
	266	217	59	276	(—62)
2	393	51	17	68	(—36)
	394	172	44	216	(—46)
3	408	96	21	117	(—3)
	409	124	28	152	(—18)
zus.		913	248	1161	

Rechnen mit Resten

Teil 4

Am Ende des vorigen Beitrags hatten wir uns die Frage nach der Ausführbarkeit der Division in Restklassenringen vorgelegt.

Im Restklassenring modulo 7 z. B. ist die Division durch eine von $\bar{0}$ verschiedene Restklasse immer ausführbar. An der Multiplikationstabelle (siehe Heft 5/69) kann man das daran ablesen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Restklasse genau einmal auftritt.

Diese Eigenschaft der (bis auf die bewußte Ausnahme $\bar{0}$) unbeschränkten und eindeutigen Umkehrbarkeit der Multiplikation hat aber nicht nur der Restklassenring modulo 7, sondern jeder Restklassenring, sofern nur sein Modul m eine Primzahl ist. Diese Restklassenringe mit Primzahlmodul sind also „noch etwas Besseres" als der Ring der ganzen Zahlen, denn mit ganzen Zahlen ist ja die Division durchaus nicht immer ausführbar — das erreichen wir erst mit den rationalen Zahlen. Erst die rationalen Zahlen bilden nicht nur einen Ring, sondern sogar einen *Körper* — so nennt man nämlich Bereiche, in denen nicht nur die Ringgesetze gelten, die vielmehr außerdem noch die uneingeschränkte und eindeutige Umkehrung der Division gestatten (außer der Division durch das Nullelement freilich). Solche Körper sind also auch unsere Restklassenringe nach einem Primzahlmodul, und der „kleinste" gewissermaßen ist der Restklassenring — oder Restklassenkörper, wie wir jetzt ja auch sagen können — modulo 2. Dieser winzige Bereich mit nur zwei Elementen kann also in gewissem Sinne als ein verkleinertes Modell des Körpers der rationalen Zahlen angesehen werden.

Warum ist nun diese Körpereigenschaft auf Restklassenringe mit Primzahlmoduln beschränkt? Dazu schauen wir uns am besten einen von den anderen Restklassenringen an, etwa den modulo 6. Sehen wir hier die Multiplikationstabelle durch (Aufg. A 6), so fällt uns zunächst auf, daß das Nullelement $\bar{0}$ nicht nur in der ersten Zeile bzw. Spalte auftritt. Es ist ja $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{0}$ und auch $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$. Das ist aber sogar schon ein wesentlicher Unterschied zum Ring der ganzen Zahlen, denn in ihm läßt sich ja daraus, daß ein Produkt $a \cdot b = 0$ ist, schließen, daß mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist. Im Gegensatz zum Ring der ganzen Zahlen ist also der Restklassenring modulo 6 „nicht nullteilfrei". Es ist offensichtlich, daß die Eigenschaft der Nullteilerfreiheit auch den anderen Restklassenringen mit zusammengesetztem Modul m nicht zukommt. Denn ist etwa $m = m_1 \cdot m_2$, so ergibt immer $\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2 = \bar{0}$. Wer der Anregung der Aufgabe A 6 gefolgt ist und sich auch Multiplikationstabellen für $m = 10$ und $m = 24$ angelegt hat, der möge das an diesen Tabellen einmal untersuchen!

Damit ist nun aber auch klar, daß in den Zeilen bzw. Spalten der Tabelle, in denen gewissermaßen „zusätzlich" $\bar{0}$ als Produkt auftritt, nun nicht mehr alle Restklassen vertreten sein können. Das heißt aber, daß die Division nicht unbeschränkt ausführbar sein kann. So sind beispielsweise im Restklassenring modulo 6 folgende Divisionen nicht ausführbar: $\bar{1} : \bar{2}$, $\bar{3} : \bar{2}$, $\bar{5} : \bar{2}$, $\bar{1} : \bar{3}$, $\bar{2} : \bar{3}$, $\bar{4} : \bar{3}$, $\bar{5} : \bar{3}$, $\bar{1} : \bar{4}$, $\bar{3} : \bar{4}$ und $\bar{5} : \bar{4}$. Wer Lust hat zu weiteren vergleichenden Betrachtungen, der versuche es doch einmal mit den folgenden Aufgaben:

▲ A 9 Im Ring der ganzen Zahlen wird die Zahl 1 oft auch als „neutrales Element der Multiplikation" bezeichnet. Warum wohl? Gibt es auch in den Restklassenringen ein Element (d. h. eine Restklasse), das diese Rolle spielt?

▲ A 10 Der Ring der ganzen Zahlen wird „durch die Kleiner-Beziehung geordnet". Diese Ordnung ist beispielsweise mit der Addition durch ein sogenanntes Monotoniegesetz verbunden, das besagt:
Aus $a < b$ folgt stets $a + c < b + c$ für alle c.
Ist es auch in einem Restklassenring möglich (beispielsweise im Restklassenring modulo 7), eine solche „mit der Addition verträgliche Ordnung" einzuführen?

▲ A 11 Man stelle einmal die Divisionsaufgaben zusammen, die im Restklassenring modulo 10 (modulo 24) nicht lösbar sind.

5. Zur Sicherheit — — — und Schnelligkeit

Nach dem Bisherigen wird nun vielleicht mancher sagen: „Das Rechnen mit Kongruenzen und gar mit Restklassen mag ja für den Mathematiker recht interessant sein — hat es denn aber auch für das gewöhnliche Rechnen irgendeine Bedeutung?" Diese Frage muß unbedingt bejaht werden. Zunächst einmal sind hier die sogenannten Teilbarkeitsregeln zu nennen, deren Bedeutung für das praktische Rechnen — etwa für das Kürzen von Brüchen — wohl niemand bestreiten wird. Diese Teilbarkeitsregeln ergeben sich aber aus den Sätzen über das Rechnen mit Kongruenzen.

Eine solche Teilbarkeitsregel sagt uns ja z. B., daß eine Zahl genau dann durch 4 teilbar ist, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden.

Diese Regel ergibt sich durch folgende Überlegung:

▲ B 9 Die Zahl, deren Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen ist, sei etwa $7834 = 78 \cdot 100 + 34$. Nach den Sätzen über das Rechnen mit Kongruenzen ist $78 \cdot 100 \equiv 0\,(4)$ wegen $100 \equiv 0\,(4)$; ferner ist $34 \equiv 2\,(4)$, also $7834 \equiv 0 + 2\,(4)$. 7834 ist also nicht durch 4 teilbar, läßt vielmehr bei Division durch 4 den Rest 2.

Wie man sieht, lassen sich diese Überlegungen sofort auf beliebige Zahlen a übertragen. Wenn die ziffernmäßige Darstellung der Zahl a in unserer üblichen Zahlenschreibweise, dem Dezimalsystem, $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ lautet (a also n-stellig ist), so bedeutet das ja

$a = a_n 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Dafür können wir aber auch schreiben

$$a = (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 100 + 1 a_1 \cdot 10 + a_0).$$

Wegen $100 \equiv 0\,(4)$ kommt es für die Teilbarkeit von a durch 4 aber allein auf das Restverhalten von $a_1 \cdot 10 + a_0$ an.

Wir sehen, daß wir auf diese Weise sogar eine noch „schärfere“ Aussage als die oben formulierte Teilbarkeitsregel erhalten, nämlich:

Jede Zahl läßt bei Division durch 4 denselben Rest wie die von ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl.

In gleicher Weise erhalten wir durch Ausnutzen der Sätze über das Rechnen mit Kongruenzen auch die Teilbarkeitsregeln für 2 und 8, 5, 25 und 125, und auch diese Teilbarkeitsregeln lassen sich so wie die Teilbarkeitsregeln für 4 „verschärfen“. Dasselbe gilt für die — allerdings ein klein wenig anders herzuleitenden — Teilbarkeitsregeln für 3 und 9. Bei 9 lautet die schärfere Aussage z. B.:

Jede Zahl läßt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme.

Zur Herleitung dieses Satzes ist lediglich noch zu beachten, daß für alle Potenzen von 10 wegen $10 \equiv 1\,(9)$ gilt $10^n \equiv 1\,(9)$. Für die Teilbarkeit durch 11 muß beachtet werden, daß $10 \equiv -1\,(11)$ gilt. Mithin ist für alle geraden Potenzen $10^{2k} \equiv 1\,(11)$, für alle ungeraden $10^{2k+1} \equiv -1\,(11)$. Ein Beispiel soll verdeutlichen, wie man demnach bei der Untersuchung der Teilbarkeit durch 11 verfahren muß:

▲ B 10 2683 ist auf Teilbarkeit durch 11 zu untersuchen.

$2683 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$

Wegen $3 \equiv 3\,(11)$, $8 \cdot 10 \equiv -8\,(11)$,

$6 \cdot 10^2 \equiv 6\,(11)$ und $2 \cdot 10^3 \equiv -2\,(11)$ gilt

$2683 \equiv 3 - 8 + 6 - 2\,(11)$

2683 ist also nicht durch 11 teilbar, läßt vielmehr denselben Rest wie -1, also 10.

Man spricht hier aus naheliegenden Gründen von der „alternierenden Quersumme“ oder auch von der „Querdifferenz“. Beachtet man, daß die Einerstelle positiv genommen wird, so kann man formulieren:

Jede Zahl läßt bei der Division durch 11 denselben Rest wie ihre Querdifferenz. Insbesondere ist sie dann und nur dann durch 11 teilbar, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar ist.

Betrachten wir noch ein Beispiel für das bequeme Ermitteln der Querdifferenz:

▲ B 11 Welchen Elferrest hat 74 653 854 928?

Summe 38

$\dot{7}\ \underset{\cdot}{4}\ \dot{6}\ \underset{\cdot}{5}\ \dot{3}\ \underset{\cdot}{8}\ \dot{5}\ \underset{\cdot}{4}\ \dot{9}\ \underset{\cdot}{2}\ \dot{8}$ $\qquad 38 - 23 = 15$

Summe 23

74 653 854 928 hat also denselben Elferrest wie 15, nämlich 4 (= 5 — 1).

Nun braucht man zwar für das Herleiten der Teilbarkeitsregeln das Rechnen mit Kongruenzen bzw. Restklassen, nicht aber für ihre Anwendung. Etwas anders ist das schon bei den Rechenproben. Es geht dabei um das schnelle Überprüfen von einfachen Rechnungen — Additionen, Subtraktionen oder Multiplikationen. Eine Möglichkeit, solche Rechnungen zu überprüfen, besteht ja darin, sie einfach zu wiederholen. Dabei läuft man allerdings Gefahr, einen schon einmal gemachten Fehler zu wiederholen. Besser ist es schon, wenn man den Rechengang etwas verändert, etwa bei einer schriftlichen Addition von oben nach unten fortschreitend addiert, wenn man beim ersten Mal von unten nach oben vorgegangen ist. Freilich — ist die Anzahl der Summanden groß, so dauert das ziemlich lange, ebenso lange wie die ursprüngliche Rechnung. Eine andere Möglichkeit der Überprüfung besteht nun im Rechnen mit Restklassen. Was dabei vor sich geht, werden wir uns am Anfang unseres nächsten Beitrags anhand eines Beispiels klarmachen.

G. Lorenz

Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich ... nicht von der Wahrheit, sondern es kommt ihr näher. Die Abstraktion der Materie, des Naturgesetzes, die Abstraktion des Wertes usw., mit einem Wort alle wissenschaftlichen ... Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, genauer, vollständiger wider.

Lenin: Aus dem philosophischen Nachla

Mitglieder des *alpha*-Clubs der 29. OS überreichten der Kosmonautin V. Tereschkowa in Leipzig (13. 10. 1969) eine Grußadresse

Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen

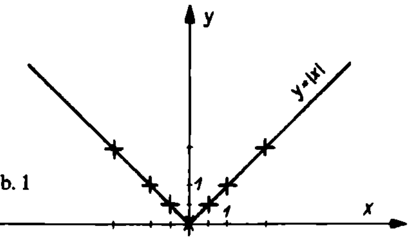


Abb. 1

Wir wiederholen:
Im Mathematikunterricht der Klasse 7 lernen wir:

Definition 1: Der absolute Betrag $|a|$ *einer reellen Zahl a ist für* $a \geq 0$[1] *erklärt als* $|a| = a$ *und für* $a \leq 0$[1] *erklärt als* $|a| = -a$.

Welche Zahl stellt nach Definition 1 $|x-2|$ dar, wenn x eine reelle Zahl ist? Für $|x-2| \geq 0$[2] gilt $|x-2| = x-2$ und für $x-2<0$[2] gilt $|x-2| = -(x-2) = -x+2$.

Aus dem Mathematikunterricht der Klasse 8 sind uns die Begriffe Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich sowie Funktionsgleichung bekannt. Wir wissen insbesondere: *Eine Funktion ist eindeutig bestimmt durch das Angeben der (expliziten) Funktionsgleichung und des Definitionsbereiches*[3]. So ist z. B. durch die Funktionsgleichung $y = |x|$ und der Menge *Re* der reellen Zahlen als Definitionsbereich eine Funktion erklärt. Für diese Funktion sollen zu einigen Zahlen des Definitionsbereiches die zugehörigen Zahlen des Wertebereiches in einer sogenannten Wertetabelle zusammengestellt werden:

x	y
0	$\lvert 0 \rvert = 0$
2	$\lvert 2 \rvert = 2$
-2	$\lvert -2 \rvert = 2$
0,5	$\lvert 0{,}5 \rvert = 0{,}5$
$-0{,}5$	$\lvert -0{,}5 \rvert = 0{,}5$
.	.
.	.

Mittels dieser Wertetabelle und der folgenden Definition können wir in einer mit einem kartesischen Koordinatensystem ausgestatteten Ebene einzelne Punkte des kartesischen Bildes von $y = |x|$ finden:

Definition 2: Das kartesische Bild einer Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ *und dem Definitionsbereich* $D \subsetneqq Re$ *besteht aus allen Punkten der Ebene, deren kartesische Koordinaten* $(x; y)$ *der Funktionsgleichung* $y = f(x)$ *und der Bedingung* $x \in D$ *genügen.*

Durch Ergänzen der Wertetabelle und Markieren der zugehörigen Punkte gelangen wir zu der Vermutung, daß das Bild von $y = |x|$ aus den beiden gezeichneten Strahlen besteht. Diese Vermutung läßt sich mit den anschließend vermittelten Kenntnissen leicht bestätigen. (siehe Abb. 1)

Zunächst soll hier noch ein Lehrsatz bereitgestellt werden, den wir im Mathematikunterricht der Klasse 8 kennenlernen:

Lehrsatz 1: Das kartesische Bild einer Funktion mit linearer Funktionsgleichung $y = mx+n$, *wobei m und n jeweils festgewählte reelle Zahlen sind*[3], *ist eine Gerade.*

Wir wissen, daß auf Grund von Satz 1 das kartesische Bild von $y = \frac{3}{4}x - 2$ eine Gerade ist. Um diese Gerade zu zeichnen, genügt es, zwei ihrer Punkte zu kennen. Wir berechnen also zunächst mittels Funktionsgleichung die Koordinaten zweier Punkte der Geraden, wobei wir die Abszissen (x-Werte) zweckmäßig wählen:

x	y
0	$\frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$
4	$\frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$

Nunmehr haben wir noch die diesen Koordinatenpaaren entsprechenden Punkte in einer mit einem kartesischen Koordinatensystem ausgestatteten Ebene zu markieren und schließlich die Gerade durch beide Punkte zu zeichnen:

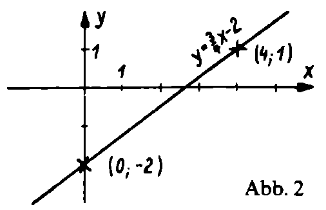


Abb. 2

Wir arbeiten gemeinsam: *Zu Funktionen mit gegebenen Funktionsgleichungen sind die kartesischen Bilder zu zeichnen.*

▲ Aufgabe 1: Zeichne das kartesische Bild der durch $y = |x+1| + \frac{x}{2} - 2$ erklärten Funktion![3]

Statt mit einer Wertetabelle zu operieren, mittels der wir ohnehin vom gesuchten kartesischen Bild nur endlich viele Punkte erhalten können, wollen wir durch Benutzen der Definition 1 und des Satzes 1 exakt den Gesamtverlauf des gesuchten kartesischen Bildes überblicken: Um für unsere Funktion eine Funktionsgleichung, in der kein Betragszeichen mehr vorkommt, zu erhalten, unterscheiden wir in Hinblick auf Definition 1 die Fälle $x+1 \geq 0$ und $x+1 < 0$, d. h. $x \geq -1$ und $x < -1$[4].

1. Fall:	2. Fall:
Es gelte $x \geq -1$.	Es gelte $x < -1$.

Gemäß Definition 1 gilt ...

$\lvert x+1 \rvert = x+1.$	$\lvert x+1 \rvert = -(x+1).$

Für die Gleichung unserer Funktion ergibt sich damit schrittweise:

$y = \lvert x+1 \rvert + \frac{x}{2} - 2$	$y = \lvert x+1 \rvert + \frac{x}{2} - 2$
$y = x+1 + \frac{x}{2} - 2$	$y = -(x+1) + \frac{x}{2} - 2$
$y = \frac{3}{2}x - 1$	$y = -\frac{x}{2} - 3$

Das kartesische Bild der durch $y = \frac{3}{2}x - 1$ für alle reellen Zahlen x erklärten Funktion ist gemäß Satz 1 eine Gerade. Da diese Funktionsgleichung jetzt nur für alle der Bedingungen $x \geq -1$ genügenden reellen Zahlen zutreffend ist, gehört zum kartesischen Bild von $y = |x+1| + \frac{x}{2} - 2$ ein auf der zu $y = \frac{3}{2}x - 1$ gehörigen Geraden

[1] Das Gleichheitszeichen braucht nur in einem der beiden Fälle gesetzt zu werden.

[2] Die Ungleichung $x-2 \geq 0$ ist äquivalent mit $x \geq 2$ und $x-2<0$ ist äquivalent mit $x<2$. Dabei bedeutet „äquivalent", daß beide Ungleichungen beim Einsetzen einer reellen Zahl anstelle der Variablen x entweder gleichzeitig wahre oder gleichzeitig falsche Aussagen entstehen lassen. U. a. mittels der folgenden Umformungsregel kann die eine Ungleichung in die zu ihr äquivalente umgeformt werden: „Für beliebige reelle Zahlen a, b und c gilt: Aus $a<b$ folgt $a+c<b+c$."

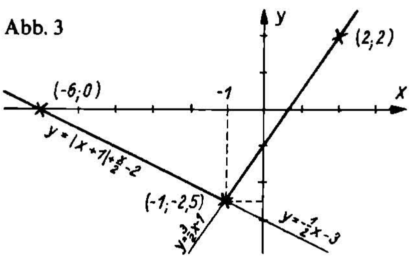
$x-2<0 \quad \mid +2$	$x<2 \quad \mid +(-2)$
$x-2+2<0+2$	$x+(-2)<2+(-2)$
$x<2$	$x-2<0$

[3] Ist der Definitionsbereich D einer Funktion mit der Funktionsgleichung $y=f(x)$ gleich der Menge *Re* aller reellen Zahlen x, so ist die Angabe des Definitionsbereiches D entbehrlich.

[4] Wir beachten Fußnote 2!

gelegener Strahl, dessen Anfangspunkt die Abszisse -1 hat. Außerdem gehört zum kartesischen Bild von $y = |x+1| + \frac{x}{2} - 2$ noch der Teil der zu $y = -\frac{x}{2} - 3$ gehörigen Geraden, dessen Punkte der Bedingung $x < -1$ genügende Abszissen haben:

Abb. 3



Aus der Zeichnung entnehmen wir, daß der Wertebereich dieser Funktion offenbar aus allen der Bedingungen $y \geqq -2{,}5$ genügenden reellen Zahlen besteht.

▲ Aufgabe 2: Zeichne das kartesische Bild der durch

$$y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1$$

erklärten Funktion![3)]

Auch für die Untersuchung des Verlaufs dieser Funktion wird es wieder vorteilhaft sein, eine Funktionsgleichung zu besitzen, in der kein Betragszeichen vorkommt. Dazu überlegen wir uns, daß für ...

$x+2 \geqq 0$,	$x+2<0$,
..., d. h. für ...	
$x \geqq -2$,	$x<-2$,
$\|x+2\| = x+2$	$\|x+2\| = -(x+2)$
... gilt.	

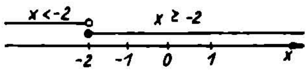


Abb. 4

Analog gilt für ...

$x-1 \geqq 0$,	$x-1<0$,
..., d. h. für ...	
$x \geqq 1$,	$x<1$,
$\|x-1\| = x-1.$	$\|x-1\| = -(x-1).$

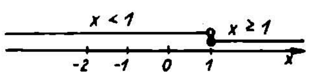


Abb. 5

Hiernach ist es naheliegend, den Definitionsbereich durch die Fallunterscheidung $x \geqq 1$, $-2 \leqq x < 1$ und $x < -2$ geeignet in paarweise elementfremden Teilmengen zu zerlegen.

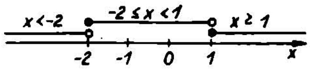


Abb. 6

Für $x \geqq 1$ gilt sowohl $|x+2| = x+2$ als auch $|x-1| = x-1$.

Hingegen gilt für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leqq x < 1$ zwar $x \mid x+2 \mid = x+2$ zwar $|x+2| = x+2$, aber $|x-1| = -(x-1)$.

Für $x < -2$ schließlich ist $|x+2| = -(x-2)$ und $|x-1| = -(x-1)$.

Damit ergibt sich aus

$$y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1$$

$$= -\frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(x-1) + x - 1 = x - \frac{5}{2}$$

für $-2 \leqq x < 1$

$$y = -\frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(x-1) + x - 1 = -\frac{3}{2}$$

und für $x < -2$

$$y = +\frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(x-1) + x - 1 = x + \frac{1}{2}.$$

Das kartesische Bild der Funktion

$$y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1^{3)}$$

besteht also aus drei Geradenstücken, die in den Punkten mit den Abszissen -2 und 1 „aneinandergeheftet" sind. Analog zum Vorgehen bei Aufgabe 1 kann die Aufgabe 2 ebenfalls vollständig gelöst werden.

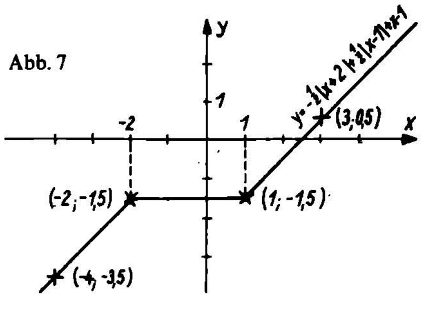
Wir wollen das Bild unserer Funktion jedoch auf einem anderen Weg gewinnen: Mit einiger Übung wird man von vornherein überblicken, daß das kartesische Bild der durch $y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1$ definierten Funktion[3)] aus drei Geradenstücken mit zwei Eckpunkten besteht, wobei die Abszissen der Eckpunkte -2 und 1 sind. Wer ganz exakt vorgehen will, beweist die folgende Aussage:

Lehrsatz 2: Die durch $y = a|x-x_1| + b|x-x_2| + cx + d$, wobei a, b, c, x_1 und x_2 festgewählte reelle Zahlen sind, erklärte Funktion[3)] besitzt für $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $x_1 \neq x_2$ als kartesisches Bild einen aus drei Geradenstücken bestehenden Linienzug, dessen Eckpunkte die Abszissen x_1 und x_2 haben.

Indem wir uns auf Satz 1 stützen, genügt zum Zeichnen des gesuchten kartesischen Bildes das Aufstellen einer Wertetabelle, in die neben den Abszissen der Eckpunkte noch zwei weitere Abszissen aufgenommen sind, deren eine größer und deren andere kleiner als die Abszissen der Eckpunkte ist.

x	y
-4	$-\frac{1}{2}\|-4+2\| + \frac{1}{2}\|-4-1\| + (-4) - 1 = -3{,}5$
-2	$-\frac{1}{2}\|-2+2\| + \frac{1}{2}\|-2-1\| + (-2) - 1 = -1{,}5$
1	$-\frac{1}{2}\|1+2\| + \frac{1}{2}\|1-1\| + 1 - 1 = -1{,}5$
3	$-\frac{1}{2}\|3+2\| + \frac{1}{2}\|3-1\| + 3 - 1 = 0{,}5$

Abb. 7



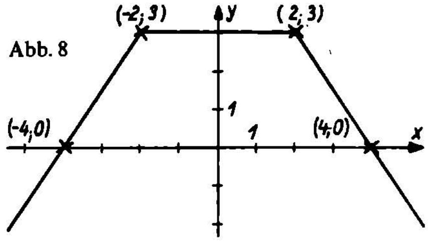
Die zu diesen Koordinaten gehörigen Punkte werden gezeichnet und in dieser Reihenfolge durch Geradenstücke verbunden. (Abb. 7) Am kartesischen Bild lesen wir ab, daß der Wertebereich dieser Funktion offenbar die Menge der reellen Zahlen ist.

Wir arbeiten selbständig:

▲ Aufgabe 3 (Klasse 8): Zeichne das kartesische Bild der durch $y = -|x+4| + \frac{1}{2}|x| + \frac{x}{2} + 1$ erklärten Funktion![3)]

▲ Aufgabe 4 (Klasse 9): Bestimme die Konstanten a, b, c, x_1 und x_2 in $y = a|x-x_1| + b|x-x_2| + cx + d$ so, daß die hierdurch erklärte Funktion[3)] das in der Zeichnung dargestellte kartesische Bild besitzt:

Abb. 8



Durch einen weiteren Beitrag werden wir Kenntnisse „Über Gleichungen mit absoluten Beträgen" erwerben. *W. Träger*

Wer schreibt für unsere Zeitschrift über die Möglichkeiten einer interessanten Gestaltung außerunterrichtlicher Arbeit im Mathematik-Fachkabinett seiner Schule? *alpha* erwartet zahlreiche Erfahrungsberichte.

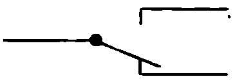
interscola

Unser Foto: Der Chefredakteur von *alpha* (im Bild rechts) beim Erfahrungsaustausch im Fachkabinett Mathematik der *interscola*, Herbstmesse 1969

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Rohleder

Direktor der Sektion
Rechentechnik und Datenverarbeitung
der Karl-Marx-Universität Leipzig

▲ 479 Ein Wechselschalter —

Symbol 

leitet einen von links kommenden elektrischen Strom je nach Schalterstellung zu einem der beiden nach rechts abgehenden Ausgänge.
Handelsübliche Drehschalter für Treppenhausbeleuchtungen tragen 2 Wechselschalter, die gleichzeitig umgeschaltet werden (man zeichne diese jeweils übereinander).
Gesucht ist eine Schaltung zur Beleuchtung eines Treppenhauses mit 2 Polen, welche immer, wenn ein beliebiger Schalter umgeschaltet wird, ihre elektrische Eigenschaft (zwischen den Polen leitend bzw. nicht leitend zu sein) ändert. War sie also elektrisch leitend, so unterbricht sie durch Umschalten den Strom und umgekehrt.
Lest die folgende Hilfestellung nur, wenn ihr nach längerem Überlegen keine Lösung gefunden habt!

Hilfestellung: Man entwerfe eine Schaltung mit einem Eingang und zwei Ausgängen. Der eine Ausgang erhält den Strom zugeführt, wenn eine gerade Anzahl von Schaltern eingeschaltet ist. Ist eine ungerade Anzahl von Schaltern eingeschaltet, wird der Strom zum anderen Ausgang geleitet.
Die Sektion *Rechentechnik und Datenverarbeitung* unterstützt die Sektion *Mathematik* bei der Ausbildung von zukünftigen Diplom-Mathematikern, insbesondere ist sie für die Fach- und Spezialausbildung in der Fachrichtung Mathematische Kybernetik und Rechentechnik zuständig. Darüber hinaus führt sie die Ausbildung *aller* Studenten der KMU in EDV durch. Neben weiteren umfangreichen Aufgaben in der Forschung der nichtnumerischen Informationsverarbeitung unterstützt sie Praktiker vor allem in EDV sowie andere Sektionen der KMU und weiterer Einrichtungen in der Anwendung der Maschinellen Rechentechnik.

Berufsbild: Diplom-Mathematiker

Wir wollen uns heute in der Reihe der Berufsbilder mit den Voraussetzungen, dem Studiengang und den Einsatzmöglichkeiten eines Mathematikers beschäftigen, der an der ältesten Universität der DDR ausgebildet wird, an der *alma mater lipsiensis,* die sich unter dem verpflichtenden Namen Karl-Marx-Universität Leipzig zu einer der modernsten Bildungseinrichtungen unseres Hochschulwesens entwickelt hat.

Wer soll Mathematik studieren?

Ein Leser der Zeitschrift *alpha*, dem das Lösen mathematischer Aufgaben zu einem Bedürfnis geworden ist, der ständig an neuen Problemstellungen interessiert ist und mit Beharrlichkeit und Ausdauer auch kompliziertere Aufgaben zu meistern sucht, selbst wenn keine Prämiierung winkt, wer also den „lebendigen Drang nach Erkenntnis“ in sich fühlt, mitgestalten möchte und nicht nur nach dem ansprechenden Gehalt und der angesehenen Stellung eines Mathematikers schielt, dem sei empfohlen, ein Mathematikstudium aufzunehmen.

Wer darf Mathematik studieren?

Jeder, der die Hochschulreife besitzt und gute Abiturnoten aufweisen kann.

Wo und woran arbeiten Mathematiker?

Noch vor 30 Jahren hätte man hierauf nur antworten können: in der Industrie an der Lösung ingenieurtechnischer Aufgaben und in Banken sowie Versicherungsanstalten an Renten- bzw. Versicherungssätzen.
Mathematiker findet man heute überall dort, wo Information erfaßt, gespeichert und verarbeitet wird, d.h. in allen Bereichen der modernen Gesellschaft. In der Industrie sitzen Mathematiker nicht mehr nur in den Büros für Forschung und Entwicklung, sondern arbeiten in zunehmendem Maße auch an technologischen und betriebswirtschaftlichen Aufgaben. Die Landwirtschaft ist das Feld des Agrarstatistikers. Optimale Erträge im Ackerbau und bei der Tierzucht erfordern die lenkende Hand des Mathematikers. In der Verwaltung und im Handel sind für die wissenschaftliche Vorbereitung von Leitungsentscheidungen Mathematiker unentbehrlich.
Darüber hinaus müssen die eigenständigen Bereiche genannt werden. Mathematiker arbeiten an der Aus- und Weiterbildung von Mathematikern und mathematikintensiven Berufsgruppen an Universitäten, Hoch- und Fachschulen sowie Betriebsakademien. Mathematiker bilden den wissenschaftlichen Stamm bei der Konstruktion und Entwicklung von Großrechenanlagen sowie beim Einsatz in Rechenzentren, wobei sie sowohl maschinen- als auch problemorientierte Aufgaben zu lösen haben.
Rechenzentren von Großbetrieben, VVB, der NVA usw. bilden Konzentrationspunkte von Mathematikern; ihre Anzahl und ihre Bedeutung wird in den nächsten Jahren in der DDR enorm wachsen.

Welche Spezialrichtungen gibt es in Leipzig?

a) Analysis
Die traditionelle Ausbildungsrichtung Analysis wird von denen gewählt, die später an technisch-physikalischen Problemen arbeiten wollen.
Nebenfach: Theoretische Physik

b) Mathematische Methoden der Operationsforschung
Diese Richtung ist für Spezialisten der Organisationswissenschaft bestimmt. Einsatzbereich: Industrie, Verkehr, Verwaltung.
Nebenfach: Ökonomie

c) Mathematische Kybernetik und Rechentechnik
Wer sich für Rechenautomaten interessiert und an ihrer Entwicklung mitarbeiten will, findet hier die sachgemäße Ausbildung.
Nebenfach: Technische Physik.

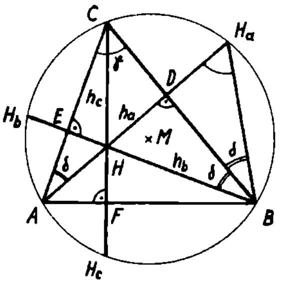
Wie ist der Studiengang?

Ein zweijähriges einheitliches Grundstudium vermittelt Grundkenntnisse in Analysis, Algebra und Geometrie, Rechentechnik, numerische Mathematik, Operationsforschung und Kybernetik. Danach erfolgt eine wiederum zweijährige Spezialausbildung entsprechend den o.g. drei Richtungen, die mit einer allgemeinen praxisbezogenen Diplomarbeit abschließt.

Wann wurde das vierjährige Mathematikstudium in Leipzig eingeführt?

Am 1. 9. 1969. *H.-J. Girlich*

Kleine „geometrische“ Exkursion



Wir laden euch heute zu einer kleinen „geometrischen“ Exkursion ein und hoffen, daß ihr recht zahlreich unseren interessanten, aber nicht unbeschwerlichen Wegen folgen werdet. Zum erfolgreichen Gelingen dieser Exkursion benötigt ihr die entsprechende Ausrüstung; sie besteht aus Bleistift, Zeichenpapier, Lineal, Zirkel und Zeichendreieck. So ausgerüstet wollen wir nun gemeinsam mit Schwung und Optimismus auf Entdeckungsreise gehen.

Arbeitsauftrag: Zeichnet ein spitzwinkliges Dreieck ABC, konstruiert die drei Höhen dieses Dreiecks, benennt die Fußpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c in dieser Reihenfolge mit D, E und F und den Höhenschnittpunkt mit H. Spiegelt nun den Höhenschnittpunkt H an den drei Seiten a, b und c des Dreiecks ABC, benennt die erhaltenen Bildpunkte in dieser Reihenfolge mit H_a, H_b und H_c. Konstruiert schließlich den Umkreis des Dreiecks ABC; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius r.

Wer den Arbeitsauftrag richtig verstanden und sauber gezeichnet hat, wird eine geometrische Entdeckung machen; wir wollen sie formulieren.

Der Umkreis des Dreiecks ABC geht genau durch die drei Bildpunkte H_a, H_b und H_c des an den Dreiecksseiten gespiegelten Höhenschnittpunktes H (siehe Abb. rechts oben).

Diese Feststellung muß selbstverständlich noch bewiesen werden, und wir wollen uns nun an den Beweis wagen.

Wir verbinden B mit H_a. Auf Grund der ausgeführten Konstruktion gilt:

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC = 90°$, $\overline{HD} = \overline{DH_a}$ und

$\sphericalangle CBE = \sphericalangle CBH_a$.

Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt

$\sphericalangle CAD = 90° - \gamma = \delta$;

im rechtwinkligen Dreieck BCE gilt

$\sphericalangle CBE = 90° - \gamma = \delta$.

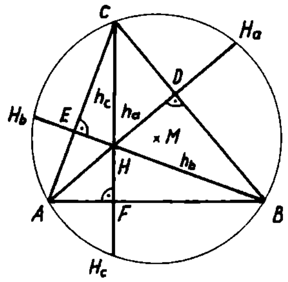
Daraus folgt $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBH_a = \delta$.

Für das rechtwinklige Dreieck DBH_a gilt somit $\sphericalangle DH_aB = 90° - \delta = \gamma$,

also $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AH_aB$.

Die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle AH_aB$ stehen über derselben Sehne $\overline{AB}$, sie sind außerdem gleich groß; ihre Scheitelpunkte C und H_a müssen folglich auf demselben zur Sehne $\overline{AB}$ gehörenden Kreis, nämlich dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen.

In analoger Weise läßt sich nachweisen, daß die Punkte H_b und H_c ebenfalls auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen. Diesen Beweis werdet ihr sicher allein ausführen können.



Es bleibt euch nun überlassen, nachzuweisen, ob der entdeckte geometrische Sachverhalt auch für ein rechtwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck zutrifft, das heißt, ob er allgemein gültig ist. Nach einer kurzen Verschnaufpause wollen wir indessen weiter auf Entdeckungsreise gehen.

Arbeitsauftrag: Zeichnet ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruiert seinen Umkreis. Von einem Punkt P des Umkreises, der nicht mit einem Eckpunkt des Dreiecks zusammenfällt, sind die Lote auf die drei Seiten a, b und c des Dreiecks bzw. auf ihre Verlängerungen zu fällen; die Fußpunkte der Lote sind in dieser Reihenfolge mit P_a, P_b und P_c zu benennen. Schließlich ist P_a mit P_b und P_b mit P_c zu verbinden.

Welche neue Entdeckung habt ihr gemacht? Versucht, eure Feststellung zu formulieren!

Die Fußpunkte der von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks auf die Dreieckseiten bzw. ihre Verlängerungen gefällten Lote liegen auf einer Geraden.

Bevor wir den etwas beschwerlichen Weg des Beweisens dieser Aussage gehen, wollen wir unser Gedächtnis auffrischen:

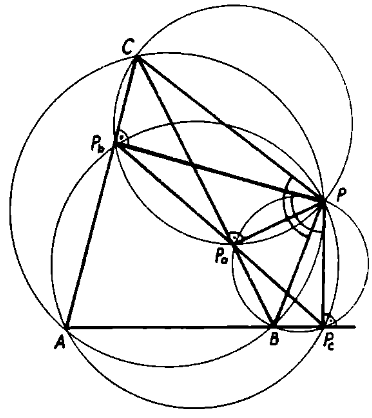
(1) Satz: Die Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises, deren Scheitel mit dem Mittelpunkt auf der gleichen Seite der Sehne liegen, sind untereinander kongruent.

(2) Definition: Liegen die vier Eckpunkte eines konvexen Vierecks auf einem Kreis, so nennt man es Sehnenviereck.

(3) Satz: Im Sehnenviereck ergänzen sich die einander gegenüberliegenden Winkel zu 180°.

(4) Umkehrung dieses Satzes: Ergänzen sich in einem Viereck die einander gegenüberliegenden Winkel zu 180°, so ist dieses Viereck ein Sehnenviereck.

Nun schaut euch gründlich eure angefertigten Zeichnungen an; wer aufmerksam ist, wird vier Sehnenvierecke entdecken.



Das Viereck $ABPC$ ist auf Grund der Konstruktion ein Sehnenviereck. Im Viereck AP_cPP_b ergänzen sich die einander gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle AP_cP$ und $\sphericalangle AP_bP$ zu 180°; somit ist dieses Viereck ein Sehnenviereck.

Gleiche Überlegungen treffen auf das Viereck BP_cPP_a zu, und es ist deshalb ebenfalls ein Sehnenviereck.

Im Viereck PCP_bP_a sind die Winkel $\sphericalangle PP_aC$ und $\sphericalangle PP_bC$ nach Konstruktion rechte Winkel, und sie stehen beide über derselben Sehne $\overline{PC}$. Folglich läßt sich über $\overline{PC}$ als Durchmesser der Thaleskreis konstruieren, und Viereck PCP_bP_a ist ein Sehnenviereck.

Unsere Beweisführung ist abgeschlossen, wenn es uns gelingt, nachzuweisen, daß die Winkel $\sphericalangle CP_aP_b$ und $\sphericalangle BP_aP_c$ untereinander kongruent sind. (Warum? Was folgt daraus?)

Und nun gehen wir unsere letzte Wegstrecke. Da Viereck $ABPC$ ein Sehnenviereck ist, gilt wegen (3) $\sphericalangle CPB = 180° - \alpha$. Da Viereck AP_cPP_b ein Sehnenviereck ist, gilt wegen (3) $\sphericalangle P_bPP_c = 180° - \alpha$.

Daraus folgt	$\sphericalangle P_bPP_c = \sphericalangle CPB$ und		
somit auch	$\sphericalangle CPP_b = \sphericalangle BPP_c$.	(5)
Wegen (1) gilt	$\sphericalangle BPP_c = \sphericalangle BP_aP_c$	(6)
und	$\sphericalangle CPP_b = \sphericalangle CP_aP_b$.	(7)

Aus (5), (6) und (7) folgt schließlich $\sphericalangle CP_aP_b = \sphericalangle BP_aP_c$. Da die Punkte B, P_a und C nach Konstruktion auf einer Geraden liegen, die Winkel $\sphericalangle CP_aP_b$ und $\sphericalangle BP_aP_c$ der Lage nach Scheitelwinkel sind, liegen auch die Punkte P_a, P_b und P_c auf einer Geraden.

Damit haben wir das Ziel unserer gemeinsamen „geometrischen“ Exkursion erreicht. Wir hoffen, daß ihr durchgehalten und voller Eifer mitgemacht habt.

Th. Scholl

Prüfungsaufgaben aus Island, Teil 1

Mittelschulprüfung Frühjahr 1969
Landesprüfung Abschluß 9. Klasse

Für jede der Aufgaben 1 bis 7 sind einige Lösungen vorgegeben. Die richtige Lösung jeder Aufgabe ist durch ein Kreuz in der Klammer (x) hinter der zutreffenden Lösung kenntlich zu machen.

▲ 1 $(-40)\cdot(-2{,}5)\cdot(-0{,}5)=$
$50(\ );\ -50(\ );\ 5(\ );\ -5(\ );\ 0{,}5(\ );\ -0{,}5(\ )$.

▲ 2 x sei eine ganze Zahl, die bei Division durch 6 den Rest 5 läßt. Welchen Rest läßt dann die Zahl $x+3$ bei Division durch 6?
0 ( ); 1 ( ); 2 ( ); 3 ( ); 4 ( ); 5 ( ).

▲ 3 Wie schreibt man die Zahl „einhundertundeins" im Dualsystem? 101 ( ); 101 101 ( ); 110 101 ( ); 1 100 101 ( ); 1 010 101 ( ).*

▲ 4 Einer im Dualsystem geschriebenen Zahl wird rechts eine Null angefügt. Wie ändert sich dadurch die ursprüngliche Zahl? Sie wird um 10 vergrößert ( ); sie bleibt unverändert ( ); sie wird zehnmal so groß ( ); sie wird um 2 größer ( ); sie wird zweimal so groß ( ).

▲ 5 $(-6x^3y^2z)\cdot(-5x^2y^2)=$
$30x^5y^4z$ ( ); $-30x^5y^4z$ ( ); $30x^6y^4z$ ( ); $-30x^6y^4z$ ( );
eine nicht angeführte Lösung ( ).

▲ 6 Die Variablen x und y seien proportional zueinander. Für $x=7$ gilt $y=12$. Welchen Wert nimmt y dann für $x=3$ an?
$5\frac{1}{7}$ ( ); 8 ( ); $1\frac{3}{4}$ ( ); 28 ( ); 3 ( ).

▲ 7 $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$
$A \cup B \cap C$ ( ); $A \cup (B \cap C)$ ( ); $(A \cup B) \cap C$ ( ); $(A \cap B) \cup C$ ( ); $A \cap (B \cup C)$ ( ).

Für jede der Aufgaben 8 und 9 sind einige Aussagen angegeben. In jede hinter einer wahren Aussage stehenden Klammer ist ein W, in jede hinter einer falschen Aussage stehenden Klammer ein F zu setzen.

▲ 8 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
$B = \{x \mid x^2 = -1 \wedge x \in \Delta\}$;
$C = \{x \mid x$ ist Primzahl kleiner als $16\}$;
$D = \{x \mid x$ ist Teiler von $12 \wedge x \in N\}$;
$E = \varnothing$.

Welche der folgenden Aussagen über die fünf vorgegebenen Mengen A, B, C, D und E sind wahr, welche falsch?
$A=D$ ( ); $A\sim D$ ( ); $A=C$ ( ); $A\sim C$ ( ); $A=E$ ( ); $A\sim E$ ( ); $C=D$ ( ); $C\sim D$ ( ); $E=B$ ( ); $E\sim B$ ( ).

▲ 9 Gegeben sei die Menge $A=\{0, 3, 5\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
$3\in A$ ( ); $\{5\}\in A$ ( ); $5\subset A$ ( ); $O\in\varnothing$ ( ); $\{5\}\subset A$ ( ).

Bei den folgenden Aufgaben sind die Lösungen in die im Aufgabenvordruck freigehaltenen Stellen einzutragen.

▲ 10 Ergänze die geometrische Zahlenfolge 2, 4, 8, 16, ..., ... durch ihre nächsten beiden Glieder.

▲ 11 Das nächste Glied der Zahlenfolge 2, 4, 8, 16 ist in gleicher Weise wie dargestellt als Summe zu schreiben.

$2=1+1$
$4=1+2+1$
$8=1+3+3+1$
$16=1+4+6+4+1$
__ = ____________

▲ 12 Dividiert man 23 076 103 durch 8, so bleibt der Rest____.

▲ 13 Multipliziere $3{,}2\cdot 10^7$ mit $4\cdot 10^{-4}$ und schreibe das Produkt in der gleichen Weise. Lösung: ______________

▲ 14 Es ist die Differenz der im Dualsystem dargestellten beiden Zahlen zu ermitteln.
$$\begin{array}{r} 10010 \\ -\ \ 111 \\ \hline \end{array}$$
Lösung: ________

▲ 15 Die Zahlen der folgenden Aufgaben sind im Dreiersystem dargestellt.
a) Fülle die Additionstabelle aus:

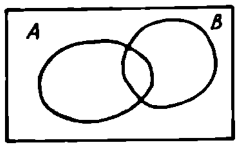
+	0	1	2
0			
1			
2			

b) Fülle die Multiplikationstabelle aus:

·	0	1	2
0			
1			
2			

c) Multipliziere im Dreiersystem
1221 · 12 = ________
d) Dividiere im Dreiersystem
221 : 12 = ________

▲ 16 Schraffiere den Flächenteil des nachstehend abgebildeten Venndiagrammes, der der Vereinigungsmenge $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ entspricht.



▲ 17 Gegeben sei der Grundbereich $U=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und die Mengen $A=\{4, 6, 7\}$ und $B=\{4, 5, 6, 8\}$. Tragen Sie die Elemente der folgenden Mengen ein:
a) $A\cup B=\{\ \ \}$; b) $A\cap B=\{\ \ \}$; c) $\bar{B}=\{\ \ \}$; d) $\bar{U}=\{\ \ \}$; e) $A\setminus B=\{\ \ \}$.

▲ 18 Jeder der beiden Linearfaktoren ist durch ein Glied so zu ergänzen, daß die nachfolgende Gleichung allgemeingültig ist.
$3x^2-2x-16=(3x\qquad)\cdot(\qquad 2)$

▲ 19 Auf beiden Seiten der nachstehenden Gleichung ist je ein Glied so zu ergänzen, daß die Gleichung eine Identität darstellt.
genden Menge auf.
$x^2-6x\qquad=(x\qquad)^2$

▲ 20 Welche reelle Zahl p erfüllt die Gleichung $101^2-99^2=2p$? Lösung: $p=$________

▲ 21 Welche reelle Zahl a erfüllt die Gleichung $5ax+4=19$, wenn $x=\frac{1}{2}$ ist?
Lösung: $a=$________

▲ 22 Schreibe die Elemente der nachfolgenden Menge auf.
$\{x \mid (x-1)\cdot(x-2)=0\} = \{\qquad\qquad\}$

▲ 23 Löse das lineare Gleichungssystem
$2x-3y=23\qquad x=$______
$x+y=44\qquad y=$______

▲ 24 Kürze und vereinfache den nachstehenden Term so weit wie möglich.
$$\frac{x^2+8x-20}{2x^2-8}\cdot(4x+8)$$

▲ 25 Reduziere den nachfolgenden Term auf eine möglichst einfache Form!**
$$\frac{x+5}{5-x}+\frac{x+4}{x+5}+\frac{10}{25-x^2}$$

Eingesandt von Mathematikfachlehrer Gestur O. Gestsson, Reykjavik

Lösungen siehe in diesem Heft S. 140!

* In der rechnerischen Praxis schreibt man gewöhnlich statt der Ziffer 1 den Buchstaben L, zum Beispiel LOL, LOLLOL usw.
** Die vorliegenden Aufgaben sind eine repräsentative Auswahl der insgesamt 50 gestellten Prüfungsaufgaben, d. Red.

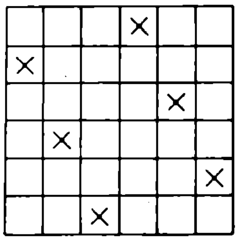
VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade

Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

1. Eine Lösungsmöglichkeit ist z. B. die in der Abb. dargestellte.



2. Es gilt:
85000 kg = 85 t und 5000 kg = 5 t.
Wenn nach der Entnahme von 85 t Weizen aus dem ersten und 5 t aus dem zweiten die Bestände in den beiden Lagerräumen gleich sind, befanden sich im ersten Lagerraum 80 t mehr als im zweiten; denn 85 t — 5 t = 80 t.
Da im ersten Lagerraum der Bestand anfangs dreimal so groß wie im zweiten war und nach der Entnahme in beiden die Bestände gleich sind, muß anfangs der Überschuß des ersten Raumes zweimal so groß wie der Bestand des zweiten Raumes gewesen sein. Also befanden sich im zweiten Raum die Hälfte von 80 t, das sind 40 t, und im ersten 120 t Weizen; denn 40 t · 3 = 120 t.
Als Probe gilt: 40 t — 5 t = 35 t
und 120 t — 85 t = 35 t.

3. Da Gerd mehr als doppelt so alt ist wie seine Schwester und seine Schwester viermal so alt ist wie ihr Bruder, so muß Gerd mehr als achtmal so alt sein wie sein Bruder. Wäre sein Bruder zwei oder mehr Jahre alt, dann müßte Gerd mehr als 16 Jahre alt sein. Das widerspräche der Angabe, daß die Summe der Jahre 17 beträgt.
Also ist der Bruder 1 Jahr alt, die Schwester demnach 4 Jahre, und wegen 17 — 1 — 4 = 12 muß Gerd 12 Jahre alt sein.
Wegen 4 · 4 > 12 ist auch die Bedingung erfüllt, daß Gerd weniger als viermal so alt ist wie seine Schwester. Die angegebene Lösung genügt damit allen Bedingungen und ist zugleich die einzig mögliche.

4. Die Zahl 180 läßt sich nur auf die folgenden Weisen in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a, b) zerlegen:

$$\begin{aligned} 180 &= 180 \cdot 1 = 90 \cdot 2 = 60 \cdot 3 = 45 \cdot 4 \\ &= 36 \cdot 5 = 30 \cdot 6 = 20 \cdot 9 = 18 \cdot 10 \\ &= 15 \cdot 12 \end{aligned}$$

Dabei ist wegen $15 - 12 = 3$ nur für $a = 15$ und $b = 12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Olympiadeklasse 6

1. Die Gesamtschülerzahl n muß ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu.
$\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.
Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3; denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

2. Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.
Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$.
Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.
Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g,$$

dann ergibt sich:

$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g;$$

daraus folgt $\frac{1}{70}g = 4$

demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.

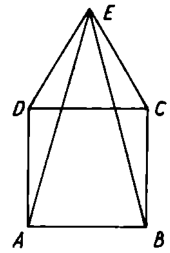
Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m. In der Tat ergibt sich als Probe

$$72 + 64 = 136, \qquad 72 = 64 + 8,$$

$$84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60),$$

$$60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60).$$

3. Im Dreieck $\Delta\, AED$ gilt: (siehe Abb.)
$\overline{AD} = \overline{DE}$ (nach Konstruktion)
(1) Daraus folgt $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\overline{\sphericalangle EDA} = \overline{\sphericalangle EDC} + \overline{\sphericalangle CDA} = 150°$;
($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.) denn $\overline{\sphericalangle EDC} = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\overline{\sphericalangle CDE} = 90°$ (Winkel im Quadrat).



Aus (1), (2), und
$\overline{\sphericalangle AED} + \overline{\sphericalangle EDA} + \overline{\sphericalangle DAE} = 180°$
(nach Winkelsummensatz)
folgt $\overline{\sphericalangle AED} = 15°$.
Entsprechend ist $\overline{\sphericalangle BEC} = 15°$, also
$\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle DEC} - \overline{\sphericalangle AED} - \overline{\sphericalangle BEC} = 30°$

4. a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen.
Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das k. g. V. von 300, 225 und 180 beträgt 900; und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.
b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

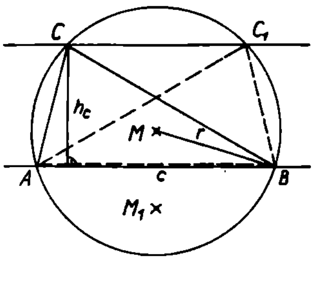
Olympiadeklasse 7

1. Wegen des Gesamtbetrages muß Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.
Da 4 M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben. Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z. B. 3 M; 2,50 M; 2,40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:

Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke
oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

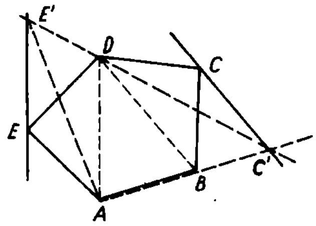
2. a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:
$ab + x = a^2$, woraus man
$x = a^2 - ab$ erhält.
Also kann höchstens die Zahl
$x = a^2 - ab = a(a - b)$ Lösung sein.
Tatsächlich ist
$a \cdot b + a(a - b) = ab + a^2 - ab = a^2$.
b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:
$ab - y = b^2$, woraus man
$y = ab - b^2$ erhält.
Also kann höchstens die Zahl
$y = ab - b^2 = b(a - b)$ Lösung sein.
Tatsächlich ist
$a \cdot b - b(a - b) = ab - ab + b^2 = b^2$.

3. (I) Angenommen, $\Delta\ ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks $\Delta\ ABC$ im Abstand h_c von AB.



(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\Delta\ ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt. Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c. Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht. Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1. Die Dreiecke $\Delta\ ABC$ bzw. ABC_1 entsprechen den Bedingungen.
(III) Der Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck $\Delta\ ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

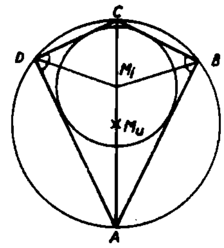
4. Das Fünfeck $ABCDE$ läßt sich in die Teildreiecke $\Delta\ ADE$, $\Delta\ ABD$ und $\Delta\ BCD$ zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'. Dann ist das Dreieck $\Delta\ BC'D$ flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\Delta\ BCD$; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein. Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und



verlängert $C'D$ über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\Delta\ ADE'$ ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\Delta\ ADE$. Daher ist das aus den Teildreiecken $\Delta\ ADE'$, $\Delta\ ABD$ und $\Delta\ BC'D$ bestehende Dreieck $\Delta\ AC'E'$ flächeninhaltsgleich dem Fünfeck $ABCDE$.

Olympiadeklasse 8

1. a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis.
Beweis: Hat ein Drachenviereck $ABCD$ etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\Delta\ ABC$ und $\Delta\ ACD$ kongruent (*sss*). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i. Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks $ABCD$. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand. Wegen der Konvexität von $ABCD$ fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks $ABCD$.
Für ein Drachenviereck $ABCD$ mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:
1. Fall: $\sphericalangle\ ABC = \sphericalangle\ ADC = 90°$. ($\sphericalangle\ ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle\ ABC$.
In diesem Fall hat das Drachenviereck $ABCD$ als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.
2. Fall: $\sphericalangle\ BAD = \sphericalangle\ BCD = 90°$.
In diesem Fall folgt aus $\sphericalangle\ ABC + \sphericalangle\ ADC = 360° - (\sphericalangle\ BAD + \sphericalangle\ BCD) = 180°$
und $\sphericalangle\ ABC = \sphericalangle\ ADC$
(dies wegen $\Delta\ ABC \cong \Delta\ ADC$),
daß $\sphericalangle\ ABC = \sphericalangle\ ADC = 90°$ gilt,
also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.
b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, daß er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\Delta\ ABC$). Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B.
(*Bemerkung:* Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Vierecksseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden.)



c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\Delta\ ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle\ ABC$ und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d.h. M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

2. Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als $100a + 10b + c$ und die zweite Zahl z_2 als $100c + 10b + a$ darstellbar. Für die Differenz $d = z_1 - z_2$ ergibt sich
$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$
$d = 99a - 99c$
$d = 99 \cdot (a - c)$.
Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:
(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d.s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,
(2) alle natürlichen Teiler von $|a - c|$,
(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.
*) Ausführliche Aufzählung:
Für $|a - c|$ kommen (wegen $0 < a \leq 9$; $0 < c \leq 9$; a, c ganzzahlig) nur die Werte 0, ..., 8 in Frage; man erhält:

$\lvert a - c \rvert$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3,6,9,11,18,22,33,66,99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3,4,6,9,11,12,18,22,33,36,44,66, 99,132,198,396
5	1,3,5,9,11,15,33,45,55,99,165,495
6	1,2,3,6,9,11,18,22,27,33,54,66,99, 198,297,594,
7	1,3,7,9,11,21,33,63,77,99,231,693
8	1,2,3,4,6,8,9,11,12,18,22,24,33,36, 44,66,72,88,99,132,198,264,396,792

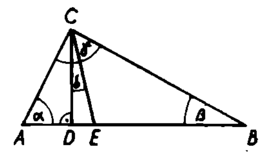
3. Es sei o. B. d. A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\Delta\ ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben. Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0°$ und die Behauptung daher richtig. Sei nun $\alpha \neq \beta$,

etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\sphericalangle\, DEC \cong \sphericalangle\, AEC$, d.h.

$$90° - \delta = 180° - (\alpha + \tfrac{\gamma}{2}), \text{ also}$$

$$\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90° = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) - 90°$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \text{ w.z.b.w.}$$



4. In der Zeit $t_1 = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.
Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x\frac{\text{km}}{\text{h}}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x + 25)\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann:

$$x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}.$$

Daraus erhält man

$$x = \frac{5 \cdot 55}{6} = 45\frac{5}{6}.$$

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Wegen $\frac{5 \cdot 55}{6} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64{,}9$ beträgt die durchfahrene Wegstrecke

$$s = 64\,\frac{67}{72}\text{ km} \approx 64{,}9 \text{ km}.$$

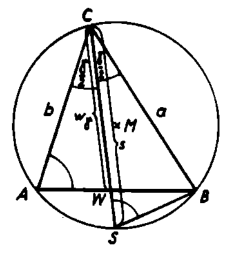
Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt: In 85 min durchfährt der LKW mit seiner Geschwindigkeit $45\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Strecke $\frac{85}{60} \cdot \frac{275}{6}$ km $= \frac{5 \cdot 55 \cdot 85}{6 \cdot 60}$ km $= s$; die Geschwindigkeit $70\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ des PKW ist um $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer als die des LKW, und mit ihr durchfährt er in $(85 - 30)$ min $= 55$ min die Strecke

$$\frac{55}{60} \cdot \frac{425}{6}\text{ km} = \frac{5 \cdot 55 \cdot 85}{6 \cdot 60}\text{ km} = s.$$

Olympiadeklasse 9

1. b) Angenommen, man hat fünf Zahlen der gesuchten Art. Dann hat die kleinste von ihnen, da sie größer als 2 ist, die Form $2 + k$ mit einer ganzen Zahl $k \geqq 1$. Die fünf Zahlen lauten demnach $2 + k, 3 + k, \ldots, 6 + k$. Da sie in dieser Reihenfolge durch $2, 3, \ldots, 6$ teilbar sind, so ergibt sich der Reihe nach, daß k Vielfaches von $2, 3, \ldots, 6$, also auch Vielfaches des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen 60 von $2, 3, \ldots, 6$, sein muß.
Umgekehrt: Für jedes positive Vielfache $60n$ von 60 sind (1) $2 + 60n, 3 + 60n, \ldots, 6 + 60n$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen größer als 2, die in dieser Reihenfolge durch $2, 3, \ldots, 6$ teilbar sind. Man erhält alle Lösungen der Aufgabe in der Form (1) (mit ganzem $n \geqq 1$). Insbesondere führt $n = 1$ auf die Lösung
a) $62, 63, \ldots, 66$.

2. Es seien a, b die Längen der Seiten BC und AC des Dreiecks $\Delta\, ABC$, w_γ die Länge der Winkelhalbierenden CW und schließlich s die gesuchte Länge der Sehne CS (siehe Abb.).



Nach dem Satz über Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen (BC) gilt dann

$\sphericalangle CAW = \sphericalangle CSB$ ($\sphericalangle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle\, ABC$). Nach Definition der Winkelhalbierenden gilt weiter

$$\sphericalangle\, ACW = \sphericalangle\, SCB.$$

Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\Delta\, ACW \sim \Delta\, SCB$ und damit

$$b : w_\gamma = s : a$$
$$w_\gamma \cdot s = a \cdot b$$
$$s = \frac{a \cdot b}{w_\gamma}$$

3. Angenommen, (x, y) ist ein solches Zahlenpaar,
dann gilt $x^3 > y^3$, also

$x > y$, also

$x = y + d$ (d natürliche Zahl). (1)

Ferner gilt:

$y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3 - y^3 = 999$,
also $d(3y^2 + 3yd + d^2) = 999$. (2)

Daraus folgt $d | 999$.
Wegen $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ hat 999 außer 1, 3 und 9 als positive Teiler nur Zahlen $\geqq 27$. Wegen $27^3 > 999$ und (2) scheiden die letzteren als Werte für d aus, d.h. es kann höchstens $d = 1$ oder $d = 3$ oder $d = 9$ sein.
Es sei $d = 1$. Dann folgt aus (2)

$$3y^2 + 3y + 1 = 999$$
$$y^2 + y - \frac{998}{3} = 0.$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind keine natürlichen Zahlen.
Es sei $d = 3$. Dann folgt aus (2)

$$3y^2 + 9y + 9 = 333$$
$$y^2 + 3y - 108 = 0, \text{ also}$$
$$y_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 432},$$

woraus sich wegen $y > 0$ also $y = 9$ und wegen (1) $x = 12$ ergibt.
Tatsächlich ist wegen
$12^3 - 9^3 = 1728 - 729 = 999$ hiermit eine Lösung, und zwar die einzige mit $d = 3$ gefunden.
Es sei $d = 9$. Dann folgt aus (2)

$$3y^2 + 27y + 81 = 111$$
$$y^2 + 9y - 10 = 0, \text{ also}$$
$$y_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40}, \text{ woraus}$$

sich $y = 1$ und wegen (1) $x = 10$ ergibt.
Tatsächlich ist auch dies wegen $10^3 - 1^3 = 999$ eine Lösung, und zwar die einzige mit $d = 9$.
Die einzigen Zahlenpaare (x, y), die im Bereich der natürlichen Zahlen die gegebene Gleichung erfüllen, sind also

(10, 1) und (12, 9).

4. Wäre die Angabe D_2 wahr, würde also gelten $100 \leqq x$, dann wären auch D_1 und D_3 wahr. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß D mindestens eine falsche Angabe macht.
Also gilt (a) $x < 100$.
Wäre Angabe D_3 falsch, also $x < 10$, dann wären auch D_1 und D_2 falsch. Das widerspräche der Voraussetzung, nach der D mindestens eine wahre Angabe zu machen hat.
Also gilt (b) $x \geqq 10$.
Alle drei Angaben von B enthalten die Aussage, daß x eine ganze Zahl ist. Da mindestens eine dieser Angaben richtig sein muß, gilt

(c) x ist eine ganze Zahl.

Wegen (b) ist C_2 falsch und wegen (c) ist C_1 falsch. Also muß C_3 richtig sein, und es folgt

(d) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

Wegen (b) ist A_1 falsch, und wegen (b) ist auch A_3 falsch.
Also ist A_2 wahr, und es gilt

(e) die gesuchte Zahl enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.

Danach kommen nun noch höchstens alle diejenigen Quadratzahlen x mit $10 \leqq x < 100$ in Frage, in deren dekadischer Darstellung keine 6 auftritt.
Das sind die Zahlen 25, 49 und 81 und nur diese.
Da damit B_1 und B_2 falsch sind, muß B_3 richtig sein. Die gesuchte Zahl kann also höchstens die Zahl 25 sein.
Um umgekehrt zu zeigen, daß 25 tatsächlich die gesuchte Zahl ist, werden für $x = 25$ die Wahrheitswerte der einzelnen Angaben überprüft. Man erhält in der angegebenen Reihenfolge:
bei a: *FWF*, bei B: *FFW*, bei C: *FFW*, bei D: *WFW*
Daher ist in jedem Falle mindestens eine wahre und eine falsche Angabe vorhanden, wie zu zeigen war.

x ist die Zahl 25.

Olympiadeklasse 10

1. Angenommen, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ sei eine Folge der gesuchten Art. Dann ergibt sich aus der Forderung an S_n für $n = 1$ und $n = 2$:

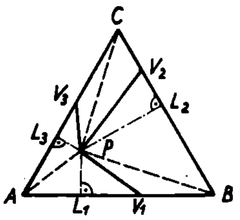
$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 = 1 + 5 = 6 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 4 + 10 = 14 \end{array}\right\} \text{also}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = 6 \\ a_2 = 14 - 6 = 8 \end{array}\right.$$

Daher muß das Anfangslied $a_1 = 6$ und die (für alle $n = 1, 2, \ldots$ gleichlautende) Differenz $d = a_{n+1} - a_n = 2$ sein.
Umgekehrt, für die arithmetische Folge mit $a_1 = 6$ und $d = 2$ gilt
$a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$,
also in der Tat
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(6 + 2n + 4) = \frac{n}{2}(2n + 10)$$
$= n^2 + 5n \; (n = 1, 2, \ldots)$.

2. Genügt x der geforderten Bedingung, so setzen wir
$\log_2 (\log_2 x) = a$ und erhalten
$\log_2 a = 0$
Das bedeutet $2^0 = a$, also $a = 1$.
Damit ist $\log_2 (\log_2 x) = 1$.
Wir setzen $\log_2 x = b$ und erhalten
$\log_2 b = 1$.
Das bedeutet $2^1 = b$, also $b = 2$.
Damit ist $\log_2 x = 2$. Das bedeutet $2^2 = x$, also muß $x = 4$ sein, wenn es der geforderten Bedingung genügen soll.
Probe:
Wegen $\log_2 4 = 2$ und
$\log_2 2 = 1$ und
$\log_2 1 = 0$ folgt
$\log_2 (\log_2 (\log_2 4)) = \log_2 (\log_2 2)$
$= \log_2 1$
$= 0$, so daß $x = 4$ tatsächlich Lösung der Aufgabe, und zwar die einzige, ist.

3. *Beweis*: P sei ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks ΔABC, und V_1, V_2, V_3 seien drei Punkte, in dieser Reihenfolge auf den Dreiecksseiten AB, BC, CA gelegen.
Wir setzen $\overline{PV_n} = v_n \; (n = 1, 2, 3)$.
Fällt man von P auf die 3 Dreiecksseiten die Lote, deren Fußpunkte L_1, L_2, L_3, seien, und bezeichnet man die Längen dieser Lote mit l_1, l_2, l_3, so gilt $v_n \geqq l_n \quad (n = 1, 2, 3)$,
also $\quad v_1 + v_2 + v_3 \geqq l_1 + l_2 + l_3. \qquad (1)$



Sind ferner F, F_1, F_2, F_3 die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABC, ΔAPB, ΔBPC, ΔCPA, so gilt $F = F_1 + F_2 + F_3$.
d. h., wenn s die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks und h die Höhenlänge sind,
$$\frac{1}{2} s \cdot h = \frac{1}{2} s \cdot l_1 + \frac{1}{2} s \cdot l_2 + \frac{1}{2} s \cdot l_3.$$
Hieraus folgt $h = l_1 + l_2 + l_3. \qquad (2)$
Durch (1) und (2) ist die Aussage
$h \leqq v_1 + v_2 + v_3$ bewiesen.

4. I. Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 seien v_1, v_2; die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2. Dann gilt (1) $210 = v_1 t_1 = v_2 t_2$.

Ferner ist sowohl $(t_1 - 2)$ h als auch $(t_2 - \frac{9}{8})$ h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so daß
$$(2) \quad t_1 = t_2 + \frac{7}{8}$$
gelten muß. Schließlich ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1 \cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2 \cdot \frac{9}{8})$ km, woraus
$$(3) \quad v_1 \cdot 2 + v_2 \cdot \frac{9}{8} = 210$$
folgt. Zur Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) multipliziere man etwa (3) mit $t_1 t_2$ und berücksichtige anschließend (1) und (2). Es ergibt sich
$$210 \cdot t_2 \cdot 2 + 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{9}{8}$$
$$= 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot t_2,$$
also $t_2^2 - \frac{9}{4} t_2 - \frac{63}{64} = 0$, woraus man
$t_{2_{1;2}} = \frac{9}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{81 + 63} = \frac{9}{8} \pm \frac{12}{8}$ erhält.
Davon ist allein $t_2 = \frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2 > 0$ gilt.
Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter
$$t_1 = \frac{21}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7}{2},$$
$$v_1 = \frac{210 \cdot 2}{7} = 60, \quad v_2 = \frac{210 \cdot 8}{21} = 80.$$

II. In der Tat erfüllen diese Werte die Bedingungen der Aufgabe: Nach der Zeit
$$(t_1 - 2)\text{ h} = \left(t_2 - \frac{9}{8}\right)\text{ h} = \frac{3}{2}\text{ h}$$
hat K_1 eine Strecke von $60 \cdot \frac{3}{2}\text{ km} = 90\text{ km}$ zurückgelegt, K_2 eine von $80 \cdot \frac{3}{2}\text{km} = 120\text{km}$;
wegen $(90 + 120)$ km $= 210$ km begegnen sich K_1 und K_2 also zu diesem Zeitpunkt. Danach braucht K_1 für die restlichen 120 km eine Zeit von $\frac{120}{60}$ h $= 2$ h sowie K_2 für die restlichen 90 km eine Zeit von $\frac{90}{80}$ h $= \frac{9}{8}$ h.
Die Geschwindigkeiten der Kraftwagen betragen somit $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. a) Die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 lassen, beginnt: 4; 11; 18; 25; 32; 39; 46; 53; 60; 67; 74; 81; 88; 95; ...
Von diesen Zahlen lassen bei der Division durch 4 den Rest 3 genau die Zahlen: 11; 39; 67; 95; ... (ab 11 jede vierte Zahl der vorigen Folge).
Die kleinste unter diesen Zahlen, die auch noch bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, ist die Zahl 67.

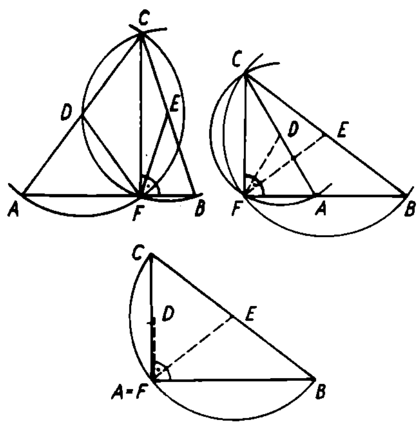
b) Weitere, den Bedingungen entsprechende natürliche Zahlen erhält man, indem man zu 67 gemeinsame Vielfache von 3, 4 und 7 addiert. Insbesondere erhält man die nächstgrößeren derartigen Zahlen, wenn man wiederholt das k. g. V. von 3, 4 und 7 (d. i., da 3, 4, 7 paarweise teilerfremd sind, die Zahl $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$) zu 67 addiert. Die nächsten so entstehenden Zahlen sind: 151; 235; 319; ...

2. a), b) Die sämtlichen genannten Darstellungen sind:

$7 = 1 + 6$	$10 = 1 + 9$
$7 = 2 + 5$	$10 = 2 + 8$
$7 = 3 + 4,$	$10 = 3 + 7$
	$10 = 4 + 6,$

ihre Anzahl beträgt 3 bzw. 4.
c) Ist n ungerade, so treten in den sämtlichen genannten Darstellungen genau die Zahlen $1, \ldots, n-1$ als Summanden auf, und zwar jede genau einmal. Da hierbei in jeder Darstellung genau zwei dieser Summanden vorkommen, ist die Anzahl der Darstellungen folglich $\frac{n-1}{2}$.
Ist n gerade, so treten dagegen nur die Zahlen $1, \ldots, n-1$ mit Ausnahme der Zahl $\frac{n}{2}$ auf.
Diese Ausnahme rührt daher, daß in einer Darstellung von n mit einem Summanden $\frac{n}{2}$ der zweite Summand ebenfalls $\frac{n}{2}$ lauten müßte, also nicht von dem ersten verschieden wäre. Daher beträgt nun die gesuchte Anzahl
$$\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1.$$

3. Es sei o. B. d. A. der Punkt C der Eckpunkt, von dem aus das Lot auf die Gerade durch A und B gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes sei F, der Mittelpunkt von AC sei D, der von BC sei E.



Dann sind die Dreiecke $\Delta\, AFC$ und $\Delta\, CFB$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F (eventuell ist eines dieser Dreiecke ausgeartet, falls nämlich bei A bzw. B ein rechter Winkel liegt. Die Betrachtungen gelten aber auch in diesem Falle, da dann $A = F$ bzw. $B = F$ ist) und die Punkte A, F, C bzw. C, F, B liegen nach Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AC bzw. BC.

Da D Mittelpunkt von AC bzw. E Mittelpunkt von BC ist, ist

$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DF}$ bzw.

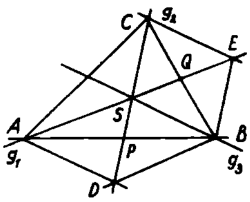
$\overline{CE} = \overline{BE} = \overline{EF}$ als Radien in

den Thaleskreisen. Mithin gilt

$$\overline{DF} + \overline{EF} = \overline{AD} + \overline{EB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BC})$$

4. Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben. Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt.
Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen. Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.

5. I. Angenommen, es gibt ein Dreieck ΔABC (siehe Abb.), das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Mittelpunkt von AB sei P, der Mittelpunkt von BC sei Q. Dann liegt P auf der Seitenhalbierenden s_c und damit auf g_2 und Q auf s_a und damit auf g_1. Verlängert man nun SP bzw. SQ über P bzw. Q hinaus um sich selbst (die so entstehenden Punkte seien D und E), so sind die Vierecke $ADBS$ bzw. $BECS$ Parallelogramme, da sich ihre Diagonalen halbieren.



II. Ein Dreieck ΔABC kann daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man zieht durch A die Parallele zu g_3. Sie schneide g_2 im Punkt D. Dann halbiert man SD (Halbierungspunkt sei P) und zieht die Gerade durch A und P. Sie schneide g_3 im Punkt B. Nun zieht man durch B die Parallele zu g_2, die g_1 in E schneide. Man halbiert SE (Halbierungspunkt sei Q) und zieht die Gerade durch B und Q, die g_2 in C schneide.
III. Wenn sich das Dreieck ΔABC so konstruieren läßt, dann entspricht es den Bedingungen.
Beweis: Laut Konstruktion sind die Dreiecke ΔADP und ΔBSP sowie ΔBEQ und ΔCSQ kongruent; denn sie stimmen in einer Seite und den Winkeln überein. Also sind die Vierecke $ADBS$ und $BECS$ Parallelogramme, und es gilt $\overline{AP} = \overline{PB}$ sowie $\overline{BQ} = \overline{QC}$. Daher sind CP und AQ Seitenhalbierende im Dreieck ΔABC. Ihr Schnittpunkt S muß auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegen, die damit auf g_3 liegt.
IV. Die Konstruktion ist stets ausführbar und eindeutig. Denn von den Geraden g_1, g_2, g_3 sind keine zwei parallel, so daß also die Schnittpunkte D, B, E und C stets existieren und eindeutig bestimmt sind. Da weder B noch C mit S zusammenfällt, kann weder B (als Punkt von g_3) noch C (als Punkt von g_2) mit dem Punkt A von g_1 zusammenfallen.

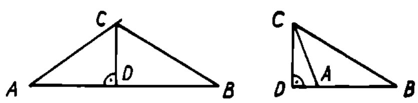
6. Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar

45 Jahre zu 366 Tagen und
145 Jahre zu 365 Tagen.

In den 45 Jahren rückte der Wochentag um 90 Wochentage vor,
in den 145 Jahren um 145 Wochentage.
Das sind zusammen 235 Wochentage,
d. h. 33mal eine Woche und 4 Wochentage.
Daher war der 30. 4. 1777 ein Mittwoch.

Olympiadeklasse 8

1. Es genügt zu beweisen, daß in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreieckseite liegt. Das trifft für den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu.



Beweis: Ein größter Winkel des Dreiecks ΔABC liege o. B. d. A. bei C. Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes sei D. Würde D nicht zwischen A und B, sondern auf der Geraden durch diese Punkte außerhalb der Seite AB oder in A oder in B liegen, so wäre der Winkel $\sphericalangle\, BAC$ (bzw. $\sphericalangle\, ABC$) als Außenwinkel im Dreieck ΔDCA (bzw. ΔDBC) oder als rechter Winkel $\sphericalangle\, BDC$ (bzw. $\sphericalangle\, ADC$) nicht spitz.
Laut Voraussetzung ist aber keiner dieser Winkel größer als der Winkel bei C, also kann auch keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht, die Behauptung also bewiesen.

2. Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt:
Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 \ldots K_5$. Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit GL. und nicht Gleichgewicht mit n. GL. symbolisiert):

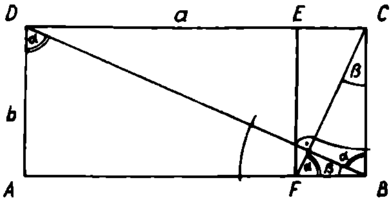
	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andersfalls sind es K_1 und K_2.
Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnumerierung auf einander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b). Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4. Es werde z. B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gesuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.
Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o. B. d. A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o. B. d. A. K_3 leichter als K_4 Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

3. Die Zahlen 1, 10, 100, 1000 ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000..., die sich als $1 + 1$, $10 + 10$, $100 + 100$ ... schreiben lassen, ergaben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300 ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800 ... den Rest 8, und 9, 90, 900 .... schließlich den Rest 0.
Nun läßt sich jede natürliche Zahl z in der Form
$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^n$ schreiben (mit ganzen Zahlen a: für die $0 \leq a_i \leq 9$ gilt).
Die Quersumme dieser Zahl lautet dann
$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.
Bei Division durch 9 läßt nach dem Obigen $a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0, $a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie $a_1, \ldots, a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wie a_n.
Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ läßt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.

4. I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele (siehe Abb.).
Dann gilt: $ABCD \sim BCEF$
und damit auch: $\Delta ABD \sim \Delta BCF$. Daraus folgt: $\sphericalangle\, ABD \cong \sphericalangle\, BCF$.

II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion: Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\sphericalangle\ ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.



III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Die Dreiecke $\Delta\ ABD$ und $\Delta\ BCF$ sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt
$\overline{AD} : \overline{BF} = \overline{AB} : \overline{BC}$ und mithin
$ABCD \sim BCEF$.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle\ ABD$ zwischen 0° und 90° liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck $\Delta\ CFB$.

Wegen (III) gilt $\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{a}{b} > 1$, also $\overline{BC} > \overline{BF}$, und F liegt zwischen A und B.

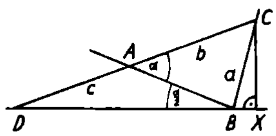
5. a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$
Er rechnete: $(z - 5)(z + 5) = z^2 - 25$.
Sein Weg ist also falsch.
b) Der absolute Fehler beträgt in *jedem* Falle: -25. Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

6. Wegen (1) gilt $b + d > b + c$,
und weil $a + d < b + c$ ist, findet man $a + d < b + d$ und daraus $a < b$ (4)
Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):
$$d - b < b - d, \text{ also } 2d < 2b$$
(5) $d < b$
Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.
Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.

Olympiadeklasse 9

1. Es sei y eine natürliche Zahl, für die $25 < y \leqq 50$ gilt.
Die Ergänzung dieser Zahl bis 50 ist
$x = 50 - y$, und es gilt
$$\begin{aligned} y^2 &= (50 - x)^2 \\ &= 2500 - 100x + x^2 \\ &= 100\,(25 - x) + x^2, \end{aligned}$$
also wegen $x = 50 - y$
$$\begin{aligned} y^2 &= 100\,(25 - 50 + y) + x^2 \\ &= 100\,(y - 25) + x^2. \end{aligned}$$
Das heißt: Zu dem Quadrat x^2 der Ergänzung der gewählten Zahl y bis 50 ist das Hundertfache der Differenz $(y - 25)$ aus der gewählten Zahl und 25 zu addieren. Andererseits führt die von Marlies genannte Regel auf die Summe aus x^2 und dem Produkt von $(y - 25)$ mit derjenigen Zehnerpotenz, die der Stellenzahl des Quadrates x^2 entspricht. Daher ist diese Regel genau dann richtig, wenn das Quadrat x^2 eine zweistellige Zahl ergibt.
a) Für $41 \leqq y \leqq 46$ ist dies der Fall, dagegen nicht
b) für $26 \leqq y \leqq 40$ und
c) für $47 \leqq y \leqq 50$.
(Im Fall c) entsteht eine richtige Regel, wenn man in der durch Hintereinanderschreiben von $(y - 25)$ und x^2 gebildeten Zahl vor die letzte Stelle eine Ziffer 0 einschiebt, im Fall b), wenn man aus der gebildeten Zahl durch Addition der dritt- und viertletzten Stelle eine neue Zahl bildet, wobei eventuell auftretende Zehnerüberschreitungen wie üblich als Zehnerübertragung auf die vorangehende Stelle weiterwirken.)

2. I. Angenommen, es gibt ein Dreieck $\Delta\ ABC$, das den genannten Bedingungen entspricht.
Der Punkt D liege
1. auf der Verlängerung von CA über A hinaus,
2. auf dem Kreis mit c um A.
Dann ist $\Delta\ DBA$ gleichschenklig.



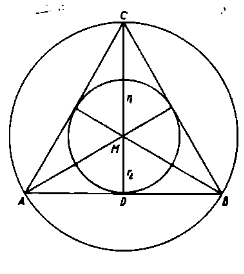
Hiernach und nach dem Satz über die Außenwinkel im Dreieck (angewandt auf Dreieck $\Delta\ DBA$) gilt
$\overline{\sphericalangle\ BDA} = \overline{\sphericalangle\ ABD} = \frac{\alpha}{2}$. ($\sphericalangle\ ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle\ ABC$.
II. Ein Dreieck $\Delta\ ABC$ entspricht daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man konstruiert ein Dreieck $\Delta\ CDB$ aus $\overline{CD} = b + c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{\sphericalangle\ CDB} = \frac{\alpha}{2}$. Im Punkte B trägt man an DB nach der Seite hin, auf der C liegt, den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, dessen freier Schenkel die Seite CD im Punkte A schneide.
III. Das Dreieck $\Delta\ ABC$ entspricht den Bedingungen.
Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{BC} = a$. Ferner ist laut Konstruktion $\overline{\sphericalangle\ ADB} = \overline{\sphericalangle\ DBA} = \frac{\alpha}{2}$, also nach dem Außenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle\ BAC} = \alpha$.
Schließlich folgt, daß $\Delta\ ADB$ gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AB}$ ist und daß somit, da nach Konstruktion $\overline{CD} = b + c$ gilt, auch die Summe $\overline{AC} + \overline{AB}$ den vorgeschriebenen Wert $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{CD} = a + c$ hat.
IV. Die Konstruktion ist nicht möglich, wenn eine der Bedingungen
$0° < \alpha < 180°$ und $b + c > a$ verletzt ist.
Seien nun beide Bedingungen erfüllt. Da dann das Dreieck $\Delta\ CDB$ aus zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren gegenüberliegt, konstruiert wird, enthält man entweder überhaupt kein Dreieck oder genau ein Dreieck oder genau zwei verschiedene Dreiecke.
Die Bedingungen dafür können von den Schülern dieser Klasse in etwa folgender Form angegeben werden: Man konstruiere das (bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte) Dreieck $\Delta\ CDX$ mit $\overline{CD} = b + c$,
$\overline{\sphericalangle\ CDX} = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle\ CXD} = 90°$.
Dann ist die Konstruktion des gesuchten Dreiecks $\Delta\ ABC$ — nicht durchführbar, wenn
$a < \overline{CX}$,
— bis auf Kongruenz — eindeutig durchführbar, wenn
$a = \overline{CX}$ gilt. — bis auf Kongruenz genau zweideutig durchführbar, wenn $a > \overline{CX}$ gilt.

3. Angenommen, es gibt ein solches Zahlentripel. Dann gilt: (1) Durch Addition erhält man aus den vier Gleichungen:
$4a = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 10$. Damit ist
$$a = \frac{5}{2}.$$
(2) Durch Subtraktion erhält man aus der ersten und zweiten bzw. dritten und vierten Gleichung:
$2c = s_1 - s_2$ und $2c = s_3 - s_4$,
also $s_1 - s_2 = s_3 - s_4$.
Von den Gleichheitsaussagen dieser Form, in denen für s_1, s_2, s_3, s_4 bis auf die Reihenfolge genau die Zahlen 1, 2, 3, 4 stehen, sind (abgesehen von Seitenvertauschung) nur die folgenden wahr:
$$\begin{aligned} 1 - 2 &= 3 - 4 \\ 1 - 3 &= 2 - 4 \\ 2 - 1 &= 4 - 3 \\ 3 - 1 &= 4 - 2 \end{aligned}$$
Daher kommen für $2c$ nur die Werte -1, -2, 1 und 2 in Frage, und c kann nur $-\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ und 1 sein.
(3) Aus der ersten und dritten bzw. zweiten und vierten Gleichung folgt wie in (2)
$$\begin{aligned} 2b &= s_1 - s_3 \\ 2b &= s_2 - s_4, \end{aligned}$$
und b kann ebenfalls nur die Werte $-\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ und 1 annehmen.
(4) Da $a = \frac{5}{2}$ ist, können b und c nicht gleichzeitig ganze Zahlen sein; sonst wären die linken Seiten der gegebenen Gleichungen nicht ganzzahlig.
(5) Ferner können b und c nicht gleichzeitig je einer der angegebenen Brüche sein; sonst wäre die linke Seite einer der gegebenen Gleichungen die Summe $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, also nicht ganzzahlig.
Durch Kombination der gefundenen Werte von b und c und unter Berücksichtigung von (4) und (5) können höchstens die folgenden Zahlentripel Lösung sein:

$\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2}\right),$
$\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$
$\left(\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$

Durch Einsetzen überzeugt man sich, daß sie tatsächlich Lösungen sind.

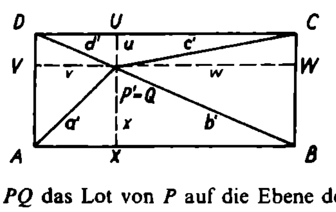
4. In jedem gleichseitigen Dreieck fallen die Mittelpunkte von Inkreis (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) und Umkreis (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) zusammen. Dieser Mittelpunkt M ist zugleich auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\Delta\ ABC$.
Deshalb gilt (1)
$\overline{MC} : \overline{MD} = 2 : 1$.
$\overline{MC} = r_1$ ist der Radius des Umkreises,
$\overline{MD} = r_2$ ist der Radius des Inkreises.



Nach (1) ist damit $r_1 = 2r_2$.
Für die Inhalte F_1 der Umkreisfläche und F_2 der Inkreisfläche gilt dann
$F_1 = r_1^{\,2} \cdot \pi$
und $F_2 = r_2^{\,2} \cdot \pi$
Wegen $r_1 = 2r_2$ folgt daraus
$F_1 = 4F_2$
Die Inhalte von In- und Umkreisfläche verhalten sich beim gleichseitigen Dreieck wie 1 : 4.

5. Die zu untersuchende Zahl ist
$t = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1)$
$= (n^8 - 1)(n^4 - 1)$
$= (n + 1)^2 (n - 1)^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1)$
$= [(n + 1)(n - 1)]^2 \cdot (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1)$.
Da n ungerade ist, so sind die zu n benachbarten Zahlen $(n + 1)$ und $(n - 1)$ beide gerade, und eine von ihnen ist durch 4 teilbar. Demnach ist $(n + 1)(n - 1)$ durch 8 und das Quadrat dieser Zahl durch 64 teilbar.
n^2 und n^4 sind als Potenzen einer ungeraden Zahl ebenfalls ungerade, also ist
$(n^2 + 1)$ durch 2,
$(n^2 + 1)^2$ durch 4 und
$(n^4 + 1)$ durch 2 teilbar.
Damit ist t teilbar durch $2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.

6. Der Abstand des Punktes P von D sei d.

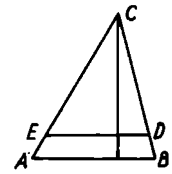


Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks. Die Parallele durch Q zu $\begin{matrix}(AD)\\(AB)\end{matrix}$ schneide die Gerade $\begin{matrix}(AB)\\(AD)\end{matrix}$ in $\begin{matrix}(X)\\(V)\end{matrix}$, die Gerade $\begin{matrix}(DC)\\(BC)\end{matrix}$ in $\begin{matrix}(U)\\(W)\end{matrix}$. Es sei
$\overline{PQ} = h, \overline{QX} = x, \overline{QU} = u, \overline{QV} = v, \overline{QW} = w.$
Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:
$a^2 = v^2 + x^2 + h^2$
$b^2 = w^2 + x^2 + h^2$
$c^2 = u^2 + w^2 + h^2$
$d^2 = u^2 + v^2 + h^2$
Daraus folgt (nach Addition)
$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$ und
$b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$.
Somit gilt
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit
$d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geqq b^2$).
Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich
$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}.$$

Olympiadeklasse 10

1. Die Dreiecke $\Delta\ ABC$ und $\Delta\ EDC$ sind ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen. Das Dreieck ΔEDC hat den Flächeninhalt

$F_3 = F_1 - \frac{1}{3} F_1$, also gilt $\frac{F_3}{F_1} = \frac{2}{3}$



Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate homologer Seiten verhalten, folgt hieraus
$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, also $\overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 18\,\text{cm}$
$= 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

2. b) I) Angenommen, es gebe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n, x - n + 1, \ldots, x, \ldots, x + n$ und erfüllen die Gleichung
(1) $(x - n)^2 + \ldots + (x - 1)^2 + x^2$
$= (x + 1)^2 + \ldots + (x + n)^2$.
Wegen $(x + k)^2 - (x - k)^2 = 4kx\,(k = 1, \ldots, n)$ folgt aus (1)
$x^2 = 4(1 + \ldots + n)\,x = 4 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} \cdot x$, also
(2) $x(x - 2n(n + 1)) = 0$.
Daher muß $x = 0$ oder
$x = 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$ sein, d. h. es kommen nur die Zusammenstellungen
(3) $-n, -n + 1, \ldots, 0, \ldots, n$
(4) $2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, \ldots, 2n^2 + 2n, \ldots, 2n^2 + 3n$ als Lösungen in Frage.
II) In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n + 1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie in I) auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$ ein, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen $10, \ldots, 14$, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, \ldots, 2$.

3. Aus $a^2 + b^2 = 6ab$ folgt
$a^2 + 2ab + b^2 = 8ab$
$(a + b)^2 = (\sqrt{8ab})^2$, also,
da wegen
$a, b > 0$ sicher $a + b > 0$ ist,
$a + b = \sqrt{8ab}$
Aus $a^2 + b^2 = 6ab$ folgt
$a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$
$(a - b)^2 = 4ab$, also, da wegen
$a > b$ sicher $a - b > 0$ ist,
$a - b = \sqrt{4ab}$.
Also ist
$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{8ab}{4ab}} = \sqrt{2}.$$
Durch Logarithmieren erhält man
$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2}\lg 2.$$
Damit ist die Behauptung bewiesen.

4. I. S_y ist genau dann ein Punkt der entstehenden Parabel, wenn seine Koordinaten deren Gleichung erfüllen. Hierfür ist $8 = q$ notwendig und hinreichend.
II. Sei nunmehr $q = 8$ vorausgesetzt.
Die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + 8 = 0$. Für sie erhält man
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32}$$
und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32}$
(vorausgesetzt, daß $|p| \geqq 4\sqrt{2}$ ist; anderenfalls hat die Parabel keinen Punkt auf der x-Achse).
Die Bedingung $x_1 - x_2 = 7$ ist somit gleichbedeutend mit
$\sqrt{p^2 - 32} = 7$, dies mit
$p^2 - 32 = 49$, d. h. mit $p^2 = 81$,
und dies damit, daß entweder $p = 9$ oder $p = -9$ gilt.
Hat man statt der bisher genannten logischen Äquivalenzen nur in einer Richtung (zu $q = 8$ und zu $p = 9$ oder $p = -9$ hin) führende Schlüsse geschrieben, so eignet sich zum dann erforderlichen Nachweis der Umkehrung auch folgende
Probe: Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8)$ schneidet die x-Achse in den Punkten $S_1(8; 0)$ und $S_2(1; 0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0; 8)$.
Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2 + 9x + 8 = (x + 1) \cdot (x + 8)$ schneidet die x-Achse in den Punkten $S_3(-1; 0)$ und $S_4(-8; 0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0; 8)$.

5. Es gilt der Satz:
Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen dieses Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so daß G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.
Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist
$\overline{\sphericalangle KGH} + \overline{\sphericalangle GHL} = 90°$. ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

6. Es gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen r und s:
$p = 2r + 1 \qquad q = 2s + 1$.
Daraus folgt:
$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 4(r - s)(r + s + 1)$
Von den Zahlen $r - s$ und $r + s + 1$ ist genau eine durch 2 teilbar, da ihre Summe ungerade ist.
Daher ist
$p^2 - q^2$ durch 8 teilbar.
Andererseits gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen x und y
$p = 3x + 1$ oder $p = 3x - 1$ und
$q = 3y + 1$ oder $q = 3y - 1$.
Es gibt daher genau die folgenden Möglichkeiten:
(1) $p = 3x + 1$ und $q = 3y + 1$
(2) $p = 3x - 1$ und $q = 3y - 1$
(3) $p = 3x + 1$ und $q = 3y - 1$
(4) $p = 3x - 1$ und $q = 3y + 1$
Für (1) und (2) gilt: $p - q = 3(x - y)$
Für (3) und (4) gilt: $p + q = 3(x - y)$.
Da $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ gilt, ist somit in jedem Falle $p^2 - q^2$ durch 3 teilbar.
Wegen $(8, 3) = 1$ ist folglich $p^2 - q^2$ auch stets durch 24 teilbar.
2. Lösungsweg:
Mit geeigneten natürlichen Zahlen m, n ist $p = 6m \pm 1$ und $q = 6n \pm 1$ (wobei für p und q voneinander unabhängig je eines der Vorzeichen gilt), also
(5) $p^2 - q^2 = 12\, m(3m \pm 1) - n(3n + 1)$
ist für $\substack{\text{gerades}\\\text{ungerades}}$ m bzw. n der $\substack{\text{erste}\\\text{zweite}}$ Faktor gerade; daher sind diese Produkte stets gerade, also auch ihre Differenz. Hiernach folgt aus (5) die Behauptung.

DDR-Olympiade

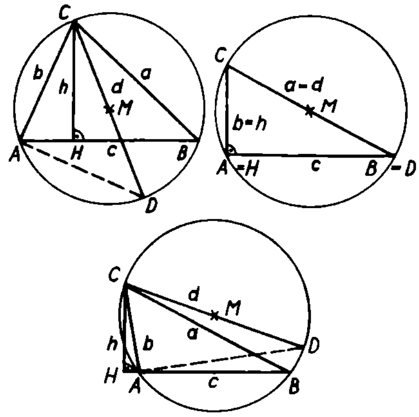
Olympiadeklasse 10

1. Aufgabe
Lösung 1 in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission
a) Im Dreieck ΔABC sei H der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B. Der durch C gehende Durchmesser des Umkreises schneide diesen im Punkt D.
Es bezeichne $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{CH} = h$, $\overline{CD} = d$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\sphericalangle ABC < 90°$ vorausgesetzt werden. Daraus folgt $D \neq A$ und $H \neq B$, so daß die beiden Dreiecke ΔADC und ΔHBC nicht entartet sind. Außerdem liegen B und D über demselben Bogen $\overset{\frown}{AC}$. Der Peripheriewinkelsatz liefert dann

$\sphericalangle HBC = \sphericalangle ADC$.

Ferner ist nach Definition der Höhe und nach dem Satz des Thales

$\sphericalangle CHB = \sphericalangle CAD = 90°$.



Aus diesen beiden Winkelbeziehungen resultiert nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\Delta ADC \sim \Delta HBC$ und damit
$a : h = d : b$, also $ab = hd$.

Die angestellten Überlegungen sind unabhängig davon, ob ΔABC ein spitz-, recht- oder stumpfwinkliges Dreieck ist (vgl. Abb.).
b) Für die Fläche F des Dreiecks ΔABC gilt die Formel

$$F = \frac{1}{2} h \cdot c.$$

Setzt man hier die aus a) folgende Beziehung $h = \frac{ab}{d}$ ein, so ergibt sich

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{d}.$$

Lösung 2
a) Es werden dieselben Bezeichnungen wie in Lösung 1 benutzt. Ferner seien α, β, γ die Winkel bei A, B, C.
Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = d,$$

speziell also

$\sin\alpha = \frac{a}{d}$. Außerdem ist stets
$\sin\alpha = \frac{h}{b}$,

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen:
Der von mehreren Schülern beschrittene Lösungsweg 2 ist wesentlich kürzer und einfacher als der 1. Lösungsweg. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß in der angegebenen Formulierung des Sinussatzes die Überlegungen aus Lösung 1 implizit enthalten sind.
Viele Schüler gaben keine ausreichende Rechtfertigung für die Anwendbarkeit des Peripheriewinkelsatzes. Es fehlte der Hinweis, daß B und D über demselben Bogen $\overset{\frown}{AC}$ liegen.
Zahlreiche Schüler fertigten eine Skizze an und führten ihren Beweis für den damit herausgegriffenen Spezialfall (meistens spitzwinkliges Dreieck). Sie überzeugten sich nicht von der Allgemeingültigkeit der Aussage für jedes beliebige Dreieck. Einige wenige Schüler hatten Schwierigkeiten bei dem Aufbau des Beweises. Sie setzten die Behauptung als bekannt voraus. *Dr. M. Müller*
Humboldt-Universität zu Berlin

Aufgabe 2
Es wird im folgenden mit geringfügigen Änderungen die Lösung der Schülerin Ursula Tyl, EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Kl. 10 angegeben.
a) Beweis der Existenz von s: Es genügt zu zeigen, daß
(1) $x - 1 \geqq 0$ bzw. $x \geqq 1$ ist.
Dann existiert $\sqrt{x-1}$ und wegen $x + 1 > x - 1$ auch $\sqrt{x+1}$; wegen $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$ ist der Nenner von s nicht 0 und damit s vorhanden. Zum Beweis von (1) bilde man

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{(a-b)^2}{2ab} + 1.$$

Da $(a - b)^2 > 0$ (weil $a \neq b$) und $ab > 0$, gilt somit sogar $x > 1$.
b) Vereinfachung von s:

$$s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}$$
$$= x + \sqrt{(x+1)(x-1)}.$$

Mit $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ folgt

$$s = \frac{a^2 + b^2}{2ab} + \frac{|a^2 - b^2|}{2ab}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: $|a| > |b|$, also $a^2 > b^2$
und folglich $s = \frac{a}{b}$.
2. Fall: $|b| > |a|$, also $b^2 > a^2$
und folglich $s = \frac{b}{a}$.
Ein etwas anderer Lösungsweg verwendet

$$\sqrt{x+1} = \frac{|a+b|}{\sqrt{2ab}}, \sqrt{x-1} = \frac{|a-b|}{\sqrt{2ab}},$$

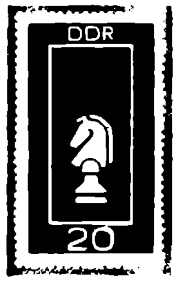
demzufolge

$$s = \frac{\dfrac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} + \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2ab}}}{\dfrac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} - \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2ab}}} = \frac{|a+b| + |a-b|}{|a-b| - |a-b|}.$$

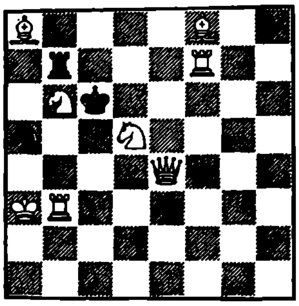
Nunmehr sind wegen $a \neq b$, $ab > 0$ die folgenden Fälle möglich:
1. $0<a<b$: $s = \frac{a+b+b-a}{a+b-b+a} = \frac{b}{a}$.
2. $0<b<a$: $s = \frac{a+b+a-b}{a+b-a+b} = \frac{a}{b}$.
3. $b<a<0$: $s = \frac{-a-b+b-a}{-a-b-a+b} = \frac{b}{a}$.
4. $a<b<0$: $s = \frac{-a-b+b-a}{-a-b-b+a} = \frac{a}{b}$.

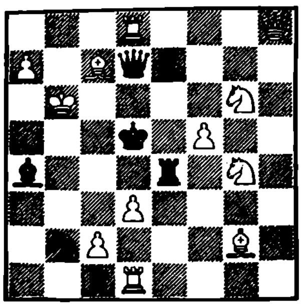
Dr. K. Zacharias, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin
Die Lösungen der Aufgaben 3 bis 5 veröffentlichen wir im Heft 7/70, d. Red.

Rund um das Schachbrett



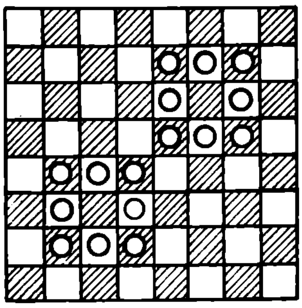
1 Matt in einem Zug, (J. Perkins, *Chess* 11/1950)





2 (T. P. Madely, *Chess* 11/1950)

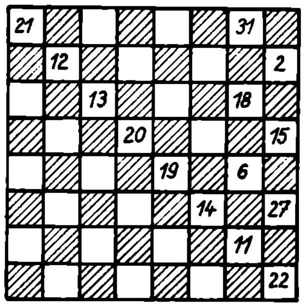
3 Stellt ein weißes Pferd auf irgendein von euch ausgewähltes freies Feld so auf, daß mit diesem Pferd alle Bauern in einer möglichst geringen Anzahl von Zügen geschlagen werden können.

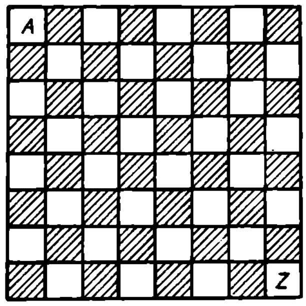


4a Es sind mit einer Mindestzahl von Königen alle Felder eines Schachbretts zu beherrschen. Das Standfeld des Königs soll als „beherrscht" gelten.
4b Wieviel Züge kann ein Springer auf einem leeren Schachbrett ausführen?

Die Briefmarke wurde zu Ehren der XVI. Mannschaftsmeisterschaft der Studenten im Schach 1969 (in Dresden) herausgegeben. (Vignette rechts oben) In der DDR-Mannschaft (6 Teilnehmer) standen die beiden Mathematikstudenten *Lutz Espig* (Halle) und *Manfred Schöneberg* (Leipzig). Die DDR belegte den 6. Platz.

5 Die Zahlen 1 bis 32 sind so in die weißen Felder zu verteilen, daß in jeder Reihe und Spalte die Summe 66 beträgt. (Zur Erleichterung der Lösung sind einige Zahlen vorgegeben.)





6a Stelle in die obere linke Ecke (A) des Schachbretts einen Stein. Er soll senkrecht oder waagerecht (nicht diagonal) zum gegenüberliegenden Eckfeld (Z) ziehen und dabei jedes Feld einmal durchlaufen.
6b Setze auf das mit A gekennzeichnete Feld einen Läufer. Er soll auf das mit Z bezeichnete Feld gezogen werden und zwar so, daß dabei alle weißen (also keine schwarzen) Felder des Brettes berührt werden. Die Kreuzung von Zuglinien ist gestattet. Kein Weg darf zweimal beschritten werden.

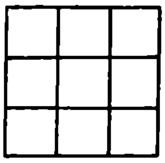
Unser Schach-Experte, Mathematikfachlehrer *K. Kannenberg*, Staßfurt, stellte Probleme zusammen:

7 Ist es möglich, einen Springer, der auf dem Feld a8 steht, so auf das Feld h1 zu bringen, daß er jedes Feld berührt, aber jedes Feld nur einmal?
8 Matt in 4 Zügen von *Dr. E. Zepler* (Urdruck in der „Schwalbe", Juli 1929):
Weiß: Ke5 Dc7 Th7
Schwarz: Ke8 Ta8 Lb5 Bb6 Bd7 Be4 Bf2
9 Weiß zieht und setzt mit demselben Zug beide Könige matt! Wie ist das möglich?
Weiß: Kd4 Sh6 Bd8 Bg2
Schwarz: Kf4 Sb2 Bb4 Bc6 Bg3
10 Beide Parteien haben außer ihrem König nur Springer auf dem Brett.
Weiß: Ka1 Sa6 b5 d1 d3
Schwarz: Kd5 Sc4 c6 e4 e6 Matt in 2 Zügen!

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 1. 3. 1970

5 ▲ 452 In die Felder des nachstehend abgebildeten Quadrates sind die Vielfachen der Zahl 5 (5, 10, 15, ..., 45) so einzutragen, daß die Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonale 75 beträgt.



Schülerin Cordula Saueressig, Mellensee

▲ 453 Peter kauft sich Hefte zu 7 Pf und zu 10 Pf das Stück; er hat für diese Hefte insgesamt 2,61 M zu zahlen. Wieviel Hefte zum Preise von 7 Pf das Stück sind dabei? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? P.

▲ 454 Die Maßzahl des Umfangs eines Rechtecks (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl des Flächeninhalts dieses Rechtecks (gemessen in cm^2). Ermittle mit Hilfe einer Tabelle Länge und Breite aller Rechtecke, die diese Bedingung erfüllen und bei denen die Maßzahlen der Seitenlängen natürliche Zahlen kleiner als 7 sind.

Sch.

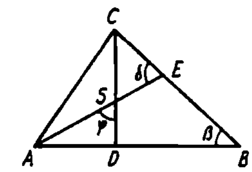
W 5 ■ 455 Heinz kauft sich drei Stück Kuchen, die alle unterschiedlich viel kosten; er hat dafür 0,82 M zu zahlen. Hätte er drei Stück des Kuchens mit dem niedrigsten Preis gekauft, so hätte er 0,22 M weniger ausgegeben. Hätte er dagegen drei Stück des Kuchens mit dem höchsten Preis genommen, so hätte er 0,23 M mehr zahlen müssen. Wieviel kostet jedes der drei von Heinz gekauften Stück Kuchen?

Sch.

W 5 ■ 456 Drei Freunde, Axel, Bernd und Dieter, unternahmen eine Radwanderung. Bei der ersten Rast stellte Axel fest, daß er seine Frühstücksstullen zu Hause hatte liegen lassen. Die drei Freunde teilten die von Bernd und Dieter mitgebrachten Stullen unter sich zu gleichen Teilen auf. Nachdem jeder zwei verzehrt hatte, besaßen sie zusammen noch soviel Stullen, wie jeder von ihnen bei der Aufteilung erhalten hatte. Wieviel Stullen hatten Bernd und Dieter zusammen mitgebracht?

Sch.

6 ▲ 457 In dem abgebildeten Dreieck ABC sind die Höhe $\overline{CD} = h_c$ und die Winkelhalbierende $\overline{AE} = w_\alpha$ eingezeichnet. Der Winkel $\sphericalangle ABC = \beta$ beträgt 60°, und der Winkel $\sphericalangle AEC = \delta$ beträgt 83°. Es ist die Größe der Dreieckswinkel α und γ und des Winkels $\sphericalangle ASD = \varphi$ zu bestimmen.



Schüler Rainer Zweck, Wismar, Kl. 7

▲ 458 Es ist die kleinste dreistellige natürliche Zahl zu finden, für die folgendes gilt:
a) Sie ist durch 3, 4 und 5 teilbar.
b) Sie ist weder durch 9 noch durch 13 noch durch 25 teilbar.
c) Sie läßt bei Division durch 11 den Rest 4.

Schüler Lutz Mängel, Berlin

▲ 459 Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte P_1, P_2 und P_3. Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen Abstand haben. Wie viele solcher Geraden gibt es? Welche Feststellung läßt sich nach Ausführung der Konstruktion bezüglich der erhaltenen Schnittpunkte machen?

Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig

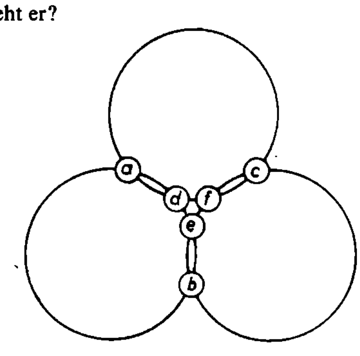
W 6 ■ 460 Vier Bekannte aus dem Bezirk Karl-Marx-Stadt, die ihren Urlaub an der Ostsee verbringen wollen, trafen sich zufällig in Rostock auf dem Bahnhof. Diese vier Urlauber mit den Familiennamen Meier, Conrad, Lange und Fischer wohnen in verschiedenen Städten, und zwar in Plauen, Zwickau, Werdau und Aue. Sie üben alle einen unterschiedlichen Beruf aus, und zwar den Beruf eines Klempners, Kraftfahrers, Ingenieurs und Tischlers. Von diesen vier Personen ist uns folgendes bekannt:
a) Der Ingenieur wohnt in Zwickau.
b) Der Kraftfahrer, der Ingenieur und Herr Conrad stehen untereinander im Briefwechsel.
c) Herr Fischer und Herr Meier lernten sich durch den Kraftfahrer kennen.
d) Der Tischler wohnt in Plauen und ist mit dem Herrn aus Zwickau verwandt.
e) Herr Fischer, der in seinem Wohnort Plauen in den Zug stieg, traf Herrn Lange in einem Abteil.
f) Der Kraftfahrer wohnt mit dem Herrn aus Aue während des Urlaubs im gleichen Hotel.
Den Familiennamen sind die richtigen Berufe und Wohnorte zuzuordnen.

Schüler Bernd Kutnik, Teterow, Kl. 7

W 6 ■ 461 Untersuche, ob der folgende Satz eine wahre oder eine falsche Aussage darstellt:
„Dividiert man eine natürliche Zahl, die größer als Null und kleiner als 1024 ist, durch 1024, so erhält man als Quotienten stets einen endlichen Dezimalbruch."
Begründe deine Feststellung!

Schüler Th. Wolf, Schleiz

7 ▲ 462 Unter einem „Primzahldrilling" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p + 2$, $p + 4$ darstellen lassen. Beweise, daß es nur einen solchen „Primzahldrilling" gibt! Aus welchen Zahlen besteht er?



Schüler Pawel Kröger, Leipzig, Kl. 5

▲ 463 Gegeben sind die drei Punkte B, P_1 und P_2. Man konstruiere zwei gleich große, sich in B berührende Kreise k_1 und k_2 derart, daß k_1 durch P_1 und k_2 durch P_2 geht.

Dr. E. Schröder, TU Dresden

▲ 464 Zwei konvexe Vielecke besitzen zusammen 21 Seiten. Das zweite Vieleck hat doppelt so viele Diagonalen wie das erste. Wieviel Eckpunkte besitzt jedes der beiden Vielecke?

StR. D. Michels, Rostock

W 7 ■ 465 Eine vierstellige Kraftfahrzeugnummer weist folgende Besonderheiten auf:
a) Die erste ist gleich der zweiten und die dritte gleich der vierten Ziffer.
b) Die vierstellige Zahl ist eine Quadratzahl.
Wie lautet die Kraftfahrzeugnummer?

Mathematikfachlehrer Dieter Fischer, Plauen

W 7 ■ 466 Die unten abgebildete Figur stellt drei einander kongruente Kreise k_1, k_2 und k_3 dar, die sich paarweise in genau zwei

Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte sind durch kleinere Kreise markiert, in die die Buchstaben a, b, c, d, e und f eingetragen wurden. Diese Buchstaben sind durch sechs natürliche Zahlen, die paarweise voneinander verschieden sind, so zu ersetzen, daß die Produkte der jeweils auf einem Kreis liegenden Zahlen sämtlich gleich 144 sind.

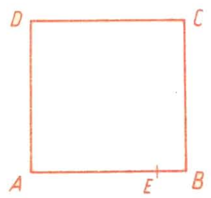
T.

8 ▲ 467 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist der Flächeninhalt dieses Vierecks gleich dem halben Produkt der Länge der Diagonalen: $A = \frac{ef}{2}$.

(Bemerkung: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn beide Diagonalen im Innern des Vierecks liegen.)

Sch.

▲ 468 Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Dieses Quadrat soll in ein flächengleiches Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite $\overline{AE}$ gegeben ist (vgl. die Abb.).



Man konstruiere die andere Rechteckseite und zeichne das flächengleiche Rechteck.

Dr. E. Schröder, TU Dresden

W 8 ▪ 469 Seit Juni 1969 wird auch die Route Moskau—Tokio von der sowjetischen Fluggesellschaft *Aeroflot* regelmäßig im Nonstop-Flug beflogen.

Die IL 62 startet in Moskau um 20.25 Uhr Moskauer Zeit und trifft am nächsten Tag um 12.15 Uhr (Japanische Zeit) in Tokio ein.

Auf dem Rückflug startet die Maschine in Tokio um 8.20 Uhr (Japanische Zeit) und landet in Moskau an demselben Tag um 13.00 Uhr (Moskauer Zeit).

a) Es soll die Zeit für den Hin- bzw. Rückflug ermittelt werden. Dabei ist bekannt, daß die Differenz dieser beiden Zeiten kleiner ist als 1 h und daß die Differenz zwischen der Moskauer Zeit und der Japanischen Zeit eine ganze Anzahl von Stunden beträgt.

b) Es soll die mittlere Geschwindigkeit (Reisegeschwindigkeit) auf dem Hin- bzw. Rückflug berechnet werden. Die Flugstrecke beträgt rund 8000 km.

L.

W 8 ▪ 470 Von sechs äußerlich gleich aussehenden Kugeln sind vier schwerer als die beiden restlichen Kugeln. Die vier schwereren sowie die zwei leichteren Kugeln sind untereinander jeweils massegleich. Mit höchstens drei Wägungen mittels einer Tafelwaage (ohne Wägestücke) ist festzustellen, welche die schwereren und welche die leichteren Kugeln sind!

T.

9 ▲ 471 Es seien a und b zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler (g. g. T.) und m ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (k. g. V.). Ferner seien $r = ab - d$ die Differenz zwischen dem Produkt und dem g. g. T. dieser Zahlen und $q = \frac{m}{d}$ der Quotient aus dem k. g. V. und dem g. g. T. dieser Zahlen.

Es ist zu beweisen, daß dann die Zahl $1 + 4rq$ stets gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist, und es ist diese Zahl anzugeben.

Ferner soll diese Zahl für $a = 8$, $b = 6$ berechnet werden.

Dipl.-Math. Bernd Noack und Monika Noack, Berlin

▲ 472 Ein regelmäßiges Zwölfeck sei wie in der nebenstehenden Figur in drei Teilfiguren zerlegt worden.

Ist der Flächeninhalt der mittleren (weißen) Teilfigur größer oder kleiner als die Summe der Flächeninhalte der beiden äußeren (schwarzen) Teilfiguren?

Erst schätzen, dann berechnen! *L.*

W 9 ▪ 473 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x + ay = 2, \quad (1)$$
$$y - a^2z = 1, \quad (2)$$
$$x + az = 3, \quad (3)$$

wobei a eine reelle Zahl ist.

a) Das Gleichungssystem ist zu lösen, falls a von 0, 1 und -1 verschieden ist.

b) Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem, falls $a = 0$, $a = 1$ bzw. $a = -1$ ist?

Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Träger eines 3. Preises bei der IMO 1969

W 9 ▪ 474 Gegeben seien in der Ebene 8 Punkte, von denen je drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Jeder dieser Punkte sei mit jedem anderen Punkt durch eine Gerade verbunden.

a) Wie viele Verbindungsgeraden gibt es in diesem Falle?

b) Wie viele Verbindungsgeraden erhält man, wenn genau n Punkte mit $n \geqq 2$ gegeben sind?

c) Wie viele Punkte, von denen je drei nicht auf einer Geraden liegen, sind in der Ebene gegeben, wenn man genau 45 Verbindungsgeraden erhält? *S.-H.*

10 ▲ 475 Es sind alle positiven reellen Zahlen x mit $x \neq 1$ zu bestimmen, für die die Gleichung

$$\log_x 4 + \log_{x^2} 8 + \log_{x^3} 16 + \log_{x^4} 32 = \frac{73}{12}$$

erfüllt ist.

Gerhard Spens, Humboldt-Oberschule, Erfurt-Hochheim, Kl. 10d (V)

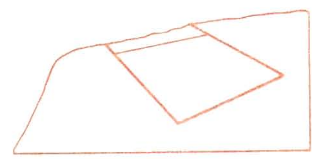
▲ 476 Es seien a, b und c reelle Zahlen mit $a + b + c \geqq 1$.

Man beweise, daß dann stets die Ungleichung

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqq \frac{1}{27} \text{ erfüllt ist.}$$

L.

W 10/12 ▪ 477 Auf einer angerissenen Ansichtskarte ist nur noch ein Teil eines Fußballfeldes mit Mittellinie zu sehen. Fritz klebt die angerissene Karte auf Zeichenkarton und rekonstruiert mit Bleistift und Lineal das Bild des ganzen Fußballfeldes. Wie macht er das?



Dr. E. Schröder, TU Dresden

W 10/12 ▪ 478 Zu berechnen ist der Term

$$z = \frac{38795689 \cdot 38795688 \cdot 38795687 \cdot 38795686}{38795688^2 + 38795686^2} - \frac{38795684 \cdot 38795683 \cdot 38795682 \cdot 38795681}{38795684^2 + 38795682^2}$$

Dabei soll ein unnötig hoher Rechenaufwand vermieden werden.

Anleitung: Man ersetzt eine geeignete Zahl durch eine Variable, drückt alle in dem obigen Term vorkommenden Zahlen durch diese Variable aus und berechnet den so erhaltenen Term.

Dozent L. M. Lopowok, Lugansk, UdSSR

Wir stellen die Aufgabengruppe der Zeitschrift *alpha* vor und teilen mit, daß wir ihre Namen abgekürzt in Anschluß an die von ihnen gestellten Aufgaben veröffentlichen.

Oberstudienrat Dr. *Rolf Lüders*, Institut für Lehrerbildung, Berlin — Oberlehrer *Theodor Scholl*, Hauptreferent im Ministerium für Volksbildung (beide Endredaktion) — Oberstudienrat *Gerhard Schulze*, Fachberater Mathematik und Lehrer an der EOS Herzberg/Elster (Klassenstufe 9/10) — Mathematikfachlehrer *Walter Träger*, Schloßberg-Oberschule, Döbeln (Klassenstufe 7/8) — Oberlehrer *Helmut Pätzold*, Fachberater Mathematik und Lehrer an der OS Waren/Müritz — Mathematikfachlehrer *Walter Unze*, Sonderschule für Körperbehinderte, Leipzig — Studienrat *Johannes Lehmann*, Verdienter Lehrer des Volkes, Chefredakteur und Lehrer an der 29. OS, Leipzig

Lüders — L.,	Schulze — S.-H.,
Pätzold — P.,	Lehmann — L.-L.,
Scholl — Sch.,	Träger — T.,
Unze — U.	

Preisträger

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5

Ole-André Strzalla 22 Greifswald; **Sigrun Geyer** 657 Zeulenroda; **Kerstin Bachmann** 402 Halle; **Jörg Lehnert** 2034 Tutow; **Sibille Rohrbeck** 2302 Franzburg; **Andreas Knopf** 7144 Schkeuditz; **Brigitte Hildenbrandt** 6316 Stützerbach; **Burkhard Schneider** 6081 Fambach; Heinz Hering 50 Erfurt; Annegret Kirsten 422 Leuna; Ute Wittat 9507 Ebersbrunn; Martina Römer 128 Bernau; Matthias Liehm 3702 Benneckenstein; Frank Kolwe 128 Bernau; Frank Lux 5801 Gräfenhain; Detlev Snaga 128 Bernau; Matthias und Joh. Chr. Albrecht 1281 Lobetal; Michael Schnelle 754 Calau; Eckhard Schadow 14 Oranienburg; Uta Heller 50 Erfurt; Barbara Wettengel 992 Oelsnitz; Birgit Bartels 2567 Neubukow; Elke Kantiem 1195 Berlin; Doris Siegmund 3561 Heidberg; Petra Dietzel 4271 Adendorf; Kirsten Helbig 1321 Schöneberg; Marlies Langner 2301 Devin/Stralsund; Janko Russev 50 Erfurt; Tobias Latwesen 63 Ilmenau; Bernd Lins 57 Mühlhausen; Matthias Neumann 60 Suhl; Sabine Anders, 75 Cottbus.

Klassenstufe 6

Bernd Zaddach 75 Cottbus; **Ralph Lehmann** 1273 Petershagen; **Christoph Scheurer** 9611 Glauchau-Gesau; **Bernd Mathiszik** 50 Erfurt; **Dirk Wiesener** 1055 Berlin; **Gisela Köhler** 926 Hainichen; Andreas Schlosser 95 Zwikkau; Ehrenfried Zschech 86 Bautzen; Karin Weyh 6081 Fambach; Angelika Kirchhoff 701 Leipzig; Jürgen Zabel 57 Mühlhausen; Uwe Quasthoff 7022 Leipzig; Jörg Hutschenreiter 8020 Dresden; Christian Hofmann 7404 Meuselwitz; Hans-Jürgen Förster 1532 Kleinmachnow; Manuela Terne 795 Bad Liebenwerda; Carmen Schneider 6081 Fambach; Clemens Schlechte 808 Dresden; Heike Jurack 8502 Burkau; Elke Schneider 50 Erfurt; Gerd Falk 1532 Kleinmachnow; Carola Wobst 8502 Burkau; Christina Feige 57 Mühlhausen; Angela Petzold 115 Berlin-Mahlsdorf; Siegfried Marg 1501 Neu-Töplitz; Rita Oswald 8291 Friedersdorf; Norbert Göttke 14 Oranienburg; Regina Hildenbrandt 6316 Stützerbach; Frank Heyne 8107 Liegau; Lutz Püffeld 1422 Hennigsdorf.

Klassenstufe 7

Albrecht Heß 8027 Dresden; **Cordula Gierth** 925 Mittweida; **Herwig Gratias** 523 Sömmerda; **Ulf Brüstel** 7401 Ziegelheim; **Hans-Gert Gräbe** 50 Erfurt; **Reinhard Schuster** 703 Leipzig; Gerwit Becker 9251 Lauenhain; Thomas Ortmann 57 Mühlhausen; Ute Winkler 153 Teltow-Seehof; Jürgen Heß 50 Erfurt; Stefan Schulze 5211 Oberwillingen; Eberhard Manske 6088 Steinbach-Hallenberg; Rainer Zweck 24 Wismar; Frank Ihlenburg 22 Greifswald; Angela Rohrbeck 2302 Franzburg; Claus-Detlev Bauermeister 8019 Dresden; Frank Baumgartl 9412 Schneeberg; Anita Paul 608 Schmalkalden; Sigrid Jankowski 205 Teterow; Dietlind Kobes 205 Teterow; Bernd Klipps 2051 Boddin; Monika Seiler 53 Weimar; Volkmar Krause 7261 Wiederoda.

Klassenstufe 8

Albrecht Böttcher 9314 Neudorf; **Viktoria Weise** 48 Naumburg; **Harald Herrmann** 9301 Hammerunterwiesenthal; **Andreas Juhl** 425 Eisleben; **Ursula Baier** 825 Meißen; **Ralf Hein** 9611 Remse; Jürgen Ast 1824 Niemegk; Beate Weise 48 Naumburg; Hans-Joachim Karl 612 Eisfeld; Detlef Hantke 183 Rathenow; Erdmute Kriebel 821 Freital; Peter Mathé 29 Wittenberge; Karen Nielsen 821 Freital; Wolfgang Herrmann 9306 Elterlein; Ulrich Tetzlaff 1553 Friesack; Sabine Dittrich 9402 Bernsbach; Manfred Bobeth 806 Dresden; Bettina Belitz 68 Saalfeld; Elke Wiemann 8245 Glashütte; Carmen Hauptmann 8245 Glashütte.

Klassenstufe 9

Konrad Schneider 95 Zwickau; **Dietmar Wegner** 3601 Dardesheim; **Jürgen Voigt** 9533 Wilkau-Haßlau; **Ekkehard Kührt** 606 Zella-Mehlis; **Thomas Schwan** 8019 Dresden; **Ilona Boenigk** 94 Aue; Rainer Staudte 9501 Culitzsch; Heinz Marbes 128 Bernau; Ulrike Weise 9274 Wüstenbrand; Frank Täubner 754 Calau; Rolf Haftmann 88 Zittau; Jürgen Ilse 1134 Berlin; Bernd Kruska 102 Berlin; Detlev Karl 602 Schmalkalden; Thomas Winkler 9933 Bad Elster; Ursula Gebauer 6404 Rauenstein; Hans-Jürgen Mehls 5603 Dingelstädt; Detlef Bage 3223 Seehausen; Wolfgang Riedel 90 Karl-Marx-Stadt; Petra Jauch 59 Eisenach.

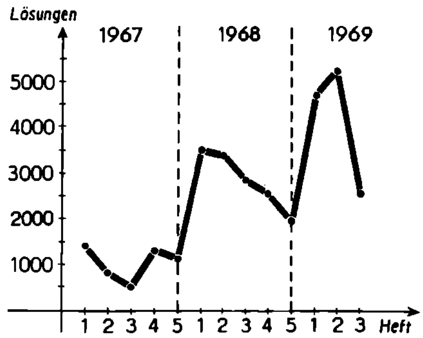
Klassenstufe 10/12

Hans-Peter Gronau 208 Neustrelitz; **Frank Müller** 798 Finsterwalde; **Bernd Kreutzer** 209 Templin; **Wolf Holowenko** 6532 Klosterlausnitz; **Rolf Dieckmann** 24 Wismar; **Gert Wanka** 73 Döbeln; Karl Paul 1544 Elstal; Klaus Schönefeld 53 Weimar; Wolfgang Wagner 402 Halle; Klaus Ditze 36 Halberstadt; Marlies Eberlein 8231 Niederfrauendorf; Ute Lange 1502 Potsdam-Babelsberg; Gernot Spiewok 22 Greifswald; Herbert Zinke 4371 Libehna; Bernd Hofmann 8808 Niederoderwitz; Stefan Ackermann 725 Wurzen; Rüdiger Nützmann 2031 Trittelwitz; Hans-Gert Leopold 69 Jena; Bernd Gossinger 6902 Jena-Lobeda; Detlev Schmidt 1631 Dabendorf; Jürgen Schmidt 757 Forst; Winfrid Helwig 3591 Jeetze.

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

Kollektive Beteiligung

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden (608); OS Mahlis (7261); Goetheschule (Schulkombinat-Oberschule Lauscha) Lauscha-Ernstthal (6426); OS Ebersbrunn (9507); EOS Worbis (562); OS Kuhfelde (3561); John-Brinckmann-OS Goldberg (2862); POS Gottleuba (8302); Klub Jg. Mathematiker Wismar (24); Mathematik-Spezialistenlager Berlin-Köpenick (117); OS Burkau (8502); Käthe-Kollwitz-OS, Weimar (53); OS Markersbach (9439); Clara-Zetkin-OS, Wiehe/Unstruttal (4736); EOS Karl-Marx, Tangerhütte (351); POS II Calau (754); Käthe-Kollwitz-OS, Wittenberg/Lutherstadt (46); AG Mathematik Großröhrsdorf (8512); POS IV Arnstadt (521); AG Mathematik, Kreis Altentreptow (202); OS Rüdnitz, Krs. Bernau (128); OS Andershof, Stralsund (23); POS Alt-Töplitz (1501); Dr.-Theodor-Neubauer-OS, Kieselbach/Werra (6201); OS Zaatzke (1931); Comenius-OS Burg (327); OS Parkentin (2561); EOS Kamenz (829).

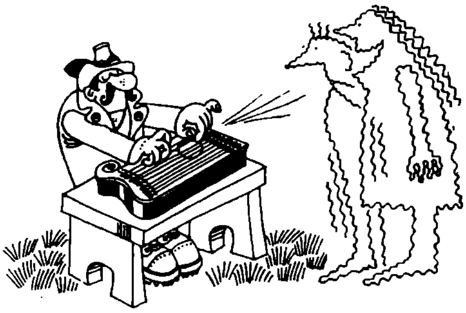


Rund 32000 Lösungen gingen in den letzten $2^1/_2$ Jahren zu den gestellten Wettbewerbsaufgaben 1967/69 ein. Wir sprechen allen *Jungen Mathematikern* unsere Hochachtung für den Fleiß und die Ausdauer aus, mit der sie die gestellten Probleme bearbeiteten. Unser Dank gilt dem Kollektiv der Lehrer (siehe S. 135), welches in unermüdlicher Kleinarbeit Aufgaben zusammenstellte und Lösungen erarbeitete. Unterstützt wurde es von zahlreichen Einsendern, ob jung oder alt. Das möge so bleiben.

Wer die Grafik analysiert, wird feststellen, daß in den Sommerferien wenig Neigung bestand, Lösungen einzusenden. Der Einsendeschluß für Heft 3/70 wird daher auf 15. September gelegt. Weiterhin schöne Erfolge beim *alpha*-Wettbewerb wünscht das

Redaktionskollegium

Mathematik und Musik



„Ein wahrer Künstler: Bei seinem Spiel geht man so richtig mit!“
Louis Rauwolf 28/69 Eulenspiegel

Was hat die Mathematik mit der Musik zu tun? Diese und ähnliche Fragen kann man vor allem dann hören, wenn sich bei der Auswertung von Mathematik-Olympiaden und anderen mathematischen Schülerwettbewerben herausstellt, daß hervorragende Ergebnisse von solchen Schülern erreicht wurden, die nicht nur mathematisch, sondern auch auf dem Gebiete der Musik besonders interessiert sind und dort ebenfalls besondere Leistungen hervorbringen.

So kann es nicht wundernehmen, wenn andererseits unter den Preisträgern bei musikalischen Wettbewerben — vor allem auf dem Gebiet der Instrumentalmusik — nicht selten auch besonders mathematisch Begabte anzutreffen sind.

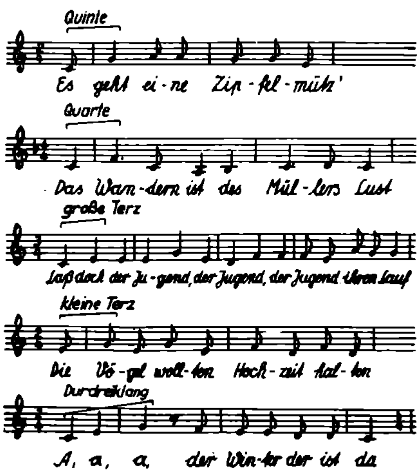
Im allgemeinen sieht man in den beiden Fächern Mathematik und Musik eher mehr Unterschiede und vielleicht sogar Gegensätzlichkeiten als Gemeinsamkeiten. So ist es zweifellos richtig, daß die Mathematik in erster Linie den nüchternen Verstand, die Musik hingegen das Gefühl anspricht. Aber mit dieser Zuordnung kann sich nur eine oberflächliche Betrachtung zufriedengeben. Nicht nur die Musik, sondern auch die Mathematik weckt Freude und Begeisterung — vor allem dann, wenn eine knifflige Aufgabe erfolgreich gelöst werden konnte und wenn man erkennt, wie erworbenes mathematisches Wissen in zunehmendem Maße zu weiteren Erkenntnissen und Einsichten führt.

Die Musik wiederum ist keine nur gefühlsmäßige Angelegenheit. Zwar kann die Musik in hohem Maße Stimmungen und Gefühle ausdrücken, Gedanken und Handlungen verdeutlichen, aber bewußtes Musikhören setzt darüber hinaus vielfältige Kenntnisse voraus, die sich auf die Struktur der Musik (Melodie, Rhythmus, Harmonie) sowie auf Instrumentenkunde, Formenlehre und Musikgeschichte beziehen. Wer sich näher mit Musik beschäftigen will, weiß, daß er ohne Kenntnisse in der Notenschrift nicht weit kommt, und der Instrumentalspieler bedarf umfangreicher Übungen, um die Technik und die Ausdrucksmöglichkeiten seines Instruments zu bewältigen.

Da die Mathematik zu den Wissenschaften gehört, die Musik hingegen zu den Künsten, bleibt in dieser Einteilung meist völlig unbeachtet, daß auch die Musik auf wissenschaftlichen Grundlagen beruht. Sie finden sich in der Akustik, dem „klingenden“ Teilgebiet der Physik. Bekanntlich ist die Physik sehr eng mit der Mathematik verbunden, viele ihrer Gesetze werden in mathematischen Formeln ausgedrückt. So liegt hier, in der naturwissenschaftlichen Sphäre, eine der unmittelbaren Beziehungen zwischen der Musik und der Mathematik.

Vom Altertum bis ins Mittelalter hinein galten die sogenannten *Sieben Freien Künste* als notwendiger Bestandteil der Bildung des „freien Mannes“. Grammatik, Dialektik und Rhetorik waren im *Trivium* zusammengefaßt, während die vier „mathematischen“ Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie das *Quadrivium* bildeten.

Es war kein Geringerer als *Pythagoras von Samos,* der die mathematischen Grundlagen der Musik erkannte. An einem selbst konstruierten Monochord, einem Instrument mit nur einer Saite, stellte er verschiedene Experimente an, die zu wichtigen Erkenntnissen führten. Sie werden heute von jedem Spieler eines Streich- oder Zupfinstruments angewandt, wenn er durch bestimmte Griffe die Länge der schwingenden Saiten seines Instruments verkürzt und damit die Tonhöhen verändert. Je kürzer die schwingende Saite ist, um so schneller folgen die Schwingungen aufeinander, um so höher wird der Ton. Läßt man nur noch die Hälfte der Länge einer Saite schwingen, so erklingt ein Ton, der genau eine Oktave höher liegt als der Ton der vollen Saitenlänge. Das ist der Klangunterschied, wie er (auch beim gemeinsamen Gesang) zwischen Kinder- und Männerstimmen besteht. Jedes Intervall, d. h., jeder Abstand zwischen zwei nacheinander oder gleichzeitig erklingenden Tönen ist so durch ein bestimmtes Verhältnis der Saitenlängen am Monochord bzw. der Schwingungszahlen gekennzeichnet. War es bei der Oktave das Verhältnis 1 : 2, so lautet es bei der Quinte (z. B. Liedanfang „Es geht eine Zipfelmütz“) 2 : 3, bei der Quarte (Liedanfang „Das Wandern ist des Müllers Lust“) 3 : 4. Die große Terz („Laß doch der Jugend ihren Lauf“) hat das Schwingungszahlverhältnis 4 : 5, die kleine Terz („Die Vögel wollten Hochzeit halten“) 5 : 6. Der Durdreiklang („A, a, a, der Winter, der ist da“) zeigt das Schwingungsverhältnis 4 : 5 : 6.



Wie die bisher genannten Zahlen folgen auch die weiteren der sogenannten Naturtonreihe, die man auf einem Blasinstrument ohne Ventile (Signalhorn, Fanfare) hervorbringen kann. Die Schwingungszahlen dieser Töne verhalten sich wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 ...

Da es sich um Schwingungszahl*verhältnisse* handelt, gelten sie unabhängig von der Tonart und der Tonhöhe von jedem beliebigen Grundton aus. (Die Kürze des Artikels verbietet es, hier auf weitere Schwingungsprobleme einzugehen.)

Eine andere Tatsache ist, daß jeder bestimmte Ton durch eine nur ihm eigene Schwingungszahl bestimmt wird. Man stimmt die meisten Instrumente nach der Stimmgabel, die den Normstimmton = Kammerton a^1 (das „eingestrichene“ A) erklingen läßt, wenn man sie in Schwingungen versetzt. Dieser Ton hat 440 Hz (Hertz, so benannt nach dem deutschen Physiker *Heinrich Hertz*), d. h., die Gabelenden schwingen in der Sekunde 440mal. Diese Schwingungsfrequenz kennzeichnet auch den Ton der A-Saite der Geige, während die um eine Oktave tiefer erklingende A-Saite des Cellos nach dem oben Gesagten entsprechend „nur“ 220 Schwingungen in jeder Sekunde ausführt. Der tiefste Ton des Klaviers liegt um noch weitere drei Oktaven tiefer, d. h., man muß diese Schwingungszahl noch weitere dreimal halbieren. Das Ergebnis ist

27,5 Hz. Damit liegt dieser Ton schon in der Nähe der menschlichen Hörgrenze; denn Töne, die weniger als 20 Hz haben, nimmt man nicht mehr hörend wahr. Die obere Hörgrenze liegt bei etwa 16000 Hz. Der höchste Ton des Klaviers erreicht aber nur 4224 Hz, vom Kammerton aus gerechnet noch weitere drei Oktaven und eine kleine Terz höher — es ist das fünfgestrichene C (c^5).

Berechnungsgrundlage: $440\ \text{Hz} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{6}{5}$

Was bei den Saiteninstrumenten für die Beziehung zwischen Saitenlänge und Tonhöhe gilt, trifft sinngemäß bei den Blasinstrumenten (am besten sichtbar bei den Orgelpfeifen) auf die jeweilige Länge der schwingenden Luftsäule zu. Für unterschiedliche Tonlagen werden gleichartige Instrumente in verschiedenen Größen gebaut. So ist die Tenorblockflöte, deren Tonlage (bei jeweils gleichen Griffen) gegenüber der Sopranblockflöte eine Oktave tiefer liegt, mit 64 cm Länge genau doppelt so lang wie diese. Eine Veränderung der Tonhöhen in kleinen Schritten für das Melodiespiel wird durch das Auf- oder Abdecken der Grifflöcher erreicht, was eine entsprechende Verlängerung oder Verkürzung der schwingenden Luftsäule zur Folge hat. Darüber hinaus spielen Probleme des sogenannten Überblasens eine Rolle, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann.

Bei den Blechblasinstrumenten ist es nur die Zugposaune, die eine sichtbare Veränderung der Länge der schwingenden Luftsäule zeigt, wenn der Spieler den „Zug" bewegt. Die anderen Blechblasinstrumente besitzen Ventile, durch deren Betätigung der Luftstrom in unterschiedlich lange Kanäle gelenkt wird.

Instrumentenbauer, aber auch Komponisten müssen also mit den akustischen Besonderheiten und Gesetzen vertraut sein.

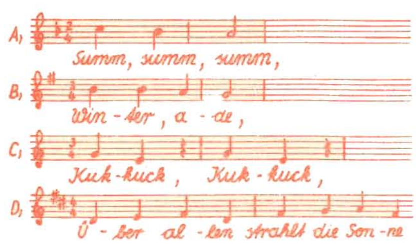
Die mathematischen Beziehungen der Musik beschränken sich aber nicht nur auf das Gebiet der Akustik.

Auch in den Bezeichnungen der Taktarten und der Notenwerte finden wir mathematische Begriffe. Abgesehen von der Ganzenote kommen wir bei allen anderen Notenwerten „in die Brüche": Dreiviertelnote, Halbenote, Achtel-, Sechzehntel-, Zweiunddreißigstelnote usw. Dabei stellt keiner dieser Werte eine absolute Zeitgröße dar, aber in den gewählten Bezeichnungen drücken sich die Zeitwertverhältnisse aus: Eine Ganzenote symbolisiert einen Ton, der ebenso lang klingt wie zwei durch Halbenoten oder vier durch Viertelnoten gekennzeichnete Töne usw.

Die Taktarten werden nach den in jedem Takt enthaltenen Werten bezeichnet, und zwar auf einen einheitlichen Nenner bezogen. Dieser Nenner gibt den Grundzeitwert (Grundschlag, Taktschlag) an. Meistens ist es der Viertelwert, so daß wir — vor allem im Notenbild bekannter Lieder — am häufigsten den Zwei-, Drei- und Viervierteltakt antreffen. Manchmal wird auch die Halbenote oder die Achtelnote als Grundschlagwert gewählt. So finden wir z. B. den Dreiachteltakt und den Sechsachteltakt. Diese Taktbezeichnungen fallen dem Mathematiker durch zwei Besonderheiten auf: Erstens darf man den angegebenen Bruch nicht willkürlich kürzen. Sonst würde man ja den Wert des Grundschlages, der im Nenner ersichtlich ist (z. B. Viertel), verändern. So sind also der Dreiviertel- und der Sechsachteltakt trotz der mathematischen Gleichheit beider Brüche zwei grundverschiedene Taktarten. Sie haben zunächst unterschiedlich notierte Grundschlagwerte, aber auch unterschiedliche Betonungsverhältnisse im Takt und werden demzufolge verschieden taktiert. Das gleiche trifft für den Vierviertel- und den Zweihalbetakt zu.

Zweitens stellen nicht nur diese beiden letztgenannten Taktarten, die als Bruch die Zahl „1" repräsentieren, ganze oder volle Takte dar. Jede Taktart gibt den Wert eines vollen Taktes an, auch wenn der Bruch von 1 abweicht. So darf man also den Sechsachteltakt nicht als unvollständig und den Dreihalbetakt nicht als übervoll ansehen. Jeder Takt eines Liedes oder Musikstücke ist vollständig, wenn die Summe seiner Noten- (und Pausen-)Werte mit der angegebenen Taktart übereinstimmt. —

Auch in den musikalischen Formen finden wir besonders seit der Klassik gefestigte mathematische Beziehungen wieder. Das Motiv, die kleinste musikalisch-gedankliche Sinneinheit, die für ein Lied oder Musikstück charakteristischen Aussagewert hat, umfaßt in der Regel zwei Takte, unabhängig von der Anzahl der Töne und der Taktart:



Die beiden letzten Beispiele zeigen eine (allerdings nicht häufige) Motivteilung: Der zweite Takt kann den ersten wiederholen (C) oder den Melodieablauf in eine andere Lage versetzen (D) (= „Sequenz").

Die Weiterführung dieser Liedmotive — gewissermaßen ihre „Beantwortung" — nimmt (wieder unabhängig von der Zahl der Töne bzw. der Textsilben) ebenfalls zwei Takte in Anspruch und führt zu einem relativen Anschluß des Gedankens:

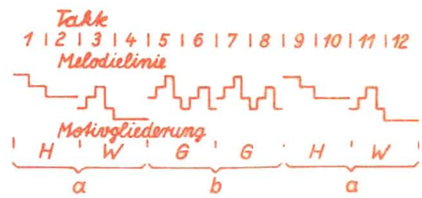
(A) Bienchen, summ herum.
(B) Scheiden tut weh.
(C) ruft's aus dem Wald.
(D) über allen in der Welt.

Einen solchen Viertakter bezeichnet man als „Satz".

Im Beispiel B) entstand er durch Wiederholung des musikalischen Motivs. — Die Beispiele A), B) und C) erreichen am Satzende den Grundton, wodurch jeder dieser Sätze einen musikalischen Abschluß und so den Charakter eines selbständigen „Liedteils" erhält. Ihm folgt in diesen Beispielen ein kontrastierender Mittelteil von ebenfalls vier Takten; danach wird der Anfangsteil entweder unverändert (A) oder mit geringen Abweichungen (B, C) wiederholt. Wir haben es hier mit einer dreiteiligen Liedform aus Anfangs-, Mittel- und Wiederholungsteil zu tun:

a — b — a (Beispiel A) bzw. a — b — a' (Beispiel B und C)

Das den Mittelteil einleitende „Gegenmotiv" (so benannt, weil es einen Gegensatz zu dem „Hauptmotiv" des Liedanfangs bildet) wird meist wiederholt (Beisp. A) oder sequenziert (Beisp. B, C), so daß der Mittelteil ebenso wie das gesamte Lied als Form leicht überschaubar und einprägsam ist. Zunächst das Lied „Summ, summ, summ":



H Hauptmotiv, W Weiterführung von H
G Gegenmotiv
(Die Kleinbuchstaben kennzeichnen jeweils einen viertaktigen Satz.)

Gleiche Buchstaoen weisen auf Gleichheit der Formbestandteile hin. Bei den folgenden Liedbeispielen tritt auch die Abwandlung als formbildendes Merkmal auf. H' bedeutet abgewandeltes Hauptmotiv, a' entsprechend geringfügig verändertes Klangbild des betreffenden Satzes. Unter Verzicht auf Abbildung der Melodielinie aus Platzgründen ergibt sich für das zweite Lied („Winter ade"):

B) $\underbrace{\text{H H}}_{\text{a}}$ $\underbrace{\text{G G'}}_{\text{b}}$ $\underbrace{\text{H' H}}_{\text{a'}}$

(Statt W tritt hier eine Wiederholung von H auf)

und für „Kuckuck, Kuckuck":

C) $\underbrace{\text{H W}}_{\text{a}}$ $\underbrace{\text{G G'}}_{\text{b}}$ $\underbrace{\text{H' W'}}_{\text{a'}}$

Während die motivischen Beziehungen in allen drei Liedern Unterschiede aufweisen, handelt es sich jedesmal um eine aus drei Sätzen zu je vier Takten bestehende Liedform mit Wiederholung (oder wie bei den Beispielen B) und C) mit geringfügiger, die „Ähnlichkeit" wahrender Abwandlung) des Anfangsteils im Schlußteil. Diese Dreiteiligkeit ist in entsprechend größeren Dimensionen auch in der Instrumentalmusik sehr verbreitet.

Anders liegt der Fall beim Lied „Über allen strahlt die Sonne". Hier gibt es nur zwei viertaktige Sätze, die einander sehr ähnlich sind:

D) $\underbrace{\text{H W}}_{\text{a}}$ $\underbrace{\text{H W}'}_{\text{a}'}$

Dieser inneren Entsprechung wird die Bezeichnung der Sätze als „Vordersatz" (a) und „Nachsatz" (a') einer übergeordneten Formeinheit gerecht, die man als (achttaktige) „Periode" bezeichnet. Hier ist der abschließende Grundton nicht bei W, sondern erst bei W' erreicht; daher liegt in diesem Beispiel keine zweiteilige, sondern „nur" eine einteilige Liedform vor! Zweiteilig würde das Lied, wenn sich nun noch z. B. ein Kehrreim anschlösse („Heute wollen wir das Ränzlein schnüren").

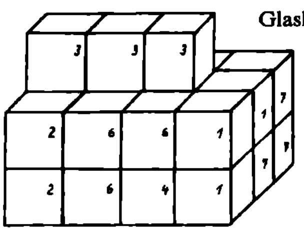
Wir haben gesehen, daß es vielfältige Beziehungen zwischen der Mathematik und der Musik gibt, von denen hier nur einige genannt werden konnten. Wenn man die starke gefühlsbildende Kraft der Musik der Schulung des Denkvermögens durch die Mathematik gegenüberstellen will, so kann man andererseits sagen, daß Mathematik und Musik einander wirkungsvoll ergänzen. Aber beide, das wissenschaftliche und das künstlerische Fach, regen gemeinsam die schöpferische Phantasie und das Vorstellungsvermögen an und vervollkommnen den Menschen, der sich intensiv mit ihnen beschäftigt.

Ch. Lange

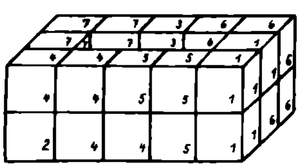
Soma-Würfel

Sonja Lammer, Berlin sandte uns drei Figuren (siehe auch 2/69, S. 40):

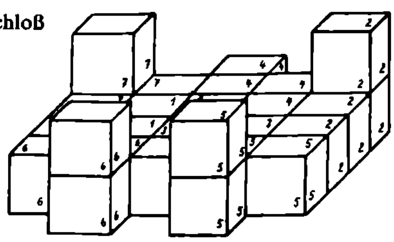
Glashaus



Bassin



Schloß



Lösungen

Lösungen zu Aufgaben aus der SR Rumänien

2. Teil der Aufgabe (Fortsetzung)

Nach Voraussetzung gilt $\overline{CM}=\overline{BM}$ und $\sphericalangle CAB = 90°$. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CP}=\overline{CM}$ und $\overline{BM}=\overline{BN}$; (1)

ferner gilt $\sphericalangle PCA = \sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ABN$. (2)

Aus der Voraussetzung $\sphericalangle CAB = 90°$ folgt $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 90°$. (3)

Aus (2) und (3) folgt $\sphericalangle PCB + \sphericalangle CBN = 180°$, also $\overline{PC} \parallel \overline{NB}$. Aus der Voraussetzung $\overline{CM}=\overline{BM}$ und aus (1) folgt $\overline{PC}=\overline{NB}$.

Im Viereck $NBCP$ sind die gegenüberliegenden Seiten $\overline{NB}$ und $\overline{PC}$ gleich lang und parallel, das Viereck ist ein Parallelogramm.

Klassenstufe 10

(1. Es seien $\tan x + \cot x = m$ und $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a) Es ist der Wertevorrat für m anzugeben.

b) Der Ausdruck $E(x)$

$\sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 x + \cos^4 x$

ist als Funktion von m darzustellen.

c) Es ist $E\left(\frac{\pi}{12}\right)$ zu berechnen.)

Lösung: a) Man erhält

$$m = \tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \qquad (1)$$

Daraus folgt wegen $0 < \sin 2x < 1$ $m \geqq 2$.

b) Man erhält

$\sin x + \cos x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x + \cos x)$
$= \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$,

also $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot$

$$\cdot \left(1 - \frac{\sin 2x}{2}\right), \qquad (2)$$

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x$
$+ 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{\sin^2 2x}{2}$, also

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}. \qquad (3)$$

Aus (1) folgt

$$\sin 2x = \frac{2}{m}, \quad 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{m}$$

$$\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{m^2},$$

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{m^2} = 0. \qquad (4)$$

Aus (4) folgt *entweder*

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}\right)$$

und

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}\right)$$

oder $\quad \sin^2 x \quad = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}\right)$

und $\quad \cos^2 x \quad = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}\right)$.

In jedem Falle gilt daher

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}}\right).$$

Daher ist

$$E(x) = \left(\sin x + \cos x\right)\left(2 - \frac{1}{m}\right) + 1 - \frac{2}{m^2}$$
$$= 1 - \frac{2}{m^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{m}\right)$$
$$\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2-4}}\right).$$

c) Für $x = \frac{\pi}{12}$ wird $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

also $m = \frac{2}{\sin 2x} = 4$. Man erhält daher

$$E\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{4}\right)$$
$$\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}\sqrt{12}} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sqrt{12}}\right)$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right).$$

Hieraus folgt wegen $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

und $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$E\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{6} = \frac{7}{8}\left(1 + \sqrt{6}\right) \approx 3{,}018.$$

2a) Beweis durch vollständige Induktion

Für $n = 1$ erhält man

$$s_1 = \frac{1 \cdot (5 \cdot 1 + 2)}{(5 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{7}{(1 \cdot 6)^2}.$$

Wir nehmen an, es gelte $s_k = \frac{k \cdot (5k+2)}{(5k+1)^2}$.

Wir zeigen, daß unter dieser Voraussetzung die Summenformel auch für s_{k+1} gilt.

Beweis: $s_{k+1} = \frac{k(5k+2)}{(5k+1)^2}$

$$+ \frac{10(k+1) - 3}{[5(k+1) - 4]^2 \cdot [5(k+1) + 1]^2}$$

$$s_{k+1} = \frac{k(5k+1)^3 + (11k+7)(5k+1)^2}{(5k+1)^2 \cdot (5k+6)^2}$$
$$= \frac{k(5k+1) + 11k + 7}{(5k+6)^2}$$

$$s_{k+1} = \frac{5k(k+1) + 7(k+1)}{[5(k+1)+1]^2} = \frac{(k+1)(5k+7)}{[5(k+1)+1]^2}$$
$$= \frac{(k+1)\,[5(k+1)+2]}{[5(k+1)+1]^2}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Summenformel für die natürliche Zahl k gilt, ist sie auch für $k+1$ richtig. Sie gilt daher für jede natürliche Zahl.

b) Durch Umformung erhalten wir aus

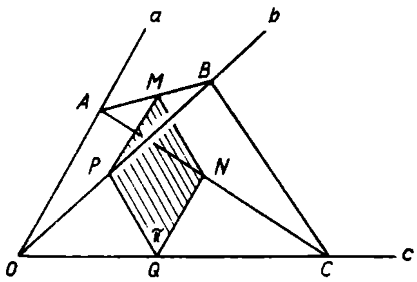
$$\frac{n(5n+2)}{(5n+1)^2} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{n(5n+2)}{(5n+1)^2 - 1 + 1} = \frac{n(5n+2)}{5n(5n+2)+1} < \frac{1}{5} \text{ und damit}$$

$$\frac{5n(5n+2)+1}{n(5n+2)} = 5 + \frac{1}{n(5n+2)} > 5.$$

3a) Die Geraden MP und NQ liegen in der

Ebene π; die Gerade MP liegt zugleich in der Ebene AOB, die Gerade NQ liegt zugleich in der Ebene AOC, und die Gerade OA liegt parallel zur Ebene π.
Daraus folgt $\overline{OA} \parallel \overline{MP}$ und $\overline{OA} \parallel \overline{NQ}$ und damit $\overline{MP} \parallel \overline{NQ}$. Ferner gilt nach Voraussetzung $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ und deshalb
$\overline{MN} : \overline{BC} = \overline{AM} : \overline{AB} = \overline{OP} : \overline{OB} = \overline{OQ} : \overline{OC}$;
folglich gilt auch $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$, d. h. das Viereck $MNQP$ ist ein Parallelogramm.



b) Der Punkt M muß die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis $\overline{OA} : \overline{BC}$ teilen, damit das Parallelogramm $MNQP$ ein Rhombus ist.

Lösungen der Aufgaben
Mittelschulprüfung Island 1969

1. -50 2. 2 3. 1100101 4. Sie wird zweimal so groß 5. $30x^5y^4z$ 6. $5\frac{1}{7}$
7. $A \cap (B \cup C)$
8. Wahre Aussagen: $A = D$; $A \sim D$; $A \sim C$; $C \sim D$; $E = B$; $E \sim B$
Falsche Aussagen: $A = C$; $A = E$; $A \sim E$; $C = D$
9. Wahre Aussagen: $3 \in A$; $\{5\} \subset A$
Falsche Aussagen: $\{5\} \in A$; $5 \subset A$; $0 \in \varnothing$
10. 32, 64 11. $32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
12. Rest 7 13. $1{,}28 \cdot 10^4$ 14. 1011

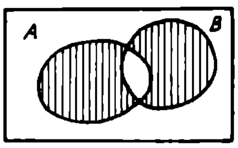
15a)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	3	11

15b)

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

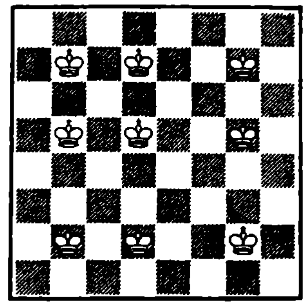
15c) 100122 15d) 12
16.



17. a) $A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
b) $A \cap B = \{4, 6\}$
c) $B = \{3, 7, 9\}$ d) $U = \varnothing$
e) $A \setminus B = \{7\}$
18. $3x^2 - 2x - 16 = (3x - 8)(x + 2)$
19. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ 20. $p = 200$
21. $a = 6$ 22. $\{1,2\}$ 23. $x = 31, y = 13$
24. $2(x + 10)$ für $x \neq \pm 2$
25. $\frac{11}{5 - x}$ für $x \neq \pm 5$

Lösungen zu Rund um das Schachbrett

1 De8 $\ddagger$
2 S : e7 $\ddagger$
3 Es sind mindestens 16 Züge erforderlich. Als ersten kann man jeden beliebigen Bauern schlagen mit Ausnahme der Bauern c4, d3, d4, e5, e6, f5. Wenn das Pferd als ersten Bauern den Bauern c2 schlägt, folgt als nächster Bauer b4 und dann weiter d3, b2, c4, d2, b3, d4, e6, g7, f5, e7, g6, e5, f7, g5.
4a Bereits 9 Könige erfüllen die Bedingungen (siehe Graphik).



4b Man schreibt auf jedes Feld des Schachbretts eine Zahl, die angibt, wieviel Züge von da aus der Springer machen kann; man bekommt dann folgendes Quadratschema:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

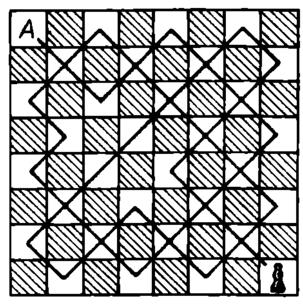
Die gesuchte Zahl der Züge wird durch die Summe aller Zahlen in diesem Schema ausgedrückt, d. h. durch die Zahl
$4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336.$
Der Springer kann im ganzen 336 Züge ausführen.

5

21		4		10		31	
	12		29		23		2
28		13		7		18	
	5		20		26		15
16		25		19		6	
	17		8		14		27
1		24		30		11	
	32		9		3		22

6a Die Aufgabe ist unter den gegebenen Bedingungen nicht lösbar. Sie wäre nur dann lösbar, wenn ein Feld zweimal berührt werden darf.

6b



7 Nein, es ist nicht möglich! *Begründung:* Der Springer wechselt bei jedem Zug die Feldfarbe, und 63 Züge muß er unter obigen Bedingungen ausführen.
8 1. Kd4!!, Ta4† 2. Ke5, Ta8 3. Dd6 nebst Matt beim 4. Zug von Weiß. Es handelt sich hier um ein scharfsinniges Rochadeproblem, das nur die Schüler lösen können, die mit Problemen dieser Art vertraut sind.
1. Dd6 würde bereits im 2. Zug zum Matt führen, wenn Schwarz nicht lang rochieren könnte. Schwarz kann aber rochieren, und ein Matt im 4. Zug ist dann nicht mehr möglich. Daher der glänzende Schlüsselzug 1. Kd4. Beim 2. Zug von Schwarz wird die Ausgangsstellung wieder erreicht, aber Schwarz kann nun nicht mehr rochieren!
9 Man nimmt für den weißen Bauern, der soeben noch d8 gezogen wurde, einen gemischtfarbigen Springer (linke Hälfte weiß, rechte Hälfte schwarz oder auch umgekehrt) und zieht ihn nach e6. Nun sind beide Könige matt! (aus: *„64 Schachscherze“*)
10 Ka1 – a2 (Ein Abwartezug), aus *chess* von *P. H. Williams*

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Sachs

▲ 410 1. Wir beweisen als erstes, daß zwischen der Anzahl k der Kanten und der Anzahl n der Knotenpunkte die Beziehung
(1) $k = 2n$
besteht. Zu diesem Zwecke denken wir uns jede Kante etwa in der Mitte zerschnitten und dadurch in zwei Halbkanten zerlegt. Dann ist die Anzahl h der Halbkanten einerseits gleich $2k$, denn jede Kante hat zwei Halbkanten, und andererseits gleich $4n$, denn von jedem Knotenpunkt gehen vier Halbkanten aus. Aus $h = 2k$ und $h = 4n$ folgt sofort (1).
2. Den Beweis der nächsten beiden Behauptungen wollen wir mittels vollständiger Induktion führen. Dazu ist es zweckmäßig, den Bereich der betrachteten Figuren etwas zu erweitern — es entspricht dies dem häufig beobachteten Sachverhalt, daß gewisse Sätze nur dadurch einem Induktionsbeweis zugänglich werden, daß man sie zugleich verallgemeinert, weil anderenfalls die Voraussetzungen für die Durchführung des Induktionsschlusses zu schwach sind. Die Figuren, die wir jetzt betrachten, mögen, wie in der Aufgabe angegeben, durch Zeichnen einer endlichen Anzahl geschlossener Kurven in die Ebene entstanden sein und den Bedingungen (II) und (III) genügen, auf die Bedingungen (I) und (IV) jedoch wollen wir verzichten. Damit lassen wir zu, daß eine Figur F in mehrere getrennte Teile zerfallen kann (diese Teile nennen wir die „Komponenten“ der Figur), unter denen insbesondere einfach geschlossene Kurven vorkommen dürfen, auf denen kein Schnittpunkt liegt.
Die Anzahl der Komponenten einer Figur F sei mit s bezeichnet. Dann wollen wir beweisen:
(A) F zerlegt die Ebene in
(2) $f = n + s + 1$ Gebiete;
(B) man kann die Gebiete so mit zwei Farben färben, daß je zwei längs eines Kurvenstückes benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.
Fortsetzung folgt in Heft 1/1970.

Zahlenrätsel — einmal anders (4/69)

Lösung von Prof. Dr. W. Renneberg, Leipzig

1.1. *Beweismethode:* Man konstruiert alle Belegungen der neun Variablen in den sechs Gleichungen über der Grundmenge 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aus drucktechnischen Gründen werden die Ringe durch Buchstaben ersetzt.

$$\begin{array}{ccccccl} abc & - & deb & = & fg & & \text{G 1} \\ : & & + & & + & & \\ dg & \cdot & h & = & dib & & \text{G 2} \\ \hline ia & + & dfa & = & acc & & \text{G 3} \\ & & & & & & \\ \text{G 4} & & \text{G 5} & & \text{G 6} & & \end{array}$$

1.2. *Beziehungen:* Aus den Gleichungen liest man die folgenden Beziehungen ab.

G 1 Einer: $g+b=\begin{cases} c \\ 10+c \end{cases}$ (1)

Zehner: $\left.\begin{matrix} f+e \\ f+e+1 \end{matrix}\right\} = 10+b$ (2)

Hunderter: $d+1=a$ (3)

G 3. Einer: $2\cdot a=\begin{cases} c \\ 10+c \end{cases}$ (4)

G 5. Einer: $b+h=10+a$ (5)

Zehner: $e+1=f$ (6)

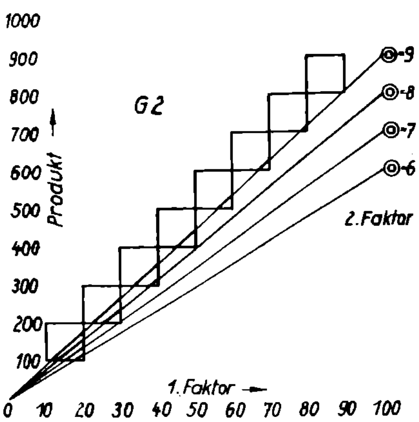
Aus (2) und (6) ergibt sich:

$2\cdot e=\begin{cases} 9+b \\ 8+b \end{cases}$ (7)

1.3. Zulässige Werte

1.3.1. $i \neq 0$ (als erste Ziffer)

1.3.2. In Gleichung G 2 soll der Zehner des ersten Faktors gleich dem Hunderter des Produktes sein. Diese Bedingung schränkt die Lösungsmöglichkeiten für G 2 ein. Als Lösungen kommen nur Zahlen in Betracht, deren Punkte innerhalb der Quadrate liegen (siehe Abb.).



Der Einer des ersten Faktors muß verschieden von Null sein, weil $g \neq b$ gilt.

1.3.3. h kann nicht kleiner als 7 sein.

$17 \cdot 6 = 102$ (nicht wegen $i \neq 0$)

$18 \cdot 6 = 108$ (nicht wegen $i \neq 0$)

$19 \cdot 6 = 114$ (nicht wegen $d \neq i$)

1.3.4. d kann nicht 0 sein (als erste Ziffer) und nicht größer als 6.

$78 \cdot 9 = 702$ (nicht wegen $i \neq 0$)

1.3.5. g kann nicht kleiner als 4 sein.

$\left.\begin{matrix} 12\cdot 9 = 108 \\ 13 \cdot 8 = 104 \end{matrix}\right\}$ (nicht wegen $i \neq 0$)

$13 \cdot 9 = 117$ (nicht wegen $d \neq i$)

$23 \cdot 9 = 207$ (nicht wegen $i \neq 0$)

1.3.6. Aus (3) folgt in Verbindung mit 1.3.4., daß a weder 0 und 1 noch 8 und 9 sein kann.

1.3.7. Aus (4) folgt, daß c gerade ist.

1.3.8. Die zulässigen Werte für h, d, g, a und c sind also folgende.

h	d	g	a	c
7	1	4	2	0
8	2	5	3	2
9	3	6	4	4
	4	7	5	6
	5	8	6	8
	6	9	7	

1.4. Belegungen

	h	a	b	c	g	d	e
1.	7	2	5	4	9	1	**7**
2.	7	3	6	**6**	–	–	–
3.	7	4	**7**	–	–	–	–
4.	7	5	8	0	n.e.	–	–
5.	7	6	9	2	n.e.	–	–
6.	8	2	4	**4**	–	–	–
7.	8	3	5	6	n.e.	–	–
8.	8	4	6	**8**	–	–	–
9.	8	5	7	0	n.e.	–	–
10.	8	6	**8**	–	–	–	–
11.	8	7	9	4	5	6	**9**
12.	9	2	3	4	n.e.	–	–
13.	9	3	4	6	n.e.	–	–
14.	9	4	5	8	n.e.	–	–
15.	9	5	6	0	4	**4**	–
16.	9	6	7	2	5	**5**	–
17.	9	7	8	4	6	**6**	–
	(5)			(4)	(1)	(3)	(7)

Fettdruck: schon vorhandener Wert,
n.e.: nicht erfüllbar

Ergebnis: Es gibt keine Belegung der neun Variablen, die den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die Aufgabe hat keine Lösung.

2. Wir setzen im Einer der beiden Summanden in Gleichung G 3 die entsprechenden Ziffern ein und erhalten als Lösung

$$\begin{array}{ccccc} 360 & - & 276 & = & 84 \\ : & & + & & + \\ 24 & \cdot & 9 & = & 216 \\ \hline 15 & + & 285 & = & 300 \end{array}$$

Das wunderbare Gedächtnis:

Der Zauberkünstler hat den Vorgang so gesteuert, daß er sich nur einen Satz zu merken brauchte, nämlich den Satz auf S. 136, Zeile 18 des Buches von Hermann Kant.

Zunächst hat er dieses Buch „forciert", wie es in der Sprache der Magier heißt. Hätte nämlich der erste Zuschauer dieses Buch, das in der Mitte lag, nicht gewählt, so hätte er den zweiten Zuschauer ein Buch wählen lassen und evtl. noch den dritten, bis das von ihm gewünschte Buch gewählt wird.

Welche Ziffern auch immer die drei Zuschauer entsprechend den Bedingungen wählen, stets hat die Differenz der beiden sechsstelligen Zahlen die Quersumme 36.

Das wollen wir jetzt nachweisen:

Es seien a, b, c die drei gewählten Ziffern, die paarweise von einander verschieden sind. O. B. d. A. können wir $0 < c < a < 10$ annehmen; denn im Falle $a < c$ wird später die erste Zahl von der zweiten subtrahiert.

Wir untersuchen jetzt nur die aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl $100a + 10b + c$ und erhalten die Differenz

$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$
$= 99a - 99c = 99(a - c)$.

Dabei gilt $0 < a - c < 9$.

Daher ist $99(a - c)$ gleich einer der Zahlen 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792. Alle diese Zahlen haben aber die Quersumme 18. Da bei den beiden sechsstelligen Zahlen die ersten drei Ziffern sich wiederholen, hat die Differenz dieser Zahlen die Quersumme 36. Somit sind die Seite 136 und die Zeile 18 eindeutig bestimmt, welche Ziffern auch die Zuschauer jeweils auswählen.

Nächtlicher Spuk

hundert (... wach **und ertastete**...), acht, eins, tausend, elf, zwei, neun, sieben, zehn, drei.

Ein Kunstwerk

Funktionsgleichungen	Definitionsbereiche
$y=2$	$1 \leqq x \leqq 2$; $3 \leqq x \leqq 4$; $6 \leqq x \leqq 7$
$y=3$	$1 \leqq x \leqq 2$; $6 \leqq x \leqq 7$
$y=4$	$1 \leqq x \leqq 2$; $3 \leqq x \leqq 4$; $4{,}5 \leqq x \leqq 5{,}5$; $6 \leqq x \leqq 7$
$x=1$	$2 \leqq y \leqq 3$
$x=2$	$2 \leqq y \leqq 4$
$x=2{,}5$	$2 \leqq y \leqq 5$
$x=3$	$1 \leqq y \leqq 4$
$x=4$	$2 \leqq y \leqq 4$
$x=4{,}5$	$2 \leqq y \leqq 5$
$x=5{,}5$	$2 \leqq y \leqq 4$
$x=6$	$2 \leqq y \leqq 3$
$x=7$	$2 \leqq y \leqq 4$

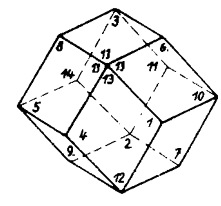
Spieglein, Spieglein ...

$f_1(x)=y=x$ und $f_1(x)=y=-x$
$f_2(x)=y=x^2$ und $f_2(x)=y=-x^2$
$f_3(x)=y=x^{-1}$ und $f_3(x)=y=-x^{-1}$
$f_4(x)=y=\sqrt{x}$ und $f_4(x)=y=-\sqrt{x}$
$f_5(x)=y=\sqrt{-x}$ und $f_5(x)=y=-\sqrt{-x}$

Bilderrätsel

Bezirksolympiade

Magischer Dodekaeder



In freien Stunden alpha heiter

aus: Eulenspiegel 29/69

Das wunderbare Gedächtnis

Ein Zauberkünstler behauptet, er habe ein wunderbares Gedächtnis. Er kenne den Inhalt vieler Romane auswendig und könne genau angeben, welche Worte in einer beliebigen Zeile auf einer beliebigen Seite eines Buches stehen.

Um das zu beweisen, legt er drei Bücher auf den Tisch, z. B. links „Pause für Wanzka" von *Alfred Wellm*, in der Mitte „Die Aula" von *Hermann Kant*, rechts „Das Klassentreffen" von *Wolfgang Joho*. Nun bittet er drei Zuschauer, nach vorn zu kommen. Der erste Zuschauer soll ein Buch auswählen. Er wählt z. B. das Buch von *Hermann Kant*.

Nun bittet er jeden der drei Zuschauer, eine der Ziffern von 1 bis 9 zu wählen; diese drei Ziffern sollen aber voneinander verschieden sein. Aus diesen Ziffern soll eine sechsstellige Zahl gebildet werden, wobei zunächst die drei gewählten Ziffern genannt und dann noch einmal wiederholt werden, z. B.

547 547.

Er bittet jetzt, die ersten drei Ziffern und auch die letzten drei Ziffern in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben, so daß die Zahl

745 745

entsteht. Ein Zuschauer wird gebeten, die kleinere der beiden sechsstelligen Zahlen von der größeren zu subtrahieren und das Ergebnis anzugeben z. B.

198 198.

Von dieser Zahl ist die Quersumme zu bilden, und es ist die Ziffer 1 vor die Quersumme zu setzen. Die von den Zuschauern bestimmte Seitenzahl ist also

136.

Die Zeile ist so zu bestimmen, daß die Quersumme der aus den ersten drei Ziffern der obigen Differenz gebildeten Zahl genommen wird, also

Zeile 18. Nun sagt der Zauberkünstler:

„Auf Seite 136 stehen in der Zeile 18 die folgenden Worte: *„Das war wohl nicht eingeplant", sagte er dabei, ...".*

Die drei Zuschauer schlagen das Buch von *Hermann Kant* auf, vergleichen und stellen zu ihrem größten Erstaunen fest, daß der Zauberkünstler die von ihnen gewählte Zeile richtig zitiert hat. Das vorliegende Kunststück ist in Anlehnung an einen ähnlichen Trick aus dem Werk „Das große Buch der Magie" von *Jochen Zmeck*, Berlin: Henschelverlag 1968, gestaltet worden. In diesem Buch finden wir noch viele weitere Kunststücke, die auf elementaren mathematischen Prinzipien beruhen.

Wer kann diesen Trick erklären? Was mußte der Zauberkünstler auswendig lernen?

OStR Dr. R. Lüders, Berlin

Nächtlicher Spuk

„... Plötzlich werde ich wach und ertaste den Knopf der Nachttischlampe. In Sekundenschnelle ist es hell. Doch gleich darauf geht das Licht aus. Endlich finde ich den Knopf der Lampe wieder. Nichts! Es bleibt dunkel. Fast verzweifelt suche ich meine unverwüstliche Taschenlampe. Erst gestern habe ich sie benutzt. Ich taste sogar mit dem Zeh nach ihr und reiße mir dabei einen Splitter ein. ..."

Im vorliegenden Text verbergen sich mehrere Zahlwörter. Wie lauten sie? Zur Kontrolle sei angegeben, daß die Summe der Zahlen, die sie darstellen, 1151 beträgt.

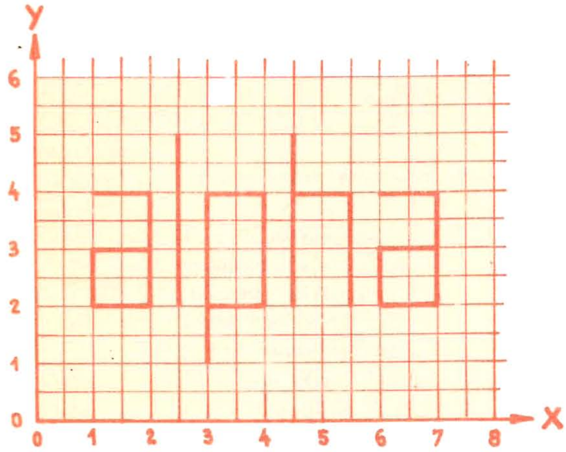
OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

„Bei der Figur ist ein dreifacher Salto kein Kunststück!"

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

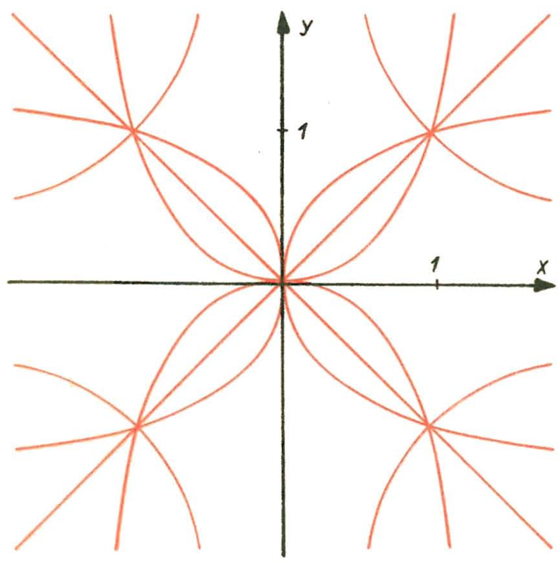
Ein Kunstwerk

Angeregt durch das „Kunstwerk“ aus 1/69, S. 14 schlugen (unabhängig voneinander) *Monika Simon*, EOS „Erich Weinert“ (Kl. 10), Flöha und Ing. *H. Decker*, Köln vor: Nenne alle Funktionsgleichungen und Definitionsbereiche!



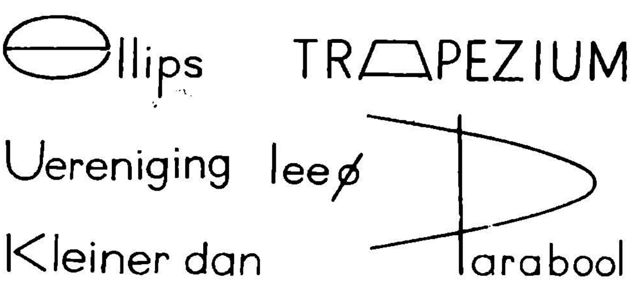
Spieglein, Spieglein ...

Welche 5 Funktionen und ihre 5 Spiegelungen an der Abszisse wurden in der Zeichnung dargestellt? Nenne die 10 Funktionsgleichungen!



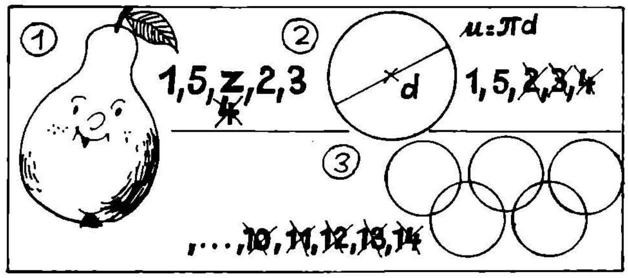
Wolfgang Riedel, EOS „Friedrich Engels“ (Kl. 10), Karl-Marx-Stadt

Mathemadics



aus Pythagoras 6-68/69, Niederlande

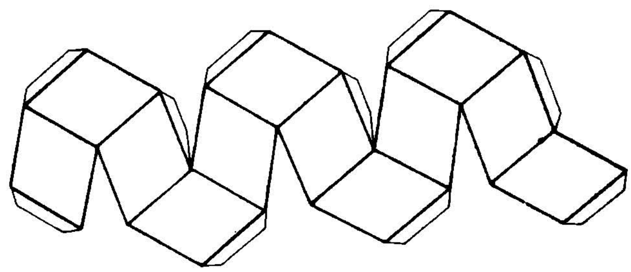
Bilderrätsel



Ekkehard Paditz, Kl. 8 OS Lommatzsch

Magischer Dodekaeder

Unser Leser, Mathematikfachlehrer *Fritz Sandring*, Stendal, empfiehlt: Erst abpausen, dann kleben, dann knobeln! Verteile die Zahlen 1 bis 14 so auf die Ecken des Rhombendodekaeders, daß die Summe der Zahlen jeder Fläche 30 und die Summe der Zahlen je zwei im Dodekaeder gegenüberliegender Ecken gleich 15 ist!



Heinz: „Guten Tag, Weihnachtsmann!“
Fritz: „Psssst, das ist doch der Briefzusteller, welcher die Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb bringt. Im Sack hat er bestimmt auch einen Stoß neuer Ideen für 1970!“

Mit dieser Vignette wünscht *alpha* allen Lesern ein frohes 1970

Mathematik-Kalender

Januar 1970

Do 1 * 1667 Johann Bernoulli, wirkte in Genf, Paris, Groningen und Basel († 1728 in Basel)
Fr 2
Sa 3 * 1643 Sir Isaac Newton, geb. in Lincolnshire († 1727)

So 4
Mo 5
Di 6 † 1918 Georg Cantor, wirkte in Halle (* 3. 3. 1845)
* 1655 Jacob Bernoulli († 1705)
Mi 7
Do 8 * 1564 Galileo Galilei, wirkte in Pisa und Florenz († 1642)
Fr 9
Sa 10 * 1752 Marie Adrien Legendre, wirkte in Paris († 1833)

So 11
Mo 12 * 1601 Pierre de Fermat, wirkte in Toulouse († 1665)
Di 13
Mi 14 * 1876 Erhard Schmidt, wirkte in Berlin († 6. 12. 1959)
Do 15 * 1850 Sofja Wassiljewna Kowalewskaja, wirkte in Berlin, Stockholm, Petersburg, Moskau († 10. 2. 1891)
Fr 16
Sa 17

So 18
Mo 19
Di 20
Mi 21
Do 22
Fr 23 * 1862 David Hilbert, wirkte in Königsberg und Göttingen († 14. 2. 1943)
Sa 24

So 25 * 1736 Joseph Louis Lagrange, lehrte an der Artillerieschule in Turin, später ging er nach Berlin und Paris († 1813)
Mo 26 * 1561 Henry Briggs, wirkte in Oxford († 1613), schlägt die Berechnung dekadischer Logarithmen vor (1615)
Di 27
Mi 28
Do 29
Fr 30
Sa 31 * 1552 Jobst Bürgi, wirkte seit 1579 als Hofuhrmacher in Kassel, dazwischen 1603 bis 1622 in Prag, bedient sich der dezimalen Bruchschreibweise, benutzt allg. Potenzbezeichnungen († 1632)

Februar 1970

So 1
Mo 2 † 1950 Constantin Carathéodory, wirkte in Göttingen, Berlin, Smyrna, Athen und München (* 13. 9. 1873)
Di 3 * 1522 Ludvico Ferrari, war Cardanons Schüler († 1565)
Mi 4
Do 5
Fr 6
Sa 7 Bezirksolympiade Junger Mathematiker

So 8 Bezirksolympiade Junger Mathematiker
† 1957 John von Neumann, wirkte in Berlin, Hamburg, Princeton und Los Alamos (* 28. 12. 1903)
Mo 9 Beginn der Winterferien
Beginn der Tagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Berlin
* 1775 Wolfgang Bolyai, wirkte in Marosvásárhely (Ungarn) († 20. 11. 1856)
Di 10 † 1891 Sofja Wassiljewna Kowalewskaja (* 15. 1. 1850)
Mi 11 * 1596 René Descartes († 1650)
Do 12 † 1916 Richard Dedekind, wirkte in Göttingen und Braunschweig (* 6. 10. 1831)
Fr 13
Sa 14 Ende der Tagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR
† 1943 David Hilbert (* 23. 1. 1862)

So 15 * 1564 Galileo Galilei († 1642)
Mo 16
Di 17
Mi 18 † 1851 Carl Gustav Jacob Jacobi, wirkte in Königsberg und Berlin (* 10. 12. 1804)
† 1899 Sophus Lie, wirkte in Christiana und Leipzig (* 17. 12. 1842)
Do 19 † 1897 Karl Weierstraß, wirkte in Deutsch-Krone und Braunsberg als Oberschul- und ab 1856 in Berlin als Hochschullehrer (* 31. 10. 1815)
Fr 20
Sa 21

So 22
Mo 23 † 1855 Carl Friedrich Gauß, wirkte in Göttingen (* 30. 4. 1777)
Di 24
Mi 25
Do 26
Fr 27
Sa 28

Dieser Kalender wird bis Dezember 1970 fortgesetzt. Tragt eure AG-Nachmittage, Mathematik-Klassenarbeiten, Exkursionen, mathematischen Fachaufträge usf. ein!

URANIA UNIVERSUM

Band 15

1. Auflage 1969, 500 Seiten, 48 Farbtafeln, etwa 400 Abbildungen im Text, Ganzgewebe 15,— M.

● Auch in seinem 15. Band macht das traditionelle Jahrbuch seine Leser mit Neuem und Wissenswertem aus vielen Gebieten bekannt. Profilierte Autoren berichten über interessante Probleme der Naturwissenschaften und der Technik, der Wirtschaft, des Verkehrs und der Kultur. Ergänzt und abgerundet wird die Thematik durch Erzählungen und Reportagen aus dem Gebiet des Sports und der Unterhaltung sowie durch Berichte aus fremden Ländern. Selbstverständlich würdigt der Band 15 anläßlich des 20. Jahrestages der Deutschen Demokratischen Republik besonders die Erfolge unseres Staates beim Aufbau des en wickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus. Beiträge der Rubriken Naturwissenschaften, Technik, Kultur und Sport unterstützen dieses Anliegen, indem sie sich mit Wissenschaftsgebieten bzw. Disziplinen befassen, in denen die DDR besonders internationales Ansehen genießt.

Übergeben Sie die Bestellung bitte Ihrer Buchhandlung!

URANIA-VERLAG LEIPZIG · JENA · BERLIN Verlag für populärwissenschaftliche Literatur

Literatur

Gyula Mackássy

Zwei plus zwei gleich vier

Der Kinderbuchverlag 1969 · Aus dem Ungarischen übersetzt von Paul Karpati
Mit zahlreichen humorvollen Illustrationen · Etwa 40 Seiten
Pappband mit Folie · etwa 4,80 M
Für Leser von 8 Jahren an

„Zwei plus zwei gleich vier“ führt den jungen Leser durch mehrere Zehntausend Jahre Menschheitsgeschichte, in denen mit der Entwicklung der Kultur auch die Wissenschaft Mathematik geboren wurde. Die humorvollen Illustrationen in Verbindung mit einem knappen Text werden Freude und Interesse an der Mathematik wecken.

Ernöné Lucács

Wie groß, wie spät, wie weit?

Der Kinderbuchverlag 1969 · Aus dem Ungarischen übersetzt von Paul Karpati
Illustrationen von Pal Szücs
Etwa 40 Seiten · Pappband mit Folie
etwa 4,80 M · Für Leser von 8 Jahren an

Groß, klein, viel, wenig? Diese Wörter verwenden wir, wenn wir ausdrücken wollen, daß uns zum Beispiel der Sportplatz groß vorkommt, daß viele Zuschauer einem Spiel zusehen. Doch sagen wir einfach nur „groß“, dann weiß doch keiner genau, wie groß der Gegenstand nun eigentlich ist, den wir meinen.
Dieses Buch schildert frühgeschichtliche Versuche, zu messen und Maßstäbe zu finden, geht auf die Bedeutung des Meßwesens und seiner Vereinheitlichung ein. Auch Begriffe wie Tag, Stunde und Minute sowie das Messen von Wettererscheinungen stehen im Mittelpunkt der Betrachtungen.

Christa Johannsen

Leibniz
Roman seines Lebens

Union-Verlag, Berlin 1969
590 Seiten · mit 32 zeitgenössischen Stichen
13,80 M · Für Leser von 15 Jahren an

Der Roman über den großen deutschen Aufklärer *Gottfried Wilhelm Leibniz* schildert die Größe und die Tragik eines der schöpferischsten Menschen, die je gelebt haben. In diesem Werk begleiten wir Leibniz durch die Stationen seines Lebens. Vor dem farbigen Hintergrund der Epoche des Sonnenkönigs erleben wir die für Leibniz entscheidenden Begegnungen mit berühmten Zeitgenossen und erhalten einen umfassenden Einblick in das Denken und Wirken von Leibniz.

Deutsche Demokratische Republik
Statistisches Taschenbuch 1969
192 Seiten, zahlreiche Graphiken · 3,80 M

Statistisches Jahrbuch 1969
520 S., 88 S. Anhang, 19 S. Fachregister
25,— M
Staatsverlag der Deutschen Demokratischen Republik
Im statistischen Taschenbuch sowie im Statistischen Jahrbuch 1969 werden die ökonomischen Ergebnisse der DDR (1949 bis 1968) veröffentlicht. Aus Anlaß des 20. Jahrestages wurde der Tabellenteil wesentlich verstärkt. Aus dem Inhalt: Übersicht über Gebiet und Bevölkerung, Volkswirtschaftliche Übersichten, Industrie, Bauwirtschaft, Handwerk, Landwirtschaft und Nahrungsgüterwirtschaft, Verkehr, Binnenhandel, Außenwirtschaft, Finanzen, Arbeitseinkommen.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Übungen für Junge Mathematiker

Herausgegeben von Gerhard Kleinfeld

Teil 1: Zahlentheorie
159 S. mit 22 Abb. L7N. 1968 (Nr. 36)
Kartoniert 6,50 M

Teil 2: Elementargeometrie
Etwa 96 S. mit etwa 50 Abb. L7N. (Nr. 37)
Kartoniert etwa 4,50 M

Teil 3: Ungleichungen
Etwa 100 S. mit etwa 15 Abb. L7N. (Nr. 38)
Kartoniert etwa 5,00 M

Liebe Schüler!
Als wir vom Chefredakteur Eurer Zeitschrift, dem Verdienten Lehrer des Volkes, Herrn Studienrat *J. Lehmann*, gebeten wurden, über die Entstehung der oben angegebenen Bücher zu berichten, freute uns das sehr. Es entstand aber die Frage, wo dabei beginnen? Bei einer Rückschau auf die Entwicklung der Olympiaden Junger Mathematiker meinten wir, daß es Euch sicherlich interessieren wird, wie wir auf die Idee kamen, für Euch diese drei Aufgabensammlungen zusammenzustellen.
Als wir alle am 7. Oktober dieses Jahres den 20. Geburtstag unserer Republik feierten, feierten wir auch den 9. Geburtstag der Olympiaden Junger Mathematiker. Mitte 1960 wurde in Leipzig die erste Olympiade Junger Mathematiker (eine Stadtolympiade) durchgeführt, und seit dieser Zeit haben sich immer mehr Schüler der Mathematik verschrieben. Waren es in den ersten Jahren nur wenige, die sich auch außerhalb des Unterrichts mit mathematischen Problemen beschäftigten, so wuchs diese Zahl bis 1969 auf über eine Million Schüler an.
Seit dem Beginn der Olympiaden übernahmen wir neben unserer Arbeit als Lehrer oder als wissenschaftlicher Mitarbeiter die Leitung solcher mathematischer Zirkel, um Euch einerseits auf die Olympiaden Junger Mathematiker vorzubereiten, andererseits um Euch mit einigen Teilgebieten der Mathematik bekannt zu machen, die nicht Gegenstand des Schulstoffes waren, aber dazu dienten, das in der Schule Gelernte zu erweitern und zu vertiefen.
Nach dem 17. 12. 1962, dem Tag, an dem der Mathematikbeschluß verabschiedet wurde, setzte zusammen mit der Verbesserung und Präzisierung der Lehrpläne die verstärkte Förderung *Junger Mathematiker* an den Schulen und in den Kreisen ein. In den Zirkeln wurden mit den Schülern Aufgaben aus z. T. ausländischer Literatur (UdSSR, ČSSR, Ungarn und Rumänien) sowie Aufgaben aus unseren Olympiaden behandelt. Für viele von Euch und einige Zirkelleiter war es problematisch, geeignete Aufgaben zu bestimmten Gebieten der Mathematik zu finden, da dazu das sehr zeitaufwendige Nachsuchen in der mannigfaltigsten Literatur notwendig war.
Gewisse Typen von Aufgaben traten bei den Olympiaden immer sehr häufig auf und fanden bei Euch besonderes Interesse, zugleich bereiteten diese Aufgaben aber auch große Schwierigkeiten. Die Lösungen bzw. Lösungsversuche waren umständlich, oft wurden die Aufgaben durch Probieren zu lösen versucht.
Diese Mängel, die wir bei unserer Arbeit in den Zirkeln immer wieder feststellen mußten, ließ in uns den Gedanken reifen, die von uns zur Vorbereitung auf die Bezirksolympiaden oder DDR-Olympiaden behandelten Aufgaben zu sammeln und nach Gebieten und Schwierigkeitsgrad geordnet zusammenzustellen.
Unser Anliegen, diese Aufgaben in drei Büchern für die Gebiete *Zahlentheorie, Geometrie* und *Ungleichungen* allen Schülern zugänglich zu machen, wurde vom Verlag B. G. Teubner in dankenswerter Weise unterstützt und ermöglicht. Diese drei Aufgabensammlungen erheben nicht den Anspruch, den Charakter von Lehrbüchern zu besitzen. Ihr sollt vielmehr mit Aufgaben aus diesen genannten Gebieten vertraut gemacht werden und bei der selbständigen Erarbeitung der Lösungen sowohl gewisse Fertigkeiten zu erreichen suchen als auch Eure Kenntnisse zu vertiefen und zu erweitern. Dabei dienen die ersten Aufgaben der jeweiligen Kapitel dazu, sich mit der Problematik vertraut zu machen. Durch den stetig anwachsenden Schwierigkeitsgrad wird Euch ein allmähliches Eindringen in das Gebiet ermöglicht.
Die Einleitungen verfolgen sowohl den Zweck, gewisse erforderliche Sätze und Begriffe bereitzustellen als auch den, diese oder jene beim Lösen aufgetretene Fragen klären zu helfen.
Allen Lesern von *alpha* wünschen wir weiterhin viel Freude bei der Beschäftigung mit mathematischen Aufgaben und Problemen.
Wir hoffen, daß unsere Aufgabensammlungen Freunde finden mögen und Anregungen vermitteln, sich mit weiteren Gebieten der Mathematik zu beschäftigen. Für Vorschläge und Hinweise sind wir jederzeit dankbar, und wir würden uns freuen, wenn Ihr uns Eure Meinung über diese drei Büchlein mitteilen würdet.

E. Lehmann
Dr. Günter Grosche
G. Kleinfeld

Eberhard Lehmann
Mathematikfachlehrer, BBS Wohnungsbaukombinat Rostock

Dr. rer. nat. Günter Grosche
Dozent für Mathematische Kybernetik und Rechentechnik an der Karl-Marx-Universität Leipzig

Gerhard Kleinfeld
Päd. Mitarbeiter für Mathematik beim Bezirkskab. f. außerunterrichtliche Tätigkeit beim Rat des Bezirks Leipzig